



**HAL**  
open science

## Groupe de Cremona et espaces hyperboliques

Anne Lonjou

► **To cite this version:**

Anne Lonjou. Groupe de Cremona et espaces hyperboliques. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2017. Français. NNT : 2017TOU30108 . tel-01914323

**HAL Id: tel-01914323**

**<https://theses.hal.science/tel-01914323>**

Submitted on 6 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *14/09/2017* par :

**ANNE LONJOU**

**Groupe de Cremona et espaces hyperboliques**

---

---

## JURY

MARCELLO BERNARDARA

SERGE CANTAT

YVES DE CORNULIER

CHARLES FAVRE

PETER HAISSINSKY

STÉPHANE LAMY

SUSANNA ZIMMERMANN

Maître de Conférences

Directeur de Recherche

Chargé de Recherche

Directeur de Recherche

Professeur des Universités

Professeur des Universités

Maître de Conférences

Université Toulouse III

Université de Rennes I

Université d'Orsay

École Polytechnique

Université de Marseille

Université Toulouse III

Université d'Angers

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*

**Directeur de Thèse :**

*Stéphane LAMY*

**Rapporteurs :**

*Charles FAVRE et Yves DE CORNULIER*



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *14/09/2017* par :

**ANNE LONJOU**

**Groupe de Cremona et espaces hyperboliques**

---

---

## JURY

MARCELLO BERNARDARA

SERGE CANTAT

YVES DE CORNULIER

CHARLES FAVRE

PETER HAISSINSKY

STÉPHANE LAMY

SUSANNA ZIMMERMANN

Maître de Conférences

Directeur de Recherche

Chargé de Recherche

Directeur de Recherche

Professeur des Universités

Professeur des Universités

Maître de Conférences

Université Toulouse III

Université de Rennes I

Université d'Orsay

École Polytechnique

Université de Marseille

Université Toulouse III

Université d'Angers

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*

**Directeur de Thèse :**

*Stéphane LAMY*

**Rapporteurs :**

*Charles FAVRE et Yves DE CORNULIER*



# Remerciements

Si quelqu'un m'avait dit lorsque je suis entrée en première année de faculté à l'université Paul Sabatier, que je serai un jour tentée par la recherche, je l'aurais pris pour un fou ! Et me voilà, 10 ans après, à écrire les remerciements de ma thèse et en partance pour un post-doctorat à Bâle... Bien évidemment tout cela n'aurait pas été possible sans la rencontre et l'aide de beaucoup de personnes que je vais essayer de ne pas oublier.

Je tiens tout d'abord à exprimer mon immense reconnaissance envers Stéphane Lamy. J'ai eu une chance incroyable de l'avoir tout d'abord comme responsable du master agreg, puis directeur de mémoire de recherche en master 2 et surtout comme directeur de thèse. Il m'a fait découvrir le monde de la recherche en me proposant un sujet passionnant. Je te remercie de m'avoir fait partager ta vision des maths (à grands coups de dessin), de m'avoir transmis ta motivation et ta rigueur. Les discussions intéressantes que nous avons eues, ta grande disponibilité, ta patience et ta bienveillance (et j'en passe !) m'ont permis de passer trois superbes années de thèse (même si la dernière était très stressante...). Tu es vraiment un super directeur de thèse, j'espère que tu auras plein d'autres étudiant·e·s !

Je souhaiterais ensuite remercier Yves de Cornulier et Charles Favre qui ont accepté de rapporter cette thèse. Leurs relectures attentives et minutieuses ont permis d'enrichir ce manuscrit. Je remercie également Marcello Bernardara, Serge Cantat, Peter Haüssinsky et Susanna Zimmermann d'avoir accepté de prendre part à mon jury de thèse avec une pensée spéciale pour Susanna qui prépare sa première rentrée en tant que maître de conférence. Félicitations encore Susanna !

Je suis heureuse (et chanceuse) d'avoir fait ma thèse lorsque l'ANR BirPol existait encore. Les rencontres faites à Toulouse, Rennes, Bâle, Charmey et Enney ont à chaque fois été source de motivation importante. Je remercie les fondateurs de ce projet ainsi que toutes les personnes ayant participé à ces conférences faites dans une ambiance chaleureuse et conviviale, avec une mention spéciale pour l'équipe Bâloise (que ce soit les Bâlois d'un an ou de toujours) dirigée par Jérémy Blanc que je remercie tout particulièrement pour la confiance qu'il m'accorde en me prenant en

post-doctorat dès la fin de ma thèse.

L'enseignement a eu une place importante dans cette thèse et je suis très reconnaissante envers Lionel Poujet qui nous a fait confiance à Damien et moi, pour prendre en charge un amphi interactif. Ce fut une expérience très enrichissante ! Je le remercie également pour tous les conseils qu'il nous a prodigués, pour son partage d'expérience et sa grande disponibilité. J'ai également une pensée pour la golden team composée de Damien, Jules et Jp avec qui enseigner cette dernière année a été un réel plaisir, et pour Laura avec qui j'ai partagé mes enseignements les deux premières années.

Je remercie également tous les membres de l'université Paul Sabatier qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse et à l'ambiance chaleureuse qui régnait à la fac. Je pense en particulier à tous les doctorants et post-doctorants avec qui j'ai partagé des moments conviviaux que ce soit lors de séminaires ou au détour d'un couloir, d'une pause goûter ou d'un petite soirée. Je remercie notamment Andre, Daniel, Dat, Guillaume, Ioana, Jordi, Jorge, Matthieu, Paul, Sara, Samuel, Sergio et Zak. Je n'oublie bien évidemment pas Laura, Julie et Damien mes trois supers co-bureaux ainsi que Jules qui ont été là aussi bien dans les bons moments que dans les moments de doute, et qui ont fait du labo un lieu très convivial. Je les remercie également pour toutes les agréables sorties que nous avons partagées ! Bon ok, Damien n'était pas officiellement dans mon bureau mais c'était tout comme. Merci encore Damien pour tout ton soutien et toute ta patience surtout lorsqu'il s'agissait d'informatique... Je n'oublierai pas non plus nos mathématiques nocturnes. Bref, tu as été un pilier pour moi durant cette thèse et je t'en remercie ! Je pense aussi à Marco qui m'a toujours soutenue depuis l'agrégation. Merci d'avoir été là quand il le fallait ! Merci aussi à Anton (le labo sans toi ce n'est plus vraiment le labo), à Guillem pour nous avoir épaulé à notre entrée en thèse et nous avoir donné des TD de M2 bénévolement, merci à Fabrizio qui par ses talents de guitariste a enflammé la gouaille et la prairie des filtres plus d'une fois et à Danny et ses talents culinaires. Le labo a paru plus vide sans vous trois cette année, notamment le couloir qui était un peu ton deuxième bureau Fabrizio. Je remercie aussi Kévin qui m'a permis de commencer à me familiariser avec la culture Germanophone (c'est pas gagné !), et Susanna qui a été comme une grande sœur de thèse pour moi. Je suis très heureuse de t'avoir rencontrée !

Je pense également aux membres de l'équipe Picard et en particulier à Charlotte, Marcello et Johan, à tous les participants des divers groupes de travail et séminaires auxquels j'ai assisté ainsi qu'à Claire et à notre sympathique équipe de marathon. Je remercie aussi Jocelyne pour son aide précieuse lorsque je ne comprenais rien aux ordres de mission, Agnès pour son écoute attentive et bienveillante et ses solutions

toujours très arrangeantes, Marie-Line, Martine et les membres du personnel de l'upsi.

Avant d'entrer en thèse j'ai rencontré des gens formidables, sans qui je n'aurais probablement pas suivi cette voie. Je tiens à remercier Jojo, Nico, Sam et Samson mes potes de fac de la première heure, qui m'ont fait apprécier les premières années de fac (plus pour l'ambiance que pour les cours en eux-mêmes d'ailleurs). J'ai une pensée pour Sylvie Crabos notre secrétaire de L2 qui s'est occupée de nous bien au-delà de ses attributions et qui nous a suivis pendant toutes ces années même lorsque nous n'étions plus « ses » étudiants. Je remercie Anne Cumenge qui m'a poussée à faire un M1 math fonda où j'ai eu des cours très intéressants et notamment le cours de Denis-Charles Cisinski et les TD de Marcello Bernardara. Je tiens à remercier Mélanie avec qui j'ai fait mes premiers pas de recherche dans le cadre du mémoire de M1 et qui a toujours été présente depuis. Cela a été super stimulant de travailler avec toi sur ce mémoire et par la suite (notamment en prépa agreg). Merci car sans toi je n'en serai sûrement pas là ! Je remercie également Paulo Carrillo-Rouse qui nous a proposé ce passionnant sujet de mémoire et qui nous a initié à la recherche. Cela a été un déclic pour moi. Je remercie aussi les organisateurs et participants de la conférence à la Llagonne (qui eu cru que dans un village si petit des P.O. puisse se tenir une conférence) notamment les Suisses de Bern qui ont rendu ma première conférence très agréable ce qui m'a motivée pour en faire plein d'autres. Je remercie enfin Klaus Niederkrüger pour les discussions en salle café lors de l'année de prépa agreg et Nathalie Villa-Vialaneix pour le verre en ville et la conversation qui a suivie.

Je remercie enfin mes amis que ce soit de la fac (et que j'ai déjà cité) ou hors fac : Margotte, Aurélie, Marie-No et Lionel, Simon, Alice, Morgane, Jo (et leurs p'tites familles respectives). Vous avez été très importants pour moi pendant toutes ces années ! Les moments partagés avec vous auront eu une importance capitale dans la réussite de ma thèse, que ce soit les footings (de moins en moins au fur et à mesure des années), les restos et soirées (de plus en plus) ou encore les concerts et les randos...

Je remercie enfin toute ma grande famille pour les moments que nous avons partagés : mes deux mamies, Nounou et Coco, mes cousins et cousines, mes tontons et taties et en particulier tontons Patou et Christophe et tatie Christine... Je tiens en plus à exprimer toute ma reconnaissance et mon affection à mes parents, mes deux frères Matth et Guigui ainsi qu'à Coline. Votre soutien permanent et votre confiance m'ont été indispensables d'autant plus lors de cette dernière année. Désolée de vous avoir fait vivre au rythme des montagnes russes de ma thèse à coup de « je suis bloquée », « je suis débloquée », « il y a un problème », « ça marche ! » etc... week-ends, vacances et jours fériés inclus. Merci beaucoup !





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>19</b>
1.1 Applications birationnelles et groupe de Cremona . . . . .	19
1.1.1 Groupe de Cremona . . . . .	19
1.1.2 Diviseurs et systèmes linéaires . . . . .	22
1.1.3 Théorème de factorisation . . . . .	25
1.2 Espaces à courbure négative . . . . .	27
1.2.1 Propriétés géométriques . . . . .	28
1.2.2 Espaces hyperboliques de dimension infinie . . . . .	31
1.2.3 Sous-espace hyperbolique de dimension infinie dans l'espace de Picard-Manin . . . . .	33
1.3 Propriétés des applications du groupe de Cremona . . . . .	40
1.3.1 Propriété des points-base et de leur multiplicité . . . . .	42
1.3.2 Applications de Jonquières et de caractéristique Jonquières . . . . .	48
<b>2 Non-simplicité du groupe de Cremona, sur tout corps</b>	<b>57</b>
2.1 Introduction . . . . .	57
2.2 Propriété WPD dans un espace hyperbolique de dimension infinie . . . . .	60
2.2.1 Propriété WPD . . . . .	61
2.2.2 Quadri-latères hyperboliques . . . . .	62
2.2.3 Tubes géodésiques . . . . .	62
2.2.4 Affaiblissement des hypothèses de la propriété WPD . . . . .	64
2.3 Application au groupe de Cremona . . . . .	67
2.3.1 Action des applications $h_n$ sur $\mathbb{H}_k^\infty$ . . . . .	67
2.3.2 Preuve du résultat principal . . . . .	70

<b>3</b>	<b>Complexe de Wright</b>	<b>77</b>
3.1	Définition . . . . .	77
3.2	Graphe de Wright modifié . . . . .	79
3.3	Diamètre infini . . . . .	81
3.4	Non-hyperbolicité . . . . .	83
3.4.1	Construction d'un sous-groupe abélien libre de rang deux . . .	83
3.4.2	Non-hyperbolicité du graphe de Wright . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Pavage de Voronoï pour le groupe de Cremona</b>	<b>93</b>
4.1	Restriction à un sous-espace . . . . .	94
4.1.1	Pavage . . . . .	98
4.1.2	Non-accumulation des cellules . . . . .	99
4.2	Étude des cellules de Voronoï . . . . .	102
4.2.1	Cellule de Voronoï associée à l'identité . . . . .	103
4.2.2	Cellules adjacentes à la cellule associée à l'identité . . . . .	126
4.2.3	Cellules quasi-adjacentes à la cellule associée à l'identité . . .	132
4.3	Graphes associés au groupe de Cremona . . . . .	144
4.3.1	Graphe dual . . . . .	144
4.3.2	Graphe dual étendu . . . . .	146
4.3.3	Hyperbolicité du graphe dual étendu . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Complexe cubique associé au groupe de Cremona</b>	<b>159</b>
5.1	Définition . . . . .	160
5.2	Premières propriétés . . . . .	161
5.3	Perspectives . . . . .	164

# Introduction

Une bonne façon d'étudier un espace est de s'intéresser à son groupe de transformations. Dans le cas de l'espace projectif de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{P}^n$ , son groupe d'automorphisme est isomorphe à  $\mathrm{PGL}(n + 1)$ . Le groupe des transformations birationnelles de l'espace projectif de dimension  $n$ , appelé « le groupe de Cremona de rang  $n$  » et noté  $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ , est un groupe qui généralise le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^n$ . Une transformation birationnelle est un isomorphisme entre deux ouverts non vides de  $\mathbb{P}^n$  pour la topologie de Zariski. Au début des années 1800, différents mathématiciens étudient de façon isolée certaines applications birationnelles de petit degré du plan projectif (plus de détails se trouvent dans [Hud27, Chapitre XVII]). Ce n'est que dans les années 1860 que L. Cremona introduit ce groupe et pose la théorie. Le premier résultat concernant la structure de groupe est dû à M. Noether et G. Castelnuovo. Le groupe de Cremona de rang 2 sur un corps algébriquement clos  $k$  est engendré par  $\mathrm{PGL}(3, k)$  et par une involution quadratique. À la fin du 20<sup>e</sup> siècle avec l'arrivée de nouveaux outils algébriques et géométriques, les résultats se multiplient. Ainsi, les propriétés de ce groupe sont bien connues en rang 2 et sur un corps algébriquement clos (voir par exemple [Can17]). Toutefois, les groupes de Cremona en rang supérieur sont beaucoup moins compris, la plupart des techniques ne s'adaptant pas.

Le but de cette thèse est d'étudier et de construire des espaces géométriques sur lesquels le groupe de Cremona de rang 2 agit et qui permettent de mettre en œuvre des méthodes provenant de la théorie géométrique des groupes.

Dans cette introduction, nous faisons l'analogie, lorsque c'est possible, entre le groupe de Cremona et le groupe modulaire qui peut-être vu dans plusieurs situations comme le « toy-model » du groupe de Cremona. Le groupe modulaire  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est le quotient de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , le groupe des matrices à coefficients entiers et de déterminant 1, par son centre  $\{\pm I_2\}$ .

**Générateurs** Soient

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

trois éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Les matrices  $S$  et  $U$  sont respectivement d'ordre 2 et 3 alors que la matrice  $T$  est d'ordre infini. Le groupe modulaire est de présentation finie. Il est par exemple engendré par les matrices  $S$  et  $U$  et les relations sont engendrées par les relations  $S^2 = I_2$  et  $U^3 = I_2$ , ou encore par les matrices  $S$  et  $T$  avec les relations engendrées par  $S^2$  et  $(TS)^3$  :

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle S, U \mid S^2 \text{ et } U^3 \rangle \simeq \langle S, T \mid S^2 \text{ et } (TS)^3 \rangle.$$

Bien que le groupe de Cremona possède un système de générateurs connu, ce groupe n'est pas de type fini et ceci est valable sur n'importe quel corps (voir [Can17, Proposition 3.6]). Lorsque le corps  $k$  est algébriquement clos, d'après le théorème de Noether-Castelnuovo, le groupe de Cremona est engendré par  $\mathrm{PGL}(3, k)$  et par l'involution quadratique standard qui dans une carte affine s'écrit,  $\sigma : (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ . Un autre système de générateurs qui se trouve être plus pratique dans certaines circonstances est  $\mathrm{PGL}(3, k)$  ainsi que le sous-groupe de Jonquières. Un élément du groupe de Jonquières est une application préservant le pinceau de droites  $\{y = \text{constante}\}$ . À noter que l'application  $\sigma$  appartient au groupe de Jonquières.

**Action sur un espace hyperbolique** Considérons le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Un de ses modèles est le demi-plan de Poincaré qui est défini comme le sous-espace du plan complexe constitué des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive :

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Il est muni de la métrique définie de la façon suivante. Pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ ,

$$d(z_1, z_2) = \operatorname{argcosh} \left( 1 + \frac{(\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2))^2 + (\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2))^2}{2 \mathrm{Im}(z_1) \mathrm{Im}(z_2)} \right).$$

Le groupe modulaire agit sur  $\mathbb{H}^2$  par isométries : pour tout  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et pour tout point  $z \in \mathbb{H}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Les points à l'infini ou appelés également points au bord sont les points dont la partie imaginaire est nulle ainsi que le point noté  $\infty$  qui permet de compactifier la droite

réelle  $\{y = 0\}$ . Pour cette action, les matrices  $S$  et  $U$  sont des isométries elliptiques puisqu'elles fixent respectivement les points  $i \in \mathbb{H}^2$  et  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \in \mathbb{H}^2$ . La matrice  $T$  est une isométrie parabolique car elle fixe un unique point au bord, le point  $\infty$ . Une matrice est hyperbolique si elle fixe deux points à l'infini comme par exemple la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  qui fixe les deux points réels  $-1 - \sqrt{2}$  et  $-1 + \sqrt{2}$ .

Le groupe de Cremona agit également par isométries sur un espace hyperbolique qui est analogue à  $\mathbb{H}^2$  mais de dimension infinie. L'espace de Picard-Manin associé à  $\mathbb{P}^2$  est la limite inductive des groupes de Picard des surfaces obtenues en éclatant toute suite finie de points de  $\mathbb{P}^2$ , infiniment proches ou non. Il est muni d'une forme d'intersection de signature  $(1, \infty)$ . En considérant une nappe d'hyperboloïde, nous pouvons lui associer un espace hyperbolique de dimension infinie, noté  $\mathbb{H}^\infty$ . Les éléments de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{k})$  sont tous elliptiques, ceux du groupe de Jonquières sont elliptiques lorsque les degrés de leurs itérées sont bornés et paraboliques sinon. L'application de Hénon  $h_n : (x, y) \mapsto (y, y^n - x)$  est un exemple d'élément hyperbolique.

**Non-simplicité du groupe de Cremona** Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  n'est pas un groupe simple. En effet, pour tout entier  $N > 1$ , le sous-groupe

$$\Gamma(N) = \{A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \mid A \equiv \pm I_2 \pmod{N}\},$$

est un sous-groupe distingué de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . En fait, il possède également de nombreux sous-groupes distingués d'indice infini puisque c'est un groupe SQ-universel, c'est-à-dire que tout groupe dénombrable se plonge dans un quotient de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

L'espace  $\mathbb{H}^2$  est hyperbolique au sens de Gromov ou Gromov-hyperbolique puisque chacun de ses triangles vérifie la propriété suivante : tout côté est contenu dans le  $\ln(1 + \sqrt{2})$ -voisinage de la réunion de ses deux autres côtés. Nous disons de manière équivalente que  $\mathbb{H}^2$  est  $\ln(1 + \sqrt{2})$ -hyperbolique. Un triangle de  $\mathbb{H}^\infty$  vivant dans une copie de  $\mathbb{H}^2$ , l'espace  $\mathbb{H}^\infty$  est lui aussi  $\ln(1 + \sqrt{2})$ -hyperbolique.

En 2013, en faisant agir le groupe de Cremona sur  $\mathbb{H}^\infty$ , S. Cantat et S. Lamy montrent que lorsque le corps est algébriquement clos, le groupe de Cremona n'est pas simple (voir [CL13]). Ils construisent des sous-groupes propres dont tous les éléments sont de grands degrés. Pour montrer cela, ils élaborent une variante de la théorie de petite simplification.

Récemment, F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin [DGO17] généralisent également la théorie de la petite simplification pour des groupes agissant par isométries sur des espaces Gromov-hyperboliques. Une de leur motivation est d'étudier le « mapping class group » d'une surface de Riemann hyperbolique. C'est le groupe des homéomorphismes d'une surface préservant l'orientation à isotopie près. Ce groupe est de

présentation finie. Son graphe de Cayley n'est pas Gromov-hyperbolique, ce n'est donc pas un groupe hyperbolique. Cependant il agit sur le graphe des courbes qui est un graphe Gromov-hyperbolique non localement compact (tout comme l'espace  $\mathbb{H}^\infty$ ). Dans ce contexte, ils construisent des sous-groupes distingués propres qui sont de plus libres et purement pseudo-Anosov, c'est-à-dire que tous leurs éléments non triviaux sont pseudo-Anosov. Ils répondent ainsi à deux questions restées longtemps ouvertes. Pour construire de tels sous-groupes ils exhibent un élément hyperbolique satisfaisant la propriété WPD (« weakly properly discontinuous »), propriété proposée par M. Bestvina et K. Fujiwara [BF02] en 2002, également dans le contexte du mapping class group. Un élément  $g$  d'un groupe  $G$  satisfait la propriété WPD, si pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe un point  $x$  et un entier  $n$  strictement positif tels qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments du groupe  $G$  déplaçant  $x$  et  $g^n(x)$  d'au plus  $\varepsilon$ . Dans le contexte du groupe de Cremona agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$ , les éléments hyperboliques que nous étudions possèdent un axe. Par conséquent, nous emploierons de manière équivalente la terminologie introduite par R. Coulon dans son exposé au séminaire Bourbaki [Cou16] : le groupe  $G$  agit discrètement le long de l'axe de  $g$ . L'avantage de la formulation de R. Coulon est d'explicitier le rôle du groupe  $G$ . À noter que D. Osin [Osi16] a englobé cette notion ainsi que d'autres sous le terme d'action acylindrique. Il unifie ainsi plusieurs travaux concernant des groupes différents.

Nous montrons dans le chapitre 2 le théorème suivant :

**Théorème A** ([Lon16]). *Pour tout corps  $k$ , le groupe de Cremona  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  n'est pas simple.*

En utilisant les résultats de F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin, la preuve du théorème A se résume à exhiber des éléments satisfaisant la propriété WPD. Nous trouvons de tels éléments dans le groupe des automorphismes du plan affine,  $\text{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ , que nous identifions à un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  via l'application qui envoie  $(x, y) \in \mathbb{A}_k^2$  sur  $[x : y : 1] \in \mathbb{P}_k^2$ . Notre résultat principal de cette partie est alors :

**Théorème B.** *Soient  $n \geq 2$  et  $k$  un corps de caractéristique ne divisant pas  $n$ . Considérons l'action du groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  sur  $\mathbb{H}_k^\infty$  où  $\bar{k}$  est la clôture algébrique de  $k$ . Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de l'application :*

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, y^n - x) \end{array} .$$

Remarquons que si  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ , pour tout entier  $k \geq 1$ , le sous-groupe normal engendré par  $h_p^k$  est le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ . En effet,  $h_p$  normalise les translations :

$$(x^p - y, x) \circ (x + a, y + b) \circ (y, y^p - x) = (x + a^p - b, y + a).$$

Nous obtenons que  $\langle\langle h_p^k \rangle\rangle$  contient une translation non triviale. Le théorème de Noether permet alors de montrer l'égalité  $\langle\langle h_p^k \rangle\rangle = \text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ , voir par exemple [CD13, Proposition 5.12] ou [Giz94, p.42]. Plus généralement, sur un corps infini de caractéristique divisant  $n$ , l'application  $h_n$  ne satisfait pas la propriété WPD, ce qui justifie l'énoncé du théorème B.

En fait, comme conséquence des résultats de F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin, nous obtenons des propriétés plus précises que la seule non-simplicité :

**Théorème C.** *Soit  $k$  un corps. Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  contient des sous-groupes distingués libres, et est SQ-universel.*

Plus de détails se trouvent par exemple dans [Gui14, Theorem 2.14].

**Grphe de Wright** Ces résultats viennent allonger la liste des similitudes entre le mapping class group d'une surface hyperbolique et le groupe de Cremona. Une question naturelle est de savoir s'il existe un analogue du graphe des courbes pour le groupe de Cremona, c'est-à-dire un graphe hyperbolique au sens de Gromov sur lequel le groupe de Cremona agit de façon non triviale.

Revenons un instant au groupe modulaire. C'est un produit libre dont les facteurs sont les groupes cycliques à deux et trois éléments :

$$\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Nous pouvons lui associer un arbre, l'arbre de Bass-Serre, qui peut être construit abstraitement mais qui vit aussi dans  $\mathbb{H}^2$ . Considérons les points  $i$  et  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  qui sont respectivement les points fixes des isométries elliptiques associées à  $S$  et à  $U$ . Cet arbre possède deux types de sommet. L'orbite du point  $i$  sous l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  constitue les sommets de type 1, et l'orbite de  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  ceux de type 2. Les arêtes sont les images sous l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  du segment géodésique reliant les sommets  $i$  et  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ . La notion de graphe Gromov-hyperbolique généralise la notion d'arbre qui sont des espaces 0-hyperboliques. Ainsi trouver un graphe Gromov-hyperbolique sur lequel le groupe de Cremona agit non trivialement et qui vit dans  $\mathbb{H}^\infty$  serait également un analogue de l'arbre de Bass-Serre pour  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

Il existe un complexe simplicial, de dimension 2 et simplement connexe sur lequel le groupe de Cremona agit. C'est le complexe de Wright [Wri92]. Il permet de voir le groupe de Cremona sur un corps algébriquement clos comme le produit amalgamé de trois de ses sous-groupes le long de leurs intersections respectives. Comme nous nous intéressons à la propriété de Gromov-hyperbolicité, seul le 1-squelette nous intéresse. C'est l'objet central du chapitre 3. Nous montrons que ce graphe non localement fini

est de diamètre infini, ce qui n'était pas évident à priori. Les deux questions que nous nous posons ensuite sont d'une part si ce graphe est hyperbolique et d'autre part si nous pouvons le retrouver dans  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous répondrons à la seconde question dans le chapitre 4. La première question a en fait été posée par A. Minasyan et D. Osin dans [MO15, Problem 8.5]. Leur motivation était, dans le cas où la réponse est positive, de trouver une nouvelle manière de montrer que le groupe de Cremona n'est pas simple en utilisant les résultats de [DGO17]. En fait, la réponse à cette question est négative.

**Théorème D.** *Le graphe de Wright n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

Le premier point est de remarquer qu'il est quasi-isométrique à une « sorte de graphe de Cayley » du groupe de Cremona, que nous appelons le graphe de Wright modifié. Les sommets de ce graphe sont les éléments du groupe de Cremona modulo pré-composition par un élément de  $\mathrm{PGL}(3, k)$ . Une arête relie deux sommets s'il existe une application de Jonquières envoyant un sommet sur l'autre. Ici, une application de Jonquières signifie une application du groupe de Jonquières conjuguée par un automorphisme. Ce graphe est assez naturel et la distance entre deux sommets  $f, g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$  représente le nombre minimal de Jonquières qu'il faut pour décomposer l'application  $g^{-1} \circ f$ . Cependant, il n'existe pas de façon simple d'obtenir ce nombre. Un algorithme a été conçu par J. Blanc et J-P. Furter dans un travail en préparation. Ils obtiennent comme corollaire que l'algorithme proposé dans [AC02] (et expliqué après le théorème 1.3.17) donne aussi le nombre minimal de Jonquières.

Le second point est de montrer que ce graphe contient un sous-graphe quasi-isométrique à  $\mathbb{Z}^2$ . Nous exhibons pour cela deux éléments du groupe de Cremona, appelés twists de Halphen, qui sont d'ordre infini et qui commutent. Ils engendrent un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . Il reste encore à montrer que l'action de ce sous-groupe sur un des sommets du graphe induit le sous-graphe recherché. Nous utilisons pour cela l'algorithme de [AC02]. Nous employons la même stratégie que celle qui permet de montrer que le graphe de Cayley du mapping class group d'une surface hyperbolique n'est pas Gromov-hyperbolique. En effet, ce groupe possède également des sous-groupes isomorphes à  $\mathbb{Z}^2$ . Par exemple, le sous-groupe engendré par deux twists de Dehn le long de deux lacets disjoints. Il faut alors montrer qu'il génère un sous-graphe isométrique au graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Un domaine fondamental pour  $\mathbb{H}^\infty$**  Si nous souhaitons trouver un graphe Gromov-hyperbolique vivant dans  $\mathbb{H}^\infty$ , la première chose à faire est de bien comprendre cet espace. Par exemple, un domaine fondamental pour l'action du groupe de Cremona sur  $\mathbb{H}^\infty$  n'avait jusqu'alors pas été étudié. Un domaine fondamental est



un sous-espace fermé de  $\mathbb{H}^\infty$  tel que son orbite sous l'action du groupe de Cremona recouvre  $\mathbb{H}^\infty$  et que les éléments de l'orbite de son intérieur soient deux à deux disjoints. En fait, il va s'avérer plus commode de travailler avec les cellules de Voronoï. En construire est le but du chapitre 4.

Lorsqu'un groupe agit isométriquement et discrètement sur un espace métrique géodésique et qu'il existe un point de l'espace dont le stabilisateur est réduit au neutre, « les cellules de Voronoï » sont un outil naturel pour construire un domaine fondamental pour cette action.

**Définition.** Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble discret de points d'un espace métrique géodésique  $X$ . À tout point  $p$  de  $\mathcal{P}$  nous associons un ensemble de  $X$ , noté  $\mathcal{V}(p)$  et appelé *cellule de Voronoï* associée au point  $p$ , constitué des points de  $X$  qui sont plus proches de  $p$  que des autres points de  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{V}(p) = \{x \in X \mid \text{pour tout } q \in \mathcal{P}, d(x, p) \leq d(x, q)\}.$$

Les points  $p$  sont les « centres » des cellules de Voronoï.

En effet, en considérant l'orbite d'un point dont le stabilisateur est réduit au neutre, nous obtenons un ensemble discret de point de notre espace métrique. L'ensemble des cellules de Voronoï associées à cet ensemble de points recouvre tout l'espace et les intérieurs sont par définition deux à deux disjoints.

Revenons à l'action du groupe modulaire sur  $\mathbb{H}^2$ . Il est bien connu que l'ensemble des points qui se situent au-dessus de la géodésique dont les points à l'infini sont  $-1$  et  $1$ , et qui ont une partie réelle supérieure ou égale à  $-\frac{1}{2}$  et inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}$  est un domaine fondamental. Considérons l'orbite du point  $2i$  sous l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Les cellules de Voronoï correspondant à cet ensemble de points coïncident avec l'orbite du domaine fondamental donné plus haut.

Nous procédons de même pour le groupe de Cremona. Notons  $\ell \in \mathbb{H}^\infty$  la classe d'une droite de  $\mathbb{P}^2$ . Le stabilisateur de  $\ell$  étant  $\text{PGL}(3, k)$ , nous identifions deux applications qui diffèrent par un automorphisme :

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{il existe } a \in \text{PGL}(3, k), f = g \circ a.$$

La cellule de Voronoï associée à  $\ell$  correspond à l'orbite d'un domaine fondamental sous l'action de  $\text{PGL}(3, k)$ . Nous considérons les cellules de Voronoï associées à l'orbite de  $\ell$  par l'action du groupe de Cremona. Remarquons que deux applications appartenant à la même classe d'équivalence donnent la même cellule de Voronoï. Soit  $f$  appartenant à  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , nous notons  $\mathcal{V}(f)$  la cellule associée à  $f$  et l'application  $f$  est appelée « germe ». Comme nous considérons l'action du groupe de Cremona sur

$\mathbb{H}^\infty$ , nous nous restreignons à un sous-espace convexe de  $\mathbb{H}^\infty$  qui est essentiellement l'enveloppe convexe de l'orbite de  $\ell$  sous l'action de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Nous prenons en fait un convexe  $\mathcal{E}$  un peu plus gros pour des raisons techniques (voir la définition de  $\mathcal{E}$  à la section 4.1). Le théorème principal donne une caractérisation des classes appartenant à la cellule de Voronoï associée à l'application identité. Il dit qu'il suffit que les classes soient plus proches de  $\ell$  que de l'orbite de  $\ell$  sous l'action des applications de Jonquières (et non pas de toutes les applications du groupe de Cremona).

**Théorème E.** *Une classe  $c$  appartient à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  si et seulement si pour toute application de Jonquières  $j$ ,*

$$d(j_\#(c), \ell) \geq d(c, \ell).$$

Nous déterminons également les cellules non disjointes de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Corollaire 4.2.33) que nous appelons « cellules adjacentes ». Les germes de telles cellules sont de deux types. Ceux qui sont de *caractéristique Jonquières*, c'est-à-dire les applications du groupe de Cremona telles qu'il existe deux points  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{P}^2$  et qui envoient le pinceau de droites passant par le point  $p$  sur le pinceau de droites passant par le point  $q$ . L'autre type de germes des cellules adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  sont les applications du groupe de Cremona qui possèdent au plus huit points-base en position presque générale. Un ensemble de points  $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$  est dit *en position presque générale* si d'une part pour chaque  $0 \leq i \leq r$  le point  $p_i$  vit soit dans  $\mathbb{P}^2$  soit dans une surface dominant  $\mathbb{P}^2$  qui est obtenue en éclatant seulement un sous-ensemble de points de  $\{p_0, \dots, p_r\}$  et si d'autre part aucune des trois conditions suivantes n'est satisfaite : quatre des points de cet ensemble sont alignés, sept des points de cet ensemble sont sur une conique, deux des points de cet ensemble sont adhérents à un troisième point de cet ensemble.

**Théorème F.** *L'ensemble des germes des cellules adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  est constitué de toutes :*

- *les applications de caractéristique Jonquières,*
- *les applications qui possèdent au plus 8 points-base en position presque générale.*

**Graphes duaux** À tout pavage de Voronoï est associé un graphe dual. Les sommets sont les centres des cellules et il y a une arête entre deux sommets lorsque les cellules correspondantes sont adjacentes. Nous obtenons ainsi comme corollaire du théorème F une manière de retrouver le graphe de Wright dans  $\mathbb{H}^\infty$ .

**Corollaire G.** *Le graphe dual et le graphe de Wright sont quasi-isométriques.*

La Gromov-hyperbolicité étant une propriété stable par quasi-isométrie, le théorème D implique que le graphe dual n'est pas Gromov-hyperbolique. Nous modifions un peu ce graphe pour obtenir le « graphe dual étendu ». Le graphe dual étendu possède les mêmes sommets que le graphe dual. Nous mettons une arête entre deux sommets lorsque les cellules sont quasi-adjacentes, c'est-à-dire lorsque les cellules sont adjacentes ou qu'elles possèdent une classe en commun à l'infini. Nous montrons que ce graphe est toujours de diamètre infini et qu'il est Gromov-hyperbolique.

**Théorème H.** *Le graphe dual étendu est hyperbolique au sens de Gromov.*

**Complexe cubique  $CAT(0)$  associé au groupe de Cremona** Cette thèse était centrée sur la Gromov-hyperbolicité, mais dans le chapitre 5 nous nous intéressons à une autre propriété naturelle qui est la propriété  $CAT(0)$ . Un espace métrique géodésique possède cette propriété si ses triangles sont plus pincés que dans l'espace euclidien. Nous construisons un complexe cubique  $CAT(0)$  de dimension infinie sur lequel le groupe de Cremona agit naturellement et nous proposons en perspective future de recherche l'étude de ce complexe.



# Chapitre 1

## Préliminaires

Toutes les surfaces considérées dans cette thèse sont projectives et lisses. Sauf mention du contraire, les courbes sont irréductibles mais pas forcément lisses et le corps de base noté  $k$  est algébriquement clos.

### 1.1 Applications birationnelles et groupe de Cremona

Rappelons qu'une *application rationnelle*  $f$  entre deux variétés projectives lisses  $X_1$  et  $X_2$ , notée  $f : X_1 \subset \mathbb{P}^n \dashrightarrow X_2 \subset \mathbb{P}^m$ , est une application régulière sur un ouvert non vide de Zariski de  $X_1$ , telle que l'image des points où  $f$  est bien définie est incluse dans  $X_2$ . La flèche brisée permet d'insister sur le fait qu'il peut y avoir des points où  $f$  est mal définie. Cet ensemble de points est appelé l'ensemble d'indétermination de  $f$  et est noté  $\text{Ind}(f)$ . Lorsque l'application est bien définie sur tout  $S$ , elle est appelée *morphisme* ou *application régulière* et une flèche pleine remplace la flèche pointillée. Une *application birationnelle* entre deux surfaces  $S$  et  $S'$  est une application rationnelle ayant un inverse rationnel. Dit autrement, c'est un isomorphisme entre deux ouverts non vides de Zariski  $U \subset S$  et  $U' \subset S'$ .

#### 1.1.1 Groupe de Cremona

Le *groupe de Cremona*  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est le groupe des applications birationnelles de  $\mathbb{P}^2$  vers lui-même. Un élément du groupe de Cremona s'écrit :

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] \mapsto [f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z)],$$

où  $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{k}[x, y, z]$  sont des polynômes homogènes, de même degré et sans facteur commun. Nous appelons *degré* de  $f$  le degré des polynômes homogènes :

$$\deg(f) := \deg(f_i) \text{ pour } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Les points d'indétermination de  $f$  sont les points de  $\mathbb{P}^2$  qui annulent simultanément les trois polynômes :

$$\text{Ind}(f) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid f_0(x, y, z) = f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 0\}.$$

Les deux ouverts maximaux  $U$  et  $U'$  de  $\mathbb{P}^2$  pour lesquels  $f$  est un isomorphisme, sont obtenus en enlevant respectivement à  $\mathbb{P}^2$  les points d'indétermination de  $f$  et de  $f^{-1}$ , puis en enlevant les courbes contractées respectivement par  $f$  et par  $f^{-1}$ . En fait, les points d'indétermination de  $f$  sont contenus dans les courbes contractées par  $f$ .

*Exemple 1.1.1.* L'involution standard de Cremona  $\sigma : [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy]$  qui s'écrit dans la carte  $z = 1$ ,  $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  est un exemple d'application qui appartient au groupe de Cremona. Cette application est de degré 2. Son ensemble d'indétermination est

$$\text{Ind}(\sigma) = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}.$$

De plus, les seules courbes contractées sont les trois droites :  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$  et  $\{z = 0\}$ . Remarquons qu'elles sont respectivement contractées sur les points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$  qui sont les points d'indéterminations de  $\sigma^{-1}$ . C'est un fait général.

**Proposition 1.1.2** ([Sha94, p.256]). *Soit  $f : S \dashrightarrow S'$  une application birationnelle entre deux surfaces. Si  $f^{-1}$  est non régulière en un point  $p \in S'$ , il existe une courbe  $C$  de  $S$  contractée par  $f$  sur le point  $p$  :*

$$f(C) = p.$$

Considérons deux courbes distinctes  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbb{P}^2$  de degrés respectifs  $d_1$  et  $d_2$ . D'après le théorème de Bézout, elles s'intersectent en  $d_1d_2$  points comptés avec multiplicité (rappelons que le corps est algébriquement clos). Le nombre  $d_1d_2$  est appelé *le nombre d'intersection* de  $C_1$  et  $C_2$  et nous le notons :

$$C_1 \cdot C_2.$$

**Exemples de sous-groupes du groupe de Cremona**

Donnons quelques exemples de sous-groupes du groupe de Cremona, qui donnent une première indication de la complexité de ce groupe.

- Considérons le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ . C'est le sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  constitué des applications birégulières, c'est-à-dire qui sont bien définies sur tout  $\mathbb{P}^2$  et dont l'inverse est également bien définie sur tout  $\mathbb{P}^2$  :

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2) = \{f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \mid \text{Ind}(f) = \emptyset \text{ et } \text{Ind}(f^{-1}) = \emptyset\}.$$

À tout élément de  $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2} \in \text{PGL}(3, k)$  correspond une application de degré 1 du groupe de Cremona :

$$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left[ \sum_{i=0}^2 a_{0,i}x_i : \sum_{i=0}^2 a_{1,i}x_i : \sum_{i=0}^2 a_{2,i}x_i \right] \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2),$$

et vice versa. De tels éléments sont biréguliers. D'autre part le théorème de Bézout implique que les applications birégulières sont linéaires. Ainsi nous avons l'isomorphisme :

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \simeq \text{PGL}(3, k).$$

- Le groupe de Cremona contient également le groupe  $\text{PGL}(2, k) \times \text{PGL}(2, k)$  qui est la composante neutre du groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ . Cette dernière surface est rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe une application birationnelle de  $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$  vers  $\mathbb{P}^2$  qui permet d'identifier  $\text{PGL}(2, k) \times \text{PGL}(2, k)$  à un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ ([u : v], [s : t]) & \mapsto & [ut : vs : vt] \end{array}.$$

- Enfin, présentons un troisième sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , le groupe de Jonquières. C'est un sous-groupe central dans l'étude du groupe de Cremona. Nous le définissons comme le sous-groupe préservant le pinceau des droites  $y = \text{constante}$ . Dans la carte affine

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x, y) & \mapsto & [x : y : 1], \end{array}$$

un élément du groupe de Jonquières s'écrit :

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \right) \in \text{PGL}(2, k(y)) \rtimes \text{PGL}(2, k).$$

Remarquons que les conjugués des éléments du groupe de Jonquières par un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  préservent encore un pinceau de droites. Ainsi, nous appellerons *application de Jonquières* non seulement les éléments du groupe des Jonquières mais également toute application préservant un pinceau de droites.

### Corps de base non algébriquement clos

Nous définissons le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  comme le sous groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  constitué des applications définies sur  $k$ , c'est-à-dire que les trois polynômes homogènes définissant ces applications sont à coefficients dans le corps  $k$ . À noter que les points-base (dont la définition est donnée plus bas) de telles applications sont définis sur la clôture algébrique  $\bar{k}$  du corps.

### 1.1.2 Diviseurs et systèmes linéaires

Soit  $S$  une surface. Un *diviseur* sur  $S$  est une somme formelle finie de courbes  $\{C_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sur  $S$  à coefficients entiers  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$  :

$$D = \sum_{i=1}^n a_i C_i.$$

Si tous les coefficients  $a_i$  sont positifs ou nuls le diviseur est dit *effectif*. Les diviseurs d'une surface forment un groupe noté  $\text{Div}(S)$ .

Voici une première façon d'obtenir des diviseurs. Une *fonction rationnelle*  $f$  est une application rationnelle dont l'espace d'arrivée est la droite projective  $\mathbb{P}^1$ . Ses zéros et ses pôles comptés avec multiplicité forment deux diviseurs notés respectivement  $(f)_0$  et  $(f)_\infty$ .

*Exemple 1.1.3.* Considérons la fonction rationnelle

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] & \mapsto & [x^2 : yz] \end{array} .$$

Le diviseur associé aux zéros de  $f$  est  $(f)_0 = 2\{x = 0\}$  et celui associé aux pôles est  $(f)_\infty = \{y = 0\} + \{z = 0\}$ .

À toute fonction rationnelle  $f$  est associé un diviseur *principal*, noté  $\text{Div}(f)$ , et défini comme  $\text{Div}(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ . Il existe différentes relations d'équivalence sur l'ensemble des diviseurs de  $S$ . Nous en présentons deux.



• Deux diviseurs  $D$  et  $D'$  sont *linéairement équivalents* s'il existe une application rationnelle  $f$  telle que la différence entre  $D$  et  $D'$  est égale au diviseur principal associé à  $f$  :

$$D \sim D' \Leftrightarrow \text{il existe } f \text{ tel que } D - D' = \text{Div}(f).$$

Le *groupe de Picard* de  $S$  est le groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire

$$\text{Pic}(S) = \text{Div}(S) / \sim .$$

C'est un groupe abélien de type fini. Le *nombre de Picard* de  $S$  est le rang du groupe de Picard, noté  $\rho(S)$ .

Il existe une forme d'intersection sur le groupe des diviseurs définie comme suit. Soient  $D_1, D_2 \in \text{Div}(S)$ . Il existe un diviseur  $D'_2$  sur  $S$  linéairement équivalent à  $D_2$  et qui est en position générale avec  $D_1$ , c'est-à-dire  $D_1$  et  $D'_2$  n'ont pas de composante commune. Le nombre d'intersection entre  $D_1$  et  $D_2$ , noté  $D_1 \cdot D_2$ , est le nombre de points d'intersection entre  $D_1$  et  $D'_2$  comptés avec multiplicité.

• Deux diviseurs  $D$  et  $D'$  sont *numériquement équivalents* si pour toute courbe  $C$  le nombre d'intersection entre  $D$  et  $C$  est identique à celui entre  $D'$  et  $C$  :

$$D \equiv D' \Leftrightarrow D \cdot C = D' \cdot C \text{ pour toute courbe } C.$$

Le *groupe de Néron-Severi* de  $S$  est le groupe des diviseurs modulo équivalence numérique

$$N^1(S) = \text{Div}(S) / \equiv .$$

C'est un quotient du groupe de Picard. De plus, c'est un groupe sans torsion.

Illustrons ces définitions à l'aide de l'exemple précédent. Les diviseurs  $2\{x = 0\}$  et  $\{y = 0\} + \{z = 0\}$  sont linéairement équivalents. Remarquons que les équations de ces deux diviseurs ( $x^2$  et  $yz$ ) sont des polynômes homogènes de même degré. En fait, sur  $\mathbb{P}^2$  deux diviseurs sont linéairement équivalents si et seulement si les fractions rationnelles correspondantes sont de même degré. Par conséquent, le groupe de Picard est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  :

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}.$$

Les diviseurs  $2\{x = 0\}$  et  $\{y = 0\} + \{z = 0\}$  sont également numériquement équivalents sur  $\mathbb{P}^2$  puisque d'après le théorème de Bézout, tout diviseur  $D$  est numériquement équivalent au diviseur  $d\{x = 0\}$  où  $d$  est le degré de la fraction rationnelle associée à  $D$ . Ainsi, le groupe de Néron-Séveri est lui aussi isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et donc au groupe de Picard :

$$N^1(\mathbb{P}^2) \simeq \text{Pic}(\mathbb{P}^2).$$

Considérons un autre exemple de diviseur, *le diviseur canonique*. Soit  $\omega$  une 2-forme rationnelle sur  $S$ . En considérant les zéros et les pôles de  $\omega$ , nous obtenons un diviseur, noté  $K_S = (\omega)_0 - (\omega)_\infty$ . Il est appelé « le » diviseur canonique car pour toute autre 2-forme rationnelle sur  $S$ , le diviseur associé est linéairement équivalent à  $K_S$ . Par exemple, le diviseur canonique associé à  $\mathbb{P}^2$  est linéairement équivalent à  $-3$  fois la classe de la droite :

$$K_{\mathbb{P}^2} \sim -3L.$$

Soient  $D$  un diviseur d'une surface  $S'$  donné par des équations locales  $g_\alpha$ , et  $f : S \rightarrow S'$  un morphisme birationnel. Le *tiré en arrière* de  $D$  par  $f$ , noté  $f^*(D)$  est un diviseur sur la surface  $S$  donné par les équations locales  $g_\alpha \circ f$ . La notion de tiré en arrière est compatible avec la forme d'intersection, cette dernière étant stable par tiré en arrière.

**Proposition 1.1.4** ([Sha94, p.252]). *Soient  $f : S' \rightarrow S$  un morphisme birationnel entre deux surfaces et  $D, D_1$  deux diviseurs sur  $S$ . Alors :*

$$f^*(D) \cdot f^*(D_1) = D \cdot D_1.$$

Soit  $D$  un diviseur d'une surface  $S$ . Le *système linéaire complet* associé à  $D$  est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à  $D$  :

$$|D| = \{D' \in \text{Div}(S) \mid D' \geq 0 \text{ et } D' \sim D\}.$$

Il s'identifie à un espace projectif de dimension finie. Un *système linéaire* est un sous-espace linéaire d'un système linéaire complet. L'intersection de tous ses membres est appelée *ensemble d'indétermination* du système linéaire.

À toute application rationnelle  $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  correspond le système linéaire obtenu comme pré-image du système linéaire des droites de  $\mathbb{P}^2$ . Réciproquement, à tout système linéaire correspond une application rationnelle à valeurs dans  $\mathbb{P}_k^n$ . Considérons le cas où  $f$  est une application rationnelle de  $\mathbb{P}^2$  vers  $\mathbb{P}^2$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [f_0(x_0, x_1, x_2) : f_1(x_0, x_1, x_2) : f_2(x_0, x_1, x_2)] \end{array}.$$

Le système linéaire associé à  $f$  est donné par

$$|\Gamma_f| = \bigcup_{[a_0:a_1:a_2] \in \mathbb{P}^2} \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid \sum_{i=0}^2 a_i f_i(x_0, x_1, x_2) = 0 \right\}.$$

Le *degré* du système linéaire est égal au degré des polynômes  $f_i$ . Les points qui annulent simultanément les  $f_i$ , qui sont les points d'indéterminations de  $f$ , correspondent aux points d'indétermination du système linéaire. Par exemple, le système

linéaire associé à l'involution de Cremona standard (Exemple 1.1.1) est le système linéaire associé aux coniques passant par les trois points d'indétermination de  $\sigma$ .

Plus généralement, la *transformée stricte* d'une courbe  $C$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(C)$ , est l'adhérence de la pré-image de l'intersection entre  $C$  et le plus grand ouvert sur lequel  $f^{-1}$  est bien définie :

$$f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C \setminus \text{Ind}(f^{-1}))}.$$

Par linéarité nous pouvons étendre cette définition aux diviseurs. Par opposition, le tiré en arrière par un morphisme birationnel  $\pi$  sera parfois appelé *transformée totale* et noté  $\pi^*$ .

### 1.1.3 Théorème de factorisation

L'*application d'éclatement* du point  $p \in S$  est un morphisme  $\pi : S' \rightarrow S$  tel qu'il existe une courbe isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  et notée  $E_p$  de sorte que  $\pi$  soit un isomorphisme entre  $S' \setminus E_p$  et  $S \setminus \{p\}$  et qu'il contracte  $E_p$  sur le point  $p$ . La courbe  $E_p$  est appelée le *diviseur exceptionnel* obtenu en éclatant le point  $p$ .

Si un diviseur ne passe pas par les points d'indétermination de l'application inverse d'un morphisme alors la transformée stricte et la transformée totale sont identiques. Ce n'est évidemment pas vrai dans le cas contraire.

**Proposition 1.1.5** ([Sha94, p.252]). *Soient  $\pi : S' \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p \in S$  et  $E_p$  le diviseur exceptionnel obtenu. Soit  $D$  un diviseur de  $S$  de multiplicité  $m_p$  au point  $p$ . Alors, nous avons :*

$$\pi^*(D) = \pi^{-1}(D) + m_p E_p.$$

Remarquons que tout point de  $E_p$  représente une des directions des droites passant par  $p$ . Ainsi, si nous considérons un pinceau de droites passant par un point  $p \in \mathbb{P}^2$  et que nous éclatons ce point, nous obtenons une fibration au-dessus de  $E_p \simeq \mathbb{P}^1$  dont les fibres sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$ . La proposition précédente nous dit que la section exceptionnelle  $E_p$  est d'auto-intersection  $-1$ . Une telle surface est appelée *surface de Hirzebruch* et elle est notée  $\mathbb{F}_1$ , où le « 1 » fait référence au fait que la section exceptionnelle est d'auto-intersection  $-1$ . Plus généralement pour  $n \geq 0$ , une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_n$  est une fibration au-dessus de  $\mathbb{P}^1$  dont les fibres sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$  et sont d'auto-intersection 0, telle qu'il existe une section appelée *section exceptionnelle* d'auto-intersection  $-n$ . Lorsque  $n > 0$ , cette dernière est unique. Pour passer de  $\mathbb{F}_n$  à  $\mathbb{F}_{n+1}$ , il suffit d'éclater un point sur la section exceptionnelle puis de contracter la fibre qui passait par ce point-là. À l'inverse pour passer d'une surface

$\mathbb{F}_n$  à une surface  $\mathbb{F}_{n-1}$  il suffit d'éclater un point d'une fibre et de contracter la fibre passant par ce point. Remarquons que  $\mathbb{F}_0$  n'est rien d'autre que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Soit  $S$  une surface. Une surface  $S'$  domine  $S$  s'il existe un morphisme birationnel allant de  $S'$  vers  $S$ . Considérons  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces dominant  $S$  et  $\pi_1$  et  $\pi_2$  leur morphisme respectif vers  $S$ . Nous disons que deux points  $p_1 \in S_1$  et  $p_2 \in S_2$  sont équivalents si  $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$  est un isomorphisme local sur un voisinage de  $p_2$  et envoie  $p_2$  sur  $p_1$ . L'espace des bulles (« Bubble space » en anglais), noté  $\mathcal{B}(S)$ , est l'union de tous les points de toutes les surfaces dominant  $S$  modulo cette relation d'équivalence.

Le théorème suivant est dû à O. Zariski et permet de décomposer toute application birationnelle comme composée d'éclatements et d'inverses d'éclatements.

**Théorème 1.1.6.** *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces, et  $f : S_1 \dashrightarrow S_2$  une application birationnelle. Alors il existe une troisième surface  $S_3$  et deux composées d'éclatements  $\pi : S_3 \rightarrow S_1$  et  $\sigma : S_3 \rightarrow S_2$  telles que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & S_3 & \\ \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\ S_1 & \overset{f}{\dashrightarrow} & S_2 \end{array}$$

Une preuve se trouve par exemple dans [Sha94, p.256]. Elle se décompose en deux parties.

1) La première consiste à montrer qu'il existe un nombre fini  $r$  d'applications  $\pi_i$  définies comme suit. Notons  $\pi_0$  la composée des éclatements des points d'indétermination de  $f$ . Pour  $i \geq 1$ , si  $f \circ \pi_{i-1}$  n'est pas un morphisme, nous définissons  $\pi_i$  comme la composée des éclatements des points d'indétermination de  $f \circ \pi_{i-1}$ . Après un nombre fini d'étapes, nous obtenons une application  $f \circ \pi_0 \circ \dots \circ \pi_{r-1}$  qui est un morphisme.

2) Dans la seconde, il faut prouver que tout morphisme birationnel entre deux surfaces est la composée d'un nombre fini d'éclatements.

Les points éclatés lors de l'étape 1) sont appelés *points-base* de  $f$  et vivent dans l'espace des bulles. Ils correspondent aux points-base du système linéaire associé à  $f$ . Cet ensemble de points est noté  $\text{Bs}(f)$ . À tout point-base de  $f$  est associé un entier appelé *multiplicité* et qui correspond à la multiplicité du système linéaire en ce point, c'est-à-dire à la plus petite multiplicité en ce point des polynômes définissant  $f$ . La surface  $S_3$  produite par l'algorithme précédent satisfait une propriété de minimalité. Toute autre surface  $S'_3$  dominant les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  domine également la résolution

minimale  $S_3$  (voir par exemple [AC02, Theorem 1.3.7]). Un diagramme comme celui-ci tel que  $\pi$  est la composée uniquement d'éclatements de point-base de  $f$  est appelée *résolution* (minimale) de  $f$ .

Remarquons qu'une résolution pour  $f$  est aussi une résolution pour  $f^{-1}$ . Lorsque nous éclatons un point, le nombre de Picard de la surface obtenue augmente de 1 par rapport à celui de la surface de départ. Par conséquent, le diagramme de résolution de  $f$  est symétrique au sens où  $\pi$  est la composée du même nombre d'éclatements que  $\sigma$ . Ainsi, les applications  $f$  et  $f^{-1}$  possèdent le même nombre de points-base.

Notons  $L_1$  et  $L_2$  deux droites respectivement du  $\mathbb{P}^2$  de départ et d'arrivée et ne passant pas par les points-base respectivement de  $f$  et de  $f^{-1}$ . En utilisant la stabilité de la forme d'intersection par tiré en arrière (Proposition 1.1.4), nous montrons que les degrés de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont égaux :

$$\begin{aligned} \deg(f) = L_1 \cdot f^{-1}(L_2) &\stackrel{1.1.4}{=} \pi^*(L_1) \cdot \pi^*(f^{-1}(L_2)) \\ &= \sigma^*(f(L_1)) \cdot \sigma^*(L_2) \\ &\stackrel{1.1.4}{=} f(L_1) \cdot L_2 = \deg(f^{-1}). \end{aligned}$$

Les points-base de  $f$  ne vivent pas forcément dans  $\mathbb{P}^2$  mais sur des surfaces obtenues en éclatant  $\mathbb{P}^2$ . L'espace de Picard-Manin que nous allons introduire dans la section 1.2.3 est adapté à cette situation.

## 1.2 Espaces à courbure négative

Dans cette section, nous définissons diverses variantes d'espaces « à courbure négative » : espaces ayant une métrique hyperbolique, espaces hyperboliques au sens de Gromov ou encore espaces satisfaisant les propriétés CAT(0) ou CAT(-1). Nous donnons également des propriétés de ces espaces dont nous aurons besoin par la suite. Une bonne référence pour cette partie est [BH99] dont nous avons tiré la figure 1.2. En fin de section nous construisons un espace hyperbolique de dimension infinie vivant dans l'espace de Picard-Manin, espace sur lequel le groupe de Cremona agit. Pour cela, nous rappelons d'une part la construction générale d'un espace hyperbolique de dimension infinie, et d'autre part celle de l'espace de Picard-Manin en définissant l'action du groupe de Cremona sur cet espace (voir par exemple [Can11, Section 3 et 6.3]).

### 1.2.1 Propriétés géométriques

Nous définissons ici deux propriétés que nous retrouverons dans les espaces que nous étudions plus tard : l'hyperbolicité au sens de Gromov et les propriétés CAT(0) et CAT(-1). Nous donnons également quelques propriétés de ces espaces.

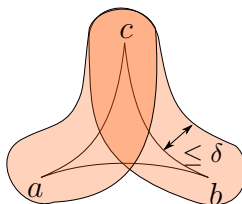
Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. Soit  $x_0 \in X$ , nous définissons la distance de translation d'une isométrie  $g$  de  $X$  comme le réel positif ou nul suivant :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(g^k(x_0), x_0)}{k}.$$

À noter que ce réel est indépendant du choix du point  $x_0 \in X$  ([CDP90, Proposition 6.1]). Un triangle de  $X$  est la donnée de trois points de  $X$  et de trois segments géodésiques reliant ces points deux à deux. Soit  $\Gamma$  un graphe connexe. Il est muni de la *métrique standard* si chaque arête est isométrique au segment réel  $[0, 1]$ . Sans précision, un graphe sera toujours muni de cette métrique.

#### Hyperbolicité au sens de Gromov

Il existe plusieurs définitions de Gromov-hyperbolicité qui sont équivalentes, nous ne mentionnons que celle concernant les triangles (voir par exemple [GdlH90] ou [CDP90]). Un triangle est  *$\delta$ -fin* pour  $\delta$  positif ou nul si chacun de ses côtés est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de l'union de ses deux autres côtés (voir Figure 1.1). L'espace  $(X, d)$  est  *$\delta$ -hyperbolique* ou *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe une constante uniforme  $\delta \geq 0$  telle que tous les triangles de  $X$  sont  $\delta$ -fins.



**Figure 1.1** – Triangle  $\delta$ -fin.

Par exemple, les arbres sont 0-hyperboliques. En fait, un graphe métrique  $\delta$ -hyperbolique ressemble à un arbre à une erreur  $\delta$  près. Le demi-plan de Poincaré est  $\delta$ -hyperbolique avec  $\delta = \ln(1 + \sqrt{2})$  (voir [Cal07, Example 1.23]). Un exemple d'espace qui n'est pas Gromov-hyperbolique est par exemple  $\mathbb{R}^2$  muni de sa métrique euclidienne ou encore n'importe quel graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  muni de la métrique standard.

**Définition.** [BH99, Definition 8.14] Soient deux espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(X', d_{X'})$ . Une application  $g : X \rightarrow X'$  est un *plongement quasi-isométrique* s'il existe deux constantes  $K \geq 1$  et  $L \geq 0$  telles que pour tout  $x, y \in X$  :

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) - L \leq d_{X'}(g(x), g(y)) \leq K d_X(x, y) + L.$$

Si de plus il existe une constante  $C$  telle que tout élément de  $X'$  appartient au  $C$ -voisinage de l'image de  $g$ ,  $g$  est une *quasi-isométrie*. Dans ce cas les espaces métriques  $X$  et  $X'$  sont dits *quasi-isométriques*.

Le graphe de Cayley d'un groupe  $G$  dépend d'un choix d'un système fini de générateurs. Ses sommets sont les éléments du groupe et une arête relie deux sommets s'ils diffèrent d'un seul élément du système de générateurs choisi. La notion de quasi-isométrie permet de dire qu'en un certain sens les graphes de Cayley associés à deux systèmes finis de générateurs possèdent en fait la même métrique. En effet, deux graphes de Cayley correspondant à deux systèmes finis de générateurs d'un même groupe de type fini sont quasi-isométriques. De plus, comme le dit le théorème suivant dû à Gromov, la notion de Gromov-hyperbolicité est stable par quasi-isométrie.

**Théorème 1.2.1** ([GdlH90, Théorème p.88]). *Étant donnés deux espaces métriques géodésiques quasi-isométriques, si l'un des deux est hyperbolique au sens de Gromov alors il en est de même de l'autre.*

Ainsi, si un groupe de type fini possède un graphe de Cayley hyperbolique alors il en est de même de tout autre graphe de Cayley associé à ce groupe. Ceci permet de bien définir *les groupes hyperboliques*. Ce sont les groupes de type fini dont le (ou tout) graphe de Cayley est hyperbolique. Cette notion permet de regrouper des groupes comme par exemple les groupes libres, les groupes fondamentaux de surface lisses compactes et de genre supérieur ou égal à 2.

Le théorème suivant, dû à Bowditch ([Bow14, Proposition 3.1]) est un critère efficace pour montrer qu'un graphe est hyperbolique. Il a été utilisé par P. Przytycki et A. Sisto dans [PS17] afin de montrer que le complexe des courbes (un graphe associé au mapping class group d'une surface hyperbolique) est hyperbolique.

**Théorème 1.2.2** (Critère de Bowditch). *Soient  $h \geq 0$  et  $\Gamma$  un graphe connexe muni de la distance standard. Supposons que pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à l'ensemble des sommets  $S(\Gamma)$ , il existe un sous-graphe  $\Gamma(x, y)$  de  $\Gamma$  connexe par arcs vérifiant :*

- 1) *Pour tout  $x, y \in S(\Gamma)$ ,  $x, y \in \Gamma(x, y)$ .*

2) Pour tout  $x, y, z \in S(\Gamma)$ ,  $\Gamma(x, y) \subseteq \mathcal{N}_h(\Gamma(x, z) \cup \Gamma(y, z))$  où  $\mathcal{N}_h$  signifie le  $h$ -voisinage tubulaire.

3) Pour tout  $x, y \in S(\Gamma)$  tels que  $d(x, y) \leq 1$ , le diamètre de  $\Gamma(x, y)$  dans  $\Gamma$  est au plus  $h$ .

Alors  $\Gamma$  est  $\delta$ -hyperbolique avec  $\delta$  dépendant de  $h$ .

### Espaces CAT(0) et CAT(-1)

Cette terminologie correspond aux initiales de E. Cartan, A. Alexandrov et V. Toponogov.

Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique géodésique. Considérons un triangle géodésique  $T$  de  $X$  déterminé par les trois points  $x, y$  et  $z$  et la donnée de trois segments géodésiques reliant ces points deux à deux. Nous appelons *triangle de comparaison* dans l'espace  $(X', d_{X'})$ , un triangle  $T'$  tel que  $d_X(x, y) = d_{X'}(x', y')$ ,  $d_X(x, z) = d_{X'}(x', z')$  et  $d_X(z, y) = d_{X'}(z', y')$ . Soit  $p$  un point de  $[x, y] \in T$ . Un point  $p' \in [x', y'] \subset T'$  est appelé *point de comparaison* de  $p$  si  $d_{X'}(x', p') = d_X(x, p)$ .

Le triangle  $T$  satisfait l'inégalité CAT(0) si pour tous points  $p, q \in T$ , la distance entre ces deux points est inférieure ou égale à la distance entre leur point de comparaison respectif  $p', q' \in T'$  dans l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  :

$$d_X(p, q) \leq \|x - y\|.$$

De même un triangle est dit CAT(-1) si son triangle de comparaison dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  vérifie la même propriété. L'espace  $X$  est dit respectivement CAT(0) ou CAT(-1) si tous ses triangles sont respectivement CAT(0) et CAT(-1). En fait, cela revient à demander que tous les triangles soient plus pincés que dans le modèle de comparaison. Ainsi, les espaces CAT(-1) sont Gromov-hyperboliques mais ce n'est pas le cas des espaces CAT(0). Par contre un espace Gromov-hyperbolique n'est pas forcément CAT(0) ou CAT(-1). En effet, une sphère de diamètre bornée n'est pas CAT(0) mais elle est Gromov-hyperbolique. Remarquons qu'un espace CAT(-1) est CAT(0).

Une propriété intéressante des espaces CAT(0), et à fortiori des espaces CAT(-1), est que la distance  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, c'est-à-dire pour toute paire de segments géodésiques  $c : [0, 1] \rightarrow X$  et  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  paramétrés proportionnellement et pour tout  $t \in [0, 1]$  l'inégalité suivante est satisfaite :

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t) d(c(0), c'(0)) + t d(c(1), c'(1)).$$

**Proposition 1.2.3** ([BH99, Proposition 2.2, p.176]). *Si  $(X, d)$  est un espace métrique géodésique CAT(0) alors la fonction distance  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe.*



### Application de projection

Soient  $E$  et  $F$  deux parties non vides d'un espace métrique  $(X, d)$ . Nous définissons la distance entre  $E$  et  $F$  comme le nombre positif :

$$d(E, F) = \inf\{d(e, f) \mid (e, f) \in E \times F\}.$$

Elle est dite *atteinte* lorsqu'il existe au moins un couple  $(e, f) \in E \times F$  tel que  $d(E, F) = d(e, f)$ . Attention, ce n'est pas une distance sur l'ensemble des parties de  $X$  puisque deux ensembles peuvent être à distance nulle sans qu'ils soient égaux, ni même qu'ils aient la même adhérence. Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , les deux fermés  $\{y = 0\}$  et  $\{yx = 1\}$  sont disjoints mais leur distance est nulle.

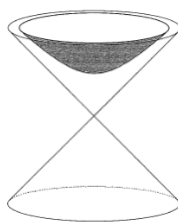
Introduisons *l'application de projection*. Soit  $C$  un convexe d'un espace  $(X, d)$  métrique et CAT(0). Pour tout  $x \in X$  considérons la distance  $d(x, C)$  entre le singleton  $x$  et  $C$ . D'après [BH99, Proposition 2.4 Chapter II.2], comme  $X$  est CAT(0) cette distance est en fait un minimum et est atteinte pour un unique point de  $C$  qui est noté  $\text{pr}_C(x)$ . Cela définit l'application de projection sur  $C$ ,  $\text{pr}_C : X \rightarrow C$ .

*Remarque 1.2.4* ([BH99, Proposition 2.4]). Dans un espace métrique CAT(0), l'application de projection contracte les distances :

$$\text{pour tous } x, y \in X, \quad d(x, y) \geq d(\text{pr}_C(x), \text{pr}_C(y)).$$

### 1.2.2 Espaces hyperboliques de dimension infinie

Il existe différents modèles de l'espace hyperbolique de dimension finie  $\mathbb{H}^n$ . Nous avons vu dans l'introduction le modèle du demi-plan de Poincaré. Ici, nous généralisons en dimension infinie le modèle de l'hyperboloïde (voir figure 1.2).



**Figure 1.2** – Modèle de l'hyperboloïde de  $\mathbb{H}^2$ .

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert réel de dimension infinie. Soient  $u \in H$  de norme 1 et  $u^\perp$  son complémentaire orthogonal. Tout élément  $v \in H$  s'écrit de manière unique  $v = v_u u + v_{u^\perp}$  où  $v_u \in \mathbb{R}$  et  $v_{u^\perp}$  appartient à  $u^\perp$ . Nous définissons une

forme bilinéaire symétrique  $\mathcal{B}$  sur  $H$  de signature  $(1, \infty)$  de la manière suivante :  $\mathcal{B}(x, y) = x_u y_u - \langle x_{u^\perp}, y_{u^\perp} \rangle$ . Notons  $\mathbb{H}^\infty$  la nappe d'hyperboloïde définie par :

$$\mathbb{H}^\infty := \{x \in H \mid \mathcal{B}(x, x) = 1 \text{ et } \mathcal{B}(u, x) > 0\}.$$

L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  muni de la distance  $d$  définie par  $\cosh d(x, y) := \mathcal{B}(x, y)$  est un espace métrique complet et de dimension infinie.

Considérons l'ensemble des points de  $H$  où la forme bilinéaire est strictement positive, noté  $H_{>0}$ . Il existe une application de normalisation :

$$\begin{aligned} \eta : H_{>0} &\rightarrow \mathbb{H}^\infty & (1.2.5) \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{\mathcal{B}(x, x)}}. \end{aligned}$$

L'image de  $x$  est appelée la *normalisation* de  $x$ . Géométriquement, elle correspond à associer à un point  $x \in H_{>0}$  le point d'intersection entre  $\mathbb{H}^\infty$  et la droite vectorielle passant par  $x$ . Remarquons que si l'intersection de  $\mathbb{H}^\infty$  avec un sous-espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de  $H$  est non vide alors c'est une copie de l'espace hyperbolique usuel  $\mathbb{H}^n$ . En particulier, il existe un unique segment géodésique reliant deux points de  $\mathbb{H}^\infty$ , obtenue comme l'intersection de  $\mathbb{H}^\infty$  avec le plan vectoriel contenant ces deux points. Dans la pratique, nous nous ramenons souvent à  $\mathbb{H}^2$  en considérant un plan hyperbolique de  $\mathbb{H}^\infty$ . De ce fait, tout triangle de  $\mathbb{H}^\infty$  est isométrique à un triangle de  $\mathbb{H}^2$ . Ceci implique que  $\mathbb{H}^\infty$  est CAT(-1) et  $\delta$ -hyperbolique pour la même constante  $\delta$  que  $\mathbb{H}^2$ . Dans la suite lorsque nous parlerons d'un espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$ , il sera toujours de cette forme.

### Bord à l'infini

L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  étant un espace métrique complet CAT(0), il existe une notion de *bord à l'infini* qui généralise celle de bord des variétés de Riemann de dimension finie qui sont complètes, simplement connexes et à courbure négative ou nulle. Plus de détails se trouvent par exemple dans [BH99, Chapter II.8]. Comme dans le cas de la dimension finie, le bord de  $\mathbb{H}^\infty$  peut être défini comme suit.

$$\partial_\infty \mathbb{H}^\infty = \{x \in H \mid \mathcal{B}(x, x) = 0 \text{ et } \mathcal{B}(x, u) > 0\}.$$

Un point appartenant au bord de  $\mathbb{H}^\infty$  est parfois appelé *un point à l'infini*. Les isométries de  $\mathbb{H}^\infty$  s'étendent de façon unique en des homéomorphismes de  $\mathbb{H}^\infty \cup \partial_\infty \mathbb{H}^\infty$ . Nous pouvons définir une topologie sur  $\mathbb{H}^\infty \cup \partial_\infty \mathbb{H}^\infty$  de sorte que la topologie induite sur  $\mathbb{H}^\infty$  corresponde à la métrique introduite précédemment (voir [BH99,

p.263]). L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  n'étant pas localement compact,  $\partial_\infty \mathbb{H}^\infty$  et  $\mathbb{H}^\infty \cup \partial_\infty \mathbb{H}^\infty$  ne sont pas compacts. Notons que dans ce cadre deux sous-espaces qui sont fermés, disjoints et bornés peuvent ne pas être à distance strictement positive l'un de l'autre.

Pour construire un exemple d'un tel phénomène, introduisons la notion d'enveloppe convexe. Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel topologique. Son enveloppe convexe, notée  $\text{Conv}(A)$ , est l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points de  $A$ . L'enveloppe convexe fermée de  $A$  est le plus petit convexe fermé contenant  $A$ . C'est également l'adhérence de  $\text{Conv}(A)$  (voir par exemple [AB99, p.171]).

*Exemple.* Considérons un espace de Hilbert  $H$  de dimension infinie de base hilbertienne  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Notons  $C_1$  l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de réels strictement positifs et de limite 1. Notons  $C_2$  l'enveloppe convexe fermée des  $\{a_i e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Alors les deux convexes fermés sont disjoints et bornés. Considérons les suites  $u_n = e_n$  et  $v_n = a_n e_n$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vit dans  $C_1$  et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, v_n) = 0$ . Par conséquent  $d(C_1, C_2) = 0$ , en dépit du fait que ce sont deux convexes fermés, disjoints et bornés.

### 1.2.3 Sous-espace hyperbolique de dimension infinie dans l'espace de Picard-Manin

Dans cette section, nous rappelons la construction de l'espace de Picard-Manin. Nous définissons ensuite l'action du groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sur cet espace. Enfin, nous nous intéressons à un sous-espace de l'espace de Picard-Manin qui est un espace hyperbolique de dimension infinie comme ceux introduits précédemment. Plus de précisions se trouvent dans [BC16, Section 4], [CL13, Part II.4] et [Can11, Section 3].

#### Espace de Picard-Manin

Dans cette partie, nous considérons le groupe de Néron-Severi associé à  $S$  et tensorisé par  $\mathbb{R}$ . Nous le notons encore  $N^1(S)$ . C'est donc le groupe des diviseurs à coefficients réels sur  $S$  à équivalence numérique près. Il est muni d'une forme bilinéaire symétrique, la forme d'intersection. Pour tout diviseur  $D$  sur  $S$  nous notons  $\{D\}_S$  sa classe de Néron-Severi ou  $\{D\}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la surface. Si  $\pi : S' \rightarrow S$  est un morphisme birationnel entre deux surfaces, alors le tiré en arrière

$$\pi^* : N^1(S) \hookrightarrow N^1(S')$$

qui à la classe d'un diviseur associe la classe de sa transformée totale, est un morphisme injectif qui préserve la forme d'intersection. De plus,  $N^1(S')$  est isomorphe

à

$$\pi^*(N^1(S)) \oplus \left( \bigoplus_{p \in \text{Bs}(\pi^{-1})} \mathbb{R}\{E_p^*\} \right), \quad (1.2.6)$$

où  $\text{Bs}(\pi^{-1})$  est l'ensemble des points-base de  $\pi^{-1}$  (infiniment proches ou pas) et  $E_p^*$  est la transformée totale, vue dans  $S'$ , du diviseur exceptionnel  $E_p$  obtenu en éclatant le point  $p$ . Cette somme est orthogonale relativement à la forme d'intersection.

Considérons la limite inductive des groupes de Néron-Severi des surfaces  $S'$  dominant  $S$  :

$$\mathcal{Z}_C(S) = \varinjlim_{S' \rightarrow S} N^1(S'),$$

où l'indice  $C$  fait référence aux b-diviseurs de Cartier (pour plus de précisions voir [Fav10]). Remarquons que pour toute surface  $S'$  dominant  $S$ , le groupe  $N^1(S')$  est plongé dans  $\mathcal{Z}_C(S)$ . En fait, si nous considérons un diviseur  $D$  sur  $S$ , à chaque surface  $S'$  dominant  $S$ , nous pouvons lui faire correspondre une classe de Néron-Severi  $\{D\}_{S'}$  dans  $N^1(S')$ . Ces éléments sont tous identifiés dans  $\mathcal{Z}_C(S)$  et correspondent à une classe  $d$  de  $\mathcal{Z}_C(S)$  notée en lettre minuscule.

*Exemple 1.2.7.* Considérons un point  $q$  appartenant au diviseur exceptionnel  $E_p$ , issu de l'éclatement d'une surface  $S$  au point  $p$ . Notons  $S_p$  la surface obtenue en éclatant le point  $p$  et  $S_{p,q}$  celle en éclatant successivement les points  $p$  et  $q$ . La classe  $e_p$  correspond à  $\{E_p\}_{S_p}$  dans  $N^1(S_p)$  et à  $\{\tilde{E}_p + E_q\}_{S_{p,q}}$  dans  $N^1(S_{p,q})$  où  $\tilde{E}_p$  est la transformée stricte de  $E_p$  dans  $S_{p,q}$ .

Définissons la forme d'intersection sur  $\mathcal{Z}_C(S)$ . Pour cela, considérons  $c$  et  $d$  deux éléments de  $\mathcal{Z}_C(S)$ . Il existe une surface  $S_1$  dominant  $S$  telles que les classes  $c$  et  $d$  correspondent respectivement à  $\{C\}_{S_1}$  et  $\{D\}_{S_1}$  dans  $N^1(S_1)$ . La forme d'intersection est donnée par :  $c \cdot d = \{C\}_{S_1} \cdot \{D\}_{S_1}$ . Montrons qu'elle ne dépend pas du choix de la surface  $S_1$ . En effet, considérons une autre surface  $S_2$  où les éléments  $c$  et  $d$  se réalisent comme des éléments de  $N^1(S_2)$ . En résolvant l'application birationnelle allant de  $S_1$  vers  $S_2$  nous obtenons une surface  $S_3$  dominant  $S_1$  et  $S_2$  c'est-à-dire qu'il existe deux morphismes birationnels  $\pi : S_3 \rightarrow S_1$  et  $\sigma : S_3 \rightarrow S_2$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & S_3 & \\ \pi \swarrow & & \searrow \sigma \\ S_1 & \text{-----} & S_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

La forme d'intersection étant stable par tiré en arrière nous avons :

$$\{C\}_{S_1} \cdot \{D\}_{S_1} = \{C\}_{S_3} \cdot \{D\}_{S_3} = \{C\}_{S_2} \cdot \{D\}_{S_2}.$$

Par la suite, nous nous intéressons à l'espace de Hilbert défini par

$$\mathcal{Z}(S) = \left\{ \{D_0\}_S + \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} \lambda_p e_p \mid \lambda_p \in \mathbb{R}, \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} \lambda_p^2 < \infty \text{ et } \{D_0\}_S \in \mathbb{N}^1(S) \right\},$$

que nous appelons l'espace de Picard-Manin (voir [CL13] et [Can11] ou encore [BFJ08]). C'est le complété  $L^2$  de  $\mathcal{Z}_C(S)$ . Ses éléments sont appelés « classes de Picard-Manin » ou plus simplement « classes ». Les classes  $e_p$  (nous gardons les notations introduites dans l'exemple 1.2.7) où  $p$  est un point de  $S$  ou d'une surface dominant  $S$ , sont d'auto-intersection  $-1$ , orthogonales deux à deux et orthogonales à  $\mathbb{N}^1(S)$ . La forme d'intersection est donc de signature  $(1, \infty)$  et préserve la décomposition orthogonale :

$$\mathcal{Z}(S) = \mathbb{N}^1(S) \oplus \left( \bigoplus_{p \in \mathcal{B}(S)} \mathbb{R}e_p \right). \quad (1.2.8)$$

*Exemple 1.2.9.* Soient  $p$  et  $q$  les points définis dans l'exemple 1.2.7. Considérons les classes de Picard-Manin  $e_p$  et  $e_q$ . Plaçons nous sur la surface  $S_{p,q}$  puisqu'elle domine la surface  $S_p$  contenant le diviseur  $E_p$  et qu'elle contient le diviseur  $E_q$ . Dans  $\mathbb{N}^1(S_{p,q})$  les classes  $e_p$  et  $e_q$  correspondent respectivement à  $\{\tilde{E}_p + E_q\}$  et à  $\{E_q\}$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} e_p \cdot e_p &= \tilde{E}_p^2 + E_q^2 + 2\tilde{E}_p \cdot E_q = -2 - 1 + 2 = -1 \\ e_p \cdot e_q &= \tilde{E}_p \cdot E_q + E_q^2 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Si  $\pi : S' \rightarrow S$  est un morphisme birationnel, nous avons mentionné que l'application induite par tiré en arrière sur les groupes de Néron-Severi est une injection. Précisément :

$$\begin{aligned} \pi^* : \mathbb{N}^1(S) &\hookrightarrow \mathbb{N}^1(S') \\ \{D_0\}_S &\mapsto \{\tilde{D}_0\}_{S'} + \sum_{q \in \mathcal{B}_S(\pi^{-1})} m_q(D_0)e_q, \end{aligned}$$

où  $\tilde{D}_0$  est la transformée stricte dans  $S'$  de  $D_0$  et  $m_q(D_0)$  la multiplicité de  $D_0$  au point  $q$ . Regardons ce que nous obtenons au niveau des espaces de Picard-Manin. D'après (1.2.8) puis (1.2.6), nous avons la décomposition

$$\mathcal{Z}(S') = \left( \mathbb{N}^1(S) \oplus \left( \bigoplus_{q \in \mathcal{B}_S(\pi^{-1})} \mathbb{R}e_q \right) \right) \oplus \left( \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{B}(S) \\ r \notin \mathcal{B}_S(\pi^{-1})}} \mathbb{R}e_r \right).$$

Nous définissons un isomorphisme  $\pi_{\#}$  de  $\mathcal{Z}(S')$  vers  $\mathcal{Z}(S)$  qui consiste à considérer comme exceptionnelles au-dessus de  $S$  les classes  $e_q$  qui étaient dans l'espace de Néron-Severi de  $S'$ . Ainsi l'injection  $\pi^*$  au niveau des espaces de Néron-Severi devient un isomorphisme  $\pi_{\#}^{-1}$  au niveau des espaces de Picard-Manin. Plus précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} \pi_{\#}^{-1} : \mathcal{Z}(S) = N^1(S) \oplus \left( \bigoplus_{p \in \mathcal{B}(S)} \mathbb{R}e_p \right) &\longrightarrow \mathcal{Z}(S') = N^1(S') \oplus \left( \bigoplus_{\substack{r \in \mathcal{B}(S) \\ r \notin \text{Bs}(\pi^{-1})}} \mathbb{R}e_r \right) \\ \{D_0\}_S + \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} \lambda_p e_p &\mapsto \left( \{\tilde{D}_0\}_{S'} + \sum_{q \in \text{Bs}(\pi^{-1})} (m_q(D_0) + \lambda_q) e_q \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{r \in \mathcal{B}(S) \\ r \notin \text{Bs}(\pi^{-1})}} \lambda_r e_r. \end{aligned}$$

Dans le cas où la surface considérée est  $\mathbb{P}^2$ , nous notons simplement  $\mathcal{Z}$  l'espace de Picard-Manin associé :

$$\mathcal{Z} = \left\{ n\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \mid n, \lambda_p \in \mathbb{R}, \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p^2 < \infty \right\},$$

où  $\ell$  est la classe de la droite dans  $\mathbb{P}^2$ .

### Forme canonique

Notons  $\mathcal{Z}_{L^1}$  l'ensemble des classes de Picard-Manin  $c = n\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p$  qui sont  $L^1$  c'est-à-dire telles que  $\sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} |\lambda_p| < \infty$ . Nous définissons la *forme canonique*  $k_{\mathbb{P}^2}$  sur  $\mathcal{Z}_{L^1}$ , comme la forme linéaire définie par :

$$\text{pour tout } c \in \mathcal{Z}_{L^1}, k_{\mathbb{P}^2}(c) = k_{\mathbb{P}^2} \cdot c = -3n - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p,$$

où  $k_{\mathbb{P}^2} = -3\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} e_p$ . Plus généralement, en notant  $K_S$  le diviseur canonique d'une surface  $S$  dominant  $\mathbb{P}^2$ , déjà vu précédemment, la forme canonique s'écrit  $k_S = K_S + \sum_{p \in \mathcal{B}(S)} e_p$ .

### Action du groupe de Cremona sur l'espace de Picard-Manin

Considérons une résolution de  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

$$\begin{array}{ccc}
& S & \\
\pi \swarrow & & \searrow \sigma \\
\mathbb{P}^2 & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2.
\end{array}$$

Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  agit sur  $\mathcal{Z}(\mathbb{P}^2)$  via l'application  $(f, c) \mapsto f_{\#}(c)$  où  $f_{\#}$  est définie par

$$f_{\#} = \sigma_{\#} \circ (\pi_{\#})^{-1}.$$

Remarquons que  $(f_{\#})^{-1} = (f^{-1})_{\#}$  et que l'action de  $f$  préserve la forme d'intersection :

$$\text{pour tous } c_1, c_2 \in \mathcal{Z}, f_{\#}(c_1) \cdot f_{\#}(c_2) = c_1 \cdot c_2.$$

Explicitons sur un exemple l'action de  $f$  sur  $\ell$ .

*Exemple 1.2.10.* Soit  $f : \mathbb{P}_s^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_b^2$  une application quadratique et notons  $q_1, q_2$  et  $q_3$  les points-base (infiniment proches ou non) de  $f^{-1}$ . Nous mettons un indice  $s$  comme source et un indice  $b$  comme but pour plus de clarté. La transformée par  $f$  d'une droite générale  $L$  de  $\mathbb{P}_s^2$  (ne passant pas par les points-base de  $f$ ) est une conique  $C$  de  $\mathbb{P}_b^2$  qui passe par les points-base de  $f^{-1}$ . Considérons une résolution  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}_s^2$  et  $\sigma : S \rightarrow \mathbb{P}_b^2$  de  $f$ . Nous voulons exprimer  $\{\pi^*(L)\}_s$  dans la base de  $N^1(S)$  issue de  $\sigma^*$ , c'est-à-dire dans la base :  $\sigma^*(\{L\}_b), \{E_{q_1}^*\}_b, \{E_{q_2}^*\}_b, \{E_{q_3}^*\}_b$ . La droite  $L$  ne passant pas par les points-base de  $f$  nous avons  $\pi^*(L) = \tilde{L}$  qui correspond à la transformée stricte de  $C$  par  $\sigma : \tilde{C} = \sigma^*(C) - E_{q_1}^* - E_{q_2}^* - E_{q_3}^*$ . Or,  $\sigma^*(\{C\}_b) = 2\sigma^*(\{L\}_b)$ . Ainsi, nous avons écrit  $\{\pi^*(L)\}_s$  dans la base voulue,  $\{\pi^*(L)\}_s = \{2\sigma^*(L) - E_{q_1}^* - E_{q_2}^* - E_{q_3}^*\}_b$ . Si nous réécrivons cette égalité en terme de classes de Picard-Manin nous avons :

$$f_{\#}(\ell) = 2\ell - e_{q_1} - e_{q_2} - e_{q_3}.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente se lit comme « le système linéaire associé aux coniques passant avec multiplicité 1 par les points  $q_1, q_2$  et  $q_3$  ». Remarquons que cela correspond au système linéaire associé à la transformée stricte par  $f^{-1}$  d'une droite de  $\mathbb{P}_s^2$  ne passant pas par les points-base de  $f$ . En fait, c'est toujours le cas pour n'importe quelle application de Cremona.

*Remarque 1.2.11.* La forme canonique est constante sur l'orbite d'une classe par le groupe de Cremona, c'est-à-dire pour toute classe  $c \in \mathcal{Z}_{L^1}$  et pour tout  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , nous avons :

$$k_{\mathbb{P}^2} \cdot c = k_{\mathbb{P}^2} \cdot f_{\#}(c).$$

Soit  $d$  le degré de  $f$  et notons  $p_0, p_1, \dots, p_{r-1}$  ses points-base de multiplicité respective  $\{m_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  et  $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$  ceux de  $f^{-1}$  de multiplicité  $\{m'_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$ . L'action

de  $f$  sur  $\ell$  et sur les classes  $\{e_{p_j}\}_{0 \leq j \leq r-1}$  est donnée par :

$$f_{\#}(\ell) = d\ell - \sum_{i=0}^{r-1} m'_i e_{q_i}, \quad (1.2.12)$$

$$f_{\#}(e_{p_j}) = m_j \ell - \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,j} e_{q_i}. \quad (1.2.13)$$

Remarquons que les coefficients  $a_{i,j}$  correspondent au nombre d'intersection des transformées totales des diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant respectivement les points  $p_j$  et  $q_i$ , dans la résolution de  $f$ .

*Remarque 1.2.14.* D'après [AC02, Proposition 2.2.21], les coefficients  $a_{i,j}$  sont positifs pour tous  $0 \leq i, j \leq r-1$ .

*Remarque 1.2.15.* L'action de  $f$  sur  $\ell$  correspond au système linéaire associé à la transformée par  $f^{-1}$  d'une droite ne passant pas par les points-base de  $f$ . Si tous les points-base de  $f$  sont dans  $\mathbb{P}^2$  alors pour chaque point  $p_j$  il existe une courbe contractée par  $f^{-1}$  sur le point  $p_j$  de degré  $m_j$  et passant avec multiplicités  $a_{i,j}$  aux points  $q_j$ .

Ces informations sur  $f$  se lisent dans sa *matrice caractéristique* :

$$\begin{pmatrix} d & m_0 & m_1 & \dots & m_{r-1} \\ -m'_0 & -a_{0,0} & -a_{0,1} & \dots & -a_{0,r-1} \\ -m'_1 & -a_{1,0} & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m'_{r-1} & -a_{r-1,0} & -a_{r-1,1} & \dots & -a_{r-1,r-1} \end{pmatrix}.$$

Celles pour  $f^{-1}$  se lisent en ligne en changeant le signe des  $m_i$  et des  $m'_i$  :

$$f_{\#}^{-1}(\ell) = d\ell - \sum_{j=0}^{r-1} m_j e_{p_j},$$

$$f_{\#}^{-1}(e_{q_i}) = m'_i \ell - \sum_{j=0}^{r-1} a_{i,j} e_{p_j}.$$

Pour plus de détails sur la matrice caractéristique, nous renvoyons à [AC02, Section 2.4]. La première ligne de la matrice caractéristique de  $f$  s'appelle la *caractéristique* de  $f$ . Elle est notée  $(d; m_0, \dots, m_{r-1})$ . Une application *de caractéristique Jonquières* est une application ayant une caractéristique de la forme  $(d; d-1, 1^{2d-2})$  où  $1^{2d-2}$  signifie que l'application possède  $2d-2$  points-base de multiplicité 1. Nous justifierons plus tard cette terminologie (Section 1.3.2) en montrant que la caractéristique de toute application de Jonquières est de cette forme.



*Exemple 1.2.16.* Reprenons l'exemple 1.2.10 d'une application quadratique. Sa matrice caractéristique est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est un exemple d'application de caractéristique Jonquières.

Il ne nous reste plus qu'à regarder l'action de  $f$  sur les classes  $e_p$  où  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  n'est pas un point-base de  $f$ .

*Remarque 1.2.17.* Si  $f$  est un isomorphisme d'un voisinage  $U$  de  $p \in \mathbb{P}^2$  sur un voisinage  $V$  de  $f(p) \in \mathbb{P}^2$  alors

$$f_{\#}(e_p) = e_{f(p)}.$$

Sinon, quitte à éclater des points-base de  $f$  et des points-base de  $f^{-1}$ , il existe un point  $q$  sur une surface dominant  $\mathbb{P}^2$  tel que l'application induite par  $f$  envoie  $p$  sur  $q$  et est un isomorphisme local entre des voisinages de  $p$  et de  $q$  et donc

$$f_{\#}(e_p) = e_q.$$

Considérons une classe  $c$  de l'espace de Picard-Manin  $\mathcal{Z}$  :

$$c = n\ell - \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i e_{p_i} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \text{supp}(f)}} \lambda_p e_p.$$

L'action de  $f$  sur une classe  $c$  de l'espace de Picard-Manin s'obtient par linéarité.

$$\begin{aligned} f_{\#}(c) &= n \left( d\ell - \sum_{i=0}^{r-1} m'_i e_{q_i} \right) - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \left( m_j \ell - \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,j} e_{q_i} \right) - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \text{supp}(f)}} \lambda_p f_{\#}(e_p) \\ &= \left( nd - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j m_j \right) \ell - \sum_{i=0}^{r-1} \left( nm'_i - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j a_{i,j} \right) e_{q_i} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \text{supp}(f)}} \lambda_p f_{\#}(e_p). \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Remarquons que la partie supportée par les points-base de  $f^{-1}$ , s'obtient en appliquant la matrice caractéristique de  $f$  au vecteur  ${}^t(n, \lambda_0, \dots, \lambda_{r-1})$  qui correspond à la troncature de  $c$  dans la base composée de  $\ell$  et des points-base de  $f$ .

### Espace hyperbolique de dimension infinie dans l'espace de Picard-Manin

À présent, considérons l'espace

$$\mathbb{H}^\infty(S) = \{c \in \mathcal{Z}(S) \mid c \cdot c = 1 \text{ et } c \cdot d_0 > 0\},$$

où  $d_0 \in N^1(S)$  est une classe ample. Muni de la distance définie par  $d(c, c') = \operatorname{argcosh}(c \cdot c')$  pour tous  $c, c' \in \mathbb{H}^\infty(S)$ , c'est un espace hyperbolique de dimension infinie comme ceux introduits dans la section 1.2.2. Nous nous intéressons plus particulièrement à  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{P}^2)$  que nous notons  $\mathbb{H}^\infty$ . Tout élément de  $\mathbb{H}^\infty$  est de la forme  $n\ell + \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p$  où  $n > 0$  et  $n^2 - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p^2 = 1$ . Comme le groupe de Cremona agit sur l'espace de Picard-Manin et que l'action préserve la forme d'intersection, pour montrer que le groupe de Cremona agit sur  $\mathbb{H}^\infty$ , il suffit de montrer que  $f_\#(c) \cdot \ell > 0$ . Comme  $f_\#^{-1}(\ell) \in \mathbb{H}^\infty$  et que le nombre d'intersection entre deux classes est supérieur ou égal à 1, nous avons comme attendu :

$$f_\#(c) \cdot \ell = c \cdot f_\#^{-1}(\ell) \geq 1.$$

## 1.3 Propriétés des applications du groupe de Cremona

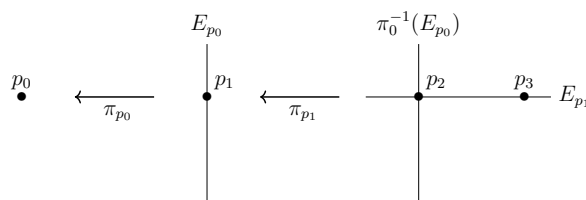
Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés que vérifient les points-base et les multiplicités des applications du groupe de Cremona. Pour cela, nous introduisons dans un premier temps un vocabulaire général utile pour les points-base d'une application, mais pas seulement. Enfin, nous nous concentrons sur les applications de Jonquières.

### Vocabulaire

Soient  $\pi : S' \rightarrow S$  une composée d'éclatements, avec  $p$  l'un des points éclatés dans cette suite, et  $E_p$  la transformée stricte sur  $S'$  du diviseur exceptionnel obtenu en éclatant le point  $p$ . Tout point  $q$  de  $S'$  et appartenant à  $E_p$  est dit *adhérent* à  $p$ . Nous notons cette relation  $q \rightarrow p$ . Plus généralement, tout point  $q$  de  $S'$  et appartenant à la transformée totale  $\pi^*(E_p)$  de  $E_p$ , est dit *voisin* de  $p$ . Considérons un ensemble  $P$  de points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ . Nous disons qu'il est *pré-consistant* si tous ses points vivent sur une surface obtenue en éclatant uniquement des points de  $P$  à partir de  $\mathbb{P}^2$ . Tout point de cet ensemble qui est adhérent à un seul point de  $P$  est dit *libre* contrairement à un point adhérent à deux points distincts de  $P$  qui est appelé *satellite*. Ces deux dernières définitions sont relatives à la donnée d'un ensemble pré-consistant de points.

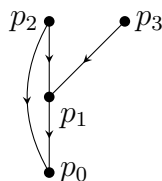
Remarquons qu'un point peut être adhérent à au plus deux points. Un point adhérent et libre est habituellement appelé voisin du premier ordre, mais nous n'utilisons pas cette terminologie. Nous disons qu'une suite pré-consistante de points forme une *tour* si chaque point de la suite est adhérent au point précédent.

*Exemple 1.3.1.* Soit  $p_0$  un point de  $\mathbb{P}^2$ . Éclatons-le. Notons  $p_1$  un point sur le diviseur exceptionnel  $E_{p_0}$  obtenu en éclatant le point  $p_0$ . Éclatons le point  $p_1$ . Considérons deux points distincts  $p_2$  et  $p_3$  sur le diviseur exceptionnel  $E_{p_1}$  tel que  $p_2$  appartienne également à la transformée stricte de  $E_{p_0}$ .



L'ensemble des points  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  est pré-consistant. Les points  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont voisins de  $p_0$ . Le point  $p_1$  est un point libre adhérent à  $p_0$  alors que le point  $p_2$  est satellite et adhérent aux points  $p_0$  et  $p_1$ . Le point  $p_3$  est libre non adhérent à  $p_0$  et il est adhérent à  $p_1$ .

Pour plus de facilité, nous représentons ce genre de situation par un graphe où les sommets sont les points. Et il y a une flèche orientée entre deux sommets si celui du dessus est adhérent à celui du dessous. Ainsi la situation précédente se réécrit :



Trois points ou plus sont dits *alignés* s'ils appartiennent à une droite de  $\mathbb{P}^2$  ou à la transformée stricte d'une droite de  $\mathbb{P}^2$ .

Une *suite pondérée* est la donnée de points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  où chacun est muni d'une multiplicité réelle positive. Soit  $p$  un point d'une suite pondérée  $P$ . La différence entre la multiplicité  $m_p$ , associée au point  $p$ , et la somme des multiplicités des points de  $P$  adhérents à  $p$  est appelée *l'excès* du point  $p$  :

$$m_p - \sum_{\substack{q \in P \\ q \rightarrow p}} m_q.$$

Une suite pondérée est dite *consistante* si l'excès en tout point de cet ensemble est positif. Remarquons qu'une suite de points est pré-consistante s'il est possible de pondérer tous les points de cet ensemble de façon strictement positive de sorte que si nous associons à tout autre point de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  une multiplicité nulle alors l'excès en tous les points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  est positif ou nul.

*Exemple 1.3.2.* Si nous reprenons l'exemple précédent 1.3.1, l'ensemble des points  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  est pré-consistant car ils peuvent être respectivement pondérés par 3, 2, 1, 1 et alors tous les points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  ont un excès positif ou nul. Par contre les points  $p_0, p_2, p_3$  ne forment pas un ensemble de points pré-consistant. En effet, quelque soit le choix de multiplicité associé aux points  $p_2$  et  $p_3$  l'excès au point  $p_1$  est toujours strictement négatif.

### 1.3.1 Propriété des points-base et de leur multiplicité

Cette partie regroupe plusieurs résultats de base qui seront utilisés tout au long de la thèse. Les relations suivantes sont obtenues à partir de simples calculs d'intersection. La plupart d'entre elles sont connues et peuvent par exemple se trouver dans [AC02].

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Notons  $(d; m_0, \dots, m_{r-1})$  la caractéristique de  $f$ ,  $(d; m'_0, \dots, m'_{r-1})$  celle de  $f^{-1}$  et  $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq r-1}$  les coefficients de la sous-matrice de la matrice caractéristique ne contenant pas la première ligne et la première colonne. Nous avons les relations :*

$$1) \sum_{i=0}^{r-1} m_i = 3d - 3.$$

$$2) \sum_{i=0}^{r-1} m_i^2 = d^2 - 1.$$

$$3) \text{ Pour tout } 0 \leq i \leq r-1, m_i \leq d-1.$$

$$4) \text{ Si } m_0 = d-1 \text{ alors } f \text{ est une application de caractéristique Jonquières.}$$

$$5) \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,j} = 3m_j - 1.$$

$$6) \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,j}^2 = m_j^2 + 1.$$

$$7) \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,j} a_{i,k} = m_j m_k.$$

$$8) \sum_{i=0}^{r-1} m'_i a_{i,j} = dm_j.$$

*Remarque.* Les équations 1) et 2) sont souvent appelées « équations de Noether ». Une façon d'énoncer la seconde égalité est de dire que le système linéaire associé à  $f$  est homaloïdal, c'est-à-dire que deux courbes de ce système ont un unique point d'intersection hors des points-base.

*Démonstration.* Les égalités 1) et 5) s'obtiennent respectivement en intersectant la forme canonique contre  $f_{\#}^{-1}(\ell)$  et  $\ell$  puis contre  $f_{\#}(e_{p_j})$  et  $e_{p_j}$  et en utilisant la remarque 1.2.11. Auto-intersecter  $f_{\#}^{-1}(\ell)$  et  $f_{\#}(e_{p_j})$ , puis intersecter  $f_{\#}(e_{p_j})$  contre  $f_{\#}(e_{p_k})$  et  $f_{\#}(e_{p_j})$  contre  $f_{\#}(\ell)$  nous donne respectivement 2), 6), 7) et 8). Le point 3) découle de 2). Étudions le point 4). Si  $m_0 = d - 1$  alors en utilisant les égalités 1) et 2) nous obtenons que

$$\sum_{i=1}^{r-1} m_i(m_i - 1) = 0,$$

par conséquent, les multiplicités sont toutes égales à 1. En utilisant à nouveau le point 1), nous obtenons que  $r = 2d - 1$  ce qui permet de conclure que  $f$  est de caractéristique Jonquières.  $\square$

Nous pouvons vérifier les relations précédentes sur l'exemple suivant tiré de [AC02, p.48].

*Exemple 1.3.4.* La matrice :

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice caractéristique de l'application du groupe de Cremona de degré 6 définie comme suit.

$$[x : y : z] \xrightarrow{\phi} [(x^3 - yz(y+x))(x^2 - yz)(x+y) : x^2(x^2 - yz)(x+y^2) : x^3(x^3 - yz(x+y))].$$

La preuve du lemme suivant est une application directe des relations de Noether vues dans le lemme 1.3.3.

**Lemme 1.3.5.** *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$  et admettant  $r$  points-base.*

1) *Si  $d \geq 4$  alors  $r \geq 6$ .*

2) *Si  $r \leq 8$  alors  $d \leq 17$ .*

*Démonstration.* Soient  $\{m_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  les multiplicités des points-base de  $f$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left( \sum_{i=0}^{r-1} m_i \right)^2 \leq r \sum_{i=0}^{r-1} m_i^2.$$

Ainsi d'après les équations de Noether 1) et 2) du lemme 1.3.3, nous obtenons :

$$9(d-1)^2 \leq r(d^2-1),$$

qui implique en simplifiant par le facteur  $d-1$

$$9(d-1) \leq r(d+1).$$

Comme la suite  $u_d = \frac{9(d-1)}{d+1}$  est croissante, si  $d \geq 4$  alors

$$5 < u_4 \leq u_d \leq r$$

et  $f$  a donc au moins six points-base.

Si  $r \leq 8$  alors  $9(d-1) \leq 8d+8$  qui nous donne  $d \leq 17$  comme attendu.  $\square$

Une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est dite *symétrique* si elle est de degré strictement supérieur à 1 et si toutes ses multiplicités sont égales.

**Lemme 1.3.6.** *La caractéristique d'une application symétrique  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est forcément de l'une des formes suivantes :  $(2; 1^3)$ ,  $(5; 2^6)$ ,  $(8; 3^7)$  ou  $(17; 6^8)$ . En particulier, la multiplicité  $m$  des points-base de  $f$  est liée au degré  $d$  par la relation*

$$m = \frac{d+1}{3}.$$

La preuve est tirée de [AC02, Lemma 2.5.5] et découle également des relations du lemme 1.3.3.

*Démonstration.* Soit  $f$  une application symétrique de degré  $d > 1$  ayant  $r$  points-base de multiplicité  $m$ . En utilisant les égalités 1) et 2) du lemme 1.3.3 nous obtenons :

$$\begin{cases} rm = 3d - 3 \\ rm^2 = d^2 - 1 \end{cases} .$$

En multipliant par  $m$  la première égalité et en la soustrayant par la seconde nous obtenons :

$$3m(d - 1) = d^2 - 1 = (d + 1)(d - 1)$$

ce qui implique que  $m = \frac{d+1}{3}$ . En remplaçant  $d$  par  $3m - 1$  dans la première équation et en divisant par  $m$  nous avons finalement :

$$r = \frac{9m - 6}{m} = 9 - \frac{6}{m},$$

ce qui implique que  $m \in \{1, 2, 3, 6\}$  comme attendu.  $\square$

*Remarque 1.3.7.* Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$ . La somme des trois plus grandes multiplicités de ses points-base est supérieure ou égale à  $d + 1$ . En fait, il y a égalité si et seulement si  $f$  est une application symétrique ou de caractéristique Jonquières. Cela s'obtient en utilisant uniquement les égalités 1) et 2) du lemme 1.3.3.

**Proposition 1.3.8** (Théorème de Clebsch). *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Il existe une bijection  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le nombre de points-base de  $f$  de multiplicité  $n$  est égal au nombre de points-base de  $f^{-1}$  de multiplicité  $\beta(n)$ .*

Une preuve complète se trouve dans ([AC02, Theorem 3.3.2]).

*Démonstration.* Nous ne faisons pas la preuve en entier, mais nous donnons l'argument principal. Montrons que si deux points-base de  $f$  ont même multiplicité alors il existe une unique paire de points-base de  $f^{-1}$  ayant même multiplicité. Soient  $p$  et  $p'$  deux points-base de  $f$  de même multiplicité  $m_p = m_{p'}$ . En conservant les mêmes notations, les égalités 6), 7) et 8) du lemme 1.3.3 nous donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,p}^2 &= m_p^2 + 1 \\ \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,p} a_{i,p'} &= m_p m_{p'} = m_p^2 \\ \sum_{i=0}^{r-1} m'_i a_{i,p} &= d m_p. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la troisième équation, une fois pour le point  $p$  et l'autre fois pour  $p'$ , nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{r-1} m'_i (a_{i,p} - a_{i,p'}) = 0. \quad (1.3.9)$$

Ensuite, à l'aide des deux premières équations ci-dessus, nous arrivons à l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{r-1} (a_{i,p} - a_{i,p'})^2 = \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,p}^2 + \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,p'}^2 - 2 \sum_{i=0}^{r-1} a_{i,p} a_{i,p'} = 2.$$

Par conséquent il existe une unique paire d'entiers  $i_1, i_2 \in \{0, \dots, r-1\}$  tels que

$$\begin{cases} a_{i,p} - a_{i,p'} = \pm 1 & \text{si } i \in \{i_1, i_2\} \\ a_{i,p} - a_{i,p'} = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En intégrant cela dans l'équation 1.3.9 et en utilisant le fait que les multiplicités  $m'_i$  des points-base de  $f^{-1}$  sont strictement positives nous avons finalement :

$$m'_{i_1} = m'_{i_2},$$

comme annoncé. □

Par conséquent, une application symétrique possède un inverse lui aussi symétrique. Quitte à composer à droite ou à gauche par un automorphisme, les applications symétriques de degré 8 et 17 sont des involutions appelées respectivement Bertini et Geiser. En utilisant le théorème de Clebsch ainsi que le lemme 1.3.3.1), nous obtenons que les applications de caractéristiques Jonquières possèdent un inverse qui est aussi de caractéristique Jonquières.

Le premier exemple où la bijection  $\beta$  de Clebsch n'est pas l'identité arrive en degré 6 avec l'exemple 1.3.4. La caractéristique de  $\phi$  est  $(6; 4, 2^4, 1)$  et celle de son inverse est  $(6; 3^3, 2, 1^4)$ .

**Proposition 1.3.10** (Positivité des excès). *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  les excès des points-base de  $f$  sont tous positifs :*

$$\text{pour tout } p \in \text{Bs}(f), \quad m_p \geq \sum_{\substack{q \in \text{Bs}(f) \\ q \rightarrow p}} m_q.$$

*Démonstration.* Nous avons vu que la multiplicité  $m_p$  d'un point-base  $p$  de  $f$  correspond à la multiplicité au point  $p$  des courbes du système linéaire associé à  $f$ . Considérons une courbe  $C$  générale de ce système linéaire. D'après [Sha94, p.252],



la multiplicité de  $C$  au point  $p$ , notée  $m_p(C)$  est supérieure ou égale à la somme des multiplicités de cette courbe aux points adhérents à  $p$ . Par conséquent, nous avons l'égalité attendue :

$$m_p = m_p(C) \geq \sum_{\substack{q \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ q \rightarrow p}} m_q(C) \geq \sum_{\substack{q \in \text{Bs}(f) \\ q \rightarrow p}} m_q. \quad \square$$

**Proposition 1.3.11** (Bézout). *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$  dont les points-base sont les points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  de multiplicité respective  $\{m_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$ . Pour toute courbe  $C'$  de degré  $d'$  passant par les points  $p_i$  avec multiplicité  $\mu_i$  nous avons :*

$$dd' - \sum_{i=0}^{r-1} m_i \mu_i \geq 0.$$

*Démonstration.* Notons  $S$  la surface de résolution de  $f$  et  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  la composée des éclatements des points-base de  $f$ . Considérons une courbe  $C$  du système linéaire associé à  $f$ , différente de  $C'$  si cette dernière appartient au système linéaire. C'est toujours possible puisque le système linéaire ne possède pas de composante fixe. Par conséquent, les transformées strictes  $\pi^{-1}(C)$  et  $\pi^{-1}(C')$  de  $C$  et  $C'$  par  $\pi$  ont une intersection positive. D'après la proposition 1.1.5 et la stabilité du nombre d'intersection par tiré en arrière, nous avons :

$$dd' - \sum_{i=0}^{r-1} m_i \mu_i = \pi^*(C) \cdot \pi^*(C') - \sum_{i=0}^r m_i \mu_i = \pi^{-1}(C) \cdot \pi^{-1}(C') \geq 0. \quad \square$$

*Remarque 1.3.12.* Une application de caractéristique Jonquières de degré  $d$  et de point-base de multiplicité maximale  $p_0$ , ne possède pas deux points-base adhérents à un même troisième point-base différent de  $p_0$  sinon cela contredirait la positivité des excès (Proposition 1.3.10) en ce point puisque sa caractéristique est  $(d; d-1, 1^{2d-2})$ . De plus, par le même argument, il y a au plus  $d-1$  points adhérents au point de multiplicité maximale. Par la proposition 1.3.11, deux points de multiplicité 1 ne peuvent pas être alignés avec le point de multiplicité maximale.

Un ensemble de points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  est dit *en position presque générale* s'il est pré-consistant et qu'aucune des situations suivantes n'est satisfaite :

- quatre des points de cet ensemble sont alignés,
- sept des points de cet ensemble sont sur une conique,
- deux des points de cet ensemble sont adhérents à un troisième point.

C'est en fait une terminologie utilisée par Dolgachev [Dol12, p.397]. Cependant, comme il s'intéresse aux surfaces del Pezzo, il impose en plus le fait qu'il y ait au plus 8 points. Une surface  $S$  est *faiblement del Pezzo* si son diviseur canonique est numériquement effectif et big, c'est à dire que pour toute courbe  $C$  de  $S$  le nombre d'intersection entre la courbe  $C$  et le diviseur canonique est positif ou nul, et que ce dernier est d'auto-intersection strictement positive :

$$C \cdot K_S \geq 0 \text{ et } K_S^2 > 0.$$

**Proposition 1.3.13** ([Dol12, Corollary 8.1.17]). *Une surface rationnelle est faiblement del Pezzo si et seulement si elle a été obtenue en éclatant  $k \leq 8$  points de  $\mathbb{P}^2$  en position presque générale.*

**Lemme 1.3.14.** *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  une application ayant au plus 8 points-base. Les points-base de  $f$  sont en position presque générale si et seulement si les points-base de  $f^{-1}$  le sont.*

*Démonstration.* D'après la proposition 1.3.13, une surface est faiblement del Pezzo si et seulement si la suite de points éclatés satisfait les conditions du lemme. La surface obtenue en éclatant les points-base de  $f$  et de  $f^{-1}$  étant la même nous obtenons le résultat.  $\square$

### 1.3.2 Applications de Jonquière et de caractéristique Jonquière

Rappelons qu'une application de Jonquière est une application birationnelle préservant un pinceau de droites. Soient  $j$  une telle application de degré  $d > 1$  et  $p_0$  le point-base de son pinceau. Considérons  $\ell$  la classe de Picard-Manin d'une droite générale et  $\ell - e_{p_0}$  celle d'une droite du pinceau. Comme l'action du groupe de Cremona préserve le nombre d'intersection nous avons :

$$1 = j_{\#}(\ell) \cdot j_{\#}(\ell - e_{p_0}) = (d\ell - \sum_{p \in \text{Bs}(j^{-1})} m'_p e_p) \cdot (\ell - e_{p_0}).$$

Par conséquent  $p_0$  est un point-base de  $j^{-1}$  de multiplicité  $d - 1$ . En faisant le même raisonnement pour  $j^{-1}$  nous obtenons le même résultat sur  $j$ . Ainsi d'après le point 4) du lemme 1.3.3,  $j$  est de caractéristique Jonquière et possède  $2d - 2$  points de multiplicités 1. Ceci justifie la terminologie de « caractéristique Jonquière ». En fait, une application de caractéristique Jonquière qui n'est pas une application de

Jonquière envoie un pinceau de droites sur un autre pinceau de droites. Le point-base de multiplicité  $d - 1$  est appelé *point-base maximal* de  $j$ , les autres sont appelés *petits points-base* de  $j$ .

La matrice caractéristique d'une application de caractéristique Jonquière est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d & d-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -(d-1) & -(d-2) & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en notant  $p_0$  et  $q_0$  les points-base maximaux respectifs de  $j$  et  $j^{-1}$  et  $p_1, \dots, p_{2d-2}$  et  $q_1, \dots, q_{2d-2}$  les petits points-base respectifs de  $j$  et  $j^{-1}$ , nous avons :

$$\begin{cases} j_{\#}(\ell) = d\ell - (d-1)e_{q_0} - \sum_{i=1}^{2d-2} e_{q_i} \\ j_{\#}(e_{p_0}) = (d-1)\ell - (d-2)e_{q_0} - \sum_{i=1}^{2d-2} e_{q_i} \\ j_{\#}(e_{p_i}) = \ell - e_{q_0} - e_{q_i} \text{ pour } 1 \leq i \leq 2d-2 \end{cases}. \quad (1.3.15)$$

### Générateurs du groupe de Cremona

Soient  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  et  $p_0$  un de ses points de multiplicité maximale  $m_0$ . En suivant la terminologie de [AC02], nous appelons *complexité* de  $f$  le nombre

$$c_f = \frac{d - m_0}{2}.$$

Un point-base  $p$  de  $f$  différent de  $p_0$  est dit *majeur* si sa multiplicité  $m_p$  est strictement supérieure à la complexité de  $f$  :

$$m_p > \frac{d - m_0}{2}.$$

Remarquons que si  $f$  possède plusieurs points de multiplicité maximale, si nous changeons le choix du point maximal, la complexité de  $f$  reste identique ainsi que le nombre de points-base majeurs. Nous notons  $\text{Maj}(f)$  cet ensemble et  $h$  son cardinal.

L'involution standard de Cremona (Exemple 1.1.1) est un exemple d'application qui appartient au groupe de Jonquière. Elle a une importance particulière dans le groupe de Cremona, puisque comme le corps de base est algébriquement clos elle engendre avec le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  tout le groupe. Le théorème qui suit n'est plus valable si le corps de base n'est pas algébriquement clos.

**Théorème 1.3.16** (M. Noether et G. Castelnuovo). *Le groupe de Cremona  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est engendré par  $\sigma$  et  $\text{PGL}(3, k)$ .*

M. Noether fut le premier à énoncer ce théorème à la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Cependant, la première preuve exacte est due à G. Castelnuovo. L'idée de « la preuve » de M. Noether est la suivante. Considérons une application  $f$ . En pré-composant par une application quadratique dont les trois points-base sont trois points-base de  $f$  de plus grande multiplicité, le degré de  $f$  diminue. En répétant ce procédé le degré devient 1 et la composée est une application linéaire. Cependant il n'existe pas toujours une telle application quadratique. En effet, une application quadratique ne peut pas avoir deux de ses points-base adhérents au troisième (Remarque 1.3.12). Or il est possible que les points-base de multiplicité maximale d'une application soit dans cette configuration. C'est le cas notamment des automorphismes polynomiaux, comme par exemple  $(x, y) \mapsto (y^3 - x, y)$ . Ce problème n'avait pas été vu par M. Noether car le formalisme des points adhérents n'existait pas. Dans [Ale16], J. Alexander corrige la preuve de M. Noether en introduisant la complexité d'une application. S'il existe une application quadratique dont les points-base sont le point-base maximal de  $f$  et deux points-base majeurs alors la complexité diminue strictement. Sinon, il faut utiliser un troisième point qui vit dans  $\mathbb{P}^2$ . Dans ce cas, la complexité reste identique mais le nombre de points-base majeurs diminue. La récurrence se fait sur ces deux entiers positifs.

Une conséquence de ce théorème est que la réunion du groupe de Jonquières et du groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  est également un système de générateurs du groupe de Cremona. Ce résultat est plus faible mais parfois plus maniable. Il a également l'avantage de pouvoir décomposer une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  en produit de transformations de Jonquières de sorte que le degré augmente à chaque pré-composition.

**Théorème 1.3.17** ([AC02, Theorem 8.3.4]). *Toute application de Cremona  $f$  est composée d'applications de Jonquières  $j_i$  et d'un élément  $a \in \text{PGL}(3, k)$  :*

$$f = a \circ j_n \circ \cdots \circ j_1,$$

*de sorte qu'à chaque pré-composition par une application de Jonquières le degré augmente strictement, pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$  :*

$$\deg(a \circ j_n \circ \cdots \circ j_{i+1} \circ j_i) > \deg(a \circ j_n \cdots \circ j_{i+1}).$$

Dans [AC02, Theorem 8.3.4], M. Alberich-Carramiñana n'énonce pas la seconde partie du théorème, qu'elle démontre pourtant. Il est facile de voir qu'en pré-composant

$f$  par une application de Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal le point-base de  $f$  de multiplicité maximale, et ses petits points-base sont parmi les points-base majeurs de  $f$ , alors le degré diminue strictement. La partie difficile est de montrer qu'il existe une telle application de Jonquières  $j$ . Elle montre que c'est le cas si les petits points-base de  $j^{-1}$  sont choisis comme étant tous les points-base majeurs de  $f$ , à l'exception d'un lorsque le cardinal des points-base majeurs de  $f$  est impair. L'algorithme qu'elle utilise et qui est dû à G. Castelnuovo consiste à considérer une telle application de Jonquières  $j_1$ . Puis elle considère  $f \circ j_1^{-1}$  et réitère le procédé jusqu'à obtenir un automorphisme.

J. Blanc et J-P Furter montrent dans un travail en cours ([BF17]) qu'en faisant cet algorithme nous obtenons le nombre minimal de Jonquières possible pour décomposer une application du groupe de Cremona. Ils introduisent la *longueur* d'une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . C'est le plus petit entier  $n$  tel que  $f$  soit la composée de  $n$  applications de Jonquières  $\{j_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et d'un automorphisme  $a$  :

$$f = a \circ j_n \circ \cdots \circ j_1.$$

Une définition équivalente pour une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  qui n'est pas un automorphisme est que la longueur de  $f$  est le nombre minimal d'applications de caractéristiques Jonquières qu'il faut pour écrire  $f$ . Dans leur article, ils utilisent le terme « Jonquières généralisées » à la place d'applications « de caractéristique Jonquières ». Ils construisent un algorithme légèrement différent et obtiennent le résultat suivant.

**Proposition 1.3.18** ([BF17]). *Pour toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , il existe une décomposition minimale en applications de caractéristique Jonquières :*

$$f = a \circ j_n \circ \cdots \circ j_1$$

telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$  les points-base de  $j_i$  sont inclus dans les points-base de  $f \circ j_1^{-1} \circ \cdots \circ j_{i-1}^{-1}$ .

Comme conséquence, ils annoncent le résultat suivant dans le cas où une application  $f$  est un twist de Halphen, c'est-à-dire si  $f$  préserve un pinceau de courbes elliptiques et n'est ni d'ordre fini ni conjugué à un élément de  $\text{PGL}(3, k)$ .

**Corollaire 1.3.19.** *Si  $f$  est un twist de Halphen, il est possible d'obtenir une décomposition minimale en applications de caractéristiques Jonquières qui sont également des twists de Halphen.*

Ce dernier résultat est une communication orale et n'est encore écrit nulle part. À noter que j'ai essayé de trouver un autre argument sans succès pour l'instant et que par conséquent la non-hyperbolicité du graphe de Wright repose sur ce corollaire.

### Support d'une transformation de Jonquières

Dans cette partie, nous déterminons dans un cas très spécial, celui où il existe au moins un point adhérent à un autre point, à quelles conditions un ensemble pré-consistant de points de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  est le support d'une application de Jonquières. La preuve proposée ici est plus simple que celle présentée dans [AC02], mais elle ne traite que d'un cas particulier. Le problème dans le cas général est de faire attention au fait que les points-base ne doivent pas se trouver sur une courbe de sorte qu'en éclatant les points et en contractant les fibres, la courbe devienne d'auto-intersection strictement plus petite que  $-1$ . Par exemple, trois points alignés ne forment pas le support d'une quadratique.

**Lemme 1.3.20.** *Soient  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  et  $p$  un de ses points-base de multiplicité maximale. Parmi les points-base majeurs de  $f$ , le nombre de points-base adhérents à  $p$  est inférieur ou égal au nombre de points-base non adhérents à  $p$ .*

*Démonstration.* Nous reprenons lors des deux premiers points des calculs connus et faits par exemple dans la Section 8.2 de [AC02, Lemma 8.2.3 et 8.2.6]. Notons  $r$  le nombre de points-base de  $f$  et  $h$  le nombre de points-base majeurs de  $f$ .

• D'après le théorème de Bézout (Proposition 1.3.11), nous avons  $d \geq m_i + m_0$  pour tout  $1 \leq i \leq r - 1$ , ce qui implique :

$$2c_f \geq m_i.$$

• Multiplions par  $c_f$  l'équation 1) du lemme 1.3.3 et soustrayons cela à l'équation 2) du même lemme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} m_i(m_i - c_f) &= d^2 - 1 - 3dc_f + 3c_f \\ &= d(d - 3c_f) + 3c_f - 1 \\ &= (m_0 + 2c_f)(m_0 - c_f) + 3c_f - 1, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\sum_{i=1}^{r-1} m_i(m_i - c_f) = 2c_f(m_0 - c_f) + 3c_f - 1.$$

Comme pour  $i > h$  les points ne sont pas majeurs nous avons

$$\sum_{i=1}^h m_i(m_i - c_f) > 2c_f(m_0 - c_f),$$

ce qui donne finalement par le premier point

$$\sum_{i=1}^h (m_i - c_f) > m_0 - c_f .$$

• Notons  $h_a$  le nombre de points-base de  $f$  majeurs et adhérents à  $p_0$ . Quitte à réordonner les indices, l'équation précédente se ré-écrit :

$$\sum_{i=1}^{h_a} m_i + \sum_{i=h_a+1}^h m_i > m_0 + (h - 1) c_f .$$

Par positivité des excès en  $p_0$  pour  $f$  (Proposition 1.3.10) et par le premier point de la preuve :

$$m_0 + (h - h_a) 2 c_f > m_0 + (h - 1) c_f$$

ce qui entraîne :

$$2(h - h_a) \geq h .$$

Par conséquent  $\frac{h}{2} \geq h_a$  ce qui signifie qu'il y a au plus autant de points-base majeurs adhérents à  $p_0$  que de points-base majeurs non adhérents.  $\square$

**Lemme 1.3.21.** *Considérons un ensemble pré-consistant de points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq 2\delta}$  de  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  satisfaisant*

- a) *exactement  $\delta$  points sont adhérents à  $p_0$ ,*
- b) *pour toute paire  $(i, j)$  où  $1 \leq i < j \leq 2\delta$ , les points  $p_i, p_j$  et  $p_0$  ne sont pas alignés,*
- c) *si deux points de cet ensemble sont adhérents à un même troisième point  $p_i$  de cet ensemble alors  $i = 0$ .*

*Alors il existe une application de Jonquières de degré  $\delta + 1$  qui possède cet ensemble comme points-base et dont  $p_0$  est le point-base majeur.*

*Démonstration.* Lorsque nous éclatons le point  $p_0$ , il n'y a pas deux points sur une même fibre d'après la condition b). Nous éclatons ensuite les  $\delta$  points adhérents, et nous contractons les transformées strictes des fibres correspondantes. Par la condition c), il n'y a toujours pas deux points sur une même fibre. La surface obtenue est une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_{\delta+1}$  de section exceptionnelle d'auto-intersection  $-(\delta+1)$ . Ensuite, nous éclatons un point non adhérent puis contractons la fibre passant par ce

point. En faisant cela, nous obtenons la surface de Hirzebruch dont la section exceptionnelle est d'auto-intersection un de plus par rapport à la surface précédente et il n'y a toujours pas deux points sur une même fibre. Ainsi en répétant cette opération pour les  $\delta$  points non adhérents nous obtenons une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_1$  et en contractant la section exceptionnelle nous obtenons une application de Jonquières de degré  $\delta + 1$ .  $\square$

**Proposition 1.3.22.** *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  possédant un point-base majeur adhérent à son (ou à un des ses) point-base maximal  $p_0$ . Pour tout sous-ensemble de l'ensemble des points-base majeurs de  $f$ , pré-consistant, de cardinal pair  $2\delta$  et possédant un nombre de points adhérents à  $p_0$  égal à  $\delta$ , il existe une application de Jonquières de degré  $\delta + 1$  ayant  $p_0$  comme point-base maximal et cet ensemble de points comme autres points-base. De plus, un tel sous-ensemble existe toujours.*

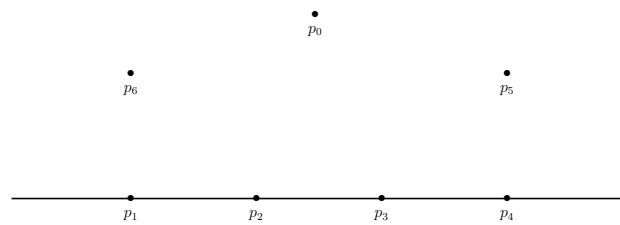
*Démonstration.* Nous cherchons à utiliser le lemme 1.3.21. Pour cela, plusieurs points sont à vérifier :

- L'hypothèse sur  $f$  et le lemme 1.3.20 justifient le fait qu'il existe un sous-ensemble de l'ensemble des points-base majeurs de  $f$  qui possède autant de points adhérents à  $p_0$  que de points non adhérents.
- D'après le théorème de Bézout 1.3.11, il n'existe pas deux points majeurs alignés avec le point  $p_0$ .
- Il n'y a pas deux points majeurs adhérents à un point majeur. Sinon, par la proposition 1.3.10, il existerait un point majeur  $p_1$  de multiplicité  $m_1 > d - m_0$ . Mais dans ce cas, il y aurait un point  $q$  libre et adhérent à  $p_0$  (si  $p_1$  est voisin de  $p_0$ ) ou dans  $\mathbb{P}^2$  qui serait de multiplicité strictement supérieure à  $d - m_0$ . Ceci contredit le théorème de Bézout (proposition 1.3.11) en considérant la droite passant par les points  $p_0$  et  $q$ .

Ainsi, d'après le lemme 1.3.21, il existe une application de Jonquières de degré  $\delta + 1$  ayant  $p_0$  comme point-base de multiplicité maximal et possédant cet ensemble comme petits points-base.  $\square$

*Remarque 1.3.23.* Sans la condition qu'il y ait autant de points adhérents à  $p_0$  que de points non adhérents ce n'est pas possible de conclure. En effet, considérons les points  $\{p_0, \dots, p_6\}$  de  $\mathbb{P}^2$  tels qu'il n'y ait pas deux points alignés avec  $p_0$ , que les points  $p_1, \dots, p_4$  soient alignés et que les points  $p_5$  et  $p_6$  n'appartiennent pas à la droite contenant les points  $p_1, \dots, p_4$ .





Ils constituent le support d'une application de Jonquières de degré 4 et de point-base maximal  $p_0$ . Mais si nous considérons seulement les points  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4$  ils ne forment plus le support d'une application de Jonquières. En effet, si nous éclatons les points  $p_0$  et  $p_1$  et que nous contractons la droite passant pas ces deux points, nous nous retrouvons sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . En éclatant ensuite le point  $p_2$ , nous nous retrouvons sur  $\mathbb{F}_1$  mais les deux points restants sont sur la section exceptionnelle.



# Chapitre 2

## Non-simplicité du groupe de Cremona, sur tout corps

### 2.1 Introduction

Une question importante lors de l'étude d'un groupe est de savoir s'il est simple ou non, et dans ce dernier cas de construire des sous-groupes distingués. Ces questions se sont posées dès la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ . Cependant, il a fallu attendre 2013 pour que S. Cantat et S. Lamy [CL13] y répondent dans le cas où  $k$  est un corps algébriquement clos.

La stratégie de S. Cantat et S. Lamy est de faire agir, par isométries, le groupe de Cremona sur le sous-espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  de l'espace de Picard-Manin introduit à la sous-section 1.2.3. Ils obtiennent ainsi de nombreux sous-groupes distingués. Leur article est constitué de deux parties. Dans la première partie, ils définissent la notion d'élément tendu (« tight element » en anglais) que nous énonçons dans le cas particulier du groupe de Cremona, de la manière suivante : un élément  $g$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  est tendu si l'isométrie correspondant à  $g$  est hyperbolique et vérifie deux conditions. La première est que son axe soit rigide, c'est-à-dire si l'axe d'un conjugué de  $g$  est proche de l'axe de  $g$  sur une distance suffisamment grande alors les deux axes sont confondus. La seconde condition est que le stabilisateur de l'axe de  $g$  soit le normalisateur du groupe  $\langle g \rangle$ . Plus précisément, l'élément hyperbolique  $g$  doit vérifier :

- Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C \geq 0$  tel que si un élément  $f$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  satisfait l'inégalité  $\text{Diam}(\text{Tub}_\varepsilon(\text{Axe}(g)) \cap \text{Tub}_\varepsilon(f \text{Axe}(g))) \geq C$  alors  $f \text{Axe}(g) = \text{Axe}(g)$ , où  $\text{Tub}_\varepsilon$  signifie le voisinage tubulaire de rayon  $\varepsilon$ .

- Pour tout élément  $f$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ , si  $f \text{Axe}(g) = \text{Axe}(g)$  alors  $fgf^{-1} = g^{\pm 1}$ .

Ce critère leur permet d'établir une variante de la propriété de la petite simplification :

**Théorème 2.1.1** ([CL13]). *Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Si  $g \in \text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  est tendu alors il existe un entier  $n$  non nul tel que pour tout élément  $h$  non trivial appartenant au sous-groupe normal engendré par  $g^n$ , le degré de  $h$  vérifie  $\deg(h) \geq \deg(g^n)$ . En particulier, le sous-groupe normal  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  est propre.*

La seconde partie de leur article consiste à montrer qu'il existe des éléments tendus dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ .

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une preuve de la non simplicité du groupe de Cremona qui fonctionne pour tout corps  $k$ . Pour démontrer cela, nous n'allons pas utiliser le fait qu'un élément soit tendu mais plutôt le fait qu'il satisfasse la propriété WPD. Le lien entre la théorie de la petite simplification généralisée par F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin [DGO17] et la propriété WPD se fait au travers de deux énoncés [Gui14, Theorem 1.3 et Corollary 2.9]. Le premier nous dit que dans le groupe normal engendré par une famille vérifiant la propriété de petite simplification, les éléments ont une grande longueur de translation, et le second nous dit que lorsqu'un élément  $g$  satisfait la propriété WPD, les conjugués de  $\langle g^n \rangle$  forment une famille satisfaisant la propriété de petite simplification. En réunissant ces deux énoncés (voir également [DGO17, Theorem 5.3, Proposition 6.34]), nous obtenons le théorème :

**Théorème 2.1.2** ([DGO17]). *Soit  $C$  un nombre réel positif. Soient  $G$  un groupe agissant par isométries sur un espace  $X$  hyperbolique au sens de Gromov et  $g$  un élément hyperbolique de  $G$ . Si  $G$  agit discrètement le long de l'axe de  $g$  alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout élément  $h$  non trivial et appartenant au sous-groupe normal engendré par  $g^n$ ,  $L(h) > C$  où  $L$  est la longueur de translation. En particulier, pour  $n$  assez grand, le sous-groupe normal  $\langle\langle g^n \rangle\rangle$  de  $G$  est propre. De plus, ce sous-groupe est libre.*

Ainsi, pour montrer la non-simplicité du groupe de Cremona sur tout corps nous démontrons le théorème suivant, qui correspond au théorème B de l'introduction.

**Théorème 2.1.3.** *Soient  $n \geq 2$  et  $k$  un corps de caractéristique ne divisant pas  $n$ . Considérons l'action du groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  sur  $\mathbb{H}_k^\infty$  où  $\bar{k}$  est la clôture algébrique de  $k$ . Le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de l'application :*

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, y^n - x) \end{array} .$$

Dans son article [SB15, Corollary 7.11], N.I. Shepherd-Barron prouve que tout élément hyperbolique du groupe de Cremona sur un corps  $k$  fini engendre un sous-groupe normal propre. En particulier,  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  n'est pas simple pour tout corps  $k$  fini. Dans ce même article (Theorem 7.6), il donne un critère en terme de la longueur de translation de  $g$ , pour qu'une transformation hyperbolique  $g$  soit tendue, et donc que le sous-groupe distingué engendré par l'une de ses puissances soit propre.

**Théorème 2.1.4** ([SB15]). *Supposons que la caractéristique de  $k$  soit nulle ou que  $k$  soit de caractéristique  $p > 0$  et algébrique sur  $\mathbb{F}_p$ . Si la longueur de translation d'un élément hyperbolique  $g$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  n'est pas le logarithme d'un entier quadratique, ni de la forme  $\log p^n$  dans le cas où la caractéristique est strictement positive, alors une certaine puissance de  $g$  est tendue.*

Une hypothèse sans doute excessive est faite sur le corps dans le cas de la caractéristique positive ( $k$  doit être isomorphe à un sous-corps de  $\overline{\mathbb{F}_p}$ ), dans le but d'éviter le problème mentionné ci-dessus des transformations normalisant le sous-groupe des translations. Cependant, même si nous pouvions enlever cette hypothèse et obtenir ainsi une démonstration alternative de la non simplicité de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  sur tout corps, une telle preuve reste peu élémentaire car elle repose lourdement sur les articles [CL13] et [BC16].

Dans ce dernier article, J. Blanc et S. Cantat s'intéressent aux degrés dynamiques de toutes les applications birationnelles de surface projective. Ils prouvent notamment qu'il n'y a pas de degré dynamique dans l'intervalle  $]1, \lambda_L[$  où  $\lambda_L$  est le nombre de Lehmer (« gap property »). Ils obtiennent comme corollaire que pour tout élément hyperbolique  $g$  du groupe de Cremona, l'indice de  $\langle g \rangle$  dans son centralisateur est fini. Comme remarqué par R. Coulon [Cou16], ceci implique que si un élément est tendu alors  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de cet élément.

Dans [CL13] une relation entre l'entier  $n$  du théorème 2.1.1 et la longueur de translation de  $g$  est donnée. Une autre conséquence de la « gap property » est que l'entier  $n$  peut être choisi de façon uniforme :  $n \geq \max\{\frac{139347}{\lambda_L}, \frac{10795}{\lambda_L} + 374\}$  convient.

Dans leur article [CL13], S. Cantat et S. Lamy exhibent de deux manières différentes des éléments tendus, selon si le corps est  $\mathbb{C}$  ou un corps algébriquement clos quelconque.

Dans le cas où  $k$  est un corps algébriquement clos, ils éclatent des points particuliers de  $\mathbb{P}_k^2$  pour obtenir une surface  $S$  ayant des automorphismes de grands degrés dynamiques. Par exemple, éclater les 10 points doubles d'une sextique rationnelle donne une telle surface, dite de Coble. Si le corps n'est pas algébriquement clos, les automorphismes sont à coefficients dans la clôture algébrique mais pas dans le corps

$k$  initial, leur preuve ne s'étend donc pas dans ce cas là.

Dans le cas où le corps est  $\mathbb{C}$ , ils considèrent un élément « général » du groupe de Cremona de la forme  $g = a \circ J$  où  $a \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  et  $J$  est une transformation de Jonquières, et ils montrent qu'il est tendu. Le qualificatif « général » signifie que n'importe quel élément  $a \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  convient, quitte à enlever un nombre dénombrable de fermés de Zariski propres dans  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Ainsi si le corps de base est dénombrable, il se peut qu'il n'y ait pas d'application générale. C'est pourtant cette méthode que nous généralisons. En effet, dans leur preuve, il est nécessaire que  $g$  satisfasse deux conditions. La première impose aux points-base de  $g$  et de  $g^{-1}$  d'être dans  $\mathbb{P}_k^2$ . La seconde impose aux points-base des itérés de  $g$  d'être disjoints de ceux des itérés de  $g^{-1}$ . Les applications  $h_n$  que nous considérons se décomposent comme la composée d'une involution de Jonquières et de l'involution linéaire qui échange les coordonnées,  $h_n = (y, x) \circ (y^n - x, y)$ . La première condition n'est pas vérifiée car  $h_n$  et  $h_n^{-1}$  n'ont qu'un seul point-base dans  $\mathbb{P}_k^2$  mais nous verrons que ce n'est pas un problème. Concernant la seconde condition, composer par l'élément  $(y, x) \in \mathrm{PGL}_3(k)$  permet de séparer les points-base des itérés de  $h_n$  de ceux des itérés de  $h_n^{-1}$ . Ainsi cet élément particulier joue le même rôle que l'élément général  $a$  ci-dessus. La preuve présentée dans cette thèse ne repose pas sur [BC16, CL13] à l'exception du lemme 2.3.5 à la section 2.3.2 qui est une adaptation directe de [CL13, Proposition 5.7].

## 2.2 Propriété WPD dans un espace hyperbolique de dimension infinie

L'objectif de cette section est de montrer que lorsqu'un groupe agit sur un espace hyperbolique de dimension infinie, nous pouvons affaiblir les hypothèses qui assurent qu'un groupe agit discrètement le long de l'axe d'un de ses éléments.

Soit  $\mathbb{H}^\infty$  un espace hyperbolique de dimension infinie comme introduit dans 1.2.2. Introduisons à présent quelques définitions et notations. Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{H}^\infty$ , sa longueur de translation est définie par  $L(f) = \inf_{x \in \mathbb{H}^\infty} d(x, f(x))$ . Si la longueur de translation de  $f$  est strictement positive,  $f$  est dite hyperbolique. Dans ce cas, elle possède un axe invariant déterminé par les points réalisant l'infimum :

$$\mathrm{Axe}(f) := \{x \in \mathbb{H}^\infty \mid d(x, f(x)) = L(f)\}.$$

De plus,  $f$  s'étend de manière unique au bord  $\partial\mathbb{H}^\infty$ . L'isométrie hyperbolique  $f$  possède exactement deux points fixes sur  $\partial\mathbb{H}^\infty$  ; l'un répulsif noté  $b^-$ , et l'autre attractif noté  $b^+$ . Ce sont les bouts de l'axe de  $f$  que l'on oriente de  $b^-$  vers  $b^+$ . Nous

définissons ainsi une relation d'ordre sur les points de  $\text{Axe}(f)$ . Le point  $x$  est dit plus petit que  $y$ , noté  $x < y$  si  $x \in ]b^-, y]$  (et par symétrie  $y \in [x, b^+[$ ). Lorsqu'un point  $x$  est sur l'axe de  $f$  nous notons respectivement  $x - \varepsilon$  et  $x + \varepsilon$  les deux points sur  $\text{Axe}(f)$  situés à distance  $\varepsilon$  de  $x$  tels que  $x - \varepsilon < x + \varepsilon$ . Remarquons que pour tout point  $x \in \mathbb{H}^\infty$ , la suite  $(f^{\pm n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b^\pm$ .

### 2.2.1 Propriété WPD

Soit  $G$  un groupe qui agit par isométrie sur un espace métrique  $(X, d)$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$  et pour toute constante  $\varepsilon \geq 0$ , nous notons

$$\text{Fix}_\varepsilon A := \{g \in G \mid d(a, ga) \leq \varepsilon \ \forall a \in A\},$$

le fixateur à  $\varepsilon$  près de  $A$  par  $G$ . Dans la suite nous ne précisons plus que les actions considérées sont isométriques. Le lemme suivant est bien connu.

**Lemme 2.2.1.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur un espace métrique  $X$  et  $g$  un élément de  $G$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe  $y \in X$  tel que pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Fix}_\varepsilon\{y, g^N(y)\}$  soit fini.*
- 2) *Pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Fix}_\varepsilon\{x, g^N(x)\}$  soit fini.*

*Démonstration.* Soit  $y$  vérifiant le point 1). Soient  $x$  un point quelconque de  $X$  et  $\varepsilon \geq 0$ . Posons  $\varepsilon' = 2d(x, y) + \varepsilon$  et  $N$  l'entier du point 1) associé à  $\varepsilon'$ . Par l'inégalité triangulaire, nous avons l'inclusion :

$$\text{Fix}_\varepsilon\{x, g^N(x)\} \subset \text{Fix}_{\varepsilon'}\{y, g^N(y)\}.$$

Ainsi, l'ensemble  $\text{Fix}_\varepsilon\{x, g^N(x)\}$  est fini. □

Nous disons dans la situation du lemme que  $g$  *satisfait la propriété WPD* (« weak proper discontinuity »), ou encore lorsque la notion d'axe est bien définie que le groupe  $G$  *agit discrètement le long de l'axe de  $g$*  (voir [BF02] et [Cou16]).

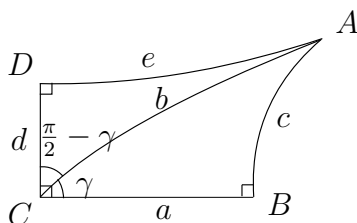
Dans les prochains paragraphes, nous introduisons la notion de « tube géodésique ». Ceci nous permet d'affaiblir les hypothèses garantissant la propriété WPD dans le contexte d'un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$ .

## 2.2.2 Quadrilatères hyperboliques

Nous rappelons ici un lemme donnant des relations trigonométriques pour des quadrilatères hyperboliques ayant trois angles droits.

**Lemme 2.2.2.** *Soit ADCB un quadrilatère de  $\mathbb{H}^2$  dont les angles en B, C et D sont droits, alors la relation suivante est vérifiée :*

$$\tanh d(A, B) = \tanh d(D, C) \cosh d(C, B).$$



**Figure 2.1** – Quadrilatère ADCB.

*Démonstration.* Dans le triangle rectangle  $ABC$ , notons  $a, b, c$  les longueurs opposées aux sommets  $A, B, C$ , et  $\gamma$  l'angle en  $C$ , et dans le triangle  $ACD$ ,  $d$  et  $e$ , les longueurs opposées aux sommets  $A$  et  $C$  (voir Figure 2.1). Les triangles rectangles  $ABC$  et  $ACD$  satisfont les relations classiques (voir par exemple [Bea95, Theorem 7.11.2]) :

$$\cos \gamma = \frac{\tanh a}{\tanh b}, \quad \sin \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{\tanh d}{\tanh b} \text{ et } \tan \gamma = \frac{\tanh c}{\sinh a}.$$

Cela nous donne l'égalité cherchée :

$$\tanh c = \tanh d \cosh a. \quad \square$$

## 2.2.3 Tubes géodésiques

Fixons un espace  $(\mathbb{H}^\infty, d)$  comme défini précédemment. Soit  $\Gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous introduisons à présent la notion de *tube géodésique* autour de  $\Gamma$  qui sera centrale dans la preuve de la proposition principale de cette section (Proposition 2.2.5). Le mot « géodésique » est employé ici pour signifier que lorsque l'on considère l'intersection de ce tube avec un plan hyperbolique  $\mathcal{P}$  contenant  $\Gamma$ , le quadrilatère plein obtenu est bordé de segments géodésiques.



Soient  $x$  et  $x'$  deux points de  $\mathbb{H}^\infty$  et  $\Gamma$  la géodésique passant par ces deux points. Soit  $\text{pr}_\Gamma$  la projection qui envoie un point  $y \in \mathbb{H}^\infty$  sur le point de  $\Gamma$  le plus proche de  $y$ . Cette application est bien définie (voir 1.2.1). Nous notons

$$\Gamma_x^\perp := \{y \in \mathbb{H}^\infty \mid \text{pr}_\Gamma y = x\}$$

l'hyperplan orthogonal à  $\Gamma$  en  $x$ . Nous définissons *le tube*  $T_{x,x'}^\varepsilon$  comme l'enveloppe convexe de l'union des deux convexes fermés  $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap \Gamma_x^\perp$  et  $\bar{B}(x', \varepsilon) \cap \Gamma_{x'}^\perp$  (voir Figure 2.2, à noter que les tubes sont pleins). Le *rayon* de ce tube en  $z \in [x, x']$ , noté  $r_{x,x'}^\varepsilon(z)$ , est

$$r_{x,x'}^\varepsilon(z) := \sup\{d(z, u) \mid u \in \Gamma_z^\perp \cap T_{x,x'}^\varepsilon\}.$$

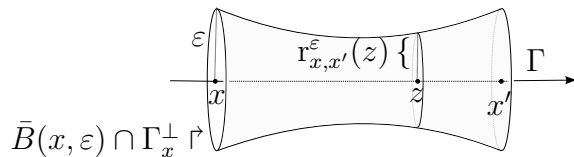


Figure 2.2 – Tube  $T_{x,x'}^\varepsilon$ .

Soient  $x \leq y < y' \leq x'$  quatre points d'une même géodésique  $\Gamma$ . Nous dirons que le tube  $T_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  *traverse*  $T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$  si nous avons les inégalités :  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(y) \leq \varepsilon_2$  et  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(y') \leq \varepsilon_2$  (voir Figure 2.3).

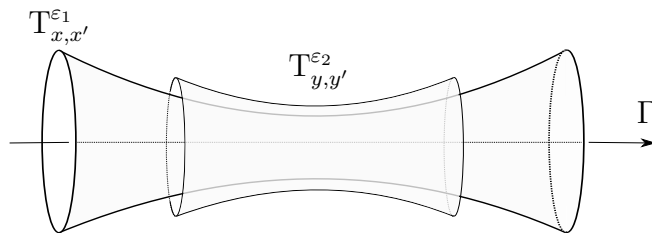


Figure 2.3 – Tube  $T_{x,x'}^{\varepsilon_1}$  traversant le tube  $T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$ .

*Remarque 2.2.3.* Cette définition implique que pour tout  $z \in [y, y']$ ,  $r_{x,x'}^{\varepsilon_1}(z) \leq r_{y,y'}^{\varepsilon_2}(z)$ . En effet, soit  $u \in \Gamma_z^\perp \cap T_{x,x'}^{\varepsilon_1}$ , alors  $u$  appartient à un segment géodésique ayant ses extrémités dans  $\Gamma_y^\perp \cap T_{x,x'}^{\varepsilon_1} \subset T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$  et  $\Gamma_{y'}^\perp \cap T_{x,x'}^{\varepsilon_1} \subset T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$ . Par convexité du tube  $T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$ ,  $u$  appartient à  $\Gamma_z^\perp \cap T_{y,y'}^{\varepsilon_2}$ .

L'espace  $\mathbb{H}^\infty$  étant CAT(0), la distance est convexe (Proposition 1.2.3) : pour tous segments géodésiques  $[a, b]$  et  $[c, d]$  et pour tous points  $z \in [a, b]$  et  $z' \in [c, d]$  ayant

les mêmes coordonnées barycentriques, c'est-à-dire  $d(a, z) = t d(a, b)$  et  $d(c, z') = t d(c, d)$  avec  $t \in [0, 1]$ , nous avons  $d(z, z') \leq (1 - t) d(a, c) + t d(b, d)$ . Nous utilisons la convexité de la distance de la façon suivante.

**Lemme 2.2.4.** *Soit  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$ . Considérons quatre points  $x, x', z, z'$  sur une géodésique  $\Gamma$  vérifiant  $x \leq z < z' \leq x'$ . Pour tout  $\varepsilon \geq 0$  nous avons :*

- 1)  $\text{Fix}_\varepsilon\{x, x'\} \subset \text{Fix}_\varepsilon\{z, z'\}$ .
- 2) le tube  $T_{x, x'}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{z, z'}^\varepsilon$ .

*Démonstration.* Posons  $t := \frac{d(x, z)}{d(x, x')}$ . Soit  $g \in \text{Fix}_\varepsilon\{x, x'\}$ . Comme  $g$  agit par isométrie,  $z \in [x, x']$  et  $g \cdot z \in [g \cdot x, g \cdot x']$  ont les mêmes coordonnées barycentriques. Nous avons alors par convexité de la distance :

$$d(z, g \cdot z) \leq t d(x', g \cdot x') + (1 - t) d(x, g \cdot x) \leq \varepsilon.$$

En faisant de même pour  $z'$ , le point 1) est démontré.

Par le même argument et en se plaçant dans un plan contenant le segment  $[x, x']$ , nous avons :

$$r_{x, x'}^\varepsilon(z) \leq t r_{x, x'}^\varepsilon(x') + (1 - t) r_{x, x'}^\varepsilon(x) \leq \varepsilon.$$

En faisant de même pour  $z'$ , le point 2) est prouvé. □

## 2.2.4 Affaiblissement des hypothèses de la propriété WPD

Nous prouvons dans cette section le résultat suivant, qui nous permettra de vérifier plus facilement qu'une isométrie satisfait la propriété WPD.

**Proposition 2.2.5.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$  et  $h$  un élément hyperbolique de  $G$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe  $y \in \text{Axe}(h)$ ,  $\eta > 0$  et  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $\text{Fix}_\eta\{h^{-k}(y), h^n(y)\}$  soit fini.*
- 2) *Il existe  $w \in \text{Axe}(h)$  tel que pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Fix}_\varepsilon\{w, h^N(w)\}$  soit fini.*

Le point 2) correspond à la définition donnée dans le lemme 2.2.1.1), et le point 1) est la version avec les hypothèses affaiblies qui nous sera utile dans la section 2.3. La preuve découle immédiatement du lemme 2.2.7.

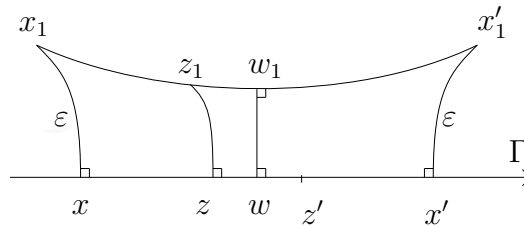


Figure 2.4 – Trace du tube  $T_{x,x'}^\epsilon$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .

**Lemme 2.2.6.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$  et  $\Gamma$  une géodésique de  $\mathbb{H}^\infty$ . Pour toutes constantes fixées  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\eta > 0$  et pour tous points  $y, y', z, z' \in \Gamma$  avec  $y \leq z < z' \leq y'$ , le tube  $T_{y,y'}^\varepsilon$  traverse le tube  $T_{z,z'}^\eta$  dès que les distances  $d(y, z)$  et  $d(y', z')$  sont suffisamment grandes.*

*Démonstration.* Si  $\eta \geq \varepsilon$ , il suffit de prendre  $y \leq z$  et  $y' \geq z'$  (voir lemme 2.2.4.2)).

Si maintenant  $\eta < \varepsilon$ , nous voulons trouver deux points  $x$  et  $x'$  sur  $\Gamma$  avec  $x \leq z$  et  $x' \geq z'$  de sorte que  $r_{x,x'}^\varepsilon(z) = \eta$  et  $r_{x,x'}^\varepsilon(z') = \eta$ . Ainsi en utilisant le lemme 2.2.4.2), tous les points  $y, y'$  vérifiant  $d(y, z) \geq d(x, z)$  et  $d(y', z') \geq d(x', z')$  satisferont le lemme. Soit  $w$  le milieu de  $[z, z']$ . Considérons deux points  $x, x' \in \Gamma$  avec  $x \leq z$  et  $x' \geq z'$  et tels que  $w$  soit le milieu du segment  $[x, x']$ . Par symétrie, nous pouvons nous placer dans un plan  $\mathcal{P}$  contenant la géodésique  $\Gamma$ . Dans ce plan, la trace du tube  $T_{x,x'}^\varepsilon$  est un quadrilatère plein. Notons  $x_1$  et  $x'_1$  deux sommets de ce quadrilatère situés dans un même demi-plan délimité par  $\Gamma$  (voir Figure 2.4). Nous avons alors  $d(x_1, x) = d(x'_1, x') = \varepsilon$ . Soit  $w_1$  le milieu du segment géodésique  $[x_1, x'_1]$ . Par symétrie, la géodésique passant par les points  $w$  et  $w_1$  est la géodésique orthogonale aux géodésiques  $[x_1, x'_1]$  et  $\Gamma$ . Appelons  $z_1$  le point sur le segment géodésique  $[x_1, w_1]$  vérifiant  $\text{pr}_\Gamma z_1 = z$ . Le lemme 2.2.2 nous donne :

$$\begin{cases} \tanh d(w, w_1) \cosh d(w, z) = \tanh d(z_1, z) \\ \tanh d(w, w_1) \cosh d(w, x) = \tanh d(x_1, x) = \tanh \varepsilon. \end{cases}$$

En combinant les égalités, nous obtenons :

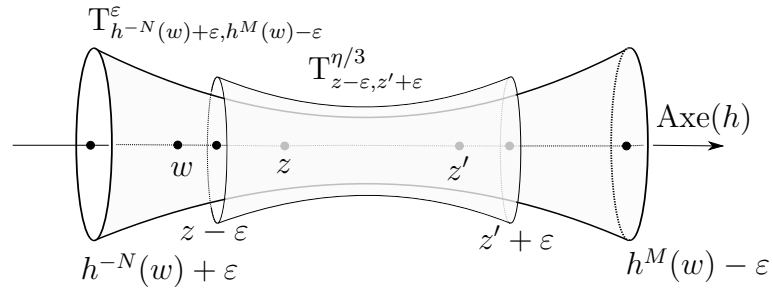
$$\frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z)}{\cosh d(w, x)} = \tanh d(z, z_1).$$

Prenons  $x$  tel que

$$d(w, x) = \text{argcosh} \left( \frac{\tanh \varepsilon \cosh d(w, z)}{\tanh \eta} \right).$$

Alors  $d(z, z_1) = \eta$ , et le point  $w$  étant le milieu des segments  $[z, z']$  et  $[x, x']$ , nous obtenons par symétrie que  $d(z', z'_1) = \eta$ , comme attendu.  $\square$

**Lemme 2.2.7.** *Soient  $G$  un groupe agissant sur  $\mathbb{H}^\infty$  et  $h$  une isométrie hyperbolique de  $G$ . Pour toutes constantes fixées  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\eta > 0$ , pour tous points  $z, z', w \in \text{Axe}(h)$  avec  $z < z'$ , il existe  $N, M \in \mathbb{N}$  tels que si l'ensemble  $\text{Fix}_\eta\{z, z'\}$  est fini alors  $\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-N}(w), h^M(w)\}$  l'est aussi.*



**Figure 2.5** – Tube  $\mathbb{T}_{h^{-N}(w)+\varepsilon, h^M(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  traversant le tube  $\mathbb{T}_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$ .

*Démonstration.* Soient  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $z, z'$  et  $w$  trois points de  $\text{Axe}(h)$ . D'après le lemme 2.2.6, il existe deux entiers  $N$  et  $M$  suffisamment grands de sorte que le tube  $\mathbb{T}_{h^{-N}(w)+\varepsilon, h^M(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  traverse  $\mathbb{T}_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$  (voir Figure 2.5).

Supposons que l'ensemble  $\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-N}(w), h^M(w)\}$  soit infini. Considérons une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments deux à deux distincts de cet ensemble, et notons  $p_n$  et  $p'_n$  les projections respectives de  $f_n(h^{-N}(w))$  et  $f_n(h^M(w))$  sur l'axe de  $h$ . Ainsi, pour tout  $n$ , nous avons :

$$[f_n(h^{-N}(w)), f_n(h^M(w))] \subset \mathbb{T}_{p_n, p'_n}^\varepsilon.$$

En appliquant le lemme 2.2.4.2) nous obtenons que le tube  $\mathbb{T}_{p_n, p'_n}^\varepsilon$  traverse le tube  $\mathbb{T}_{h^{-N}(w)+\varepsilon, h^M(w)-\varepsilon}^\varepsilon$  qui, par construction, traverse le tube  $\mathbb{T}_{z-\varepsilon, z'+\varepsilon}^{\eta/3}$ . De plus, par le lemme 2.2.4.1), nous obtenons l'inclusion :

$$\text{Fix}_\varepsilon\{h^{-N}(w), h^M(w)\} \subset \text{Fix}_\varepsilon\{z, z'\}.$$

Par conséquent, pour tout  $n$ ,  $f_n(z)$  appartient à la boule fermée  $\bar{B}(z, \varepsilon)$ . Notons  $z_n$  la projection de  $f_n(z)$  sur  $\text{Axe}(h)$ . En particulier, la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient au compact  $[z - \varepsilon, z' + \varepsilon]$ . Ceci signifie que d'une part, quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que pour tout  $k \geq 0$ ,

$d(z_0, z_k) \leq \frac{\eta}{3}$ , et d'autre part que  $d(z_n, f_n(z)) \leq \frac{\eta}{3}$ . Par conséquent, nous avons pour tout  $n \geq 0$  :

$$d(f_0(z), f_n(z)) \leq d(f_0(z), z_0) + d(z_0, z_n) + d(z_n, f_n(z)) \leq \eta.$$

Quitte à prendre une sous-suite de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en considérant maintenant le point  $z'$ , nous obtenons, par le même argument, l'inégalité précédente en remplaçant  $z$  par  $z'$ . Ainsi, la suite  $(f_0^{-1}f_n)_{n \geq 0}$  est contenue dans  $\text{Fix}_\eta\{z, z'\}$  qui est donc infini comme attendu.  $\square$

## 2.3 Application au groupe de Cremona

Soient  $k$  un corps et  $\bar{k}$  sa clôture algébrique. Nous avons vu dans les préliminaires 1.2.3 que le groupe de Cremona agit sur un espace hyperbolique de dimension infinie, qui est un espace Gromov-hyperbolique. Nous étudions plus précisément l'action des applications  $h_n : (x, y) \mapsto (y, y^n - x)$  où  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{H}_k^\infty$ . Ainsi, nous pourrions montrer que le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de ces éléments en utilisant la version affaiblie établie dans la section 2.2.4.

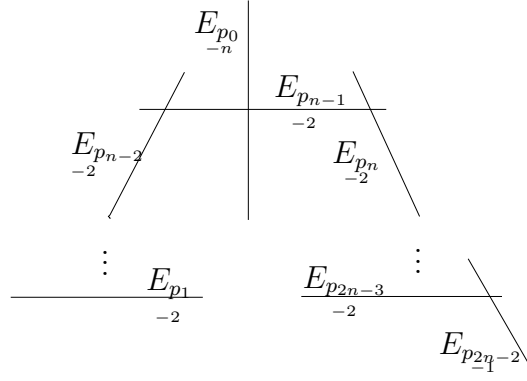
### 2.3.1 Action des applications $h_n$ sur $\mathbb{H}_k^\infty$

Par la suite, nous allons nous intéresser aux applications  $h_n : (x, y) \mapsto (y, y^n - x)$  où  $n \geq 2$ . Elles appartiennent à  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  qui est inclus dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\bar{k}}^2)$ . Nous nous plaçons donc sur  $\bar{k}$ . Fixons l'entier  $n \geq 2$ .

Considérons les applications birationnelles  $a : (x, y) \mapsto (y, x)$  et  $j_n : (x, y) \mapsto (y^n - x, y)$ . Nous avons :

$$h_n = a \circ j_n \text{ et } h_n^{-1} = a^{-1} \circ h_n \circ a.$$

L'application  $j_n$  étant une application de Jonquières elle a un point-base  $p_0$  de multiplicité  $n - 1$  et  $2n - 2$  points-base de multiplicité 1 (voir le paragraphe 1.3.2). En homogénéisant, le point  $p_0$  a pour coordonnées  $[1 : 0 : 0]$ . C'est le seul point-base de l'application  $j_n$  qui appartient à  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^2$ . Les autres points-base de  $j_n$  forment une tour de points infiniment proches au-dessus de  $p_0$  (voir [Lam02, Lemme 9]). Pour  $1 \leq k \leq 2n - 2$ , notons  $p_k$  le point-base de  $j_n$  appartenant au diviseur exceptionnel obtenu en éclatant le point-base  $p_{k-1}$ . Ainsi le point  $p_k$  est infiniment proche du point  $p_{k-1}$ . Plus précisément, la figure 2.6 représente les transformées strictes des diviseurs exceptionnels obtenus en résolvant  $h_n$  munis de leur auto-intersection respective. La configuration obtenue, illustrée sur la figure, découle du fait que les  $n - 1$  points-base



**Figure 2.6** – Arbre des transformées strictes des diviseurs exceptionnels obtenus en résolvant les points d’indétermination de  $h_n$ .

$p_1, \dots, p_{n-1}$  se trouvent sur les transformées strictes respectives de  $E_{p_0}$ . À l’exception des points  $p_0$  et  $p_1$ , remarquons que les points  $p_k$  dépendent de  $n$ . Cependant, pour ne pas alourdir davantage l’écriture nous ne mettons pas d’indice  $n$ . L’application  $a$  étant un automorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ ,  $h_n$  possède les mêmes points-base que  $j_n$ . En conjuguant par  $a$ , nous obtenons par symétrie les points-base de  $h_n^{-1}$  que nous notons  $\{q_k\}_{0 \leq k \leq 2n-2}$ . Remarquons que  $q_0 = [0 : 1 : 0]$ .

L’isométrie  $h_{n\#}$  est hyperbolique et de longueur de translation  $\log(n)$  (voir [CL13, Theorem 4.4, Remark 4.5]). Nous allons décrire son axe. Pour alléger l’écriture nous notons  $e_n^+$  (respectivement  $e_n^-$ ) les sommes avec multiplicités des classes des diviseurs exceptionnels issus de la résolution de  $h_n$  (respectivement de  $h_n^{-1}$ ) :

$$\begin{cases} e_n^+ = (n-1)e_{p_0} + e_{p_1} + \dots + e_{p_{2n-2}} \\ e_n^- = (n-1)e_{q_0} + e_{q_1} + \dots + e_{q_{2n-2}} \end{cases}$$

L’action sur  $\ell$  de  $h_{n\#}$  et de ses itérés est donnée par :

$$h_{n\#}(\ell) = n\ell - e_n^-, \quad h_{n\#}^2(\ell) = n^2\ell - ne_n^- - h_{n\#}(e_n^-), \quad \text{etc.}$$

La suite  $(\frac{1}{n^k} h_{n\#}^k(\ell))_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans l’espace de Picard-Manin vers un élément  $b_n^+$  d’auto-intersection 0 qui s’identifie à un point du bord  $\partial \mathbb{H}_{\mathbb{k}}^\infty$ . Cet élément correspond à un bout de Axe( $h_{n\#}$ ). De même, la suite  $(\frac{1}{n^k} h_{n\#}^{-k}(\ell))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément  $b_n^-$ . Ces deux classes se réécrivent :

$$b_n^+ = \ell - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^i(e_n^-)}{n^{i+1}} \quad \text{et} \quad b_n^- = \ell - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^{-i}(e_n^+)}{n^{i+1}}.$$

L’action de  $h_n$  sur les classes  $e_p$  est donnée par la remarque suivante car  $h_n$  est un automorphisme polynomial.

*Remarque 2.3.1.* Soit  $f$  un automorphisme du plan affine  $\mathbb{A}_k^2$  de degré au moins 2, que nous étendons en une application birationnelle de  $\mathbb{P}_k^2$ . L'ordre des éclatements dans la résolution minimale de  $f^{-1}$  est uniquement déterminé. En effet à chaque étape de la résolution l'unique point-base propre est l'image de la droite à l'infini. Ainsi il y a dans ce contexte une notion de « dernier diviseur » produit lors de la résolution minimale de  $f^{-1}$ , et si  $p$  est un point de la droite à l'infini qui n'est pas le point-base propre de  $f$ , alors il existe un point  $q$  sur ce dernier diviseur produit tel que la transformation birationnelle induite par  $f$  donne un isomorphisme local entre des voisinages de  $p$  et  $q$ . En particulier, par la remarque 1.2.17, nous avons  $f_{\#}(e_p) = e_q$ .

**Lemme 2.3.2.** *Considérons l'ensemble des éléments des  $4n - 2$  suites  $(h_{n\#}^i(e_{q_k}))_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(h_{n\#}^{-i}(e_{p_k}))_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $0 \leq k \leq 2n - 2$ . Ces éléments sont tous deux à deux orthogonaux.*

*Démonstration.* Construisons les points  $(h_{n\#}(e_{q_k}))$ , pour  $0 \leq k \leq 2n - 2$ . Les autres points se construisent de la même façon. L'application  $h_n$  est régulière en  $q_0$  et  $h_n(q_0) = q_0$  est un point-base de  $h_n^{-1}$ . D'après la remarque 2.3.1, il existe un point sur le dernier diviseur exceptionnel  $E_{q_{2n-2}}$  issu de l'éclatement de tous les points  $\{q_k\}_{0 \leq k \leq 2n-2}$ , que nous notons  $q_{2n-1}$ , tel que  $h_{n\#}(e_{q_0}) = e_{q_{2n-1}}$ . Si nous notons  $\pi_0$  l'éclatement du point  $q_0$ , alors l'application  $h_n \circ \pi_0$  est régulière en  $q_1$  et  $h_n \circ \pi_0(q_1) = q_0$  qui est un point-base de  $(h_n \circ \pi_0)^{-1}$ . Toujours d'après la remarque 2.3.1, il existe un point sur le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant le point  $q_{2n-1}$ , que nous notons  $q_{2n}$ , et vérifiant  $h_{n\#}(e_{q_1}) = e_{q_{2n}}$ . En répétant le procédé, nous obtenons qu'il existe un point, noté  $q_{2n-1+k}$ , sur le diviseur exceptionnel issu de l'éclatement du point  $q_{2n-2+k}$  tel que  $h_{n\#}(e_{q_k}) = e_{q_{2n-1+k}}$ .

À présent, nous pouvons montrer, par récurrence sur  $i$ , que  $h_{n\#}^i(e_{q_k}) = e_{q_{i(2n-1)+k}}$  pour tout  $i \geq 1$  et tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2n - 2$ .

En faisant de même, nous obtenons également que  $h_{n\#}^{-i}(e_{p_k}) = e_{p_{i(2n-1)+k}}$  pour tout  $i \geq 1$  et tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2n - 2$ . Ainsi tous les éléments de toutes les suites sont deux à deux orthogonaux.  $\square$

Considérons à présent pour chaque  $n \geq 2$ , le point  $w_n$  qui est le projeté de  $\ell$  sur  $\text{Axe}(h_{n\#})$ . L'axe de  $h_{n\#}$  étant uniquement déterminé par  $b_n^+$  et  $b_n^-$ ,  $w_n$  est une combinaison linéaire de ces deux classes ;  $w_n = \alpha b_n^+ + \beta b_n^-$ . Nous avons  $1 = w_n^2 = 2\alpha\beta$  car  $(b_n^+)^2 = 0 = (b_n^-)^2$  et  $b_n^+ \cdot b_n^- = 1$ . De plus,  $w_n \cdot \ell = \alpha + \beta$  doit être minimal car  $w_n$  est le projeté de  $\ell$ . Nous obtenons finalement :

$$w_n = \sqrt{2}\ell - \frac{1}{\sqrt{2}}r_n \quad \text{où} \quad r_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{n\#}^i(e_n^-) + h_{n\#}^{-i}(e_n^+)}{n^{i+1}}. \quad (2.3.3)$$

Remarque 2.3.4. Écrivons tous les termes de  $r_n$  :

$$r_n = (n-1)\frac{e_{q_0}}{n} + \frac{e_{q_1}}{n} + \dots + \frac{e_{q_{2n-2}}}{n} + (n-1)\frac{e_{p_0}}{n} + \dots + \frac{e_{p_{2n-2}}}{n} + (n-1)\frac{h_{n\#}(e_{q_0})}{n^2} + \dots .$$

Le lemme 2.3.2 implique que tous les termes de  $r_n$  sont orthogonaux deux à deux. Ainsi, la classe de tout diviseur exceptionnel  $e_i$  a un nombre d'intersection non nul avec au plus un seul des termes de  $r_n$ .

Remarquons également, même si nous n'utiliserons pas ce fait, que les points  $p_i$  (respectivement  $q_i$ ), construits dans le lemme 2.3.2, sont les points-base des itérés de  $h_n$  (respectivement de  $h_n^{-1}$ ). Le diagramme suivant donne une idée de preuve dans le cas de  $h_n^2$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{S} & & \\
 & \swarrow \tilde{\pi} & & \searrow \tilde{\sigma} & \\
 & S & & S & \\
 \swarrow \pi & & & & \searrow \sigma \\
 \mathbb{P}_k^2 & & & & \mathbb{P}_k^2 \\
 \dashrightarrow h_n & & & & \dashrightarrow h_n \\
 \mathbb{P}_k^2 & & & & \mathbb{P}_k^2
 \end{array}$$

### 2.3.2 Preuve du résultat principal

Soient  $k$  un corps et  $n \geq 2$  un entier tels que la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $n$ . Considérons les applications

$$\begin{aligned}
 h_n : \quad \mathbb{A}_k^2 &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\
 (x, y) &\longmapsto (y, y^n - x)
 \end{aligned}$$

appartenant au groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ . Nous montrons dans ce paragraphe le théorème 2.1.3, c'est-à-dire que le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$ . Plus précisément, nous allons montrer que le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$ , ce qui impliquera immédiatement la même propriété pour le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ . Nous avons besoin du lemme suivant tiré de [CL13, Proposition 5.7]. Remarquons que nous avons effectué deux modifications dans notre version de l'énoncé. D'une part nous voulons vérifier le lemme pour les transformations  $h_n$ , qui ne sont pas des applications générales. D'autre part le rapporteur de l'article [Lon16], que nous remercions, nous a signalé une erreur de calcul d'intersection dans la preuve, qui en fait se trouvait déjà dans [CL13]. C'est ce qui explique que dans notre énoncé la constante epsilon dépende de  $n$ , alors qu'elle était uniforme dans



l'article original. Ceci est suffisant pour notre but, signalons cependant qu'il serait possible de préserver l'uniformité de la constante au prix d'une preuve un peu plus longue.

Avant d'énoncer le lemme, rappelons que  $w_n$  est le projeté sur l'axe de  $h_{n\#}$  de la classe de  $\ell$  et est donné par l'égalité 2.3.3.

**Lemme 2.3.5.** *Il existe  $\varepsilon_n > 0$  tel que tout élément de  $\text{Fix}_{\varepsilon_n}\{w_n\} \subset \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$  soit un automorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ .*

*Démonstration.* Choisissons

$$\varepsilon_n \in \left] 0, \text{argcosh} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{n\sqrt{2}} \right) - \text{argcosh} \sqrt{2} \right],$$

cette constante vérifie alors :

$$\begin{cases} \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n < \text{argcosh} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{n\sqrt{2}} \right) < \text{argcosh} \frac{3}{\sqrt{2}}. \\ 2 \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n < \text{argcosh} 4 \end{cases} \quad (*)$$

La deuxième inégalité vient du fait que :

$$\begin{aligned} 2 \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n &< \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \text{argcosh} \left( \sqrt{2} + \frac{1}{n\sqrt{2}} \right) \\ &< \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \text{argcosh} \left( \frac{5}{2\sqrt{2}} \right) < \text{argcosh} 4, \end{aligned}$$

avec  $\text{argcosh}(\sqrt{2}) + \text{argcosh} \left( \frac{5}{2\sqrt{2}} \right) \simeq 0,881 + 1,171 = 2,052$  et  $\text{argcosh} 4 \simeq 2,063$ .

Soit  $f \in \text{Fix}_{\varepsilon_n}\{w_n\}$ . Nous voulons montrer que  $f$  est de degré 1. D'après l'inégalité triangulaire et le fait que  $d(f_{\#}(w_n), w_n) \leq \varepsilon_n$ , nous obtenons (voir Figure 2.7) :

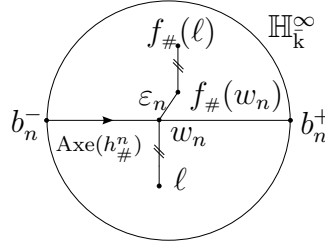
$$\begin{aligned} d(f_{\#}(\ell), \ell) &\leq d(f_{\#}(\ell), f_{\#}(w_n)) + d(f_{\#}(w_n), w_n) + d(w_n, \ell) \\ &\leq 2 d(w_n, \ell) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\cosh d(f_{\#}(\ell), \ell) = f_{\#}(\ell) \cdot \ell = \deg f$ , donc

$$\deg f \leq \cosh(2 d(w_n, \ell) + \varepsilon_n).$$

Remarquons que  $d(w_n, \ell) = \text{argcosh}(w_n \cdot \ell) = \text{argcosh} \sqrt{2}$  (en utilisant 2.3.3). Finalement, d'après le choix \* de  $\varepsilon_n$ , nous majorons le degré de  $f$  par 4 :

$$\deg f \leq \cosh(2 \text{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n) < 4.$$



**Figure 2.7** – Action de  $f$  sur les classes  $\ell$  et  $w_n$ .

Il nous reste à montrer que  $f$  ne peut pas être de degré 2 ou 3. Dans chacun des deux cas nous raisonnons par l'absurde et arrivons à l'inégalité  $d(f_{\#}(\ell), w_n) > \operatorname{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n$ . Or, par l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(f_{\#}(\ell), w_n) &\leq d(f_{\#}(\ell), f_{\#}(w_n)) + d(f_{\#}(w_n), w_n) \\ &\leq d(w_n, \ell) + \varepsilon_n = \operatorname{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Supposons que  $\deg(f) = 3$ , alors  $f^{-1}$  possède un point-base de multiplicité 2 et quatre points-base de multiplicité 1, d'après les relations de Noether (Points 1) et 2) du lemme 1.3.3). Ainsi, l'action de  $f_{\#}$  sur la classe  $\ell$  de Picard-Manin est définie par  $f_{\#}(\ell) = 3\ell - 2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$  avec  $e_i$  les classes des diviseurs exceptionnels au-dessus de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ . D'après la remarque 2.3.4, nous obtenons :

$$(2e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \cdot r_n \geq \frac{1}{n}(-2(n-1) - (n-1) - 1 - 1 - 1) = -3,$$

ce qui nous donne  $-f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq -3$ . Par hypothèse nous avons  $f_{\#}(\ell) \cdot \ell = 3$ , ce qui nous permet, en utilisant 2.3.3, d'établir l'inégalité :

$$f_{\#}(\ell) \cdot w_n = \sqrt{2}f_{\#}(\ell) \cdot \ell - \frac{1}{\sqrt{2}}f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq 3\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

En prenant le cosinus hyperbolique réciproque et en utilisant \*, nous arrivons à la contradiction attendue :

$$d(f_{\#}(\ell), w_n) \geq \operatorname{argcosh} \frac{3}{\sqrt{2}} > \operatorname{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n.$$

Supposons maintenant que  $\deg f = 2$ , alors d'après les relations de Noether,  $f^{-1}$  possède trois points-base de multiplicité 1. De même que dans le cas précédent, nous

considérons l'action de  $f_{\#}$  sur  $\ell$ ;  $f_{\#}(\ell) = 2\ell - e_0 - e_1 - e_2$  avec  $e_i$  les classes des diviseurs exceptionnels au-dessus de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ . D'après la remarque 2.3.4, nous avons :

$$-f_{\#}(\ell) \cdot r_n = (e_0 + e_1 + e_2) \cdot r_n \geq \frac{1}{n}(-(n-1) - (n-1) - 1) = -2 + \frac{1}{n}.$$

De plus,  $f_{\#}(\ell) \cdot \ell = 2$ , ce qui implique :

$$f_{\#}(\ell) \cdot w_n = \sqrt{2}f_{\#}(\ell) \cdot \ell - \frac{1}{\sqrt{2}}f_{\#}(\ell) \cdot r_n \geq 2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

De même que précédemment, nous obtenons la contradiction :

$$d(f_{\#}(\ell) \cdot w_n) \geq \operatorname{argcosh}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{n\sqrt{2}}\right) > \operatorname{argcosh}(\sqrt{2}) + \varepsilon_n. \quad \square$$

*Démonstration du théorème 2.1.3.* Le groupe  $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$  étant inclus dans le groupe  $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{\infty})$ , il agit sur l'espace  $\mathbb{H}_{\mathbb{k}}^{\infty}$ . Nous allons montrer que  $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'ensemble

$$\operatorname{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\} \subset \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$$

soit fini. Ainsi,  $\operatorname{Fix}_{\varepsilon}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\} \cap \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$  sera fini ce qui signifie que le groupe  $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2)$  agit discrètement le long de l'axe de  $h_{n\#}$  et le théorème sera démontré.

Choisissons un  $\varepsilon_n > 0$  vérifiant \*, comme dans le lemme 2.3.5. Soit  $f$  une application birationnelle de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$  appartenant à  $\operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\}$ . Par le lemme 2.2.4.1), nous avons l'inclusion :

$$\operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\} \subset \operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{h_{n\#}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)\} \subset \operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{w_n\}.$$

De ce fait,  $f$  appartient à  $\operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{w_n\}$  et en utilisant le lemme 2.3.5, nous obtenons que  $f$  est de degré 1 :

$$f: [x : y : z] \mapsto [ax + ky + bz : lx + cy + dz : hx + my + jz].$$

Le but est maintenant de trouver des contraintes sur les coefficients de  $f$  pour montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour une telle application. L'application  $f$  appartient aussi à  $\operatorname{Fix}_{\varepsilon_n}\{h_{n\#}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)\}$  d'où

$$d(f_{\#}h_{n\#}^{-1}(w_n), h_{n\#}^{-1}(w_n)) \leq \varepsilon_n.$$

L'application  $h_{n\#}^{-1}$  étant une isométrie nous avons :  $d(h_{n\#}f_{\#}h_{n\#}^{-1}(w_n), w_n) \leq \varepsilon_n$ . De plus,  $h_{n\#}f_{\#}h_{n\#}^{-1} = (h_n f h_n^{-1})_{\#}$  donc d'après le lemme 2.3.5 l'application  $h_n f h_n^{-1}$  est un

automorphisme. En considérant la courbe  $C$  contractée sur  $p_0$  par  $h_n^{-1}$  (la droite à l'infini) et le fait que  $f$  est un automorphisme, nous avons  $f(p_0) = p_0$ , ce qui implique que  $l = h = 0$ . En utilisant le même argument et le fait que  $d(f_{\#}h_{n\#}(w_n), h_{n\#}(w_n)) \leq \varepsilon_n$  nous obtenons  $f(q_0) = q_0$  qui implique  $k = m = 0$ . À présent, nous pouvons supposer  $j = 1$ . Ainsi,  $f$  est un automorphisme affine :

$$f: (x, y) \mapsto (ax + b, cy + d).$$

Calculons  $h_n f h_n^{-1}$  et  $h_n^{-1} f h_n$  et regardons à quelles conditions ce sont des automorphismes de degré 1 de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ .

$$\begin{aligned} h_n f h_n^{-1} &= (y, y^n - x) \circ (ax + b, cy + d) \circ (x^n - y, x) \\ &= (cx + d, (cx + d)^n + ay - ax^n - b) \\ &= (cx + d, x^n(c^n - a) + nc^{n-1}dx^{n-1} + \dots + ncd^{n-1}x + ay + d^n - b). \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$h_n^{-1} f h_n = (y^n(a^n - c) + na^{n-1}by^{n-1} + \dots + nab^{n-1}y + cx + b^n - d, ay + b).$$

Comme les applications  $h_n f h_n^{-1}$  et  $h_n^{-1} f h_n$  sont des automorphismes affines de  $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^2$ , les coefficients  $a$  et  $c$  de  $f$  vérifient les relations :

$$c^n = a \text{ et } c = a^n$$

Cela signifie que  $a$  et  $c$  appartiennent à l'ensemble  $\mathbb{U}_{n^2-1}$  des racines  $(n^2 - 1)$ -ème de l'unité car  $f$  est un automorphisme et donc  $a$  et  $c$  sont non nuls.

Supposons dans un premier temps que  $n \geq 3$ . En considérant les coefficients de  $x^{n-1}$  et  $y^{n-1}$  nous avons :  $nc^{n-1}d = na^{n-1}b = 0$ . Comme la caractéristique du corps ne divise pas  $n$  et que  $a$  et  $c$  sont non nuls, nous obtenons

$$d = b = 0.$$

Pour  $n \geq 3$ ,  $f$  est donc de la forme  $(x, y) \mapsto (ax, cy)$  avec  $a, c \in \mathbb{U}_{n^2-1}$  et  $a^n = c$ , ainsi l'ensemble  $\text{Fix}_{\varepsilon_n}\{h_{n\#}^2(w_n), h_{n\#}^{-2}(w_n)\}$  est fini.

Si maintenant  $n = 2$ , nous ne pouvons pas conclure directement. Par hypothèse,  $f$  appartient à  $\text{Fix}_{\varepsilon_2}\{h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)\}$  cela signifie que

$$d(f_{\#}h_{2\#}^{-2}(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)) \leq \varepsilon_2 \text{ et } d(f_{\#}h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^2(w_2)) \leq \varepsilon_2.$$

Comme  $h_{2\#}^{-2}$  et  $h_{2\#}^2$  sont des isométries nous avons en fait :

$$d(h_{2\#}^2 f_{\#} h_{2\#}^{-2}(w_2), w_2) \leq \varepsilon_2 \text{ et } d(h_{2\#}^{-2} f_{\#} h_{2\#}^2(w_2), w_2) \leq \varepsilon_2.$$

D'après le lemme 2.3.5, les applications  $h_2^2 f h_2^{-2}$  et  $h_2^{-2} f h_2^2$  sont de degré 1. De plus le point  $p_0$  (respectivement le point  $q_0$ ) est le seul point-base de  $h_2^2$  (respectivement de  $h_2^{-2}$ ) appartenant à  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^2$ . Par le même argument que précédemment,  $h_2 f h_2^{-1}$  préserve  $p_0$  et  $h_2^{-1} f h_2$  préserve  $q_0$ . Nous obtenons que  $2cd = 0$  et  $2ab = 0$ . Comme nous sommes en caractéristique différente de 2 et que  $f$  est un automorphisme nous devons avoir  $a$  et  $c$  non nuls donc  $b = d = 0$ . Finalement, lorsque  $n = 2$ ,  $f$  est de la forme  $(x, y) \mapsto (ax, cy)$  avec  $a, c \in \mathbb{U}_3$  et  $a^2 = c$ . L'ensemble  $\text{Fix}_{\varepsilon_2} \{h_{2\#}^2(w_2), h_{2\#}^{-2}(w_2)\}$  est fini comme attendu.  $\square$



# Chapitre 3

## Complexe de Wright

En 1992, D. Wright a introduit dans son article [Wri92] un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 sur lequel le groupe de Cremona de rang 2 sur un corps algébriquement clos agit. Il permet de voir ce groupe comme un produit amalgamé de trois de ses sous-groupes le long de leurs intersections. Dans ce chapitre, nous définissons ce complexe et montrons que le graphe sous-jacent n'est pas Gromov-hyperbolique. Ceci répond par la négative à une question posée par A. Minasyan et D. Osin dans [MO15]. Dans ce chapitre le corps de base est algébriquement clos.

### 3.1 Définition

Nous appelons *surface rationnelle marquée* un couple  $(S, \varphi)$  où  $S$  est une surface rationnelle et  $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est une application birationnelle. Considérons les surfaces rationnelles marquées  $(S, \phi)$  où  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  ou à une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_n$ , pour  $n \geq 0$ . Nous disons que deux telles surfaces rationnelles marquées  $(S_1, \phi_1)$  et  $(S_2, \phi_2)$  sont équivalentes si elles satisfont l'une des deux conditions suivantes (voir Figure 3.1) :

- 1)  $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$  est un isomorphisme,
- 2)  $S_1$  et  $S_2$  sont des surfaces de Hirzebruch d'indices  $n_1, n_2 > 0$  et  $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$  préserve les fibrations.

Nous notons  $\overline{(S, \phi)}$  une telle classe d'équivalence. Ce sont les sommets du complexe de Wright. Il y a trois types de sommets dépendant de la surface  $S$  :

- $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$ ,



**Figure 3.1** – Paires équivalentes

- $S$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_n$ , pour  $n \geq 1$ ,
- $S$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_0$ .

Tout sommet dont la surface  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_n$  pour  $n \geq 1$  possède un représentant ayant  $\mathbb{F}_1$  comme surface. Remarquons également que deux paires  $(\mathbb{F}_1, \phi_1)$  et  $(\mathbb{F}_1, \phi_2)$  qui sont équivalentes mais pas isomorphes vérifient :

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 = \pi^{-1} \circ j_{\text{onq}} \circ \pi$$

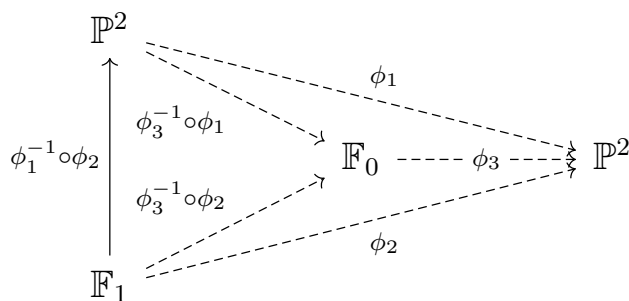
où  $j$  est une application de Jonquière préservant le pinceau de droites passant par le point éclaté par l'application  $\pi^{-1}$ .

Considérons des représentants respectifs  $(\mathbb{P}^2, \phi_1)$ ,  $(\mathbb{F}_1, \phi_2)$  et  $(\mathbb{F}_0, \phi_3)$  de sommets de type  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{F}_n$  et  $\mathbb{F}_0$ . Ils forment un triangle si  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  vérifient les conditions (voir le diagramme commutatif 3.2) :

- $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$  est un éclatement,
- $\phi_3^{-1} \circ \phi_2$  est la composée de l'inverse de l'éclatement d'un point hors de la section exceptionnelle par la contraction de la fibre passant par ce point,
- $\phi_3^{-1} \circ \phi_1$  est la composée des inverses de deux éclatements de points de  $\mathbb{P}^2$  par la contraction de la droite passant par ces deux points.

Ce complexe est simplement connexe ([Wri92, Theorem 5.5]) mais il n'est pas contractile puisqu'il contient des sphères de dimension 2 comme par exemple celle de la figure 3.3 où  $\sigma$  est l'involution standard de Cremona,  $\pi_p$  est l'éclatement du point  $p \in \mathbb{P}^2$  et  $\tau_{p,q}$  éclate les points  $p \in \mathbb{P}^2$  et  $q \in \mathbb{P}^2$  puis contracte la droite passant par ces deux points.





**Figure 3.2** – Sommets réalisant un triangle.

Le groupe de Cremona agit sur les sommets du complexe de Wright par post-composition : pour toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  et pour tous représentant  $(S, \phi)$  d'un sommet

$$f \cdot (S, \phi) = (S, f \circ \phi).$$

Remarquons que l'action de  $f$  préserve la relation d'équivalence sur les sommets et ainsi l'action sur les sommets est bien définie. De plus, le groupe de Cremona agit par isométries et conserve la structure du complexe. Le domaine fondamental de cette action sur le complexe de Wright est un triangle.

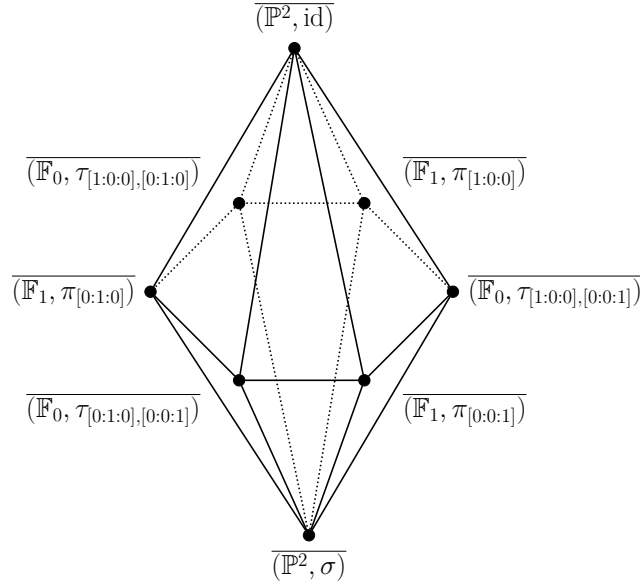
## 3.2 Graphe de Wright modifié

Nous nous intéressons au graphe sous-jacent du complexe de Wright muni de la métrique standard, noté  $\mathcal{W}$ . Considérons le graphe  $\mathcal{G}$  défini comme suit et appelé *graphe de Wright modifié*. Ses sommets sont les sommets de type  $\mathbb{P}^2$  du graphe de Wright et nous relierons deux sommets s'il étaient à distance deux dans le graphe de Wright.

Comme nous n'avons plus qu'un type de sommet, nous pouvons oublier la surface et ne considérer que les applications. Ainsi les sommets de ce graphe correspondent aux applications du groupe de Cremona munies de la relation d'équivalence définie pour le complexe de Wright, c'est-à-dire :

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{il existe } a \in \text{PGL}(3, k) \text{ tel que } f = g \circ a.$$

Une telle classe sera notée  $\bar{f}$ . Le stabilisateur d'un sommet de type  $\mathbb{F}_n$  dans le graphe de Wright est un conjugué du groupe de Jonquières. Ainsi, dans le graphe de Wright modifié il existe une arête entre deux sommets  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  si et seulement si il existe deux



**Figure 3.3** – Une sphère de dimension 2 dans le complexe.

représentants  $f$  et  $g$  de  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  tels que l'un soit obtenu en pré-composant l'autre par un élément  $j$  appartenant à la classe d'une application de Jonquières :

$$g = f \circ j.$$

Montrons que cette définition est indépendante du choix des représentants. En effet, considérons deux autres représentants  $f \circ a$  et  $g \circ b$  où  $a, b \in \text{PGL}(3, k)$  de  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$ . Nous avons alors :

$$g \circ b = (f \circ a) \circ a^{-1} \circ j \circ b = (f \circ a) \circ (a^{-1} \circ j \circ a) \circ (a^{-1} \circ b).$$

Comme  $a^{-1} \circ b$  est un automorphisme et que  $a^{-1} \circ j \circ a$  est une application de Jonquières, la composée  $(a^{-1} \circ j \circ a) \circ (a^{-1} \circ b)$  appartient à la classe d'une application de Jonquières comme annoncé.

Remarquons que dans le graphe de Wright, si deux sommets de type  $\mathbb{P}^2$  sont à distance deux parce qu'il existe un sommet de type  $\mathbb{F}_0$  à distance un de chacun d'eux, en fait il existe également deux sommets distincts de type  $\mathbb{F}_n$  possédant cette propriété. Il est donc suffisant de s'intéresser aux applications stabilisant les sommets de type  $\mathbb{F}_n$ .

Avec ce point de vue, le graphe de Wright modifié est une sorte de graphe de Cayley du groupe de Cremona pour la famille de générateurs constituée des transfor-

mations de Jonquières et des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ . La distance entre deux sommets  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  est donnée par la longueur de l'application  $f^{-1} \circ g$ .

Dans ce chapitre nous montrons que le graphe de Wright n'est pas Gromov-hyperbolique et n'est par conséquent pas un analogue au complexe des courbes ou à l'arbre de Bass-Serre pour  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Comme c'est une propriété stable par quasi-isométrie (théorème 1.2.1), la proposition suivante justifie le fait que nous nous concentrons sur le graphe de Wright modifié plutôt que sur le graphe de Wright.

**Proposition 3.2.1.** *L'inclusion du graphe de Wright modifié dans le graphe de Wright donné par l'application  $\mathrm{id} : \bar{f} \mapsto (\overline{\mathbb{P}^2}, f)$  est une quasi-isométrie.*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{S}(\mathcal{G})$  et  $\mathcal{S}(\mathcal{W})$  les ensembles des sommets des graphes  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{W}$ . Remarquons que dans le cas de graphes, il suffit de montrer qu'il existe une quasi-isométrie entre les sommets. En effet, tout point d'une arête est à distance au plus  $\frac{1}{2}$  d'un sommet. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : \mathcal{S}(\mathcal{G}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{W}) \\ \bar{f} &\mapsto (\overline{\mathbb{P}^2}, f). \end{aligned}$$

Par définition des sommets des deux graphes, elle est bien définie. Montrons que c'est un plongement quasi-isométrique. Pour tous  $f, g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , nous avons :

$$\frac{1}{2} d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{g}) \leq d_{\mathcal{W}}((\overline{\mathbb{P}^2}, f), (\overline{\mathbb{P}^2}, g)) = 2 d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{g}).$$

De plus, par construction tout sommet dans le graphe de Wright est à distance au plus 1 d'un sommet de type  $\mathbb{P}^2$  donc tout sommet du graphe de Wright est à distance 1 de l'image de  $\mathrm{id}$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

### 3.3 Diamètre infini

Dans cette section, nous montrons que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini. Si ça n'était pas le cas, il serait trivialement  $\delta$ -hyperbolique avec  $\delta$  égal au diamètre.

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de Jonquières. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le nombre de multiplicités distinctes des points-base de  $j_1 \circ j_2 \circ \cdots \circ j_n$  est inférieur ou égal à  $2^{n+1} - 2$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence. Une application de Jonquières ne possède que deux multiplicités distinctes donc le cas  $n = 1$  est vérifié. Supposons que le résultat soit vrai pour la composée de  $n$  applications de Jonquières, montrons qu'il reste vrai pour la composée de  $n + 1$  applications de Jonquières :  $j_1 \circ \cdots \circ j_{n+1}$ . Notons  $g = j_1 \circ \cdots \circ j_n$ . Les points-base de  $g \circ j_{n+1}$  sont inclus dans l'ensemble des points suivants :

- 1) l'image par  $j_{n+1}^{-1}$  des points-base de  $g$  qui ne sont pas des points-base de  $j_{n+1}^{-1}$ ,
- 2) les points-base de  $j_{n+1}$ .

Dans le cas 1), appliquer  $j_{n+1}^{-1}$  ne modifie pas le nombre de multiplicités distinctes de ces points. Les points du cas 2) ne possèdent pas la même multiplicité en tant que points-base de  $j_{n+1}$  ou de  $g \circ j_{n+1}$ . Notons  $m_p(f)$  la multiplicité du point  $p$  en tant que point-base de  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  avec pour convention qu'elle est égale à 0 si  $p$  n'est pas un point-base de  $f$ . Notons  $p_0$  le point-base de multiplicité maximale de  $j_{n+1}$  qui est également celui de  $j_{n+1}^{-1}$ , et  $p_1, \dots, p_{2d-2}$  et  $q_1, \dots, q_{2d-2}$  les petits points-base respectifs de  $j_{n+1}$  et  $j_{n+1}^{-1}$ . Alors, en utilisant la formule 1.2.18 (l'application  $f$  de la formule est remplacée par  $j_{n+1}^{-1}$  et  $c$  par  $g_{\#}^{-1}(\ell)$ ), nous obtenons pour tout  $1 \leq i \leq 2d - 2$  :

$$m_{p_i}(g \circ j_{n+1}) = \deg(g) - m_{p_0}(g) - m_{q_i}(g). \quad (3.3.2)$$

C'est la position des points-base de  $j_{n+1}^{-1}$  par rapport aux points-base de  $g$  qui va déterminer le nombre de multiplicités différentes pour les points-base de  $g \circ j_{n+1}$ . Nous allons donc avoir au maximum :

- une multiplicité qui correspond au point-base maximal de  $j_{n+1}$ ,
- une autre qui correspond au fait que certains petits points-base de  $j_{n+1}^{-1}$  ne sont pas des points-base de  $g$  (cette multiplicité est égale au degré de  $g$  si  $p_0$  n'est pas un point-base de  $g$  et à  $\deg(g) - m_{p_0}$  sinon),
- $2^{n+1} - 2$  multiplicités différentes qui correspondent aux petits points-base de  $j_{n+1}^{-1}$  qui sont aussi des points-base de  $g$  dont les multiplicités sont données par la formule (3.3.2),
- $2^{n+1} - 2$  multiplicités différentes qui correspondent aux points-base de  $g \circ j_{n+1}$  qui sont images par  $j_{n+1}^{-1}$  des points-base de  $g$  (qui ne sont pas des points-base de  $j_{n+1}$ ). Remarquons que pour ces points-là leur multiplicité pour  $g$  ou pour  $g \circ j_{n+1}$  est identique.

Par hypothèse de récurrence, nous avons donc au maximum  $2+2(2^{n+1}-2) = 2^{n+2}-2$  multiplicités différentes comme annoncé.  $\square$

**Proposition 3.3.3.** *Le graphe de Wright modifié est de diamètre infini.*

*Démonstration.* Nous allons montrer par l'absurde que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini. Supposons que le diamètre  $D$  de  $\mathcal{G}$  soit fini. Choisissons un entier  $n$  tel que  $n > 2^{D+1} - 2$ . Considérons une suite d'applications quadratiques  $\{\mathfrak{q}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  telle que pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ , les points-base de  $\mathfrak{q}_i^{-1}$  sont disjoints des points-base de  $\mathfrak{q}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{q}_{i-1}$ . La caractéristique de cette application est  $(2^n; m_n^3, \dots, m_1^3)$  où  $m_i = 2^i$ . Cela découle du fait que si les points-base de  $f^{-1}$  sont disjoints des points-base de  $g$  alors les points-base de  $g \circ f$  sont les points-base de  $f$  dont la multiplicité a été multipliée par  $\deg(g)$  et l'image par  $f^{-1}$  des points-base de  $g$  qui conservent la même multiplicité. De plus, le degré de  $g \circ f$  est égal au produit des degrés de  $f$  et de  $g$ . En particulier, l'application  $\mathfrak{q}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{q}_n$  possède  $n$  multiplicités distinctes. D'après le lemme 3.3.1, cela signifie que le nombre minimal d'applications de Jonquières permettant de décomposer  $\mathfrak{q}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{q}_n$  est strictement supérieur à  $D$ . Ceci implique que  $d_{\mathcal{G}}(\overline{\text{id}}, \overline{\mathfrak{q}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{q}_n}) > D$  ce qui contredit le fait que le diamètre est borné.  $\square$

Le corollaire suivant est dû à la quasi-isométrie du graphe de Wright et du graphe de Wright modifié.

**Corollaire 3.3.4.** *Le graphe de Wright est de diamètre infini.*

## 3.4 Non-hyperbolicité

Nous montrons dans cette section que le graphe de Wright modifié n'est pas Gromov-hyperbolique. Pour cela nous utilisons un sous-groupe du groupe de Cremona isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ , constitué de deux applications particulières de la famille des twists d'Halphen.

### 3.4.1 Construction d'un sous-groupe abélien libre de rang deux

**Loi de groupe sur une courbe elliptique** Toute courbe elliptique est munie d'une loi de groupe commutative. Elle peut se visualiser de la façon suivante. Choisissons l'élément neutre et un plongement envoyant cette courbe elliptique sur une cubique lisse de  $\mathbb{P}^2$  tel que l'élément neutre soit envoyé sur un point d'inflexion  $O$ .

Considérons deux points  $P$  et  $Q$  (possiblement confondus) sur la cubique. Notons  $R$  le point d'intersection entre la droite passant par les points  $P$  et  $Q$  et la cubique. Le point  $P + Q$  est le point d'intersection entre la cubique et la droite passant par les points  $O$  et  $R$ . Cette loi est appelée *loi de cordes et tangentes*.

**Lemme 3.4.1.** *Soient  $C$  une cubique lisse,  $O$  un point d'inflexion de  $C$  et  $p_1, \dots, p_9$  neuf points distincts sur la cubique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Les diviseurs  $\sum_{i=0}^8 p_i \sim 9O$  sont linéairement équivalents.*

2) *Il existe une autre cubique passant par les points  $p_0, \dots, p_8$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une autre cubique lisse  $C'$  passant par les points  $p_0, \dots, p_8$ . Nous avons alors  $C' \sim 3L$  où  $L$  est la droite qui a pour seul point d'intersection avec la cubique le point  $O$ . Alors

$$\sum_{i=0}^8 p_i = C'|_C \sim 3L|_C = 9O,$$

comme attendu. Réciproquement, si nous avons  $\sum_{i=0}^8 p_i \sim 9O$ , alors il existe une fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f : C \subset \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\mapsto [f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z)] \end{aligned}$$

telle que  $\sum_{i=0}^8 p_i - 9O = (f)_0 - (f)_\infty$ . Le lieu des zéros respectif de  $f_0$  et de  $f_1$  est un diviseur sur  $\mathbb{P}^2$  qui a pour intersection avec  $C$  respectivement  $\sum_{i=0}^8 p_i$  et  $9O$ . Par conséquent  $(f_0)_0$  est une cubique distincte de  $C$  qui passe par les points  $p_0, \dots, p_8$ .  $\square$

**Construction de twists de Halphen particuliers** Soit  $C_0$  une cubique lisse de  $\mathbb{P}^2$  de neutre le point  $p_0 \in C_0$ . Montrons qu'il est possible de choisir huit points distincts  $p_1, \dots, p_8$  et distincts de  $p_0$  tels que les points  $p_1 - p_0, \dots, p_8 - p_0$  ne soient pas de torsion et satisfont le point 1) du fait 3.4.1. D'après [Sil09, Corollary 6.4.(b) p.86], pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , le sous-groupe de  $m$ -torsion de  $C_0$  est fini. Ainsi, sur  $C_0$  il n'y a qu'un nombre dénombrable de points de torsion. Par conséquent, il y a une infinité non dénombrable de choix possibles pour chacun des points  $p_1, \dots, p_6$ . À présent, choisissons le point  $p_7$  de sorte que les points  $p_7 - p_0$  et  $p_8 - p_0 = -2p_0 - p_1 - \dots - p_7$  ne sont pas de torsion. Il y a également une infinité non dénombrable de choix pour le point  $p_7$  puisqu'il doit être choisi dans le complémentaire d'une union de deux ensembles dénombrables. Ainsi, par le fait 3.4.1 il existe une cubique de  $\mathbb{P}^2$ , notée

$C_\infty$  qui passe par ces neuf points. Considérons le pinceau de cubiques donné par  $[s : t] \in \mathbb{P}^2 \mapsto \{sE_\infty + tE_0 = 0\}$  où  $E_\infty$  et  $E_0$  sont les équations respectives des cubiques  $C_\infty$  et  $C_0$ . Remarquons que toutes les cubiques de ce pinceau passent par les neuf points  $p_0, \dots, p_8$ . Pour chaque cubique lisse du pinceau, nous choisissons le point  $p_0$  comme neutre.

Éclatons les points  $p_0, \dots, p_8$ . Les transformées strictes des cubiques sont deux à deux disjointes. La surface obtenue, notée  $X$  est une fibration au-dessus de  $\mathbb{P}^1$  où les fibres sont les transformées strictes des cubiques du pinceau. Par la formule d'adjonction nous avons :

$$2g(\bar{C}) - 2 = K_X \cdot \bar{C} + \bar{C}^2 = 0.$$

Ainsi les fibres sont de genre 1.

Nous pouvons relever la loi de groupe sur chaque fibre lisse et considérer que le neutre sur chaque fibre est la pré-image du point  $p_0$ . Ainsi en notant  $\lambda = \frac{s}{t}$ , nous avons un automorphisme de la fibre  $\bar{C}_{[s:t]}$  donné par  $f_1^\lambda : z \mapsto z + (p_1 - p_0)^\lambda$  où  $(p_1 - p_0)^\lambda$  est la pré-image du point  $p_1 - p_0$  sur la fibre  $C_\lambda$ . Par construction l'automorphisme  $f_1^\lambda$  est d'ordre infini et s'étend en un automorphisme de la surface  $X$  privée des fibres singulières, noté  $f_1$ . Nous pouvons faire de même avec les points  $p_2, \dots, p_8$  et construire 8 automorphismes  $f_1, \dots, f_8$  d'ordre infini.

De plus, ces automorphismes commutent. Nous avons ainsi construit un  $\mathbb{Z}^8$  d'automorphisme de la surface  $X$  privée des fibres singulières. À présent, il suffit de vérifier que cela induit un  $\mathbb{Z}^8$  d'applications birationnelles de  $\mathbb{P}^2$ . Notons  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'éclatement des points  $p_0, \dots, p_8$ . Les applications du groupe de Cremona  $\{\pi \circ f_i \circ \pi^{-1}\}_{1 \leq i \leq 8}$  sont d'ordre infini et commutent deux à deux. Par conséquent, le groupe de Cremona contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^8$ . Remarquons que pour  $1 \leq i \leq 8$ , les applications  $\pi \circ f_i \circ \pi^{-1}$  notées  $g_i$  possèdent au plus 9 points-base. C'est également le cas de toutes les applications de ce  $\mathbb{Z}^8$ .

Le groupe de Néron-Severi de  $X$  est engendré dans l'espace de Picard-Manin par :

$$\text{Pic}(X) = \langle \ell, e_{p_0}, \dots, e_{p_8} \rangle.$$

La classe du diviseur canonique de la surface  $X$  est égale à

$$K_X = -3\ell + e_{p_0} + \dots + e_{p_8}.$$

De plus,

$$K_X^\perp / \langle K_X \rangle = \langle e_{p_1} - e_{p_0}, \dots, e_{p_8} - e_{p_0} \rangle \simeq \mathbb{Z}^8.$$

Nous avons besoin de la proposition suivante tirée de [CD12, (11) p.874].

**Proposition 3.4.2.** *À chaque élément de  $a \in K_X^\perp / \langle K_X \rangle$  est associé un automorphisme de  $X$ , et donc une isométrie  $\tau_a$  de  $\text{Pic}(X)$  via la formule :*

$$\begin{aligned} \tau_a : \text{Pic}(X) &\rightarrow \text{Pic}(X) \\ d &\mapsto d - (K_X \cdot d)a + (a \cdot d - \frac{1}{2}(K_X \cdot d)(a \cdot a)) K_X . \end{aligned}$$

En fait, les applications  $f_i$  construites précédemment sont des automorphismes de  $X$  et elles correspondent à la translation  $\tau_{e_{p_i} - e_{p_0}}$ .

**Corollaire 3.4.3.** *Soient  $g_1$  et  $g_2$  les deux applications construites précédemment. Alors pour tous  $n, m \in \mathbb{Z}$  nous avons :*

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = 9(n^2 + m^2 + mn) + 1.$$

*Démonstration.* Les deux applications  $g_1$  et  $g_2$  se relèvent en des automorphismes de  $X$  correspondant respectivement aux translations  $\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}$  et  $\tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}$ . L'itérée de  $g_1$  se relève en l'itérée de la translation correspondante. De plus, traduire  $n$  fois par  $e_{p_1} - e_{p_0}$  revient à traduire une fois par  $n(e_{p_1} - e_{p_0})$ , ainsi :

$$\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n = \tau_{n(e_{p_1} - e_{p_0})}.$$

De même, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , la translation correspondant à  $g_1^n \circ g_2^m$  est égale à

$$\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n \circ \tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}^m = \tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}.$$

De plus, la surface  $X$  domine la surface de résolution minimale de  $g_1^n \circ g_2^m$  ainsi l'action de  $g_1^n \circ g_2^m$  et de  $\tau_{e_{p_1} - e_{p_0}}^n \circ \tau_{e_{p_2} - e_{p_0}}^m$  sur l'espace de Picard-Manin coïncident. Par conséquent, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = \tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}(\ell) \circ \ell.$$

Par la proposition 3.4.2, nous avons :

$$\tau_{ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}}(\ell) = \ell - 3(ne_{p_1} + me_{p_2} - (m+n)e_{p_0}) - 3(n^2 + m^2 + nm) K_X .$$

Ainsi nous obtenons que le degré de  $g_1^n \circ g_2^m$  est égal à

$$\deg(g_1^n \circ g_2^m) = 9(n^2 + m^2 + nm) + 1,$$

comme annoncé. □



Plus généralement, une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  est un *élément de Halphen* s'il existe neuf points du Bubble space  $\mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  notés  $p_0, \dots, p_8$  tels que la classe de Picard-Manin  $K = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$  soit un point fixe de l'action de  $f$  sur l'espace de Picard-Manin :

$$f_{\#}(3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}) = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}.$$

**Lemme 3.4.4** ([BC16, Lemma 5.10]). *Si  $f_1$  et  $f_2$  sont des éléments de Halphen préservant la même classe  $K$  alors*

$$\sqrt{\deg(f_1 \circ f_2)} \leq \sqrt{\deg(f_1)} + \sqrt{\deg(f_2)}.$$

Je tiens à remercier Jean-Philippe Furter qui m'a fait remarquer que les applications de Jonquières utilisées lors de la décomposition en longueur minimale des applications  $g_1$  et  $g_2$  étaient des éléments de Halphen.

**Lemme 3.4.5.** *Considérons l'action des applications  $g_1$  et  $g_2$  du groupe de Cremona sur le graphe de Wright modifié. Ces isométries possèdent une distance de translation supérieure ou égale à 1 et satisfont la propriété suivante. Pour tout  $M > 0$ , il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :*

$$d_G \left( (g_1^m \circ g_2^n)(\bar{\text{id}}), \bar{\text{id}} \right) > M.$$

*Démonstration.* Pour tout  $m, n \in \mathbb{Z}$ , la distance  $d_G \left( (g_1^m \circ g_2^n)(\bar{\text{id}}), \bar{\text{id}} \right)$  correspond à la longueur de l'application  $g_1^m \circ g_2^n$ . D'après la proposition 1.3.18, nous pouvons décomposer en longueur minimale  $g_1^m \circ g_2^n = a \circ j_k \circ \dots \circ j_1$  à l'aide d'applications de Jonquières  $j_1, \dots, j_k$ . De plus, les points-base de l'application  $j_1$  sont inclus dans ceux de  $g_1^m \circ g_2^n$  donc  $j_1$  en possède au plus 9 et c'est encore le cas de  $g_1^m \circ g_2^n \circ j_1^{-1}$ . Par récurrence, nous obtenons que toutes les applications de Jonquières qui décomposent l'application  $g_1^m \circ g_2^n \circ j_1^{-1}$  possèdent au plus 9 points-base et sont par conséquent de degré au plus 5. De plus, par le corollaire 1.3.19 nous pouvons choisir les applications de Jonquières de sorte que ce soient des twist de Halphen. Par conséquent, d'après le lemme 3.4.4, le degré de la composée de  $k$  telles applications de Jonquières de degré au plus 5 est majoré par  $5k^2$ .

Montrons grâce à cela que les applications  $g_1$  et  $g_2$  ont une distance de translation strictement positive. Faisons-le pour  $g_1$ , la preuve est identique pour  $g_2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après le corollaire 3.4.3, le degré de  $g_1^n$  est égal à  $9n^2 + 1$ . D'après le paragraphe précédent, il faut donc plus de  $n$  applications de Jonquières pour décomposer cette

application et ainsi  $d_G(g_1^n(\bar{id}), \bar{id}) \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent la distance de translation est supérieure ou égale à 1.

D'après le corollaire 3.4.3 pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\deg(g_1^m \circ g_2^n) = 9(n^2 + m^2 + mn) + 1.$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  fixé, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 9(x^2 + m^2 + mx) + 1$  atteint son minimum en  $x = -\frac{m}{2}$ . Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq \frac{27}{4}m^2 + 1$ . C'est en particulier le cas pour  $x \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  nous avons :

$$\deg(g_1^m \circ g_2^n) \geq \frac{27}{4}m^2 + 1.$$

Montrons la propriété du lemme. Soit  $M > 0$  fixé. Choisissons  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{27}{4}m^2 + 1 > 5M^2$ . Alors par le même argument que précédemment, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la longueur de  $g_1^m \circ g_2^n$  est supérieure ou égale à  $M$ .  $\square$

### 3.4.2 Non-hyperbolicité du graphe de Wright

Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. Soient  $\varepsilon \geq 0$  et  $F$  une partie fermée et bornée de  $X$ . Notons  $\mathcal{N}_\varepsilon(F)$  le  $\varepsilon$ -voisinage tubulaire de  $F$  dans  $X$ . La *distance de Hausdorff* entre deux sous-espaces fermés et bornés  $F_1$  et  $F_2$  de  $X$  est donnée par :

$$d_H(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon \mid F_1 \subset \mathcal{N}_\varepsilon(F_2) \text{ et } F_2 \subset \mathcal{N}_\varepsilon(F_1)\}.$$

**Définition 3.4.6.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique géodésique et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Un chemin  $c : [a, b] \rightarrow X$  est un segment *quasi-géodésique* s'il existe  $\lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$  tels que  $c$  soit un plongement  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-isométrique. Les points  $c(a)$  et  $c(b)$  sont appelés les *bouts* de  $c$ .

**Lemme 3.4.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $\lambda > 0$ . Considérons un quadrilatère géodésique ayant pour sommets  $x, y, z, w \in X$  tels que

$$1) \ d(x, w) \leq \lambda \text{ et } d(y, z) \leq \lambda.$$

$$2) \ d(x, y) > 4\delta + 2\lambda.$$

Alors le segment géodésique  $]x + 2\delta + \lambda, y - 2\delta - \lambda[$  est inclus dans le  $2\delta$ -voisinage du segment  $[w, z]$ .

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in ]x + 2\delta + \lambda, y - 2\delta - \lambda[$ . Considérons le triangle géodésique ayant pour sommets  $x, y$  et  $z$ . Par  $\delta$ -hyperbolicité, il existe un point  $x_1$  appartenant à l'union des deux segments géodésiques  $[y, z]$  et  $[x, z]$  tel que  $d(x_0, x_1) \leq \delta$ . Montrons que  $x_1 \in [x, z]$ . En effet, par l'inégalité triangulaire :

$$d(y, x_1) \geq d(x_0, y) - d(x_0, x_1) > \lambda + \delta,$$

ce qui implique par l'hypothèse 1) que  $x_1 \in [x, z]$ . Considérons à présent le triangle ayant pour sommets  $x, z$  et  $w$ . Par  $\delta$ -hyperbolicité, il existe  $x_2$  appartenant à  $[x, w] \cup [w, z]$  tel que  $d(x_1, x_2) \leq \delta$ . De même que précédemment, nous obtenons avec l'inégalité triangulaire  $d(x_2, x) > \lambda$  ce qui permet de conclure que  $x_2 \in [w, z]$ . De plus  $d(x_0, x_2) \leq 2\delta$ .  $\square$

**Lemme 3.4.8** ([CDP90, Lemme 6.5 et Proposition 6.3]). *Soient  $(X, d)$  un espace métrique géodésique,  $x_0$  un point de  $X$  et  $f$  une isométrie dont la distance de translation est strictement positive. Le chemin bi-infini et géodésique par morceaux construit comme la réunion des segments géodésiques  $[f^i(x_0), f^{i+1}(x_0)]$  pour  $i \in \mathbb{Z}$  est une quasi-géodésique.*

Le théorème suivant dit que dans un espace Gromov-hyperbolique, l'image de toute quasi-géodésique est à distance de Hausdorff petite de la géodésique reliant ses deux bouts. Cette distance dépend des constantes données par la quasi-géodésique et de la constante d'hyperbolicité.

**Théorème 3.4.9** ([BH99, Theorem 1.7, p.401]). *Pour toutes constantes  $\delta \geq 0, \lambda \geq 1$  et  $\varepsilon \geq 0$ , il existe une constante  $R$  dépendant de ces trois constantes satisfaisant la propriété suivante. Si  $(X, d)$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique, si  $c$  est une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique de  $X$  et si  $[p, q]$  est un segment géodésique joignant les bouts de  $c$ , alors la distance de Hausdorff entre  $[p, q]$  et l'image de  $c$  est inférieure ou égale à  $R$ .*

**Lemme 3.4.10.** *Soient  $\Gamma$  un graphe connexe muni de la métrique standard et  $f$  et  $g$  deux isométries de ce graphe qui commutent tels que la distance de translation de  $f$  est strictement positive. S'il existe  $x_0 \in \Gamma$  tel que pour tout  $M > 0$ , il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$*

$$d((g^m \circ f^n)(x_0), x_0) > M$$

*alors  $\Gamma$  n'est pas un graphe hyperbolique au sens de Gromov.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Soit  $x_0$  satisfaisant l'énoncé et supposons que le graphe  $\Gamma$  soit  $\delta$ -hyperbolique pour une constante  $\delta$  positive ou nulle.

Considérons le chemin  $c : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  bi-infini et géodésique par morceaux construit comme l'union des géodésiques reliant les sommets  $f^i(x_0)$  et  $f^{i+1}(x_0)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . D'après le lemme 3.4.8, le chemin  $c$  est une quasi-géodésique. Notons  $(\lambda, \varepsilon)$  les constantes associées à cette quasi-géodésique. D'après le théorème 3.4.9, il existe une constante  $R$  dépendant de  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $\delta$  telle que pour tout sous-chemin  $c' : [a, b] \rightarrow \Gamma$  de  $c$ , toute géodésique  $[c'(a), c'(b)]$  reliant les bouts de  $c'$  est incluse dans le  $R$ -voisinage de l'image de  $c'$ .

Notons  $D = d(f(x_0), x_0)$ . Posons  $M = 4\delta + 4D + 4R$ . Soit  $m$  satisfaisant l'énoncé. Quitte à remplacer  $g$  par  $g^m$ , nous pouvons supposer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$d(g(f^n(x_0)), x_0) > M.$$

Par hypothèse sur  $f$  il existe une constante  $K > 0$  et un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $d(x_0, f^n(x_0)) \geq Kn$ . Par conséquent il existe  $p \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que

$$d(x_0, f^p(x_0)) > 4\delta + 2d(x_0, g(x_0)) + 3D.$$

Considérons un quadrilatère géodésique défini par les sommets  $x_0$ ,  $f^p(x_0)$ ,  $g(f^p(x_0))$  et  $g(x_0)$ . Remarquons que comme  $f$  et  $g$  commutent,

$$d(f^p(x_0), g(f^p(x_0))) = d(f^p(x_0), f^p(g(x_0))) = d(x_0, g(x_0)).$$

Soit un point  $x \in [x_0 + 2\delta + d(x_0, g(x_0)), f^p(x_0) - 2\delta - d(x_0, g(x_0))]$ . En considérant le sous-chemin de  $c$  ayant pour bouts les points  $x_0$  et  $f^p(x_0)$ , il existe  $0 \leq a \leq p$  satisfaisant

$$d(x, f^a(x_0)) \leq R + D.$$

De plus, par le lemme 3.4.7, il existe  $y \in [g(x_0), g(f^p(x_0))]$  tel que  $d(y, x) \leq 2\delta$ . Comme  $g$  agit par isométries, l'image par  $g$  de la  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique  $c$  est également une  $(\lambda, \varepsilon)$ -quasi-géodésique. De plus c'est la géodésique par morceaux construite en reliant les sommets  $g^i(f(x_0))$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . En considérant la sous quasi-géodésique ayant pour bouts  $g(x_0)$  et  $g(f^p(x_0))$ , il existe une puissance  $b \in \mathbb{N}$  telle que

$$d(y, g(f^b(x_0))) \leq R + D.$$

Finalement par l'inégalité triangulaire nous avons la majoration :

$$d(f^a(x_0), g(f^b(x_0))) \leq 2\delta + 2R + 2D.$$

Nous obtenons alors la contradiction suivante :

$$M < d(x_0, g(f^{b-a}(x_0))) = d(f^a(x_0), g(f^b(x_0))) \leq 2\delta + 2R + 2D.$$

Ainsi nous avons montré que le graphe  $\Gamma$  n'est pas  $\delta$ -hyperbolique et cela pour n'importe quel choix de  $\delta$ .  $\square$

**Théorème 3.4.11.** *Le graphe de Wright modifié n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

*Démonstration.* Considérons les applications  $g_1$  et  $g_2$  construites au paragraphe 3.4.1. Ce sont des applications qui commutent. De plus, d'après le lemme 3.4.5 ce sont des isométries qui satisfont l'énoncé du lemme 3.4.10 où le sommet  $\bar{id}$  du graphe de Wright modifié correspond au point  $x_0$  du lemme. Par conséquent, le graphe de Wright modifié n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.  $\square$

Le corollaire suivant découle de la proposition 3.2.1 et des théorèmes 1.2.1 et 3.4.11.

**Corollaire 3.4.12.** *Le graphe de Wright n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*



# Chapitre 4

## Pavage de Voronoï pour le groupe de Cremona

L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  de l'espace de Picard-Manin est un espace important dans l'étude du groupe de Cremona. Le but de ce chapitre est de déterminer un pavage de Voronoï pour l'action du groupe de Cremona sur un sous-espace convexe  $\mathcal{E}$  contenant l'enveloppe convexe de l'orbite de la droite  $\ell$ . Nous ne nous restreignons pas seulement à l'enveloppe convexe de l'orbite de  $\ell$  car il est parfois difficile de vérifier qu'un élément  $y$  appartient. Pour cette raison, nous élargissons l'espace à étudier. Nous construisons alors un pavage de Voronoï de la façon suivante. Nous considérons l'orbite de la classe de la droite  $\ell$ . Cela nous donne un ensemble discret de points de  $\mathcal{E}$ . Cependant le stabilisateur de  $\ell$  est  $\mathrm{PGL}(3, k)$ . Nous identifions donc deux applications qui diffèrent par un automorphisme :

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{il existe } a \in \mathrm{PGL}(3, k), f = g \circ a.$$

Nous notons  $\bar{f}$  une telle classe. Remarquons que c'est la même relation d'équivalence utilisée lors de la construction du graphe de Wright modifié. Par construction, toute application d'une même classe d'équivalence agit de la même façon sur  $\ell$ . Pour toute classe  $\bar{f}$  où  $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , nous associons une cellule de Voronoï notée  $\mathcal{V}(f)$  et définie comme :

$$\mathcal{V}(f) = \{c \in \mathcal{E} \mid d(c, f_\#(\ell)) \leq d(c, g_\#(\ell)) \text{ pour tout } g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)\}.$$

Remarquons que toutes les applications du groupe de Cremona appartenant à la même classe d'équivalence indexent la même cellule de Voronoï. Les applications  $f' \in \bar{f}$  sont appelées les *germes* associés à  $\mathcal{V}(f)$  et les classes  $f_\#(\ell)$  sont les *centres* des cellules de Voronoï.

Une cellule de Voronoï ne correspond pas tout-à-fait à un domaine fondamental mais c'est l'orbite d'un domaine fondamental sous l'action de  $\mathrm{PGL}(3, k)$ .

Nous définissons dans une première section l'espace sur lequel nous faisons agir le groupe de Cremona, puis nous caractérisons les classes appartenant à la cellule de Voronoï associée à l'identité. Nous déterminons ensuite les cellules adjacentes à la cellule associée à l'identité, c'est-à-dire les cellules de Voronoï qui ont une classe en commun avec  $\mathcal{V}(\mathrm{id})$ . Puis nous étudions les cellules qui ont une classe en commun au bord à l'infini  $\partial_\infty \mathbb{H}^\infty$  avec  $\mathcal{V}(\mathrm{id})$  qui seront dites quasi-adjacentes.

À un tel pavage est associé un graphe dual appelé également *triangulation de Delaunay*. Nous montrons qu'il est quasi-isométrique au graphe de Wright. Par conséquent, il n'est pas Gromov-hyperbolique. Cependant en le modifiant légèrement, en tenant compte de la quasi-adjacence, nous construisons un graphe Gromov-hyperbolique sur lequel le groupe de Cremona agit.

## 4.1 Restriction à un sous-espace

Considérons l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  de dimension infinie obtenu comme hyperboloïde dans l'espace de Picard-Manin qui a été construit à la sous-section 1.2.3. Nous considérons le sous-espace suivant.

**Définition 4.1.1.** L'ensemble  $\mathcal{E}$  est le sous-espace de  $\mathbb{H}^\infty$  constitué des classes

$$c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \quad (n \text{ réel } \geq 1)$$

satisfaisant :

1)  $\lambda_p \geq 0$  pour tout  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ ,

2) la *positivité contre la classe anti-canonique* :

$$3n - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p \geq 0,$$

3) la positivité des excès de tout point  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  :

$$\lambda_p - \sum_{\substack{q \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ q \rightarrow p}} \lambda_q \geq 0,$$



- 4) la *condition de Bézout* : pour toute courbe de  $\mathbb{P}^2$  de degré  $d$  passant avec multiplicité  $\mu_p$  en chaque point  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  :

$$nd - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p \mu_p \geq 0.$$

L'inégalité de la propriété 2) implique que les classes de  $\mathcal{E}$  sont en fait  $L^1$ . Par conséquent, la forme canonique est bien définie sur les classes de  $\mathcal{E}$  et la propriété 2) revient à demander que les classes soient positives contre la forme anti-canonique qui est l'opposé de la forme canonique :

$$-k_{\mathbb{P}^2} \cdot c \geq 0.$$

Lorsqu'une classe satisfait cette inégalité, nous disons qu'elle est *positive contre la classe anti-canonique*. Le coefficient  $n$  est appelé le *degré* de  $c$  et les coefficients  $\lambda_p$  les *multiplicités* de  $c$  aux points  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ . Les points pour lesquels la multiplicité associée est strictement positive constituent le *support* de  $c$ . Cet ensemble est noté  $\text{supp}(c)$ . Remarquons que par définition de  $\mathbb{H}^\infty$  celui-ci est dénombrable. Grâce à la propriété 3), le support de  $c$  est un ensemble pré-consistant de points, au sens de la définition introduite dans la section 1.3.

*Remarque 4.1.2.* Par définition, une classe  $c \in \mathcal{E}$  appartient à  $\mathbb{H}^\infty$  et possède donc un degré supérieur ou égal à 1 et strictement supérieur à chacune de ses multiplicités :

$$1 = c^2 = n^2 - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p^2 \leq n^2 - \lambda_q^2 \text{ pour tout } q \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2).$$

Une classe de l'espace de Picard-Manin d'auto-intersection strictement positive et satisfaisant les points 1), 2), 3) et 4) de la définition 4.1.1 est dite *proportionnelle* à une classe de  $\mathcal{E}$ . Une telle classe appartient à la demi-droite ouverte issue de la classe nulle et passant par une classe de  $\mathcal{E}$ . Plus généralement, étant donné un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de l'espace de Picard-Manin, une classe d'auto-intersection strictement positive est dite proportionnelle à une classe de  $\mathcal{F}$  si elle appartient à la demi-droite ouverte issue de la classe nulle et passant par une classe de  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 4.1.3.** *L'action du groupe de Cremona stabilise  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Le groupe de Cremona étant engendré par  $\text{PGL}(3, k)$  et l'involution standard  $\sigma$  (Théorème 1.3.16) il suffit de vérifier que l'action de ces applications préserve  $\mathcal{E}$ . C'est le cas pour les automorphismes. Soit

$$c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \in \mathcal{E}.$$

Montrons que  $\sigma_{\#}(c)$  appartient à  $\mathcal{E}$ . Notons  $p_0, p_1$  et  $p_2$  les points-base de  $\sigma$  (qui sont en fait  $[0 : 0 : 1]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[1 : 0 : 0]$ ) et  $q_0, q_1$  et  $q_2$  ceux de  $\sigma^{-1}$ . Bien que  $\sigma$  soit une involution nous les différencions pour plus de clarté. D'après l'équation (1.2.18), nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{\#}(c) = & (2n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2})\ell - (n - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2})e_{q_0} - (n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_2})e_{q_1} \\ & - (n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1})e_{q_2} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \{p_0, p_1, p_2\}}} \lambda_p \sigma_{\#}(e_p). \end{aligned}$$

Le groupe de Cremona agit sur  $\mathbb{H}^{\infty}$  (voir le paragraphe 1.2.3) par conséquent la classe  $\sigma_{\#}(c)$  appartient à  $\mathbb{H}^{\infty}$  et possède donc un degré strictement positif. Intéressons-nous aux autres points de la définition.

1) Comme  $c \in \mathcal{E}$  les multiplicités  $\lambda_p$  sont positives ou nulles. Montrons que c'est le cas des multiplicités de  $\sigma_{\#}(\ell)$  pour les points  $q_0, q_1$  et  $q_2$ . Les points  $p_0$  et  $p_1$  sont dans  $\mathbb{P}^2$  il existe donc une droite  $L$  passant par ces deux points et comme  $c$  satisfait la condition de Bézout (Définition 4.1.1.4)), nous avons :

$$n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} \geq 0.$$

Les deux autres multiplicités sont positives avec le même argument.

2) La condition de positivité contre l'anti-canonique est satisfaite puisque la forme canonique est constante sur l'orbite de  $c$  sous l'action du groupe de Cremona (Remarque 1.2.11).

3) Montrons que les excès de  $\sigma_{\#}(c)$  sont positifs en tout point  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ . Soit  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$ . Deux cas se présentent selon si  $p$  est un point-base de  $\sigma^{-1}$  ou pas.

Dans le cas où  $p$  n'est pas un point-base de  $\sigma^{-1}$ , il existe  $q \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  tel que  $e_q = \sigma_{\#}^{-1}(e_p)$ . Quitte à éclater au départ et à l'arrivée,  $\sigma^{-1}$  induit un isomorphisme local envoyant  $p$  sur  $q$  et par conséquent les points adhérents à  $p$  sont envoyés sur des points adhérents à  $q$  et donc la positivité des excès est préservée.

Il nous reste à considérer les excès au dessus des points  $q_0, q_1$  et  $q_2$ . Notons  $S$  la surface obtenue en éclatant les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$ . Les points adhérents à  $q_0$  sont les points appartenant à la transformée stricte de la droite passant par les points  $p_1$  et  $p_2$  (exceptés les points  $p_1$  et  $p_2$ ) sur  $S$ , notée  $L$ . Par conséquent en considérant cette droite et le fait que  $c$  satisfait la condition de Bézout (Définition 4.1.1.4)), nous avons :

$$(n - \lambda_1 - \lambda_2) - \sum_{p \rightarrow q_0} \lambda_p = (n - \lambda_1 - \lambda_2) - \sum_{p \in L} \lambda_p \geq n - \sum_{p \in L} \lambda_p \stackrel{4.1.1.4)}{\geq} 0.$$

Ainsi, l'excès en  $q_0$  est positif. Il en est de même pour les points  $q_1$  et  $q_2$ .

4) Montrons que  $\sigma_{\#}(c)$  satisfait la condition de Bézout pour toute courbe. Considérons dans un premier temps les droites contractées par  $\sigma^{-1}$  comme par exemple la droite passant par les points  $q_1$  et  $q_2$ . Alors nous obtenons :

$$2n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} - (n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_2}) - (n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1}) = \lambda_{p_0} \geq 0.$$

Il en est de même des autres droites.

Considérons à présent une courbe  $C_1$  qui n'est pas contractée par  $\sigma^{-1}$ . Notons  $c_1$  sa classe dans Picard-Manin. L'action de  $\sigma^{-1}$  sur  $C_1$  est encore une courbe donc son nombre d'intersection avec  $c$  est positif ou nul puisque  $c$  satisfait la condition de Bézout. Ainsi, nous avons :

$$\sigma_{\#}(c) \cdot c_1 = c \cdot \sigma_{\#}^{-1}(c_1) \underset{4.1.1.4)}{\geq} 0.$$

Par conséquent  $\sigma_{\#}(c)$  satisfait également la condition de Bézout (Définition 4.1.1.4)).

Nous avons ainsi montré que l'action de  $\sigma$  préserve  $\mathcal{E}$  et par conséquent que l'action du groupe de Cremona stabilise  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Proposition 4.1.4.** *L'espace  $\mathcal{E}$  est un sous-espace convexe fermé de  $\mathbb{H}^{\infty}$ .*

*Démonstration.* Les conditions 1) et 4) définissent des demi-espaces fermés de l'espace de Picard-Manin. Comme les multiplicités des classes de  $\mathcal{E}$  sont positives d'après la condition 1), la condition 2) se réécrit de la façon suivante :

$$\text{pour toute partie finie } F \text{ de } \mathcal{B}(\mathbb{P}^2), \quad \sum_{p \in F} \lambda_p \leq 3n.$$

Par conséquent la condition 2) correspond à une intersection infinie de demi-espaces fermés qui est un fermé. Nous raisonnons pareil pour la condition 3). En intersectant ce fermé avec l'hyperboloïde  $\mathbb{H}^{\infty}$  nous obtenons que  $\mathcal{E}$  est fermé comme annoncé.  $\square$

**Proposition 4.1.5.** *L'enveloppe convexe de l'orbite de  $\ell$  sous l'action du groupe de Cremona est incluse dans  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Comme par la proposition 4.1.4 l'espace  $\mathcal{E}$  est convexe, il suffit de montrer que toutes les classes de l'orbite de  $\ell$  sous l'action du groupe de Cremona sont dans  $\mathcal{E}$ . De plus comme d'après la proposition 4.1.3 l'action du groupe de Cremona préserve  $\mathcal{E}$ , il suffit de vérifier que la classe de la droite  $\ell$  appartient à  $\mathcal{E}$ . La classe  $\ell$  appartient à  $\mathbb{H}^{\infty}$  et vérifie le point 1). La classe de la droite contre la classe anti-canonique vaut 3 ainsi la positivité contre l'anti-canonique est vérifiée (point 2)). Les points 3) et 4) sont également vérifiés.  $\square$

*Remarque 4.1.6.* Soit  $p \in \mathbb{P}^2$ . Il existe  $t_0 \in [0, 1[$  tel que pour tout  $t_0 \leq t < 1$  la classe  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(\ell - te_p)$  n'est pas dans l'enveloppe convexe de l'orbite de  $\ell$  puisque l'intersection de cette classe contre la classe anti-canonique est strictement supérieure à 3.

### 4.1.1 Pavage

Montrons que les cellules de Voronoï recouvrent l'espace  $\mathcal{E}$  (Corollaire 4.1.10).

**Proposition 4.1.7.** *Pour toute classe  $c$  appartenant à  $\mathcal{E}$ , les deux infimums suivants sont atteints :*

- 1)  $\inf \{ d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \}$
- 2)  $\inf \{ d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \text{ et } c \notin \mathcal{V}(f) \}$ .

*Démonstration.* Soit  $c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p$  une classe de  $\mathcal{E}$ . Montrons que l'infimum suivant est atteint :

$$\inf \{ d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \}. \quad (4.1.8)$$

Considérons les classes de l'orbite de la droite  $\ell$  se trouvant dans la boule fermée de  $\mathcal{E}$  centrée en  $c$  et de rayon  $\text{argcosh}(n)$ . Par construction, la classe  $\ell$  est dans cette boule. De plus, par l'inégalité triangulaire, toute application  $f$  telle que la classe  $f_{\#}(\ell)$  se situe dans cette boule est de degré au plus  $\cosh(2 \text{argcosh}(n)) = 2n^2 - 1$ . Notons  $B$  l'ensemble de ces applications. Il n'y a qu'un nombre fini de caractéristiques pour des applications du groupe de Cremona de degré au plus  $2n^2 - 1$ . Remarquons que si le support de  $c$  est fini alors l'infimum est atteint. Nous considérons donc le cas où  $c$  est de support infini. Notons  $C_1, \dots, C_k$  cet ensemble de caractéristiques. Pour  $1 \leq j \leq k$ , posons  $C_j = (d^j; m_0^j, \dots, m_{r_j}^j)$ . Notons  $B_j$  l'ensemble des applications de  $B$  ayant  $C_j$  pour caractéristique. Montrons que pour tout  $1 \leq j \leq k$

$$\inf \{ d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in B_j \} \quad (4.1.9)$$

est atteint. Fixons  $1 \leq j \leq k$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $B_j$  telle que la suite  $(d(c, f_{i\#}(\ell)))_{i \in \mathbb{N}}$  soit strictement décroissante. Pour chaque  $i$ , nous regardons le point base  $q$  de  $f_i^{-1}$  de multiplicité  $m_0^j$ . Nous notons  $\lambda_{0,i}$  la multiplicité  $\lambda_q$  de  $c$  associée au point  $q$ . À noter que si  $q$  n'est pas un point du support de  $c$ , la multiplicité  $\lambda_{0,i}$  est nulle. Nous faisons de même pour chaque  $0 \leq s \leq r_j$ . Nous obtenons ainsi  $r_j + 1$  suites  $\{\lambda_{s,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  de coefficients. Si nous l'ordonnons, la suite des multiplicités de  $c$  est décroissante et

tend vers 0. Par conséquent quitte à prendre des sous-suites nous pouvons supposer que chacune des  $r_j + 1$  suites est ou bien constante ou bien strictement décroissante. Or la suite  $(d(c, f_{i\#}(\ell)))_{i \in \mathbb{N}}$  étant strictement décroissante cela implique que la suite  $S_i = \sum_{s=0}^{r_j} m_s \lambda_{s,i}$  est strictement croissante ce qui est absurde. Par conséquent, pour tout  $1 \leq j \leq k$  il existe une application  $f^j \in B_j$  pour laquelle l'infimum (4.1.9) est atteint :

$$d(c, f_{\#}^j(\ell)) = \inf \left\{ d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in B_j \right\}.$$

Notons  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  l'indice tel que

$$d(c, f_{\#}^{j_0}(\ell)) = \min_{1 \leq j \leq k} d(c, f_{\#}^j(\ell)).$$

L'infimum (4.1.8) est atteint pour  $f^{j_0}$ .

Le point 2) se démontre de la même façon. □

**Corollaire 4.1.10.** *Les cellules de Voronoï pavent l'espace  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Soit  $c \in \mathcal{E}$ . Le point 1) de la proposition 4.1.7 implique qu'il existe  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$ . □

## 4.1.2 Non-accumulation des cellules

Dans cette partie, nous montrons que les cellules de Voronoï ne s'accumulent pas sur la cellule associée à l'identité  $\mathcal{V}(\text{id})$  : pour toute classe  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que les cellules de Voronoï ne contenant pas  $c$  mais telle que  $c$  soit dans leur  $\varepsilon$ -voisinage sont en nombre fini. La condition « ne contenant pas  $c$  » est nécessaire car nous verrons que dans certains cas  $c$  appartient à un nombre infini de cellules.

**Proposition 4.1.11.** *Pour tout  $c \in \mathcal{E}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  soit  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$ , soit la distance entre  $c$  et  $\mathcal{V}(f)$  est strictement supérieure à  $\varepsilon$  :*

$$d(c, \mathcal{V}(f)) > \varepsilon.$$

*Démonstration.* Quitte à faire agir le groupe de Cremona sur le pavage de Voronoï, nous pouvons supposer que  $c$  appartient à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

Si la classe  $c$  est à l'intérieur pour le pavage de Voronoï de  $\mathcal{V}(\text{id})$ , tout  $\varepsilon$  strictement positif tel que la boule ouverte centrée en  $c$  et de rayon  $\varepsilon$  est incluse dans  $\mathcal{V}(\text{id})$  convient. Intéressons-nous à présent aux classes qui sont au bord de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

Soit  $c = n\ell - \sum_{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)} \lambda_p e_p \in \mathcal{E}$  une classe appartenant au bord de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

D'après le point 2) de la proposition 4.1.7, l'infimum suivant est atteint

$$D := \inf\{d(c, f_{\#}(\ell)) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2) \text{ et } c \notin \mathcal{V}(f)\}.$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{D - \text{argcosh}(n)}{6}.$$

Montrons que pour toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $c$  n'appartient pas à  $\mathcal{V}(f)$ , nous avons :

$$d(c, \mathcal{V}(f)) > \varepsilon.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $c$  n'appartient pas à  $\mathcal{V}(f)$  et qu'il existe  $c' \in \mathcal{V}(f)$  tel que  $d(c, c') \leq \varepsilon$ . Nous avons alors par définition de  $D$  et par l'inégalité triangulaire la contradiction suivante :

$$\begin{aligned} D \leq d(c, f_{\#}(\ell)) &\leq d(c, c') + d(c', f_{\#}(\ell)) \leq \varepsilon + d(c', \ell) \\ &\leq \varepsilon + d(c', c) + d(c, \ell) \\ &\leq 2\varepsilon + \text{argcosh}(n) \\ &\leq \frac{D}{3} + \frac{2 \text{argcosh}(n)}{3} \\ &< \frac{D}{3} + \frac{2D}{3} = D. \quad \square \end{aligned}$$

Nous disons qu'un segment de  $\mathcal{E}$  *traverse* une cellule de Voronoï s'il existe un sous-segment contenu dans l'intérieur de cette cellule. Le corollaire suivant dit qu'un segment ne traverse qu'un nombre fini de cellules de Voronoï. Plus généralement, il donne un analogue de ce résultat lorsque le segment reste dans le bord de Voronoï de plusieurs cellules.

**Corollaire 4.1.12.** *Pour tout segment géodésique  $[c, c']$ , il existe une suite finie  $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$  de classes du segment  $[c, c']$  avec  $c_0 = c$  et  $c_i < c_{i+1}$  de sorte que pour tout  $0 \leq i \leq n - 1$  il existe une application birationnelle  $f_i$  satisfaisant  $[c_i, c_{i+1}] \subset \mathcal{V}(f_i)$ .*

*En particulier, un segment géodésique ne traverse qu'un nombre fini de cellules de Voronoï.*

*Démonstration.* Paramétrons le segment  $[c, c']$  par  $\gamma(t)$  pour  $t \in [0, 1]$  avec  $\gamma(0) = c$  et  $\gamma(1) = c'$ . Nous construisons une suite de points  $c_i = (\gamma(t_i))$  par le procédé de

réurrence suivant. Initialisons en posant  $t_0 = 0$  et  $c = \gamma(0)$ . Pour  $i \geq 1$ , si  $t_{i-1} \in [0, 1[$  est déjà construit, nous posons

$$t_i = \inf\{t \in ]t_{i-1}, 1] \mid \exists f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \gamma(t) \in \mathcal{V}(f) \text{ et } \gamma(t_{i-1}) \notin \mathcal{V}(f)\}.$$

Remarquons que les classes de cette suite appartiennent à plusieurs cellules par construction. De plus, pour tout  $1 \leq i \leq n$  et pour toute application  $f$  telle que  $\mathcal{V}(f)$  contient la classe  $c_i$  mais pas la classe  $c_{i-1}$ , la cellule  $\mathcal{V}(f)$  ne contient pas les classes  $c_j$  pour  $j \leq i - 1$  par convexité des cellules de Voronoï.

Pour tout  $0 \leq t \leq 1$ , d'après d'après la proposition 4.1.11 et le paragraphe précédent, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que dans l'intervalle ouvert centré en  $\gamma(t)$  et de diamètre  $2\varepsilon$  il existe au plus une classe de la suite  $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$ . Ces ouverts forment un recouvrement du segment géodésique compact  $[c, c']$ , par conséquent il existe un sous-recouvrement fini. Or chacun de ces ouverts contient au plus un point de la suite. Il y a donc un nombre fini d'éléments dans cette suite.  $\square$

**Bord à l'infini** Le bord de  $\mathbb{H}^\infty$  est constitué des classes d'auto-intersection nulle. Ces classes peuvent être vues comme limites de classes de Picard-Manin vivant dans l'hyperplan affine d'équation  $\{\ell = 1\}$  et proportionnelles à des classes de  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous définissons *le bord à l'infini* de  $\mathcal{E}$ , noté  $\partial_\infty \mathcal{E}$  comme l'ensemble des classes du bord de  $\mathbb{H}^\infty$  qui vérifient les points 1) à 4) de la définition 4.1.1 de  $\mathcal{E}$ . De même que précédemment ces classes sont limites de classes de Picard-Manin vivant dans l'hyperplan affine d'équation  $\{\ell = 1\}$  et proportionnelles à des classes de  $\mathcal{E}$ .

**Classes symétriques** Une classe dont les  $r$  plus grandes multiplicités sont égales et la  $(r + 1)$ -ème est strictement plus petite est appelée *r-symétrique*. Si de plus,  $c$  ne possède pas d'autre multiplicité, la classe est dite *pure*.

**Lemme 4.1.13.** *Soit  $c$  une classe  $r$ -symétrique avec la plus grande multiplicité qui est égale au tiers du degré de  $c$  :*

$$c = n\ell - \frac{n}{3} \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i} - \sum_{\substack{p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2) \\ p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}}} \lambda_p e_p,$$

où  $\lambda_p < \frac{n}{3}$  pour tout  $p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}$ . Nous avons alors :

- 1) Si  $c \in \mathcal{E}$  alors  $r \leq 8$ .
- 2) Si  $c \in \partial_\infty \mathcal{E}$  alors  $r = 9$  et  $c$  est une classe 9-symétrique pure.

*Démonstration.* Considérons une telle classe  $c$ . Dans le cas où  $c \in \mathcal{E}$ , si  $r \geq 9$  alors nous obtenons la contradiction suivante :

$$1 = c^2 \leq n^2 - 9\frac{n^2}{9} - \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p^2 \leq 0.$$

Si maintenant  $c \in \partial_\infty \mathcal{E}$  alors  $c^2 = 0$  et par le même argument, nous obtenons  $r \leq 9$ . Dans le cas où  $r = 9$ , notons que la classe  $c$  est forcément symétrique pure. Supposons que  $r \leq 8$ . Alors il existe  $p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}$  tel que  $\lambda_p > 0$  puisque :

$$n^2 - r\frac{n^2}{9} - \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p^2 = 0. \quad (4.1.14)$$

Comme  $c$  appartient au bord à l'infini, nous avons par définition :

$$0 \leq -k_{\mathbb{P}^2} \cdot c = 3n - r\frac{n}{3} - \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p. \quad (4.1.15)$$

En multipliant l'égalité 4.1.14 par 3, nous avons  $3n^2 = 3r\frac{n^2}{9} + 3 \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p^2$ . En multipliant l'équation 4.1.15 par  $n$  qui est positif et en remplaçant dans cette équation  $3n^2$  par la valeur que nous venons d'obtenir, nous avons

$$0 \leq 3r\frac{n^2}{9} + 3 \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p^2 - r\frac{n^2}{3} - n \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p = \sum_{p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}} \lambda_p(3\lambda_p - n),$$

ce qui contredit le fait que  $\lambda_p < \frac{n}{3}$  pour tout  $p \notin \{p_0, \dots, p_{r-1}\}$ . Ainsi  $r = 9$  comme attendu.  $\square$

Remarquons que ce lemme est l'analogue du lemme 1.3.6 sur les caractéristiques des applications symétriques. Cependant, comme les multiplicités des classes ne sont pas entières cela enlève de la rigidité, d'où l'hypothèse imposée sur les coefficients.

## 4.2 Étude des cellules de Voronoï

Le groupe de Cremona agissant transitivement sur les cellules de Voronoï, il suffit d'étudier la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  pour comprendre toutes les cellules. Nous caractérisons dans un premier temps les classes se trouvant dans la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Proposition 4.2.6 et Théorème 4.2.8). Nous étudions ensuite les classes qui sont dans l'intersection de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  et d'une autre cellule (Théorème 4.2.29) dont nous déterminons le germe. Enfin nous étudions les classes à l'infini de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  et nous caractérisons les germes des cellules ayant un point à l'infini en commun avec la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Corollaire 4.2.56).



### 4.2.1 Cellule de Voronoï associée à l'identité

Par définition, une classe  $c$  est dans la cellule de Voronoï associée à l'identité si elle ne peut pas être rapprochée de  $\ell$  en faisant agir un élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  :

$$c \in \mathcal{V}(\text{id}) \Leftrightarrow \text{pour tout } f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

Le but de cette sous-section est de caractériser les classes  $c$  qui vérifient cette propriété.

Avant cela, introduisons des notations utilisées dans cette section et par la suite. Nous avons vu que le support d'une classe  $c \in \mathcal{E}$  (ou plus généralement dans  $\mathbb{H}^{\infty}$ ) est dénombrable. Par facilité d'écriture, étant donnée une classe  $c \in \mathcal{E}$ , nous renumérotions toujours dans cette section les points de son support et les multiplicités correspondantes, de sorte qu'ils soient indicés par un sous-ensemble  $I'$  de  $\mathbb{N}$  qui est soit un intervalle commençant à 0 soit  $\mathbb{N}$  tout entier :

$$c = n\ell - \sum_{i \in I'} \lambda_i e_{p_i}.$$

Remarquons que pour alléger les notations, nous écrivons  $\lambda_i$  au lieu de  $\lambda_{p_i}$ . Par la suite, lorsque nous ferons agir une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sur  $c$ , nous aurons également besoin d'une notation pour les points-base de  $f$ . S'ils sont dans le support de  $c$ , la notation des points-base de  $f$  sera induite par celle sur les points du support de  $c$ . Si ce n'est pas le cas, nous aurons besoin d'introduire un ensemble fini  $J$  disjoint de  $\mathbb{N}$ , tel que pour  $j \in J$ ,  $\lambda_j$  est la multiplicité nulle de  $c$  correspondant au point-base  $p_j$  de  $f$  qui n'est pas dans le support de  $c$ . De fait, pour tout  $i \in I'$  et pour tout  $j \in J$ ,  $\lambda_i > \lambda_j$ . Ainsi, pour alléger les notation,  $I$  correspondra suivant le contexte à  $I'$  ou à  $I' \cup J$  et les indices de  $J$  seront considérés comme plus grands que ceux de  $I'$ . Une classe est dite *ordonnée* lorsque la numérotation induit un ordre décroissant sur les multiplicités de  $c$  : pour tout  $i, j \in I$  tels que  $i < j$ ,  $\lambda_i \geq \lambda_j$ .

Considérons l'action d'une application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$  sur une classe  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $i \in I$  tel que  $p_i$  est un point-base de  $f$ , nous notons  $m_i$  sa multiplicité pour  $f$  en tant que point-base. Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} f_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell &= c \cdot f_{\#}^{-1}(\ell) - c \cdot \ell \\ &= c \cdot (d\ell - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i) - n \\ &= (d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Dans le cas où la somme des trois plus grandes multiplicités d'une classe ordonnée est inférieure ou égale à son degré, le lemme suivant permet de vérifier rapidement que cette classe appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$  et  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{E}$ . Notons, pour tout  $i \in I$  tel que  $p_i \in \text{supp}(f)$ ,  $m_i$  la multiplicité du point-base  $p_i$ . Considérons le multi-ensemble  $E$  constitué des indices de  $I$ , chacun apparaissant avec multiplicité  $m_i$ . Alors, il est possible de partitionner  $E$  en  $d-1$  triplets et d'avoir ainsi, en notant  $T$  l'ensemble de ces triplets :*

$$f_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell = \sum_{\{\{i,j,k\}\} \in T} n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k.$$

*De plus, il est possible de choisir la partition de  $E$  de sorte que chaque triplet de  $E$  soit constitué de trois indices deux à deux distincts.*

Rappelons que les indices de  $I$  correspondent à des points du support de  $c$  ou du support de  $f$ .

*Démonstration.* D'après l'équation (4.2.1), nous avons l'égalité :

$$f_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell = (d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i. \quad (\star)$$

L'égalité du lemme 1.3.3.1)

$$3(d-1) = \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i$$

implique que nous pouvons constituer  $d-1$  triplets dans  $E$  afin d'arranger le terme de droite de l'égalité  $(\star)$  comme une somme de  $d-1$  termes de la forme  $n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k$ , où  $\{\{i, j, k\}\} \in T$ . Ainsi

$$(d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i = \sum_{\{\{i,j,k\}\} \in T} n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k.$$

De plus, pour chaque  $i$ , l'inégalité du lemme 1.3.3.3)

$$m_i \leq d-1,$$

permet de répartir les  $m_i$  multiplicités  $\lambda_i$  de sorte qu'il n'y en ait pas deux dans le même terme de la somme et donc que les triplets de  $T$  soient formés d'indices deux à deux distincts. Une façon de former ces triplets est de faire une *répartition en*

*suisant.* Nous répartissons le premier indice  $i_0$  de multiplicité non nulle  $m_{i_0}$  dans les  $m_{i_0}$  premiers triplets. Puis nous répartissons le second indice  $i_1$  dans les  $m_{i_1}$  triplets suivant en revenant au premier quand nous avons complété le dernier. En itérant ce procédé on obtient la partition en triplets attendue.  $\square$

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $c \in \mathcal{E}$  une classe de degré  $n$ . Supposons que l'une des deux conditions suivantes est réalisée.*

- 1) *Les points  $p_i, p_j$  et  $p_k$  sont alignés.*
- 2) *Les points  $p_i, p_j$  et  $p_k$  sont le support d'une application quadratique  $\mathfrak{q}$  et*

$$\mathfrak{q}_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

*Alors, en notant  $\lambda_i, \lambda_j$  et  $\lambda_k$  les multiplicités respectives, éventuellement nulles, des points  $p_i, p_j$  et  $p_k$  pour  $c$ , nous avons :*

$$n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k \geq 0.$$

*Démonstration.* Si les points  $p_i, p_j$  et  $p_k$  sont alignés alors en considérant la droite passant par ces trois points, nous avons d'après l'inégalité de Bézout (Définition 4.1.1.4)) le résultat attendu. Si les points  $p_i, p_j$  et  $p_k$  sont les points-base de l'application quadratique  $\mathfrak{q}$ , l'équation (4.2.1) nous donne :

$$n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k = \mathfrak{q}_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell \geq 0$$

ce qui prouve le lemme sous la seconde condition.  $\square$

Une classe ordonnée qui possède au moins trois points dans son support est appelée *spéciale* si les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$  et si ses trois plus grandes multiplicités vérifient :  $0 > n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$ .

*Remarque 4.2.4.* En particulier, une classe spéciale ne possède qu'une seule multiplicité maximale. En effet, si  $c$  est une classe spéciale alors  $\lambda_0 > \frac{n}{2}$  puisque par positivité des excès (Définition 4.1.1.3))  $\lambda_0 \geq \lambda_1 + \lambda_2$  et donc

$$0 > n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq n - 2\lambda_0.$$

La conclusion s'obtient avec l'inégalité de Bézout (Définition 4.1.1.4)).

L'objet des énoncés qui suivent est de caractériser les classes appartenant à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Nous étudions dans un premier temps (Lemme 4.2.5 et Proposition 4.2.6) les classes non spéciales. D'une part car la preuve est facile puisque n'importe quel choix de partition de  $E$  en triplets d'indices deux à deux disjoints convient. D'autre part car elle donne une caractérisation immédiate pour contrôler si une classe non spéciale ordonnée appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  ou pas. Il suffit de vérifier que la somme des trois premières multiplicités est plus petite que le degré. Dans un second temps nous nous intéressons aux classes spéciales (Théorème 4.2.8).

**Lemme 4.2.5.** *Soit  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{E}$  une classe ordonnée. Si la somme des trois plus grandes multiplicités de  $c$  est inférieure ou égale à son degré :*

$$n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0,$$

alors  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ .

*Démonstration.* Considérons une telle classe  $c$ . L'hypothèse ainsi que la décroissance des multiplicités de  $c$  impliquent que pour tout triplet  $\{\{i, j, k\}\}$  d'indices deux à deux distincts de  $I$ ,  $n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k \geq 0$ . Ainsi, par le lemme 4.2.2, pour tout  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ,

$$f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

Par conséquent  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$  comme attendu. □

Si une classe  $c$  ordonnée n'est pas spéciale alors soit les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$  sont alignés, soit ils forment le support d'une application quadratique, soit les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$  et  $n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ . Par positivité des excès en  $p_0$  (Définition 4.1.1.3)) il n'y a pas d'autre possibilité.

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{E}$  une classe ordonnée.*

- 1) *Si les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$  sont alignés alors  $n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  et  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ .*
- 2) *Si les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$  sont le support d'une application quadratique alors la classe  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  si et seulement si*

$$n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0.$$

- 3) *Si les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$  et si  $n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  alors  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ .*

*Remarque 4.2.7.* Une classe  $c$  ordonnée et non spéciale qui appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  a un degré supérieur ou égal à la somme de ses trois plus grandes multiplicités :

$$n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0.$$

*Démonstration.* 1) Le premier point découle des lemmes 4.2.3 et 4.2.5.

2) Soit  $q$  une application quadratique ayant  $p_0, p_1$  et  $p_2$  comme points-base. Si  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ , la définition de cellule de Voronoï implique qu'en particulier,

$$q_{\#}(c) \cdot \ell = c \cdot q_{\#}^{-1}(\ell) \geq c \cdot \ell.$$

Le lemme 4.2.3 permet d'obtenir l'inégalité souhaitée. La réciproque découle du lemme 4.2.5.

3) Le troisième point découle du lemme 4.2.5. □

Comme nous le verrons dans les exemples 4.2.27 et 4.2.28, il existe des classes spéciales appartenant à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Par conséquent, la caractérisation précédente, à savoir que la somme des trois plus grandes multiplicités d'une classe ordonnée doit être inférieure ou égale au degré de la classe pour que celle-ci appartienne à  $\mathcal{V}(\text{id})$ , ne caractérise pas toutes les classes de  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Ceci nous obligera par la suite à faire une disjonction de cas suivant si les classes sont spéciales ou non. De plus, il est difficile d'obtenir un critère aussi simple que dans le cas des classes non spéciales pour vérifier qu'une classe spéciale appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Le théorème 4.2.8 permet de réduire les applications birationnelles à tester pour vérifier qu'une classe spéciale est dans  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Il suffit de faire agir les applications de caractéristique Jonquières ayant comme point-base maximal le point correspondant à la plus grande multiplicité de  $c$ . En fait ce n'est pas si surprenant que le cas des classes spéciales soit plus compliqué que le cas des classes non spéciales. Les trois premiers points du support des classes spéciales sont précisément dans la configuration qui avait été oubliée par M. Noether et qui ont posé problème dans sa preuve du théorème de Noether-Castelnuovo (voir le commentaire fait après le théorème 1.3.16).

**Théorème 4.2.8.** *Soit  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{E}$  une classe spéciale ordonnée.*

1) *La classe  $c$  est dans  $\mathcal{V}(\text{id})$  si et seulement si pour toute application de Jonquières  $j$  et de point-base maximal  $p_0$  nous avons*

$$j_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

2) De plus, si  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  alors  $f$  est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a comme point-base maximal  $p_0$ . En notant  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{2d-2}}$  les petits points-base de  $f^{-1}$ ,  $c$  vérifie :

$$n = \lambda_0 + \frac{1}{d-1} \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_{2d-2}\}} \lambda_i.$$

Si  $f$  est une application de caractéristique Jonquières alors elle envoie un pinceau de droites sur un autre pinceau de droites. Par conséquent, en la pré-composant par un automorphisme, c'est une application de Jonquières. Ainsi il existe un représentant de  $\bar{f}$  qui est une application de Jonquières. Le reste de cette section est consacré à la preuve de ce théorème, et sera complété par deux exemples de classes spéciales. La démonstration est technique et est décomposée en faits pour faciliter la lecture. L'implication rapide est faite en premier. Pour montrer la réciproque, l'astuce est d'écrire la condition

$$f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell,$$

sous forme d'une somme mettant en jeu les multiplicités de  $c$  qui sont supportées par les points-base de  $f$  de sorte que tous les termes de la somme soient positifs.

*Démonstration.* Prouvons dans un premier temps le point 1). L'implication découle de la définition de cellule de Voronoï. En effet, une classe est dans la cellule associée à l'identité si et seulement si pour toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ,

$$f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

Par conséquent, si  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$  alors en particulier, pour toute application de Jonquières  $j$  de point-base maximal  $p_0$  nous avons :

$$j_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

Intéressons nous à la réciproque du point 1). Supposons que pour toute application de Jonquières  $j$  de point-base maximal  $p_0$ , nous ayons :

$$j_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell. \tag{4.2.9}$$

Nous devons montrer que pour toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ,

$$f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell.$$

Fixons  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  de degré  $d$  dont les  $r$  points-base  $\{p_i\}$  sont de multiplicité respective  $\{m_i\}$ . La numérotation est induite par celle déjà faite sur les points  $p_i$  du

support de  $c$  :  $i \leq j$  si et seulement si  $\lambda_i \geq \lambda_j$ . Rappelons que si le point  $p_i$  n'est pas dans le support de  $c$  alors nous posons  $\lambda_i = 0$ . D'après l'égalité (4.2.1) et le lemme 4.2.2, et en gardant ses notations, nous devons montrer que la somme suivante est positive :

$$(d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i = \sum_{\{\{i,j,k\}\} \in T} n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k \geq 0. \quad (\star\star)$$

Le reste de la preuve consiste à choisir, lorsque c'est possible, les triplets de  $T$  de sorte que chaque terme soit positif. Lorsque ça ne sera pas le cas, nous partitionnerons également  $E$  avec des sous-ensembles de tailles différentes afin d'obtenir également des sommes de termes positifs.

*Fait 4.2.10.* Pour tout triplet d'indices  $\{i_1, i_2, i_3\}$  tels que  $0 < i_1 < i_2 \leq i_3$ , nous avons :

$$n - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - \lambda_{i_3} \geq 0.$$

De plus, si ce terme est nul alors pour tout  $1 \leq j \leq i_3$ ,  $\lambda_j = n - \lambda_0$ .

*Démonstration.* Comme la classe  $c$  est spéciale les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$ . Par positivité des excès en  $p_0$  pour  $c$  et par l'inégalité de Bézout pour la droite passant par les points  $p_0$  et  $p_2$ , nous avons :

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \lambda_{i_3} \leq \lambda_1 + 2\lambda_2 \underset{4.1.1.3)}{\leq} \lambda_0 + \lambda_2 \underset{4.1.1.4)}{\leq} n.$$

Si  $n - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - \lambda_{i_3} = 0$  alors en considérant le cas d'égalité dans les inégalités ci-dessus nous obtenons

$$\lambda_{i_3} = \lambda_2 = n - \lambda_0.$$

Nous concluons par décroissance des  $\lambda_i$ . □

*Fait 4.2.11.* Si le point  $p_0$  n'est pas un point-base de multiplicité maximale pour  $f$  alors

$$f_{\#}(c) \cdot \ell > c \cdot \ell.$$

*Démonstration.* Si le point  $p_0$  n'est pas un point-base de multiplicité maximale pour  $f$ , alors il existe un point-base de  $f$  dans  $\mathbb{P}^2$ , noté  $p_r$ , tel que

$$d-1 \underset{1.3.3.3)}{\geq} m_r > m_0.$$

Nous posons comme convention que si  $p_0$  n'est pas un point-base de  $f$ ,  $m_0 = 0$ . Nous pouvons réécrire le terme de gauche de  $(\star\star)$  :

$$\begin{aligned} (d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i &= m_0(n - \lambda_0 - \lambda_r) \\ &+ (d-1-m_0)n \\ &- \sum_{\substack{p_i \in \text{supp}(f) \\ i \notin \{0,r\}}} m_i \lambda_i \\ &- (m_r - m_0)\lambda_r. \end{aligned}$$

Nous complétons la seconde ligne à l'aide des  $(m_r - m_0)\lambda_r$  restants. C'est possible puisque nous avons vu que  $d-1 \geq m_r$ . En répartissant les  $\lambda_i$  de la troisième ligne nous obtenons une partition en triplets similaire à celle du lemme 4.2.2. Cependant, comme nous avons imposé que certains triplets sont composés des indices 0 et  $r$  et d'autres d'indice  $r$  nous devons vérifier que c'est encore possible de former des triplets d'indices deux à deux disjoints. Ordonnons les triplets à remplir avec en premier celui où il y a un indice  $r$  imposé puis ensuite ceux où aucun indice n'est imposé. Nous ne considérons pour le moment que ces triplets là. Nous répartissons les  $\lambda_i$  de la troisième ligne à l'aide de la « répartition en suivant » vue dans la preuve du lemme 4.2.2 en commençant au premier triplet où aucun indice n'est imposé. Pour chaque indice  $i$  tel que  $m_i > d-1-m_0$ , une fois les  $d-1-m_0$  premiers indices  $i$  répartis nous complétons les triplets contenant les indices 0 et  $r$ . Puis nous répartissons l'indice suivant à partir de là où nous nous étions arrêtés dans la répartition en suivant. Si à la fin il reste des indices nous les mettons dans les triplets commençant par les indices 0 et  $r$ .

Tous les termes de la somme sont ainsi soit de la forme  $n - \lambda_0 - \lambda_r - \lambda_k$  avec  $k \notin \{0, r\}$  soit de la forme  $n - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - \lambda_{i_3}$  avec  $0 < i_1 < i_2 < i_3$ . Montrons que les deux types de termes sont positifs ou nuls et qu'il existe au moins un terme strictement positif.

- Par le fait 4.2.10, les  $(d-1-m_0)$  termes de la forme  $n - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - \lambda_{i_3}$  sont positifs ou nuls. Montrons qu'il existe au moins un de ces termes qui est strictement positif. Comme  $d-1 > m_0$  et  $m_r > m_0$ , il existe un terme où  $\lambda_r$  apparaît :  $n - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} - \lambda_r$  avec  $0 < i_1 < i_2$  et  $r \notin \{0, i_1, i_2\}$ . Ce terme est strictement positif. En effet, sinon par le fait 4.2.10, nous aurions  $\lambda_1 = \lambda_r = n - \lambda_0$ , ce qui implique que

$$n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_r = \lambda_0 - n < 0.$$

Or les points  $p_0$  et  $p_r$  étant distincts dans  $\mathbb{P}^2$ , les points  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_r$  sont soit le support d'une application quadratique, soit alignés ce qui contredit le lemme 4.2.3.



• Intéressons-nous aux  $m_0$  autres termes :  $n - \lambda_0 - \lambda_r - \lambda_k$  où  $k \notin \{0, r\}$ . Il existe un point  $p_{k_1}$  tel que  $p_k$  soit voisin de, ou égal à  $p_{k_1}$  et que les points  $p_0, p_r$  et  $p_{k_1}$  soient le support d'une application quadratique ou soient alignés. Ainsi par le lemme 4.2.3 et par la positivité de l'excès au point  $p_{k_1}$  (Définition 4.1.1.3)), nous avons :

$$n - \lambda_0 - \lambda_r - \lambda_k \underset{4.1.1.3)}{\geq} n - \lambda_0 - \lambda_r - \lambda_{k_1} \underset{4.2.3}{\geq} 0.$$

Par conséquent, avec l'ensemble des triplets  $T$  définis ainsi, les termes de  $(\star\star)$  sont positifs et au moins un terme est strictement positif ce qui implique que cette somme est strictement positive.  $\square$

Il nous reste à étudier le cas où le point  $p_0$  est de multiplicité maximale pour  $f$  qui va se révéler être le cas le plus difficile. Considérons les sous-ensembles disjoints d'indices des points-base de  $f$  suivants :

- MIN est l'ensemble des indices  $i$  tels que  $p_i \in \text{supp}(f)$  et est un point mineur de  $c$ , c'est-à-dire  $\lambda_i \leq \frac{n-\lambda_0}{2}$ .
- ADH est l'ensemble des indices  $i \notin \text{MIN}$  tels que  $p_i \in \text{supp}(f)$  et est un point adhérent à  $p_0$ .
- VNA est l'ensemble des indices  $i \notin \text{MIN}$  tels que  $p_i \in \text{supp}(f)$  et est un point voisin et non adhérent à  $p_0$ .

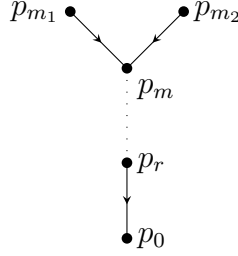
*Fait 4.2.12.* Les ensembles MIN, ADH et VNA correspondent à une partition des points-base de  $f$  hors  $p_0$ .

*Démonstration.* Ces ensembles d'indices étant disjoints, il suffit de montrer que tout point-base de  $f$  hors  $p_0$  est indicé par un élément de  $\text{ADH} \cup \text{VNA} \cup \text{MIN}$ .

Tous les points-base de  $f$  voisins du point  $p_0$  sont indicés par un élément de ces trois sous-ensemble. Montrons que les points de  $\mathbb{P}^2$  ou voisins d'un point de  $\mathbb{P}^2$  différent de  $p_0$  sont mineurs pour  $c$ . Soit  $p_m \in \mathbb{P}^2$  alors les points  $p_0, p_1, p_m$  sont soit alignés soit le support d'une application quadratique donc d'après le lemme 4.2.3 nous obtenons l'inégalité :

$$0 \underset{4.2.3}{\leq} n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_m \leq n - \lambda_0 - 2\lambda_m,$$

qui permet de conclure que le point  $p_m$  est mineur pour  $c$ . De plus, tout point  $p_{m'}$  voisin de  $p_m$  est mineur puisque  $\lambda_{m'} \leq \lambda_m$  par positivité des excès pour  $c$  en  $p_m$  et en tous les points qu'il faut éclater pour obtenir  $p'_m$  (Définition 4.1.1.3)).  $\square$



**Figure 4.1** – Les points  $p_{m_1}$  et  $p_{m_2}$  sont adhérents au point  $p_m$ .

Remarquons que par définition de l'ensemble MIN, tout terme de la forme suivante est positif :

$$n - \lambda_0 - \lambda_i - \lambda_j \geq 0, \text{ pour tous } i, j \in \text{MIN}.$$

Notons que les indices  $i$  et  $j$  ne sont pas forcément distincts. Si l'ensemble ADH est vide, il en est de même de VNA par positivité des excès pour  $c$  et pour  $f$  (Définition 4.1.1.3) et Proposition 1.3.10). Par conséquent, dans ce cas-là tous les indices hors 0 sont dans MIN et la somme de  $(\star\star)$  est positive car tous les termes le sont. Supposons donc que ADH est non vide. Le but dans ce qui suit est d'arranger de façon adéquate les multiplicités des points indicés par ADH et par VNA afin d'obtenir une somme dont chaque terme est positif.

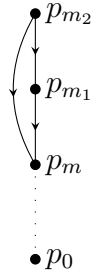
*Fait 4.2.13.* Chaque point voisin de  $p_0$  possède au plus un point adhérent indicé par  $\text{ADH} \cup \text{VNA}$ , les autres, s'ils existent, sont indicés par MIN.

*Démonstration.* Soient  $p_{m_1}$  et  $p_{m_2}$  deux points adhérents au point  $p_m$  voisin de  $p_0$ , et tels que  $\lambda_{m_2} \leq \lambda_{m_1}$  (voir Figure 4.1). Notons  $p_r$ , possiblement égal au point  $p_m$ , le point libre et adhérent à  $p_0$  tel que  $p_m$  soit voisin de  $p_r$ . Alors d'après l'inégalité de Bézout pour la droite passant par les points  $p_0$  et  $p_r$  et la positivité de l'excès en  $p_r$  et en  $p_m$ , nous avons :

$$0 \underset{4.1.1.4)}{\leq} n - \lambda_0 - \lambda_r \underset{4.1.1.3)}{\leq} n - \lambda_0 - \lambda_m \underset{4.1.1.3)}{\leq} n - \lambda_0 - \lambda_{m_1} - \lambda_{m_2} \leq n - \lambda_0 - 2\lambda_{m_2}.$$

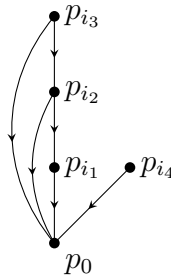
Par conséquent,  $m_2 \in \text{MIN}$ . □

Remarquons que le fait 4.2.13 implique que les points indicés par VNA sont tous libres. En effet, si un point  $p_{m_2}$  est satellite cela signifie que  $p_{m_2}$  est adhérent à deux points  $p_{m_1}$  et  $p_m$  et que  $p_{m_1}$  est également adhérent à  $p_m$  (voir Figure 4.2). Par le fait 4.2.13 et par positivité des excès en  $p_{m_1}$  nous obtenons que  $m_2 \in \text{MIN}$ . Par contre, les points indicés par ADH peuvent être libres ou satellites.



**Figure 4.2** – Le point  $p_{m_2}$  est un point satellite.

*Remarque 4.2.14.* Un point libre indicé par ADH est un point infiniment proche du premier ordre de  $p_0$ . De plus, tout point satellite indicé par ADH est voisin d'un point libre indicé par ADH. Par exemple sur la figure 4.3, les points  $p_{i_1}$ ,  $p_{i_2}$ ,  $p_{i_3}$  et  $p_{i_4}$  sont adhérents au point  $p_0$ . Les points  $p_{i_2}$  et  $p_{i_3}$  sont des points satellites et sont voisins du point  $p_{i_1}$  qui est libre. Le point  $p_{i_4}$  est lui aussi libre.



**Figure 4.3** – Une configuration de points adhérents à  $p_0$

*Fait 4.2.15.* Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $\{p_0, p_{j_1}, \dots, p_{j_{2\delta}}\}$  de l'ensemble des points-base de  $f$  qui est le support d'une application de Jonquières ayant pour point-base maximal  $p_0$ . Notons  $j_{\min} \in \{j_1, \dots, j_{2\delta}\}$  un indice tel que  $\lambda_{j_{\min}} = \min\{\lambda_i \mid i \in \{j_1, \dots, j_{2\delta}\}\}$ . Alors pour tout  $i \geq j_{\min}$ , l'indice  $i$  est dans l'ensemble MIN.

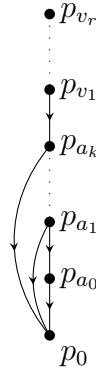
*Démonstration.* Soit  $j$  une application de caractéristique Jonquières ayant cet ensemble de points comme points-base. Notons qu'elle est de degré  $\delta + 1$ . Nous avons alors par hypothèse sur  $c$  :

$$0 \underset{(4.2.9)}{\leq} j_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell \underset{(4.2.1)}{=} \delta n - \delta \lambda_0 - \sum_{i=1}^{2\delta} \lambda_{j_i} \leq \delta(n - \lambda_0 - 2\lambda_{j_{\min}}).$$

Par conséquent l'indice  $j_{\min}$  est dans MIN, et par décroissance des  $\lambda_i$ , c'est le cas de tous les indices plus grands que  $j_{\min}$ .  $\square$

*Fait 4.2.16.* Parmi les points-base de  $f$  voisins de tout point libre indicé par ADH il y a au moins autant de points indicés par ADH que par VNA. En particulier, le cardinal de VNA est strictement inférieur à celui de ADH.

*Démonstration.* Soit  $a_0 \in \text{ADH}$  tel que  $p_{a_0}$  est un point libre. Notons  $a_1 \leq \dots \leq a_k$  les indices de ADH et  $v_1 \leq \dots \leq v_r$  les indices de VNA tels que les points  $p_{a_1}, \dots, p_{a_k}, p_{v_1}, \dots, p_{v_r}$  soient les voisins de  $p_{a_0}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $k$  soit strictement plus petit que  $r$  :  $k < r$ . Par le fait 4.2.13, ces points forment une tour où chaque point est adhérent au précédent mais n'est adhérent à aucun autre point de la tour, excepté de  $p_0$  lorsqu'ils sont indicés par ADH (voir Figure 4.4). Considérons l'ensemble pré-consistant de points  $\{p_0, p_{a_0}, p_{a_1}, \dots, p_{a_k}, p_{v_1}, \dots, p_{v_{k+1}}\}$ . D'après le lemme 1.3.21, il existe une application de Jonquières de degré  $k+2$  ayant cet ensemble de points comme points-base et  $p_0$  comme point-base maximal. Par le fait 4.2.15,  $v_{k+1}, \dots, v_r \in \text{MIN}$  ce qui est la contradiction attendue.  $\square$



**Figure 4.4** – Tour de points au-dessus de  $p_0$

S'il existe un point-base majeur de  $f$  indicé par ADH alors nous introduisons une dernière catégorie d'indice non disjointe des précédentes appelée JONQ. Construisons cet ensemble.

- tous les indices de ADH correspondant à des points majeurs pour  $f$  sont dans JONQ.
- Ensuite nous ajoutons un à un les indices des points majeurs de  $f$ , dans l'ordre décroissant des  $\lambda_i$ , de façon à ce que l'ensemble reste consistant à chaque étape.

• Nous nous arrêtons lorsqu'il y a autant de points adhérents à  $p_0$  que de points non adhérents à  $p_0$ . Cela arrive forcément d'après le lemme 1.3.20.

*Remarque 4.2.17.* D'après la proposition 1.3.22, il existe une application de Jonquières ayant  $p_0$  comme point-base maximal et possédant l'ensemble des points indicés par JONQ comme points-base de multiplicité 1.

*Fait 4.2.18.* Tout point-base majeur de  $f$  non indicé par JONQ est indicé par MIN.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $p_s$  un point-base majeur de  $f$  tel que  $s \notin \text{JONQ} \cup \text{MIN}$ . Comme les indices de ADH sont tous dans JONQ, la seule possibilité est que  $s \in \text{VNA}$ . Considérons un indice  $r$  de JONQ tel que pour tout  $j \in \text{JONQ}$ ,  $\lambda_r \leq \lambda_j$ . Par la remarque 4.2.17 et le fait 4.2.15, l'indice  $r$  est dans MIN et non pas dans ADH. Par conséquent, c'est l'un des derniers points ajoutés et comme nous rangeons les indices dans JONQ dans l'ordre décroissant des  $\lambda_i$  cela signifie que  $\lambda_s \leq \lambda_r$ . Par conséquent,  $s$  appartient à MIN, ce qui nous donne la contradiction attendue.  $\square$

Soit  $2\delta$  le cardinal de l'ensemble JONQ. Nous renommons par  $j_1, \dots, j_{2\delta}$  l'ensemble des indices de JONQ de sorte que  $m_{j_1} \geq \dots \geq m_{j_{2\delta}}$  et que pour tout  $1 \leq i \leq 2\delta$ , l'ensemble de points  $\{p_{j_1}, \dots, p_{j_i}\}$  muni de leur multiplicité respective est consistant. S'il n'existe pas de point-base majeur de  $f$  indicé par ADH alors JONQ est un ensemble vide et l'entier  $\delta$  ainsi que les multiplicités  $m_{j_i}$  seront considérés comme nuls dans les calculs qui suivent.

Commençons à réorganiser l'équation ( $\star\star$ ). Par le fait 4.2.12, il est possible de répartir les termes de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
(d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i &= m_{j_{2\delta}} (\delta n - \delta \lambda_0 - \lambda_{j_1} - \dots - \lambda_{j_{2\delta}}) \\
&+ (m_0 - \delta m_{j_{2\delta}}) (n - \lambda_0) \\
&+ (d-1 - m_0) n \\
&- \sum_{i=1}^{2\delta-1} (m_{j_i} - m_{j_{2\delta}}) \lambda_{j_i} \\
&- \sum_{i \in (\text{VNA} \cup \text{ADH}) \setminus \text{JONQ}} m_i \lambda_i \\
&- \sum_{i \in \text{MIN} \setminus \text{JONQ}} m_i \lambda_i.
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Lorsque nous sommes dans le cas des trois premières lignes, les termes en les  $m_i$  sont appelés *les poids des termes en les multiplicités  $\lambda_i$* . Notre but, à présent, est de

répartir les  $\lambda_i$  des sommes des trois dernières lignes afin que tous les termes soient positifs.

Posons pour tout point-base  $p_i$  de  $f$  :

$$\tilde{m}_i = \begin{cases} m_i - m_{j_{2\delta}} & \text{si } i \in \text{JONQ} \\ m_i & \text{sinon} \end{cases} .$$

Considérons les indices  $i$  de ADH dont la multiplicité  $\tilde{m}_i$  est non nulle. Notons les  $a_1, \dots, a_k$  de sorte que  $\tilde{m}_{a_1} \geq \dots \geq \tilde{m}_{a_k}$ . Faisons de même pour les indices de VNA et notons les  $v_1, \dots, v_r$  de sorte que  $\tilde{m}_{v_1} \geq \dots \geq \tilde{m}_{v_r}$ . Malgré le fait 4.2.16,  $k$  n'est pas forcément strictement supérieur à  $r$ . En effet il se pourrait qu'une situation analogue à l'exemple suivant arrive. Considérons la tour de points  $p_0, p_1, p_2, p_3$  incluse

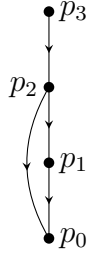


Figure 4.5

dans l'ensemble des points-base de  $f$  où chacun est adhérent au précédent, où  $p_2$  est également adhérent à  $p_0$  (voir Figure 4.5) et où  $1, 2 \in \text{ADH}$  et  $3 \in \text{VNA}$ . Si nous supposons de plus que  $1, 2 \in \text{JONQ}$ ,  $3 \notin \text{JONQ}$ , que  $m_1 = m_2 = m_{j_{2\delta}}$  et que les autres points-base de  $f$  sont dans  $\mathbb{P}^2$  alors  $k = 0$  alors que  $r = 1$ . Cette situation arrive si le point  $p_3$  est un point-base de  $f$  qui n'est pas majeur pour  $f$  mais qui est majeur pour  $c$ .

*Fait 4.2.20.* Si  $r \geq k > 0$  alors il existe au moins  $r - k + 1$  couples d'indices, notés  $(a_{k+t}, v_{i_t})_{1 \leq t \leq r-k+1}$  tels que tous les indices sont deux à deux distincts et pour  $1 \leq t \leq r - k + 1$  :

- $a_{k+t} \in \text{ADH} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ ,
- $v_{i_t} \in \{v_i\}_{1 \leq i \leq r}$ ,
- $p_{v_{i_t}}$  est voisin de  $p_{a_{k+t}}$ .

Remarquons que la condition  $a_{k+t} \in \text{ADH} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  est équivalente à  $a_{k+t} \in \text{ADH} \cap \text{JONQ}$  et  $\tilde{m}_{a_{k+t}} = 0$ .

*Remarque 4.2.21.* L'hypothèse  $k > 0$  est indispensable car sinon nous pourrions avoir la situation précédent le fait 4.2.20. Dans ce cas-là,  $k = 0$  et  $r = 1$ . Il y a effectivement deux points indicés par ADH qui ont une multiplicité  $\tilde{m}_i$  nulle mais il n'existe qu'un point indicé par VNA et voisin des points  $p_1$  et  $p_2$ .

*Démonstration.* Notons  $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}$  les points libres indicés par ADH. Tous les points indicés par  $\text{ADH} \cup \text{VNA}$  sont voisins ou égaux à ces points-là d'après la remarque 4.2.14. Pour tout  $j \in \{1 \dots, n\}$ , considérons le point  $p_{i_j}$  ainsi que ses points voisins indicés par  $\text{ADH} \cup \text{VNA}$ . D'après le fait 4.2.13, ils forment une tour où chacun est adhérent uniquement au point précédent, sauf les points indicés par ADH qui sont également adhérents au point  $p_0$ . Notons  $k_{i_j}$  et  $r_{i_j}$  le cardinal des indices des points voisins ou égaux à  $p_{i_j}$  dont la multiplicité  $\tilde{m}_i$  est non nulle et qui sont respectivement indicés par ADH et VNA.

Si  $k_{i_j} \leq r_{i_j}$  alors d'après le fait 4.2.16, cela implique qu'il existe au moins  $r_{i_j} - k_{i_j} + 1$  points distincts de cette tour indicés par ADH qui ont une multiplicité  $\tilde{m}_i$  nulle. Dans le cas où  $k_{i_j}$  est non nul,  $r_{i_j} - k_{i_j} + 1 \leq r_{i_j}$  donc il existe au moins  $r_{i_j} - k_{i_j} + 1$  points distincts de cette tour indicés par VNA qui ont une multiplicité  $\tilde{m}_i$  non nulle. Si  $k_{i_j} = 0$  alors il y en a  $r_{i_j} = r_{i_j} - k_{i_j}$ . Par conséquent dans les deux cas il existe  $r_{i_j} - k_{i_j}$  points distincts de cette tour indicés par VNA qui ont une multiplicité  $\tilde{m}_i$  non nulle et autant indicés par ADH qui ont une multiplicité  $\tilde{m}_i$  nulle. Nous pouvons en ajouter un de plus dans chaque famille lorsque  $k_{i_j}$  est non nul.

Notons  $J$  l'ensemble des indices  $j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $k_{i_j} \leq r_{i_j}$ . Comme nous avons supposé  $k$  non nul cela signifie qu'il existe au moins un élément  $s \in \{1 \dots, n\}$  tel que  $k_{i_s}$  est non nul. S'il y en a plusieurs, nous en choisissons un. Posons :

$$C_s = \begin{cases} r_{i_s} - k_{i_s} + 1 + \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq s}} (r_{i_j} - k_{i_j}) & \text{si } s \in J \\ \sum_{j \in J} (r_{i_j} - k_{i_j}) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous avons montré que nous pouvons choisir au moins  $C_s$  couples ayant les propriétés de l'énoncé. Dans les deux cas de la définition de  $C_s$ , comme  $r_{i_j} - k_{i_j} < 0$  pour  $j \notin J$ , nous avons

$$r - k = \sum_{j \in J} (r_{i_j} - k_{i_j}) + \sum_{j \notin J} (r_{i_j} - k_{i_j}) < C_s,$$

par conséquent nous pouvons choisir  $r - k + 1$  couples comme dans l'énoncé.  $\square$

*Fait 4.2.22.* Nous avons  $\tilde{m}_{a_1} \leq \frac{d-m_0}{2}$  et  $\tilde{m}_{v_1} \leq \frac{d-m_0}{2}$ .





Remarquons que les expressions des lignes  $(*_{adh})$  et  $(*_{vna})$  sont respectivement égales à

$$\tilde{m}_{a_1}n - \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{a_i}\lambda_{a_i} \quad \text{et} \quad \tilde{m}_{v_1}n - \sum_{i=1}^r \tilde{m}_{v_i}\lambda_{v_i}.$$

Si  $r = 0$  la somme s'écrit de la même façon sans les termes de  $(*_{vna})$ . De même, si  $k = 0$  il n'y a plus les termes de  $(*_{adh})$ . Montrons que les termes de chaque ligne exceptée la dernière, sont positifs. Ensuite, nous répartirons les  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$  de sorte que chaque terme reste positif.

\* **Les poids sont positifs.** Les points  $p_{j_1}, \dots, p_{j_\delta}$  sont adhérents à  $p_0$ , par conséquent, par décroissance des multiplicités  $m_{j_i}$  et par positivité des excès en  $p_0$  pour  $f$ , nous avons :

$$m_0 \underset{1.3.10}{\geq} \sum_{i=1}^{\delta} m_{j_i} \geq \delta m_{j_{2\delta}}.$$

Ainsi, le poids  $m_0 - \delta m_{j_{2\delta}}$  est positif. Les autres poids le sont par hypothèse de décroissance des multiplicités et par hypothèse du cas i).

\* **Les termes en  $\lambda_i$  sont positifs.** Le terme en  $\lambda_i$  de  $(*_{jonq})$  est positif par l'hypothèse faite sur  $c$  (équation (4.2.9)) et par la remarque 4.2.17 et l'équation (4.2.1). Considérons les termes de  $(*_{adh})$ . En utilisant la positivité des excès en  $p_0$  pour  $c$ , nous avons pour  $1 \leq i \leq k$  :

$$n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \dots - \lambda_{a_i} \underset{4.1.1.3}{\geq} n - \lambda_0 \underset{4.1.2}{>} 0. \quad (4.2.23)$$

Par le fait 4.2.16 et par positivité des excès pour  $c$  en chaque point adhérent (Proposition 4.1.1.3)), nous avons :

$$\sum_{i \in \text{VNA}} \lambda_i \leq \sum_{i \in \text{ADH}} \lambda_i.$$

Ainsi les termes de  $(*_{vna})$  sont strictement positifs, pour  $1 \leq i \leq r$  :

$$n - \lambda_{v_1} - \lambda_{v_2} - \dots - \lambda_{v_i} \geq n - \sum_{i \in \text{VNA}} \lambda_i \geq n - \sum_{i \in \text{ADH}} \lambda_i \geq n - \lambda_0 \underset{4.1.2}{>} 0. \quad (4.2.24)$$

\* **Répartissons les  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$ .** Nous voulons répartir les  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$ , de sorte que les termes soient comme dans le lemme 4.2.2, de la forme  $n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k$ . Cependant, si  $k \geq 4$  ou  $r \geq 4$ , certains termes  $(*_{adh})$  et  $(*_{vna})$  sont *surchargés*, c'est-à-dire qu'ils contiennent plus de trois multiplicités  $\lambda_i$ , par conséquent d'autres termes devront être sous-chargés. Nous répartissons ainsi les multiplicités  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$  dans les termes de  $(*_{\lambda_0})$ ,  $(*_n)$  et les deux derniers de  $(*_{adh})$  et de  $(*_{vna})$ . Les termes que nous venons de compléter sont positifs par la définition de l'ensemble MIN.

Nous venons de montrer que si  $c$  satisfait la condition (4.2.9) alors pour toute application  $f$  qui a pour point-base maximal  $p_0$  et dont les points-base satisfont i),  $f_{\#}(c) \cdot \ell \geq c \cdot \ell$ .

ii) Plaçons nous dans le cas où  $d - m_0 - \tilde{m}_{a_1} - \tilde{m}_{v_1} = 0$ . Le fait 4.2.22 implique que

$$\tilde{m}_{a_1} = \tilde{m}_{v_1} = \frac{d - m_0}{2}.$$

En particulier,  $k$  et  $r$  sont strictement positifs. Nous ne pouvons pas répartir les termes de la somme comme dans le cas i) puisque le poids de  $(*_n)$  est à présent négatif :

$$-1 - m_0 - \tilde{m}_{a_1} - \tilde{m}_{v_1} = -1.$$

Si  $r \geq k$ , nous reprenons le résultat et les notations du fait 4.2.20. Posons  $J = \{i_t\}_{1 \leq t \leq r-k+1}$  l'ensemble des indices apparaissant dans le fait 4.2.20. Notons  $J^c$  son complémentaire. Les ensembles  $J$  et  $J^c$  forment une partition de l'ensemble des indices  $\{1, \dots, r\}$ . Dans le cas où  $J^c$  est non vide, nous notons  $t_0$  un de ses éléments. S'il est vide les termes de  $(*_v)$  n'existent pas et  $\lambda_{v_{t_0}} = 0$ . Si  $r < k$  alors  $J$  est vide et  $J^c$  contient les  $r$  indices  $\{1, \dots, r\}$ .

Par rapport à la répartition des termes dans la somme du cas i), nous voulons répartir une fois les multiplicités  $\lambda_{v_i}$  dans d'autres termes afin que le poids de  $(*_n)$  soit positif. Pour cela, nous surchargeons le terme  $(*_{av})$  afin de ne pas avoir à compléter les termes  $(*_v)$ . Nous arrangeons donc les termes de la somme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
(d-1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f)} m_i \lambda_i &= m_{j_{2\delta}} (\delta n - \delta \lambda_0 - \lambda_{j_1} - \dots - \lambda_{j_{2\delta}}) & (*_{jonq}) \\
&+ n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \dots - \lambda_{a_k} - \lambda_{v_{t_0}} - \sum_{t \in J} \lambda_{v_t} & (*_{av}) \\
&+ (\tilde{m}_{a_k} - 1)(n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \dots - \lambda_{a_k}) \\
&+ (\tilde{m}_{a_{k-1}} - \tilde{m}_{a_k})(n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \dots - \lambda_{a_{k-1}}) \\
&\vdots \\
&+ (\tilde{m}_{a_1} - \tilde{m}_{a_2})(n - \lambda_{a_1}) \\
&+ \sum_{t \in J^c \setminus \{t_0\}} (n - \lambda_0 - \lambda_{v_t}) & (*_v) \\
&+ (\tilde{m}_{v_r} - 1)(n - \lambda_{v_1} - \lambda_{v_2} - \dots - \lambda_{v_r}) \\
&+ (\tilde{m}_{v_{r-1}} - \tilde{m}_{v_r})(n - \lambda_{v_1} - \lambda_{v_2} - \dots - \lambda_{v_{r-1}}) \\
&\vdots \\
&+ (\tilde{m}_{v_1} - \tilde{m}_{v_2})(n - \lambda_{v_1}) \\
&+ (m_0 - \text{Card}(J^c) + 1 - \delta m_{j_{2\delta}})(n - \lambda_0) & (*_{\lambda_0}) \\
&+ (d-1 - m_0 - \tilde{m}_{a_1} - \tilde{m}_{v_1} + 1)n & (*_n) \\
&- \sum_{i \in \text{MIN}} m_i \lambda_i.
\end{aligned}$$

Remarquons que les expressions des lignes  $(*_{av})$  et  $(*_{adh})$  sont égales à :

$$\tilde{m}_{a_1} n - \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{a_i} \lambda_{a_i} - \lambda_{v_{t_0}} - \sum_{t \in J} \lambda_{v_t},$$

celle de la ligne  $(*_v)$ , si elle existe, est égale à :

$$(\text{Card}(J^c) - 1)(n - \lambda_0) - \sum_{t \in J^c \setminus \{t_0\}} \lambda_{v_t},$$

et celles des lignes  $(*_{vna})$  est égale à :

$$(\tilde{m}_{v_1} - 1)n - \sum_{i=1}^r (\tilde{m}_{v_i} - 1)\lambda_{v_i}.$$

Montrons que nous pouvons compléter les termes incomplets à l'aide des  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$  afin que chaque terme soit positif.

\* **Les poids sont positifs.** Montrons dans un premier temps que le cardinal de  $J^c$  est inférieur ou égal à  $k - 1$  :

$$\text{Card}(J^c) = \begin{cases} r \leq k - 1 & \text{si } r < k \\ r - (r - k + 1) = k - 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En utilisant cela ainsi que la positivité des excès en  $p_0$  pour  $f$ , nous obtenons :

$$m_0 \underset{1.3.10}{\geq} \sum_{i \in \text{ADH}} m_i = \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{a_i} + \sum_{i \in \text{JONQ} \cap \text{ADH}} m_{j_{2\delta}} \geq k + \delta m_{j_{2\delta}} > \text{Card}(J^c) + \delta m_{j_{2\delta}}.$$

Ainsi le poids  $m_0 - \text{Card}(J^c) + 1 - \delta m_{j_{2\delta}}$  est strictement positif. Les autres le sont par décroissance des  $\tilde{m}_i$  et par l'hypothèse faite dans le cas ii).

\* **Les termes en  $\lambda_i$  sont positifs.** Les termes en  $\lambda_i$  de  $(*_{jonq})$ ,  $(*_{adh})$  et  $(*_{vna})$  sont positifs par les mêmes arguments que dans le cas i) puisqu'ils n'ont pas changé. S'il existe, le terme de  $(*_v)$  est positif d'après l'inégalité de Bézout (Proposition 4.1.1.4)).

Il reste à montrer la positivité du terme en  $\lambda_i$  de  $(*_{av})$ . Si  $\ell \geq k$  alors d'après le fait 4.2.20, il existe des points  $p_{a_{k+1}}, \dots, p_{a_{\ell+1}}$  adhérents à  $p_0$ , distincts des  $\{p_{a_i}\}_{1 \leq i \leq k}$  et tels que pour  $t \in J$ ,  $p_{v_{i_t}}$  est voisin de  $p_{a_{k+t}}$ . Ainsi par positivité des excès au-dessus de chaque point adhérent :

$$\sum_{t \in J} \lambda_{v_t} \leq \sum_{t \in J} \lambda_{a_{k+t}}.$$

Notons  $p_a$  le point libre adhérent à  $p_0$  tel que le point  $p_{v_{t_0}}$  est voisin de  $p_a$ . Nous avons par positivité des excès pour les points  $p_0$  et  $p_a$ , et par l'inégalité de Bézout :

$$\begin{aligned} n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \dots - \lambda_{a_k} - \lambda_{v_{t_0}} - \sum_{t \in J} \lambda_{v_t} &\geq n - \sum_{i=1}^k \lambda_{a_i} - \sum_{t \in J} \lambda_{a_{k+t}} - \lambda_{v_{t_0}} \\ &\underset{4.1.1.3)}{\geq} n - \lambda_0 - \lambda_{v_{t_0}} \\ &\underset{4.1.1.3)}{\geq} n - \lambda_0 - \lambda_a \\ &\underset{4.1.1.4)}{\geq} 0, \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

et donc le terme en  $\lambda_i$  de  $(*_{av})$  est positif. Si  $r < k$  alors  $J$  est vide et nous obtenons le même résultat en utilisant la même inégalité qu'au-dessus en enlevant la somme sur  $J$ .

\* Montrons que nous pouvons **laisser incomplets les termes de**  $(*_v)$ , s'ils existent. Si  $k = 1$  alors  $J^c$  est vide et il n'y a par conséquent rien à faire. Sinon le terme de  $(*_av)$  possède  $k + \text{Card}(J) + 1 - 3 = k - 2 + \text{Card}(J)$  multiplicités  $\lambda_i$  en trop qui compensent les  $\text{Card}(J^c) - 1 \leq k - 2$  multiplicités manquantes.

\* **Complétons les termes de la somme avec les  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$ .** D'après le point précédent, les termes à compléter sont les deux dernières lignes de  $(*_adh)$  et  $(*_vna)$ , ainsi que les termes  $(*_\lambda_0)$  et  $(*_n)$ . Par la définition de MIN tous les termes complétés sont positifs.

Ainsi la somme est positive comme attendue.

Ceci conclut le cas ii) et donc le point 1) du théorème 4.2.8.

Montrons maintenant le point 2) du théorème 4.2.8. Supposons maintenant que  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$ . Nous voulons montrer que  $f$  est de caractéristique Jonquières dont le point-base de multiplicité maximale de l'inverse est  $p_0$ . Par définition :

$$\begin{aligned} c \cdot \ell &= c \cdot f_{\#}(\ell) \\ &= f_{\#}^{-1}(c) \cdot \ell. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le fait 4.2.11, le point  $p_0$  doit être un point-base de  $f^{-1}$  de multiplicité maximale. De plus, la somme  $(**)$  appliquée à  $f^{-1}$  doit être nulle. Suivant si nous nous trouvons dans le cas i) ou dans le cas ii), nous utilisons la répartition des termes faite dans i) ou dans ii). Comme  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ , nous avons déjà montré, dans la première partie de la preuve, que tous les termes de ces sommes sont positifs ou nuls. Nous devons étudier à quelles conditions ils sont en fait tous nuls.

a) Les points-base de  $f^{-1}$  ne peuvent pas satisfaire la condition du cas ii). Supposons que ce soit le cas. Alors, le terme  $(*_av)$  est nul ce qui implique en prenant le cas d'égalité des inégalités (4.2.25) que  $\lambda_{v_{t_0}} = n - \lambda_0$ . Considérons la suite minimale de points du support de  $f^{-1}$ , hors  $p_0$ , qu'il a fallu éclater pour obtenir  $p_{v_{t_0}}$  et notons-les  $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, p_{i_{k+1}}$  où  $p_{i_{k+1}} = p_{v_{t_0}}$ . Comme  $v_{t_0} \in \text{VNA}$ , par positivité des excès, les indices  $i_1, \dots, i_k$  appartiennent à  $\text{VNA} \cup \text{ADH}$ . D'après le fait 4.2.13, chacun est adhérent uniquement au point précédent sauf les points indicés par ADH qui sont également adhérents à  $p_0$ . Notons  $k'$  le plus petit entier tel que  $p_{i_{k'}}$  ne soit pas adhérent à  $p_0$ . Considérons  $k' - 2$  points de  $\mathbb{P}^2$  (pas forcément dans le support de  $c$ ) tels que deux points de cette famille ne soient pas alignés avec  $p_0$ . D'après le lemme 1.3.21 ces points ainsi que les points  $p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k'}}$  forment le support d'une application de Jonquières  $j$  de degré  $k'$ . Nous obtenons la contradiction suivante en

utilisant la positivité des excès au-dessus des points  $\{p_{i_s}\}_{1 \leq s \leq k}$  :

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(4.2.9)}{\leq} j_{\#}(c) \cdot \ell - c \cdot \ell \\
&\stackrel{(4.2.1)}{\leq} (k' - 1)n - (k' - 1)\lambda_0 - \lambda_{i_1} - \cdots - \lambda_{i'_k} \\
&\stackrel{4.1.1.3)}{\leq} (k' - 1)n - (k' - 1)\lambda_0 - k' \lambda_{v_{t_0}} \\
&= -(n - \lambda_0) \stackrel{4.1.2}{\leq} 0.
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Par conséquent, dans le cas ii) il n'existe pas de  $f$  telle que  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$ .

b) Les points-base de  $f^{-1}$  doivent donc satisfaire les conditions du cas i). Tous les termes de la somme du cas i) étant nuls, c'est en particulier le cas du terme  $\tilde{m}_{a_k}(n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \cdots - \lambda_{a_k})$  de  $(*_{adh})$ . Par hypothèse sur le choix de l'indice  $k$ ,  $\tilde{m}_{a_k}$  est non nul, c'est donc  $n - \lambda_{a_1} - \lambda_{a_2} - \cdots - \lambda_{a_k}$  qui est nul. L'équation (4.2.23) implique que  $k \leq 2$  puisque pour  $k = 1$  et  $k = 2$  les termes ont été complétés à l'aide des  $\lambda_i$  où  $i \in \text{MIN}$ . Mais le fait 4.2.10 implique qu'alors  $\lambda_i = n - \lambda_0$  ce qui est absurde puisque  $i \in \text{MIN}$ . Ainsi  $k = 0$  et il n'y a pas de termes  $(*_{adh})$ . Nous obtenons de même qu'il n'y a pas de termes  $(*_{vna})$ . Par le fait 4.2.10, le terme en  $\lambda_i$  de  $(*_n)$  est strictement positif. Par conséquent, pour que  $(*_n)$  soit nul, il faut que son poids qui est égal à  $d - 1 - m_0$  le soit. Ceci implique que  $m_0 = d - 1$ . Par conséquent  $f^{-1}$  est une application de caractéristique Jonquières et dont le point-base maximal est  $p_0$  d'après le point 4) du lemme 1.3.3. De plus, en notant  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{2d-2}}$  les petits points-base de  $f^{-1}$ , la condition  $c \cdot \ell = j_{\#}^{-1} \cdot \ell$  se réécrit grâce à l'équation (4.2.1) :

$$n = \lambda_0 + \frac{1}{d-1} \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_{2d-2}\}} \lambda_i.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.2.8. □

*Exemple 4.2.27.* Il existe des classes spéciales dans la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Considérons  $p_0 \in \mathbb{P}^2$  et deux points libres et adhérents à  $p_0$  notés  $p_1$  et  $p_2$ . Considérons la classe

$$c = \frac{1}{5}(7\ell - 4e_{p_0} - 2e_{p_1} - 2e_{p_2}).$$

Montrons qu'elle appartient à  $\mathcal{E}$ . Elle est d'auto-intersection 1. Les excès sont positifs. Elle est positive contre l'anti-canonique. Montrons qu'elle satisfait également la condition de Bézout. C'est clair pour les droites. Pour les coniques aussi (à noter que la seule conique passant par les trois points est la réunion de deux droites). Il existe

une cubique  $C$  passant avec multiplicité 2 en  $p_0$  et avec multiplicité 1 aux points  $p_1$  et  $p_2$ . Considérons une courbe  $D$  de  $\mathbb{P}^2$  passant avec multiplicité  $\mu_i$  aux points  $p_i$ . Nous avons alors d'après le théorème de Bézout :

$$3d = C \cdot D \geq 2\mu_0 + \mu_1 + \mu_2.$$

Par conséquent,  $7d \geq 6d \geq 4\mu_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2$ . Et la condition de Bézout est vérifiée pour toute courbe. Ainsi, la classe  $c$  appartient à  $\mathcal{E}$  (Définition 4.1.1).

De plus, les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$  et le degré de  $c$  est strictement plus petit que la somme de ses trois plus grandes multiplicités. Par conséquent,  $c$  est une classe spéciale. Montrons que  $c \in \mathcal{V}(\text{id})$ .

D'après le théorème 4.2.8, il suffit de vérifier que pour toute application  $j$  de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$  que

$$j_{\#}(c) \cdot \ell \geq \ell \cdot c \Leftrightarrow c \cdot j_{\#}^{-1}(\ell) \geq c \cdot \ell.$$

Il n'existe pas d'application quadratique dont les points-base ont cette configuration (par positivité des excès). Soit  $\mathfrak{q}$  une application quadratique dont les points-base de l'inverse sont les points  $p_0, p_1$  et un troisième noté  $q$ . Dans ce cas, nous avons

$$c \cdot \mathfrak{q}_{\#}(\ell) = \frac{1}{5}(14 - 4 - 2) = \frac{8}{5} > \frac{7}{5} = c \cdot \ell.$$

Pour tout  $d \geq 3$ , il existe une application de Jonquières  $j$  de degré  $d$  telle que les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$  soient des points-base de  $j^{-1}$  avec  $p_0$  point-base maximal. Dans ces cas, nous avons :

$$c \cdot j_{\#}(\ell) = \frac{1}{5}(7d - 4(d - 1) - 1 - 1) = \frac{3d}{5} > \frac{7}{5}.$$

Par conséquent,  $c$  appartient à la cellule identité et n'appartient à aucune autre cellule.

L'exemple suivant montre que les germes de cellules contenant une classe spéciale en commun avec la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  ne sont pas forcément des applications de caractéristique Jonquières dont les points-base sont en configuration spéciale.

*Exemple 4.2.28.* Reprenons la même configuration que dans l'exemple précédent. Considérons deux points  $p_1$  et  $p_2$  libres et adhérents à un point  $p_0 \in \mathbb{P}^2$ . Posons :

$$c = \frac{1}{\sqrt{23}}(7\ell - 4e_{p_0} - 3e_{p_1} - e_{p_2}).$$

En faisant exactement les mêmes étapes que dans l'exemple précédent, excepté où pour l'inégalité de Bézout nous devons en plus remarquer que  $d \geq \mu_1$  nous montrons dans un premier temps que la classe  $c$  est dans  $\mathcal{E}$ . Puis en faisant les mêmes calculs d'intersection, nous montrons que  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et aux cellules dont le germe est une application quadratique dont les points-base de l'inverse sont les points  $p_0$ ,  $p_1$  et un troisième point. De plus,  $c$  n'appartient à aucune autre cellule.

### 4.2.2 Cellules adjacentes à la cellule associée à l'identité

Deux cellules de Voronoï sont dites *adjacentes* si leur intersection est non vide. Dans cette partie, nous déterminons les germes des cellules de Voronoï qui sont adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  et nous caractérisons les classes se trouvant dans de telles intersections.

**Théorème 4.2.29.** *Soit  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{V}(\text{id})$  une classe ordonnée.*

- 1) *Si  $c$  est une classe spéciale appartenant à  $\mathcal{V}(f)$  alors  $f$  est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$ . De plus en notant  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{2d-2}}$  les petits points-base de  $f^{-1}$ ,  $c$  vérifie :*

$$n = \lambda_0 + \frac{1}{d-1} \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_{2d-2}\}} \lambda_i.$$

- 2) *Dans le cas où  $c$  n'est pas une classe spéciale, quitte à permuter l'ordre des points  $p_i$  qui ont même multiplicité  $\lambda_i$ , nous avons  $c \in \mathcal{V}(f)$  si et seulement si nous sommes dans l'une des trois situations suivantes.*

- a) *L'application  $f$  est quadratique,  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$  sont les points-base de  $f^{-1}$  et  $n = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$  où  $\lambda_2$  peut éventuellement être nulle.*
- b) *L'application  $f$  est de caractéristique Jonquières non quadratique,  $p_0$  est le point-base de multiplicité maximale de  $f^{-1}$ , les points  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq 2d-2}$  sont ses autres points-base et*

$$c = n\ell - \lambda_0 e_{p_0} - \frac{n - \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} e_{p_i} - \sum_{i \geq 2d-1} \lambda_i e_{p_i}$$

où  $\lambda_0 \geq \frac{n - \lambda_0}{2} \geq \lambda_i$  pour tout  $i \geq 2d - 1$ .



- c) L'application  $f$  n'est pas de caractéristique Jonquières et possède  $r \in \{6, 7, 8\}$  points-base en position presque générale, les points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  sont les points-base de  $f^{-1}$  et

$$c = n\ell - \frac{n}{3} \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i} - \sum_{i \geq r} \lambda_i e_{p_i}$$

où  $\frac{n}{3} \geq \lambda_i$  pour tout  $i \geq r$ .

*Remarque 4.2.30.* Une classe  $c$  non-spéciale qui contient seulement deux points dans son support et telle que ses deux multiplicités sont égales à son degré, appartient à une infinité de cellules de Voronoï. En effet,  $c$  est au bord de  $\mathcal{E}$  et appartient à toutes les cellules  $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$  où  $\mathfrak{q}$  est une application quadratique telle que le support de  $c$  est inclus dans le support de  $\mathfrak{q}^{-1}$ . Ces cellules sont en nombre infini puisque il y a un nombre infini d'applications quadratiques modulo  $\text{PGL}(3, k)$ . Une classe spéciale peut également appartenir à une infinité de cellules de Voronoï. Dans les autres cas, les classes n'appartiennent qu'à un nombre fini de cellules de Voronoï.

*Démonstration.* Si  $c$  est une classe spéciale et  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  alors d'après le point 2) de la proposition 4.2.8,  $f^{-1}$  doit être de caractéristique Jonquières et doit avoir  $p_0$  comme point-base de multiplicité maximale.

Soit  $c = n\ell - \sum \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{V}(\text{id})$  une classe non spéciale et ordonnée. La classe  $c \in \mathcal{V}(f)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} c \cdot \ell &= c \cdot f_{\#}(\ell) \\ &= f_{\#}^{-1}(c) \cdot \ell. \end{aligned}$$

Notons  $d$  le degré de  $f^{-1}$  et  $m_i$  les multiplicités de ses points-base  $p_i$ . D'après l'équation (4.2.1) et en reprenant les notations et le résultat du lemme 4.2.2, il existe un ensemble  $T$  de  $d - 1$  triplets d'indices des points-base de  $f^{-1}$  dont chaque triplet est formé d'indices deux à deux disjoints et tel que l'égalité ci-dessus est équivalente à

$$0 = (d - 1)n - \sum_{p_i \in \text{supp}(f^{-1})} m_i \lambda_i = \sum_{\{\{i, j, k\}\} \in T} n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k. \quad (4.2.31)$$

Dans la somme de droite les multiplicités  $\lambda_i$  apparaissent  $m_i$  fois. La classe  $c$  n'est pas spéciale et appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  par conséquent d'après la remarque 4.2.7 nous avons pour tout  $i < j < k$  :

$$n - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k \geq n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \underset{4.2.7}{\geq} 0. \quad (4.2.32)$$

Ainsi  $c \in \mathcal{V}(f)$  si et seulement si tous les termes de la somme de droite de (4.2.31) sont nuls. Si nous sommes dans l'un des trois cas a), b) ou c) alors  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$ . Montrons à présent l'implication et supposons que  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$ . Distinguons les cas suivant si  $f$  est une application quadratique, si  $f$  est une application de caractéristique Jonquières non quadratique et enfin si  $f$  n'est pas de caractéristique Jonquières.

a) Si  $f$  est une application quadratique dont l'inverse a pour points-base  $p_{i_0}, p_{i_1}, p_{i_2}$  alors la somme (4.2.31) s'écrit

$$n - \lambda_{i_0} - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} = 0.$$

Les multiplicités  $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}$  et  $\lambda_{i_2}$  sont les trois plus grandes multiplicités de  $c$  car sinon :

$$0 = n - \lambda_{i_0} - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} > n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2,$$

ce qui contredirait l'équation (4.2.32). Ainsi, les points  $p_0, p_1$  et  $p_2$  sont les points-base de  $f^{-1}$  et  $n = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ .

b) Dans le cas où  $f$  est de caractéristique Jonquières de degré strictement supérieur à 2, notons  $\lambda_{i_0}$  la multiplicité pour  $c$  correspondant au point-base maximal de  $f^{-1}$  et  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{2d-2}}$  les multiplicités pour  $c$  correspondant aux points-base  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{2d-2}}$  de  $f^{-1}$  de sorte que  $\lambda_{i_1} \geq \dots \geq \lambda_{i_{2d-2}}$ . La somme (4.2.31) se réécrit :

$$0 = \sum_{j=1}^{d-1} (n - \lambda_{i_0} - \lambda_{i_{2j-1}} - \lambda_{i_{2j}}).$$

Comme tous les termes sont positifs ou nuls, ils sont en fait nuls. Ainsi, nous obtenons que  $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_{2d-2}} = \frac{n - \lambda_{i_0}}{2}$ . De même que précédemment pour ne pas contredire l'équation (4.2.32), nous devons avoir  $\lambda_{i_0} = \lambda_0$  et  $\lambda_1 = \lambda_{i_1}$  comme attendu.

c) Considérons enfin le cas où  $f$  n'est pas de caractéristique Jonquières. Notons  $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{r-1}}$  les multiplicités de  $c$  correspondant aux points-base  $p_{i_0}, \dots, p_{i_{r-1}}$  de  $f^{-1}$  de sorte que  $\lambda_{i_0} \geq \lambda_{i_1} \geq \dots \geq \lambda_{i_{r-1}}$ . Comme  $f$  n'est pas une application de Jonquières elle est de degré au moins 4 et par le lemme 1.3.5.1) elle possède au moins six points-base. De plus, par les points 3) et 4), pour tout  $i$ ,  $m_i \leq d - 2$ . Par conséquent, nous pouvons arranger les termes de la somme (4.2.31) de sorte qu'il y en ait un de la forme :  $n - \lambda_{i_0} - \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}$  et un autre de la forme :  $n - \lambda_{i_{r-3}} - \lambda_{i_{r-2}} - \lambda_{i_{r-1}}$  où  $r - 3 > 2$ . Comme  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$ , ils sont tous les deux nuls :

$$n = \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_{r-2}} + \lambda_{i_{r-1}} + \lambda_{i_r}.$$

Par décroissance des  $\lambda_{i_j}$  cela signifie qu'ils sont tous égaux à  $\frac{n}{3}$ . Si maintenant ce ne sont pas les multiplicités maximales pour  $c$  cela implique en particulier que  $\lambda_0 > \frac{n}{3}$  par conséquent :

$$n - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 < n - 3\frac{n}{3} = 0.$$

Or, ceci contredit l'équation (4.2.32). Ainsi, nous avons montré que si  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(f)$  alors  $c$  est  $r'$ -symétrique avec  $r' \geq r$ ,  $c$  a pour multiplicité maximale  $\frac{n}{3}$  et les points-base de  $f^{-1}$  sont inclus dans les points du support de  $c$  ayant la multiplicité maximale, comme attendu.  $\square$

Le corollaire 4.2.33 détermine tous les germes des cellules adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

**Corollaire 4.2.33.** *L'ensemble des germes des cellules adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$  est constitué de toutes :*

1) *les applications de caractéristique Jonquières,*

2) *les applications ayant au plus 8 points-base, qui ne sont pas de caractéristiques Jonquières et dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale.*

*Remarque 4.2.34.* Par le lemme 1.3.14, si les points-base de  $f^{-1}$  sont en position presque générale il en est de même des points-base de  $f$ . Nous énonçons le corollaire ainsi car nous l'utiliserons pour les points-base de  $f^{-1}$ .

*Démonstration.* Dans un premier temps, montrons que toutes les applications de caractéristique Jonquières et toutes les applications dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale et de cardinal au plus 8 correspondent à des cellules adjacentes à la cellule de l'identité. Pour cela, il suffit d'exhiber pour chacune de ces applications une classe  $c$  appartenant à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et qui possède les caractéristiques du théorème 4.2.29.

1) Si  $j$  est une application de caractéristique Jonquières de degré  $d$  dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$  et pour autres points-base  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq 2d-2}$ . Considérons la classe :

$$c_j = \sqrt{\frac{2}{d+1}} \left( \frac{d+1}{2} \ell - \frac{d-1}{2} e_{p_0} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} e_{p_i} \right).$$

Cette classe appartient au segment géodésique  $[\ell, j_{\#}(\ell)]$  puisque c'est la projection sur  $\mathbb{H}^{\infty}$  du milieu du segment euclidien reliant les classes  $\ell$  et  $j_{\#}(\ell)$ . D'après la proposition 4.1.4 l'espace  $\mathcal{E}$  est convexe donc la classe  $c_j$  appartient à  $\mathcal{E}$ . De plus, comme le degré de  $c_j$  est égal à la somme de ses trois plus grandes multiplicités, d'après le lemme

4.2.5  $c_j$  appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Ainsi,  $c$  satisfait le point a) ou b) du théorème 4.2.29 suivant si  $j$  est de degré 2 ou plus. La classe  $c_j$  est donc une classe commune à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et à  $\mathcal{V}(j)$ .

2) Soit  $f^{-1}$  une application ayant au plus 8 points-base  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  qui sont en position presque générale ( $r \leq 7$ ). Considérons la classe :

$$c_f = \frac{3}{\sqrt{9-r}}\ell - \frac{1}{\sqrt{9-r}} \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i}.$$

La classe  $c_f$  vérifie les trois premiers points de la définition 4.1.1. Pour montrer que  $c_f \in \mathcal{E}$ , il reste à vérifier que l'inégalité de Bézout est satisfaite (Définition 4.1.1.4)). Par hypothèse sur les points-base de  $f^{-1}$  c'est le cas pour toutes les droites et pour toutes les coniques. Montrons qu'elle est satisfaite pour toute courbe  $D$  de degré  $d \geq 3$  et de multiplicité  $\mu_i$  en  $p_i$  pour  $0 \leq i \leq r-1$ . Comme les points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  sont en position presque générale il découle du théorème de Riemann Roch ([Dol12, Lemma 8.3.1]) qu'il existe une cubique  $C$  passant par ces points. D'après l'inégalité de Bézout,  $3d = C \cdot D \geq \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i$ . Par conséquent nous obtenons :

$$d \frac{3}{\sqrt{9-r}} \geq \frac{1}{\sqrt{9-r}} \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i,$$

et l'inégalité de Bézout est toujours satisfaite pour des courbes de degré supérieur ou égal à 3. Ainsi la classe  $c_f$  appartient à  $\mathcal{E}$ . De plus, comme le degré de  $c_f$  est égal à la somme de ses trois plus grandes multiplicités, d'après le lemme 4.2.5  $c_f$  appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . De plus,  $c_f$  satisfait le point c) du théorème 4.2.29 ce qui implique que  $c_f$  est une classe commune de  $\mathcal{V}(\text{id})$  et de  $\mathcal{V}(f)$ .

Montrons à présent que si  $f$  ne satisfait pas les points 1) et 2) alors la cellule associée à  $f$  n'est pas adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Soit  $f$  une telle application. Comme par hypothèse, elle n'est pas de caractéristique Jonquières, si  $\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(\text{id})$  est non vide cela signifie par le théorème 4.2.29 qu'il existe une classe de la forme

$$c = n\ell - \frac{n}{3} \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i} - \sum_{i \geq r} \lambda_i e_{p_i}$$

où  $\frac{n}{3} \geq \lambda_i$  et où les points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq r-1}$  sont les points-base de  $f^{-1}$ . D'après le lemme 4.1.13, une telle classe  $r$ -symétrique vérifie  $r \leq 8$ , par conséquent  $f^{-1}$  ne possède pas plus de 8 points-base. Si  $f^{-1}$  possède quatre points-base alignés ou sept points-base sur une conique cela contredit l'inégalité de Bézout (Définition 4.1.1.4)) et donc cela

contredit le fait que  $c \in \mathcal{E}$ . De même si  $f^{-1}$  possède deux points-base adhérents à un même troisième point-base nous obtenons une contradiction avec la positivité des excès (Définition 4.1.1.3)).  $\square$

*Remarque 4.2.35.* Les conditions du point 2) du corollaire 4.2.33 sont nécessaires. Soient  $p_0, \dots, p_4 \in \mathbb{P}^2$  tels que trois points ne soient pas alignés. Ce sont les points-base d'une application de Jonquières  $j$  de degré 3 et de point-base maximal  $p_0$ . Soit  $L$  la droite passant par les points  $p_1$  et  $p_2$ . Considérons trois points formant le support d'une application quadratique  $q_1$  dont deux sont sur  $j(L)$  mais sont différents des points-base de  $j^{-1}$ . Alors l'application  $q_1 \circ j$  est une application ayant huit points-base dont quatre alignés et de caractéristique  $(6; 4, 2^4, 1^3)$ .

Soit  $C$  une conique passant par les points  $p_1, \dots, p_4$ . Considérons trois points formant le support d'une application quadratique  $q_2$  qui sont sur  $j(C)$  mais qui ne sont pas des points-base de  $j^{-1}$ . L'application  $q_2 \circ j$  est une application ayant huit points-base dont sept sur une conique.

Enfin, si maintenant nous composons l'application de Jonquières de degré trois  $(x, y) \mapsto (y^3 - x, y)$  par une application quadratique dont les trois points-base sont dans  $\mathbb{P}^2$  différents du point  $[1 : 0 : 0]$ , la composée possède huit points-base dont deux adhérents à un même troisième.

Ces trois applications, bien qu'ayant huit points-base, ne sont pas des germes de cellules adjacentes à l'identité d'après le corollaire 4.2.33.

Le corollaire suivant est une conséquence du corollaire 4.2.33 et du lemme 1.3.5.2).

**Corollaire 4.2.36.** *Les germes des cellules adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  qui ne sont pas des applications de caractéristique Jonquières sont de degré inférieur ou égal à 17.*

Remarquons que si  $\mathcal{V}(f)$  et  $\mathcal{V}(g)$  sont deux cellules adjacentes, le segment géodésique  $[f_{\#}(\ell), g_{\#}(\ell)]$  n'est pas forcément inclus dans l'union des cellules  $\mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$ .

*Exemple 4.2.37.* Considérons une application  $f$  dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale et qui a pour caractéristique  $(4, 3^3, 1^3)$ . Les classes dans l'intersection de  $\mathcal{V}(f)$  et  $\mathcal{V}(\text{id})$  sont 6-symétriques, ce qui n'est le cas d'aucune classe du segment  $[f_{\#}(\ell), \ell]$ . Par conséquent le segment traverse au moins une autre cellule de Voronoï.

Cependant si  $f$  est une application de caractéristique Jonquières ou une application symétrique cela n'arrive jamais. C'est l'objet du lemme suivant. Rappelons qu'une application est symétrique si elle est de degré strictement supérieur à 1 et si les multiplicités de ses points-base sont toutes égales.

**Lemme 4.2.38.** *Soit  $f$  une application symétrique ou de caractéristique Jonquières. Alors nous avons l'inclusion*

$$[\ell, f_{\#}(\ell)] \subset \mathcal{V}(\text{id}) \cup \mathcal{V}(f).$$

*Démonstration.* Si  $j$  est une application de Jonquières de degré  $d$ , dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$  et  $\{p_1, \dots, p_{2d-2}\}$  comme petits points-base. Notons

$$c_j = \sqrt{\frac{1}{2(d+1)}} \left( (d+1)\ell - (d-1)e_{p_0} - \sum_{i=1}^{2d-2} e_{p_i} \right).$$

Si  $s$  est une application symétrique de degré  $d$  dont l'inverse possède  $r$  points-base  $\{p_0, \dots, p_{r-1}\}$ , nous posons

$$c_s = \sqrt{\frac{d+1}{2}} \left( \ell - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i} \right).$$

Les classes  $c_j$  et  $c_s$  sont les normalisations des milieux des segments de l'espace de l'espace de Hilbert ambiant reliant respectivement les classes  $\ell$  et  $j_{\#}(\ell)$  et  $\ell$  et  $s_{\#}(\ell)$ . Par conséquent les classes  $c_j$  et  $c_s$  appartiennent respectivement aux segments géodésiques  $[\ell, j_{\#}(\ell)]$  et  $[\ell, s_{\#}(\ell)]$ . L'application  $s^{-1}$  est aussi une application symétrique de degré  $d$  et d'après le lemme 1.3.6 la multiplicité de ses points-base est égale à  $\frac{d+1}{3}$ . Par conséquent, elle ne peut pas posséder trois points-base alignés, ni six points-base sur une conique car sinon cela contredirait l'inégalité de Bézout (Proposition 1.3.11). De même, il ne peut pas y avoir deux points-base adhérents à un même troisième sinon cela contredirait la positivité des excès pour  $s^{-1}$  (Proposition 1.3.10). Ainsi en utilisant le corollaire 4.2.33 et le théorème 4.2.29,  $c_j \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(j)$  et  $c_s \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(s)$ . Ainsi,  $c_j$  est à égale distance de  $\ell$  et de  $j_{\#}(\ell)$  et  $c_s$  de  $\ell$  et de  $s_{\#}(\ell)$  et comme elles appartiennent respectivement aux segments géodésiques  $[\ell, j_{\#}(\ell)]$  et  $[\ell, s_{\#}(\ell)]$  ce sont les milieux de ces segments. Ainsi, ces segments sont inclus dans la réunion des deux cellules de Voronoï.  $\square$

### 4.2.3 Cellules quasi-adjacentes à la cellule associée à l'identité

Rappelons que le bord à l'infini de  $\mathcal{E}$  est constitué des classes du bord de  $\mathbb{H}^{\infty}$ , c'est-à-dire des classes d'auto-intersection nulle et de degré strictement positif, qui sont limites d'une suite de classes vivant dans l'hyperplan  $\{\ell = 1\}$  et proportionnelles à des classes de  $\mathcal{E}$ . Nous définissons de même le bord à l'infini d'une cellule de Voronoï

$\mathcal{V}(f)$ . Ce sont les classes du bord à l'infini de  $\mathcal{E}$  qui sont limites de classes vivant dans l'hyperplan  $\{\ell = 1\}$  et qui sont proportionnelles à des classes de  $\mathcal{V}(f)$ . Deux cellules ayant une classe en commun dans leur bord à l'infini sont dites *quasi-adjacentes*. Dans cette sous-section, le but est de caractériser les applications dont la cellule de Voronoï est quasi-adjacente à la cellule associée à l'identité. Avant cela, nous étudions les classes candidates à être dans de telles intersections et nous montrons au passage que les cellules adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$  sont quasi-adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Corollaire 4.2.44).

**Lemme 4.2.39.** *Soit  $\{p_0, \dots, p_{2d-2}\}$  le support d'une application de Jonquières de degré  $d$  et de point-base maximal  $p_0$ . Pour tout  $n$  strictement positif et pour tout  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$  la classe :*

$$c_{\lambda_0} = n\ell - \lambda_0 e_{p_0} - \frac{n - \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} e_{p_i} \in \mathcal{Z}(\mathbb{P}^2)$$

*est d'auto-intersection positive et est proportionnelle à une classe de  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que pour tout  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$  la classe  $c_{\lambda_0}$  est proportionnelle à une classe de  $\mathcal{E}$ , nous devons montrer que cette classe satisfait les points 1), 2), 3) et 4) de la définition 4.1.1.

Pour  $\lambda_0 < n$ , les multiplicités de la classe  $c_{\lambda_0}$  sont toutes positives et donc cette classe satisfait 4.1.1.1). Montrons que pour  $n$  strictement positif fixé, et pour  $\lambda_0 \in [\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n[$ ,  $c_{\lambda_0}$  est d'auto-intersection positive et vérifie les points 2), 3) et 4) de la définition 4.1.1.

- Posons

$$f(\lambda_0) = c_{\lambda_0}^2 = n^2 - \lambda_0^2 - \left(\frac{n - \lambda_0}{2}\right)^2 (2d - 2).$$

Alors  $f'(\lambda_0) = -\lambda_0(d+1) + n(d-1)$ . Ainsi la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[\frac{n}{3}, \frac{n(d-1)}{d+1}]$  puis décroissante sur l'intervalle  $[\frac{n(d-1)}{d+1}, n[$ . De plus,  $\lim_{\lambda_0 \rightarrow n} f(\lambda_0) = 0$ . Par conséquent, pour  $\frac{d-1}{d+1}n \leq \frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ ,  $c_{\lambda_0}$  est d'auto-intersection positive.

- La condition 2) qui est la positivité contre l'anti-canonique correspond à :

$$3n - \lambda_0 - (d-1)(n - \lambda_0) \geq 0.$$

Elle est vérifiée sans restriction sur  $\lambda_0$  lorsque  $d = 2$  et sinon  $\lambda_0$  doit satisfaire :

$$\lambda_0 \geq \frac{n(d-4)}{d-2}.$$

De plus, comme  $\frac{d-1}{d} \geq \frac{d-4}{d-2}$  quand  $d > 2$ , cette condition est satisfaite pour  $\lambda_0 \geq \frac{d-1}{d}n$ .

• Nous devons vérifier à quelle condition sur  $\lambda_0$ , les excès en tous les points du support de  $c_{\lambda_0}$  sont positifs (Définition 4.1.1.3)). D'après la remarque 1.3.12, il suffit juste de regarder l'excès au-dessus du point  $p_0$ . De plus, il y a au plus  $d - 1$  points adhérents à  $p_0$ . Nous voulons avoir :

$$\lambda_0 \geq (d - 1) \frac{n - \lambda_0}{2}.$$

Ceci est satisfait lorsque  $\lambda_0 \geq \frac{d-1}{d+1}n$ , ce qui est le cas lorsque  $\lambda_0 \geq \frac{d-1}{d}n$ .

• Nous nous intéressons à présent à l'inégalité de Bézout (Définition 4.1.1.4)). Soit  $D$  une courbe de degré  $\delta$  passant avec multiplicités  $\{\mu_i\}_{0 \leq i \leq 2d-2}$  en les points  $\{p_i\}_{0 \leq i \leq 2d-2}$ . Nous cherchons à savoir pour quelles valeurs de  $\lambda_0$ , le terme suivant est positif :

$$n\delta - \lambda_0\mu_0 - \frac{n - \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i = n \left( \delta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i \right) + \lambda_0 \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \mu_0 \right). \quad (4.2.40)$$

Si toutes les multiplicités  $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq 2d-2}$  sont nulles alors le terme (4.2.40) est égal à  $n\delta - \lambda_0\mu_0 > n(\delta - \mu_0) \geq 0$  et est positif. Considérons le cas où au moins l'un des  $\mu_i$  est strictement positif pour  $1 \leq i \leq 2d - 2$ . Par positivité des excès des points par lesquels passe la courbe  $D$  il existe alors un point de  $\mathbb{P}^2$  ou un point libre et adhérent à  $p_0$ , noté  $p_{i_k} \in \{p_i\}_{1 \leq i \leq 2d-2}$  tel que  $\mu_{i_k} > 0$ . En considérant la droite passant par les points  $p_0$  et  $p_{i_k}$  le théorème de Bézout pour la courbe  $D$  implique que  $\delta \geq \mu_0 + \mu_{i_k}$ . En particulier,  $\delta$  est strictement supérieur à  $\mu_0$  :  $\delta > \mu_0$ .

- \* Si  $\delta \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i$  et  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i \geq \mu_0$  alors (4.2.40) est positif pour tout  $\lambda_0$  positif donc en particulier pour  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ .
- \* Considérons le cas où  $\delta \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i$  et  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i < \mu_0$ . Alors, pour tout  $\lambda_0$  positif le terme (4.2.40) est supérieur ou égal à :

$$(n - \lambda_0) \left( \mu_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i \right) \geq 0.$$

C'est donc en particulier le cas pour  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ .

- \* Si  $\delta < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i$  alors  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i > \mu_0$ . Par conséquent, pour que (4.2.40) soit positif, il faut que nous ayons :

$$n > \lambda_0 \geq nt \quad \text{où} \quad t = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \delta}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \mu_0}. \quad (4.2.41)$$



Cependant, le facteur  $t$  dépend de la courbe  $D$  et nous voulons un coefficient  $\lambda_0$  uniforme. En particulier, il ne faudrait pas qu'il existe une suite de courbes  $\{D_i\}$  telle que la suite de facteurs  $\{t_i\}$  associés converge vers 1. Montrons que nous pouvons majorer  $t$  indépendamment de  $D$ . Considérons une courbe  $C$  du système linéaire associé à l'application de Jonquières. En appliquant le théorème de Bézout entre  $C$  et  $D$ , nous obtenons :

$$0 \leq \delta d - \mu_0(d-1) - \sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i.$$

Cela se réécrit :

$$-\delta \leq -\frac{d-1}{d}\mu_0 - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i. \quad (4.2.42)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \delta &\stackrel{(4.2.42)}{\leq} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right)\sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \frac{d-1}{d}\mu_0 \\ &= \frac{d-2}{2d}\sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \frac{d-1}{d}\mu_0 \\ &< \frac{d-1}{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2d-2} \mu_i - \mu_0\right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $t$  est majoré par  $\frac{d-1}{d}n$  et pour tout  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ ,  $\lambda_0$  satisfait l'équation (4.2.41).

Finalement, nous avons montré que pour tout  $\lambda_0$  tel que  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ , la classe  $c_{\lambda_0}$  est d'auto-intersection strictement positive et est proportionnelle à une classe de  $\mathcal{E}$  comme annoncé.  $\square$

La proposition suivante fournit des exemples de cellules quasi-adjacentes à la cellule associée à l'identité.

**Proposition 4.2.43.** 1) Soit  $j$  une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0 \in \mathbb{P}^2$ . Alors, nous avons :

$$\ell - e_{p_0} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(j).$$

2) Soit  $f$  une application dont les  $r \leq 8$  points-base  $\{p_0, \dots, p_{r-1}\}$  sont en position presque générale. Alors pour toute complétion en un ensemble de neuf points  $\{p_0, \dots, p_8\}$  en position presque générale, nous avons :

$$3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f).$$

*Démonstration.* 1) Soit  $j$  une application de caractéristique Jonquières de degré  $d$  dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0 \in \mathbb{P}^2$  et pour petits points-base  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq 2d-2}$ . Fixons  $n$  positif. Soit  $\frac{n}{3} \leq \lambda_0 < n$  et considérons la classe

$$c_{\lambda_0} = n\ell - \lambda_0 e_{p_0} - \frac{n - \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^{2d-2} e_{p_i} \in \mathcal{Z}(\mathbb{P}^2).$$

D'après le lemme 4.2.39, pour tout  $\lambda_0$  tel que  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ , cette classe est d'auto-intersection strictement positive et est proportionnelle à une classe de  $\mathcal{E}$ . Par conséquent, la normalisation  $\eta(c_{\lambda_0})$  de la classe  $c_{\lambda_0}$  introduite dans les préliminaires 1.2.2 est d'auto-intersection 1 et appartient à  $\mathcal{E}$  pour tout  $\frac{d-1}{d}n \leq \lambda_0 < n$ . La somme des trois plus grandes multiplicités de  $c_{\lambda_0}$  étant égale à  $n$ , cela reste le cas pour la classe normalisée. Ainsi, d'après le lemme 4.2.5 la classe  $\eta(c_{\lambda_0})$  appartient à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Le théorème 4.2.29 implique que  $\eta(c_{\lambda_0})$  appartient également à la cellule  $\mathcal{V}(j)$ . Par conséquent, la classe  $\frac{c_{\lambda_0}}{n}$  est proportionnelle à une classe appartenant à l'intersection des cellules  $\mathcal{V}(\text{id})$  et  $\mathcal{V}(j)$ . En prenant la limite quand  $\lambda_0$  tend vers  $n$  nous obtenons :

$$\ell - e_{p_0} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(j)$$

comme annoncé.

2) Considérons pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$  la classe

$$c_\varepsilon = 3\ell - \sum_{i=0}^{r-1} e_{p_i} - (1 - \varepsilon) \sum_{i=r}^8 e_{p_i}.$$

Son auto-intersection est strictement positive :  $9 - r - (1 - \varepsilon)^2(9 - r) > 0$ . Nous pouvons par conséquent considérer sa normalisation  $\eta(c_\varepsilon)$  qui est d'auto-intersection 1, qui est positive contre l'anti-canonique et dont les multiplicités et le degré sont positifs. Elle vérifie donc les points 1) et 2) de la définition 4.1.1. Le point 3) est vérifié car pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ , les points du support de la classe  $c_\varepsilon$  sont en position presque générale et par conséquent les excès sont tous positifs. Par le même argument, l'inégalité de Bézout est vérifiée pour les droites et les coniques. Il reste à vérifier

que l'inégalité de Bézout est satisfaite pour les courbes  $D$  de degré  $d$  supérieur ou égal à 3 et passant avec multiplicité  $\mu_i$  par les points  $p_i$  pour  $0 \leq i \leq 8$ . Comme les points  $\{p_0, \dots, p_7\}$  sont en position presque générale, d'après la proposition 1.3.13, la surface obtenue en éclatant ces points est faiblement del Pezzo. Avec le même argument que dans la preuve du corollaire 4.2.33, le théorème de Riemann-Roch implique que la forme anti-canonique sur cette surface correspond à un pinceau de cubiques. Par conséquent, il existe une cubique  $C$  de ce pinceau passant par le point  $p_8$ . D'après l'inégalité de Bézout appliquée aux courbes  $C$  et  $D$ , nous avons :

$$3d \geq \sum_{i=0}^8 \mu_i \geq \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i + (1 - \varepsilon) \sum_{i=r}^8 \mu_i.$$

Cela montre que la classe  $c_\varepsilon$  satisfait le point 4.1.1.4) et achève donc de prouver que  $c_\varepsilon$  est proportionnelle à une classe de  $\mathcal{E}$ . De plus, par le lemme 4.2.5 la classe  $\eta(c_\varepsilon)$  appartient à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ . En utilisant le théorème 4.2.29, nous obtenons finalement que pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ , la classe  $c_\varepsilon$  est proportionnelle à une classe vivant dans l'intersection  $\mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$ . En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, nous avons :

$$3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$$

qui est le résultat annoncé.  $\square$

**Corollaire 4.2.44.** *Une cellule adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  est quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 4.2.33, il n'y a que deux sortes de cellules adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$ , celles dont le germe est de caractéristique Jonquières et celles dont le germe est une application dont les  $r \leq 8$  points-base de l'inverse sont en position presque générale. Par la proposition 4.2.43, elles sont toutes quasi-adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .  $\square$

*Remarque 4.2.45.* Par définition du bord à l'infini  $\partial_\infty \mathcal{E}$ , nous obtenons que les classes de type  $3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$  appartiennent à  $\mathcal{E}$  si et seulement si l'ensemble  $\{p_0, \dots, p_8\}$  est en position presque générale.

**Lemme 4.2.46.** *Soit  $c \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$ . Si  $c$  n'est pas une classe spéciale alors  $c$  est une classe 1-symétrique pure ou 9-symétrique pure. Sinon  $c$  est une classe 1-symétrique.*

*Démonstration.* Supposons  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i}$  ordonnée. Si  $c$  est une classe spéciale alors les points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents au point  $p_0$ . Par positivité des excès en  $p_0$ ,

la multiplicité  $\lambda_1$  doit être strictement plus petite que  $p_0$ . Par conséquent  $c$  est une classe 1-symétrique.

Considérons maintenant le cas où la classe  $c$  n'est pas spéciale. Par définition  $c \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id})$  est limite d'une suite de classes proportionnelles à des classes de  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Quitte à prendre une sous-suite nous pouvons supposer que les classes de cette suite sont soit toutes spéciales soit toutes non spéciales. Si ces classes sont spéciales le degré de chacune des classes de cette suite est strictement inférieur à la somme de ses trois plus grandes multiplicités. Or  $c$  n'est pas une classe spéciale donc à la limite  $c$  satisfait  $n = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ .

Si toutes les classes de cette suite ne sont pas spéciales alors le degré de chacune est supérieur ou égal à la somme de ses trois plus grandes multiplicités. Ainsi, à la limite la classe  $c$  possède la même propriété. De même comme  $c \in \partial_\infty \mathcal{V}(f)$  la classe  $c$  est limite d'une suite de classes proportionnelles à des classes de  $\mathcal{V}(f)$  qui possèdent un degré inférieur ou égal à la somme de leurs trois plus grandes multiplicités. Ainsi il en est de même de  $c$ . Par conséquent la classe  $c$  satisfait :

$$n = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2. \quad (4.2.47)$$

Si la classe  $c$  est  $k$ -symétrique avec  $k \geq 3$ , alors ses multiplicités maximales sont égales au tiers du degré. Nous sommes dans les conditions du lemme 4.1.13 et  $c$  est 9-symétrique pure. Sinon supposons que  $\lambda_1$  soit non nul et montrons que ce n'est pas possible. Comme  $c^2 = 0$ , nous avons

$$n^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i^2. \quad (4.2.48)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left( 3n - \sum_{i \geq 0} \lambda_i \right) &\stackrel{(4.2.47)}{=} \lambda_2 \left( 2n - \sum_{i \geq 3} \lambda_i \right) \\ &\stackrel{(4.2.48)}{=} -n^2 + \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2n\lambda_2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i(\lambda_i - \lambda_2) \\ &= -(n - \lambda_2)^2 + \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i(\lambda_i - \lambda_2) \\ &\stackrel{(4.2.47)}{=} -(\lambda_0 + \lambda_1)^2 + \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i(\lambda_i - \lambda_2) \\ &= -2\lambda_0\lambda_1 + 2\lambda_2^2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i(\lambda_i - \lambda_2) \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Si  $\lambda_2$  est nul alors  $\lambda_1$  doit également être nul puisque le premier terme de (4.2.49) l'est. Ceci nous mène à une contradiction.

Plaçons nous dans le cas où  $\lambda_2 > 0$ . Comme la classe  $c$  est  $k$ -symétrique pour  $k \leq 2$ ,  $\lambda_2 < \lambda_0$ . Par conséquent, comme les multiplicités sont décroissantes le dernier terme de (4.2.49) est strictement négatif. Ceci implique qu'il en est de même de  $3n - \sum_{i \geq 0} \lambda_i$  puisque  $\lambda_2$  est strictement positif. Mais cela contredit le fait qu'une classe au bord est positive contre l'anti-canonique. Par conséquent,  $\lambda_1$  doit être nulle et la classe  $c$  est 1-symétrique pure.  $\square$

Remarquons qu'il n'existe peut-être pas de classe spéciale au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Nous n'avons ni réussi à en construire une ni réussi à montrer qu'il n'en existait pas.

**Proposition 4.2.50.** *L'ensemble des classes non spéciales au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(\text{id})$  et qui sont également dans le bord à l'infini d'une cellule quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  est constitué des classes suivantes :*

- 1)  $\ell - e_{p_0}$  où  $p_0 \in \mathbb{P}^2$ ,
- 2)  $3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$  où les points de l'ensemble  $\{p_0, \dots, p_8\}$  sont en position presque générale.

*Démonstration.* D'après la proposition 4.2.43, les cas 1) et 2) sont dans l'intersection entre le bord à l'infini de  $\mathcal{V}(\text{id})$  et celui d'une cellule adjacente. Le lemme 4.2.46 nous dit que les seules classes non spéciales vérifiant l'hypothèse de la proposition sont 1-symétrique pure ou 9-symétrique pure. Une classe 9-symétrique pure doit avoir comme support un ensemble de 9 points en position presque générale car sinon cela contredirait le fait que cette classe appartient à  $\partial_\infty \mathcal{E}$  (Remarque 4.2.45).  $\square$

**Proposition 4.2.51.** *Soient  $p_0 \in \mathbb{P}^2$  et  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . La classe  $\ell - e_{p_0}$  appartient à l'intersection  $\partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$  si et seulement si  $f$  est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$ .*

*Démonstration.* L'implication indirecte découle de la proposition 4.2.43.1).

Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $\ell - e_{p_0}$  soit dans l'intersection  $\partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$ . Si la cellule  $\mathcal{V}(f)$  est une cellule adjacente à la cellule associée à l'identité alors pour toute classe  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  nous avons par convexité des cellules de Voronoï l'inclusion suivante :

$$[c, \ell - e_{p_0}[ \subset \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f).$$

D'après le théorème 4.2.29, si  $f$  n'est pas une application de caractéristique Jonquières les classe de  $\mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  sont au moins  $r$ -symétriques où  $r \geq 6$  est le nombre

de points-base de  $f$ . Par conséquent, en notant  $p_0, \dots, p_r$  les points-base de  $f^{-1}$  toute classe multiple d'une classe du segment géodésique  $[c, \ell - e_{p_0}[$  vit dans le sous-espace vectoriel de l'espace de Picard-Manin obtenu comme intersection des hyperplans  $\{\lambda_{p_0} = \lambda_{p_1}\}, \{\lambda_{p_0} = \lambda_{p_2}\}, \dots, \{\lambda_{p_0} = \lambda_{p_{r-1}}\}$ . Or, la classe  $\ell - e_{p_0}$  n'appartient pas au bord à l'infini de ce sous-espace ce qui mène à une contradiction. Avec le même type d'argument nous obtenons une contradiction si nous supposons que  $f$  est une application de caractéristique Jonquières dont le point-base maximal de  $f^{-1}$  n'est pas le point  $p_0$ .

Montrons que  $f$  ne peut pas être le germe d'une cellule quasi-adjacente non adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. L'espace  $\mathcal{E}$  est convexe et les cellules de Voronoï recouvrent  $\mathcal{E}$ . De plus, les cellules adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  et contenant la classe  $\ell - e_{p_0}$  sont des applications de caractéristiques Jonquières dont le point-base maximal de l'inverse est  $p_0$ . Nous pouvons par conséquent supposer que la cellule  $\mathcal{V}(f)$  est adjacente à une cellule  $\mathcal{V}(j)$  où  $j$  est un représentant qui est une application de Jonquières et dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$ . Faisons agir à présent l'application  $j^{-1}$ . Elle fixe la classe à l'infini  $\ell - e_{p_0}$  ainsi la cellule  $\mathcal{V}(j^{-1} \circ f)$  est une cellule voisine de la cellule identité et elle possède la classe  $\ell - e_{p_0}$  dans son bord à l'infini. Par le point précédent, nous obtenons que  $j^{-1} \circ f$  est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour point-base maximal  $p_0$ . C'est donc aussi le cas de  $f$  ce qui mène à une contradiction. Ainsi,  $\mathcal{V}(f)$  est forcément adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et  $f$  est de caractéristique Jonquières et son inverse possède le point  $p_0$  comme point-base maximal.  $\square$

*Remarque 4.2.52.* Une cellule quasi-adjacente à la cellule associée à l'identité et ayant une classe de la forme  $\ell - e_{p_0} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$  est en fait une cellule adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

*Remarque 4.2.53.* S'il existe une classe spéciale  $c \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  et si  $\mathcal{V}(f)$  est adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  alors  $f^{-1}$  est une application de caractéristique Jonquières dont le point-base maximal est le point de multiplicité maximale de  $c$ . Cela découle du théorème 4.2.29 et du fait qu'il n'existe pas une suite de classes non spéciales de  $\mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  convergeant vers  $c$  puisque leur degré est égal à la somme de leurs trois plus grandes multiplicités contrairement à  $c$ . Par le même argument que dans la preuve du lemme 4.2.51, ce sont les seules applications dont les cellules de Voronoï contiennent cette classe.

**Proposition 4.2.54.** *Soit  $\{p_0, \dots, p_8\}$  un ensemble de points en position presque générale. L'application  $f$  satisfait*

$$3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i} \in \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(f)$$

si et seulement si  $f$  possède au plus neuf points-base et le support de son inverse est inclus dans  $\{p_0, \dots, p_8\}$ .

*Démonstration.* Posons  $c = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$ . Montrons la réciproque. Si  $f$  possède au plus huit points-base et que le support de  $f^{-1}$  est inclus dans le support de  $c$  alors le résultat provient de la proposition 4.2.43.2). Il nous reste à étudier le cas où  $\text{supp}(f^{-1}) = \text{supp}(c)$ . Notons  $\{m_q\}_{q \in \text{supp}(f)}$  les multiplicités des points-base de  $f$ ,  $\{m'_p\}_{p \in \text{supp}(f^{-1})}$  celles des points-base de  $f^{-1}$  et  $\{a_{p,q}\}_{q \in \text{supp}(f)}$  les autres coefficients de la matrice caractéristique, nous avons alors d'après l'équation (1.2.18) :

$$f_{\#}^{-1}(c) = \left(3d - \sum_{p \in \text{supp}(f^{-1})} m'_p\right)\ell - \sum_{q \in \text{supp}(f)} \left(3m_q - \sum_{p \in \text{supp}(f^{-1})} a_{p,q}\right)e_q.$$

Or d'après les égalités 1) et 5) du lemme 1.3.3, nous avons :

$$\begin{cases} 3d - \sum_{p \in \text{supp}(f^{-1})} m'_p = 3 \\ 3m_q - \sum_{p \in \text{supp}(f^{-1})} a_{q,p} = 1, \text{ pour tout } q \in \text{supp}(f) \end{cases},$$

ce qui implique que  $f_{\#}^{-1}(c) = 3\ell - \sum_{q \in \text{supp}(f)} e_q$ . Comme le groupe de Cremona préserve

$\mathcal{E}$  et  $\partial_{\infty}\mathcal{E}$ , la classe  $f_{\#}^{-1}(c)$  appartient à  $\partial_{\infty}\mathcal{E}$ . D'après la remarque 4.2.45, cela signifie que le support de cette classe est un ensemble de points en position presque générale. Par la proposition 4.2.50, nous obtenons que la classe  $f_{\#}^{-1}(c)$  appartient au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Par conséquent,  $c$  appartient au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(f)$  et nous pouvons en conclure que

$$c \in \partial_{\infty}\mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_{\infty}\mathcal{V}(f),$$

comme attendu.

Montrons l'implication directe. Soit  $f$  un élément du groupe de Cremona tel que  $c = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i} \in \partial_{\infty}\mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_{\infty}\mathcal{V}(f)$ . Si  $f$  est une application de caractéristique Jonquières alors la cellule  $\mathcal{V}(f)$  est une cellule adjacente à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Par convexité des cellules de Voronoï nous obtenons pour tout  $x \in \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f)$  :

$$[x, c[ \subset \mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f).$$

Notons  $q_0, \dots, q_{2d-2}$  les points-base de  $f^{-1}$ . D'après le théorème 4.2.29, toute classe multiple d'une classe de  $[x, c[$  vit dans le sous-espace de Picard-Manin déterminé par l'intersection des sous-espaces vectoriels :

$$\bigcap_{0 \leq i \leq 2d-2} \left\{ \lambda_{q_i} = \frac{n - \lambda_{q_0}}{2} \right\}.$$

Ceci implique que l'ensemble des points-base de  $f^{-1}$  est inclus dans l'ensemble  $\{p_0, \dots, p_8\}$ .

Supposons à présent que  $f$  n'est pas une application de caractéristique Jonquières. La classe  $f_{\#}^{-1}(c) \in \partial_{\infty}\mathcal{V}(\text{id}) \cap \partial_{\infty}\mathcal{V}(f^{-1})$ . D'après le lemme 4.2.46 cela implique que  $f^{-1}(c)$  est soit une classe 9-symétrique pure, soit une classe 1-symétrique pure soit une classe 1-symétrique non pure. Comme  $f^{-1}$  n'est pas de caractéristique Jonquières, nous avons en vertu de la proposition 4.2.51 et de la remarque 4.2.53 que  $f_{\#}^{-1}(c)$  est une classe 9-symétrique pure, notée  $c' = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{q_i}$  où les points  $q_i$  sont en position presque générale. Ceci implique que  $f_{\#}(c') = c$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f_{\#}(c') \cdot \ell = 3 \\ f_{\#}(c') \cdot e_{p_i} = 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq 8 \\ f_{\#}(c') \cdot e_p = 0 \text{ pour tout } p \notin \{p_i\}_{0 \leq i \leq 8} \end{cases} . \quad (4.2.55)$$

Notons  $\{m_q\}_{q \in \text{supp}(f)}$  les multiplicités des points-base de  $f$ ,  $\{m'_p\}_{p \in \text{supp}(f^{-1})}$  celles des points-base de  $f^{-1}$  et  $\{a_{p,q}\}_{q \in \text{supp}(f)}$  les autres coefficients de la matrice caractéristique. Rappelons que d'après l'équation (1.2.18) :

$$f_{\#}(c') = \left( 3d - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \in \text{supp}(c')}} m_q \right) \ell - \sum_{p \in \text{supp}(f^{-1})} \left( 3m'_p - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \in \text{supp}(c')}} a_{p,q} \right) e_p - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(c') \\ q \notin \text{supp}(f)}} f_{\#}(e_q).$$

Montrons que le support de  $f^{-1}$  est inclus dans le support de  $c$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $p \in \text{supp}(f^{-1})$  tel que  $p \notin \{p_i\}_{0 \leq i \leq 8}$ . D'après (4.2.55), nous avons :

$$3m'_p - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \in \text{supp}(c')}} a_{p,q} = 0.$$

En utilisant l'égalité 5) du lemme 1.3.3 et le fait que les coefficients  $a_{p,q}$  sont positifs (Remarque 1.2.14) nous avons :

$$1 = 3m'_p - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \in \text{supp}(c')}} a_{p,q} - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \notin \text{supp}(c')}} a_{p,q} = - \sum_{\substack{q \in \text{supp}(f) \\ q \notin \text{supp}(c')}} a_{p,q} \stackrel{1.2.14}{\leq} 0.$$

Ceci est une contradiction et nous avons ainsi montré que le support de  $f^{-1}$  est inclus dans celui de  $c$ . En particulier  $f$  et  $f^{-1}$  possèdent au plus neuf points-base.  $\square$

Le corollaire suivant se déduit de la remarque 4.2.53 et des propositions 4.2.50, 4.2.51 et 4.2.54.



**Corollaire 4.2.56.** *L'ensemble des germes des cellules quasi-adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$  est constitué de :*

- toutes les applications de caractéristique Jonquières,
- de toutes les applications ayant au plus 9 points-base et dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale.

**Corollaire 4.2.57.** *Soient  $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telles que les cellules  $\mathcal{V}(f)$  et  $\mathcal{V}(g)$  soient quasi-adjacentes à la cellule associée à l'identité. Notons  $p_0, \dots, p_{k-1}$  l'union des points-base de  $f^{-1}$  et de  $g^{-1}$ . Les trois cellules  $\mathcal{V}(\text{id})$ ,  $\mathcal{V}(f)$  et  $\mathcal{V}(g)$  ont une classe commune dans leur bord à l'infini si et seulement si nous sommes dans l'un des deux cas suivants :*

- $f^{-1}$  et  $g^{-1}$  sont deux applications de caractéristique Jonquières ayant le même point-base maximal, ou un même point-base maximal dans le cas où l'une est quadratique,
- les points  $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$  sont en position presque générale et  $k \leq 9$ .

*Démonstration.* Supposons que les cellules  $\mathcal{V}(\text{id})$ ,  $\mathcal{V}(f)$  et  $\mathcal{V}(g)$  possèdent une classe  $c$  commune au bord à l'infini et que  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$  ne soient pas des applications de caractéristique Jonquières ayant le même point-base maximal. Si la classe  $c$  est spéciale alors par la remarque 4.2.53, les applications  $f$  et  $g$  doivent être des applications de Jonquières de même point-base ce qui contredit notre hypothèse. La classe  $c$  n'est donc pas spéciale. Ainsi, la proposition 4.2.50 nous dit qu'il n'y a que deux possibilités pour cette classe. Les propositions 4.2.51 et 4.2.54 impliquent que  $c$  est une classe 9-symétrique pure dont le support contient les supports de  $f^{-1}$  et de  $g^{-1}$  :

$$c = 3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i} \in \partial_\infty \mathcal{V}(f) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(g) \cap \partial_\infty \mathcal{V}(\text{id}).$$

Ainsi,  $k \leq 9$  et, d'après la remarque 4.2.45, les points du support de  $c$  (et par conséquent  $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$ ) sont en position presque générale.

Montrons la réciproque. Si  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$  sont des applications de caractéristique Jonquières et de même point-base maximal  $p_0$  alors la classe  $\ell - e_{p_0}$  appartient au bord à l'infini des trois cellules par la proposition 4.2.43.1). Considérons le cas où  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$  ne sont pas des applications de caractéristique Jonquières ayant même point-base maximal. Notons  $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$  l'union des points-base de  $f^{-1}$  et de  $g^{-1}$ , et supposons que cet ensemble soit en position presque générale et  $k \leq 9$ . Alors nous pouvons compléter cette famille de sorte que  $\{p_0, \dots, p_8\}$  soit un ensemble de

points en position presque générale. D'après la remarque 4.2.45, la classe  $3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$  appartient au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(\text{id})$ , et d'après la proposition 4.2.54 nous obtenons qu'elle appartient également au bord à l'infini de  $\mathcal{V}(g)$  et de  $\mathcal{V}(f)$  comme annoncé.  $\square$

### 4.3 Graphes associés au groupe de Cremona

Le but de cette partie est d'exhiber un graphe Gromov-hyperbolique naturel sur lequel le groupe de Cremona agit. Le premier candidat est le graphe dual au pavage de Voronoï. Nous montrons qu'il est quasi-isométrique au graphe de Wright modifié. Par conséquent il est également quasi-isométrique au graphe de Wright. Cela permet de retrouver le graphe de Wright dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$ . Mais cela implique qu'il n'est pas Gromov-hyperbolique puisque nous avons montré que le graphe de Wright modifié ne l'est pas (Théorèmes 1.2.1 et 3.4.11). Nous modifions le graphe dual afin d'obtenir un graphe hyperbolique au sens de Gromov.

#### 4.3.1 Graphe dual

Le graphe dual au pavage de Voronoï est construit de la façon suivante. Les sommets du graphe sont les centres des cellules de Voronoï, c'est-à-dire l'orbite de  $\ell$  sous l'action du groupe de Cremona :

$$\{f_{\#}(\ell) \mid f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)\}.$$

Nous relierons deux sommets par une arête si les deux cellules de Voronoï correspondantes sont adjacentes entre elles. Ce graphe est muni de la métrique standard et nous le notons  $\mathcal{D}$ .

*Remarque 4.3.1.* D'après le corollaire 4.2.33 du théorème 4.2.29, les germes des cellules adjacentes à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  sont des applications de Jonquières ou sont des applications dont les points-base de l'inverse sont en position presque générale. Par conséquent la distance entre les sommets  $f_{\#}(\ell)$  et  $\ell$  du graphe dual correspond au nombre minimal d'applications de ces deux types qu'il faut pour décomposer l'application  $f$ .

**Corollaire 4.3.2** (du théorème 4.2.29). *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{S}(\mathcal{D}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{G}) \\ f_{\#}(\ell) &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

entre les sommets du graphe dual  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$  et les sommets du graphe de Wright modifié  $\mathcal{S}(\mathcal{G})$  est une quasi-isométrie. En particulier, le graphe de Wright  $\mathcal{W}$ , le graphe de Wright modifié  $\mathcal{G}$  et le graphe dual  $\mathcal{D}$  sont quasi-isométriques.

*Démonstration.* L'application  $\mathcal{I}$  est bien définie car deux applications du groupe de Cremona qui correspondent à un même centre appartiennent à la même classe d'équivalence modulo composition à droite par un automorphisme. Prouvons dans un premier temps que c'est un plongement quasi-isométrique. Le groupe de Cremona agissant transitivement sur les sommets des deux graphes, il suffit de montrer l'inégalité sur les paires  $(f_{\#}(\ell), \ell)$  où  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

Rappelons que la distance d'un sommet  $\bar{f}$  du graphe de Wright modifié au sommet  $\bar{\text{id}}$  est donnée par la longueur de l'application  $f$ , c'est-à-dire par le nombre minimal d'applications de caractéristique Jonquières qui permettent de décomposer  $f$ . Ainsi par la remarque 4.3.1 nous avons :

$$d_{\mathcal{D}}(f_{\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell)) \leq d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{\text{id}}).$$

Par l'algorithme de Castelnuovo (Théorème 1.3.17) toute application  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  s'écrit comme la composée de Jonquières  $a \circ j_n \circ \cdots \circ j_1$  de sorte qu'à chaque précomposition par une application de Jonquières le degré augmente strictement, pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$  :

$$\deg(a \circ j_n \circ \cdots \circ j_{i+1} \circ j_i) > \deg(a \circ j_n \circ \cdots \circ j_{i+1}).$$

Ainsi toute application de degré inférieur ou égal à 17 est la composée d'au plus 16 transformations de Jonquières. Or les applications correspondant aux cellules adjacentes qui ne sont pas des applications de caractéristiques Jonquières sont de degré au plus 17 (Corollaire 4.2.36). Par conséquent, nous avons :

$$d_{\mathcal{G}}(\bar{f}, \bar{\text{id}}) \leq 16 d_{\mathcal{D}}(f_{\#}(\ell), \text{id}_{\#}(\ell)).$$

Ceci achève de montrer que l'application  $\mathcal{I}$  est un plongement quasi-isométrique. De plus, les sommets des deux graphes sont en bijection donc  $\mathcal{I}$  est une quasi-isométrie. Comme remarqué dans la preuve de 3.2.1, cela implique que les graphes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$  sont quasi-isométriques. De plus, nous avons déjà montré que les graphes  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{G}$  sont quasi-isométriques (Proposition 3.2.1).  $\square$

Ce corollaire implique d'une part que le graphe dual construit est de diamètre infini et d'autre part qu'il n'est pas hyperbolique au sens de Gromov puisque le graphe de Wright modifié ne l'est pas (Théorèmes 1.2.1 et 3.4.11).

### 4.3.2 Graphe dual étendu

Nous ajoutons des arêtes au graphe dual de façon naturelle, et nous étudions la Gromov-hyperbolicité du graphe obtenu. Les sommets du graphe dual étendu  $\bar{\mathcal{D}}$  sont les centres des cellules de Voronoï et nous relient deux sommets par une arête lorsque les cellules correspondantes sont quasi-adjacentes. Par le corollaire 4.2.44, le graphe dual est un sous-graphe du graphe dual étendu. Les germes des cellules qui deviennent à distance un de la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  sont les applications birationnelles qui fixent ou échangent les classes au bord de  $\mathbb{H}^\infty$  de la forme  $3\ell - \sum_{i=0}^8 e_{p_i}$  où les points  $p_i$  sont en position presque générale. Ainsi, les éléments qui nous gênaient pour l'hyperbolicité du graphe dual deviennent elliptiques dans le graphe dual étendu. Il est par conséquent un bon candidat à être hyperbolique. Afin que cela soit intéressant, nous devons montrer qu'il reste de diamètre infini.

#### Diamètre infini

Nous avons vu que le graphe dual est de diamètre infini. Nous montrons que cela reste le cas pour le graphe dual étendu.

**Proposition 4.3.3.** *Le graphe dual étendu est de diamètre infini.*

Pour montrer cette proposition nous modifions légèrement la preuve faite pour montrer que le graphe de Wright modifié est de diamètre infini (Proposition 3.3.3). Le lemme suivant est l'analogie du lemme 3.3.1.

**Lemme 4.3.4.** *Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications telle que pour tout  $n$ ,  $f_n$  est soit une application de Jonquières soit une application ayant au plus 9 points-base. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le nombre de multiplicités différentes de  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$  est inférieur ou égal à  $2^{n+3} - 2$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence. Si  $n = 1$ , alors  $f$  est soit une application de Jonquières soit une application ayant au plus 9 points-base. Dans le premier cas elle possède deux multiplicités différentes et dans le second cas elle en possède au plus 9. Dans les deux cas elle en possède moins de 14.

Supposons le résultat vrai pour  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$ . Montrons qu'il reste vrai pour l'application  $f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$ . Notons  $g = f_1 \circ \dots \circ f_n$ . L'ensemble des points-base de  $g \circ f_{n+1}$  est constitué de :

- 1) l'image par  $f_{n+1}^{-1}$  des points-base de  $g$  qui ne sont pas des points-base de  $f_{n+1}^{-1}$ ,
- 2) ainsi que des points-base de  $f_{n+1}$ .

Si  $f_{n+1}$  est une application de Jonquières alors comme dans la preuve du lemme 3.3.1 et par hypothèse de récurrence, l'application  $g \circ f_{n+1}$  possède au plus

$$2 + 2(2^{n+3} - 2) = 2^{n+4} - 2$$

multiplicités différentes.

Sinon  $f_{n+1}$  possède au plus 9 points-base. Il y a donc au maximum 9 multiplicités distinctes correspondant aux points-base de  $f_{n+1}$  et  $2^{n+3} - 2$  multiplicités différentes en plus correspondant aux points-base de  $g$  qui ne sont pas des points-base de  $f_{n+1}^{-1}$ . Par hypothèse de récurrence, cela implique que  $f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$  possède au plus

$$2^{n+3} - 2 + 9 = 2^{n+3} - 7 \leq 2^{n+4} - 2$$

multiplicités différentes. Le résultat est donc démontré.  $\square$

*Preuve de la Proposition 4.3.3.* Nous allons montrer par l'absurde que le graphe dual étendu est de diamètre infini. Supposons que le diamètre de  $\bar{D}$  soit de diamètre  $D$  borné. Choisissons un entier  $n$  strictement supérieur à  $2^{D+3} - 2$  :

$$n > 2^{D+3} - 2.$$

Considérons une suite d'applications quadratiques  $\{\mathbf{q}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  telle que pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ , les points-base de  $\mathbf{q}_i^{-1}$  sont disjoints des points-bases de  $\mathbf{q}_1 \circ \dots \circ \mathbf{q}_{i-1}$ . Ainsi l'application  $\mathbf{q}_1 \circ \dots \circ \mathbf{q}_n$  possède  $n$  multiplicités différentes (voir la preuve de la proposition 3.3.3). D'après le lemme 4.3.4, cela signifie que l'application  $\mathbf{q}_1 \circ \dots \circ \mathbf{q}_n$  se décompose en strictement plus de  $D$  applications qui sont ou de Jonquières ou qui possèdent au plus 9 points-base. D'après la remarque 4.3.1, ceci implique que  $d_{\bar{D}}(\text{id}, \overline{\mathbf{q}_1 \circ \dots \circ \mathbf{q}_n}) > D$  ce qui contredit le fait que le diamètre est borné.  $\square$

### 4.3.3 Hyperbolicité du graphe dual étendu

Pour montrer que le graphe dual étendu est Gromov-hyperbolique nous utilisons le critère de Bowditch 1.2.2 et le fait que l'espace  $\mathcal{E}$  est Gromov-hyperbolique.

#### Construction de sous-graphes

Nous construisons des sous-graphes dont nous montrerons qu'ils vérifient le critère de Bowditch.

Dans un premier temps, nous associons à tout élément de  $\mathcal{E}$  un sous-graphe du graphe dual étendu. Un choix naturel du point de vue du pavage de Voronoï est de

faire correspondre à  $c \in \mathcal{E}$  tous les sommets du graphe dual étendu correspondant aux cellules de Voronoï auxquelles  $c$  appartient :

$$\mathcal{S}_c := \{\bar{f} \mid c \in \mathcal{V}(f)\}.$$

Notons  $\bar{\mathcal{D}}_c$  le graphe complet associé aux sommets de  $\mathcal{S}_c$ . C'est un sous-graphe de  $\bar{\mathcal{D}}$ . L'application qui à  $c$  associe  $\bar{\mathcal{D}}_c$  est  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ -équivariante : pour tout  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , pour tout  $c \in \mathcal{E}$  :

$$f \cdot \bar{\mathcal{D}}_c = \bar{\mathcal{D}}_{f\#(c)}.$$

Remarquons que pour toute classe  $c \in \mathcal{E}$ , le sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}_c$  est connexe par arc et de diamètre au plus 1,5 puisque tous les sommets sont deux à deux reliés par une arête. Plus généralement à tout segment géodésique  $[c, c']$  de  $\mathcal{E}$  nous associons un sous graphe défini de la manière suivante :

$$\bar{\mathcal{D}}_{[c, c']} := \bigcup_{x \in [c, c']} \bar{\mathcal{D}}_x.$$

Soient  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  deux sommets de  $\bar{\mathcal{D}}$ . Construisons  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$ . Pour cela, considérons le segment géodésique associé aux classes  $f\#(\ell)$  et  $g\#(\ell)$ . Les sommets de  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$  correspondent aux sommets associés aux cellules de Voronoï ayant une intersection non vide avec ce segment :

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g}) := \bar{\mathcal{D}}_{[f\#(\ell), g\#(\ell)]}.$$

D'après le corollaire 4.1.12, il existe une suite finie  $\{c_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de classes du segment géodésique  $[f\#(\ell), g\#(\ell)]$  de sorte que :

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g}) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{D}}_{c_i}.$$

**Proposition 4.3.5.** *Pour tous  $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  le sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$  est connexe par arcs.*

*Démonstration.* Soient  $\bar{h}$  et  $\bar{h}'$  deux sommets du sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$ . Montrons qu'il existe un chemin dans le sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$  les reliant. Il existe deux classes  $c$  et  $c'$  du segment géodésique  $[f\#(\ell), g\#(\ell)]$  telles que  $c \in \mathcal{V}(h)$  et  $c' \in \mathcal{V}(h')$ . D'après le corollaire 4.1.12, il existe un nombre fini de cellules traversées par le segment géodésique  $[c, c']$ . Notons  $h_1, \dots, h_n$  les germes des cellules traversées. Les sommets  $\bar{h}, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n, \bar{h}'$  forment un chemin reliant les sommets  $\bar{h}$  et  $\bar{h}'$ .  $\square$

Le sous-graphe construit est connexe par arcs puisque chaque  $\bar{\mathcal{D}}_{c_i}$  l'est et que pour tout  $i$ , l'intersection entre  $\bar{\mathcal{D}}_{c_i}$  et  $\bar{\mathcal{D}}_{c_{i+1}}$  est non vide.

Remarquons que pour tous  $f, g, h \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ,

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{f}) = \bar{\mathcal{D}}_{f\#(\ell)} \quad \text{et} \quad h \cdot \bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g}) = \bar{\mathcal{D}}(\bar{hf}, \bar{hg}).$$

**Borne pour le diamètre du sous-graphe associé à un segment de taille fixée**

Nous montrons dans cette partie que nous pouvons borner le diamètre du sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}_{[c,c']}$  dans  $\bar{\mathcal{D}}$  en fonction de la longueur du segment  $[c, c']$  dans  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous avons montré lors du corollaire 4.1.12 que  $\bar{\mathcal{D}}_{[c,c']}$  est de diamètre fini. Cependant, nous voulons minorer ce nombre uniformément en fonction de la longueur du segment, ce qui n'a pas été fait. Cela permettra de montrer, dans la sous-section 4.3.3, que le graphe dual étendu est hyperbolique au sens de Gromov.

Rappelons que d'après le corollaire 4.2.33, les applications de caractéristique Jonquières et les applications qui possèdent au plus 8 points-base en position presque générale sont des germes de cellules adjacentes à  $\mathcal{V}(\text{id})$ .

**Lemme 4.3.6.** *Soit  $c = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_i e_{p_i} \in \mathcal{V}(\text{id})$  une classe spéciale ordonnée. Soient deux points  $p$  et  $q$  distincts de  $p_0$  vérifiant  $\lambda_q \geq \lambda_p$ . Si  $p_0, q$  et  $p$  sont alignés ou le support d'une application quadratique, alors :*

$$\lambda_p \leq \frac{n}{4}.$$

*Démonstration.* Comme  $c$  est une classe spéciale, nous avons d'après la remarque 4.2.4,  $\lambda_0 > \frac{n}{2}$ . Par hypothèse  $c$  appartient à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et les points  $p_0, p_1$  et  $q$  forment le support d'une application quadratique ou sont alignés. Ainsi par la proposition 4.2.6 nous obtenons l'inégalité annoncée :

$$2\lambda_p \leq \lambda_q + \lambda_{p_1} \leq n - \lambda_{p_0} \leq \frac{n}{2}. \quad \square$$

**Lemme 4.3.7.** *Il existe  $K > 1$  telle que pour toute classe  $c_1 \in \mathcal{V}(f_1) \cap \mathcal{V}(\text{id})$  de degré  $n$  et pour toute application  $f_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $\mathcal{V}(f_2)$  est quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et telle que les cellules  $\mathcal{V}(f_1)$  et  $\mathcal{V}(f_2)$  ne sont pas quasi-adjacentes entre elles :*

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq Kn.$$

*Démonstration.* Ordonnons la classe  $c_1 = n\ell - \sum_{i \in I} \lambda_{p_i} e_{p_i}$ . Notons  $d$  le degré de  $f_2$  et  $\{m_p\}_{p \in \text{supp}(f_2^{-1})}$  les multiplicités des points-base de  $f_2^{-1}$ . D'après la remarque ?? nous pouvons partitionner le multi-ensemble composé des indices des points-base de  $f_2^{-1}$  comptés avec leur multiplicité en  $d - 1$  triplets de sorte que chaque triplet soit composé d'indices deux à deux disjoints. Notons  $T$  une telle partition. Nous avons alors l'égalité suivante :

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) = n + \sum_{\{\{i,j,k\}\} \in T} (n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k}). \quad (4.3.8)$$

Supposons dans toute la suite que la classe  $c_1$  n'est pas spéciale. Ce cas-là sera traité en fin de preuve.

*Fait 4.3.9.* S'il existe un point-base  $p$  de  $f_2^{-1}$  tel que  $\frac{5n}{16} \geq \lambda_p$  alors  $c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{49}{48}n$ .

*Démonstration.* Comme la classe  $c_1$  n'est pas spéciale et qu'elle appartient à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  la somme de ses trois plus grandes multiplicités est inférieure ou égale à son degré (Remarque 4.2.7) donc pour tout triplet  $\{\{i, j, k\}\} \in T$  tel que  $0 \leq i$ ,  $1 \leq j$  et  $2 \leq k$  nous avons :

$$n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} \geq n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} \geq 0.$$

Notons  $r$  l'indice correspondant au point-base  $p_r$  de  $f_2^{-1}$  tel que  $\frac{5n}{16} \geq \lambda_{p_r}$ . D'après le théorème 4.2.29, si  $f_1$  n'est pas de caractéristique Jonquières alors toutes les multiplicités de  $c$  sont inférieures ou égales à  $\frac{n}{3}$ . Par conséquent, en considérant un triplet de  $T$  où  $r$  apparaît nous avons la minoration suivante :

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq n + \left(n - 2\frac{n}{3} - \frac{5n}{16}\right) = \frac{49}{48}n.$$

Si  $f_1$  est de caractéristique Jonquières tout point distinct du point-base maximal de  $f_1^{-1}$  (ou des points-base maximaux dans le cas quadratique) a une multiplicité pour  $c$  inférieure ou égale à  $\frac{n}{3}$ . De plus, par hypothèse  $f_2$  ne peut pas être une application de caractéristique Jonquières en ce point-là. Par conséquent,  $m_0 < d - 1$  (Lemme 1.3.3.4)). Dans le cas où  $f_1$  est une application quadratique il en est de même des multiplicités  $m_1$  et  $m_2$ . De plus, par le théorème 4.2.29, tout triplet où l'indice 0 n'apparaît pas deux fois correspond à des termes positifs. Ainsi, il existe au moins un triplet où 0 n'apparaît pas (et où 0, 1 et 2 n'apparaissent pas dans le cas quadratique). Nous plaçons  $r$  dans ce triplet et nous obtenons la même minoration que dans le cas précédent.  $\square$

Le reste de la preuve consiste à montrer que quels que soient  $c_1$  non spéciale et  $f_2$  satisfaisant les hypothèses de l'énoncé, il existe un point-base  $p$  de  $f_2^{-1}$  tel que  $\lambda_p \leq \frac{5n}{16}$ .

- Supposons dans un premier temps que  $\lambda_{p_0} \geq \frac{3n}{8}$ . Alors  $f_1$  est une application de caractéristique Jonquières dont l'inverse a pour base maximal le point  $p_0$ . Si  $f_1$  est de degré supérieur ou égal à 3, d'après le théorème 4.2.29 nous obtenons la majoration attendue pour tout point  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  différent de  $p_0$  :

$$\lambda_p \leq \frac{n - \lambda_{p_0}}{2} \leq \frac{5n}{16}.$$

Si  $f_1$  est de degré 2 alors par le théorème 4.2.29 nous avons pour tout point  $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^2)$  différent de  $p_0$  et de  $p_1$  :

$$\lambda_p \leq \lambda_{p_2} \leq \frac{\lambda_{p_2} + \lambda_{p_1}}{2} \stackrel{4.2.29}{=} \frac{n - \lambda_{p_0}}{2} \leq \frac{5n}{16}.$$



• Considérons à présent le cas où  $\lambda_{p_0} \leq \frac{3n}{8}$ . Par hypothèse, les cellules  $\mathcal{V}(f_1)$  et  $\mathcal{V}(f_2)$  ne sont pas quasi-adjacentes entre elles. En particulier, les cellules  $\mathcal{V}(\text{id})$ ,  $\mathcal{V}(f_1)$  et  $\mathcal{V}(f_2)$  n'ont pas de classe commune à l'infini. Ainsi par le corollaire 4.2.57 l'union des points-base de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$  est de cardinal supérieur ou égal à 10 ou 4 points de cet ensemble sont alignés ou 7 points de cet ensemble sont sur une conique ou 2 points de cet ensemble sont adhérents à un troisième point de cet ensemble. Nous différencions chacun de ces cas.

\* Considérons le cas où l'union des points-base de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$  est de cardinal supérieur ou égal à 10. Notons  $r_1$  le nombre de points-base de  $f_1^{-1}$ ,  $r_2$  celui de  $f_2^{-1}$  et  $i$  le cardinal de l'intersection des points-base de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$ . L'hypothèse se réécrit :

$$10 - r_1 + i \leq r_2.$$

Par le théorème 4.2.29, si  $f_1$  n'est pas de caractéristique Jonquières alors pour tout  $p$  point-base de  $f_1^{-1}$ ,  $\lambda_p = \frac{n}{3}$ . De même si  $f_1$  est de caractéristique Jonquières et de degré supérieur ou égal à 3 alors pour tout point-base  $p$  de  $f_1^{-1}$ ,  $\lambda_p = \frac{n - \lambda_{p_0}}{2} \geq \frac{5n}{16}$ . Enfin si  $f_1^{-1}$  est de degré 2 nous obtenons que  $\lambda_{p_1} + \lambda_{p_2} = n - \lambda_{p_0} \geq \frac{5n}{8}$ . Ainsi dans les trois cas, excepté lorsque  $f_1$  est de degré 2 et  $i = 2$ , nous avons :

$$\sum_{\substack{p \in \text{supp}(f_1^{-1}) \\ p \notin \text{supp}(f_2^{-1})}} \lambda_p \geq \frac{5n(r_1 - i)}{16}. \quad (4.3.10)$$

Notons  $p_{\min}$  le point-base de  $f_2^{-1}$  de multiplicité  $\lambda_{\min}$  minimale, éventuellement nulle, pour  $c$ . Par positivité de  $c_1$  contre l'anti-canonique, par l'inégalité précédente et par hypothèse nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned} r_2 \lambda_{\min} &\leq \sum_{p \in \text{supp}(f_2^{-1})} \lambda_p \leq 3n - \sum_{\substack{p \in \text{supp}(f_1^{-1}) \\ p \notin \text{supp}(f_2^{-1})}} \lambda_p \leq 3n - \frac{5n(r_1 - i)}{16} \leq \frac{n(48 - 5r_1 + 5i)}{16} \\ &\leq \frac{n(5r_2 - 2)}{16} \\ &< \frac{n5r_2}{16}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f_1$  est de degré 2 et que deux des points-base de son inverse sont des points-base de  $f_2^{-1}$  ( $i = 2$ ), nous avons  $9 \leq r_2$ . Or  $\lambda_{p_2} = n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_1} \geq n - 2\frac{3n}{8} = \frac{n}{4}$ . En faisant le même calcul que précédemment nous obtenons que

$$9\lambda_{\min} \leq r_2 \lambda_{\min} \leq 3n - \frac{n}{4} \leq \frac{11n}{4}.$$

Finalement, dans tous les cas nous avons  $\lambda_{\min} \leq \frac{5n}{16}$ .

\* Considérons le cas où 4 des points de l'union des points-base de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$  sont alignés. Notons  $\lambda_{\min}$  la plus petite des 4 multiplicités. Par le théorème de Bézout nous avons :

$$4\lambda_{\min} \leq n.$$

Par conséquent,  $\lambda_{\min} \leq \frac{n}{4} \leq \frac{5n}{16}$ .

\* Dans le cas de 7 points sur une conique, c'est le même principe.

\* Considérons le cas où 2 points  $q_1$  et  $q_2$  de l'ensemble de l'union de points-base de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$  sont adhérents à un troisième point  $q_0$ . En notant  $\lambda_{\min}$  la plus petite des deux multiplicités associées à ces points pour  $c$ , nous avons par positivité des excès :

$$2\lambda_{\min} \leq \lambda_{q_1} + \lambda_{q_2} \leq \lambda_{q_0} \leq \frac{3n}{8}.$$

Ainsi si  $c_1$  n'est pas spéciale il existe un point-base de  $f_2^{-1}$  dont la multiplicité  $\lambda_p$  est inférieure ou égale à  $\frac{3n}{16}$ .

Considérons maintenant le cas où la classe  $c_1$  est spéciale. Rappelons que cela signifie que les deux points  $p_1$  et  $p_2$  sont adhérents à  $p_0$  et que la somme des trois multiplicités correspondantes est strictement supérieure à  $n$ . Comme  $f_2$  est le germe d'une cellule quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  soit elle est de caractéristique Jonquières mais son inverse a pour point-base un point différent de  $p_0$  soit elle ne possède pas deux points-base adhérents à un même troisième de ses points-base. Dans les deux cas, elle ne possède pas deux points adhérents au point  $p_0$ . Parmi les points-base de  $f_2^{-1}$  différents de  $p_0$  (si ce dernier appartient à  $\text{supp}(f_2^{-1})$ ), considérons-en deux de multiplicités maximales pour  $c$ . Notons-les  $p_{i_1}$  et  $p_{i_2}$  avec  $\lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_2}$ . Ces trois points sont alignés ou forment le support d'une application quadratique, ainsi comme  $c$  appartient à  $V(\text{id})$  nous obtenons par le lemme 4.2.3 que pour tout triplet  $\{\{i, j, k\}\} \in T$  tel que  $0 \leq i, i_1 \leq j$  et  $i_2 \leq k$  :

$$n - \lambda_{p_i} - \lambda_{p_j} - \lambda_{p_k} \geq n - \lambda_{p_0} - \lambda_{p_{i_1}} - \lambda_{p_{i_2}} \geq 0. \quad (4.3.11)$$

De plus, par le lemme 4.3.6,  $\lambda_{i_2} \leq \frac{n}{4}$  et c'est le cas de toutes les multiplicités pour  $c$  associées aux points-base de  $f_2^{-1}$  hors  $p_0$  et  $p_{i_1}$ .

Si l'application  $f_2^{-1}$  n'est pas une application de caractéristique Jonquières de point-base maximal le point  $p_{i_1}$  alors les multiplicités  $m_0$  et  $m_{i_1}$  sont strictement inférieures à  $d - 1$  (voir point 4) du lemme 1.3.3). Par conséquent, nous pouvons constitué des triplets de sorte qu'un triplet ne contienne pas 0 et  $i_1$  et que tous les autres contiennent au plus une fois l'indice 0 et une fois l'indice 1. Par l'équation

(4.3.11), les termes associés à ces triplets sont tous positifs. De plus le terme associé au triplet ne contenant pas ces deux indices est minoré par :  $n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$ . Ainsi,

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{5}{4}n.$$

Si le point  $p_{i_1}$  est le point-base maximal de l'application  $f_2^{-1}$  de caractéristique Jonquières alors  $p_{i_1}$  est dans  $\mathbb{P}^2$  et les points  $p_0, p_1$  et  $p_{i_1}$  sont soit alignés soit le support d'une application quadratique. Le lemme 4.3.6 implique que  $\lambda_{i_1} \leq \frac{n}{4}$  et c'est le cas de tous les points-base de  $f_2^{-1}$  excepté  $p_0$ . De plus, comme avant, la multiplicité  $m_0$  est strictement inférieure à  $d - 1$  et il existe donc au moins un triplet où l'indice 0 n'apparaît pas. Par conséquent, le terme correspondant au triplet où l'indice 0 n'apparaît pas est minoré par :  $n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$ . Tous les autres triplets sont constitués d'indices deux à deux disjoints ainsi d'après l'inégalité 4.3.11 ils sont tous positifs ou nuls. Par conséquent dans ce cas-là nous obtenons la même minoration

$$c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) \geq \frac{5}{4}n.$$

Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 4.3.12.** *Soient  $c_1 \in \mathcal{V}(\text{id})$ ,  $c_2 \in \mathcal{E}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $d(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ . Alors, pour toute application  $f_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telle que  $c_2 \in \mathcal{V}(f_2)$ , nous avons l'inégalité :*

$$0 \leq 1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} \leq 2\varepsilon.$$

*Démonstration.* Par la définition des cellules de Voronoï, nous avons d'une part

$$d(c_1, \ell) \leq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) \text{ et } d(c_2, f_{2\#}(\ell)) \leq d(c_2, \ell)$$

et d'autre part par l'inégalité triangulaire nous obtenons :

$$d(c_1, f_{2\#}(\ell)) \leq \varepsilon + d(c_2, f_{2\#}(\ell)) \leq \varepsilon + d(c_2, \ell) \leq 2\varepsilon + d(c_1, \ell). \quad (4.3.13)$$

Par conséquent nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) - d(c_1, \ell) \leq 2\varepsilon.$$

En utilisant la majoration précédente et par concavité de la fonction  $\text{argcosh}$  nous obtenons l'inégalité annoncée :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\geq d(c_1, f_{2\#}(\ell)) - d(c_1, \ell) = \text{argcosh}(c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)) - \text{argcosh}(c_1 \cdot \ell) \\ &\geq \frac{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) - c_1 \cdot \ell}{\sqrt{(c_1 \cdot f_{2\#}(\ell))^2 - 1}} \\ &\geq \frac{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell) - c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} = 1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 4.3.14.** *Il existe  $M > 0$  tel que pour toutes applications  $f_1, f_2 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  telles que  $d_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 2$ , nous avons :*

$$d(\mathcal{V}(f_1), \mathcal{V}(f_2)) \geq M.$$

*Démonstration.* Soient  $c \in \mathcal{V}(f_1)$  et  $c' \in \mathcal{V}(f_2)$ . Montrons que  $d(c, c') \geq M$ . Considérons le segment  $[c, c']$ . Quitte à faire agir le germe de la cellule traversée juste après  $\mathcal{V}(f_1)$ , nous pouvons supposer que  $c$  est l'identité et que la cellule  $\mathcal{V}(f_1)$  est adjacente à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Notons  $c_1$  la classe du segment  $[c, c']$  qui se trouve dans l'intersection  $\mathcal{V}(\text{id}) \cap \mathcal{V}(f_1)$  et  $n$  son degré.

Considérons dans un premier temps le cas où la cellule  $\mathcal{V}(f_2)$  est quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Notons  $c_2$  la classe de l'intersection  $[c, c'] \cap \mathcal{V}(f_2)$  qui minimise la distance à  $c$  :

$$d(c, c_2) \leq d(c, y) \text{ pour tout } y \in \mathcal{V}(f_2) \cap [c, c'].$$

Reprenons la constante  $K > 1$  du lemme 4.3.7 et posons  $M = \frac{K-1}{3K}$ . Montrons que la distance entre  $c_1$  et  $c_2$  est supérieure ou égale à  $M$ . Supposons le contraire alors par le lemme 4.3.12, nous obtenons :

$$1 - \frac{c_1 \cdot \ell}{c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)} \leq 2M.$$

Or d'après le lemme 4.3.7, nous avons  $Kn \leq c_1 \cdot f_{2\#}(\ell)$ , ce qui implique la contradiction suivante  $\frac{K-1}{K} \leq 2M = \frac{2(K-1)}{3K}$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la cellule  $\mathcal{V}(f_2)$  n'est pas quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . Montrons qu'il existe trois cellules traversées par le segment  $[c, c']$  ayant la configuration précédente. Considérons les cellules traversées par le segment  $[c, c']$  et considérons le premier germe  $g$  tel que les cellules  $\mathcal{V}(f_1)$  et  $\mathcal{V}(g_1)$  soient à distance 2 dans le graphe dual étendu  $d_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{f}_1, \bar{g}_1) = 2$ . Par conséquent, celle juste avant notée  $\mathcal{V}(g)$  est à distance 1 de  $\mathcal{V}(f_1)$ . Alors, les cellules  $\mathcal{V}(g)$  et  $\mathcal{V}(g_1)$  sont adjacentes entre elles et  $\mathcal{V}(g)$  et  $\mathcal{V}(f_1)$  sont quasi-adjacentes entre elles. Nous nous retrouvons dans le cas précédent où  $g$  remplace  $\text{id}$ ,  $g_1$  remplace  $f_1$  et  $f_1$  remplace  $f_2$ . Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

**Proposition 4.3.15.** *Pour toute constante  $L > 0$ , il existe  $B(L) > 0$  tel que pour tous  $c, c' \in \mathcal{E}$  vérifiant  $d(c, c') \leq L$ , le diamètre du graphe associé au segment est borné par  $B$  :*

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{[c, c']}) \leq B.$$

*Démonstration.* Paramétrons le segment  $[c, c']$  par  $\gamma(t)$  pour  $t \in [0, 1]$  avec  $\gamma(0) = c$  et  $\gamma(1) = c'$ . Nous construisons une suite de points  $(\gamma(t_i))$ , et une suite d'applications

$f_i \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , par le procédé de récurrence suivant. Initialisons en posant  $t_0 = 0$ , et en choisissant  $f_0 \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  tel que  $c = \gamma(0) \in \mathcal{V}(f_0)$ . Pour  $i \geq 1$ , si  $t_{i-1} \in [0, 1[$  est déjà construit, nous posons

$$t_i = \sup\{t \in ]t_{i-1}, 1] \mid \exists f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2), \gamma(t) \in \mathcal{V}(f) \text{ et } d_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{f}, \bar{f}_{i-1}) \leq 2\},$$

puis nous choisissons  $f_i \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  tel que  $\gamma(t_i) \in \mathcal{V}(f_i)$ . Si  $t_i < 1$ , alors  $d_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{f}_i, \bar{f}_{i-1}) = 2$ , et le lemme 4.3.14 implique qu'il existe une constante universelle  $M > 0$  tel que  $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \geq M$ . En conséquence, après un nombre fini d'étapes on obtient  $t_i = 1$  et le procédé s'arrête. Plus précisément, la suite possède au plus  $\lceil \frac{L}{M} + 1 \rceil$  termes. Posons pour tout  $i$ ,  $c_i = \gamma(t_i)$ . Pour tout  $i \geq 0$  les sommets du sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}_{[c_i, c_{i+1}[}$  sont par construction à distance 1 du sommet  $\bar{f}_i$ . Ainsi, le diamètre de ce sous-graphe est borné :

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{[c_i, c_{i+1}[}) \leq 1, 5.$$

Nous obtenons finalement :

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{[c, c']}) \leq \sum_{i=0}^{\lceil \frac{L}{M} \rceil - 1} \text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{[c_i, c_{i+1}[}) + \text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{c'}) \leq 1, 5 \times \left( \left\lceil \frac{L}{M} \right\rceil + 1 \right),$$

ce qui achève la preuve de la proposition en posant  $B(L) = 1, 5 \times \left( \lceil \frac{L}{M} \rceil + 1 \right)$ .  $\square$

### Hyperbolicité du graphe dual étendu

Nous montrons que le graphe dual étendu est hyperbolique au sens de Gromov.

**Théorème 4.3.16.** *Le graphe dual étendu est hyperbolique au sens de Gromov.*

*Démonstration.* Pour montrer que le graphe dual étendu est hyperbolique nous utilisons le critère de Bowditch 1.2.2. Soit  $h = \max(B(\delta), B(17))$  où  $\delta = \ln(1 + \sqrt{2})$  est la constante de Gromov-hyperbolicité de  $\mathbb{H}^\infty$ . À tous sommets  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  nous associons les sous-graphes construits dans la sous-section 4.3.3 :

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g}).$$

Par construction, pour tous  $f, g \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , les sommets  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  appartiennent au sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$ . De plus, ce sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}, \bar{g})$  est connexe par arcs. Ceci prouve que le point 1) du critère est satisfait.

Montrons que le point 2) est vérifié. Considérons un triplet de sommets  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ . Soit  $\bar{f}$  un sommet de  $\bar{\mathcal{D}}(f_1, f_2)$ . Par construction, il existe une classe  $c_f \in [f_{1\#}(\ell), f_{2\#}(\ell)]$

tel que  $\bar{f}$  est un sommet du sous-graphe  $\bar{\mathcal{D}}_{c_f}$  associé à  $c_f$ . L'espace  $\mathcal{E}$  étant  $\delta$ -hyperbolique, il existe une classe  $c_2 \in [f_{1\#}(\ell), f_{3\#}(\ell)] \cup [f_{2\#}(\ell), f_{3\#}(\ell)]$  telle que  $d(c_2, c_f) \leq \delta$ . Pour tout  $\bar{g} \in \bar{\mathcal{D}}_{c_2} \subset \bar{\mathcal{D}}(f_2, f_3) \cup \bar{\mathcal{D}}(f_1, f_3)$ , nous avons d'après la proposition 4.3.15 :

$$d_{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{f}, \bar{g}) \leq \text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}_{[c_f, c_2]}) \stackrel{4.3.15}{\leq} B(\delta).$$

Ceci prouve le point 2).

Intéressons nous à présent au point 3). Soient  $\bar{f}_1$  et  $\bar{f}_2$  deux sommets de  $\bar{\mathcal{D}}_c$  à distance inférieure ou égale à 1. Si les deux sommets sont identiques, la condition 3) est immédiatement vérifiée puisque le sous-graphe associé à ces deux sommets est réduit au sommet  $\bar{f}_1$ . Supposons à présent que les deux sommets  $\bar{f}_1$  et  $\bar{f}_2$  sont à distance 1. Nous voulons montrer que  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$  est de diamètre borné. Quitte à faire agir  $f_2^{-1}$ , nous pouvons supposer que  $f_2 = \text{id}$  et que  $f_1$  est le germe d'une cellule quasi-adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$ . D'après le corollaire 4.2.56, l'application  $f_1$  est soit une application de caractéristique Jonquières, soit elle n'est pas de caractéristique Jonquières mais son inverse possède au plus 8 points-base en position presque générale, soit ce n'est pas une application de caractéristique Jonquières et son inverse possède exactement 9 points-base en position presque générale. Nous distinguons ces trois cas.

- Si l'application  $f_1$  est de caractéristique Jonquières alors par le lemme 4.2.38, nous avons l'inclusion :

$$[\ell, f_{1\#}(\ell)] \subset \mathcal{V}(\text{id}) \cup \mathcal{V}(f_1)$$

qui implique que

$$\text{Diam}(\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}_1, \text{id})) \leq 1, 5.$$

- Considérons le cas où l'application  $f_1$  n'est pas de caractéristique Jonquières et son inverse possède au plus 8 points-base en position presque générale. C'est donc le germe d'une cellule adjacente à la cellule  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Corollaire 4.2.33). D'après le corollaire 4.2.36 le degré de  $f_1$  est inférieur ou égal à 17, ainsi la longueur du segment géodésique  $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$  est inférieure ou égale à 17. La proposition 4.3.15 implique que le diamètre de  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}_1, \text{id})$  est inférieur ou égal à  $B(17)$ . Comme  $h \geq B(17)$ , le point 3) du critère de Bowditch est vérifié dans ce cas-là.

- Considérons le dernier cas, celui où l'application  $f_1$  n'est pas de caractéristique Jonquières et son inverse possède exactement 9 points-base en position presque générale. C'est le germe d'une cellule quasi-adjacente non adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  (Corollaire 4.2.56). Le segment reliant  $\ell$  et  $f_{1\#}(\ell)$  est constitué de classes ayant exactement les 9 points-base de  $f_1^{-1}$  comme support. En particulier, les classes de ce segment géodésique ne sont pas spéciales. Montrons que pour tout sommet  $\bar{g}$  de  $\bar{\mathcal{D}}_{[\ell, f_{1\#}(\ell)]}$  la cellule

$\mathcal{V}(g)$  possède la classe à l'infini

$$s = 3\ell - \sum_{p \in \text{supp}(f_1^{-1})} e_p$$

et est par conséquent à distance 1 du sommet  $\bar{\text{id}}$  dans le graphe dual étendu. Le diamètre de  $\bar{\mathcal{D}}(\bar{f}_1, \bar{\text{id}})$  sera ainsi inférieur ou égal à 1, 5.

Paramétrons par  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  le segment géodésique reliant  $\ell$  et  $f_{1\#}(\ell)$ . D'après le corollaire 4.1.12, ce segment ne traverse qu'un nombre fini de cellules. Considérons la première cellule traversée  $\mathcal{V}(g_1)$  qui est adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et notons  $c_1$  la classe du segment géodésique  $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$  qui se trouve à l'intersection des cellules  $\mathcal{V}(g_1)$  et  $\mathcal{V}(\text{id})$ . D'après le théorème 4.2.29 nous avons l'inclusion des supports :

$$\text{supp}(g_1^{-1}) \subset \text{supp } c_1 = \text{supp}(f_1^{-1}).$$

Le corollaire 4.2.54 implique que la classe  $s$  appartient au bord à l'infini de la cellule  $\mathcal{V}(g_1)$ . C'est également le cas de toutes les cellules possédant une classe du segment  $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$  à l'intersection des cellules  $\mathcal{V}(\text{id})$  et  $\mathcal{V}(f_1)$ .

Considérons la deuxième cellule traversée notée  $g_2$ . Notons  $c_2$  la classe du segment géodésique  $[\ell, f_{1\#}(\ell)]$  se trouvant à l'intersection des cellules  $\mathcal{V}(g_1)$  et  $\mathcal{V}(g_2)$ . Faisons agir  $g_1^{-1}$ . La cellule  $\mathcal{V}(g_1^{-1} \circ g_2)$  est une cellule adjacente à  $\mathcal{V}(\text{id})$  et ces deux cellules contiennent la classe  $g_{1\#}^{-1}(c_2)$ . Comme les points-base de  $g_1^{-1}$  sont contenus dans le support de la classe  $c_2$ , le support de  $g_{1\#}^{-1}(c_2)$  contient au plus 9 points. Il est constitué des points-base de  $g_1$  ainsi que de l'image par  $g_1^{-1}$  des points du support de  $c_2$  qui ne sont pas des points-base de  $g_1^{-1}$ . Il en est de même de la classe  $g_{1\#}^{-1}(s)$ . Par conséquent, d'après le théorème 4.2.29 et le corollaire 4.2.54, la cellule  $\mathcal{V}(g_1^{-1} \circ g_2)$  contient la classe  $g_{1\#}^{-1}(s)$  à l'infini. En faisant agir  $g_1$  à nouveau, nous obtenons que la cellule  $\mathcal{V}(g_2)$  contient la classe  $s$  à l'infini. C'est également le cas des cellules contenant la classe  $c_2$ . En répétant le procédé nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$





# Chapitre 5

## Complexe cubique associé au groupe de Cremona

Nous avons centré cette thèse sur la notion de Gromov-hyperbolicité. Cette notion permet de faire de la petite simplification mais elle ne permet pas d'obtenir des théorèmes de points fixes à partir desquels il est possible de montrer de nombreuses propriétés dont par exemple l'alternative de Tits. Un groupe  $G$  satisfait l'alternative de Tits si tout sous-groupe  $H$  de  $G$  satisfait l'alternative suivante :

- $H$  est virtuellement résoluble, c'est-à-dire qu'il possède un sous-groupe d'indice fini qui est résoluble,
- $H$  contient un sous-groupe libre non abélien.

Nous disons que  $G$  satisfait l'alternative de Tits faible si cette alternative est satisfaite pour tous les sous-groupes de type fini de  $G$ . Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et le mapping class group d'une surface hyperbolique satisfont l'alternative de Tits. S. Cantat a montré dans [Can11] que le groupe de Cremona satisfait l'alternative de Tits faible en faisant agir le groupe de Cremona sur l'espace  $\mathbb{H}^\infty$  qui est  $\mathrm{CAT}(0)$  et qui possède une forme d'intersection  $(1, \infty)$ . Cette preuve a donc peu de chance d'être généralisée en rang supérieur.

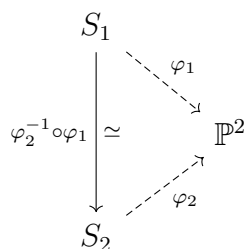
Dans ce chapitre nous construisons un complexe cubique de dimension infinie sur lequel le groupe de Cremona agit de façon naturelle. Nous montrons qu'il est  $\mathrm{CAT}(0)$ , ce qui est la propriété adéquate pour obtenir des résultats de points fixes (voir [CS11]). La courbure négative vient du fait qu'il y a des  $(-1)$ -courbes qui commutent deux à deux, ce qui a un peu plus de chance d'être peut-être généralisé en rang supérieur. De plus, ce complexe cubique code des informations déjà existantes dans la littérature. Par exemple, la longueur de translation d'une application  $f \in$

$\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  correspond au « nombre de points-base dynamique » introduit par J. Blanc et J. Déserti dans [BD15]. Ainsi les isométries elliptiques pour cette action sont conjuguées à des automorphismes de surface rationnelle lisse. Par ailleurs, sur ce complexe les twists de Halphen sont elliptiques alors qu'ils étaient paraboliques pour l'action sur  $\mathbb{H}^\infty$  et nous conjecturons qu'ils sont hyperboliques sur le graphe dual.

Nous espérons par la suite et à l'aide de ce complexe cubique, trouver une nouvelle preuve de l'alternative de Tits faible et si possible prouver l'alternative de Tits (sans la version affaiblie).

## 5.1 Définition

La construction que nous faisons ici se fait dans le cas où  $k = \bar{k}$  et dans le cadre des surfaces projectives lisses. Nous appelons  $(-1)$ -courbe une courbe rationnelle d'auto-intersection  $-1$ . Par le théorème de contraction de Castelnuovo, cette courbe est produite par l'éclatement d'un point (voir par exemple [Mat02, Theorem 1.1.6]). Rappelons qu'une surface rationnelle marquée est un couple  $(S, \varphi)$  où  $S$  est une surface rationnelle et  $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est une application birationnelle. Considérons l'ensemble des surfaces rationnelles marquées et munissons-le de la relation d'équivalence suivante :  $(S_1, \varphi_1) \sim (S_2, \varphi_2)$  si et seulement si  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  est un isomorphisme (voir Figure 5.1). Remarquons que cette relation d'équivalence a déjà été introduite



**Figure 5.1** – Paires équivalentes

pour la construction du complexe de Wright (Section 3.1) dans le cas des surfaces marquées  $(S, \varphi)$  où  $S = \mathbb{P}^2$ .

Les sommets du complexe cubique  $\mathcal{C}$  sont les surfaces rationnelles lisses marquées munies de cette relation d'équivalence.

Définissons à présent les cubes. Soient un entier  $n \in \mathbb{N}$  et un sommet  $(S, \varphi)$  du complexe. Si la surface  $S$  possède  $n$   $(-1)$ -courbes deux à deux disjointes notées  $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , nous mettons un  $n$ -cube (ou cube de dimension  $n$ ) entre les  $2^n$  sommets

correspondant aux surfaces obtenues en contractant ou non chacune de ces courbes. Remarquons que dans ce cas-là le nombre de Picard de la surface  $S$ , noté  $\rho(S)$ , est supérieur ou égal à  $n + 1$ .

Par exemple, nous mettons une arête autrement dit un cube de dimension 1, entre deux sommets  $(S_1, \varphi_1)$  et  $(S_2, \varphi_2)$  si l'application  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  est un éclatement ou l'inverse d'un éclatement.

Nous pouvons également définir la notion de  $n$ -cube en partant « d'en bas ». Les  $2^n$  sommets de ce cube sont toutes les surfaces obtenues en éclatant ou non chacun des  $n$  points de la surface initiale. Les deux définitions sont équivalentes. En effet, étant donné un  $n$ -cube la première définition construit le cube à partir de la surface de plus grand nombre de Picard alors que la seconde le construit à partir de la surface ayant le plus petit nombre de Picard. Nous appelons *hauteur* d'un sommet le nombre de Picard correspondant à sa surface.

**Métrie euclidienne** La métrie que nous mettons sur ce complexe cubique permet de rendre tout cube de dimension  $n$  isométrique au cube euclidien unitaire de même dimension  $[0, 1]^n$ . Une suite de points  $\{x_0, \dots, x_m\}$  tels que pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  appartiennent à un même cube détermine un chemin entre  $x_0$  et  $x_m$ . C'est la réunion des segments géodésiques

$$\bigcup_{0 \leq i \leq m-1} [x_i, x_{i+1}].$$

La longueur de ce chemin est :

$$\ell g(\{x_0, \dots, x_m\}) = \sum_{i=0}^{m-1} \|x_i - x_{i+1}\|,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Étant donnés deux points  $x, y \in \mathcal{C}$ , nous notons  $\Sigma_{x,y}$  l'ensemble des chemins reliant les points  $x$  et  $y$ . La distance sur  $\mathcal{C}$  est définie comme suit :

$$d(x, y) := \inf\{\ell g(\Sigma) \mid \Sigma \in \Sigma_{x,y}\}.$$

## 5.2 Premières propriétés

Le complexe cubique n'est pas de dimension finie. En effet, nous pouvons trouver des cubes de dimension arbitrairement grande. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{P}^2$ , il existe un cube de dimension  $n$  de base  $\mathbb{P}^2$  et dont les sommets sont obtenus en éclatant un sous-ensemble de cet ensemble de points. Si de plus nous

imposons que pour tout  $n$  les points de  $\mathbb{P}^2$  choisis soient  $p_1, \dots, p_n$  nous obtenons une suite de cubes emboîtés. Ainsi, muni de la distance  $d$  ce complexe cubique n'est pas un espace métrique complet.

Ce complexe cubique est connexe par arcs. En effet, étant donnés deux représentants de sommets  $(S_1, \varphi_1)$  et  $(S_2, \varphi_2)$  l'application  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  est une application birationnelle allant de la surface  $S_1$  vers la surface  $S_2$ . D'après le théorème de factorisation de Zariski (Théorème 1.1.6), cette application se décompose en composées d'éclatements. Les surfaces intermédiaires forment les sommets reliant les deux sommets  $(S_1, \varphi_1)$  et  $(S_2, \varphi_2)$ .

Soit  $s$  un sommet de  $\mathcal{C}$ . Nous pouvons lui associer un complexe simplicial appelé *link* de  $s$  et noté  $\text{Lk}(s)$ , de la façon suivante. Les simplexes de dimension  $n$  correspondent aux cubes de dimension  $n + 1$  de  $\mathcal{C}$  qui contiennent le sommet  $s$  de sorte qu'un simplexe  $S_1$  de  $\text{Lk}(s)$  est une face d'un simplexe  $S_2$  si le cube correspondant à  $S_1$  dans  $\mathcal{C}$  est une face du cube correspondant à  $S_2$ . Il ne semble pas exister de terminologie correspondante en français donc nous emploierons le mot anglais.

Par exemple si nous considérons le sommet d'un carré (ou cube de dimension 2), le link associé est un graphe muni de deux sommets reliés par une arête. Si maintenant, nous ne considérons pas le carré mais seulement son 1-squelette alors le link associé à tout sommet est constitué de deux sommets non reliés.

Un *complexe de drapeau*, ou « flag complex » en anglais est un complexe simplicial tel que tout ensemble de  $n+1$  sommets deux à deux adjacents engendrent un simplexe de dimension  $n$ .

Le théorème suivant est dû à Gromov dans le cas des complexes cubiques de dimension finie. I. Leary généralise ce résultat aux complexes cubiques de dimension infinie ([Lea13]). C'est un théorème puissant pour montrer que les complexes cubiques sont  $\text{CAT}(0)$ .

**Théorème 5.2.1** (Gromov). *Soit  $\mathcal{C}$  un complexe cubique simplement connexe. Le complexe est  $\text{CAT}(0)$  si et seulement si tous les links sont des complexes de drapeau.*

Nous l'utilisons afin de montrer que le complexe cubique que nous avons construit est  $\text{CAT}(0)$ .

**Proposition 5.2.2.** *Le complexe cubique est  $\text{CAT}(0)$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.2.1, il faut montrer que le complexe cubique  $\mathcal{C}$  est simplement connexe et que tous ses links forment des complexes de drapeau.

1) Montrons dans un premier temps que les links sont des complexes de drapeau. Soit  $v$  un sommet du complexe cubique. Considérons une famille  $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$  de

sommets de  $\text{Lk}(v)$  telle que ces sommets sont deux à deux adjacents dans  $\text{Lk}(v)$ . Notons  $v_i$  le sommet de  $\mathcal{C}$  tel que  $s_i$  appartienne à l'arête  $[v, v_i]$ . Ainsi tout sommet dans le link de  $v$  correspond à l'éclatement d'un point ou à la contraction d'une  $(-1)$ -courbe. Il nous reste à montrer que  $v$  appartient à un cube de dimension  $n + 1$  dont les arêtes partant de  $v$  sont exactement les arêtes  $[v, v_i]$  codées par les sommets  $s_i$  du link.

Notons  $S$  une surface correspondant à  $v$ . Remarquons que la hauteur de tous les sommets  $v_i$  diffère exactement de 1 avec le sommet  $v$ . Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que la hauteur des sommets  $\{v_i\}_{0 \leq i \leq k}$  vaut un de plus que celle de  $v$  et que celle des  $\{v_i\}_{k < i \leq n+1}$  vaut un de moins que celle de  $v$ , pour  $1 \leq k \leq n + 1$ . Remarquons que l'une des deux familles peut être vide. Pour  $k < i \leq n + 1$  les arêtes  $[v, v_i]$  correspondent à des contractions de  $S$  vers la surface associée à  $v_i$ . Notons  $E_i$  la  $(-1)$ -courbe contractée. S'il y a plus de deux sommets de hauteur un de moins que  $v$  alors pour tout couple  $k < i < j \leq n + 1$ , les sommets  $s_i$  et  $s_j$  de  $\text{Lk}(v)$  sont reliés par une arête ce qui signifie que dans le complexe cubique les sommets  $v, v_i$  et  $v_j$  appartiennent à une même face. Ceci implique que les  $(-1)$ -courbes contractées sont deux à deux disjointes.

Pour  $1 \leq i \leq k$ , les sommets  $s_i \in \text{Lk}(v)$  correspondent à des points sur  $S$ . De plus ils n'appartiennent à aucune des courbes  $E_{k+1}, \dots, E_{n+1}$ . En effet, sinon les deux sommets de  $\text{Lk}(v)$  correspondant respectivement au point se trouvant sur une des  $(-1)$ -courbe et à cette  $(-1)$ -courbe ne seraient pas reliés par une arête. Éclatons les points correspondant aux sommets  $s_1, \dots, s_k$ . Nous obtenons une surface  $S'$  contenant toutes les  $(-1)$ -courbes et par construction elles sont toutes deux à deux disjointes. Ainsi, il existe un cube contenant le sommet  $v$  et tous les sommets  $v_i$ . Par conséquent les sommets  $s_1, \dots, s_{n+1}$  engendrent un simplexe de dimension  $n$  dans le link de  $v$ .

2) Montrons que le complexe cubique construit est simplement connexe. Soit  $\gamma$  un lacet. Nous voulons montrer que  $\gamma$  est homotope à un point. Par définition,  $\gamma$  est inclus dans un sous-complexe de dimension finie  $k$ . Nous pouvons déformer dans chaque cube de dimension  $k$  le lacet  $\gamma$  par une homotopie pour qu'il n'appartienne qu'à des cubes de dimension  $k - 1$ . En répétant ce procédé, nous pouvons supposer qu'il vit dans le 1-squelette du complexe cubique. Soient  $s_1, \dots, s_n$  les sommets traversés et  $S_1, \dots, S_n$  des représentants. Ils sont en nombre fini puisque  $\gamma$  est compact. Quitte à faire une homotopie nous pouvons supposer que pour tout  $i$  modulo  $n$ , les sommets  $s_i$  et  $s_{i+2}$  sont distincts. Si aucun sommet n'est traversé ou si un seul sommet est traversé alors  $\gamma$  est homotope à un point. Il existe une surface notée  $S$  qui

domine toutes les surfaces  $\{S_i\}_{1 \leq i \leq n}$ . Notons

$$\rho_{\min}(s_1, \dots, s_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \rho(S_i)$$

où  $\rho(S_i)$  est le nombre de Picard associé à la surface  $S_i$ . Montrons que  $\gamma$  se rétracte sur le lacet constant égal au sommet  $s$  associé à la surface  $S$ . Raisonnons par récurrence sur le nombre minimal de Picard associé à la famille des sommets traversés par  $\gamma$ . Soit  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\rho_{\min}(s_1, \dots, s_n) = \rho(S_{i_0})$  où les indices sont modulo  $n$ . Par construction, cela signifie que  $\rho(S_{i_0-1}) = \rho(S_{i_0+1}) = \rho(S_{i_0}) + 1$ . Ainsi les surfaces  $S_{i_0-1}$  et  $S_{i_0+1}$  ont été obtenues en éclatant deux points distincts de  $S_{i_0}$ , donc il existe un nouveau sommet  $s'_{i_0}$  tel que les sommets  $s_{i_0-1}$ ,  $s_{i_0}$ ,  $s_{i_0+1}$  et  $s'_{i_0}$  forment un carré. Il existe donc une homotopie entre le lacet  $\gamma$  et le lacet  $\tilde{\gamma}$  obtenu en remplaçant le chemin  $[s_{i_0-1}, s_{i_0}] \cup [s_{i_0}, s_{i_0+1}]$  par  $[s_{i_0-1}, s'_{i_0}] \cup [s'_{i_0}, s_{i_0+1}]$ . Si le sommet  $s'_{i_0}$  est identique au sommet  $s_{i_0-2}$  (respectivement  $s_{i_0+2}$ ) il existe une homotopie entre le sous-chemin  $[s'_{i_0}, s_{i_0-2}]$  (respectivement  $[s'_{i_0}, s_{i_0+2}]$ ) de  $\tilde{\gamma}$  et le sommet  $s'_{i_0}$ . Dans ce cas, nous ré-indices les sommets en remplaçant  $n$  par  $n - 2$ . Soit le nombre de Picard minimal associé à  $\tilde{\gamma}$  a augmenté de 1 par rapport à celui associé à  $\gamma$  soit le nombre de sommets minimisant le nombre de Picard a diminué de 1. Le procédé se termine quand le nombre de Picard minimal est égal au nombre de Picard de  $S$  ce qui signifie que le lacet est réduit au sommet  $s$ .  $\square$

### 5.3 Perspectives

Un *cube médian* d'un cube  $C = [0, 1]^n$  de dimension  $n$  d'un complexe cubique est un cube de dimension  $n - 1$  passant par le barycentre de  $C$  et parallèle à une face :

$$M_i = \left\{ x \in C \mid x_i = \frac{1}{2} \right\} \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Dans un complexe cubique, il existe une relation d'équivalence sur les arêtes définie de la façon suivante. Deux arêtes  $a$  et  $a'$  sont équivalentes s'il existe une suite d'arêtes  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$  telles que  $a_0 = a$ ,  $a_n = a'$  et pour tout  $0 \leq i \leq n - 1$  les arêtes  $a_i$  et  $a_{i+1}$  sont les arêtes opposées d'un même carré. À toute classe d'équivalence d'arêtes est associé un hyperplan qui est la réunion de tous les cubes médians transversaux à une arête de la classe d'équivalence.

Pour tenter de prouver l'alternative de Tits, il faut d'abord comprendre comment le groupe de Cremona agit sur les hyperplans. Les hyperplans correspondent ici à la contraction d'une  $(-1)$ -courbe. Soit  $E$  une  $(-1)$ -courbe d'une surface  $S$ . Notons  $\mathcal{H}_E^S$  un représentant de l'hyperplan correspondant à la contraction de la courbe  $E$

vivant dans  $S$ . Un autre couple  $(E', S')$  où  $E'$  est une  $(-1)$ -courbe de  $S'$  donne le même hyperplan s'il existe un isomorphisme local entre les courbes  $E$  et  $E'$ . Il sépare le complexe cubique en deux demi-espaces convexes. Nous émettons la conjecture naturelle suivante.

**Conjecture.** Une surface  $S'$  est dans le demi-espace ne contenant pas  $S$  si et seulement si l'application birationnelle  $f : S \dashrightarrow S'$  ne possède pas de points-base sur  $E$  et contracte  $E$ .

*Remarque 5.3.1.* Ainsi une surface  $S$  est dans le même demi-espace que  $S$  si

- l'application birationnelle  $f : S \dashrightarrow S'$  est un isomorphisme dans un voisinage de  $E$  (dans ce cas les surfaces obtenues dans la résolution de  $f$  longent l'hyperplan),
- l'application birationnelle  $f : S \dashrightarrow S'$  a un point-base sur  $E$ . (**Conjecture :** La distance de  $S'$  à l'hyperplan (si on considère que  $S$  est à distance 0 de l'hyperplan) est donnée par la somme du nombre d'éclatements de points sur  $E$  (ou de ses transformées) et du nombre de contraction sur  $E$  (incluant le fait de contracter  $E$ )).

Mais cela reste à étudier...

Si la construction précédente aboutit à des résultats, il est naturel de vouloir l'élargir au cas des corps non algébriquement clos. Une construction naturelle pour le complexe cubique devient alors la suivante. Nous remplaçons la notion d'éclatement d'un point par celle d'éclatement d'une orbite d'un point sous l'action du groupe de Galois. De même pour la contraction. Par exemple sur  $\mathbb{R}$  un éclatement consiste soit à éclater un point à coordonnées réelles soit deux points complexes conjugués. Ainsi il existe un cube de dimension  $n$  s'il existe une surface contenant  $n$  orbites de  $(-1)$ -courbes deux à deux disjointes. Le reste semble fonctionner de la même manière en utilisant le nombre de Picard relatif.

Une autre généralisation qui semble intéressante et qui pourrait être une étape dans l'étude du groupe de Cremona de rang 3 est de considérer des sous-groupes du groupe de Cremona dont tous les éléments possèdent une résolution en éclatant seulement des points. Par exemple, il serait intéressant de voir si nous arrivons à retrouver à l'aide du complexe cubique des propriétés déjà connues sur le groupe des applications monomiales  $GL(3, \mathbb{Z})$ .





# Bibliographie

- [AB99] C. D. ALIPRANTIS & K. C. BORDER – *Infinite-dimensional analysis*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 1999, A hitchhiker’s guide.
- [AC02] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA – *Geometry of the plane Cremona maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Ale16] J. W. ALEXANDER – « On the factorization of Cremona plane transformations », *Trans. Amer. Math. Soc.* **17** (1916).
- [BC16] J. BLANC & S. CANTAT – « Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces », *J. Amer. Math. Soc.* **29** (2016), no. 2, p. 415–471.
- [BD15] J. BLANC & J. DÉSERTE – « Degree growth of birational maps of the plane », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **14** (2015), no. 2, p. 507–533.
- [Bea95] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [BF02] M. BESTVINA & K. FUJIWARA – « Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups », *Geometry and Topology* **6** (2002), p. 69–89 (electronic).
- [BF17] J. BLANC & J.-P. FURTER – « Length in the Cremona group », *En préparation* (2017).
- [BFJ08] S. BOUCKSOM, C. FAVRE & M. JONSSON – « Degree growth of meromorphic surface maps », *Duke Math. J.* **141** (2008), no. 3, p. 519–538.
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

- [Bow14] B. H. BOWDITCH – « Uniform hyperbolicity of the curve graphs », *Pacific J. Math.* **269** (2014), no. 2, p. 269–280.
- [Cal07] D. CALEGARI – *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [Can11] S. CANTAT – « Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces », *Annals of Mathematics. Second Series* **174** (2011), p. 299–340.
- [Can17] —, « The Cremona groups », *À paraître dans Proceedings of 2015 Summer Institute on Algebraic Geometry, AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (2017).
- [CD12] S. CANTAT & I. DOLGACHEV – « Rational surfaces with a large group of automorphisms », *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), no. 3, p. 863–905.
- [CD13] D. CERVEAU & J. DÉSERTE – *Transformations birationnelles de petit degré*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 19, Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [CDP90] M. COORNAERT, T. DELZANT & A. PAPADOPOULOS – *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Les groupes hyperboliques de Gromov. [Gromov hyperbolic groups], With an English summary.
- [CL13] S. CANTAT & S. LAMY – « Normal subgroups in the Cremona group », *Acta Math.* **210** (2013), p. 31–94.
- [Cou16] R. COULON – « Théorie de la petite simplification : une approche géométrique [d’après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy] », *Astérisque* (2016), no. 380, Séminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015, p. Exp. No. 1089, 1–33.
- [CS11] P.-E. CAPRACE & M. SAGEEV – « Rank rigidity for CAT(0) cube complexes », *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), no. 4, p. 851–891.
- [DGO17] F. DAHMANI, V. GUIARDEL & D. OSIN – « Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces », *Mem. Amer. Math. Soc.* **245** (2017), no. 1156, p. v+152.
- [Dol12] I. V. DOLGACHEV – *Classical algebraic geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012, A modern view.

- [Fav10] C. FAVRE – « Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini », *Astérisque* (2010), no. 332, p. Exp. No. 998, vii, 11–43, Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [GdlH90] E. GHYS & P. DE LA HARPE – « Quasi-isométries et quasi-géodésiques », in *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 79–102.
- [Giz94] M. H. GIZATULLIN – « The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry », in *Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl', 1992)*, Aspects Math., E25, Vieweg, Braunschweig, 1994, p. 39–45.
- [Gui14] V. GUIARDEL – « Geometric small cancellation », in *Geometric Group Theory* (M. Bestvina, M. Sageev & K. Vogtmann, eds.), vol. 21, IAS/Park City Mathematics Institute, 2014.
- [Hud27] H. P. HUDSON – *Cremona transformations in plane and space.*, vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [Lam02] S. LAMY – « Une preuve géométrique du théorème de Jung », *Enseign. Math. (2)* **48** (2002), no. 3-4, p. 291–315.
- [Lea13] I. J. LEARY – « A metric Kan-Thurston theorem », *J. Topol.* **6** (2013), no. 1, p. 251–284.
- [Lon16] A. LONJOU – « Non simplicité du groupe de Cremona sur tout corps », *Ann. Inst. Fourier* **66** (2016), no. 5, p. 2021–2046.
- [Mat02] K. MATSUKI – *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [MO15] A. MINASYAN & D. OSIN – « Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees », *Math. Ann.* **362** (2015), no. 3-4, p. 1055–1105.
- [Osi16] D. OSIN – « Acylindrically hyperbolic groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 2, p. 851–888.
- [PS17] P. PRZYTYCKI & A. SISTO – « A note on acylindrical hyperbolicity of mapping class groups », *À paraître dans Proceedings of the 7th MSJ-SI, Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory* (2017).
- [SB15] N. SHEPHERD-BARRON – « Some effectivity questions for plane Cremona transformations », *arxiv:1311.6608v4* (2015).

- [Sha94] I. R. SHAFAREVICH – *Basic algebraic geometry. 1*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [Sil09] J. H. SILVERMAN – *The arithmetic of elliptic curves*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, 2009.
- [Wri92] D. WRIGHT – « Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), p. 281–300.

## Groupe de Cremona et espaces hyperboliques

**Résumé :** Le groupe de Cremona de rang 2 est le groupe des transformations birationnelles du plan projectif. Le but de cette thèse est d'étudier et de construire des espaces hyperboliques sur lesquels le groupe de Cremona agit et qui permettent de mettre en œuvre des méthodes provenant de la théorie géométrique des groupes.

Il est connu depuis une dizaine d'année que le groupe de Cremona agit sur un espace hyperbolique  $\mathbb{H}^\infty$  analogue au plan hyperbolique classique mais de dimension infinie. Dans un premier temps, nous montrons que le groupe de Cremona défini sur un corps quelconque n'est pas simple en le faisant agir sur cet espace hyperbolique. Ceci prolonge un résultat déjà connu dans le cas d'un corps de base algébriquement clos.

Nous nous intéressons ensuite à un graphe construit par D. Wright sur lequel agit le groupe de Cremona. Nous montrons qu'il ne possède pas la propriété que nous souhaitons, à savoir qu'il n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.

Nous construisons également un domaine fondamental pour l'action du groupe de Cremona sur  $\mathbb{H}^\infty$  via la méthode des cellules de Voronoï. Nous caractérisons les applications du groupe de Cremona qui correspondent à un domaine adjacent au domaine fondamental. Cela nous permet de prouver que le graphe de Wright est quasi-isométrique au graphe dual à ce pavage. Nous obtenons ainsi une manière de retrouver le graphe de Wright dans  $\mathbb{H}^\infty$ . Nous montrons enfin qu'en modifiant ce graphe dual, nous obtenons un graphe hyperbolique au sens de Gromov.

Dans une dernière partie, nous nous intéressons à une autre propriété naturelle qui est la propriété CAT(0). Nous construisons un complexe cubique CAT(0) de dimension infinie muni d'une action naturelle du groupe de Cremona.

---

## Cremona group and hyperbolic spaces

**Abstract :** The Cremona group of rank 2 is the group of birational transformations of the projective plane. The aim of this thesis is to study and build some hyperbolic spaces with a natural action of the Cremona group. We want these spaces to have good geometric properties in order to use methods coming from geometric group theory. It is known that the Cremona group acts on a hyperbolic space  $H$  which is similar to the classical hyperbolic plane but in infinite dimension.

First, using this action, we show that the Cremona group is not simple over any field. This extends previous results over an algebraic closed field.

Then we study the Wright's graph. We show that it doesn't have the property we are looking for, in the sense that it is not Gromov hyperbolic.

We build a fundamental domain for the action of the Cremona group on  $\mathbb{H}^\infty$  via Voronoï's cells. We characterize birational transformations that correspond to adjacent domains of the fundamental domain. This allows us to prove that the Wright's graph is quasi-isometric to the dual graph of this tessellation. It gives us a way of realizing the Wright's graph inside  $\mathbb{H}^\infty$ . Finally, we show that by modifying the dual graph we obtain a Gromov hyperbolic graph.

In the last part, we are interested in another classical property which is the CAT(0) property. We build an infinite dimensional CAT(0) cubical complex which comes with a natural action of the Cremona group.