

Estimation de la vitesse de retour à l'équilibre dans les équations de Fokker-Planck

Mamadou Ndao

▶ **To cite this version:**

Mamadou Ndao. Estimation de la vitesse de retour à l'équilibre dans les équations de Fokker-Planck. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLV036 . tel-01910817

HAL Id: tel-01910817
https://theses.hal.science/tel-01910817

Submitted on 2 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université PARIS-SACLAY

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN-EN-YVELINES
université PARIS-SACLAY

NNT : 2018SACLV036

Estimation de la vitesse de retour à l'équilibre dans les équations de Fokker-Planck

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Ecole doctorale n°ED574 École doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques et applications

Thèse présentée et soutenue à Versailles, le 18 juillet 2018, par

MAMADOU NDAO

Composition du Jury :

Thierry Horsin Professeur,CNAM Paris	Président
Mohamed Ali Jendoubi Professeur,Université de Carthage	Rapporteur
Miguel Escobedo Martinez Professeur, Université du Pays Basque Bilbao	Rapporteur
Émanuelle Crépeau Maître de conférence,UVSQ	Examinateur
Otared Kavian Professeur,UVSQ	Directeur de thèse
Stéphane Mischler Professeur,Université Paris Dauphine	Co-directeur de thèse
Daniela Tonon Maître de conférence (HDR), Université Paris Dauphine	Examinateur

Thèse de doctorat

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Estimation de la vitesse de retour à l'équilibre dans les équations de Fokker-Planck

Mots clés : Fokker-Planck, Semi-groupe,Existence Locale et Globale, équations des milieux Granulaires, Théorème de Point fixe, stabilité asymptotique, Taux de convergence

Résumé : Ce mémoire de thèse est consacré à l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t\, f = \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}\, f).$$

Il est subdivisé en deux parties:une partie linéaire et une partie non linéaire. Dans la partie linéaire on considère un champ de vecteur $\mathbf{E}(x)$ dépendant seulement de x. Cette partie est constituée des chapitres 3, 4 et 5. Dans le chapitre 3 on montre que l'opérateur linéaire $Lf := \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}\, f)$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(S_L(t))_{t\geq 0}$ dans tous les espaces $L^p(R^d)$. On y établit également que le semi-groupe $(S_L(t))_{t\geq 0}$ est positif et ultracontractif. Dans le chapitre 4 nous montrons comment est ce qu'une décomposition adéquate de l'opérateur L permet d'établir certaines propriétés du semi-groupe $(S_L(t))_{t\geq 0}$ notamment sa bornitude. Le chapitre 5 est consacré à l'existence d'un état d'équilibre. De plus on y montre que cet état d'équilibre est asymptotiquement stable. Dans la partie non linéaire on considère un champ de vecteur de la forme $\mathbf{E}(x, f) := x + \nabla(a * f)$ ou a et f sont des fonctions assez régulières et $*$ est l'opérateur de convolution. Cette parties est contituée des chapitre 6 et 7. Dans le chapitre 6 nous établissons que pour

$$a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(R^d)$$

l'équation de Fokker-Planck non linéaire admet une unique solution locale dans l'espace $L^2_{K_\alpha}$. Dans le dernier chapitre nous montrons que le problème non linéaire admet une solution globale. De plus cette solution dépend continument de la donnée initiale f_0 et du champ de vecteur a.

Title : Estimate of the rate of return to equilibrium in Fokker-Planck's equation.

Keywords : Fokker-Planck equation, Semigroups, Local and Global Existence, Granular media Equation,Fixed point Theorem, Asymptotical Stability, Rate of Convergence.

Abstract : This thesis is devoted to the Fokker-Planck equation

$$\partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}\, f).$$

It is divided into two parts. The first part deals with the linear problem. In this part we consider a vector field $\mathbf{E}(x)$ depending only on x. It is composed of chapters 3, 4 and 5. In chapter 3 we prove that the linear operator $Lf := \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}f)$ is an infinitesimal generator of a strong continuous semigroup $(S_L(t))_{t\geq 0}$. We establish also that $(S_L(t))_{t\geq 0}$ is positive and ultracontractive. In chapter 4 we show how an adequate decomposition of the linear operator L allows us to deduce interesting properties for the semigroup $(S_L(t))_{t\geq 0}$. Indeed using this decomposition we prove that $(S_L(t))_{t\geq 0}$ is a bounded semigroup. In the last chapter of this part we establish that the linear Fokker-Planck admits a unique steady state. Moreover this stationary solution is asymptotically stable.
In the nonlinear part we consider a vector field of the form $\mathbf{E}(x, f) := x+\nabla(a*f)$, where a and f are regular functions. It is composed of two chapters. In chapter 6 we establish that for

$$a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}$$

the nonlinear problem has a unique local solution in $L^2_{K_\alpha}$. To end this part we prove in chapter 7 that the nonlinear problem has a unique global solution in L^2_k. This solution depends continuously on the initial data f_0 and the vector field a.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France

Remerciements

Je tiens à remercier Messieurs Otared Kavian et Stéphane Mischler d'avoir accepté d'être mes encadreurs et de bien vouloir guider mes premiers pas dans le monde de la recherche. Ils m'ont guidé durant ces quatre années et m'ont consacré beaucoup de leur précieux temps. Je leur témoigne toute ma reconnaissance. Ils ont été disponibles à tout moment pour me donner les réponses et les conseils appropriés.

C'est aussi le moment de saluer le rôle ô combien important joué par Madame Catherine Donati-Martin pour l'obtention de la bourse au près de la FMJH.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de Versailles. Plus particulièrement toute l'équipe d'EDP. Je remercie particulièrement madame Christine Poirier, Messieurs Philippe Cieutat, Tahar Boulmezaoud et Vahagn Nersesyan pour tous les précieux conseils et encouragements qu'ils m'ont prodigués. Je remercie aussi tous les doctorants du Labo.

Je remercie spécialement Mesdames Lilliane Roger, Nadège Arnaud et Laure Frerejean pour leur disponibilité. Elles ont répondu à toutes mes sollicitations avec courtoisie.

Je remercie Monsieur Miguel Escobedo Martínez pour l'honneur qu'il m' a fait d'être l'un des rapporteurs de ma thèse.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Mohamed Ali Jendoubi d'avoir bien voulu être à la fois rapporteur et membre de mon jury de thèse. Cette marque d'estime me touche beaucoup.

Je témoigne aussi ma grande considération aux autres membres du jury à savoir Mesdames Daniela Tonon, Emmanuelle Crépeau et Monsieur Thierry Horsin.

Cette thèse a bénéficié d'un financement de la FMJH. C'est donc le lieu de saluer le travail remarquable que fait la FMJH pour la promotion, la diffusion et la vulgarisation des Mathématiques.

Je remercie toute ma famille.

Je ne saurai terminer sans rendre un hommage très appuyé à Otared qui a été plus qu'un directeur de thèse pour moi il est devenu au fil de notre collaboration un modèle et une référence pour moi. C'est un modèle de générosité et d'intégrité. Auprès de lui j'ai découvert que les mathématiques n'étaient pas seulement une succession de formules, mais qu'il y'avait de la vie derrière. Pour cela il faut y mettre de l'humilité et de la modestie.

Je voudrai aussi rendre hommage à ces deux personnes qui ont beaucoup œuvré pour que nous soyons allés à l'école. Il s'agit de Feu Diouldé Lô et de mon oncle Abdou Ndao. Je leur rends cet hommage mérité et leur dédie cette thèse.

Table des matières

1 Introduction et résultats principaux **1**

2 Notations et outils de base **9**
2.1 Espaces de Lebesgue à poids 9
2.2 Semi-groupes continus 16
2.3 Décompostion de semi-groupes 21

I Équation de Fokker-Planck linéaire **27**

3 Le semi-groupe $S_L(t)$ et ses propriétés **29**
3.1 Le semi-groupe $S_L(t)$ 30
3.2 Positivité du semi-groupe $S_L(t)$ 34
3.3 Existence dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ 38
3.4 Existence dans L^p_k avec $1 < p < \infty$ 41
3.5 Ultracontractivité de $(S_L(t))_{t\geq 0}$ 45

4 Décomposition du semi-groupe $S_L(t)$ **49**
4.1 Choix de la décomposition 49
4.2 Ultracontractivité de $S_A(t)$ 55
4.3 Le semi-groupe $S_L(t)$ est borné 56

5 Existence d'un état d'équilibre et convergence **61**
5.1 Solution Stationnaire 61
5.2 Convergence vers l'équilibre 64

II L'équation de Fokker-Planck non linéaire **69**

6 Local Existence in $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ for Granular media Equation with a General Force Field **73**
6.1 Analytic Semigroup $(S_{\mathcal{L}}(t))_{t\geq 0}$ in $L^2_{K_\alpha}$ 74
6.2 Local Existence in $L^2_{K_\alpha}$ 79

7 Global Existence for Nonlinear Fokker–Planck Equation with a General Force Field $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ **83**
7.1 Local Existence in $L^2_{K_\alpha}$ 85

7.2 Local Existence in L^2_k 87
7.3 Global solution 94
7.4 Continuous Dependance on the Vector field 96

III Article à soumettre **101**

Chapitre 1

Introduction et résultats principaux

Dans ce mémoire de thèse nous nous intéressons à la résolution d'une famille d'équations d'évolution paraboliques dans l'espace $\mathbb{R}^d$, avec un entier $d \geq 1$, connues dans la littérature sous le nom de Fokker–Planck, et qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}(x)\, f) \\ f(0,x) = f_0(x). \end{cases} \tag{1.0.1}$$

Ici Δ représente le laplacien classique de $\mathbb{R}^d$, et $\mathbf{E} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs fixé : dans un premier temps il s'agit donc d'une équation linéaire. Nous souhaitons étudier l'existence, l'unicité, et le comportement en temps de la solution de (1.0.1) sous diverses hypothèses de croissance sur $\mathbf{E}$, et dans divers espaces fonctionnels où la donnée initiale f_0 est supposée être. En particulier nous souhaitons prouver l'existence d'une solution positive stationnaire G et la convergence de la solution $f(t,\cdot)$ vers G, lorsque la donnée initiale est positive et le temps t tend vers l'infini. Une question importante est celle d'obtenir un taux de convergence vers l'équilibre, de la manière la plus précise en fonction des normes des espaces dans lesquels on peut prouver la convergence.

Dans un second temps nous aborderons une version non-linéaire de l'équation de Fokker–Planck où on suppose que le champ de vecteurs $\mathbf{E}$ dépend également de f, de manière locale ou non locale. Pour ce cas, les questions étudiées sont celles de l'unicité, de l'existence locale, ou globale, en temps. La question de l'existence d'un état stationnaire et celle de la convergence vers un équilibre sont quelque peu plus difficiles à obtenir, sauf dans des cas très particuliers.

Dans un premier temps considérons un champ de vecteurs $\mathbf{E}$ du type

$$\mathbf{E}(x) := \nabla\varphi(x) + \mathbf{E}_0(x), \tag{1.0.2}$$

où on suppose que la fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et le champ de vecteurs $\mathbf{E}_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ vérifient

$$\operatorname{div}\left(\mathrm{e}^{-\varphi(x)}\mathbf{E}_0(x)\right) = 0 \qquad \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.0.3}$$

On voit alors que pour tout $c_0 \in \mathbb{R}$, la fonction positive G définie par

$$G(x) := \mathrm{e}^{-\varphi(x)+c_0} \quad \text{vérifie} \quad \Delta G + \mathrm{div}(G\mathbf{E}) = 0, \tag{1.0.4}$$

et pourvu que, par exemple, $\varphi(x)$ tende vers $+\infty$ suffisamment vite lorsque $|x| \to +\infty$, on peut aussi avoir $G \in L^1(\mathbb{R}^d)$, de sorte que l'on peut choisir $c_0 \in \mathbb{R}$ pour que

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x)dx = 1.$$

En désignant par $M(g)$ la moyenne d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire

$$M(g) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx,$$

et par $L^2_k(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Lebesgue à poids

$$L^2_k(\mathbb{R}^d) := \left\{ g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \int_{\mathbb{R}^d} g(x)^2(1+|x|^2)^k dx < \infty \right\},$$

moyennant des hyposthèses adéquates de croissance sur la fonction φ, M. P. Gualdani, S. Mischler et C. Mouhot [17] prouvent que si $k > k_0 > 0$ (où k_0 dépend de d et du comportement à l'infini de φ), l'on peut trouver deux réels $a > 0$ et $C > 0$ tels que si la donnée initiale f_0 du problème (1.0.1) est dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2_k(\mathbb{R}^d)$, pour tout $t \geq 0$ on ait

$$\|f(t) - M(f_0)G\|_{L^2_k} \leq C\,\mathrm{e}^{-a\,t}\|f_0 - M(f_0)G\|_{L^2_k}. \tag{1.0.5}$$

Un exemple typique d'une telle situation est lorsque $\mathbf{E}_0 \equiv 0$ et

$$\varphi(x) := \frac{1}{\gamma}|x|^\gamma, \qquad \mathbf{E}(x) = |x|^{\gamma-2}x,$$

avec $k_0 := (\gamma + d - 2)/2$ et $\gamma \geq 2$. En réalité dans [17] les auteurs prouvent la convergence vers l'équilibre pour tout $\gamma \geq 1$, mais alors les espaces de fonctions, et le taux de convergence, doivent être adaptés.

Au chapitre 3 nous nous intéressons à la situation où la force de confinement, c'est-à-dire le champ de vecteurs $\mathbf{E}$, ne satisfait pas les conditions très particulières (1.0.2)–(1.0.3), mais vérifie simplement une condition de croissance à l'infini. Dans ce cas on ne dispose plus d'une solution stationnaire explicitement déterminée comme dans (1.0.4), et il sera nécessaire de prouver son existence. Nous montrerons que cela est le cas, et nous établirons un taux, presque optimal, de convergence vers l'équilibre de la solution de (1.0.1).

De manière plus précise, nous considérons un champ de vecteur $\mathbf{E}$ qui ne dérive plus d'un potentiel, mais qui vérifie des hypothèses de croissance du type suivant :

(H1) Le champ de forces $\mathbf{E} \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, et β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$ et $1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\alpha_1|x|^{\gamma_1} + \beta_1 \leq x \cdot \mathbf{E} \leq \alpha_2|x|^{\gamma_2} + \beta_2. \tag{1.0.6}$$

(H2) Il existe un réel $k_0 > d$, et une constante $R_0 > 0$ tels que

$$\beta_0 := \inf_{|x|\geq R_0} \left[-\mathrm{div}(\mathbf{E}) + k_0 \frac{x}{1+|x|^2} \cdot \mathbf{E} \right] > -\infty. \tag{1.0.7}$$

Dans ces conditions nous pouvons établir le théorème suivant qui généralise le résultat cité précédemment.

Théorème 1.0.1. *Supposons que* (1.0.6) *et* (1.0.7) *(c'est-à-dire les hypothèses (H1)-(H2)) soient vérifiées. Alors le problème* (1.0.1) *admet une unique solution stationnaire $G > 0$ appartenant à $L^2_k(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k \geq k_0$. De plus, si $k \geq k_0$ et $f_0 \in L^2_k(\mathbb{R}^d)$, alors l'équation* (1.0.1) *admet une solution unique $f \in C([0,\infty), L^2_k(\mathbb{R}^d))$, et on peut trouver deux constantes strictement positives C et ω_1 dépendant uniquement de $\boldsymbol{E}$ telles que pour tout $t \geq 0$ on ait*

$$\|f(t) - M(f_0)\, G\|_{L^2_k(\mathbb{R}^d)} \leq C\, \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \|f_0 - M(f_0)\, G\|_{L^2_k(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.0.8}$$

En réalité, dans la suite de ce mémoire nous établirons des résultats analogues dans des espaces $L^p_k(\mathbb{R}^d)$.

Pour la preuve de l'existence d'une solution stationnaire positive, nous utiliserons un résultat de S. Mischler et J. Scher [22, Theorem 4.3], qui est une généralisation du théorème classique de Krein–Rutman dans le cadre d'un opérateur elliptique à résolvante non compacte du type $f \mapsto Lf := \Delta f + \mathrm{div}(f\mathbf{E})$.

Pour prouver l'existence de l'état stationnaire, mais aussi pour la convergence asymptotique vers l'équilibre, nous utilisons l'approche employée notamment par C. Mouhot [23], C. Mouhot & S. Mischler [21] et S. Mischler & J. Scher [22] : étant donné l'opérateur linéaire $(L, D(L))$ on le décompose sous la forme $L := A + B$ où B est un opérateur borné et A un opérateur linéaire choisi de telle manière que le semi-groupe qu'il engendre soit à décroissance exponentielle. Ensuite, en utilisant une formule de Picard généralisée (voir par exemple S. Mischler & J. Scher [22, paragraphe 1.1]), on prouve d'abord que le semi-groupe engendré par L est borné ce qui nous permettra de prouver l'existence d'un état stationnaire (voir partie I).

Une fois que l'existence d'un état stationnaire est prouvée, nous utiliserons un résultat d'analyse spectrale, et la décomposition mentionnée ci-dessus, pour montrer qu'il y a un « trou spectral » pour l'opérateur L défini par $Lf := \Delta f + \mathrm{div}(f\mathbf{E})$, c'est-à-dire qu'il existe $\omega_* > 0$ tel que $\sigma(L) \setminus \{0\}$, le spectre de L privé de zéro, soit contenu dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) \leq -\omega_*\}$. Puis, en utilisant de nouveau une décompostion de l'opérateur L sous la forme $L = A + B$, avec B borné, on prouvera le résultat de convergence d'une solution positive vers un état stationnaire.

Après avoir étudié l'équation de Fokker–Planck linéaire, nous aborderons le problème non-linéaire, c'est-à-dire des problèmes du type

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f + \mathrm{div}(\mathbf{E}(x,f)\, f) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases} \tag{1.0.9}$$

où le champ de forces $\mathbf{E}$ dépend de f.

Dans cette équation, qui modélise notamment des phénomènes de diffusion, de confinement et d'agrégation de particules, on suppose que le champ de forces $\mathbf{E}(x, f)$ dépend de la densité de particules, souvent de manière non locale. Le phénomène de diffusion permet aux particules de se répartir dans l'espace, et ainsi d'éviter des concentrations autour de certains points (ce qui d'un point de vue mathématique conduirait à la création de singularités). D'un autre côté, en s'opposant à la dispersion des particules dans l'espace, le phénomène de confinement tend à agglomérer, ou agréger, les particules, et ainsi créer, éventuellement des singularités de la fonction de densité f, en un instant $T_* > 0$. Cette force de confinement dépendant de la densité f, en général il n'est pas évident qu'une solution de (1.0.9) soit globale en temps, dans un espace fonctionnel suffisamment intéressant pour les modèles étudiés, et notre étude constitue un apport à cet égard.

Afin de situer notre étude dans le cadre de la littérature existante, commençons par rappeler que D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo & M. Pulvirenti [5] ont considéré l'équation parabolique non-linéaire en dimension 1,

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_x \big[(\lambda F(x,f) - \beta x)\ f \big] &= \sigma \partial_{xx} f \qquad \text{dans } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ f(0,x) &= f_0(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.0.10}$$

où la fonction $F(x, f)$ est obtenue par convolution de f avec un noyau positif φ. Plus exactement, l'opérateur $g \mapsto F(\cdot, g)$ est défini par

$$F(x,g) := -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y) g(y) dy = \varphi * g(x).$$

Dans l'équation (1.0.10) on suppose que $\lambda \geq 0$, et $\sigma > 0$ sont des paramètres fixés, et dans l'article [5] le noyau $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ intervenant dans la définition de F est supposé être

$$\varphi(x) := |x| x = x^2 \mathrm{sgn}(x). \tag{1.0.11}$$

En remarquant que si on pose $U(s) := s\log(s)$ pour $s > 0$, alors $\partial_x f = f\partial_x U'(f) = f\partial_x (1 + \log(f))$, on peut vérifier que l'équation (1.0.10) peut s'écrire

$$\begin{cases} \partial_t f &= \partial_x \Big[f \big(\sigma \partial_x (1 + \log(f)) + \lambda \varphi * f + \beta x \big) \Big] \qquad \text{dans } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ f(0,x) &= f_0(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.0.12}$$

On introduit l'ensemble $\mathcal{P}$ défini par :

$$\mathcal{P} := \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R})\ ;\ f \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} f\, dx = 1,\ \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = 0 \Big\}.$$

On considère ensuite la fonctionnelle « d'énergie libre » $\mathcal{E}$ définie pour $f \in \mathcal{P}$ par

$$\mathcal{E}(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\log(f(x)) dx + \frac{1}{6\,\sigma} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x-y|^3\, f(x)\, f(y) dx dy + \frac{\beta}{2\,\sigma} \int |x|^2\, f(x) dx.$$

L'intérêt de cette fonctionnelle est que (du moins formellement) on a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(f(t)) \leq 0,$$

si $f(t)$ est une solution suffisamment régulière de l'équation (1.0.10), c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est une fonction de Lyapounov.

Il est prouvé dans [5], de manière un peu formelle, que le minimum de $\mathcal{E}(f)$, pour les éléments $f \in \mathcal{P}$ tels qu'en plus $\mathcal{E}(f) < \infty$, est atteint en un point unique $f_\infty \in \mathcal{P}$, qui satisfait, en désignant par $\Phi(x) := |x|^3/3$ la primitive de $\varphi(x) := |x|x$,

$$\sigma(1 + \log(f_\infty)) + \lambda\Phi * f_\infty + \frac{\beta}{2}x^2 = \text{Constante}.$$

D'où on déduit, grâce à l'écriture de l'équation sous la forme (1.0.10) que f_∞ est également un état stationnaire de (1.0.10), c'est-à-dire

$$\partial_x\big[\,(\lambda\, F(x, f_\infty) - \beta\, x)\ f_\infty\big] = \sigma\partial_{xx} f_\infty \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Ils prouvent ensuite que si la donnée initiale positive $f_0 \in \mathcal{P} \cap \mathscr{C}^2$, et en plus

$$\mathcal{E}(f_0) < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} x^4 f_0(x)\, dx < \infty,$$

alors la solution $f(t)$ du problème d'évolution (1.0.10) associée à f_0, converge vers f_∞ lorsque $t \to \infty$, plus précisément

$$\lim_{t\to+\infty} \|f(t) - f_\infty\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Cependant les auteurs ne donnent pas de taux explicite de convergence vers l'état d'équilibre.

En dimensions supérieures à un, nous devons citer les résultats de J.A. Carrillo, R.J. McCann et C. Villani [7] qui sont une extension de [5]. Cette étude porte sur l'équation suivante

$$\begin{cases} \partial_t f &= \operatorname{div}\big[f\,\nabla\big(U'(f) + V + W * f\big)\big] & \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \\ f(0,x) &= f_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.0.13}$$

où $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un potentiel fixé, et $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un noyau de convolution. Un exemple typique de U est donné par

$$U(s) := \sigma\, s \log(s) \quad \text{pour } s > 0, \text{ et un réel } \sigma > 0 \text{ fixé}.$$

Pour ce choix particulier de U, l'équation (1.0.13) prend la forme

$$\begin{cases} \partial_t f &= \operatorname{div}\Big(\sigma\nabla f + f\nabla V + f(\nabla W * f)\Big) & \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \\ f(0,x) &= f_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.0.14}$$

On reconnaît naturellement là que la partie linéaire de l'équation, c'est-à-dire lorsque $W := 0$, correspond à l'opérateur linéaire de Fokker–Planck mentionné dans notre étude précédente avec $\mathbf{E} := \nabla V$. On notera aussi que l'équation (1.0.10) correspond au cas de la dimension $d = 1$ et

$$U(s) := \sigma\, s\, \log(s), \qquad W(x) := \frac{\lambda}{3}|x|^3, \qquad V(x) := \frac{\beta}{2}x^2.$$

Pour l'équation (1.0.13) il existe aussi une « fonctionnelle d'énergie libre » qui est donnée par

$$\mathcal{E}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} U(f)\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\, f(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} W(x-y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy.$$

De fait, du moins pour une solution $f(t)$ suffisamment régulière de (1.0.13) qui a une « énergie libre » finie, on peut voir que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(f(t)) = -\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\nabla\Big(U'(f(t,x)) + V(x) + (W * f(t,\cdot))(x)\Big)\Big|^2 f(t,x)\, dx.$$

Cela signifie que la fonctionnelle $\mathcal{E}$ fournit une fonction de Lyapounov pour l'équation (1.0.13). Par ailleurs, comme l'a prouvé R.J. McCann [20] pour certaines classes de fonctions U, V, W, la fonctionnelle $\mathcal{E}$ atteint son minimum sur l'ensemble des fonctions $f \geq 0$ telles que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 1$, en un point f_∞ et il est ainsi naturel de se demander si une solution globale et suffisamment régulière de (1.0.13) converge vers f_∞ et, si cela est le cas, on peut s'intéresser à en trouver la vitesse de convergence.

Pour mesurer l'écart entre deux solutions de (1.0.13) on introduit une fonctionnelle $\mathcal{E}_*$, « fonctionnelle d'entropie relative de f par rapport à f_∞ », définie par :

$$\mathcal{E}_*\big(f|f_\infty\big) := \mathcal{E}(f) - \mathcal{E}(f_\infty),$$

pour une fonction positive f. Ainsi on dira qu'une solution f tend vers f_∞ si la quantité $\mathcal{E}_*(f|f_\infty) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

En considérant différentes classes de fonctions U, V, W, en particulier avec des conditions de convexité sur V, W, les auteurs montrent dans [7], que si une solution globale en temps et positive $f(t)$ de (1.0.13) est donnée, alors on a une décroissance exponentielle vers zéro de l'entropie relative $\mathcal{E}_*(f(t)|f_\infty)$ lorsque $t \to \infty$. Une fois que cette décroissance est établie, dans certains cas on peut aussi en déduire que $\|f(t) - f_\infty\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Dans les articles [4] et [7], et ceux d'autres auteurs qui les ont suivis, la question de l'existence globale des solutions n'est pas abordée, car on s'y intéresse à la question de la stabilisation : supposant que des solutions globales suffisamment régulières existent, on en prouve la convergence vers un état stationnaire. Dans le prolongement des deux travaux dont nous venons de citer les résultats, nous étudions la question de l'existence de solutions globales dans des espaces de Lebesgue à poids. Ainsi, nous considérons dans un premier temps le cas où la fonction d'entropie U et le potentiel V sont donnés par

$$U(s) := s\log(s), \qquad V(x) := \frac{1}{2}|x|^2,$$

alors que la fonction W apparaissant dans l'équation (1.0.13) ne vérifie aucune condition de convexité, ni de coercivité à l'infini. Cela revient à considérer l'équation de Fokker–Planck (1.0.9) avec un champ de vecteur $\mathbf{E}$ de la forme

$$\mathbf{E}(x,f) := x + \nabla\big(a * f\big), \tag{1.0.15}$$

où la fonction a est supposée être dans un certain espace de Lebesgue.

Plus précisément, nous étudions (1.0.9) dans deux cas différents. Dans le premier cas nous ferons les hypothèses suivantes :

$$a \in W^{1,\infty}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d) \tag{1.0.16}$$

$$\text{si } d \geq 3, \qquad \nabla a \in L^q_{K_\alpha} \quad \text{où } q = (2^*)' = \frac{2d}{d+2} \tag{1.0.17}$$

$$\text{si } d = 2, \qquad \nabla a \in L^{1+\varepsilon}_{K_\alpha} \text{ où } 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.0.18}$$

Ici les espaces de Lebesgue à poids $L^p_{K_\alpha}$ sont définis par

$$L^p_{K_\alpha} := \left\{ f \ ; \ fK_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d) \right\}, \qquad \text{avec } K_\alpha(x) := \exp(\alpha|x|^2/4).$$

On définira aussi les espaces de Sobolev $H^1_{K_\alpha}$ comme étant l'ensemble des fonctions f telles que $fK_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Sous ces hypothèses on prouvera le résultat suivant :

Théorème 1.0.2. *Supposons que les hypothèse* (1.0.16)–(1.0.18) *soient vérifiées et considérons une donnée initiale* $f_0 \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ *du problème* (1.0.9). *Alors* (1.0.9) *admet une unique solution locale en temps dans* $H^1_{K_\alpha}$.

Pour prouver l'existence globale, dans des espace de type L^p_k, c'est-à-dire dans des espaces de Lebesgue avec des poids polynômiaux, nous serons amenés à supposer un peu plus de régularité sur la fonction a.

Théorème 1.0.3. *Supposons que* (1.0.17)–(1.0.18) *et qu'en plus* $a \in W^{2,\infty}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$. *Alors si* $f_0 \in L^2_k \cap L^\infty_k$, *il existe une unique solution globale* f *de* (1.0.9) *dans* $L^2_k \cap L^\infty_k$.

La suite de ce mémoire est organisée de la manière suivante. Au chapitre 2 nous introduisons les notations, les espaces fonctionnels et les outils d'Analyse qui détermineront le cadre de notre étude. Aux chapitres 3,4 et 5 nous traiterons l'équation de Fokker–Planck linéaire en prouvant l'existence d'un état stationnaire puis la convergence des solutions positives vers un état stationnaire, dans différentes normes. Au chapitre 6 nous étudions l'équation non-linéaire (1.0.9) lorsque la fonction a apparaissant dans (1.0.15) vérifie les conditions (1.0.16)–(1.0.18). Au chapitre 7 nous étudions l'équation non-linéaire (1.0.9) lorsque $a \in W^{2,\infty}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, et aussi pour des formes un peu plus générale du champ de forces $\mathbf{E}(x,f)$ de la forme $\mathbf{E}(x,f) := \mathbf{E}_0 + \nabla(a * f)$, où $\mathbf{E}_0$ est un champ de forces vérifiant les conditions du type (1.0.6)–(1.0.7).

Chapitre 2

Notations et outils de base

Nous fixons dans ce chapitre les notations utilisées par la suite, nous réunissons quelques outils dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire.

2.1 Espaces de Lebesgue à poids

Nous commençons cette partie par des définitions de quelques espaces de Lebesgue et de Sobolev avec poids. Nous noterons dans la suite

$$\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2},$$

(ce qui est une régularisation de $|x|$, la norme de x) et pour un usage ultérieur on calcule, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\nabla\langle x\rangle^k}{\langle x\rangle^k} = \frac{kx}{\langle x\rangle^2}, \tag{2.1.1}$$

et

$$\frac{\Delta\langle x\rangle^k}{\langle x\rangle^k} = \frac{kd}{\langle x\rangle^2} + \frac{k(k-2)|x|^2}{\langle x\rangle^4} = \frac{k(k+d-2)|x|^2+kd}{\langle x\rangle^4}. \tag{2.1.2}$$

Nous définissons l'espace de Lebesgue à poids polynômial $\langle x\rangle^k$ comme étant l'espace des fonctions mesurables g telles que $\langle x\rangle^k g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

$$L^p_k(\mathbb{R}^d) := \left\{ g \ ; \ \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p \langle x\rangle^{pk}\, dx < \infty \right\}. \tag{2.1.3}$$

De même pour $p=\infty$, l'espace $L^\infty_k(\mathbb{R}^d)$ désignera l'espace des fonctions g mesurables au sens de Lebesgue telles que $\langle x\rangle^k f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $1 \le p \le \infty$, ces espaces seront munis de la norme naturelle

$$\|g\|_{L^p_k} := \|\langle x\rangle^k g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

De la même manière, pour $\alpha > 0$, on définira les espaces de Lebesgue à poids exponentiel K_α, en posant

$$L^p_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d) := \left\{ g \ ; \ \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p K_\alpha(x)^p\, dx < \infty \right\}, \tag{2.1.4}$$

où on a posé

$$K_\alpha(x) := \exp(\alpha|x|^2/4), \tag{2.1.5}$$

la norme étant définie naturellement comme étant

$$\|g\|_{L^p_{K_\alpha}} := \|K_\alpha g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Sur ces espaces on construit les espaces de Sobolev à poids en posant

$$W^{1,p}_k(\mathbb{R}^d) := \left\{ g \in L^p_k(\mathbb{R}^d) \; ; \; \nabla g \in \left(L^p_k(\mathbb{R}^d)\right)^d \right\}, \tag{2.1.6}$$

et pour le poids exponentiel

$$W^{1,p}_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d) := \left\{ g \in L^p_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d) \; ; \; \nabla g \in \left(L^p_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)\right)^d \right\}. \tag{2.1.7}$$

Ces espaces sont munis de leurs normes naturelles, c'est-à-dire la norme du graphe. Nous écrirons souvent L^p_k et $L^p_{K_\alpha}$ au lieu de $L^p_k(\mathbb{R}^d)$ et $L^p_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$, et nous procèderons de même avec les espaces de Sobolev $W^{1,p}_k$ et $W^{1,p}_{K_\alpha}$.

Si $g \in W^{1,p}_k$, en posant $f := \langle x\rangle^k g$, comme on a

$$\nabla f = \langle x\rangle^k \nabla g + k\, g\, \langle x\rangle^{k-2} x,$$

on voit immédiatement que les espaces de Sobolev $W^{1,p}_k$ peuvent être caractérisés par le fait que

$$W^{1,p}_k = \left\{ g \; ; \; \langle x\rangle^k g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Cette caractérisation des espaces $W^{1,p}_k$ permet de déduire des inégalités de Sobolev à poids.

Proposition 2.1.1. *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que si $g \in W^{1,p}_k$ on ait*

$$c_1 \|g\|_{W^{1,p}_k} \leq \|\langle\cdot\rangle^k g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq c_2 \|g\|_{W^{1,p}_k}. \tag{2.1.8}$$

Pour $1 \leq p < d$ notons $p^* := dp/(d-p)$ l'exposant de Sobolev. Alors l'injection $W^{1,p}_k \subset L^{p^*}_k$ est continue et il existe une constante positive c_* dépendant de k, p et d telle que pour tout $f \in W^{1,p}_k$

$$\|f\|_{L^{p^*}_k} \leq c_* \, \|f\|_{W^{1,p}_k}. \tag{2.1.9}$$

Pour le poids exponentiel K_α, les espaces de Sobolev avec poids $W^{1,p}_{K_\alpha}$ peuvent être caractérisés de manière analogue. Par exemple pour $p = 2$ on a le lemme suivant (voir M. Escobedo & O. Kavian [13]) :

Proposition 2.1.2. *Soit $f \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ avec $\alpha > 0$. Alors f vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f|^2 K_{2\alpha}\, dx \leq \frac{4}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 K_{2\alpha} dx - \frac{2\,d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 K_{2\alpha} dx. \tag{2.1.10}$$

En particulier $f \in H^1_{K_\alpha}$ si, et seulement si, $fK_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^d)$, et par ailleurs il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ dépendant uniquement de α et d telles que pour tout $f \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$c_1 \, \|K_\alpha f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq c_2 \, \|K_\alpha f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on définit la fonction

$$g(x) := f(x) \exp\left(\alpha \frac{|x|^2}{4}\right).$$

On en déduit que

$$\nabla f \, \exp\left(\alpha \frac{|x|^2}{4}\right) = \left(\nabla g - \frac{\alpha\, x}{2} g\right).$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 K_{2\alpha}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla g - \frac{\alpha\, x}{2} g\right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^d} g \nabla g \cdot x\, dx + \frac{\alpha^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 |x|^2\, dx.\end{aligned}$$

En intégrant par parties le deuxième terme du membre de droite on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 K_{2\alpha}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 K_{2\alpha}\, dx + \frac{d\,\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2\, dx + \frac{\alpha^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |g|^2\, dx \\ &\geq \frac{d\,\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 K_{2\alpha}\, dx + \frac{\alpha^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f|^2 K_{2\alpha}\, dx,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité (2.1.10), à la suite d'un argument de densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1_{K_\alpha}$. □

Pour les espaces $W^{1,p}_{K_\alpha}$, lorsque $1 \leq p < \infty$ on a une propriété analogue. Comme la preuve est légèrement différente nous la donnons ci-dessous.

Proposition 2.1.3. *Soit $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante $c > 0$ dépendant de p, α et d telle que pour tout $f \in W^{1,p}_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p (1 + |x|^2) |x|^{p-2} K_{p\alpha}(x)\, dx \leq c \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^p K_{p\alpha}(x)\, dx. \qquad (2.1.11)$$

En particulier $f \in W^{1,p}_{K_\alpha}$ si, et seulement si, $K_\alpha f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, et il existe des constantes c_1, c_2 dépendant uniquement de p, α et d telles que

$$c_1 \|K_\alpha f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{W^{1,p}_{K_\alpha}} \leq c_2 \|K_\alpha f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. Pour $f \in W^{1,p}_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ en posant $g := K_\alpha f$ on a

$$\nabla g = K_\alpha \nabla f + (\alpha/2) x K_\alpha f.$$

Par conséquent, pour vérifier que $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, on doit estimer le terme $xK_\alpha f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Notons d'abord que

$$|x|^p K_{p\alpha}(x) = (2/p\alpha) |x|^{p-2} x \cdot \nabla K_{p\alpha}(x),$$

de sorte que pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p |x|^p K_{p\alpha}(x)\,dx &= -\frac{2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{p-2}x\cdot |f|^{p-2}f\nabla f\, K_{p\alpha}(x)dx \\ &\quad - \frac{2}{p\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(|x|^{p-2}x)K_{p\alpha}(x)|g|^p\,dx \\ &\le \frac{2}{\alpha}\|f|x|K_\alpha\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla f\, K_\alpha\|_{L^p} \\ &\quad - \frac{d+p-2}{p\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p|x|^{p-2}K_{p\alpha}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le fait que $\operatorname{div}(|x|^{p-2}x) = (d+p-2)|x|^{p-2}$, et aussi l'inégalité de Hölder.

Lorsque $p = 1$, on voit que l'inégalité (2.1.11) est établie. Si $1 < p < \infty$, en utilisant l'inégalité de Young

$$ab \le \frac{1}{p'}\varepsilon^{p'}a^{p'} + \frac{1}{p}\varepsilon^{-p}\,b^p$$

pour $a, b, \varepsilon > 0$ et $p' := p/(p-1)$, on voit que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ pour que

$$\frac{2}{\alpha}\|f|x|K_\alpha\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla f\, K_\alpha\|_{L^p} \le \frac{1}{2}\|f|x|K_\alpha\|_{L^p}^p + c\,\|\nabla f\, K_\alpha\|_{L^p}^p,$$

pour une constante positive c dépendant de α, p. A la suite de quoi on conclut que l'inégalité (2.1.11) est satisfaite pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, puis on termine la preuve par un argument de densité. □

On déduit de cette caractérisation des espaces $W^{1,p}_{K_\alpha}$ les inégalités de Sobolev à poids exponentiel.

Proposition 2.1.4. *Pour $1 \le p < d$ notons $p^* := dp/(d-p)$ l'exposant de Sobolev. Alors l'injection $W^{1,p}_{K_\alpha} \subset L^{p^*}_{K_\alpha}$ est continue et il existe une constante positive c_* dépendant de k, p et d telle que pour tout $f \in W^{1,p}_{K_\alpha}$*

$$\|f\|_{L^{p^*}_{K_\alpha}} \le c_*\,\|f\|_{W^{1,p}_{K_\alpha}}.$$

A plusieurs reprises dans la suite nous aurons besoin de convolution entre des élements de divers espaces de Lebesgue à poids. Comme les mesures $\langle x\rangle^k dx$ et $\exp(\alpha|x|^2/4)dx$ ne sont pas invariantes par translation, on doit vérifier que le produit de convolution $(f,g) \mapsto f * g$ agit bien dans les espaces de Lebesgue à poids.

Il est immédiat de voir que si $u \in L^{p_0}_{k_0}$ et $v \in L^{q_0}_{k_1}$ alors $uv\langle\cdot\rangle^{k_0+k_1} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1},$$

et que par conséquent par l'inégalité de Hölder entre $L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ et $L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|uv\|_{L^p_{k_0+k_1}} \le \|u\|_{L^{p_0}_{k_0}}\|v\|_{L^{p_1}_{k_1}}.$$

De la même manière, la convolution entre des éléments de $L^p_{k_0}$ et de $L^q_{k_1}$ ne pose aucune difficulté pourvu que

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \in [0,1].$$

En effet en posant $k := \min(k_0, k_1)$, on a

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \langle x-y\rangle^{k_0} |g(y)| \langle y\rangle^{k_1} \langle x-y\rangle^{-k_0} \langle y\rangle^{-k_1} dy \\ &\leq 2^k \langle x\rangle^{-k} \Big(\big(|f|\langle\cdot\rangle^{k_0}\big) * \big(|g|\langle\cdot\rangle^{k_1}\big) \Big)(x), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a d'une part

$$\langle x-y\rangle^{k_0} \langle y\rangle^{k_1} \geq \langle x-y\rangle^{k} \langle y\rangle^{k},$$

et que d'autre part

$$\langle x-y\rangle^2 \langle y\rangle^2 = (1+|x-y|^2)(1+|y|^2) \geq 1 + \frac{1}{4}|x|^2 \geq \frac{1}{4}\langle x\rangle^2.$$

Comme d'après l'inégalité de Young (voir par exemple L. Tartar [31]) on a

$$\big(|f|\langle\cdot\rangle^{k}\big) * \big(|g|\langle\cdot\rangle^{k}\big) \in L^r(\mathbb{R}^d),$$

on en déduit que $f * g \in L^r_k$ et que

$$\|f * g\|_{L^r_k} \leq 2^k \|f\|_{L^p_{k_0}} \|g\|_{L^q_{k_1}}. \tag{2.1.12}$$

Ainsi on peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 2.1.5. *Soient $p_0, p_1 \in [1,\infty]$ et $p \in [1,\infty]$ défini par*

$$\frac{1}{p} := \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1},$$

Alors pour $k_0, k_1 \geq 0$ et $u \in L^{p_0}_{k_0}$ et $v \in L^{p_1}_{k_1}$ on a

$$\|uv\|_{L^p_{k_0+k_1}} \leq \|u\|_{L^{p_0}_{k_0}} \|v\|_{L^{p_1}_{k_1}}. \tag{2.1.13}$$

Si $p, q, r \in [1, \infty]$ sont tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \in [0,1],$$

alors pour $k_0, k_1 \geq 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in L^p_{k_0}$ et $v \in L^q_{k_1}$ on ait

$$\|u * v\|_{L^r_k} \leq c \|u\|_{L^p_{k_0}} \|v\|_{L^q_{k_1}} \quad \text{avec } k := \min(k_0, k_1). \tag{2.1.14}$$

c'est-à-dire qu'on a $L^p_{k_0} * L^q_{k_1} \hookrightarrow L^r_k$.

Pour le produit et la convolution entre espaces de Lebesgue avec poids exponentiels K_α on peut procéder de même, mais les poids sont modifiés dans le résultat final.

Proposition 2.1.6. *Soient $p_0, p_1 \in [1,\infty]$ et $p \in [1,\infty]$ défini par*

$$\frac{1}{p} := \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1},$$

Alors pour $\alpha, \beta > 0$ on a $L^{p_0}_{K_\alpha} \cdot L^{p_1}_{K_\beta} \hookrightarrow L^p_{K_{\alpha+\beta}}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in L^{p_0}_{K_\alpha}$ et $v \in L^{p_1}_{K_\beta}$ on ait

$$\|uv\|_{L^p_{K_{\alpha+\beta}}} \leq c \, \|u\|_{L^{p_0}_{K_\alpha}} \|v\|_{L^{p_1}_{K_\beta}}. \tag{2.1.15}$$

Si $p, q, r \in [1, \infty]$ sont tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \in [0,1],$$

alors pour $\alpha, \beta > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in L^p_{K_\alpha}$ et $v \in L^q_{K_\beta}$ on ait

$$\|u * v\|_{L^r_{K_\gamma}} \leq c \, \|u\|_{L^p_{K_\alpha}} \|v\|_{L^q_{K_\beta}} \quad \text{avec } \gamma := \frac{\alpha\beta}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}. \tag{2.1.16}$$

c'est-à-dire qu'on a $L^p_{K_\alpha} * L^q_{K_\beta} \hookrightarrow L^r_{K_\gamma}$.

Preuve. Soient $u \in L^{p_0}_{K\alpha}$ et $v \in L^{p_1}_{K_\beta}$. Alors puisque $(p/p_0) + (p/p_1) = 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)v(x)|^p K_{\alpha+\beta}(x)^p dx &= \int_{\mathbb{R}^d} (|uK_\alpha|^{p_0})^{p/p_0} \cdot (|vK_\beta|^{p_1})^{p/p_1} \, dx \\ &\leq \|uK_\alpha\|^p_{L^{p_0}(\mathbb{R}^d)} \|vK_\beta\|^p_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

d'où on déduit (2.1.15).

Pour vérifier l'inégalité de Young (2.1.16), on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)| \, |v(y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)| K_\alpha(x-y) \, |v(y)| K_\beta(y) \frac{dy}{K_\alpha(x-y) K_\beta(y)}.$$

Comme $K_\alpha(x-y)K_\beta(y) = \exp((\alpha|x-y|^2 + \beta|y|^2)/4)$, il nous faut trouver un minorant de $\alpha|x-y|^2 + \beta|y|^2$ en termes de x, uniformément en $y \in \mathbb{R}^d$. Si $0 < R < 1$ et $|y| \leq R|x|$, alors on a $|x-y| \geq |x| - |y| \geq (1-R)|x|$ et ainsi

$$\alpha|x-y|^2 + \beta|y|^2 \geq \alpha(1-R)^2|x|^2,$$

alors que si $|y| \geq R|x|$ on a

$$\alpha|x-y|^2 + \beta|y|^2 \geq \beta R^2 |x|^2.$$

En choisissant R de telle sorte que $\alpha(1-R)^2 = \beta R^2$, c'est-à-dire en posant

$$R := \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}},$$

on voit que si $\gamma := \beta R^2 = \alpha\beta/(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ alors on a

$$\exp((\alpha|x-y|^2+\beta|y|^2)/4) \geq \exp(\gamma|x|^2/4),$$

de sorte que d'après l'inégalité ci-dessus

$$|(u*v)(x)|K_\gamma(x) \leq \Big((|u|K_\alpha)*(|v|K_\beta)\Big)(x),$$

ce qui, en utilisant le fait que $|u|K_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $|v|K_\beta \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité de Young classique pour la convolution entre les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$, donne (2.1.16). □

Remarque 2.1.7. Soient $1 \leq p_0 < p < \infty$ et $f \in L^p_k$ pour un certain $k > 0$. Alors en écrivant

$$|f|^{p_0}\langle x\rangle^{p_0 k_0} = \big(|f|^p\langle x\rangle^{pk}\big)^{p_0/p} \cdot \langle x\rangle^{-p_0(k-k_0)}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder entre $L^{p/p_0}(\mathbb{R}^d)$ et $L^{p/(p-p_0)}(\mathbb{R}^d)$ on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^{p_0}\langle x\rangle^{pk_0}\,dx \leq \|f\|^{p_0}_{L^p_k}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\langle x\rangle^{-pp_0(k-k_0)/(p-p_0)}dx\right)^{(p-p_0)/p},$$

où le terme de droite est fini pourvu que

$$\frac{pp_0(k-k_0)}{p-p_0} > d.$$

Ainsi, lorsque la condition ci-dessus est satisfaite, on a $L^p_k \subset L^{p_0}_{k_0}$, avec injection continue. Nous utiliserons à plusieurs reprises cette remarque, en particulier lorsque $p=2$ et $p_0=1$, alors que $k > k_0 + (d/2)$.

De la même manière lorsque $f \in L^\infty_k$, on vérifie facilement que $f \in L^{p_0}_{k_0}$ pourvu que $p_0(k-k_0) > d$. □

Remarque 2.1.8. Comme L^2_k est un espace de Hilbert, on peut identifier (par le théorème de représentation de F. Riesz) son dual à lui-même :

$$\big(L^2_k\big)' := L^2_k.$$

Mais alors il faudra prendre garde à ne plus identifier $L^2(\mathbb{R}^d)$ à son dual, si on est dans un cadre où les deux espaces interviennent en même temps.

Après avoir effectué l'identification de L^2_k à son dual, alors pour $1 \leq p < \infty$ le dual de L^p_k peut être identifié à $L^{p'}_k$,

$$(L^p_k)' := L^{p'}_k, \qquad p' := \frac{p}{p-1}$$

avec la convention habituelle $1' := \infty$. Ainsi, pour $f \in L^p_k$ et $g \in (L^p_k)' = L^{p'}_k$ l'action de g sur f peut s'écrire

$$\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\langle x\rangle^{2k}\, dx,$$

et on voit que $|\langle g, f\rangle| \leq \|f\|_{L^p_k}\|g\|_{L^{p'}_k}$. □

2.2 Semi-groupes continus

Dans les lignes qui suivent nous réunissons quelques résultats sur la théorie des semi-groupes dans les espaces de Banach.

Pour un opérateur linéaire $(A, D(A))$ agissant dans un espace de Banach complexe X, on définit l'ensemble résolvant de A par

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ A - \lambda I \quad \text{est inversible et d'inverse borné de } \ X \longrightarrow X\}\,,$$

et le spectre de l'opérateur A sera noté par

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Pour $\lambda \in \rho(A)$ on notera la résolvante $R_A(\lambda)$ de A par

$$R_A(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1},$$

et on remarquera que l'image de $R_A(\lambda)$ est précisément $D(A)$. De manière classique, si X est un espace de Banach réel, on considère d'abord son complexifié et ensuite on étend les notions ci-dessus à l'extension complexifiée de A.

Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu, on notera la norme de L par

$$\|L\|_{X\to Y} := \sup_{u\in X, \|u\|_X = 1} \|Lu\|_Y.$$

Si $X = Y$, la norme de L sera notée $\|L\|$ ou $\|L\|_{X\to X}$.

Pour la définition suivante voir par exemple K. Yosida [33, chapitre IX] :

Définition 2.2.1. *Soit X un espace de Banach réel ou complexe. On dit qu'un opérateur linéaire $(A, D(A))$ agissant dans X, de domaine $D(A) \subset X$ est m-dissipatif, s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) l'opérateur linéaire $(A, D(A))$ est dissipatif, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$ et $u \in X$

$$\|(I - \lambda A)u\|_X \geq \|u\|_X.$$

(ii) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in X$, il existe $u \in D(A)$ tel qu'on ait $(I - \lambda A)u = f$.

Cela signifie, en termes de la résolvante, que $(A, D(A))$ est m-dissipatif si, et seulement si pour tout $\lambda > 0$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et que de plus $\|R_A(\lambda)\|_{X\to X} \leq 1$.

Lorsque l'opérateur $-A$ est dissipatif (resp. m-dissipatif), on dit que A est un opérateur « accrétif » (resp. « m-accrétif »).

Lorsque X est un espace de Hilbert, en notant $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, la dissipativité de A revient à dire que

$$\forall\, u \in D(A), \qquad \mathrm{Re}(Au|u) \leq 0.$$

On voit ainsi que la caractère dissipatif d'un opérateur dépend de la norme considérée sur l'espace de Banach, et de fait c'est ainsi que nous allons considérer l'opérateur de Fokker–Planck $f \mapsto \Delta f + \mathrm{div}(f\mathbf{E})$ dans des espaces munis de normes adaptées permettant de prouver en définitive que le semi-groupe associé est borné dans ces espaces. De fait, nous verrons un peu plus loin que l'existence d'une solution pour l'équation de Fokker–Planck dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ ne pose aucune difficulté, mais les informations que l'on peut tirer au sujet du comportement du semi-groupe considéré dans ces espaces ne sont pas suffisamment précises, et on est amené à considérer le semi-groupe dans des espaces avec différents poids.

De manière plus générale, nous avons la définition suivante d'un opérateur sectoriel :

Définition 2.2.2. *Soient $0 < \theta \leq \pi/2$ et le secteur $\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \mathbb{C}$ défini par*

$$\Sigma_{\theta+\pi/2} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^* \,;\, |\arg(\lambda)| < \theta + \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{2.2.1}$$

Un opérateur fermé $(A, D(A))$ agissant dans un espace de Banach X est dit sectoriel d'angle θ si $\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$ et de plus pour tout $\varepsilon \in (0, \theta)$ il existe une constante $M_\varepsilon \geq 1$ telle que

$$\forall \lambda \in \Sigma_{\theta-\varepsilon+\pi/2}, \qquad \|R_A(\lambda)\|_{X\to X} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Une famille à un paramètre $t \geq 0$ d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t\geq 0}$ est dite être un semi-groupe fortement continu si elle vérifie

(i) $S(0) = I$

(ii) $S(t + t') = S(t)S(t')$ pour tout t et t' dans $\mathbb{R}^+$

(iii) $\lim_{h\to 0} \|S(h)\, x - x\| = 0$ pour tout $x \in X$.

On définit alors son générateur infinitésimal de la manière suivante :

Définition 2.2.3. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu agissant dans un espace de Banach X. On désigne par $D(A)$ le sous-espace des $x \in X$ tels que*

$$\exists f \in X, \qquad f = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}.$$

Si $x \in D(A)$ on note alors

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)\, x - x}{h}.$$

De fait on montre que le domaine $D(A)$ est dense dans X et que pour $x \in D(A)$ on a $AS(t)x = S(t)Ax$.

Ces définitions faites, nous rappelons trois résultats classiques concernant les semi-groupes. Pour les preuves de ces résultats nous renvoyons aux livres de K. Yosida [33], K.J. Engel & R. Nagel [12] A. Pazy [26].

Théorème 2.2.4. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. Alors il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que pour tout $t \geq 0$ on ait*

$$\|S(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega\, t}. \tag{2.2.2}$$

Si $\omega = 0$ et $M \geq 1$, on dira que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est borné.
Si $\omega = 0$ et $M = 1$, on dira que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions.

Si l'opérateur A est le générateur infintésimal du semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$, on notera

$$S_A(t) := S(t) \quad \text{ou encore} \quad S_A(t) := \exp\big(t\, A\big) := S(t).$$

On utilisera parfois les définitions suivantes :

Définition 2.2.5. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semigroupe $(S_A(t))_{t\geq 0}$. On définit la « borne spectrale » de A en posant*

$$s(A) := \sup\left\{\mathrm{Re}(z)\ ;\ z \in \sigma(A)\right\},$$

et « l'exposant de Lyapounov » du semi-groupe $S_A(t)$ par

$$\omega(A) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}\ ;\ \exists\, M \geq 1,\ \textit{tel que}\ \forall t \geq 0,\ \|S_A(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}\right\}.$$

Lorsque $(S_A(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu et borné, alors en particulier on a $(0, \infty) \subset \rho(A)$ et, pour tout $\lambda > 0$ la résolvante $R_A(\lambda)$ de A est donnée par la transformée de Laplace de $S_A(t)$:

$$R_A(\lambda)x = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S_A(t)x\, dt. \tag{2.2.3}$$

(Noter qu'ici la résolvante est définie comme étant $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, alors que dans K.J. Engel & R. Nagel [12] elle est définie comme étant $(\lambda I - A)^{-1}$). Plus généralement, dans le cas d'un semi-groupe continue $(S(t))_{t\geq 0}$, si l'exposant $\omega \in \mathbb{R}$ est tel que (2.2.2) soit vérifiée, alors on a

$$\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > \omega\} \subset \rho(A),$$

et la représentation de $R_A(\lambda)$ par la transformée de Laplace (2.2.3) est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$.

Grâce à la transformée de Laplace inverse, on a la représentation suivante du semi-groupe $(S_A(t))_{t\geq 0}$ en termes de la résolvante de son générateur infinitésimal A. L'exposant $\omega \in \mathbb{R}$ étant comme dans (2.2.2), on considère $\omega_0 > \omega$

et un chemin $\Gamma \subset \rho(A)$ dans le plan complexe reliant $\omega_0 - \mathrm{i}\infty$ à $\omega_0 + \mathrm{i}\infty$; alors pour tout $t > 0$ on a

$$S_A(t) = \frac{-1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \mathrm{e}^{z\,t}\, R_A(z) dz, \tag{2.2.4}$$

la convergence de l'intégrale étant uniforme pour $t \in [T_0, T_1]$, avec $0 < T_1 < T_2$.

La caractérisation du générateur d'un semi-groupe de contractions est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.2.6 (Théorème de Hille-Yosida)**.** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire agissant dans un espace de Banach X tel que $D(A)$ est dense dans X. Alors $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions si, et seulement si, l'opérateur $(A, D(A))$ est m-dissipatif.*

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit analytique s'il satisfait la définition suivante (voir K.J. Engel & R. Nagel [12, chapter II, Definition 4.5 et Theorem 4.6]) :

Définition 2.2.7. *Soient $0 < \delta \leq \pi/2$ et le secteur Σ_δ défini par*

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C}^* \ ; \ |\arg(\lambda)| < \delta\}\,.$$

Une famille d'opérateurs linéaires continus $(S(z))_{z\in\{0\}\cup\Sigma_\delta}$ est dite un semi-groupe analytique borné (d'angle δ) si

1. *$S(0) = I$ et $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.*
2. *Pour tout $x \in X$ et $0 < \delta' < \delta$ on a*

$$\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{\delta'}} S(z)x = x.$$

3. *L'application $z \mapsto S(z)$ est analytique dans le secteur Σ_δ.*
4. *Pour $0 < \delta' < \delta$, on a*

$$M(\delta') := \sup\{\|S(z)\|_{X\to X} \ ; \ z \in \Sigma_{\delta'}\} < \infty.$$

Nous avons le théorème suivant caractérisant le générateur d'un semi-groupe analyique.

Théorème 2.2.8. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire sur un Banach X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur $(A,\ D(A))$ est le générateur d'un semi-groupe analytique borné $(S(t))_{t\geq 0}$ sur X.*
2. *Il existe un réel $\theta \in (0, \pi/2)$ tel que chacun des deux opérateurs linéaires $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta} A$ soit le générateur d'un semi-groupe fortement continu.*

3. *L'opérateur* $(A, D(A))$ *est le générateur d'un semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geq 0}$ *borné sur* X *tel que pour tout* $t > 0$ *on ait* $\mathrm{Im}(S(t)) \subset D(A)$ *et de plus*
$$M := \sup_{t>0} \|tAS(t)\|_{X\to X} < \infty. \tag{2.2.5}$$
(Ici on désigne par $\mathrm{Im}(S(t))$ *l'image de l'opérateur* $S(t)$*).*

4. *L'opérateur* $(A,\ D(A))$ *est le générateur d'un semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geq 0}$ *borné sur* X *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*
$$\|R_A(r + \mathrm{i}\, s)\| \leq \frac{C}{|s|} \tag{2.2.6}$$
pour tout $r > 0$ *et* $s \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $r + \mathrm{i}\, s \in \rho(A)$.

5. *L'opérateur* $(A, D(A))$ *est sectoriel au sens de la définition 2.2.7.*

En particulier, lorsque X est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$, et $(A, D(A))$ est un opérateur auto-adjoint tel que $(Au|u) \leq 0$ pour tout $u \in D(A)$, alors le semi-groupe $S_A(t)$ est analytique et on peut montrer (voir par exemple Th. Cazenave & A. Haraux [8, Chapter 3, Theorem 3.2.1]) que la propriété (2.2.5) devient de manière plus précise
$$\|AS_A(t)x\|^2 \leq \frac{1}{2t}\|x\|^2, \tag{2.2.7}$$
pour tout $t > 0$ et de plus on a les deux propriétés suivantes
$$0 \leq -(AS_A(t)x|S_A(t)x) \leq \frac{1}{2t}\|x\|^2 \quad \text{pour } x \in X, \tag{2.2.8}$$
$$\|AS_A(t)x\|^2 \leq \frac{-1}{2t}(Ax|x) \quad \text{pour } x \in D(A). \tag{2.2.9}$$
Si $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe fortement continu $(S_A(t))_{t\geq 0}$, alors pour $f_0 \in D(A)$ la solution de l'équation
$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} &= Af \\ f(0) &= f_0 \end{cases} \tag{2.2.10}$$
est donnée par $f(t) = S_A(t)f_0$ et on a $f \in C^1([0,\infty), X) \cap C([0,\infty), D(A))$. Lorsque $f_0 \in X$ mais $f_0 \notin D(A)$, on dira que $f(t) := S_A(t)f_0$ est la solution faible de l'équation ci-dessus, et on a $f \in C([0,\infty), X)$.

Si $v \in C([0,T], X)$ la résolution de l'équation
$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} &= Af + v(t) \\ f(0) &= f_0 \in D(A) \end{cases} \tag{2.2.11}$$
est donnée par la formule de Duhamel comme étant
$$f(t) = S(t)f_0 + \int_0^t S(t-\tau)v(\tau)\, d\tau. \tag{2.2.12}$$

Lorsque f_0 n'appartient pas au doamine $D(A)$, ou lorsque v n'est pas continue à valeurs dans X, la fonction donnée par (2.2.12) est appelée solution faible, ou *solution douce* (en anglais *mild solution*), de l'équation d'évolution (2.2.11). Suivant le type de régularité de v, dans les équations que nous étudierons, nous préciserons par la suite la régularité de la solution f dans un sens approprié.

2.3 Décompostion de semi-groupes

Il n'est pas difficile de voir que si $B : X \longrightarrow X$ est un opérateur borné et $(A, D(A))$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu, alors l'opérateur $(A+B, D(A))$ est aussi le générateur d'un semi-groupe fortement continu (voir par exemple K. Yosida [33] ou K.J. Engel & R. Nagel [12]). Nous allons utiliser cette propriété sous une forme particulière qui met à profit la formule de Duhamel (2.2.12).

Soient $(L, D(L))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S_L(t))_{t\geq 0}$, agissant dans un espace de Banach X. Pour établir des propriétés intéressantes du semi-groupe $(S_L(t))_{t\geq 0}$ qui ne sont pas « visibles » d'emblée, nous allons considérer un opérateur borné $B : X \longrightarrow X$ qui sera choisi de manière appropriée par la suite, et puis nous poserons

$$A := L - B, \qquad D(A) := D(L). \tag{2.3.1}$$

De fait, pour les équations de Fokker–Planck que nous allons étudier, nous choisirons l'opérateur B de telle sorte qu'il existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $\tau > \tau_0$ l'opérateur linéaire $A - \tau I$ soit m-dissipatif (nous verrons que cela est possible, du fait des conditions sur le comportement à l'infini imposées au champ de force $\mathbf{E}$).

Si un nombre complexe $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(L)$, alors en partant de l'égalité

$$L - \lambda I = A - \lambda I + B,$$

et en la multipliant à gauche par $R_A(\lambda)$ et à droite par $R_L(\lambda)$ on voit facilement que l'on a

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_A(\lambda)BR_L(\lambda) \tag{2.3.2}$$

pour tout $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(L)$. On peut aussi voir, en multipliant à droite par $R_A(\lambda)$ et à gauche par $R_L(\lambda)$, que l'on a aussi

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_L(\lambda)BR_A(\lambda), \tag{2.3.3}$$

de sorte que l'on peut noter que l'on a

$$R_L(\lambda)BR_A(\lambda) = R_A(\lambda)BR_L(\lambda).$$

Naturellement on peut itérer ces identités, en remplaçant le terme $R_L(\lambda)$ apparaissant à droite par la même expression, pour obtenir de nouvelles expressions. Par exemple en itérant l'dentité (2.3.2), ou (2.3.3), successivement, on obtient à l'ordre deux

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_A(\lambda)BR_A(\lambda) + \big(R_A(\lambda)B\big)^2 R_L(\lambda) \tag{2.3.4}$$

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_A(\lambda)BR_A(\lambda) + R_L(\lambda)\big(R_A(\lambda)B\big)^2 \tag{2.3.5}$$

puis à l'ordre trois

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_A(\lambda)BR_A(\lambda) + \big(R_A(\lambda)B\big)^2 R_A(\lambda) - \big(R_A(\lambda)B\big)^3 R_L(\lambda) \tag{2.3.6}$$

et

$$R_L(\lambda) = R_A(\lambda) - R_A(\lambda)BR_A(\lambda) + \big(R_A(\lambda)B\big)^2 R_A(\lambda) - R_L(\lambda)\big(R_A(\lambda)B\big)^3. \tag{2.3.7}$$

Comme par ailleurs un semi-groupe peut s'exprimer en termes de la résolvante de son générateur infinitésimal, il est naturel de chercher à exprimer l'analogue de (2.3.2), ou de (2.3.3), pour les semigroupes S_L et S_A.

Pour cela, intéressons nous maintenant à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} &= Lf \quad \text{pour} \quad t \in (0,\infty) \\ f(0) &= f_0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Nous savons que pour $f_0 \in X$ une solution faible de cette équation est donnée par $f(t) = S_L(t)f_0$. Nous pouvons aussi remarquer que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} &= Af + Bf \quad \text{pour} \quad t \in (0,\infty) \\ f(0) &= f_0. \end{cases}$$

Et on sait, en utilisant la formule de Duhamel (2.2.12), que la solution de cette dernière est donnée par

$$\begin{aligned} f(t) &= S_A(t)f_0 + \int_0^t S_A(t-\tau)Bf(\tau)\,d\tau \\ &= S_A(t)f_0 + \int_0^t S_A(t-\tau)BS_L(\tau)\,f_0\,d\tau, \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité nous avons utilisé le fait que $f(t) = S_L(\tau)f_0$. Du fait de l'équivalence des deux écritures (2.3.8) et (2.3) on a donc pour tout $f_0 \in X$ et pour tout $t \geq 0$

$$S_L(t)f_0 = S_A(t)f_0 + \int_0^t S_A(t-\tau)BS_L(\tau)\,f_0\,d\tau$$

ce qui permet de déduire la formule de décomposition du semi-groupe S_L en termes de S_A

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_A * B\,S_L\big)(t), \tag{2.3.9}$$

où de manière naturelle le produit de convolution est défini par

$$\big(S_A * (B\,S_L)\big)(t) := \int_0^t S_A(t-\tau)B\,S_L(\tau)\,d\tau.$$

En procédant de la même manière pour l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} &= Av \quad \text{pour} \quad t \in (0,\infty) \\ v(0) &= v_0, \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $v(t) = S_A(t)v_0$, et en écrivant $A = L - B$ on sait que $v(t)$ est solution

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} &= Lv - Bv \quad \text{pour} \quad t \in (0, \infty) \\ v(0) &= v_0. \end{cases}$$

En utilisant la formule de Duhamel, la solution de cette équation s'écrit

$$v(t) = S_L(t)v_0 - \int_0^t S_L(t-\tau)Bv(\tau)\, d\tau,$$

et comme $Bv(\tau) = BS_A(\tau)v_0$, on déduit, comme précédemment que

$$S_A(t) = S_L(t) - \big(S_L * BS_A\big)(t).$$

On a ainsi la deuxième formule de décomposition du semi-groupe $S_L(t)$

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_L * BS_A\big)(t). \tag{2.3.10}$$

En itérant la formule (2.3.10), on obtient

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_A * B\, S_A\big)(t) + \big(S_L * B\, S_A * B\, S_A\big)(t), \tag{2.3.11}$$

et aussi

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_A * B\, S_A\big)(t) + \big(S_L * B\, S_A * B\, S_A\big)(t), \tag{2.3.12}$$

En fait, puisque la transformée de Laplace et son inverse, changent un produit en un produit de convolution, et vice versa, et que (au signe près) la résolvante du générateur d'un semi-groupe correspond à la transformée de Laplace de ce dernier par la formule (2.2.4), on peut voir que les relations (2.3.2) et (2.3.3) sont équivalentes à (2.3.9) et (2.3.10).

En appliquant la formule (2.2.4) de la transformée de Laplace inverse à l'identité (2.3.2) on voit que

$$S_L(t) = S_A(t) + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz} R_A(z)BR_L(z)dz,$$

ce qui, en comparant avec (2.3.9) donne (comme attendu)

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz} R_A(z)BR_L(z)dz = (S_A * BS_L)(t).$$

De même, puisque

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz} R_A(z)BR_A(z)dz = (S_A * BS_A)(t),$$

en appliquant la formule de la transformée de Laplace inverse (2.2.4) à l'identité (2.3.4)

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_AB * S_A\big)(t) - \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz}\big(BR_A(z)\big)^2 R_L(z)\, dz. \tag{2.3.13}$$

En procédant de manière analogue avec (2.3.6) on obtient

$$\begin{aligned} S_L(t) &= S_A(t) + \big(S_A B * S_A\big)(t) + \big((S_A B) * (S_A B) * S_A\big)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \mathrm{e}^{tz} \big(B R_A(z)\big)^3 R_L(z)\, dz. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Les relations (2.3.13)–(2.3.14) vont être utilisée de la manière suivante. Nous montrerons que si L est l'opérateur de Fokker–Planck $f \mapsto \Delta f + \mathrm{div}(f\mathbf{E})$, alors B peut être choisi de telle sorte que pour un certain $\omega^* > 0$ on ait

$$\|S_A(t)\| \leq M \mathrm{e}^{-\omega^* t},$$

puis nous prouverons que le semi-groupe $S_L(t)$ est borné dans les espaces L^p_k et qu'il existe une unique fonction positive G telle que $\int_{\mathbb{R}^d} G(x)dx = 1$, et $S_L(t)f = G$ pour tout $t > 0$ (autrement dit $LG = 0$).

Nous montrerons ensuite que $\sigma(L) \setminus \{0\}$, le spectre de L privé de zéro, est contenu dans un demi plan $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) < -a^*\}$, pour un certain $a^* > 0$. Enfin, en prenant $0 < a < \min(a^*, \omega^*)$ (on utilise ici le fait que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) \leq -\omega^*\}$), et choisissant le chemin

$$\Gamma := \{-a + \mathrm{i}s\ ;\ s \in \mathbb{R}\}$$

et en appelant P la projection sur un supplémentaire de $\mathbb{R}G$, plus précisément l'application définie par

$$f \mapsto Pf := f - M(f)G, \qquad \text{où } M(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

nous montrerons que si

$$J_a(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \mathrm{e}^{tz} \big(B R_A(z)\big)^2 R_L(z) P\, dz, \tag{2.3.15}$$

alors on a le résultat suivant

Proposition 2.3.1. *Supposons que $\sigma(L) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) < -a^*\}$ prenons $0 < a < \min(a^*, \omega^*)$ et $\|S_A(t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\omega^* t}$. Alors pour une constante $c > 0$ on a*

$$\|J_a(t)\| \leq c\, a^{-1} \mathrm{e}^{-at}.$$

Ainsi, en utilisant (2.3.13) et le fait que $S_A(t)$ est à décroissance exponentielle, on pourra conclure que $\|S_L(t)Pf_0\|_{L^p_k} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

La preuve de la Proposition 2.3.1 n'est pas difficile. En effet on commence par observer que comme la distance de la droite $\Gamma := \{-a + \mathrm{i}s\ ;\ s \in \mathbb{R}\}$ aux spectres de A et de L est strictement positive, c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \sigma(L) \cup \sigma(A), \qquad \mathrm{dist}(z, \Gamma) \geq \delta.$$

Par conséquent il existe une constante positive $C_1 > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait

$$\|R_L(-a + \mathrm{i}s)\| \leq C_1 \quad \text{et} \quad \|A R_A(-a + \mathrm{i}s)\| \leq C_1. \tag{2.3.16}$$

D'autre part, comme $z \neq 0$, et que $AR_A(z) - zR_A(z) = I$, on voit que

$$R_A(z) = z^{-1}\big(AR_A(z) - I\big),$$

ce qui reporté permet de majorer $\|J_a(t)\|$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\|J_a(t)\| &\leq \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-at}\int_{-\infty}^{+\infty} \|BR_A(-a+\mathrm{i}s)\|^2\|R_L(-a+\mathrm{i}s)\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-at}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|B\big(AR_A(-a+\mathrm{i}s) - I)\|^2}{a^2+s^2}\|R_L(-a+\mathrm{i}s)\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-at}\|B\|^2(1+C_1)^2C_1\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{a^2+s^2} \\
&\leq \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-at}\|B\|^2(1+C_1)^2C_1,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|J_a(t)\|$ tend vers zéro exponentiellement. □

Première partie

Équation de Fokker-Planck linéaire

Chapitre 3

Le semi-groupe $S_L(t)$ et ses propriétés

Cette partie est consacrée à l'équation de Fokker-Planck linéaire

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}(x)\, f) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases}$$

où les fonctions f et f_0 sont dans L^2_k et le champ de vecteur $\mathbf{E}$ vérifient les hypothèses (3.0.3) et (3.0.4). On définit l'opérateur linéaire $(L,\, D(L))$ par :

$$Lf := \Delta\, f + \operatorname{div}(\mathbf{E}(x)\, f) \quad \text{et} \quad D(L) := \left\{ f \in H^1_k \,;\; Lf \in L^2_k \right\}.$$

Cette partie est organisée comme suit. Dans le paragraphe 3.1 nous montrons l'existence d'un semi-groupe fortement continu engendré par L sur l'espace L^2_k. Dans le paragraphe 3.3 nous étudions l'existence du semi-groupe fortement continu dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$, et ensuite au paragraphe 3.4 nous établissons le mêmes résultats dans les espaces L^p_k pour $p \in [1,\, \infty[$.

Pour montrer l'existence d'un semi-groupe fortement continu engendré sur les espaces L^2_k on introduit l'opérateur linéaire

$$Lf := \Delta f + \operatorname{div}(f\mathbf{E}(x)) \quad \text{et} \quad D(L) := \left\{ f \in H^1_k \,;\; Lf \in L^2_k \right\}. \tag{3.0.1}$$

Une fois que l'on aura prouvé l'existence de $S_L(t)$, on prouvera aussi que ce semi-groupe est *positif* et qu'il est *ultracontractif*. Ainsi on verra que l'équation de Fokker–Planck

$$\begin{cases} \partial_t f &= \Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{E}(x)\, f) \\ f(0,x) &= f_0(x), \end{cases} \tag{3.0.2}$$

admet une solution unique dans les espaces L^2_k lorsque la donnée initiale est aussi dans l'un des espaces L^2_k.

A toutes fins utiles, nous rappelons que les espaces L^p_k et $L^p_{K_\alpha}$ ont été definis au chapitre 2, relations (2.1.3) et (2.1.4), et les espaces de Sobolev $W^{1,p}_k$ et $W^{1,p}_{K_\alpha}$ l'ont été par les relations (2.1.6) et (2.1.7). Nous rappelons aussi que dans toute la suite nous supposons que le champ de forces $\mathbf{E}$ vérifie les conditions suivantes :

(H1) Le champ de forces $\mathbf{E} \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, et β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$ et $1 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\alpha_1 |x|^{\gamma_1} + \beta_1 \leq x \cdot \mathbf{E} \leq \alpha_2 |x|^{\gamma_2} + \beta_2. \tag{3.0.3}$$

(H2) Il existe un réel $k_0 > d$, et une constante $R_0 > 0$ tels que

$$\beta_0 := \inf_{|x| \geq R_0} \left[-\mathrm{div}(\mathbf{E}) + k_0 \frac{x}{1+|x|^2} \cdot \mathbf{E} \right] \geq 0 \tag{3.0.4}$$

Rappelons aussi que si $k \geq k_0$ et si pour un $p \in [1, \infty]$ on a une fonction $f \in L^p_k$, alors, en utilisant l'inégalité de Hölder on a $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et dans toute la suite on supposera que $k \geq k_0$.

3.1 Le semi-groupe $S_L(t)$

On va prouver que l'on peut trouver $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\lambda > \lambda_0$ l'opérateur $(L - \lambda I, D(L))$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction. D'après le théorème de caractérisation donnée par le théorème de Hille–Yosida 2.2.6 il suffit de montrer que l'opérateur $(L - \lambda I,\ D(L))$ est *m-dissipatif* à domaine dense. Il est clair que les fonctions C^∞ à supoort compact sont contenues dans $D(L)$, et ainsi le domaine de L est dense dans L^2_k. Pour prouver le caractère m-dissipatif de $(L, D(L))$ nous commençons par le résultat suivant :

Lemme 3.1.1. *Supposons que l'hypothèse (H2) (3.0.4) soit vérifiée. Alors pour tout $k \geq k_0$ il existe un réel λ_0 tel que pour tout $\varphi \in D(L)$*

$$(-L\varphi|\varphi)_k \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx - \lambda_0 (\varphi|\varphi)_k. \tag{3.1.1}$$

L'inégalité ci-dessus est vraie pour $\varphi \in H^1_k$ en ce sens qu'en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $H^1(\mathbb{R}^d)$ et $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle -\langle x\rangle^k L\varphi, \langle x\rangle^k \varphi \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx - \lambda_0 (\varphi|\varphi)_k.$$

Preuve. Nous savons que l'espace $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans H^1_k. Donc il suffit de vérifier (3.1.1) pour une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ et ensuite de conclure par un argument de densité. Pour une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\begin{aligned}
(-L\varphi|\varphi)_k &= -\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\big(\nabla\varphi + \mathbf{E}(x)\varphi\big)\, \varphi(x)\, \langle x\rangle^{2k}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla\varphi + \mathbf{E}(x)\varphi\big) \cdot \nabla\big(\varphi(x)\, \langle x\rangle^{2k}\big)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla\varphi + \mathbf{E}(x)\varphi\big) \cdot \big(\nabla\varphi(x)\, \langle x\rangle^{2k} + \varphi(x) \nabla\langle x\rangle^{2k}\big)\, dx.
\end{aligned}$$

Pour la clarté de l'exposé nous notons

$$(-L\varphi|\varphi)_k = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

où

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2\langle x\rangle^{2k}\,dx, \qquad I_2 := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot\mathbf{E}\langle x\rangle^{2k}\,dx,$$
$$I_3 := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx \quad \text{et enfin} \quad I_4 := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2\mathbf{E}\cdot\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx.$$

Nous intégrons par parties les termes I_2 et I_3 et nous aboutissons aux égalités suivantes

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\varphi(x)^2)\cdot\mathbf{E}\langle x\rangle^{2k}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2\,\mathrm{div}(\mathbf{E})\langle x\rangle^{2k}\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2\mathbf{E}\cdot\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx \end{aligned}$$

et

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\varphi^2)\cdot\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2\,\Delta\langle x\rangle^{2k}\,dx.$$

En sommant I_2, I_3 et I_4 on obtient

$$I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2\Psi_k(x)\langle x\rangle^{2k}\,dx,$$

où on a posé

$$\Psi_k(x) := -\frac{\Delta\langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}} - \mathrm{div}(\mathbf{E}) + \mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}}. \tag{3.1.2}$$

En utilisant les relations (2.1.1) et (2.1.2) (où on change naturellement k en $2k$) on en déduit que

$$\Psi_k(x) = -\frac{2kd}{1+|x|^2} - \frac{4k(k-1)}{(1+|x|^2)^2} - \mathrm{div}(\mathbf{E}) + \frac{2kx}{1+|x|^2}\cdot\mathbf{E}.$$

En appliquant l'hypothèse (H2) (3.0.4) on obtient pour $|x| \geq R_0$

$$\Psi_k(x) \geq \beta_0 - \frac{2kd}{1+|x|^2} - \frac{4k(k-1)}{(1+|x|^2)^2}.$$

Si on pose

$$\widetilde{\lambda}_0 := \sup_{|x|\geq R_0}\left[\frac{2k(2k+d-2)|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^2} + \frac{2kd}{1+|x|^2}\right] - \beta_0,$$

alors on aura pour $|x| \geq R_0$

$$\Psi_k(x) \geq -\widetilde{\lambda}_0.$$

On voit ainsi qu'en posant

$$\lambda_0 := \min(-\widetilde{\lambda}_0, c(R_0)) \quad \text{où} \quad c(R_0) := \inf_{|x|\leq R_0} \Psi_k(x), \tag{3.1.3}$$

cela conduit à

$$(-L\varphi|\varphi)_k \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx,$$

et le lemme est prouvé. □

Lemme 3.1.2. *Supposons que l'hypothèse (H2) (3.0.4) soit vérifiée et λ_0 comme dans le Lemme 3.1.1. Alors, pour tout $k \geq k_0$ l'opérateur linéaire $(L-\lambda_0 I, D(L))$ est le générateur infinitésinal d'un $\mathscr{C}_0$-semi-groupe de contractions sur L^2_k.*

Preuve. Soient λ_0 le réel défini par (3.1.3) et posons

$$L_0 f := Lf - \lambda_0 f, \qquad D(L_0) := D(L).$$

Pour voir que L_0 engendre un semi-groupe fortement continu, nous devons vérifier que $(L_0, D(L_0))$ est m-dissipatif, donc d'après la Définition 2.2.1 on doit résoudre le problème suivant : pour $f_0 \in L^2_k$ et $\lambda > 0$ trouver $f \in D(L_0) = D(L)$ tel que

$$f - \lambda L_0\, f = f_0 \qquad \text{et} \quad \|f\|_{L^2_k} \leq \|f_0\|_{L^2_k}. \tag{3.1.4}$$

Résoudre cette équation revient à vérifier que l'opérateur $I - \lambda L_0$ est coercif sur l'espace H^1_k, ce qui est le cas : en effet si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ par (3.1.1) on a

$$\big((I-\lambda L_0)\varphi|\varphi\big)_k \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \langle x\rangle^{k}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2 \langle x\rangle^{k}\, dx, \tag{3.1.5}$$

ce qui montre que l'opérateur $(I - \lambda L_0)$ est coercif sur $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, et donc par densité de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1_k(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur $(I - \lambda L_0, D(L))$ est coercif sur $H^1_k(\mathbb{R}^d)$. Par le théorème de Lax-Milgram, pour tout $f_0 \in L^2_k$ on peut donc trouver une unique fonction $f \in D(L)$ telle que

$$f - \lambda L_0 f = f_0,$$

et la corecivité (3.1.5) de $I - \lambda L_0$ sur H^1_k montre que $\|f\|_{L^2_k} \leq \|f_0\|_{L^2_k}$. □

Du Lemme 3.1.2 on peut déduire que l'opérateur L est le générateur d'un $\mathscr{C}_0$-*semi-groupe*, et que la croissance de $S_L(t)$ est au plus comme $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$.

Proposition 3.1.3. *Supposons que l'hypothèse (H2) (3.0.4) soit vérifiée, et $k \geq k_0$. Alors l'opérateur linéaire $(L, D(L))$ est le générateur d'un $\mathscr{C}_0$-semi-groupe et pour tout $t \geq 0$ on a*

$$\|S_L(t)\|_{L^2_k \to L^2_k} \leq \mathrm{e}^{\lambda_0 t}.$$

De plus si $z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) > \lambda_0$ on a

$$\|R_L(z)\|_{L^2_k \to L^2_k} \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}(z) - \lambda_0|}.$$

Plus loin nous aurons besoin du résultat suivant qui nous donne une information sur la borne spectrale $s(L^*)$ définie par la Définition 2.2.5.

Proposition 3.1.4. *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2), c'est-à-dire (3.0.3) et (3.0.4) soient vérifiées. Alors, en désignant par L^* l'adjoint de L dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe $b_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $\psi \in D(L^*)$ telle que $\psi > 0$ et*

$$L^*\psi \leq b_0\psi \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d), \tag{3.1.6}$$

Preuve. Observons qu'en désignant par L^* l'adjoint de L dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, si $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors on a

$$L^*\varphi = \Delta\varphi - \mathbf{E}\cdot\nabla\varphi.$$

Pour $\alpha_0 > 0$, considérons la fonction

$$\psi(x) := \langle x\rangle^{-\alpha_0} = \left(1+|x|^2\right)^{-\alpha_0/2}.$$

On peut vérifier sans difficulté que, pour α_0 assez grand, $\psi \in D(L^*)$. Ainsi un calcul simple permet de voir que

$$\frac{L^*\psi}{\psi} = \frac{\alpha_0(\alpha_0 - d + 2)|x|^2 - \alpha_0\, d}{(1+|x|^2)^2} + \frac{\alpha_0\, x}{1+|x|^2}\cdot\mathbf{E}.$$

L'hypothèse (H1) (3.0.3) implique que

$$\frac{L^*\psi}{\psi} \leq b_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left[\frac{\alpha_0(\alpha_0 - d + 2)|x|^2 - \alpha_0\, d}{(1+|x|^2)^2} + \frac{\alpha_0(\alpha_2|x|^{\gamma_2} + \beta_2)}{1+|x|^2}\right] < \infty,$$

puisque $\gamma_2 \leq 2$, et ainsi la preuve est terminée. □

Remarque 3.1.5. Notons que l'opérateur $(L^*, D(L^*))$ défini par

$$f \in D(L^*), \qquad L^*f := \Delta f - \mathbf{E}\cdot\nabla f,$$

vérifie, pour $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$(-\Delta\varphi + \mathbf{E}\cdot\nabla\varphi|\varphi)_{L^2_k} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2_k} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(x)\Psi_k^*(x)\,\langle x\rangle^{2k}\,dx, \tag{3.1.7}$$

où la fonction Ψ_k^* est définie par

$$\Psi_k^*(x) := -\frac{\Delta\langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}} - \operatorname{div}(\mathbf{E}) - \frac{\mathbf{E}\cdot\nabla\langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}}.$$

En utilisant (2.1.1) et (2.1.2) on a

$$\Psi_k^*(x) = -\frac{2k(2k+d-2)|x|^2 + 2kd}{\langle x\rangle^4} - \operatorname{div}(\mathbf{E}) - 2k\frac{x\cdot\mathbf{E}}{\langle x\rangle^2},$$

et comme $\mathbf{E}$ vérifie (3.0.3) et (3.0.4), on voit que pour $|x| \geq R_0$ on a

$$\Psi_k^*(x) \geq \beta_0 - \frac{2k(2k+d-2)|x|^2 + 2kd}{\langle x\rangle^4} + (k_0 - 2k)\frac{x\cdot\mathbf{E}}{\langle x\rangle^2}.$$

Puisque $x\cdot\mathbf{E} \leq \alpha_2|x|^{\gamma_2} + \beta_2$ et que $\gamma_2 \leq 2$, on voit ainsi que Ψ_k^* est bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^d$, et par conséquent en posant

$$\lambda_0^* := -\frac{1}{2}\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\Psi_k^*(x), \tag{3.1.8}$$

on a l'inégalité de corecivité pour l'opérateur L^*

$$(-L^*\varphi|\varphi)_k \geq \|\nabla\varphi\|_{L^2_k}^2 - \lambda_0^*\|\varphi\|_{L^2_k}^2, \tag{3.1.9}$$

ce qui permet d'affirmer, en procédant comme ci-dessus, que L^* engendre aussi un semi-groupe continu $S_{L^*}(t)$ sur L^2_k. □

3.2 Positivité du semi-groupe $S_L(t)$

Dans ce paragraphe nous étudions la positivité du semi-groupe $(S_L(t))_{t\geq 0}$, en ce sens que si $f_0 \in L^2_k$ et $f_0 \geq 0$ presque partout, alors on a aussi $S_L(t)f_0 \geq 0$.

Pour prouver cela plusieurs méthodes existent. La méthode la plus intuitive est d'étudier la positivité de $-R_L(\lambda)$, où $R_L(\lambda)$ est la résolvante de l'opérateur $(L, D(L))$, puisque nous savons (voir par exemple K. Yosida [33]) que pour tout $t > 0$ fixé on a

$$S_L(t)f_0 = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}L\right)^{-n} f_0, \tag{3.2.1}$$

et naturellement

$$(I - tL/n)^{-1} = -\frac{n}{t}R_L\left(\frac{n}{t}\right).$$

De fait la positivité de $-R_L(\lambda)$ est une conséquence de celle du semi-groupe $S_L(t)$ car comme nous l'avons rappelé dans (2.2.3),

$$-R_L(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}S_L(t)dt.$$

pour $\lambda > \lambda_0$, où λ_0 est donné par la Proposition 3.1.3. Ainsi on peut affirmer que la positivité de $-R_L(\lambda)$, pour $\lambda > 0$ assez grand, est équivalente à la positivité de $S_L(t)$.

Il nous faut donc montrer que si $f \geq 0$ alors on a $R_L(\lambda)f \leq 0$ pour $\lambda > 0$ assez grand. On désignera le cône des fonctions positives ou nulles de L^2_k par

$$L^2_{k,+}(\mathbb{R}^d) := \left\{f \in L^2_k \,;\, f \geq 0 \quad \text{p.p}\right\}. \tag{3.2.2}$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $s \in \mathbb{R}$ on considère la fonction régulière

$$j_\varepsilon(s) := \sqrt{\varepsilon^2 + s^2} - \varepsilon. \tag{3.2.3}$$

On a

$$j'_\varepsilon(s) = \frac{s}{\sqrt{\varepsilon^2 + s^2}} \quad \text{et} \quad j''_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + s^2)^{3/2}}.$$

On voit immédiatement que $j''_\varepsilon > 0$, c'est-à-dire la fonction j_ε est strictement convexe. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors on a

$$\nabla j_\varepsilon(f) = j'_\varepsilon(f)\nabla f \quad \text{et} \quad \Delta j_\varepsilon(f) = j''_\varepsilon(f)|\nabla f|^2 + j'_\varepsilon(f)\Delta f.$$

Cela permet de prouver le résultat suivant, qui est l'inégalité de Kato pour le laplacien.

Lemme 3.2.1. *Soit $f \in D(L)$. Alors la fonction j_ε étant définie par (3.2.3), on a :*

(1) $\Delta j_\varepsilon(f) \to \Delta|f|$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
(2) $\Delta|f| \geq \operatorname{sgn}(f)\Delta f$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
(3) $j'_\varepsilon(f)\Delta f \to \operatorname{sgn}(f)\Delta f$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
(4) $j'_\varepsilon(f)\nabla f \to \operatorname{sgn}(f)\nabla f$ dans L^2_k.

Preuve. Soit $f \in D(L)$. Commençons par noter que $0 \leq j_\varepsilon(s) \leq |s|$ et que par ailleurs $j_\varepsilon(s) \to |s|$ pour s fixé et $\varepsilon \to 0$. Par conséquent on peut en déduire que $j_\varepsilon(f) \to |f|$ dans L^2_k, donc aussi dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, lorsque $\varepsilon \to 0$. On en déduit ainsi que

$$j'_\varepsilon(f)\partial_k f = \partial_k j_\varepsilon(f) \to \partial_k|f| \quad \text{dans } L^2_k \quad \text{et} \quad \Delta j_\varepsilon(f) \to \Delta|f| \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Comme $j''_\varepsilon(f)|\nabla f|^2 \geq 0$, on a

$$\Delta j_\varepsilon(f) = j''_\varepsilon(f)|\nabla f|^2 + j'_\varepsilon(f)\Delta f \geq j'_\varepsilon(f)\Delta f.$$

Puisque pour $s \neq 0$ on sait que $j'_\varepsilon(s) \to \operatorname{sgn}(s)$, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} j'_\varepsilon(f)\nabla f\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{sgn}(f)\nabla f\varphi\, dx,$$

et aussi

$$\int_{\mathbb{R}^d} j'_\varepsilon(f)\Delta f\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{sgn}(f)\Delta f\varphi\, dx$$

quand $\varepsilon \to 0$. On en conclut finalement que $\nabla|f| = \operatorname{sgn}(f)\nabla f$ et que $\Delta|f| \geq \operatorname{sgn}(f)\Delta f$. □

Lemme 3.2.2. *Supposons que l'hypothèse (H1) (3.0.3) soit vérifiée. Alors pour tout $f \in D(L)$ on a*

$$L|f| \geq \operatorname{sgn}(f)Lf,$$

au sens des distributions. Aussi, en notant $f^+ := \max(f, 0)$, pour $f \in D(L)$, au sens des distributions on a

$$L(f^+) \geq \frac{1}{2}\big(1 + \operatorname{sgn}(f)\big)Lf. \tag{3.2.4}$$

Preuve. Considérons la fonction j_ε définie par (3.2.3). Soit $f \in D(L)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi \geq 0$. Donc on a

$$\begin{aligned}\langle Lj_\varepsilon(f), \varphi\rangle &= \langle j_\varepsilon''(f)|\nabla f|^2 + j_\varepsilon'(f)\Delta f + \mathrm{div}(j_\varepsilon(f)\mathbf{E}), \varphi\rangle \\ &\geq \langle j_\varepsilon'(f)\Delta f + \mathrm{div}(j_\varepsilon(f)\mathbf{E}), \varphi\rangle.\end{aligned}$$

On sait que $j_\varepsilon'(f)\Delta f \to \mathrm{sgn}(f)\Delta f$ et que

$$\langle \mathrm{div}(j_\varepsilon(f)\mathbf{E}), \varphi\rangle = \langle j_\varepsilon'(f)\nabla f \cdot \mathbf{E} + j_\varepsilon(f)\mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle.$$

Le champ de vecteur $\mathbf{E}$ est dans $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ donc $\nabla f \cdot \mathbf{E} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Ce qui nous donne

$$\langle j_\varepsilon'(f)\nabla f \cdot \mathbf{E}, \varphi\rangle \to \langle \mathrm{sgn}(f)\nabla f \cdot \mathbf{E}, \varphi\rangle,$$

quand ε tend vers 0. En combinant le fait que $\mathrm{div}(\mathbf{E}) \in L^2_{\mathrm{loc}}$ et $|j_\varepsilon(f)| \leq |f|$ on obtient $j_\varepsilon(f)\mathrm{div}(\mathbf{E}) \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Par conséquent on a

$$\langle j_\varepsilon(f)\mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle \to \langle |f|\mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

D'autre part on a

$$\langle |f|\mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle = \langle \mathrm{sgn}(f) f \mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle.$$

Finalement on obtient

$$\langle L|f|, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle Lj_\varepsilon(f), \varphi\rangle \geq \langle \mathrm{sgn}(f)\Delta f + \nabla|f| \cdot \mathbf{E} + |f|\mathrm{div}(\mathbf{E}), \varphi\rangle.$$

Comme $\nabla|f| \cdot \mathbf{E} + |f|\mathrm{div}(\mathbf{E}) = \mathrm{sgn}(f)\big(\nabla f \cdot \mathbf{E} + f\mathrm{div}(\mathbf{E})\big)$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(f)\Delta f + \nabla|f| + |f|\mathrm{div}(\mathbf{E}) &= \mathrm{sgn}(f)\big(\Delta f + \nabla f \cdot \mathbf{E} + f\mathrm{div}(\mathbf{E})\big) \\ &= \mathrm{sgn}(f)Lf.\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi \geq 0$ on a

$$\langle L|f|, \varphi\rangle \geq \langle \mathrm{sgn}(f)Lf, \varphi\rangle,$$

et la preuve de la première inégalité du lemme est terminée.

Pour compléter la preuve de la deuxième inégalité, il suffit de remarquer que $f^+ = \big(f + |f|\big)/2$. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que le $S_L(t)$ est un semi-groupe positif.

Théorème 3.2.3. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) soient vérifiées et soit $(S_L(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe engendré par l'opérateur $(L, D(L))$. Alors $(S_L(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe positif sur L^2_k.*

Preuve. Comme nous l'avons rappelé ci-dessus, grâce à la formule (3.2.1), il suffit de montrer que si $f_0 \in L^2_k$ et $f_0 \geq 0$ est donnée et que $\lambda > 0$ est assez grand pour que $\lambda \in \rho(L)$, et $f \in D(L)$ est solution de

$$(L - \lambda I)f = f_0 \geq 0,$$

alors on a $f \leq 0$. Effectivement, prenons $\lambda > \lambda_0$ et notons que puisque $f^+ = (|f| + f)/2 \in H^1_k$ d'après le Lemme 3.2.1, en utilisant la deuxième forme de l'inégalité de Kato donnée par le Lemme 3.2.2 on a

$$2\big(L(f^+) - \lambda f^+\big) \geq \big(1 + \mathrm{sgn}(f)\big)(Lf - \lambda f) = \big(1 + \mathrm{sgn}(f)\big) f_0 \geq 0.$$

En prenant une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ telles que $\varphi_n \geq 0$ et $\varphi_n \to f^+$ dans H^1_k, en notant $\psi_n(x) := \langle x\rangle^{2k}\varphi_n(x)$ on voit que grâce à l'inégalité ci-dessus d'une part on a

$$\langle L(f^+) - \lambda f^+, \psi_n\rangle \geq 0,$$

et que d'autre part

$$\begin{aligned}\langle L(f^+) - \lambda f^+, \psi_n\rangle \quad &= -\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)\varphi_n + f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot\nabla\varphi_n(x)\,\langle x\rangle^{2k}\,dx \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)\varphi_n + f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot\varphi_n(x)\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx \\ &\quad -\lambda\int_{\mathbb{R}^d} f^+\varphi_n\langle x\rangle^{2k}dx,\end{aligned}$$

et que $\varphi_n \to f^+$ dans H^1_k, on peut vérifier que lorsque $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)\varphi_n \quad &+f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot\nabla\varphi_n(x)\,\langle x\rangle^{2k}\,dx \to \\ &\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)f^+ + f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot\nabla(f^+)(x)\,\langle x\rangle^{2k}\,dx\end{aligned}$$

et de même pour les autres termes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)\varphi_n \quad &+f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot\varphi_n(x)\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx \to \\ &\int_{\mathbb{R}^d} \big(\nabla(f^+)f^+ + f^+\mathbf{E}(x)\big)\cdot f^+(x)\nabla\langle x\rangle^{2k}\,dx\end{aligned}$$

et aussi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^+\varphi_n\langle x\rangle^{2k}dx \to \int_{\mathbb{R}^d} (f^+)^2\langle x\rangle^{2k}dx.$$

Finalement, lorsque $n \to \infty$ on a donc

$$0 \leq \langle L(f^+) - \lambda f^+, \psi_n\rangle \to \langle\langle x\rangle^k L(f^+), \langle x\rangle^k f^+\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d),H^1(\mathbb{R}^d)}$$

et en utilisant la deuxième inégalité du Lemme 3.1.1 on voit que

$$-\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(f^+)|^2\langle x\rangle^{2k}dx - (\lambda - \lambda_0)\int_{\mathbb{R}^d} |f^+|^2\langle x\rangle^{2k}dx \geq 0,$$

ce qui implique que $f^+ \equiv 0$, et la preuve du théorème est terminée. □

3.3 Existence dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

Comme nous l'avons signalé plus haut, l'opérateur L engendre aussi un semi-groupe dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$, et on dispose aussi d'un principe du maximum faible pour l'opérateur $L-\lambda I$, si λ est assez grand. En effet, commençons par noter que, par l'hypothèse (H2) (3.0.4), pour $|x| \geq R_0$ on a

$$-\mathrm{div}(\mathbf{E}(x)) \geq \beta_0 - \frac{k_0 x \cdot \mathbf{E}(x)}{1+|x|^2} \geq \beta_0 - \frac{k_0(\alpha_2|x|^{\gamma_2}+\beta_2)}{1+|x|^2},$$

et que $\gamma_2 \leq 2$, on voit que $-\mathrm{div}(\mathbf{E})$ est bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^d$. Par conséquent on peut trouver $\lambda_0^* > 0$ tel que

$$\lambda_0^* - \mathrm{div}(\mathbf{E}(x)) \geq 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème 3.3.1. *Soit $1 \leq p < \infty$ fixé, et soit $\lambda > 0$ tel qu'il existe $\mu_0 > 0$ pour que*

$$\lambda - \mathrm{div}(\boldsymbol{E}(x)) \geq \mu_0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d, \quad \text{et } \lambda > \lambda_0.$$

Alors si $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$Lf - \lambda f = \Delta f + \mathrm{div}(f\boldsymbol{E}) - \lambda f = f_0, \tag{3.3.1}$$

et de plus on a

$$(p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla |f|^{p/2}|^2 dx + \left(\frac{(p-1)\mu_0}{p} + \frac{\lambda}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_0|^p dx.$$

De manière plus précise en posant

$$c := c(\mu_0, \lambda, p) := \min\left(\frac{p}{\lambda}, \frac{p}{(p-1)\mu_0}\right),$$

on a

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c\,\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, si $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors on a $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{\mu_0}\|f_0\|_\infty.$$

Preuve. En effet, dans un premier temps supposons $p > 1$, et remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour $f_0 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f_0 \leq 0$. Alors on sait que l'équation (3.3.1) admet une solution unique dans $H_k^1(\mathbb{R}^d)$ et que $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$ entier, considérons les fonctions de troncature T_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_n(s) := s1_{[|s|\leq n]}(s) + n\,\mathrm{sgn}(s)1_{[|s|>n]}, \tag{3.3.2}$$

et multiplions l'équation (3.3.1) par f_n^{p-1} où

$$f_n := T_n(f) \in H_k^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

On obtient, après intégration par parties,

$$\begin{aligned}(p-1)\int_{\mathbb{R}^d}|f_n|^{p-2}\nabla f\cdot\nabla f_n\,dx &+\int_{\mathbb{R}^d}f(x)f_n(x)^{p-2}\mathbf{E}\cdot\nabla f_n\,dx\\ +\lambda\int_{\mathbb{R}^d}f(x)f_n(x)^{p-1}\,dx &=-\int_{\mathbb{R}^d}f_0(x)f_n(x)^{p-1}\,dx\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

Or puisque $\nabla f_n = 1_{[|f|\le n]}\nabla f$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f_n|^{p-2}\nabla f\cdot\nabla f_n\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}|f_n|^{p-2}|\nabla f_n|^2\,dx=\frac{4}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla|f_n|^{p/2}|^2dx,$$

et d'autre part puisque $f\nabla f_n = f_n\nabla f_n$, après une intégration par parties on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)f_n(x)^{p-2}\mathbf{E}\cdot\nabla f_n\,dx=-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{div}(\mathbf{E})|f_n|^p\,dx.$$

Ainsi, reportant ces relations dans (3.3.3), et en utilisant le fait que $ff_n^{p-1}\ge f_n^p$ et que $\lambda>0$, on voit que

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla|f_n|^{p/2}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^d}\big(\lambda-\frac{p-1}{p}\operatorname{div}(\mathbf{E})\big)f_n^p dx\le\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{p-1}.$$

Comme on a

$$\lambda-\frac{p-1}{p}\operatorname{div}(\mathbf{E})\ge\frac{p-1}{p}\mu_0+\frac{\lambda}{p}\ge\max\left(\frac{p-1}{p}\mu_0,\frac{\lambda}{p}\right),$$

on déduit d'abord que

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\min\left(\frac{p}{\lambda},\frac{p}{(p-1)\mu_0}\right)\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

puis en faisant tendre $n\to\infty$, on conclut que l'estimation donnée par le théorème est vraie.

Pour obtenir le résultat dans le cas $p=1$, on peut faire tendre $p\to 1$ dans les estimations obtenues, et après un argument de densité des fonctions régulières à support compact on conclut la preuve (on notera que l'on obtient à la limite $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\le\lambda^{-1}\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$).

Lorsque $f_0\in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $p\ge p_0$ fini on a $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et, pour p assez grand on a

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\min\left(\frac{p}{\lambda},\frac{p}{(p-1)\mu_0}\right)\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}=\frac{p}{(p-1)\mu_0}\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On voit ainsi que lorsque $p\to\infty$, on obtient la dernière estimation donnée par le théorème. □

Si on fixe λ comme dans le Théorème 3.3.1, et on pose $L_0 := L-\lambda I$, on peut voir que pour $1\le p<\infty$ et $f_0\in L^p(\mathbb{R}^d)$ il existe un unique $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$(I-L_0)f=f_0,\qquad\text{et}\quad\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

c'est-à-dire que L_0 est m-dissipatif et engendre un semi-groupe de contractions $S_{L_0}(t)$. Par ailleurs nous avons rappelé plus haut que si $f_0 \in L^2_k$ alors $S_{L_0}(t)f_0$ peut être défini comme la limite de $(I - tL_0/n)^{-n} f_0$ dans L^2_k. En utilisant le Théorème 3.3.1 et la remarque ci-dessus on voit donc que si $1 \leq p < \infty$ et $f_0 \in L^2_k \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\left(I - \frac{t}{n} L_0\right)^{-n} f_0 \to S_{L_0}(t) f_0 \quad \text{dans} \quad L^2_k \cap L^p(\mathbb{R}^d),$$

ce qui signifie que l'on peut considérer le semi-groupe $S_L(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} S_{L_0}(t)$ comme un semi-groupe continu sur $L^p(\mathbb{R}^d)$.

On peut ainsi énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.3.2. *Pour $1 \leq p < \infty$ le semi-groupe $S_L(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^p(\mathbb{R}^d)$. Si λ est fixé comme dans le Théorème 3.3.1, alors pour $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\|S_L(t) f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

et pour $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a $S_L(t)\, f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|S_L(t) f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Une fois que l'on sait que le semi-groupe agit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on peut montrer que la masse totale de la solution de l'équation de Fokker–Planck reste constante :

Proposition 3.3.3. *Si $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f := S_L(t) f_0$ est solution de l'équation de Fokker–Planck (3.0.2), alors pour tout $t \geq 0$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\, dx.$$

Preuve. En effet lorsque $p = 1$ dans le Théorème 3.3.2 et $f_0 \geq 0$ est un élément de $D(L) \subset L^2_k$, on sait que $f(t) := S_L(t) f_0$ vérifie $f \in C^1([0,T], L^2_k) \subset C^1([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ car nous avons choisi $k > d/2$. Soit $\zeta_0 \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction telle que

$$0 \leq \zeta_0 \leq 1, \qquad \zeta_0(s) = 1 \text{ pour } |s| \leq 1, \qquad \zeta_0(s) = 0 \text{ pour } |s| \geq 2,$$

et pour $n \geq 1$ posons $\zeta_n(x) := \zeta_0(|x|/n)$. En multipliant l'équation

$$\partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(f\mathbf{E}), \qquad f(0,x) = f_0(x) \geq 0$$

par ζ_n et en intégrant sur $(0,t) \times \mathbb{R}^d$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\zeta_n(x)\, dx = &\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\zeta_n(x)\, dx \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(s,x) \cdot \nabla \zeta_n(x)\, dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)\mathbf{E}(x) \cdot \nabla \zeta_n(x)\, dx ds. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

On a clairement $\nabla f \in C([0,T], L^2_k) \subset C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ et par conséquent

$$\left| \int_0^t \nabla f(s,x) \cdot \nabla \zeta_n(x)\, dx \right| \leq \frac{C}{n} \int_0^T \int_{[n\leq|x|\leq 2n]} |\nabla f(s,x)|\, dxds \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.

De manière analogue, du fait que $\mathbf{E}$ vérifie l'hypothèse (H1) (3.0.3), et que $\nabla\zeta_n(x) = (n|x|)^{-1}\zeta_0'(|x|/n)x$, on a

$$|\mathbf{E}(x) \cdot \nabla\zeta_n(x)| \leq \frac{C}{n} \langle x\rangle^{\gamma_2 - 1}\, 1_{[n\leq|x|\leq 2n]} \leq C\, 1_{[n\leq|x|\leq 2n]},$$

puisque $\gamma_2 - 1 \leq 1$ et pour $n \leq |x| \leq 2n$ on a $\langle x\rangle^{\gamma_2-1} \leq Cn$. Par conséquent le troisième terme de droite de (3.3.4) vérifie

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)\mathbf{E}(x) \cdot \nabla\zeta_n(x)\, dx\, ds \right| \leq C \int_0^T \int_{[n\leq|x|\leq 2n]} f(s,x)\, dxds \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, en passant à la limite $n \to \infty$ dans (3.3.4) on voit que la proposition est prouvée pour $f_0 \in D(L)$ et $f_0 \geq 0$. Par un argument de densité on voit que le résultat annoncé est vrai pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f_0 \geq 0$, puis par une décomposition de $f_0 = f_0^+ - f_0^-$ on conclut. □

Remarque 3.3.4. Puisque, comme on vient de le voir, $S_L(t)$ est un semi-groupe linéaire fortement continu dans tous les espaces avec poids L^2_k et dans les espaces de Lebesgue sans poids $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$, on pourrait utiliser un argument d'interpolation pour dire que $S_L(t)$ est aussi un semi-groupe linéaire fortement continu dans tous les espaces interpolés entre ces espaces (voir par exemple L. Tartar [31], chapitres 21 à 29).

Remarque 3.3.5. Noter que l'exposant λ dans le Théorème 3.3.2 n'est pas optimal et, de fait, pour prouver la convergence des solutions positives de l'équation d'évolution de Fokker–Planck vers une solution stationnaire, nous montrerons un peu plus loin que la borne spectrale de l'opérateur $(L, D(L))$ et l'exposant de Lyapounov $\omega(L)$ du semi-groupe $S_L(t)$, définis par la Définition 2.2.5, vérifient $s(L) \in \sigma(S_L(t))$ et $s(L) = \omega(L)$. □

Cette remarque jouera un rôle important dans la suite. Car si nous parvenons à décaler le spectre de l'opérateur $(L, D(L))$ vers la gauche en introduisant un nouvel opérateur $(A, D(A))$ vérifiant $\omega(A) < 0$, et tel que $S_L(t)$ puisse s'exprimer de manière simple en termes de $S_A(t)$, on peut obtenir dans un premier temps le caractère uniformément borné en temps du semi-groupe $S_L(t)$. Nous reviendrons sur toutes ces questions plus en détails dans le paragraphe consacré à la stabilité asymptotique. □

3.4 Existence dans L^p_k avec $1 < p < \infty$

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'équation de Fokker–Planck linéaire dans les espaces L^p_k pour $p > 1$ fini.

A certains moments nous utiliserons des fonctions de troncature définies de la manière suivante. Commençons par choisir une fonction $\zeta_0 \in \mathscr{C}_c^\infty\big([0,\,+\infty[\big)$ telle que

$$\zeta_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \geq 2. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on définit la suite $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ comme suit

$$\zeta_n(x) := \zeta_0\left(\frac{|x|}{n}\right). \tag{3.4.2}$$

De la définition de ζ_n on déduit que pour une certaine constante $c > 0$ on a

$$|\nabla\zeta_n(x)| \leq \frac{c}{n} 1_{[n\leq|x|\leq 2n]}(x), \quad \text{et} \quad |\partial_{kj}\zeta_n(x)| \leq \frac{c}{n^2} 1_{[n\leq|x|\leq 2n]}(x). \tag{3.4.3}$$

Lemme 3.4.1. *Pour $\varphi \in \mathscr{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} -\Delta\varphi \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk} dx = {} & \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla|\langle x\rangle^k\varphi|^{p/2}|^2 dx \\ & - \frac{2k}{p} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(d-2)|x|^2 + d}{\langle x\rangle^4} |\varphi|^p \langle x\rangle^{pk} dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(k-d+2)|x|^2 - kd}{\langle x\rangle^4} |\varphi|^p \langle x\rangle^{pk} dx. \end{aligned}$$

Preuve. Posons $v := \langle x\rangle^k\varphi$. En utilisant (2.1.1) et (2.1.2) (en y remplaçant k par $-k$) on vérifie facilement que

$$\Delta\varphi = \Delta(\langle x\rangle^{-k} v) = \left(\Delta v - \frac{2kx}{\langle x\rangle^2} \cdot \nabla v + \frac{k(k-d+2)|x|^2 - kd}{\langle x\rangle^4} v\right) \langle x\rangle^{-k}.$$

Puisque $\Delta\varphi \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk} = \Delta(\langle x\rangle^{-k} v) \cdot |v|^{p-2} v \langle x\rangle^k$, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} -\Delta\varphi \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk} dx = {} & \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\Delta v + \frac{2kx}{\langle x\rangle^2} \cdot \nabla v\right) |v|^{p-2} v dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(k-d+2)|x|^2 - kd}{\langle x\rangle^4} |v|^p dx. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} -\Delta v \cdot |v|^{p-2} v dx = (p-1) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 |v|^{p-2} dx = \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla|v|^{p/2}|^2 dx,$$

et remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{2kx}{\langle x\rangle^2} \cdot \nabla v \cdot |v|^{p-2} v dx = -\frac{2k}{p} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(d-2)|x|^2 + d}{\langle x\rangle^4} |v|^p dx,$$

puis remplacer v par $\langle x\rangle^k\varphi$ pour terminer la preuve du lemme. □

On vérifie ensuite une égalité concernant le terme $\mathrm{div}(f\mathbf{E})$ dans l'équation de Fokker–Planck.

Lemme 3.4.2. *Pour $\varphi \in \mathscr{C}^2_c(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{E}) \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{kx}{\langle x\rangle^2} \cdot \boldsymbol{E} - \frac{p-1}{p}\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) \right) |\varphi|^p \langle x\rangle^{pk} dx.$$

Démonstration. De nouveau en posant $v := \langle x\rangle^k \varphi$ on a

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(\varphi \mathbf{E}) \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk} dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\big(\langle x\rangle^{-k} v\mathbf{E}\big) \cdot |v|^{p-2} v\langle x\rangle^{k} dx,$$

et il suffit de déterminer le terme de droite de cette égalité. Or il est clair, par intégrations par parties, que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\big(\langle x\rangle^{-k} v\mathbf{E}\big) \cdot |v|^{p-2} v\langle x\rangle^{k} dx &= (p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{p-2} v\, \nabla v \cdot \mathbf{E}\, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} |v|^p \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla\langle x\rangle^k}{\langle x\rangle^k}\, dx. \end{aligned}$$

La première intégrale de droite s'écrit, en utilisant le fait que

$$|v|^{p-2} v\, \nabla v = \frac{1}{p}\nabla |v|^p$$

et en intégrant par parties

$$(p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{p-2} v\, \nabla v \cdot \mathbf{E}\, dx = -\frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^p \mathrm{div}(\mathbf{E})\, dx,$$

puis en utilisant (2.1.1), on obtient

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\big(\langle x\rangle^{-k} v\mathbf{E}\big) \cdot |v|^{p-2} v\langle x\rangle^{k} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{kx}{\langle x\rangle^2} \cdot \mathbf{E} - \frac{p-1}{p}\mathrm{div}(\mathbf{E}) \right) |v|^p dx.$$

En remplaçant v par $\langle x\rangle^k \varphi$ on obtient l'expression que l'on voulait prouver dans le lemme. □

Les deux lemmes précédents conduisent au théorème suivant

Théorème 3.4.3. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) données par (3.0.3) et (3.0.4) soient vérifiées et $k \geq k_0$. Alors,pour tout $p \in (1,\infty)$, il existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ l'opérateur $(L - \lambda I, D(L))$ où*

$$D(L) := \big\{ f \in L^p_k \,;\; \langle x\rangle^k |f|^{p/2} \in H^1(\mathbb{R}^d),\; Lf \in L^p_k \big\}$$

soit un opérateur m-dissipatif sur L^p_k.

Preuve. On peut fixer un exposant k_1 assez grand pour que

$$k_1 > k+1+\frac{d}{2} \quad \text{si } 1<p<2, \qquad \text{et } k_1 > pk+1 \quad \text{si } p \geq 2. \tag{3.4.4}$$

de sorte que pour l'opérateur L qui est défini par (3.0.1), en remplaçant k par k_1 dans la définition de λ_0 donnée par (3.1.3), on sait qu'il existe $\lambda_0(k_1) \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \geq 1+\lambda_0(k_1)$ et toute fonction $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $g \geq 0$, il existe $f \in H^1_{k_1}$ solution unique de

$$-Lf+\lambda f = -\Delta f - \operatorname{div}(f\mathbf{E}) + \lambda f = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

On sait de plus que $f \geq 0$, et par le principe du maximum faible donné par le Théorème 3.3.1, on sait aussi que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ (on prend par exemple $\mu_0 \geq 1$ dans le Théorème 3.3.1). On peut donc multiplier cette équation par $f^{p-1}\langle x\rangle^{pk}\zeta_n$, où les fonctions de troncature ont été définies par (3.4.2). En procédant comme dans la preuve des lemmes ci-dessus, en effectuant des intégrations par parties qui sont justifiées facilement, on voit que

$$(p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 f^{p-1}\langle x\rangle^{pk}\zeta_n\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} F_n(x) f^p \langle x\rangle^{pk} dx = \int_{\mathbb{R}^d} g f^{p-1}\langle x\rangle^{pk}\zeta_n dx, \tag{3.4.5}$$

où on a posé

$$F_n(x) := F_1(x)\zeta_n(x) + F_{2,n}(x),$$

et

$$F_1(x) := \lambda - \frac{\Delta\langle x\rangle^{pk}}{p\langle x\rangle^{pk}} - \frac{p-1}{p}\operatorname{div}(\mathbf{E}) + \mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\langle x\rangle^{pk}}{p\langle x\rangle^{pk}}.$$
$$F_{2,n}(x) := 2\frac{\nabla\langle x\rangle^{pk}}{p\langle x\rangle^{pk}}\cdot\nabla\zeta_n + \frac{\Delta\zeta_n}{p} + \frac{\mathbf{E}\cdot\nabla\zeta_n}{p}.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{E}$ vérifie les conditions (3.0.3) et (3.0.4), on peut voir facilement qu'il existe $\lambda_0^* \geq \lambda_0(k_1)$ (dépendant de p, k et des constantes du champ de forces $\mathbf{E}$ données par (3.0.3) et (3.0.4)) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on ait (par exemple)

$$F_1(x) \geq 1.$$

On voit ainsi que (3.4.5) donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^{pk}\zeta_n(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g f^{p-1}\langle x\rangle^{pk}\zeta_n dx + \int_{\mathbb{R}^d} |F_{2,n}(x)| f^p\langle x\rangle^{pk} dx. \tag{3.4.6}$$

Or d'après la définition de $F_{2,n}$ et du fait que ζ_n vérifie (3.4.3), alors que $\mathbf{E}$ vérifie (3.0.3), on voit facilement que pour une constante $C>0$ indépendante de n on a

$$|F_{2,n}(x)| \leq \frac{C}{n} 1_{[n\leq|x|\leq 2n]}\langle x\rangle^2 \leq C 1_{[n\leq|x|\leq 2n]}\langle x\rangle,$$

de sorte que finalement si $p \geq 2$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F_{2,n}(x)| f^p \langle x \rangle^{pk} dx \leq C \|f\|_\infty^{p-2} \int_{[n \leq |x| \leq 2n]} f^2 \langle x \rangle^{pk+1} dx \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, car $f \in L^2_{k_1}$ et k_1 vérifie (3.4.4) lorsque $p \geq 2$.

Si $1 < p < 2$ alors en notant $\Omega_n := [n \leq |x| \leq 2n]$ et appliquant l'inégalité de Hölder entre $L^{2/p}(\Omega_n)$ et $L^{2/(2-p)}(\Omega_n)$, si on définit l'exposant

$$m := \frac{2(p(k_1 - k) - 1)}{(2 - p)},$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |F_{2,n}(x)| f^p \langle x \rangle^{pk} dx &\leq C \int_{\Omega_n} f^p \langle x \rangle^{pk+1} dx \\ &\leq \|f 1_{\Omega_n}\|^p_{L^2_{k_1}} \left(\int_{\Omega_n} \langle x \rangle^{-m} \right)^{(2-p)/p} \to 0, \end{aligned}$$

car d'une part $f \in L^2_{k_1}$ et d'autre part avec le choix de k_1 dans (3.4.4) lorsque $1 < p < 2$, on a $m > d$.

On voit finalement, en utilisant l'inégalité de Young $ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$, avec $a := g$ et $b := f^{p-1}$, dans (3.4.6) que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^p \langle x \rangle^{pk} \zeta_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g^p \langle x \rangle^{pk} \zeta_n dx + p' \int_{\mathbb{R}^d} |F_{2,n}(x)| f^p \langle x \rangle^{pk} dx,$$

d'où on déduit, en passant à la limite sur $n \to \infty$, que $\|f\|_{L^p_k} \leq \|g\|_{L^p_k}$. Il est clair que (3.4.5) donne aussi l'estimation

$$(p-1) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 f^{p-1} \langle x \rangle^{pk} \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} f^p \langle x \rangle^{pk} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g|^p \langle x \rangle^{pk} dx.$$

En utilisant un argument de densité des fonctions $g \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ dans L^p_k, on conclut la preuve du théorème. □

Dans le paragraphe suivant nous étudions l'*ultracontractivité* du semi-groupe $S_L(t)$.

3.5 Ultracontractivité de $(S_L(t))_{t \geq 0}$

Dans cette section nous voulons prouver que pour $t > 0$ le semi-groupe $S_L(t)$ définit un opérateur borné de L^2_k dans L^∞_k, autrement dit que le semi-groupe $S_L(t)$ est ultra-contractif. Pour montrer cela nous allons utiliser le fait que cette propriété est une conséquence de l'inégalité de Nash. En réalité, pour les semi-groupes auto-adjoints agissant dans un espace de Lebesgue $L^2(d\mu)$, il y a équivalence entre le fait que le semi-groupe soit ultracontractif et le fait que son générateur infinitésimal vérifie l'inégalité de Nash (voir E. B. Davies & B. Simon [10] et [11], et pour un exposé complet sur le sujet E.B. Davies [9]. Pour le cas des opérateurs non-autoadjoints voir O. Kavian [18]).

Lemme 3.5.1. (Inégalité de Nash). *Supposons que $k+d-2 \geq 0$. Il existe une constante $c>0$ telle que si $f \in L^1_k \cap D(L)$ alors on ait*

$$\|f\|_{L^2_k}^{2+4/d} \leq c\,\|f\|_{L^1_k}^{4/d} \cdot \|\nabla f\|_{L^2_k}^2. \tag{3.5.1}$$

En particulier si λ_0 et $k \geq k_0$ sont comme dans le Lemme 3.1.1, alors pour tout $f \in L^1_k \cap D(L)$ on a

$$\|f\|_{L^2_k}^{2+4/d} \leq c\,\|f\|_{L^1_k}^{4/d} (\lambda_0 f - Lf|f)_{L^2_k}, \tag{3.5.2}$$

et aussi pour $f \in L^1_k \cap D(L^*)$ (où $L^*f = \Delta f - \boldsymbol{E}\cdot\nabla f$ et λ_0^* est donné par (3.1.8))

$$\|f\|_{L^2_k}^{2+4/d} \leq c\,\|f\|_{L^1_k}^{4/d} (\lambda_0^* f - L^*f|f)_{L^2_k}. \tag{3.5.3}$$

Preuve. En effet si $f \in L^1_k \cap D(L)$ on sait que $f\langle x\rangle^k \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. En posant $\varphi = f\langle x\rangle^k$, alors on a $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, et en appliquant l'inégalité de Nash classique on a

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{2+4/d} \leq c\,\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{4/d} \cdot \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \tag{3.5.4}$$

Or

$$\nabla\varphi = \langle x\rangle^k \nabla f + f\nabla\langle x\rangle^k,$$

et par une intégration par parties on voit facilement que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 dx = \|\nabla f\|_{L^2_k}^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big(\Delta\langle x\rangle^{2k} - 2|\nabla\langle x\rangle^k|^2\big) f(x)^2 dx.$$

En utilisant (2.1.1) d'une part et (2.1.2) (où on remplace k par $2k$), on voit que

$$\Delta\langle x\rangle^{2k} - 2|\nabla\langle x\rangle^k|^2 = \big(2k(k+d-2)|x|^2 + 2kd\big)\langle x\rangle^{2k} \geq 0,$$

de sorte que $\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|\nabla f\|_{L^2_k}^2$, et de (3.5.4) on déduit (3.5.1).

Lorsque λ_0, k et k_0 sont comme dans le Lemme 3.1.1, alors pour tout $f \in D(L)$ on a

$$((\lambda_0 I - L)f|f)_{L^2_k} \geq \|\nabla f\|_{L^2_k}^2,$$

ce qui permet d'obtenir (3.5.2) à partir de (3.5.1). Enfin (3.5.3) est une conséquence de (3.5.1) et de l'inégalité (3.1.9) de la Remarque 3.1.5. □

Théorème 3.5.2. *Soit $(S_L(t))_{t\geq 0}$ le $\mathscr{C}_0$-semi-groupe engendré par l'opérateur $(L, D(L))$. Alors $(S_L(t))_{t\geq 0}$ est ultracontractif, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $c>0$ et $\lambda \geq 0$ telles que pour $f_0 \in L^1_k$*

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^2_k} \leq c\,t^{-d/4}\mathrm{e}^{\lambda t}\|f_0\|_{L^1_k}, \tag{3.5.5}$$

$$\|S_{L^*}(t)f_0\|_{L^2_k} \leq c\,t^{-d/4}\mathrm{e}^{\lambda t}\|f_0\|_{L^1_k} \tag{3.5.6}$$

et aussi

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c\,t^{-d/2}\mathrm{e}^{\lambda t}\|f_0\|_{L^1_k} \tag{3.5.7}$$

$$\|S_{L^*}(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c\,t^{-d/2}\mathrm{e}^{\lambda t}\|f_0\|_{L^1_k}. \tag{3.5.8}$$

Preuve. Nous suivons et adaptons ici la preuve classique que l'on peut trouver dans le livre de E.B. Davies [9]. Notons L_* l'adjoint de L_0 pour le produit scalaire de L^2_k, et par L^* l'adjoint de L pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On va fixer un réel $\lambda \geq \max(\lambda_0, \lambda_0^*)$ assez grand, où λ_0 et λ_0^* sont comme dans le Lemme 3.5.1, de telle sorte que les opérateurs

$$L_0 := L - \lambda I, \quad L_0^* = L^* - \lambda I, \quad L_{0*} := L_* - \lambda I$$

soient des opérateurs m-dissipatifs et engendrent des semi-groupes de contractions dans L^1_k et dans L^2_k. Soit alors $f(t) := S_{L_0}(t)f_0$ et $\varphi(t) := \|f(t)\|^2_{L^2_k}$, pour $f_0 \in D(L) \cap L^1_k$. On a

$$-\varphi'(t) = -2(\partial_t f(t)|f(t))_{L^2_k} = -2(L_0 f(t)|f(t)) \geq c\,\|f(t)\|^{2+4/d}\|f(t)\|^{-4/d}_{L^1_k}.$$

Or $\|f(t)\|_{L^1_k} \leq \|f_0\|_{L^1_k}$ puisque $S_{L_0}(t)$ est un semi-groupe de contractions sur L^1_k. Par conséquent on a

$$-\varphi'(t) \geq c\,\|f_0\|^{-4/d}_{L^1_k}\varphi(t)^{1+2/d},$$

d'où on déduit que $(\varphi(t)^{-2/d})' \geq c\,\|f_0\|^{-4/d}_{L^1_k}$ et par conséquent

$$\varphi(t)^{-2/d} \geq \varphi(0)^{-2/d} + c\,t\,\|f_0\|^{-4/d}_{L^1_k} \geq c\,t\,\|f_0\|^{-4/d}_{L^1_k},$$

ce qui donne l'inégalité (3.5.5), en remarquant que $S_L(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}S_{L_0}(t)$. Comme l'opérateur $L_0^* = L^* - \lambda I$ (qui correspond à l'adjoint de L_0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) vérifie (3.5.3), il est clair que l'on peut procéder de la même manière avec $f(t) := S_{L_0^*}(t)f_0$ et obtenir l'inégalité d'ultracontractivité (3.5.6) pour l'opérateur L^*.

Pour obtenir l'inégalité (3.5.7), commençons par observer que de nouveau nous avons l'inégalité de Nash pour $f \in D(L_*) \cap L^1_k$

$$\|f\|^{2+4/d}_{L^2_k} \leq c\,\|f\|^{4/d}_{L^1_k}\|\nabla f\|^2_{L^2_k} \leq c\,\|f\|^{4/d}_{L^1_k}(-L_{0*}f|f)_{L^2_k},$$

et par conséquent en procédant comme ci-dessus on a

$$\|S_{L_{0*}}(t)f_0\|_{L^2_k} \leq c\,t^{-d/4}\|f_0\|_{L^1_k}.$$

Or $S_{L_{0*}}(t)$ n'est autre que $(S_{L_0}(t))_*$, l'adjoint du semi-groupe $S_{L_0}(t)$ pour le produit scalaire de L^2_k. Comme $(S_{L_0}(t))_* : L^1_k \longrightarrow L^2_k$ est un opérateur linéaire continu avec une norme ne dépassant pas $ct^{-d/4}$, on en déduit donc que son adjoint pour le produit scalaire de L^2_k, c'est-à-dire $S_{L_0}(t)$, est un opérateur linéaire continu de $(L^2_k)' \longrightarrow (L^1_k)'$, avec une norme ne dépassant pas $ct^{-d/4}$. Par ailleurs, comme nous l'avons noté à la Remarque 2.1.8, en identifiant $(L^2_k)'$ à L^2_k, alors on peut identifier $(L^1_k)'$ à L^∞_k. En fin de compte on a donc

$$\|S_{L_0}(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c\,t^{-d/4}\|f_0\|_{L^2_k},$$

et en écrivant que $S_{L_0}(t)f_0 = S_{L_0}(t/2)S_{L_0}(t/2)f_0$ on a

$$\|S_{L_0}(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c\,t^{-d/4}\|S_{L_0}(t/2)f_0\|_{L^2_k} \leq c\,t^{-d/2}\|f_0\|_{L^1_k},$$

ce qui donne (3.5.7). Il est clair que la preuve de (3.5.8) suit les mêmes arguments et ainsi le théorème est prouvé. □

Afin d'aborder la question de l'existence d'une solution stationnaire, au chapitre suivant nous allons décomposer le semi-groupe $S_L(t)$ puis en déduire qu'en réalité $S_L(t)$ est un semi-groupe borné.

Chapitre 4

Décomposition du semi-groupe $S_L(t)$

Dans cette partie nous introduisons la décomposition de l'opérateur L, sous la forme introduite au paragraphe 2.3. Soient $R > 0$ et $M > 0$ des réels qui seront fixés un peu plus loin, et $\zeta_0 \in \mathscr{C}_c^\infty$ une fonction telle que ζ_0 soit décroissante au sens large sur $(0, +\infty)$ et de plus

$$0 \leq \zeta_0 \leq 1, \quad \zeta_0(s) = 1 \text{ pour } |s| \leq 1, \quad \zeta(s) = 0 \text{ pour } |s| \geq 2.$$

On noter alors, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\zeta_R(x) := \zeta_0(R^{-1}|x|),$$

puis on considère l'opérateur linéaire agissant dans L^2_k défini par

$$Af := Lf - M\zeta_R f, \qquad \text{pour } f \in D(A) := D(L). \tag{4.0.1}$$

4.1 Choix de la décomposition

Nous allons voir que l'on peut choisir M et R pour que le spectre de A soit décalé à gauche par rapport à celui de L, de telle sorte que le semi-groupe $S_A(t)$ devienne un semi-groupe de contractions, et même dans un certain sens exponentiellement décroissant, malgré le fait que la « perturbation » introduite par le terme $M\zeta_R f$ soit bornée et identiquement nulle pour $|x| > 2R$. Pour la clarté de l'exposé nous séparons l'étude de $S_A(t)$ dans L^2_k de son étude dans les espaces L^p_k et $L^p(\mathbb{R}^d)$, comme nous l'avons fait pour l'étude du semi-groupe $S_L(t)$.

Lemme 4.1.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) données par (3.0.3) et (3.0.4) soient vérifiées, et soit $k > k_0 + 2 - \gamma_1$. Pour $f \in L^2_k$ on pose $Bf := M\zeta_R f$, et on considère l'opérateur $A f := L f - B f$ pour $f \in D(A) := D(L)$. Alors il existe $M_{0*}, R_{0*} > 0$ et une constante $\omega_0 > 0$ tels que pour $M \geq M_{0*}$ et $R \geq R_{0*}$, pour tout $\varphi \in D(L)$ on ait*

$$(-A\varphi|\varphi)_{L^2 k} \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \langle x\rangle^k \varphi|^2 dx + \omega_0 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^2 \langle x\rangle^{2k-2+\gamma_1} dx. \tag{4.1.1}$$

Par ailleurs pour une constante $c_0 > 0$ on a

$$(-A\varphi|\varphi)_{L^2_k} \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2\langle x\rangle^{2k}dx + c_0\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)^2\langle x\rangle^{2k-2+\gamma_1}dx. \tag{4.1.2}$$

Preuve. Pour $\varphi \in D(L) = D(A)$, on a $(-A\varphi|\varphi)_{L^2_k} = (-L\varphi + B\varphi|\varphi)_{L^2_k}$, et en utilisant les Lemmes 3.4.1 et 3.4.2 avec $p = 2$, on voit facilement que

$$(-A\varphi|\varphi)_{L^2_k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\langle x\rangle^k\varphi(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^d}\Psi(M,R,x)\varphi(x)^2\langle x\rangle^{2k}dx, \tag{4.1.3}$$

où la fonction $\Psi(M,R,x)$ est définie par

$$\Psi(M,R,x) = M\zeta_R(x) + \frac{kx}{1+|x|^2}\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(\mathbf{E}) - \frac{k^2|x|^2}{(1+|x|^2)^2}. \tag{4.1.4}$$

Comme nous avons les conditions (3.0.3)–(3.0.4), alors pour $|x| > R_0$ on a

$$\Psi(M,R,x) \geq M\zeta_R(x) + \frac{2k-k_0}{2}\cdot\frac{\alpha_1|x|^{2+\gamma_1} + (\beta_1 - k^2)|x|^2 + \alpha_1|x|^2 + \beta_1}{\langle x\rangle^4},$$

et il est clair que l'on peut fixer $R_1 > R_0$ pour que pour $|x| \geq R_1$ on ait

$$\alpha_1|x|^{2+\gamma_1} + (\beta_1 - k^2)|x|^2 + \alpha_1|x|^2 + \beta_1 \geq \frac{\alpha_1}{2}\langle x\rangle^{2+\gamma_1}.$$

On aura ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{tel que } |x| \geq R_1, \qquad \Psi(M,R_1,x) \geq \frac{\alpha_1}{2}\langle x\rangle^{-2+\gamma_1}.$$

Pour R_1 fixé de cette manière, on pose

$$M_0 := 1 - \frac{2k-k_0}{2}\min_{|x|\leq R_1}\frac{\alpha_1|x|^{2+\gamma_1} + (\beta_1 - k^2)|x|^2 + \alpha_1|x|^2 + \beta_1}{\langle x\rangle^4},$$

de sorte que si $M \geq M_1 := \max(M_0, 0)$ et $R \geq R_1$, alors pour $|x| \leq R$ on aura

$$\Psi(M,R,x) \geq (M - M_1) + 1.$$

On voit ainsi qu'avec le choix de $M \geq M_1$ et $R \geq R_1$, puisque $M\zeta_R \geq M_1\zeta_{R_1}$, pour une certaine constante $\omega_0 > 0$ dépendant uniquement de M_1, R_1, ainsi que de k et de $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$, et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on aura

$$\Psi(M,R,x) \geq \omega_0\,\langle x\rangle^{-2+\gamma_1},$$

et par conséquent pour $\varphi \in D(L)$ on aura

$$(-A\varphi|\varphi)_{L^2_k} \geq \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\langle x\rangle^k\varphi|^2dx + \omega_0\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2\langle x\rangle^{2k-2+\gamma_1}dx,$$

et cela prouve (4.1.1), c'est-à-dire que l'opérateur $(A, D(L))$ est un opérateur m-dissipatif sur L^2_k.

Pour établir l'inégalité (4.1.2) qui nous sera utile pour montrer que $S_A(t)$ est ultracontactif, observons qu'en utilisant l'égalité

$$\nabla(\langle x\rangle^k\varphi) = \langle x\rangle^k\nabla\varphi + \varphi\nabla\langle x\rangle^k,$$

et en effectuant une intégration par parties on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\langle x\rangle^k\varphi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2\langle x\rangle^{2k}dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2\left(\frac{|\nabla\langle x\rangle^k|^2}{\langle x\rangle^{2k}} - \frac{\Delta\langle x\rangle^{2k}}{4\langle x\rangle^{2k}}\right)\langle x\rangle^{2k}dx.$$

En utilisant la relation (4.1.3) on voit ainsi que

$$(-A\varphi|\varphi)_{L^2_k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)|^2\langle x\rangle^{2k}dx + \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\Psi}(M,R,x)\varphi(x)^2\langle x\rangle^{2k}dx,$$

où on a posé, après avoir utilisé les relations (2.1.1) et (2.1.2),

$$\widetilde{\Psi}(M,R,x) := \Psi(M,R,x) - \frac{2k(d-2)|x|^2 + 2kd}{4\langle x\rangle^4}.$$

Du fait que la différence entre $\widetilde{\Psi}$ et Ψ est un terme d'ordre $\langle x\rangle^{-2}$, et que pour $|x| \geq R_1$ on a $\Psi(M,R_1,x) \geq \alpha_1\langle x\rangle^{-2+\gamma_1}$ en procédant comme ci-dessus on voit qu'il existe $R_{0*} \geq R_1$ et $M_{0*} \geq M_1$ et une constante $c_0 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on ait

$$\widetilde{\Psi}(M_{0*},R_{0*},x) \geq c_0\langle x\rangle^{-2+\gamma_1},$$

et ainsi l'inégalité (4.1.2) est prouvée lorsque $M \geq M_{0*}$ et $R \geq R_{0*}$. □

On déduit de ce que nous venons de prouver le résultat suivant :

Lemme 4.1.2. *Avec les notations du Lemme 4.1.1, pour $M \geq M_{0*}$ et $R \geq R_{0*}$, le semi-groupe $S_A(t)$ est un semi-groupe de contractions sur L^2_k et de plus pour tout $f_0 \in L^2_k$ et tout $t \geq 0$ on a*

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^2_{k-1+\frac{\gamma_1}{2}}} \leq \mathrm{e}^{-\omega_0 t}\|f_0\|_{L^2_k}. \tag{4.1.5}$$

Preuve. Comme le second membre de l'inégalité (4.1.1) est positif, cela signifie que l'opérateur $(A, D(L))$ est un opérateur m-dissipatif sur L^2_k et par conséquent le semi-groupe $S_A(t)$ est un semi-groupe de contractions sur L^2_k.

Pour montrer la propriété (4.1.5), si $f_0 \in D(L)$ est donnée, considérons $f(t) := S_A(t)f_0$ pour $t \geq 0$. Comme $\partial_t f = Af$, on vérifie facilement que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)^2\langle x\rangle^{2k}dx = 2(Af|f)_{L^2_k} \leq -2\omega_0\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^2\langle x\rangle^{2k+\gamma_1-2}dx,$$

d'où on déduit, puisque $\gamma_1 \leq 2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^2\langle x\rangle^{2k+\gamma_1-2}dxds &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^2\langle x\rangle^{2k}dxds\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_0(x)|^2\langle x\rangle^{2k}dx\\ &\quad - 2\omega_0\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} |f(s,x)|^2\langle x\rangle^{2k+\gamma_1-2}dxds.\end{aligned}$$

En posant $\psi(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^2 \langle x\rangle^{2k+\gamma_1-2} dx$, on voit que

$$\psi(t) \leq \|f_0\|^2_{L^2_k} - 2\omega_0 \int_0^t \psi(s) ds,$$

et le lemme classique de Gronwall implique que l'on a

$$\psi(t) \leq \mathrm{e}^{-2\omega_0 t} \|f_0\|^2_{L^2_k}$$

et l'inégalité (4.1.5) est prouvée. □

Comme dans la preuve du Théorème 3.2.3, on peut montrer que pour tout $M \geq 0$ et tout $R > 0$ fixés, si $\lambda > 0$ est assez grand et $f_0 \in L^2_k$ est une fonction positive, alors l'équation

$$Af - \lambda f = f_0$$

admet une unique solution $f \in D(A) = D(L)$, et vérifie $f \leq 0$. On a ainsi le résultat suivant :

Théorème 4.1.3. *Sous les hypothèses du Lemme 4.1.2, le semi-groupe $S_A(t)$ est un semi-groupe positif, en ce sens que si $f_0 \in L^2_k$ et $f_0 \geq 0$, alors pour tout $t \geq 0$ on a $S_A(t) f_0 \geq 0$.*

Théorème 4.1.4. *Avec les notations du Lemme 4.1.1, il existe $\widetilde{\omega}_2 > 0$ tels que si $M \geq 0$ et $R \geq 0$, pour tout p vérifiant $1 \leq p < \infty$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ on ait*

$$-\int_{\mathbb{R}^d} A\varphi \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi dx \geq \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla |\varphi|^{p/2}|^2 dx - \frac{\widetilde{\omega}_2\,(p-1)}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^p \langle x\rangle^{\gamma_1-2} dx$$

Le semi-groupe $S_A(t)$ est un semi-groupe continu sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|S_A(t) f_0\|_{L^p_{\frac{\gamma_1-2}{p}}} \leq \mathrm{e}^{\widetilde{\omega}_2 (p-1)t/p} \|f_0\|_{L^p}.$$

Aussi pour $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|S_A(t) f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \mathrm{e}^{\widetilde{\omega}_2 t} \|f_0\|_{L^\infty}.$$

En particulier $S_A(t)$ est un semi-groupe de contractions sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Pour $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, en utilisant l'égalité (4.1.8) avec $k = 0$, on voit facilement que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^d} A\varphi \cdot |\varphi|^{p-2}\varphi dx = \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla |\varphi|^{p/2}|^2 dx \\ + \int_{\mathbb{R}^d} \left(M\zeta_R(x) - \frac{p-1}{p} \mathrm{div}(\mathbf{E}) \right) |\varphi|^p dx. \end{aligned}$$

Mais grâce aux hypothèses (3.0.3) et (3.0.4) on sait que

$$-\mathrm{div}(\mathbf{E}) \leq -k_0 \frac{\alpha_2 |x|^{\gamma_2} + \beta_2}{\langle x\rangle^2},$$

et donc

$$M\zeta_R(x) - \frac{p-1}{p}\mathrm{div}(\mathbf{E}) \geq -\frac{p-1}{p}\, k_0 \frac{\alpha_2|x|^{\gamma_2}+\beta_2}{\langle x\rangle^2}.$$

Mais il est clair que pour une constante $\widetilde{\omega}_2 > 0$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$k_0 \frac{\alpha_2|x|^{\gamma_2}+\beta_2}{\langle x\rangle^2} \leq \widetilde{\omega}_2\, \langle x\rangle^{\gamma_2-2},$$

et on en déduit finalement que l'inégalité annoncée dans le théorème est vraie, et les autres propriétés annoncées sont prouvées comme précédemment. En particulier, si $p = 1$, on voit que si $\varphi \geq 0$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} A\varphi dx \leq 0$, ce qui permet de montrer que $S_A(t)$ est un semi-groupe de contractions sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Maintenant on va montrer que si M et R sont fixés assez grands, alors le semi-groupe $S_A(t)$ agit aussi bien dans les espaces L^p_k que dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ (il est important que les bornes inférieures M_{1*} et R_{1*} sur M et R, que nous allons décrire ci-dessous, soient indépendantes de p). En réalité on a une propriété intéressante de ce semi-groupe, qui est celle de sa décroissance exponentielle lorsque $k > k_0$, à condition toutefois de considérer des espaces L^p_k différents pour la donnée initiale f_0 et pour $S_A(t)f_0$.

Théorème 4.1.5. *Avec les notations du Lemme 4.1.1, il existe $M_{1*} \geq M_{0*}$ et $R_{1*} \geq R_{0*}$ et $\omega_1 > 0$ tels que si $M \geq M_{1*}$ et $R \geq R_{1*}$, pour tout p vérifiant $1 \leq p < \infty$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ on ait*

$$-\int_{\mathbb{R}^d} A\varphi\cdot|\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk}dx \geq \frac{4(p-1)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\langle x\rangle^k|\varphi|^{p/2}|^2dx+\omega_1\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|^p\langle x\rangle^{pk+\gamma_1-2}dx$$

En particulier le semi-groupe $S_A(t)$ est un semi-groupe continu de contractions sur L^p_k et si $f_0 \in L^\infty_k$ alors on a

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq \|f_0\|_{L^\infty_k}.$$

Par ailleurs on a

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^p_{k-\frac{2-\gamma_1}{p}}} \leq \mathrm{e}^{-\omega_1 t}\|f_0\|_{L^p_k}, \tag{4.1.6}$$

et on a aussi pour $f_0 \in L^\infty_k$

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq \mathrm{e}^{-\omega_1 t}\|f_0\|_{L^\infty_k}. \tag{4.1.7}$$

Preuve. Comme dans la preuve du Lemme 4.1.1, on utilise de nouveau les relations données par les Lemmes 3.4.1 et 3.4.2 pour trouver l'égalité suivante pour $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c$:

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^d} A\varphi\cdot|\varphi|^{p-2}\varphi\langle x\rangle^{pk}dx = \frac{4(p-1)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\langle x\rangle^k|\varphi|^{p/2}|^2dx \\ +\int_{\mathbb{R}^d}\Psi_p(M,R,x)|\varphi|^p\langle x\rangle^{pk}dx,\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

où la fonction Ψ_p est définie par

$$\Psi_p(M,R,x) := M\zeta_R(x) + \frac{kx\cdot\mathbf{E}}{\langle x\rangle^2} - \frac{p-1}{p}\mathrm{div}(\mathbf{E}) \\ - \frac{2k((d-2)|x|^2+d)}{p\langle x\rangle^4} - \frac{k(k-d+2)|x|^2-kd}{\langle x\rangle^4}.$$

Ainsi, du fait que d'une part en utilisant (3.0.4)

$$\frac{kx\cdot\mathbf{E}}{\langle x\rangle^2} - \frac{p-1}{p}\mathrm{div}(\mathbf{E}) \geq \frac{(p-1)\beta_0}{p} + \frac{k_0 x\cdot\mathbf{E}}{p\langle x\rangle^2} + (k-k_0)\frac{x\cdot\mathbf{E}}{\langle x\rangle^2},$$

et que d'autre part $\beta_0 \geq 0$ et on a $x\cdot\mathbf{E} \geq \alpha_1|x|^{\gamma_1}+\beta_1$, en procédant comme dans la preuve du Lemme 4.1.1, on voit qu'il existe $M_{1*}\geq M_{0*}$ et $R_{1*}\geq R_{0*}$, tels que pour une certain constante $\omega_1>0$, pour tous $M\geq M_{1*}$ et $R\geq R_{1*}$, et pour tout p vérifiant $1\leq p<\infty$, on ait

$$\Psi(M,R,x) \geq \omega_1\langle x\rangle^{-2+\gamma_1}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ (on notera que ω_1 est indépendant de p, mais dépend naturellement de k ainsi que de M_{1*}, R_{1*} et $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ donnés par (3.0.3)).

Pour prouver la décroissance exponentielle du semi-groupe $S_A(t)$, on procède comme dans la preuve du Lemme 4.1.2, en notant que si $f(t)=S_A(t)f_0$ alors lorsque $f_0\in D(A)$ (au sens de l'espace L^p_k), on a

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|^p_{L^p_k} = p\int_{\mathbb{R}^d} Af\cdot|f|^{p-1}f\langle x\rangle^p k dx \leq -p\omega_1\|f(t)\|^p_{L^p_{k-\frac{2-\gamma_1}{p}}},$$

puis on conclut, comme nous l'avons fait dans la preuve du Lemme 4.1.2, en utilisant le lemme de Gronwall et le fait que $\|f(t)\|_{L^p_{k-\frac{2-\gamma_1}{p}}}\leq\|f(t)\|_{L^p_k}$.

Comme les nombres M_{1*}, R_{1*} et $\omega_1>0$ sont indépendants de p, en passant à la limite on obtient les résultats annoncés pour $f_0\in L^\infty_k$. □

Il est intéressant de noter que l'estimation (4.1.7) permet de montrer, par une interpolation que le semi-groupe $S_A(t)$ est exponentiellement décroissant dans les espaces L^p_k pour $p>1$. En effet sachant que

$$\|S_A(t)\|_{L^\infty_k\to L^\infty_k}\leq \mathrm{e}^{-\omega_1 t} \quad\text{et}\quad \|S_A(t)\|_{L^1_k\to L^1_k}\leq 1,$$

d'où on déduit par interpolation que pour $p>1$ on a

$$\|S_A(t)\|_{L^p_k\to L^p_k}\leq \mathrm{e}^{-(p-1)\omega_1 t/p}.$$

En particulier, en utilisant la représentation de la résolvante $R_A(\lambda)$ en termes du semi-groupe $S_A(t)$, donnée par (2.2.3), on déduit que le spectre de l'opérateur A peut être localisé : si on considère cet opérateur agissant dans L^p_k pour $1<p<\infty$, alors son spectre est contenu dans le demi-plan complexe

$$\left\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z)\leq -\frac{(p-1)\omega_1}{p}\right\}.$$

En particulier pour $p=2$, on peut énoncer le résultat suivant qui nous sera utile un peu plus loin :

Corollaire 4.1.6. *L'opérateur $(A, D(L))$ engendre un semi-groupe de contractions sur L^2_k vérifiant*

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^2_k} \leq \mathrm{e}^{-\omega_1 t/2}\|f_0\|_{L^2_k},$$

et le spectre $\sigma(A)$ vérifie

$$\sigma(A) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) \leq -\frac{1}{2}\omega_1 \right\}.$$

4.2 Ultracontractivité de $S_A(t)$

On a ainsi un semi-groupe $S_A(t)$ qui agit dans tous les espaces L^p_k, qui est un semi-groupe de contractions sur L^p_k ainsi que sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. En utilisant l'inégalité de Nash (3.5.1), on va vérifier que $S_A(t)$ est un semi-groupe ultracontractif dans les espaces L^p_k.

Comme ce que nous avons fait pour le Théorème 3.5.2, on notera A^* l'adjoint formel de A pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire l'opérateur défini par

$$A^*\varphi := \Delta\varphi - \mathbf{E}\cdot\nabla\varphi - M\zeta_R\varphi,$$

et par A_* l'adjoint de A pour le produit scalaire de L^2_k.

Tout d'abord, nous avons l'analogue du Lemme 3.5.1 pour l'opérateur A : en effet, en utilisant l'inégalité (4.1.2) dans l'inégalité de Nash (3.5.1) on a de manière évidente :

Lemme 4.2.1. (Inégalité de Nash). *Supposons que $k+d-2 \geq 0$ et $k > k_0$. Alors sous les hypthèses et notations du Lemme 4.1.1, il existe une constante $c > 0$ telle que si $f \in L^1_k \cap D(L)$ alors on a*

$$\|f\|^{2+4/d}_{L^2_k} \leq c\,\|f\|^{4/d}_{L^1_k}(-Af|f)_{L^2_k}. \tag{4.2.1}$$

On en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *Sous les hypothèses et notations du Théorème 4.1.5 lorsque $k > max(k_0, 2-d)$, le semi-groupe $S_A(t)$ est ultracontractif dans les espaces L^p_k, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $f_0 \in L^1_k$ et $t > 0$*

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^2_k} \leq c_2\, t^{-d/4}\|f_0\|_{L^1_k}, \tag{4.2.2}$$

et aussi

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c_2\, t^{-d/2}\|f_0\|_{L^1_k}. \tag{4.2.3}$$

Par ailleurs pour tout $\omega_2 < \omega_1$, tout $f_0 \in L^1_k$, et tout $t > 0$ on a

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}\right)^{d/2} t^{-d/2}\,\mathrm{e}^{-\omega_2 t}\|f_0\|_{L^1_k}. \tag{4.2.4}$$

Preuve. La preuve de (4.2.2) et (4.2.3) est exactement comme celle du Théorème 3.5.2, en remplaçant l'opérateur $\lambda_0 I - L$ par l'opérateur $-A$.

Pour prouver (4.2.4), en posant $\theta := \omega_2/\omega_1$ on remarque en utilisant d'abord (4.1.7) puis l'inégalité d'ultracontractivité (4.2.3) que l'on peut écrire, pour $f_0 \in L^1_k \cap L^\infty_k$ et $0 < \theta < 1$

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq \mathrm{e}^{-\omega_1\theta t}\|S_A((1-\theta)t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq c\,\mathrm{e}^{-\omega_1\theta t}((1-\theta)t)^{-d/2}\|f_0\|_{L^1_k},$$

ce qui par densité de $L^1_k \cap L^\infty_k$ dans L^1_k donne (4.2.4). □

Par interpolation entre les espaces $L^1_k \cap L^\infty_k$ et $L^1_k + L^\infty_k$, c'est-à-dire en réalité en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $S_A(t)$ est un semi-groupe de contractions dans chaque L^p_k, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.3. *Avec les hypothèses et notations du Théorème 4.2.2, pour $0 < \omega_2 < \omega_1$ et $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ on a*

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^{p_1}_k} \leq c_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}\right)^{\theta d/2} \mathrm{e}^{-\omega_2\theta t} t^{-\theta d/2}\|f_0\|_{L^{p_0}_k},$$

où

$$\theta := \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}.$$

4.3 Le semi-groupe $S_L(t)$ est borné

Nous pouvons montrer maintenant, grâce aux propriétés que nous venons d'établir pour le semi-groupe $S_A(t)$ que le semi-groupe $S_L(t)$ est borné dans tous les espaces L^p_k (alors que jusqu'ici nous savions seulement que $S_L(t)$ était un semi-groupe de contractions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et un semi-groupe de norme majorée par $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ dans L^p_k, pour un $\lambda_0 > 0$).

Théorème 4.3.1. *Supposons que sous les hypothèses (H1)–(H2) données par (3.0.3)–(3.0.4), on ait $k > k_0 + (d/2)$. Alors le semi-groupe $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans L^p_k pour $1 \leq p \leq \infty$: il existe $c > 0$ tel que pour $f_0 \in L^p_k(\mathbb{R}^d)$*

$$\|S_L(t)\|_{L^p_k} \leq c\,\|f_0\|_{L^p_k}.$$

Preuve. Avec les notations du Théorème 4.1.5, on sait que si $A := L - B$ où $B\varphi := M\zeta_R\varphi$ alors pour $M \geq M_{1*}$ et $R \geq R_{1*}$ le semi-groupe $S_A(t)$ est ultra-contractif dans les espaces L^p_k et de plus pour $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ on a

$$\|S_A(t)f_0\|_{L^p_k} \leq \mathrm{e}^{-\omega_1 t}\|f_0\|_{L^p_{k+\frac{2-\gamma_1}{p}}}.$$

Nous allons utiliser la relation (2.3.9) :

$$S_L(t)f_0 = S_A(t)f_0 + \int_0^t S_A(t-\tau)BS_L(\tau)f_0 d\tau, \tag{4.3.1}$$

pour déduire que $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans l'espace L^1_k lorsque $k > \max(k_0, 2-d)$. En supposons que $\|f_0\|_{L^1_k} \leq 1$, en utilisant (4.1.6) pour $p = 1$, et en prenant la norme dans l'identité ci-dessus, on a

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^1_k} \leq 1 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_1(t-\tau)} \|BS_L(\tau)f_0\|_{L^1_{k+2-\gamma_1}} d\tau.$$

Mais comme ζ_R est à support contenu dans $[|x| \leq 2R]$, on a

$$\|BS_L(\tau)f_0\|_{L^1_{k+2-\gamma_1}} \leq M(1+2R)^{k+2-\gamma_1} \|S_L(\tau)f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq M(1+2R)^{k+2-\gamma_1},$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\|S_L(\tau)f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f_0\|_{L^1_k} \leq 1.$$

Ainsi on a donc, pour tout $t > 0$

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^1_k} \leq 1 + M(1+2R)^{k+2-\gamma_1} \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_1(t-\tau)} d\tau \leq 1 + \frac{M(1+2R)^{k+2-\gamma_1}}{\omega_1},$$

et $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans L^1_k pour tout $k > \max(k_0, 2-d)$.

Pour prouver le résultat dans les espaces L^p_k, afin d'exposer de manière plus claire notre démarche, dans un premier temps nous allons supposer que $1 \leq d \leq 3$.

Dans ce cas, on sait que $S_L(t)$ est un semi-groupe de contractions dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$. Nous allons montrer d'abord que le semi-groupe $S_L(t)$ est aussi borné sur L^2_k, dès que $k > \max(k_0, 2-d)$. Supposons que $\|f_0\|_{L^2_k} \leq 1$ et prenons la norme L^2_k dans l'égalité ci-dessus, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|S_L(t)f_0\|_{L^2_k} &\leq \|S_A(t)f_0\|_{L^2_k} + \int_0^t \|S_A(t-\tau)BS_L(\tau)f_0\|_{L^2_k} d\tau \qquad (4.3.2)\\
&\leq 1 + c(\omega_2, \omega_1) \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2(t-\tau)/2} (t-\tau)^{-d/4} \|BS_L(\tau)f_0\|_{L^1_k} d\tau \\
&\leq 1 + c(\omega_2, \omega_1, M, R) \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2(t-\tau)/2} (t-\tau)^{-d/4} \|S_L(\tau)f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} d\tau \\
&\leq 1 + c(\omega_2, \omega_1, M, R) \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2(t-\tau)/2} (t-\tau)^{-d/4} \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} d\tau \\
&\leq 1 + c(\omega_2, \omega_1, M, R) \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2\tau/2} \tau^{-d/4} d\tau \leq c,
\end{aligned}$$

car, puisque $d \leq 3$, la fonction $t^{-d/4} \exp(-\omega_2 t/2)$ est intégrable sur l'intervalle $(0, \infty)$. dans les inégalités ci-dessus nous avons utilisé successivement le Corollaire 4.2.3 avec $p_0 := 1$ et $p_1 := 2$, puis le fait que pour toute fonction g la fonction Bg a son support contenu dans la boule $\overline{B}(0, 2R)$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\|BS_L(\tau)f_0\|_{L^1_k} &\leq M(1+2R)^k \|S_L(\tau)f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq c(M, R, k) \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq c(M, R, k, d) \|f_0\|_{L^2_k}.
\end{aligned}$$

En réitérant cette procédure, supposons maintenant que $k > k_0 + d/2$, et prenons cette fois-ci la norme L^∞_k dans (4.3.1) on voit que si $\|f_0\|_{L^\infty_k} \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}\|S_L(t)f_0\|_{L^\infty_k} &\leq \|S_A(t)f_0\|_{L^\infty_k} + \int_0^t \|S_A(t-\tau)BS_L(\tau)f_0\|_{L^\infty_k} d\tau \\ &\leq 1 + c(\omega_2,\omega_1)\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2(t-\tau)/2}(t-\tau)^{-d/4}\|BS_L(\tau)f_0\|_{L^2_k} d\tau.\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Comme nous avons supposé que $k > k_0 + d$, on peut fixer $j > \max(k_0, 2-d)$ tel que $k > j + (d/2)$, de sorte que pour une constante c dépendant de R, j, k, d on ait

$$\|BS_L(\tau)f_0\|_{L^2_k} \leq M(1+2R)^{k-j}\|S_L(\tau)f_0\|_{L^2_j} \leq M(1+2R)^{k-j}\, c\, \|f_0\|_{L^2_j},$$

donc finalement, puisque $\|f_0\|_{L^2_j} \leq c\,\|f_0\|_{L^\infty_k}$, car on a $k - j > d/2$, on a pour $0 < \tau < t$

$$\|BS_L(\tau)f_0\|_{L^2_k} \leq c(M,R,k,j,d)\|f_0\|_{L^\infty_k} \leq c(M,R,k,j,d).$$

Par conséquent en reportant cette estimation dans (4.3.3), on voit que

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^\infty_k} \leq 1 + c\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2(t-\tau)/2}(t-\tau)^{-d/4} d\tau \leq c,$$

car $t \mapsto t^{-d/4}\mathrm{e}^{-\omega_2 t/2}$ est intégrable sur $(0,\infty)$ lorsque $d \leq 3$.

Ainsi, lorsque $d \leq 3$ et $k > k_0 + (d/2)$, le semi-groupe $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans L^1_k et dans L^∞_k, ce qui permet de conclure, par interpolation (c'est-à-dire ici en utilisant l'inégalité de Hölder) que ce semi-groupe est borné dans tous les espaces L^p_k pour $1 \leq p \leq \infty$.

Dans le cas où $d \geq 4$, la démarche est identique mais un peu plus laborieuse : sachant que $S_L(t)$ est borné dans L^1_k, en utilisant l'ultracontractivité du semi-groupe $S_A(t)$ sous la forme du Corollaire 4.2.3, on prend $p_0 := 1$ et, par exemple, $p_1 := d/(d-1) > 1$ pour que

$$\theta_1 := 1 - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{d} < \frac{2}{d},$$

puis, en supposant que $\|f_0\|_{L^{p_1}_k} \leq 1$ on prend la norme dans $L^{p_1}_k$ de l'égalité (4.3.1) : on obtient, en procédant comme dans (4.3.2)

$$\|S_L(t)f_0\|_{L^{p_1}_k} \leq 1 + c\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega_2\theta_1\tau}\tau^{-\theta_1 d/2}\, d\tau,$$

et comme $\theta_1 d/2 = 1/2 < 1$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\omega_2\theta_1 t}t^{-\theta_1 d/2}$ est intégrable sur $(0,\infty)$, et on conclut que $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans $L^{p_1}_k$. En réitérant ce procédé, on construit une suite finie $p_0 < p_1 < p_{d-1} = d$ telle que pour $0 \leq j \leq d-1$

$$p_j := \frac{d}{d-j}, \qquad \text{et} \quad p_d := \infty$$

de telle sorte que pour $1 \leq j \leq d$

$$\theta_j := \frac{1}{p_{j-1}} - \frac{1}{p_j} = \frac{1}{d} < \frac{2}{d}.$$

Le procédé décrit ci-dessus permet de prouver que si $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans $L_k^{p_{j-1}}$, alors il est aussi borné dans $L_k^{p_j}$, pour $1 \leq j \leq d$. □

Chapitre 5

Existence d'un état d'équilibre et convergence

Dans ce chapitre, en utilisant le fait que $S_L(t)$ est un semi-groupe borné dans les espaces L^p_k nous prouvons qu'il existe une solution stationnaire de l'équation de Fokker–Planck et que les solutions positives convergent vers un multiple de cet état stationnaire.

5.1 Solution Stationnaire

Nous avons déjà vu que l'opérateur L vérifiait un principe du maximum faible, en ce sens qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $Lf - \lambda_0 f \leq 0$ alors $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$. Nous montrons maintenant que L vérifie en réalité un principe du maximum fort.

Proposition 5.1.1. *Soit $f \in D(L) \cap W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f \not\equiv 0$ et $Lf \leq 0$ et $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$. Alors on a $f > 0$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. Rappelons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in D(L)$ on ait

$$(Lf - \lambda_0 f | f)_{L^2_k} \leq 0.$$

En posant $\lambda := \max(1, \lambda_0 + 1)$, on a donc $(Lf - \lambda f | f)_{L^2_k} \leq -\|f\|^2_{L^2_k}$. Comme $f \not\equiv 0$, on sait qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $m_0 > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$ on ait $f(x) \geq m_0$. Soit maintenant U la fonction définie par

$$U(x) := m_0 \exp(\sigma r^2 - \sigma |x - x_0|^2).$$

Comme on a

$$LU - \lambda U = \left(-\lambda - 2\sigma d - 2\sigma(x - x_0) \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div}(\mathbf{E}(x)) + 4\sigma^2 |x - x_0|^2\right) U,$$

et que $\mathbf{E}$ vérifie les hypothèses (3.0.3) et (3.0.4), on voit facilement que l'on peut fixer $\sigma > 0$ assez grand pour que U vérifie

$$LU - \lambda U \geq 0 \qquad \text{pour } |x - x_0| \geq r.$$

Nous noterons $\Omega := \overline{B}(x_0, r)^c$, et nous désignerons par $H^1_{0,k}(\Omega)$ l'adhérence des fonctions $\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ pour la norme

$$u \mapsto \left(\|\nabla u\|^2_{L^2_k(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2_k(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

En appliquant l'inégalité de Kato (3.2.4) à la fonction $g := (U - f)^+$, on voit que d'une part on a $g \in H^1_{0,k}(\Omega)$, et que d'autre part, au sens des distributions, on a

$$Lg - \lambda g \geq \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(g))(Lg - \lambda g) \geq 0,$$

puisque $-Lf \geq 0$ et $\lambda f \geq 0$. Par conséquent, en prenant une suite de fonctions régulières et à support compact $(g_n)_n$ qui converge vers g dans $H^1_{0,k}(\Omega)$ et telles qu'en plus on ait $g_n \geq 0$, on voit que

$$0 \leq \langle Lg - \lambda g, g_n \rangle \to \langle Lg - \lambda g, g \rangle_{H^{-1}_k, H^1_{0,k}} \leq -\|g\|^2_{L^2_k(\Omega)}.$$

Par conséquent on a $g \equiv 0$, c'est-à-dire que $f \geq U > 0$ sur $B(x_0, r)^c$. Comme par ailleurs pour $|x - x_0| \leq r$ on a $f \geq m_0 > 0$, on conclut que $f > 0$ sur $\mathbb{R}^d$. □

On va montrer maintenant qu'il existe une solution stationnaire strictement positive sur $\mathbb{R}^d$. Pour cela nous rappelons ici le théorème du point-fixe de Markov–Kakutani (voir M. Reed & B. Simon [28], Chapter 5, Theorem V.20, page 152) :

Théorème 5.1.2. (Théorème de Markov–Kakutani). *Soit K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe X. Si $\mathcal{F}$ est une famille d'opérateurs affines continus sur X qui laisse invariant l'ensemble K et qui vérifie $T_1 T_2 u = T_2 T_1 u$ pour tous $u \in K$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$, alors il existe un point fixe $u_* \in K$ commun à tous les éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $u_* \in K$ vérifie $Tu_* = u_*$ pour tout $T \in \mathcal{F}$.*

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 5.1.3. *Soit $k > k_0 + d$. Il existe $G \in D(L)$ tel que $G > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x)\, dx = 1$$

et $LG = 0$. De plus pour tout $k > 0$ on a $G \in L^\infty_k$, et toute fonction $g \in D(L)$ tel que $Lg = 0$ est un multiple de G.

Preuve. Comme $S_L(t)$ est un semi-groupe borné sur L^2_k lorsque $k > k_0 + d$, alors on peut définir une nouvelle norme sur L^2_k, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2_k}$, en posant

$$\|f\|_{SL} := \sup_{t \geq 0} \|S_L(t) f\|_{L^2_k}.$$

De cette manière le semi-groupe $S_L(t)$ devient un semi-groupe de contractions sur L^2_k muni de la norme $\|\cdot\|_{SL}$.

Soient $R > 0$ et $K := K(R)$ l'ensemble convexe défini par

$$K := \left\{ f \in L^2_k \; ; \; f \geq 0, \quad \|f\|_{SL} \leq R, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 1 \right\}.$$

Il est clair que l'on peut choisir $R > 0$ suffisamment grand pour que $K \neq \emptyset$. L'ensemble convexe K est compact pour la topologie faible de L^2_k, et reste invariant sous l'action de $S_L(t)$ pour tout $t \geq 0$. La famille d'opérateurs $(S_L(t))_{t\geq 0}$ est continu pour la topologie faible et les éléments de cette famille commutent entre eux. Par conséquent on peut appliquer le théorème de Markov–Kakutani 5.1.2 et en déduire qu'il existe $G \in K$ telle que pour tout $t \geq 0$ on ait

$$S_L(t)G = G.$$

Cette relation implique en particulier que $G \in D(L)$ et que $LG = 0$ (puisque $t \mapsto S_L(t)$ est différentiable en $t = 0^+$ et que cette dérivée est nulle).

Comme $G \geq 0$ n'est pas identiquement nulle, le principe du maximum fort que nous avons montré à la Proposition 5.1.1 permet de dire que $G > 0$ sur $\mathbb{R}^d$. L'ultracontractivité du semi-groupe $S_L(t)$ montre alors par ailleurs que $G \in L^\infty_k$, et le théorème est prouvé.

Pour montrer que le noyau de L est précisément de dimension un, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $f \in D(L)$ telle que $Lf = 0$ et $(f|G)_{L^2_k} = 0$. Alors, comme $Lf = 0$ et $f \in H^1_k$, d'après les théorèmes de régularité pour les opérateurs elliptiques on doit avoir $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$, et si $f \not\equiv 0$ on doit avoir $f^+ \not\equiv 0$ et $f^- \not\equiv 0$ car f est orthogonale à $G > 0$, et par conséquent f, étant continue, doit s'annuler quelque part. Or d'après l'inégalité de Kato on a, au sens des distributions,

$$L|f| \geq \operatorname{sgn}(f) Lf = 0.$$

Cette inégalité implique en réalité $L|f| = 0$. En effet, Soit $\zeta_0 \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\zeta_0'(s) \leq 0$ pour $s \geq 0$ et

$$0 \leq \zeta_0 \leq 1, \qquad \zeta_0(s) = 1 \text{ pour } |s| \leq 1, \qquad \zeta_0(s) = 0 \text{ pour } |s| \geq 2,$$

et pour $n \geq 1$ posons $\zeta_n(x) := \zeta_0(|x|/n)$, de sorte que $0 \leq \zeta_n \leq \zeta_{n+1} \leq 1$ et $\zeta_n \to 1$ uniformément sur tout compact. Alors $L|f|$ étant une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, si $L|f| \neq 0$, on aurait pour $n_0 \geq 1$ assez grand et $n \geq n_0$

$$0 < \langle L|f|, \zeta_{n_0} \rangle \leq \langle L|f|, \zeta_n \rangle = \langle |f|, L^*\zeta_n \rangle,$$

et on peut montrer que $\langle |f|, L^*\zeta_n \rangle \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent on devrait avoir $L|f| = 0$, et d'après le principe du maximum fort on a aussi $|f| > 0$, ce qui est une contradiction avec le fait que f doit s'annuler quelque part. On en déduit finalement que le noyau de L est de dimension un, et la preuve du Théorème est terminée. □

Dans le paragraphe suivant nous montrons la convergence des solutions positives de l'équation de Fokker–Planck vers un état stationnaire.

5.2 Convergence vers l'équilibre

Rappelons que pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ nous avons noté

$$M(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx,$$

et que l'exposant k du poids $\langle x \rangle^k$ est choisi de telle sorte que $L^2_k \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.

Comme, d'après le Corollaire 4.1.6, le spectre de l'opérateur A est contenu dans le demi-plan complexe $[\mathrm{Re}(z) \leq -\omega_1/2]$, et que $L = A + B$ peut être considéré comme une perturbation de A, on peut naturellement s'attendre à ce que les spectres de A et L soient proches dans un certain sens. En fait on va montrer que dans la bande $[-\omega_1/2 < \mathrm{Re}(z) \leq 0]$ l'opérateur L possède un nombre fini de valeurs propres. Nous montrons d'abord que dans cette bande le spectre de l'opérateur L est réduit à des valeurs propres.

Lemme 5.2.1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $-\omega_1/2 < \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ et $\lambda \in \sigma(L)$, alors λ est une valeur propre de L.*

Preuve. Commençons par noter que si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors l'opérateur

$$BR_A(\lambda) : L^2_k \longrightarrow L^2_k$$

est un opérateur compact, car d'une part l'image de la boule unité de L^2_k par $R_A(\lambda)$ est contenue dans un borné de H^1_k, et d'autre part l'application de H^1_k dans $L^2(B(0,2R))$ définie par $u \mapsto u1_{[|x|\leq 2R]}$ est compacte. Par conséquent, comme on a $Bu = M\zeta_R u$ avec $0 \leq \zeta_R \leq 1$ et $\mathrm{supp}(\zeta_R) \subset [|x| \leq 2R]$, on conclut que $BR_\lambda(\lambda)$ est compact de $L^2_k \longrightarrow L^2_k$.

Maintenant si λ vérifie les conditions du lemme, alors $\lambda \notin \sigma(A)$ et on a

$$L - \lambda I = A - \lambda I + B = (I + BR_A(\lambda))(A - \lambda I), \qquad \lambda \in \sigma(L)$$

et par conséquent l'opérateur $I + BR_A(\lambda)$ n'a pas un inverse continu, c'est-à-dire que l'on a $-1 \in \sigma(BR_A(\lambda))$. Or $BR_A(\lambda)$ étant compact son spectre privé de zéro est réduit à ses valeurs propres, et par conséquent -1 est une valeur propre de $BR_A(\lambda)$, c'est-à-dire qu'il existe $u \in L^2_k$ et $u \neq 0$ tel que $u + BR_A(\lambda)u = 0$, c'est-à-dire que si on pose $f := R_A(\lambda)u$ on a

$$Lf - \lambda f = (A - \lambda I)f + Bf = 0, \qquad f \in D(L), \quad f \neq 0,$$

et on voit ainsi que λ est une valeur propre de L. □

On prouve ensuite que sur l'axe imaginaire le spectre de L est réduit à zéro, ce qui revient à dire que le spectre de L privé de zéro est contenu dans le demi-plan complexe situé strictement à gauche de l'origine, c'est-à-dire

$$\sigma(L) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) < 0\}\,.$$

Lemme 5.2.2. *Soit $r > 0$. Il existe $\omega_* > 0$ et $c_* > 0$ tels que si $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ et $f_0 \in L^2_k$ sont tels que $0 \leq t \leq \omega_*$ et $|s| \leq r$ et $M(f_0) = 0$, alors si $t + \mathrm{i}s \neq 0$ on a $-t - \mathrm{i}s \in \rho(L)$. Plus précisément si pour un certain $f \in D(L)$ on a*

$$-Lf = (t + \mathrm{i}\, s)f + f_0,$$

alors

$$\|f\|_{L^2_k} \leq c_* \, \|f_0\|_{L^2_k}.$$

En particulier on a $\sigma(L) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \, ; \, \mathrm{Re}(z) < 0\}$ et la valeur propre nulle de L est isolée.

Preuve. Si le résultat du lemme n'était pas vrai, en prenant $\omega_* := \omega_{*n} := 1/n$ pour $n \geq 1$, il existerait une suite $(t_n, s_n, f_{0n})_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times D(L)$ telle que $\|f_{0n}\|_{L^2_k} \leq 1$, vérifiant $M(f_{0n}) = 0$ et $|s_n| \leq r$, et $f_n \in D(L)$ solution de

$$-\Delta f_n - \mathrm{div}(f_n \mathbf{E}) = (t_n + \mathrm{i}\, s_n)\, f_n + f_{0n}, \qquad 0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}, \tag{5.2.1}$$

et de plus $\|f_n\|_{L^2_k} > n$. Posons alors

$$a_n := \|f_n\|_{L^2_k}, \qquad \text{et} \quad u_n := \frac{1}{a_n} f_n,$$

de sorte que u_n est solution de

$$-\Delta u_n - \mathrm{div}(u_n \mathbf{E}) = (t_n + \mathrm{i}\, s_n)\, u_n + \frac{1}{a_n} f_{0n}, \qquad \|u_n\|_{L^2_k} = 1.$$

Comme nous l'avons fait auparavant par troncature, on vérifie facilement que $M(f_n) = 0$ car $t_n + \mathrm{i}s_n \neq 0$, puis en multipliant l'équation ci-dessus par $\overline{u_n}$ dans le produit scalaire de L^2_k on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} u_n \nabla \overline{u_n} \cdot \nabla \langle x\rangle^{2k}\, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^d} u_n \nabla \overline{u_n} \cdot \mathbf{E}\, \langle x\rangle^{2k}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^2 \mathbf{E} \cdot \nabla \langle x\rangle^{2k}\, dx \\ = t_n + \mathrm{i}\, s_n + \frac{1}{a_n} \int_{\mathbb{R}^d} f_{0n} \overline{u_n} \langle x\rangle^{2k}\, dx. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

En prenant les parties réelles, puis en intégrant par parties, on déduit que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_k(x) |u_n|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx \leq t_n + \frac{1}{a_n},$$

où nous avons utilisé le fait que $\|u_n\|_{L^2_k} = 1$ et $\|f_{0n}\|_{L^2_k} \leq 1$, et où nous avons noté

$$\Psi_k(x) := \frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}} - \mathrm{div}(\mathbf{E}) - \frac{\Delta \langle x\rangle^{2k}}{\langle x\rangle^{2k}}.$$

Comme $\mathbf{E}$ vérifie les hypothèses (3.0.3) et (3.0.4), en utilisant les expressions (2.1.1) et (2.1.2) on voit facilement que l'on a, pour une constante $c_0 > 0$

$$\Psi_k(x) \geq (2k - k_0)\alpha_1 \langle x\rangle^{-2+\gamma_1} - 2c_0 \langle x\rangle^{-2},$$

de sorte qu'en remarquant que l'on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^2 \langle x\rangle^{2k-2} dx \leq \|u_n\|^2_{L^2_k} \leq 1,$$

et $t_n \leq 1/n$, on obtient l'estimation

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 \langle x\rangle^{2k}\, dx + \frac{(2k-k_0)\alpha_1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^2 \langle x\rangle^{2k-2+\gamma_1}\, dx \leq c_0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{a_n},$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans H^1_k.

On peut donc en extraire une sous-suite, notée $(u_{n_j})_{j\geq 1}$ telle que pour un certain $u \in H^1_k$ on ait $u_{n_j} \rightharpoonup u$ faiblement dans H^1_k lorsque $j \to \infty$. En passant à la limite dans l'équation satisfaite par u_n, on voit que

$$-\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{E}) = 0,$$

et comme $M(u) = 0$ et que le noyau de L est de dimension un, on en conclut que $u = 0$, et par conséquent toute la suite $u_n \rightharpoonup 0$ dans H^1_k. En utilisant la compacité de H^1_k dans $L^2(B(0,R'))$ pour tout $R' > 0$, on peut en déduire que $u_n \to 0$ fortement dans $L^2(B(0,R'))$ pour tout $R' > 0$. En particulier on déduit que $Bu_n \to 0$ dans L^2_k-fort, car son support est contenu dans la boule fermée $\overline{B}(0,2R)$.

Maintenant soit v_n solution de

$$-Av_n = -\Delta v_n - \operatorname{div}(v_n\mathbf{E}) + Bv_n = (t_n + \mathrm{i}\, s_n)\, v_n + \frac{1}{a_n} f_{0n}.$$

Cette solution existe et est unique car le spectre de A est contenu dans le demi-plan complexe $[\mathrm{Re}(z) \leq -\omega_1/2]$, de sorte que si $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est la résolvante de A et $\lambda_n := t_n + \mathrm{i}\, s_n$, on a

$$v_n = -\frac{1}{a_n} R_A(\lambda_n) f_{0n},$$

ce qui prouve que $v_n \to 0$ dans L^2_k-fort.

D'autre part, si $w_n := u_n - v_n$, on voit que $-Aw_n - \lambda_n w_n = Bu_n$, c'est-à-dire que l'on a $w_n = -R_A(\lambda_n)Bu_n$, et comme on vient de remarquer que $Bu_n \to 0$ dans L^2_k, on déduit que $w_n \to 0$ dans L^2_k-fort, et par conséquent $u_n = v_n + w_n \to 0$ dans L^2_k-fort. Or cela n'est pas possible car $\|u_n\|_{L^2_k} = 1$ par construction, et ainsi le résultat annoncé est prouvé. □

Enfin nous rappelons le résultat suivant de S. Mischler & J. Scher [22, Theorem 3.1 et Theorem 3.3], qui est une autre version du résultat de J. Voigt [32] et du Théorème de Weyl concernant le spectre d'une perturbation d'un opérateur. Ces résultats, en les adaptant à notre cas, affirment que dans la bande du plan complexe $[-\omega_1/2 < \mathrm{Re}(z) \leq 0]$ le spectre de L est réduit à un nombre fini de points (qui seraient des valeurs valeurs propres de L d'après le Lemme 5.2.1). Le résultat ci-dessous est à rapprocher de l'alternative de Fredholm et du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, les points du spectre d'un opérateur compact K contenus dans l'ensemble $[|z| \geq \varepsilon]$ sont en nombre fini (voir par exemple la preuve de l'alternative de Fredholm dans F. Riesz & B. Sz. Nagy [29], ou H. Brézis [6]).

Théorème 5.2.3. *Avec les notations précédentes, soit $\omega > 0$ tel que*

$$[-\omega \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0] \subset \rho(A).$$

Alors l'opérateur $A+B$ possède au plus un nombre fini de valeurs propres dans la bande $[-\omega \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0]$. En particulier il existe $a_* > 0$ tel que $a_* \leq \omega_1/4$ et $[-a_* \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0] \cap \sigma(L) = \{0\}$.

Théorème 5.2.4. *Supposons que les hypothèses (H1)–(H2) données par (3.0.3) et (3.0.4) soient satisfaites, et soit $k > k_0 + d$. Alors il existe une contante $c > 0$ et un exposant $\omega > 0$ tels que si $f_0 \in L^2_k$ est la donnée initiale de (3.0.2) et vérifie $f_0 \geq 0$, alors pour tout $t > 0$ on a $f(t) \geq 0$ et de plus $G > 0$ étant l'état stationnaire donnée par le Théorème 5.1.3*

$$\|f(t) - M(f_0)G\|_{L^2_k} \leq c\,\mathrm{e}^{-\omega\, t}\|f_0 - M(f_0)G\|_{L^2_k}. \tag{5.2.3}$$

Preuve. Nous avons vu au paragraphe 2.3 que $S_L(t)$ vérifie

$$S_L(t) = S_A(t) + (S_A * BS_A)(t) + (S_L * BS_A * BS_A)(t). \tag{5.2.4}$$

et aussi (voir (2.3.13))

$$S_L(t) = S_A(t) + \big(S_AB * S_A\big)(t) - \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz}\big(BR_A(z)\big)^2 R_L(z)\,dz. \tag{5.2.5}$$

En posant

$$Pf := f - M(f)G, \qquad \text{où } M(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$$

on a $PS_L(t)f_0 = S_L(t)Pf_0$ et

$$S_L(t)f_0 - M(f)G = S_A(t)Pf_0 + (S_A * BS_AP)(t)f_0 - J_a(t)f_0, \tag{5.2.6}$$

où par commodité on a posé

$$J_a(t) := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \mathrm{e}^{tz}\big(BR_A(z)\big)^2 R_L(z)P\,dz, \qquad \Gamma := -a + \mathrm{i}\mathbb{R},$$

et où, a_* étant donné par le Théorème 5.2.3, on suppose que $0 < a < a_*$. Comme on sait que

$$\|S_A(t)\|_{L^2_k \longrightarrow L^2_k} \leq \exp(-\omega_1 t/2),$$

en posant $\omega_* := \omega_1/2$ il est clair que l'on peut trouver une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout $t > 0$ on ait

$$\|S_A(t)Pf_0\|_{L^2_k} + \|(S_A * BS_A)(t)Pf_0\|_{L^2_k} \leq c_0(1+t)\mathrm{e}^{-\omega_* t}\|Pf_0\|_{L^2_k}. \tag{5.2.7}$$

Il nous reste à estimer $J_a(t)f_0$. Comme d'après le Théorème 5.2.3 on a

$$[-a_* \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0] \cap \sigma(L) = \{0\},$$

on voit que les conditions de la Proposition 2.3.1 sont bien réunies et par conséquent on a

$$\|J_a(t)f_0\|_{L^2_k} \leq c\, a^{-1} \mathrm{e}^{-at} \|f_0\|_{L^2_k}.$$

En rapprochant cette dernière estimation de celle obtenue à la relation (5.2.7), et en utilisant (5.2.6) on voit que pour une constante $c_* > 0$ on a

$$\|S_L(t)f_0 - M(f_0)G\|_{L^2_k} \leq c_*\, \mathrm{e}^{-at} \|Pf_0\|_{L^2_k},$$

pour tout $a > 0$ tel que $a < a_*$. □

Deuxième partie

L'équation de Fokker-Planck non linéaire

This part is devoted to the nonlinear Fokker-Planck equation. Precisely we study the following granular media equation

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}\big(\mathbf{E}(x,f)\, f\big) \\ f(0,x) = f_0(x), \end{cases} \tag{5.2.8}$$

where f is supposed to be regular enough and f_0 is a function which belong to L^2_k or $L^2_{K_\alpha}$. The vector field which we consider here, is of the following form $\mathbf{E}(x,f) := x + \nabla\Big(a * f\Big)$, where a is a function which will be precised later on. Throughout this part we identify the vector field to the function a. Thus from now on, we mean by the expression vector field, the function a.

In the first chapter of this part we prove that equation (5.2.8) admits a unique local solution in the Banach space $L^2_{K_\alpha}$. This result is proved by assuming that the hypotheses (1.0.16)–(1.0.18) hold. In the second chapter of this part we consider a vector field which satisfies a different assumption than (1.0.16)–(1.0.18). We prove also that there exists a global solution depending continuously on the vector field and on the initial data f_0.

Chapitre 6

Local Existence in $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ for Granular media Equation with a General Force Field

The main purpose of this chapter is to establish that (5.2.8) admits a unique local solution in $L^2_{K_\alpha}$ under some assumptions on $\mathbf{E}$. To this end we rewrite equation (5.2.8) as follows

$$\begin{cases} \partial_t f - \Delta f - \operatorname{div}\big(x\, f\big) = \operatorname{div}\big(\mathbf{E}(x,f)\, f - x f\big) \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{6.0.1}$$

Thus we obtain a nonhomogeneous equation with a second member defined by

$$F(u) := \operatorname{div}\big(\mathbf{E}(x,u)\, u - xu\big). \tag{6.0.2}$$

Now we consider the following homogeneous linear problem

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(x\, f) \\ f(0,x) = f_0. \end{cases}$$

We see that this equation is a particular case of the linear Fokker–Planck equation treated in the first part. Indeed if we set $\mathbf{E}_1(x) = x$, where $\mathbf{E}_1$ represents the vector field in the left-hand side of equation (6.0.1), we can prove in connection with the first part that the linear problem above has a unique solution. We begin with observing that the following linear operator

$$\mathcal{L}u := \Delta u + \operatorname{div}(x\, u) \quad \text{and} \quad D(\mathcal{L}) := \Big\{ u \in L^2_{K_\alpha};\ \mathcal{L}u \in L^2_{K_\alpha} \Big\}, \tag{6.0.3}$$

is a generator of a $\mathscr{C}_0$-semigroup in $L^2_{K_\alpha}$ (the weight function K_α is defined in (2.1.5), and the spaces $L^p_{K_\alpha}$ in (2.1.4)).

To solve the problem (6.0.1), we use the Duhamel's formula, that is if $f(t)$ is a regular solution (5.2.8) associated to an initial data f_0, then f satisfies the following integral equation

$$f(t) = S_{\mathcal{L}}(t)\, f_0 + \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-\tau) F(f(\tau)) d\tau.$$

We know that to find a solution f for (5.2.8) we have to show that the function F is at least locally Lipschitz from a subspace X of $L^2_{K_\alpha}$ into another subspace Y. To prove this, we need an inequality of the following type : for all regular solution u of $\partial_t u = \Delta u + \mathrm{div}(x\,u)$ associated to the initial data $u_0 \in L^2_{K_\alpha}$ we have

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)\,u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq c\,t^{-1/2}\|u_0\|_{L^2_{K_\alpha}}.$$

Such a property may be obtained as a consequence of the analyticity of the semigroup $(S_{\mathcal{L}}(t))_{t\geq 0}$., and that is what we are going to prove.

Indeed let us fix $\alpha = 1$. We consider the linear operator $\mathcal{L}$ in $L^2_{K_1}$ then the linear operator has the following structure :

$$\mathcal{L}u := \frac{1}{K_2}\mathrm{div}(K_2\nabla u) + du,$$

where we set $K_1 := \exp(\big(|x|^2/4)$. We can observe that the linear operator $(\mathcal{L},\, D(\mathcal{L}))$ is a selfadjoint operator in the Hilbert space $L^2_{K_1}$. Since $(\mathcal{L},\, D(\mathcal{L}))$ is a selfadjoint in $L^2_{K_2}$, the linear operator $(\mathcal{L},\, D(\mathcal{L}))$ is the generator of an analytic semigroup in $L^2_{K_1}$ However, unfortunately here we will be interested in proving the analyticity of the semi-group in $L^2_{K_\alpha}$ with some $\alpha > 0$ small enough, as a matter of fact we will assume that α is in the interval $(0,\, 1]$.

6.1 Analytic Semigroup $(S_{\mathcal{L}}(t))_{t\geq 0}$ in $L^2_{K_\alpha}$

This section deals with the analyticity of the semigroup $(S_{\mathcal{L}}(t))_{t\geq 0}$ in $L^2_{K_\alpha}$. To this end we need to know how to characterize linear operators wich are generator of analytic semigroups. We remind that it is equivalent to prove that the linear operator $\mathcal{L} - \mu I$ is a generator of an analyic bounded semigroup and the property that there exists $\theta \in (0,\, \pi/2)$, such that $e^{\mathrm{i}\theta}\mathcal{L} - \mu I$ is a generator of a bounded strong continuous semigroup. For more details we refer to Klauss J. Engel and Rainer Nagel [[12], Chap II, Theorem 4.6] . From this we deduce that if we manage to prove the existence of two reals number $\theta \in (0, \pi/2)$, and $\mu \in \mathbb{R}$, such that $e^{\mathrm{i}\theta}\mathcal{L} - \mu I$ be a generator of a semigroup of contractions, then the linear operator $(\mathcal{L} - \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} I)$ is a generator of an analytic bounded semiroup. Now we focus on the study of the linear operator $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$. We assume that $\theta \in (0, 1]$. Let $\alpha \in (0, \pi/2)$ be fixed, we consider the following linear problem : for a function $f \in L^2_{K_\alpha}$, find $u \in H^1_{K_\alpha}$, such that

$$e^{\mathrm{i}\theta}(-\mathcal{L} + \mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})u = f,$$

where μ will be precised later one. We know that this is equivalent to the following problem :

$$-\mathcal{L}u + \lambda u = g,$$

where we set $g := e^{\mathrm{i}\theta} f$ and $\lambda = \mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$. To tackle the analyticity problem's of $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ we will need some preliminary results concerning the numerical range of the operator $\mathcal{L}$, that is the set

$$\mathrm{Num}(\mathcal{L}) := \left\{ (\mathcal{L}u|u)_{L^2_{K_\alpha}} \;;\; u \in D(\mathcal{L}),\; \|u\|_{L^2_{K_\alpha}} = 1 \right\},$$

and we look to prove that $\mathrm{Num}(\mathcal{L})$, which contains the spectrum of $\mathcal{L}$, is contained in a sufficiently narrow sector of the complex plane, showing that $\mathcal{L}$ is a sectorial operator.

For a given $\lambda \in \mathbb{R}$, we define the following functional Φ

$$\Phi(u) := (\lambda u - \mathcal{L}u|u)_{L^2_{K_\alpha}},$$

and, for the sake of simplicity, from now on we denote by $(\cdot|\cdot)_{K_\alpha}$ the scalar product of $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$. One checks easily that

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &:= (\lambda u - \mathcal{L}u|u)_{K_\alpha} \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u\, \overline{u}\; K_{2\alpha}(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(x\, u)\, \overline{u}\, K_{2\alpha}(x)dx \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\; K_{2\alpha}(x)\, dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\nabla u \cdot x\; K_{2\alpha}(x)\, dx \\
&- d \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\nabla u \cdot x K_{2\alpha}(x)dx \\
&= (\lambda - d) \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx \\
&+ (\alpha - 1) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\nabla u \cdot x K_{2\alpha}(x)dx \\
&= (\lambda - d) \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx \\
&+ (\alpha - 1) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}(\overline{u}\nabla u) \cdot x K_{2\alpha}(x)dx + \mathrm{i}(\alpha - 1) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}(\overline{u}\nabla u) \cdot x K_{2\alpha}(x)dx.
\end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}(\overline{u}\nabla u) \cdot x\, K_{2\alpha}(x)dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla |u|^2 \cdot x\, K_{2\alpha}(x)dx \\
&= -\frac{d}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 |x|^2 K_{2\alpha}(x)dx.
\end{aligned}$$

Replacing in the expression of Φ we obtain

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = (\lambda - \frac{d(\alpha+1)}{2}) \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx \qquad (6.1.1) \\
+ \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 |x|^2 K_{2\alpha}(x)dx - \mathrm{i}\,(1-\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}(\overline{u}\nabla u) \cdot x\, K_{2\alpha}(x)dx.
\end{aligned}$$

This implies that the real part of Φ is :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(\Phi(u)) = (\lambda - \frac{d(\alpha+1)}{2}) \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx \\
+ \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 |x|^2 K_{2\alpha}(x)dx
\end{aligned}$$

and the imaginary part of Φ is :

$$\mathrm{Im}\,(\Phi(u)) = -(1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}(\overline{u}\nabla u)\cdot x\, K_{2\alpha}(x)dx. \tag{6.1.2}$$

We know that in order to show that $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ is a generator of a bounded analytic semigroup, we have to show that the linear operator $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ is sectorial. In other words the spectrum of $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ is located in an angular sector. This means that the imaginary part of $\Phi(u)$ must be bounded by a constant times its real part. This is the result of the following lemma.

Lemma 6.1.1. *Assume that $\alpha \in (0,1]$ and $\lambda \geq d$. Let $u \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, and Φ be defined by (6.1.1). Then Φ satisfies*

$$|\mathrm{Im}(\Phi(u))| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\,\mathrm{Re}(\Phi(u)).$$

In particular, for $\lambda \geq d$ the numerical range $\mathrm{Num}(\lambda - \mathcal{L})$ is contained in the sector

$$\left\{ z \in \mathbb{C}\,;\ |\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\mathrm{Re}(z) \right\}.$$

Proof. Let $u \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. From the expression of $\mathrm{Im}(\Phi)$ given by (6.1.2) we have, when $\alpha < 1$ (when $\alpha = 1$ there is nothing to prove, since in that case the operator $\mathcal{L}$ is self-adjoint in $L^2_{K_1}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha}|\mathrm{Im}(\Phi(u))| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u||\nabla u||x| K_{2\alpha}(x)dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2|x|^2 K_{2\alpha}(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Using Young's inequality $a.b \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$, for $a, b \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ one deduces that

$$\frac{1}{1-\alpha}|\mathrm{Im}(\Phi(u))| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}(x)dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2|x|^2 K_{2\alpha}(x)dx.$$

Therefore

$$\frac{1}{1-\alpha}|\mathrm{Im}(\Phi(u))| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon\alpha^2}\right)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}dx - \frac{d}{\varepsilon\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2|x|^2 K_{2\alpha}dx.$$

Using Lemma 2.1.2 we deduce that

$$\frac{1}{1-\alpha}|\mathrm{Im}(\Phi(u))| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\varepsilon\alpha^2}\right)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}dx.$$

Optimizing the right hand side on the variable ε we find that the optimal ε is $\varepsilon = 2/\alpha$. Therefore we have

$$\frac{1}{1-\alpha}|\mathrm{Im}(\Phi(u))| \leq \frac{2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 K_{2\alpha}dx \leq \frac{2}{\alpha}\mathrm{Re}(\Phi(u)).$$

□

As a consequence of this lemma we can list the fact that the linear operator $(\mathcal{L} - \lambda I)$ is dissipative when $\lambda \geq d$.

Lemma 6.1.2. *Let $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ be defined by (6.0.3). Then for all $\lambda \geq d$, the linear operator $\mathcal{L} - \lambda I$ is m-dissipative in $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.*

Proof. Let $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ be defined by (6.0.3) and $\lambda \geq d$. Then Lemma 6.1.1 implies that $\mathrm{Re}(\Phi) \geq 0$. Therefore the linear operator is dissipative in $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. This means that for all $u \in L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$

$$\|(\lambda I - \mathcal{L})u\|_{L^2_{K_\alpha}} \geq \|u\|_{L^2_{K_\alpha}}.$$

Since the linear operator is coercive in $H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ one deduces that the linear operator is maximal. Because of Lax-Milgram's theorem, for all $g \in L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, there exists $u \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, such that

$$-\mathcal{L}u + \lambda u = g.$$

Since the linear operator $\mathcal{L} - \lambda I$ is dissipative and maximal, therefore it is m-dissipative. □

Now we are in a position to prove that the semigroup $(S_{\mathcal{L}})_{t\geq 0}$ generated by $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ is analytic.

Theorem 6.1.3. *Assume that $\alpha \in (0, 1]$ and let $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ be defined by (6.0.3). Then $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ is a generator of an analytic semigroup on $L^2_{K_\alpha}$. In particular, setting $\lambda_0 := d$, there exists a constant $C_1 > 0$ such that for all $t > 0$ on has*

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)f\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq C_1\, t^{-1/2} \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \|f\|_{L^2_{K_\alpha}}. \tag{6.1.3}$$

Proof. We consider $u \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. We set $\lambda_0 := d$. Then for all $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_0$, the linear operator $\mathcal{L} - \lambda I$ is m-dissipative and its domain is dense. Then by Hille-Yosida's Theorem the linear operator $\mathcal{L} - \lambda_1 I$ is a generator of a strong continuous semigroup of contractions. Then by Theorem 4.6 [12], Chapter II, $\mathcal{L} - \lambda I$ is a generator of an analytic bounded semigroup $T(t)$. Now it follows that the semigroup generated by the linear operator $\mathcal{L}$ is an analytic semigroup. As we have

$$S_{\mathcal{L}}(t) = e^{\lambda t} T(t).$$

Therefore we can find a constant $C_0 > 0$ such that

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)\|_{L^2_{K_\alpha} \to L^2_{K_\alpha}} \leq C_0\, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{6.1.4}$$

The estimate (6.1.3) is a consequence of the above inequality and the fact that $S_{\mathcal{L}}(t)$ maps $L^2_{K_\alpha}$ into $D(\mathcal{L})$ with a norm of order $c\, t^{-1}$. □

To finish this section we establish the following lemma which will play a key role for the sequel.

Lemma 6.1.4. *Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold. Then one can find a constant $C > 0$ such that if $u, v \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ one has*

$$\|\mathrm{div}((\nabla a * u)v)\|_{L^2_{K_{5\alpha/4}}} \leq C\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}. \tag{6.1.5}$$

Proof. We assume first that $d \geq 3$ and (1.0.16)–(1.0.18) hold. We consider u and v two functions in $H^1_{K_\alpha}$ and we split $\mathrm{div}((\nabla a * u)v)$ as follows :

$$\mathrm{div}((\nabla a * u)v) = (\nabla a * \nabla u)v + (\nabla a * u) \cdot \nabla v.$$

From (1.0.16)–(1.0.18) we know that $\nabla a \in L^{\frac{2d}{d+2}}_{K_\alpha}$ and $\nabla u \in L^2_{K_\alpha}$. Then thanks to Proposition 2.1.6 and (2.1.16) (where $\alpha = \beta$), we have $\nabla a * \nabla u \in L^d_{K_{\alpha/4}}$. Since $v \in H^1_{K_\alpha}$, thanks to Proposition 2.1.4 we have $v \in L^{2^*}_{K_\alpha}$ where $2^* = 2d/(d-2)$. From this, using (2.1.15), we conclude that $(\nabla a * \nabla u)v \in L^2_{K_{5\alpha/4}}$ and

$$\begin{aligned}
\|(\nabla a * \nabla u)v\|_{L^2_{K_{5\alpha/4}}} &\leq \|\nabla a * \nabla u\|_{L^{d/2}_{K_{\alpha/4}}} \cdot \|v\|_{L^{2d/(d-2)}_{K_\alpha}} \\
&\leq \|\nabla a\|_{L^{2d/(d+2)}_{K_\alpha}} \|\nabla u\|_{L^2_{K_\alpha}} \|v\|_{L^{2d/(d-2)}_{K_\alpha}} \\
&\leq C\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}.
\end{aligned}$$

With the same argument we can prove that the second term is also in $L^2_{K_{5\alpha/4}}$. Indeed, since $u \in L^{2^*}_{K_\alpha}$ and $\nabla a \in L^{2d/(d+2)}_{K_\alpha}$, we have $u * \nabla a \in L^\infty_{K_{\alpha/4}}$. Therefore $(u * \nabla a) \cdot \nabla v \in L^2_{K_{5\alpha/4}}$, and one sees easily that we have

$$\begin{aligned}
\|(u * \nabla a) \cdot \nabla v\|_{L^2_{K_{5\alpha/4}}} &\leq \|u * \nabla a\|_{L^\infty_{K_{\alpha/4}}} \cdot \|\nabla v\|_{L^2_{K_\alpha}} \\
&\leq \|\nabla a\|_{L^{2d/(d+2)}_{K_\alpha}} \|u\|_{L^{2^*}_{K_\alpha}} \|\nabla v\|_{L^2_{K_\alpha}} \\
&\leq C\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}.
\end{aligned}$$

Finally, when $d \geq 3$ one sees that the following inequality holds

$$\|\mathrm{div}((\nabla a * u)v)\|_{L^2_{K_{5\alpha/4}}} \leq C\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}.$$

When $d = 2$, the proof is analogous, the only difference coming from the fact that instead of using the Sobolev imbedding $u \in L^{2^*}_{K_\alpha}$ when $d \geq 3$ and $u, v \in H^1_{K_\alpha}$, one uses the fact that $u \in L^{(1+\varepsilon)/\varepsilon}_{K_\alpha}$ for $0 < \varepsilon < 1$ when $u, v \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^2)$. □

6.2 Local Existence in $L^2_{K_\alpha}$

In this section we attempt to prove the main result of this section. We prove that the local existence for the nonlinear Fokker–Planck equation (5.2.8). To this end we consider again the following equation : for $u_0 \in D(\mathcal{L})$ and $T > 0$ being fixed, find a function $u \in \mathscr{C}([0,\, T);\ D(\mathcal{L})) \cap \mathscr{C}^1([0,\, T);\ L^2_{K_\alpha})$ which satisfies

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}\, u = F(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Here the fonction $F(.)$ is defined as follows :

$$F(u) := \operatorname{div}(\mathbf{E}(x,\ u)u - xu) = \operatorname{div}(\nabla(a * u)u). \tag{6.2.2}$$

One knows that the mild solution of (6.2.1) is of the following form :

$$u(t) = S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau. \tag{6.2.3}$$

Let $R > 0$ be fixed and $u \in H^1_{K_\alpha}$, such that $\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$, then the function F defined by $F(u) = \operatorname{div}(\nabla(a * u)u)$ belongs to $L^2_{K_{5\alpha/4}}$. Now we consider two u and v in $H^1_{K_\alpha}$. We split $F(u) - F(v)$ as follows :

$$F(u) - F(v) := \operatorname{div}((\nabla a * (u - v))u) + \operatorname{div}((\nabla a * v)(u - v)).$$

Applying twice Lemma 6.1.4 the following holds :

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq \|F(u) - F(v)\|_{L^2_{K_{5\alpha/4}}} \leq C.R\, \|u - v\|_{H^1_{K_\alpha}}. \tag{6.2.4}$$

This means that the function F is locally lipschitz from $H^1_{K_\alpha}$ into $L^2_{K_{5\alpha/4}}$, and also from $H^1_{K_\alpha}$ into $L^2_{K_\alpha}$.

From now on, we denote by CR the lipschitz constant appearing in (6.2.4) and $C_0 \geq 1$ the constant appearing in the inequality (6.1.4). We define the following number T_R by

$$T_R := \frac{1}{(4C_1CR)^2}, \tag{6.2.5}$$

for $R > 0$ being fixed. We set $\lambda_0 := d$ and we consider that the space $\mathscr{C}\left([0;\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)$, which is equipped with the norm

$$\|u\|_X := \sup_{t\in[0;\,T_R]} \mathrm{e}^{-\lambda_0\, t}\|u(t)\|_{H^1_{K_\alpha}}, \tag{6.2.6}$$

is a Banach space. With this space and this norm we consider the closed ball of radius $2C_0R$ denoted by

$$X := \left\{ u \in \mathscr{C}\left([0;\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)\ ;\ \sup_{t\in[0;\,T_R]} \mathrm{e}^{-\lambda_0\, t}\|u(t)\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq 2C_0R \right\}, \tag{6.2.7}$$

and we also define the functional $\Phi(\cdot)$ as follows :

$$\Phi(u)(t) := S_{\mathcal{L}}(t)\, u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-\tau) F(u(\tau))\, d\tau. \tag{6.2.8}$$

Then we will show that X is invariant under the action of Φ, and in fact Φ is a contraction in X.

Lemma 6.2.1. *Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold and let $\alpha \in (0,\, 1]$. Consider $R > 0$ be fixed, and T_R be defined by (6.2.5). Then the function $\Phi(\cdot)$ is a contraction in X.*

Proof. Let $R > 0$ be fixed and $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$ such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. We want to show that if $u \in X$, then we have also $\Phi(u) \in X$. For all $t \in [0,\, T_R]$, using successively (6.1.3) and Lemma 6.1.4, we have (with $\lambda_0 := d$)

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{H^1_{K_\alpha}} &\leq \|S_{\mathcal{L}}(t)u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} + \int_0^t \|S_{\mathcal{L}}(t-s)F(u(s))\|_{H^1_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, \|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} + C_1 \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_0 (t-s)} (t-s)^{-1/2} \|F(u(s))\|_{L^2_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_0\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, R + C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, CR \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_0 s} (t-s)^{-1/2} \|u(s)\|_{H^1_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_0\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, R + C_1\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, CR \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|u\|_X\, ds \\
&\leq C_0\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \cdot R + 2C_1\, CR\, t^{1/2} \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\, \|u\|_X.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\|\Phi(u)\|_X \leq C_0 R + 2C_1 C R T_R^{1/2} K_0 \leq 2C_0 R$$

since T_R is defined by (6.2.5), and thus we see that $\Phi(u) \in X$ for any $u \in X$.

Now we consider u and v two functions in X. Then for $t \in [0,\, T_R]$ we have

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^1_{K_\alpha}} &\leq \int_0^t \|S_{\mathcal{L}}(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))\|_{H^1_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_1 \int_0^t (t-s)^{-1/2} \mathrm{e}^{\lambda_0 (t-s)} \|F(u(s)) - F(v(s))\|_{L^2_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_1\, CR \int_0^t (t-s)^{-1/2} \mathrm{e}^{\lambda_0 (t-s)} \|u(s) - v(s)\|_{H^1_{K_\alpha}}\, ds \\
&\leq C_1 CR \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \|u - v\|_X \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds. \\
&\leq C_1 CR\, t^{1/2}\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \|u - v\|_X.
\end{aligned}$$

Multiplying by $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ and taking the sup in both sides, we obtain

$$\sup_{t \in [0,\, T_R]} \mathrm{e}^{-\lambda t} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq C_1 CR T_R^{1/2} \|u - v\|_X = \frac{1}{2} \|u - v\|_X,$$

which shows that Φ is a contraction in the ball X, and so it has a unique fixed point there. □

The equation (6.2.3) admits a unique local solution.

Lemma 6.2.2. *Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold. Let $R > 0$ be fixed and $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$, such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Then there exists a unique function u in $\mathscr{C}\left([0, T_R]; H^1_{K_\alpha}\right)$ solution to (6.2.3) associated to u_0. Moreover the function $u \in \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$.*

Proof. Let $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$ and $R > 0$ be fixed, such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold. Then by Lemma 6.2.1 there exists $u \in \mathscr{C}\left([0, T_R]; H^1_{K_\alpha}\right)$ solution of (6.2.3). Because $\Phi(.)$ is a contraction in X. Then the function $\Phi(.)$ admits a fix point by the Banach Fixed Point Theorem. Since $u(t) \in X$, we can deduce that $u(t) \in L^2_{K_\alpha}$. This means that $u \in \mathscr{C}\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$. To prove that $u \in \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$, we set :

$$v(t) := \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-s)F(u(s))ds. \tag{6.2.9}$$

Since $u \in \mathscr{C}\left([0, T_R]; H^1_{K_\alpha}\right)$ and F is locally lipschitz from $H^1_{K_\alpha}$ into $L^2_{K_{5\alpha/4}}$, we deduce that $F(u) \in \mathscr{C}\left([0; T_R]; L^2_{K_{5\alpha/4}}\right)$. Then we have $v \in \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$. We know that $S_{\mathcal{L}}(t)u_0 \in \mathscr{C}^1\left([0, T]; L^2_{K_\alpha}\right)$. In fact $S_{\mathcal{L}}(t)u_0 = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}u_0$ is diffentiable in $[0, T]$ and

$$\frac{d}{dt}S_{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}S_{\mathcal{L}}(t)u_0$$

is also continuous. Then

$$S_{\mathcal{L}}(t)u_0 \in \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right).$$

Therefore $u \in \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$. □

Now we prove our main result.

Theorem 6.2.3. *Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold. Let $R > 0$ be fixed. Consider a function $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$ satisfying $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Then there exist a fixed number $T_R > 0$ depending on R and a unique function $u \in \mathscr{C}\left([0, T_R]; H^1_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$ solution to (5.2.8) associated to u_0.*

Proof. Let $R > 0$ be fixed, $\alpha \in (0, 1]$ and $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$, such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Assume that (1.0.16)–(1.0.18) hold then there exists a unique function $u \in \mathscr{C}^0\left([0, T_R]; H^1_{K_\alpha}\right)$ solution of (6.2.3). The function u is a solution of (5.2.8). This is a consequence of Lemma 6.2.2. Indeed by Lemma 6.2.2 the function u is also in $\mathscr{C}^1\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$ .Therefore u' exists and $u' \in \mathscr{C}^0\left([0, T_R]; L^2_{K_\alpha}\right)$. For $t \in [0, T_R]$, we have

$$u(t) = S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + v(t),$$

where v is defined by (6.2.9). Differentiating u, one has

$$u'(t) = \mathcal{L}S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + \mathcal{L}v + F(u(t)).$$

This means that

$$u'(t) = \mathcal{L}u + F(u(t)). \tag{6.2.10}$$

Now it remains to prove that $u \in D(\mathcal{L})$. Since the function F is locally lipschitz, $F(u(.)) \in L^2_{K_{5\alpha/4}}$. Then the function $u' \in \mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. Because $u \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. Using (6.2.10), we obtain

$$\mathcal{L}u = u' - F(u) \in L^2_{K_\alpha}.$$

So we conclude that $u(t) \in D(\mathcal{L})$. □

We know from the theory of evolution equations that (5.2.8) admits a solution $f_{\max}$ which cannot be extended any longer. This solution is called the maximal solution of (5.2.8). This allows us to find a largest time interval $I_{\max} := [0,\, T_{\max}]$ such that outside this interval the solution $f_{\max}$ is not defined. The interval $I_{\max}$ is called the maximal interval. We define $T_{\max}$ as follows :

$$T_{\max} := \sup\left\{T\ ;\ \exists u \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T];\, L^2_{K_\alpha}\right) \quad \text{solution of} \quad (5.2.8)\right\}.$$

Thus it is obvious that $T_{\max} \geq T_R$.

Conclusion : As a conclusion, we proved the local time existence in $L^2_{K_\alpha}$ under the assumption $\nabla a \in L^q_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$. We also shoved that the semigroup generated by the linear operator $\mathcal{L}\ u := \Delta\ u + \mathrm{div}(x\ f)$ is analytic. But this result is not very satisfying as far as it is local and it has been proved in a small set of $L^2(\mathbb{R}^d)$. Now our goal is to establish a more satifying that this one. To this end we introduce a new chapter in which we make assumptions which will allows us to prove global existence for the nonlinear Fokker–Planck equation.

Chapitre 7

Global Existence for Nonlinear Fokker–Planck Equation with a General Force Field $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$

The aim of this chapter is to establish that the nonlinear Fokker–Planck equation has a unique global solution. To this end we assume that the vector field $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. In the previous chapter we have shown that the linear operator

$$\mathcal{L}\,u := \Delta u + \operatorname{div}(x\,u), \qquad D(\mathcal{L}) := \left\{u \in L^2_{K_\alpha}\ ;\ \mathcal{L}u \in L^2_{K_\alpha}\right\}$$

is a generator of an analytic semigroup. Thereby we can find two reals λ and $C_0 > 0$ such that for all real number $t \geq 0$ the following holds

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)\| \leq C_0\ \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

This chapter is organised as follows.In the first section we prove the local existence in $L^2_{K_\alpha}$. In the second section we show that there exists a local solution in L^2_k. The third section is devoted to the global existence in L^2_k. The last section deals with the continuity dependance on the vector field a and on the initial data. Assume that $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Let f be a function belonging to $L^2_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Then we have also $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, and since $\nabla a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, we conclude that $\nabla a * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Then it makes a sens to write

$$(\nabla a * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \nabla a(x-y) f(y) dy,$$

and we have

$$|(\nabla a * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla a(x-y)||f(y)| dy.$$

Then we obtain

$$\begin{aligned}|(\nabla a * f)(x)| &\leq \|\nabla a\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy \\ &\leq \|\nabla a\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} K_{-\alpha}(y)|f(y)|K_\alpha(y)dy \\ &\leq \|\nabla a\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{-2\alpha}(y)dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 K_{2\alpha}dy\right)^{1/2} \\ &\leq C\|\nabla a\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2_{K_\alpha}}.\end{aligned}$$

It then follows that there exists a constant $C(a) > 0$ depending on a such that

$$\big|\big(\nabla a * f\big)\big| \leq C(a)\|f\|_{L^2_{K_\alpha}}.$$

Using this we can prove the following result.

Lemma 7.0.1. *Assume that $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ and (1.0.17)–(1.0.18) hold. Then there exists a constant $C(a) > 0$ such that if $u, v \in H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ we have*

$$\|\mathrm{div}\big(\nabla(a * u)v\big)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq C(a)\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}.$$

Proof. We take two functions $u, v \in H^1_{K_\alpha}$, then we have also $u, v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$. We split $\mathrm{div}\big(\nabla(a * u)v\big)$ in the following way

$$\mathrm{div}\big(\nabla(a * u)v\big) = \big(\nabla a * \nabla u\big)v + \big(\nabla a * u\big) \cdot \nabla v.$$

This leads to the following inequality :

$$\|\mathrm{div}\big(\nabla(a * u)v\big)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq \|(\nabla a * \nabla u)v\|_{L^2_{K_\alpha}} + \|(\nabla a * u) \cdot \nabla v\|_{L^2_{K_\alpha}}.$$

Using the above remarks regarding the fact that $\|\nabla a * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(a)\|f\|_{L^2_{K_\alpha}}$, we have

$$\begin{aligned}\|\big(\nabla a * \nabla u\big)v\|^2_{L^2_{K_\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla a * \nabla u|^2 |v|^2 K_{2\alpha}dx \\ &\leq C(a)\|\nabla u\|^2_{L^2_{K_\alpha}} \|v\|^2_{L^2_{K_\alpha}} \\ &\leq C(a)\|u\|^2_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|^2_{H^1_{K_\alpha}}.\end{aligned}$$

With the same argument we can prove that we can have a constant $C(a) > 0$, such that

$$\begin{aligned}\|\big(\nabla a * u\big)\nabla v\|^2_{L^2_{K_\alpha}} &\leq C(a)\|u\|^2_{L^2_{K_\alpha}} \cdot \|\nabla v\|^2_{L^2_{K_\alpha}} \\ &\leq C(a)\|u\|^2_{H^1_{K_\alpha}} \|v\|^2_{H^1_{K_\alpha}}.\end{aligned}$$

Finally we obtain

$$\|\mathrm{div}\big(\nabla(a * u)v\big)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq C(a)\|u\|_{H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)}.$$

□

We consider a fix number $R > 0$ and two functions u and v $H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ such that $\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$ and $\|v\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. We define the following fonction F :

$$F(u) := \operatorname{div}\big(\nabla(a * u)u\big).$$

We can write

$$F(u) - F(v) = \operatorname{div}\big((\nabla a * (u - v))v\big) + \operatorname{div}\big((\nabla a * v)(u - v)\big).$$

Now we apply the lemma above and we obtain

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq C(a)\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|u - v\|_{H^1_{K_\alpha}} + C(a)\|u - v\|_{H^1_{K_\alpha}} \cdot \|v\|_{H^1_{K_\alpha}}.$$

Using the fact that $\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$ and $\|v\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$, one has

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq C(a) \cdot R\|u - v\|_{H^1_{K_\alpha}}.$$

Then we have

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2_{K_\alpha}} \leq C(a)R \cdot \|u - v\|_{H^1_{K_\alpha}}. \tag{7.0.1}$$

This implies that the function F is locally lipschitz from $H^1_{K_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ into $L^2_{K_\alpha}$.

7.1 Local Existence in $L^2_{K_\alpha}$

The aim of this section is to prove the local existence for the nonlinear Fokker–Planck in $L^2_{K_\alpha}$. To this end we consider the following equation : for $u_0 \in D(L)$ and $T > 0$, find $u \in \mathscr{C}([0,\, T);\ D(\mathcal{L})) \cap \mathscr{C}^1([0,\, T);\ L^2_{K_\alpha})$ such that

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = F(u) \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \tag{7.1.1}$$

We remind that the function F is defined as follows :

$$F(u) := \operatorname{div}(\mathbf{E}(x, u)u - xu) = \operatorname{div}(\nabla(a * u)u). \tag{7.1.2}$$

The classical theory of evolution equations establish that if (7.1.1) has a solution, then this solution is given by the following formula :

$$u(t) = S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t - \tau)F(u(\tau))d\tau. \tag{7.1.3}$$

It is a classical known fact that (7.1.1) admits a unique solution if F is locally Lipschitz, and this only allows us to prove a local existence result.

In this paragraph we introduce some notations. Consider $R > 0$ be a fixed real number. Let $u \in H^1_{K_\alpha}$ such that $\|u\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$.

From now on, we denote by $C(a)R$ the Lipschitz constant appearing in (7.0.1) and C_0 and C_1 the constants appearing in (6.1.4) and (6.1.3).

We define the real number T_R

$$T_R := \frac{1}{(4C_0C_1R)^2}, \tag{7.1.4}$$

and we consider again the space $\mathscr{C}\left([0;\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)$ equipped with the norm (6.2.6) where $\lambda_0 = d$, and the ball

$$X := \left\{ u \in \mathscr{C}\left([0;\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right) \;;\; \sup_{t\in[0;\,T_R]} \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\|u(t)\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq 2C_0R \right\}. \tag{7.1.5}$$

For a given $u_0 \in H^1_{K_\alpha}$ we define the functional Φ by setting :

$$\Phi(u)(t) := S_{\mathcal{L}}(t)\, u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-\tau)F(u(\tau))\, d\tau. \tag{7.1.6}$$

Now we prove that (7.1.1) admits a local solution in $L^2_{K_\alpha}$.

Lemma 7.1.1. *Assume that $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Let $R > 0$ be fixed and $u_0 \in D(\mathcal{L})$, such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. We can find a unique function u in $\mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)$ solution to (7.1.6) associated to u_0.*

Moreover the function u belongs to $\mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$.

Proof. Let $u_0 \in D(\mathcal{L})$ and $R > 0$ be fixed, such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Then by Lemma 6.2.1 there exists $u \in \mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)$ solution of (6.2.3), and in particular $u \in \mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. To prove that $u \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$, we set :

$$v(t) := \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-s)F(u(s))ds. \tag{7.1.7}$$

Since $u \in \mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right)$ and F is locally lipschitz from $H^1_{K_\alpha}$ into $L^2_{K_{5\alpha/4}}$, we deduce that $F(u(.)) \in \mathscr{C}\left([0;\, T_R];\, L^2_{K_{5\alpha/4}}\right)$. Then we have $v \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. We know that $S_{\mathcal{L}}(t)u_0 \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. In fact $S_{\mathcal{L}}(t)u_0 = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}u_0$ is diffentiable in $[0,\, T]$ and

$$\frac{d}{dt}S_{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}S_{\mathcal{L}}(t)u_0$$

is also continuous. Then $S_{\mathcal{L}}(t)u_0 \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$.

Therefore $u \in \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$. □

Now we are in a position to prove the following theorem.

Theorem 7.1.2. *Assume that $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Consider $R > 0$ be fixed and $u_0 \in D(\mathcal{L})$ such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. Then there exist $T_R > 0$ depending on R and a unique function $u \in \mathscr{C}\left([0,\, T_R];\, H^1_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}^1\left([0,\, T_R];\, L^2_{K_\alpha}\right)$ solution to (7.1.1) associated to u_0.*

Proof. Let $R > 0$ be fixed and $u_0 \in D(\mathcal{L})$ such that $\|u_0\|_{H^1_{K_\alpha}} \leq R$. We assume that $\alpha \in (0, 1]$. Then there exist a unique function $u \in \mathscr{C}^0\left([0,\ T_R];\ H^1_{K_\alpha}\right)$ solution of (7.1.6). The function u is also a solution of (7.1.1). This is a consequence of Lemma 7.1.1. Indeed by Lemma 7.1.1 the function u is also in $\mathscr{C}^1\left([0,\ T_R];\ L^2_{K_\alpha}\right)$.Therefore u' exists and $u' \in \mathscr{C}^0\left([0,\ T_R];\ L^2_{K_\alpha}\right)$. For $t \in [0,\ T_R]$, we have

$$u(t) = S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + v(t),$$

where we set

$$v(t) = \int_0^t S_{\mathcal{L}}(t-s)F(u(s))ds.$$

Differentiating u , one has

$$u'(t) = \mathcal{L}S_{\mathcal{L}}(t)u_0 + \mathcal{L}v + F(u(t)).$$

This means that

$$u'(t) = \mathcal{L}u + F(u(t)). \tag{7.1.8}$$

The only thing, which it remains to prove is the fact that $u \in D(L)$. Since the function F is locally lipschitz then $F(u(.)) \in L^2_{K_\alpha}$. Then the function $u' \in \mathscr{C}\left([0,\ T_R];\ L^2_{K_\alpha}\right)$. Because $u \in \mathscr{C}^1\left([0,\ T_R];\ L^2_{K_\alpha}\right)$. Using (7.1.8) we deduce that

$$\mathcal{L}u = u' - F(u) \in L^2_{K_\alpha}.$$

So we conclude that $u(t) \in D(\mathcal{L})$. □

7.2 Local Existence in L^2_k

The purpose of this section is to prove that the solution found in the previous section belongs also to the space $\mathscr{C}\left([0,\ T_R];\ L^2_k\right)$ where $T_R \leq T_{\max}$. The proof of this result is based on the following consideration. For a function $g \in \mathscr{C}([0, T_R];\ L^2_k)$ find a function u in $\mathscr{C}\left([0,\ T_R];\ H^1_k\right) \cap \mathscr{C}^1\left([0,\ T_R];\ L^2_k\right)$ solution of the following linear problem

$$\partial_t u = \Delta u + \operatorname{div}(x\, u) + \operatorname{div}\big(\big(\nabla a * g\big)u\big).$$

We define the operator $\Phi : \mathscr{C}([0, T_R];\ L^2_k) \longrightarrow \mathscr{C}([0, T_R];\ L^2_k)$ by setting : for $g \in \mathscr{C}([0, T_R];\ L^2_k)$ and u solution to the above linear evolution equation

$$\Phi(g) := u.$$

Now our goal is to show that the function Φ admit a fix point $u \in \mathscr{C}\left([0,\ T_R];\ L^2_k\right)$ solution to (7.1.1).

To make the presentation clear we state the following results. We specify that throughout this section we assume that $T \leq T_{\max}$.

Lemma 7.2.1. *Assume $a \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ hold. Let $T > 0$ be fixed and $f_0 \in L^2_{K_\alpha} \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Denote by $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T]; L^2_{K_\alpha}\right)$ the local solution of (5.2.8) associated to f_0. Then the following inequality holds*

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)dx.$$

This is consequence of the Stokes's theorem. Indeed if $f \in \mathscr{C}\left([0,T]; H^1_{K_\alpha}\right)$ then $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ and

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\nabla f + xf + (\nabla a * f)f)dx \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Integrating in time between 0 and $t > 0$ we obtain

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)dx.$$

Lemma 7.2.2. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ and $\nabla a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Let $T > 0$ be fixed, $f_0 \in L^2_{K_\alpha} \cap L^1_k$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T]; L^2_{K_\alpha}\right)$ be the local solution of (5.2.8) associated to f_0. Then there exists a constant $\beta_0(k, a, \|f_0\|_{L^1}) > 0$, depending on a, $\|f_0\|_{L^1}$ and k such that*

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\langle x\rangle^k dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_0 T}. \tag{7.2.1}$$

Proof. Let $f_0 \in L^2_{K_\alpha} \cap L^1_k$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T]; L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T]; H^1_{K_\alpha}\right)$. We can write

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(x\, f + (\nabla a * f)f)\langle x\rangle^k dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f\Delta\langle x\rangle^k dx - \int_{\mathbb{R}^d} f\ x\cdot\nabla\langle x\rangle^k dx - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * f) f\nabla\langle x\rangle^k dx\end{aligned}$$

Then we have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\right]\langle x\rangle^k dx \\ + \|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f\frac{|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Now we set

$$\beta_0(k, a, \|f_0\|_{L^1}) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} + \frac{\|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}|x|}{1+|x|^2}\right]$$

The assumption $k > d/2$ implies

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx \leq \beta_0(k,a,\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx.$$

Integrating between 0 and $t > 0$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0\langle x\rangle^k dx + \beta_0(k,a,\|f_0\|_{L^1})\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)\langle x\rangle^k dxds.$$

The Gronwall's lemma implies that

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_0(k,a,\|f_0\|_{L^1})t} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_0(k,a,\|f_0\|_{L^1})T}.$$

□

Lemma 7.2.3. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Let $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$. We denote by $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T];L^2_{K_\alpha}\right)$ the local solution of (5.2.8) associated to f_0. We can find a constant $\beta_1(k,a,\|f_0\|_{L^1}) > 0$ depending on k, a and f_0 such that the following inequality holds :*

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\langle x\rangle^k dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0^2\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_1 T}. \tag{7.2.2}$$

Proof. We consider $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T];L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];H^1_{K_\alpha}\right)$. We multiply (5.2.8) by $f\langle x\rangle^k$ and we integrate on $\mathbb{R}^d$. And we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f\, f\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(x\, f + (\nabla a * f)f)\, f\langle x\rangle^k dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\langle x\rangle^k dx + \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\Delta\langle x\rangle^k dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 x\cdot\nabla\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a * f)f^2\langle x\rangle^k dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * f)f^2\nabla\langle x\rangle^k dx \\
&\leq \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{1}{2}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx.
\end{aligned}$$

Therefore we have

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \leq \beta_1(k,a,\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx.$$

Integrating between 0 and $t > 0$ we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0^2\langle x\rangle^k dx + \beta_1(k, a, \|f_0\|_{L^1}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx\, ds.$$

Using Gronwall's lemma we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0^2\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_1(k,a,\|f_0\|_{L^1})t} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0^2\langle x\rangle^k dx\right) e^{\beta_1(k,a,\|f_0\|_{L^1})T}.$$

□

From now on we assume that for all $f_0 > 0$ the local solution f of (5.2.8) associated to f_0 is a strictly positive function .

In the following lemma we study the entropy in the functional spaces without weight.

Lemma 7.2.4. *Let $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$, such that $f_0 > 0$. We consider*

$$f \in \mathscr{C}^1\left([0, T]; L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0, T]; H^1_{K_\alpha}\right)$$

the local solution of (5.2.8) associated to f_0. Then there exist two constants $C_0 > 0$ and $C_1 > 0$ such that the following inequality holds

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx \leq C_0 + C_1\, T. \tag{7.2.3}$$

Proof. Consider $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$, $f_0 > 0$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0, T]; L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0, T]; H^1_{K_\alpha}\right)$, the local solution of (5.2.8) associated to f_0. We multiply by $\log(f)$ and we integrate in $\mathbb{R}^d$. Then we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f\log(f)dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx - \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx,$$

and therefore, after two integration by parts in the second and third terms we get

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla f|^2}{f}dx + d\int_{\mathbb{R}^d} f dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a * f) f dx \\ &\leq (d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}) \int_{\mathbb{R}^d} f dx \\ &\leq (d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1})\|f_0\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Integrating in time we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0\, dx + (d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1})\|f_0\|_{L^1}\, T.$$

Setting $C_0 := \int_{\mathbb{R}^d} f_0\, dx$ and $C_1 := (d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1})\|f_0\|_{L^1}$, we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx \leq C_0 + C_1\, T.$$

□

Lemma 7.2.5. *We assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Consider $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$, such that $f_0 > 0$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T];L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];H^1_k\right)$, the local solution of (7.1.1) associated to f_0. Then there exist two constants $C_2 > 0$ and $\beta_2 > 0$ depending on k, a, $\|f_0\|_{L^1}$ such that the following holds*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx \leq C_2 T \mathrm{e}^{\beta_2 T}. \tag{7.2.4}$$

Proof. Take $f_0 \in L^2_{K_\alpha}$, such that $f_0 > 0$ and $f \in \mathscr{C}^1\left([0,T];L^2_{K_\alpha}\right) \cap \mathscr{C}\left([0,T];H^1_{K_\alpha}\right)$ the local solution of (5.2.8) associated to f_0. We multiply (5.2.8) by $\log f\langle x\rangle^k$ and we integrate in $\mathbb{R}^d$. Therefore we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f \log\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(x\, f + (\nabla a * f)\, f)\log\langle x\rangle^k dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla f|^2}{f}\langle x\rangle^k dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} f\left[-\Delta\langle x\rangle^k + x\cdot\nabla\langle x\rangle^k + (d + (\Delta a * f))\langle x\rangle^k +\right] dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} f(\nabla a * f)\cdot\nabla\langle x\rangle^k dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\left[\Delta\langle x\rangle^k - x\cdot\nabla\langle x\rangle^k - (\nabla a * f)\nabla\langle x\rangle^k\right] dx \\
&\leq \gamma_k \int_{\mathbb{R}^d} f\langle x\rangle^k\, dx + \beta_0(k,a,\|f_0\|_{L^1}) \int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k\, dx,
\end{aligned}$$

where we set

$$\begin{aligned}
\gamma_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} + \|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\frac{k|x|}{1+|x|^2}\right] \\
+ d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

From (7.2.1) we deduce that there exists a constant $\beta_2 > 0$ such that

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx \leq \gamma_k\, C_1(k,a,\|f_0\|_{L^1}) + \beta_2 \int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx.$$

Integrating between 0 and t one has

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx \leq \gamma_k\, C_1(k,a,\|f_0\|_{L^1})t + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx\, ds.$$

The Gronwall's lemma implies that

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)\langle x\rangle^k dx \leq \gamma_k C_1(k,a,\|f_0\|_{L^1}) T\, \mathrm{e}^{C\,T},$$

□

Theorem 7.2.6. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Let $f_0 \in L^2_k$ and $R > 0$ such that $\|f_0\|_{L^2_k} \leq R$. Then there exists a unique function $f \in \mathscr{C}([0,T]; L^2_k)$ solution to (5.2.8) associated to f_0.*

Proof. We define the following set

$$X_T := \left\{ f \in \mathscr{C}\left([0,T]; L^2_k\right) \ ; \ \|f\|_{L^1} \leq \|f_0\|_{L^1} \text{ and } \|f\|_{L^2_k} \leq C_2(k, a, \|f_0\|_{L^1}) \right\}. \tag{7.2.5}$$

Consider this application

$$\begin{aligned} \Phi : X_T &\longrightarrow X_T \\ g &\mapsto f, \end{aligned}$$

where for all $g \in X_T$ we associated f in X_T such that the function f is the solution of the following linear problem

$$\partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(x\, f) + \operatorname{div}((\nabla a * g) f). \tag{7.2.6}$$

Now we consider two functions f_1 and f_2 solution of (7.2.6) associated with g_1 and g_2. We want to prove that the function Φ is a contraction in X_T. To this end we set $f := f_2 - f_1$ and $g := g_2 - g_1$. Then the function f is solution of this equation

$$\partial_t f = \Delta f + \operatorname{div}(xf) + \operatorname{div}((\nabla a * g_1) f) + \operatorname{div}((\nabla a * g) f_2). \tag{7.2.7}$$

Now we multiply by $f\langle x\rangle^k$ and we integrate in $\mathbb{R}^d$. Then it follows that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f\, f\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} (x\, f + (\nabla a * f))\, f\langle x\rangle^k dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} f^2 \Delta\langle x\rangle^k dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} f^2 \frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx + d\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a * g_1) f^2\langle x\rangle^k dx - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * g_1) f^2 \nabla\langle x\rangle^k dx \\ &- 2\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * g) f_2 \nabla f \langle x\rangle^k dx - 2\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * g) f_2 f \nabla\langle x\rangle^k dx \\ &\leq -2\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\langle x\rangle^k dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} f^2 \left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} \right] \langle x\rangle^k dx \\ &+ d\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|g_1\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \\ &+ \|\nabla a\|_{L^\infty}\|g_1\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\nabla\langle x\rangle^k dx \\ &+ 2\|\nabla a * g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_2 \nabla f \langle x\rangle^k dx + 2\|\nabla a * g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_2 f \nabla\langle x\rangle^k dx. \end{aligned}$$

Then Young's inequality implies that

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \le -2\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2\langle x\rangle^k dx \\ + \int_{\mathbb{R}^d} f^2\left[\frac{kd+k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\right]\langle x\rangle^k dx \\ + d\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|g_1\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \\ + \|\nabla a\|_{L^\infty}\|g_1\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^2|\nabla\langle x\rangle^k| dx \\ + 2\|\nabla a * g\|_{L^\infty}^2\int_{\mathbb{R}^d} f_2^2\langle x\rangle^k dx + 2\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla f|^2\langle x\rangle^k dx \\ + 2\|\nabla a * g\|_{L^\infty}^2\int_{\mathbb{R}^d} f_2^2\langle x\rangle^k dx + \int_{\mathbb{R}^d} f^2\frac{k|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Setting

$$\begin{aligned}C_4(k,d,a,\|f_0\|_{L^1}) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\Big\{\frac{kd+k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} - \frac{k|x|^2}{(1+|x|^2)^2} \\ + \|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\frac{k|x|}{1+|x|^2}\Big\} + d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx &\le C_4(k,d,a,\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + 4\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}^2\int_{\mathbb{R}^d} f_2^2\langle x\rangle^k dx \\ &\le C_4(k,d,a,\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + 4\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}^2 C_2(k,a,\|f_0\|_{L^1}). \\ &\le C_4(k,d,a,\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx + 4\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2_k}^2 C_2(k,a,\|f_0\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Integrating between 0 and $t > 0$ the following holds

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \le C_4(k,a,\|f_0\|_{L^1})\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx\, ds \\ + 4\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2_k}^2 C_2(k,a,\|f_0\|_{L^1})t.\end{aligned}$$

By Gronwall's lemma we deduce that

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx dt \le 2C_2(k,a,\|f_0\|_{L^1})\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2_k}^2\, t^2 \mathrm{e}^{C_4(k,a,\|f_0\|_{L^1})t}.$$

Now we fix T such that

$$C_*(T) := 2C_2(k,a,\|f_0\|_{L^1})\|\nabla a\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2_k}^2\, T^2 e^{C_4(k,a,\|f_0\|_{L^1})T} < 1.$$

Then it follows that

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle x\rangle^k dx \le C_*(T)\|g\|_{L^2_k}^2.$$

Thus we have proved that the function Φ is a contraction in X_T. Therefore by the Banach fixed point theorem, there exists a unique function $f \in X_T$, such that $\Phi(f) = f$. That is, f is the unique local solution of (7.1.1). This completes the proof. □

We can find a maximal solution $f_{\max}$. We denote by $T_{\max}$ the time associated to $f_{\max}$.

7.3 Global solution

This section is devoted to the proof of global existence for (7.1.1). In the previous section we have proved the local existence in L^2_k when $f_0 \in L^2_k$. Now we want to establish that the local solution do not blow up when the time T tends to $T_{\max}$. To prove this we need to show that the local solution is uniformly bounded. In other words we have to find a constant $C > 0$ such that for all $t < T_{\max}$

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq C.$$

We start this section by the following lemma.

Lemma 7.3.1. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. We consider a function $f_0 \in L^2_k \cap L^\infty_k$. We denote by f the local solution of (5.2.8) associated to f_0 on the interval $[0,T]$. Then one can find a constant $C_5(k, a, \|f_0\|_{L^1}) > 0$ depending on k, a, f_0 and T such that*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_5(k, a, f_0, T). \tag{7.3.1}$$

Proof. Let $f_0 \in L^2_k \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Denote by f the local solution of (5.2.8) associated to f_0. We assume that ∇f is well defined at least in the weak sense. We multiply (5.2.8) by $f^{p-1}\langle x\rangle^k$ and we integrate in $\mathbb{R}^d$. We have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx = &-\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 f^{p-2}\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} f^p \frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{d(p-1)}{p}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} f^p \frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx \\
&+ \frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a * f) f^p\langle x\rangle^k dx \\
&- \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * f) f^p \frac{kx}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx.
\end{aligned}$$

Since $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $\|f\|_{L^1} \leq \|f_0\|_{L^1}$ one deduces that

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} f^p \frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\ + d\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \\ + \frac{1}{p}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Putting together all the terms one has

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} f^p \frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\ + \frac{1}{p}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx \\ + \frac{p-1}{p}(d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1})\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Setting

$$\begin{aligned}C_0(p) := \frac{1}{p}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \|\nabla a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}\frac{k|x|}{1+|x|^2}\right] \\ + \frac{p-1}{p}(d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}),\end{aligned}$$

we obtain

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \leq p\cdot C_0(p)\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx.$$

Now we integrate in time between 0 and $t > 0$ we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0^p\langle x\rangle^k dx + p\,C_0(p)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx\,ds.$$

Using the Gronwall's lemma we get

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0^p\langle x\rangle^k dx\right)\cdot\exp\left(pC_0(p)t\right).$$

Raising to the power $1/p$ we obtain

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} f^p\langle x\rangle^k dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_0^p\langle x\rangle^k dx\right)^{1/p}\cdot\exp\left(C_0(p)t\right)$$

We remind that for all $t > 0$ being fixed the following holds

$$\lim_{p\to\infty}\|g\|_{L^p} = \|g\|_{L^\infty},$$

From this, since $C_0(p) \to d + \|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1}$ when $p \to \infty$, we deduce that

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty}\mathrm{e}^{(d+\|\Delta a\|_{L^\infty}\|f_0\|_{L^1})T}.$$

Then for all fixed $T > 0$ the function f is bounded in the interval $[0, T]$. □

A consequence of this lemma is the following result

Theorem 7.3.2. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Let $f_0 \in L^2_k \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Then for all fixed $T > 0$ the problem (5.2.8) admits a unique global solution $f \in \mathscr{C}([0, T]; L^2_k)$ associated to f_0.*

Proof. Let $f_0 \in L^2_k \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Using lemma 7.3.1 we know that we can find a constant $C(k, a, f_0, T) > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \langle x \rangle^k dx \leq C(k, a, f_0, T).$$

The lemma 7.3.1 implies that the solution of (5.2.8) is uniformly bounded. This means that the solution do not blow up when the time t tends to T. Then the solution is defined in the whole intervall $[0, T]$. Then the solution $f \in \mathscr{C}([0, T]; L^2_k)$. Since we choose an arbitrary T, this proves the theorem. □

Since we have a global solution, we want to know how, the solution depends on the initial data and on the vector field.

7.4 Continuous Dependance on the Vector field

The aim of this section is to study the dependance of the solution to (5.2.8) on the vector field a and on the initial data f_0. That is why we consider two vector fields a_1 and a_2 in $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. As we know that a_1 and a_2 in $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ we can find a constant $M > 0$ such that

$$\|a_1\|_{W^{2,\infty}} \leq M \text{ and } \|a_2\|_{W^{2,\infty}} \leq M.$$

Take two functions f_1 and f_2 the solutions of (5.2.8) associated respectively to a_1 and a_2. We assume that a_1 and a_2 are close enough. This mean that there exists a real number $\delta_1 > 0$ small enough such that $\|a_1 - a_1\|_{W^{2,\infty}} \leq \delta_1$. Let f_{01} and f_{02} be two functions of L^2_k and $\delta_2 > 0$ be a real number such that $\|f_{01} - f_{02}\|_{L^2_k} \leq \delta_2$. Now we want to know if the solution of (5.2.8) depends continuously on the vector field. In other words for all real number $\varepsilon > 0$ can we find two real number δ_1 and δ_2 such that

$$\|a_1 - a_1\|_{W^{2,\infty}} \leq \delta_1 \quad \text{and} \quad \|f_{01} - f_{02}\|_{L^2_k} \leq \delta_2 \Rightarrow \|f_1 - f_2\|_{L^2_k} \leq \varepsilon?$$

To prove this property we introduce the two following equations satisfied by f_i and a_i for $i = 1 \quad \text{or} \quad 2$.

$$\begin{cases} \partial_t f_1 = \Delta f_1 + \operatorname{div}(x\, f_1) + \operatorname{div}((\nabla a_1 * f_1) f_1) \\ f_1(0, x) = f_{01}(x) \end{cases} \tag{7.4.1}$$

and

$$\begin{cases} \partial_t f_2 = \Delta f_2 + \operatorname{div}(x\, f_2) + \operatorname{div}((\nabla a_2 * f_2) f_2) \\ f_2(0,x) = f_{02}(x). \end{cases} \tag{7.4.2}$$

We choose two functions f_{01} and f_{02} belonging to L^2_k. Let $R > 0$ be a fixed real number such that $\|f_{01}\|_{L^2_k} \leq R$ and $\|f_{02}\|_{L^2_k} \leq R$. We make the following notation $g := f_1 - f_2$ and $a := a_1 - a_2$. We can see that g satisfies the following nonlinear equation

$$\begin{cases} \partial_t g = \Delta g + \operatorname{div}(x\, g) + \operatorname{div}((\nabla a * g) g) + H(g) \\ g(0,x) = (f_{01} - f_{02})(x). \end{cases} \tag{7.4.3}$$

The function H is defined by

$$H(g) := \operatorname{div}\left((\nabla a_1 * g) f_2 + (\nabla a * f_2) f_2 + (\nabla a_1 * f_2) g + (\nabla a_2 * g) g\right). \tag{7.4.4}$$

Throughout this section we assume that $\|a_1 - a_1\|_{W^{2,\infty}} \leq M$ and $\|f_{01} - f_{02}\|_{L^2_k} \leq R$.

Lemma 7.4.1. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, and let H be defined by (7.4.4). Then there exist two constants $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that*

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} H(g) g \langle x\rangle^k dx \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 \langle x\rangle^k dx + C_1 \left[\|a_1 - a_2\|^2_{W^{2,\infty}} + \|f_{01} - f_{02}\|^2_{L^2_k} \right] \\ + C_2 \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \langle x\rangle^k dx. \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

Proof. Let H be defined by (7.4.4). We multiply (7.4.4) by $g\langle x\rangle^k$ and we integrate . Then it follows

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} H(g) g \langle x\rangle^k dx \Big| = \Big| &- \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_1 * g) f_2 \nabla g \langle x\rangle^k dx - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_1 * g) f_2 g \nabla \langle x\rangle^k dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * f_2) f_2 \nabla g \langle x\rangle^k dx - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * f_2) f_2 g \nabla \langle x\rangle^k dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a_1 * f_2) g^2 \langle x\rangle^k dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_1 * f_2) g^2 \nabla \langle x\rangle^k dx \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_2 * g) g^2 \langle x\rangle^k dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_2 * g) g^2 \nabla \langle x\rangle^k dx \Big|. \end{aligned}$$

Using the assumption (H4) and Young's inequality $b \cdot d \leq C\, b^2 + C' d^2$ for two

real number $b > 0$ and $d > 0$, we obtain

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} H(g)g\langle x\rangle^k dx\Big| \le & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\langle x\rangle^k dx + \frac{3}{2}\|\nabla a_1\|_\infty^2\|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}^2\int_{\mathbb{R}^d} f_2^2\langle x\rangle^k dx \\ & + 2\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k^2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{3}{2}\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_\infty^2\|f_{02}\|_{L^2_k}^2\int_{\mathbb{R}^d} f_2^2\langle x\rangle^k dx \\ & + \frac{1}{2}\|\Delta a_1\|_\infty\|f_{02}\|_{L^2_k}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \\ & + \frac{1}{2}\|\nabla a_1\|_\infty\|f_{02}\|_{L^2_k}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx \\ & + \frac{1}{2}\|\Delta a_2\|_\infty\|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \\ & + \frac{1}{2}\|\nabla a_2\|_\infty\|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Since we have assumed that $\|a_j\|_{W^{2,\infty}} \le M$ and $\|f_{0j}\|_{L^2_k} \le R$ for $j = 1, 2$, we have

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} H(g)g\langle x\rangle^k dx\Big| \le & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\langle x\rangle^k dx + \frac{3}{2}\,C\,M\|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}^2 \\ & + 2\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k^2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{3}{2}R\,C\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_\infty^2 \\ & + \frac{1}{2}\,M\,R\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}M\,R\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx \\ & + M\,R\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx + M\,R\int_{\mathbb{R}^d} g^2\frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Now we set

$$C_2 := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left[2\frac{k^2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{3}{2}\,M\,R\frac{k|x|}{1+|x|^2}\right] + \frac{3}{2}\,M\,R.$$

and

$$C_1 := \frac{3}{2}\,C\,\max\left(M,\,R\right).$$

Hencefore one obtains

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} H(g)g\langle x\rangle^k dx\Big| \le & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\langle x\rangle^k dx + C_1\left[\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_\infty^2 + \|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}\right] \\ & + C_2\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

Using the fact that

$$\|\nabla a\|_\infty^2 \le \|\nabla a\|_{W^{2,\infty}}^2$$

we have

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} H(g)g\langle x\rangle^k dx\Big| \le & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla|^2\langle x\rangle^k dx + C_1\left[\|\nabla a_1-\nabla a_2\|_{W^{2,\infty}}^2 + \|f_{01}-f_{02}\|_{L^2_k}\right] \\ & + C_2\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx.\end{aligned}$$

□

In the following theorem we state the main result of this section.

Theorem 7.4.2. *Assume that $k > d/2$ and $a \in W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Let $f_{0j} \quad j = 1, 2$ belong to L^2_k and $R > 0$ a constant such that $\|f_{0j}\|_{L^2_k} \leq R$. Consider the vector fields $a_j \quad j = 1, 2$ in $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $M > 0$ a constant such that $\|a_j\|_{W^{2,\infty}} \leq M$. We denote by f_j the solution of (5.2.8) associated to a_j. Then there exists a constant $C(k, d, R, M) > 0$ depending on k, d, M and R such that*

$$\|f_1 - f_2\|_{L^2_k} \leq C(k, d, M, R) \left[\|a_1 - a_2\|_{W^{2,\infty}} + \|f_{01} - f_{02}\|_{L^2_k} \right].$$

Proof. We cosider two force fields a_1 and a_2 in $W^{2,\infty}$. Denote by f_1 and f_2 the two solutions of (5.2.8) associated respectively to a_1 and a_2. Set $g := f_1 - f_2$ and $a := a_1 - a_2$. Then g satisfies the following equation

$$\begin{cases} \partial_t g = \Delta g + \operatorname{div}(x\, g) + \operatorname{div}((\nabla a * g)g) + H(g) \\ g(0, x) = g_0(x). \end{cases}$$

Multiplying by $g\langle x\rangle^k$ and integrating in $\mathbb{R}^d$ we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx = &- \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \frac{k|x|^2}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta a * g) g^2 \langle x\langle^k dx \\ &+ \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a * g) g^2 \frac{k\, x}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} H(g) g\langle x\rangle^k dx \end{aligned}$$

This implies that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \leq &- \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} \right] \langle x\rangle^k dx \\ &+ \frac{1}{2}\|\nabla a\|_\infty \|g_0\|_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx + \frac{1}{2}\|\Delta a\|_\infty \|g_0\|_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \\ &+ \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx + \left| \int_{\mathbb{R}^d} H(g) g\langle x\rangle^k dx \right| \end{aligned}$$

Using Young' sinequality one has

$$\begin{aligned} \|\nabla a\|_\infty \|g_0\|_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \frac{k|x|}{1+|x|^2}\langle x\rangle^k dx &\leq \|\nabla a\|^2_\infty \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \\ &\quad + \|g_0\|^2_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \frac{k^2|x|}{(1+|x|^2)^2}\langle x\rangle^k dx \\ &\leq C\|\nabla a_1 - a_2\|^2_{W^{2,\infty}} + C'\|f_{01} - f_{02}\|^2_{L^2_k} \end{aligned}$$

and

$$\|\Delta a\|_\infty \|g_0\|_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \langle x\rangle^k dx \leq \|\Delta a\|^2_\infty \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx + \|g_0\|^2_{L^2_k} \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx$$
$$\leq C\|\nabla a_1 - a_2\|^2_{W^{2,\infty}} + C\|f_{01} - f_{02}\|^2_{L^2_k}$$

Now we define

$$\gamma_0(k,d) := \sup_{x\mathbb{R}^d} \left[\frac{kd + k(k+d-2)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{k|x|^2}{1+|x|^2} \right] + d + 2C_2.$$

Combining the two inequalities above and (7.4.5) we obtain

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \leq \frac{\gamma_0(k,d)}{2} \int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx + C\left[\|a_1 - a_2\|^2_{W^{2,\infty}} + \|f_{01} - f_{02}\|^2_{L^2_k} \right].$$

Integrating in time and using Gronwall's lemma one has

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^2\langle x\rangle^k dx \leq e^{\gamma_0(k,d)t} \cdot C\,T \left[\|a_1 - a_2\|^2_{W^{2,\infty}} + \|f_{01} - f_{02}\|^2_{L^2_k} \right].$$

□

Troisième partie

Article à soumettre

THE FOKKER-PLANCK EQUATION WITH SUBCRITICAL CONFINEMENT FORCE

O. KAVIAN, S. MISCHLER, M. NDAO

Abstract. We consider the Fokker-Planck equation with subcritical confinement force field which may not derive from a potential function. We prove the existence of an equilibrium (in the case of a general force) and we establish some (polynomial and stretch exponential) rate of convergence to the equilibrium (depending on the space to which belongs the initial datum) in many spaces. Our results generalize similar results introduced by Toscani, Villani [32] and Röchner, Wang [30] for some forces associated to a potential and extended by Douc, Fort, Guillin [12] and Bakry, Cattiaux, Guillin [4] for some general forces: the spaces are more general, the rates are sharper.

Version of June 20, 2018

AMS Subject Classification (2000): 47D06 One-parameter semigroups and linear evolution equations [See also 34G10, 34K30], 35P15 Estimation of eigenvalues, upper and lower bounds, 47H20 Semigroups of nonlinear operators [See also 37L05, 47J35, 54H15, 58D07], 35Q84 Fokker-Planck equations.

Keywords: Fokker-Planck equation; semigroup; weak Poincaré inequality; weak dissipativity; Krein-Rutman theorem; spectral mapping theorem.

Contents

Part 1. Article à soumettre 1
1. Introduction 1
2. The splitting $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ and growth estimates on $S_{\mathcal{B}}$ 9
3. Boundedness of $S_{\mathcal{L}}$ 19
4. The **Case 1** when a Poincaré inequality holds 19
5. The general case - the stationary problem 22
6. The general case - decay estimate 26
References 35

1. Introduction

In the present work, we consider the Fokker-Planck equation

$$\partial_t f = \mathcal{L} f = \Delta f + \mathrm{div}(f\,\mathbf{F}) \tag{1.1}$$

on the density function $f = f(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, which is complemented with an initial condition

$$f(0,x) = f_0(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

We will always assume that the force field $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ satisfies

$$x \cdot \mathbf{F}(x) \geq |x| \, \langle x \rangle^{\gamma-1}, \quad \mathrm{div}(\mathbf{F}(x)) \leq C_F \, |x|^{\gamma-2}, \quad \forall\, x \in B^c_{R_0}\,, \tag{1.3}$$

as well as

$$|D\mathbf{F}(x)| \leq C'_F \, \langle x \rangle^{\gamma-2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

for some constants $C_F \geq d$, $R_0 > 0$, $C'_F > 0$ and an exponent

$$\gamma \in (0,1). \tag{1.5}$$

Here and below, we denote $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}$ for any $x \in \mathbb{R}^d$.

It is worth mentioning that we have made two normalization hypotheses by taking a diffusion coefficient equal to 1 in (1.1) as well as a lower bound constant equal to 1 in the first condition in (1.3). Of course, these two normalization hypotheses can be removed by standard scaling arguments (in the time and position variables) and thus do not restrict the generality of our analysis.

A typical example of a force field is the one associated to a confinement potential

$$\mathbf{F}(x) := \nabla V(x), \quad V(x) := \frac{\langle x \rangle^\gamma}{\gamma} + V_0, \quad V_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

In this case, we may observe that

$$G(x) := \mathrm{e}^{-V(x)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.7}$$

is a stationary solution of (1.1), and even an equilibrium state. We may assume that G is a probability measure, by choosing the constant V_0 adequately. We recall that when F is given by (1.6) with $\gamma \geq 1$, the following Poincaré inequality

$$\exists\, c > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \exp(-V(x)) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 \exp(-V(x)),$$

holds for any f such that $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-V(x)) dx = 0$. Such a Poincaré inequality does not hold when $\gamma \in (0,1)$, which is the case studied in this paper, but only a weak version of this inequality remains true (see [30], and below (1.13) and section 4). In particular, there is no spectral gap for the associated operator $\mathcal{L}$, nor is there an exponential trend to the equilibrium for the associated semigroup. Similarly, the classical *logarithmic Sobolev inequality* does not hold but only a *modified* version of it, see the discussion in [32, Section 2].

In the general case of a force field which is not the gradient of a potential, one may see easily that the above Fokker-Planck equation preserves positivity, that is

$$f(t,.) \geq 0, \quad \forall\, t \geq 0, \quad \text{if} \quad f_0 \geq 0,$$

and that it conserves mass, that is

$$M(f(t,\cdot)) = M(f_0), \quad \forall\, t \geq 0, \quad \text{with} \quad M(g) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx.$$

Moreover, the Fokker-Planck operator $\mathcal{L}$ generates a positive semigroup in many Lebesgue spaces. However, due to the lack of compactness of this associated semigroup, the standard Krein-Rutman theory does not apply directly in the case $\gamma \in (0,1)$, and the existence of a stationary solution is not straightforward. We

refer to the recent work [29] and the references therein where the Fokker-Planck equation with general force field (1.1)–(1.5) in the case $\gamma \geq 1$ is considered.

Before stating our existence result, let us introduce some notation. For any exponent $p \in [1, \infty]$, we define the polynomial and stretch exponential weight functions $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, by

$$m(x) := \langle x \rangle^k, \qquad \text{for some } k > k^*, \text{ with } k^* := \max(d, C_F)/p', \tag{1.8}$$

where $p' := p/(p-1)$ is the conjugated exponent associated to p,

$$m(x) := \exp(\kappa \langle x \rangle^s), \qquad \text{for some } 0 < s < \gamma \text{ and } \kappa > 0, \tag{1.9}$$

or

$$m(x) := \exp(\kappa \langle x \rangle^\gamma), \qquad \text{for some } \kappa \in (0, 1/\gamma), \tag{1.10}$$

as well as the associated Lebesgue spaces

$$L^p(m) = \{f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d);\ \|f\|_{L^p(m)} := \|fm\|_{L^p} < \infty\}.$$

We also use the shorthands $L^p_k = L^p(m)$ when $m(x) = \langle x \rangle^k$. It is noteworthy that, for such a choice of weights m, we have $L^p(m) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.

As a first step, we have the following existence and uniqueness result.

Theorem 1.1. *For any exponent $p \in [1, \infty]$, any weight function m satisfying either of definitions* (1.8), (1.9) *or* (1.10)*, and an initial datum $f_0 \in L^p(m)$, there exists a unique global solution f to the Fokker-Planck equation* (1.1)–(1.2)*, such that for any $T > 0$,*

$$f \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(0,T; L^p(m)).$$

Moreover the associated flow preserves positivity and conserves mass. Also, the operator $\mathcal{L}$ generates a strongly continuous semigroup $S_{\mathcal{L}}(t)$ in $L^p(m)$ when $p \in [1, \infty)$.

On the other hand, there exists a unique positive, unit mass, stationary solution G such that

$$0 \leq G \in L^1_1, \quad M(G) = 1 \qquad \textit{and} \qquad \Delta G + \operatorname{div}(G\,\mathbf{F}) = 0.$$

More precisely, there exists $\kappa_1^* \geq \kappa_0^* := 1/\gamma$ such that for any $\kappa_0 \in (0, \kappa_0^*)$, $\kappa_1 \in (\kappa_1^*, \infty)$, there holds

$$C_1 e^{-\kappa_1 \langle x \rangle^\gamma} \leq G \leq C_0 e^{-\kappa_0 \langle x \rangle^\gamma} \quad \textit{on} \quad \mathbb{R}^d, \tag{1.11}$$

for some constants $C_0, C_1 \in (0, \infty)$.

Next, we are interested in the long time behaviour of the solution $f(t, \cdot)$. For the sake of pedagogy, we consider separately the following two cases:

Case 1. Following [30], we consider the case when furthermore the above steady state G fulfills a *weak Poincaré inequality*. More precisely, we assume that there exist some constants $R_0, c_1, c_2 > 0$ such that the function $V := -\log G \in C^1(\mathbb{R}^d)$ satisfies

$$\forall\, x \in B^c_{R_0}, \qquad c_1 |x|^\gamma \leq V(x) \leq c_2 |x|^\gamma, \tag{1.12}$$

and also that there exists $\mu > 0$ such that for any $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ with $M(f) = 0$, we have

$$\int |\nabla(f/G)|^2 \, G \, dx \geq \mu \int f^2 \, \langle x \rangle^{2\gamma - 2} \, G^{-1} \, dx. \tag{1.13}$$

Such a weak Poincaré inequality is known to hold when $c_1 = c_2$ in (1.12), see [30, Example 1.4(c)].

The weak Poincaré inequality is also a consequence of a *"local Poincaré inequality"* together with the fact that the following Lyapunov condition (see for instance [4, 3])

$$\Delta w - \nabla V \cdot \nabla w \leq w\,(-\zeta(x) + M\chi_R), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.14}$$

holds for some well chosen function $w : \mathbb{R}^d \to [1, \infty)$. Here it is assumed that M and R are two positive constants, $\chi_R(x) := \chi(x/R)$ is a truncation function defined through a certain $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ such that $\mathbf{1}_{|x|\leq 1} \leq \chi \leq \mathbf{1}_{|x|\leq 2}$ and $\zeta(x) := \zeta_0 \langle x\rangle^{2(1-\gamma)}$ for a constant $\zeta_0 > 0$. It is worth emphasizing that, in this case, the force field $\mathbf{F}$ can be written as

$$\mathbf{F} = \nabla V + \mathbf{F}_0, \qquad \mathrm{div}(\mathrm{e}^{-V}\,\mathbf{F}_0) = 0, \tag{1.15}$$

with no other specific condition on $\mathbf{F}_0$ except that $\mathbf{F}$ still satisfies conditions (1.3)–(1.5). Under these circumstances, we can give a simpler proof than in the general case.

Case 2. This corresponds to the general case when $\mathbf{F}$ satisfies only conditions (1.3)–(1.5), without any further assumption on the stationary state G, which in general cannot be determined explicitly. Using the above notations for M, R, χ_R and ζ introduced in the inequality (1.14), the assumptions (1.3)–(1.5) made on $\mathbf{F}$ imply in particular the following inequality

$$\mathcal{L}^* m^p := \Delta m^p - \mathbf{F} \cdot \nabla m^p \leq m^p\,(-\zeta(x) + M\chi_R), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.16}$$

which is a generalization of the Lyapunov condition (1.14).

The main and fundamental difference between these two cases is that the first one involves the equilibrium state $G = \mathrm{e}^{-V}$, and a certain type of behavior on it, while the second one only involves the force field $\mathbf{F}$.

When $a(t) \geq 0$ and $b(t) \geq 0$ are two functions of time $t > 0$, we write $a(t) \lesssim b(t)$ to mean that there exists a positive constant c_0 independent of t such that one has $a(t) \leq c_0\, b(t)$ for all $t > 0$.

Our main result is as follows:

Theorem 1.2. *Let $\mathbf{F}$ satisfy (1.3)–(1.5). Then for any $p \in [1, \infty]$, any weight function m satisfying either of definitions (1.8), (1.9) or (1.10), and any initial datum $f_0 \in L^p(m)$, the associated solution $f = f(t, x)$ to the Fokker-Planck equation (1.1) satisfies*

$$\|f(t,.) - M(f_0)\,G\|_{L^p} \lesssim \Theta_m(t)\,\|f_0 - M(f_0)\,G\|_{L^p(m)}, \tag{1.17}$$

with the function Θ_m being defined as follows. When $m(x) = \langle x\rangle^k$, we take $\beta \in (0, (k - k^*)/(2 - \gamma))$ arbitrary and we set

$$\Theta_m(t) := (1 + t)^{-\beta}. \tag{1.18}$$

When $m(x) = \exp(\kappa \langle x\rangle^s)$, we take $\sigma := s/(2 - \gamma)$ and we set

$$\Theta_m(t) := \exp(-\lambda t^\sigma), \quad \lambda \in (0, \infty). \tag{1.19}$$

Remark 1.3. When the force field $\mathbf{F}$ and the equilibrium G are as described in **Case 1**, some previous results are known. A less accurate result than the one given by (1.17)-(1.18), actually a decay rate of order $\mathcal{O}(t^{-(k-2)/(2(2-\gamma))})$ in L^1-norm, has

been proved by Toscani, Villani in [32, Theorem 3] under the additional assumptions that the initial datum f_0 is nonnegative, it has finite energy and finite Boltzmann entropy. That first result lies on a modified and weak version of the log-Sobolev inequality (which usual and stronger version is known to hold only when $\gamma \geq 2$). In [30, Example 1.4 (c)] (see [30, Section 3] for the proof) Röchner, Wang have established the exponential rate

$$\|f(t,.)\|_{L^2} \lesssim e^{-\lambda t^{\sigma_{RW}}} \|f\|_{L^\infty(G^{-1})}, \tag{1.20}$$

with $\sigma_{RW} := \gamma/(4-3\gamma)$, some $\lambda > 0$ and any $f_0 \in L^\infty(G^{-1})$ such that $M(f_0) = 0$. The proof of (1.20) is based on a weak Poincaré inequality and the existence of a family of entropy functionals. Estimate (1.17)-(1.19) is clearly more accurate than (1.20) because the rate function $\Theta_{G^{-1}}$ decays faster and, maybe more importantly, the same Lebesgue exponent in both sides of the inequality is involved in (1.17) while it is not the case in (1.20). That last fact is of main importance when one is interested in the stability of nonlinear evolution PDEs, see for instance [10].

Remark 1.4. Bakry, Cattiaux, Guillin in [4] have extended to the case of a general force field the approach of Röchner, Wang. More precisely, they establish a weak Lyapunov-Poincaré inequality in [4, Theorem 3.10] from which they deduce the same rate of convergence (1.20) (see [4, Section 4.2.1]).

Remark 1.5. A completely different approach has been developed by Douc, Fort, Guillin in [12] generalizing the classical Harris-Meyn-Tweedie theory to the weak confinement setting and adapted to both the potential case and the general force case. We also refer to the notes on the convergence of Markov processes by Hairer, and more precisely to [18, Theorem 4.1], for a more explicite formulation of the subgeometric convergence result and a simplified proof (starting from a slightly different set of hypothesizes). It provided estimate (1.17) in the case $p := 1$ and $m := G^{-1}$ (with same rate), see [18, (7.3)]. The drawback is that the approach is definitively probabilistic and the constants are maybe not so explicit. In a forthcoming paper [9], Cañizo and Mischler provide a deterministic and elementary proof of the above mentioned theorem. We also refer to [14] for recent related results.

Remark 1.6. The same kind of decay estimates remain true when, on the left hand side of (1.17), the norm L^p is replaced by a weighted Lebesgue norm $L^p(m^\theta)$ with $0 \leq \theta < 1$. More precisely, when $m(x) = \langle x\rangle^k$ and θ is such that $k^*/k < \theta < 1$, we choose $\beta := k(1-\theta)/(2-\gamma)$, and if $0 \leq \theta \leq k^*/k$, we choose $\beta \in (0, (k-k^*)/(2-\gamma))$ arbitrary. In both cases, we define Θ_m through (1.18). When $m(x) = \exp(\kappa \langle x\rangle^s)$ the definition of the decay rate Θ_m is unchanged.

Remark 1.7. When the weight function is given by $m(x) := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, one could consider a field force $\mathbf{F}$ satisfying the first condition of (1.3) and $\mathrm{div}(\mathbf{F}) \leq C'_F \langle x\rangle^{\gamma'-2}$, with $\gamma' < 2\gamma$, or $\gamma' = 2\gamma$ but with C'_F small enough, and obtain similar results. However we do not push our investigations in that direction, since the general ideas of the proof are essentially the same.

Remark 1.8. When the weight function $m(x) = \langle x\rangle^k$, the decay rate in (1.17) is given by (1.18), which is better than the decay rate one might obtain by a mere interpolation argument between $L^2(\exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma))$ and $L^1(\mathbb{R}^d)$. More precisely, assume that when the weight function $m(x) = \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, the function Θ_m being given by (1.19) with $s := \gamma/(2-\gamma)$, we have (1.17), as well as the estimate $\|f(t)\|_{L^1} \lesssim \|f_0\|_{L^1}$

for any $f_0 \in L^1(\exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma))$ such that $M(f_0) = 0$. Then for any $R > 0$ we have $M(f_0 1_{B_R}) = -M(f_0 1_{B_R^c})$, and thus we may write $f_0 = f_{01} + f_{02} + f_{03}$ where

$$f_{01} := (f_0 - M(f_0 1_{B_R}))\, 1_{B_R}, \quad f_{02} := f_0 1_{B_R^c}, \quad f_{03} := M(f_0 1_{B_R^c}) 1_{B_R}.$$

Therefore for $t > 0$, denoting by $f_j(t)$ the solution of (1.1) with initial datum f_{0j}, one has

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|_{L^1} &\le \|f_1(t)\|_{L^1} + \|f_2(t)\|_{L^1} + \|f_3(t)\|_{L^1} \\
&\lesssim \exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)})\, \|f_{01}\|_{L^1(\exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma))} + \|f_{02}\|_{L^1} + \|f_{03}\|_{L^1} \\
&\lesssim \exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)})\, \|(f_0 - M(f_0\, \mathbf{1}_{B_R}))\mathbf{1}_{B_R}\|_{L^1(\exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma))} \\
&\qquad + \|M(f_0\, \mathbf{1}_{B_R^c})\mathbf{1}_{B_R}\|_{L^1} + \|f_0\, \mathbf{1}_{B_R^c}\|_{L^1} \\
&\lesssim \exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)})\, \mathrm{e}^{\kappa\,\langle R\rangle^\gamma}\, \|f_0\|_{L^1} + (R^{d-k} + R^{-k})\|f\|_{L^1_k} \\
&\lesssim \Big(\exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)} + \kappa\langle R\rangle^\gamma) + R^{d-k}\Big)\, \|f\|_{L^1_k}.
\end{aligned}$$

Assuming that $t > (2\kappa/\lambda)^{(2-\gamma)/\gamma}$, we may choose R so that $\kappa\langle R\rangle^\gamma = \lambda t^{\gamma/(2-\gamma)}/2$, we find that when $k > d$, for any $t > (2\kappa/\lambda)^{(2-\gamma)/\gamma}$ we have

$$\|f(t)\|_{L^1} \lesssim t^{\frac{-(k-d)}{2-\gamma}}\, \|f_0\|_{L^1_k}.$$

This decay estimate is not as sharp as the one given by Theorem 1.2 when the weight function is $m := \langle x\rangle^k$, since according to the definition (1.18) in this case we have actually a decay rate of $\mathcal{O}(t^{-K})$ for any $K \in (0, k/(2-\gamma))$. □

Remark 1.9. In a few previous papers, due in particular to Caflisch [7, 8], Liggett [22], Toscani and Villani [32], Guo [17] or Aoki and Golse [1], a certain number of models, arising from statistical physics, has been considered for which only polynomial or stretch exponential (but not exponential) rate of decay to the equilibrium can be established. As it is the present case, one can associated to each of these models a linear(ized) operator which does not enjoy any spectral gap in its spectrum set and that is the reason why exponential rate of convergence fails.

We also refer to Röckner and Wang [30] where the same problem for the Fokker-Planck equation with subcritical confinement force corresponding to **Case 1** is considered and where a cornerstone step of the strategy we follow here has been devised. This work has been subsequently carried on by Guillin and collaborators in [11] and [12, Theorem 3.2 & Section 5.1]. These last works are based on the Lyapunov condition method, that we discuss in the presentation of **Case 1** and which we believe is related to the method we use here. The Lyapunov condition method has been extensively studied during the last decade, and we refer for instance to [4, 3] and the references therein for more details.

An abstract theory for non-uniformly exponentially stable semigroups (with non exponential decay rate) has also been recently developed and we refer the interested reader to [5, 6] and the references therein. We finally refer to [10] where similar semigroup analysis as here is developed and applied in order to establish the well-posedness of the Landau equation in large spaces.

Let us briefly explain the main ideas behind our method of proof. In **Case 1**, and as a first step, we may use the argument introduced in [30] (see also [19, Lemma 1.3]) which we briefly recall now. We consider three Banach spaces E_2, E_1 and E_0,

such that $E_2 \subset E_1 \subset E_0 \subset L^1$, and more precisely E_1 is an interpolation space of order $1 - 1/\alpha$ between E_0 and E_2 for some $\alpha \in (1, \infty)$, that is

$$\|f\|_{E_1} \leq C_\alpha \, \|f\|_{E_0}^{1/\alpha} \, \|f\|_{E_2}^{1-1/\alpha}, \quad \forall \, f \in E_2, \tag{1.21}$$

and such that the semigroup $S_{\mathcal{L}}(t)$ associated to the Fokker-Planck equation can be solved in each of these spaces. Moreover, assume that for any $f_0 \in E_2$, the solution $S_{\mathcal{L}}(t) f_0 = f(t)$ to the Fokker-Planck equation (1.1)–(1.2) satisfies the following two differential inequalities

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|_{E_1} \leq -\lambda \, \|f(t)\|_{E_0}, \qquad \frac{d}{dt}\|f(t)\|_{E_2} \leq 0, \tag{1.22}$$

for some constant $\lambda > 0$. Using the fact that $\|f(t)\|_{E_2} \leq \|f_0\|_{E_2}$, as a consequence of the above second differential inequality, together with (1.21), we obtain the closed differential inequality

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|_{E_1} \leq -\lambda \, C_\alpha^{-\alpha} \, \|f_0\|_{E_2}^{-(\alpha-1)} \|f(t)\|_{E_1}^{\alpha}.$$

We may readily integrate it and we obtain the estimate

$$\|f(t)\|_{E_1} \lesssim t^{-1/(\alpha-1)} \|f_0\|_{E_2}. \tag{1.23}$$

Now, choosing $E_1 = L^2(G^{-1/2})$, $E_0 := L^2(G^{-1/2}\langle x \rangle^{\gamma-1})$ and $E_2 = L^\infty(G^{-1})$, one may see that the first differential inequality in (1.22) is an immediate consequence of the weak Poincaré inequality (1.13). The second differential inequality is a kind of generalized relative entropy principle (see [30, 23]). The above estimate (1.23) is a somewhat rough variant of estimate (1.19). It is noteworthy that for $\alpha \in (1, 2)$, we get that the associated semigroup $S_{\mathcal{L}}$ defined by $S_{\mathcal{L}}(t) f_0 = f(t)$ satisfies in particular $\|S_{\mathcal{L}}\|_{E_2 \to E_1} \in L^1(0, \infty)$.

We then generalize the decay estimate to a wider class of Banach spaces by adapting the extension theory introduced in [28] and developed in [16, 25]. In order to do so, we consider the two Banach spaces $\mathcal{E}_2 := L^p(m)$ and $\mathcal{E}_1 := L^p$, and we introduce a splitting $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, where $\mathcal{A}$ is an appropriately defined bounded operator so that $\mathcal{B}$ becomes a dissipative operator. Then, we show that for $i = 1$ and $i = 2$

$$\|S_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\|_{\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad \|S_{\mathcal{B}}\|_{\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1} \in L^1(\mathbb{R}_+), \qquad \|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}\|_{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

If $\mathcal{T}_i$, with $i = 1, 2$, are two given operator valued measurable functions defined on $(0, \infty)$, we denote by

$$(\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2)(t) := \int_0^t \mathcal{T}_1(\tau)\mathcal{T}_2(t - \tau) \, d\tau$$

their convolution on $\mathbb{R}_+$. We then set $\mathcal{T}^{(*0)} := I$, $\mathcal{T}^{(*1)} := \mathcal{T}$ and, for any $k \geq 2$, $\mathcal{T}^{(*k)} := \mathcal{T}^{*(k-1)} * \mathcal{T}$. We may show that for $n \in \mathbb{N}$ sufficiently large (actually $n \geq 1 + (d/2)$ is enough), we have

$$\|(S_{\mathcal{B}}\mathcal{A})^{(*n)}\|_{E_1 \to \mathcal{E}_1} \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad \|(\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*n)}\|_{\mathcal{E}_1 \to E_1} \in L^1(\mathbb{R}_+). \tag{1.24}$$

Next, from the usual Duhamel formula, the solution of (1.1) can be written as $f(t) = S_{\mathcal{B}}(t) f_0 + \int_0^t S_{\mathcal{B}}(t - \tau)\mathcal{A}S_{\mathcal{L}}(\tau) f_0 \, d\tau$. Thus, using the above notations for the convolution of operators valued functions, we have $S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{B}} + S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{L}})$, and

interchanging the role played by $\mathcal{L}$ and $\mathcal{B}$ in this expression, we get the following operators versions of Duhamel formulas

$$S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{B}} + S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{L}}) = S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{B}} \mathcal{A}) * S_{\mathcal{L}} \tag{1.25}$$

$$= S_{\mathcal{B}} + S_{\mathcal{L}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}}) = S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{L}} \mathcal{A}) * S_{\mathcal{B}}. \tag{1.26}$$

Upon replacing recursively $S_{\mathcal{L}}$ in either of the expressions on the right hand side by either of the Duhamel's formula, we get, for instance:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}} &= S_{\mathcal{B}} + S_{\mathcal{B}} * \mathcal{A} \{ S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{B}} \mathcal{A}) * S_{\mathcal{L}} \} \\ &= S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{B}} \mathcal{A}) * S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{B}} \mathcal{A})^{(*2)} * S_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

By induction on the integers $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$ and $n_1 + n_2 \geq 1$, we thus obtain

$$S_{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1} S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*k)} + (S_{\mathcal{B}} \mathcal{A})^{(*n_1)} * S_{\mathcal{L}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*n_2)}. \tag{1.27}$$

Using the above formulas (1.27) and estimates (1.24), as well as the decay estimate (1.23) for initial data in the space E_2, we conclude that $\|S_{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ which is nothing but a rough version of the estimates presented in Theorem 1.2. While the method leading to (1.23) in E_i can be performed only in very specific (Hilbert) spaces, the last extension method is very general and can be used in a large class of Banach spaces $\mathcal{E}_i$ (once we already know the decay in one pair of spaces (E_1, E_2)).

Finally, in **Case 2**, we start proving an equivalent to estimate (1.23) in one appropriate pair of (small) spaces. We then argue similarly as in the previous case. We present three different strategies in order to establish an equivalent to estimate (1.23). On the one hand, we may adapt the strategy of Röckner and Wang introduced to deal with **Case 1** by using a generalization of the weak Poincaré inequality which also holds in the general force field case and which has been established by Bakry, Cattiaux, Guillin in [4]. A second approach consists in using the generalization by Douc, Fort, Guillin in [12] to the subgeometric framework of the well-known Harris-Meyn-Tweedie theory. A last and more original way consists in adapting the Krein-Rutman theory to the present context. On the one hand, it is a simple version of the Krein-Rutman theory because the equation is mass conserving, a property which implies that the largest eigenvalue of $\mathcal{L}$ is $\lambda_1 = 0$. On the other hand, it is not a classical version because the operator $\mathcal{L}$ does not have a compact resolvent (however it has power-compact resolvent in the sense of Voigt [33]) and more importantly 0 is not necessarily an isolated point in the spectrum. First adapting (from [15, 27] for instance) some more or less standard arguments, we prove that there exists G, a unique stationary solution of (1.1) which is positive, has unit mass and is such that $G \in L^\infty(\exp(\kappa \langle x \rangle^\gamma))$, for all $\kappa \in (0, 1/\gamma)$. Next, we prove an estimate similar to (1.23) by establishing a set of accurate estimates on the resolvent operators $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z)$, $R_{\mathcal{L}}(z)$ and by using the iterated Duhamel formula

$$S_{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{5} S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*k)} + S_{\mathcal{L}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*6)},$$

together with the inverse Laplace formula

$$S_{\mathcal{L}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*6)}(t) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \frac{1}{t^n} \int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{zt} \frac{d^n}{dz^n} \left[R_{\mathcal{L}}(z) (\mathcal{A} R_{\mathcal{B}}(z))^6 \right] dz,$$

which holds true for any time $t > 0$ and any integer n.

To finish this introduction, let us describe the plan of the paper. In Section 2, we introduce an appropriate splitting $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ and present the main estimates on the semigroup $S_{\mathcal{B}}$. In Section 3, we deduce that the semigroup $S_{\mathcal{L}}$ is bounded in the spaces $L^p(m)$.

In Section 4, the proof of Theorem 1.2 is carried out in the case when a weak Poincaré inequality is satisfied (**Case 1**). In Section 5, the second part of the proof of Theorem 1.1 on the stationary problem is presented in the general case (**Case 2**). Finally, Section 6 is devoted to the proof of Theorem 1.2 in the general case (**Case 2**).

Acknowledgements. The second author's work is supported by the french "ANR blanche" project Stab: ANR-12-BS01-0019. We thank M. Hairer and A. Guillin for enlightening discussions on several results in relation with the present work.

2. The splitting $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ and growth estimates on $S_{\mathcal{B}}$

We introduce the splitting of the operator $\mathcal{L}$ defined by

$$\mathcal{A}f := M\chi_R f, \qquad \mathcal{B}f := \mathcal{L}f - M\chi_R f \tag{2.1}$$

where M is positive constant, and for a fixed truncation function $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ such that $1_{B(0,1)} \leq \chi \leq 1_{B(0,2)}$, and for $R > 1$ which will be chosen appropriately as well as M, we set $\chi_R(x) := \chi(x/R)$. We establish several growth and regularity estimates on the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ and the family of operators $\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}$ which will be of fundamental importance in the sequel.

2.1. Basic growth estimates.

Lemma 2.1. *For any exponent $p \in [1, \infty]$ and any stretch exponential or polynomial weight function m given by* (1.8), (1.9) *or* (1.10), *we can choose R, M large enough in the definition* (2.1) *of $\mathcal{B}$ such that the operator $\mathcal{B}$ is dissipative in $L^p(m)$, namely*

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^p(m)\to L^p(m)} \leq 1, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2.2}$$

Moreover, if $m(x) = \langle x\rangle^k$, set $\beta := k(1-\theta)/(2-\gamma)$ for $k^*/k < \theta < 1$, and $\beta \in (0, (k-k^*)/(2-\gamma))$ arbitrary when $\theta \leq k^*/k$. Then the function Θ_m being defined by (1.18), *we have*

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^p(m)\to L^p(m^\theta)} \lesssim \Theta_m(t). \tag{2.3}$$

If $m(x) = \exp(\kappa\langle x\rangle^s)$ satisfies (1.9) *or* (1.10), *the above inequality holds, provided the function Θ_m is defined by*

$$\Theta_m(t) := \exp(-\lambda t^{s/(2-\gamma)}),$$

where $\lambda > 0$ can be chosen arbitrarily when $s < \gamma$, and $\lambda < \lambda_*$, with

$$\lambda_* := (\kappa(1-\theta))^{(2-2\gamma)/(2-\gamma)}(\kappa\gamma(1-\kappa\gamma))^{\gamma/(2-\gamma)},$$

when $s = \gamma$.

Proof of Lemma 2.1. The proof is similar to the proof of [16, Lemma 3.8] and [25, Lemma 3.8].

Step 1. We first fix $p \in [1,\infty)$, assuming m is as in the statement of the Lemma. We start recalling an identity satisfied by the operator $\mathcal{B}$ (see the proof of [25, Lemma 3.8]). For any smooth, rapidly decaying and positive function f, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{B}\, f)\, f^{p-1}\, m^p dx = \\ = -(p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(mf)|^2\, (mf)^{p-2} dx + \int_{\mathbb{R}^d} f^p\, m^p\, \psi^0_{m,p} dx,$$

with

$$\psi^0_{m,p} := \frac{(2-p)}{p}\frac{\Delta m}{m} + \frac{2}{p'}\frac{|\nabla m|^2}{m^2} + \frac{1}{p'}\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m}{m} - M\,\chi_R. \tag{2.4}$$

Observe that

$$\frac{\nabla m}{m} = k\kappa x\langle x\rangle^{s-2}$$
$$\frac{\Delta m}{m} = k\kappa d\langle x\rangle^{s-2} + s(s-2)\kappa|x|^2\langle x\rangle^{s-4} + \nu|x|^2\langle x\rangle^{2s-4},$$

where we have set

$$s := 0, \qquad \kappa := 1, \qquad \nu := k(k-2), \qquad \text{when } m(x) = \langle x\rangle^k,$$
$$k := s, \qquad \nu := (s\kappa)^2, \qquad \text{when } m(x) = \exp(\kappa\,\langle x\rangle^s).$$

In this latter case, for $s \in (0,\gamma]$, the third term in the definition of $\psi^0_{m,p}$ is negligible with respect to the first and second terms, and thus

$$\psi^0_{m,p}\,|x|^{2-\gamma-s} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} -a^* := (\kappa\gamma)^2 - \kappa\gamma < 0 \quad \text{if } s = \gamma,$$
$$\psi^0_{m,p}\,|x|^{2-\gamma-s} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} -a^* := -\infty \quad \text{if } 0 < s < \gamma.$$

When $m = \langle x\rangle^k$, and $k > k^*(p) := C_F/p'$, the first and second terms are negligible with respect to the third term, and then

$$\limsup_{|x|\to\infty} \psi^0_{m,p}\,|x|^{2-\gamma} \le -a^* := (1-\frac{1}{p})\,C_F - k < 0.$$

We deduce that for any $a \in (0, a^*(m,p))$, we can choose $R > 1$ and M large enough in such a way that $\psi^0_{m,p}(x) \le -a\langle x\rangle^{\gamma+s-2}$ for all $x \in \mathbb{R}^d$, and then

$$\int (\mathcal{B}f)\, f^{p-1}\, m^p \le -a\int |f|^p\, m^p\, \langle x\rangle^{\gamma+s-2} - (p-1)\int |\nabla(fm)|^2 (fm)^{p-1}. \tag{2.5}$$

In particular, using only the fact that the RHS term is negative, we conclude that the operator $\mathcal{B}$ is dissipative and we classically deduce that the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ is well-defined on $L^p(m)$ for $p \in [1,\infty)$ and that it is a strongly continuous contraction semigroup, in other words, (2.2) holds for any $p \in [1,\infty)$. Since we may choose R, M such that the above inequality holds true for any $p \in [1,\infty)$ when $a \in (0, a^*(m,\infty))$, we may pass to the limit as $p \to \infty$ in (2.2) and we conclude that $S_{\mathcal{B}}$ is a contraction semigroup in $L^p(m)$, for any $p \in [1,\infty]$.

Step 2. Take $p \in [1,\infty)$ and $k > k^*(p) = C_F/p'$, and finally, assuming first that $\theta > k^*/k$, set $\ell := \theta k \in (k^*, k)$. If $f_0 \in L^p(m)$ with $m := \langle x\rangle^k$, denote $f(t) := S_{\mathcal{B}}(t) f_0$. Dropping the last term in (2.5), we have for $a \in (0, a^*(m,p))$

$$\frac{d}{dt} \int |f|^p \, \langle x\rangle^{p\ell} \le -ap \int |f|^p \, \langle x\rangle^{p\ell+\gamma-2}.$$

Using Hölder's inequality

$$\int f^p \, \langle x\rangle^{p\ell} \le \Big(\int f^p \, \langle x\rangle^{p\ell+\gamma-2} \Big)^{\eta} \Big(\int f^p \, \langle x\rangle^{pk} \Big)^{1-\eta}$$

with $\eta := (k-\ell)/[k-\ell+(2-\gamma)/p] \in (0,1)$, and the fact that the semigroup $S_{\mathcal{L}}$ is a contraction semigroup in L^p_k by (2.2), upon denoting $\alpha := \eta/(1-\eta) = p\,(k-\ell)/(2-\gamma)$, we get

$$\frac{d}{dt} Y_\theta(t) \le -a\,p\, Y_\theta(t)^{(\alpha+1)/\alpha}\, Y_1(0)^{-1/\alpha}, \qquad \text{where } Y_\tau(t) := \int f^p \langle x\rangle^{p\tau}.$$

Integrating the above differential inequality yields

$$Y_\theta(t) \le \big(\frac{\alpha}{apt}\big)^{\alpha}\, Y_1(0),$$

which in turn implies (2.3) with $\Theta_m(t)$ replaced with $\Big(\frac{(k-\ell)/(2-\gamma)}{at}\Big)^{\frac{k-\ell}{2-\gamma}}$. Since for $0 \le t \le 1$ we have clearly $Y_\theta(t) \lesssim Y_1(0)$ the proof of (2.3) is complete when $p < \infty$ and $m(x) = \langle x\rangle^k$ and $\ell := k\theta > k^*$.

In the case where $\ell = k\theta \le k^*$, it is enough to pick $\theta_0 > \theta$ so that $k\theta_0 > k^*$ and observe that we have $Y_\theta \le Y_{\theta_0}$: in this way one is convinced that (2.3) holds for all $p < \infty$ and $0 \le \theta < 1$.

We deduce the same estimate for $p = \infty$ by letting $p \to \infty$ in (2.3).

Step 3. Similarly, when the weight function m is an stretch exponential as defined in (1.9) or (1.10), take $p \in [1,\infty)$. Given an initial datum $f_0 \in L^p(m)$, denote $f(t) := S_{\mathcal{B}}(t) f_0$, and set $Y_\theta(t) := \|f(t)\|^p_{L^p(m^\theta)}$. Thanks to the above Step 1 we have for all $t \ge 0$ and $0 < \theta \le 1$

$$Y_\theta(t) \le Y_\theta(0).$$

For $\rho > 0$ denote by B_ρ the ball of $\mathbb{R}^d$ centered at the origin with radius ρ. Using the estimate (2.5) with the weight function m^θ, neglecting the last term of that

inequality, we have successively

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_\theta(t) &= p\int(\mathcal{B}f)\,f^{p-1}\,m^{p\theta}\\ &\le -a\,p\int_{B_\rho}|f|^p\,m^{p\theta}\,\langle x\rangle^{\gamma+s-2}\\ &\le -a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}\int_{B_\rho}|f|^p\,m^{p\theta}\\ &\le -a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}Y_\theta + a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}\int_{B_\rho^c}|f|^p\,m^{p\theta}\\ &\le -a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}Y_\theta + a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}m(\rho)^{-p(1-\theta)}\int_{B_\rho^c}|f_0|^p\,m^p\\ &\le -a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}Y_\theta + a\,p\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}\,m(\rho)^{-p(1-\theta)}\int|f_0|^p\,m^p.\end{aligned}$$

Integrating this differential inequality we deduce

$$\begin{aligned}Y_\theta(t) &\le \exp(-ap\,t\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2})\,Y_\theta(0) + m(\rho)^{-p(1-\theta)}\,Y_\theta(0).\\ &\le \big(\exp(-ap\,t\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}) + \exp(-p(1-\theta)\,\rho^s)\big)\;Y_\theta(0).\end{aligned}$$

We may choose ρ such that $a\,\langle\rho\rangle^{\gamma+s-2}t = (1-\theta)\,\rho^s$, that is we may take ρ of order $t^{1/(2-\gamma)}$, which allows us to conclude that (2.3) also holds in the exponential case. As indicated above, the estimate (2.3) for $p=\infty$ is obtained by letting $p\to\infty$. □

The following two lemmas state that when the weight function is exponential, that is $m(x) := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ is ultracontractive in the spaces $L^p(m)$, that is it maps $L^1(m)$ into $L^\infty(m)$ for $t>0$. As it is pointed out in [20] (see Remark 2.2 of this reference for a proof based on Probability arguments, and Remark 5.2 for a simple proof based on comparison theorems for parabolic equations), when one considers an operator of the type $Lf := \Delta f + \nabla V\cdot\nabla f$ with V satisfying, for some constants $R>0$ and $c_0\ge 0$,

$$\forall x\in B_R^c, \qquad \frac{\Delta V^{1/2}}{V^{1/2}} + c_0 \ge 0,$$

and if there exists a positive constant $c_1>0$ such that $V(x)\ge c_1$ for all $x\in B_R^c$, then the semigroups $S_L(t)$ and $S_{L^*}(t)$ are ultracontractive in the spaces $L^p(\exp(V))$ (the above condition on $\Delta V^{1/2}/V^{1/2}$ is a sort of convexity condition at infinity). Here the operator $\mathcal{B}$ is not exactly of the same type as L, but nevertheless the ultracontractivity of the semigroup $S_{\mathcal{B}}(t)$, as well as that of $(S_{\mathcal{B}})^*$, holds. (Recall also that the ultracontractivity of the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ is equivalent to an appropriate form of Nash inequality for the operator $\mathcal{B}$).

Lemma 2.2. *Consider the weight function $m_0 := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, for $0<\kappa\gamma<1$. Then there exists $R_0, M_0>0$ such that for $M\ge M_0$ and $R\ge R_0$ we have*

$$\forall\, t>0, \qquad \|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^1(m_0)\to L^2(m_0)} \lesssim t^{-d/4}. \tag{2.6}$$

Proof. The proof is similar to the proof of [16, Lemma 3.9], see also [25, Section 3], [26, Section 2] and [19]. For the sake of completeness we sketch it below.

Consider $f_0 \in L^2(m_0)$ and denote $f(t) = S_{\mathcal{B}}(t) f_0$. From (2.4) with $p = 2$ and throwing out the last term in that inequality, we find

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^2\, m_0^2 dx \leq -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(f(t)m_0)|^2 dx.$$

Using Nash's inequality for $g := f(t)m_0$ ([21, Chapter 8]) stating that for some constant $c > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^2 dx \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 dx\right)^{\frac{d}{d+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g| dx\right)^{\frac{4}{d+2}} \tag{2.7}$$

we get (for another constant $c > 0$)

$$X'(t) \leq -2\, c\, Y(t)^{-4/d}\, X(t)^{1+\frac{2}{d}}, \tag{2.8}$$

where for brevity of notations we have set

$$X(t) := \|f(t)\|^2_{L^2(m_0)}, \qquad Y(t) := \|f(t)\|_{L^1(m_0)}.$$

Since according to (2.2) we have $Y(t) \leq Y_0$ for $t > 0$, we may integrate the differential inequality (2.8) and obtain (2.6).

□

The next result states that the adjoint of $\mathcal{B}$ generates also an ultracontractive semigroup in the spaces $L^p(m_0)$.

Lemma 2.3. *Consider the weight function $m_0 := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, for $0 < \kappa\gamma < 1$. Then there exists $R_1 \geq R_0$ and $M_1 \geq M_0$ (where M_0 and R_0 are defined in the previous lemma) such that for $M \geq M_1$ and $R \geq R_1$, the semigroup generated by $\mathcal{B}_*$, the formal adjoint of $\mathcal{B}$, satisfies*

$$\forall\, t > 0, \qquad \|S_{\mathcal{B}_*}(t)\|_{L^1(m_0)\to L^2(m_0)} \lesssim t^{-d/4}. \tag{2.9}$$

Consequently, for $M \geq M_1$ and $R \geq R_1$, we have

$$\forall\, t > 0, \qquad \|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^2(m_0)\to L^\infty(m_0)} \lesssim t^{-d/4}. \tag{2.10}$$

Proof. We first observe that if the operator B is of the form

$$Bf = \Delta f + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla f + a(x)\, f,$$

and we make the transform $h := f\, m$, then the corresponding operator $B_m h := m\, B(m^{-1}\, h)$ is of the same type and is given by

$$B_m h = \Delta h + \left[\mathbf{b}(x) - 2\,\frac{\nabla m}{m}\right]\cdot\nabla h + \left[-\frac{\Delta m}{m} + 2\,\frac{|\nabla m|^2}{m^2} + a - \mathbf{b}(x)\cdot\frac{\nabla m}{m}\right] h.$$

Observe also that the formal adjoint of B, denoted by B_* to avoid any misunderstanding, is given by

$$B_* g = \Delta g - \mathbf{b}(x)\cdot\nabla g + (a(x) - \operatorname{div}(\mathbf{b}(x)))\, g.$$

Applying these observations to $\mathcal{B}f = \Delta f + \mathbf{F}\cdot\nabla f + (\operatorname{div}(\mathbf{F}) - M\chi_R)\, f$, we get that for $h := g\, m_0$ the operator $\mathcal{B}_{*,m}$, associated to the formal adjoint $\mathcal{B}_*$, is given by

$$\mathcal{B}_{*,m} h = \Delta h - \left[\mathbf{F} - 2\,\frac{\nabla m}{m}\right]\cdot\nabla h + \left[\frac{\Delta m}{m} - M\chi_R - \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m}{m}\right] h. \tag{2.11}$$

Thus, if $g_0 \geq 0$ is a smooth initial datum, then the solution g of

$$\partial_t g = \mathcal{B}_* g, \qquad g(0,x) = g_0(x),$$

yields the function $h := g\, m_0$ which satisfies the evolution equation

$$\partial_t h = \mathcal{B}_{*,m_0} h, \qquad h(0,x) = h_0(x). \tag{2.12}$$

Now, one can verify easily that for $h_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $h_0 \geq 0$, the solution h to the equation

$$\partial_t h = \Delta h + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla h + a(x)\, h, \qquad h(0,x) = h_0(x)$$

satisfies $h(t,x) \geq 0$ and for $1 \leq p < \infty$ we have the identity

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int h(t,x)^p\, dx = -(p-1)\int |\nabla h|^2\, h^{p-2}\, dx + \frac{1}{p}\int (p\, a(x) - \mathrm{div}(\mathbf{b}(x)))\, h^p\, dx.$$

As a consequence, applying this to the operator $\mathcal{B}_{*,m_0}$, we have that the solution h of equation (2.12) verifies

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int h(t,x)^p\, dx \leq -(p-1)\int |\nabla h|^2 h^{p-2}\, dx + \int h^p\, \psi_{*,m_0,p}\, dx,$$

where, for convenience, we have set

$$\psi_{*,p,m_0} := \frac{(p-2)}{p})\frac{\Delta m_0}{m_0} + \frac{2}{p}\,\frac{|\nabla m_0|^2}{m_0^2} + \frac{1}{p}\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m_0}{m_0} - M\chi_R. \tag{2.13}$$

Proceeding as we did above in the study of the function defined in (2.4), we may choose, if necessary, M and R large enough (in particular larger than M_0, R_0 given by Lemma 2.2), so that for all $x \in \mathbb{R}^d$ we have $\psi_{*,m_0,} \leq 0$. Therefore we conclude that

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{p}\|h(t)\|_{L^p}^p \leq -(p-1)\int |\nabla h|^2 h^{p-2}\, dx. \tag{2.14}$$

On the one hand, taking $p := 1$, we deduce that the semigroup generated by $\mathcal{B}_{*,m_0}$ is a contraction semigroup in $L^1(\mathbb{R}^d)$, that is $\|h(t)\|_{L^1} \leq \|h_0\|_{L^1}$ for all $t \geq 0$.

On the other hand, taking $p := 2$ and using Nash's inequality (2.7), together with the fact that $\|h(t)\|_{L^1}$ is non increasing, we deduce that if we set $X(t) := \|h(t)\|_{L^2}^2$, then for some constant $c > 0$, the function $X(t)$ satisfies the differential inequality

$$\frac{d}{dt}X(t) \leq -c\,\|h_0\|_{L^1}^{-4/d}\, X(t)^{(2+d)/d}.$$

Integrating this, we get that for all $t > 0$

$$\|h(t)\|_{L^2} \lesssim t^{-d/4}\,\|h_0\|_{L^1}.$$

From this, by a density argument and the splitting of any initial datum as the difference of two nonnegative functions, we conclude that for any $g_0 \in L^1(m_0)$ the associated solution to $\partial_t g = \mathcal{B}_* g$ satisfies

$$\|S_{\mathcal{B}_*}(t) g_0\|_{L^2(m_0)} = \|g(t)\|_{L^2(m_0)} \lesssim t^{-d/4}\,\|g_0\|_{L^1(m_0)}, \quad \forall t > 0, \tag{2.15}$$

which is precisely (2.9). To conclude the proof of the Lemma, observe that for $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ we have

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B} f|g)_{L^2(m_0)} &= \int \mathcal{B} f\, g\, m_0^2\, dx = \int \mathcal{B}_{m_0}(f\, m_0)\,(g\, m_0)\, dx \\
&= \int (f\, m_0)\,\mathcal{B}_{*,m_0}(g\, m_0)\, dx = \int (f\, m_0)\, m_0^{-1}\mathcal{B}_{*,m_0}(g\, m_0)\, m_0(x)^2\, dx \\
&= (f|\mathcal{B}_* g)_{L^2(m_0)}.
\end{aligned}$$

This allows one to verify that $(S_{\mathcal{B}}(t))^* = S_{\mathcal{B}_*}(t)$, the adjoint being taken in the sense of the Hilbert space $L^2(m_0)$, where we assume that this space is identified with its dual. Therefore, since with these conventions we have $(L^1(m_0))' = L^\infty(m_0)$, thanks to (2.15), we conclude to (2.10). □

Putting together the previous estimates, we get the following ultracontractivity result on the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ and on the iterated convolution family of operators $(\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*n)}$.

Lemma 2.4. *Consider the weight function $m_0 := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$, for $0 < \kappa\gamma < 1$. Then, M, R being large enough as in Lemma 2.3, there exists $\lambda_* \in (0,\infty)$ such that for any $p, q \in [1,\infty]$, $p \le q$, and for any $0 \le \theta_2 < \theta_1 \le 1$, the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ satisfies*

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^p(m_0^{\theta_2})\to L^q(m_0^{\theta_1})} \lesssim t^{-(d/2)(1/p-1/q)}\, \mathrm{e}^{-\lambda_* t^{\gamma/(2-\gamma)}}, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.16}$$

Moreover, if $n \ge d/2$ is an integer, for all $\lambda < \lambda_*$ and all $t > 0$, we have

$$\|(\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*n)}(t)\|_{L^1(m_0)\to L^\infty(m_0^2)} \lesssim \mathrm{e}^{-\lambda\, t^{\gamma/(2-\gamma)}}. \tag{2.17}$$

Proof. Step 1. Writing $S_{\mathcal{B}}(t) = S_{\mathcal{B}}(t/2)S_{\mathcal{B}}(t/2)$, and using (2.6) together (2.10), we deduce that for any $t > 0$

$$\begin{aligned}\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^1(m_0)\to L^\infty(m_0)} &\le \|S_{\mathcal{B}}(t/2)\|_{L^2(m_0)\to L^\infty(m_0)}\, \|S_{\mathcal{B}}(t/2)\|_{L^1(m_0)\to L^2(m_0)}\\ &\lesssim t^{-d/2}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Since on the other hand we have also $\|S_{\mathcal{B}}(t)f_0\|_{L^p(m_0)} \le \|f_0\|_{L^p(m_0)}$, a classical interpolation argument yields that for $1 \le p \le q \le \infty$, we have

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^p(m_0)\to L^q(m_0)} \lesssim t^{-(d/2)(1/p-1/q)}. \tag{2.19}$$

Using Lemma 2.1, since

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^q(m_0)\to L^q(m_0^\theta)} \lesssim \exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)}),$$

one sees that the proof of (2.16) with $\theta_1 = 1$ is complete. To see that (2.16) holds with $\theta_1 < 1$, it is enough to observe that $m_0^{\theta_1}(x)$ is of the same type as $m_0(x) = \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$ provided κ is replaced with $\theta_1\kappa$.

Step 2. In order to show (2.17), first note that the operator $\mathcal{A}$ consisting simply in a multiplication by a smooth compactly supported function, thanks to the above lemmas, we clearly have, for all $t > 0$,

$$\|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^{p_1}(m_0)\to L^{p_2}(m_0^2)} \lesssim t^{-\alpha}\, e^{-\lambda\, t^{\sigma^*_{\mathcal{B}}}}, \tag{2.20}$$

with $\sigma^*_{\mathcal{B}} := \gamma/(2-\gamma)$ and where it is understood that $\alpha := d/2$ if $(p_1,p_2) := (1,\infty)$, and $\alpha := 0$ when $p_1 = p_2$. We claim that the three estimates for three choices $(p_1,p_2) = (1,\infty)$, and $p_1 = p_2 = 1$, as well as $p_1 = p_2 = \infty$, imply that for all integers $n \ge 1$ we have

$$\|(\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*n)}(t)\|_{L^{p_1}(m_0)\to L^{p_2}(m_0^2)} \le C_n\, t^{n-1-\alpha}\, e^{-\lambda\, t^{\sigma^*_{\mathcal{B}}}}, \tag{2.21}$$

from which one readily deduces (2.17). We prove (2.21) by induction. Estimates (2.21) are clearly true for $n = 1$. Let us assume that $p_1 = 1$ and $p_2 = \infty$, for which

(2.21) is true for a certain $n \geq 1$. Introducing the shorthand notation $u := \mathcal{A}S_{\mathcal{B}}$ and $\|\cdot\|_{p_1\to p_2} = \|\cdot\|_{L^{p_1}(m_0)\to L^{p_2}(m_0^2)}$, we have

$$\begin{aligned}
\|u^{(*(n+1))}(t)\|_{1\to\infty} &\leq \int_0^{t/2} \|u^{(n)}(t-s)\|_{1\to\infty}\, \|u(s)\|_{1\to 1}\, ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t \|u^{(n)}(t-s)\|_{\infty\to\infty}\, \|u(s)\|_{1\to\infty}\, ds \\
&\leq C_n\, C_1\, e^{-\lambda\, t^{\sigma^*_{\mathcal{B}}}} \int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha+n-1}\, ds \\
&+ C_n\, C_1\, e^{-\lambda\, t^{\sigma^*_{\mathcal{B}}}} \int_{t/2}^t (t-s)^{n-1}\, s^{-\Theta}\, ds \\
&\leq \quad C_n\, C_1\, e^{-\lambda\, t^{\sigma^*_{\mathcal{B}}}} t^{-\alpha+n} \left\{ \int_0^{1/2} (1-\tau)^{-\alpha+n-1}\, d\tau \right. \\
&\qquad \left. + \int_{1/2}^1 (1-\tau)^{n-1}\, \tau^{-\alpha}\, d\tau \right\},
\end{aligned}$$

where we have used that $t^\sigma \leq (t-s)^\sigma + s^\sigma$ for any $0 \leq s \leq t$ and $\sigma \in (0,1)$. This proves estimate (2.21) at rank $n+1$ and $(p_1, p_2) = (1, \infty)$.

The proof of the other cases $(p_1, p_2) = (1, 1)$ and $(p_1, p_2) = (\infty, \infty)$ is similar, if not much simpler, and can be left to the reader. □

2.2. **Additional growth estimates.** In order to deal with the general case in Section 6, we will need a more accurate version of the previous estimates.

Lemma 2.5. *Consider $m_0 := \mathrm{e}^{2\kappa\langle x\rangle^\gamma}$ with $\kappa \in (0, 1/(4\gamma))$ and define the sequence of spaces*

$$X_k := L^2(m_k), \quad m_k := \frac{m_0}{\nu_k}, \quad \nu_k(x) := \sum_{\ell=0}^k \frac{(\kappa\,\langle x\rangle^\gamma)^\ell}{\ell!}, \tag{2.22}$$

for any $k \in \mathbb{N}$. There exist some constants R and M in the definition of $\mathcal{B}$ and some constant $\beta > 0$ such that for any $k, j \in \mathbb{N}$, $k \geq j$ and any $\alpha \in (0, \alpha^*)$, $\alpha^* := 1/2(1-\gamma)$, the semigroup $S_{\mathcal{B}}$ satisfies the growth estimate

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{X_{k-j}\to X_k} \lesssim \mathrm{e}^{-\lambda\,\langle t^\alpha\rangle^{2(\gamma-1)} t} + \Big(1 \wedge \frac{k^j}{\kappa^j\,\langle t^\alpha\rangle^{\gamma j}}\Big) \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.23}$$

Proof. We easily compute

$$\frac{\nabla m_k}{m_k} = \gamma\,\kappa\, x\,\langle x\rangle^{\gamma-2} \Big[2 - \frac{1 + ... + (\kappa\,\langle x\rangle^\gamma)^{k-1}/(k-1)!}{1 + ... + (\kappa\,\langle x\rangle^\gamma)^k/k!}\Big],$$

from what we deduce

$$\Big|\frac{\nabla m_k}{m_k}\Big| \leq 2\,\gamma\,\kappa\,|x|\,\langle x\rangle^{\gamma-2},$$

and

$$-\mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m_k}{m_k} \leq -\gamma\,\kappa\,|x|^\gamma\,\langle x\rangle^{\gamma-2} \quad \forall\, x \in B^c_{R_0}.$$

As a consequence, we have

$$\frac{d}{dt}\int f^2\, m_k^2 \leq -\int |\nabla f|^2\, m_k^2 + \int f^2\, m_k^2\, \psi_k,$$

with

$$\begin{aligned}\psi_k &= \frac{|\nabla m_k|^2}{m_k^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m_k}{m_k} - M\,\chi_R \\ &\le 4\,\gamma^2\,\kappa^2\,|x|^2\,\langle x\rangle^{2\gamma-4} + \frac{1}{2}\,C_F'\,\langle x\rangle^{\gamma-2} \\ &\qquad -\gamma\,\kappa\,|x|^\gamma\,\langle x\rangle^{\gamma-2}\,\mathbf{1}_{B_{R_0}^c} - M\,\chi_R \\ &\le -2\lambda\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)}\end{aligned}$$

for any $x\in\mathbb{R}^d$ and $k\in\mathbb{N}$, by fixing $\kappa>0$ small enough (as we did) and then R and M large enough. We deduce

$$\frac{d}{dt}\int f^2\,m_k^2 \le -\int |\nabla f|^2\,m_k^2 - 2\lambda\int f^2\,m_k^2\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)}, \tag{2.24}$$

and in particular

$$Y_k(t) := \int f^2\,m_k^2 \le Y_k(0) \quad \text{for any} \quad k\ge 0.$$

We now observe that for any $j\in\mathbb{N}$, $0\le j\le k$, there hold $m_k\le m_{k-j}$ as well as

$$m_k(x) \le \frac{m_0(x)}{\nu_{k-j}(x)\,(\kappa\,\langle x\rangle^\gamma/k)^j} = \frac{k^j}{\kappa^j\,\langle x\rangle^{\gamma j}}\,m_{k-j}(x) \quad \forall\,x\in\mathbb{R}^d.$$

The two inequalities together, we have proved

$$\forall\,j\le k,\,\forall\,x\in\mathbb{R}^d \quad m_k(x) \le \Big(1\wedge\frac{k^j}{\kappa^j\,\langle x\rangle^{\gamma j}}\Big)\,m_{k-j}(x). \tag{2.25}$$

As a consequence, for any $\rho>0$, we have

$$\begin{aligned}Y_k &= \int_{B_\rho} f^2\,m_k^2 + \int_{B_\rho^c} f^2\,m_k^2 \\ &\le \langle\rho\rangle^{2(1-\gamma)}\int f^2\,m_k^2\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)} + \Big(1\wedge\frac{k^j}{\kappa^j\,\langle\rho\rangle^{\gamma j}}\Big)^2\,Y_{k-j}.\end{aligned}$$

Coming back to (2.24), we deduce

$$\frac{d}{dt}Y_k \le -2\lambda\,\langle\rho\rangle^{2(\gamma-1)}\,Y_k + 2\lambda\,\langle\rho\rangle^{2(\gamma-1)}\Big(1\wedge\frac{k^j}{\kappa^j\,\langle\rho\rangle^{\gamma j}}\Big)^2\,Y_{k-j}(0),$$

which in turn implies

$$Y_k(t) \le \Big\{\mathrm{e}^{-2\lambda\,\langle\rho\rangle^{2(\gamma-1)}t} + \Big(1\wedge\frac{k^j}{\kappa^j\,\langle\rho\rangle^{\gamma j}}\Big)^2\Big\}Y_{k-j}(0) \quad \forall\,t\ge 0,\,\rho>0.$$

We conclude by making the choice $\rho=t^\alpha$ for any $\alpha\in(0,\alpha^*)$. □

Lemma 2.6. *Consider $m_0 := \mathrm{e}^{\kappa\langle x\rangle^\gamma}$ with $\kappa\in(0,1/(2\gamma))$. There exist constants $C,\lambda\in(0,\infty)$ such that $S_{\mathcal{B}}$ satisfies*

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^2(m_0)\to H^1} \le \frac{C}{t^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t^{\sigma_{\mathcal{B}}^*}} \quad \forall\,t>0. \tag{2.26}$$

Proof. The function $f = S_{\mathcal{B}}(t)f_0$ satisfies

$$\partial_t\partial_i f = \Delta\partial_i f + (\partial_i \mathrm{div}(\mathbf{F}))f + \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\partial_i f + \partial_i \mathbf{F}_j \partial_j f + \mathbf{F}\cdot\nabla\partial_i f - M\partial_i\chi_R f - M\chi_R\partial_i f,$$

so that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\nabla f|^2 m_0^2 &= -\int |D^2 f|^2 m_0^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 \Delta m_0^2 - \int (\mathrm{div}\mathbf{F})\, f(\Delta f)\, m_0^2 \\ &\quad - \int (\mathrm{div}(\mathbf{F}))\, f\, \nabla f\cdot\nabla m_0^2 - \int \partial_i\mathbf{F}_j\partial_i f\partial_j f\, m_0^2 - \frac{1}{2}\int (\mathrm{div}(\mathbf{F}))\,|\nabla f|^2 m_0^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 \mathbf{F}\cdot\nabla m_0^2 + M\int \mathrm{div}(\nabla\chi_R m_0^2) f^2 - \int M\chi_R |\nabla f|^2 \\ &\le -\frac{1}{2}\int |D^2 f|^2 m_0^2 + \int |\nabla f|^2 m_0^2 \psi^1 + \int f^2 m_0^2 \psi^2,\end{aligned}$$

with

$$\psi^1 := \frac{1}{2}\frac{\Delta m_0^2}{m_0^2} + \frac{1}{2}|\mathrm{div}(\mathbf{F})|\frac{|\nabla m_0^2|}{m_0^2} + \frac{3}{2}|D\mathbf{F}| - \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla m_0}{m_0} - M\chi_R$$

and

$$\psi^2 := (\mathrm{div}(\mathbf{F}))^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m_0^2}{m_0^2} + \frac{1}{2}|\mathrm{div}\mathbf{F}|\frac{|\nabla m_0^2|}{m_0^2} + M|\Delta\chi_R| + M|\nabla\chi_R|\frac{|\nabla m_0^2|}{m_0^2}.$$

Choosing M and R large enough, we have

$$\psi^1 \le -a\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)}, \quad a>0, \quad \psi^2 \le C\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)}, \quad C\in\mathbb{R},$$

and, choosing then $\eta > 0$ small enough, we get

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int (f^2 + \eta|\nabla f|^2) m_0^2 &\le -\frac{1}{2}\int (|\nabla f|^2 + \eta|D^2 f|^2) m_0^2 \\ &\quad - a\int (f^2 + \eta|\nabla f|^2)\, m_0^2\,\langle x\rangle^{2(\gamma-1)}.\end{aligned}$$

On the one hand, keeping only the second term and arguing as in the proof of Lemma 2.1, we get

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{\mathscr{B}(H^1(m_0),H^1)} \le \Theta_m(t), \quad \forall\, t\ge 0. \tag{2.27}$$

On the other hand, using the elementary inequality

$$\int |\nabla f|^2 m_0^2 = -\int f D^2 f m_0^2 + \frac{1}{2}\int f^2 \Delta m_0^2 \le \|f\|_{L^2(m_0)}\,\|f\|_{H^2(m_0)} + C\,\|f\|^2_{L^2(m_0)},$$

the differential inequality

$$\frac{d}{dt}\|\nabla f\|^2_{L^2(m_0)} \le -\|D^2 f\|^2_{L^2(m_0)} + \|\psi^2\|_{L^\infty}\|f\|^2_{L^2(m_0)}$$

and the contraction in $L^2(m_0)$, we then obtain

$$\frac{d}{dt}\|\nabla f\|^2_{L^2(m_0)} \le -\|f_0\|^{-2}_{L^2(m_0)}\,\|\nabla f\|^4_{L^2(m_0)} + \|\psi^2\|_{L^\infty}\|f_0\|^2_{L^2(m_0)}.$$

As in the proof of Lemma 2.1, we deduce

$$\|\nabla f\|^2_{L^2(m_0)} \le \frac{C}{t}\|f_0\|^2_{L^2(m_0)} \quad \forall\, t\in(0,1). \tag{2.28}$$

We easily deduce (2.26) by gathering (2.27) and (2.28). □

3. Boundedness of $S_{\mathcal{L}}$

In this section, we establish some estimates on $S_{\mathcal{L}}$ which are simple results yielded by the iterated Duhamel formula (1.27) and the previous estimates on $S_{\mathcal{B}}$.

Lemma 3.1. *For any exponent $p \in [1,\infty]$ and any weight function m given by* (1.8), (1.9) *or* (1.10), *there exists $C(m,p)$ such that*

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)\|_{\mathscr{B}(L^p(m))} \le C(m,p), \quad \forall\, t \ge 0.$$

Proof. The estimate

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)\|_{\mathscr{B}(L^1)} \le 1, \quad \forall\, t \ge 0, \tag{3.1}$$

is clear and is a consequence of the fact that $S_{\mathcal{L}}$ is a positive and mass conserving semigroup.

Step 1. We consider first the case $p = 1$ and we write the Duhamel formula

$$S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{B}} + S_{\mathcal{B}} * \mathcal{A} S_{\mathcal{L}},$$

which allows one to deduce that

$$\|S_{\mathcal{L}}\|_{L^1_k \to L^1_k} \le \|S_{\mathcal{B}}\|_{L^1_k \to L^1_k} + \|S_{\mathcal{B}}\|_{L^1_{k+\ell} \to L^1_k} * \|\mathcal{A} S_{\mathcal{L}}\|_{L^1 \to L^1_{k+\ell}} \le C,$$

because the second term on the right hand side of the first inequality is a bounded function of time thanks to (3.1) and, by choosing $\ell := 2(2-\gamma)$ and applying (2.1), we have $\|S_{\mathcal{B}}\|_{L^1_{k+\ell} \to L^1_k} \lesssim \langle t \rangle^{-2}$, which is a $L^1(0,\infty)$ function.

Step 2. In order to study the case $1 < p \le \infty$, we write the iterated Duhamel formula (1.27) with $n_1 := \ell + 1$ and $n_2 := 0$ and we get

$$S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{B}} + \cdots + S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*(\ell-1))} + S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*\ell)} * (\mathcal{A} S_{\mathcal{L}})$$

with $\ell := d/2 + 1$ and then

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{L}}\|_{\mathscr{B}(L^p(m))} \le & \sum_{\ell'=0}^{\ell-1} \|S_{\mathcal{B}}\|_{\mathscr{B}(L^p(m))} * \|\mathcal{A} S_{\mathcal{B}}\|^{(*\ell)}_{\mathscr{B}(L^p(m))} \\ & + \|S_{\mathcal{B}}\|_{L^p(\omega) \to L^p(m)} * \|(\mathcal{A} S_{\mathcal{B}})^{(*\ell)}\|_{L^1(\omega) \to L^\infty(\omega^2)} * \|\mathcal{A} S_{\mathcal{L}}\|_{L^p(m) \to L^1(\omega)}, \end{aligned}$$

where $\omega := \mathrm{e}^{\nu \langle x \rangle^\gamma}$ with $\nu \in (0, 1/\gamma)$ large enough. Using (2.20) and (2.17), we see that the RHS term is uniformly bounded as the sum of $\ell + 1$ functions, each one being the convolution of one L^∞ function with less that ℓ integrable functions. □

Remark 3.2. When $p = 1$, $m = \langle x \rangle^k$ and $f(t) \ge 0$, the above estimate means exactly that for $k > 2 - \gamma > 1$, there exists a constant C_k such that

$$M_k(S_{\mathcal{L}}(t) f_0) \le C_k\, M_k(f_0), \quad M_k(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f\, \langle x \rangle^k \, dx.$$

We then recover (with a simpler proof) and generalize (to a wider class of confinement force fields) a result obtained by Toscani and Villani in [32, section 2].

4. The **Case 1** when a Poincaré inequality holds

In this section we restrict our analysis to **Case 1** when furthermore the steady state G to the Fokker-Planck equation (1.1) is such that the "weak Poincaré inequality" (1.13) holds true and satisfies the large x behavior (1.12).

4.1. **Decay estimate in a small space.**

We first recall the following decay estimate in a small space. We define

$$E_1 := L^2(G^{-1/2}), \quad E_2 := L^\infty(G^{-1}).$$

Theorem 4.1 (Röckner-Wang [30])**.** *Under assumptions* (1.13)–(1.12) *on the steady state* G*, set* $\Theta_G(t) := \exp(-\lambda t^{\gamma/(2-\gamma)})$*. Then there exists* λ^* *such that for* $\lambda < \lambda_*$ *the semigroup* $S_{\mathcal{L}}$ *satisfies for all* $t > 0$

$$\|S_{\mathcal{L}}(t) f_0 - M(f_0)\, G\|_{E_1} \lesssim \Theta_G(t)\, \|f_0 - M(f_0)\, G\|_{E_2}. \tag{4.1}$$

We briefly sketch the proof of Theorem 4.1 and we refer to [30] for more details. We define $V := -\log G$, we set $\mathbf{F}_0 := \mathbf{F} + \nabla V$ and we observe that $\mathrm{div}(\mathbf{F}_0 G) = 0$ and any solution f to the Fokker-Planck equation (1.1) satisfies

$$\partial_t f = \mathrm{div}[G\nabla(f/G) + f\mathbf{F}_0].$$

As a consequence, on the one hand, we compute

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int f^2 G^{-1} &= -\int G\,|\nabla(f/G)|^2 + \int \mathrm{div}[f\mathbf{F}_0] f/G \\ &\le -\mu \int f^2\, \langle x\rangle^{2\gamma-2}\, G^{-1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

thanks to the weak Poincaré inequality (1.13) and because

$$\int \mathrm{div}[f\mathbf{F}_0] f/G = \int f/G\, (G\mathbf{F}_0)\cdot\nabla(f/G) = -\frac{1}{2}\int (f/G)^2 \mathrm{div}(G\mathbf{F}_0) = 0.$$

On the other hand, for any convex function $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the following generalized relative entropy inequality holds (see [23], and also [30] and the references therein),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int j\Big(\frac{f}{G}\Big) G &= \int j'\Big(\frac{f}{G}\Big)\mathrm{div}[G\nabla(f/G)] + \int j'\Big(\frac{f}{G}\Big)\mathrm{div}[f\mathbf{F}_0] \\ &= -\int j''\Big(\frac{f}{G}\Big)|\nabla(f/G)|^2 \le 0. \end{aligned}$$

In particular, taking $j(s) = |s|^p$, we obtain

$$\|f(t)/G\|_{L^p} \le \|f_0/\|_{L^p},$$

and passing to the limit $p \to \infty$, we get

$$\big\|f(t)/G\big\|_{L^\infty} \le \big\|f_0/G\big\|_{L^\infty}, \quad \forall\, t \ge 0. \tag{4.3}$$

We obtain (4.1) by gathering the two estimates (4.2) and (4.3). More precisely, we write, with $k := 2 - 2\gamma$,

$$\begin{aligned} \int f^2 G^{-1} &\le \int_{B_R} f^2\, G^{-1} + \int_{B_R^c} f^2\, G^{-1} \\ &\le R^k \int_{B_R} f^2\; G^{-1}\, \langle x\rangle^{-k} + \|f/G\|_{L^\infty}^2 \int_{B_R^c} G. \end{aligned}$$

Together with (4.2) and (4.3), we get for $R \ge R_0$

$$\frac{d}{dt}\int f^2 G^{-1} \le -R^{-k}\int f^2 G^{-1} + \|f_0/G\|_{L^\infty}^2 \int_{B_R^c} \mathrm{e}^{-c_1|x|^\gamma}.$$

Integrating in time, for any $\theta \in (0,1)$, we find a constant $C_\theta > 0$ such that

$$\int f^2 G^{-1} \le \mathrm{e}^{-R^{-k}t} \int f_0^2\, G^{-1} + C_\theta\, \mathrm{e}^{-\theta c_1 R^\gamma}\, \|f_0/G\|_{L^\infty}^2$$
$$\le \mathrm{e}^{-\lambda\, t^{\gamma/(2-\gamma)}}\, \|f_0/G\|_{L^\infty}^2,$$

by choosing $R := (t/(\theta c_1))^{1/(2-\gamma)}$ for t large enough and defining $\lambda := (\theta c_1)^{-1/(2-\gamma)}$, which is nothing but (4.1).

4.2. **Rate of decay in a large space.** We now present the proof of our main Theorem 1.2 in the **Case 1** when furthermore G satisfies the weak Poincaré inequality (1.13) and the asymptotic estimates (1.12). We recall that the projection operator Π is defined by

$$\Pi f := M(f)\, G.$$

Step 1. Here we consider the case $p \in [1,2]$. We begin by fixing m a polynomial or stretch exponential weight function, and we introduce a stronger confinement exponential weight $m_0(x) := \exp(\kappa_0 \langle x\rangle^\gamma)$, with $\kappa_0 \in (0, 1/\gamma)$. We denote by $\Theta_m(t)$, $\Theta_{m_0}(t)$ and $\Theta_G(t)$ the associated rate of decay defined in (1.18), (1.19) and in the statement of Theorem 4.1, and we may assume that $\Theta_{m_0}/\Theta_m, \Theta_G/\Theta_m \in L^1(0,\infty)$. We split the semigroup on invariant spaces

$$S_{\mathcal{L}} = \Pi\, S_{\mathcal{L}} + (I-\Pi)\, S_{\mathcal{L}},$$

and together with the iterated Duhamel formula (1.27) with $n_1 = n \ge d/2+1$ and $n_2 = 0$, we have

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}} - \Pi &= (I-\Pi)\left\{S_{\mathcal{B}} + \sum_{\ell=1}^{n-1} (S_{\mathcal{B}}\mathcal{A})^{(*\ell)} * S_{\mathcal{B}}\right\} \qquad (=: T_1) \\ &\quad + \{(I-\Pi)S_{\mathcal{L}}\} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*n)} \qquad (=: T_2). \end{aligned}$$

In order to estimate the first term T_1, we recall that

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{L^p(m)\to L^p} \le \Theta_m(t), \quad \|S_{\mathcal{B}}(t)\mathcal{A}\|_{L^p\to L^p} \le \Theta_{m_0}(t),$$

thanks to Lemma 2.1. We write

$$\|T_1\|_{\mathscr{B}(L^p(m),L^p)} \le u_0 + ... + u_{n-1}$$

with, for $\ell \in \{1, ..., n-1\}$,

$$u_\ell := C\, \|S_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\|_{\mathscr{B}(L^p)}^{(*\ell)} * \|S_{\mathcal{B}}\|_{\mathscr{B}(L^p(m),L^p)}.$$

Since clearly $\Theta_m^{-1}(t) \le \Theta_m^{-1}(s)\, \Theta_m^{-1}(t-s)$ for all $0 \le s \le t$, we deduce

$$\|\Theta_m^{-1} u_\ell\|_{L_t^\infty} \le \|\Theta_m^{-1}\, S_{\mathcal{B}}\mathcal{A}\|_{L_t^1(\mathscr{B}(L^p))}^\ell\, \|\Theta_m^{-1}\, S_{\mathcal{B}}\|_{L_t^\infty(\mathscr{B}(L^p(m),L^p))},$$

and then

$$\|T_1(t)\|_{\mathscr{B}(L^p(m),L^p)} \le C\, \Theta_m(t) \quad \forall\, t \ge 0.$$

In order to estimate the second term T_2, we recall that from Lemma 2.1, Lemma 2.4 and Theorem 4.1, we have

$$\|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)\|_{\mathscr{B}(L^p(m),L^1(m_0))} \le \Theta_m(t),$$
$$\|(\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*(n-1))}(t)\|_{\mathscr{B}(L^1(m_0),L^\infty(m_1))} \le \Theta_{m_0}(t),$$
$$\|S_{\mathcal{L}}(t)(I-\Pi)\|_{\mathscr{B}(L^\infty(G^{-1}),L^2(G^{-1/2}))} \le \Theta_G(t),$$

where $m_1 := m_0 + G^{-1}$. We thus obtain that T_2 satisfies the same estimate as T_1. We conclude to (1.17) by gathering the two estimates obtained on T_1 and T_2.

Step 2. The case $p \in [2, \infty]$. Thanks to the iterated Duhamel formula (1.27), we also have

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}} - \Pi &= (I - \Pi)\{\sum_{\ell=0}^{n} S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*\ell)}\} \qquad (=: T_1) \\ &\quad + S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*(n-1))} * \mathcal{A}\{S_L\,(I - \Pi)\} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}) \qquad (=: T_3), \end{aligned}$$

and we conclude in a similar way as in Step 1. □

5. The general case - the stationary problem

In this section, we present the proof of the existence and uniqueness of the solution to the stationary problem as claimed in Theorem 1.1 in the general case, that is assuming that the force field satisfies conditions (1.3)–(1.5), without any further assumption on the existence and particular properties of a positive stationary state. In order to do so, we define the "small" Hilbert space

$$X := L^2(m_0), \quad m_0 := \exp(\kappa \langle x \rangle^\gamma), \quad \kappa \in (0, 1/\gamma),$$

and we perform a spectral analysis of $\mathcal{L}$ acting in X. We consider below the eigenvalue problem on the imaginary axis. We start recalling some standard notions and notations. For an operator Λ acting in a Banach space X, we denote $N(\Lambda) := \Lambda^{-1}(\{0\})$ its null space, $\Sigma(\Lambda)$ its spectrum, $\Sigma_P(\Lambda)$ its point spectrum set, that is the set of the eigenvalues of Λ, while $\rho(\Lambda) := \mathbb{C}\backslash\Sigma(\Lambda)$ will denote the resolvent set and $R_\Lambda(z)$, for $z \in \rho(\Lambda)$, the resolvent operator defined by

$$R_\Lambda(z) := (\Lambda - z)^{-1}.$$

We denote X_+ the positive cone of X. In this section we shall prove

Theorem 5.1. *There exists a unique steady state $G \in X$, positive and normalized (with total mass $M(G) = 1$) such that*

$$N(\mathcal{L}^n) = \mathrm{span}(G), \quad \forall\, n \geq 1. \tag{5.1}$$

Moreover, there holds

$$\Sigma_P(\mathcal{L}) \cap \{z \in \mathbb{C}\,;\, \Re e\, z \geq 0\} = \{0\}. \tag{5.2}$$

Finally, estimate (1.11) *holds true.*

We start by recalling some elementary properties regarding the positivity of the semigroup $S_{\mathcal{L}}(t)$.

Proposition 5.2. *The operator $\mathcal{L}$ and its semigroup $S_{\mathcal{L}}$ satisfy the following properties:*
(a) *The semigroup $S_{\mathcal{L}}$ is positive, namely $S_{\mathcal{L}}(t)f \geq 0$ for any $f \geq 0$ and $t \geq 0$.*
(b) *The operators $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}^*$ satisfy Kato's inequality, that is if $f \in D(\mathcal{L})$ is complex valued, then we have*

$$\mathcal{L}|f| \geq \frac{1}{|f|}\Re e(\overline{f}\,\mathcal{L}f), \qquad \mathcal{L}^*|g| \geq \frac{1}{|g|}\Re e(\overline{g}\,\mathcal{L}^*g) \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

The above inequality means in particular that for all $\psi \in D(\mathcal{L}^*) \cap X_+$ and all $\varphi \in D(\mathcal{L}) \cap X_+$, we have

$$\langle |f|, \mathcal{L}^*\psi\rangle \geq \Re e\langle |f|^{-1}\,\overline{f}\,\mathcal{L}f, \psi\rangle, \qquad \langle \mathcal{L}\varphi, |g|\rangle \geq \Re e\langle \varphi, |g|^{-1}\,\overline{g}\,\mathcal{L}g\rangle.$$

(c) *The operator $-\mathcal{L}$ satisfies a "weak maximum principle", namely for any $a > 0$ and $g \in X_+$, there holds*

$$f \in D(\mathcal{L}) \text{ and } (-\mathcal{L} + a)f = g \quad \text{imply} \quad f \geq 0. \tag{5.4}$$

(d) *The opposite of the resolvent operator is a positive operator, namely for any $a > 0$ and $g \in X_+$, there holds $-R_{\mathcal{L}}(a)g \in X_+$.*

Proof. The argument to establish (5.3) is a classical one, but we outline it briefly. For a smooth complex valued function f if we set $f_\varepsilon := (\varepsilon^2 + |f|^2)^{1/2} - \varepsilon$, then for $1 \leq j \leq d$ we have

$$\partial_j f_\varepsilon = \frac{\Re e(\overline{f}\, \partial_j f)}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{1/2}}, \tag{5.5}$$

$$\partial_{jj} f_\varepsilon = \frac{\Re e(\overline{f}\, \partial_{jj} f)}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{1/2}} + \frac{|\partial_j f|^2}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{1/2}} - \frac{\big(\Re e(\overline{f}\, \partial_j f)\big)^2}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{3/2}}\,. \tag{5.6}$$

Observe that $f_\varepsilon \to |f|$ in $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ as $\varepsilon \to 0$, we have $\partial_j |f| = |f|^{-1} \Re e(\overline{f}\, \partial_j f)$ in $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$. Also since

$$\frac{|\partial_j f|^2}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{1/2}} - \frac{\big(\Re e(\overline{f}\, \partial_j f)\big)^2}{(\varepsilon^2 + |f|^2)^{3/2}} \geq 0,$$

we conclude that $\partial_{jj} f_\varepsilon \geq f_\varepsilon^{-1}\, \Re e(\overline{f}\, \partial_{jj} f)$. Passing to the limit in the sense of the distributions we obtain $\partial_{jj}|f| \geq |f|^{-1}\, \Re e(\overline{f}\, \partial_{jj} f)$, and using the expressions of the operators $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}^*$ we obtain (5.3).

The properties (a), (c) and (d) are classical consequences of (5.3), applied to real valued functions, see for instance [2] or [24]. □

Remark 5.3. For later use, we point out that if $f \in H^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ is complex valued and moreover is such that $|f| > 0$ on $\mathbb{R}^d$, then as $\varepsilon \to 0$ one may pass to the limit in (5.5) and (5.6) and obtain the following equalities

$$\partial_j |f| = \frac{\Re e(\overline{f}\, \partial_j f)}{|f|}, \tag{5.7}$$

$$\partial_{jj} |f| = \frac{\Re e(\overline{f}\, \partial_{jj} f)}{|f|} + \frac{|\partial_j f|^2}{|f|} - \frac{\big(\Re e(\overline{f}\, \partial_j f)\big)^2}{|f|}\,. \tag{5.8}$$

Proposition 5.4. *The operator $-\mathcal{L}$ satisfies a "strong maximum principle", namely for any given real valued function $f \in X \backslash \{0\}$, there holds*

$$f, |f| \in D(\mathcal{L}), \quad \mathcal{L}f = 0 \text{ and } \mathcal{L}|f| = 0 \quad \text{imply} \quad f > 0 \text{ or } f < 0.$$

Proof. Consider $f \in X \backslash \{0\}$ such that $f \in D(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}f = 0$. By a bootstrap regularization argument, we classically have $f \in C(\mathbb{R}^d)$. By assumption, there exist then $x_0 \in \mathbb{R}^d$, and two constants $c, r > 0$ such that $|f| \geq c$ on $B(x_0, r)$. From Lemma 2.1, we also have that the operator $\mathcal{L} - aI$ is dissipative for a large enough, in the sense that

$$\forall\, f \in D(\mathcal{L}) \quad ((\mathcal{L} - a)f | f)_X \leq -\|f\|_X^2. \tag{5.9}$$

For instance one can take $a := M + 1$, where M is the constant entering in the definition of $\mathcal{B}$, using the fact that $\mathcal{B}$ is then dissipative and that the same holds for $\mathcal{L} - MI$ because $0 \leq \mathcal{A} \leq M$.

We next observe that for $\sigma > 0$ large enough, the function

$$g(x) := c \exp(\sigma r^2/2 - \sigma |x - x_0|^2/2)$$

satisfies $g = c$ on $\partial B(x_0, r)$ and

$$(-\mathcal{L} + a)g = (a + d\sigma + \sigma \mathbf{F} \cdot (x - x_0) - \mathrm{div}\mathbf{F} - \sigma^2 |x - x_0|^2)\, g \leq 0 \quad \text{on} \quad B(x_0, r)^c.$$

We define $h := (g - |f|)^+$ and $\Omega := \mathbb{R}^d \backslash \overline{B}(x_0, r)$. We have $h \in H^1_0(\Omega, m dx)$ and

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - a)h &\geq \theta'(g - |f|)\, \mathcal{L}(g - |f|) - a\, h \\ &= \theta'(g - |f|)\, [(\mathcal{L} - a)g + a|f|] \geq 0, \end{aligned}$$

where we have used the notation $\theta(s) = s^+$. Thanks to a straightforward generalization of (5.9) to $H^1_0(\Omega, m)$, we deduce

$$0 \leq ((\mathcal{L} - a)h | h)_{L^2(\Omega, m)} \leq -\|h\|^2_{L^2(\Omega, m)},$$

and then $h = 0$. This implies that we have $|f| \geq g$ on $\Omega = \overline{B}(x_0, r)^c$, and thus $|f| > 0$ on $\mathbb{R}^d$. Since $f \in C(\mathbb{R}^d)$, we must have either $f \geq g > 0$ or $f \leq -g < 0$. □

Proof of Theorem 5.1. We split the proof into six steps.

Step 1. We prove that there exists $G \in N(\mathcal{L})$ such that $G > 0$, which yields in particular that $0 \in \Sigma_P(\mathcal{L})$. In other words, we prove that there exists a positive and normalized (with mass 1) steady state $G \in X$. For the equivalent norm $|||\cdot|||$ defined on X by

$$|||f||| := \sup_{t>0} \|S_{\mathcal{L}}(t) f\|_X,$$

we have $|||S_{\mathcal{L}}(t) f||| \leq |||f|||$ for all $t \geq 0$, that is the semigroup $S_{\mathcal{L}}$ is a contraction semigroup on $(X, |||\cdot|||)$. There exists $R > 0$ large enough such that the intersection of the closed hyperplane $H := \{f\ ;\ M(f) = 1\}$ and the closed ball of radius R in $(X, |||\cdot|||)$ is a convex, non empty subset. Then consider the closed, weakly compact convex set

$$\mathbb{K} := \{f \in X_+\ ;\ |||f||| \leq R, \quad M(f) = 1\}.$$

Since $S_{\mathcal{L}}(t)$ is a linear, weakly continuous, contraction in $(X, |||\cdot|||)$ and $M(S_{\mathcal{L}}(t) f) = M(f)$ for all $t \geq 0$, we see that $\mathbb{K}$ is stable under the action of the semigroup. Therefore we apply the Markov–Kakutani fixed point theorem (see for instance [13, Theorem 6, chapter V, § 10.5, page 456] or its (possibly nonlinear) variant [15, Theorem 1.2]) and we conclude that there exists $G \in \mathbb{K}$ such that $S_{\mathcal{L}}(t)G = G$. Therefore we have in particular $G \in D(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}G = 0$. Moreover since $G \geq 0$, $G \not\equiv 0$ and $G \in C(\mathbb{R}^d)$, we may conclude that $G > 0$ on $\mathbb{R}^d$ by the strong maximum principle.

Step 2. In this step we prove that $N(\mathcal{L}^2) = N(\mathcal{L})$, which implies that $N(\mathcal{L}^n) = N(\mathcal{L})$ for all $n \geq 1$. Otherwise, there would exist $g_1 \in D(\mathcal{L})$ with $\|g_1\| = 1$ and $g_2 \in D(\mathcal{L})$ such that $\mathcal{L}g_1 = 0$ and $\mathcal{L}g_2 = g_1$. Since $S_{\mathcal{L}}(t)g_1 = g_1$ for all $t \geq 0$, one sees easily that one must have $S_{\mathcal{L}}(t)g_2 = g_2 + t g_1$. However, since $g_1 \neq 0$, this is in contradiction with the fact that the semigroup $S_{\mathcal{L}}$ is bounded on X as stated in Lemma 3.1.

Step 3. We prove here that $N(\mathcal{L}) = \mathrm{span}(G)$. Since $\mathcal{L}$ is a real operator, we may restrict ourselves to real valued eigenfunctions. Consider a real valued eigenfunction $f \in N(\mathcal{L})$ with $f \not\equiv 0$. First we observe that thanks to Kato's inequality

$$0 = (\mathcal{L}f)\, \mathrm{sgn}(f) \leq \mathcal{L}|f|.$$

Actually this inequality must be an equality, since otherwise we would have

$$0 \neq \langle \mathcal{L}|f|, 1\rangle = \langle |f|, \mathcal{L}^* 1\rangle = 0,$$

which is a contradiction. As a consequence, we have also $|f| \in N(\mathcal{L})$, so that the strong maximum principle, Proposition 5.4, implies that either $f > 0$ or $f < 0$, and without loss of generality we may assume that $f > 0$, and up to a multiplication by a normalization factor, we may also assume that $M(f) = 1$. Now, using once more Kato's inequality we have

$$0 = \mathcal{L}(f - G)\, \mathbf{1}_{[f-G>0]} \leq \mathcal{L}(f - G)^+,$$

and due to the same reasons as above, we may conclude that this last inequality is in fact an equality, that is $(f-G)^+ \in N(\mathcal{L})$. The strong maximum principle implies that either $(f - G)^+ \equiv 0$ or $(f - G)^+ > 0$ on $\mathbb{R}^d$. This means that either we have $f \leq G$ or $f > G$ on $\mathbb{R}^d$. Thanks to the normalization hypothesis $M(f) = M(G) = 1$, the second possibility must be excluded and thus we have $f \leq G$ on $\mathbb{R}^d$. Repeating the same argument with $(G - f)^+$ we deduce that $G \leq f$ and we conclude that $f = G$.

Step 4. We prove here that $\mathrm{i}\mathbb{R} \cap \Sigma_P(\mathcal{L}) = \{0\}$: the only eigenvalue with vanishing real part is zero, or in other words, (5.2) holds. We consider a couple (f, μ) of eigenfunction and eigenvalue, with $\mu := \mathrm{i}\omega \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, and normalized so that $M(|f|) = 1$. Using the complex version of Kato's inequality (5.3), we have

$$\mathcal{L}|f| \geq \frac{1}{|f|} \Re e(\overline{f}\, \mathcal{L} f) = 0. \tag{5.10}$$

Computing $\langle \mathcal{L}|f|, 1\rangle$, thanks to the above inequality, we get

$$0 \leq \langle \mathcal{L}|f|, 1\rangle = \langle |f|, \mathcal{L}^* 1\rangle = 0,$$

which implies that the inequality is in fact an equality, that is $\mathcal{L}|f| = 0$, and since $M(G) = M(|f|) = 1$, we conclude that $|f| = G > 0$.

Next, using Remark 5.3 and (5.7)–(5.8), we have

$$\begin{aligned} |f|\, \mathcal{L}|f| &= \Re e(\overline{f}\, \Delta f) + \Re e(\overline{f}\, \mathbf{F} \cdot \nabla f) + \mathrm{div}(\mathbf{F})|f|^2 + |\nabla f|^2 - \frac{1}{|f|^2} \left|\Re e(\overline{f}\, \nabla f)\right|^2 \\ &= \Re e(\overline{f}\, \mathcal{L} f) + |\nabla f|^2 - \frac{1}{|f|^2} \left|\Re e\left(\overline{f}\, \nabla f\right)\right|^2. \end{aligned}$$

Together with $\mathcal{L}|f| = 0$ and thus $\Re e(\overline{f}\, \mathcal{L} f) = 0$ from (5.10), the above identity applies

$$|\nabla f|^2 - \frac{1}{|f|^2} \left|\Re e(\overline{f}\, \nabla f)\right|^2 = 0. \tag{5.11}$$

This implies that $f = \exp(\mathrm{i}\,\theta)\, G$ for some constant $\theta \in [0, 2\pi]$, and thus $\mathcal{L} f = \exp(\mathrm{i}\,\theta)\, \mathcal{L} G = 0$ and $\omega = 0$.

Indeed, in order to see that $f = \exp(\mathrm{i}\,\theta)\, G$, for some $\theta \in [0, 2\pi]$, let us write $f = u + \mathrm{i}\, v$ for two real valued functions u and v. Then, since $\Re e(\overline{f}\, \nabla f) = u \nabla u + v \nabla v$, relation (5.11) means that

$$(u^2 + v^2)\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) = |u \nabla u + v \nabla v|^2,$$

which yields $v \nabla u - u \nabla v = 0$. Since u and v are both continuous functions and are not both identically equal to zero, we may assume for instance that there exists $x_0 \in \mathbb{R}^d$ such that $u(x_0) > 0$. Thus, if we denote by Ω the connected component

of $\{x \in \mathbb{R}^d;\, u(x) > 0\}$ containing x_0, we have $\nabla(v/u) = 0$ on Ω. Hence $v = \alpha\, u$ on Ω for some $\alpha \in \mathbb{R}$. However we must have $\Omega = \mathbb{R}^d$, since otherwise we would have $|f| = 0$ on $\partial\Omega$ and a contradiction. Thus, setting $a := 1 + \mathrm{i}\alpha$ we get $f = a\, u$ and thus $u = |u| = |f|/|a|$ is a positive steady state, so that $|u| = G/|a| > 0$ from Step 3. We conclue that $f = a\, G/|a| = \exp(\mathrm{i}\,\theta)G$ for some $\theta \in [0, 2\pi]$.

Step 5. Denoting $m := e^{\kappa\langle x\rangle^\gamma}$, with $\kappa \in (0, 1/\gamma)$, and $\alpha := \kappa\gamma(1-\kappa\gamma)/2 > 0$, we have

$$0 = \int (\mathcal{L}G)\, m = \int G\, (\mathcal{L}^* m) \le \int G\, m\, \psi^0_{m,1},$$

so that

$$\int G\, m \le \frac{1}{\alpha} \int \int G\, m\, (\psi^0_{m,1} + \alpha) \le C \int_{B_R} G,$$

for some constructive constants $C, R > 0$. We have proved $G \in L^1(m)$. Using the regularization property of $S_{\mathcal{B}}$ established in Lemma 2.3 and Lemma 2.4 as well as the same Duhamel formula as in Step 1 in the proof of Lemma 3.1, we deduce $G \in L^\infty(m)$.

Step 6. We define $\kappa_1^* := \gamma^{-1} \limsup_{|x|\to\infty} x \cdot \mathbf{F}(x)/|x|^\gamma$ and we know that $\kappa^* \in [1/\gamma, \infty)$ from assumptions (1.3) and (1.4). We then denote $g := c\, e^{\kappa|x|^\gamma}$, with $\kappa > \kappa_1^*$, and we compute

$$\begin{aligned} g^{-1}[(-\mathcal{L} + a)g] \;&=\; -\kappa^2\gamma^2|x|^{2(\gamma-1)} + \kappa\gamma \mathbf{F}\cdot x\, |x|^{\gamma-2} \\ &\quad + a - \mathrm{div}\mathbf{F} + \kappa\gamma(d+\gamma-2)|x|^{\gamma-2} \le 0 \quad \text{on} \quad B(0,R)^c, \end{aligned}$$

for $R > 0$ large enough. Arguing as in the proof of Proposition 5.4, we deduce that $G \ge g$ on $B(0,R)^c$, and then the annouced lower bound (see also the proof of Lemma 6.2 below for similar aguments). □

6. The general case - decay estimate

In this section we present the proof of the our main Theorem 1.2 in the general case, that is assuming that the force field satisfies conditions (1.3)–(1.5). We denote as X_0 the "small" Banack space

$$X_0 := L^p(m_0), \quad m_0 := \exp(\kappa\, \langle x\rangle^\gamma), \quad \kappa \in (0, \kappa_0^*), \quad p = 1 \text{ or } 2,$$

and we will establish a semigroup decay in that space using three different strategies. The proof of the decay of the semigroup in a general Banach space $L^p(m)$, with a weight function m which is a polynomial or a stretch exponential function, then follows the same arguments as the ones which have been developed in section 4.2 and may be skipped here.

6.1. Modified Poincaré inequality approach.

We recall the Lyapunov condition (1.16), that we write as

$$\mathcal{L}^* m_0 \le -\xi_0 + M\chi_R, \quad \xi_0 := \zeta_0 m_0 \langle x\rangle^{2(1-\gamma)}, \tag{6.1}$$

(possibly for another choice of the value of the constant $M > 0$). We also recall that the the stationary state G given by Theorem (5.1) satisfies estimate (1.11), and thus a local Poincaré (or Poincaré-Wirtinger) inequality on any ball with constructive constants. Under both above assumptions, it has been proved in [4, Theorem 3.6] the following weak modified Poincaré inequality.

Theorem 6.1 (Bakry-Cattiaux-Guillin). *There exists $\beta > 0$ and $C_{LP} \in (0,\infty)$ such that denoting $w_0 := 1+\beta m_0$, the following weak Lyapunov-Poincaré inequality*

$$2C_{LP}\int h^2\xi_0 G \le \int \Big(w_0|\nabla h|^2 - h^2\mathcal{L}^* w_0\Big)G, \tag{6.2}$$

holds for all nice function h such that $\langle hG\rangle = 0$.

We introduce the weight function $m := w^{1/2}G^{-1/2}$ and the associated Hilbert space $L^2(m)$. Although the operator $\mathcal{L}$ has no reason to be symetric in $L^2(m)$, the associated Dirichlet form has a nice positivity property. More precisely, in order to make the discussion simpler, we make the change of unknown $h = f/G$ and we define

$$Lh := G^{-1}\,\mathcal{L}(Gh) = \Delta h + \Big(2\frac{\nabla G}{G} + \mathbf{F}\Big)\cdot\nabla h.$$

For any nice function f, we compute

$$\begin{aligned}
D[f] &:= (-\mathcal{L}f, f)_{L^2(m)} = (-Lh, h)_{L^2(w^{1/2}G^{1/2})}\\
&= -\int \big\{\Delta h + \Big(2\frac{\nabla G}{G} + \mathbf{F}\Big)\cdot\nabla h\big\} h w_0 G\\
&= \int |\nabla h|^2 G w_0 - \frac{1}{2}\int \nabla h^2\big\{-G\nabla w_0 + w_0\nabla G + \mathbf{F}w_0 G\big\}\\
&= \int |\nabla h|^2 G w_0 - \frac{1}{2}\int h^2\big\{G\Delta w_0 + w_0\Delta G + \mathrm{div}(\mathbf{F}w_0 G)\big\}\\
&= \int |\nabla h|^2 G w_0 - \frac{1}{2}\int h^2\,\mathcal{L}^* w_0\, G,
\end{aligned}$$

where we have performed one integration by part in the second line, another integration by part in the third line and we have used that G is a steady state in the last line. For any nice function f such that $M(f) = 0$, we deduce from the weak Lyapunov-Poincaré inequality (6.2) that

$$D[f] \ge C_{LP}\int f^2\xi_0 G^{-1}.$$

As a consequence, denoting $f = S_{\mathcal{L}}(t)f_0$ for $f_0 \in X_0$ with $M(f_0) = 0$, we compute

$$\frac{d}{dt}\int f^2 w_0 G^{-1} = -D[f] \le -C_{LP}\frac{\zeta_0}{1+\beta}\int f^2\langle x\rangle^{2(\gamma-1)} w_0 G^{-1}.$$

That last differential inequality is similar to (4.2) and we thus may conclude as in Section 4 that

$$\|f_t\|_{L^2} \lesssim \Theta_{G^{-1}}(t)\|f_0\|_{L^2(m)}, \quad \forall\, t \ge 0.$$

6.2. **Harris-Meyn-Tweedie approach.** We present now a second way to get a decay estimate in one small space. We start establishing a strict positivity estimate which will be the main technical estimate in our analysis.

Lemma 6.2. *For any $R > 0$, there exist $T > 0$ and $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\psi \ge 0$, $\psi \not\equiv 0$, such that*

$$S_{\mathcal{L}}(T)g_0 \ge \psi\int_{B_R} g_0\,dx, \quad \forall\, g_0 \ge 0.$$

Proof. We split the proof into three parts.
Step 1. We prove that for any $p \in [1,\infty)$ and $m := \langle x\rangle^k$, $k > 0$ large enough, there exist $C, \alpha > 1$, such that for any $g_0 \in L^1(m)$, the function $g(t) := S_{\mathcal{L}}(t)g_0$ satisfies

$$\|\nabla g(t)\|_{L^p} \leq \frac{C}{t^\alpha}\|g_0\|_{L^1(m)}, \quad \forall\, t > 0. \tag{6.3}$$

First, as a consequence of Lemma 2.4 and the iterated Duhamel formula

$$S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{B}} + \cdots + (S_{\mathcal{B}}\mathcal{A})^{(*(n-1))} * S_{\mathcal{B}} + (S_{\mathcal{B}}\mathcal{A})^{(*n)} * S_{\mathcal{L}},$$

we have

$$\|g(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{d/2}}\|g_0\|_{L^1(m)}, \quad \forall\, t > 0.$$

Next, we differentiate the Fokker-Planck equation and proceeding in a similar way as in the proof of Lemma 2.6, we get

$$\|g(t)\|_{H^1} \leq \frac{C}{t^{1/2}}\|g_0\|_{L^2(m)}, \quad \forall\, t > 0.$$

Repeating the proof of Lemma 2.4 for the derivative of $g(t)$, we may conclude in a quite standard way to (6.3).
Step 2. We prove that for any $t > 0, R > 0$, there exist $r, \lambda > 0$ and $x_0 \in B_R$ such that

$$S_{\mathcal{L}}(t)g_0 \geq \lambda\, \mathbf{1}_{B(x_0,r)} \int_{B_R} g_0\, dx.$$

We fix $R > 0$ and $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ with $\operatorname{supp} g \subset B_R$. With the same notations as in the previous step, we have

$$\int g_t\, dx = \int g_0\, dx = \int_{B_R} g_0\, dx.$$

Moreover, thanks to Lemma 3.1, there exists $A > 0$, such that

$$\int g_t\, |x|\, dx \leq A \int g_0\, |x|\, dx \leq AR \int_{B_R} g_0\, dx.$$

For any $\rho > 0$, , we write

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} g_t &= \int g_t - \int_{B_\rho^c} g_t \\
&\geq \int g_0 - \frac{1}{\rho}\int g_t|x| \\
&\geq \Big(1 - \frac{AR}{\rho}\Big)\int_{B_R} g_0 \geq \frac{1}{2}\int_{B_R} g_0,
\end{aligned}$$

by choosing $\rho > 0$ large enough. As a consequence, the exists $x_0 \in B_\rho$ such that

$$g(t,x_0) \geq 2\lambda := \frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho} g_t\, dx \geq \frac{1}{2|B_\rho|}\int_{B_R} g_0.$$

Because of Step 1 and Morrey embedding $W^{1,p} \subset C^{1/2}$, which holds true for some $p \in (1,\infty)$ large enough, we know that g_t is bounded in the Hölder space $C^{1/2}(\mathbb{R}^d)$, and more precisely

$$g_t(x) \geq g_t(x_0) - C' t^{-\alpha}|x - x_0|^{1/2} \geq \lambda$$

for $x \in B(x_0, r)$, $C' t^{-\alpha} r^{1/2} = \lambda$.

Because of the we may reformulate our estimate as follows: there exists $C > 0$, such that

$$\|g_t\|_{C^{1/2}} \le \frac{C}{t^\alpha}\|g_0\|_{L^1(m)}, \quad \forall\, t > 0.$$

Step 3. Spreading of the positivity. We prove that that for any $r_0, r_1 > 0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^d$, there exist $t_1, \kappa_1 > 0$ (computable) such that

$$g_0 \ge \mathbf{1}_{B(x_0,r_0)} \quad \Rightarrow \quad g(t_1,\cdot) \ge \kappa_1 \mathbf{1}_{B(x_0,r_1)}.$$

We first observe that $h := g\, e^{t\|\mathrm{div}\mathbf{F}\|_\infty}$ satisfies

$$\partial_t h \ge \mathcal{L}^\sharp h := \Delta h + \mathbf{F}\cdot\nabla h.$$

We introduce the function

$$\varphi(t,x) := \varphi_0 - \varepsilon, \quad \varphi_0 := (t+t_0)^{-\alpha} e^{-\mu|x-x_0|^2/(t+t_0)},$$

for some parameters $\alpha, \mu, \varepsilon, t_0 > 0$ to be specified latter. We compute

$$\partial_t\varphi = \big(\mu\frac{|x-x_0|^2}{(t+t_0)^2} - \frac{\alpha}{t+t_0}\big)\varphi_0, \quad \nabla_x\varphi = -2\mu\frac{x-x_0}{t+t_0}\varphi_0,$$
$$\Delta_x\varphi = \big(4\mu^2\frac{|x-x_0|^2}{(t+t_0)^2} - 2\frac{\mu d}{t+t_0}\big)\varphi_0.$$

To simplify notations, we only consider the case $x_0 = 0$ (the general case can be dealt exactly in the same way) and we denote $r = |x|$ and $\tau = t + t_0$. For $\mu \ge 1$, $T > 0$ and $t \in (0,T)$, we deduce

$$\begin{aligned}\frac{\partial_t\varphi - \mathcal{L}^\sharp\varphi}{\varphi_0} &= \mu\frac{r^2}{\tau^2} - \frac{\alpha}{\tau} + 2d\,\frac{\mu}{\tau} - 4\mu^2\frac{r^2}{\tau^2} + 2\mu\frac{\mathbf{F}\cdot x}{\tau}\\ &\le -\frac{\alpha}{\tau} - 2\mu^2\frac{r^2}{\tau^2} + 2d\,\frac{\mu}{\tau} + 4\|\mathbf{F}\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

and then

$$\partial_t\varphi \le \mathcal{L}^\sharp\varphi \quad \text{on} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^d \tag{6.4}$$

for any $\alpha \ge 2d\mu + 4T\|\mathbf{F}\|_{L^\infty}$. We fix ε such that

$$\varphi(0,r_0) = t_0^{-\alpha} e^{-\mu r_0^2/t_0} - \varepsilon = 0.$$

We have built φ such that

$$\partial_t(h-\varphi) \ge \mathcal{L}^\sharp(h-\varphi) \ \text{ on } \ (0,T)\times\mathbb{R}^d, \quad (h-\varphi)(0) \ge 0 \ \text{ on } \ \mathbb{R}^d.$$

Because $(h-\varphi)_- \in L^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, by the weak maximum principle, we deduce

$$g \ge e^{-2t_0\|\mathrm{div}\mathbf{F}\|_{L^\infty}}\,\varphi \ \text{ on } \ (0,T)\times\mathbb{R}^d.$$

We now define $r_t := r_0 t_0^{-\beta}\tau^\beta$ as well as

$$\psi(t) := \varphi(t,r_t) = \tau^{-\alpha} e^{-\mu r_0^2 t_0^{-2\beta}\tau^{2\beta-1}} - t_0^{-\alpha} e^{-\mu r_0^2/t_0}.$$

We have

$$\psi(0) = 0, \ \psi'(t) = \big(\frac{\mu r_0^2 t_0^{-2\beta}(1-2\beta)}{\tau^{1-2\beta}} - \alpha\big)\tau^{-\alpha-1} e^{-\mu r_0^2\tau^{2\beta-1}} \ge 0 \tag{6.5}$$

whenever $\alpha \le \frac{\mu r_0^2 t_0^{-2\beta}(1-2\beta)}{\tau^{1-2\beta}}$. We choose $\mu = 1 + r_0^{-2}$, $T = 2t_0 \le 1$ to be fixed bellow, $\beta = 1/4$ and $\alpha := 2d + 4\|\mathbf{F}\|_{L^\infty} \ge 2$. We observe that (6.4) is true on the

time interval $(0,T)$ and (6.5) is true on $(0,2t_0)$ by choosing $t_0 := 1/(4\alpha) \le 1/2$. In particular, $\psi(2t_0) \ge 0$. As a consequence,

$$\varphi(2t_0,x) \ge \bar\varphi_1 := \varphi(2t_0, r_{t_0}) = (3t_0)^{-\alpha} e^{-\mu r_0^2 2^{-1/2}/t_0} - t_0^{-\alpha} e^{-\mu r_0^2/t_0} > 0,$$

for any $|x| < r_{t_0} := r_0 2^{1/4}$ and then

$$g(2t_0,x) \ge \bar\varphi_1 e^{-2t_0 \|\mathrm{div}\mathbf{F}\|_{L^\infty}} \mathbf{1}_{B(x_0, r_0 2^{1/4})},$$

by the above weak maximum principle. Itarating the argument, we get the announced estimate with

$$t_1 := 2nt_0,\ n := \big(1 + \big(4\frac{\log r_1/r_0}{\log 2}\big]\big),\ \kappa_1 := e^{-2t_1\|\mathrm{div}\mathbf{F}\|_{L^\infty}} \Pi_{k=1}^n \bar\varphi_k$$

and

$$\bar\varphi_k := (3t_0)^{-\alpha} e^{-\mu\rho_k^2 2^{-1/2}/t_0} - t_0^{-\alpha} e^{-\mu\rho_k^2/t_0}, \quad \rho_k := r_0 2^{k/4}.$$

Step 4. Conclusion. From Step 2, we know that we may find $\tau_0, r_0, R, \lambda > 0$ and $x_0 \in B(0,R)$ such that

$$g(\tau_0,\cdot) \ge c_0\, \mathbf{1}_{B(x_0,r_0)}, \quad c_0 := \lambda \int_{B_R} g_0\, dx.$$

Using Step 3 with $r_1 := 2R$, we obtain

$$g(\tau_0 + t_1, \cdot) \ge \lambda\kappa_1\, \mathbf{1}_{B(0,R)} \int_{B_R} g_0\, dx,$$

which is nothing but the announced Harris condition. □

We recall the following abstract subheometric Harris-Meyn-Tweedie theorem.

Theorem 6.3 (subgeometric Harris-Meyn-Tweedie)**.** *Consider a semigroup S in $L^1(m_0)$ which is positive and mass conservative. Assume furthermore that the following two additional conditions hols: (1) the Lyapunov condition*

$$\mathcal{L}^* m \le -\varphi(m) + b,$$

for some weight function $m : \mathbb{R}^d \to [1,\infty)$ converging to infinity and some positive, concave and converging to infinity function $\varphi : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}_+$ and some constant $b > 0$; (2) the strict positivity (or irreducibility) condition

$$S_T f \ge \nu \int_{B_R} f, \quad \forall\, f \ge 0,$$

for any $R > 0$ and some $T > 0$ and $\nu \ge 0$, $\nu \not\equiv 0$. Then, there exists some constant $C > 0$ such that

$$\|S_t f_0\|_{L^1} \le \frac{C}{(\varphi \circ H_\varphi^{-1})(t)} \|f_0\|_{L^1(m)}, \tag{6.6}$$

for any $f_0 \in L^1(m)$, $M(f_0) = 0$, where H_φ is the function defined by

$$H_\varphi(u) := \int_1^u \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Theorem 6.3 is stated in [4, Theorem 1.2] and it is proved in [12, (3.5) in Theorem 3.2] (see also [12, Section 5.1]) by the mean of probabilistic tools. A simple semigroup proof is presented in [9]. A variant of [4, Theorem 1.2] is also presented in [18, Section 4]. Gathering the Lyapunov condition (6.1), the strict positivity property established in Lemma 6.2 and the subgeometric Harris-Meyn-Tweedie Theorem 6.3, we deduce the following decay estimate.

Corollary 6.4. *For any $f_0 \in L^1(m_0)$ such that $M(f_0) = 0$, the associated solution $f(t,\cdot) = S_{\mathcal{L}}(t) f_0$ to the Fokker-Planck equation (1.1) satisfies*

$$\|f(t,.)\|_{L^1} \lesssim \Theta_{m_0}(t)\, \|f_0\|_{L^1(m_0)}, \tag{6.7}$$

which is nothing but the conclusion of Theorem 1.2 in $L^1(m_0)$.

Proof of Corollary 6.4. We write (1.16) (or (6.1)) as

$$\mathcal{L}^* m_0 \le -\varphi(m_0) + M, \tag{6.8}$$

with

$$\varphi(y) := C\, \frac{y}{(\log y)^\alpha}, \quad \alpha := 2\frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

We easily compute

$$H_\varphi(u) = C \int_1^u (\log y)^\alpha \frac{dy}{y} = C \int_1^{\log u} z^\alpha dz = C(\log u)^{\alpha+1},$$

so that $H_\varphi^{-1}(v) = \exp(c v^{\frac{1}{\alpha+1}})$. From (6.6) and $\varphi(y) \gtrsim y$, we conclude to (6.7) with $\Theta_{m_0}(t) := K \exp(-\lambda t^{\frac{\gamma}{2-\gamma}})$, $K \ge 1$, $\lambda > 0$. □

6.3. **Krein-Rutman type approach.** We finally present a third approach which is mainly an adaptation of an argument used in the proof of [27, Theorem 2.1]. The key argument is an accurate estimate on the confinement process of the semigroup and it does not deeply use the positivity estimates. The drawback comes from the fact that the rate of decay in the small space X_0 is worse than in the small space $L^2(G^{-1/2})$ (see section 4.2 for the notations).

We consider the sequence of spaces $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, as defined in (2.22), and $X_\infty := L^2(m_0^{1/2})$. We observe that $X_k \subset X_{k+1} \subset X_\infty$ for any $k \in \mathbb{N}$. For $0 \le \eta \le 1$ we also denote $X_{k,\eta}$ the space defined by Hilbertian interpolation between $X_{k,0} = X_k$ and $X_{k,1} := \{f \in X_k;\ \mathcal{L}f \in X_k\}$, that is, with the notations of L. Tartar [31, Chapter 22, page 109],

$$X_{k,\eta} := (X_k, X_{k,1})_{\eta,2}\,.$$

Lemma 6.5. *Let us fix an integer $j > 2(1-\gamma)/\gamma > 0$. There exists a constant C such that for any $\ell_1, \ell_2, k \in \mathbb{N}$, $k \ge j$, $\ell_i \ge 1$, we have for all $z \in \mathbb{C}$ with $\Re\mathrm{e}\, z > 0$*

$$\|R_{\mathcal{B}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} \le \mathcal{C}_k := C\, k^j, \tag{6.9}$$

$$\|\mathcal{A} R_{\mathcal{B}}(z)^{\ell_1} \mathcal{A} R_{\mathcal{B}}(z)^{\ell_2}\|_{X_0\to X_0} \le (\ell_1!\ell_2!)^j C^{\ell_1+\ell_2} / \langle y\rangle^{1/2}, \tag{6.10}$$

where $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Proof. We use the representation formula

$$R_{\mathcal{B}}(z) = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}\, S_{\mathcal{B}}(t)\, dt$$

together with the estimates established in Lemmas 2.1, 2.4 and 2.5 in the following way. In order to simplify the presentation, we only consider in the sequel the boundary case $\Re e\, z = x = 0$.

On the one hand, we define, as in Lemma 2.5, $\alpha^* := 1/2(1-\gamma)$, so that $\alpha^*\gamma j > 1$, and we observe that the LHS term of (2.23) belongs to $L^1(\mathbb{R}_+)$. Therefore, with the notations of Lemma 2.5, we have for any $y \in \mathbb{R}$

$$\|R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_{k-j}\to X_k} \le C_1 + \Big(\frac{k}{\kappa}\Big)^j \frac{1}{\alpha\gamma j - 1} \le C\, k^j.$$

On the other hand, from (2.26), we have

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \|R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_\infty\to H^1} \le \int_0^\infty \|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{X_\infty\to H^1}\, dt \le C. \tag{6.11}$$

The latter estimate together with (6.9) yield that, for any $y \in \mathbb{R}$ and $\ell_2 \in \mathbb{N}^*$, we have

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)^{\ell_2}\|_{X_0\to X_{0,1/2}} \le \\ &\quad \le \|\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_\infty\to X_{0,1/2}} \|R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_{(\ell_2-2)j}\to X_{(\ell_2-1)j}} \cdots \|R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_0\to X_j} \\ &\quad \le (\ell_2!)^j C^{\ell_2}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

On the other hand, from the identity

$$R_{\mathcal{B}}(z) = z^{-1}(\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z)\mathcal{B} - I)$$

and an interpolation argument, we deduce that

$$\|R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)\|_{X_{0,1/2}\to X_j} \le C/\langle y\rangle^{1/2},$$

and therefore for any $\ell_1 \in \mathbb{N}$

$$\|\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}(\mathrm{i}y)^{\ell_1}\|_{X_{0,1/2}\to X_0} \le (\ell_1!)^j C^{\ell_1}/\langle y\rangle^{1/2}.$$

It is now clear that the above estimate together with (6.12) completes the proof of estimate (6.10). □

Lemma 6.6. *Let us fix again an integer $j > 2(1-\gamma)/\gamma > 0$. There exists a constant C such that for any $\ell \in \mathbb{N}^*$, denoting by Π the projection on G, that is $\Pi(f) := M(f)G$, we have*

$$\sup_{\Re e\, z>0} \|(I-\Pi)R_{\mathcal{L}}(z)^\ell\|_{X_0\to X_\infty} \le C^\ell\, (\ell!)^j. \tag{6.13}$$

Proof. Since the operator $\mathcal{L} - aI$ is dissipative for any $a > 0$, we clearly have

$$C_{\mathcal{L},a} := \sup_{\Re e\, z\ge a} \|(I-\Pi)R_{\mathcal{L}}(z)\|_{X_0\to X_\infty} \lesssim \sup_{\Re e\, z\ge a} \|R_{\mathcal{L}}(z)\|_{X_0\to X_\infty} < \infty,$$

and thus we have only to prove that the constant $C_{\mathcal{L},a}$ does not blow up when $a \to 0^+$.

Step 1. We claim that for any fixed M, there holds

$$\sup_{z\in\Omega_M} \|(I-\Pi)R_{\mathcal{L}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} \le C_M\, \mathcal{C}_k, \tag{6.14}$$

where we define $\Omega_M := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C},\ 0 < x \le 1,\ |y| \le M\}$ and we recall that $\mathcal{C}_k$ is defined in (6.9). We argue by contradiction, assuming that there exists $y \in [-M, M]$ and a sequence (z_n) in Ω_M such that

$$z_n \to z := \mathrm{i}y \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_n^{-1}\|R_{\mathcal{L}_1}(z_n)\|_{\mathscr{B}(X_{n-j},X_n)} \to \infty,$$

with $\mathcal{L}_1 := \Pi^\perp \mathcal{L}$, where for brevity we note $\Pi^\perp := I - \Pi$, despite the fact that Π is not an orthogonal projection. The last family of blowing up estimates means that there exist sequences $(\widetilde{f}_n)_n$ and $(\widetilde{g}_n)_n$ such that

$$\mathcal{C}_n^{-1} \|\widetilde{f}_n\|_{X_n} \to \infty, \quad \|\widetilde{g}_n\|_{X_{n-j}} = 1, \quad \widetilde{f}_n = R_{\mathcal{L}_1}(z_n)\, \widetilde{g}_n,$$

or, equivalently, that there exist $(f_n)_n$ in X_n and $(g_n)_n$ in X_{n-j} satisfying

$$\|f_n\|_{X_n} = 1, \quad \mathcal{C}_n \|g_n\|_{X_{n-j}} \to 0, \quad g_n = (\mathcal{L}_1 - z_n)\, f_n.$$

This in turn would imply that

$$R_{\mathcal{B}}(z_n)\mathcal{A}\Pi^\perp f_n + \Pi^\perp f_n - z_n R_{\mathcal{B}}(z_n)\Pi f_n = R_{\mathcal{B}}(z_n) g_n, \tag{6.15}$$

with

$$\|R_{\mathcal{B}}(z_n) g_n\|_{X_n} \le \mathcal{C}_n \|g_n\|_{X_{n-j}} \to 0,$$

by using (6.9). Since $(f_n)_n$ is bounded in $X_n \subset X_\infty = L^2(\mathrm{e}^{\kappa \langle x \rangle^\gamma})$, by weak compactness of this sequence in X_∞, we find $f \in X_\infty$ and a subsequence denoted again by $(f_n)_n$ such that $f_n \rightharpoonup f$ weakly in X_∞, and then $\mathcal{A}\Pi^\perp f_n \rightharpoonup \mathcal{A}\Pi^\perp$ weakly in X_0. Together with (6.11), we deduce that

$$R_{\mathcal{B}}(z_n)\mathcal{A}\Pi^\perp f_n \to R_{\mathcal{B}}(z)\mathcal{A}\Pi^\perp f \quad \text{ strongly in } \ X_0. \tag{6.16}$$

Now, passing (weakly) to the limit in (6.15), we have

$$R_{\mathcal{B}}(z)\mathcal{A}\Pi^\perp f + \Pi^\perp f - z R_{\mathcal{B}}(z)\Pi f = 0.$$

We claim that $f \neq 0$. If not, we get from (6.16) that

$$R_{\mathcal{B}}(z_n)\mathcal{A}\Pi^\perp f_n \to 0 \qquad \text{and} \qquad \Pi f_n \to 0 \quad \text{strongly in } \ X_0$$

and then together with (6.15) that $\|\Pi^\perp f_n\|_{X_n} \to 0$. Thus we would have

$$1 = \|f_n\|_{X_n} \le \|\Pi f_n\|_{X_0} + \|\Pi^\perp f_n\|_{X_n} \to 0,$$

which is a contradiction. As a consequence, we have exhibited an $f \in X_\infty \backslash \{0\}$ such that $(\mathcal{L}_1 - zI)f = 0$. This means that f is an eigenvector for $\mathcal{L}_1 = \Pi^\perp \mathcal{L}$ associated to an eigenvalue $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$; however this is in contradiction with the fact that $\Sigma_P(\Pi^\perp \mathcal{L}) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$. Thus the proof of (6.14) is complete.

Step 2. In this step we complete the proof of the Lemma. We begin by recalling that $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ and then we write

$$R_{\mathcal{L}}(z) = R_{\mathcal{B}}(z) - R_{\mathcal{L}}(z)\mathcal{A} R_{\mathcal{B}}(z)$$

and

$$R_{\mathcal{L}}(z)(1 - \mathcal{V}(z)) = R_{\mathcal{B}}(z) - R_{\mathcal{B}}(z)\, \mathcal{A}\, R_{\mathcal{B}}(z), \qquad \text{where } \ \mathcal{V}(z) := \left(\mathcal{A}\, R_{\mathcal{B}}(z)\right)^2.$$

Let $\widetilde{X}_k$ be defined as X_k but with a coefficient $\widetilde{\kappa} > \kappa$ so that $\widetilde{X}_k \subset \widetilde{X}_\infty \subset X_0 \subset X_k$ with embedding constants uniformly bounded with respect to k. First we may fix M large enough such that $\|\mathcal{V}(z)\|_{\mathscr{B}(X_0)} \le 1/2$ and $\|\mathcal{V}(z)\|_{\mathscr{B}(\widetilde{X}_0)} \le 1/2$, for any $z = x + \mathrm{i}y$, with $|y| \ge M$: this is indeed possible thanks to (6.10) by choosing $\ell_1 = \ell_2 = 1$. Next, we write the expansion

$$R_{\mathcal{L}}(z) = R_{\mathcal{B}}(z) - \big(R_{\mathcal{B}}(z) - R_{\mathcal{B}}(z)\, \mathcal{A}\, R_{\mathcal{B}}(z)\big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}(z)^j\Big)\mathcal{A} R_{\mathcal{B}}(z),$$

where the series converges normally in $\mathscr{B}(X_0)$ and in $\mathscr{B}(\widetilde{X}_0)$. More precisely, for $z = x + \mathrm{i}y$ and $|y| \geq M$ we have

$$\begin{aligned}\|R_{\mathcal{L}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} &\leq \|R_{\mathcal{B}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} \\ &\quad + \|(R_{\mathcal{B}} - R_{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}\,R_{\mathcal{B}})(z)\|_{\widetilde{X}_0\to X_0}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\|\mathcal{V}(z)\|^j_{\mathscr{B}(\widetilde{X}_0)}\Big)\,\|\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}\|_{X_{k-j}\to\widetilde{X}_0}, \\ &\leq \|R_{\mathcal{B}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} + 2\,\|(R_{\mathcal{B}} - R_{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}\,R_{\mathcal{B}})(z)\|_{\widetilde{X}_0\to X_0}\,\|\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}\|_{X_{k-j}\to\widetilde{X}_0}. \qquad (6.17)\end{aligned}$$

The right hand side of the above inequality being bounded by a constant $C\,\mathcal{C}_k$, we conclude that

$$\sup_{|\Re\mathrm{e}\, z|\geq M}\|(I-\Pi)R_{\mathcal{L}}(z)\|_{X_{k-j}\to X_k} \leq C\,\mathcal{C}_k.$$

Together with (6.14), we conclude the proof of (6.13) in the case when $\ell = 1$. For the general case $\ell \geq 1$, we argue similarly as we did in the proof of (6.10). □

Theorem 6.7. *Let $\sigma^*_{\mathcal{L}} := 1/\lfloor 2/\gamma\rfloor$, where $\lfloor s\rfloor$ stands for the integer part of the real number s, and let $m_0(x) := \exp(\kappa\langle x\rangle^\gamma)$ and $0 < \kappa\gamma < 1/8$. Then for any $\sigma \in (0, \sigma^*_{\mathcal{L}}]$ and $\theta < 1$ there exist $\lambda > 0$ such that for all $t > 0$*

$$\|f(t) - M(f_0)\,G\|_{L^2(m_0^\theta)} \lesssim \exp(-\lambda t^\sigma)\,\|f_0 - M(f_0)\,G\|_{L^2(m_0)}.$$

Proof. We write the representation formulas (taken from [27])

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{L}}(t)f &= \Pi f + \sum_{\ell=0}^{5}(I-\Pi)S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*\ell)}(t)f + \mathcal{T}(t)f, \qquad (6.18)\\ \text{where } \mathcal{T}(t) &:= \lim_{M\to\infty}\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{a-\mathrm{i}M}^{a+\mathrm{i}M}\mathrm{e}^{zt}\,(I-\Pi)\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(z)\,(\mathcal{A}\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z))^6\,dz,\end{aligned}$$

for any $f \in D(\mathcal{L})$, $t \geq 0$ and $a > 0$.

Thanks to Lemma 2.4, we know that each term $\|(I-\Pi)S_{\mathcal{B}} * (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}})^{(*\ell)}(t)f\|$ in the above expression of $S_{\mathcal{L}}(t)$ is bounded by $\mathcal{O}(\Theta_{m_0}(t))$. In order to conclude, we have to estimate the last term.

We introduce the shorthands $\Phi_1 := R_{\mathcal{L}}(I-\Pi)$, $\Phi_\ell = \mathcal{A}R_{\mathcal{B}}$, for $2 \leq \ell \leq 7$, and we perform n integration by part in the formula giving $\mathcal{T}(t)$ to get

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{1}{t^n}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{zt}\,\frac{d^n}{dz^n}\Big(\prod_{i=1}^{7}\Phi_i(z)\Big)\,dz. \qquad (6.19)$$

Using the fact that all the functions appearing in the integral are bounded on the imaginary axis, together with the resolvent identity

$$R^n_\Lambda(z) := \frac{d^n}{dz^n}R_\Lambda(z) = n!R_\Lambda(z)^n,$$

we find in $\mathscr{B}(X_0)$, thanks to Leibniz formula and for any $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ with $0 \le y \le 1$,

$$\begin{aligned}\|\frac{d^n}{dz^n}\big(\prod_{\ell=1}^{7}\Phi_\ell(z)\big)\| &\le 7^n \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|=n}\|\prod_{\ell=1}^{7}\frac{d^{\alpha_\ell}}{dz^{\alpha_\ell}}\Phi_\ell(z)\| \\ &\le 7^n \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^7,|\alpha|=n}\prod_{i=1}^{7}\|\alpha_1!(I-\Pi)\,R_{\mathcal{L}}^{1+\alpha_1}\alpha_2!\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}^{1+\alpha_2}\dots\alpha_7!\mathcal{A}R_{\mathcal{B}}^{1+\alpha_7}(z)\| \\ &\le C^n\,(n!)^{1+j}\,\langle y\rangle^{-3/2}\,,\end{aligned}$$

where in the last step we have used Lemma 6.6 for some integer j which will be fixed later. Next, using the bound $n! \le (C\,n)^n$, we get

$$\|\mathcal{T}(t)\| \le C^n\,n^{(1+j)n}\,t^{-n} \qquad \forall\, t>0,\ \forall\, k\ge 0.$$

For any $t \ge t^*$, where t^* is large enough and depends on j, we choose $n \in \mathbb{N}$ such that

$$t \ge 2Cn^{1+j} \ge t/2,$$

and we obtain

$$\|\mathcal{T}(t)\| \le (Cn^{1+j}t^{-1})^n \le (1/2)^n \le (1/2)^{(t/4C)^{\frac{1}{j+1}}} \qquad \forall\, t>0.$$

As a consequence, with the choice $j := \lfloor [2(1-\gamma)/\gamma \rfloor + 1$, we have proved that for all $t \ge 0$ we have

$$\|\mathcal{T}(t)\| \le \exp(-\lambda\, t^{\frac{1}{1+j}}),$$

which clearly ends the proof. □

References

[1] Aoki, K., and Golse, F. On the speed of approach to equilibrium for a collisionless gas. *Kinet. Relat. Models 4*, 1 (2011), 87–107.

[2] Arendt, W., Grabosch, A., Greiner, G., Groh, U., Lotz, H. P., Moustakas, U., Nagel, R., Neubrander, F., and Schlotterbeck, U. *One-parameter semigroups of positive operators*, vol. 1184 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[3] Bakry, D., Barthe, F., Cattiaux, P., and Guillin, A. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case. *Electron. Commun. Probab. 13* (2008), 60–66.

[4] Bakry, D., Cattiaux, P., and Guillin, A. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes: Lyapunov versus Poincaré. *J. Funct. Anal. 254*, 3 (2008), 727–759.

[5] Bátkai, A., Engel, K.-J., Prüss, J., and Schnaubelt, R. Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachr. 279*, 13-14 (2006), 1425–1440.

[6] Batty, C. J. K., and Duyckaerts, T. Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces. *J. Evol. Equ. 8*, 4 (2008), 765–780.

[7] Caflisch, R. E. The Boltzmann equation with a soft potential. I. Linear, spatially-homogeneous. *Comm. Math. Phys. 74*, 1 (1980), 71–95.

[8] Caflisch, R. E. The Boltzmann equation with a soft potential. II. Nonlinear, spatially-periodic. *Comm. Math. Phys. 74*, 2 (1980), 97–109.

[9] Cañizo, J. A., and Mischler, S. A semigroup proof of Harris' theorem. In progress.

[10] Carrapatoso, K., and Mischler, S. Landau equation for very soft and Coulomb potentials near Maxwellian. *Ann. PDE 3*, 1 (2017), 1–65

[11] Cattiaux, P., Gozlan, N., Guillin, A., and Roberto, C. Functional inequalities for heavy tailed distributions and application to isoperimetry. *Electron. J. Probab. 15* (2010), no. 13, 346–385.

[12] Douc, R., Fort, G., and Guillin, A. Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes. *Stochastic Process. Appl. 119*, 3 (2009), 897–923.

[13] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear Operators. I. General Theory*. With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958.
[14] Eberle, A., Guillin, A., and Zimmze, R. Quantitative Harris type theorems for diffusions and McKean-Vlasov processes. *To appear in Transactions of the American Mathematical Society*.
[15] Escobedo, M., Mischler, S., and Rodriguez Ricard, M. On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22*, 1 (2005), 99–125.
[16] Gualdani, M. P., Mischler, S., and Mouhot, C. Factorization of non-symmetric operators and exponential H-Theorem. *Mém. Soc. Math. Fr. 153*, (2017), 1-137.
[17] Guo, Y. The Landau equation in a periodic box. *Comm. Math. Phys. 231* (2002), 391–434.
[18] Hairer, M. Convergence of Markov Processes, (2016), available on http://www.hairer.org/notes/Convergence.pdf
[19] Kavian, O. Remarks on the Kompaneets equation, a simplified model of the Fokker-Planck equation. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XIV (Paris, 1997/1998)*, vol. 31 of *Stud. Math. Appl.* North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 469–487.
[20] Kavian, O., Kerkyacharian, G., and Roynette, B. Quelques remarques sur l'ultracontractivité. *J. Funct. Anal. 111*, 1 (1993), 155–196.
[21] Lieb, E. H., and Loss, M. *Analysis*, second ed., vol. 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[22] Liggett, T. M. L_2 rates of convergence for attractive reversible nearest particle systems: the critical case. *Ann. Probab. 19*, 3 (1991), 935–959.
[23] Michel, P., Mischler, S., and Perthame, B. General relative entropy inequality: an illustration on growth models. *J. Math. Pures Appl. (9) 84*, 9 (2005), 1235–1260.
[24] Mischler, S. Semigroups in Banach spaces - factorization approach for spectral analysis and asymptotic estimates. In preparation.
[25] Mischler, S., and Mouhot, C. Exponential stability of slowly decaying solutions to the Kinetic-Fokker-Planck equation. *Arch. Ration. Mech. Anal. 221*, 2 (2016), 677–723.
[26] Mischler, S., Quiñinao, C., and Touboul, J. On a kinetic FitzHugh-Nagumo model of neuronal network. *Comm. Math. Phys. 342*, 3 (2016), 1001–1042.
[27] Mischler, S., and Scher, J. Spectral analysis of semigroups and growth-fragmentation equations. (*Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 33*, 3 (2016), 849–898.
[28] Mouhot, C. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Comm. Math. Phys. 261*, 3 (2006), 629–672.
[29] Ndao, M. Convergence to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a general force field. phD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin (2018).
[30] Röckner, M., and Wang, F.-Y. Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups. *J. Funct. Anal. 185*, 2 (2001), 564–603.
[31] Tartar, L. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, vol. 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Berlin; UMI, Bologna, 2007.
[32] Toscani, G., and Villani, C. On the trend to equilibrium for some dissipative systems with slowly increasing a priori bounds. *J. Statist. Phys. 98*, 5-6 (2000), 1279–1309.
[33] Voigt, J. A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups. *Monatsh. Math. 90*, 2 (1980), 153–161.

(Otared Kavian) Université Paris–Saclay; UVSQ & CNRS, UMR 8100; Laboratoire de Mathématiques de Versailles; 45 avenue des Etats Unis; 78035 Versailles cedex, France.
E-mail address: kavian@math.uvsq.fr

(Stéphane Mischler) Université Paris-Dauphine, Institut Universitaire de France (IUF), PSL Research University, CNRS, UMR [7534], CEREMADE, Place du Maréchal de Latre de Tassigny 75775 Paris Cedex 16, France.
E-mail address: mischler@ceremade.dauphine.fr

(Mamadou Ndao) Université Paris–Saclay; UVSQ & CNRS, UMR 8100; Laboratoire de Mathématiques de Versailles; 45 avenue des Etats Unis; 78035 Versailles cedex, France.
E-mail address: ndao75019@yahoo.fr

Bibliographie

[1] W. Arendt : *Kato's inequality : A Characterisation of Generator of Positive Semigroups*, Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical sciences 1984, Vol 84A, $n°2$ pp 155-174

[2] W. Arendt, R. Nagel *One Parameter Semigroup of Positive Operator*, Lecture notes in Mathematics 1184

[3] C. J. K. Batty & E. B. Davies : *Positive Semigroups and Resolvants*, J. Operator Theory, Vol 10, 1983 pp 357-363

[4] D. Benedetto, E. Caglioti and M. Pulvienti : *A kinetic equation for granular media*, Mathematical Modeling and numerical Analysis, Vol 31, $n°5$, 1997 pp 615-641

[5] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo & M. Pulvirenti : *A Non Maxwellian Steady Distribution for One Dimensional Granular Media*, Journal of Statistical physics *vol* 91 $Nos.$ 5/6 1998.

[6] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle Appliquée*, Masson, Paris, 1983.

[7] J. A. Carrillo, R. J. McCann and C. Villani : *Kinetic Equilibrium Rates for Granular Media and Related Equations : Entropy Dissipation and Mass Transport Estimates*, Graduate text in mathematical 194, Springer.

[8] Th. Cazenave, A. Haraux : *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clalendon Press. Oxford 1998.

[9] E. B. Davies : *Heat Kernels and Spectral Theory* Cambridge Tracts in Mathematics # 92, Cambridge University Press (1989)

[10] E. B. Davies & B. Simon : *Ultracontractivity and Heat Kernel for Schrödinger Operator and Dirichlet Laplacians* Journal of Functional Analysis 59 335-395 (1984)

[11] E. B. Davies & B. Simon : *Ultracontractive Semigroups and Some Problems in Analysis*, J.A Barrosso editor, Aspect of mathematics and its applications, Elsevier Science Publishers B.V (1986)

[12] K. J. Engel, R. Nagel : *One Parameter Semigroups for linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematical Sciences 194.

[13] M. Escobedo, O. Kavian : *Variational Problems related to Self Similar Solutions of Heat equation.*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & applications, Vol 11 page 1103-1133, 1987.

[14] N. Garofalo & F. Lin : *Unique continuation for elliptic operators : a geometric-variational approach*, Comm. Pure & Appl. Math. **40**, (1987), pp. 346–366.

[15] D. Gilbarg and N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.

[16] L. Gross : *Logarithmic Sobolev Inequalities*, American Journal of Mathematics Vol 97 N○ 4 (Winter 1975) pp 1061-1083.

[17] M.P. Gualdani, S. Mischler and C. Mouhot : *Factorisation of non-symetric operators and exponential H-Theorem.* hal-00495786.

[18] O. Kavian : *Remarks on the Kompaneets equation, a simplified model of the Fokker-Planck equation*, in *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, vol. XIV (Paris, 1997/1998)*, vol. 31 of *Stud. Math. Appl.* North-Holland, Amsterdam, pp. 469–487 (2002).

[19] A. N. Kolmogorov : *On analytical methods in theory of probability*, select works of A. N. Kolmogorv :Volume II, Probability theory and mathematical statistic pp 62-108, edited by A. N. Shirayev

[20] R.J. MacCann : *A convexity principle for interacting gases*, Adv. Math. **128** (1997), pp. 153–179.

[21] S. Mischler & C. Mouhot : *Stability, convergence to the steady state and elastic limit for the Boltzmann equation for diffusively excited granular media*, Discrete and Continuous . Dynamical Systems, **24**, 1 (2009), pp. 159–185.

[22] S. Mischler and J. Scher : *Spectral analysis of semigroups and growth-fragmentation equations* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **33** (2016), no. 3, pp. 849–898.

[23] C. Mouhot : *Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials*, Comm. Math. Phys. **261**, 3 (2006), pp. 629–672.

[24] R. Nagel and H. Uhlig : *An abstract Kato's inequality for generator of positive operators semigroup on Banach Lattices*, J. of operator theory, 1981, Vol 6, pp. 113-123.

[25] J.F. Nash : *Continuity of Solution of Parabolic and Elliptic Equations* American Journal of Mathematics, Vol. **80**, No.4. (1958), pp. 931-954.

[26] A. Pazy : *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied mathematical sciences 44, Springer 1983.

[27] M.H. Protter & H.F. Weinberger : *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer Verlag 1984.

[28] M. Reed & B. Simon : *Methods of Mathematical Physics : Functional Analysis*, Volume 1, Academic Press, 1980.

[29] F. Riesz & B.Sz. Nagy : *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, sixième édition, Gauthiers-Villars, Paris 1972.

[30] B. Simon, *An abstract Kato's inequality for generators of positive preserving semigroup*, Indiana Mathematics Journal vol. **26**, n° 6, 1997.

[31] L. Tartar : *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, vol. 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Berlin ; UMI, Bologna, 2007.

[32] J. Voigt : *A Perturbation Theorem for the Essential Spectral Radius of Strongly Continuous Semigroups* Monatshefte für Mathematik n° **90**, pp. 153–161, 1980.

[33] K. Yosida : *Functional Analysis*, vol. 123 of *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin–New York, 1974.