Autour du programme de Calabi, méthodes de recollement

Caroline Vernier

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N°601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par
Caroline VERNIER

« Autour du programme de Calabi, méthodes de recollement »

Thèse présentée et soutenue à UNIVERSITÉ DE NANTES , le 24 octobre 2018
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs avant soutenance :

M. Claudio Arezzo, Professeur, International Center for Theoretical Physics
M. George Marinescu, Professeur, Universität zu Köln

Composition du jury :

Examinateurs : M. Vestislav Apostolov, Professeur, Université du Québec à Montréal
M. Olivier Biquard, Professeur, Ecole Normale Supérieure de Paris
M. Philippe Eyssidieux, Professeur, Université Grenoble Alpes
M. Paul Gauduchon, Directeur de recherche émérite, CNRS

Dir. de thèse : M. Yann Rollin, Professeur, Université de Nantes
Co-dir. de thèse : M. Gilles Carron, Professeur, Université de Nantes

Invité(s)

M. Julien Keller, Maître de conférences HDR, Aix-Marseille Université

Table des matières

Remerciements

Il semble naturel de remercier en premier lieu ceux sans qui cette thèse n'aurait jamais été écrite : mes encadrants Yann et Gilles. Merci de m'avoir proposé ce sujet passionnant, qui touche à de nombreux domaines et fut pour moi l'occasion d'innombrables découvertes mathématiques. Merci pour toutes ces discussions et explications, toujours éclairantes et toujours enrichissantes. Merci pour votre patience infinie et vos conseils, et de m'avoir guidée tout au long de ce parcours ; merci pour les nombreuses opportunités que vous m'avez proposées et qui m'ont énormément fait grandir, aussi bien sur le plan scientifique que personnel. Travailler sous une direction si bienveillante, venant de deux personnes pour qui j'ai une telle estime, a fait de mon expérience de thèse un réel plaisir.

Ensuite, je souhaite remercier mes rapporteurs Claudio Arezzo et George Marinescu, pour avoir pris le temps de relire ma thèse et de m'adresser des commentaires éclairants, proposant des ouvertures qu'il me tarde d'explorer.

Merci à Vestislav Apostolov, Olivier Biquard, Philippe Eyssidieux, Paul Gauduchon et Julien Keller, d'avoir accepté de faire partie à mon jury et de s'être intéressés à mon travail. Nous nous sommes souvent croisés au cours de conférences : merci pour les discussions enrichissantes que nous avons eues à ces occasions. Je remercie en particulier Julien, qui a accepté de suivre mon travail de thèse en tant que membre de mon comité de suivi, et dont les encouragements et conseils m'ont été très précieux.

Ma thèse ne se serait certainement pas passée de manière si fluide sans le travail remarquable de Stéphanie, Brigitte, Annick, Katrin et Ana Paula. Je les remercie infiniment pour leur infinie patience et efficacité, que ce soit pour corriger mes erreurs lors de mon année en tant que responsable du séminaire des doctorants ou pour gérer les situations dantesques dans lesquelles m'ont plongée la préparation de mon stage au Canada ! Merci aussi à Claude, gardien de la connaissance livresque à Nantes, pour son accueil toujours chaleureux.

Un merci spécial va à Bertrand de la Cafèt' : pendant 9 ans, il m'a fourni ces trois carburants indispensables de l'apprenti matheux que sont la caféine, le sucre et la bonne humeur.

Cela fait en effet déjà 9 ans que j'ai franchi le grand portail vert pour la première fois, et la liste des personnes qui ont contribué à faire grandir mon amour des mathématiques et à me faire avancer dans cette voie se confond pratiquement avec la liste des membres du laboratoire.

Je remercie particulièrement Jean-Marc Patin, dont la passion communicative me fit préférer les maths à la physique, et Eric Paturel qui m'a proposé un stage en L3, l'occasion de faire des maths différemment et d'élargir mes horizons ; ainsi que tous les membres du Club de maths, avec qui ce fut une joie de sacrifier mes pauses midi du mercredi pour réfléchir à la conjecture de Syracuse ou à la façon de découper une orange pour en obtenir deux. Merci à François Laudenbach, pour le passionnant sujet de TER qui m'a mise sur la voie de la géométrie, et toutes les discussions mathématiques qui ont suivies, et qui se sont poursuivies tout au long de mon parcours.

Merci à Vestislav Apostolov ainsi qu'aux membres du CIRGET pour leur accueil à Montreal : je n'aurais pu rêver une meilleure ambiance de travail et cette expérience a été des plus enrichissantes pour moi. Merci également à Marlene De Souza et Alexandra Haedrich pour toute leur aide avant et pendant mon séjour. Merci à mes cobureaux locaux : Lars, Clément et Alice ; nous n'avons pas testé autant de microbrasseries que prévu, mais ce n'est que partie remise ! Merci aussi à ma proprio Aneesha, sans les efforts et la confiance de laquelle j'aurais été à la rue à mon arrivée.

Le LMJL n'aurait pas une ambiance de travail (! ?) si unique sans son équipe de doctorants !

Je remercie mes cobureaux, sans lesquels j'aurais certainement fini ma thèse en un an. D'abord, Victoria, membre émérite du club de maths et amatrice de thé, toujours si calme et patiente. Olivier qui a su apporter une brise picarde au bureau, brise assez fraîche pour rafraîchir une bonne bière ! Merci à toi d'avoir sacrifié ta cuisine à la bonne cause d'un barbecue sur la pelouse, et appelle moi quand tu veux pour dessiner des petits carrés la prochaine fois que tu veux sommer des entiers. Merci à Caro, pour ton humour, ta bonne humeur, ton énergie (c'est le step ça), et pour avoir organisé des rencontres doctorales en or ! Germain, tu as su t'intégrer parfaitement dans ce bureau saturé de Caro, et je t'en félicite :) Vivement la prochaine occasion de papoter maths ou autres !

Merci aux anciens, ceux qui étaient déjà des vétérans quand je suis arrivée : Céline, pour ses invitations à d'inoubliables soirées fajitas-jeux de société, Gilberto, qui a apporté un peu d'Italie aux six mois de neige canadiens, Virgile pour son hospitalité lors de raclettes particulièrement surpeuplées, Antoine, qui aime les canards et nous a guidés dans Bruxelles, l'immortel Thomas G., qui m'a tellement fait apprécier la Chartreuse que me voilà ATER à Grenoble ! Merci à Ilaria, ma "grande sœur" de thèse, pour tes conseils et pour m'avoir accueillie à San Francisco.

Un merci spécial parmi les merci spéciaux va à Christophe et Moody. Votre amitié m'est plus précieuse que je ne peux l'écrire dans ces pages traditionnellement dédiées aux *private jokes*. Aussi, je ne vais pas m'y risquer : merci à ces deux sudistes devenus nordiques avec qui je pourrais discuter trois jours de suite et me dire que l'aprèm est passée vite. Vivement la prochaine fois !

Étant caractérisée par mon originalité, je vais procéder par ordre chronologique ! Merci aux trois mousquetaires : Pierre, mon collègue géomètre au rire communicatif, Valentin qui ne m'a pas abattue d'un coup de pistolet en plastique (et dans ce bureau, c'était pas gagné) et Damien avec qui je partage les métriques Ricci-plates et la poutine ! Florian, merci d'avoir été là pour nous rappeler que nous étions une bande de débiles, et c'est toi le blond.

Merci à Guillaume pour tous ces escape games passés et surtout, j'espère, à venir ! Nous n'avons pas encore testé ceux de Grenoble :) Merci aussi pour tes exposés rendant limpides les concepts les plus abstraits. Noémie, j'espère que tu profites à fond de ton postdoc à Shanghai, après avoir partagé mes aventures à Montreal ! Johann, transfuge angevin, merci pour ton accueil au bord de la Maine, et j'espère te rendre la pareille autour d'une pinte dans les montagnes grenobloises.

Un merci collectif s'impose au bureau-d'à-côté, refuge des accès de flemme et haut lieu de débats et de discussions, occasionnellement sensées.

Thomas B., tu dois en avoir assez qu'on te parle légumes et manifestations, aussi je vais plutôt louer l'héroïsme avec lequel tu as percé les mystères des algèbres de Leibniz malgré toutes les fois où j'ai confondu ton bureau avec la salle de pause. Victor VdR, faut qu'on retourne au Hellfest, on ne va pas prendre ça quelqueplus ! (Fais gaffe à Shia LaBeouf). Thomas W., merci pour toutes les soirées jeux, il faut remettre ça ! Continue à parler, que personne n'explose. Côme, ta présence, tel un diamant, est un plaisir d'autant plus précieux qu'il est rare. Je considérerais donc comme un grand honneur ton éventuelle présence à mon pot. Matthieu, quel ne fut mon soulagement de voir que tu n'avais pas été bouffé par des lombrics ou arrêté par la police secrète en mon absence ! Ta passion de la géométrie m'aurait manqué.

Hala, ta gentillesse n'est égalée que par le goût de tes gâteaux, qui ne connaissent aucune transition de phase : ils sont tous bons ! Radek, merci pour ton humour et pour les bières tchèques ; je compte bien venir vérifier si elles ont le même goût sur place. Vytaute, merci pour ton sourire lumineux et pour ton active participation à notre tournée des crêperies !

Hélène, merci pour cette mémorable après-midi jeux, qui permit de se remettre de la formidable formation à la création de sites web... Solène, j'admire la rapidité avec laquelle tu as maîtrisé les arcanes de la taroinche, qui me restent à ce jour opaque ; merci d'avoir un jour proposé un autre jeu ! Zeinab, merci pour ton humour et ton sourire :) Maha, ma désertion du RU, puis du labo, m'a privée de l'occasion de te connaître mieux. A rattraper quand je repasserai sur Nantes !

Plus vétérans que les vétérans, il y a les ATER et postdoc ! Guillem, sans toi je ne connaîtrais ps le concept de soirée kiwi et ma vie en serait amoindrie. Claire, merci pour ton franc-parler aussi rafraîchissant qu'un pique-nique au bord de l'Erdre ! Zoé, personne ne danse comme toi sur RATM. Merci aussi pour un pot de thèse à Bordeaux qui nous a vu battre des records d'endurance. Simon, c'est pas tout le monde qui peut se vanter d'avoir travaillé dans le même labo qu'une star de la musique, merci pour ça. Niccolo, j'espère qu'on aura d'autres occasions de faire des soirée ! (mais pitié, pas de café dans ma pomme de douche). Nicolas, j'espère que ton humour est toujours aussi atomique que ton poste. Rhiannon, merci encore pour le chocolat, à charge de revanche !

Merci à tous ceux qui donnent aux confs un relief extramathématique : Louis-Clément, Sébastien, Thibaut, Ele, Carl, Hugues, Zak, Axel, Louis... et j'en oublie (désolée ! si c'est le cas, je vous en dois une).

Les études c'est long, mais ça passe plus vite quand on peut jouer au Président tous les midis (sauf le mercredi). Jordan, ou devrais-je dire GTB, merci pour tout ce qu'on a partagé, des sandwich kebab de l'Imprévu aux discussions jusqu'à 3h du mat'. Quentin, j'espère que tu seras à ma soutenance, sinon je me casse. Jérémie, merci d'être revenu des tréfonds de Lyon ; désolée, ma thèse est 100% SFW. Benjamin, merci pour ta pédagogie au Président ! Al, déjà, tac-tac, et ensuite, merci pour ton hospitalité lors des soirées films pizza.

Barbara, muchas gracias para todos esos años de amistad, y todas las discusiones sobre peliculas y mucho más.

Merci à mes parents pour leur soutien indéfectible dans tous les projets que j'ai entrepris, même les plus tordus (une thèse en maths, on a pas idée !) Ma gratitude prend plus de place qu'un petit paragraphe au terme d'une longue suite de noms qui vous sont sûrement familiers, mais je pense que vous le savez. Je n'aurais jamais pu aller si loin sans l'infaillible certitude que vous êtes avec moi.

Merci à Camille qui écrit les meilleures chansons et Emma qui est la mieux sapée ! Que ferais-je sans mes deux p'tites sœurs :)

Merci à Mamou pour ses encouragements depuis toujours, et pour tous les gâteaux qu'on a fait ensemble !

Et enfin, bien sûr, Victor. Il y a déjà 50 mercis sur cette page (d'après SublimeText, que je te remercie d'ailleurs de m'avoir fait découvrir !), et il me faudrait donc un autre mot, plus fort, pour t'exprimer ma gratitude. En panne d'inspiration, je vais la jouer 1984 (qu'il faut que tu lises :p) doublemerciplus pour tout. Pour tout ton soutien d'abord, pour toutes les fois où ton calme et ton optimisme infaillibles ont eu raison de mes inquiétudes, pour toute la géométrie kählérienne que tu as consenti à ingurgiter ces trois dernières années, pour ton sourire. Pour tous les doubleplusbons moments passés ensemble, en voyage, en interminables discussions, et en silences concentrés pour dégommer efficacement des zombies (boom, headshot). Mais surtout, d'avance merci pour tous les moments encore meilleurs qui sont encore à venir : avoir une confiance inébranlable dans leur existence est ma plus grande joie.

Introduction

Le programme de Calabi. On cite généralement René Thom comme le premier à avoir posé, dans les années 50, le problème des métriques canoniques :

Peut-on munir toute variété compacte lisse d'une métrique privilégiée ?

Cette question est motivée par le célèbre théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann :

Théorème (Théorème d'uniformisation). *Soit* (Σ^2, J) *une surface de Riemann compacte. Alors il existe une métrique riemannienne de courbure de Gauss constante, compatible avec la structure complexe* J*. De plus, si on impose que l'aire' de* Σ *pour cette métrique soit 1, alors elle est unique.*

La situation est donc bien comprise dans le cas des surfaces de Riemann. Cependant, la généralisation aux dimensions supérieures est extrêmement délicate. On doit en premier lieu préciser qui sont les métriques privilégiées.

Dans [23], Calabi propose d'étudier, sur une variété de type Kähler (M, J), la fonctionnelle

$$\int_M s(\omega)^2 \, \frac{\omega^m}{m!}$$

pour des métriques kählériennes ω dans une classe de cohomologie fixée Ω ; cette dernière condition généralisant alors la condition d'aire du théorème d'uniformisation. Les points critiques de cette fonctionnelle, appelées *métriques extrémales*, sont alors les métriques canoniques candidates.

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante se ramène à demander que le gradient de la courbure scalaire soit un champ de vecteurs holomorphe. En particulier, les métriques à courbure scalaire constante sont extrémales, et ces deux conditions coïncident dans le cas, raisonnablement général, où la variété complexe (M, J) n'admet pas de champs de vecteurs holomorphes non triviaux.

Les métriques de *Kähler-Einstein* sont donc un cas particulier de métriques extrémales. Dans ce cas, la classe de Kähler est un multiple de la première classe de Chern $c_1(M)$, qui doit donc être définie positive, nulle ou définie négative. Dans ces deux derniers cas, Calabi [22] a conjecturé, et Yau [125] a démontré l'existence et l'unicité d'une métrique de Kähler-Einstein (voir aussi Aubin [10] dans le cas défini négatif). Le cas où $c_1(M)$ est définie positive est plus difficile. Yau a conjecturé que l'existence de métriques de Kähler-Einstein dans ce cas est liée à une notion de 'stabilité' de (M, J) au sens de la théorie de l'invariant géométrique (GIT), la K-stabilité. Chen, Donaldson et Sun ont annoncé dans [30], puis démontré dans [31, 32, 33] que l'existence de métriques de Kähler-Einstein dans ce cas est effectivement équivalent à une notion de stabilité introduite par Tian [115].

Par ailleurs, Chen et Tian [34] ont démontré que deux métriques extrémales dans une même classe de Kähler sont reliées par un automorphisme de (M, J), nous donnant ainsi l'unicité.

Cependant, la question générale de l'existence est un problème ouvert, et difficile. Des obstructions, liées à la structure du groupe d'automorphismes de (M, J), ont été mises en évidence par Calabi [24], et Levine [79] a donné des exemples de variétés kählériennes compactes n'admettant aucune métrique extrémale. Dans la direction inspirée de la théorie de l'invariant géométrique mentionnée ci-dessus, et dans le cas où la classe de Kähler considérée est $\Omega = c_1(L)$ pour un fibré en droite $L \to M$ polarisant la variété, les travaux de Yau [126], Tian [115], Donaldson [41] et, plus récemment, Székelyhidi [108] ont mené à la formulation de la conjecture de Tian-Yau-Donaldson, qui relie le problème d'existence de métriques canoniques à une condition algébrique de stabilité, appelée *K-stabilité*.

Cette conjecture est liée à l'obervation, dûe à Fujiki [46] et Donaldson [38], que la courbure scalaire (normalisée) d'une variété kählérienne s'interprète comme l'application moment d'une certaine action hamiltonienne sur l'espace des structures complexes compatibles avec la forme de Kähler ω. Le théorème de Kempf-Ness, qui relie le lieu d'annulation de l'application moment (respectivement, les points critiques du carré de sa norme) aux notions d'orbites semi-stables (respectivement relativement stable) issues de la théorie de l'invariant géométrique.

Récemment, Chen et Cheng, dans [27, 28, 29] ont annoncé une percée le cas des métriques kählériennes à courbure scalaire constante (cscK). Plus précisément, après avoir obtenu des estimées *a priori* pour une métrique cscK dans [27], ils montrent, dans [28], que la non-existence de métriques cscK dans une classe de Kähler donnée Ω est équivalente à l'existence d'une géodésique présentant certaines propriétés de non-croissance de la K-énergie dans l'espace des potentiels de Kähler, démontrant ainsi une conjecture de Donaldson [39] dans le cas ou le groupe d'automorphismes holomorphes de la variété complexe sous-jacente est discret. Enfin, dans [29], le cas d'un groupe d'automorphismes général est traité ; dans ce cas, on obtient l'équivalence entre stabilité des géodésiques et existence d'une métrique cscK.

Malgré ces avancées dans la compréhension du problème, il n'y a pas, à ce jour, de résultat général portant sur l'existence de métriques extrémales, et un tel théorème ne semble pas à portée de main à l'heure actuelle. La construction d'exemples ou de classes d'exemples, permettant de tester la conjecture, a donc encore tout son intérêt dans ce contexte, et les *techniques de recollement* constituent un moyen d'obtenir de tels exemples.

De nombreux travaux ont été menés dans cette directation. Ainsi, Arezzo et Pacard [6, 7] ont obtenu des métriques à courbure scalaire constante sur des éclatements de variétés à courbure scalaire constante (ou d'orbifolds à singularités isolées) ; Arezzo, Lena et Mazzieri ont généralisé ces résultats à des résolutions plus générales de singularités orbifolds isolées. Biquard et Rollin [17] ont appliqué des méthodes de recollement aux lissages de surfaces à singularités canoniques, généralisant un premier résultat de Spotti [105] sur les lissages de singularités A_1 dans le cas Kähler-Einstein. Dans la même veine, Arezzo, Pacard et Singer [8], ainsi que Szekelyhidi [110, 111], ont obtenu ainsi des métriques extrémales.

Dans tous ces exemples, on obtient des métriques canoniques sur des variétés obtenues comme somme connexe généralisée de la variété (ou de l'orbifold) initial avec un modèle approprié de la résolution de la singuarité. La solution est alors obtenue par une approche perturbative et reste proche de la métrique orbifold d'origine à l'écart des singularités.

Un autre aspect, plus récent, du programme de Calabi, est son extension au cadre des variétés *presque-Kähler* ; c'est à dire des variétés symplectiques (M, ω) munies d'une structure presque complexe compatible qui n'est plus supposée intégrable. En dimension 4, les conditions d'intégrabilité de telles structures, en relation avec leurs tenseurs de courbure, ont été étudiées par Draghici [44, 43], Apostolov et Draghici [3] et Apostolov, Armstrong et Draghici [1].

L'espace $\mathcal{AC}_\omega$ des structures presques complexes compatibles avec la forme symplectique ω est un espace de Fréchet contractile, que l'on peut munir d'une structure de Kähler, et sur lequel le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens agit par tiré en arrière. L'observation de Fujiki et Donaldson dans le cas Kähler s'étend à ce cadre, en remplaçant la courbure scalaire par la courbure scalaire *hermitienne*, c'est à dire la trace de la courbure de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique.

Ainsi, le problème des métriques canoniques dans ce cadre mène à l'étude de la fonctionnelle

$$J \in \mathcal{AC}_\omega \mapsto \int_M (s^\nabla(J))^2 \, \frac{\omega^m}{m!},$$

qui coïncide avec la fonctionnelle de Calabi dans le cadre Kähler. Dans cette direction, Lejmi [77] a généralisé nombre de constructions liées à l'existence des métriques canoniques, teles que l'invariant de Futaki ou la notion de potentiels de Kähler.

Par ailleurs, Weinkove [121], puis Chu, Tosatti et Weinkove [35] se sont intéressés à l'équation de Calabi-Yau sur des variétés presque-Kähler de dimension 4.

Enoncé des résultats. On se propose ici de démontrer un théorème de recollement dans le cadre presque-Kähler. Plus précisément, on se donne un orbifold compact kählérien (M^4, ω_M, J_M), à singularités isolées $p_1, \dots, p_\ell$ de type A_1 ; autrement dit, M est munie d'un atlas holomorphe qui envoie un voisinage de chaque singularité dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

De telles surfaces orbifold, et plus généralement des surfaces complexes présentant des singularités canoniques, apparaissent communément, dans des constructions de quotients globaux aussi bien que dans le contexte des 'plongements' pluricanoniques de Kodaira des surfaces de type général. En effet, ces plongements sont obtenus en contractant des diviseurs d'auto-intersection -2 dans uen surface de type général, faisant apparaître des singularités canoniques.

On se donne d'autre part une variété asymptotiquement localement euclidienne (ALE) (X, J_X, ω_X), kählérienne, difféomorphe à T^*S^2 et de groupe à l'infini $\mathbb{Z}_2$, munie d'une métrique Ricci-plate. Par une construction de somme connexe généralisée, similaire à celle introduite par Arezzo et Pacard [6], on recolle un voisinage de chaque singularité de l'orbifold M avec un compact de X, de façon à obtenir une famille de variétés lisses M_ε indexées par un paramètre $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Les M_ε sont difféomorphes à la résolution minimale des singularités de M.

La construction sera effectuée de sorte que la famille M_ε constitue une famille de *lissages symplectiques* de l'orbifold M. Autrement dit, chaque M_ε sera munie d'une forme symplectique ω_ε qui converge, lorsque ε tend vers 0, vers ω_M, sur tout compact de $M \setminus \{p_1, \dots, p_\ell\}$. D'autre part, $\varepsilon^{-2}\omega_\varepsilon$ converge sur tout compact du modèle ALE X vers ω_X lorsque ε tend vers 0.

On donnera un sens précis à cette construction, en particulier à la convergence sur tout compact, au chapitre 3.

De plus, on dispose d'une injection canonique

$$H_c^2(M \setminus \{p_1, \dots, p_\ell\}) \hookrightarrow H^2(M_\varepsilon, \mathbb{R}) \tag{0.0.1}$$

envoyant $[\omega_M]$ sur $[\omega_\varepsilon]$. En ce sens, les classes de cohomologie $[\omega_\varepsilon]$ coïncident.

Dans ce contexte, on obtient

Théorème. *Supposons que (M, J) n'admette pas de champs de vecteurs holomorphes non-triviaux qui s'annulent sur M, et que (M, ω_M, J_M) est kählérien à courbure scalaire constante. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on munit chaque variété symplectique $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ d'une structure presque kählérienne compatible $(J_\varepsilon, g_\varepsilon)$, à courbure scalaire hermitienne constante, de sorte que*

— *La suite (J_ε) converge vers J_M sur tout compact de $M \setminus \{p_1, \dots, p_\ell\}$, lorsque ε tend vers 0, en norme de Hölder $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.*

— *Le tiré en arrière de J_ε sur le modèle ALE converge vers J_X sur tout compact de X, lorsque ε tend vers 0, en norme de Hölder $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.*

Remarque. Dans [17], on retrouve ce résultat dans le cas où la structure complexe est intégrable.

Cependant, les méthodes mises en jeu pour montrer le théorème ci-dessus sont nouvelles. Comme on le verra au chapite 2, dans les méthodes de recollement habituelles, on déforme une solution approchée en une métrique canonique par l'ajout d'une fonction de potentiel, ce qui, au vu du lemme du $\partial\bar{\partial}$, est très naturel. Cependant, comme on le verra, cette approche ne se transpose pas bien au cadre presque-Kähler. En dimension 4, Weinkove [121] utilise bien des 'potentiels presque-Kähler' dans son étude de l'équation de Calabi-Yau sur les variétés presque-Kähler (voir aussi Lejmi [78]). Cependant, cette méthode implique l'utilisation d'opérateurs pseudo-différentiels.

Pour montrer le résultat, on s'inspirera plutôt de la réinterprétation du problème des métriques canoniques en termes d'application moment d'une certaine action hamiltonienne, dûe à Fujiki [46] et Donaldson [38].

Au-delà du contexte presque-kählérien, la nouveauté de ce résultat réside dans le fait que la classe de cohomologie des formes presque-kählérienne ω_ε diffère de celle obtenue par les méthodes de recollement d'Arezzo et Pacard. Comme on le verra au chapitre 2, les métriques à courbure scalaire constante obtenues sur des éclatements représentent typiquement des classes de cohomologie de la forme

$$\Omega = [\omega] - \sum_i \varepsilon^2 \lambda_i [E_i],$$

où les $[E_i]$ sont les duaux de Poincaré d'un diviseur exceptionnel *holomorphe.* Dans notre construction, en revanche, la section nulle de T^*S^2 donne un cycle Lagrangien évanescent :

$$[\omega_\varepsilon] \cdot [S] = 0.$$

Cette observation permet d'étendre une autre partie des résultats obtenus par Biquard et Rollin dans [17] : l'existence d'une famille de sphères hamiltoniennes stationnaires pour la famille de métriques g_ε : Ce sera l'objet du chapitre 4.

Théorème. *Sur la variété presque kählérienne $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon, J_\varepsilon)$, pour ε suffisamment petit, $[S]$ admet un représentant Hamiltonien stationnaire pour la métrique g_ε.*

Plus précisément, on verra que la somme connexe M_ε, munie de la solution approchée construite par recollement, admet une sphère lagrangienne minimale. La famille de sphères hamiltoniennes stationnaires annoncée est alors obtenue par déformations lagrangiennes de cette sphère minimale.

Plan de la thèse. Dans le chapitre 1, on introduira plus en profondeur le problème des métriques canoniques sur une variété kählérienne. On commencera par des rappels de géométrie complexe et kählérienne, et on explorera les candidats possibles pour la notion de métrique canonique. On s'intéressera particulièrement aux obstructions qui se présentent dans le cadre du programme de Calabi, et à la formulation en termes d'action hamiltonienne, qui inspirera les méthodes mises en œuvre dans la preuve du résultat principal.

Ensuite, au chapitre 2, nous décrirons l'heuristique qui sous-tend les théorèmes de recollement obtenus par Arezzo et Pacard [6]. Rendre ce plan de bataille précis nous amènera à introduire en plus amples détails les orbifolds kählériens d'une part, et d'autre part les variétés *asymptotiquement localement euclidiennes (ALE)*. On s'attardera notamment sur le modèle ALE qui sera employé dans la construction de recollement du chapitre 3 : on verra qu'il s'agit du cotangent T^*S^2 muni de la métrique de Stenzel [106]. On s'intéressera aussi aux outils d'analyse globale sur les variétés non compactes qui seront nécessaires à la résolution de l'équation des métriques canoniques, notamment les *espaces de Hölder à poids*, et les propriétés des opérateurs elliptiques sur de tels espaces de Banach.

Le chapitre 3 cest consacré à la démonstration du résultat principal. On commencera par introduire les notions indispensables de géométrie presque-kählérienne, notamment celle de courbure scalaire hermitienne. On discutera notamment de ses avantages par rapport à la courbure scalaire riemannienne dans le cadre presque-Kähler, et on en calculera la variation première, afin de comprendre les opérateurs en jeu dans la construction de recollement proprement dite.

La première étape sera la construction d'une somme connexe symplectique, dont la mise en oeuvre nécessitera la construction préalable de cartes de Darboux appropriées sur l'orbifold et l'espace ALE. On démontre alors que les variétés symplectiques obtenues ont les propriétés annoncées pour en faire un lissage de l'orbifold de départ.

La seconde étape consiste à munir les lissages ainsi obtenus d'une structure presque-kählérienne compatible, qui constituera une solution approchée au problème. On montrera alors comment on peut perturber cette solution approchée dans une direction tangente aux orbites complexifiées de l'action de Donaldson [38]. On verra alors que l'équation de courbure scalaire hermitienne constante qui en résulte est une équation aux dérivées partielles elliptique d'ordre 4 en une certaine fonction de potentiel.

On résoudra alors cette équation via une version appropriée du théorème d'inversion locale dans les espaces de Hölder à poids introduits au chapitre 2. Comme on le verra, la difficulté ici est de démontrer que la linéarisation de l'équation admet un opérateur inverse borné.

Enfin, on discutera d'exemples d'applications de cette construction et des perspectives possibles pour l'améliorer ou la généraliser.

Enfin, le chapitre 4 sera consacré au résultat portant sur les sphères hamiltoniennes. On commencera par quelques préliminaires sur ce sujet, basés notamment sur les travaux de Oh [92, 91], puis on sera en mesure de démontrer le résultat annoncé ; l'idée est d'appliquer le theorème des fonctions implicites à l'équation d'Euler-Lagrange décrivant ce problème variationnel.

Chapitre 1

Métriques canoniques en géométrie kählérienne.

Comme mentionné dans l'introduction, le problème des métriques canoniques, dans sa plus grande généralité porte sur la généralisation aux dimensions supérieures à 2 du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann :

Théorème 1.0.1 (Théorème d'uniformisation). *Soit* (Σ^2, J) *une surface de Riemann compacte. Alors il existe une métrique riemannienne de courbure de Gauss constante, compatible avec la structure complexe* J*. De plus, si on impose que le volume de* Σ *pour cette métrique soit 1, alors elle est unique.*

Ce résultat nous invite à restreindre notre champ d'études aux *variétés complexes*. De plus, on s'attend à ce que le caractère "canonique" d'une métrique provienne d'une condition sur sa courbure, une notion riemannienne.

Un cadre agréable pour travailler à la fois avec des structures riemanniennes et complexes est celui des *variétés kählériennes*. Par ailleurs, la géométrie kählérienne et la géométrie algébrique entretiennent des liens étroits via l'étude des variétés projectives, ce qui donne un relief supplémentaire à l'étude des métriques canoniques dans ce contexte. C'est là l'origine du *programme de Calabi*, introduit dans [24] et brièvement décrit dans l'introduction.

L'objet de ce chapitre est d'explorer plus en détails les ramifications du programme de Calabi sur les variétés kählériennes. On commencera, en section 1.1 par quelques rappels de géométrie complexe ; on adoptera un point de vue issu de la géométrie différentiable, qui s'adaptera plus souplement au cadre presque-Kähler du chapitre 3. Toujours dans cet esprit, on survolera, en section 1.2, les notions de base de la géométrie kählérienne. Enfin, en section 1.3, on en viendra aux métriques canoniques proprement dites ; notamment, on présentera le programme de Calabi et les avancées réalisées en ce sens, ainsi que les obstructions qui se présentent dans la recherche de métriques extrémales.

1.1 Éléments de géométrie complexe.

Le théorème de Gauss nous invite à restreindre la question originelle de Thom au cadre légèrement moins vague des variétés complexes. La notion de variété complexe peut être transcrite en géométrie différentielle réelle, en introduisant les *structures complexes*. Soit M une variété de dimension paire $n = 2m$. Une *structure presque complexe* sur M est une section J de $\mathrm{End}(TM)$ vérifiant $J^2 = -I$. Alors l'endomorphisme $J_x \in \mathrm{End}(T_xX)$ 'imite' une multiplication par i et nous permet d'interpréter T_xM comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension m. Le fibré vectoriel complexe qui en résulte sera noté (TM, J) par la suite.

Pour que ceci nous donne une variété 'véritablement' complexe, il nous faut rendre cette construction globale, c'est-à-dire assurer la compatibilité lors des changement de cartes.

1.1.1 Conditions d'intégrabilité.

Définition 1.1.1. *Une* variété complexe M *de dimension complexe* m *est une variété munie d'un atlas holomorphe. Autrement dit, on demande que* M *admette un recouvrement par des cartes* (U_α, ϕ_α)*, où*

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^m,$$

telles que les applications de transition

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m \to \phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m$$

soient holomorphes.

Remarque 1.1.1. En particulier, une variété complexe est naturellement orientée par son atlas holomorphe.

Exemple 1.1.1 (L'espace projectif complexe). Un exemple fondamental de variété complexe est l'espace projectif $\mathbb{C}P^m$, dont les points sont les droites complexes de $\mathbb{C}^{m+1}$. Plus précisément, si $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ par multiplication scalaire, alors

$$\mathbb{C}P^m := {}^{(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})}\!\big/_{\mathbb{C}^*}$$

L'orbite de $w = (w_0, \dots, w_m)$ est notée $[w] = [w_0, \dots, w_m]$ (on parle aussi de *coordonnées homogènes* sur $\mathbb{C}P^m$). Alors, $\mathbb{C}P^m$ est couvert par les ouverts

$$U_j := \{[w] \in \mathbb{C}P^m, w_j \neq 0\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \phi_j : U_j &\to \mathbb{C}^m \\ [w] &\mapsto \left(\frac{w_0}{w_j}, \dots, \frac{w_m}{w_j}\right), \end{aligned}$$

où la j-ième composante w_j/w_j est omise. Alors on a

$$\phi_k \circ \phi_j^{-1} : (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \mapsto \left(\frac{w_1}{w_k}, \ldots, \frac{w_{j-1}}{w_k}, \frac{1}{w_k}, \frac{w_{j+1}}{w_k}, \ldots, \frac{w_m}{w_k} \right).$$

C'est un biholomorphisme, et $\{U_j, \phi_j\}_{j=1\ldots}$ définit donc un atlas holomorphe sur $\mathbb{C}P^m$, qui est donc une variété complexe.

Une variété complexe est naturellement munie d'une structure presque complexe, obtenue en conjugant l'endomorphisme J_0 de multiplication par i dans $\mathbb{C}^m$ par $d\phi_\alpha$. Cette structure presque complexe vérifie trivialement

$$d\phi_\alpha(Jv) = id\phi_\alpha(v) \tag{1.1.1}$$

Cette équation s'appelle *l'équation de Cauchy-Riemann.*

Définition 1.1.2. *Soit (M, J) est une variété réelle de dimension paire munie d'une structure presque complexe. On dit que J est* intégrable *s'il existe un atlas de M vérifiant* (1.1.1).

Autrement dit, J vérifie cette condition si et seulement si (M, J) est une variété complexe, munie de sa structure presque complexe naturelle.

Grâce à cette condition, on peut définir des fonctions holomorphes sur M, de même qu'une structure différentiable permet de définir des fonctions différentiables.

Exemple 1.1.2. Voyons ce que signifie cette condition sur la variété complexe la plus simple : $\mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$. La structure presque complexe canonique sur $\mathbb{R}^{2m}$ est donnée par

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Si $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ est une fonction différentiable, donnée par

$$(z_j = x_j + iy_j)_{j=1\ldots m} \mapsto F(z) := f(z) + ig(z),$$

alors l'équation de Cauchy-Riemann $dF \circ J_0 = J_0 \circ dF$ se traduit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g_i}{\partial y_j} \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = -\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{cases}$$

pour $i, j = 1 \ldots m$.

Cependant, l'équation de Cauchy-Riemann ne fournit pas une méthode très commode pour étudier l'intégrabilité d'une structure presque complexe sur une variété différentiable quelconque. Nous allons donc la reformuler en terme d'intégrabilité, au sens de Frobenius, d'une certaine distribution d'espaces vectoriels complexes sur M.

Soit (M, J) une variété presque complexe. L'endomorphisme J est diagonalisable dans l'espace tangent complexifié $TM \otimes \mathbb{C}$. On note alors $T^{1,0}M$ l'espace propre associé à la valeur propre i pour J et $T^{0,1}M$ l'espace propre associé à $-i$. Les vecteurs de $T^{1,0}M$, respectivement de $T^{0,1}M$ peuvent alors s'exprimer en fonction des vecteurs de TM comme suit :

$$T^{1,0}M = \{X - iJX, X \in TM\} \text{ et } T^{0,1}M = \{X + iJX, X \in TM\}. \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.1.2. Si (M, J) est une variété complexe, munie de coordonnées complexes (z_j) autour d'un point $p \in M$, alors pour tout j, $\frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{1,0}M$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \in T^{0,1}M$

On a alors :

Théorème 1.1.1 (Newlander-Niremberg [90]). *La structure presque complexe J est intégrable si, et seulement si, la distribution $T^{1,0}M$ est intégrable.*

De là, on peut utiliser le critère d'intégrabilité de Frobenius pour transcrire cette condition en des termes purement issus de la géométrie différentiable. Selon ce critère, la distribution $T^{1,0}M$ est intégrable si, et seulement si, elle est stable par crochet de Lie. Autrement dit, pour tout X, Y in $TM \otimes \mathbb{C}$,

$$(X, Y \in T^{1,0}M) \Rightarrow [X, Y] \in T^{1,0}M.$$

En utilisant l'expression (1.1.2), on obtient alors :

Proposition 1.1.1. *Soit (M, J) une variété presque complexe. Alors J est intégrable si, et seulement si, son* tenseur de Nijenhuis

$$N(v, w) = \frac{1}{4}\left([Jv, Jw] - J[Jv, w] - J[v, Jw] - [v, w]\right) \tag{1.1.3}$$

est nul, pour tous $(v, w) \in (TM)^2$.

Remarque : La condition d'intégrabilité est automatiquement vérifiée sur une courbe complexe (c'est-à-dire sur une surface de Riemann).

Le tenseur de Nijenhuis s'interprète comme une obstruction à l'existence de fonctions holomorphes sur M ; elle provient du fait que les équations de Cauchy-Riemann sont surdéterminées dès que la dimension complexe m dépasse 1.

1.1.2 Décomposition par type des champs de vecteurs et de tenseurs.

De la même façon que l'on a décomposé $TM \otimes \mathbb{C}$ en $T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$, on peut décomposer l'espace des 1-formes à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C}$, comme la somme directe de

$$\Lambda^{1,0}M := \{\xi \in \Lambda^1 M \otimes \mathbb{C}, \xi(X) = 0 \ \forall X \in T^{0,1}M\} = \{\alpha - i\alpha \circ J, \alpha \in \Lambda^1 M\} \tag{1.1.4}$$

et de

$$\Lambda^{0,1}M := \{\xi \in \Lambda^1 M \otimes \mathbb{C}, \xi(X) = 0 \ \forall X \in T^{1,0}M\} = \{\alpha + i\alpha \circ J, \alpha \in \Lambda^1 M\} \tag{1.1.5}$$

Remarquons que si l'on fait agir J sur T^*M par $J\alpha := -\alpha \circ J$, alors $\Lambda^{1,0}M$ et $\Lambda^{0,1}M$ correspondent à nouveau aux espaces propres associés à $\pm i$. Dans un système de coordonnées complexes locales (z_j), alors $dz_j \in \Lambda^{1,0}M$; de fait, $(dz_j)_j$ est une base de $\Lambda^{1,0}M$. Il en va de même pour $d\bar{z}_j$ dans $\Lambda^{0,1}M$.

De cette décomposition des 1-formes, on déduit une décomposition de tout espace de p-formes sur M. En effet, posons

$$\Lambda^{p,0}M := (\Lambda^{1,0}M)^{\wedge p}$$
$$\Lambda^{0,q}M := (\Lambda^{0,1}M)^{\wedge q}$$
$$\Lambda^{p,q}M := \Lambda^{p,0}M \wedge \Lambda^{0,q}M$$

Alors $\Lambda^r M = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}M$.

Deux cas notables : le fibré en droites complexes $\Lambda^{m,0}M$ est appelé le *fibré canonique* de la variété complexe (M, J). Son dual $K_M^* = \Lambda^m(TM, J)$ est le *fibré anticanonique*.

Remarque 1.1.3. Une r-forme α à valeurs réelles ne peut être de pur type (p, q) que si $p = q$ et α est J-invariant. En conséquence, $\Lambda^{r,r}M$ peut être interprété comme le fibré des formes à valeurs *réelles* de type (r, r). En géométrie kählériennes, des formes de première importance, comme la forme de Kähler et la forme de Ricci, tombent dans cette catégorie, aussi on adoptera cette convention à partir d'ici.

1.1.3 Cohomologie de Dolbeault.

La décomposition des fibrés de formes différentielles induit une décomposition de la différentielle extérieure d. En effet,

$$d : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p+q+1}M = \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M$$

On note alors

$$\partial : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p+1,q}M$$
$$\bar{\partial} : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p,q+1}M$$

la composée de d avec les projections sur le premier, respectivement second facteur. On a donc $d = \partial + \bar{\partial}$. On peut également définir, pour $\alpha \in \Lambda^r M$,

$$d^c\alpha := -J^{-1}dJ\alpha = i(\bar{\partial} - \partial).$$

Bien que les définitions de ∂ et $\bar{\partial}$ aient un sens que J soit intégrable ou non, on verra au Chapitre 3 que dans le cas non intégrable, il est plus commode d'utiliser d^c.

Remarque 1.1.4. Dans des coordonnées holomorphes (z_j), ∂ est la dérivation par rapport aux coordonnées holomorphes z_j et $\bar{\partial}$ la dérivation par rapport aux coordonnées antiholomorphes $\bar{z}_j$.

Propriétés. *On a*

— $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$, $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$

— $(d^c)^2 = 0$, $dd^c + d^c d = 0$

— $dd^c = 2i\partial\bar\partial$

En particulier, en utilisant $\bar\partial$, on peut définir les *groupes de cohomologies de Dolbeault* comme

$$H^{p,q}(M) = \frac{\mathrm{Ker}(\bar\partial : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1})}{\bar\partial\Lambda^{p,q-1}}. \tag{1.1.6}$$

1.1.4 Opérateurs de Cauchy-Riemann et connexions de Chern.

Une variété complexe (M, J) admet une connexion linéaire ∇ naturellement associée à sa structure complexe, que l'on appelle la *connexion de Chern*. On la définit comme suit.

Soit $E \to (M, J)$ un fibré vectoriel holomorphe sur M ; c'est à dire un fibré vectoriel complexe dont l'espace total est une variété complexe.

Dans ce cas, M admet un recouvrement par des ouverts (U_α) trivialisant localement E, de sorte que les applications de transition correspondantes

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl_k(\mathbb{C})$$

soient des biholomorphismes. En particulier, E admet localement des bases holomorphes. Dans une telle base $(e_i)_i$, on peut alors définir un opérateur sur les sections de E, à valeurs dans les 1-formes à valeurs dans E

$$\bar\partial^E : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \Lambda^{0,1}(M, E)$$

en posant, pour toute section $\sigma = \sum_i \sigma_i e_i$ de E (e_i),

$$\bar\partial\sigma := \sum_i \bar\partial\sigma_i \otimes e_i.$$

Puisque les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ sont holomorphes, on vérifie que cette formule définit bien un opérateur global sur $\mathcal{C}^\infty(M, E)$, indépendamment de la base locale choisie.

Remarque : Avec la même définition, on peut plus généralement définir l'opérateur de Cauchy-Riemann sur $\Lambda^{p,q}(M, E)$.

Remarquons que $\bar\partial^E$ vérifie la règle de Leibniz :

$$\bar\partial^E(fs) = \bar\partial f \otimes s + f\bar\partial^E s. \tag{1.1.7}$$

Plus généralement, sur un fibré complexe (non nécessairement holomorphe) $E \to M$, on appelle *opérateur de Cauchy-Riemann* un opérateur différentiel $\mathbb{C}$-linéaire d'ordre 1 sur les sections de E, à valeurs dans $\Lambda^{0,1} \otimes E$, et vérifiant la règle de Leibniz

$$\bar\partial^E(fs) = \bar\partial f \otimes s + f\bar\partial^E s. \tag{1.1.8}$$

Il est dit *intégrable* si $\bar\partial^E \circ \bar\partial^E = 0$.

En utilisant le théorème de Newlander-Niremberg, on peut alors montrer :

Théorème 1.1.2 (Koszul-Malgrange, [72]). *Un fibré vectoriel complexe $E \to M$ est holomorphe si, et seulement s'il est muni d'un opérateur de Cauchy-Riemann intégrable.*

Idée de preuve. Munissons E d'un produit scalaire hermitien H. Comme on le verra plus bas, la donnée de h et de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^E$ détermine une connexion linéaire, grâce à laquelle on obtient une décomposition de l'espace tangent TE en un sous-espace horizontal (qui s'identifie à TM) et un vertical (tangent aux fibres) :

$$TE = HE \oplus VE$$

Les fibres de E sont des espaces vectoriels complexes, donc les sous-espaces verticaux VE sont naturellement munis d'une structure complexe. Par ailleurs, puisque $HE \simeq TM$, la structure complexe sur M fournit une structure presque complexe sur HE. On obtient ainsi une structure presque complexe J_E sur TE. Il se trouve alors que le tenseur de Nijenhuis de J_E est donné par $(\bar{\partial}^E)^2$. On conclut par le théorème de Newlander-Niremberg. □

Exemple 1.1.3. Rappelons que $E = T^{1,0}M$ s'identifie à TM via

$$X \in TM \mapsto X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX) \in T^{1,0}M. \tag{1.1.9}$$

Alors on a un opérateur de Cauchy-Riemann naturel sur E provenant de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur M. Soit $Z \in T^{1,0}M$, donné localement par $Z = \sum_j Z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$. Alors on définit cet opérateur par

$$\bar{\partial}^{T^{1,0}M} Z = \sum_j \bar{\partial} Z_j \frac{\partial}{\partial z_j}. \tag{1.1.10}$$

Ou encore, via l'identification (1.1.9), on peut ramener cet opérateur sur TM. Il s'écrit alors

$$\bar{\partial}^{TM}_Y X = 2\mathrm{Re}([Y^{0,1}, X^{1,0}]^{0,1}) = -\frac{1}{2} J(\mathcal{L}_X J) Y. \tag{1.1.11}$$

Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ est *réel holomorphe* si $\bar{\partial}^{TM} X = 0$, autrement dit, si $\mathcal{L}_X J = 0$.

Remarque 1.1.5. Comme on le verra aux chapitres 2 et 3, les champs de vecteurs réels holomorphes constituent une obstruction dans les constructions de métriques canoniques.

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel complexe (non nécessairement holomorphe), muni d'un produit hermitien h. Une connexion linéaire ∇ sur E est dite *hermitienne* si h est parallèle pour ∇. Autrement dit, pour toute paire de sections $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\infty(E)$, et pour tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$,

$$X \cdot h(s_1, s_2) = h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2). \tag{1.1.12}$$

Par ailleurs, une connexion linéaire sur E est à valeurs dans les sections de $\Lambda^1 M \otimes E$. En utilisant la décomposition $\Lambda^1 M = \Lambda^{1,0} M \oplus \Lambda^{0,1} M$, on décompose ∇ en $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$, avec

$$\nabla^{1,0}_X s = \frac{1}{2}(\nabla_X s - i\nabla_{JX} s) \qquad \text{et} \qquad \nabla^{0,1}_X s = \frac{1}{2}(\nabla_X s + i\nabla_{JX} s) \tag{1.1.13}$$

On a alors :

Théorème 1.1.3. *Soit E un fibré vectoriel complexe sur M. Alors, pour tout opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ sur E, et pour tout produit hermitien h sur E, il existe une unique connexion hermitienne ∇ telle que $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$. On l'appelle la* connexion de Chern *de (E, h).*

Idée de preuve. L'opérateur de Cauchy-Riemann définit un opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}^{E^*}$ sur le dual E^* par :

$$\partial\langle \sigma, s\rangle = \langle \bar{\partial}^{E^*}\sigma, s\rangle + \langle \sigma, \bar{\partial}^E s\rangle.$$

En utilisant le produit hermitien h, on obtient une identification de E avec E^*, via laquelle $\bar{\partial}^{E^*}$ donne un opérateur

$$\mathcal{C}^\infty(M, E) \to \Lambda^{1,0}(M, E).$$

La somme de $\bar{\partial}$ avec cet opérateur donne la connexion souhaitée.

L'unicité s'obtient en observant que si deux connexions vérifiant les conditions de l'énoncé coexistent sur E, alors leur différence doit être un opérateur h-antihermitien, de type $(1, 0)$, donc nul. □

Fibrés en droites. Dans le cas d'un fibré en droites complexes, la connexion de Chern, et surtout sa courbure, admettent une écriture particulièrement agréable. En effet, soit $(L, h) \to (M, J)$ un fibré en droites holomorphe, hermitien, au-dessus d'une variété complexe. Alors le produit hermitien h, en un point de M, est entièrement déterminé par sa valeur sur une section locale non nulle. Soit donc $s : U \subset M \to L$ une section holomorphe locale ne s'annulant pas ; s constitue donc une base locale de L. On appelle α la *1-forme de connexion* associée à cette base ; pour X champ de vecteurs sur M, elle est caractérisée par :

$$\nabla_X s = \alpha(X)s.$$

La connexion de Chern étant hermitienne, on a

$$X \cdot (h(s, s)) = h(\nabla_X s, s) + h(s, \nabla_X s) = \alpha(X)h(s, s) + \overline{\alpha(X)}h(s, s)$$

d'où

$$\begin{aligned} X \cdot \log(h(s, s)) &= \alpha(X) + \overline{\alpha(X)} \\ (JX) \cdot \log(h(s, s)) &= \alpha(JX) + \overline{\alpha(JX)}. \end{aligned}$$

Or, la section s est holomorphe, donc par définition de la connexion de Chern, $\nabla^{0,1}_X s = \bar{\partial}^L_X s = 0$, d'où $\nabla_X s = -i\nabla_{JX} s$; autrement dit $\alpha(JX) = i\alpha(X)$. On a donc :

$$(X - iJX) \cdot \log(h(s, s)) = \alpha(X).$$

On obtient ainsi une expression de la courbure de la connexion de Chern :

$$\Theta^\nabla = d\alpha = -\partial\bar{\partial}\log(h(s, s)). \tag{1.1.14}$$

On utilise plus couramment la $(1, 1)$-forme réelle ρ^∇ définie par $\Theta^\nabla = i\rho^\nabla$.

Si h' est un autre produit hermitien sur L, associé à la connexion de Chern ∇', alors il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $h' = e^f h$ et on peut vérifier que

$$\rho^\nabla - \rho^{\nabla'} = i\partial\bar{\partial}f.$$

En particulier, la classe de cohomologie de ρ^∇ ne dépend que de la structure complexe sur L et non du produit hermitien. C'est donc aussi le cas de la classe

$$c_1(L) := \frac{1}{2\pi}[\rho^\nabla] \in H^2(M, \mathbb{R}),$$

que l'on nomme la *première classe de Chern* de L.

En particulier, la courbure du fibré anticanonique par rapport à une connexion linéaire quelconque, définit une classe de cohomologie dans $H^2(M, \mathbb{Z})$, appelée la *première classe de Chern* de (M, J) et notée $c_1(M, J)$, ou $c_1(M)$ si la structure complexe est entendue.

La première classe de Chern, plus généralement, est un invariant de premier plan des fibrés vectoriels holomorphes, représentant le concept plus large des *classes caractéristiques.* l'étude de ces classes caractéristiques nous entraînerait trop loin de nos préoccupations. Une discussion adaptée à notre contexte d'étude de la première classe de Chern se trouve au début du chapitre 4 du livre de Moroianu [88]. On trouvera plus de détails dans la première partie du premier chapitre du livre de Griffiths et Harris sur la géométrie algébrique [52], ou encore dans le chapitre 4 du livre de Bott et Tu [18].

Exemple 1.1.4 (Fibrés en droites sur $\mathbb{C}P^1$). On définit ici une classe d'exemples importante : les fibrés $\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1$, où $k \in \mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{C}P^1$ de son atlas usuel

$$U_0 = \{[w_0, w_1] \in \mathbb{C}P^1, w_0 \neq 0\}, \text{ muni de la coordonnée holomorphe } z_0 := \frac{w_1}{w_0}$$
$$U_1 = \{[w_0, w_1] \in \mathbb{C}P^1, w_1 \neq 0\}, \text{ muni de la coordonnée holomorphe } z_1 := \frac{w_0}{w_1}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit alors un fibré en droites $\mathcal{O}(k)$ au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ en recollant deux trivialisations locales : $U_0 \times \mathbb{C}$, muni des coordonnées (z_0, u_0) et $U_1 \times \mathbb{C}$ muni des coordonnées (z_1, u_1), via

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{1}{z_1} \\ u_0 = \dfrac{u_1}{z_1^k}. \end{cases}$$

On a alors les relations suivantes :

$$\mathcal{O}(1)^* = \mathcal{O}(-1), \ \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k} \text{ pour } k > 0.$$

On peut en fait montrer que tout fibré en droite au dessus de $\mathbb{C}P^1$ est un $\mathcal{O}(k)$; plus généralement, dans le livre de Huybrechts [62], Corollaire 5.2.8, on trouve la preuve du résultat suivant

Théorème 1.1.4 (Grothendieck). *Tout fibré vectoriel holomorphe $E \to \mathbb{C}P^1$ est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_i \mathcal{O}(a_i)$, pour une unique suite $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$.*

Par ailleurs, les sections holomorphes globales de $\mathcal{O}(k)$ sont décrites comme suit :

1. Lorsque $k > 0$, $H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(k))$ s'identifie aux polynômes homogènes de degré k sur $\mathbb{C}^2$; en effet un tel polynôme f vérifie

$$f(w_0, w_1) = w_0^k f_0 \left(\frac{w_1}{w_0}\right) = w_1^k f_1 \left(\frac{w_0}{w_1}\right)$$

pour deux fonctions holomorphes (en fait, polynomiales) f_0 et f_1. Autrement dit, $f_1 = g_{10} f_0$ où $g_{10}(z) = 1/z^k$ est la fonction de transition du fibré $\mathcal{O}(k)$, donc f définit bien une section holomorphe globale.

2. Pour $k = 0$, on obtient le fibré trivial ; une section holomorphe globale définit donc une fonction holomorphe $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}$, qui, par le principe du maximum, est forcément constante.

3. Lorsque $k < 0$, on voit qu'aucun monôme en z_0 ne s'étend holomorphiquement lorsqu'on change de cartes ; l'espace des sections est donc trivial.

Un cas particulier notable est le *fibré tautologique* : $\mathbb{C}P^1$ étant défini comme l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^2$, on définit un fibré en droites naturel dont la fibre au-dessus de $[w]$ est la droite représentée par $[w]$, dont l'espace total est décrit par :

$$\{([w], v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2,\ v \in [w]\} = \{([w], v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2, v_0 w_1 = v_1 w_0\}.$$

Les fonctions de transition de ce fibré, en utilisant les coordonnées (z_0, v_0) sur U_0 et (z_1, v_1) sur U_1 sont alors

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{1}{z_1} \\ v_0 = z_1 v_1; \end{cases}$$

Le fibré tautologique est donc $\mathcal{O}(-1)$. On verra au chapitre 2 que l'espace total de ce fibré s'identifie à l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ en 0.

1.2 Éléments de géométrie kählérienne.

1.2.1 Quelques définitions.

La géométrie kählérienne peut être vue comme l'intersection des géométries riemannienne, symplectique, et complexe. Une *variété kählérienne* est une variété lisse, munie d'une structure complexe, d'une métrique riemannienne et d'une forme symplectique, ainsi que de conditions de compatibilité qui assurent que ces structures "s'entendent bien".

Pour rendre cette idée rigoureuse, considérons une variété riemannienne (M, g) de dimension réelle $n = 2m$. On note D la connexion de Levi-Civita associée à g. On munit M d'une structure presque complexe J. On demande que J soit compatible avec g, c'est-à-dire que l'endomorphime J soit orthogonal pour le produit scalaire g :

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{1.2.1}$$

pour tous vecteurs tangents X, Y.

Dans ce cas, on dit que (M, g, J) est une *variété presque hermitienne.*

Alors, la section ω de $T^*M \otimes T^*M$ définie par $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$ est une 2-forme. Les identités suivantes relient J, g et ω :

Lemme 1.2.1. *Sur une variété presque hermitienne, on a*

— $D_X\omega(Y, Z) = g((D_XJ)Y, Z)$ *puisque g est D-parallèle,*

— $N(X, Y) = \frac{1}{4}(D_{JX}J)Y - J(D_XJ)Y - (D_{JY}J)X + J(D_YJ)X)$ *puisque D est sans torsion,*

— $d\omega(X, Y, Z) = g((D_XJ)Y, Z) + g((D_YJ)Z, X) + g((D_ZJ)X, Y)$,

— $g((D_XJ)Y, Z) = \frac{1}{2}(d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ)) + 2g(JX, N(Y, Z))$ *d'après les deux égalités précédentes.*

Avec ceci en tête, la structure (M, g, J, ω) est dite *kählérienne* si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

— ω est fermée et J est intégrable ;

— J est parallèle par rapport à g, i.e. $DJ = 0$;

— $D\omega = 0$.

La première condition montre qu'une variété kählérienne est, en particulier, symplectique ; la forme symplectique ω s'appelle dans ce cas la *forme de Kähler*, et sa classe de cohomologie de De Rham appelée *classe de Kähler.*

En conséquence, par le théorème de Darboux, autour de chaque point $p \in M$, il existe une carte lisse $(x_i, y_i)_i : U \in M \to \mathbb{R}^{2m}$ dans laquelle ω coïncide avec la forme symplectique euclidienne :

$$\omega = \omega_0 := \sum_i dx_i \wedge dy_i = \frac{i}{2}\sum_i dz_i \wedge d\overline{z_i}, \tag{1.2.2}$$

où $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ dans $\mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$.

M est aussi une variété complexe ; les objets introduits à la section précédente ont un sens sur une variété kählérienne.

Enfin, une variété kählérienne est une variété riemannienne ; on peut donc faire sens de conditions de courbure. On discutera des différentes notions de courbures associées à une métrique riemannienne dans un prochain paragraphe. En particulier, on traitera de la courbure de Ricci et des propriétés agréables qu'elle hérite de l'interaction avec la géométrie complexe.

Exemple 1.2.1 (La métrique plate sur $\mathbb{C}^m$.). On remarque que la métrique euclidienne $g_0 = \sum_{j=1}^m dx_j^2 + dy_j^2$ est compatible avec la structure complexe J_0 définie plus haut. On obtient alors la forme de Kähler

$$\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2.$$

La norme au carré $\frac{|z|^2}{2}$ est un *potentiel de Kähler* pour la métrique plate sur $\mathbb{C}^m$.

Exemple 1.2.2 (Exemple 1 : La métrique de Fubini-Study.). Un autre exemple important, et moins trivial, est la métrique de Fubini-Study sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m$. On décrit les points de $\mathbb{C}P^m$ par les coordonnées homogènes $[z_0, \ldots, z_m]$; rappelons qu'on dispose de cartes holomorphes naturelles sur $\mathbb{C}P^m$ données par

$$\phi_j : U_j := \{[z_0, \ldots, z_m] \in \mathbb{C}P^m, z_j \neq 0\} \to \mathbb{C}^m$$
$$[z_0, \ldots, z_m] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_m}{z_j}\right).$$

On définit $u : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ par $u(w) = \ln(1 + |w|^2)$. Alors

$$\omega_{U_j} := \phi_j^*(i\partial\bar{\partial}u)$$

est une 2-forme sur U_j.

On peut montrer que la collection des ω_{U_j} se recolle en une 2-forme globalement définie sur $\mathbb{C}P^m$, notée ω_{FS} ; cette 2-forme est fermée, puisque localement exacte, et on peut montrer que le tenseur

$$g_{FS}(X, Y) := \omega_{FS}(X, JY)$$

où J est la structure complexe naturelle sur $\mathbb{C}P^m$, est défini positif. Les détails de ces calculs se trouvent, par exemple, au chapitre 13 du livre de Moroianu [88]. Alors le triplet (J, ω_{FS}, g_{FS}) fait de $\mathbb{C}P^m$ une variété kählérienne.

En fait, la même construction permet de munir les Grassmaniennes d'une structure de variété kählérienne : voir à ce sujet le cours de Ballman [12], paragraphe 4.10.

Exemple 1.2.3 (Sous-variétés.). Une sous-variété complexe d'une variété kählérienne M hérite par restriction d'une métrique kählérienne compatible, et donc d'une structure de variété kählérienne. Cette observation, appliquée à l'exemple précédent, montre que les variétés lisses projectives (au sens algébrique) sont des variétés kählériennes ; d'où un lien fructueux entre géométrie kählérienne et géométrie algébrique.

Inversement, on peut chercher à détecter les variétés projectives parmi les variétés kählériennes. Remarquons que si $L \to M$ est un fibré en droites, et $s_0, s_1, \ldots s_k$ sont des sections de ce fibré, alors l'application

$$x \mapsto [s_0(x), \ldots, s_k(x)] \in \mathbb{C}P^k$$

est définie sur l'ouvert $\{x \in M, \exists i, s_i(x) \neq 0\}$. On dit que le fibré L est *très ample* si on peut trouver de telles sections qui réalisent un plongement de M dans $\mathbb{C}P^k$. L est dit *ample* s'il existe $r \gg 1$ tel que le produit tensoriel L^r est très ample. On dispose alors du critère suivant, qui fait le lien entre la courbure d'un fibré et son caractère ample :

Théorème 1.2.1 (Théorème du plongement de Kodaira). *Soit $L \to M$ un fibré en droites au dessus d'une variété complexe M. Alors L est ample si, et seulement si, sa première classe de Chern $c_1(L)$ est positive.*

Ce théorème est l'objet de la section 4 du Chapitre 2 du livre de Griffiths et Harris [52]. Une preuve, basée sur le théorème d'annulation de Kodaira, est donnée à partir de la page 189. La difficulté majeure est de montrer qu'un fibré dont la première classe de Chern est positive est ample. Cela requiert de montrer que L^r admet suffisamment de sections pour réaliser le plongement, or l'existence d'une seule section globale est déjà une question difficile. Une autre approche, mentionnée par Szekelyhidi [112], utilise le noyau de Bergman.

Citons encore deux propriétés des variétés kählériennes, au cœur desquelles se trouve la compatibilité entre les différentes structures.

Sur une variété riemannienne, la connexion 'naturelle' est celle de Levi-Civita, notée D. D'un autre côté, on a défini plus haut la connexion de Chern ∇ sur une variété complexe hermitienne. Sur une variété kählérienne, qui appartient simultanément à ces deux catégories, on a le résultat suivant, prouvé à la section 11.4 du livre de Moroianu [88].

Théorème 1.2.2. *Soit (M, g, J) une variété hermitienne. Alors (M, g, J) est kählérienne si, et seulement si, les connexions de Chern et de Levi-Civita coïncident.*

Par ailleurs, en tant que variété riemannienne, M admet une forme volume naturelle, notée dv_g, ou dv s'il n'y a pas d'ambiguïté. On a alors

$$dv = \frac{\omega^n}{n!}. \tag{1.2.3}$$

Plus généralement, on peut montrer que ω^k, pour $0 \leq k \leq m$, est une $2k$-forme fermée, dont la classe de cohomologie est non nulle. Donc, sur une variété kählérienne compacte, les groupes de cohomologie de De Rham $H^{2k}_{dR}(M)$ ne peuvent pas être réduits à 0, pour $k = 0, \ldots, m$.

En guise d'application, on en déduit que la variété de Hopf $S^1 \times S^{2m-1}$ ne peut être kählérienne pour $m \geq 2$. En fait, cette variété n'est pas symplectique.

Il existe également des exemples de variétés symplectiques n'admettant aucune structure de Kähler ; cela se déduit de contraintes plus avancées sur les nombres de Betti et les nombres de Hodge des variétés kählériennes.

L'interaction de ces différentes structures permet en géométrie kählérienne d'utiliser une large palette d'outils et de points de vue. On a ici adopté une perspective venant de la géométrie différentielle, mais des liens étroits et fructueux existent avec la géométie algébrique complexe. Cet autre point de vue prend toute son importance dans l'étude des résolutions de singularités, que l'on abordera dans un chapitre ultérieur.

1.2.2 Opérateurs différentiels sur une variété kählérienne.

Sur une variété kählérienne, on dispose naturellement de divers opérateurs. On les présente brièvement ici en vue de leur utilisation ultérieure, afin de fixer notations et conventions. On trouvera plus de détails dans le livre de Moroianu [88], chapitre 16, ou celui de Griffiths et Harris [52], dans les sections 6 et 7 du chapitre 0.

Dans la suite de ce paragraphe, (M, g, J, ω) désignera une variété kählérienne *compacte*[1].

Définition 1.2.1. *Soient (E, h_E) et (F, h_F) sont deux fibrés sur M, et $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur différentiel. On définit* l'adjoint formel P^* *de P comme suit :*

$$\int_M h_E(P^*\sigma, \tau)dv = \int_M h_F(\sigma, P\tau)dv,$$

pour des sections lisses σ de E et τ de F.

Remarque 1.2.1. Ainsi défini, l'adjoint est unique.

Dans le cas qui nous intéresse, le produit scalaire riemannien g sur M induit un produit scalaire sur tous les fibrés tensoriels sur M, caractérisé par la propriété suivante : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base locale de T_pM orthonormée pour g, et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale associée via g, alors la collection de tenseurs de la forme

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_l}^*$$

est une base orthonormée de $(T_pM)^{\otimes k} \otimes (T_p^*M)^{\otimes l}$.

Armés de ces produits scalaires, on peut définir les opérateurs suivants :

— l'opérateur de Hodge $\star : \Lambda^k M \to \Lambda^{2m-k} M$ caractérisé par

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, dv$$

pour $\alpha, \beta \in \Lambda^k M$.

— la *codifférentielle* $\delta : \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$, définie comme l'adjoint de la différentielle extérieure d. Si $\star$ est l'opérateur de Hodge sur M, alors

$$\delta = \pm \star d \star. \tag{1.2.4}$$

On dispose de plus d'une expression de δ en fonction de la connexion de Levi-Civita, dans une base locale (f_i) de TM (non nécessairement orthonormée pour g) :

$$\delta\alpha = -\sum_{ij} g^{ij} f_j \lrcorner D_{f_i} \alpha. \tag{1.2.5}$$

— l'adjoint ∂^* de ∂ ; on a $\partial^* = \pm \star \partial \star$;

— l'adjoint $\bar\partial^*$ de $\bar\partial$; on a $\bar\partial^* = \pm \star \bar\partial \star$.

— l'adjoint δ^c de $d^c := JdJ^{-1}$.

De ces différentes notions, on tire différentes notions de laplacien sur les k-formes sur M. Le *laplacien de Hodge*, qui ne dépend que de la métrique, est donné par

$$\Delta_d = d\delta + \delta d,$$

1. Cette supposition nous permettra d'intégrer sur M et d'utiliser le théorème de Stokes. Elle est donc cruciale pour la définition suivante.

mais on peut aussi définir le *laplacien de Dolbeault* associé à la structure complexe

$$\Delta_{\bar\partial} = \bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*,$$

ainsi que

$$\Delta_\partial := \partial^*\partial + \partial\partial^*;$$
$$\Delta_{d^c} := \delta^c d^c + d^c\delta^c.$$

Sur une variété complexe, non nécessairement riemannienne, on a alors l'analogue suivant du théorème de décomposition de Hodge pour le Laplacien de Dolbeault :

Théorème 1.2.3. *L'espace des formes de type (p,q) sur une variété compacte complexe M admet la décomposition suivante :*

$$\mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q}M) = \mathcal{H}^{p,q}M \oplus \bar\partial^*\mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q+1}M) \oplus \bar\partial\mathcal{C}^\infty(\Lambda^{p,q-1}M), \tag{1.2.6}$$

où $\mathcal{H}^{p,q}$ est l'espace des formes harmoniques de type (p,q) pour le laplacien de Dolbeault $\Lambda_{\bar\partial}$. De plus, les termes de la somme directe sont orthogonaux pour le produit L^2.

On se référera à [52] pour une preuve de ce résultat. Il découle alors de ce théorème que chaque classe de cohomologie de Dolbeault admet un unique représentant harmonique.

Sur une variété kählérienne, la compatibilité des différentes structures sur une variété kählérienne transparaît dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Soit (M, J, g, ω) une variété kählérienne compacte. Alors*

$$\Delta_d = \Delta_{d^c} = 2\Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial. \tag{1.2.7}$$

En particulier, on en déduit que Δ_d (ou, en fait, n'importe lequel des laplaciens précédemment définis) préserve le type des (p,q)-formes.

Cette propriété est une conséquence des *identités de Kähler*. Ces identités portent sur les commutateurs des opérateurs précédemment définis avec les deux opérateurs suivants :

$$L : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+2}M$$
$$\alpha \mapsto \omega\wedge\alpha,$$

et son adjoint

$$\Lambda = \pm\star L\star : \Lambda^k M \to \Lambda^{k-2}M. \tag{1.2.8}$$

Notons que Λ peut s'interpréter comme la 'trace par rapport à ω'. En effet, dans une base locale orthonormée (e_i), on a

$$\Lambda\alpha = \frac{1}{2}\sum_i Je_i \lrcorner e_i \lrcorner \alpha.$$

Les *identités de Kähler* s'énoncent alors

Proposition 1.2.2. *Sur une variété kählérienne compacte, on a les relations suivantes :*

$$[L,\delta]=d^c,\ \ [L,d]=0,$$
$$[\Lambda,d]=-\delta^c,\ \ [\Lambda,\delta]=0.$$

Remarque 1.2.2. En dépit de leur nom, ces identités ont un sens et sont vérifiées sur toute variété symplectique munie d'une structure presque complexe compatible.

1.2.3 Métriques kählériennes en coordonnées locales.

Soit (M,J,g) une variété kählérienne. Plaçons-nous dans une carte locale holomorphe autour d'un point p, munie de coordonnées complexes $(z_j)_j$. La métrique g étant hermitienne, on a

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial z_k}\right)=g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)=0. \tag{1.2.9}$$

Les coefficients non nuls de la métrique sont donc les $g_{j\bar{k}}=g\left(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)$ et $g_{\bar{j}k}=\overline{g_{j\bar{k}}}$. Avec ceci en tête, on voit que la métrique s'écrit localement

$$g=\sum_{j,k} g_{j,\bar{k}}(dz_j\otimes d\bar{z}_k+d\bar{z}_j\otimes dz_k), \tag{1.2.10}$$

et la forme de Kähler est donc donnée par

$$\omega=\sqrt{-1}\sum_{j,k} g_{j,\bar{k}}dz_j\wedge d\bar{z}_k. \tag{1.2.11}$$

Alors, la structure hermitienne est kählérienne si, et seulement si $d\omega=0$, ce qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z_i}g_{j\bar{k}}=\frac{\partial}{\partial z_j}g_{i\bar{k}} \tag{1.2.12}$$

pour tous i,j,k.

Une autre caractérisation des métriques de Kähler, moins intuitive en termes de compatibilité des diffrentes structures mais cruciale pour les méthodes de recollement, est la suivante.

Proposition 1.2.3. *Soit g une métrique riemannienne sur une variété complexe (M,J), telle que (M,J,g) soit hermitienne. Alors g est une métrique de Kähler si et seulement si, autour de chaque point $p\in M$, il existe des coordonnées locales holomorphes $(z_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,m}$ dans lesquelles*

$$\omega=\sum_\alpha dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\alpha+\mathcal{O}(|z|^2).$$

On les appelle coordonnées normales *au voisinage de p.*

Il s'agit d'un calcul en coordonnées, dont on trouvera une preuve dans le livre de Griffiths-Harris [52] (chap. 0.7), celui de Moroianu [88] (Chapitre 11) ou encore celui de Székélyhidi [112] (Chapitre 1).

Remarque 1.2.3. Cette formule est à comparer avec le théorème de Darboux cité plus haut. Ici, les coordonnées utilisées sont non seulement lisses, mais aussi holomorphes.

1.2.4 Potentiels de Kähler.

Un trait essentiel des structures de Kähler est l'existence de *potentiels de Kähler*, dont l'étude provient de la proposition suivante :

Proposition 1.2.4 (Lemme du dd^c global). *Soit M une variété compacte kählérienne, et η une (1,1)-forme réelle et exacte sur M. Alors il existe une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\eta = dd^c f$.*

Idée de preuve. Ce lemme découle principalement de la décomposition de Hodge (voir Griffiths et Harris [52], Chapitre 0, Section 6) appliquée à η ; on l'applique au Laplacien de Hodge Δ_d, ainsi qu'à sa version 'twistée' par la structure complexe Δ_{d^c}. On sait par la proposition 1.2.1 que ces deux laplaciens coïncident, ce qui permet de conclure. □

Un corollaire direct de ce résulat est le suivant : si deux formes de Kähler sont dans la même classe de cohomologie, leur différence est de la forme $dd^c f$.

En appliquant ce principe à une classe de Kähler fixée, on pourra donc exprimer des conditions de courbure sous forme d'équations aux dérivées partielles sur une fonction potentiel f. On verra aux chapitres suivants que cette approche est naturelle et nous permet d'utiliser nombre d'outils issus de l'analyse globale pour s'attaquer au problème des métriques canoniques.

1.3 Métriques canoniques et courbure.

Maintenant que l'on a précisé notre cadre d'étude, l'étape suivante dans cette brève explication du problème des métriques canoniques est de spécifier ce que l'on entend par 'canonique'. On va chercher à généraliser la condition portant sur la courbure de Gauss ; l'idée est donc de chercher des métriques à courbure 'la plus constante possible'.

Il existe sur une variété riemannienne plusieurs notions de courbure, qui donnent lieu à des notions différentes de métriques canoniques ; l'objet de cette partie est de les passer brièvement en revue, ainsi que les propriétés agréables dont elles héritent si la variété est kählérienne. On sera alors en mesure de discuter du problème de Calabi.

1.3.1 Courbure(s) sur une variété riemannienne.

Sur une variété compacte riemannienne (M, g), on définit le *tenseur de courbure riemannienne* Rm_g à partir de la connexion de Levi-Civita comme suit :

$$Rm_g(X,Y)Z := D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,$$

pours tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M. On peut donc l'interpréter comme une obstruction à la commutation des dérivées covariantes. Le tenseur de courbure riemannienne peut aussi, par dualité, être vu comme un (4,0)-tenseur :

$$Rm_g(X,Y,Z,T) = g(Rm_g(X,Y)Z,T).$$

Les diverses symétries vérifiées par ce tenseur, notamment les identités de Bianchi, se trouvent par exemple dans Gallot-Hulin-Lafontaine [48], section 3.A.2, ou dans Besse [16].

On s'attend à ce que la courbure permette de mesurer à quel point g s'éloigne de la métrique euclidienne lorsque l'on s'éloigne de x. Dans les coordonnées exponentielles associées à g, les coefficients g_{ij} admettent le développement de Taylor suivant :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{ijkl}x_k x_l + O(|x|^3). \tag{1.3.1}$$

où $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Ce tenseur contient toute l'information sur la courbure issue de la métrique riemannienne g.

Cependant, le nombre de coefficients de R croît comme la puissance quatrième de la dimension de la variété ; en conséquence, une condition sur R induit localement $O(n^4)$ équations, pour $O(n^2)$ inconnues (les coefficients de la métrique g). Heuristiquement, le système est surdéterminé ; cela nous amène à considérer une condition plus faible.

Pour cela, on s'intéresse à la trace du tenseur de courbure riemannienne : le tenseur de Ricci Ric, donné dans une base orthonormée locale (e_i) par

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := tr\,(Z \mapsto Rm_g(Z,X)Y) = \sum_i Rm_g(e_i, X, Y, e_i). \tag{1.3.2}$$

Des symétries de Rm_g il suit que Ric est un tenseur symétrique.

Alternativement, les coefficients du tenseur de Ricci apparaissent dans le développement de Taylor de la forme volume de g dans des coordonnées exponentielles :

$$vol_g = (1 - \frac{1}{6}r_{jk}x_j x_k + O(|x|^3))dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{1.3.3}$$

où $r_{jk} = \mathrm{Ric}(e_j, e_k)$. Heuristiquement, une condition sur le tenseur de Ricci donne le bon nombre d'équations localement. L'équation à laquelle on s'intéresse est alors

$$\mathrm{Ric}(v,v) = \lambda,$$

où λ est une constante, pour tout vecteur v de norme unité, ce qui équivaut à

$$\mathrm{Ric} = \lambda g.$$

Les métriques vérifiant cette équation sont appelées les *métriques d'Einstein*.

Le problème de l'existence des métriques d'Einstein sur une variété riemannienne est difficile en général. On sait, en raison d'obstructions topologiques, que certaines variétés de dimension 4 n'admettent aucune métrique d'Einstein, mais la question en dimension supérieure est encore ouverte.

Une discussion plus poussée de ce problème, motivant aussi la courbure de Ricci, dont le sens peut être difficile à saisir, se trouve en introduction du livre de Besse [16].

Remarque 1.3.1. L'équation des métriques d'Einstein donne lieu à des équations aux dérivées partielles elliptiques d'ordre 2 en les coefficients de g. Une façon heuristique d'envisager ce fait est la suivante : si le développement (1.3.1) nous amène à penser R comme la Hessienne de la métrique, alors sa trace Ric est, en un sens, le laplacien de la métrique. L'équation des métriques d'Einstein est, effectivement, elliptique en coordonnées harmoniques ; cependant, l'action du groupe des difféomorphismes de M résulte en un défaut d'ellipticité.

Une troisième notion de courbure associée à une métrique riemannienne est la *courbure scalaire*, définie comme la trace du tenseur de Ricci. Elle est donnée, dans une base orthonormée locale, par :

$$s := (g, \mathrm{Ric}) = \sum_i Ric(e_i, e_i). \tag{1.3.4}$$

C'est une fonction sur M, dont une interprétation géométrique provient de la comparaison des volumes de petites boules géodésiques autour d'un point avec celui des boules euclidiennes :

$$\frac{Vol(B_\varepsilon(p))}{\varepsilon^n Vol_{euc}(B_1)} = 1 - \frac{s(p)}{6(n+2)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{1.3.5}$$

où B_1 est la boule unité euclidienne.

La courbure de Ricci et la courbure scalaire sont de plus liées par l'identité de Bianchi contractée :

$$\delta \mathrm{Ric} = -\frac{1}{2} ds \tag{1.3.6}$$

Remarquons que si M est une surface de Riemann, la courbure scalaire est précidément égale au double de la courbure de Gauss. La condition de courbure scalaire constante semble donc un candidat raisonnable dans notre recherche de métriques canoniques.

Toutefois, il a été démontré (Yamabe [124], Trudinger [119], Aubin [9] et finalement Schoen [100]) que sur une variété compacte, toute classe conforme admet une métrique à courbure scalaire constante. Il s'agit de la célèbre résolution du problème de Yamabe (dans le cas compact lisse).

L'espace des solutions est donc de dimension infinie, ce qui semble problématique pour une métrique 'canonique' (plus de détails à ce sujet se trouvent dans le livre de Besse [16], section 4.F). Toutefois, comme on va le voir, dans une classe de métriques plus restreinte sur une variété *kahlérienne*, on a unicité des métriques à courbure scalaire constante, et leur existence n'est pas garantie. Le problème d'existence s'appelle alors *problème de Calabi* et c'est l'objet de la prochaine section.

1.3.2 Courbure en géométrie kählérienne.

Soit maintenant (M^{2m}, g, J) une variété kählérienne. Du fait que J soit parallèle pour la connexion de Levi-Civita, on tire la formule de commutation suivante, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z,

$$Rm(X,Y)(JZ) = JRm(X,Y)Z.$$

En utilisant les symétries du tenseur Rm, on en déduit que le tenseur de Ricci est J-invariant : pour tous X, Y,

$$\mathrm{Ric}(JX, JY) = \mathrm{Ric}(X, Y).$$

Par conséquent, le tenseur défini par

$$\rho(X, Y) = \mathrm{Ric}(JX, Y) \tag{1.3.7}$$

est une 2-forme réelle de type $(1,1)$ sur M, que l'on appelle la *forme de Ricci*.

De façon alternative, rappelons que l'on peut envisager le tenseur de courbure riemannienne comme un endomorphisme de $\Lambda^2 T^*M$, via

$$g(Rm(X \wedge Y), Z \wedge T) = g(Rm(X, Y)Z, T).$$

Cet endomorphisme est auto-adjoint pour la métrique induite par g sur les 2-formes.

Dans le cas d'une variété kählérienne, on observe que Rm agit trivialement sur la partie J-anti-invariante de $\Lambda^2 T^*M$, et se restreint donc à un endomorphisme autoadjoint de $\Lambda^{1,1}T^*M$. Dans ce cas, un calcul direct montre que

$$\rho = Rm(\omega),$$

où ω est la forme de Kähler.

Il existe une troisième interprétation de la forme de Ricci sur une variété kählérienne. Rappelons que le *fibré anticanonique* est le fibré en droites complexes sur M défini comme la puissance maximale du fibre tangent complexe (TM, J) :

$$K_M = \Lambda^m((TM, J)).$$

Sur une varitété kählérienne, (TM, J) est muni du produit hermitien

$$h(X, Y) = \frac{1}{2}\left(g(X, Y) - i\omega(X, Y)\right),$$

qui à son tour induit un produit hermitien sur K^*M. La connexion de Chern sur K_M^* est donc induite par celle de (TM, J), dont on sait qu'elle est égale à la connexion de Levi-Civita. Par conséquent, la courbure de la connexion de Chern sur K^*M est la trace (complexe) de la courbure de (TM, J), donnée par l'endomorphisme anti-hermitien $Z \mapsto R(X, Y)Z$. C'est un nombre imaginaire pur, qui se réécrit

$$R^{K_m^*}(X, Y) = i\ \mathrm{tr}(-J \circ R(X, Y)) = i\rho.$$

La forme de Ricci, à un facteur i près, correspond donc à la courbure de la connexion de Chern du fibré anticanonique. En particulier, c'est une forme fermée, qui représente la classe $2\pi c_1(M) \in H^2(M, \mathbb{R})$. En coordonnées locales, on déduit de (1.1.14) que ρ est donnée par

$$\rho = -i\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{v_g}{v_0}\right)$$

où $v_0 = \prod_i dz_i \wedge d\bar{z}_i$ est la forme volume de la métrique de Kähler plate donnée par les coordonnées.

Plus généralement, si ω_1 et ω_2 sont deux métriques kählériennes sur M, leurs formes de Ricci sont reliées par

$$\rho_1 = \rho_2 - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\omega_1^m}{\omega_2^m}\right) \tag{1.3.8}$$

Remarque 1.3.2. Sur une variété presque kählérienne, c'est-à-dire lorsque la structure complexe n'est pas supposée intégrable, le tenseur de Ricci Ric_g, la 2-forme $R(\omega)$ et la courbure de K_m^* ne coïncident plus. On reviendra sur ce problème au chapitre 3.

La trace de la courbure de Ricci, c'est à dire la courbure scalaire, bénéficie aussi de propriétés particulières dans le cas d'une variété Kählérienne. Elle s'écrit alors $s = 2\Lambda\rho$, où Λ a été défini en (1.2.8), ou encore :

$$s\omega^m = 2m\,\rho \wedge \omega^{m-1}. \tag{1.3.9}$$

En intégrant sur M, on obtient donc

$$S = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M s\,\omega^n = \frac{c_1(M) \cup [\omega]^{n-1}}{[\omega]^n}. \tag{1.3.10}$$

En particulier, la courbure scalaire totale ne dépend en fait que de la classe de Kähler de la métrique, et non du choix d'un représentant.

1.3.3 Métriques canoniques sur une variété Kählérienne.

Le problème des métriques canoniques est celui de la généralisation à de plus grandes dimensions du théorème d'uniformisation 1.0.1. Sur une variété kählérienne compacte, on peut poser la question de la façon suivante :

Soit (M, J) une variété compacte complexe admettant des métriques de Kähler. Dans une classe de Kähler fixée Ω, existe-t-il une métrique 'canonique' ?

Remarque 1.3.3. En vertu de (1.2.3), fixer la classe de Kähler est une généralisation de la condition de volume fixé du théorème d'uniformisation.

1.3.4 Métriques Kähler-Einstein.

Encore une fois, il reste à préciser ce que l'on entend par canonique. Dans le cadre riemannien, les métriques d'Einstein semblent le candidat naturel ; une argumentation dans ce sens se trouve en introduction du livre de Besse [16]. L'équation d'Einstein est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle d'Hilbert-Einstein

$$g \mapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(M,g)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M s(g)\,\mathrm{vol}_g.$$

Dans le cas d'une variété kählérienne, une métrique g associée à une forme de Kähler ω ne peut être Kähler-Einstein que si sa classe de Kähler est un multiple de la première classe de Chern : $[\omega] = \lambda c_1(M)$.

Remarque 1.3.4. L'existence d'une métrique de Kähler-Einstein impose donc que la première classe de Chern ait un *signe*, ce qui n'est pas génériquement le cas.

Compte tenu de cette condition de signe, trois cas se présentent :

— Si la première classe de Chern est nulle, alors chaque classe de Kähler sur (M, J) admet un unique représentant Ricci-plat. Il s'agit du *Théorème de Calabi-Yau*. En réalité, le théorème couvre la question plus large de savoir quels représentants de $c_1(M)$ peuvent être réalisés comme forme de Ricci d'une métrique de Kähler. Il s'énonce comme suit :

Théorème 1.3.1 (Calabi [22], Yau [125]). *Soit (M, J) une variété complexe compacte, admettant des métriques de Kähler, et $\Omega \in H^2(M, \mathbb{R})$ une classe de Kähler sur M. Alors pour tout représentant ρ de $c_1(M)$, il existe une unique forme de Kähler $\omega \in \Omega$ dont la forme de Ricci soit exactement ρ.*

Dans le cas particulier où $c_1(M) = 0$, en choisissant le représentant $\rho = 0$, on obtient une métrique Ricci plate dans chaque classe de Kähler.

— Si $c_1(M) < 0$, on a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.2 (Aubin [10], Yau [125]). *Soit (M, J) une variété complexe compacte admettant des métriques kählériennes, telle que $c_1(M) < 0$. Alors il existe une unique forme de Kähler $\omega \in -2\pi c_1(M)$ telle que $\omega = -Ric(\omega)$.*

— Si $c_1(M) > 0$, la situation est plus délicate, et on n'a pas de théorème d'existence qui reflète ceux de Calabi-Yau et Aubin-Yau. En fait, il existe des exemples de variétés de type Kähler dont la première classe de Chern est positive, mais qui n'admettent pas de métriques d'Einstein ; les premières obstructions, portant sur le groupe d'automorphismes de M, ont été découvertes par Matsushima et Futaki dans [82] et [47] respectivement. Des obstructions plus subtiles, liées à la notion de *K-stabilité* ont ensuite été étudiées par Tian [115] inspiré par Yau [126]. Chen, Donaldson et Sun ont finalement démontré dans [31, 32, 33] que l'existence de métriques de Kähler-Einstein est effectivement équivalente à la K-stabilité dans ce cas.

La preuve des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 repose sur deux éléments. Le premier est la reformulation de l'équation $\rho(\omega) = \lambda\omega$ sous forme d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire elliptique, du second ordre, en une certaine fonction potentiel.

Pour cela, on remarque que prescrire la forme de Ricci de la métrique recherchée revient à prescrire sa forme volume. On cherche $\omega \in \Omega$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega) = \epsilon\, \omega$, où $\epsilon = -1, 0$ ou 1 selon le signe de la première classe de Chern. Soit ω_0 une métrique initiale, quelconque, dans la classe Ω. Alors $\rho(\omega_0) \in c_1(M) = \epsilon\Omega$, donc il existe une fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$\rho(\omega_0) = \epsilon\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F.$$

Toute autre forme de Kähler dans Ω sera de la forme $\omega_\varphi = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ pour une fonction lisse $\varphi : M \to \mathbb{R}$, d'après le lemme du dd^c (Proposition 1.2.4). De plus, d'après (1.3.8) leurs formes de Ricci sont liées par l'équation

$$\rho(\omega_\varphi) = \rho(\omega_0) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\omega_\varphi^m}{\omega_0^m}\right).$$

L'équation

$$\rho(\omega_\varphi) = \epsilon\omega_\varphi$$

se réécrit donc

$$\epsilon\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\,\varphi = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}F - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\omega_\varphi^m}{\omega_0^m}\right).$$

On en déduit que le problème se ramène à *l'équation de Monge-Ampère complexe* :

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{F-\epsilon\varphi}\omega_0^m. \tag{MA}$$

On peut alors procéder par une méthode de continuité : on appelle I l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^m = e^{tF-\epsilon\varphi}\omega_0^m \tag{MA$_t$}$$

admet une solution. On montre que I est non vide (puisqu'il contient 0), ouvert (par le théorème des fonctions implicites) et fermé. Un argument de connexité permet alors de conclure. La difficulté majeure est de montrer que I est fermé. Lorsque $\epsilon = 0$ ou -1, le résultat est montré grâce aux célèbres estimations a priori de Yau. Ce sont ces estimations qui font défaut dans le cas ou $\epsilon = 1$. On trouvera les détails de la preuve du théorème 1.3.1 dans le chapitre 5 du livre de Joyce [67] et la preuve du théorème 1.3.2 dans le chapitre 3 du livre de Székélyhidi [112]. A la fin du chapitre 3 de [112] se trouve également une discussion des difficultés particulières au cas $\epsilon = 1$. On reparlera des obstructions liées à la K-stabilité un peu plus bas.

1.3.5 Métriques extrémales.

Le programme de Calabi, toutefois, ne se limite pas au cas où la classe de Kähler prescrite Ω est un multiple de ω. Que se passe-t-il donc pour une classe Ω générique ? Remarquons que la fonctionnelle

$$\omega \mapsto \int_M s(\omega)\,\omega^m,$$

dont les métriques d'Einstein sont les points critiques, est constante sur Ω d'après (1.3.10). Suivant Calabi [23], on reporte alors l'étude sur la *fonctionnelle de Calabi*

$$\mathcal{C} : \omega \in \mathcal{K}_\Omega \mapsto \int_M s(\omega)^2\,\omega^m,$$

où $\mathcal{K}_\Omega$ désigne l'ensemble des formes de Kähler dans la classe Ω.

Remarque 1.3.5. Par le lemme du dd^c (Proposition 1.2.4), $\omega' \in \Omega$ est dans $\mathcal{K}_\Omega$ si le potentiel de Kähler associé a une norme suffisamment petite dans $\mathcal{C}^2$. C'est donc une condition ouverte.

Le candidat correspondant pour la notion de métrique canonique est alors :

Définition 1.3.1. *Une métrique kählérienne $\omega \in \Omega$ est dite* extrémale *si c'est un point critique de la fonctionnelle de Calabi.*

On note D la connexion de Levi-Civita/Chern associée à la métrique g et on introduit les parties J-invariante et J-anti-invariantes de D :

$$D^{\pm}_X Y = \frac{1}{2}(D_X Y \pm D_{JX} JY),$$

d'où l'on déduit les expressions correspondantes $D^{\pm}_X \alpha$ pour une 1-forme α. L'équation d'Euler-Lagrange associée est alors donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.3.1 (Calabi [23]). *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f$ soit dans $\mathcal{K}_\Omega$. On pose $\omega_t := \omega + t\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} f$. Alors*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{C}(\omega_t) = -2\int_M f\mathcal{D}^*\mathcal{D}s(\omega)\,\omega^m, \tag{1.3.11}$$

où $\mathcal{D}$ est l'opérateur

$$\mathcal{D} : \psi \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto D^- d\psi.$$

En particulier, une métrique ω est extrémale si, et seulement si, le gradient de sa courbure scalaire est un champ de vecteurs holomorphe sur M.

Les détails de ce calcul se trouvent dans [112], Théorème 4.2, ou dans le livre encore non publié de Gauduchon [49], Théorème 3.2.1. On les rappelle ici par souci de complétude.

Preuve. On calcule en premier lieu la dérivée de la forme volume ω_t^m. Puisque les produits extérieurs de 2-formes commutent, on obtient facilement

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega_t^m = m(dd^c f)\wedge\omega^{m-1} = \Lambda(dd^c f)\omega^m = -\Delta f\omega^m,$$

où l'opérateur Λ a été défini en (1.2.8), et on a utilisé l'identité de Kähler 1.2.2 $[\Lambda, d] = \delta^c$ pour obtenir la dernière égalité.

De là, on peut calculer la linéarisation de la forme de Ricci grâce à (1.3.8) ; en effet

$$\rho(\omega_t) = \rho(\omega) - dd^c \log\left(\frac{\omega_t^m}{\omega^m}\right),$$

d'où

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(\omega_t) = \frac{1}{2} dd^c\Delta f.$$

Enfin, il nous reste à calculer la première variation de la courbure scalaire. On rappelle l'identité (1.3.9) :

$$s(\omega_t)\omega_t^m = m\rho(\omega_t)\wedge\omega_t^{m-1}.$$

On dérive chaque terme en $t = 0$, ce qui donne

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_t)\omega^m - s(\omega)(\Delta f)\omega^m = \frac{1}{2}(dd^c\Delta f)\wedge\omega^{m-1} + m(m-1)\rho\wedge dd^c f\wedge\omega^{m-2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_t)\omega^m &= s(\omega)(\Delta f)\omega^m + \frac{1}{2}(dd^c\Delta f)\wedge\omega^{m-1} + m(m-1)\rho\wedge dd^c f\wedge\omega^{m-2} \\
&= s(\omega)(\Delta f)\omega^m + \frac{1}{2}\Lambda(dd^c\Delta f)\omega^m + m!\rho\wedge dd^c f\wedge\star\left(\frac{\omega^2}{2}\right) \\
&= s(\omega)(\Delta f)\omega^m + \frac{1}{2}(\Delta^2 f)\omega^m + (\rho\wedge dd^c f, \omega^2)\omega^m \\
&= s(\omega)(\Delta f)\omega^m + \frac{1}{2}(\Delta^2 f)\omega^m + ((\omega,\rho)(\omega, dd^c f) - (\rho, dd^c f))\,\omega^m
\end{aligned}$$

On utilise alors que $(\omega,\rho) = \Lambda(\rho) = s(\omega)$ et $(\omega, dd^c f) = \Lambda(dd^c f) = -\Delta f$. Il reste alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_t)\omega^m = (\Delta^2 f - (\rho, dd^c f))\omega^m.$$

D'autre part, en utilisant la J-invariance du tenseur de Ricci, on calcule, pour toute 1-forme α,

$$\delta D^+\alpha - \delta D^-\alpha = \mathrm{Ric}(\alpha^\sharp, \cdot).$$

En conjonction avec la *formule de Bochner* :

$$\delta D\alpha = \delta(D^+\alpha + D^-\alpha) = \Delta\alpha - \mathrm{Ric}(\alpha^\sharp,\cdot), \tag{1.3.12}$$

on obtient donc

$$\delta D^-\alpha = \frac{1}{2}\Delta\alpha - \mathrm{Ric}(\alpha^\sharp,\cdot),$$

soit

$$\mathcal{D}f = \frac{1}{2}\Delta df - \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f,\cdot).$$

Rappelons que pour tout 2-tenseur ψ et champ de vecteurs X,

$$\delta(\iota_X\psi) = (dX^\flat, \psi) - (X^\flat, \delta\psi).$$

Grâce à cette égalité, et à l'identité de Bianchi (1.3.6), on obtient

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D}f = \delta\delta D^- df = \frac{1}{2}\Delta^2 f + (2i\partial\bar\partial f, \rho) + \frac{1}{2}(df, ds),$$

ainsi,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_t) = -2\mathcal{D}^*\mathcal{D}f + (ds(\omega), df). \tag{1.3.13}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{C}(\omega_t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M s(\omega_t)^2 \omega_t^m \\
&= \int_M 2s(\omega)\left(-2\mathcal{D}^*\mathcal{D}f + (ds(\omega), df)\right) - s(\omega)^2 \Delta f\, \omega^m \\
&= -2\int_M s(\omega)\mathcal{D}^*\mathcal{D}f\omega^m + \int_M (d(s(\omega)^2), df) - \Delta f\, \omega^m \\
&= -2\int_M f\mathcal{D}^*\mathcal{D}s(\omega)\omega^m,
\end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a utilisé que l'opérateur $\mathcal{D}\mathcal{D}^*$ est autoadjoint. □

Définition 1.3.2. *L'opérateur différentiel*

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D} : f \mapsto \delta\delta D^- df = \frac{1}{2}\Delta^2 f + (2i\partial\bar{\partial} f, \rho) + \frac{1}{2}(df, ds) \tag{1.3.14}$$

est appelé opérateur de Lichnerowicz. *On le note* $\mathbb{L}$.

Les métriques à courbure scalaire constante, en particulier, sont extrémales. Inversement, si la variété complexe (M, J) n'admet pas de champs de vecteurs holomorphes non triviaux, les métriques extrémales ont automatiquement courbure scalaire constante. C'est une condition raisonnablement générale pour une variété kählérienne compacte ; toutefois, des exemples de métriques extrémales à courbure scalaire non constante existent bien, ainsi que Calabi l'a remarqué dès son article d'introduction des métriques extrémales [23].

Un exemple détaillé de telle métrique extrémale à courbure scalaire non constante se trouve à la fin du chapitre 4 du livre de Szekelyhidi [112]. Le cas traité est celui d'une *surface réglée* $X = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$, où $L \to \Sigma$ est un fibré en droites complexes de degré -1 au dessus d'une surface de Riemann Σ de genre 2, et $\mathcal{O}$ désigne le fibré trivial. Cette construction repose sur celle, plus générale, de Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman [2].

On peut donc voir le programme de Calabi comme une version complexe du problème de Yamabe : on regarde une classe de Kähler plutôt qu'une classe conforme (dans les deux cas, la variation de la métrique peut s'exprimer à l'aide d'une fonction sur M). En revanche, dans le cas du problème de Calabi, Chen et Tian ont montré dans [34] qu'une métrique extrémale était unique dans sa classe de Kähler (aux transformations holomorphes près). Par ailleurs, contrairement au problème de Yamabe dans le cas compact, l'existence d'une métrique extrémale dans une classe de Kähler donnée n'est pas garantie.

En effet, il a été observé par Calabi [24] qu'une métrique extrémale doit admettre la symétrie maximale autorisée par la variété complexe (M, J), dans le sens où la composante de l'identité du groupe d'isométries de g doit être un sous-groupe compact maximal du groupe des automorphismes de (M, J) (à ce sujet, voir aussi LeBrun et Simanca [75]). Levine [79] a ainsi obtenu des exemples de variétés kählériennes compactes n'admettant aucune métrique extrémale (voir aussi, dans le livre de Szekelyhidi [112], la Remarque 4.19 et l'Exercice 4.32).

D'autres obstructions, liées à diverses notions de stabilité des variétés polarisées, ont été étudiées notamment par Donaldson, Tian, Yau, et Szekelyhidi : il s'agit de la notion de *K-Stabilité*, introduite par Tian [115] et Donaldson [41]. Très récemment, Chen et Cheng [27, 28, 29] ont annoncé que l'existence de métriques à courbure scalaire constante était, de fait, équivalente à une notion de stabilité des géodésiques dans l'espace des potentiels de Kähler, démontrant ainsi une conjecture de Donaldson [39].

1.3.6 Champs de vecteurs holomorphes sur une variété kählérienne.

Les champs de vecteurs holomorphes d'une variété kählérienne sont étudiés en détail dans le livre de Gauduchon [49], chapitre 2 ; on pourra aussi consulter le livre de Kobayashi [70], chapitre 3. L'invariant de Futaki est abordé dans le livre de Szekelyhidi [112] ainsi que dans l'article de LeBrun et Simanca [75]. On se contentera donc ici d'évoquer les résultats principaux.

Soit (M, J, ω) une variété kählérienne compacte. On note $\mathfrak{h}(M, J)$ (ou $\mathfrak{h}(M)$ si la strucutre complexe est entendue) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes ; i.e. l'ensemble des sections holomorphes du fibré complexe $T^{1,0}M$. Ainsi, une section Z de $T^{1,0}M$ est dans $\mathfrak{h}(M)$ si $\bar{\partial}Z = 0$, où $\bar{\partial}$ a été défini en (1.1.10).

De plus, $\mathfrak{h}(M)$ l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(M, J)$ de la variété complexe sous-jacente (M, J).

Dans l'optique de décrire les notions liées à la géométrie complexe d'un point de vue différentiable, on utilise l'identification (1.1.9) entre $T^{1,0}M$ et (TM, J) pour se ramener à des champs de vecteurs réels. On réécrit alors la condition d'holomorphie sous la forme suivante :

$$\mathfrak{h}(M, J) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(TM),\ \mathcal{L}_X J = 0\}, \tag{1.3.15}$$

identifiant ainsi $\mathfrak{h}(M, J)$ à l'espace des champs de vecteurs réels holomorphes.

Au vu du calcul de variation (1.3.11), un sous-ensemble d'intérêt particulier est l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes apparaissant comme gradient d'une fonction (qui doit alors, comme on le verra, vérifier une certaine équation). On le note $\mathfrak{h}_0(M)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(M) :&= \{X \in \mathfrak{h}(M),\ \exists F \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \text{ s.t. } X = \mathrm{grad}_g^{1,0} F = (\bar{\partial} F)^\sharp\} \\ &= \{X \in \mathfrak{h}(M),\ \exists f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ t.q. } X = \mathrm{grad}_g f + J\mathrm{grad}_g h\}. \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs de $\mathfrak{h}_0$ admettent la caractérisation suivante

Proposition 1.3.2 (LeBrun, Simanca [75]). *Soit $X \in \mathfrak{h}(M)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$X \in \mathfrak{h}_0(M)$.*
2. *X s'annule quelque part sur M.*
3. *Pour toute 1-forme harmonique α sur M, $\alpha(X) = 0$.*

Démonstration. On suit ici la preuve fournie dans [49], Proposition 2.4.2.

1. $\Rightarrow$ **2.** Soit $X = \mathrm{grad}_g f + J\mathrm{grad}_g h \in \mathfrak{h}_0(M)$. On pose

$$c = \min_M |X|^2.$$

Ce minimum est bien défini puisque M est compacte, et il s'agit alors de montrer que $c = 0$. Puisque X est réel holomorphe, $\mathcal{L}_X J = 0$. Or pour tout champ de vecteurs Y

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X J)(Y) &= \mathcal{L}_X(JY) - J\mathcal{L}_X Y \\ &= [X, JY] - J[X, Y]\end{aligned}$$

En particulier, $[X, JX] = J[X, X] = 0$; les flots (ϕ_s^X) et (ϕ_t^{JX}), respectivement associés à X et JX, commutent donc. Ils définissent donc une action de $\mathbb{C}$ sur M via

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \times M &\to M \\ (z = s + it, x) &\mapsto (\phi_s^X \circ \phi_t^{JX})(x).\end{aligned}$$

Soit alors x_0 un point de M, $F = f + ih$ le potentiel complexe de X. On définit

$$\begin{aligned}H : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto F(z \cdot x_0).\end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial s}(z) &= |df|^2 + \langle df, d^c h\rangle + i\langle dh, df\rangle \\ \frac{\partial H}{\partial t}(z) &= -\langle dh, df\rangle + i\langle d^c f, dh\rangle - i|dh|^2.\end{aligned}$$

Notons D_r le disque de rayon r dans $\mathbb{C}$. Alors, si $C := \max_M |F|$, on voit que

$$\left| \int_{\partial D_r} H(z)dz \right| \leq 2\pi r C. \tag{1.3.16}$$

D'un autre côté, par le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_r} H(z)dz &= \int_{D_r} dH \wedge dz \\ &= \int_{D_r} \left(i\frac{\partial H}{\partial s}(z) - \frac{\partial H}{\partial t}(z) \right) ds \wedge dt \\ &= i \int_{D_r} |X(z \cdot x_0)|^2 ds \wedge dt\end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_{\partial D_r} H(z)dz \right| = \int_{D_r} |X(z \cdot x_0)|^2 ds \wedge dt \geq \pi r^2 c. \tag{1.3.17}$$

Ainsi, pour tout $r > 0$ on doit avoir $2C \geq cr$, ce qui entraîne $c = 0$.

2. $\Rightarrow$ **3.** On observe que pour X réel holomorphe et α harmonique, on a

$$\alpha(X) = \Re(\alpha^{1,0}(X^{1,0}))$$

et que la fonction $\alpha^{1,0}(X^{1,0})$ est *holomorphe*. Puisque M est compacte, c'est donc une fonction constante. Si X s'annule en un point de M, la fonction $\alpha^{1,0}(X^{1,0})$ s'y annule également, et doit donc être identiquement nulle.

3. $\Rightarrow$ **1.** On peut montrer que, pour tout $X \in \mathfrak{h}$ il existe un champ de vecteur X_h dual d'une 1-forme harmonique ξ_h, ainsi que deux fonctions $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$X = X_h + \mathrm{grad}_g f + J\mathrm{grad}_g h;$$

c'est une conséquence de la décomposition de Hodge (voir théorème 1.2.3) conjointement avec le fait que, sur une variété kählérienne, $\Delta_d = \Delta_{d^c}$ (voir proposition 1.2.1). On a donc, pour toute forme harmonique α,

$$0 = \alpha(X) = \langle \alpha, \xi_h \rangle + \langle \alpha, df \rangle + \langle \alpha, d^c h \rangle = \langle \alpha, \xi_h \rangle$$

par orthogonalité dans la décomposition de Hodge (et toujours en utilisant $\Delta_d = \Delta_{d^c}$). On en déduit que $\xi_h = 0$, donc $X \in \mathfrak{h}_0(M)$. □

Remarque 1.3.6. De ce dernier point, il découle que l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes admettant un potentiel est un espace vectoriel qui ne dépend pas de la métrique kählérienne sur M, ni même de la classe de Kähler. En revanche, la fonction potentiel elle-même dépend bien sûr de la métrique considérée.

Une question naturelle est alors : *quelles sont les fonctions sur M dont les gradients sont des champs de vecteurs holomorphes ?*

Dans le calcul de la première variation de la fonctionnelle de Calabi (1.3.11), on voit apparaître l'opérateur $\mathbb{L} = \mathcal{D}^*\mathcal{D}$. Pour une fonction à valeurs réelles $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on a $\nabla^{1,0} f \in \mathfrak{h}_0(M)$ si, et seulement si $\mathbb{L}f = 0$.

Le noyau de l'opérateur de Lichnerowicz donne donc les potentiels de champs de vecteurs holomorphes à valeurs réelles. Plus généralement, une discussion similaire montre qu'une fonction à valeurs complexes $F = f + ih \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ est potentiel d'un champ de vecteurs holomorphe si, et seulement si

$$\delta\delta D^-(df + d^c h) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathbb{L}f - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g s(\omega)} h = 0 \\ \mathbb{L}h + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g s(\omega)} g = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, puisque structures complexe et riemannienne interagissent sur une variété kählérienne, on s'attend à retrouver cette interaction en termes de champs de vecteurs. En effet, notons $\mathfrak{k}(M, g) =$

$\{X \in \mathcal{C}^\infty(M, TM), \mathcal{L}_X g = 0\}$ l'ensemble des champs de Killing sur M. C'est à dire l'algèbre de Lie du groupe d'isométries de la variété riemannienne (M, g). Alors on a (voir [49], Proposition 2.2.1)

Proposition 1.3.3. $\mathfrak{k}(M) \subseteq \mathfrak{h}(M)$. *Plus précisément,* $\mathfrak{k}(M) = \{X \in \mathfrak{h}(M), div(X) = 0\}$.

On peut alors décrire l'ensemble des *champs de Killing Hamiltoniens* $\mathfrak{k}_{\mathrm{ham}}(M) = \mathfrak{h}_0(M) \cap \mathfrak{k}(M)$.

Proposition 1.3.4. *Un champ de vecteur $X \in \mathfrak{h}(M)$ est Killing hamiltonien si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $\mathbb{L}h = 0$ et $X = J grad_g h$.*

À nouveau, on pourra consulter [49], prop 2.6.1 ou [75], prop. 1, pour une preuve de cette affirmation.

On a alors le théorème de structure suivant, dû à Calabi [24] et généralisant des résultats antérieurs de Matsushima [82] (dans le cas Kähler-Einstein) et Lichnerowicz [80] (dans le cas cscK).

Théorème 1.3.3. *Soit (M, J) une variété complexe compacte admettant des métriques kählériennes extrémales. Alors*

$$\mathfrak{h}(M) = \mathfrak{a}(M) \oplus \mathfrak{h}_0(M),$$

où $\mathfrak{a}(M)$ est l'algèbre de Lie abélienne des champs de vecteurs parallèles. De plus, pour une métrique extrémale ω donnée,

$$\mathfrak{h}_0(M) = \mathfrak{k}_{ham}(M) \oplus J\mathfrak{k}_{ham}(M) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda > 0} \{X \in \mathfrak{h}(M), \mathcal{L}_{grad_g s(\omega)} X = \lambda J X\} \right)$$

Cette décomposition des algèbres de Lie permet de démontrer :

Théorème 1.3.4 (Calabi [24]). *Soit (M, J, g) une variété kählérienne munie d'une métrique extrémale g. Alors $Isom_0(M, g)$ est maximal parmi les sous groupes compacts connexes de $Aut_0(M, J)$.*

C'est ce que l'on entend par l'affirmation qu'une métrique extrémale réalise la symétrie maximale autorisée par la structure complexe.

Ce théorème permet d'exhiber des exemples de variétés complexes compactes n'admettant pas de métriques extrémales. En effet, considérons une variété complexe compacte (M, J) telle que la composante de l'identité $\mathrm{Aut}_0(M, J)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(M, J)$ des automorphismes n'est pas réduite à l'identité, mais n'admet aucun sous-groupe compact non trivial. Alors la composante de l'identité des isométries $\mathrm{Isom}_0(M, g)$ est nécessairement triviale pour toute métrique g telle que (M, J, g) est kählérienne. Mais alors, toute métrique extrémale est à courbure scalaire constante, et dans ce cas, le théorème 1.3.3 entraîne que $\mathrm{Isom}_0(M, g) = \{1\}$ implique que $\mathrm{Aut}_0(M, J) = \{1\}$, une contradiction.

C'est le critère employé par Levine dans [79] pour obtenir de tels contre-exemples.

Penchons-nous maintenant sur les obstructions à l'existence de métriques à courbure scalaire constante. Le résultat suivant a été démontré par Futaki [47] :

Théorème 1.3.5. *Soit (M, J, g) une variété kählérienne, et soit $X \in \mathfrak{h}_0(M)$ un champ de vecteur holomorphe sur M admettant un potentiel $F = f + ih$, normalisé pour que $\int_M F\omega^m = 0$. Alors la quantité*

$$\int_M f\, s(\omega)\, \omega^m$$

*ne dépend pas du choix du représentant ω de la classe de Kähler. On note donc l'*invariant de Futaki

$$\mathcal{F}([\omega], X) = \int_M f\, s(\omega)\, \omega^m.$$

Corollaire 1.3.1 (Futaki, Calabi).

1. *Si $[\omega]$ admet un représentant à courbure scalaire constante, alors pour tout $X \in \mathfrak{h}_0(M)$, $\mathcal{F}([\omega], X) = 0$.*
2. *Si $\mathcal{F}([\omega], \cdot) = 0$, alors toute métrique extrémale dans la classe $[\omega]$ est à courbure scalaire constante.*
3. *Si $\mathcal{F}([\omega], \cdot) = 0$ et, de plus, $[\omega] = \lambda c_1(M)$, alors toute métrique extrémale dans $[\omega]$ est Kähler-Einstein.*

La mise en oeuvre de ce critère d'obstruction est cependant délicate, car le calcul de l'invariant de Futaki à partir de cette définition est extrêmement difficile dans la plupart des cas. On trouvera cependant dans l'article de LeBrun et Simanca [75] un calcul détaillé et explicite de quelques exemples (notamment l'éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en deux points, ou encore une famille d'éclatements de $\mathbb{C}P^1 \times \Sigma$ où Σ est une surface de Riemann de genre supérieur ou égal à 2).

Une autre approche, détaillée dans le chapitre 3 du livre de Tian [116], consiste à utiliser une formule de localisation pour calculer $\mathcal{F}([\omega], X)$ pour un champ de vecteurs X donné, en fonction du lieu d'annulation de celui-ci.

Une troisième approche consiste à reformuler l'invariant de Futaki en des termes plus algébriques, dans le cas où M est une variété projective ; c'est ce critère qui est utilisé pour définir la K-stabilité d'une variété polarisée (M, L).

L'invariant de Futaki met en relief la manière dont l'existence de champs de vecteurs holomorphes, particulièrement ceux admettant des potentiels, constituent une obstruction à l'existence de métriques extrémales. Dans le cadre des techniques de recollement, présentées au chapitre suivant, on sera donc amené à se placer sur des variétés qui n'en admettent aucun. Pour trouver de tels exemples, on utilisera le théorème suivant :

Théorème 1.3.6 (Kobayashi). *Soit M une variété complexe compacte dont la première classe de Chern est définie négative. Alors le groupe d'automorphismes de M est fini.*

On trouvera une preuve de ce théorème dans le livre de Kobayashi [70], Chapitre III, Théorème 2.1. L'idée est d'utiliser le théorème du plongement de Kodaira 1.2.1 de façon à pouvoir représenter $Aut(M)$ par des transformations projectives qui laissent invariant un domaine étoilé borné. Un théorème de Cartan ([70], Chapitre III, Théorème 1.2) permet alors de conclure.

1.3.7 Courbure scalaire et application moment.

On termine ce chapitre par une discussion de la façon dont la recherche de métriques extrémales, ou à courbure scalaire constante, peut être réinterprétée en termes d'une action hamiltonienne de dimension inifinie. On verra que cette remarque est à la base de la notion de K-stabilité, et ce point de vue alternatif jouera un rôle majeur dans le chapitre 3.

Commençons par rappeler les définitions d'*action hamiltonienne* et *application moment.* On trouvera plus de détails au chapitre 5 du livre de McDuff et Salamon [83].

Soit (M, ω) une variété symplectique, alors à toute fonction $H : M \to \mathbb{R}$ on peut associer un champ de vecteurs X_H via

$$dH = -\omega(X_H, \cdot) \tag{1.3.18}$$

Les champs de vecteurs de cette forme sont dits *hamiltoniens.* Le potentiel associé à un champ de vecteurs hamiltonien est unique si l'on impose une normalisation. Par exemple, sur une variété compacte, on peut imposer $\int_M F \,\mathrm{vol} = 0$.

Une application de la formule de Cartan montre que les champs de vecteurs hamiltoniens préservent la forme symplectique :

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0.$$

Remarque 1.3.7. Si (M, ω) est munie d'une structure presque complexe compatible J, alors on dispose d'une métrique riemannienne g sur M et on a alors

$$X_H = J\mathrm{grad}_g H.$$

Considérons maintenant l'action d'un groupe de Lie G sur (M, ω) : on a un morphisme de groupes $\mathcal{A} : G \to \mathrm{Diff}(M)$. La linéarisation de cette action en l'identité donne alors un morphisme d'algèbre de Lie

$$\dot{\mathcal{A}} : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M, TM),$$

de l'algèbre de Lie de G dans celle des champs de vecteurs sur M. L'idée est qu'une action est hamiltonienne si chaque champ de vecteur provenant de cette action infinitésimale est hamiltonien, et que l'on peut de plus choisir les fonctions hamiltoniennes de façon équivariante. Plus précisément :

Définition 1.3.3. *L'action $G \curvearrowright M$ est dite* hamiltonienne *s'il existe une application*

$$m : M \to \mathfrak{g}^*,$$

G-équivariante pour l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$, telle que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, la fonction

$$\begin{aligned} H_\xi : M &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle m(x), \xi \rangle \end{aligned}$$

vérifie

$$dH_\xi = \omega(\dot{\mathcal{A}}(v), \cdot).$$

*En d'autre termes, l'application m fournit un potentiel hamiltonien pour chaque champ de vecteurs issu de l'action de G. On l'appelle l'*application moment *de l'action.*

L'observation clé, dûe à Fujiki [46] et Donaldson [38], est qu'une certaine action de dimension infinie, que l'on décrit maintenant, est hamiltonienne, et son application moment est exactement la courbure scalaire (normalisée).

Considérons une variété symplectique compacte (M,ω). On définit l'ensemble des structures presque complexes compatibles avec ω :

$$\mathcal{AC}_\omega = \{J \text{ section de } \mathrm{End}(TV),\ \text{ telle que } J^2 = -Id,\ \text{ et }\ g_J := \omega(\cdot, J\cdot) \text{ est une métrique riemannienne}\}.$$

Son espace tangent en J est alors

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \{A \text{ section de } \mathrm{End}(TV) \text{ telle que } AJ = -JA,\ \omega(A\cdot,\cdot) + \omega(\cdot, A\cdot) = 0\}.$$

On note $\mathcal{C}_\omega$ le sous-ensemble de $\mathcal{AC}_\omega$ constitué des structures presques complexes *intégrables* ; pour $J \in \mathcal{C}_\omega$, la variété (M,ω,J) est alors kählérienne. Remarquons, suivant Fujiki [46] que $\mathcal{AC}_\omega$ elle-même peut être munie d'une structure de variété kählérienne. En effet, si $J \in \mathcal{AC}_\omega$ et $A \in T_J\mathcal{AC}_\omega$ alors $JA \in T_J\mathcal{AC}_\omega$. On définit donc une structure presque complexe sur $\mathcal{AC}_\omega$ par

$$\mathbf{J}A := J \circ A.$$

La métrique sur $\mathcal{AC}_\omega$ est définie par

$$\mathbf{g}_J(A,B) = \int_M \mathrm{Tr}_{g_J}(AB)\mathrm{vol}_{g_J},$$

et la forme de Kähler associée

$$\mathbf{\Omega}_J(A,B) = \int_M \mathrm{Tr}_{g_J}(JAB)\mathrm{vol}_{g_J}.$$

Proposition 1.3.5. *La structure presque complexe* $\mathbf{J}$ *est intégrable et la 2-forme* $\mathbf{\Omega}$ *est fermée ;* $(\mathcal{AC}_\omega, \mathbf{J}, \mathbf{\Omega})$ *est donc une variété kählérienne.*

On trouvera la preuve de cette proposition dans le chapitre 9 du livre de Gauduchon [49]. L'argument repose sur l'utilisation de la *transformation de Cayley* :

$$J \mapsto (J + J_0)^{-1}(J_0 - J),$$

où J_0 est un point fixé dans $\mathcal{AC}_\omega$. Cette transformation permet d'identifier $\mathcal{AC}_\omega$ à un ouvert de l'espace vectoriel complexe des endomorphismes symétriques de TM qui anticommutent à J_0. La structure complexe $\mathbf{J}$ est alors exactement la structure complexe de cet espace vectoriel sous cette identification. Ceci démontre l'intégrabilité de $\mathbf{J}$. Pour démontrer que la 2-forme $\mathbf{\Omega}$ est fermée, on utilise une caractérisation des champs de vecteurs liée à l'action transitive d'un groupe d'automorphismes sur $\mathcal{AC}_\omega$. Un calcul direct permet alors de conclure.

Par ailleurs, on obtient :

Proposition 1.3.6. $\mathcal{C}_\omega$ *est une sous-variété kählérienne de* $\mathcal{AC}_\omega$.

On prouve ceci en linéarisant l'équation $N_J = 0$ caractérisant les éléments de $\mathcal{C}_\omega$, et en remarquant que le sous-espace correspondant de $T_J\mathcal{AC}_\omega$ est stable par $\mathbf{J}$.

Le groupe de Lie $\mathbf{G} = \mathrm{Ham}(M, \omega)$ des symplectomorphismes exacts [2] agit sur $\mathcal{AC}_\omega$ par tiré en arrière, et cette action préserve la forme symplectique $\mathbf{\Omega}$.

Via la construction hamiltonienne, on identifie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbf{G}$ avec l'espace E_0 des fonctions lisses sur M d'intégrale nulle. Le produit scalaire L^2 sur M permet alors d'identifier $\mathfrak{g}$ et son dual. L'action infinitésimale dans ce cas est alors

$$\dot{\mathcal{A}} : f \in E_0 \mapsto \mathcal{L}_{X_f} J \in T_J \mathcal{AC}_\omega.$$

On a alors :

Théorème 1.3.7 (Fujiki [46], Donaldson [38]). *L'action de* $\mathbf{G}$ *restreinte à* $\mathcal{C}_\omega$ *est hamiltonienne, et admet pour application moment*

$$\begin{aligned} m : \mathcal{C}_\omega &\to E_0 \\ J &\mapsto s(g_J) - S, \end{aligned}$$

où la courbure scalaire moyenne

$$S = \frac{1}{vol(M)} \int_M s(g_J) vol_{g_J}$$

ne dépend pas de $J \in \mathcal{AC}_\omega$.

On trouvera une preuve de ce théorème au chapitre 4 du livre de Tian [116]. On en reparlera aussi, dans la version plus générale introduite par Donaldson, au chapitre 3.

Remarque 1.3.8. On a restreint l'action au sous-espace des structures complexes intégrables ; en fait, le même théorème est vrai sur $\mathcal{AC}_\omega$, mais il faut alors employer la 'courbure scalaire hermitienne' plutôt que la courbure scalaire associée à la métrique riemannienne g_J. On reparlera de ces questions au chapitre 3.

Avec cette interprétation, les métriques kählériennes à courbure scalaire constante sur M s'interprètent comme les structures complexes intégrables donnant lieu à des zéros de l'application moment, tandis que les métriques extrémales correspondent à des points critiques du carré de sa norme.

Le théorème de Kempf-Ness, qui relie les actions hamiltoniennes à la *théorie de l'invariant géométrique* ou GIT, permet, dans le cas de variétés de dimension finie, d'interpréter ces cas de figures en terme d'orbites respectivement semi-stables et relativement stables au sens du GIT. C'est la généralisation de cette idée en dimension infinie qui donne lieu à la notion de K-stabilité, et à la formulation de la conjecture de Tian-Yau-Donaldson [126, 115, 41, 38], et à des raffinements tels que la notion de K-stabilité relative dûe à Székelyhidi [108]. Pour une introduction à ce sujet, on pourra consulter les chapitres 5 et 6 du livre de Szekelyhidi [112] ou les notes de Thomas [114].

Nous n'explorerons pas ce sujet plus avant, mais nous terminerons par une remarque sur la façon dont cette interprétation se ramène à la recherche de métriques canoniques dans une classe de Kähler.

2. $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ sur (M, ω) est en fait l'ensemble des symplectomorphismes obtenus comme flot au temps 1 d'un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps.

Observons que si J, J' sont deux structures complexes *intégrables* telles que $J' = \phi^* J$ pour un difféomorphisme ϕ, alors les métriques riemanniennes associées sont reliées par :

$$g_{(J',\omega)} = \phi^* g_{(J,(\phi^{-1})^*\omega)}. \tag{1.3.19}$$

Donc, si J et J' sont dans la même orbite pour l'action de $\mathbf{G}$, i.e. si $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$, ces deux métriques sont isométriques et donnent la même courbure scalaire. Cette construction ne nous aidera donc pas à trouver des métriques à courbure scalaire constante.

Cependant, on peut considérer *la complexification de l'action.* On ne peut pas forcément complexifier le groupe de Lie, mais, de façon infinitésimale, la complexification de l'algèbre de Lie s'identifie à l'ensemble des fonctions lisses de moyenne nulle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a alors une action infinitésimale complexifiée

$$\dot{\mathcal{A}} : E_0^{\mathbb{C}} = \{H \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{C}), \int_V H\omega^2 = 0\} \to T_J \mathcal{AC}_\omega.$$

Le feuilletage qui en résulte s'interprète alors comme les orbites d'une action de $\mathrm{Ham}(M, \omega)^{\mathbb{C}}(V, \omega)$.

L'action (infinitésimale) d'une fonction $\sqrt{-1}f$ à valeurs dans les imaginaires purs est alors donnée par $J\dot{\mathcal{A}}(f) = J\mathcal{L}_{X_f}J = \mathcal{L}_{JX_f}J$. Grâce à (1.3.19), on voit que cette action, au niveau riemannien, équivaut à celle obtenue en fixant J et en déplaçant ω le long de $-JX_f$. La variation obtenue est alors

$$-\mathcal{L}_{JX_f}\omega = -d\iota_{JX_f}\omega = 2i\partial\bar{\partial}f.$$

Cette construction revient donc bien à modifier ω à l'intérieur de sa classe de Kähler, et constitue donc un point de vue alternatif sur le problème de Calabi. Les idées développées au chapitre 3 s'inspireront de ce point de vue.

Conclusion. La recherche de métriques canoniques dans le cadre du programme de Calabi se prête à diverses réécritures et interprétations, toutes l'objet de développements récents et d'interactions fructueuses entre différents domaines de la géométrie. Toutefois, aucun théorème d'existence dans le cas général ne semble à portée de main à l'heure actuelle. Dans ce cadre, il demeure donc pertinent de chercher à construire des classes d'exemples de métriques extrémales ou à courbure scalaire constante, afin de mieux comprendre les conditions d'existence et les classes de Kähler dans lesquelles de telles métriques existent. Dans le chapitre suivant, on introduira une façon de mener à bien ce programme : les techniques de recollement.

Chapitre 2

Méthodes de recollement.

Dans sa plus grande généralité, l'idée des techniques de recollement est de construire de nouvelles solutions à un problème géométrique donné en recollant entre eux des blocs de constructions disposant de propriétés appropriées - par exemple, admettant eux-mêmes une solution au problème géométrique en question. En procédant par perturbation à partir de la 'solution approximative' fournie par ce recollement grossier, on peut alors espérer construire une véritable solution au problème sur la variété recollée.

Nombres des techniques en jeu peuvent être attribuées à Taubes [113] dans le cadre de la construction d'instantons de Yang-Mills.

La souplesse de cette idée justifie son apparition dans des domaines très divers de la géométrie. Dans le cadre qui nous intéresse, on peut citer les travaux issus de la physique sur la construction de métriques de Calabi-Yau sur des surfaces K3 obtenues par résolution de surfaces de Kummer, par exemple Page [95] ou Gibbons-Hawking [50]. Cette approche sera rendue mathématiquement rigoureuse par Topiwala [118] ainsi que LeBrun et Singer [76].

Donaldson détaille une version de ce problème [42] ; cet article constitue un rapide point d'entrée sur les techniques en jeu.

D'autres exemples d'application fructueuse de telles techniques sont la construction de variétés compactes à holonomie G2 ou Spin-7 par Joyce ([66, 65]) ou encore la construction par Floer de courbes holomorphes dans [45].

Ici, dans le cadre du programme de Calabi, on s'intéresse à la question suivante :

Soit (M, ω_M, J_M) un orbifold à singularités quotient isolées p_j, de type $\mathbb{C}^m/\Gamma_j$, et admettant une métrique kählérienne extrémale (resp. à courbure scalaire constante). Supposons que les singularités $\mathbb{C}^m/\Gamma_j$ admettent une résolution (X_j, η_j) asymptotiquement localement euclidienne et à courbure scalaire nulle. Peut-on trouver une résolution extrémale (resp. à courbure scalaire constante) $(\tilde{M}, \tilde{J}_M, \tilde{\omega}_M)$ de (M, ω_M, J_M) en 'remplaçant' un voisinage de chaque singularité p_j, par une région (remise à l'échelle) de X_j ?

Comme au chapitre précédent, avant de chercher une réponse à cette question, il semble nécessaire d'en éclairer certains termes. On commencera donc par définir les orbifolds en section 2.1, et la manière dont on peut y définir les structures géométriques usuelles : notamment les métriques riemaniennes et les structures (presque)-complexes.

Ensuite, on présentera, en section 2.2, le second ingrédient de la construction : les métriques asymptotiquement localement euclidiennes (ou ALE), notammement sur des résolutions de singularités quotient. On discutera de l'existence de telles métriques, ce qui permettra d'évaluer la contrainte imposée par notre question, et on donnera des exemples explicites. En section 2.3, on donnera la construction de la variété recollée sur laquelle on cherchera une métrique canonique, et on dérivera l'équation à résoudre ainsi que la stratégie à mettre en œuvre en section 2.4 La résolution de cette équation nécessitera l'introduction d'outils issus de l'analyse sur les variétés non compactes : c'est l'objet de la section 2.5.

2.1 Orbifolds kählériens.

Les orbifolds ont été originellement introduits par Satake [98] sous le nom de *V-manifolds* et étudiés en dimension 3 par Thurston notamment.

Remarque 2.1.1. Le changement de désignation entre *V-manifolds* et *orbifolds* est justifié par Thurston comme suit : 'This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976–77. An orbifold is something with many folds ; unfortunately, the word 'manifold' already has a different definition. I tried 'foldamani', which was quickly displaced by the suggestion of 'manifolded'. After two months of patiently saying 'no, not a manifold, a manifolded', we held a vote, and 'orbifold' won.'

Un orbifold différentiable est un espace topologique localement modelé sur un quotient $\mathbb{R}^n/G$, où $G \subset Gl_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fini. Plus précisément, on a

Définition 2.1.1. *Un* orbifold différentiable M *est un espace topologique séparé muni d'un recouvrement, stable par intersections finies, par des* cartes orbifold $(U_i, \varphi_i)_i$. *Cela signifie qu'il existe un voisinage connexe* U_i' *de 0 dans* $\mathbb{R}^n$ *et un groupe fini* Γ_i *de difféomorphismes laissant l'origine fixée, tels que*

$$\varphi_i : U_i \to U_i'/\Gamma_i \tag{2.1.1}$$

soit un homéomorphisme. Ces cartes orbifold vérifient de plus les relations de compatibilité suivantes. Si $U_i \subseteq U_j$, *il existe un morphisme injectif*

$$f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$$

et un difféomorphisme équivariant ψ_{ij} *de* U_i' *dans un ouvert de* U_j', *unique à éléments du groupe près, tel que* $\varphi_j \circ \psi_{ij} = \varphi_i$.

Un point $p \in M$ est dit non-singulier si, dans une carte orbifold centrée en p, son stabilisateur Γ_p est le groupe trivial ; l'ensemble des points réguliers de M forme alors une variété lisse. Les autres points sont dits *singuliers*, et la singularité est alors caractérisée par le groupe Γ_p. Si Γ_p agit librement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on dit que la singularité p est *isolée*.

Remarque 2.1.2. On peut toujours supposer que Γ_p estun sous-groupe fini du groupe linéaire. En effet, considérons l'action sur $\mathbb{R}^n$ d'un groupe fini de difféomorphismes fixant l'origine :

$$A_g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto gx \in \mathbb{R}^n$$

et posons $T_g := dA_{g|0} : T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ sa différentielle en 0 ; $(T_g)_{g\in G}$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$. Soit maintenant $s = \sum_{g\in G} A_{g^{-1}} \circ T_g$. Alors $s \circ T_g = A_g \circ s$: s conjugue les actions de G et $(T_g)_{g\in G}$.

Il est alors naturel de définir un orbifold complexe comme suit :

Définition 2.1.2. *Un* orbifold complexe *est un espace topologique séparé, admettant un recouvrement par des cartes $(U_i, \varphi_i)_i$, avec*

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subset \mathbb{C}^m/\Gamma_i,$$

où Γ_i est un sous-groupe fini de $Gl_m(\mathbb{C})$. On suppose que les conditions de compatibilité de la définition 2.1.1 sont vérifiées, et que les applications de changement de cartes sont des biholomorphismes.

Exemple 2.1.1 (Quotient global). Soit M est une variété orientée et G un groupe fini agissant sur M de façon lisse et fidèle, en préservant l'orientation. Alors M/G est un orbifold. De plus, le lieu des points singuliers de M/G est constitué des orbites des points de M dont le stabilisateur est non-trivial :

$$\mathcal{S} = \{[x] \in M/G \mid x \in M \text{ et } \exists g \in G, g \neq 1, \text{ tel que } g \cdot x = x\}.$$

C'est ainsi, par exemple, que l'on construit la *surface de Kummer* mentionnée dans l'introduction de ce chapitre. On l'obtient en prenant le quotient d'un tore $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$ par l'involution induite sur T par $z \in \mathbb{C}^2 \mapsto -z \in \mathbb{C}^2$. Cette involution admet 16 points fixes. L'orbifold obtenu admet donc 16 singularités, chacune modelée sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

Exemple 2.1.2 (Espaces projectifs à poids.). Considérons $\mathbb{C}^{m+1}$ muni de coordonnées complexes $(z_0, \ldots, z_m)$, et soit $(a_0, \ldots, a_m)$ un $(m+1)$-uplet d'entiers strictement positifs, globalement premiers entre eux. On définit une action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{m+1}$ par

$$\lambda \cdot (z_0, \ldots, z_m) = (\lambda^{a_0} z_0, \ldots, \lambda^{a_m} z_m).$$

Le quotient de $\mathbb{C}^{m+1}$ par cette action est séparé et compact, on le note $\mathbb{C}P^m_{a_0,\ldots,a_m}$.

Remarquons que le groupe $\mathbb{C}^*$ n'étant pas fini, cette construction ne rentre pas dans le cadre des quotients globaux décrits plus haut. Par ailleurs, pour $(a_0, \ldots, a_m) = (1, \ldots, 1)$, on obtient l'espace projectif usuel $\mathbb{C}P^m$.

Par analogie avec les coordonnées homogènes l'espace projectif, on notera $[z_0, \ldots, z_m] \in \mathbb{C}P^m_{a_0,\ldots,a_m}$ l'orbite de $(z_0, \ldots, z_m)$. Pour un tel $[z_0, \ldots, z_m]$, on voit que si

$$k_{[z]} = pgcd(a_i \; | i \text{ tel que } \; z_i \neq 0)$$

alors le stabilisateur de $[z_0, \ldots, z_m]$ est $\{u \in \mathbb{C}^* \mid u^{k_{[z]}} = 1\} \simeq \mathbb{Z}_{k_{[z]}}$. Les espaces projectifs à poids sont donc bien des orbifolds complexes. Ce sont en fait des orbifolds kählériens : on peut les munir de métriques de Kähler généralisant la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^m$ (voir Bryant [21], Théorème 4.29).

On peut étendre aux orbifolds les notions usuelles associées à une variété différentiable, en les définissant de façon équivariante dans les relevés U'_p des cartes orbifold.

— Une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$ est dite lisse si son pull-back dans chaque carte (U, Γ) est une fonction lisse Γ-invariante.

— L'*espace tangent* à M en p est donné dans une carte orbifoldcentrée en p, disons $\varphi : U_p \to U'/\Gamma_p$, par T_0U'/Γ_p. La collection de tous ces espaces tangent a alors une structure de variété différentiable de dimension $2n$ en dehors de la section nulle.

— On en déduit qu'un vecteur tangent à un orbifold s'annule sur une singularité isolée. Plus généralement, un vecteur tangent à l'orbifold est tangent au lieu des points singuliers de M.

— Un orbifold est orienté si on peut trouver un atlas dont les changement de cartes sont à déterminant positif.

— Une métrique riemannienne sur M est donnée, dans les cartes orbifold, par une famille de métriques riemanniennes Γ-invariantes sur les U', qui sont reliées par les fonctions de transition de la façon habituelle.

  Ainsi définie, une métrique orbifold fournit des coordonnées exponentielles au voisinage de chaque point. L'application exponentielle conjugue alors l'action du groupe Γ_p avec celle d'un sous-groupe de $O(n)$.

— De la même façon, on peut définir des formes différentiables dans les cartes locales, par une famille de formes Γ-invariantes sur les relevés des cartes orbifold. On étend également les définitions des cohomologies de de Rham et à support compact.

— On définit l'intégrale d'une n-forme ν sur un orbifold M de dimension n comme suit. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement par des cartes orbifold et $(\rho_i)_i$ une partition de l'unité subordonnée, alors, par définition,

$$\int_M \nu := \sum_i \frac{1}{\Gamma_i} \int_{U'_i} \rho_i \nu'_i,$$

  où ν'_i est un relevé Γ_i-invariant de ν dans la carte U_i.

  Le théorème de Stokes et la dualité de Poincaré sont encore valides sur un orbifold.

— Un orbifold est *symplectique* s'il est muni, dans chaque carte, d'une 2-forme fermée non-dégénérée, se recollant en une 2-forme ω. Le relevé ω' dans les ouverts U' de $\mathbb{R}^n$ doit alors être Γ-invariant ; en particulier Γ doit être un sous groupe du groupe des symplectomorphismes de U'.

De même qu'une forme symplectique est localement équivalente à la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$, un orbifold symplectique vérifie lui aussi cette propriété. Il s'agit d'une application du théorème de Darboux équivariant (voir aussi Dellnitz-Melbourne [37], Théorème 1 et Corollaire 2) :

Théorème 2.1.1 (Darboux-Weinstein). *Soit M une variété, Γ un groupe de Lie compact agissant sur M. Soient ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques Γ-invariantes sur M et x un point fixe pour l'action de Γ. Alors il existe un voisinage U de x et un difféomorphisme Γ-équivariant $\varphi : U \to \varphi(U)$ tel que $\varphi(x) = x$ et $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.*

Preuve. On utilise la méthode de Moser. Posons

$$\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1.$$

Il existe un voisinage U de x et une 1-forme β définie sur U, que l'on peut choisir Γ-invariante, telle que

$$d\beta = \omega_0 - \omega_1.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, la 2-forme ω_t est non dégénérée. On peut donc définir un champ de vecteur X_t sur U par

$$-\beta = \omega_t(X_t, \cdot).$$

Puisque β est Γ-invariante, X_t commute à l'action de Γ pour tout t. En intégrant X_t, on obtient une famille φ_t de difféomorphismes locaux,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(m) = X_t(\varphi_t(m)),$$

Γ-équivariants et fixant x. De plus, le difféomorphisme φ_1 vérifie donc les propriétés souhaitées :

$$\begin{aligned}
\varphi_1^*\omega_1 - \omega_0 &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^*\omega_t)dt \\
&= \int_0^1 \varphi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega_t \right) dt \\
&= \int_0^1 \varphi_t^* \left(d(\iota_{X_t}\omega_t) + \omega_0 - \omega_1 \right) dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$ □

Corollaire 2.1.1. *Soit (M,ω) un orbifold symplectique. Alors pour tout $p \in M$, il existe une carte orbifold $\varphi : U \to U'/\Gamma$ au voisinage de p telle que $\omega' = \varphi^*\omega_{euc}$, où ω_{euc} est la forme symplectique usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$.*

On peut également définir des fibrés vectoriels plus généraux sur un orbifold et en tirer une notion de classe caractéristique. On renvoie à l'article de Satake [98] pour les détails.

Notamment, on peut faire sens de la première classe de Chern sur un orbifold. En effet, il s'agit d'une classe caractéristique du fibré anticanonique K_M^* de M.

Si tous les groupes locaux des points singuliers sont des sous-groupes de $SL_m(\mathbb{C})$, alors ce fibré en droite est bien défini sur l'orbifold, et on peut prendre la première classe de Chern de façon usuelle, dans $H^2(M,\mathbb{Z})$. Si ce n'est pas le cas, K_M^* est un fibré singulier, dont la fibre est $\mathbb{C}$ au-dessus de points réguliers, et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_k$ au dessus de points singuliers. On peut néanmoins définir $c_1(M)$ dans ce cas, mais c'est alors une classe de $H^2(M, \mathcal{Q})$.

Dans un cas comme dans l'autre, si M est un orbifold kählérien, un représentant de $c_1(M)$ vu comme une classe de $H^2(M, \mathbb{R})$ est toujours donné par la forme de Ricci de la métrique. En travaillant de façon équivariante par rapport aux groupes en jeu, on peut alors montrer la conjecture de Calabi pour les orbifolds :

Théorème 2.1.2. *Soit M un orbifold complexe compact, de type kählérien, tel que $c_1(M) = 0$. Alors toute classe de Kähler sur M admet un unique représentant Ricci-plat.*

De même, par une généralisation du theorème d'Aubin et Yau, on peut montrer qu'un orbifold kählérien dont la première classe de Chern est strictement négative admet une unique métrique orbifold Kähler-Einstein.

2.2 Résolution de singularités et métriques ALE.

On décrit maintenant le second ingrédient des méthodes de recollement : les métriques asymptotiquement localement euclidiennes, en particulier sur des résolutions de singularités orbifold.

2.2.1 Définitions et premiers exemples.

Considérons un sous groupe fini Γ de $U(m)$, agissant librement sur $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Alors $\mathbb{C}^m/\Gamma$ a une singularité isolée en 0, et la métrique euclidienne g_0 sur $\mathbb{C}^m$ passe au quotient. On notera encore g_0 la métrique résultante sur $\mathbb{C}^m/\Gamma$. De même, la structure complexe J_0 passe au quotient, et on notera encore J_0 la structure complexe obtenue sur $\mathbb{C}^m/\Gamma$.

Par ailleurs, on notera

$$\begin{aligned} r : \mathbb{C}^m &\to \mathbb{R}_+ \\ z &\mapsto d(0, z) \end{aligned}$$

pour la distance associée à g_0. Cette fonction passe également au quotient et on la notera encore $r : \mathbb{C}^m/\Gamma \to \mathbb{R}_+$. On définit alors :

Définition 2.2.1. *Soit (X, J) une variété complexe non compacte de dimension complexe m. Soit g une métrique kählérienne sur X. La variété de Kähler (X, J, g) est dire* asymptotiquement localement euclidienne, *ou* ALE, *asymptote à $\mathbb{C}^m/\Gamma$, s'il existe un compact $K \subset X$ et un biholomorphisme*

$$\pi : X \setminus K \to \left(\mathbb{C}^m \diagup \Gamma \right) \setminus B(0, R)$$

tel que la métrique g dans ces coordonnées asymptotiques $\pi_* g$ tende vers g_0 à l'infini au sens suivant :

$$D^k(\pi_* g - g_0) = O(r^{-2m-k}),$$

où D est la connexion de Levi-Civita associée à g_0.

Remarque 2.2.1. Sur une variété kählérienne ALE, on peut définir une fonction 'rayon' ρ qui relève r en dehors d'un compact. Ceci s'avèrera utile pour l'analyse sur ces variétés.

Les *résolutions* de singularités $\mathbb{C}^m/\Gamma$ fournissent une classe de variétés non-compactes sur lesquelles on souhaiterait construire des métriques ALE. Il s'agit de variétés complexes X munies d'une application holomorphe surjective

$$\pi : X \to {\mathbb{C}^m}/{\Gamma},$$

réalisant un biholomorphisme entre $X \setminus \pi^{-1}(\{0\})$ et $\mathbb{C}^m/\Gamma \setminus \{0\}$. L'ensemble $\pi^{-1}(\{0\})$ est typiquement une sous-variété de X, appelée le *diviseur exceptionnel*. On 'remplace' donc le point singulier par une sous-variété pour obtenir une variété lisse.

Remarque 2.2.2. La notion de résolution d'une singularité trouve son origine dans la géométrie algébrique, et s'exprime en termes d'applications birationnelles entre variétés algébriques. Faute de place pour détailler ces termes, on renvoie aux sections 4.8 et 4.9 du Chapitre 4 de Joyce [67] pour une introduction à ces sujets adaptée au cadre de la géométrie kählérienne, et aux références citées dans ces sections pour des informations plus poussées.

L'éclatement d'une variété en un point. Une façon d'obtenir des résolutions de singularités est l'éclatement des poins singuliers. On tire cette discussion du livre de Griffiths et Harris [52], pages 182 et suivantes. 'Eclater' un point p d'une variété complexe M consiste à le remplacer par l'ensemble des droites complexes de l'espace tangent T_pM. Plus précisément, soit M une variété complexe, $p \in M$. On se donne des coordonnées holomorphes centrées en p

$$z = (z_1, \dots, z_m) : U \subset M \to U' \subset \mathbb{C}^m$$

Considérons l'ensemble

$$\begin{aligned} V &= \{(z, [w]) \in U' \times \mathbb{C}P^{m-1}, z \in [w]\} \\ &= \{(z, [w]) \in U' \times \mathbb{C}P^{m-1},\ z_i w_j = z_j w_i\ \forall i < j\}, \end{aligned}$$

où, à la première ligne, on interprète l'élément $[w] \in \mathbb{C}P^{m-1}$ comme une droite vectorielle de $\mathbb{C}^m$. V est une sous-variété complexe de $U' \times \mathbb{C}P^{m-1}$, de dimension m. On dispose d'une projection

$$\begin{aligned} \pi : V &\to U' \\ (z, [w]) &\mapsto z. \end{aligned}$$

Un élément $z \neq 0$ de $\mathbb{C}^m$ détermine une unique droite vectorielle ; par conséquent, π réalise un biholomorphisme entre $V \setminus \pi^{-1}(\{0\})$ et $U' \setminus \{0\}$. D'autre part, l'origine est incluse dans toutes les droites vectorielles de $\mathbb{C}^m$, donc $\pi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{C}P^{m-1}$.

Grâce à ce biholomorphisme, on peut recoller $V \setminus \pi^{-1}(\{0\})$ et $M \setminus \{p\}$, 'remplaçant' ainsi p par $\pi^{-1}(\{0\}) \simeq \mathbb{C}P^{m-1}$. On obtient alors une nouvelle variété complexe $\tilde{M}$, munie d'une projection $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to M$ telle que $\tilde{\pi}^{-1}(\{p\}) \simeq \mathbb{C}P^{m-1}$. On appelle $\tilde{M}$ *l'éclatement* de M en p.

Remarque 2.2.3.

La variété complexe obtenue ne dépend pas des coordonnées z choisies autour de p, dans le sens où deux choix différents donnent deux variétés biholomorphes.

On n'obtient pas forcément ainsi une variété lisse, mais l'idée est que les éventuelles singularités qui subsisteraient sont moins sévères. On va le voir en détail dans le cas de la singularité $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ à l'exemple 2.2.1. Plus généralement, le théorème d'Hironaka ([57]) affirme que tout variété algébrique singulière admet une résolution, obtenue par une suite d'éclatements (voir aussi Théorème 4.9.4 dans le livre de Joyce [67]). Ces éclatements son éventuellement des éclatements le long d'une sous-variété plutôt qu'en un point. On définira ces éclatements plus bas.

Dans le cas des surfaces, on appelle *résolution minimale* de la singularité quotient $\mathbb{C}^2/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe fini de $U(2)$, une résolution $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^2/\Gamma$ telle que le diviseur exceptionnel ne contient aucune courbe d'auto-intersection -1. Classifiées par Brieskorn [20], ces résolutions sont minimales dans le sens où, si $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}}$ est une autre résolution de $\mathbb{C}^2/\Gamma$, on a alors une factorisation $\tilde{\pi} = \pi \circ p$ pour une application analytique propre $p : \tilde{X} \to X$. Le diviseur exceptionnel est alors une famille de courbes rationnelles.

Remarque 2.2.4. En dimension complexe plus grande, l'existence d'une résolution minimale n'est pas garantie.

Exemple 2.2.1 (Résolution minimale de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$). Considérons à titre d'exemple la singularité la plus simple possible : $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, où $\mathbb{Z}_2$ agit sur $\mathbb{C}^2$ par $(t_1, t_2) \mapsto (-t_1, -t_2)$. On identifie la singularité quotient à une surface singulière de $\mathbb{C}^3$ via l'application

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\simeq} H = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3,\ z_0^2 = z_1 z_2\} \subset \mathbb{C}^3 \\ &(t_1, t_2) \mapsto (t_1 t_2, t_1^2, t_2^2). \end{aligned}$$

On réalise alors l'éclatement de $\mathbb{C}^3$ en 0, ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}^3 = \{(z, [w]) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}P^2,\ z_i w_j = z_j w_i\} &\xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^3 \\ (z, [w]) &\mapsto z. \end{aligned}$$

Le lieu régulier de H correspond alors, dans $\tilde{\mathbb{C}}^3$, à

$$\pi^{-1}(H \setminus \{0\}) = \{(z, [w]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3,\ z \neq 0, w_0^2 = w_1 w_2\}.$$

La fermeture de cet ensemble - appelée *transformée propre de H* - est alors

$$\tilde{H} = \{(z, [w]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3,\ w_0^2 = w_1 w_2\}.$$

C'est une surface régulière dans $\tilde{\mathbb{C}}^3$, biholomorphe à H en dehors de $\pi^{-1}(\{0\})$, et son intersection avec le diviseur exceptionnel est

$$C := \pi^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{H} \simeq \{[w] \in \mathbb{C}P^2,\ w_0^2 = w_1 w_2\}.$$

Cette courbe dans $\mathbb{C}P^2$ est biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$. En effet, si l'on utilise les cartes habituelles sur $\mathbb{C}P^2$

$$U_j := \{[w] \in \mathbb{C}P^2, w_j \neq 0\},$$

alors $C \subset U_1 \cup U_2$, et on a

$$C \cap U_1 = \left\{ [w] \in \mathbb{C}P^2, \left(\frac{w_0}{w_1}\right)^2 = \frac{w_2}{w_1} \right\}$$
$$C \cap U_2 = \left\{ [w] \in \mathbb{C}P^2, \left(\frac{w_0}{w_2}\right)^2 = \frac{w_1}{w_2} \right\}$$

On peut donc utiliser $v_j := \frac{w_0}{w_j}$ comme coordonnée complexe sur $C \cap U_j$, et le changement de carte est alors donné, sur $C \cap U_1 \cap U_2$, par $v_1 \mapsto 1/v_2$; C est donc bien biholomorphe à une copie de $\mathbb{C}P^1$ plongée dans $\mathbb{C}P^2$.

$\tilde{H}$ est donc, en ce sens, $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ dont on a remplacé le point singulier par une copie de $\mathbb{C}P^1$. En utilisant la formule d'adjonction pour les hypersurfaces (voir le livre de Griffiths-Harris [52], page 147, ou celui de Joyce [67], page 139) on peut montrer qu'elle est d'auto-intersection -2. C'est en fait la résolution minimale de la singularité A_1.

On observe aussi que $\tilde{H}$ est en fait biholomorphe à l'espace total du fibré en droite $T^*\mathbb{C}P^1 = O(-2) \to \mathbb{C}P^1$; le diviseur exceptionnel correspond alors à la section nulle. En effet, on a une projection naturelle, explicite dans les cartes données plus haut :

$$p : \tilde{H} \to C.$$

Une carte V_j de C, avec la coordonnée v_j utilisée plus haut, donne alors une trivialisation locale sur $\tilde{H}$ via la coordonnée holomorphe (v_j, z_j). Le changement de cartes est alors donné par

$$(v_1, z_1) \mapsto (v_2, z_2) = (v_1^{-1}, v_1^{-2} z_1).$$

On conclut en observant que ceci correspond exactement au changement de cartes $dv_2 = d(1/v_1) = v_1^{-2} dv_1$ sur le cotangent de $\mathbb{C}P^1$.

Exemple 2.2.2. Soient $p > q > 0$ deux entiers premiers entre eux. On considère le sous-groupe cyclique Γ de $U(2)$ généré par

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi/p} & 0 \\ 0 & e^{2iq\pi/p} \end{pmatrix}$$

Alors le diviseur exceptionnel E la résolution minimale $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^2/\Gamma$ est donné par la réunion $E = \cup_i S_i$ de 2-sphères plongées, dont la matrice d'intersection est donnée par

$$(S_i \cdot S_j) = \begin{pmatrix} -e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -e_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -e_k \end{pmatrix}$$

où les autointersections $e_j \geq 2$ sont déterminées par la fraction continuée

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{e_1 - \frac{1}{e_2 - \frac{1}{\dots}}}.$$

On pourra consulter la section III.5 du livre de Barth, Hulek, Peters et Van de Ven [14] pour plus de détails.

Exemple 2.2.3 (Eclatement le long d'une sous-variété.). L'éclatement en un point admet une généralisation qui consiste à éclater le long d'une sous-variété $S^k \subset M$. On recouvre S par des cartes holomorphes U_α munies de coordonnées complexes z^α à valeurs dans des disques centrés Δ_α de $\mathbb{C}^m$, telles que

$$z_\alpha : S \cap U_\alpha \to \{z^\alpha_{k+1} = \dots = z^\alpha_m = 0\} \subset \Delta_\alpha.$$

On considère alors

$$V_\alpha = \left\{(z, [w_{k+1}, \dots, w_m]) \in \Delta_\alpha \times \mathbb{C}P^{m-k-1},\ z_i w_j = z_j w_i \ \forall\ k+1 \leq i, j \leq m\right\}.$$

Comme précédemment, la projection

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : V_\alpha &\to \Delta_\alpha \\ (z, [w]) &\mapsto z \end{aligned}$$

est un biholomorphisme en dehors de l'image de S dans la carte. De plus, on a des biholomorphismes $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \pi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, qui permettent de recoller entre eux les éclatements locaux le long de $S \cap U_\alpha$. On obtient alors une nouvelle variété $\tilde{M}$ munie d'une projection $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to M$, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Notons $E = \tilde{\pi}^{-1}(S)$ le diviseur exceptionnel, alors $\tilde{\pi}$ est un biholomorphisme entre $\tilde{M} \setminus E$ et $M \setminus S$.
2. E est un fibré au-dessus de S qui s'identifie à la projectivisation du fibré normal N_S.
3. La variété $\tilde{M}$ ne dépend pas du choix des cartes utilisées pour recouvrir S ; on l'appelel l'éclatement de M le long de S.

2.2.2 Résultats d'existence.

Les méthodes de recollement d'Arezzo et Pacard ([6, 7]) qui sont l'objet de ce chapitre reposent sur l'existence de métriques ALE à courbure scalaire nulle sur des résolutions de singularités $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe fini de $U(m)$. Cependant, l'existence de telles métriques pour un sous-groupe Γ quelconque n'est pas connue à l'heure actuelle. Dans cette section, on passera donc en revue certains cas dans lesquels on dispose de telles métriques.

Un premier résultat est la résolution par Joyce [67] de la conjecture de Calabi dans le cas ALE (voir aussi les travaux précurseurs de Tian-Yau [117] et Bando-Kobayashi [13]). Ce résultat porte sur les singularités $\mathbb{C}^m/\Gamma$ admettant une résolution *crépante*. Une résolution $\tilde{X}$ de $\mathbb{C}^m/\Gamma$ est dite crépante si son fibré canonique $K_{\tilde{X}}$ est le tiré en arrière de celui de la singularité quotient.

Faire sens de cette définition requiert de préciser la définition du fibré canonique $K_{\mathbb{C}^m/\Gamma}$ de la singularité, ainsi que de son tiré en arrière ; à ce sujet, on pourra consulter avec profit la section 6.3 du livre de Joyce [67]. Nous nous contenterons d'interpréter ces résolutions comme celles dont la première classe de Chern est nulle. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 (Joyce [67], Théorème 8.2.3). *Soit Γ un sous groupe fini de $SU(m)$, agissant librement sur $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, et $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^m/\Gamma$ une résolution crépante. Alors chaque classe de Kähler de métriques ALE sur X admet un unique représentant à courbure de Ricci nulle. En dehors d'une région bornée $\{\rho \leq R\}$, la forme de Kähler correspondante vérifie*

$$\pi_*\omega = \omega_0 + Ai\partial\bar{\partial}(r^{2-2m}) + 2i\partial\bar{\partial}\chi,$$

où ω_0 est la forme de Kähler de la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^m/\Gamma$, et les dérivées d'ordre k de χ vérifient

$$\partial^k\chi = O(r^{\gamma-k})$$

pour $\gamma \in]1-2m, 2-2m[$.

Ce résultat s'applique en particulier si Γ est un sous groupe fini de $SU(2)$, $SU(3)$, ou si Γ est $\mathbb{Z}_m$ agissant diagonalement sur $\mathbb{C}^m$.

Une autre construction récente est celle d'Apostolov et Rollin [4], qui construisent des métriques ALE à courbure scalaire nulle sur des espaces projectifs à poids $\mathbb{C}P_{-a_0,a_1\dots,a_m}$. La définition de ces espaces est la même qu'à l'exemple 2.1.2, sauf que le premier poids est négatif, d'où la non-compacité de l'espace obtenu. Les fibrés $\mathcal{O}(-r) \to \mathbb{C}P^{m-1}$, qui avaient été munis de telles métriques ALE par Simanca [103], entre autres (voir ci-dessous), sont inclus dans cet construction, en observant que $\mathcal{O}(-r) \simeq \mathbb{C}P_{-r,1\dots,1}$.

De manière générale, en dimension complexe 2, la situation est bien comprise. On dispose des constructions suivantes :

— **Métriques de LeBrun sur $\mathcal{O}(-n)$.** LeBrun a obtenu dans [74] des métriques à courbure scalaire nulle sur l'espace total du fibré en droite $\mathcal{O}(-n) \to \mathbb{C}P^1$, qui correspond à la résolution minimale de $\mathbb{C}^m/\mathbb{Z}_n$, où $\mathbb{Z}_n$ agit par multiplication par $e^{2i\pi/n}$. On cherche des métriques sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ sous la forme $\omega = dd^c\varphi$ où $\varphi = f(|z|^2)$. L'équation $\rho \wedge \omega = 0$ (qui, d'après (1.3.9) caractérise les métriques à courbure scalaire nulle) se ramène alors à une équation différentielle ordinaire sur la fonction réelle f. En la résolvant, on trouve une famille de potentiels $U(2)$-invariants φ_n correspondant à des métriques de la forme

$$g_{LB} = \frac{1}{1+\frac{n-2}{r^2}+\frac{1-n}{r^4}}dr^2 + r^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\left(1+\frac{n-2}{r^2}+\frac{1-n}{r^4}\right)\sigma_3^2\right).$$

Ici, r est la distance à l'origine dans $\mathbb{C}^2$ et les σ_i sont les duaux d'une base invariante de S^3. LeBrun montre alors qu'en attachant une copie de $\mathbb{C}P^1$ et en prenant le quotient par $\mathbb{Z}_n$, on peut se débarrasser de la singularité apparente de la métrique en $r = 1$, et on définit ainsi une métrique ALE, de courbure scalaire nulle, sur l'espace total de $O(-n)$. Pour $n = 1$, il s'agit de la métrique de Burns-Simanca sur l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ en l'origine. Pour $n = 2$, c'est une métrique sur la résolution minimale (i.e. l'éclatement en 0) de la singularité quotient $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ qui avait été obtenue par Eguchi et Hanson.

— **Quotients hyperKähler de Kronheimer.** Pour tout sous-groupe fini Γ de $SU(2)$, Kronheimer a obtenu dans [73] une structure hyperKähler ALE sur la résolution minimale de la singularité quotient $\mathbb{C}^2/\Gamma$. Une structure *hyperKähler* sur une variété riemannienne (M, g) est la donnée de trois structures complexes J_1, J_2 et J_3, parallèles pour la connexion de Levi-Civita, et vérifiant

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3.$$

On peut ainsi comprendre les variétés hyperKähler comme étant localement modelées sur les quaternions. La métrique g est alors compatible avec une sphère de structures complexes de la forme $a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3$ pour $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. On pourra consulter le chapitre 7 du livre de Joyce pour plus d'information sur ces variétés et leur géométrie. Ici, nous nous contentons de rappeler que *toutes les métriques hyperKähler sont Ricci-plates.*

La méthode des quotients hyperKähler utilisée par Kronheimer est dûe à Hitchin [59] et lui permet de complètement classifier les espaces hyperKähler ALE. Il généralise ainsi les résultats de Gibbons et Hawking [50], qui avaient obtenu des métriques hyperKähler ALE asymptotes à des quotients de $\mathbb{H}/\mathbb{Z}_k$; ces résultats avaient également été obtenus par Hitchin [58] par des méthodes de twisteurs.

En deux mots, à $\Gamma \subset SU(2)$, on associe un *diagramme de Dynkin* (c'est la correspondance de McKay - voir à ce sujet le paragraphe 6.4.1 du livre de Joyce [67], ou l'article de Slodowy [104]). Cela permet d'écrire un quotient hyperKähler explicite de $\mathbb{H}^n$ par un produit de groupes unitaires $U(l)$, dont Kronheimer montre que, pour un choix adéquat de ligne de niveau de l'application moment associée, c'est une variété hyperKähler ALE asymptote à $\mathbb{H}/\Gamma$.

— **Métriques multi-Eguchi-Hanson de Gibbons et Hawking.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit n points $p_1, \ldots, p_n$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (les monopoles). Pour chacun, on considère la fonction de Greene associée

$$G_{p_i}(x) = \frac{c}{|x - p_i|},$$

où la normalisation c est choisie en sorte que $\Delta G_{p_i} = 2\pi\delta_{p_i}$. La fonction $V := \frac{1}{2}\sum_i G_{p_i}$ est alors harmonique sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. La 1-forme $\star dV$ est donc fermée, et la classe correspondante $\frac{1}{2\pi}[\star dV]$ est un élément de $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \mathbb{Z})$. Par la théorie de Chern-Weil, il existe alors un $U(1)$-fibré principal au dessus de $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ correspondant à cette classe, et une connexion ϑ sur ce fibré dont la courbure est $d\vartheta = \star dV$. Pour plus d'information sur les fibrés principaux et leurs connexions, on pourra consulter le chapitre 2 du premier tome de Kobayashi et Nomizu [71]. On peut étendre l'espace total X_0 de ce fibré par des points au-dessus de chaque p_i, et munir la variété obtenue de la métrique riemannienne

$$g := V g_0 + V^{-1}\vartheta^2,$$

où g_0 relève la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Cette métrique est hyperKähler, associée aux formes symplectiques

$$\omega_i = dx_i \wedge \vartheta + V dx_j \wedge dx_k,$$

pour toute permutation circulaire (i, j, k) de $(1, 2, 3)$. Cette métrique est ALE, de groupe à l'infini engendré par

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi/p} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/p} \end{pmatrix}.$$

— **Métriques de Calderbank et Singer sur les résolutions de singularités cycliques.** Dans [25], Calderbank et Singer construisent des métriques à courbure scalaire constante sur la résolution minimale de singularités de la forme $\mathbb{C}^2/\Gamma$, où $\Gamma \subset U(2)$ est généré par

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi/p} & 0 \\ 0 & e^{2iq\pi/p} \end{pmatrix}$$

où $0 < q < p$ sont deux entiers premiers entre eux. On construit alors une métrique ALE sur la résolution minimale par l'ansatz de Joyce, introduit dans [64].

Cet ansatz porte sur des variétés M obtenues comme espace total d'un fibré trivial de rang 2 sur une surface riemannienne *spin*, c'est-à-dire munie d'un fibré principal $\mathcal{W}$ de fibre $Spin(2)$ qui se projette sur le $SO(2)$-fibré principal correspondant aux bases orthonormées directes. Pour plus d'information sur les variétés spinorielles, on pourra consulter la section 3.6 du livre de Joyce [67].

Sur une variété M de cette forme, on construit une famille de métriques g_Φ paramétrées par les isomorphismes de fibré vectoriel $\Phi : \mathcal{W} \to M$. Joyce a montré dans [64] que ces métriques sont anti-auto-duales (ce qui, sur une surface kählérienne, équivaut à avoir courbure scalaire nulle) sous condition d'une certaine équation différentielle sur Φ (correspondant en gros au problème des valeurs propres pour l'opérateur de Dirac de la variété spin). C'est en étudiant cette équation sur une certaine classe de variétés toriques que Calderbank et Singer obtiennent les métriques annoncées.

Cette liste, non exhaustive, témoigne de la diversité des techniques mises en jeu pour construire des métriques asymptotiquement localement euclidiennes.

Plus généralement, toujours dans le cas des surfaces, Lock et Viaclovsky [81] ont obtenu récemment le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit $\Gamma \subset U(2)$ un sous-groupe fini, agissant librement sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Alors la résolution minimale de la singularité quotient $\mathbb{C}^2/\Gamma$ admet des métriques ALE à courbure scalaire nulle.*

Les étapes de la preuve sont les suivantes :

1. Pour $\Gamma \subset U(2)$ vérifiant les hypothèses du théorème, on construit un orbifold ALE, à courbure scalaire nulle, asymptote à $\mathbb{C}^2/\Gamma$ et ayant uniquement des singularités cycliques isolées. Pour ce faire, on prend le quotient de l'espace total d'un fibré $\mathcal{O}(\ell)$, muni de la métrique à courbure scalaire nulle construite par LeBrun, par un groupe Γ' obtenu comme quotient de Γ par un groupe cyclique. L'entier ℓ et le groupe cyclique sont déterminés par Γ.

2. La seconde étape consiste à adapter au cas non-compact un théorème de recollement obtenu par Rollin et Singer [97] dans le cas compact :

   Théorème 2.2.3 (Rollin-Singer (cas compact), Lock-Viaclovsky). *Soit (M, ω) une surface orbifold, munie d'une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle. On suppose que les singularités de M sont cycliques, isolées, et que $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Alors la résolution minimale $\hat{M}$ des singularités de M admet une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle.*

   La preuve dans le cas général est essentiellement celle de [97], avec l'ajout aux espaces fonctionnels d'un paramètre de *poids* pour mesurer le comportement à l'infini dans le cas non compact, à la manière des espaces que l'on introduira à la section 2.5. On prouve le théorème en recollant l'orbifold avec la résolution minimale munie de la métrique de Calderbank-Singer. Ceci donne sur la résolution une métrique anti-auto-duale (au sujet de ces métriques, et de la décomposition des tenseurs de courbure, on pourra consulter les sections 1.G et 1.H du livre de Besse [16]). Un résultat de Boyer [19] permet de conclure que les métriques obtenues sont bien à courbure scalaire nulle.

3. On applique alors ce recollement à chaque singularité de l'orbifold obtenu à l'étape 1. On peut alors vérifier que la variété obtenue est bien la résolution minimale de la singularité d'origine $\mathbb{C}^2/\Gamma$.

2.2.3 Déformations complexes de surfaces ALE.

Nous avons jusque-là retreint notre attention à des variétés ALE *biholomorphes* à $\mathbb{C}^m/\Gamma$ en dehors d'un compact, et c'est dans ce cadre que s'appliqueront les techniques de recollement présentées dans ce chapitre. Toutefois, on peut considérer une notion plus large de variétés asymptotiquement localement euclidienne, où la structure complexe J sur X est asymptote à J_0 sans pour autant la relever en-dehors d'un compact :

Définition 2.2.2 (Alternative). *Soit (X, J, g) une variété kählérienne non compacte ; on dit qu'elle est* asymptotiquement localement euclidienne, *asymptote à $\mathbb{C}^m/\Gamma$ pour un sous-groupe fini $\Gamma \subset U(m)$, s'il existe un compact K et un difféomorphisme*

$$\pi : X \setminus K \to \left({\mathbb{C}^m}/{\Gamma}\right) \setminus B(0, R)$$

tel que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k(\pi_* g - g_0) = O(r^{-2m-k}), \tag{2.2.1}$$
$$D^k(\pi_* J - J_0) = O(r^{-2m-k}). \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.5. En fait, même si l'on n'impose que la condition (2.2.1) sur la métrique, il a été démontré par Hein et LeBrun, dans leur article sur la masse des variétés kählériennes ALE [55], qu'il existe des coordonnées asymptotiques dans lesquelles on a à la fois (2.2.1) et (2.2.2).

Cette généralisation nous amène à nous intéresser à des *déformations complexes* de variétés ALE.

Définition 2.2.3. *Soit (X, J) une variété complexe. Une famille de déformations de (X, J) est une variété complexe $\mathcal{X}$ munie d'une projection sur le disque unité de $\mathbb{C}$*

$$f : \mathcal{X} \to \Delta$$

telle que $X_0 = f^{-1}(0)$ soit biholomorphe à (X, J). Les fibres $f^{-1}(t) =: (X_t, J_t)$ pour $t \neq 0$ sont difféomorphes à X_0, mais pas nécessairement biholomorphes. On les appelle déformations de (X, J).

Cependant, la généralisation de la notion de variétés ALE 2.2.2 n'apporte pas de nouveaux exemples en dimension complexe $m \geq 3$. En effet, il a été remarqué par Joyce ([67], Section 8.9), et démontré par Hein, Rădeasconu et Şuvaina ([56], Théorème A) que toute variété ALE asymptote à $\mathbb{C}^m/\Gamma$ doit être isomorphe à une résolution d'une déformation complexe de $\mathbb{C}^m/\Gamma$.

Or, Schelssinger a démontré dans [99] que pour $m \geq 3$, toute singularité quotient $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où Γ agit librement sur $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, est rigide, c'est-à-dire n'admet pas de déformation non triviale (voir aussi les sections 4.9.2 et 6.4.4 du livre de Joyce [67] pour plus de détails sur les déformations de singularités). Par conséquent, le théorème de Hein, Rădeasconu et Şuvaina implique que les définitions 2.2.1 et 2.2.2 de variétés ALE sont équivalentes dès lors que la dimension dépasse 3. Leur théorème est basé sur la compactification d'une telle variété par un diviseur isomorphe à $\mathbb{C}P^{m-1}/\Gamma$; cette compactification avait précédemment été étudiée par Hein et LeBrun [55] (Section 2).

Cependant, dans le cas des surfaces, les singularités $\mathbb{C}^2/\Gamma$ possèdent une large famille de déformations, étudiée notamment par Slodowy [104]. De même, les variétés ALE correspondantes admettent des déformations ; on a déjà entre-aperçu ce fait au paragraphe précédent avec les quotients hyperKähler de Kronheimer : une variété hyperKähler admet un espace de structures complexes compatibles avec la métrique qui s'identifie à la sphère S^2 ; l'une de ces structures donne la résolution minimale, les autres constituent des déformations non triviales.

Remarque 2.2.6. Si X est une variété complexe singulière, on peut en considérer des *lissages* ; il s'agit d'une famille de variétés complexes $(X_t)_{t\in\Delta}$ paramétrée par un disque de $\mathbb{C}$, telle que X_0 soit biholomorphe à la variété singulière X, et X_t soit une variété complexe lisse pour tout $t \neq 0$. Comme précédemment, les X_t sont alors tous difféomorphes pour $t \neq 0$, avec des structures complexes J_t éventuellement différentes. En utilisant les instantons de Kronheimer comme modèle, Biquard et Rollin ont démontré dans [17] un théorème de recollement sur les lissages de surfaces singulières.

La généralisation de ce théorème au cadre presque-Kähler sera l'objet du chapitre suivant. On présente ici plus en détail le modèle ALE qui sera utilisé.

2.2.4 Exemple : Lissages de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ et déformations de la métrique d'Eguchi-Hanson.

On suit ici la dernière partie de l'article de Stenzel [106].

Considérons la singularité $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ munie de sa structure de Kähler (J_0, ω_0, g_0) héritée de la structure euclidienne sur $\mathbb{C}^2$. Via l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{C}^3\\ (u,v) &\mapsto \left(i\frac{u^2+v^2}{2}, uv, \frac{u^2-v^2}{2}\right),\end{aligned}$$

on peut identifier $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ au cône

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^3, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3.$$

On en considère des lissages de la forme

$$Q_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^3, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \varepsilon^2\}, \tag{2.2.3}$$

où ε est un réel strictement positif.

Remarque 2.2.7. Plus généralement, on peut considérer des lissages de la forme (2.2.3) où le paramètre ε est un complexe non nul. Dans ce cas, on récupère la famille hyperKähler d'instantons construite par Kronheimer dans [73]. On reviendra sur cette subtilité au Chapitre 3.

On souhaite munir Q_ε d'une métrique Ricci-plate, que l'on cherche sous la forme

$$\omega_u := 2i\partial\bar{\partial}u,$$

avec un potentiel de Kähler u de la forme $f \circ \tau$, où $\tau := \sum_i |z_i|^2_{|Q_\varepsilon}$ est la restriction à Q_ε de la norme au carré dans $\mathbb{C}^3$, et f est une fonction réelle. On souhaite alors résoudre l'équation de Monge- Ampère :

$$\mathrm{Ric}(\omega_u) = -i\partial\bar{\partial}\log\det(u_{i\bar{j}}) = 0. \tag{2.2.4}$$

où l'on note $(u_{i\bar{j}})_{i,j}$ la matrice hessienne de u, calculée dans des coordonnées complexes que Q_ε.

Par exemple, on peut remarquer que pour $z \in Q_\varepsilon$, $v_1 = (-z_3, 0, z_1)$ et $v_2 = (0, -z_2, z_3)$ forment une base de l'espace tangent complexe $T_z Q_\varepsilon$, fournissant des directions par rapport auxquelles ont peut dériver des fonctions sur Q_ε.

Avec ces notations, on a alors

$$u_{i\bar{j}} = f'(\tau)\tau_{i\bar{j}} + f''(\tau)\tau_i\tau_{\bar{j}}), \tag{2.2.5}$$

donc

$$\begin{aligned}\det(u_{i\bar{j}}) &= \det(f'(\tau)\tau_{i\bar{j}} + f''(\tau)\tau_i\tau_{\bar{j}})\\ &= f'(\tau)^2 \det\left(\tau_{i\bar{j}} + \frac{f''(\tau)}{f'(\tau)}\tau_i\tau_{\bar{j}}\right).\end{aligned}$$

Puisque la hessienne $(\tau_{i\bar{j}})$ est inversible, on peut utiliser le théorème du déterminant de Sylvester. On obtient

$$\det(u_{i\bar{j}}) = \det(\tau_{i\bar{j}}) \left(f'(\tau)^2 + f''(\tau)f'(\tau) \sum_{i,j} \tau^{i\bar{j}} \tau_i \tau_{\bar{j}} \right),$$

où l'on note $\tau^{i\bar{j}}$ le (i,j)-ième coefficient de la matrice inverse à $(\tau_{i\bar{j}})$.

Or, en utilisant la base (v_1, v_2) de $T_z Q_\varepsilon$ mentionnée ci-dessus, on calcule

$$\begin{aligned}
\tau_i &= 2(-\overline{z_i} z_3 + \overline{z_3} z_i) \\
\tau_{\bar{j}} &= 2(-\overline{z_3} z_i + \overline{z_i} z_3) \\
\tau_{i\bar{j}} &= 4(\delta_{ij} |z_3|^2 + z_i z_{\bar{j}}).
\end{aligned}$$

Un calcul long, mais direct, montre alors que

$$\det(\tau_{i\bar{j}}) = 16 |z_3|^2 \tau$$

et

$$\sum_{i,j} \tau^{i\bar{j}} \tau_i \tau_{\bar{j}} = \frac{\tau^2 - \varepsilon^4}{\tau}.$$

Or, $z \mapsto z_3$ est une fonction holomorphe, donc

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial} \log(|z_3|^2) &= -\bar{\partial} \left(\frac{\partial(|z_3|^2)}{|z_3|^2} \right) \\
&= -\bar{\partial} \left(\frac{z_3 \partial \overline{z_3} + \overline{z_3} \partial z_3}{|z_3|^2} \right) \\
&= -\bar{\partial} \left(\frac{\partial z_3}{z_3} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On obtient donc que $f \circ \tau$ est une solution de (2.2.4) si f satisfait l'EDO suivante :

$$\tau f'(\tau)^2 + f''(\tau) f'(\tau)(\tau^2 - \varepsilon^4) = c, \tag{2.2.6}$$

où c est une constante positive.

Cette équation se réécrit :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} (\tau^2 - \varepsilon^4) f'(\tau) \right) = c,$$

d'où, avec une condition initiale appropriée,

$$(\tau^2 - \varepsilon^2) f'(\tau) = 2c\tau - 2c\varepsilon^2,$$

d'où, en choisissant c convenablement

$$f'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau + \varepsilon^2}}.$$

On obtient finalement $f(\tau) = \sqrt{\tau + \varepsilon^2}$. La métrique de Kähler associée $\omega_S = dd^c f(\tau)$ est la métrique Ricci-plate recherchée sur Q_ε.

Remarque 2.2.8. Lorque ε tend vers 0, l'équation (2.2.6) devient $\tau f'(\tau)^2 + f''(\tau)f'(\tau)\tau^2 = c$. Les solutions sont alors de la forme

$$f(\tau) = \sqrt{\tau} = \|z\|_{|Q_\varepsilon}.$$

On reconnaît les potentiels de Kähler pour la métrique conique sur $\mathcal{C}$.

Pour mettre en évidence le caractère ALE de la métrique ainsi construite, et calculer son taux de décroissance vers la métrique euclidienne, on transporte cette métrique sur le cotangent de la sphère. En séparant parties réelles et imaginaires, on voit que

$$Q_\varepsilon = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle X, X\rangle - \langle Y, Y\rangle = \varepsilon,\ \langle X, Y\rangle = 0\}.$$

On peut alors identifier

$$T^*S^2 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1, < x, \xi >= 0\}$$

à Q_ε via l'application

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon : T^*S^2 &\to Q_\varepsilon \\ (x, \xi) &\mapsto \left(\varepsilon \cosh(\|\xi\|)x,\ \varepsilon \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|}\xi\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.2.9. Cette application envoie la section nulle $S^2 = \{(x, 0), \|x\| = 1\} \subset T^*S^2$ dans le sous-ensemble $\{(\varepsilon x, 0), \|\| = 1\} \subset Q_\varepsilon$. Lorsque ε tend vers 0, la section nulle est contractée sur le point singulier $(0, 0)$.

D'autre part, T^*S^2 privé de sa section nulle s'identifie à $]0, +\infty[\times SO(3)$ via

$$\begin{aligned} \Phi :]0, +\infty[\times SO(3) &\to T^*S^2 \setminus S^2 \\ (t, g) &\mapsto \left(g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, tg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'utiliser $]0, +\infty[\times SO(3)$ comme coordonnées sur $(\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2) \setminus \{0\}$ via le recouvrement de $SO(3)$ par les quaternions de norme 1.

C'est dans ces coordonnées qu'on va écrire la métrique de Stenzel comme une métrique ALE. On note X_1, X_2, X_3 la base de $\mathfrak{so}(3)$ donnée par

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ la base duale associée. Elle vérifie $d\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_3$, et les égalités correspondantes après permutation circulaire.

On a, pour $z = (X, Y) \in Q_\varepsilon$,

$$T_z Q_\varepsilon = \{(U, V) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle X, U\rangle - \langle Y, V\rangle = 0,\ \langle X, V\rangle + \langle Y, U\rangle = 0\}.$$

La structure complexe de $\mathbb{C}^3$ agit sur $T_z Q_\varepsilon$ par

$$J(U, V) = (-V, U).$$

Le tiré en arrière par $\Psi_\varepsilon \circ \Phi$, dans la base équivariante choisie, s'écrit alors

$$J_S \frac{\partial}{\partial t} = -X_3,\ J_S X_1 = -\tanh(t) X_2.$$

D'autre part, on a $\tau = \|z\|^2_{|Q_\varepsilon} = \|X\|^2 + \|Y\|^2$, donc

$$\tau \circ \Psi_\varepsilon \circ \Phi(t, g) = \varepsilon^2(\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) = \varepsilon^2(2\cosh^2(t) - 1).$$

et le potentiel de Kähler de la métrique de Stenzel est donc tiré en arrière sur

$$\begin{aligned} u(t, g) &= f \circ \tau(t, g) \\ &= \varepsilon\sqrt{\cosh^2(t) + \sinh^2(t) + 1} \\ &= \sqrt{2}\varepsilon \cosh(t). \end{aligned}$$

Ainsi, la forme de Kähler ω_S s'écrit, dans ces coordonnées,

$$\omega_S = dd^c_{J_S}(f \circ \tau) = \sqrt{2}\varepsilon(\cosh(t)\ \alpha_3 \wedge dt + \sinh(t)\ \alpha_2 \wedge \alpha_1).$$

La métrique riemannienne associée est alors

$$g_S = \sqrt{2}\varepsilon(\cosh(t)\ dt^2 + \sinh(t)\tanh(t)\ \alpha_1^2 + \cosh(t)(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)).$$

On effectue le changement de variable radial $\cosh(t) = \frac{s^2}{2}$.Cela revient, sur Q_ε, à passer d'une expression qui tend vers la métrique conique à une expression qui tend vers la métrique euclidienne loin de la partie singulière. On a alors

$$J_S \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2s}{\sqrt{s^4 - 4}} X_3, \ \ J_S X_1 = -\sqrt{1 - \frac{4}{s^4}} X_2. \tag{2.2.7}$$

Dans ces coordonnées sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}$, la structure complexe standard est donnée par

$$J_0 \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2}{s} X_3, \ \ J_0 X_1 = -X_2;$$

on a donc

$$J_S - J_0 = O(s^{-4}); \tag{2.2.8}$$

les dérivées d'ordre j des coefficients vérifient

$$\partial^j (J_S - J_0) = O(s^{-4-j}). \tag{2.2.9}$$

Pour ce qui est de la métrique, le changement de variables donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} g_S = \left(1 - \frac{4}{s^4}\right)^{-1} ds^2 + \frac{s^2}{4}\left(1 - \frac{4}{s^4}\right)\alpha_1^2 + \frac{s^2}{4}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2). \tag{2.2.10}$$

En comparant avec la métrique euclidienne

$$g_0 = ds^2 + \frac{s^2}{4}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

on obtient

$$g_0 - \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} g_S = O(s^{-4}), \tag{2.2.11}$$

et le contrôle correspondant sur les dérivées des coefficients :

$$\partial^j (g_0 - g_S) = O(s^{-4-j}), \tag{2.2.12}$$

Remarque 2.2.10. On reconnaît dans le membre de droite de (2.2.10) la métrique d'Eguchi-Hanson sur T^*S^2 (pour un choix approprié de paramètre de scaling). Toutefois, la structure complexe diffère de celle sur $T^*\mathbb{C}P^1 = O(-2)$ que l'on obtient en éclatant la singularité $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Ici, la section nulle n'est pas un diviseur exceptionnel biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$, mais une sphère lagrangienne.

2.2.5 Métriques à courbure scalaire nulle sur des déformations complexes des surfaces ALE.

Soit (X, J, ω, g) une surface kählérienne ALE, à courbure scalaire constante. On peut alors se demander si de petites déformations de la structure complexe J admettent encore des métriques kählériennes à courbure scalaire constante.

Si le groupe à l'infini Γ est un sous-groupe fini de $SU(2)$, alors, comme mentionné plus haut, la construction par quotients hyperKähler fournit une métrique Ricci-plate pour chaque déformation de la structure complexe d'origine.

Dans le cas des métriques de LeBrun sur $\mathcal{O}(-n)$, la question a été étudiée par Honda dans [60, 61]. A l'aide de méthodes twistorielles, il démontre que toutes les petites déformations de la structure complexe de $\mathcal{O}(-n)$ admettent également des métriques à courbure scalaire nulle.

Plus précisément, Honda observe que $\mathcal{O}(-n)$ est naturellement inclus dans une famille de fibrés affines au-dessus de $\mathbb{C}P^1$, décrits, avec les notations de l'exemple 1.1.4, par les fonctions de transition

$$u_0 = \frac{u_1}{z_0^n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{t_j}{z_0^j},$$

où $t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. On note A_t le fibré affine correspondant ; alors Honda démontre le résultat suivant :

Théorème. *Il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ tel que, pour tout $t \in \mathcal{U}$, la métrique de LeBrun sur $\mathcal{O}(-n)$ s'étend naturellement à une métrique ALE à courbure scalaire plate sur A_t. De plus, la famille de métriques ainsi obtenue s'identifie à la famille verselle de $\mathcal{O}(-n)$ parmi les métriqus ALE à courbure scalaire nulle.*

Plus généralement, Han et Viaclovsky ont montré dans [53] que pour tout sous-groupe fini de $U(2)$, toutes les petites déformations d'une surface kählérienne ALE (X, J, ω, g) à courbure scalaire constante admettent également des métriques kählériennes ALE à courbure scalaire constante. Ils retrouvent ainsi le résultat de Honda. Les méthodes employées sont ici analytiques : les déformations concernées sont décrites par des sections de $\mathrm{End}(TM)$ dans des espaces de Hölder à poids, que l'on introduira en section 2.5.2.

2.3 La somme connexe généralisée.

Après ce tour de vue des ingrédients, on peut maintenant aborder la construction de recollement proprement dite.

Considérons donc un orbifold kählérien (M, ω_M, J_M), à singularités isolées. On suppose que la métrique g_M sur M est à courbure scalaire constante, et que (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe non nul. Soient $(p_1, \ldots, p_\ell)$ des points de M.

Pour chaque $j = 1, \ldots, \ell$, de groupe d'isotropie $\Gamma_i \subset U(m)$, on se donne une variété kählérienne ALE (X_j, η_j) à courbure scalaire nulle, et asymptote à $\mathbb{C}^m/\Gamma_j$:

- Si Γ_j est non-trivial, on suppose que X_j, en tant que variété complexe, est une résolution de $\mathbb{C}^m/\Gamma_j$.
- Si le point p_j est régulier, on prend pour X_j l'éclatement de $\mathbb{C}^m$ en l'origine, muni de la métrique de Burns-Simanca. Cette métrique coïncide avec la métrique obtenue par LeBrun sur $\mathcal{O}(-1)$ discutée plus haut ; sa construction est explicitée à la section 8.1.2 du livre de Székelyhidi [112].

Au voisinage de $p_j \in M$, on considère des coordonnées holomorphes

$$z^j = (z_1^j, \ldots, z_m^j) : U \ni p \to B(0,1) \subset \mathbb{C}^m,$$

dans lesquelles la forme de Kähler ω_M s'écrit

$$\omega_M = dd^c\left(\frac{|z^j|^2}{2} + \varphi_j(z^j)\right),$$

où $\varphi_j(z^j) = O(|z^j|^4)$. L'existence de telles coordonnées est une caractérisation des métriques de Kähler discutée au Chapitre 1, proposition 1.2.3 pour les points réguliers. L'extension aux points singuliers est immédiate, en utilisant l'astuce habituelle de travailler de façon Γ-invariante dans les cartes.

Symétriquement, on se donne des coordonnées holomorphes ALE sur chaque X_j :

$$u^j = (u_1^j, \dots, u_m^j) : X \setminus K \to \left(\mathbb{C}^m/\Gamma\right) \setminus B(0,R)$$

dans lesquelles la forme de Kähler η_j soit de la forme

$$\eta_j = dd^c\left(\frac{|u^j|^2}{2} + \psi_j(u^j)\right),$$

où $\psi_j(u^j) = O(|u^j|^{4-2m})$ si $m \geq 3$, $\psi_j(u^j) = O(\log|u^j|)$ si $m = 2$.

Choisissons un paramètre $\varepsilon > 0$; le 'rayon de recollement' est pris de la forme $r_\varepsilon := \varepsilon^\beta$, avec $\beta \in]0,1[$. Le paramètre β sera ajusté lors de l'analyse de l'équation. On note également $R_\varepsilon := \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon^{\beta-1}$. Dans les cartes précédemment décrites, on 'remplace' alors un voisinage de chaque p_j par un complémentaire d'un compact dans X_j, après une remise à l'échelle. Plus précisément, pour chaque j, on identifie

$$\{z^j, \varepsilon < |z^j| < \varepsilon_0\} \subset M \simeq \{u^j, 1/\varepsilon_0 < |u^j| < 1/\varepsilon\} \subset X_j$$
$$(z_1^j, \dots, z_m^j) = \varepsilon(u_1^j, \dots, u_m^j)$$

On obtient ainsi une variété M_ε ; si tous les points singuliers de M sont parmi les p_j, c'est bien une variété lisse, sinon c'est encore un orbifold. Cela ne changera pas l'analyse ultérieure, et nous n'en tiendrons pas compte. Remarquons également que, puisque le recollement a été effectué dans des cartes holomorphes, la variété obtenue est naturellement une variété complexe.

Pour en faire une variété kählérienne, on va la munir d'une forme symplectique J-invariante en recollant les potentiels de Kähler locaux de ω_M et η_j.

Considérons une fonction réelle lisse $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée par 1, et telle que

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

On définit par ailleurs une fonction $\rho : M_\varepsilon \to \mathbb{R}^+$, telle que $\rho = |z^j|$ dans le domaine de chaque carte au voisinage de p_j, et étendue de façon lisse à une fonction bornée sur M. Les singularités de M étant isolées, une telle fonction est bien définie. Pour r suffisamment petit pour que cela ai du sens, on pose $B(p_j, r)$ la région $\{\rho < r\}$. Pour r assez petit, cetet région s'identifie au complémentaire d'un compact dans X_j.

On pose alors

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: p \in M_\varepsilon \mapsto \gamma\left(\frac{\rho}{r_\varepsilon}\right) \\ \gamma_2 &:= 1 - \gamma_1. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

On définit alors une 2-forme sur M_ε par

$$\omega_\varepsilon := \begin{cases} \omega_M \text{ sur } M \setminus B(p_j, 2r_\varepsilon) \\ dd^c\left(\frac{|z^j|^2}{2} + \gamma_1(z^j)\varphi_j(z^j) + \varepsilon^2\gamma_2(z^j)\psi_j(\frac{z_j}{\varepsilon})\right) \text{ sur } B(p_j, 2r_\varepsilon) \setminus B(p_j, r_\varepsilon) \\ \varepsilon^2\eta_j \text{ sur } B(p_j, r_\varepsilon). \end{cases}$$

Cette forme est fermée, et non-dégénérée pour ε suffisamment petit. Il s'agit donc d'une forme symplectique sur M_ε, compatible avec la structure complexe par construction. Ainsi $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ est une variété (ou un orbifold) kählérienne. La classe de Kähler de ω_ε est de la forme

$$[\omega_\varepsilon] = [\omega] + \sum_j \varepsilon^2 a_j PD([E_j]) \tag{2.3.2}$$

où les a_j sont des coefficients positifs et $PD([E_j])$ désigne le dual de Poincaré du diviseur exceptionnel dans la résolution $X_j \to \mathbb{C}^m/\Gamma_j$. Ainsi, le paramètre de recollement ε s'interprète géométriquement comme le volume des diviseurs exceptionnels dans la somme connexe. On va maintenant chercher un représentant à courbure scalaire constante de cette classe de Kähler.

2.4 L'équation des métriques à courbure scalaire constante.

En vertu du lemme du dd^c (Proposition 1.2.4), on cherche donc une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$ telle que la métrique kählérienne $\omega_\varepsilon + dd^c f$ soit à courbure scalaire constante.

Remarque 2.4.1. On avait observé au Chapitre 1, (1.3.10), que la courbure scalaire totale d'une métrique de Kähler ne dépendait que de la première classe de Chern et de la classe de Kähler (non de son représentant). Par conséquent, la constante en question est complètement déterminée par les données du problème.

On cherchera à résoudre l'équation suivante, d'inconnue f (ou encore (f, λ) :

$$s(\omega_\varepsilon + dd^c f) - s(\omega_M) = \lambda. \tag{2.4.1}$$

Rappelons que, par hypothèse, $s(\omega_M)$ est une constante.

Pour résoudre cette équation, on va adapter la preuve du théorème d'inversion locale. On considère l'opérateur linéarisé

$$L_\varepsilon := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_\varepsilon + t dd^c f),$$

d'où l'on déduit un 'développement de Taylor' de la courbure scalaire :

$$s(\omega_\varepsilon + dd^c f) = s(\omega_\varepsilon) + L_\varepsilon f + Q_\varepsilon f,$$

où Q_ε réunit tous les termes non linéaires en f.

On peut alors réécrire l'équation (2.4.1) sous la forme

$$L_\varepsilon f - \lambda = s(\omega_M) - s(\omega_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

Alors, par analogie avec le théorème d'inversion locale, on observe que si l'on trouve un inverse à l'opérateur linéarisé

$$\tilde{L}_\varepsilon : (f, \lambda) \mapsto L_\varepsilon f - \lambda, \tag{2.4.2}$$

défini entre deux espaces fonctionnels bien choisis, l'équation de la courbure scalaire constante (2.4.1) est ramenée à un problème de point fixe. Pour mettre en œuvre cette stratégie, les étapes à suivre sont donc

1. Calculer la linéarisation de la courbure scalaire et comprendre la géométrie de l'équation.
2. Définir des espaces fonctionnels adaptés à la situation de recollement.
3. Prouver l'inversibilité de $\tilde{L}_\varepsilon$ dans ces espaces fonctionnels, et obtenir une borne satisfaisante pour la norme de l'inverse.
4. Contrôler, dans les normes choisies, la 'qualité de la solution approchée' $\|s(\omega_M) - s(\omega_\varepsilon)\|$.
5. Contrôler le comportement du terme non linéaire Q_ε.

Comme on le verra, c'est la troisième étape qui nécessitera l'analyse la plus fine. Ce sera le point focal de la section 2.5, avec la définition des *espaces de Hölder à poids* dans lesquels cette analyse sera réalisée. Comme on le verra, ces espaces permettront de tenir compte des caractéristiques des deux variétés 'modèles' M et X_j, et de transporter l'analyse sur ces modèles.

Linéarisation de la courbure scalaire. Rappelons que, au cours de la preuve de la proposition 1.3.1, on avait obtenu

Proposition 2.4.1. *Soit (M, J, ω) une variété kählérienne, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Posons $\omega_t := \omega + tdd^c f$. Alors on a*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega_t) = -\Delta^2 f - 2\langle dd^c f, \rho\rangle = -2\mathbb{L}f + (ds(\omega), df), \tag{2.4.3}$$

où le Laplacien Δ est calculé à partir de la métrique g, et ρ est la forme de Ricci de la métrique kählérienne.

Remarque 2.4.2. 1. On retrouve ainsi la formule plus générale de la première variation de la courbure scalaire fournie dans le livre de Besse [16], 1.174

$$\dot{s}_g = \Delta_g(\mathrm{tr}_g \dot{g}) + \delta\delta\dot{g} - g(\mathrm{Ric}_g, \dot{g}),$$

pour une variation de la métrique donnée par $\dot{g}(X, Y) = dd^c f(X, JY)$.

2. De l'expression

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s(\omega + tdd^c f) = -2\mathbb{L}f + (ds(\omega), df),$$

on déduit que, si la métrique kählérienne ambiante est à courbure scalaire constante, la linéarisation de la courbure scalaire coïncide avec $\mathbb{L}$. Conformément à la discussion faite en section 1.3.5, son noyau est alors engendré par les potentiels de champs de vecteurs réels holomorphes. On voit ainsi les champs de vecteurs apparaître à nouveau comme obstruction à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, d'où l'hypothèse faite sur l'orbifold (M, J_M) à la base de la procédure de recollement. Le cas où M admet des champs de vecteurs holomorphes demande plus de soin lors de l'analyse de l'équation, qui maintenant admet un noyau non-trivial ; cela a cependant était fait, comme on le verra en section 2.6.

La variation de la courbure scalaire dans une classe de Kähler fixée est donc un opérateur elliptique d'ordre 4 en la fonction potentiel f. L'objet de la section suivante est d'introduire les outils d'analyse nécessaires à l'étude de cet opérateur L_ε sur la variété M_ε. En particulier, on souhaitera comparer ses propriétés à celle des opérateurs correspondants $\mathbb{L}_M$ sur l'orbifold et $\mathbb{L}_{X_j}$ sur chaque modèle ALE.

2.5 Analyse dans des espaces à poids.

2.5.1 Opérateurs elliptiques sur une variété compacte.

On commence par un bref rappel d'analyse sur des variétés compactes ; on s'intéresse en particulier aux propriétés du Laplacien. On trouvera plus de détails sur le sujet dans le chapitre 1 du livre de Joyce [67], paragraphes 1.2 à 1.5, ou dans le chapitre 2 du livre de Szekelyhidi [112]. Une exposition plus avancée des opérateurs elliptiques d'ordre 2 est fournie par le livre de Gilbarg et Trudinger [51]. Dans le reste de cette section, M désigne une variété lisse.

Définition 2.5.1. — *Un opérateur différentiel d'ordre k sur les fonctions de M est une application P qui, a une fonction $u : M \to \mathbb{R}$, associe $Pu : M \to \mathbb{R}$ où Pu est de la forme*

$$(Pu)(x) = Q(x, u(x), Du(x), \ldots, D^k u(x)), \tag{2.5.1}$$

pour une fonction réelle lisse Q. Selon la régularité de u, les dérivées sont éventuellement définies au sens faible.

— *Soient E, F deux fibrés vectoriels au-dessus de M. On suppose qu'on dispose d'une connexion ∇^E sur E, ainsi que d'une connexion ∇ sur M, nous permettant de définir des dérivées successives de sections de E . Un opérateur différentiel d'ordre k, $P : \mathcal{C}^k(E) \to \mathcal{C}^0(F)$, est une application qui à une section v, k fois différentiable, de E associe une section de F de la forme*

$$(Pv)(x) = Q(x, \nabla^E v, \ldots, \nabla^E_{i_1,\ldots,i_k} v) \in F_x,$$

où Q est lisse.

Remarque 2.5.1. On peut définir des opérateurs plus généraux en baissant la régularité de Q. Cependant, les cas qui nous intéresseront seront des opérateurs lisses.

Plus généralement encore, en utilisant la notion de k-jets définie par Palais dans le chapitre 1 de [96], on peut en fait définir une notion d'opérateur différentiel d'ordre k en l'absence de connexion. Un opérateur différentiel d'ordre k est alors une application

$$P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$$

qui s'annule sur toute section lisse v de E dont le k-jet est nul.

Espaces de Hölder. Soit (V, g) une variété riemannienne compacte, D sa connection de Levi-Civita. On note $\mathcal{C}^k(V)$ l'ensemble des fonctions continues sur V, admettant des dérivées d'ordre k continues sur M. Cet espace est naturellement muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(V)} := \sum_{j=0}^{k} \sup_V |D^k f|_g;$$

c'est alors un espace de Banach. Remarquons que cette définition s'étend à l'espace des sections de tout fibré vectoriel E sur V, pourvu qu'il soit muni d'une métrique sur les fibres et d'une connexion préservant ces métriques.

On va s'intéresser au problème de la régularité des opérateurs différentiels. Si P est un opérateur différentiel (elliptique) d'ordre p entre deux fibrés vectoriels E et F sur V, $v \in \Gamma(E)$ et $w \in \Gamma(F)$ deux sections telles que $Pv = w$, alors si $v \in \mathcal{C}^{k+p}(E)$, on a naturellement $w \in \mathcal{C}^{k+p}(F)$.

Inversement, on peut se demander si le contraire est vrai : est ce que $w \in \mathcal{C}^{k+p}(F)$ implique $v \in \mathcal{C}^{k+p}(E)$?

Il se trouve que cela n'est pas vrai en général ; on trouvera un contre-exemple dans le cas du Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ dans la section 2.6 du chapitre 2 du livre de Morrey [89]. Il nous faut introduire un contrôle supplémentaire sur la dérivée d'ordre plus élevé. On va donc considérer plutôt des *espaces de Hölder* définis comme suit (voir aussi la section 4.1 du livre de Gilbarg et Trudinger [51]).

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Une fonction f sur V est *continue au sens de Hölder*, avec exposant α, si la quantité

$$[f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}$$

est finie, où la distance d entre x et y est calculée via la métrique g. On peut interpréter cette condition comme une 'dérivabilité fractionnaire', vérifiant un théorème des accroissements finis 'à l'ordre α'.

Remarque 2.5.2. Cette définition s'étend également aux sections de fibrés vectoriels vérifiant les mêmes conditions que précédemment. Pour $v \in \Gamma(E)$, la quantité $|v(x) - v(y)|$ est alors calculée en utilisant le transport parallèle associée à la connexion sur F.

On définit alors l'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}(V)$ des fonctions $f \in \mathcal{C}^k$ sur V dont la k-ième dérivée $D^k f$ est α-continue au sens de Hölder. Pour un fibré vectoriel E muni d'une métrique sur les fibres reliées par une connexion compatible, on note de même $\mathcal{C}^{k,\alpha}(E)$.

On va voir que, dans ces espaces, les opérateurs *elliptiques* vérifient les propriétés de régularité espérées.

Symbole principal d'un opérateur et ellipticité. Soient E et F deux fibrés vectoriels au-dessus d'une variété M et $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur différentiel *linéaire* d'ordre k. Dans une carte $U \subset M$ trivialisant simultanément E et F, il existe alors, pour $x \in U$ et pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq k$, des matrices $A_\alpha(x)$ (dépendant de façon lisse de x), de taille dim $E\times$ dim F telles que, pour $u \in \Gamma(E)$,

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(x)\partial^\alpha u.$$

Soit $\xi \in T^*_x M$. On définit le *symbole principal* de L en (x, ξ) par

$$\sigma_\xi(L, x) := \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x)\xi^\alpha \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x), \tag{2.5.2}$$

where $\xi^a := \prod_{j=1}^k \xi_j^{\alpha_j}$. On peut vérifier en changeant de cartes que ceci définit, pour tout $x \in M$ une application polynomiale homogène de degré k $T^*_x M \to \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$.

De façon plus intrinsèque, pour $x \in M$, $v \in E_x$, $\xi \in T^*_x M$, on peut montrer que si u est une section de E telle que $u(x) = v$, et $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que $\varphi(x) = 0$, $d_x\varphi = \xi$, alors

$$\sigma_\xi(L, x)v = \frac{1}{k!} L(\varphi^k u)_{|x}; \tag{2.5.3}$$

on vérifie alors que cette expression ne dépend pas du choix de u et φ.

Exemple 2.5.1. 1. La dérivée extérieure $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ vérifie, pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\alpha \in \Omega^p(M)$, $d(\varphi\alpha) = \varphi d\alpha + d\varphi \wedge \alpha$. Donc, d'après (2.5.3), pour $x, \in M,\ \xi \in T^*_x M$,

$$\sigma_\xi(d, x)\alpha = \xi \wedge \alpha.$$

2. Soit $D : \Gamma(E) \to \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel $E \to M$; d'après la règle de Leibniz, on a de même

$$\sigma_\xi(D, x)v = \xi \otimes v.$$

3. Le laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ sur une variété riemannienne (M, g) est localement donné par $\Delta u = -g^{ij} D_i D_j u$. Il vérifie, pour deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u - 2g(\nabla u, \nabla v).$$

On en déduit que son symbole est localement donné, en $\xi \in T^*_x M$, par

$$\sigma_\xi(\Delta, x) = -g^{ij}\xi_i\xi_j = -\|\xi\|^2.$$

Plus généralement, on peut considérer le Laplacien sur les p-formes $\Delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$. Son symbole est donné par

$$\sigma_\xi(\Delta, x)\alpha = -\|\xi\|^2\alpha,$$

pour $\alpha \in \Omega^p(M)$; on trouvera une preuve de ce résultat au Lemme 5.18 du livre de Voisin [120].

Soit $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur différentiel ; la *linéarisation* de P en $u \in \Gamma(E)$ est l'opérateur linéaire $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ défini par

$$L : v \in \Gamma(E) \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P(u + tv).$$

On définit ainsi le symbole de P comme étant le symbole de sa linéarisation L.

Définition 2.5.2. *On dit qu'un opérateur différentiel $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ est* elliptique *si, pour tout $x \in M$ et pour tout $\xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$, le symbole principal de P $\sigma_\xi(P, x)$ définit un isomorphisme linéaire de E_x dans F_x.*

Remarque 2.5.3. L'ellipticité impose en particulier que E et F aient même rang.

Exemple 2.5.2. Le laplacien est un opérateur elliptique d'ordre 2. On peut aussi montrer que l'opérateur

$$d + \delta : \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M) \to \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$$

est un opérateur elliptique d'ordre 1.

Propriétés des opérateurs elliptiques. Les opérateurs elliptiques sur une variété compacte présentent des propriétés particulièrement agréables, notamment en termes de régularité. Autrement dit, si $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ est un opérateur elliptique, et u est la solution d'une équation $Pu = v$, alors u est aussi régulier que l'on peut l'espérer compte tenu de la régularité de v. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 (Estimées de Schauder). *Soit $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur linéaire elliptique d'ordre k. Supposons qu'on ait $Pu = v$ au sens des distributions, où $u \in L^1(E)$, $v \in L^1(F)$. Alors, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, on a $u \in \mathcal{C}^{\ell+k,\alpha}(E)$ dès que $v \in \mathcal{C}^{\ell,\alpha}(F)$, et, de plus, il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{\ell+k,\alpha}(E)} \leq C\left(\|u\|_{\mathcal{C}^0} + \|v\|_{\mathcal{C}^{\ell,\alpha}(F)}\right). \tag{2.5.4}$$

Remarque 2.5.4. On obtient en fait le même résultat si les coefficients de P sont seulement des fonctions $\mathcal{C}^{\ell,\alpha}$ (plutôt que lisses).

Un panorama de la façon dont on prouve des résultats de régularité elliptique est donnée à la section 1.4.1 du livre de Joyce [67]. On y traite d'abord les opérateurs elliptiques à coefficients constants. Dans ce cas, on dispose d'une *représentation de Green* des solutions : la solution d'un problème elliptique

$Pu = f$ s'écrit comme le produit de convolution de f avec une certaine fonction, la fonction de Green (on pourra consulter à ce sujet la section 2.4 du livre de Gilbarg et Trudinger [51]. Cette représentation permet d'obtenir les estimées souhaitées.

Dans un deuxième temps, on traite les opérateurs à coefficients non constants en les approchant par un opérateur à coefficient constant. Cette approche fonctionne pourvu que les coefficients de l'opérateur ne varient pas trop brutalement, ce que l'on peut contrôler via des estimées en normes de Hölder sur lesdits coefficients.

Remarque 2.5.5. Ces résultats sont prouvés d'abord sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$, que l'on étend alors aux variétés compactes par un recouvrement par des cartes ; en conséquence, les résultats obtenus sont, par essence, de nature *locale*.

Une conséquence importante des résultats de régularité est de garantir l'existence de solutions à des équations elliptiques. Un premier résultat d'importance est le suivant, portant sur le noyau d'un opérateur elliptique, (Théorème 1.5.1 dans Joyce [67]) :

Proposition 2.5.1. *Soit $P : \mathcal{C}^{k+l,\alpha}(E) \to \mathcal{C}^{l,\alpha}(F)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre k. Alors, le noyau de P ne dépend pas de l, et c'est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^\infty(E)$.*

Supposons maintenant que la variété compacte M est munie d'une métrique riemannienne, et que les fibrés E et F considérés sont munis de métriques sur les fibres. Soit $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur différentiel. Comme on l'a déjà mentionné au chapitre 1 (1.2.1, on peut alors associer un *adjoint formel* $P^* : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ à P défini par

$$\int_M \langle Pu, v\rangle_F \mathrm{vol}_g = \int_M \langle u, P^*v\rangle_E \mathrm{vol}_g.$$

On a de plus, pour $\xi \in T^*M$,

$$\sigma_\xi(P^*, x) = \sigma_\xi(P, x)^*;$$

si P est elliptique, P^* l'est donc également.

On a alors le critère suivant pour l'existence de solutions à des problèmes elliptiques (Théorème 1.5.3 dans Joyce [67]), qui met en évidence le fait que les opérateurs elliptiques, en un sens, se comportent comme des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie. Plus précisément :

Proposition 2.5.2 (Alternative de Fredholm). *Soient E, F deux fibrés vectoriels au-dessus d'une variété riemannienne compacte (M, g), munis de métriques $\langle\cdot,\cdot\rangle_E, \langle\cdot,\cdot\rangle_F$ sur les fibres. Soit $P : \mathcal{C}^{k+l,\alpha}(E) \to \mathcal{C}^{l,\alpha}(F)$ un opérateur elliptique d'ordre k et P^* son adjoint. Alors l'image de P est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^{l,\alpha}(F)$. De plus, pour $v \in \mathcal{C}^{l,\alpha}(F)$, il existe $u \in \mathcal{C}^{k+l,\alpha}(E)$ tel que $Pu = v$ si, et seulement si, $v \perp KerP^*$. De plus, un tel antécédent u est unique si on impose $u \perp KerP$.*

Remarque 2.5.6. Cette proposition vien du fait, plus général, que les opérateurs elliptiques définissent des opérateurs de *Fredholm* entre espaces de Hölder, c'est à dire que leurs noyau et conoyau sont de dimension finie, et leur image est un sous-espace vectoriel fermé.

Ainsi, un opérateur elliptique réalise donc un isomorphisme 'en dehors' des sous-espaces de dimension finie Ker P et Ker P^*. Le problème d'existence et d'unicité des solutions est donc, en un sens, ramené à l'étude de ces espaces de dimensions finies.

Cette idée mène aussi à définir l'*indice de Fredholm* de l'opérateur elliptique P par

$$\mathrm{ind}P := \dim \mathrm{Ker}P - \dim \mathrm{Ker}P^* = \dim \mathrm{Ker}P - \dim \mathrm{Coker}P.$$

Si $P : E \to F$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, alors l'indice ne dépend en fait pas de P, mais seulement des dimensions de E et F. Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer montre que cette propriété se transporte, en un sens, aux opérateurs elliptiques. En substance, l'indice d'un opérateur elliptique P est invariant par déformations qui préservent l'ellipticité de P, et peut s'exprimer en termes d'invariants topologiques sur le symbole de P. En ce sens, il est 'indépendant' de P.

On trouvera plus d'information sur ce théorème dans le livre de Melrose [84].

2.5.2 Analyse sur une variété non-compacte.

A première vue, il serait envisageable d'appliquer directement ces méthodes elliptiques à l'opérateur L_ε sur la variété compacte M_ε. Cependant, pour obtenir un contrôle suffisant de la norme d'opérateur de l'inverse de L_ε, il s'avère préférable de comparer l'opérateur L_ε aux opérateurs modèles $\mathbb{L}_M$ défini sur l'orbifold 'percé' $M^* := M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}$, ainsi que $\mathbb{L}_X$ sur les espaces ALE X_j.

Cependant, les variétés M^* et X ne sont pas compactes ; en conséquence, les opérateurs elliptiques n'y bénéficient pas des propriétés de régularité en norme de Hölder détaillées à la section précédente 2.5.1. En particulier, les estimées de Schauder (2.5.4) ne s'y appliquent pas.

Pour récupérer des propriétés de ce type, on introduit des espaces plus appropriés au cas non-compact : les *espaces de Hölder à poids*. Le poids en question a vocation à décrire le comportement des fonctions au voisinage des 'trous' p_i dans M, ou à l'infini sur X.

Afin de mieux comprends les phénomènes en jeu, on introduit d'abord ces espaces sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puis en déduira les normes appropriées sur M^* et X. On discutera alors des propriétés de $\mathbb{L}_M$ et $\mathbb{L}_X$ dans ces espaces.

On s'inspirera pour cette partie de la section 8.2 du livre de Székelyhidi [112], ainsi que les notes de F. Pacard [93]. Pour l'analyse sur les espaces ALE, on pourra aussi se référer à la section 8.3 du livre de Joyce [67].

Sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Pour $r > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} f_r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(rx). \end{aligned}$$

On définit alors la norme de Hölder de poids δ par

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})} := \sup_{r>0} r^{-\delta}\|f_r\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(B_2\setminus B_1)}.$$

On dit que $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ si cette quantité est finie.

Remarque 2.5.7. On peut interpréter cette norme comme suit. Le rôle du rescaling f_r est d'étudier la fonction f sur un anneau $B_{2r} \setminus B_r$; lorsque r est grand, on regarde donc le comportement 'à l'infini' de f, tandis que lorsque r est petit, on 'zoome' sur le comportement au voisinage de 0. Dans un tel anneau, on a $|x| = O(r)$, et la norme à poids permet donc de comparer f à une fonction puissance $x \mapsto |x|^{\delta}$.

Le lemme suivant est utile pour traiter les non-linéarités éventuelles des équations :

Lemme 2.5.1. *La multiplication entre espaces de Hölder à poids*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta'}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\to \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta+\delta'}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ (f,g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

est bornée.

Par ailleurs, observons que les dérivées d'ordre i de f_r vérifient

$$(\nabla^i f_r)(x) = r^i (\nabla^i f)(rx).$$

Donc, si $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\nabla^i f \in \mathcal{C}^{k-i,\alpha}_{\delta-i}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

En particulier, pour tout $k \geq 2$, le Laplacien Δ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définit une application linéaire bornée

$$\Delta : \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_{\delta-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

On s'intéresse aux propriétés de Δ et de $\Delta^2 = \mathbb{L}_0$ dans ces espaces à poids. En particulier, on souhaite récupérer les propriétés évoquées à la subsection 2.5.1. On va voir que le caractère Fredholm de Δ dépend du poids δ. La notion-clé pour décrire les 'mauvais poids' est la suivante (voir aussi Pacard et Rivière [94]) :

Définition 2.5.3. *On dit que $\delta \in \mathbb{R}$ est une* racine indicielle *du laplacien Δ en 0 s'il existe une fonction harmonique $f \in C^{2,\alpha}(B(0,1) \setminus \{0\})$ dont le taux de croissance en 0 est δ. On définit de façon similaire les racines indicielles de Δ en $+\infty$.*

Lemme 2.5.2. *L'ensemble des racines indicielles de Δ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est $\mathbb{Z}\setminus]2-n, 0[= \{2-n, 1-n, -n, \ldots\} \cup \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Preuve. Il s'agit d'un calcul en coordonnées polaires. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\Delta f = 0$. On écrit $f = f(r, \theta)$, pour $r > 0$ et $\theta \in S^{n-1}$, et on décompose f dans la base hilbertienne fournie par les fonctions propres de $\Delta_{S^{n-1}}$.

Ainsi, soit ψ_i la fonction propre associée à $\lambda_i = -i(n-2+i)$, pour $i \in \mathbb{N}$. Il existe des fonctions $a_i :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que

$$f(r,\theta) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i(r)\psi_i(\theta).$$

On a alors

$$0 = \Delta f = \sum_i \left(a_i''(r) + \frac{n-1}{r} a_i'(r) + \frac{\lambda_i}{r^2} a_i(r) \right) \psi_i(\theta)$$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, a_i est donc solution de l'équation différentielle d'ordre 2.

$$a_i''(r) + \frac{n-1}{r} a_i'(r) + \frac{\lambda_i}{r^2} a_i(r) = 0.$$

Autrement dit,

$$a_i(r) = \mu_1 r^{s_i^+} + \mu_2 r^{s_i^-},$$

où les $s_i^{\pm}$ sont les racines de

$$0 = s(s-1) + (n-1)s + \lambda_i = s^2 + (n-2)s - i(n-2+i),$$

i.e.

$$s_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(2 - n \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4i(n-2+i)}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - n \pm n - 2 + 2i\right)$$

Lorsque i parcourt $\mathbb{N}$, les taux de croissance possibles pour une fonction harmonique balaient donc bien $\mathbb{Z} \backslash]2-n, 0[$. $\square$

En dehors de ces poids critiques, on retrouve alors :

Proposition 2.5.3. *Si δ n'est pas une racine indicielle, alors l'opérateur*

$$\Delta : \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_{\delta-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

est un isomorphisme.

On trouvera la preuve dans l'article de Bartnik [15], Théorème 1.7 (où elle est réalisée dans des espaces de Sobolev). La preuve repose sur l'existence d'une fonction de Green pour Δ, qui nous permet de décrire une solution à $\Delta f = g$, pour $g \in \mathcal{C}^{k-2,\alpha}_{\delta-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, sous forme d'un produit de convolution. Pour $n > 2$ et $2 - n < \delta < 0$, cette fonction de Green est donnée par

$$G(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}},$$

où c_n ne dépend que de la dimension. Les cas $\delta < 2 - n$ et $\delta > 0$ donnent lieu à des expressions plus compliquées de la représentation de Green, mais fonctionnent de la même façon. Ceci permet de démontrer la surjectivité, tandis que l'injectivité découle du lemme 2.5.2.

Remarque 2.5.8. Lorsque δ est une racine indicielle, Δ n'est pas un isomorphisme, ni d'ailleurs un opérateur de Fredholm. Par exemple, si on considère une fonction de la forme $f(x) = \log\log(|x|)$ en dehors d'un compact, alors $\Delta f = O(\frac{1}{|x|^2 \log |x|})$. Donc $\Delta f \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-2}$, mais $f \notin \mathcal{C}^{0,\alpha}_0$ puisque f n'est pas bornée. En fait, Δf est dans la fermeture de Im $\Delta \subset \mathcal{C}^{2;\alpha}_{-2}$. En particulier, l'image n'est pas fermée.

En appliquant deux fois de suite la proposition 2.5.3, on obtient :

Proposition 2.5.4. *Si $\delta \notin \mathbb{Z} \backslash]4-n, 0[$, l'opérateur*

$$\Delta^2 : \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathcal{C}^{k-4,\alpha}_{\delta-4}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

est un isomorphisme.

Remarquons que Δ^2 est exactement l'opérateur de Lichnerowicz associé à la métrique plate g_O sur $\mathbb{C}^m$. Par ailleurs, les opérateurs que l'on souhaite étudier, $\mathbb{L}_M$ et $\mathbb{L}_X$, admettent Δ^2_M et $\Delta^2_{X_j}$ comme terme d'ordre le plus élevé ; on va utiliser ce fait, conjointement avec un contrôle approprié des métriques $\|g_M - g_0\|$ et $\|g_X - g_0\|$, pour transposer les propriétés que l'on vient d'obtenir sur $\mathbb{L}_0$ à notre contexte. On traite d'abord le cas de l'orbifold.

Sur l'orbifold percé M^*. Rappelons que $M^* := M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}$ est muni, au voisinage de chaque p_i, d'une carte orbifold holomorphe $z^i : U_i \subset M \to B(0; r_0) \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, dans laquelle

$$\omega_M = dd^c \left(\frac{|z^j|^2}{2} + O(|z^j|^4) \right).$$

Afin d'étudier l'opérateur $\mathbb{L}_M$ sur M^*, on introduit des espaces de Hölder à poids qui nous permettront de contrôler le comportement de fonctions ou de tenseurs au voisinages des 'trous' p_i. En s'inspirant du paragraphe précédent, on pose la définition suivante :

Définition 2.5.4. *Soit $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}(M^*)$, et δ un réel. Soit $j = 1, \ldots, \ell$. On définit*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(B(p_j,r_0))} := \sup_{0<r\leq r_0} r^{-\delta} \|f_r\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(B(p_j,1)\backslash B(p_j,1/2))}.$$

Si chacune de ces quantités est finie pour $j = 1, \ldots, \ell$, on dit que $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M^*)$ et on pose

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M^*)} := \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M\backslash \cup B(p_j,r_0))} + \sum_j \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(B(p_j,r_0))}.$$

Exemple 2.5.3. La fonction $z \mapsto |z|^{\delta'}$ dans une carte $B(p_j, r_0)$ est dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(B(p_j, r_0)$ si et seulement si $\delta' \geq \delta$.

Remarque 2.5.9. On peut définir ces normes de façon équivalente comme ceci : autour de chaque $p \in M^*$, on considère des cartes vers une petite boule géodésique

$$\psi : B(0,1) \to B(p, \eta r_0)$$

où $r_0 = \rho(p)$ et telles que

$$\psi^* g_M - r_0^2 g_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{C}^k}(r_0^2).$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M^*)$ est dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(M^*)$ s'il existe $C > 0$ telle que dans toute carte de ce type,

$$\|f \circ \psi\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} \leq C r_0^{\delta}.$$

Remarque 2.5.10. Une fonction $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(M^*)$ pour $\delta \geq 0$ s'étend par continuité aux singularités p_i.

Par analogie avec le paragraphe précédent, on dit que $\delta \in \mathbb{R}$ est une *racine indicielle* de $\mathbb{L}_{M^*}$ en p_i s'il existe une fonction non-triviale v définie sur la sphère $\partial B(p_j, 1)$ telle que

$$\mathbb{L}_{M^*}(|z|^{\delta} v) = O(|z|^{\delta-3}). \tag{2.5.5}$$

L'expression (1.3.14) montre que les coefficients de $\mathbb{L}_{M^*}$ font intervenir des dérivées à l'ordre au plus 2 de la métrique g_M. Or, dans les cartes que l'on a choisies, $\|g_M - g_0\| = O(|z|^2)$ au voisinage de p_i, et on dispose de plus des estimées similaires sur les dérivées. On en déduit que (2.5.5) est vérifiée si, et seulement si

$$\Delta_0^2(|z|^{\delta} v) = O(|z|^{\delta-3}),$$

où Δ_0 est le Laplacien euclidien sur $\mathbb{C}^m/\Gamma_i$. Autrement dit, l'ensemble des racines indicielles pour $\mathbb{L}_{M^*}$ est le même que pour Δ_0^2 : c'est donc un sous-ensemble de $\mathbb{Z}\backslash]4-2m, 0[$.

Remarque 2.5.11. On considère ici les fonctions harmoniques Γ_i-invariants pour définir l'ensemble des racines indicielles ; c'est donc éventuellement un sous-ensemble strict de $\mathbb{Z}\backslash]4-2m, 0[$.

Pour $\delta \notin \mathbb{Z}\backslash]4-2m, 0[$, l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^{\delta}_{M^*} : \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*) &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*), \\ f &\mapsto -\Delta^2_{g_M} f - 2\langle \rho_M, dd^c f\rangle \end{aligned}$$

est bien défini, et pour ce choix de poids, les résultats obtenus par Bartnik dans [15] (notamment les Théorèmes 1.6, 1.10) montrent que c'est un opérateur de Fredholm. De plus, puisque g_M est à courbure scalaire constante, c'est un opérateur autoadjoint d'après (1.3.14). Par un argument de dualité, on peut montrer que

$$\dim \text{ Ker } \mathbb{L}^{\delta}_{M^*} = \dim \text{ Coker } \mathbb{L}^{4-2m-\delta}_{M^*}. \tag{2.5.6}$$

Pour plus de détails au sujet de ces calculs d'indices de Fredholm, la principale référence est le livre de Melrose [84].

On a alors le résultat suivant, démontrés dans l'article d'Arezzo et Pacard [6], Proposition 5.1, ou encore, pour la première, dans le livre de Szekelyhidi [112], Proposition 8.9 :

Proposition 2.5.5. *Supposons que $m \geq 3$, $\delta \in]4-2m, 0[$. Alors l'opérateur*

$$\begin{aligned}\tilde{L}^\delta : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*) \times \mathbb{R} &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4},\\ (f,\lambda) &\mapsto \mathbb{L}_{M^*} f + \lambda.\end{aligned}$$

est surjectif, avec un noyau de dimension 1 constitué des constantes.

Preuve. On rappelle ici la preuve présentée dans [6]. Lorsque $4-2m < \delta < 0$, la théorie de la régularité elliptique implique que les éléments du noyau de $\mathbb{L}_{M^*} : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$ s'étendent en fonctions lisses sur M. Puisque l'on a supposé que M n'admettait pas de champs de vecteurs holomorphes, ceci implique que le noyau de $\mathbb{L}_{M^*}$ dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*)$ est réduit aux fonctions constantes.

Alors, l'égalité de dualité (2.5.6) entraîne que le conoyau de $\mathbb{L}_{M^*}$ dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$ est également de dimension 1. De plus, $\mathbb{L}_{M^*} = (D^-d)^*(D^-d)$ d'après (1.3.14), donc pour tout $f \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*)$,

$$\int_M \mathbb{L}_{M^*} f \ \mathrm{vol}_{g_M} = 0.$$

Donc le conoyau est engendré par les constantes. Ainsi, en ajoutant les constantes à la source, on obtient que $\tilde{L}^\delta$ est surjectif, et son noyau est de dimension 1 comme annoncé, engendré par les constantes. □

Dans le cas des surfaces complexes, la situation est compliquée par le fait que l'ensemble des 'bons' poids, $]4-2m, 0[$, est vide. On peut cependant montrer, suivant la Proposition 5.2 dans [6], le résultat suivant.

Pour chaque $i = 1, \dots, \ell$, on introduit une fonction lisse $\xi_i : M^* \to [0,1]$, à support dans $B(p_i, r_0)$ et valant 1 dans $B(p_i, r_0/2)$. Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel engendré par ces fonctions, muni de la norme $|f| = \sum_i |f(p_i)|$. On a alors :

Proposition 2.5.6. *Si $m = 2$, et $\delta \in]0, 1[$, alors l'opérateur*

$$\begin{aligned}L^\delta : (\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*) \oplus \mathcal{V}) \times \mathbb{R} &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)\\ (f,\lambda) &\mapsto \mathbb{L}_{M^*} f + \lambda\end{aligned}$$

est surjectif, de noyau engendré par 1.

Preuve. On rappelle ici la preuve de la Proposition 5.2 dans [6].

Comme on a supposé que M^* n'admettait pas de champs de vecteurs holomorphes, pour $\delta > 0$, l'opérateur $\mathbb{L}_{M^*} : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$ est injectif, puisque les fonctions constantes non nulles n'appartiennent pas à $\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*)$. Ainsi, par (2.5.6), l'opérateur $\mathbb{L}_{M^*} : \mathcal{C}^{4,\alpha}_{-\delta}(M^*) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{-\delta-4}(M^*)$ est surjectif, et admet donc un inverse à droite, qui toutefois n'est pas unique.

De plus, on peut décrire le noyau de $\mathbb{L}^{-\delta}_{M^*}$: il est engendré par 1 et par les solutions γ_j (au sens des distributions) de

$$\begin{cases} \mathbb{L}\gamma_j = \delta_{p_{j+1}} - \delta_{p_j}, \\ \displaystyle\int_M \gamma_j \mathrm{vol}_{g_M} = 0 \end{cases}$$

pour $j = 1, \dots, \ell - 1$. On a donc, par (2.5.6),

$$\dim \operatorname{Coker} \mathbb{L}^{\delta}_{M^*} = \ell.$$

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$. On pose

$$\lambda = \frac{1}{Vol(M)} \int_M \psi \mathrm{vol}_{g_M}.$$

Puisque $\mathbb{L}^{-\delta}_{M^*}$ est surjectif, il existe une solution de

$$\mathbb{L}\phi = \psi - \lambda$$

dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_{-\delta}$; au voisinage de chaque p_j, on a un développement de la forme

$$\phi(z) = a_j + b_j \log|z| + \tilde{\phi}_j(z),$$

où $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\phi}_j \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(B^*(p_j, r_0))$. Par conséquent, sur M, ϕ est solution au sens des distributions de

$$\mathbb{L}\phi + \lambda = \psi - c_2 \sum_j b_j \delta_{p_j}.$$

Quitte à ajouter une combinaison linéaire des éléments γ_j du noyau de $\mathbb{L}^{-\delta}_{M^*}$, on peut supposer que tous les b_j sont égaux ; alors, en prenant la moyenne de cette égalité sur M, on voit qu'en fait $b_j = 0$. Donc, au voisinage de p_j,

$$\phi = a_j + \tilde{\phi}_j,$$

c'est à dire, $\phi \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta} \oplus \mathcal{V}$. On définit ainsi un inverse à droite $G_{-\delta}$ de $\mathbb{L}_{-\delta}$ tel que, pour $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$,

$$G_{-\delta}(\psi - \nu) \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta} \oplus \mathcal{V},$$

ce qui nous donne le résultat escompté. □

Les éléments de $\mathcal{V}$ ne sont pas bornés en norme $\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*)$; on verra au chapitre (chap 3) que cela entraînera un moindre contrôle de la borne de l'opérateur inverse $\tilde{L}_{\varepsilon}^{-1}$ que l'on construira à l'étape 3 de la construction. En particulier, on ne pourra pas trouver de borne indépendante de ε.

Cet écueil mis à part, on récupère donc un inverse à droite G_1 pour l'opérateur sur l'orbifold, à valeurs dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*)$ si $m \geq 3$ et dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*) \oplus \mathcal{V}$ si $m = 2$.

Sur les espace ALE X_j. Rappelons que chaque modèle X_j est muni d'une métrique kählérienne ALE η_j, à courbure scalaire nulle, donnée dans une carte à l'infini $u^j : X \setminus K \to \left(\mathbb{C}^m/\Gamma\right) \setminus B(0, R_0)$ par

$$\eta_j = dd^c \left(\frac{|u^j|^2}{2} + \psi_j(u^j) \right), \tag{2.5.7}$$

où $\psi_j(u^j) = O(|u^j|^{4-2m})$ si $m \geq 3$, et $\psi_j(u^j) = O(\log|u^j|)$ si $m = 2$.

En utilisant ces cartes, pour $R > 0$ suffisamment grand, on note $B(R) := \{|u^j| \leq R\} \subset X_j$.

On introduit sur X_j des espaces de Hölder à poids permettant que contrôler le comportement des fonctions dans ces cartes à l'infini.

Définition 2.5.5. *Soit $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}(X_j)$, et δ un réel. On définit*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X_j \setminus B(R_0))} := \sup_{R_0 \leq R} R^{-\delta} \|f_R\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(B(2)\setminus B(1))}.$$

Si cette quantité est finie, on dit que $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X_j)$ et on pose

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X_j)} := \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(B(R_0))} + \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X_j \setminus B(R_0))}.$$

Exemple 2.5.4. La fonction donnée par $u^j \mapsto |u^j|^{\delta'}$ dans la carte à l'infini est dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X_j \setminus B(R_0))$ si et seulement si $\delta' \leq \delta$.

Remarque 2.5.12. On peut définir ces espaces de manière équivalente comme suit. Soit $p \in X$, il existe alors une carte envoyant $B(0,1) \subset \mathbb{R}^{2m}$ sur une boule géodésique de rayon ηr_0 autour de p :

$$\phi : B(0,1) \to B(p, \eta r_0).,$$

où $\eta > 0$ est très petit et $r_0 = r(p)$, avec r une fonction 'rayon' sur X définie en dehors d'un compact (par exemple, la norme sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ dans une carte à l'infini).

De plus, grâce aux estimées ALE (2.5.7), on peut supposer qu'on a

$$\phi^* g_X - r_0^2 g_0 = \mathcal{O}(r_0^{2-2m}),$$

ainsi qu'un contrôle des dérivées de tout ordre k.

Alors, par définition, une fonction $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(X)$ est dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X)$ s'il existe $C > 0$ telle que, dans toute carte de cette sorte,

$$\|f \circ \phi\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} \leq C r_0^\delta.$$

De cette définition, il résulte que si $\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X)} \leq C$, alors $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(X)$ et, pour $i \leq k$,

$$|\partial^i f| \leq c r^{\delta - i},$$

où r est encore la fonction rayon utilisée plus haut.

Un poids $\delta \in \mathbb{R}$ est une *racine indicielle* de $\mathbb{L}_{X_j}$ s'il existe une fonction non-triviale $v \in \mathcal{C}^\infty(\partial B(1))$ telle que

$$\mathbb{L}_{X_j}(|u^j|^\delta v) = O(|u^j|^{\delta-5}). \tag{2.5.8}$$

On peut alors, comme précédemment, utiliser (2.5.7) pour comparer ces racines indicielles avec celles du bilaplacien euclidien Δ_0^2 sur $\mathbb{C}^m/\Gamma_j$; en effet, dans notre carte à l'infini, $g_j = g_0 + O(|u^j|^{2-2m})$, et les coefficients du tenseur de Ricci sont de l'ordre de $|u^j|^{-2m}$. Par conséquent, (2.5.8) équivaut à

$$\Delta_0^2(|u^j|^\delta v) = O(|u^j|^{\delta-5}).$$

Autrement dit, δ est une racine indicielle de $\mathbb{L}_{X_j}$ si, et seulement si, c'est une racine indicielle de Δ_0^2, et en particulier, $\delta \in \mathbb{Z}\backslash]4-2m, 0[$.

Pour $\delta \notin \mathbb{Z}\backslash]4-2m, 0[$, on s'intéresse donc à l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{X_j}^\delta : \mathcal{C}_\delta^{4,\alpha}(X_j) &\to \mathcal{C}_{\delta-4}^{0,\alpha}(X_j), \\ f &\mapsto -\Delta_{g_j}^2 f - 2\langle \rho_j, dd^c f\rangle. \end{aligned}$$

Cet opérateur est bien défini, et, d'après Bartnik [15], c'est un opérateur de Fredholm. De plus, puisque g_j est à courbure scalaire nulle, c'est un opérateur autoadjoint ; par un argument de dualité, on peut de plus montrer que

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbb{L}_{X_j}^\delta = \dim \operatorname{Coker} \mathbb{L}_{X_j}^{4-2m-\delta}. \tag{2.5.9}$$

Encore une fois, on renvoie au livre de Melrose, [84] et à l'article de Bartnik [15] pour les détails de l'étude de ces opérateurs.

La construction d'un inverse à droite pour $\mathbb{L}_{X_j}$ repose sur le résultat suivant, démontré dans l'article d'Arezzo et Pacard [6], Proposition 5.5 :

Proposition 2.5.7. *Pour $\delta \in]0,1[$, l'opérateur $\mathbb{L}_{X_j}^\delta$ est surjectif et son noyau est constitué des fonctions constantes.*

Idée de preuve. On montre dans un premier temps que pour $\delta < 0$, le noyau de $\mathbb{L}_{X_j}$ dans $\mathcal{C}_\delta^{4,\alpha}(X_j)$ est réduit à 0. En effet, un élément du noyau serait potentiel d'un champ de vecteur holomorphe tendant vers 0 à l'infini sur X_j ; en appliquant le théorème d'Hartogs, on étend ce champ de vecteur à $\mathbb{C}^m$, et on voit qu'il doit être nul. L'élément du noyau doit donc être une constante , mais aussi décroître à l'infini puisque c'est un élément de $\mathcal{C}_{\delta'}^{4,\alpha}$; c'est donc forcément 0.

De là, on obtient le résultat escompté en utilisant l'égalité de dualité (2.5.9). □

Ceci nous donne un inverse à droite $G_2^\delta : \mathcal{C}_{\delta-4}^{0,\alpha}(X_j) \to \mathcal{C}_\delta^{4,\alpha}(X_j)$ pour $\mathbb{L}_{X_j}^\delta$.

2.5.3 Analyse sur la somme connexe M_ε.

Afin de pouvoir utiliser les résultats obtenus sur les opérateurs modèles (Propositions 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7), on introduit sur la 'somme connexe' M_ε des normes de Hölder à poids qui permettront de tenir compte à la fois du comportement sur M^* et sur chaque X_j.

Pour cela, on utilise les fonctions de cut-off γ_1 et γ_2 introduites en (2.3.1) pour construire la forme de Kähler ω_ε.

Définition 2.5.6. *Soit $f : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient $\delta \in \mathbb{R}$ un poids, k un entier et $\alpha \in]0,1[$. On pose alors*

$$\|f\|_{\mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}(M_\varepsilon)} := \|\gamma_1 f\|_{\mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}(M^*)} + \varepsilon^{-\delta} \sum_j \|\gamma_2 f\|_{\mathcal{C}_\delta^{k,\alpha}(X_j)}$$

où le support de γ_1, inclus dans $\{\rho \geq r_\varepsilon\}$, est vu comme un sous-ensemble de M^*, et le support de γ_2, inclus dans $\{\rho \leq 2r_\varepsilon\}$, est une union disjointe de régions s'identifiant chacune, via l'homothétie h_ε, à un compact de X_j. On dit que $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)$ si cette quantité est finie.

Remarque 2.5.13. Cette définition s'étend aux champs de tenseurs : Tout champ de tenseurs T sur M_ε se décompose comme somme $T_X := \gamma_2 T$ et $T_{M^*} := \gamma_1 T$ à support respectifs dans $\rho \leq 2r_\varepsilon$ et $\rho \geq r_\varepsilon$. T_X et T_{M^*} s'identifient alors à des champs de tenseurs sur X et M^* respectivement. Alors $\|T\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta}$ est donné, par définition, par

$$\varepsilon^{-\ell-\delta}\|(h_{\varepsilon^{-1}})_* T_X\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X)} + \|T_{M^*}\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M^*)}, \tag{2.5.10}$$

où ℓ est le degré T.

La clé de voûte des théorèmes de recollement consiste à démontrer que l'opérateur $\tilde{L}_\varepsilon : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}$ défini en (2.4.2) admet un inverse à droite pour un poids δ bien choisi. La preuve d'un résultat similaire sera donnée en détail au Chapitre 3, section 3.4.1, aussi on se contentera ici de décrire quelques stratégies possibles pour aborder ce genre de problème. Les résultats obtenus sont de la forme :

Théorème 2.5.2 (Inverse à droite de l'opérateur linéarisé.). *Pour un paramètre de recollement ε assez petit, on a :*

- *Pour $m \geq 3$: Soit $\delta \in]4-2m, 0[$, $\alpha \in]0,1[$. L'opérateur linéarisé $\tilde{L}_\varepsilon : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}$ admet un inverse à droite G, borné en norme d'opérateur indépendamment de ε.*
- *Pour $m = 2$: Soit $\delta \in]0,1[$, $\alpha \in]0,1[$. L'opérateur linéarisé $\tilde{L}_\varepsilon : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}$ admet un inverse à droite G, borné par $\varepsilon^{-\tilde{\beta}}$, où $\tilde{\beta} > 0$.*

Remarque 2.5.14. Dans le cas de la dimension 2, on obtient un moins bon contrôle de la norme de l'inverse à droite. Cela est dû au fait que l'inverse à droite G_1 de $\mathbb{L}_{M^*}$, dans son image, des fonctions constantes au voisinage des 'trous', qui ne sont pas bornées en norme à poids pour un poids positif, comme on l'a vu à la Proposion 2.5.6. En général, on peut malgré tout faire marcher le théorème de point fixe et obtenir une contraction ; parfois, il faut étudier plus finement les propriétés asymptotiques de la métrique (voir par exemple la section 8.4 du livre de Székelyhidi [112]).

Pour alléger les notations, on décrit ces stratégies dans le cas où $\ell = 1$, i.e., on se place au voisinage d'un seul point p avec un modèle ALE X, étant entendu que cette construction s'applique de même aux autres points. Trois stratégies principales peuvent être mises en œuvre pour prouver le théorème 2.5.2.

1. La première, qui sera privilégiée au chapitre 3, consiste à recoller ensemble les inverses à droite G_1 sur M^* et G_2 sur X obtenus aux paragraphes précédents. On utilise pour cela des fonctions de cut-off ζ_1, ζ_2 adaptées, et on pose, pour $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$,

$$G\psi := \zeta_1 G_1(\gamma_1\psi) + \zeta_2 G_2(\gamma_2\psi).$$

Les fonctions γ_i sont définies en (2.3.1). On doit alors montrer que G est borné en norme d'opérateur, et d'autre part on montre que c'est un 'inverse à droite approché' pour $\tilde{L}_\varepsilon$:

$$\|\tilde{L}_\varepsilon \circ G - I\| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $(\tilde{L}_\varepsilon \circ G)$ est inversible et $G \circ (\tilde{L}_\varepsilon \circ G)^{-1}$ est un inverse à droite de l'opérateur linéarisé. Cette stratégie, qui trouve son origine dans les techniques développées par Donaldson et Kronheimer, par exemple dans [40], se retrouve également dans l'article de Székelyhidi [110], Proposition 20.

2. Une seconde stratégie, adaptée pour trouver un inverse *à gauche* de L_ε, consiste à procéder par l'absurde. On trouvera une mise en œuvre complète de cette idée dans la preuve du théorème 8.14 du livre de Székelyhidi [112]. L'idée est la suivante (pour $m \geq 3$). Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)$. On souhaite montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)} \leq C\|\tilde{L}_\varepsilon \varphi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)}.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite de réels $\varepsilon_i \to 0$ et une suite (φ_i) dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)$ telle que, pour chaque i, on ait :

$$\begin{cases} \|\varphi_i\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)} = 1, \\ \|\tilde{L}_{\varepsilon_i} \varphi_i\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)} < \dfrac{1}{i}. \end{cases}$$

On extrait alors des sous-suites de φ_i dans différentes régions de M_{ε_i} correspondant aux modèles : l'orbifold percé M^*, un compact dans l'espace ALE X_j, et enfin la région de recollement qui, remise à l'échelle par un facteur adaptée, s'identifie à un anneau de $(\mathbb{C}^m \setminus \{0\})/\Gamma_j$. Les limites des sous-suites dans chacune de ces régions donnent des éléments du noyau de $\mathbb{L}_{M^*}$, $\mathbb{L}_{X_j}$ et $\mathbb{L}_0 = \Delta^2_O$, de norme de Hölder à poids égale à 1 : pour $\delta \in]4-2m, 0[$, c'est une contradiction.

3. Une dernière option, appliquée dans l'article d'Arezzo et Pacard [6], consiste à travailler d'abord sur des variétés à bords $M_r := M \setminus B(p,r)$ et $X_R := \{\rho \leq R\}$, où ρ est une fonction 'rayon' sur la variété ALE X.

   On montre dans un premier temps que si $h \in \mathcal{C}^{4,\alpha}$ et $k \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ sont des fonctions définies sur la sphère unité de $\mathbb{C}^m/\Gamma$, alors il existe des fonctions biharmoniques H_i et H_o définies respectivement sur l'intérieur et l'extérieur de cette sphère, vérifiant les conditions de bord

$$H_i = H_o = h,$$
$$\Delta H_i = \Delta H_o = k$$

   sur la sphère, et contrôlées en norme $\mathcal{C}^{4,\alpha}$ par les normes de h et k. On se donne alors des fonctions h_M et k_M sur une petite sphère autour de p dans M, et on en déduit une fonction biharmonique H_o sur M_{r_0} vérifiant les conditions de bord correspondantes. On résoud alors l'équation

$$\mathbb{L}_{M^*}(\varphi + H_o) + \lambda = Q(\varphi + H_o)$$

   par une méthode de point fixe, obtenant ainsi une famille de métriques à courbure scalaire constante sur la variété à bord M_{r_ε}, paramétrisées par ε, h et k.

On procède de même sur l'espace ALE, obtenant des familles de métriques à courbure scalaire constantes sur X_{R_ε} paramétrées par ε et des données au bord h_X, k_X. Il s'agit alors de choisir ces données h_M, h_X, k_M, k_X de sorte que les potentiels de Kähler obtenus coïncident à l'ordre 3, ce qui donne un système d'équations différentielles. On obtient alors directement la famille de métriques cscK souhaitée.

2.6 Généralisations de la construction de recollement.

Dans cette dernière section, on passe brièvement en revue quelques généralisations des résultats présentés dans ce chapitre.

2.6.1 Existence de champs de vecteurs holomorphes.

Naturellement, on peut se demander si de telles constructions sont envisageables lorsque l'orbifold M admet des champs de vecteurs holomorphes non nuls. Dans le cas où M est une variété lisse, sans point orbifold, et l'on considère l'éclatement en un nombre fini de points lisses, c'est l'objet du second article d'Arezzo et Pacard [7].

Il se trouve qu'alors, l'existence de métriques à courbure scalaire constante dépend du nombre et de la position des points où sont réalisés les éclatements.

Plus précisément, notons $X_1, \dots, X_d$ des champs de vecteurs holomorphes non triviaux, correspondant à des éléments $\xi_1, \dots, \xi_d$ du noyau de $\mathbb{L}_M$, que l'on choisit tels que

$$\int_M \xi_i \mathrm{vol}_{g_M} = 0.$$

COmpte tenu des fonctions constantes qui font toujours partie du noyau de $\mathbb{L}_M$, on a alors dim Ker $\mathbb{L}_M = d + 1$.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.6.1. *Supposons que (M, ω_M) soit une variété kählérienne à courbure scalaire constante. Alors il existe $k_0 \geq d+1$ tel que pour tout $k \geq k_0$, il existe un ouvert non vide $U \subset M^k$ tel que, pour tous $(p_1, \dots, p_k) \in U$, la variété $Bl_{p_1 \dots, p_k} M$ obtenue en éclatant M aux points p_i admette une métrique kählérienne à courbure scalaire constante.*

L'ouvert U est décrit par les contraintes suivantes. On considère la matrice

$$\mathfrak{M}(p_1, \dots, p_m) = \begin{pmatrix} \xi_1(p_1) & \dots & \xi_1(p_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_d(p_1) & \dots & \xi_d(p_k). \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$U := \left\{ (p_1, \dots, p_k) \in M^k,\ \mathrm{rg}\ \mathfrak{M}(p_1, \dots, p_m) = d,\ \exists v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k, v_i > 0, \mathfrak{M}(p_1, \dots, p_m) v = 0 \right\}.$$

Remarque 2.6.1. 1. La première condition, portant sur le rang de $\mathfrak{M}(p_1, \dots, p_m)$, est en fait générique : elle est vérifiée sur un ouvert dense de M^k. Elle provient du fait qu'un champ de vecteur holomorphes X défini sur M se relève en un champ de vecteur sur l'éclatement Bl_pM si, et seulement si, $X(p) = 0$. (On trouvera une preuve de cette affirmation à la proposition 7.1 de l'article d'Arezzo et Pacard [7]). La seconde condition apparaît lors de l'analyse des opérateurs, mais encode certainement un phénomène plus subtil de stabilité de la variété obtenue.

2. Le cas plus général où M est un orbifold admettant des champs de vecteurs holomorphes, et les points p_i sont donc éventuellement singuliers, est l'objet des travaux d'Arezzo, Lena et Mazzieri [5]. On y retrouve des conditions similaires, dépendant du fait que les modèles ALE employés pour résoudre les singularités soient Ricci-plats ou seulement à courbure scalaire constante.

Les outils mis en œuvre pour traiter ce cas sont très similaires à ceux décrits plus haut ; cependant, il faut traiter avec plus d'attention les opérateurs linéarisés dont le noyau est maintenant non-trivial.

2.6.2 Métriques extrémales.

Les méthodes de recollement s'appliquent également à l'obtention de métriques extrémales ; dans le cas des éclatements de points lisses, c'est l'objet des articles d'Arezzo, Pacard et Singer [8] et de Szekelyhidi [110, 111]. La généralisation aux orbifolds et à leurs résolutions ALE est l'objet d'un article d'Arezzo, Lena et Mazzieri [5].

Considérons donc une variété kählérienne (M, ω) extrémale ; comme on l'a vu au chapitre 1, proposition 1.3.1, cela revient à dire que le champ de vecteur hamiltonien $X_{s(\omega)}$ associé à la courbure scalaire de ω est réel-holomorphe.

Considérons le groupe G des automorphismes hamiltoniens de (M, ω). Il agit sur M de façon hamiltonienne, et on peut choisir une application moment

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*,$$

normalisée de sorte que, pour tout champ de vecteur holomorphe hamiltonien $X \in \mathfrak{g}$, on ait

$$\int_M \langle \mu, X \rangle \mathrm{vol}_g = 0.$$

On utilise le produit scalaire L^2 pour identifier $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$. On a alors

Théorème 2.6.2 ([110]). *Soient $p_1, \dots, p_k$ des points de M et $a_1, \dots, a_k$ des réels, tels que les champs de vecteurs $X_{s(\omega)}$ et $\sum_i a_i \mu(p_i)$ s'annulent en les p_i. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe une métrique extrémale sur l'éclatement $Bl_{p_1,\dots,p_n}M$ dans la classe de Kähler*

$$\pi^*[\omega] - \varepsilon^2 \sum_i a_i [E_i],$$

où $[E_i]$ est le dual de Poincaré du diviseur exceptionnel de l'éclatement, et $\pi : Bl_{p_1,\dots,p_n}M \to M$ est la projection naturelle.

Remarque 2.6.2. La première condition signifie que l'on peut relever le champ de vecteur $X_{s(\omega)}$ à l'éclatement. Comme on souhaite obtenir, par une méthode perturbative, une métrique extrémale ω_ε qui tend vers ω loin des diviseurs exceptionnels, c'est une condition naturelle. La seconde condition peut s'interpréter comme provenant d'un choix de groupe d'isométrie hamiltoniennes K telle que la métrique obtenue soit K-invariante. Les travaux de LeBrun et Simanca [75] montrent que cette perspective est, également, naturelle.

Pour prouver ce résultat, on utilise le même type de méthodes. Soit donc ω une métrique extrémale sur M, de sorte que $X_{s(\omega)}$ est un champ de vecteurs holomorphe sur M. On considère G le groupe des isométries hamiltoniennes sur M ; son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond aux champs de Killing holomorphes admettant des zéros sur M. Ainsi qu'on la vu au chapitre 1, section 1.3.5, cet espace s'identifie au noyau de l'opérateur de Lichnerowicz $\mathbb{L}_M$.

Considérons un point p de M tel que $X_{s(\omega)}(p) = 0$. On considère un tore maximal T parmi les éléments de G qui fixent p, et H le sous groupe des éléments de G qui commutent à T. Alors, les éléments de T se relèvent en des automorphismes de l'éclatement Bl_pM, et on peut construire la solution approchée ω_ε de façon T-invariante, en choisissant une carte où T agit par transformations unitaires.

Soit alors φ une fonction lisse T-invariante sur Bl_pM. Il reste à trouver quelle équation encode le fait que la perturbation $\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi$ soit extrémale sur Bl_pM. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T, et $\bar{\mathfrak{t}}$ les fonctions hamiltoniennes correspondantes.

Remarque 2.6.3. Les constantes sont incluses dans $\bar{\mathfrak{t}}$, de sorte que $\dim \bar{\mathfrak{t}} = \dim \mathfrak{t}+1$. De plus, $\bar{\mathfrak{t}}$ s'identifie aux éléments T-invariants de $\mathrm{Ker}\ \mathbb{L}_M$.

On a le lemme suivant, qui donne l'équation à résoudre.

Lemme 2.6.1 ([110], Lemme 12). *Soit φ une fonction lisse T-invariante sur Bl_pM, et $f \in \bar{\mathfrak{t}}$ vérifiant*

$$s(\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi) - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla\varphi\rangle_{g_\varepsilon} = f. \tag{2.6.1}$$

Alors $\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi$ est extrémale sur Bl_pM.

Preuve. Soient φ et f comme dans l'énoncé. On appelle X le champ de vecteurs holomorphe hamiltonien associé à f :

$$\iota_X\omega_\varepsilon = df.$$

D'autre part, on a

$$\iota_X(i\partial\bar\partial\varphi) = \frac{1}{2}d((JX)\cdot\varphi) = \frac{1}{2}d(\nabla f\cdot\varphi),$$

d'où

$$\iota_X(\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi) = d\left(f + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle_{g_\varepsilon}\right) = ds(\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi).$$

Le champ de vecteurs hamiltonien associé à $s(\omega_\varepsilon + i\partial\bar\partial\varphi)$ est donc le champ de vecteurs *holomorphe* X ; cette métrique est donc bien extrémale. $\square$

Pour obtenir une approche perturbative, on va résoudre cette équation en décomposant $f = f' + \bar{s}$, où $\bar{s}$ est telle que $\nabla \bar{s}$ relève le champ de vecteur extrémal $\nabla s(\omega)$ de M. Le principal résultat technique est alors

Proposition 2.6.1 ([110], Proposition 14). *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$ telles que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une fonction φ lisse et T-invariante sur Bl_pM et $f \in \bar{\mathfrak{h}}$, l'ensemble des fonctions hamiltoniennes associées aux éléments de l'algèbre de Lie de H, telles que*

$$s(\omega_\varepsilon + i\partial\bar{\partial}\varphi) - \frac{1}{2}\langle \nabla \ell(f), \nabla\varphi\rangle_{g_\varepsilon} = \ell(f),$$

où ℓ désigne un relevé bien choisi des éléments de $\bar{\mathfrak{h}}$ à Bl_pM.

Remarquons que la linéarisation de cette équation est donnée par

$$\begin{aligned} L : (\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(Bl_pM))^T \times \bar{\mathfrak{h}} &\to (\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(Bl_pM))^T \\ (\varphi, f) &\mapsto \mathbb{L}_{Bl_pM}\varphi - \frac{1}{2}\nabla\bar{s}\cdot\varphi - \ell(f). \end{aligned}$$

On l'étudie en mettant en oeuvre l'une des stratégies évoquées plus haut.

2.6.3 Eclatement le long d'une sous-variété.

Une dernière généralisation, récemment obtenue par Seyyedali et Szekelyhidi dans [102], concerne le cas où l'on éclate une variété extrémale non pas en un seul point, mais le long d'une sous variété S de codimension supérieure strictement à 2.

Soit donc (M, ω) une variété kählérienne extrémale. On appelle encore G le groupe des isométries hamiltoniennes de (M, ω). Alors G agit sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-variétés de M de codimension k, et cette action préserve une forme symplectique naturelle. Elle est en fait hamiltonienne, et on a donc une application moment, donnée par

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} &\to \mathfrak{g}^* \\ S &\mapsto \int_S \mu\omega^{m-k}, \end{aligned}$$

où μ est l'application moment pour l'action de G sur M. On identifie encore $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$ par le produit scalaire L^2.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.6.3 ([102], Théorème 1.). *Soit $S \in \mathcal{S}$ telle que $\nabla s(\omega)$ et le champ de vecteur μ soient tangents à S. On suppose que codim $S > 2$. Alors Bl_SM admet une métrique extrémale dans la classe $[\omega] - \varepsilon^2[E]$ pour ε suffisamment petit.*

La stratégie, dans ses grandes lignes, suit celle que l'on a étudiée pour l'éclatement en un point. On commence par décrire une solution approchée ω_ε. On l'obtient en utilisant les potentiels de Kähler de la métrique de Burns-Simanca, où la norme en coordonnées est remplacée par la fonction $d : x \mapsto d(x, S)$ encodant la distance à S dans M, calculée grâce à la métrique sur M. La fonction d^2 est alors lisse dans un voisinage tubulaire de S. Ceci permet de construire une métrique ω_ε sur $M \setminus S$, qui s'identifie à $Bl_S M \setminus E$ (voir l'exemple 2.2.3). On peut alors montrer ([102], Proposition 4) que la métrique ainsi définie s'étend au diviseur exceptionnel, définissant une métrique kählérienne sur $Bl_S M$.

On adopte alors une approche perturbative pour obtenir une métrique extrémale via l'ajout d'un potentiel de Kähler vérifiant l'équation (2.6.1) dans les espaces appropriés.

Remarque 2.6.4. En vue de traiter des singularités *non-isolées*, des modèles ALE, dits *Quasi-Asymptotiquement Localement Euclidiens* (QALE) ont été étudiés par Joyce, qui a notamment démontré la conjecture de Calabi sur ces espaces. On pourra consulter à ce sujet le chapitre 9 de son livre [67].

Chapitre 3

Méthodes de recollement en géométrie presque-kählérienne.

Ce chapitre présente le théorème qui est au cœur de la thèse. Nous utiliserons ici des techniques de recollement similaires à celle présentées dans le chapitre précédent, afin d'obtenir de nouveaux exemples de métriques canoniques sur des variétés. Plus spécifiquement, on étend un résultat de Biquard et Rollin [17] au cas des variétés presque Kähler.

Comme on l'a vu au cours des deux chapitres précédents, l'existence de métriques canoniques, notamment à courbure scalaire constante, sur une variété kahlérienne donnée, est une question ouverte en général, et la construction de classes d'exemples, par exemple par le biais de méthodes de recollement, est un domaine de recherche actif.

Un autre aspect de cette quête des métriques canoniques, que l'on peut faire remonter aux travaux de Donaldson sur les variétés toriques [41], est sa généralisation aux variétés dites *presque-kählériennes*. Comme on le verra plus en détail dans la Section 3.1, il s'agit de variétés symplectiques (M, ω) munies d'une structure presque complexe compatible, que l'on ne suppose pas intégrable. Comme on l'a vu au chapitre 1, section 1.3.7, l'espace $\mathcal{AC}_\omega$ de ces structures presque-complexes compatibles est un espace de Fréchet contractile, muni d'une structure kählérienne naturelle.

Le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens agit sur $\mathcal{AC}_\omega$ par tiré en arrière. L'observation, dûe à Donaldson [38] (qui généralise ainsi le résultat de Fujiki [46] au cas non-intégrable), est que cette action est hamiltonienne, et l'application moment associée est donnée par la *courbure scalaire hermitienne* de (M, ω, J), c'est-à-dire la trace de la courbure de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique. On donnera un sens précis à ces notions dans le cadre non-intégrable en section 3.1.

Le problème des métriques canoniques dans ce cadre se ramène donc à l'étude de la fonctionnelle

$$J \in \mathcal{AC}_\omega \mapsto \int_M (s^\nabla(J))^2 \frac{\omega^m}{m!},$$

qui coïncide avec la fonctionnelle de Calabi si on la restreint aux structures intégrables.

Enoncé du résultat principal. On considère une surface orbifold kählérienne (M^4, ω_M, J_M), à singularités isolées $p_1 \ldots, , p_\ell$ de type A_1. Autrement dit, M est doté d'un atlas holomorphe qui envoie des voisinages de chaque p_i sur des voisinages de l'origine dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, comme on l'a vu au chapitre 2, Section 2.1.

En section 3.2, on détaillera la construction d'une famille de variétés symplectiques lisses M_ε indexées par un paramètre $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, que l'on appellera *lissages symplectiques* de l'orbifold (M, ω_M).Ces lissages seront obtenus comme somme connexe symplectique de M et d'un modèle ALE $(X \simeq T^*S^2, J_X, \omega_X)$, Ricci-plat, et muni d'une forme symplectique *exacte* ω_X. Ce modèle sera en fait fourni par les lissages de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ décrits en section 2.2.4.

Pour le moment, on décrit simplement les propriétés principales de cette famille de lissages.

1. La variété M_ε se décompose en une union $M_\varepsilon = (M \setminus \cup_i B(p_i, r(\varepsilon))) \cup K_\varepsilon$, où K_ε est difféomorphe à un voisinage compact $\tilde{K}_\varepsilon$ de la section nulle de T^*S^2. De plus, le rayon $r(\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, et $T^*S^2 = \cup_\varepsilon \tilde{K}_\varepsilon$.
2. M_ε est muni d'une forme symplectique ω_ε telle que, d'une part, l'inclusion naturelle $(M \setminus \cup_i B(p_i, r(\varepsilon)) \hookrightarrow M_\varepsilon$, envoie ω_M sur ω_ε, et, d'autre part, le difféomorphisme $\psi_\varepsilon : K_\varepsilon \to \tilde{K}_\varepsilon$ envoie $\varepsilon^{-2}\omega_\varepsilon$ sur ω_X.

Grâce à ces propriétés, on verra, au lemme 3.2.2, que les variétés M_ε sont toutes difféomorphes en elles, et en fait symplectomorphes. En effet, on verra qu'il y a une injection canonique

$$H^2_c(M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}) \hookrightarrow H^2(M_\varepsilon, \mathbb{R}) \tag{3.0.1}$$

qui envoie $[\omega_M]$ sur $[\omega_\varepsilon]$. Dans ce sens, les classes de cohomologie $[\omega_\varepsilon]$ coïncident.

De plus, les identifications de régions de M_ε avec des régions de M et X respectivement nous permet de donner un sens à la convergence, lorsque ε tend vers 0, de suites de fonctions (ou tenseurs) $f_\varepsilon : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$ sur des compact de $M^* := M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}$ d'une part, et de X d'autre part.

Rendre cette construction précise est l'objet de la section 3.2.

Une fois cette construction menée à bien, on obtient le résultat suivant.

Théorème. *Supposons que (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphes non triviaux, et que (M, ω_M, J_M) est à courbure scalaire constante. Pour un paramètre ε suffisamment petit, on munit les variétés symplectiques $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ d'une famille de structures presque-kählériennes lisses compatibles $(J_\varepsilon, g_\varepsilon)$ à courbure scalaire hermitienne constante, telle que*

— *La suite J_ε de structures presque complexes converge, en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, vers la structure complexe orbifold J_M, sur tout compact de M^*.*

— *Le tiré en arrière $\psi_{\varepsilon *} J_\varepsilon$ sur le modèle X converge, en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, vers la structure complexe ALE J_X, sur tout compact de X.*

On détaille maintenant les étapes de la construction de recollement. On construira dans un premier temps une famille de variétés lisses M_ε, obtenues comme somme connexe généralisée de l'orbifold M

avec un modèle ALE approprié X, et l'on munira ces variétés de structures presque-kählériennes par recollement.

Ensuite, on perturbera ces structures pour obtenir les métriques presque-kählériennes à courbure hermitienne constante annoncées dans le Théorème 5.

Pour faire fonctionner une telle construction, la surface ALE X doit être asymptote à $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, dans le sens où les structures complexe et riemannienne sur X convergent vers leurs analogues euclidiens J_0, g_0 sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, avec un taux de décroissance suffisant. Ce modèle ALE sera donné par les lissages introduits au chapitre 2, section 2.2.4, munis de la métrique Ricci-plate d'Eguchi-Hanson, et d'une structure complexe, qui est une déformation de celle obtenue par éclatement de la singularité quotient $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

Remarque. La résolution minimale de la singularité A_1 est une variété hyperkählérienne biholomorphe à $T^*\mathbb{C}P1$. Notre choix de modèle ici consiste à prendre une structure complexe différente dans la famille hyperkählérienne de structures complexes compatibles.

Le modèle étant choisi, l'étape suivante consiste à recoller M et X dans une somme connexe généralisée : on remplace un petit voisinage de chaque singularité p_i de M par un compact de large rayon de X, convenablement remis à l'échelle. Exécutée dans des cartes de Darboux, cette construction donne une variété lisse compacte M_ε naturellement munie d'une forme symplectique ω_ε.

Ensuire, on munit M_ε d'une structure presque complexe $\hat{J}_\varepsilon$ en recollant grossièrement les structures modèles sur M et X via des fonctions de cut-off. Ce recollement nous coûte l'intégrabilité de la structure presque complexe ainsi obtenue $\hat{J}_\varepsilon$, mais l'on verra que l'on peut contrôler ce défaut d'intégrabilité dans des normes à poids adaptées.

Il reste alors à perturber cette solution approchée pour obtenir une structure presque kählérienne à courbure scalaire hermitienne constante. Cette opération requiert quelques ajustements des méthodes de recollement présentées précédemment.

Premièrement, puisqu'on ne travaille plus sur une variété kählérienne, les courbures de Ricci et scalaire provenant de la métrique riemannienne $\hat{g}_\varepsilon := \omega_\varepsilon(\cdot, \hat{J}_\varepsilon \cdot)$ n'ont plus les propriétés agréables que l'on a étudiées au chapitre 1, section 1.3.2. Notamment, on n'a plus un bon contrôle du noyau de l'opérateur linéarisé correspondant. En conséquence, on s'intéressera plutôt à la courbure scalaire hermitienne, en accord avec le point de vue introduit par Donaldson ([38]).

De plus, on ne dispose pas d'une notion appropriée de potentiels de Kähler grâce auxquels perturber la solution approchée en une métrique à courbure constante. En fait, comme Delanoe l'observe dans son article [36], les formes symplectiques de la forme

$$\omega_\varepsilon + d\hat{J}_\varepsilon df$$

ne sont pas $\hat{J}_\varepsilon$-invariantes, et ne permettent donc pas de munir M_ε d'une structure presque-kählérienne. On va donc procéder différemment, toujours en accord avec le point de vue de Donaldson. On fixe la forme symplectique ω_ε, et on fait varier la structure presque complexe $\hat{J}_\varepsilon$ le long de champs de vecteurs hamiltoniens, de façon à préserver la compatibilité avec ω_ε.

Cette méthode nous permet de réécrire la condition de courbure scalaire hermitienne constante sous la forme d'une équation aux dérivées partielles elliptique d'ordre 4 sur M_ε. Pour la résoudre, on aura recours, comme au chapitre précédent, section 2.4, à une méthode de point fixe entre espaces fonctionnels bien choisis. Comme on le verra, la linéarisation de cette équation se décompose en la somme de l'opérateur de Lichnerowiz sur M_ε et d'un terme d'erreur. Une fois ce terme d'erreur sous contrôle, on pourra ainsi utiliser les propriétés des opérateurs de Lichnerowicz 'modèles' sur l'orbifold M st sur la surface ALE X, pour étudier l'opérateur linéarisé. Par un analogue du théorème d'inversion locale, on obtient ainsi une solution au problème.

Organisation du chapitre. On commencera par une présentation de la géométrie presque-kählérienne dans la section 3.1, focalisée sur la généralisation des notions nécessaires au recollement, et avec une emphase sur la différence avec le cas intégrable. Ensuite, dans la section 3.2, on montrera l'existence de cartes de Darboux sur M et X dans lesquelles on exécutera la somme connexe. La section suivante 3.3 est dédiée à la construction d'une structure presque complexe compatible sur la somme connexe obtenue M_ε, ainsi qu'à des estimées sur son tenseur de Nijenhuis. Dans la section 3.4, on s'attaque à l'analyse de l'équation de courbure constante sur M_ε. Enfin, dans la section 3.5, on discutera d'exemples d'applications de cette construction à l'obtention de nouvelles métriques canoniques.

3.1 Quelques préliminaires de géométrie presque-kählérienne.

Notre construction de recollement nous amènera à travailler sur des variétés *presque-kählériennes.* Une variété presque kählérienne est une variété symplectique (V, ω) munie d'une structure presque complexe J compatible avec ω. En particulier, une variété presque-kählérienne (V, ω, J) est naturellement munie d'une métrique riemannienne g :

$$g(X, Y) = \omega(X, JY),$$

de la même façon que sur une variété kählérienne. La différence réside dans le fait que *la structure presque complexe J n'est pas supposée intégrable.*

On donne dans cette section les outils et identités qui s'avèreront utiles plus tard, en mettant en valeur les différences avec le cadre kählérien. Soit donc (V, ω) une variété symplectique ; une première étape est la description de l'espace des structures presques complexes compatibles avec ω.

On verra ensuite qu'il existe naturellement sur cet espace une action de groupe hamiltonienne, dont les orbites, dans le cas intégrable, peuvent s'interpréter comme des classes de Kähler. Ce point de vue 'dual' avait déjà été mentionné à la fin du chapitre 1, section 1.3.7.

En relation avec le problème des métriques canoniques, on verra qu'il existe sur une variété presque kählérienne plusieurs notions de courbure, notamment de courbure scalaire ; on décrira ces différentes notions, et leurs mérites comparés quand à l'adaptation du problème des métriques canoniques au cadre presque-kählérien.

3.1.1 Structures presques complexes compatibles avec une forme symplectique.

On commence par quelques généralités sur les structures presques complexes (s.p.c.) compatibles avec une forme symplectique donnée. Soit donc (V, ω) une variété symplectique. Rappelons qu'au chapitre 1, section 1.3.7, on avait noté $\mathcal{AC}_\omega$ l'ensemble des s.p.c. sur V compatibles avec ω :

$$\mathcal{AC}_\omega = \{J \text{ section de } \mathrm{End}(TV), \text{ telle que } J^2 = -Id, \text{ et } g_J := \omega(\cdot, J\cdot) \text{ est une métrique riemannienne}\}.$$

L'espace tangent en un point $J \in \mathcal{AC}_\omega$ est alors :

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \{A \text{ section de } \mathrm{End}(TV) \text{ telle que } AJ = -JA, \ \omega(A\cdot, \cdot) + \omega(\cdot, A\cdot) = 0\}.$$

Rappelons également du chapitre 1 que l'on avait muni $\mathcal{AC}_\omega$ d'une structure de variété kählérienne $(\mathbf{J}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{g})$.

On note $\mathcal{G}_\omega$ l'ensemble des sections de $\mathrm{Aut}(TV)$ qui préservent ω,

$$\mathcal{G}_\omega := \mathcal{C}^\infty(\mathrm{Aut}(TV, \omega)) = \{\gamma : V \to \mathrm{Aut}(TV), \ \omega(\gamma X, \gamma Y) = \omega(X, Y)\}.$$

On peut voir $\mathcal{G}_\omega$ comme un groupe de Lie de dimension infinie, dont l'algèbre de Lie serait alors l'ensemble des endormorphismes de TV caractérisés par :

$$\mathcal{L}_\omega = \mathcal{C}^\infty(\mathrm{End}(TV, \omega)) = \{a : V \to \mathrm{End}(TV), \ \omega(aX, Y) + \omega(X, aY) = 0\}.$$

On dispose alors d'une application

$$\exp : \mathcal{L}_\omega \to \mathcal{G}_\omega.$$

Remarquons de plus que $\mathcal{G}_\omega$ agit par conjugaison sur $\mathcal{AC}_\omega$. Plus précisément, on a :

Proposition 3.1.1. *L'action de $\mathcal{G}_\omega$ sur $\mathcal{AC}_\omega$ par conjugaison est transitive. En particulier, étant donnés J_1 et J_2 dans $\mathcal{AC}_\omega$, il existe a dans $\mathcal{L}_\omega$ tel que*

$$J_2 = \exp(a) J_1 \exp(-a).$$

De plus, la section a est unique si on impose qu'elle anticommute à J_1 et J_2.

Inversement, pour tout $J \in \mathcal{AC}_\omega$, tout vecteur tangent $\dot{J} \in T_J\mathcal{AC}_\omega$ s'écrit comme le vecteur tangent en 0 à une courbe de la forme :

$$\dot{J} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(ta) J \exp(-ta),$$

où $a = -\frac{1}{2} J\dot{J}$.

Preuve. On observe que $P = -J_1 J_2$ est un endomorphisme autoadjoint défini positif aussi bien pour le produit scalaire $g_1 = \omega(\cdot, J_1\cdot)$ que pour $g_2 = \omega(\cdot, J_2\cdot)$. Il existe donc une matrice B, symétrique définie positive pour g_1 et g_2, telle que $P = B^2$. De plus, $B = \exp(b)$, et on observe que b anticommute avec J_1 aussi bien que J_2. □

3.1.2 Action des champs de vecteurs hamiltoniens sur $\mathcal{AC}_\omega$.

La construction de recollement réalisée par Arezzo and Pacard a lieu sur une variété obtenue par 'somme connexe' de deux variétés kählériennes dans des cartes holomorpges. Cette somme connexe, comme on l'a vu au chapitre précédent, est naturellement une variété complexe, et on la munit par recollement d'une classe de Kähler dans laquelle chercher une métrique à courbure scalaire constante.

Notre construction nous amènera à prendre le contre-pied de cette idée : notre 'somme connexe' sera nativement *symplectique*, et il sera naturel de fixer cette structure. On cherchera alors à perturber la structure presque complexe dans une certaine sous-famille de $\mathcal{AC}_\omega$. On a déjà rencontré cette situation au chapitre 1, section 1.3.7. On avait alors décrit une action hamiltonienne du groupe des symplectomorphimes exacts $\mathrm{Ham}(V,\omega)$ de V, dont les orbites complexifiées, dans le cadre Kähler, s'identifiaient aux variations de ω dans sa classe de Kähler.

L'objectif de cette section est de donner un sens à cette perturbation ; on verra aussi comment, sur une variété kählérienne, cela revient en fait à l'utilisation du lemme du $\partial\bar\partial$ dans une classe de Kähler fixée.

Soit donc (V,ω) une variété symplectique, munie d'une structure presque complexe compatible J. Une première idée de construction, imitant l'idée des classes de Kähler, serait d'associer à $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ la 2-forme

$$\omega_f := \omega - dJdf.$$

Cependant, cela ne fonctionne pas :

Lemme 3.1.1. *La forme symplectique ω_f ainsi définie est J- invariante si, et seulement si, J est intégrable.*

Preuve. D'un côté, pour tous X, Y, on a

$$\begin{aligned}(dJdf)(X,Y) &= X\cdot(Jdf(Y)) - Y\cdot(Jdf(X)) - Jdf([X,Y])\\ &= -X\cdot(JY)\cdot f + Y\cdot(JX)\cdot f + J[X,Y]\cdot f.\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}(dJdf)(JX,JY) &= JX\cdot df(Y) - JY\cdot df(X) - Jdf([JX,JY])\\ &= -JX\cdot Y\cdot f + JY\cdot X\cdot f + J[JX,JY]\cdot f.\end{aligned}$$

Par conséquent, la partie J-anti-invariante de $dJdf$ est

$$(dJdf)(X,Y) - (dJdf)(JX,JY) = -4JN_J(X,Y),$$

où N_J est le tenseur de Nijenhuis de J, introduit au chapitre 1 comme obstruction à l'intégrabilité par le théorème de Newlander-Niremberg 1.1.1 □

On avait vu au chapitre 1, suivant une idée due à Fujiki et étendue par Donaldson, que varier une forme de Kähler dans sa classe de Kähler pouvait se réinterpréter en termes de l'action complexifiée du groupe $\mathrm{Ham}(V, \omega)$ par tiré en arrière sur l'espace $\mathcal{AC}_\omega$ des structures presque complexes compatibles. Cette action complexifiée était obtenue en complexifiant l'action au niveau infinitésimale, puis en en déduisant un feuillerage qui donnait les orbites complexifiées.

Le lemme 3.1.1 montre que cette construction ne s'étend pas, en l'état, au cadre presque-kählérien. Ainsi, une structure presque complexe obtenue par tiré en arrière d'un élément de $\mathrm{Ham}(V, \omega)$ n'est pas compatible avec ω.

Toutefois, on peut introduire une variation de la structure complexe, induite par $\mathrm{Ham}(V, \omega)$, qui soit *tangente* aux orbites complexifiées au point de départ, tout en restant compatible avec la forme symplectique. Plus précisément, soit $f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$; on lui associe le champ de vecteur hamiltonien X_f défini par

$$df = -\omega(X_f \cdot, \cdot).$$

La dérivée de Lie le long de X_f induit alors une variation a de la structure complexe :

$$a = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_f} J.$$

Cette variation est compatible avec ω au sens suivant :

Lemme 3.1.2. *La section $a \in \mathcal{C}^\infty(End(TV))$ est un élément de $\mathcal{L}_\omega$. De plus, a anticommute avec J.*

Preuve. On commence par vérifier que $\omega(aX, Y) + \omega(X, aY) = 0$. Pour cela, remarquons qu'étant hamiltonien, X_f préserve ω :

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = d(\iota_{X_f}\omega) + \iota_{X_f} d\omega = d^2 f = 0.$$

Donc, puisque $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, on a

$$\mathcal{L}_{X_f} g(X, Y) = \omega(X, \mathcal{L}_{X_f} JY).$$

Or $\mathcal{L}_{X_f} g$ est un tenseur symétrique, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_f} g(X, Y) &= \mathcal{L}_{X_f} g(Y, X) \\ &= \omega(Y, \mathcal{L}_{X_f} JX) \\ &= -\omega(\mathcal{L}_{X_f} JX, Y). \end{aligned}$$

D'autre part, montrons que J et a anticommutent :

$$\begin{aligned} 2aJX &= (\mathcal{L}_{X_f} J)JX \\ &= -\mathcal{L}_{X_f} X - J\mathcal{L}_{X_f}(JX) \\ &= -J(\mathcal{L}_{X_f} J)X \end{aligned}$$

pour tout X. $\square$

Donc, d'après la Proposition 3.1.1, pour tout réel t, la structure presque complexe

$$J_t = \exp(-ta)J\exp(ta)$$

est compatible avec ω. Notre analogue du lemme du dd^c sera le procédé suivant : à $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, on associe

$$\boxed{J_f := J_1} \tag{3.1.1}$$

Cette opération ne préserve pas les orbites complexifiées de l'action hamiltonienne ; cependant, l'action *infinitésimale* est la même :

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_t &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-t\mathcal{L}_{X_f}J)J \\ &= J\mathcal{L}_{X_f}J \\ &= JP(f). \end{aligned}$$

3.1.3 La courbure scalaire hermitienne.

Soit (V,ω) une variété symplectique, et fixons une structure presque-complexe compatible $J \in \mathcal{AC}_\omega$.

On discute ici les différentes notions de courbure existant sur la variété presque-kählérienne (V,ω,J) et leurs avantages comparés. On trouvera plus de détails dans l'étude d'Apostolov et Draghici [3].

Dans le reste de la section, on désignera par D la connection de Levi-Civita associée à la métrique $g_J := \omega(\cdot, J\cdot)$.

Une première idée naturelle serait de considérer les tenseurs de courbure issus de la géométrie riemannienne de la métrique g_J : le tenseur de courbure riemannien Rm_{g_J}, le tenseur de Ricci Ric_{g_J} et la courbure scalaire s_{g_J}. De là, on a vu en (1.3.7) que dans le cas d'une variété kählérienne, on peut définir la 2-forme $\rho := \mathrm{Ric}_{g_J}(J\cdot,\cdot)$, qui est alors de type $(1,1)$, fermée, et représente la première classe de Chern de V.

Toutefois, si la structure complexe n'est pas intégrable, alors $DJ \neq 0$ *a priori*, et le tenseur de Ricci n'est donc pas J-invariant ; en particulier, ρ ne définit pas une 2-forme sur V, encore moins une 2-forme fermée représentant la classe de Chern.

Les tenseurs de courbure riemanniens perdent donc la plupart des propriétés agréables dont ils jouissaient sur une variété kählérienne. Notamment, la courbure scalaire s_g et sa linéarisation sont moins bien comprises. C'est ce qui nous pousse à chercher des alternatives, liées plus directement à la structure presque complexe.

À cet effet, rappelons quelques notations introduites au Chapitre 1.

La structure presque complexe J permet de voir l'espace tangent T_pV en chaque point p de V comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note (TV,J) le fibré vectoriel complexe obtenu. Il s'identifie à $T^{1,0}V$

via

$$\begin{aligned} X \in (TV, J) \mapsto X^{1,0} &:= \frac{1}{2}(X - iJX) \in T^{1,0}V \subset TV \otimes \mathbb{C} \\ Z + \bar{Z} &\leftarrow\!\shortmid Z. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut équiper (TM, J) d'un opérateur de Cauchy-Riemann défini par

$$\bar{\partial}_X^{(TV,J)} Y = 2\mathfrak{Re}\big([X^{0,1}, Y^{1,0}]^{1,0}\big).$$

Rappelons qu'on avait utilisé cette formule au chapitre 1 (1.1.11) pour un fibré complexe au-dessus d'une variété complexe. Remarquons que la formule fait encore sens lorsque J n'est pas supposée intégrable. On déduit de la définition les expressions alternatives suivantes :

Proposition 3.1.2. *En fonction de la dérivée de Lie $\mathcal{L}$ et de la dérivée covariante D, on a :*

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_X^{(TV,J)} Y &= \frac{1}{4}\left([X,Y] + [JX, JY] + J[JX, Y] - J[X, JY]\right) \\ &= -\frac{1}{4}(J\mathcal{L}_Y J + \mathcal{L}_{JY} J)(X) \\ &= \frac{1}{2}(D_X Y + J D_{JX} Y) - \frac{1}{2} J(D_X J) Y. \end{aligned}$$

L'espace tangent (TV, J) est muni naturellement du produit hermitien $h_J := \frac{1}{2}(g_J - i\omega)$. Comme on l'a vu au théorème 1.1.3, il existe alors une unique connexion de Chern ∇^J sur (TV, J), hermitienne, telle que $\nabla^{J,(0,1)} = \bar{\partial}^{(TV,J)}$.

Remarque 3.1.1. Puisque la structure presque complexe n'est pas supposée intégrable, la connexion de Chern ne coïncide pas nécessairement avec celle de Levi-Civita. La différence est précisément le défaut de parallélisme de J :

$$\nabla_X Y = D_X Y - \frac{1}{2} J(D_X J) Y.$$

De plus, la torsion de ∇ est donnée par le tenseur de Nijenhuis N_J.

De cette construction, le fibré anticanonique $K_J^* = \Lambda^m(TV, J)$ hérite d'un produit hermitien et d'une connexion hermitienne. Comme on l'a vu en (1.1.14), la courbure de cette connexion est de la forme $i\rho^\nabla$ où ρ^∇ est une 2-form réelle fermée, qui, de plus, représente $2\pi c_1(V)$. On l'appelle la *forme de Ricci hermitienne.*

La *courbure scalaire hermitienne* s^∇ est alors la trace de ρ^∇ par rapport à ω :

$$s^\nabla = 2\Lambda\rho^\nabla. \tag{3.1.2}$$

Sur une variété kählérienne, c'est-à-dire quand la structure presque complexe intégrable, ces deux notions de courbure de Ricci et scalaire coïncident. Pour quantifier leur différence dans le cadre presque-kählérien, on introduit une troisième notion de courbure.

Rappelons que le tenseur de courbure riemannien Rm_{g_J} s'identifie à un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2 V$ via

$$\mathrm{Rm}_{g_J}(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := \mathrm{Rm}_{g_J}(\alpha^\sharp, \beta^\sharp, X, Y).$$

La *forme de Ricci twistée*, ou $*$*-forme de Ricci*, est alors par définition l'image de la forme ω par cet endomorphisme :

$$\rho^* = R_{g_J}(\omega),$$

et sa trace par rapport à ω est appelée l'$*$*-courbure scalaire* :

$$s^* = 2\Lambda\rho^* = 2(R_{g_J}(\omega), \omega).$$

On a alors les identités suivantes, dont on trouvera la preuve dans [3].

Proposition 3.1.3. *Les différentes courbures de Ricci sont reliées par :*

$$\rho^\nabla(X, Y) = \rho^*(X, Y) - \frac{1}{4} tr(JD_X J \circ D_Y J), \tag{3.1.3}$$

$$\rho^*(X, Y) = \frac{1}{2}(Ric_{g_J}(JX, Y) - Ric_{g_J}(X, JY)) + \frac{1}{2}((DD^* J)X, Y). \tag{3.1.4}$$

Pour ce qui est des courbures scalaires, on a

$$s^\nabla = s_{g_J} + \frac{1}{2}|DJ|^2 = s^* - \frac{1}{2}|DJ|^2 = \frac{1}{2}(s_{g_J} + s^*). \tag{3.1.5}$$

Dans cette dernière formule, la norme de DJ est donnée par $|DJ|^2 = -\frac{1}{2}\sum_i tr(D_{e_i}J \circ D_{e_i}J)$, avec $\{e_i\}_i$ une base orthonormée locale pour g_J.

La première formule est obtenue par un calcul direct. La seconde se déduit de la formule de *Weitzenböck-Bochner* pour une 2-forme α :

$$\Delta\alpha = D^* D\alpha + 2R(\alpha) - \mathrm{Ric}(\tilde{\alpha}\cdot, \cdot) + \mathrm{Ric}(\cdot, \tilde{\alpha}\cdot), \tag{3.1.6}$$

où $\tilde{\alpha}$ est l'endormorphisme défini par $\alpha(X, Y) = g(\tilde{\alpha}X, Y)$.

On va voir que dans notre contexte presque-kählérien, la courbure scalaire hermitienne s^∇ a des propriétés agréables, en relation avec le point de vue hamiltonien de Donaldson. Ces propriétés découlent de la formule de première variation de s^∇, que l'on énonce maintenant.

Première variation de s^∇. La première variation de la courbure scalaire hermitienne par rapport à $J \in \mathcal{AC}_\omega$ est donnée par la formule suivante, prouvée par Mohsen dans son mémoire de Master [87] :

Proposition 3.1.4. *Définissons une courbe $(J_t)_t$ dans $\mathcal{AC}_\omega$ par*

$$J_t = \exp(-ta) J \exp(ta),$$

pour $a \in \mathcal{L}_\omega$ tel que a et J anticommutent, et posons

$$\dot{J} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J_t$$

le vecteur tangent à cette courbe en $t = 0$. Alors la première variation de la courbure scalaire hermitienne le long de $(J_t)_t$ est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} s^\nabla(J_t) = \Lambda d(\delta\dot{J})^\flat = -\delta J(\delta\dot{J})^\flat, \tag{3.1.7}$$

où l'opérateur codifférentielle δ et l'opérateur musical $\flat$ sont isssus de la métrique $g_J = \omega_\varepsilon(\cdot, J\cdot)$.

Remarque 3.1.2. Rappelons (voir (1.2.5)) que le champ de vecteurs $\delta\dot{J}$ est donné, dans une base orthonormée locale $(e_i)_i$ pour g_J par

$$\delta\dot{J} = -\sum(D^g_{e_i}\dot{J})(e_i).$$

Preuve. On suit la preuve fournie au Chapitre 9 de [49]. Notons g_t, h_t la métrique riemannienne et le produit hermitien sur (TV, J_t) ; on dispose de plus du produit hermitien

$$h_t = \frac{1}{2}(g_t - i\omega)$$

qui, pour chaque t, induit un produit hermitien, encore noté h_t, sur le fibré $K^*_{J_t}$. Alors l'isomorphisme

$$\exp(-ta) : (TV, J) \to (TV, J_t)$$

préserve ω, et induit donc un isomorphisme de fibrés en droites hermitiens entre (K^*_J, h) et $(K^*_{J_t}, h_t)$.

La stratégie adoptée est alors de calculer la 1-forme de connexion α_t associée à la connexion de Chern sur $(K^*_{J_t}, h_t)$ par rapport à une base locale bien choisie. La courbure de cette connexion $\rho^{\nabla^{J_t}}$ est alors localement donnée par $-d\alpha_t$. On utilise alors 3.1.2 pour voir que $s^{\nabla^{J_t}} = 2\Lambda_t d\alpha_t$.

Il nous faut donc calculer $\dot{\alpha} := \frac{d}{dt}_{|t=0}\alpha_t$.

Plus précisément, on veut calculer $\dot{\alpha}$ en fonction de $\dot{J}$. Soit $(Z_1, \ldots, Z_m)$ une base orthonormée locale de (TV, J, h_J), autrement dit :

$$h_J(Z_i, Z_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow \begin{cases} g_J(Z_i, Z_j) = 2\delta_{ij}, \\ \omega(Z_i, Z_j) = 0. \end{cases}$$

Alors $\left\{Z^t_j := exp(-ta)Z_j\right\}_{j=1\ldots m}$ est une base orthonormée locale de (TV, J_t, h_{J_t}). La 1-forme de connexion α_t par rapport à cette base locale s'écrit

$$\alpha_t(X) = -i\sum_j h_t(\nabla^{J_t}_X Z^t_j, Z^t_j).$$

On sépare ∇^{J_t} en ses composantes de type (0,1) and (1,0), et on observe que

$$h_t((\nabla^{J_t})^{(1,0)}X, Y) = -h_t(X, (\nabla^{J_t})^{(0,1)}Y)$$

d'où

$$\alpha_t(X) = -i \sum_j h_t(\,(\nabla^{J_t}_X)^{(0,1)}Z^t_j, Z^t_j) - h_t(Z^t_j, (\nabla^{J_t}_X)^{(0,1)}Z^t_j).$$

De plus, par définition de la connexion de Chern, $(\nabla^{J_t})^{(0,1)} = \bar{\partial}^{(TV,J_t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\alpha_t(X) &= -i \sum_j h_t(\,\bar{\partial}^{(TV,J_t)}_X Z^t_j, Z^t_j) - h_t(Z^t_j, \bar{\partial}^{(TV,J_t)}_X Z^t_j) \\
&= -\sum_j \omega(\bar{\partial}^{(TV,J_t)}_X Z^t_j, Z^t_j) \\
&= -\sum_j \omega(\exp(ta)\bar{\partial}^{(TV,J_t)}_X \exp(-ta)Z_j, \exp(ta)Z^t_j)) \\
&= -\sum_j \omega(\exp(ta)\bar{\partial}^{(TV,J_t)}_X \exp(-ta)Z_j, Z_j))
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la seconde expression $\bar{\partial}^{(TV,J_t)}$ dans la proposition 3.1.2,

$$\begin{aligned}
\alpha_t(X) &= \frac{1}{4}\sum_j \omega(\exp(ta)J_t(\mathcal{L}_{\exp(-ta)Z_j}J_t)X, Z_j) + \omega(\exp(ta)(\mathcal{L}_{J_t\exp(-ta)Z_j}J_t)X, Z_j) \\
&= \frac{1}{4}\sum_j \omega(J\exp(ta)(\mathcal{L}_{\exp(-ta)Z_j}J_t)X, Z_j) + \omega(\exp(ta)(\mathcal{L}_{\exp(-ta)JZ_j}J_t)X, Z_j).
\end{aligned}$$

On réécrit cette expression en termes la connexion de Levi-Civita D de g_J. On utilise pour cela la base orthonormée locale $\{e_1, \ldots, , e_{2m}\} := \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{Z_1, \ldots, Z_m, JZ_1, \ldots, JZ_m\}$ de TV, vu maintenant comme un fibré vectoriel *réel*. Dans cette base, l'expression précédente s'écrit

$$\alpha_t(X) = -\frac{1}{2}\sum_k g_J(\exp(ta)(\mathcal{L}_{\exp(-ta)e_k}J_t)X, e_k).$$

D'autre part, la dérivée de Lie de J_t est donnée par :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\exp(-ta)e_k}J_t)X &= (D_{\exp(-ta)e_k}J_t)X - \big[D(\exp(-ta)e_k), J_t\big](X) \\
&= (D_{\exp(-ta)e_k}J_t)X - D_{J_tX}(\exp(-ta)e_k) + J_tD_X(\exp(-ta)e_k).
\end{aligned}$$

En utilisant $\exp(ta)J_t = J\exp(ta)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\alpha_t(X) = &-\frac{1}{2}\sum_k g_J(\exp(ta)(D_{\exp(-ta)e_k}J_t)X, e_k)\\ &+\frac{1}{2}\sum_k g_J(\exp(ta)D_{J_tX}(\exp(-ta)e_k), e_k)\\ &-\frac{1}{2}\sum_k g_J(J\exp(ta)D_X(\exp(-ta)e_k), e_k).\end{aligned}$$

On dérive alors en $t=0$:

$$\begin{aligned}\dot\alpha(X) = \frac{1}{2}\sum_k\ &g_J(a(D_{e_k}J)X, e_k) - g_J((D_{ae_k}J)X, e_k) + g_J((D_{e_k}\dot J)X, e_k)\\ &+ g_J(aD_{JX}e_k, e_k) + g_J(D_{\dot JX}e_k, e_k) - g_J(D_{JX}(ae_k), e_k)\\ &- g_J(JaD_Xe_k, e_k) + g_J(JD_X(ae_k), e_k).\end{aligned}$$

ce qui se réécrit

$$\begin{aligned}\dot\alpha(X) = &\frac{1}{2}(\delta\dot J)^\flat(X)\\ &-\frac{1}{2}\sum_k\ g_J(a(D_{e_k}J)X, e_k) - g_J((D_{ae_k}J)X, e_k)\\ &+\frac{1}{2}\sum_k\ g_J((D_{JX}a)e_k, e_k)\\ &-\frac{1}{2}\sum_k g_J(D_{\dot JX}e_k, e_k)\\ &+\frac{1}{2}\sum_k\ g_J(J(D_Xa)e_k, e_k)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\dot\alpha(X) = &\frac{1}{2}(\delta\dot J)^\flat(X)\\ &-\frac{1}{2}\sum_k\ g_J(a(D_{e_k}J)X, e_k) - g_J((D_{ae_k}J)X, e_k) - g_J(D_X(ae_k, e_k)\\ &+\frac{1}{2}\sum_k\ g_J((D_{JX}a)e_k, e_k)\\ &-\frac{1}{2}\sum_k g_J(D_{\dot JX}e_k, e_k)\\ &+\frac{1}{2}\sum_k g_J((D_XJa)e_k, e_k)\end{aligned}$$

Le premier terme $\frac{1}{2}(\delta\dot J)^\flat(X)$ donne le résultat escompté. Les autres termes sont nuls, pour les raisons suivantes :

— Chaque e_k est de normé unité, donc la dérivée de cette norme est nulle :

$$g_J(D_{\dot{J}X}e_k, e_k) = \frac{1}{2}(\dot{J}X)(g(e_k, e_k) = 0.$$

— Puisque a et Ja anticommutent à J, ces deux endormorphismes sont sans trace. Il en va donc de même de $D_{JX}a$ et $D_X(Ja)$. Par conséquent, les termes

$$\sum_k g_J((D_{JX}a)e_k, e_k) \qquad \text{et} \qquad \sum_k g_J((D_X Ja)e_k, e_k)$$

sont nuls.

— Enfin, pour tout k, la somme

$$g_J((D_{e_k}J)(ae_k), X) + g_J((D_X J)e_k, ae_k) + g_J((D_{ae_k}J)X, e_k)$$

est nulle, puisque, d'après le lemme 1.2.1, pour tous X, Y, Z

$$g_J((D_Y J)(Z), X) + g_J((D_X J)Y, Z) + g_J((D_Z J)X, Y) = d\omega(X, Y, Z) = 0.$$

On a donc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho^\nabla(J_t) = d\dot{\alpha} = \frac{1}{2}d(\delta\dot{J})^\flat(X).$$

Pour obtenir la variation de la courbure scalaire, on souhaite calculer la trace :

$$s^\nabla(J_t) = \Lambda_t\rho^\nabla(J_t),$$

donc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s^\nabla(J_t) = 2(\dot{\Lambda}_t d\alpha) + \Lambda d\dot{\alpha}.$$

Or, pour toute 1-forme α, en utilisant l'identité de Kähler $[\Lambda, d] = -\delta^c$, on a

$$2\Lambda_t d\alpha = -\delta_t J_t \alpha,$$

et $\delta_t J_t$ ne dépend en fait pas de t. En effet, par définition, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ et pour toute 1-forme α,

$$\int_V (\delta_t\alpha) f\omega^m = \int_V \langle\alpha, df\rangle_t \omega^m = \int_V \alpha(\mathrm{grad}_t f)\omega^m.$$

Donc,

$$\int_V (\delta_t J_t\alpha) f\omega^m = \int_V \langle J_t\alpha, df\rangle_t \omega^m = -\int_V \alpha(J_t \mathrm{grad}_t f)\omega^m = \int_V \alpha(X_f)\omega^m.$$

Par conséquent, on obtient le résultat annoncé :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} s^\nabla(J_t) = \Lambda d(\delta\dot{J})^\flat = -\delta J(\delta\dot{J})^\flat. \qquad \square$$

Ce résultat a d'autres corollaires d'intérêt. Ainsi, si J_1 et J_2 sont deux élements de $\mathcal{AC}_\omega$, on a

$$\begin{aligned}\rho^{\nabla^{J_1}} - \rho^{\nabla^{J_2}} &= d\alpha_{J_1} - d\alpha_{J_2} \\ &= -\frac{1}{2} d\left(\int_0^1 (\delta_t \dot{J})^{\flat_t} dt\right)\end{aligned}$$

donc les formes de Ricci hermitiennes associées représentent une même classe de cohomologie dans $H^2(V, \mathbb{R})$, la *pemière classe de Chern* de la variété symplectique (V, ω).

De plus, on peut considérer la courbure scalaire hermitienne totale

$$S^\nabla = \int_V s^\nabla \, vol_g,$$

et on peut montrer que c'est une constante sur $\mathcal{AC}_\omega$, puisque

$$S^{\nabla^{J_1}} - S^{\nabla^{J_2}} = -\int_V \Lambda d\left(\int_0^1 (\delta_t \dot{J})^{\flat_t} dt\right) vol_g = 0. \tag{3.1.8}$$

Ceci confirme que la courbure scalaire hermitienne sur $\mathcal{AC}_\omega$ est un analogue adapté au contexte presque-kählérien de la courbure scalaire sur une classe de Kähler fixée. On peut pousser plus loins cetet analogie en définissant une version hermitienne de la fonctionnelle de Calabi :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} : \mathcal{AC}_\omega &\to \mathbb{R} \\ J &\mapsto \int_V s^\nabla(J)^2 vol_g.\end{aligned}$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont les métriques extrémales presque-kählériennes, et l'équation d'Euler-Lagrange associée est très similaire à celle des métriques extrémales 'classiques' : une métrique est extrémale presque-kählérienne si et seulement si le champ de vecteur

$$J\mathrm{grad}_g s^\nabla$$

est un champ de Killing pour la métrique riemannienne associée g_J. De telles métriques ont été notamment étudiées par Lejmi dans [77], où il définit notamment un équivalent de l'invariant de Futaki.

Enfin, de la formule de Mohsen 3.1.4, on déduit la généralisation suivante du théorème de Fujiki 1.3.7.

Proposition 3.1.5 (Donaldson, [38]). *Soit (V, ω) une variété symplectique. L'action de $Ham(V, \omega)$ sur $(\mathcal{AC}_\omega, \mathbf{J}, \mathbf{\Omega})$ est hamiltonienne, et, pour $Z = X_f \in \mathfrak{ham}(M, \omega)$, l'application moment est donnée par*

$$\langle \mu(J), Z\rangle = -\int_M f s^\nabla(J) \frac{\omega^m}{m!}.$$

La courbure scalaire hermitienne s'impose donc comme l'extension naturelle de la courbure scalaire à notre contexte.

Comparaison avec l'opérateur de Lichnerowicz. En utilisant la formule de Mohsen 3.1.4 d'une part, et l'action des champs de vecteurs hamiltoniens (3.1.1) d'autre part, on peut donc calculer la linéarisation de l'opérateur

$$f \mapsto s^{\nabla}(J_f) \tag{3.1.9}$$

qui interviendra dans la construction de recollement. En particulier, en vue de le comparer aux opérateurs correspondants sur les variétés modèles, on souhaite l'exprimer en fonction de l'opérateur de Lichnerowicz.

Soit donc (V,ω) une variété symplectique, et fixons $J \in \mathcal{AC}_\omega$ de sorte que (V,J,ω) soit presque-kählérienne. On a alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_{tf} = J\mathcal{L}_{X_f}J.$$

On souhaite donc comparer

$$L : f \mapsto -\delta J(\delta(J\mathcal{L}_{X_f}J))^\flat$$

à l'opérateur $\mathbb{L}$ défini en (1.3.14).

Le calcul principal est alors

Proposition 3.1.6. *Soit $f \in C^{3,\alpha}(V)$. Alors on a la formule suivante :*

$$J\delta(J\mathcal{L}_{X_f}J))^\flat = \Delta_g df - 2Ric(grad_g f, \cdot) + Ef. \tag{3.1.10}$$

Soit $\{e_1,\dots,e_{2m}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{Z_1,\dots,Z_m,JZ_1,\dots,JZ_m\}$ une base locale orthonormée pour g ; le terme d'erreur E est donné dans cette base par

$$Ef(Y) = \sum_i df((D^2_{e_i,JY}J)e_i) + 2Ddf(e_i, J(D_YJ)e_i) \tag{3.1.11}$$

Preuve. En premier lieu, on réécrit $\dot{J}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{J} &= J\mathcal{L}_{X_f}J \\ &= \mathcal{L}_{JX_f}J - 4N_J(X_f,\cdot) \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J - 4N_J(X_f,\cdot).\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

On calcule maintenant $\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J)$ et $\delta N_J(X_f,\cdot)$ séparément.

Pour le premier terme, soit ψ_t le flot de $\mathrm{grad}_g f$. Alors

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\psi_t^* J.$$

Puisque (V,J,ω) est une variété presque-kählérienne $d\omega = 0$ et on déduit de la 4ème égalité du Lemme 1.2.1, que pour tous X,Y

$$(D_{JX}J)(JY) = -(D_XJ)Y.$$

En prenant la trace, ceci donne $\delta J = 0$. Ainsi,

$$\psi_t^*(\delta J) = \delta^{\psi_t^* g}\psi_t^* J = 0.$$

On dérive cette expression en $t = 0$, ce qui donne

$$\delta \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f} J = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\delta^{\psi_t^* g}\right) J.$$

Pour réécrire cette expression, on utilise la formule suivante, démontrée par Minerbe dans sa thèse [85] (Lemme 3.19) :

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} D_X^{\psi_t^* g} Y = \mathrm{Rm}^g(X, \mathrm{grad}_g f)Y - D^2_{X,Y}\mathrm{grad}_g f. \tag{3.1.13}$$

Choisissons maintenant une base locale orthonormée $\{e_i\}_{i=1\ldots 2m}$ de (TV, g), de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{Z_1, \ldots, Z_m, JZ_1, \ldots, JZ_m\},$$

où $\{Z_i\}$ est une base orthonormée du fibré hermitien (TV, J, h) (exactement comme dans la preuve de la proposition 3.1.4). Dans une telle base,

$$\delta^{\psi_t^* g} J = -\sum_{i,j} (\psi_t^* g)^{ij} D_{e_i}^{\psi_t^* g} J(e_j),$$

où on note $(\psi_t^* g)^{ij}$ (i, j)-ième coefficient de l'inverse de la matrice $(\psi_t^* g(e_k, e_l))_{k,l}$. En utilisant (3.1.13), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t=0} D_{e_i}^{\psi_t^* g} J(e_j) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(D_{e_i}^{\psi_t^* g}(Je_j) - JD_{e_i}^{\psi_t^* g} e_j\right)\\ &= \mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)Je_j - D^2_{e_i, Je_j}\mathrm{grad}_g f - J\mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)e_j + JD^2_{e_i,e_j}\mathrm{grad}_g f.\end{aligned}$$

D'un autre côté, puisqu'on travaille dans une base orthonormée pour g, on a $(\psi_t^* g)^{ij}_{|t=0} = \delta_{ij}$. Donc

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(\psi_t^* g)^{ij} = -\frac{d}{dt}_{|t=0}(\psi_t^* g)_{ij} = -\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f} g(e_i, e_j) = -2Ddf(e_i, e_j).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-\delta \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f} J = -\sum_i &\mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)Je_i - D^2_{e_i, Je_i}\mathrm{grad}_g f - J\mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)e_i + JD^2_{e_i,e_i}\mathrm{grad}_g f\\ &+ \sum_{i,j} 2Ddf(e_i, e_j) D_{e_i} J(e_j).\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

On utilise alors l'identité de Bianchi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)Je_i &= -\mathrm{Rm}(\mathrm{grad}_g f, Je_i)e_i - \mathrm{Rm}(Je_i, e_i)\mathrm{grad}_g f\\ &= \mathrm{Rm}(Je_i, \mathrm{grad}_g f)e_i - \mathrm{Rm}(Je_i, e_i)\mathrm{grad}_g f\end{aligned}$$

Vu la forme de la base choisie, on a

$$\sum_i \mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)Je_i = -\sum_i \mathrm{Rm}(Je_i, \mathrm{grad}_g f)e_i,$$

d'où

$$\sum_i \mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)Je_i = \frac{1}{2}\sum_i \mathrm{Rm}(e_i, Je_i)\mathrm{grad}_g f.$$

Par ailleurs, toujours grâce à la forme de la base $\{e_i\}$,

$$\sum_i D^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}_g f = \frac{1}{2}\sum_i \left(D^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}_g f - D^2_{Je_i,e_i}\mathrm{grad}_g f\right) = \frac{1}{2}\sum_i \mathrm{Rm}(e_i, Je_i)\mathrm{grad}_g f.$$

Par conséquent, les deux premiers termes de (3.1.14) se compensent. Pour gérer les termes restants, on utilise

$$\sum_i \mathrm{Rm}(e_i, \mathrm{grad}_g f)e_i = -\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f),$$

donc (3.1.14) se réécrit

$$\delta\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J = -JD^*D\mathrm{grad}_g f + J\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f) - \sum_{i,j} 2Ddf(e_i, e_j)D_{e_i}J(e_j).$$

On utilise alors la formule de Bochner (1.3.12) sur les 1-formes, de qui donne

$$(\delta\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J)^\flat = J\Delta df - 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f, J\cdot) - \sum_i 2D_{e_i}df \circ D_{e_i}J.$$

On doit encore calculer le second terme de (3.1.12) :

$$(\delta N_J(X_f, \cdot))^\flat.$$

Pour cela, on réécrit le tenseur de Nijenhuis en fonction de la connexion de Levi-Civita de g en utilisant le Lemme 1.2.1

$$g(N_J(X_f, X), Y) = \frac{1}{2}g(X_f, J(D_Y J)X).$$

Par conséquent,

$$(\delta N_J(X_f, \cdot))^\flat(Y) = \delta\alpha(Y)$$

où $\alpha(X, Y) := -\frac{1}{2}g(\mathrm{grad}_g f, (D_Y J)X)$. D'où

$$\begin{aligned}
(\delta N_J(X_f, \cdot))^\flat(Y) &= -\sum_i D_{e_i}\alpha(e_i, Y) \\
&= -\sum_i e_i \cdot (\alpha(e_i, Y)) - \alpha(D_{e_i}e_i, Y) - \alpha(e_i, D_{e_i}Y) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i g(D_{e_i}\mathrm{grad}_g f, (D_Y J)e_i) + g(\mathrm{grad}_g f, (D^2_{e_i,Y}J)e_i).
\end{aligned}$$

De plus, puique $D_Y J$ est antisymétrique par rapport à la métrique g, tandis que la hessienne Ddf est symétrique, le premier terme est nul. En effet, dans une base qui diagonalise simultanément Ddf et g, on voit que

$$\begin{aligned}\sum_i g(D_{e_i}\mathrm{grad}_g f, (D_Y J)e_i) &= \sum_i Ddf(e_i, (D_Y J)e_i) \\ &= \sum_i \lambda_i g(e_i, (D_Y J)e_i) \\ &= -\sum_i \lambda_i g((D_Y J)e_i, e_i) \\ &= -\sum_i g(D_{e_i}\mathrm{grad}_g f, (D_Y J)e_i).\end{aligned}$$

Par conséquent, il reste

$$\begin{aligned}J\delta(J\mathcal{L}_{X_f}J))^\flat(Y) &= J\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_g f}J)^\flat(Y) - 4J(\delta N_J(X_f,\cdot))^\flat(Y) \\ &= \Delta_g df(Y) - 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f, Y) - 2\sum_i D_{e_i}df((D_{e_i}J)Y) - 2\sum_i df(D^2_{e_i,JY}e_i),\end{aligned}$$

ce qui donne de résultat escompté, compte tenu du fait que J agit sur les 1-formes par

$$(J\alpha)(Y) = -\alpha(JY).$$

□

Le terme d'erreur donne la quantité qu'il nous faudra estimer pour comparer la linéarisation de l'équation aux opérateurs modèles sur M et X. On voit qu'il est directement lié au problème de l'intégrabilité de J.

En appliquant une nouvelle fois la codifférentielle δ, on voit que

$$Lf = -\Delta_g^2 f + 2\delta(\mathrm{Ric}(df)) + \delta Ef. \tag{3.1.15}$$

Autrement dit, la linéarisation de l'équation est donnée par l'opérateur de Lichnerowicz sur V, plus un terme d'erreur d'ordre au plus 3 en f. Les coefficients de ce terme d'erreur s'expriment en fonction de DJ et de ses dérivées, qui sont comparables au tenseur de Nijenhuis. Par conséquent, $\mathcal{L}$ est une opérateur elliptique d'ordre 4 en la fonction de potentiel f.

3.2 Cartes de Darboux sur l'orbifold et sur le modèle ALE

Lorsque l'on applique les méthodes de recollement d'Arezzo et Pacard aux résolutions des singularités d'un orbifold complexe, on travaille dans des cartes holomorphes, à l'infini sur l'espace ALE, et au voisinage de chaque singularité sur l'orbifold. Ainsi, la somme connexe obtenue est naturellement une variété complexe.

En revanche, dans le cas de figure qui nous intéresse, les structures complexes diffèrent et on ne peut pas utiliser de cartes holomorphes compatibles. La somme connexe obtenue n'est pas naturellement une variété complexe.

Pour remédier à cela, omme on l'a vu, un point de vue plus naturel sera de munir la somme connexe M_ε d'une structure symplectique naturelle. On va donc effectuer le recollement dans des cartes de Darboux.

Il s'agit donc de prouver l'existence de cartes de Darboux ayant les propriétés requises ; c'est l'objet de cette section.

3.2.1 Sur l'orbifold.

Soit (M, ω_M) une surface orbifold, kählérienne, dont les singularités $p_1, \dots, p_\ell$ sont du type $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. On choisit une des points singuliers p_i. Alors, comme on l'a vu dans le chapitre 2, section 2.1, il existe un voisinage U_i de 0 dans $\mathbb{C}^2$ et une application

$$\phi_i : U_i \to M,$$

telle que $\phi_i(0) = p_i$ et ϕ_i induit un homéomorphisme

$$\tilde{\phi}_i : {}^{U_i}\!/_{\mathbb{Z}_2} \to \tilde{U}_i \subset M.$$

Dans une telle carte, le tiré en arrière de la forme de Kähler ω_M est une 2-forme $\mathbb{Z}_2$ invariante, fermée, et non-dégénérée ω_i sur U_i.

A une transformation linéaire des coordonnées près, on peut supposer que

$$\omega_i(0) = \omega_0 := \frac{i}{2} \sum dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

De plus, on peut faire en sorte que le tiré en arrière de J_M soit aussi égal à J_0 en 0.

Puisque $\mathbb{Z}_2 \subset U(2)$, la forme symplectique standard ω_0 sur U_i est aussi $\mathbb{Z}_2$-invariante. On peut alors utiliser la version équivariante du théorème de Darboux 2.1.1, relativement au point 0 où ces deux formes coïncident. Cela donne un symplectomorphisme $\mathbb{Z}_2$-équivariant

$$\psi : V_i \subset U_i \to V_i \subset U_i,$$
$$\psi^* \omega_i = \omega_0$$

Ce symplectomorphisme passe au quotient modulo $\mathbb{Z}_2$. Par composition avec ϕ_i, on en retire une carte de Darboux orbifold, notée x au voisinage de chaque $p_i \in M$.

De plus, puisque $\omega_0(0) = \omega_i(0)$, en travaillant relativement au point 0, on s'assure que $d\psi(0) = I$, donc, dans cette carte de Darboux, $J_M(p)$ est égal à la structure complexe standard J_0.

Dans le cas des coordonnées normales holomorphes sur une variété kählérienne, la forme de Kähler coïncide avec ω_0 à l'ordre 2. Ici, on récupère cette propriété sous la forme suivante

Lemme 3.2.1. *Dans les coordonnées de Darboux orbifold $x = (x_k)_{k=1,\dots,4}$, J_M et J_0 coïncident à l'ordre 2 :*

$$J_M(x) = J_0 + O(|x|^2). \tag{3.2.1}$$

Preuve. Nous avons choisi les coordonnées x en sorte que $J_M(0) = J_0$. Donc, dans ces coordonnées, le développement de Taylor de J_M en 0 s'écrit

$$J_M(z)_i^j = (J_0)_i^j + (J_{(1)})_{ik}^j x_k + O(|x|^2).$$

Le tenseur $J_{(1)}$, dont les coefficients sont les coefficients d'ordre 1 du développement de J_M, est une section locale de $\Lambda^1 U_i \otimes \mathrm{End}(TU_i)$. Cependant, puisque $\mathbb{Z}_2$ agit sur cette espace par multiplication par -1, une section de $\Lambda^1 U_i \otimes \mathrm{End}(TU_i)$ ne peut être $\mathbb{Z}_2$-invariante que si elle est uniformément nulle. Puisque J_M et J_0 sont $\mathbb{Z}_2$-invariants, on en déduit l'estimée (3.2.1). $\square$

3.2.2 Sur l'espace ALE.

Le second ingrédient de la construction est une variété kählérienne ALE X, de groupe à l'infini $\mathbb{Z}_2$, difféomorphe à la résolution minimale de la singularité quotient. On utilisera le modèle présenté au chapitre 2, section 2.2.4. Rappelons qu'on avait muni le cotangent de la sphère T^*S^2 d'une famille de structures kählériennes, dépendant d'un paramètre de lissage $\varepsilon > 0$. Dans des coordonnées sphériques, on note $s > 0$ représentant la distance à 0 et α_1, α_2, α_3 une base de 1-formes invariantes sur S^3, vérifiant $d\alpha_i = \alpha_j \wedge \alpha_k$ pour toute permutation circulaire (i, j, k) de (1,2,3). Les champs de vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont alors la base duale associée. On avait alors

$$\begin{aligned} &J_{X,\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2s}{\sqrt{s^4-4}}X_3, \;\; J_{X,\varepsilon}X_1 = -\sqrt{1-\frac{4}{s^4}}X_2, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}g_{X,\varepsilon} = \left(1-\frac{4}{s^4}\right)^{-1} ds^2 + \frac{s^2}{4}\left(1-\frac{4}{s^4}\right)\alpha_1^2 + \frac{s^2}{4}(\alpha_2^2+\alpha_3^2), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

La forme de Kähler associée est alors de la forme

$$\begin{aligned} \omega_{X,\varepsilon} = \sqrt{2}\varepsilon dd^c_{J_{X,\varepsilon}}\left(\frac{s^2}{2}\right) &= \sqrt{2}\varepsilon\left(\frac{s}{2\sqrt{1-\frac{4}{s^4}}}\alpha_3 \wedge ds + \frac{s^2}{4}\sqrt{1-\frac{4}{s^4}}\;\alpha_2 \wedge \alpha_1\right) \\ &= f_\varepsilon'(s)\,\alpha_3 \wedge ds + f_\varepsilon(s)\,\alpha_2 \wedge \alpha_1. \end{aligned}$$

où

$$f_\varepsilon(s) = \sqrt{2}\varepsilon\frac{s^2}{4}\sqrt{1-\frac{4}{s^4}}$$

On effectue le changement de variables radial $\frac{r^2}{2} = f_\varepsilon(s)$. Dans ces nouvelles coordonnées, la forme de Kähler ω_X coïncide donc avec ω_0, et on a :

$$\begin{aligned}
\omega_{X,\varepsilon} &= r\,\alpha_3 \wedge dr + \frac{r^2}{2}\,\alpha_2 \wedge \alpha_1 = \omega_0;\\
g_{X,\varepsilon} &= \left(1+\frac{\varepsilon^2}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} dr^2 + \frac{r^2}{4}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha_1^2 + \frac{r^2}{4}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1^2+\alpha_3^2)\\
J_{X,\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r} &= -\frac{2r}{\sqrt{r^4+\varepsilon^2)}} X_3\\
J_{X,\varepsilon}X_1 &= -\left(1+\frac{\varepsilon^2}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} X_2.
\end{aligned}$$

De plus, des expressions ci-dessus, on déduit le taux de décroissance dans ces coordonnées asymptotiques :

$$\begin{aligned}
\partial^k(J_0 - J_{X,\varepsilon}) &= O(r^{-4-k})\\
\partial^k(g_0 - g_{X,\varepsilon}) &= O(r^{-4-k}).
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Remarque 3.2.1. Lorsque ε tend vers 0, la structure kählérienne sur T^*S^2 privé de sa section nulle tend vers la structure euclidienne singulière sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

On a ainsi obtenu une carte de Darboux sur le modèle ALE (X, ω_X, J_X) donné par la métrique de Stenzel.

On démontre maintenant un résultat un peu plus général pour trouver des cartes de Darboux à l'infini. On l'énonce dans le cas d'une variété ALE de groupe à l'infini $\mathbb{Z}_2$, mais le raisonnement se généralise à d'autres groupes sans anicroche. Utiliser ce résultat permettrait de traiter des déformations plus générales (e.g. d'autres singularités, ou d'autres modèles ALE). L'argument est basé sur l'astuce de Moser que l'on retrouvera en détail au début de la section 3.2 du livre de McDuff et Salamon [83].

Proposition 3.2.1. *Soit (X, ω_X, J_X) une variété ALE, asymptote à $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ et munie de coordonnées asymptotiques définies en dehors d'un compact*

$$\underline{u} : X \setminus K \to (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2) \setminus B(0,R)$$

telles que, dans ces coordonnées

$$\omega_X = dd^c\left(\frac{|u|^2}{2} + \varphi(u)\right),$$

où

$$\varphi(u) = a\log(|u|) + O(|u|^{-1}). \tag{3.2.4}$$

Alors il existe deux compacts K_1 et K_2 de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, et un difféomorphisme

$$\psi : (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2) \setminus K_1 \to (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2) \setminus K_2$$

tel que $\psi^*\omega_X = \omega_0$.

Preuve. Tout au long de la preuve, on commettra l'abus de notation consistant à noter ω_X la forme symplectique dans la carte $\pi_*\omega_X = dd^c(|u|^2/2 + \varphi(u))$. On travaille en dehors d'un compact dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

Rappelons l'esprit de l'argument de Moser. On relie ω_0 à ω_S par le chemin défini par :

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_X - \omega_0), \tag{3.2.5}$$

pour $t \in [0,1]$ Puisque, dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \setminus K$, $\omega_0 = i\partial\bar{\partial}|z|^2$ et $\omega_X = 2i\partial\bar{\partial}u$ sont exactes, leur différence également. On a donc :

$$\omega_t = \omega_0 - td\alpha,$$

où $\alpha = \Im(\bar{\partial}(\varphi(u)))$. D'où

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\alpha.$$

On cherche une famille de difféomorphismes $\{\psi_t\}_t$ telle que pour chaque t,

$$\begin{cases} \psi_t^*\omega_t = \omega_0 \\ \psi_0 = \mathrm{id}. \end{cases}$$

L'idée est d'obtenir ψ_t comme le flot d'un champ de vecteur X_t dépendant du temps :

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t(\psi_t). \tag{3.2.6}$$

Il s'agit maintenant de trouver un X_t approprié, puis de s'assurer que (3.2.6) admet une solution pour $t \in [0,1]$. Dérivons $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$; on voit que le champ de vecteurs X_t doit vérifier :

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t = \psi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \iota(X_t)d\omega_t + d\iota(X_t)\omega_t\right),$$

ce qui se réécrit

$$\alpha + \iota(X_t)\omega_t = 0,$$

puisque ω_t est fermée.

De plus, ω_t est non-dégénérée, il existe donc un tel X_t pour chaque $t \in [0,1]$.

Il s'agit maintenant de s'assurer que l'équation différentielle (3.2.6) a bien une solution au moins jusqu'à $t = 1$. Cela vient du fait que ω_X est une métrique ALE d'ordre 2, ce qui nous donne une estimée sur la décroissance de X_t à l'infini. En effet, d'après (3.2.4) on a

$$\alpha = \Im(\bar{\partial}(\varphi(u))) = O(|u|^{-1})$$

Donc,

$$X_t = \omega_t^{-1}\alpha = O(|u|^{-1})$$

hence $\|X_t\| \leq 1/R$ en dehors de $B(0,R)$ dans $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. En particulier, X_t est borné indépendamment du temps. Si σ est une courbe intégrale pour X_t, définie sur un petit intervalle $]a,b[$, et (t_n) est une suite croissante de $]a, b[$ tendant vers b, on a alors, pour $m > n$,

$$\|\sigma(t_m) - \sigma(t_n)\| \leq \int_{t_n}^{t_m} \|\sigma'(t)\| dt = \int_{t_n}^{t_m} \|X_t(\sigma(t)\| dt \leq \frac{1}{R}|t_m - t_n|.$$

La suite $(\sigma(t_n))$ est donc de Cauchy, et on montre ainsi que le champ de vecteur X_t est complet. En particulier, la solution existe en $t = 1$ et donne le difféormorphisme recherché. □

Remarque 3.2.2. La décroissance à l'infini obtenue sur le champ de vecteurs X_t implique que le flot ψ_t 'se rapproche de l'identité' à l'infini. Pour peu que l'on se place assez loin, on ne perturbe donc ω_X que très peu.

Plus précisément, observons que les estimations ALE (3.2.4), on a

$$\|DX_t\|_{\mathcal{C}^0} = O(|u|^{-2})$$

donc, en utilisant

$$\psi - id = \psi_1 - \psi_0 = \int_0^1 X_t(\psi_t) dt,$$

on voit que $|d\psi| = O(|u|^{-2})$. Ainsi, la métrique $\psi^* g_X$ est encore ALE d'ordre 2.

3.2.3 Somme connexe symplectique.

En utilisant les cartes de Darboux obtenues sur M et X, on est maintenant en mesure d'imiter la construction de somme connexe généralisée présentée au chapitre 2, section 2.3. La variété obtenue sera alors naturellement une variété symplectique, de la même façon qu'on obtenait une variété complexe en recollant dans des cartes holomorphes.

Puisque les singularités de M sont isolées, on peut supposer que les cartes de Darboux obtenues au voisinage de chaque p_i sont disjointes. On définit alors une fonction mesurant la distance aux singularités ρ sur M par

$$\rho(p) = \begin{cases} d(p, p_i) \text{ dans } B(p_i, \varepsilon_0) \\ 1 \text{ en dehors de } B(p_i, 2\varepsilon_0) \end{cases}$$

de sorte que ρ soit lisse.

Sur X, on utilise le relevé du rayon r in our ALE Darboux chart.

Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ un paramètre de recollement. On pose un 'rayon de recollement' $r_\varepsilon := \varepsilon^\beta$, où $0 < \beta < 1$. D'autre part, on pose $R_\varepsilon = r_\varepsilon/\varepsilon$.

On peut alors identifier des voisinages des régions $\{\rho = 2r_\varepsilon\} \subset M$ et $\{r = 2R_\varepsilon\} \subset X$ via l'homothétie

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon^{-1}} : \{\varepsilon \leq \rho \leq \varepsilon_1\} \subset M &\to \{\varepsilon_1^{-1} \leq r \leq \varepsilon^{-1}\} \subset X \\ z &\mapsto w = \frac{z}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

On réalise cette construction au voisinage de chaque p_i,de façon à obtenir une variété lisse M_ε, que l'on munit de la forme symplectique

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}}\omega_{X,\varepsilon} & \text{on } \{\rho \leq 2r_\varepsilon\}, \\ \omega_M & \text{on } \{\rho \geq 2r_\varepsilon\}. \end{cases}$$

L'utilisation des cartes de Darboux garantit que cette 2-forme est lissé, non-dégénérée et fermée. .

Toutes les variétés $(M_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ ainsi obtenues sont difféomorphes à la résolution minimale $\hat{M}$ des singularités p_i. De plus, comme annoncé en introduction de ce chapitre, la zone

$$M \setminus \cup_i B(p_i, 4r_\varepsilon)$$

est naturellement incluse dans chaque M_ε, ce qui nous permet de poser la définition suivante :

Définition 3.2.1. *Supposons que l'on ait, pour chaque $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, une fonction (lisse)$f_\varepsilon : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$. Soit de plus $f_0 : M \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'orbifold M. Soit K un compact de $M^* = M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}$. Alors, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, $K \subset M \setminus \cup_i B(p_i, 4r_\varepsilon)$. Alors, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, $f_{\varepsilon|K}$ est définie sur $K \subset M$. On dira que la suite de fonctions (f_ε) converge vers f dans $\mathcal{C}^k$ sur le compact K si*

$$\|f_{\varepsilon|K} - f_{|K}\|_{\mathcal{C}^k(K)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Cette définition s'étend aux champs de tenseurs sur M_ε. On voit alors que la suite de formes symplectiques (ω_ε) converge vers la forme de Kähler orbifold ω_M, dans toute norme $\mathcal{C}^k$, sur tout compact de M^*.

D'autre part, le compact $\{r \leq R_\varepsilon\} \subset X$, une fois remis à l'échelle par l'homothétie, est naturellement inclus dans une petite région de M_ε. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 3.2.2. *Supposons que l'on ait, pour chaque $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, une fonction (lisse)$f_\varepsilon : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$. Soit de plus $f_0 : M \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur la variété ALE X. Soit K un compact de X, alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, $K \subset \{r \leq R_\varepsilon\} \hookrightarrow M_\varepsilon$. Alors, fpour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, $h^*_\varepsilon f_{\varepsilon|K}$ est définie sur $K \subset X$. On dit que la suite (f_ε) converge vers f dans $\mathcal{C}^k$ sur le compact K si*

$$\|h^*_\varepsilon f_{\varepsilon|K} - f_{|K}\|_{\mathcal{C}^k(K)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

On a de plus le résultat suivant :

Lemme 3.2.2. *La classe de cohomologie $[\omega_\varepsilon] \in H^2(\hat{M}, \mathbb{R})$ ne dépend pas de ε.*

Preuve. Sur l'orbifold M, dans un voisinage contractile de chaque p_i, la version orbifold du lemme du $\partial\bar{\partial}$ local montre que la forme de Kähler ω_M est exacte. Il existe donc une 2-forme à support compact $\bar{\omega}$, définissant une classe de $H^2_c(M^*, \mathbb{R})$, où $M^* := M \setminus \{p_1, \ldots, p_\ell\}$, et des fonctions φ_i à support dans un voisinage de p_i, telles que

$$\omega_M = \bar{\omega} + i \sum_j \partial\bar{\partial}\varphi_j.$$

D'un autre côté, puisque $\omega_{X,\varepsilon} = i\partial\bar{\partial}u$ est exacte, on a, par définition de ω_ε

$$\omega_\varepsilon = \bar{\omega} + \varepsilon^2 \sum_j \partial\bar{\partial}(\gamma_j u)$$

pour des fonctions de cut-off bien choisies γ_j. □

Remarque 3.2.3. Un argument plus général, dans la veine de Mayer-Vietoris, permet en fait d'identifier $H^2(M,\mathbb{R})$ à $\{\alpha \in H^2(\hat{M},\mathbb{R}), \alpha \cdot S = 0\}$ via $H^2_c(M^*,\mathbb{R})$, où S correspond à la section nulle de T^*S^2.

De là, par le théorème de stabilité de Moser (Théorème 3.17 dans le livre de MacDuff et Salamon [83]), on obtient

Corollaire 3.2.1. *Les variétés symplectiques* $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)}$ *sont toutes symplectomorphes.*

Remarque 3.2.4. Il ressort de cette discussion que l'on pourrait travailler sur une variété symplectique fixée $(\hat{M}, \hat{\omega})$; c'est en fait ce que l'on fera au chapitre 4. Cependant, pendant la construction de recollement, il s'avèrera plus pratique, notamment pour l'analyse, de garder trace du paramètre ε (notamment pour utiliser les définitions 3.2.1 et 3.2.2).

3.3 Structures presque complexes sur M_ε

L'étape suivante consiste à munir la 'somme connexe' M_ε d'une structure presque complexe compatible avec ω_ε. Pour ce faire, on recolle les structures complexes J_M sur M et J_X sur X à l'aide de fonctions de cut-off. Les structures complexes sur les deux variétés modèles n'étant pas les mêmes, les rendre ainsi compatibles 'de force' coûtera l'intégrabilité de la structure presque complexe obtenue sur M_ε. Pour pouvoir effectuer le recollement, on ajuste d'abord les structures complexes sur M et X en utilisant les résultats de la section 3.1.1.

3.3.1 Sur l'orbifold M.

On note (U_i, ϕ_i) les cartes de Darboux obtenues à la section 3.2.1 centrées en chaque singularité p_i. Dans une telle carte, J_M est, par nature, compatible avec ω_M, mais c'est aussi le cas de la structure complexe standard J_0 sur $\mathbb{C}^2$.

D'après la proposition 3.1.1, il existe donc une unique section $A \in \mathcal{L}_{\omega_{M|U_i}}$, qui anticommute aussi bien à J_M qu'à J_0, et telle que

$$J_M = \exp(A) J_0 \exp(-A). \tag{3.3.1}$$

Si l'on multiplie A par une fonction de cut-off sur M, on peut donc relier J_M à J_0 de façon lisse, dans un voisinage de chaque singularité. On perd alors l'intégrabilité de la structure presque complexe obtenue. D'un autre côté, on peut espérer que si J_M est proche de J_0 au voisinage des p_i, cette opération n'est pas trop drastique et on aura un bon contrôle du tenseur de Nijenhuis.

Pour quantifier cela, il nous faut d'abord une estimée de A, que l'on déduit du lemme 3.2.1 :

Lemme 3.3.1. *Dans les coordonnées de Darboux orbifold $x = (x_k)_{k=1,\dots,4}$ décrites en section 3.2.1, l'endomorphisme A défini par* (3.3.1) *satisfait les estimées suivantes :*

$$\begin{aligned} A &= O(|z|^2), \\ \partial A &= O(|z|), \ \textit{and} \\ \partial^k A &= O(1) \textit{ for all } k \geq 2. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Preuve. En observant que

$$\begin{aligned} J_M - J_0 &= \exp(A) J_0 \exp(-A) - J_0 \\ &= (\exp(2A) - I) J_0 \\ &= O(|x|^2), \end{aligned}$$

on obtient l'estimée désirée sur A. On peut alors écrire le développement de Taylor de A en 0, et en utilisant à nouveau l'estimée $J_M(x) - J_0 = O(|x|^2)$ on obtient l'estimation des dérivées de premier ordre de A au voisinage de 0. Puisque A est définie sur M et y est lisse, les dérivées d'ordre supérieures sont bornées. □

Nous avions choisi $r_\varepsilon = \varepsilon^\beta$ comme rayon de recollement ; pour ε assez petit, la région $\{\rho \leq 4r_\varepsilon\}$ est inclus dans la carte de Darboux autour de chaque p_i.

Soit $\chi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de cutoff lisse sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 2 + \eta, \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

où η est très petit et n'a d'autre utilité que d'assurer que toutes les dérivées seront plates, et donc se recolleront de façon lisse, lorsque l'on recollera avec la structure presque complexe analogue sur X. Posons

$$\chi_{r_\varepsilon} := \chi_1\left(\frac{\rho}{r_\varepsilon}\right).$$

On définit la structure presque complexe $J_{r_\varepsilon} \in \mathcal{AC}_{\omega_M}$ sur M par

$$J_{r_\varepsilon} = \exp(\chi_{r_\varepsilon} A) J_0 \exp(-\chi_{r_\varepsilon} A).$$

En particulier,

$$J_{r_\varepsilon} = \begin{cases} J_0 \text{ si } \rho \leq 2r_\varepsilon, \\ J_M \text{ si } \rho \geq 4r_\varepsilon. \end{cases}$$

On a alors

Lemme 3.3.2. *La structure presque complexe J_{r_ε} vérifie les estimées suivantes :*

$$\begin{aligned} J_{r_\varepsilon} - J_0 &= O(r_\varepsilon^2), \\ \partial(J_{r_\varepsilon} - J_0) &= O(r_\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Preuve. La première estimée se déduit immédiatement du lemme 3.3.1, appliqué dans l'anneau $\{2r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\}$.

Pour la seconde, on observe que

$$J_{r_\varepsilon} - J_0 = \big(\exp\big(2\chi_{r_\varepsilon} A\big) - I\big) J_0$$

donc les dérivées premières sont de la forme

$$\partial(J_{r_\varepsilon} - J_0) = 2D\exp(2\chi_{r_\varepsilon} A)(\partial\chi_{r_\varepsilon} A + \chi_{r_\varepsilon}\partial A) J_0.$$

Pour conclure, on utilise que dans la région $\{2r_\varepsilon \leq r \leq 4r_\varepsilon\}$,

$$\partial\chi_{r_\varepsilon} = O(r_\varepsilon^{-1}).$$ □

L'endomorphisme J_{r_ε} sur M est une structure presque complexe, compatible avec ω_M par construction. Ce n'est pas une structure complexe intégrable ; cependant, son tenseur de Nijenhuis $N_{J_{r_\varepsilon}}$ est à support dans la région de cut-off $\{2r_\varepsilon \leq r \leq 4r_\varepsilon\}$. On sera amené à utiliser l'estimation suivante :

Lemme 3.3.3. *Le tenseur de Nijenhuis $N_{J_{r_\varepsilon}}$ of J_{r_ε} vérifie*

$$N_{J_{r_\varepsilon}} = \begin{cases} O(r_\varepsilon) \text{ dans } \{2r_\varepsilon \leq r \leq 4r_\varepsilon\}, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{3.3.4}$$

De plus, ses dérivées sont bornées sur M.

Preuve. Rappelons l'expression du tenseur de Nijenhuis en fonction de la connexion de Levi-Civita D_{r_ε} associée à la métrique $g_{r_\varepsilon} := \omega(\cdot, J_{r_\varepsilon}\cdot)$:

$$N_{J_{r_\varepsilon}}(X,Y) = \frac{1}{2} J_{r_\varepsilon}((D_{r_\varepsilon,Y} J_{r_\varepsilon})X - (D_{r_\varepsilon,X} J_{r_\varepsilon})Y). \tag{3.3.5}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} N_{J_{r_\varepsilon}}(X,Y) &= \frac{1}{2}(J_{r_\varepsilon} - J_0)((D_{r_\varepsilon,Y}(J_{r_\varepsilon} - J_0)X - (D_{r_\varepsilon,X}(J_{r_\varepsilon} - J_0)Y) \\ &+ \frac{1}{2} J_0(D_{r_\varepsilon,Y}(J_{r_\varepsilon} - J_0)X - D_{r_\varepsilon,X}(J_{r_\varepsilon} - J_0)Y) \\ &+ \frac{1}{2} J_{r_\varepsilon}((D_{r_\varepsilon,Y} J_0)X - (D_{r_\varepsilon,X} J_0)Y), \end{aligned}$$

Grâce à l'estimée (3.3.3), on voit que le premier terme de la somme est un $O(r_\varepsilon^3)$ et le second, un $O(r_\varepsilon)$. On estime le troisième terme en le comparant au tenseur de Nijenhuis de J_0 (qui s'annule). Pour cela, remarquons que

$$D_{r_\varepsilon} J_0 = (D_0 + \Gamma_{r_\varepsilon}) J_0 = \Gamma_{r_\varepsilon} J_0,$$

où Γ_{r_ε} est fonction des symboles de Christoffel de g_{r_ε}, donc dépend des dérivées des coefficients de g_{r_ε}. Par conséquent, $\Gamma_{r_\varepsilon} J_0 = O(r_\varepsilon)$. □

3.3.2 Sur l'espace ALE X.

On procède de manière similaire sur X. On travaille cette fois dans les cartes de Darboux à l'infini obtenues à la section 3.2.2.

Une fois encore, dans cette carte, $J_{X,\varepsilon}$ et J_0 sont tous deux compatibles avec $\omega_{X,\varepsilon}$. D'après la proposition 3.1.1, il existe donc une unique section B_ε de $\mathcal{L}_{\omega_{X,\varepsilon}}$, qui anticommute à J_0 et $J_{X,\varepsilon}$, et telle que

$$J_{X,\varepsilon} = \exp(B_\varepsilon) J_0 \exp(-B_\varepsilon).$$

On a :

Lemme 3.3.4. *L'endormorphisme B vérifie les estimées suivantes :*

$$B_\varepsilon = O(r^{-4}),$$
$$\partial^k B_\varepsilon = O(r^{-4-k}).$$

Preuve. On procède comme pour le lemme 3.3.1, en utilisant l'estimée ALE (3.2.3) sur le modèle. □

On réalise ensuite le même type de cut-off que sur l'orbifold pour construire une structure presque complexe sur X permettant de faire la transition entre $J_{X,\varepsilon}$ et J_0.

Soit $\chi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de cut-off lisse, telle que

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x \geq 2 - \eta. \end{cases}$$

Sur l'espace ALE, notre rayon de recollement est donné par $R_\varepsilon = {}^{r_\varepsilon}\!/_{\varepsilon} = \varepsilon^{\beta-1}$. On définit une fonction de cutoff adaptée sur X par

$$\chi_{R_\varepsilon} := \chi_2\left(\frac{r}{R_\varepsilon}\right).$$

Pour ε assez petit, la région $\{r \geq R_\varepsilon\}$ est incluse dans la carte de Darboux. On définit alors une structure presque complexe sur X par

$$J_{R_\varepsilon} = \exp(\chi_{R_\varepsilon} B_\varepsilon) J_0 \ \exp(-\chi_{R_\varepsilon} B_\varepsilon).$$

Ainsi, par construction,

$$J_{R_\varepsilon} = \begin{cases} J_{X,\varepsilon} \text{ sur } \{r \leq R_\varepsilon\} \\ J_0 \text{ sur } \{r \geq 2R_\varepsilon\}, \end{cases}$$

et J_{R_ε} est une structure presque complexe compatible avec ω_X sur X.

On a de plus, en procédant comme au lemme 3.3.2,

Lemme 3.3.5. *La structure presque complexe J_{R_ε} vérifie*

$$J_{R_\varepsilon} - J_0 = O(R_\varepsilon^{-4}),$$
$$\partial^k (J_{R_\varepsilon} - J_0) = O(R_\varepsilon^{-4-k}). \tag{3.3.6}$$

Le tenseur de Nijenhuis de J_{R_ε} est à support dans $\{R_\varepsilon \leq \rho_x \leq 2R_\varepsilon\}$ et vérifie :

Lemme 3.3.6. *Le tenseur de Nijenhuis de J_{R_ε} vérifie, pour tout $k \geq 0$,*

$$\partial^k N_{J_{R_\varepsilon}} = \begin{cases} O(R_\varepsilon^{-5-k}) \text{ sur } \{R_\varepsilon \leq r \leq 2R_\varepsilon\} \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Preuve. La preuve est identique à celle du Lemme 3.3.3, et repose sur l'expression (3.3.5) du tenseur de Nijenhuis.

On l'applique cette fois avec la connexion de Levi-Civita associée à $g_{R_\varepsilon} = \omega_X(\cdot, J_{R_\varepsilon}\cdot)$. Le calcul se transpose alors tel quel, en utilisant (3.2.3) pour estimer les symboles de Christoffel. $\square$

3.3.3 La solution approximative

On a donc obtenu des structures presque complexes sur M et X qui coïncident avec J_0 dans des régions appropriées des cartes de Darboux. On peut donc les recoller en une structure presque complexe sur M_ε.

On définit d'abord la fonction suivante sur M_ε, qui encode à la fois la fonction ρ qui mesure la distance aux singularités sur M, et la fonction rayon r sur X dans la carte de Darboux. On pose

$$\rho_\varepsilon = \begin{cases} \rho \text{ si } \rho \geq 2r_\varepsilon; \\ \varepsilon h^*_{\varepsilon^{-1}} r \text{ si } \rho \leq 2r_\varepsilon. \end{cases}$$

On définit alors une section de $\mathrm{End}(TM_\varepsilon)$, $\hat{J}_\varepsilon$, par :

$$\hat{J}_\varepsilon = \begin{cases} h^*_{\varepsilon^{-1}} J_{R_\varepsilon} & \text{dans } \rho_\varepsilon < 2r_\varepsilon, \\ J_{r_\varepsilon} & \text{dans } \rho_\varepsilon \geq 2r_\varepsilon. \end{cases}$$

Puisque $J_{r_\varepsilon} = J_0$ pour $\rho_\varepsilon \leq (2+\eta)r_\varepsilon$, et $h^*_{\varepsilon^{-1}} J_{R_\varepsilon} = J_0$ pour $\rho_\varepsilon \geq (2-\eta)r_\varepsilon$, ceci définit bien une section lisse de $\mathrm{End}(TM_\varepsilon)$. C'est une structure presque complexe sur M_ε, compatible avec ω_ε par construction.

Son tenseur de Nijenhuis est à support dans une petite région $\{r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 4r_\varepsilon\}$ autour de chaque singularité. Il vérifie les estimées suivantes, exprimées dans les normes de Hölder à poids introduites au chapitre 2 section 2.5.2.

Lemme 3.3.7. *Le tenseur de Nijenhuis de $\hat{J}_\varepsilon$ est à coefficients dans $\mathcal{C}^{3,\alpha}_0$ for $0 < \alpha < 1$, et on a*

$$\|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \begin{cases} O(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-5}) & \text{on } \{r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 2r_\varepsilon\} \\ O(r_\varepsilon) & \text{on } \{2r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 4r_\varepsilon\}. \end{cases}$$

Preuve. Pour prendre en compte la remise à l'échelle par l'homothétie, on remarque que

$$\begin{aligned} N_{h^*_{\varepsilon^{-1}} J_{R_\varepsilon}}(X, Y) &= N_{h^*_{\varepsilon^{-1}} J_{R_\varepsilon}}(h^*_{\varepsilon^{-1}}\tilde{X}, h^*_{\varepsilon^{-1}}\tilde{Y}) \\ &= h^*_{\varepsilon^{-1}} N_{J_{R_\varepsilon}}(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{aligned}$$

$\square$

où $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ s'interprètent comme des vecteurs tangents à X. D'après le lemme 3.3.6, on a donc l'estimée sur $\{r_\varepsilon \leq r \leq 2r_\varepsilon\}$. L'estimée sur $\{2r_\varepsilon \leq r \leq 4r_\varepsilon\}$ provient directement du lemme 3.3.3.

Remarque 3.3.1. Pour que l'exposant dans la première ligne soit positif (autrement dit, pour que $N_{\hat{J}_\varepsilon}$ diminue quand ε tend vers 0), il nous faut supposer $\beta < \frac{4}{5}$.

Cette construction munit M_ε d'une structure presque-kählérienne. La métrique riemannnienne associée est $\hat{g}_\varepsilon := \omega_\varepsilon(\hat{J}_\varepsilon \cdot, \cdot)$, ou, de manière équivalente :

$$\hat{g}_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_{R_\varepsilon} & \text{si } \rho_\varepsilon \leq 2r_\varepsilon, \\ g_{r_\varepsilon} & \text{si } \rho_\varepsilon \geq 2r_\varepsilon. \end{cases}$$

3.4 L'équation

Le but est maintenant de perturber la structure presque kählérienne $(\omega_\varepsilon, \hat{J}_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon)$ obtenue sur M_ε pour obtenir une nouvelle structure $(\omega_\varepsilon, \hat{\hat{J}}_\varepsilon, \hat{\hat{g}}_\varepsilon)$ à courbure scalaire hermitienne constante.

Plus précisément, on souhaite exprimer l'équation résultante en termes d'une équation aux dérivées partielles portant sur une fonction f, qui imitera un potentiel de Kähler, et sera prise dans un espace fonctionnel adapté.

Pour réaliser cela, on utilise la construction décrite en section 3.1.2. À une fonction f on associe ainsi une structure presque complexe compatible $J_f \in \mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$ définie par (3.1.1).

On cherche donc à résoudre l'équation

$$s^\nabla(J_f) = s_{g_M} + \lambda \tag{3.4.1}$$

pour f dans un espace fonctionnel approprié. On utilisera les espaces de Hölder à poids introduits au chapitre 2 section 2.5.2.

Remarque 3.4.1. La constante λ apparaît ici comme paramètre. Cependant, on sait que la courbure scalaire hermitienne totale ne varie pas sur $\mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$ d'après (3.1.8), et λ est donc déjà fixée par les données du problème.

On reprend la stratégie décrite au Chapitre 2 : il s'agit d'imiter la preuve du théorème d'inversion locale.

On écrit donc le développement de Taylor de l'équation :

$$s^\nabla(J_f) = s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) + L_\varepsilon f + Q_\varepsilon(f), \tag{3.4.2}$$

où L_ε est la linéarisation de l'opérateur en 0 et Q_ε réunit les termes nonlinéaires. On souhaite donc résoudre

$$L_\varepsilon f + \lambda = s_{g_M} - s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f). \tag{3.4.3}$$

Si l'on dispose d'un inverse à droite pour l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned}\tilde{L}_\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon) &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)\\ (\lambda, f) &\mapsto \lambda + L_\varepsilon f,\end{aligned}$$

pour un poids approprié δ, alors le problème est ramené à un problème de point fixe. Pour pouvoir conclure par le théorème du point fixe de Picard, on réalise les étapes suivantes :

1. Construire un inverse à droite pour $\tilde{L}_\varepsilon$;
2. Etablir que Q_ε a le 'comportement quadratique' que l'on espère, autrement dit montrer une estimée du type
$$\|Q_\varepsilon(f) - Q_\varepsilon(g)\|_F \leq C(\|f\| + \|g\|)(\|f-g\|);$$
3. Estimer la 'qualité' de notre solution approchée $\hat{J}_\varepsilon$; c'est à dire estimer la différence entre la courbure scalaire hermitienne $s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon)$ et la courbure scalaire de la métrique orbifold g_M.

Ces étapes seront l'objet des prochaines sections.

3.4.1 L'opérateur linéarisé L_ε.

L'étape suivante est de comprendre l'opérateur linéarisé L_ε. On utilise le calcul de la linéarisation de la courbure scalaire hermitienne réalisé à la section 3.1.

$$\hat{J}_\varepsilon \delta(\hat{J}_\varepsilon \mathcal{L}_{X_f} \hat{J}_\varepsilon))^\flat = \Delta_{\hat{g}_\varepsilon} df - 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}_g f, \cdot) + E_\varepsilon f,$$

pour $f \in C^{3,\alpha}(M_\varepsilon)$, avec

$$E_\varepsilon f(Y) = \sum_i df((D^2_{e_i, \hat{J}_\varepsilon Y} \hat{J}_\varepsilon)e_i) + 2Ddf(e_i, \hat{J}_\varepsilon(D_Y \hat{J}_\varepsilon)e_i) \tag{3.4.4}$$

dans une base orthonormée locale de la forme $\{e_1, \dots, e_{2m}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{Z_1, \dots, Z_m, \hat{J}_\varepsilon Z_1, \dots, \hat{J}_\varepsilon Z_m\}$ sur $(TM_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon)$.

Alors

$$L_\varepsilon f = \Delta^2_{g_\varepsilon} f - 2\delta(\mathrm{Ric}(df)) + \delta E_\varepsilon f, \tag{3.4.5}$$

En conséquence, le terme d'erreur est à support dans $\{r_\varepsilon \leq r \leq 4r_\varepsilon\}$, et on s'attend à ce qu'il soit petit en normes de Hölder à poids.

On précise cette attente dans le lemme suivant.

Lemme 3.4.1 (Estimation du terme d'erreur). *Soit $f \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)$. On a alors*

$$\|\delta E_\varepsilon f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} = o(1)\|f\|_{C^{4,\alpha}_\delta}. \tag{3.4.6}$$

Preuve. Rappelons que pour tous champs de vecteurs X, Y et Z, on a :

$$\hat{g}_\varepsilon((D_X \hat{J}_\varepsilon)Y, Z) = 2\hat{g}_\varepsilon(\hat{J}_\varepsilon X, N(Y, Z);)$$

donc, pour calculer des estimations, les normes $C^{k,\alpha}_{\delta}(M_\varepsilon)$ du tenseur de Nijenhuis et de $D\hat{J}_\varepsilon$ sont comparables.

On applique la codifférentielle au terme d'erreur (3.4.4). On onbtient que $\delta E_\varepsilon f$ est somme de termes de la forme

$$\sum_{k=0}^{2} \partial^k (D\hat{J}_\varepsilon)\partial^{3-k} f \tag{3.4.7}$$

ou

$$\partial^2 f(D\hat{J}_\varepsilon);\ \partial^2 f(D\hat{J}_\varepsilon)^2. \tag{3.4.8}$$

On souhaite les comparer à la norme $C^{4,\alpha}_{\delta}(M_\varepsilon)$ de f. Puisque tous ces termes sont à support dans in $\{r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 4r_\varepsilon\}$, par définition des normes à poids, on a

$$|\partial^j f| \leq C r_\varepsilon^{\delta-j} \|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}},$$
$$|\partial^k (D\hat{J}_\varepsilon)| \leq C r_\varepsilon^{-k} \|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0}$$

pour une constante positive C. On obtient donc

- ⋆ $|\rho_\varepsilon^{4-\delta}(D\hat{J}_\varepsilon)\partial^3 f| \leq C r_\varepsilon \|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0}\|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}}$;
- ⋆ $|\rho_\varepsilon^{4-\delta}\partial(D\hat{J}_\varepsilon)\partial^2 f| \leq C r_\varepsilon \|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0}\|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}}$;
- ⋆ $|\rho_\varepsilon^{4-\delta}\partial^2(D\hat{J}_\varepsilon)\partial f| \leq C r_\varepsilon \|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0}\|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}}$;
- ⋆ $|\rho_\varepsilon^{4-\delta}(D\hat{J}_\varepsilon)\partial^2 f| \leq C r_\varepsilon^2 \|N_{\hat{J}_\varepsilon}\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0}\|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}}$.

En utilisant (3.4.6), on voit que tous les termes de droite s'écrivent $o(1)$ fois $\|f\|_{C^{4,\alpha}_{\delta}}$, ce qui était la conclusion recherchée. □

Construction d'un inverse à droite pour L_ε

Pour construire un inverse à droite de L_ε, on adopte la stratégie, brièvement décrite au chapitre 2, section 2.5.3, consistant à recoller ensemble les inverses à droite de $\mathbb{L}_{M^*}$ and $\mathbb{L}_X$. On montrera qu'on obtient ainsi un 'inverse à droite approximé' à partir duquel on obtient un véritable inverse à droite pour L_ε. La preuve suivra les lignes du Théorème 20 de [110], mais le choix de poids que l'on fait est différent ; c'est celui choisi par Biquard et Rollin dans [17]. On prouve ainsi :

Proposition 3.4.1. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'opérateur*

$$\tilde{L}_\varepsilon : \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M_\varepsilon) \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$$
$$(f,\nu) \mapsto L_\varepsilon f + \nu$$

admet un inverse à droite G_ε, de norme d'opérateur bornée par $\varepsilon^{-\delta\beta^+}$, où $\beta < \beta^+ < 1$.

Preuve. Cette preuve suit celle de la Proposition 20 dans [110] ; on la rapelle cependant en détail par souci d'exhaustivité.

Pour mener à bien cette opération, on introduit deux ensembles de fonctions de cutoff.

D'une part, soit $\gamma : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse réelle, valant 0 sur $]-\infty, 1]$ et 1 sur $[4, +\infty[$. Sur M_ε on définit

$$\begin{cases} \gamma_1 : x \in M_\varepsilon \mapsto \gamma\left(\dfrac{\rho_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}\right). \\ \gamma_2 := 1 - \gamma_1 \end{cases}$$

Alors γ_1 est à support dans la région $\rho_\varepsilon \geq r_\varepsilon$, qui s'identifie à un sous ensemble de M^*. Ses dérivées $\partial\gamma_1$ sont à support dans la zone de recollement $r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 4r_\varepsilon$.

De même, γ_2 est à support dans $\rho_\varepsilon \leq 4r_\varepsilon$ qui, via l'homothétie de recollement, s'identifie au compact $4R_\varepsilon \geq r$ dans la variété ALE X.

Aussi bien γ_1 que γ_2 sont lisses M_ε et sont bornées en norme de Hölder à poids :

$$\|\gamma_i\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_0} \leq c. \tag{3.4.9}$$

D'autre part, on définit deux fonctions de cutoff supplémentaires ζ_1 et ζ_2, de sorte que $\zeta_i = 1$ sur le support de γ_i.

Rappelons que $r_\varepsilon = \varepsilon^\beta$ avec $0 < \beta < 1$. On choisit β^+ et β^- de sorte que $0 < \beta^- < \beta < \beta^+ < 1$. On découpe ainsi la zone de recollement $\varepsilon < \rho_\varepsilon < 1$ en régions $1 > 4\varepsilon^{\beta-} > 4r_\varepsilon > 2r_\varepsilon > r_\varepsilon > \varepsilon^{\beta^+} > \varepsilon$.

Soit maintenant $\zeta^+ : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction réelle lisse telle que $\zeta^+(t) = 1$ lorsque $t \leq \beta$, 0 lorsque $t \geq \beta^+$. La fonction ζ_1, définie par

$$\zeta_1 : x \in M_\varepsilon \mapsto \zeta^+\left(\frac{\log(\rho_\varepsilon(x))}{\log(\varepsilon)}\right),$$

est alors à support dans $\rho \geq \varepsilon^{\beta^+}$ et vaut 1 dans supp γ_1.

De la même façon, Soit $\zeta^- : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse valant 1 sur $]\beta, +\infty[$ et zéro sur $]-\infty, \beta^-[$; on définit un cutoff lisse sur M_ε par

$$\zeta_2 : x \in M_\varepsilon \mapsto \zeta^-\left(\frac{\log(\rho_\varepsilon(x))}{4\log(\varepsilon)}\right).$$

Alors ζ_2 est à support dans $\rho \leq 4\varepsilon^{\beta^-}$ et vaut 1 dans supp γ_2.

Les fonctions ζ_1 et ζ_2 vérifient

$$\|\partial\zeta_i\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_{-1}} \leq \frac{c}{|\log\ \varepsilon|}. \tag{3.4.10}$$

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$. On cherche $\phi \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)$ telle que $L_\varepsilon\phi = \psi$.

On peut considérer $\gamma_1\psi$ comme une fonction sur M^* ; alors, d'après (3.4.9), on a

$$\|\gamma_1\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)} \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

Soit alors

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{vol}(M^*)}\int_{M^*} \gamma_1\psi \mathrm{vol}_{g_M}.$$

D'après la Proposition 2.5.6, il existe une fonction

$$G_1(\gamma_1\psi) = \tilde{G}_1(\gamma_1\psi) + \sum \lambda_i \xi_i \in \mathbb{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*) \oplus \mathcal{V} \tag{3.4.11}$$

telle que

$$\|\tilde{G}_1(\gamma_1\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} + \sum |\lambda_i| + |\nu| \leq c\|\gamma_1\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)}, \tag{3.4.12}$$

et vérifiant

$$\mathbb{L}_M(G_1(\gamma_1\psi)) + \nu = \gamma_1\psi. \tag{3.4.13}$$

D'autre part, on peut considérer $\gamma_2\psi$ comme une fonction de $\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(X)$ sur X, vérifiant (compte tenu de l'homothétie)

$$\|\gamma_2\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(X)} \leq c\varepsilon^{\delta-4}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

De la Proposition 2.5.7, on retire qu'il existe une fonction $G_2(\gamma_2\psi)$ telle que

$$\|G_2(\gamma_2\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}(X) \leq c\|\varepsilon^4\gamma_2\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(X)} \leq c\varepsilon^\delta\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}},$$

d'où

$$\|G_2(\gamma_2\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}, \tag{3.4.14}$$

et telle que

$$\mathbb{L}_X G_2(\gamma_2\psi) = \varepsilon^4\gamma_2\psi,$$

ce qui, après remise à l'échelle, donne

$$\mathbb{L}_{\varepsilon^2 X} G_2(\gamma_2\psi) = \gamma_2\psi. \tag{3.4.15}$$

On recolle maintenant en un inverse approché pour $\tilde{L}_\varepsilon$. Posons

$$\tilde{G}\psi = \zeta_1 G_1(\gamma_1\psi) + \zeta_2 G_2(\gamma_2\psi).$$

On souhaite montrer que

1. L'application $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon) \mapsto (\tilde{G}\psi, \nu) \in \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M_\varepsilon) \times \mathbb{R}$ est un inverse à droite approché pour $\tilde{L}_\varepsilon$ dans le sens où
$$\|L_\varepsilon(\tilde{G}\psi) + \nu - \psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}. \tag{3.4.16}$$
2. La norme d'opérateurs de $\tilde{G} : \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4} \to \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta$ est bornée par $\varepsilon^{-\delta\beta^+}$.

De 1, on déduit que la norme d'opérateur de $\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G} - I$ est plus petite que $1/2$. Donc $\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G}$ est inversible et $\tilde{G} \circ (\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G})^{-1}$ est un inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon$.

D'autre part, 2 nous donne le contrôle souhaité de la norme de l'inverse.

On commence par la seconde affirmation. Pour $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$, on veut montrer que

$$\|\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi) + \zeta_2 G_2(\gamma_2\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} \leq \|\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} + \|\zeta_2 G_2(\gamma_2\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} \leq C\varepsilon^{\delta\beta^+}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

Le terme $\zeta_2 G_2(\gamma_2\psi)$ ne pose pas de problème. En effet, sa norme est somme de termes de type

$$\sum_{j=0}^{\ell} \rho^j \, |\partial^j \zeta_2| \, \rho^{\ell-j-\delta} \, |\partial^{\ell-j}(G_2(\gamma_2\psi))|, \tag{3.4.17}$$

pour $\ell = 0, \ldots, 4$.

En utilisant (3.4.14) et (3.4.10), on constate que ces termes sont bornés par $C\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}$ pour une constante positive C. Le même raisonnement s'applique au terme $\tilde{G}_1(\gamma_1\psi)$.

La non-uniformité de la norme d'opérateur provient du terme dans $\mathcal{V}$, qui se comporte qomme une constante au voisinage de chaque p_i dans M^*. Or, les constantes ne sont pas bornées dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*)$ lorsque le poids δ est positif, comme c'est le cas ici.

Cependant, dans le support de ζ_1, inclus dans $\{\rho \geq \varepsilon^{\beta^+}\}$, on reste 'à distance' des trous. La norme des constantes ainsi tronquées est alors de l'ordre de

$$\sup_{\rho \geq \varepsilon^{\beta^+}} \lambda_i |\rho^{-\delta}| \leq c\varepsilon^{\delta\beta^+}.$$

Donc, en utilisant (3.4.12), on obtient

$$\|\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}} \leq c\varepsilon^{\delta\beta^+} \|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

On montre maintenant l'affirmation 1. Pour cela, on sépare l'étude sur les différents 'morceaux' de la somme connexe, ce qui nous permet de comparer $\tilde{L}_\varepsilon$ avec les opérateurs modèles sur X et M^*. On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\tilde{G}\psi) + \nu - \psi = {} & L_\varepsilon(\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)) + \nu - \gamma_1\psi \\ & + L_\varepsilon(\zeta_2 G_2(\gamma_2\psi)) - \gamma_2\psi. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

On traite d'abord la première ligne, dont les termes vivent dans $\{\rho_\varepsilon \geq \varepsilon^{\beta^+}\}$. Dans cette région, considérée comme un sous-ensemble de M^*, on souhaite comparer L_ε avec l'opérateur modèle $\mathbb{L}_M$. Pour cela, il nous faut comparer les métriques $\hat{g}_\varepsilon$ et g_M sur le support de ζ_1 :

Lemme 3.4.2. *Dans la zone $\{\rho_\varepsilon \geq \varepsilon^{\beta^+}\}$ de M_ε, la métrique $\hat{g}_\varepsilon$ diffère de g_M comme suit :*

$$\|\hat{g}_\varepsilon - g_M\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \mathcal{O}(r_\varepsilon^2 + \varepsilon^{4(1-\beta^+)}) \tag{3.4.19}$$

Preuve. On décompose l'étude de $\hat{g}_\varepsilon - g_M$ en trois régions de M_ε.

— Sur $\{\rho \geq 4r_\varepsilon\}$, $\hat{g}_\varepsilon - g_M = 0$ par définition.

— Sur $\{2r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\}$, on a $\hat{g}_\varepsilon - g_M = \omega_M(J_{r_\varepsilon} - J_M)\cdot, \cdot)$. En utilisant le mêm calcul que dans la preuve du Lemme 3.3.2, on voit que

$$\|J_{r_\varepsilon} - J_M\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} \leq cr_\varepsilon^2.$$

— Enfin, sur la région $\{\varepsilon^{\beta^+} \leq \rho_\varepsilon \leq 2r_\varepsilon\}$, on sépare l'expression en $\hat{g}_\varepsilon - g_M = \hat{g}_\varepsilon - g_0 + g_0 - g_M$. En utilisant le Lemme 3.2.1, on obtient

$$\|g_0 - g_M\|_{\mathcal{C}_0^{3,\alpha}} = \|J_0 - J_M\|_{\mathcal{C}_0^{3,\alpha}} = \mathcal{O}(r_\varepsilon^2).$$

D'autre part, pour estimer le terme $\hat{g}_\varepsilon - g_0$, on identifie $\{\varepsilon^{\beta^+} \leq \rho_\varepsilon \leq 2r_\varepsilon\}$ avec la région $\{\varepsilon^{\beta^+-1} \leq r \leq 2R_\varepsilon\}$ dans X. On a alors $\hat{g}_\varepsilon = \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_{R_\varepsilon}$, donc l'estimée ALE (3.2.3) donne $\|\hat{g}_\varepsilon - g_0\|_{\mathcal{C}_0^{3,\alpha}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{4(1-\beta^+)})$. $\square$

Maintenant, suivant un raisonnement similaire à la Proposition 18 de [110], on est en mesure d'estimer la norme d'opérateur de $L_\varepsilon - \mathbb{L}_M$. Rappelons que

$$\mathbb{L}_M f = -\Delta_M^2 f + 2\delta(\mathrm{Ric}_{g_M}(\mathrm{grad}_g f, \cdot)),$$

et on a obtenu plus tôt

$$L_\varepsilon f = -\Delta_\varepsilon^2 f + 2\delta(\mathrm{Ric}_{\hat{g}_\varepsilon}(\mathrm{grad}_g f, \cdot)) + E(f).$$

Remarque 3.4.2. Puisque les coordonnées dans lesquelles on travaille ne sont pas des coordonnées normales holomorphes, il nous faut être prudents lors de l'estimation des coefficients de Δ_M^2 et Δ_ε^2 ; en effet, les coefficients du Laplacien Δ_M dans ces cartes sont de la forme $\partial\left(g_M^{-1}\partial f\right)$, et de même, ceux de Δ_ε sont de la forme $\partial\left(\hat{g}_\varepsilon^{-1}\partial f\right)$. En particulier, les dérivées premières des coefficients de la métrique interviennent. Ainsi, dans l'expression de Δ_ε^2, on voit apparaître des dérivées d'ordre 3.

Il peut sembler étonnant qu'un contrôle des dérivées d'ordre 3 des coefficients de la métrique soit nécessaire puisque la courbure scalaire hermitienne est un opérateur d'ordre 2 en ces coefficients. Cela provient de l'expression utilisée pour l'opérateur linéarisé, qui fait intervenir un terme du type δRic.

Les coefficients de $\Delta_M^2 f$ sont de la forme $\partial g_M^{-1}\partial^2(g_M^{-1}\partial f)$, et ceux de $\Delta_\varepsilon^2 f$ sont de la forme $\partial\hat{g}_\varepsilon^{-1}\partial^2(\hat{g}_\varepsilon^{-1}\partial f)$, donc

$$\Delta_M^2 f - \Delta_\varepsilon^2 f = \partial((g_M^{-1} - \hat{g}_\varepsilon^{-1})\partial^2(g_M^{-1}\partial f) + \partial(\hat{g}_\varepsilon^{-1}\partial^2((g_M^{-1} - \hat{g}_\varepsilon^{-1})\partial f).$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\Delta_M^2 f - \Delta_\varepsilon^2 f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} &\leq \|\hat{g}_\varepsilon - g_M\|_{\mathcal{C}_0^{3,\alpha}}\|\partial^2 f\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}} \\ &\leq \|\hat{g}_\varepsilon - g_M\|_{\mathcal{C}_0^{3,\alpha}}\|f\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant une notation analogue, le tenseur de courbure riemannienne est donné par les dérivées des symboles de Christoffel $\Gamma = g^{-1}\partial g$, d'où

$$\|\mathrm{Riem}(g_M) - \mathrm{Riem}(\hat{g}_\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{-2}} \leq c\|\hat{g}_\varepsilon - g_M\|_{\mathcal{C}_0^{2,\alpha}}.$$

En conséquence, d'après les lemmes 3.4.2 et 3.4.1, on a, sur $\{\rho_\varepsilon \geq \varepsilon^{\beta^+}\}$,

$$\|L_\varepsilon - \mathbb{L}_M\| = o(1)$$

en norme d'opérateurs.

De la même façon,on traite les termes de la seconde ligne de (3.4.18), qui vivent dans $\{\rho_\varepsilon \leq 4\varepsilon^{\beta^-}\}$. Cette région s'identifie à la zone $\{r \leq 4\varepsilon^{\beta^- -1}\}$ dans X.

On compare $\hat{g}_\varepsilon$ avec la métrique ALE g_X.

Lemme 3.4.3. *Dans la zone $\{\rho_\varepsilon \leq 4\varepsilon^{\beta^-}\}$ de M_ε, la métrique $\hat{g}_\varepsilon$ et la métrique ALE remise à l'échelle $\varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X$ diffèrent comme suit :*

$$\|\hat{g}_\varepsilon - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \mathcal{O}(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-4} + \varepsilon^{2\beta^-}) \tag{3.4.20}$$

Preuve. Comme précédemment, on divise l'étude sur différentes régions de M_ε.

— Sur $\{\rho_\varepsilon \leq r_\varepsilon\}$, $\hat{g}_\varepsilon$ est égale à la métrique ALE.

— Sur $\{r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 2r_\varepsilon\}$,
$$\hat{g}_\varepsilon - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X = \varepsilon^2 \omega_X((J_{R_\varepsilon} - J_X)\cdot, \cdot).$$
En utilisant l'estimée (3.3.6), on voit que, sur cet anneau, $\|\hat{g}_\varepsilon - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \mathcal{O}(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-4})$.

— Enfin, sur $\{2r_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon \leq 4\varepsilon^{\beta^-}\}$ on écrit

$$\hat{g}_\varepsilon - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X = \hat{g}_\varepsilon - g_0 + g_0 - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X.$$

De (3.3.6) on retire que dans cette région, $\|\hat{g}_\varepsilon - g_0\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2\beta^-})$, tandis que l'estimée ALE (3.2.3) sur $\{2R_\varepsilon \leq \rho_X \leq 4\varepsilon^{\beta^- -1}\}$ donne $\|g_0 - \varepsilon^2 h^*_{\varepsilon^{-1}} g_X\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_0} = \mathcal{O}(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-4})$. $\square$

De là, un calcul identique au précédent montre qu'en norme d'opérateurs,

$$\|\mathbb{L}_X - L_\varepsilon\| = o(1).$$

Pour démontrer (3.4.16), il suffit donc de montrer que pour ε assez petit, on a

$$\|\mathbb{L}_M(\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)) + \nu - \gamma_1\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq \frac{1}{8}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}$$

ainsi que

$$\|\mathbb{L}_X(\zeta_2 G_2(\gamma_2\psi)) - \gamma_2\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq \frac{1}{8}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}$$

En ce qui concerne la première inégalité, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_M(\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)) + \nu - \gamma_1\psi &= \zeta_1 \mathbb{L}_M G_1\gamma_1\psi + A(\mathrm{grad}_g \zeta_1 \star G_1\gamma_1\psi) + \nu - \gamma_1\psi \\ &= A(\mathrm{grad}_g \zeta_1 \star G_1\gamma_1\psi)\end{aligned}$$

où A est un opérateur d'ordre 3, à coefficients bornés dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}$, et on note par $\star$ une application bilinéaire. En fait, les termes contenus dans A sont similaires à ceux apparaissant dans (3.4.17).

Donc

$$\begin{aligned}\|\mathbb{L}_M(\zeta_1 G_1(\gamma_1\psi)) + \nu - \gamma_1\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} &= \|A(\mathrm{grad}_g\zeta_1 \star G_1\gamma_1\psi)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \\ &\leq c\|\partial\zeta_1\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_{-1}}\|G_1\gamma_1\psi\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}_{\delta}} \\ &= o(1)\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.\end{aligned}$$

La preuve de la seconde inégalité suit les mêmes lignes. On a donc montré (3.4.16), ce qui clôt la preuve. □

3.4.2 Estimation de la courbure scalaire hermitienne de $\hat{J}_\varepsilon$.

On souhaite mesurer la 'qualité' de notre solution approchée en terme de courbure scalaire, autrement dit on souhaite comparer $s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon)$ à la courbure scalaire (constante) de la métrique orbifold g_M.

Remarque 3.4.3. Le recollement occasionne un 'saut' entre la courbure scalaire constante de g_M et la courbure scalaire nulle sur l'espace ALE X ; il est donc essentiel d'utiliser des normes à poids pour absorber ce saut.

Proposition 3.4.2. *Pour $0 < \delta < 1$ et $\beta < \frac{2}{3}$, on a*

$$\|s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) - s_{g_M}\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} = O(\varepsilon^{\beta(4-\delta)}). \tag{3.4.21}$$

Preuve. Rappelons que, d'après (3.1.5), on a

$$s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) = s_{\hat{g}_\varepsilon} + |D\hat{J}_\varepsilon|^2,$$

où D est la connexion de Levi-Civita associée à $\hat{g}_\varepsilon$. Comme on l'a déjà mentionné, $D\hat{J}_\varepsilon$ a une norme comparable au tenseur de Nijenhuis, d'où, d'après (3.3.7),

$$|D\hat{J}_\varepsilon|^2 = \begin{cases} O(r_\varepsilon^2) \text{ in } \{2r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\} \\ O(\varepsilon^8 r_\varepsilon^{-10}) \text{ in } \{2r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\}.\end{cases}$$

Il nous suffira donc de comparer les courbures scalaires riemanniennes sur M_ε et M.

Du côté orbifold, la courbure scalaire est constante sur $\rho \geq 4r_\varepsilon$ et est bornée sur $\{2r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\}$, étant donnée par les dérivées secondes de g_{r_ε}.

Du côté ALE, la courbure scalaire est nulle là où $\rho \leq r_\varepsilon$, et est donnée par les dérivées secondes de g_{R_ε} dans $\{r_\varepsilon \leq \rho \leq 2r_\varepsilon\}$. Ainsi, en utilisant (3.3.6) et en tenant compte de l'homothétie, on obtient

$$s_{\hat{g}_\varepsilon} = O(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-6}) \text{ in } \{r_\varepsilon \leq \rho \leq 2r_\varepsilon\}.$$

Pour résumer,

$$s_{\hat{g}_\varepsilon} = O(1) + O(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-6}).$$

Donc, en utilisant le fait que $\rho = O(r_\varepsilon)$ dans la région $\{r_\varepsilon \leq \rho \leq 4r_\varepsilon\}$,

$$\begin{aligned}\rho^{4-\delta}|s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) - s_{g_M}| &= \rho^{4-\delta}|s_{\hat{g}_\varepsilon} + |D\hat{J}_\varepsilon|^2 - s(M)| \\ &= O(\varepsilon^4 r_\varepsilon^{-2-\delta}) + O(r_\varepsilon^{4-\delta}) + O(r_\varepsilon^{6-\delta}) + O(\varepsilon^8 r_\varepsilon^{-6-\delta}) \\ &= O(\varepsilon^{\beta(4-\delta)}),\end{aligned}$$

dès que $\beta < \frac{2}{3}$. □

3.4.3 Comportement de la partie non linéaire.

Enfin, il nous faut contrôler la partie non-linéaire de l'équation. On rappelle le développement

$$s^\nabla(J_f) = s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) + L_\varepsilon f + Q_\varepsilon(f).$$

On montre le résultat suivant, suivant le Lemme 19 de [110].

Lemme 3.4.4. *Il existe une constante positive C telle que*

$$\|Q_\varepsilon(f) - Q_\varepsilon(g)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2} + \|g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2}\right)\|f-g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}.$$

Preuve. On réécrit

$$Q_\varepsilon(f) - Q_\varepsilon(g) = \int_0^1 d_{\chi_t} Q_\varepsilon(f-g)dt,$$

où $\chi_t := g + t(f-g)$. Posons $h = f - g$. Du développement de Taylor (3.4.2), on déduit que

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} Q_\varepsilon(\chi_t + s(f-g)) = d_{J_{\chi_t}} s^\nabla(J_{\chi_t}\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon) - d_{\hat{J}_\varepsilon} s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon \mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon),$$

ce que l'on réécrit

$$d_{\chi_t} Q_\varepsilon(f-g) = (d_{J_{\chi_t}} s^\nabla - d_{\hat{J}_\varepsilon} s^\nabla)(J_{\chi_t}\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon) + d_{\hat{J}_\varepsilon} s^\nabla\big((J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon)\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon\big). \quad (3.4.22)$$

On souhaite donc estimer

$$J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon = \big(\exp(\mathcal{L}_{X_{\chi_t}}\hat{J}_\varepsilon) - I\big)\hat{J}_\varepsilon.$$

Les coefficients s'expriment en fonction des dérivées jusqu'à l'ordre 2 de χ. De même, les coefficients de $\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon$ peuvent s'exprimer en fonction des dérivées jusqu'à l'ordre deux de h.

Pour traiter le premier terme de (3.4.22), on utilise la régularité de $J \in \mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon} \mapsto s^\nabla(J)$. C'est un opérateur d'ordre 2 en J, et donc nous donne un opérateur lisse d'un voisinage de $\hat{J}_\varepsilon \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}(M_\varepsilon)$ dans

$\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$. En particulier, la différence $d_{J_{\chi_t}}s^\nabla - d_{\hat{J}_\varepsilon}s^\nabla$ est contrôlée par $J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\|(d_{J_{\chi_t}}s^\nabla - d_{\hat{J}_\varepsilon}s^\nabla)(J_{\chi_t}\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} &\le c\|J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}\|J_{\chi_t}\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}}\\ &\le c\|\chi_t\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2}\|h\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}\\ &\le c(\|f\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2} + \|g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2})\|f-g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après les calculs de la section 3.4.1, l'opérateur

$$d_{\hat{J}_\varepsilon}s^\nabla : \mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}(\mathrm{End}(TM_\varepsilon)) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$$

est borné. Donc,

$$\begin{aligned}\|d_{\hat{J}_\varepsilon}s^\nabla\big((J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon)\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon\big)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} &\le c\|(J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon)\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}}\\ &\le c\|(J_{\chi_t} - \hat{J}_\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_0}\|\mathcal{L}_{X_h}\hat{J}_\varepsilon)\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}}\\ &\le c\|\chi_t\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2}\|h\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}\\ &\le c(\|f\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2} + \|g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2})\|f-g\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}.\end{aligned}$$

On obtient la conclusion souhaitée en sommant ces deux inégalités. □

3.4.4 L'équation non-linéaire.

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires à la résolution de l'équation d'origine (3.4.1). On suit la preuve du Corollaire 35 dans [17]. Rappelons que l'on cherche f (et λ) tels que

$$L_\varepsilon f + \lambda = s_{g_M} - s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f). \tag{3.4.23}$$

On cherche (f,λ) sous la forme $G_\varepsilon(\psi)$, ce qui nous permet de réécrire (3.4.23) sous forme du problème de point fixe :

$$\psi = s_{g_M} - s^\nabla_\varepsilon - Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\psi)) := B_\varepsilon(\psi). \tag{3.4.24}$$

Proposition 3.4.3. *Il existe une constante positive $C > 0$ telle que B_ε envoie la boule $\{\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \le C\varepsilon^2\}$ sur elle-même, et est $\frac{1}{2}$-Lipschitz sur cette boule.*

Preuve. On a

$$B_\varepsilon(\psi) - B_\varepsilon(\varphi) = Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\psi)) - Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\varphi)).$$

En utilisant le lemme 3.4.4, on voit qu'il existe $C_1 > 0$ tel que :

$$\|Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\psi)) - Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\varphi))\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \le C_1\left(\|G_\varepsilon(\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2} + \|G_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_2}\right)\|G_\varepsilon(\psi-\varphi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta}.$$

Or,

$$\|G_\varepsilon(\psi-\varphi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta} \le C_2\varepsilon^{-\delta\beta^+}\|\psi-\varphi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

D'autre part, puisque ψ et ϕ sont dans $\{\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq C\varepsilon^2\}$, on obtient

$$\|G_\varepsilon(\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}} \leq C_2\varepsilon^{-\delta\beta^+}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq CC_2\varepsilon^{2-\delta\beta^+},$$

et il en est de même pour $G_\varepsilon(\varphi)$. De là, on déduit

$$\|G_\varepsilon(\psi)\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_{2}(M_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\delta-\delta\beta^+} = CC_2\varepsilon^{\delta(1-\beta^+)}.$$

D'où

$$\|Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\psi)) - Q_\varepsilon(G_\varepsilon(\varphi))\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq CC_1C_2\varepsilon^{\delta(1-2\beta^+)}\|\psi-\varphi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}}.$$

Pourvu que $\beta < \frac{1}{2}$, cela signifie que pour ε assez petit, B_ε est $\frac{1}{2}$-contractante sur $\{\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq C\varepsilon^2\}$.

D'autre part, B_ε envoie $\{\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq C\varepsilon^2\}$ sur elle-même. En effet, pour ψ dans cette boule,

$$\begin{aligned}
\|B_\varepsilon(\psi)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} &\leq \|B_\varepsilon(\psi) - B_\varepsilon(0)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} + \|B_\varepsilon(0)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} + \|s^\nabla(\hat{J}_\varepsilon) - \lambda\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \\
&\leq \frac{1}{2}C\varepsilon^2 + C_3\varepsilon^{\beta(4-\delta)} \\
&\leq C\varepsilon^2
\end{aligned}$$

du moment que est β assez proche de $\frac{2}{3}$ et δ assez proche de 0. □

Par conséquent, on est en mesure de démontrer le résultat suivant, qui entraîne le théorème 5.

Théorème 3.4.1. *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une structure presque Kähler compatible J_ε sur $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ à courbure scalaire hermitienne constante, et telle que :*

- *J_ε converge, en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, vers J_M, sur tout compact de M^* (au sens de la définition 3.2.1) ;*
- *J_ε converge, en norme $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, vers J_X, sur tout compact de X (au sens de la définition 3.2.2).*

Démonstration. D'après la proposition 3.4.3, on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach à B_ε sur $\{\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}} \leq C\varepsilon^2\}$. Par conséquent, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$, de norme comparable à ε^2, et solution de l'équation principale (3.4.24).

Posons alors $(f,\lambda) = G_\varepsilon(\psi)$. On voit que f est solution de (3.4.3) ; par conséquent, la structure presque complexe $J_\varepsilon := J_f$ munit M_ε d'une structure presque-kählérienne à courbure scalaire hermitienne constante.

De plus, d'après la proposition 3.4.1, on a

$$\|J_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}} \leq c\|f\|_{\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}} \leq c\varepsilon^{2-\delta\beta^+}. \tag{3.4.25}$$

Donc, si K_1 est un compact de M^*, alors pour ε assez petit, $K_1 \subset M \setminus \cup_i B(p_i, 4r_\varepsilon)$. Par définition, $\hat{J}_{\varepsilon|K_1} = J_{M|K_1}$.

De plus, sur $\subset M \setminus \cup_i B(p_i, 4r_\varepsilon)$, la norme de Hölder à poids $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\delta-2}$ coïncide avec la norme de Hölder usuelle $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ (d'après la définition (2.5.10)), donc (3.4.25) implique

$$\|J_\varepsilon - J_M\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(K_1)} \leq c\varepsilon^{2-\delta\beta^+}.$$

Puisque l'on a choisi $0 < \delta, \beta^+ < 1$, on vérifie que le membre de droite tend vers 0 quand ε tend vers zéro, donc J_ε converge bien vers J_M sur K_1.

Symétriquement, sur un compact K_2 de X, le tiré en arrière $h_\varepsilon^* \hat{J}_\varepsilon$ coïncide avec la structure complexe ALE $J_{X|K_2}$ pour ε assez petit.

Alors, l'estimée (3.4.25), et la définition des normes à poids sur M_ε (2.5.10) entraînent que sur K_2, on a

$$\|h_\varepsilon^* J_\varepsilon - J_X\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(K_2)} \leq c\varepsilon^{\delta(1-\beta^+)} \tag{3.4.26}$$

pour une constante positive c. Puisque $\delta \in (0,1)$ et $\beta^+ < 1$, à nouveau, le terme de droite tend bien vers zéro lorsque ε tend vers zéro.

Il reste à s'assurer de la régularité de la structure presque-kählérienne ainsi obtenue.

La fonction f est obtenue dans $\mathcal{C}^{4,\alpha}(M_\varepsilon)$. Cependant, on peut gagner de la régularité en observant que f est solution de

$$s^\nabla(J_f) = \tilde{\lambda},$$

avec $\tilde{\lambda}$ une constante. Comme l'ont mis en évidence les calculs effectués en section 3.1.3, il 'agit d'une équation elliptique. De plus, les coefficients de cette équation sont des fonctions rationnelles en les points de M_ε et les dérivées d'ordre au plus 4 de f.

De là, en utilisant de façon itérée la régularité elliptique (voir le Théorème 41 de l'Annexe du livre de Besse [16], dû à Morrey), dans un argument de *bootstrapping*, on observe que la fonction f est, en fait, dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ pour tout k, et donc lisse.

Par conséquent, la structure presque complexe $J_\varepsilon = J_f$ et la métrique riemannienne associée $g_\varepsilon = \omega_\epsilon(J_\varepsilon \cdot, \cdot)$ sont également lisses. Ceci conclut la preuve de notre résultat principal. □

3.5 Exemples et perspectives.

Donnons tout d'abord quelques exemples où notre construction s'applique, et permet d'obtenir de nouveaux exemples de métriques canoniques.

Ainsi que nous l'a indiqué R. Dervan, cette construction s'applique aux surfaces à singularités A_1 dont la classe canonique est ample. En effet, de telles surfaces ont une première classe de Chern négative, donc, d'une part, sont munies de métriques de Kähler-Einstein (c'est le résultat obtenu par Aubin [10] dont on a déjà parlé au chapitre 1, théorème 1.3.2 ; on pourra aussi consulter Kobayashi [69] pour les surfaces de type général) ; d'autre part, elles n'admettent pas de champ de vecteurs holomorphe non-trivial d'après le théorème 1.3.6.

Dans cette direction, Miranda, dans son article [86], étudie un cas particulier de surfaces complexes à fibré canonique ample, qui n'admettent pas de lissage intégrable. Ainsi, notre construction s'applique à ces classes d'exemples, qui de plus sont en dehors du champ d'application du théorème de lissage obtenu par Biquard et Rollin [17].

De façon similaire, Catanese, dans [26], obtient un critère sous lequel les variétés algébriques dont le groupe d'automorphismes est fini n'admettent pas de lissage. Son théorème inclus les exemples d'obstructions cités précédemment ; de plus, les surfaces satisfaisant ce critère ont pour singularités des points doubles rationnels, ainsi que toutes leurs déformations.

Perspectives. On clôt ce chapitre par un bref commentaire sur les questions qui se posent naturellement au vu des hypothèses du théorème principal :

— Peut-on étendre cette construction à des classes de singularités plus larges ?

— Peut-on traiter le cas où l'orbifold M admet des champs de vecteurs non-triviaux ? Par exemple, peut-on obtenir une condition ayant trait à une forme de stabilité de la somme connexe obtenue, ou portant sur la position des singularités, dans la veine des résultats d'Arezzo et Pacard [7], ou encore Arezzo, Lena et Mazzierri [5] ? Ou encore, une généralisation du résultat de Szekelyhidi [109] ?

Une autre question qui peut se poser est celle de la généralisation à de plus grandes dimensions. On peut cependant y répondre par le théorème de Hein, Radeasconu et Suvaina [56] (voir la section 2.2.3 du chapitre 2). En effet, ce théorème montre qu'un modèle ALE asymptote à une singularité $\mathbb{C}^m/G$ est isomorphe à une déformation d'une résolution de la singularité quotient $\mathbb{C}^m/G$. Cependant, le théorème de rigidité de Schlessinger [99], implique que de telles singularités sont en fait rigides. Ainsi, en dimension complexe supérieure, le seul modèle ALE disponible à biholomorphisme près, est une résolution de la singularité.

Cependant, le point double de $\mathbb{C}^m$, identifié au cône

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^m, \sum_{i=1}^m z_i^2 = 0\}$$

admet toujours des lissages

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^m, \sum_{i=1}^m z_i^2 = \varepsilon\}$$

qui sont difféomorphes au cotangent de la sphère T^*S^m. La construction de Stenzel [106] permet de munir ces lissages de métriques ALE Ricci-plates. On pourrait donc envisager une construction similaire, dans un cas où la base M présenterait des singularités coniques de ce type.

Chapitre 4

Sphères hamiltoniennes stationnaires.

Sous l'impulsion de Weinstein, entre autres, l'étude des sous-variétés *lagrangiennes* de variétés symplectiques sont devenues un point focal de la géométrie symplectique, notamment grâce à la mise au point, dans, [123] d'un 'dictionnaire' permettant de réinterpréter nombre de concepts de géométrie symplectique en termes de sous-variétés lagrangiennes. Audin, Lalonde et Polterovitch ont réuni dans [11] un panorama des divers travaux effectués dans cette direction.

D'autre part, un problème largement étudié en géométrie riemannienne est le *problème de Plateau*, et sa généralisation en dimensions supérieures : il s'agit alors de trouver, dans une variété donnée, des sous-variétés qui minimisent localement le volume. Comme on le verra, l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème variationnel correspond à l'annulation du vecteur de courbure moyenne.

L'étude des variétés *hamiltoniennes stationnaires*, qui constituent le sujet de ce chapitre, se situe à l'intersection de ces deux axes, dont l'interaction s'avère particulièrement fructueuse. Sur une variété symplectique, munie d'une métrique appropriée, il s'agit ainsi d'étudier la fonctionnelle de volume sur une famille de sous-variétés obtenues par déformations *hamiltoniennes* d'une sous-variété lagrangienne.

Un cadre naturel pour étudier de telles sous-variétés est bien sur celui des variétés kählériennes, où l'on dispose d'une forme symplectique et d'une métrique riemannienne compatibles entre elles au sens du paragraphe 1.2.1.

Une motivation supplémentaire vient de la physique mathématique. En effet, il a été mis en évidence par Harvey et Lawson dans [54] que, dans le cas de variétés de Calabi-Yau, les sous-variétés minimales lagrangiennes sont *calibrées* et, par conséquent, réalisent le minimum du volume dans leur classe d'homologie. On les appelle alors des sous-variétés *spéciales lagrangiennes*, et elles jouent un rôle de premier plan dans les travaux sur la symétrie miroir de Strominger, Yau et Zaslow [107]. Pour une introduction exhaustive à la géométrie calibrée, on pourra consulter le livre de Joyce [68].

Exemple. Cette interaction entre géométries symplectique et riemannienne transparaît aussi dans l'exemple en basse dimension suivant (dû à Oh en introduction de son article [91]). On sait, depuis Poincaré, que l'équateur de la sphère S^2 (une géodésique), minimise la longueur parmi les lacets qui la séparent en deux zones de même aire.

Par ailleurs, en déformant un équateur par translation le long des méridiens, il est possible diminuer sa longueur autant qu'on le souhaite.

Il apparaît ainsi que la géodésique décrite par l'équateur est instable si on considère des déformations quelconques (incluant la translation le long des méridiens), mais est stable pour une classe spécifique de déformations (celles préservant la propriété d'aire). Or, ces déformations sont précisément les déformations *hamiltoniennes* de l'équateur.

Il semble donc pertinent d'étudier la fonctionnelle d'aire sur une telle classe de déformations, et de s'interroger sur l'existence de sous-variétés hamiltoniennes stationnaires. C'est l'objet de ce chapitre. On commencera par poser les définitions et propriétés indispensables à cette étude en section 4.1. Ensuite, en section 4.2, on verra que, dans le cadre de la construction de recollement exposée au chapitre 3, on peut construire de telles sous-variétés. Rappelons que nous avons construit une famille $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ de variétés symplectiques, par une construction de somme connexe généralisée entre un orbifold kählérien (M, J_M, ω_M) et une variété kählérienne ALE difféomorphe à T^*S^2. La section nulle de T^*S^2 donne alors, dans la somme connexe, une sphère S plongée dans M_ε, lagrangienne pour la forme symplectique ω_ε.

De plus, pour chaque $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a obtenu une structure presque-kählérienne (J_f, g_f) à courbure scalaire hermitienne constante sur $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$.

Il est donc naturel de se demander si, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver un représentant de la classe d'homologie $[S]$, obtenu par une déformation hamiltonienne de S, qui soit hamiltonien stationnaire pour la métrique g_f.

On montre que la réponse est positive, pour ε suffisamment proche de 0, étendant ainsi le résultat de Biquard et Rollin [17] au cadre des lissages presque-kählériens :

Théorème. *Pour ε suffisamment petit, il existe un représentant hamiltonien-stationnaire de la classe d'homologie de la sphère S. Plus précisément, il existe une déformation hamiltonienne de l'injection $\iota_0 : S^2 \to M_\varepsilon$ minimale pour la solution approximative $\hat{g}_\varepsilon$, qui soit hamiltonienne stationnaire pour la solution g_f du problème de recollement du chapitre 3.*

La démonstration de ce théorème est l'objet de la section 4.2 de ce chapitre.

4.1 Préliminaires.

4.1.1 Sous-variétés lagrangiennes.

On rappelle dans cette section quelques éléments de géométrie symplectique essentiels à l'étude des variétés hamiltoniennes stationnaires. Pour plus de détails et de contexte, on réfère au livre de McDuff et Salamon [83], plus particulièrement aux chapitres 2 et 3.

Dans le reste de la section, on se donne (V^{2m}, ω) une variété symplectique compacte.

Définition 4.1.1. *Une sous-variété L de dimension m de V est dite* lagrangienne *si $\omega_{|L} = 0$.*

L'exemple canonique est donné par les *sections nulles de fibrés cotangents :*

Exemple 4.1.1. On peut munir le fibré cotangent d'une variété lisse L d'une forme symplectique naturelle définie comme suit.On note π la projection

$$\begin{aligned} \pi : T^*L &\to L \\ (q,\alpha) &\mapsto q. \end{aligned}$$

On définit alors la *forme de Liouville* $\lambda_{can} : T(T^*L) \to \mathbb{R}$ sur T^*L par $\lambda_{can}(q,\alpha) = \alpha \circ d_{(q,\alpha)}\pi$. Dans des coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n) : U \subset L \to \mathbb{R}^n$ sur L, une 1-forme $\alpha \in T^*L$ s'écrit de façon unique

$$\alpha = \sum_j y_j dx_j.$$

On dispose donc de coordonnées locales sur T^*L :

$$\begin{aligned} T^*U \subset T^*L &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (q,\alpha) &\mapsto (x(q), y). \end{aligned}$$

La forme de Liouville, dans ces coordonnées, s'écrit

$$\lambda_{can} = \sum_j y_j dx_j.$$

En d'autres termes, en un point (q,α) de T^*L, la forme de Liouville est donnée par la 1-forme α elle-même.

De cette expression, on déduit que la 2-forme $\omega_{can} := -d\lambda_{can}$ est fermée, non-dégénérée, et munit T^*L d'une structure symplectique. De plus, on voit immédiatement que la section nulle

$$L = \{(q,0) \in T^*L, q \in L\}$$

est une sous-variété lagrangienne pour cette structure.

Le théorème du voisinage lagrangien, dû à Weinstein [122], montre que cet exemple est en fait le modèle pour toute sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique. On en trouvera une démonstration dans le livre de McDuff et Salamon [83], Théorème 3.33.

Théorème 4.1.1 (Weinstein). *Soit L une sous-variété lagrangienne de (V,ω). Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de la section nulle L_0 de T^*L, un voisinage $\mathcal{U}$ de L dans V et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ tel que*

$$\begin{cases} \phi^*\omega = \omega_{can} \\ \phi_{|L_0} = \ id \ . \end{cases}$$

On dit que $(\mathcal{U},\phi)$ est un voisinage lagrangien *de L.*

La preuve de ce théorème repose sur le fait que le fibré normal de L dans M est isomorphe au fibré tangent. On le voit par exemple en utilisant une structure presque complexe compatible quelconque $J \in \mathcal{AC}_\omega$, afin de disposer d'un orthogonal à $TL \subset TM$ via la métrique associée g_J.

Remarque 4.1.1. On en déduit une représentation des déformations lagrangiennes.

Soit L une sous-variété lagrangienne de (V, ω), et $(\mathcal{U}, \phi)$ un voisinage lagrangien. Alors toute sous-variété lagrangienne L', suffisamment $\mathcal{C}^1$-proche de L, est incluse dans $\mathcal{U}$. Il existe donc $\Gamma_\alpha \subset T^*L$ tel que $L' = \phi(\Gamma_\alpha)$, où Γ_α est le graphe d'une 1-forme α sur L.

Puisque L' est lagrangienne, on a $\omega_{can|\Gamma_\alpha} = 0$. Or, par définition de ω_{can},

$$\omega_{can|\Gamma_\alpha} = -\pi^* d\alpha.$$

Par conséquent, la 1-forme α est fermée ; on a donc une correspondance entre les déformations lagrangiennes de L et les 1-formes fermées sur L.

On s'intéresse en particulier à la classe suivante de déformations :

Définition 4.1.2. *Soit $L \hookrightarrow (V, \omega)$ une sous-variété lagrangienne, $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur V. On note X_F le champ de vecteurs hamiltonien associé (comme dans* (1.3.18)*), et φ_t son flot. Alors la famille de sous-variétés*

$$L_t = \varphi_t(L)$$

est appelée déformation hamiltonienne *de L associée à F.*

Remarque 4.1.2. 1. Ainsi définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, L_t est encore une sous-variété lagrangienne.

2. Via l'identification décrite à la remarque 4.1.1, les déformations hamiltoniennes sont encodées par des 1-formes *exactes* sur L.

4.1.2 La fonctionnelle d'aire sur les sous-variétés lagrangiennes.

Supposons maintenant qu'on dispose sur (V, ω) d'une métrique riemannienne g compatible avec ω, au sens du paragraphe 1.2.1. On peut alors s'intéresser à la fonctionnelle de volume sur l'espace des sous-variétés lagrangiennes compactes :

$$L \mapsto \mathrm{Vol}_g(L), \tag{4.1.1}$$

où le volume de L est calculé via la métrique $h = g_{|L}$.

Remarque 4.1.3. La métrique h dépend donc du plongement $L \hookrightarrow V$.

Suivant Oh [92, 91], on pose la définition suivante.

Définition 4.1.3. *Une sous-variété lagrangienne $L \subset V$ est dite* hamiltonienne stationnaire *si elle est point critique de la fonctionnelle d'aire pour les déformations hamiltoniennes. Autrement dit, pour toute fonction lisse $F \in \mathcal{C}^\infty(V)$, on a*

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} Vol_g(\phi_s^{X_F}(L)) = 0, \tag{4.1.2}$$

où l'on note $\phi_s^{X_F}$ le flot du champ de vecteurs hamiltonien X_F.

Pour décrire l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce problème variationnel, rappelons que l'on peut définir la *seconde forme fondamentale* de la sous-variété L comme suit. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur L, D la connexion de Levi-Civita de g. Alors le champ de vecteurs $D_X Y$ se décompose orthogonalement en

$$D_X Y = (D_X Y)^{TL} + (D_X Y)^{NL},$$

où $(D_X Y)^{TL} \in \Gamma(TL)$ et $(D_X Y)^{NL} \in \Gamma(TL^\perp) \simeq \Gamma(NL)$.

On définit alors la seconde forme fondamentale par :

$$\begin{aligned} B : TL \times TL &\to NL \\ (X, Y) &\mapsto (D_X Y)^{NL}. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.4. Puisque, pour $X,Y \in \Gamma(TL)$, $D_X Y - D_Y X = [X, Y] \in \Gamma(TL)$, la seconde forme fondamentale est symétrique.

Le *champ de vecteur de courbure moyenne* H est alors par définition la trace de B. Dans une base orthonormée locale (e_i) de TL, on a donc

$$H := \sum_i B(e_i, e_i) = \sum_i (D_{e_i} e_i)^{NL} \in NL. \tag{4.1.3}$$

On a alors la formule suivante.

Proposition 4.1.1 (Oh, [92]). *Soit $L \subset V$ une sous-variété lagrangienne. On note H le champ de vecteurs de courbure moyenne associé, et $\alpha_H := (H \lrcorner \omega)_{|L}$ la* forme de Maslov. *Alors L est hamiltonienne stationnaire si, et seulement si,*

$$\delta \alpha_H = 0, \tag{4.1.4}$$

où δ est la codifférentielle associée à la métrique h sur L.

Preuve. La première variation du volume le long d'un champ de vecteurs quelconque X est donnée par

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}_g(\phi_t^X(L)) = -\int_L \langle H, X \rangle \mathrm{dvol}_g \tag{4.1.5}$$

où ϕ_t^X est le flot de X. On renvoie au livre de Gallot, Hulin et Lafontaine [48], Théorème 5.20 et remarques 5.21, pour une démonstration.

La sous-variété L est donc hamiltonienne stationnaire si pour tout champ de vecteurs hamiltonien $X = X_F$,

$$\int_L \langle H, X_F \rangle \mathrm{dvol}_g = 0.$$

Or, puisque la métrique g est compatible avec ω, ceci revient à dire que la quantité

$$\int_L \langle H, X_F \rangle \,\mathrm{dvol}_g = \int_L \langle H \lrcorner \omega, X_F \lrcorner \omega \rangle \,\mathrm{dvol}_g = \int_L \langle \alpha_H, dF \rangle \,\mathrm{dvol}_g = \int_L F \delta \alpha_H \,\mathrm{dvol}_g$$

est nulle pour toute fonction $F : V \to \mathbb{R}$, d'où le résultat. □

Remarque 4.1.5. En coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ sur L, si on note

$$\begin{cases} h = h_{ab} dx_a dx_b \\ \alpha_H = \alpha_a dx_a \end{cases} \tag{4.1.6}$$

alors l'équation (4.1.4) s'écrit

$$\delta\alpha = -\frac{\partial h^{ab}}{\partial x_b}\alpha_a - h^{ab}\frac{\partial \alpha_a}{\partial x_b} - \frac{1}{2}h^{ab}\alpha_a\frac{\partial}{\partial x_b}(\log(\det h_{cd})). \tag{4.1.7}$$

On souhaite maintenant décrire la variation seconde. Pour obtenir une formule agréable, on suppose maintenant que la variété (V, ω, g) est *kählérienne*. On note J sa structure complexe. Introduisons quelques notations. Pour trois champs de vecteurs X, Y et Z sur L, on définit le tenseur

$$S(X, Y, Z) = \langle JB(X, Y), Z\rangle.$$

Des symétries et propriétés de J-invariance du tenseur de courbure riemannienne d'une variété kählérienne, on déduit que c'est un tenseur symétrique (Oh [91], Lemme 3.10).

Par un calcul en coordonnées locales, on obtient alors la formule suivante :

Proposition 4.1.2 (Oh, [92] Théorème 3.4). *Soit L une sous-variété hamiltonienne stationnaire d'une variété kählérienne (V, ω, J, g). Soit $F : V \to \mathbb{R}$ une fonction ; on note $f := F_{|L}$.*

La variation seconde en L de la fonctionnelle d'aire sur les variétés lagrangiennes est donnée par

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} Vol_g(\phi_t^{X_F}(L)) = \int_L \langle \Delta df, df\rangle - Ric(Jdf, Jdf) - 2\langle df \otimes df \otimes \alpha_H, S\rangle + \langle df, \alpha_H\rangle^2 dvol_g. \tag{4.1.8}$$

Tous les opérateurs et tenseurs de courbure sont associés à la métrique induite $h = g_{|L}$.

On en déduit une expression de la linéarisation de l'opérateur $F \mapsto \delta\alpha_H$.

Corollaire 4.1.1. *On reprend les notations du théorème 4.1.2. Soit $F_t : V \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions. On note H_t le champ de courbure moyenne associé à l'immersion encodée par $f_t = F_{t|L}$ au sens de la remarque 4.1.1. Alors*

$$\mathcal{L}f := -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \delta\alpha_{H_t} = \Delta^2 f + \delta(Ric^\perp(Jgrad_g f)\lrcorner\omega) - 2\delta(B(JH, grad_g f)\lrcorner\omega) - (JH)\cdot(JH)\cdot f \tag{4.1.9}$$

où, pour un champ de vecteurs X normal à L, le champ de vecteur $Ric^\perp(X)$ est défini par

$$Ric(X, Y) = \langle Ric^\perp(X), Y\rangle$$

pour tout champ de vecteurs normal Y.

L'étude et la construction de ces surfaces, originellement introduites par Oh est l'objet de ses articles [92, 91]. De nouveaux exemples, généralisant sa construction, ont été obtenus par Joyce, Lee et Schoen dans [63]. Par ailleurs, Schoen et Wolfson ont étudié la question des surfaces Lagrangiennes *minimisant* la fonctionnelle d'aire dans [101].

4.1.3 Minimalité des sous-variétés complexes.

La géométrie *calibrée*, introduite par [54], se penche sur certaines sous-variétés minimales, dites *calibrées*. Cette question est intimement liée à la théorie des groupes d'holonomie riemanniens, puisque les variétés à holonomie spéciale ont souvent une calibration naturelle. Ainsi, dans le cas des variétés de Calabi-Yau, les variétés *spéciales lagrangiennes* sont liées à une certaine calibration.

C'est au cas des variétés kählériennes qu'on s'intéresse ici. On pourra consulter le livre de Joyce [68] pour plus de détails sur la géométrie calibrée.

Une *calibration* sur une variété riemannienne (V, g) est une p-forme fermée ν telle que pour t$x \in V$ et tout sous-espace $F \subset T_xV$ de dimension p, on ait

$$\nu_{|V} = \lambda \mathrm{vol}_{g_{|F}}, \tag{4.1.10}$$

où $\lambda \leq 1$. Une sous-variété de dimension p de V est calibrée si le volume y coïncide avec la calibration.

Une propriété remarquable des sous-variétés complexes de variétés kählériennes est d'être calibrées par les puissances de la forme de Kähler. C'est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 4.1.3 (Inégalité de Wirtinger). *Soit (E, h) un espace vectoriel hermitien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une forme de Kähler ω respectivement donnés par*

$$\langle u, v \rangle = \Re(h(u, v))$$
$$\omega(u, v) = \Im(h(u, v)).$$

Soit F un sous espace réel *de dimension* $\dim_{\mathbb{R}} F = 2k$ *et $v_1, \ldots, v_{2k}$ une base de F. Alors*

$$|\omega^k(v_1, \ldots, v_{2k}) \leq k!\, vol_F(v_1, \ldots, v_{2k}). \tag{4.1.11}$$

On en déduit :

Corollaire 4.1.2. *Soit (V, J, ω, g) une variété kählérienne, $W \subset V$ une sous-variété complexe de dimension réelle $2k$. Soit $A \subset V$ une autre sous-variété orientée, de dimension $2k$ également, et de même bord que W :$\partial A = \partial W$. Si $W \setminus A$ est le bord d'une chaîne singulière réelle, alors*

$$vol(W) \leq vol(A) \tag{4.1.12}$$

avec égalité si, et seulement si, A est également une variété complexe.

Preuve. On suit la preuve donnée dans les notes de Ballman [12]. La $2k$-forme ω^k est fermée, donc, d'après la supposition faite sur $W \setminus A$,

$$\int_W \omega^k - \int_P \omega^k = 0.$$

D'autre part, par l'inégalité de Wirtinger 4.1.3, $\int_W \omega^k = \mathrm{vol}(W)$ et $\int_A \omega^k \leq \mathrm{vol}(A)$, avec égalité si et seulement si A est une variété complexe. □

Remarque 4.1.6. En particulier, les sous-variétés complexes sont minimales ; d'après (4.1.5), leur seconde forme fondamentale est donc sans trace.

4.2 Construction de sphères hamiltoniennes stationnaires.

On dispose maintenant de toutes les notions nécessaires à la démonstration du théorème 6. Récapitulons la construction menée au chapitre 3.

Dans ce chapitre, nous avons obtenu une famille de structure presque-complexes (J_f) dépendant d'un paramètre $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ sur des variétés symplectiques lisses $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$, de sorte que J_f soit compatible avec ω_ε au sens de la section 1.2.1, et que la structure presque-kählérienne résultante $(\omega_\varepsilon, J_f, g_f)$ sur M_ε soit à courbure scalaire hermitienne constante pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

De plus, lorsque ε tend vers 0, la solution (J_f, g_f) converge vers (J_X, g_X) sur un voisinage compact de la section nulle dans $X \simeq T^*S^2$, au sens de 3.2.2. On a, en effet, les estimées suivantes :

$$\begin{cases} \|h_\varepsilon^* J_f - J_X\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(X)} \leq c\varepsilon^{\delta(1-\beta^+)} \\ \|\varepsilon^{-2} h_\varepsilon^* g_f - g_X\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(X)} \leq c\varepsilon^{\delta(1-\beta^+)}. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 3.2.1, les variétés $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ sont symplectomorphes et s'identifient donc toutes à une même variété symplectique que l'on notera $(\hat{M}, \hat{\omega})$ (par exemple en fixant $\varepsilon = \varepsilon_1$).

Pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, on note alors J_ε et g_ε les tirés en arrière de J_f et g_f sur $\hat{M}$. On note aussi (J_0, g_0) le tiré en arrière de la solution approchée $(\hat{J}_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon)$ décrite en 3.3.3.

On dispose alors d'une famille lisse $(J_\varepsilon, g_\varepsilon)_{0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0}$ de structures presque-kählériennes sur une variété symplectique fixée $(\hat{M}, \hat{\omega})$.

Observons maintenant que, dans le modèle ALE $(X \simeq T^*S^2, \omega_X = dd^c u)$, la section nulle S_0 de $T^*S^2 \to S^2$ est une sphère lagrangienne, puisque la forme de Kähler est exacte.

De plus, comme on l'a vu au chapitre 2, section 2.2.2, T^*S^2 peut être munie d'une structure hyperKähler compatible avec la métrique d'Eguchi-Hanson g_X. Pour un choix différent de structure complexe dans la famille hyperKähler (plus précisément, le choix correspondant à la résolution minimale $\mathcal{O}(-2) \to \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ étudiée à l'exemple 2.2.1), la section nulle est en fait une copie *holomorphe* de $\mathbb{C}P^1$.

D'après le corollaire 4.1.2, la section nulle minimise donc le volume dans sa classe d'homologie.

Remarque 4.2.1. La section nulle n'est pas holomorphe pour notre choix de structure complexe sur T^*S^2. Cependant, puisque la *métrique* est la même (c'est la métrique d'Eguchi-Hanson), S_0 est encore *minimale* ; en particulier, elle est hamiltonienne stationnaire.

Puisque la construction de recollement de la section 3.2 a été réalisée dans des cartes de Darboux, S_0 fournit une sphère S hamiltonienne stationnaire (puisque minimale) dans la 'somme connexe' $(\hat{M}, \hat{\omega}, J_0, g_0)$.

Il est donc naturel de se demander :

Pour ε suffisamment petit, existe-t-il une déformation hamiltonienne du plongement minimal $\iota_0 : S^2 \to \hat{M}$ qui soit lagrangienne stationnaire pour la métrique g_ε ?

On montre que la réponse est positive, étendant ainsi le résultat de [17] au cas des lissages symplectiques presque-kählériens.

Il nous faut trouver un représentant du cycle évanescent $[S]$ qui vérifie l'équation (4.1.2) par rapport à la métrique g_ε, pour ε assez petit. On note

$$\iota_0 : S^2 \hookrightarrow \hat{M}$$

le plongement de la sphère dans $(\hat{M}, \hat{\omega})$ qui est lagrangien et minimal pour (J_0, g_0).

Alors, par le théorème du voisinage lagrangien 4.1.1, on peut identifier un voisinage de $\iota_0(S^2)$ avec un voisinage $\mathcal{U}$ de la section nulle dans $(T^*S^2, -d\lambda)$ par un symplectomorphisme ψ. On note encore J_ε et g_ε la structure presque-complexe et la métrique riemannienne associée tirées en arrière par ψ sur $\mathcal{U}$.

Comme on l'a vu à la remarque 4.1.2, les déformation hamiltoniennes de ι_0 sont décrites par les graphes de différentielles de fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$, telles que $du \in \mathcal{U}$.

Remarque 4.2.2. C'est le cas dès que $\|u\|_{\mathcal{C}^1(S^2)}$ est assez petit.

Pour une telle fonction u on note

$$i_u : S^2 \hookrightarrow \mathcal{U}$$

l'immersion associée.

Soit $g_{\varepsilon,u}$ la restriction de g_ε à $\iota_u(S^2)$. Alors l'immersion ι_u est hamiltonienne stationnaire pour g_ε si, et seulement si, c'est un point critique de la fonctionnelle d'aire

$$u \mapsto \int_{i_u(S^2)} vol_{g_{\varepsilon,u}}.$$

ce qui, comme on l'a vu en (4.1.4), correspond à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\delta_{\varepsilon,u}\alpha_{\varepsilon,u} = 0, \tag{4.2.2}$$

où $\delta_{\varepsilon,u}$ est la codifférentielle associée à la métrique $g_{\varepsilon,u}$ sur S^2, $H_{\varepsilon,u}$ est le vecteur de courbure moyenne et $\alpha_{\varepsilon,u} := H_{\varepsilon,u} \lrcorner \hat{\omega}$ est la forme de Maslov associée.

Remarque 4.2.3. Cette équation n'est pas linéaire en u, puisque la métrique induite sur S^2 dépend du plongement encodé par du. La linéarisation $\mathcal{L}$ en 0, dans le contexte kählérien, est donnée par la formule de Oh (4.1.9).

Dans notre cadre de travail , la variété $(\hat{M}, \hat{\omega}, J_0)$ n'est pas Kähler. Cependant, quitte à réduire la taille du voisinage lagrangien pour éviter la région où le tenseur de Nijenhuis s'annule, on peut supposer que la structure $(\hat{\omega}, J_0, g_0)$ est bien kählérienne sur $\mathcal{U}$ (puisqu'elle coïncide alors avec un rescaling de la structure ALE modèle). Par conséquent, on peut appliquer la formule de Oh, puisqu'il n'a besoin du caractère kählérien qu'en $t = 0$ pour la démontrer.

On peut donc montrer le résultat annoncé :

Proposition 4.2.1. *Pour ε suffisamment petit, la variété presque-kählérienne $(\hat{M}, \hat{\omega}, J_\varepsilon)$ admet une classe d'homologie lagrangienne représentée par une sphère hamiltonienne stationnaire.*

Démonstration. Considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{AC}_{\hat{\omega}}) \times \mathcal{C}^{4,\alpha}(S^2) &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}(S^2) \\ (J, u) &\mapsto \delta_{J,u}\alpha_{J,u}. \end{aligned}$$

Cet opérateur est bien défini sur la famille (J_ε) obtenue au chapitre 3. En effet, la formule en coordonnées locales (4.1.7) montre que l'équation fait intervenir les dérivées premières de la forme de Maslow $\alpha_{\varepsilon,u}$ et de $g_{\varepsilon,u}$.

Or, par définition, $g_{\varepsilon,u}$ fait intervenir des dérivées secondes de u, ainsi que les coefficients de g_ε. Le vecteur de courbure moyenne, donné par (4.1.3), s'écrit donc en fonction de dérivées d'ordre au plus 3 de u et de dérivées premières des coefficients de g_ε. Il en va donc de même de la forme de Maslow.

En fin de compte, l'équation est donc d'ordre 4 en u, et ses coefficients font intervenir des dérivées d'ordre au plus 2 de g_ε ; on conclut grâce aux estimées (4.2.1).

L'opérateur B vérifie $B(J_X, 0) = 0$, et, d'après (4.1.4), le problème se ramène donc à trouver le lieu d'annulation de $u \mapsto B(J_\varepsilon, u)$ pour ε suffisamment petit. On souhaite donc appliquer le théorème des fonctions implicites à B en $(0, 0)$.

La linéarisation de $u \mapsto B(J, u)$ en $(0, 0)$ est donnée par (4.1.9). Or, ici, d'après la remarque 4.2.1, S_0 est en fait minimale, donc la forme de Maslow α_{J_X} est nulle. De plus, dans le voisinage $\mathcal{U}$ de S, g_0 est donnée par la métrique *Ricci-plate* d'Eguchi-Hanson. Par conséquent, la variation seconde (4.1.9) se réduit à

$$\mathcal{L}\dot{u} = \Delta^2 \dot{u}.$$

Ainsi, puisque les variations constantes u donnent lieu à des déformations triviales, on voit que, pour $k > 4$, $\mathcal{L}$ réalise un isomorphisme entre les espaces de Hölder

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^{k,\alpha}(S^2)/\mathbb{R} \to \mathcal{C}_0^{k-4,\alpha}(S^2) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{k-4,\alpha}(S^2),\ \int_{S^2} f \mathrm{vol}_{g_{0,0}} = 0 \right\}.$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}^{k-2,\alpha}(\mathcal{AC}_{\hat{\omega}}) \times \mathcal{C}^{k,\alpha}(S^2)/\mathbb{R} &\to \mathcal{C}_0^{k-4,\alpha}(S^2) \\ (J, u) &\mapsto \delta_{J,u}\alpha_{J,u} \end{aligned}$$

en $(0, 0)$: en particulier, pour ε assez petit, il existe une unique fonction $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(S^2)/\mathbb{R}$ telle que $\iota_{u_\varepsilon} : S^2 \hookrightarrow \mathcal{U}$ soit hamiltonienne stationnaire pour la métrique g_ε.

De plus, u_ε est solution de l'équation elliptique quasilinéaire d'ordre 4

$$B(J_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0.$$

Or, d'après le théorème 5, J_ε est lisse, et il en est de même de la métrique associée g_ε dont les coefficients apparaissent dans l'expression de l'opérateur différentiel B. Une fois encore, on peut donc appliquer un argument de bootstrapping pour s'assurer que les solutions (u_ε) sont, en fait, lisses. □

Remarque 4.2.4. On peut alors s'interroger sur la possibilité d'étendre la seconde partie du résultat de Biquard et Rollin [17], Theorem D - c'est-à-dire, la propriété de minimisation du volume. Pour cela, il faudrait vérifier que les résultats obtenus par Schoen et Wolfson [101] s'étendent au contexte presque-kählérien.

Bibliographie

[1] V. Apostolov, J. Armstrong, and T. Dr˘ aghici. Local models and integrability of certain almost Kähler 4-manifolds. *Math. Ann.*, 323(4) :633–666, 2002. 7

[2] V. Apostolov, D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon, and C.W. Tønnesen-Friedman. Hamiltonian 2-forms in Kähler geometry, III : Extremal metrics and stability. *Invent. Math.*, 173(3) :547–601, Sep 2008. 36

[3] V. Apostolov and T. Draghici. The curvature and the integrability of almost-Kähler manifolds : a survey. *Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)*, 35 :25–53, 2003. 7, 100, 102

[4] V. Apostolov and Y. Rollin. ALE scalar-flat Kähler metrics on non-compact weighted projective spaces. *Math. Ann.*, 367(3-4) :1685–1726, 2017. 57

[5] C. Arezzo, R. Lena, and L. Mazzieri. On the resolution of extremal and constant scalar curvature Kähler orbifolds. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21) :6415–6452, 2016. 88, 136

[6] C. Arezzo and F. Pacard. Blowing up and desingularizing constant scalar curvature Kähler manifolds. *Acta Math.*, 196(2) :179–228, 2006. 6, 7, 9, 56, 80, 81, 84, 86

[7] C. Arezzo and F. Pacard. Blowing up Kähler manifolds with constant scalar curvature. II. *Ann. of Math. (2)*, 170(2) :685–738, 2009. 6, 56, 87, 88, 136

[8] C. Arezzo, F. Pacard, and M. Singer. Extremal metrics on blowups. *Duke Math. J.*, 157(1) :1–51, 2011. 6, 88

[9] T. Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976. 29

[10] T. Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102(1) :63–95, 1978. 5, 32, 135

[11] M. Audin, F. Lalonde, and L. Polterovich. Symplectic rigidity : Lagrangian submanifolds. In *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progr. Math.*, pages 271–321. Birkhäuser, Basel, 1994. 137

[12] W. Ballmann. *Lectures on Kähler manifolds.* ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006. 22, 143

[13] S. Bando and R. Kobayashi. Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds. In *Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987)*, volume 1339 of *Lecture Notes in Math.*, pages 20–31. Springer, Berlin, 1988. 56

[14] W.P. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. 56

[15] R. Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(5) :661–693, 1986. 78, 80, 84

[16] A.L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. 28, 29, 31, 60, 70, 135

[17] O. Biquard and Y. Rollin. Smoothing singular constant scalar curvature Kähler surfaces and minimal Lagrangians. *Adv. Math.*, 285 :980–1024, 2015. 6, 8, 9, 61, 93, 125, 133, 135, 138, 145, 147

[18] R. Bott and L.W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. 19

[19] C.P. Boyer. Conformal duality and compact complex surfaces. *Math. Ann.*, 274(3) :517–526, 1986. 60

[20] E. Brieskorn. Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Invent. Math.*, 4 :336–358, 1967/1968. 54

[21] R.L. Bryant. Bochner-Kähler metrics. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3) :623–715, 2001. 50

[22] E. Calabi. On Kähler manifolds with vanishing canonical class. In *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 78–89. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. 5, 32

[23] E. Calabi. Extremal Kähler metrics. In *Seminar on differential geometry*, volume 102, pages 259–290, 1982. 5, 33, 34, 36

[24] E. Calabi. Extremal Kähler metrics II. In *Differential geometry and complex analysis*, pages 95–114. Springer, 1985. 6, 11, 36, 40

[25] D.M.J. Calderbank and M.A. Singer. Einstein metrics and complex singularities. *Invent. Math.*, 156(2) :405–443, 2004. 59

[26] F. Catanese. Everywhere nonreduced moduli spaces. *Invent. Math.*, 98(2) :293–310, 1989. 136

[27] X. Chen and J. Cheng. On the constant scalar curvature K\“ahler metrics, apriori estimates. *ArXiv e-prints*, December 2017. 6, 37

[28] X. Chen and J. Cheng. On the constant scalar curvature K\“ahler metrics, existence results. *ArXiv e-prints*, January 2018. 6, 37

[29] X. Chen and J. Cheng. On the constant scalar curvature K\“ahler metrics, general automorphism group. *ArXiv e-prints*, January 2018. 6, 37

[30] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kähler-Einstein metrics and stability. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8) :2119–2125, 2014. 5

[31] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I : Approximation of metrics with cone singularities. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :183–197, 2015. 5, 32

[32] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II : Limits with cone angle less than 2π. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :199–234, 2015. 5, 32

[33] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III : Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1) :235–278, 2015. 5, 32

[34] X. X. Chen and G. Tian. Geometry of Kähler metrics and foliations by holomorphic discs. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 107 :1–107, 2008. 6, 36

[35] J. Chu, V. Tosatti, and B. Weinkove. The Monge-Ampère equation for non-integrable almost complex structures. *arXiv preprint arXiv :1603.00706*, March 2016. 7

[36] P. Delanoë. Sur l'analogue presque-complexe de l'équation de Calabi-Yau. *Osaka J. Math.*, 33(4) :829–846, 1996. 95

[37] M. Dellnitz and I. Melbourne. The equivariant Darboux theorem. In *Exploiting symmetry in applied and numerical analysis (Fort Collins, CO, 1992)*, volume 29 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 163–169. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. 50

[38] S. K. Donaldson. Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology. In *Fields Medallists' lectures*, volume 5 of *World Sci. Ser. 20th Century Math.*, pages 384–403. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997. 6, 8, 9, 42, 44, 93, 95, 107

[39] S. K. Donaldson. Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics. In *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, volume 196 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 13–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 6, 37

[40] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990. Oxford Science Publications. 86

[41] S.K. Donaldson. Scalar curvature and stability of toric varieties. *J. Differential Geom.*, 62(2) :289–349, 2002. 6, 37, 44, 93

[42] S.K. Donaldson. Calabi-Yau metrics on Kummer surfaces as a model gluing problem. In *Advances in geometric analysis*, volume 21 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 109–118. Int. Press, Somerville, MA, 2012. 47

[43] Tedi C. Draghici. Almost Kähler 4-manifolds with J-invariant Ricci tensor. *Houston J. Math.*, 25(1) :133–145, 1999. 7

[44] T. Dr˘ aghici. On some 4-dimensional almost Kähler manifolds. *Kodai Math. J.*, 18(1) :156–168, 1995. 7

[45] A. Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom.*, 28(3) :513–547, 1988. 47

[46] A. Fujiki. Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics [translation of Sûgaku **42** (1990), no. 3, 231–243 ; MR1073369 (92b :32032)]. *Sugaku Expositions*, 5(2) :173–191, 1992. Sugaku Expositions. 6, 8, 42, 43, 44, 93

[47] A. Futaki. An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics. *Invent. Math.*, 73(3) :437–443, 1983. 32, 40

[48] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004. 28, 141

[49] P. Gauduchon. Calabi's extremal kähler metrics : An elementary introduction. *Preprint*, 2010. 34, 37, 40, 43, 103

[50] G.W. Gibbons and S.W. Hawking. Gravitational multi-instantons. *Phys. Lett. B*, 78(4) :430–432, 1978. 47, 58

[51] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. 71, 72, 75

[52] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original. 19, 23, 25, 26, 27, 53, 55

[53] J. Han and J. A. Viaclovsky. Deformation theory of scalar-flat Kähler ALE surfaces. *ArXiv e-prints*, May 2016. 67

[54] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148 :47–157, 1982. 137, 143

[55] H.-J. Hein and C. LeBrun. Mass in Kähler geometry. *Comm. Math. Phys.*, 347(1) :183–221, 2016. 60, 61

[56] H.-J. Hein, R. Rasdeaconu, and I. Suvaina. On the classification of ALE Kähler manifolds. *arXiv preprint arXiv :1610.05239*, 2016. 61, 136

[57] H. Hironaka. On resolution of singularities (characteristic zero). In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 507–521. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963. 54

[58] N. J. Hitchin. Polygons and gravitons. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(3) :465–476, 1979. 58

[59] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Rocek. Hyper-Kähler metrics and supersymmetry. *Comm. Math. Phys.*, 108(4) :535–589, 1987. 58

[60] N. Honda. Deformation of LeBrun's ALE metrics with negative mass. *Comm. Math. Phys.*, 322(1) :127–148, 2013. 67

[61] N. Honda. Scalar flat Kähler metrics on affine bundles over $\mathbb{CP}^1$. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10 :Paper 046, 25, 2014. 67

[62] D. Huybrechts. *Complex geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction. 19

[63] D. Joyce, Y.-I. Lee, and R. Schoen. On the existence of Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds in symplectic manifolds. *Amer. J. Math.*, 133(4) :1067–1092, 2011. 142

[64] D.D. Joyce. Explicit construction of self-dual 4-manifolds. *Duke Math. J.*, 77(3) :519–552, 1995. 59

[65] D.D. Joyce. Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7). *Invent. Math.*, 123(3) :507–552, 1996. 47

[66] D.D. Joyce. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I, II. *J. Differential Geom.*, 43(2) :291–328, 329–375, 1996. 47

[67] D.D. Joyce. *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000. 33, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 71, 74, 75, 76, 91

[68] D.D. Joyce. *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, volume 12 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2007. 137, 143

[69] R. Kobayashi. A remark on the Ricci curvature of algebraic surfaces of general type. *Tohoku Math. J. (2)*, 36(3) :385–399, 1984. 135

[70] S. Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry.* Springer Science & Business Media, 2012. 37, 41

[71] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication. 58

[72] J.-L. Koszul and B. Malgrange. Sur certaines structures fibrées complexes. *Arch. Math. (Basel)*, 9 :102–109, 1958. 17

[73] P.B. Kronheimer. The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. *J. Differential Geom.*, 29(3) :665–683, 1989. 58, 62

[74] C. LeBrun. Counter-examples to the generalized positive action conjecture. *Comm. Math. Phys.*, 118(4) :591–596, 1988. 57

[75] C. LeBrun and S. R. Simanca. Extremal Kähler metrics and complex deformation theory. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3) :298–336, 1994. 36, 37, 40, 41, 89

[76] C. LeBrun and M. Singer. A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds. *Math. Ann.*, 300(1) :165–180, 1994. 47

[77] M. Lejmi. Extremal almost-Kähler metrics. *Internat. J. Math.*, 21(12) :1639–1662, 2010. 7, 107

[78] M. Lejmi. Stability under deformations of Hermite-Einstein almost Kähler metrics. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64(6) :2251–2263, 2014. 8

[79] Marc Levine. A remark on extremal Kähler metrics. *J. Differential Geom.*, 21(1) :73–77, 1985. 6, 36, 40

[80] A. Lichnerowicz. Sur les transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte. In *Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958)*, pages 11–26. Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959. 40

[81] M.T. Lock and J.A. Viaclovsky. A smörgåsbord of scalar-flat Kähler ALE surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 0(0), jan 2016. 59

[82] Y. Matsushima. Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. *Nagoya Math. J.*, 11 :145–150, 1957. 32, 40

[83] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1998. 42, 114, 118, 138, 139

[84] R.B. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, volume 4 of *Research Notes in Mathematics.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993. 76, 80, 84

[85] V. Minerbe. On the asymptotic geometry of gravitational instantons. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(6) :883–924, 2010. 109

[86] R. Miranda. On canonical surfaces of general type with $K^2 = 3\chi - 10$. *Math. Z.*, 198(1) :83–93, 1988. 135

[87] O. Mohsen. Symplectomorphismes hamiltoniens et métriques kählériennes. 2003. 102

[88] A. Moroianu. *Lectures on Kähler geometry*, volume 69 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. 19, 22, 23, 26

[89] C.B. Morrey, Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1966 edition [MR0202511]. 72

[90] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math.*, 65(3) :391–404, 1957. 14

[91] Y.-G. Oh. Second variation and stabilities of minimal Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 101(2) :501–519, 1990. 10, 137, 140, 142

[92] Y.-G. Oh. Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations. *Math. Z.*, 212(2) :175–192, 1993. 10, 140, 141, 142

[93] F. Pacard. *Analysis in weighted spaces : preliminary version*. PhD thesis, Recent topics in Geometry Analysis, 2006. 76

[94] R. Pacard and T. Rivière. *Linear and Nonlinear Aspects of Vortices : The Ginzburg-andau Model*, volume 39. Springer Science & Business Media, 2012. 77

[95] D.N. Page. A physical picture of the K3 gravitational instanton. *Phys. Lett. B*, 80(1-2) :55–57, 1978. 47

[96] R.S. Palais. *Foundations of global non-linear analysis*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968. 72

[97] Y. Rollin and M. Singer. Non-minimal scalar-flat Kähler surfaces and parabolic stability. *Invent. Math.*, 162(2) :235–270, 2005. 60

[98] I. Satake. On a generalization of the notion of manifold. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42 :359–363, 1956. 48, 51

[99] M. Schlessinger. Rigidity of quotient singularities. *Invent. Math.*, 14(1) :17–26, 1971. 61, 136

[100] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2) :479–495, 1984. 29

[101] R. Schoen and J. Wolfson. Minimizing area among Lagrangian surfaces : the mapping problem. *J. Differential Geom.*, 58(1) :1–86, 2001. 142, 147

[102] R. Seyyedali and G. Székelyhidi. Extremal metrics on blowups along submanifolds. *arXiv preprint arXiv :1610.06865*, 2016. 90, 91

[103] S.R. Simanca. Kähler metrics of constant scalar curvature on bundles over $\mathbb{CP}^{n-1}$. *Math. Ann.*, 291(1) :239–246, 1991. 57

[104] P. Slodowy. Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups. In *Algebraic geometry (Ann Arbor, Mich., 1981)*, volume 1008 of *Lecture Notes in Math.*, pages 102–138. Springer, Berlin, 1983. 58, 61

[105] C. Spotti. Deformations of nodal Kähler-Einstein del Pezzo surfaces with discrete automorphism groups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 89(2) :539–558, 2014. 6

[106] M.B. Stenzel. Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space. *Manuscripta Math.*, 80(2) :151–163, 1993. 9, 61, 136

[107] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Phys. B*, 479(1-2) :243–259, 1996. 137

[108] G. Székelyhidi. Extremal metrics and K-stability. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(1) :76–84, 2007. 6, 44

[109] G. Székelyhidi. The Kähler-Ricci flow and K-polystability. *Amer. J. Math.*, 132(4) :1077–1090, 2010. 136

[110] G. Székelyhidi. On blowing up extremal Kähler manifolds. *Duke Math. J.*, 161(8) :1411–1453, 2012. 6, 86, 88, 89, 90, 125, 129, 132

[111] G. Székelyhidi. Blowing up extremal Kähler manifolds II. *Invent. Math.*, 200(3) :925–977, 2015. 6, 88

[112] Gábor Székelyhidi. *An introduction to extremal Kähler metrics*, volume 152. American Mathematical Soc., 2014. 23, 26, 33, 34, 36, 37, 44, 67, 71, 76, 80, 85, 86

[113] C.H. Taubes. Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(1) :139–170, 1982. 47

[114] R. P. Thomas. Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties. In *Surveys in differential geometry. Vol. X*, volume 10 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 221–273. Int. Press, Somerville, MA, 2006. 44

[115] G. Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent. Math.*, 130(1) :1–37, 1997. 5, 6, 32, 37, 44

[116] G. Tian. *Canonical metrics in Kähler geometry*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. Notes taken by Meike Akveld. 41, 44

[117] G. Tian and S.-T. Yau. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :579–609, 1990. 56

[118] P. Topiwala. A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$. I, II. *Invent. Math.*, 89(2) :425–448, 449–454, 1987. 47

[119] N.S. Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 22(2) :265–274, 1968. 29

[120] C. Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, english edition, 2007. Translated from the French by Leila Schneps. 74

[121] B. Weinkove. The Calabi-Yau equation on almost-Kähler four-manifolds. *J. Differential Geom.*, 76(2) :317–349, 2007. 7, 8

[122] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6 :329–346 (1971), 1971. 139

[123] A. Weinstein. Symplectic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(1) :1–13, 1981. 137

[124] H. Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.*, 12(1) :21–37, 1960. 29

[125] S.-T. Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(3) :339–411, 1978. 5, 32

[126] S.-T. Yau. Open problems in geometry. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 15(2) :125–134, 2000. 6, 32, 44

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

Titre : Autour du programme de Calabi, méthodes de recollement

Mot clés : Programme de Calabi, presque-Kähler, méthodes de recollement

Resumé : On étudie l'existence de métrique à courbure scalaire hermitienne constante sur des variétés presque-Kähler obtenues par lissage d'orbifolds Kähler à courbure scalaire riemannienne constante et à singularités A_1. On démontre que si un tel orbifold n'a pas de champs de vecteurs holomorphes (non triviaux) alors un lissage presque Kähler $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ admets une structure presque-Kähler à courbure scalaire hermitienne constante. De plus, on démontre que pour ε positif assez petit, les $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ sont toutes symplectiquement équivalentes à une variété symplectique fixée (M, ω) qui possède un cycle évanescent admettant un représentant Hamiltonien stationnaire pour la structure presque complexe associée.

Title : Calabi's program and gluing methods

Keywords : Calabi's program, almost-Kähler, gluing methods

Abstract : We study the existence of metrics of constant Hermitian scalar curvature on almost-Kähler manifolds obtained as smoothings of a constant scalar curvature Kähler orbifold, with A_1 singularities. More precisely, given such an orbifold that does not admit nontrivial holomorphic vector fields, we show that an almost-Kähler smoothing $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ admits an almost-Kähler structure $(J_\varepsilon, g_\varepsilon)$ of constant Hermitian curvature. Moreover, we show that for $\varepsilon > 0$ small enough, the $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ are all symplectically equivalent to a fixed symplectic manifold (M, ω) in which there is a surface S homologous to a 2-sphere, such that $[S]$ is a vanishing cycle that admits a representant that is Hamiltonian stationary for g_ε.