



HAL
open science

Contribution à l'étude de l'endommagement de matériaux composites par estimation des termes sources et des diffusivités thermiques

Anthony Castillo

► **To cite this version:**

Anthony Castillo. Contribution à l'étude de l'endommagement de matériaux composites par estimation des termes sources et des diffusivités thermiques. Matériaux. Aix-Marseille Université (AMU); IUSTI, CNRS UMR 7343, Aix-Marseille Université, 2017. Français. NNT: . tel-01916862

HAL Id: tel-01916862

<https://theses.hal.science/tel-01916862>

Submitted on 8 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
IUSTI UMR CNRS 7343

École Doctorale 353 : Sciences pour l'ingénieur : Mécanique,
Physique, Micro et Nanoélectronique

THÈSE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR D'AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ
Spécialité : Énergétique

présentée par
Anthony CASTILLO

**Contribution à l'étude de l'endommagement de
matériaux composites par estimation des termes
sources et des diffusivités thermiques**

Soutenue le 12 Décembre 2017 devant le Jury composé de

Philippe LE MASSON	PR, Université Bretagne Sud	Rapporteur
Andrzej KUSIAK	MCF, HDR, Université de Bordeaux	Rapporteur
Laetitia PEREZ	MCF, HDR Université de Nantes	Examinatrice
Thierry DUVAUT	PR, Université de Reims	Examineur
Christophe LE NILIOT	PR, Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Jean-Laurent GARDAREIN	MCF, Aix-Marseille Université	Co-directeur de thèse
Aurélien MAUREL	MCF, Aix-Marseille Université	Invité

Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit a été réalisé au sein de l'équipe Transfert de Chaleur et de Masse du laboratoire IUSTI à Marseille. J'aimerais, avant d'entrer dans les détails scientifiques de ce manuscrit, remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

J'aimerais tout d'abord remercier Lounes Tadrist pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

J'aimerais remercier l'école doctorale 353, et plus particulièrement Pascal Champion qui a toujours été très réactif sur le plan administratif, et qui a été de bons conseils philosophiques tout au long de ces trois ans. Je remercie également son « gong tibétain » qui a sonné plus d'une fois au bout du couloir équilibrant ainsi toutes les énergies du laboratoire.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté de relire et de juger mon travail, je pense bien évidemment à Philippe Le Masson, Andrzej Kusiak, Laetitia Perez, Thierry Duvaut.

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse Christophe Le Niliot. Merci d'avoir accepté de diriger ma thèse, merci d'avoir été si arrangeant avec les TD, merci pour ces pauses cigarettes, tes blagues, et ton œil expert.

Je souhaiterais remercier Fabrice Rigollet qui a participé activement au bon déroulement de cette thèse, qui a corrigé plus d'un de mes paragraphes. Fabrice merci, grâce à toi la thèse m'a donné du bonus !

Je voudrais remercier également, l'homme pour qui je cite « au-dessus, c'est le soleil », j'ai nommé Jonathan Gaspar. Tu as réussi entre deux sketches, à me débloquer plus d'une situation et je t'en remercie.

Enfin, à quoi ressemblerait ce travail, ce manuscrit, sans l'encadrement et l'accompagnement de Jean-Laurent Gardarein, mon co-directeur de thèse. Si j'ai pu travailler dans ces conditions exceptionnelles c'est bien grâce à Jean-Laurent. Merci de m'avoir guidé et accompagné, merci pour ton implication, merci pour tes conseils, merci pour ces journées dédiées à la rédaction. Merci pour tes blagues de mauvais goût et pour ta bonne humeur !

Notre collaboration n'était pas initialement prévue, mais je tiens à faire un petit paragraphe pour remercier Nassira Boulebbad-Gomez. Si j'ai pu obtenir des résultats expérimentaux c'est bien grâce à toi. Mes essais ne t'arrangeaient en rien dans l'avancement de ton boulot, pourtant tu t'es démenée pour qu'on y arrive, et je t'en remercie. J'espère qu'on bouclera dans la même dynamique quelques publications scientifiques.

Dans cet élan j'en profite pour remercier l'équipe du LMA : Frédéric Mazerolles, Christian Hochard, Laurent Sabatier, et bien évidemment Aurélien Maurel qui m'a fait l'honneur de sa présence au sein du jury.

Jean-Michel Hugo qui, quelques mois avant le début de cette thèse, m'a formé sur bon nombre de logiciels et a contribué à graver dans ma tête les refrains de toutes les chansons d'Eddy Mitchell.

Je tiens à remercier mes collègues, j'ai nommé « les thésards de la 336 » : Cédric, Toinou dit « el renardo », Fiona la sanguinaire, et tous les stagiaires passés par ce bureau.

Enfin, que serais-je aujourd'hui, à quoi ressemblerait ce travail si mon compère Benjamin Marchetti ne s'était pas installé en face de moi durant ces trois années. Tu as débarqué au laboratoire on était des collègues, aujourd'hui tu es un véritable ami. Merci Benja pour tes jeux de mots en bois, tes expressions massacrées,..., merci aussi pour ta philosophie de vie et toutes nos discussions.

Je voudrais remercier également Nathalie Ehret, la fée des manips, qui a toujours su me dépanner et me conseiller pendant mes périodes de bricolage.

Jean-Louis, merci à toi pour cette bonne humeur quotidienne, et Brutus merci à toi pour cette mauvaise humeur quotidienne.

Mention spéciale pour Dominique Forestier qui nous a éclairés par sa bonne humeur quotidienne et également par son paquet d'allumettes magiques.

Je tiens à remercier ma famille qui me soutient non pas depuis ces trois ans, mais bien depuis toujours. Et plus particulièrement mes parents et ma sœur, je vous aime.

Je veux aussi remercier amis les plus proches qui se reconnaîtront.

Merci à tous les amis que je n'ai pas cités, je pense aussi à vous au moment où j'écris.

Pour finir, je souhaite remercier celle qui partage ma vie depuis deux ans maintenant, Marie-Aline. Merci pour ta présence, ton soutien, et ton réconfort... je t'aime.

Résumé

Ce travail porte sur la détection de l'endommagement de matériaux composites. Ces matériaux étudiés sont utilisés dans l'industrie aéronautique.

Une première partie concerne l'élaboration de méthodes permettant d'estimer les termes sources de chaleur d'un matériau sollicité mécaniquement. Lors de ce processus, un ensemble de défauts mécaniques mènent à des productions de chaleur. La détection des sources peut permettre la détection de ces défauts. Deux principales méthodes sont présentées : une méthode dite « directe » basée sur une discrétisation du champ de température mesuré et une méthode « itérative » basée sur la méthode du gradient conjugué. A ces méthodes sont couplées des techniques de filtrages des données comme la SVD. Afin d'optimiser le temps de calcul, les équations sont résolues par différences finies sous leur forme linéaire. Des modifications sont également apportées à l'algorithme itératif pour améliorer sa convergence ainsi que les résultats de l'estimation. Les problématiques envisagées font partie des problèmes inverses en thermique. L'objectif principal de la première partie est de trouver un lien expérimental entre l'apparition de macro-fissure et la localisation de termes sources de chaleur au sein d'un matériau composite.

La seconde partie consiste à élaborer des méthodes d'estimation des diffusivités thermiques directionnelles. Les méthodes reposent sur une modélisation du transfert de chaleur à l'aide des quadripôles thermiques. Les estimations de paramètres sont réalisées sur des zones ciblées dites « à risque » sur un matériau déjà endommagé mais au repos. Le but est de faire le lien entre un endommagement mécanique connu qualifié de « diffus » et une dégradation des propriétés thermiques dans les directions principales.

Ce manuscrit est présenté en deux parties : une partie de validation des méthodes développées sur des données simulées numériquement. Une partie expérimentale où sont analysés différents échantillons de composites.

Abstract

This work deals with the damage detection of composite materials. These materials are used in the aeronautics industry.

The first part concerns the development of methods to estimate the heat sources terms of a stressed material. During this process, a set of mechanical defects leads to heat productions. The sources detection can conduct to the detection of these defects. Two main methods are presented: a "direct" method based on a discretization of the measured temperature field and an "iterative" method based on the conjugate gradient method. These methods are coupled with data filtering techniques such as SVD. In order to optimize computation time, equations are solved by finite differences in their linear form. Modifications are also made for the iterative algorithm to improve its convergence as well as the results of the estimation. These problems are considered as thermal inverse problems. The main objective of the first part is to find an experimental link between the appearance of a macro fissure and the localization of a heat source term within a composite material.

The second part consists in the elaboration of methods for estimating thermal directional diffusivities. The methods are based on a modeling of heat transfer using thermal quadrupoles. Parameter estimations are made on targeted "risky" areas on a material, which is already damaged but not under stress. The aim is to link a known mechanical damage, which is called "diffuse" to thermal properties degradation in the main directions.

This manuscript is presented in two parts: a validation part of the methods developed on numerically simulated data, and an experimental part in which different composites samples are analyzed.

Sommaire Général

Chapitre 1 : Introduction	11
Chapitre 2 : Méthodes inverses.....	21
1. Problème direct et inverse : généralités.....	24
1.1. Problème direct en thermique.....	24
1.1.1. Mise en équation du problème direct.....	25
1.1.2. Résolution du problème direct.....	26
1.2. Problème inverse en thermique.....	28
1.2.1. Classification des problèmes inverses en thermique.....	28
1.2.2. Le bruit de mesure.....	30
1.2.3. Etude des sensibilités.....	31
2. Résolution du problème inverse.....	32
2.1. Introduction à la régularisation d'un problème thermique inverse.....	33
2.2. Régularisation par recherche de quasi-solution.....	38
2.2.1. Régularisation par pénalisation de l'opérateur (Thikhonov)	39
2.2.2. Régularisation par analyse spectrale de l'opérateur.....	40
2.3. Régularisation par algorithme itératif.....	42
2.3.1. Principe des méthodes itératives.....	43
2.3.2. Classification des algorithmes de résolution.....	43
2.4. Filtrage de données.....	49
2.4.1. Filtrage par décomposition en valeurs singulières SVD.....	49
2.4.2. Filtrage par décomposition en Séries de Fourier.....	51
2.4.3. Filtrage par décomposition en Ondelettes.....	52
Nomenclature.....	54
Liste des figures.....	55
Références bibliographiques	56
Chapitre 3 : Estimation de sources de chaleur	59
1. Etude en configuration 2D.....	61
1.1. Simulation de données bruitées.....	62
1.2. Méthode « directe »	65
1.2.1. Description de la méthode.....	66
1.2.2. Filtrage SVD directionnel.....	67
1.2.3. Résultats d'estimation.....	69
1.3. Méthode du gradient conjugué.....	70
1.3.1. Description de la méthode.....	70
1.3.2. Le problème inverse.....	71

1.3.3.	Problème adjoint et équation du gradient.....	72
1.3.4.	Problème de sensibilités et profondeur de descente.....	72
1.3.5.	Critère d'arrêt.....	73
1.3.6.	Optimisations de l'algorithme.....	73
1.3.7.	Optimisation du problème direct.....	75
1.4.	Résultats d'estimations.....	76
1.4.1.	Signal non-bruité.....	76
1.4.2.	Signal bruité.....	78
2.	Etude en configuration 3D.....	80
2.1.	Simulation de données numériques 3D.....	81
2.2.	Estimation de sources avec un modèle 2D.....	83
3.	Expérience thermique.....	87
3.1.	Banc expérimental.....	87
3.2.	Résultats d'estimation.....	91
3.3.	Evaluation des pertes convecto-radiatives.....	92
	Nomenclature.....	95
	Liste des figures.....	96
	Références bibliographiques.....	99

Chapitre 4 : Estimation de paramètres101

1.	Généralités sur les méthodes d'estimation.....	103
1.1.	Excitation aléatoire.....	104
1.2.	Excitation périodique.....	104
1.3.	Excitation impulsionnelle.....	105
2.	Modélisations thermiques.....	105
2.1.	Modélisation 1D avec les quadripôles thermiques.....	106
2.1.1.	Description du modèle.....	106
2.1.2.	Validation numérique du modèle.....	109
2.2.	Modélisation orthotrope 3D avec quadripôles thermiques.....	111
2.2.1.	Description de la méthode.....	112
2.2.2.	Caractérisation de la diffusivité longitudinale a_z	115
2.2.3.	Caractérisation de diffusion transverse a_x et a_y	119
2.3.	Validation numérique des méthodes d'estimation.....	121
2.3.1.	Fabrication de données numériques bruitées.....	121
2.3.2.	Analyse spectrale du signal en face arrière.....	122
2.3.3.	Estimation de la diffusivité longitudinale (selon l'épaisseur)	122
2.3.4.	Estimation de la diffusivité effective (direction transverse)	125
	Nomenclature.....	130

Liste des figures.....	131
Références Bibliographiques.....	133
Chapitre 5 : Résultats expérimentaux	135
1. Introduction.....	137
2. Présentation des échantillons	137
2.1. Le matériau.....	138
2.2. Les échantillons.....	138
3. Pré-caractérisation thermique des échantillons sains.....	139
3.1. Mesure de masse volumique.....	139
3.2. Mesure de capacité calorifique.....	140
3.3. Estimation de diffusivités thermiques.....	143
3.3.1. Banc expérimental.....	143
3.3.2. Résultats d'estimations de diffusivités.....	145
4. Tests thermomécaniques.....	150
4.1. Forme des échantillons.....	151
4.2. Description du banc.....	151
4.3. Résultats qualitatifs : repérage de macro-fissures.....	153
4.4. Résultat quantitatif : estimation de sources.....	157
4.4.1. Fissure A (suivie d'une rupture)	159
4.4.2. Fissure B (sans rupture)	162
5. Mesure du niveau d'endommagement.....	165
5.1. Essais mécaniques.....	165
5.2. Estimation de diffusivités thermiques.....	167
5.2.1. Estimation des diffusivités selon l'épaisseur 1D.....	167
5.2.2. Estimation des diffusivités directionnelles 3D.....	169
5.3. Mesures d'endommagement mécanique et thermique.....	171
6. Détection de délaminage.....	174
6.1. Banc expérimental 1D.....	174
6.1.1. Résultats.....	176
7. Conclusions.....	178
Nomenclature.....	179
Liste des figures.....	180
Références bibliographiques.....	184
Conclusions et Perspectives	187
Annexes	191

Introduction

Un matériau composite est un matériau hétérogène formé, au minimum, de deux constituants, disposés selon une géométrie spécifique [Gendre, 2011]. Ils sont constitués d'une part de renforts (fibres ou particules) assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite ; d'autre part d'une matrice assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.

Les matériaux composites à matrice en résine organique renforcée par des fibres de carbone et de verre sont utilisés pour leurs propriétés mécaniques remarquables et trouvent de nombreuses applications notamment en aéronautique. L'intérêt majeur de ces matériaux est de posséder un excellent rapport rigidité sur masse. Ils équipent aujourd'hui, et de manière croissante, les différents aéronefs commerciaux, comme par exemple l'Airbus A350 construit à plus de 50% à partir de matériaux composites, ou encore le Boeing 787. L'objectif principal est de réduire la masse des aéronefs tout en conservant de bonnes propriétés mécaniques, afin de réaliser des économies en termes de fabrication, de carburant consommé, de maintenance, etc.

Malgré ces qualités, les capacités de résistance à l'endommagement ainsi que la tenue dans le temps de ces matériaux restent assez difficiles à anticiper, notamment pour les composites tissés [G. Bai, 2016]. La forte hétérogénéité de ces matériaux fait que les dommages qu'ils subissent peuvent se manifester de multiples façons : macro-fissures de la matrice entre deux mèches, microfissures, décohésions fibre/matrice, rupture de fibres, délaminage entre les plis, etc.

Le présent travail a pour but de participer à la mise en place de méthodes faisant appel à la thermique pour comprendre leurs mécanismes d'endommagement et déterminer leur niveau d'endommagement. Les matériaux retenus pour réaliser l'étude, sont des composites à renforts de fibres de carbones et de verre tissées et noyées dans une matrice thermoplastique de PEEK (Poly Ether Ether Ketone).

Les recherches sur le comportement mécanique de ces matériaux composites [N. Boulebbad-Gomez et al, 2016] montrent que l'endommagement peut se manifester principalement de deux manières : l'endommagement localisé (défauts et macrofissures) et l'endommagement diffus (baisse de raideur). La direction de l'effort subi par rapport à l'orientation des fibres est la principale responsable du type d'endommagement.

Les recherches sur la détection de défauts et la mesure de l'endommagement sont multiples et mettent souvent en collaboration des laboratoires de recherches et des industriels munis de bancs expérimentaux leur permettant de prévenir la rupture des pièces.

La méthode de détection de défauts la plus répandue, dans l'industrie automobile et aéronautique, est la méthode acoustique [J. Antoni, 2006] [E. Cardenas Cabada et al, 2015]. L'imagerie acoustique a de nombreuses applications dans le domaine industriel : les méthodes telles que l'holographie acoustique (couplée à des techniques de filtrage comme le Beamforming [B.D. Van Veen et K.M. Buckley, 1988]) se sont révélées efficaces dans le domaine du diagnostic et de la détection de défauts. Cependant, ces procédés d'imagerie acoustique présentent des limites liées à la bande fréquentielle d'analyse, au nombre de capteurs et à leurs positions, à la position par rapport à la source d'émission des ondes acoustiques, et enfin aux procédés de régularisation des problèmes inverses associés.

Par ailleurs, tous les matériaux sollicités mécaniquement produisent de la chaleur. Leur comportement mécanique est fortement couplé à leur comportement thermique lorsqu'ils sont en service : on parle d'une loi de comportement thermomécanique du matériau. Au même titre que l'acoustique, la thermique est une voie efficace dans le domaine de la détection de défauts car elle permet également de faire des contrôles non-destructifs (CND).

Des tentatives de corrélation des échauffements avec l'apparition de défauts pendant un essai en traction existent [J-M. Roche et al, 2013]. Ce travail se base essentiellement sur l'observation du champ de température mesuré en temps réel (par thermographie IR) pendant un essai de traction (réalisé par paliers de contraintes) sur un échantillon composite verre/epoxy. Le travail vise dans un premier temps la détection des fissures, on observe d'ailleurs une forte corrélation entre la localisation des échauffements et la propagation de fissures. Puis la sévérité des dommages subis par les composites est quantifiée à l'aide des écarts en température. Ce travail met ensuite en évidence un fort lien entre la somme des élévations de température au cours de l'essai et l'énergie acoustique cumulée durant l'essai.

Or, on sait que la chaleur produite par les matériaux lorsqu'ils sont sollicités est issue de phénomènes mécaniques divers comme la propagation de macro-fissures, la création de microfissures, les ruptures de fibres, ou encore des dissipations viscoplastiques. Cette chaleur est vue par l'observateur comme une densité de flux volumique appelée terme source de chaleur. Par conséquent, ces sources de chaleur peuvent être estimées à partir de mesures du champ de température lorsqu'un échantillon est sollicité mécaniquement. Dans ce cas-là, l'énergie thermique mise en jeu est directement liée à l'énergie mécanique nécessaire à la création de défauts [T. Lisle et al, 2013].

Le champ de température est fortement dépendant des propriétés de diffusion et de stockage du matériau. Il est donc judicieux de considérer la chaleur mise en jeu comme un champ de termes sources plutôt qu'un champ de température.

L'estimation de sources de chaleur fait partie de ce que l'on appelle « les problèmes inverses en thermique ». Elle est qualifiée ainsi car elle permet de retrouver les causes (les termes sources) à partir de la mesure des effets (températures). Un problème inverse est très souvent qualifié de « mal posé », cela signifie qu'il demande donc à être régularisé. Pour être qualifié de « bien posé », un problème doit respecter les critères définis par J. Hadamard (existence, unicité et stabilité - Cf. Chapitre 2).

Les perturbations rencontrées sont très souvent issues de l'amplification du bruit de mesure attaché aux mesures de température par l'opérateur inverse. Il existe plusieurs manières de régulariser et résoudre ces problèmes, cependant trois grandes approches se démarquent pour résoudre ce « problème inverse » :

- **L'approche n°1** est une méthode basée sur une discrétisation de l'équation de la chaleur et du calcul des termes dérivées premières et secondes. Cette approche considère que le caractère mal posé du problème inverse vient du fait que les mesures entachées de bruit engendrent inévitablement de grandes erreurs dans le calcul de ces termes dérivés. Ces méthodes sont employées dans [A. Chrysochoos et al, 2000] [H. Louche, 2009] [V. Delobelle et al, 2011] ou encore [T. Lisle, 2014]. Ici, la régularisation du problème est réalisée en filtrant les mesures (températures) de manière à atténuer au maximum en amont le bruit de mesure. D'autres travaux, comme [B. Berthel, 2007], utilisent des méthodes de filtrage polynomial du champ de température.
- **L'approche n°2** est basée sur la recherche de « quasi-solutions », cette famille de méthode consiste à régulariser (modifier légèrement) l'opérateur inverse afin d'atténuer le caractère instable et le manque de précision. [J.R. Shenefelt et al, 2002] [A.N. Thikonov and V.Y. Arsenin, 1977]
- **L'approche n°3** repose sur des optimisations successives et englobe toutes les méthodes itératives. Le problème est ainsi résolu dans son sens direct et l'estimation est réalisée par réduction d'une fonction coût. Stéphane André propose [S. André, 2012] un processus itératif utilisant des grandeurs thermodynamiques pour parvenir à une estimation des termes sources de chaleur.

Dans cette thèse, le choix s'est porté essentiellement sur deux méthodes d'estimation des termes sources sur des échantillons composites sollicités mécaniquement. L'estimation est réalisée à partir d'un relevé du champ de température par thermographie infrarouge. L'objectif est d'estimer, sans à priori, et en tous points de l'espace et du temps, les termes sources de chaleur. Ces conditions impliquent de devoir estimer un très grand nombre de paramètres. L'approche n°2 requiert de calculer le produit des matrices de sensibilités du modèle utilisé par rapport aux paramètres estimés, cependant, si ce nombre de paramètres est trop grand, ce calcul matriciel devient rapidement rédhibitoire. C'est ainsi que l'on

préfèrera utiliser des méthodes itératives comme celles de l'approche n°3. Les résultats seront comparés avec ceux de l'approche n°1.

Ces estimations de source permettent de détecter des défauts localisés pendant des tests de traction réalisés en laboratoire avec le matériel de caractérisation adéquat. Cependant, dans de nombreux cas, l'endommagement des matériaux composites n'est pas localisé mais qualifié de diffus. Il se manifeste alors par une dégradation de ses propriétés mécaniques comme la raideur ou le module d'élasticité. On peut se demander s'il est possible de caractériser par voie thermique cet endommagement diffus du matériau qui serait apparu au cours de son utilisation normale et si cet endommagement est détectable au cours d'une inspection non-destructive menée sur le terrain (et non pas pendant un essai de traction).

Récemment, des calculs de dimensionnement de structure composites ont été développés dans le but d'établir la dépendance des propriétés thermo-physiques à l'endommagement mécanique de composites à matrice céramique (applications au domaine nucléaire). Dans son papier, J. El Yagoubi [J. El Yagoubi, et al 2009] estime la conductivité thermique à l'aide de modèles micromécaniques prenant en compte la structure et l'arrangement du composite. L'expérience montre la corrélation entre la chute de la conductivité thermique et la progression de l'endommagement pendant un essai mécanique. En effet, des défauts peuvent apparaître dans l'épaisseur ou dans les directions des fibres dans le plan. Le délaminage est un endommagement de certains matériaux lorsqu'ils sont cisailés. Il apparaît alors une résistance d'interface entre deux plans successifs de l'échantillon. Les matériaux composites sont sujet à ce genre de dégradation, notamment les composites stratifiés, et un délaminage se matérialise par le décollement des plis entre eux. Il peut survenir lors de la maintenance d'une pièce, lors d'un perçage, ou encore d'un impact. Des outils et techniques de contrôle non-destructif existent, ils utilisent les ultrasons pour détecter ces décollements. Cette décohésion entre couches a pour conséquence l'apparition d'une résistance thermique qui peut être détectée par des méthodes thermiques classiques [Krapez, 2004].

En ce qui concerne les défauts dans le plan, d'autres techniques permettent la détection de défauts, comme l'ellipsométrie laser, développée dans [J-C Krapez, 2004] et employée sur des composites stratifiés orthotropes, ou encore des méthodes utilisant des sollicitations périodiques [Lascoup et al, 2011] pour identifier les propriétés thermiques en mesurant le déphasage entre la sollicitation et la réponse du matériau. Ces méthodes permettent de détecter des défauts plans mais également de déceler la mauvaise orientation d'une fibre.

Cet endommagement est tout à fait quantifiable sur le plan mécanique, lorsque l'essai est contrôlé, comme dans [N. Boulebbad-Gomez et al, 2016], où l'auteure est capable de déterminer un endommagement en pourcentage détaillé dans le chapitre 5. Dans [N. Boulebbad-Gomez et al, 2017] un ajustement du modèle mécanique est proposé, avec une

version plus générale du calcul de l'endommagement tenant compte d'une modélisation du mécanisme de rupture plus local. Evidemment, lorsque les matériaux sont en fonctionnement, il est impossible de déterminer avec précision cet endommagement. C'est pour cette raison que la plupart des industriels se basent sur des relevés statistiques [T. Tiplica, 2002]. Par exemple, le remplacement d'une pièce n'est pas déterminé par sa rupture mais plutôt par un nombre de cycle (ou une durée d'utilisation). C'est pourquoi une méthode de contrôle non-destructif (CND) capable de donner le niveau d'endommagement d'un matériau, permettrait aux aviateurs ou constructeurs automobiles de changer leurs pièces lorsque cela est vraiment nécessaire. Le remplacement serait basé sur une mesure et non pas sur des statistiques.

Dans le domaine de la thermique, nous pouvons nous appuyer sur des méthodes d'estimation des diffusivités thermiques, comme celles développées par Y. Souhar dans [Y. Souhar et al, 2013]. Dans ce travail, l'auteur propose d'estimer des diffusivités thermiques en minimisant l'écart quadratique entre des mesures par thermographie infrarouge et une modélisation du transfert de chaleur en 3D à l'aide des quadripôles thermiques, et choisit de ne conserver qu'une unique harmonique spatiale. On se propose d'étudier l'évolution des propriétés thermiques sur des matériaux ayant subi un endommagement diffus. Les propriétés thermiques (comme la diffusivité thermique) pourraient peut-être avoir été affectées par l'endommagement. Le but du second volet de cette thèse est de mettre en place une méthode de mesure de détermination du niveau d'endommagement diffus en utilisant la variation de diffusivités thermiques d'un matériau dont l'endommagement mécanique est connu.

Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres. Le chapitre 2 présente le concept de problème inverse ainsi qu'un ensemble de méthodes de résolution rencontrées dans le domaine de la thermique. Dans le chapitre 3, nous présentons différents cas numériques de référence sur lesquels sont appliquées deux méthodes inverses d'estimation de sources volumiques de chaleur : une méthode dite « directe » ainsi que la méthode du gradient conjugué. Le but est de comparer les comportements et les performances de ces deux méthodes. En fin de chapitre, une expérience est effectuée pour valider dans de réelles conditions ces méthodes.

Le chapitre 4 est également axé sur la description d'un cas numérique de référence. Cette fois-ci le but est de développer des méthodes d'estimation des diffusivités thermiques directionnelles.

Enfin, dans le chapitre 5, une des méthodes développées au chapitre 3 est utilisée sur des composites sous sollicitation mécanique dans le but de détecter des défauts et de les quantifier. Puis les méthodes développées au chapitre 4 sont utilisées sur des échantillons endommagés avec pour objectif de déterminer leur niveau d'endommagement.

Références bibliographiques

- G. ALIPRANDI, 1989, *Matériaux réfractaires et céramiques techniques, chap. 25, Éd. Septima*
- S. ANDRE, N. RENAULT, Y. MESHAKA, ET C. CUNAT, 2012, From the Thermodynamics of Constitutive Laws to the Thermomechanical Experimental Characterization of a Semicrystalline Polymer from IR Imaging, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 24, no 1 (1-20)
- J. ANTONI, 2006, The spectral kurtosis : application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotating machines, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 308-331
- M. ASHBY ET D. JONES, 2014, Microstructure et mise en œuvre, *Matériaux, tome 2, chap. 25, Dunod*
- J. AUCHER, 2009, Etude comparative du comportement de composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable, PhD Thesis, Institut national des sciences appliquées de Rouen
- G. BAI, 2016, Evaluation par vibrothermographie de l'endommagement de composites tissés, PhD Thesis, Université de Bordeaux
- J. C. BATSALE, D. MAILLET AND A. DEGIOVANNI, 1994, Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales-calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 37
- B. BERTHEL, 2007, Mesures thermographiques de champs de dissipation accompagnant la fatigue à grand nombre de cycles des aciers, PhD Thesis, Université de Montpellier II
- N. BOULEBBAD-GOMEZ, J-P. CHARLES, N. LAHELLEC, C. HOCHARD, 2016, Analysis of the matrix transverse damage in a UD ply of and unbalanced hybrid PEEK-CARBON/GLASS composite under combined static load, ECCM17, *Munich*
- N. BOULEBBAD-GOMEZ, J-P. CHARLES, N. LAHELLEC, C. HOCHARD, 2017, Analyse du comportement de composites stratifiés à renforts tissés carbone et à matrice thermoplastique sous chargement de fatigue, *Journée Nationale sur les Composites JNC20, Ecole des Ponts ParisTech*
- S.BRAHIM, J-L. BODNAR, P. GROSSEL ET P. HERVE, 2007, Analyses photo thermiques face arrière sous excitation aléatoire et analyse paramétrique : application à la mesure de diffusivité thermique, *Congrès Français de Thermique 2007, Ile des Embiez*

E. CARDENAS, N. HAMZAOU, Q. LECLERE, J. ANTONI, 2015 L'imagerie acoustique appliquée au diagnostic et à la détection de défauts sur machine tournante, CFM2015 Lyon

A. CHRYSOCHOOS, S. ANDRE, ET H. LOUCHE, 2000, An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation, *International journal of engineering science* 38, no 16 (2000): 1759–1788.

V. DELOBELLE, D. FAVIER, H. LOUCHE, 2011, Validation expérimentale d'estimations de sources de chaleur : cas uniforme, *CFM2011, Besançon*

DORLOT, BAÏLON & MASOUNAVE, 1986, *Des Matériaux, chap. 14, Éd. de l'École Polytechnique de Montréal*

J. EL YAGOUBI, J-L. LAMON, J-C. BATSALE, 2009, Modélisation non-linéaire des effets de l'endommagement sur les propriétés thermiques d'un CMC unidirectionnel, *JNC16, Toulouse*

D. GAY, Matériaux composites, 2009, 5e éd., *Hermes Science Publications*, (ISBN 978-2746210981)

L. GENDRE, Les grandes familles de matériaux composites, 2011, ENS Cachan

J-C. KRAPEZ, 2004, Caractérisation des matériaux par le biais d'une sollicitation thermique externe ou interne, Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Bordeaux I

B. LASCOUP, L. PEREZ, L. AUTRIQUE, A. CRINIÈRE, 2011, Détection de défaut à l'aide d'une sollicitation thermique périodique – Etude de faisabilité, *JNC17 Poitiers*

T. LISLE, 2014, Analyse par thermographie infrarouge de l'endommagement des structures composites sous sollicitations quasi-statiques, PhD Thesis, Université de Toulouse

H. LOUCHE, 2009, Etudes de certains phénomènes de localisation à partir de champs thermomécaniques, HDR, Université de Savoie

J-P. MERCIER, G. ZAMBELLI, W. KURZ, 2002, Introduction à la Science des Matériaux, *Traité des Matériaux, PPUR, vol. 1 : 3e éd., chap. 16* (ISBN 2-88074-402-4)

J-P. MERCIER, J.A.MANSON, P-E. BOURBAN, L. CARLSSON, 2004, Matériaux Composites à Matrices Organiques, *Traité des Matériaux, PPUR, vol. 15 :* (ISBN 2-88074-528-4),

N. RENAULT, 2007, Etude du couplage thermomécanique du PEHD par essais mécaniques et inversion d'images infrarouges, PhD Thesis, Institut national polytechnique de Lorraine

M. REYNE, 1995, *Technologie des composites*, Hermes, (ISBN 2-86601-455-3)

J.M. ROCHE, D. BALAGEAS, B. LAPEYRONNIE, F. PASSILLY, ET A. MAVEL, 2013, Use of infrared thermography for in situ damage monitoring in woven composites, *Photomechanics Conference, 2013:27-9*

J.R. SHENEFELT, R. LUCK, R. P TAYLOR et J.T BERRY, 2002, Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction, *International Journal Heat and Mass Transfer, 45 :67-74*

Y. SOUHAR et al, 2013, Thermal characterization of anisotropic materials at high temperature through integral methods and localized pulsed technique, *International Journal Thermophysics, 34, 2, 322-340*

A.N. THIKONOV and V.Y. ARSENIN, 1977, Solution of ill-posed problems, *Winston & Sons*

T. TIPLICA, 2002, Contribution à la maîtrise statistique des processus industriels multivariés, PhD Thesis, Université d'Angers

B.D. VAN VEEN ET K.M. BUCKLEY, 1988, Beamforming : A versatile approach to spatial filtering, *IEEE ASSP Magazine, vol5, p4*

O. WESTPHAL, 2014, Analyse thermomécanique de l'endommagement en fatigue de stratifiés carbone/époxy : Détermination de la limite d'endurance à partir d'essais d'auto-échauffement, PhD Thesis, Université Nantes Anger LeMans

CHAPITRE 2

METHODES INVERSES

Sommaire

1. Problème direct et inverse : généralités.....	24
1.1. Problème direct en thermique.....	24
1.1.1. Mise en équation du problème direct.....	25
1.1.2. Résolution du problème direct.....	26
1.2. Problème inverse en thermique.....	28
1.2.1. Classification des problèmes inverses en thermique.....	28
1.2.2. Le bruit de mesure.....	30
1.2.3. Etude des sensibilités.....	31
2. Résolution du problème inverse.....	32
2.1. Introduction à la régularisation d'un problème thermique inverse.....	33
2.2. Régularisation par recherche de quasi-solution.....	38
2.2.1. Régularisation par pénalisation de l'opérateur (Thikhonov).....	39
2.2.2. Régularisation par analyse spectrale de l'opérateur.....	40
2.3. Régularisation par algorithme itératif.....	43
2.3.1. Principe des méthodes itératives.....	43
2.3.2. Classification des algorithmes de résolution.....	43
2.4. Filtrage de données.....	49
2.4.1. Filtrage par décomposition en valeurs singulières SVD.....	49
2.4.2. Filtrage par décomposition en Séries de Fourier.....	51
2.4.3. Filtrage par décomposition en Ondelettes.....	52
Nomenclature.....	54
Liste des figures.....	55
Références bibliographiques.....	56

L'ensemble des méthodes permettant de « remonter » à des causes à partir de la mesure ou l'observation de leurs effets définit ce que l'on appelle « la résolution de problèmes inverses ». Elles s'opposent aux méthodes dites « directes » qui permettent de déterminer les effets de causes connues.

La démarche scientifique habituelle consiste à résoudre les équations de la physique (Maxwell, Navier-Stokes, équation de la chaleur, ...) dans le sens direct, c'est à dire de formuler et de résoudre les problèmes pour lesquels les causes (ou sollicitations) sont données et dont on cherche à déterminer les effets (champs).

D'un point de vue expérimental, on qualifie de problèmes inverses l'évaluation d'une grandeur physique inaccessible à l'expérience, à partir de la mesure d'une autre grandeur accessible à l'expérience.

Dans le cas de l'équation de diffusion de la chaleur, les sources volumiques, les flux, ou encore la géométrie du problème représentent des causes, alors que le champ de température qui en découle est un effet induit par ces causes. Il est raisonnable de formuler que « les mêmes causes produisent les mêmes effets ». Par ailleurs, nous pouvons imaginer assez facilement qu'un effet puisse provenir de différentes causes.

Le problème direct est souvent bien-posé, tandis que le problème inverse lui est généralement mal posé. Hadamard [Hadamard, 1932] a introduit mathématiquement la notion de problème bien-posé. Un problème est dit « bien-posé » au sens d'Hadamard si les trois conditions suivantes sont respectées :

- Existence de la solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la solution

Ce second chapitre aborde des généralités sur les méthodes inverses. D'abord, deux concepts opposés seront présentés, celui de « problème direct » et celui de « problème inverse », puis différentes méthodes inverses de résolution seront décrites en fonction des caractéristiques physiques et mathématiques du problème à résoudre.

1. Problème direct et inverse : généralités

1.1. Problème direct en thermique

La résolution d'un problème direct consiste à déterminer le champ de température (effet) d'un ensemble de causes (par exemple, des sources). Il est nécessaire, pour résoudre ce problème, de modéliser le phénomène physique auquel on s'intéresse, à savoir la diffusion de la chaleur au sein d'un milieu. On sait que la notion de « modèle » est très générale, mais on peut raisonnablement dire que l'on a modélisé un problème lorsque l'on est capable de prédire son comportement sous l'effet de stimulations connues. Sous l'action d'une excitation, le système et son modèle doivent (idéalement) répondre de la même manière.

L'objectif principal, lors de la résolution d'un problème inverse, est de réaliser une complétion de données. C'est-à-dire que, la résolution doit permettre, à partir d'observations (température en certains points), de compléter les paramètres structurels manquants de la modélisation. Ces paramètres structurels qui définissent la modélisation peuvent être très nombreux : les propriétés thermo-physiques du domaine (conductivité, masse volumique, capacité calorifique,...), les dimensions, les termes sources (G), les conditions aux limites (température, densité de flux, flux convectif, etc.) (Figure 1).

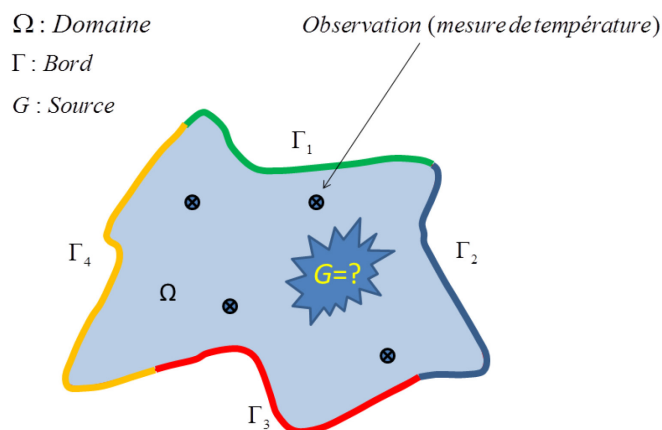


Figure 1 – Schématisation d'un problème inverse en thermique

Considérons un système thermique soumis à des perturbations extérieures comme par exemple un flux imposé sur une face.

Si l'on connaît le champ de température initial, les propriétés thermo-physiques du domaine, les sources internes et les conditions aux limites, la détermination du champ de température $T(x, y, z, t)$ dans le solide par résolution de l'équation de la chaleur est un problème direct. On peut le résoudre avec différentes méthodes : analytiques, numériques, analogiques,...

1.1.1. Mise en équation du problème direct

Afin d'illustrer ce propos, intéressons-nous à un problème simple de conduction de la chaleur. Le cas d'un milieu fini 1D sans terme source interne et dont les propriétés thermiques ne dépendent pas de la température (Figure 2) :

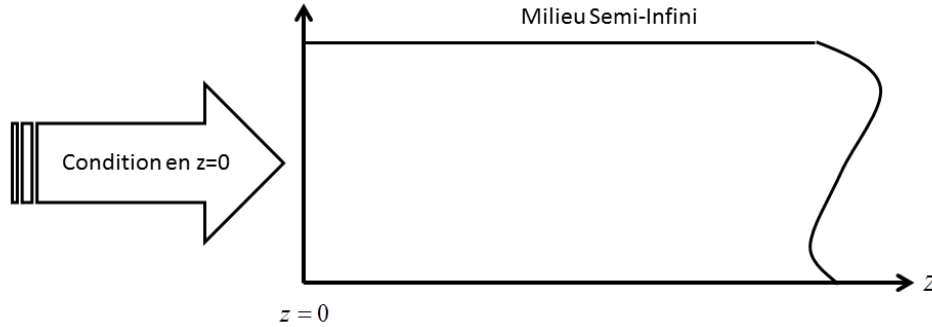


Figure 2 - Schéma du milieu semi-fini 1D sans terme source

Dans ce cas, résoudre le problème direct revient à résoudre l'équation de la chaleur dans sa forme linéaire :

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

Avec a la diffusivité thermique en (m^2/s)

Avec la condition initiale, à $t = 0$:

$$T(z,0) = T_0 = 0 \quad (2.2)$$

Et les conditions aux limites (notées C.L) en $z = 0$:

$$\alpha_1 T(0,t) + \alpha_2 \frac{\partial T(0,t)}{\partial z} = f(0,t) \quad (2.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z,t) = T_0$$

La condition en $z = 0$ écrite de cette manière dans [Ozisik, 2012] permet de décrire toutes les possibilités :

- $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ et $f(0,t) = T_{imp}(t)$ revient à imposer la température $T_{imp}(t)$ en $z = 0$, cette condition limite est appelée **condition de Dirichlet**.
- $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -k$ et $f(0,t) = Q_{imp}(t)$ revient à imposer la densité de flux $Q_{imp}(t)$ en $z = 0$, cette condition limite est appelée **condition de Neumann**.

avec k la conductivité thermique.

- $\alpha_1 = h$, $\alpha_2 = -k$ et $f(0,t) = -h.T_\infty$ revient à imposer entre le milieu extérieur à température T_∞ et la surface du système thermique le coefficient de transfert de chaleur h , cette condition limite est appelée **condition de Fourier** (ou de Newton).

Lorsque le problème est simple et homogène, la résolution du problème direct peut s'effectuer en utilisant des méthodes analytiques, mais dans la plupart des cas, les problèmes sont complexes et les solutions analytiques n'existent pas. Ceci nous conduit le plus souvent à l'utilisation de méthodes générales de discrétisations numériques comme les différences finies [Incropera, 2011][Ozisik, 2012], les éléments finis [Dhatt et Touzot 1984] ou les éléments de frontière [LeNiliot 1998]. Ces méthodes consistent à transformer l'équation de la chaleur et ses conditions aux limites en un système d'équations au travers d'une formulation discrète ou intégrale. Les variables sont discrétisées en découpant la géométrie étudiée avec un maillage.

Les solutions du système d'équations sont obtenues dans le cas linéaire, par la résolution directe d'un système matriciel de la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \delta T \quad (2.4)$$

\mathbf{A} représente l'opérateur matriciel (modélisation du système linéaire de diffusion)

δT représente le vecteur élévation de température par rapport à l'instant initial

\mathbf{Q} représente le vecteur contenant les sollicitations (flux ou sources)

1.1.2. Résolution du problème direct

Principe de l'inversion de l'intégrale de Duhamel

On se propose de résoudre l'équation de la chaleur en utilisant le théorème de Duhamel qui est basé sur le principe de superposition. On utilise une relation entre la solution d'un problème initial aux conditions aux limites non homogènes et les solutions de problèmes quasi-homogènes associés. On considère tout d'abord un système linéaire dynamique invariant ayant pour entrée $e(t)$ et pour sortie $s(t)$ (Figure 3) comme dans [J. Fritz, 1982].

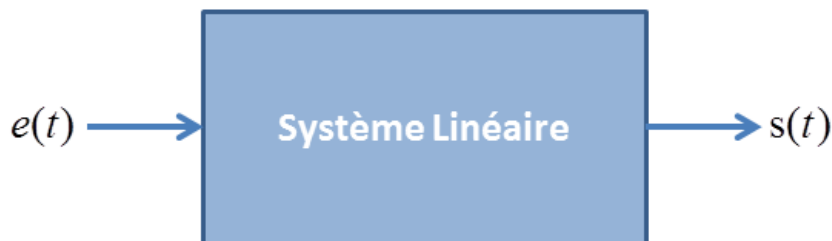


Figure 3 – Schématisation de la théorie des systèmes linéaires

Soit $imp(t)$ la réponse impulsionnelle du système linéaire, c'est-à-dire sa réponse à un Dirac $\delta(t)$ (excitation infiniment courte en temps et d'amplitude infiniment grande).

On peut, dans le cadre d'un système linéaire, exprimer la sortie du système $s(t)$ (la température dans notre cas) comme étant la convolution de l'entrée (le flux dans notre cas) avec la réponse impulsionnelle $imp(t)$ du système, additionné avec la condition initiale $s(t_0)$.

$$s(t) = s(t_0) + imp(t) \otimes e(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t imp(\tau) \cdot e(t-\tau) d\tau \quad (2.5)$$

La réponse impulsionnelle $imp(t)$ du système est déduite de la dérivée temporelle de la réponse indicelle du système $ind(t)$:

$$imp(t-\tau) = \frac{\partial ind(t-\tau)}{\partial(t-\tau)} = \frac{\partial ind(t-\tau)}{\partial t} \quad (2.6)$$

L'expression, dans le cadre de la diffusion de la chaleur, du théorème de Duhamel est :

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial ind(t-\tau)}{\partial t} \cdot e(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Ainsi, nous pouvons, via l'intégrale de Duhamel, résoudre l'équation de la chaleur, même lorsque le problème n'est pas homogène et n'a pas de solution analytique triviale.

Soit le cas particulier du transfert de chaleur 1D sans source, avec un flux imposé à la surface, l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$-k \cdot \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = Q_{imp}(t) \quad \text{en } z=0 \quad (2.9)$$

La température initiale est uniforme sur l'ensemble du domaine :

$$T(z, t=0) = T_0 \quad (2.10)$$

En utilisant l'intégrale de Duhamel, la température à la profondeur z s'écrit :

$$T(z,t) = T_0 + \int_{\tau=0}^t \frac{\partial ind(z,t-\tau)}{\partial t} \cdot Q_{imp}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Si nous souhaitons réaliser une résolution numérique, il suffit de discrétiser l'équation (2.7).

Cependant, qu'en est-il de la démarche inverse qui consiste à retrouver $Q_{imp}(t)$ à partir de $T(z,t)$ donné.

1.2. Problème inverse en thermique

Le problème inverse est défini par opposition au problème direct. Il revient à déterminer les causes (solllicitations, paramètres, géométrie,...) qui ont donné naissance à des effets mesurés (observations sur la Figure 4).

Bien que le système thermique puisse souvent être modélisé dans le sens direct, la résolution du problème inverse n'est pas triviale et nécessite l'utilisation de méthodes spécifiques en fonction des difficultés rencontrées. Un problème inverse est qualifié de « bien posé au sens d'Hadamard » [Hadamard, 1932] lorsqu'il satisfait simultanément les trois conditions suivantes :

- Existence de la solution
- Unicité de la solution
- Stabilité de la solution : dépendance continue de la solution à de faibles variations des données

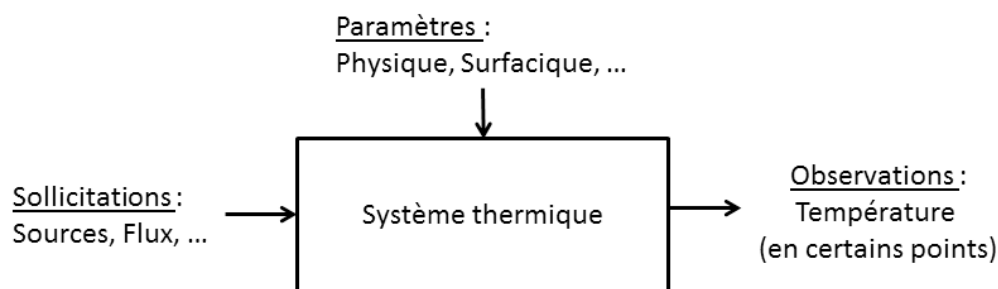


Figure 4 - Schéma d'un système thermique

1.2.1. Classification des problèmes inverses en thermique

En thermique, la classification est généralement axée sur ce que l'on souhaite déterminer :

- Détermination de conditions limites : le but est de déterminer « la » ou « les » conditions aux limites géométriques du domaine, on tentera d'identifier des densités de flux, des températures imposées (ce qui est une configuration assez peu courante expérimentalement), ou encore des coefficients d'échange convectifs, radiatifs, ou convecto-radiatifs.
- Détermination de condition initiale : le but (surtout dans le cadre d'un problème thermique) est de déterminer le champ de température initial, à l'instant $t=0$ sur l'ensemble du domaine à partir de mesures réalisées après.
- Détermination de formes géométriques.
- Détermination de propriétés thermo-physiques : le but est de déterminer une ou plusieurs propriétés telles que la conductivité thermique, la diffusivité thermique, l'effusivité thermique,...

- Détermination de termes sources. Le but est de déterminer la localisation et la valeur des sources internes à partir de mesures surfaciques ou internes.

Ce manuscrit présente dans les chapitres 3, 4 et 5 des problèmes essentiellement consacrés à l'identification de termes source et à l'estimation de propriétés thermo-physiques comme les diffusivités thermiques. La géométrie sera considérée bidimensionnelle dans certains cas de figures, puis tridimensionnelles. Les problèmes seront considérés comme linéaires au vu des faibles variations de températures n'entraînant donc pas de modification notable des propriétés thermo-physiques.

Lorsque l'on est confronté à un problème inverse en thermique, l'observable est souvent la température en certains points du système et l'on souhaite obtenir des informations sur les propriétés physiques, sur les conditions aux limites, sur les sollicitations (flux ou sources), sur la localisation d'un front de fusion, etc.

Si nous prenons l'exemple du domaine 1D sans production de chaleur interne, deux problèmes inverses courants peuvent nous concerner :

CAS n°1 : L'estimation des propriétés thermiques du solide en connaissant le flux imposé en surface et en mesurant l'évolution de la température de surface (Figure 5).

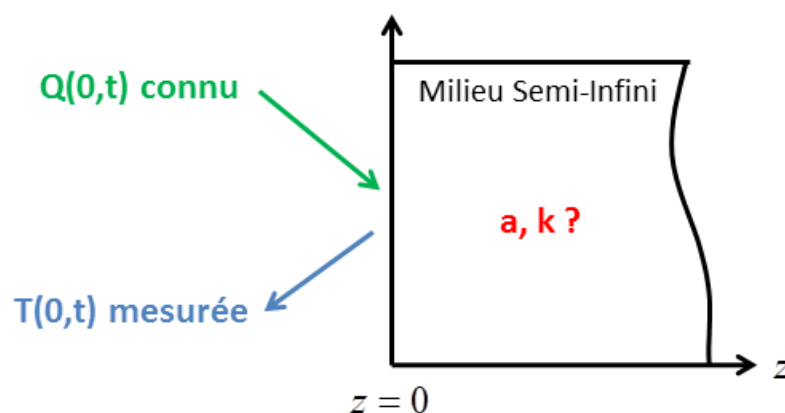


Figure 5 - Estimation de propriétés thermiques d'un milieu semi-infini

On peut faire varier la sollicitation pour obtenir une meilleure sensibilité des paramètres que l'on cherche à estimer. Dans ce cas, la redondance des expériences permet d'améliorer le rapport signal sur bruit (*annexe 5*). En effet, en pratique les propriétés statistiques du bruit de mesure sont inconnues, mais on qualifie de bruit « standard » le bruit de moyenne nulle (mesure non-biaisée), d'écart-type σ constant suivant une loi de probabilité gaussienne [Orlande et al, 2011].

CAS n°2: L'estimation du flux déposé en surface connaissant les propriétés thermiques et mesurant l'évolution de la température en $x = e$ (Figure 6). Ici chaque expérience est unique et le cumul des informations ne peut se faire. On observe en général un mauvais rapport signal sur bruit qu'il conviendra d'améliorer par des techniques mathématiques. Cette classe de problème inverse est souvent nommée le « Le Problème Inverses de Conduction de la Chaleur » (PICC) [Raynaud, 2008].

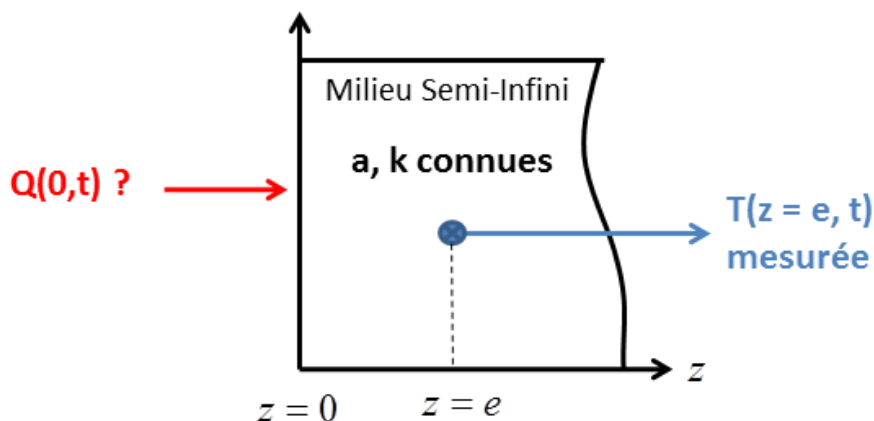


Figure 6 - Estimation de flux à partir d'une mesure de température en profondeur dans un milieu semi-infini

La conduction de la chaleur en régime instationnaire est un phénomène de diffusion, dissipatif et donc irréversible, ceci constitue une difficulté supplémentaire au problème d'inversion qui est ici « mal posé ».

1.2.2. Le bruit de mesure

Les critères d'unicité et de stabilité de la solution que l'on souhaite obtenir sont remis en question par la présence de perturbations sur le signal mesuré (températures).

En effet, toute mesure est entachée d'erreurs [Maillet et al, 2010][Maillet et al, 2011], ces erreurs proviennent de la chaîne de mesure. Ces erreurs, que l'on appelle plus couramment le bruit de mesure, peuvent être atténuées de plusieurs manières mais ne peuvent en aucun cas être supprimées. On les note $\varepsilon(t)$, écart entre la mesure \tilde{T} et la sortie d'un capteur parfait T , on obtient donc :

$$\tilde{T}(t) = T(t) + \varepsilon(t) \tag{2.12}$$

Un capteur de température sera considéré comme parfait s'il est non intrusif et ne perturbe pas la température locale du milieu, et s'il donne la valeur exacte de la température qu'il mesure. Par définition, un capteur à contact (thermocouple ou sonde à résistance) ne peut pas être un capteur parfait de par son caractère intrusif.

Le temps de réponse du capteur est une grandeur essentielle. Il est primordial, d'avoir un capteur dont le temps de réponse est inférieur d'au moins un ordre de grandeur au pas de temps d'acquisition des données afin que la mesure ait un sens physique [Y. Jannot, 2011].

Une mesure infra-rouge en surface peut s'approcher de l'instantané compte tenu des temps de réponse au regard des temps diffusifs. Cependant, de nombreuses perturbations et incertitudes viennent également s'ajouter à la chaîne de mesure, le rapport signal sur bruit se dégrade lorsque le temps d'intégration diminue.

1.2.3. Etude des sensibilités

Un outil efficace pour évaluer la faisabilité d'une inversion de mesures bruitées consiste en l'étude des fonctions de sensibilité, qui deviennent des coefficients de sensibilités lorsque le temps est discrétisé [Rigollet et al, 2011]. La fonction de sensibilités de la sortie du modèle T par rapport à chaque composante X_j du vecteur des paramètres X est par définition :

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}(t_i, X_j) = \left. \frac{\partial T(t_i, X_k)}{\partial X_j} \right|_{k \neq j} \quad (2.13)$$

X_j peut être :

- Une excitation de type flux ou source (en différents points du temps et de l'espace).
- Un paramètre thermo-physique ou géométrique (en différents points de l'espace et du temps).

Lorsque le modèle choisi est linéaire (et c'est notre cas dans l'ensemble du manuscrit), on peut écrire la sortie de ce modèle sous la forme :

$$T(X) = \mathbf{S}.X \quad (2.14)$$

Où \mathbf{S} est la matrice de sensibilité comportant N lignes correspondant au nombre de pas de temps de la mesure, et M colonnes correspondant au nombre de paramètres du modèle :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1j} & \dots & S_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i1} & \dots & S_{ij} & \dots & S_{iM} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \dots & S_{Nj} & \dots & S_{NM} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Ces coefficients de sensibilités peuvent être calculés de plusieurs manières :

- Soit en dérivant T par rapport à l'expression analytique du modèle selon (2.13)
- Soit en approximant la dérivée partielle par schéma numérique centré

- Soit en résolvant les équations de sensibilités (méthode du gradient conjugué développée dans le chapitre 3)

L'étude des sensibilités permet de connaître le niveau d'influence de chaque paramètre. Lorsque l'on souhaite comparer les sensibilités entre-elles de paramètres totalement différents, il est important de calculer leur action par rapport à l'amplitude du modèle et du bruit de mesure, on obtient ainsi des sensibilités dites « réduites » [B. Hay et al, 2004]. Ainsi, ces sensibilités réduites ont la même unité que la sortie du modèle T . Elles sont définies par :

$$\mathbf{S}_{ij}^r = X_j \cdot \mathbf{S}(t_i, X_j) = X_j \left. \frac{\partial T(t_i, X_k)}{\partial X_j} \right|_{k \neq j} \quad (2.16)$$

Ces coefficients ont aussi la même unité que, les mesures et le bruit de mesure. En réalisant une analyse de ces coefficients, il est possible de repérer les paramètres (ou les groupements de paramètres) les plus significatifs du modèle dont l'estimation simultanée est réalisable (typiquement, dans le cadre de grandeurs complètement dé-corrélées les unes par rapport aux autres).

Connaissant les sensibilités réduites des paramètres (ou groupes de paramètres) du système, il est ensuite possible de choisir les plus pertinents et surtout d'en estimer simultanément plusieurs sous réserve qu'ils ne soient pas complètement corrélés entre eux, autrement dit, que leurs sensibilités n'aient pas les mêmes allures au cours du temps.

2. Résolution du problème inverse

Dans cette partie, nous nous intéressons principalement à deux types de problèmes inverses que nous serons amenés à traiter dans la suite du manuscrit:

- L'estimation de paramètres thermo-physiques volumiques
- L'estimation de termes sources de chaleur volumiques

Dans les deux cas, la mesure est un champ de température obtenu à l'aide d'une caméra IR.

On ne rencontre généralement pas d'instabilités lors de l'estimation de paramètres. La difficulté réside essentiellement dans le choix des paramètres (ou groupes de paramètres) que l'on choisit d'estimer. On rencontre des difficultés, lorsque par exemple, deux paramètres que l'on souhaite estimer sont corrélés, ou encore lorsque la grandeur mesurée n'est pas assez sensible au paramètre estimé.

Lors de l'estimation par technique inverse, de termes sources ou bien de flux, il est nécessaire de pouvoir respecter la condition de stabilité. Ces instabilités se traduisent par le fait qu'une faible variation des données induit une forte variation de la solution. Ceci est tout le temps le cas lorsque l'on utilise des données expérimentales entachées d'erreurs et de bruit, et ce même lorsque les mesures effectuées sont non-intrusives (mesures obtenues par thermographie infra-rouge par exemple). C'est aussi le cas lorsque l'on utilise des données numériques entachées de bruit numérique.

L'unicité de la solution est un caractère également important, car un ensemble de données mesurées peut être issu de plusieurs «sollicitations» différentes.

Dans ces conditions on fait alors appel à des techniques dites de régularisation de la solution pour stabiliser nos solutions.

Parmi les plus connues on peut trouver la régularisation par pénalisation de Thikonov [Thikonov, 1977], et la régularisation par troncature de spectre (SVD) [Hansen, 2006]. Pour résoudre les problèmes inverses en conduction de la chaleur, de très nombreuses techniques numériques ont été développées utilisant différentes approches, certaines analytiques ou semi-analytiques, d'autres basées sur des approximations numériques (à base d'études des sensibilités) comme les différences finies, etc.

Dans ce chapitre, nous énumérerons toute une série de méthodes et techniques existantes et développées pour chaque type de problème rencontré.

2.1. Introduction à la régularisation d'un problème thermique inverse

Dans le cadre du transfert de chaleur par diffusion, beaucoup d'approches différentes sont disponibles pour traiter un problème inverse. Ces approches dépendent principalement des objectifs de reconstruction recherchés (spatial, temporel,...), de la métrologie utilisée pour la mesure, des dimensions du problème, de la géométrie, et bien évidemment de la technique mathématique utilisée.

Dans un problème de dimensions finies, le problème inverse discret s'écrit généralement sous la forme [N. Renault, 2007] :

$$\mathbf{A}.Q = T \tag{2.17}$$

T représente le vecteur des données connues, Q le vecteur des paramètres inconnues de la fonction recherchée, et \mathbf{A} l'opérateur matriciel qui sous-tend l'équation de diffusion.

Cet opérateur matriciel contient sur sa diagonale des nombres de Fourier, pondérés différemment selon le schéma numérique choisi. Le nombre de Fourier est un nombre sans dimension qui dépend des propriétés physiques mais également de la discrétisation spatio-temporelle réalisée.

Dans le cadre d'un domaine 1D, le nombre de Fourier s'exprime de la manière suivante :

$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta z)^2} \quad (2.18)$$

Avec Δt le pas de temps, et Δz le pas spatial.

Dans le cas de la reconstruction du flux imposé en surface d'un milieu semi-infini, le problème direct s'écrit comme dans (2.17).

Dans le cas particulier de la déconvolution sur Nt pas de temps, \mathbf{A} est une matrice carrée triangulaire inférieure à la diagonale non-nulle, elle est de ce fait inversible. Ainsi lorsque l'on souhaite reconstruire ce vecteur flux \hat{Q} à partir de mesures de températures bruitées \tilde{T} , on pourrait écrire l'expression suivante :

$$\hat{Q} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{T} \quad (2.19)$$

\tilde{T} représente le vecteur des données mesurées donc bruitées, \hat{Q} le vecteur des paramètres inconnus de la fonction recherchée, et \mathbf{A} l'opérateur matriciel qui sous-tend l'équation de diffusion.

On peut associer au caractère amplificateur d'une matrice \mathbf{A} son nombre de conditionnement $\kappa(\mathbf{A})$, avec $\|\mathbf{A}\|$ la norme d'opérateur :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}\|^{-1} \quad (2.20)$$

Pour le système linéaire (2.17)

Pour la norme d'opérateur d'espace L^2 (Norme de Frobenius), on a alors d'après [Todd J. 1968] et [Nicholas J et al. 1996] :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{w_{\max}(\mathbf{A})}{w_{\min}(\mathbf{A})} \quad (2.21)$$

w_{\max} et w_{\min} sont les valeurs singulières maximales et minimales de \mathbf{A} . Le nombre de conditionnement d'une matrice est lié à ses propriétés amplificatrices. Un exemple d'un calcul inverse de ce type est présenté *en annexe 6*.

Le caractère parabolique de l'équation de la chaleur porte la responsabilité de la difficulté à reconstruire des flux ou des termes sources car le modèle d'évolution est dissipatif. En effet, l'opérateur inverse \mathbf{A}^{-1} possède un nombre de conditionnement élevé. Ce caractère instable couplé aux perturbations des signaux (bruits de mesure) font de l'inversion un problème mal posé. Il est donc nécessaire de « régulariser » le problème en agissant sur son caractère « mal-posé ».

Une première étape consiste à passer par un filtrage des données mesurées [T. Workalemahu, 2008] [H.B.Razafindradingana, 2010]. Cela permet de supprimer une partie du bruit de mesure du signal. Ce bruit supprimé ne sera donc pas amplifié par l'opérateur inverse \mathbf{A}^{-1} , et la solution estimée devrait être plus stable.

Cependant, deux problèmes apparaissent :

1/ Le filtrage ne peut jamais être total [Maillet et al, 2010], et le résidu de bruit de mesure présent aura toujours tendance à être amplifié et rendre la solution instable (même avec des données numériques)

2/ Le filtrage des données n'a pas (ou peu) d'effet si les calculs des dérivées partielles ne sont pas effectué directement sur ces données mesurées et filtrées.

Dans ce manuscrit (chapitre 3 et 5), les modèles d'estimation de sources de chaleur sont présentés en 2D. Dans ce cas de figure, le filtrage a un intérêt majeur car la température mesurée est directement liée spatialement aux termes sources qui prennent effet au sein du matériau. Le « lissage » du signal rend les calculs des gradients et des Laplaciens de l'opérateur plus précis, on parvient ainsi à stabiliser (du moins partiellement) la solution. Le paragraphe 3 de ce chapitre est dédié à la description de différentes méthodes de filtrage de données.

Cependant, le filtrage ne permet pas de résoudre un problème mal posé dans toutes les situations comme nous allons le montrer dans l'exemple suivant.

Cas d'une mesure par thermocouple dans un matériau semi-infini pour estimer le flux reçu en surface :

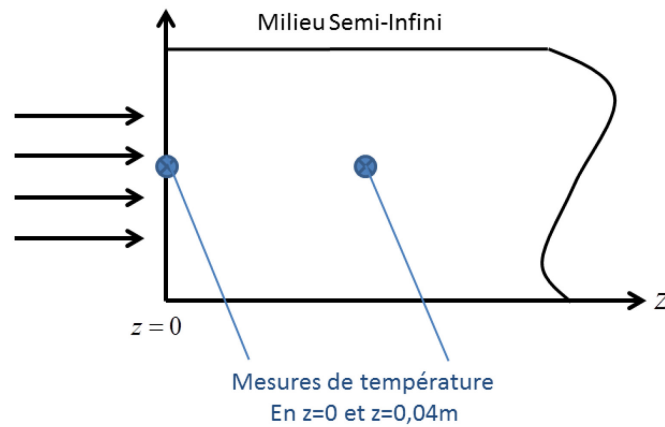


Figure 7 - Schéma du milieu semi-infini, sur lequel est appliqué un flux instationnaire en surface

Considérons des mesures de température simulées en profondeur ($z_1 = 0$ et $z_2 = 0,04m$) d'un matériau recevant en surface ($z_1 = 0$) un flux de chaleur variable au cours du temps dont l'allure temporelle est la suivante :

$$\begin{cases} t \leq 200s, \varphi = 600 \text{ W/m}^2 \\ t > 200s, \varphi = 300 \text{ W/m}^2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Ce matériau semi-infini a les propriétés thermiques suivantes :

$$k = 0,825 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \rho = 1800 \text{ kg.m}^{-3} \quad C_p = 780 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

La diffusivité thermique est donc $a = 5,87.10^{-7} \text{ m}^2 / s$ (assimilable à un mur en béton). Le pas de temps des mesures est de 10s. La température initiale et en $z \rightarrow \infty$ est de 0°C . Les échauffements non-bruités, relevés en surface et à $0,04m$ de profondeur sont :

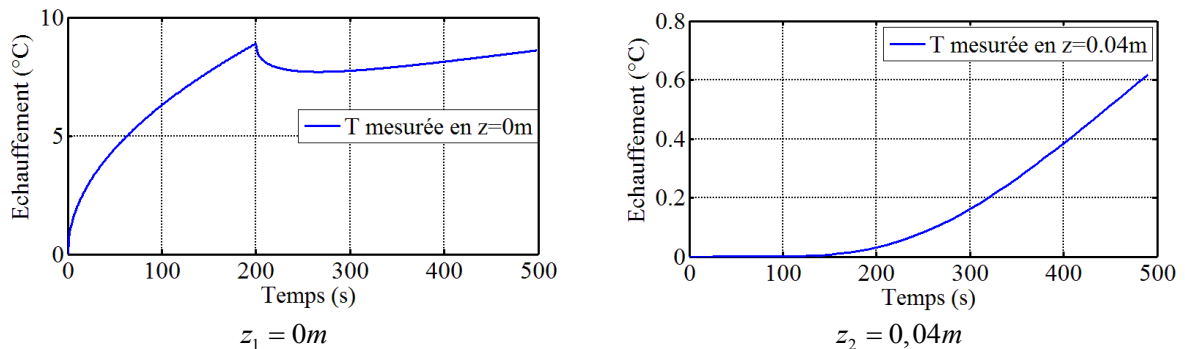


Figure 8 – Echauffements au cours du temps mesurés à différentes profondeurs dans un milieu semi-infini soumis en surface à deux niveaux successifs de densité de flux

On souhaite exprimer le phénomène de transfert de la chaleur à l'aide d'un système linéaire, comme dans (2.17). Ainsi, on construit un opérateur matriciel \mathbf{A} par convolution (voir intégrale de Duhamel (2.11)). Dans ce cas homogène, il existe une expression analytique de la réponse indicielle d'un milieu semi-infini soumis à un flux en surface :

$$ind(z,t) = T_0 + \frac{u}{k} \left(2 \left(\frac{at}{\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right) - z \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2(at)^{1/2}}\right) \right) \quad (2.23)$$

avec T_0 la température initiale, u l'indice de flux de $1W.m^{-2}$

a la diffusivité thermique du milieu ($m^2.s^{-1}$),

k la conductivité thermique du milieu ($W.m^{-1}.K^{-1}$),

t le vecteur temporel (s), z la position de la mesure en température (m),

Par convolution et discrétisation on parvient à écrire le système linéaire sous forme matricielle :

$$\hat{Q} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{T} \quad (2.24)$$

L'opérateur matriciel \mathbf{A} est construit à partir de la réponse indicielle de ce matériau semi-infini (voir §1.1.2). La réponse indicielle correspond au comportement qu'aurait ce système si la sollicitation (flux en surface) était constante et de valeur unitaire $1W.m^{-2}$.

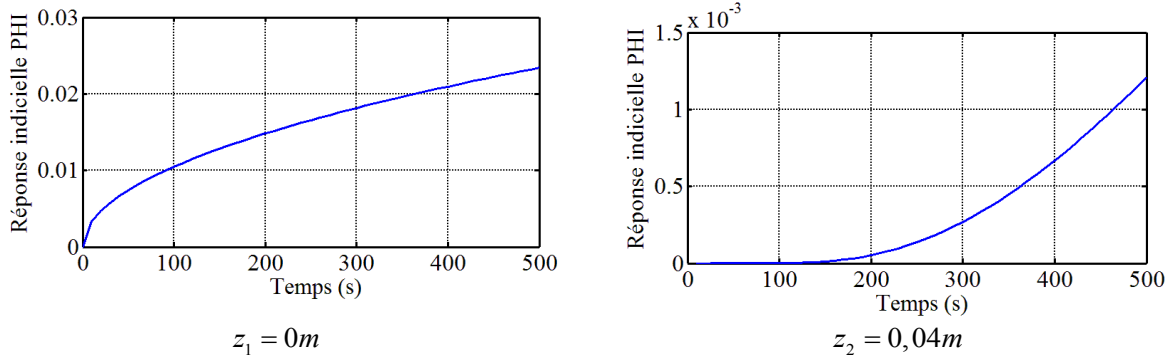


Figure 9 – Réponses indicielles $ind(z,t)$

Lorsque le problème est linéaire, on recherche une approximation de Q (appelée \hat{Q}) en minimisant une fonction coût J au sens des moindres carrés ordinaires telle que :

$$J(Q) = \|\mathbf{A}Q - T\|^2 \quad (2.25)$$

$$\hat{Q} = \arg[\min(J(Q))] \quad (2.26)$$

Le minimum de cette fonction quadratique est obtenu en annulant son gradient par rapport au flux recherché :

$$\nabla_{\hat{Q}} (J(\hat{Q})) = \frac{\partial J(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} = -2\mathbf{A}^T (T - \mathbf{A}\hat{Q}) = 0 \quad (2.27)$$

La solution s'écrit alors de manière explicite :

$$\hat{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T . T \quad (2.28)$$

Le produit $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ est qualifié de « matrice pseudo-inverse » de \mathbf{A}

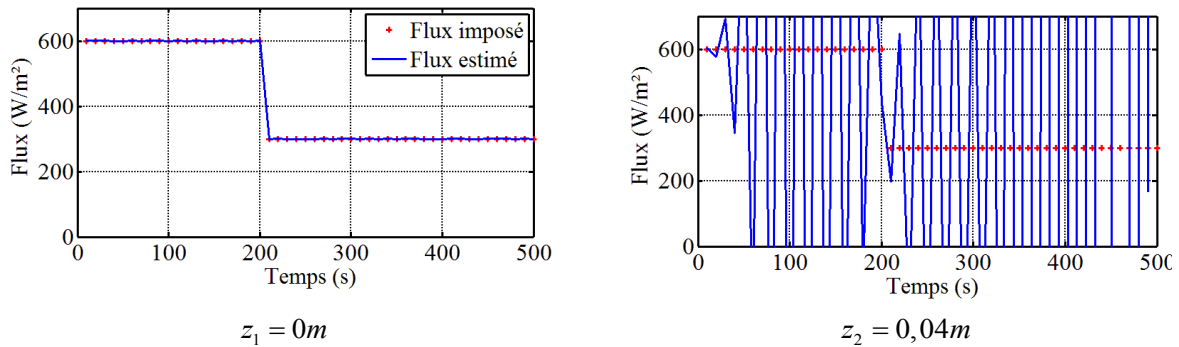


Figure 10 – Estimations du flux reçu en surface pour des mesures non-bruitées prises

Lorsque nos mesures ne sont plus enfouies mais prises en surface (où le flux est imposé) on remarque l'estimation du flux se fait sans encombre (Figure 10), le problème est alors bien posé.

Cependant, même si les mesures de températures sont non bruitées, à $z_2 = 0,04m$ le calcul inverse reste trop instable et l'estimation du flux devient impossible.

Cette courte expérience montre clairement le caractère régularisant non systématique d'un filtrage de données car l'infime perturbation issue de la précision machine couplée au mauvais conditionnement de l'opérateur déstabilise totalement la solution du problème inverse. Il est nécessaire de trouver un moyen autre que le filtrage de données pour régulariser la solution inverse. Dans les paragraphes qui vont suivre, des méthodes de régularisation seront décrites et détaillées.

2.2. Régularisation par recherche de quasi-solution

Cette méthode de régularisation consiste à travailler sur l'opérateur du modèle direct de manière à rendre le problème bien posé, quitte à le « modifier » légèrement.

Selon le même raisonnement mathématique que le paragraphe précédent, et de manière analogue à l'équation (2.17), la solution s'écrit alors de manière explicite pour l'estimation de sources de chaleur comme dans l'équation (2.28).

2.2.1. Régularisation par pénalisation de l'opérateur (Thikhonov)

Les incertitudes sur les données ont pour conséquence dans le cas d'un problème de conduction inverse, l'instabilité de la solution. Ces incertitudes ont trois origines :

- L'erreur de mesure (ou bruit de mesure), qui est l'écart entre la mesure de la température et sa valeur théorique exacte.
- L'erreur de modélisation, due aux hypothèses que l'on est amené à faire pour résoudre le problème.
- L'erreur d'arrondi due aux imprécisions du calcul numérique.

Une technique de régularisation dite régularisation par pénalisation développée par Tikhonov et Arsenine [Tikhonov-Arsenine, 1977] consiste à introduire une quasi-solution qui est biaisée mais stable. La fonction à minimiser \mathbf{J} est alors modifiée avec addition d'un terme de pénalisation :

$$J(\hat{\mathbf{Q}}, \gamma) = \|\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{T}}\|^2 + \gamma \|\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Q}}\|^2 \quad (2.29)$$

La quantité $\gamma \|\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Q}}\|^2$ est composée d'un paramètre de régularisation $\gamma > 0$ et d'un opérateur \mathbf{R} de régularisation. \mathbf{R} est construite à partir de la dérivée $n^{ième}$ ($n = 0, 1, 2$, appelé ordre de régularisation) de la fonction densité de flux. Le choix de l'opérateur peut se faire comme suggéré dans [Tikhonov and Arsenine (1977)] par discrétisation des dérivées successives de la solution :

- ⇒ ordre 0, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$: on limite l'amplitude de la solution, le cas extrême est une valeur nulle.
- ⇒ ordre 1, \mathbf{R} = dérivée première de la solution : on limite les variations de la solution, le cas extrême est une valeur constante.
- ⇒ ordre 2, \mathbf{R} = dérivée seconde de la solution : on limite les variations de la dérivée seconde et donc de la courbure, le cas extrême est une fonction linéaire de la variable.

Le choix de \mathbf{R} est en quelque sorte l'introduction d'un a priori dans la solution, il faut donc avoir une idée de la solution que l'on cherche pour le choisir. Ce choix impose comme a priori la minimisation de la norme de la solution. Dans le cas où l'on a un bruit aléatoire gaussien centré, on peut utiliser la solution des moindres carrés. La minimisation de $J(\hat{\mathbf{Q}}, \gamma)$ revient alors à calculer :

$$\hat{\mathbf{Q}}(\gamma) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \gamma \mathbf{I}^T \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.30)$$

$\hat{Q}(\gamma)$ est une approximation (après régularisation de l'opérateur) de Q .

Il reste alors à choisir la valeur du paramètre γ . Ce choix n'est pas évident. En effet, pour les faibles valeurs de γ , la solution est instable mais avec de faibles résidus, et pour une valeur de γ élevée, la solution est stable mais est très éloignée de la solution exacte. On peut donner une valeur à γ en fonction du bruit de mesure, mais les équations doivent être normées [Jarny 1999].

Lorsque l'on peut se permettre de faire un certain nombre d'essais d'inversion avec différentes valeurs du paramètre γ , une valeur optimale de celui-ci peut être obtenue en utilisant une courbe en « L » [Hansen 1993, 1998, 2008]. Basée sur le principe de discordance (Discrepancy principle) introduit par [Alifanov & Artyukhin, 1975] [Alifanov, 1994]. Ce type de représentation permet de trouver le meilleur compromis entre une solution stable et une solution du problème présentant de faibles résidus. Le principe de discordance propose de réduire la fonction coût en partant du principe qu'il ne sert à rien de réduire l'erreur de cette fonction coût en dessous du niveau du bruit.

Ainsi, dans le cadre d'une régularisation avec pénalisation de Thikonov, elle consiste à tracer en représentation log-log, la norme de la solution régularisée en fonction de la norme des résidus. Un exemple de courbe en L est présenté sur la Figure 11 :

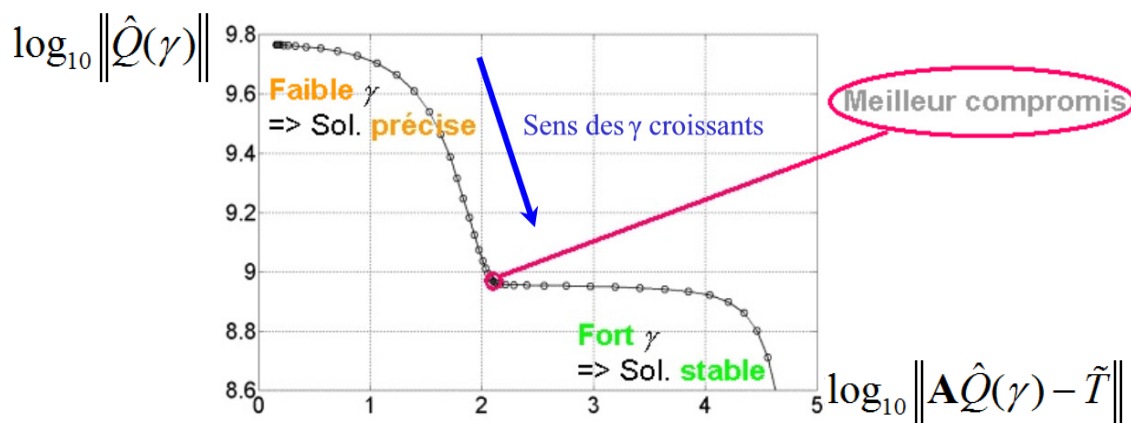


Figure 11 - Exemple de courbe en L permettant de déterminer le paramètre de régularisation

Selon le bruit du signal mesuré, et d'après le discrepancy principle, la courbe en L sera différente et l'optimum du paramètre de régularisation n'aura pas la même valeur.

2.2.2. Régularisation par analyse spectrale de l'opérateur

L'opérateur peut être décomposé par analyse spectrale de manière à fournir une quasi-solution tronquée. Les démonstrations mathématiques de cette méthode portent sur la notion d'inverse généralisée d'une matrice (matrice associée à l'opérateur linéaire de diffusion). Le

but est de réduire le conditionnement de la matrice opérateur, conditionnement mathématique qui constitue la capacité à amplifier les signaux. Cette réduction du conditionnement à la base de la régularisation est obtenue par une sorte de réduction (ou plutôt une sous-paramétrisation) du modèle direct. En éliminant les plus petites valeurs singulières on réduit leurs effets amplificateurs en ne tenant compte que des composantes des mesures portées par les composantes des vecteurs propres correspondants. Parmi ces techniques, certaines portent sur les décompositions de Fourier de l'opérateur de diffusion [Rodiet, 2016]. De plus récentes approches tendent à utiliser les ondelettes (appliquées usuellement dans le traitement et la compression d'image comme pour le format jpeg par exemple), mais relativement peu dans le domaine des transferts de chaleur. Dans la communauté des thermiciens, c'est plutôt la décomposition en valeurs singulières avec troncature qui semble être la plus répandue.

Régularisation par décomposition en valeurs singulières (SVD)

La SVD est abondamment utilisée dans la communauté des thermiciens. Il est en effet possible de réaliser cette réduction avec une décomposition de Fourier, avec une base de sinus et cosinus. La principale difficulté de ces techniques (de même que lorsque l'on filtre un signal) est de trouver la bonne fréquence de coupure.

Cette méthode est à l'origine une méthode d'inversion de matrices de systèmes linéaires [Press, 1994], elle consiste à décomposer la matrice singulière \mathbf{A} de taille $(m \times n)$ de la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \quad (2.31)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & \cdots & \cdots & u_m \end{bmatrix} \text{ de taille } (m \times m) \text{ avec } u_1, u_2, \dots, u_m \text{ les vecteurs propres de } \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ de taille } (n \times n) \text{ avec } v_1, v_2, \dots, v_n \text{ les vecteurs propres de } \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

\mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices dont les colonnes sont ortho-normales, donc :

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_n \quad (2.32)$$

La matrice \mathbf{W} est diagonale, ses composants diagonaux sont non négatifs et apparaissent par ordre décroissant, ce sont les valeurs singulières de la matrice \mathbf{A} :

$$\text{diag}(\mathbf{W}) = (w_1, \dots, w_n) \quad \text{et} \quad w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0 \quad (2.33)$$

Lorsque \mathbf{A} est une matrice carrée de rang n , triangulaire inférieure à la diagonale non-nulle, elle est inversible. Quand le problème est bien posé et par conséquent quand la matrice \mathbf{A} est bien conditionnée, les valeurs singulières sont non nulles et la solution du système est donnée par :

$$\hat{Q} = \mathbf{V} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T \tilde{T} \quad (2.34)$$

Il est à noter que dans le cas d'un système surdéterminé, \hat{Q} est identique à celle obtenue à l'aide des moindres carrés ordinaires [Hansen, 1993]. Rappelons ici que le nombre de conditionnement de la matrice \mathbf{A} peut être défini par :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{w_{\max}}{w_{\min}} \quad (2.35)$$

Dans le cas où la matrice \mathbf{A} est mal conditionnée, de nombreuses valeurs singulières w sont très faibles voire presque nulles, l'inversion de \mathbf{W} devient alors problématique. La régularisation par troncature consiste alors à annuler l'inverse des petites valeurs propres, c'est-à-dire de remplacer par des 0 les inverses des valeurs w trop faibles. Une quasi-solution du problème est alors obtenue :

$$\hat{Q} = \mathbf{V} \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{U}^T \tilde{T} \quad (2.36)$$

Avec $\hat{\mathbf{W}}^{-1}$ la matrice diagonale suivante :

$$\hat{\mathbf{W}}^{-1} = \text{DIAG} (w_1^{-1}, \dots, w_i^{-1}, 0, \dots, 0) \quad (2.37)$$

avec i le rang de coupure des valeurs singulières trop faibles.

Cette méthode a été utilisée pour la résolution de problèmes inverses parmi lesquels on peut citer [Martin et Dulikravich, 1991][Lagier, 1999][Kern, 2002]. Comme dans le cas de la régularisation par pénalisation, la difficulté de cette technique est de choisir le paramètre de régularisation. Celui-ci peut-être comme dans le cas précédent déterminé avec une courbe en L . Comme le montre Hansen, la solution obtenue est identique à celle de Tikhonov d'ordre 0. Il faut noter que la courbe obtenue à partir de Tikhonov est continue en γ , alors qu'elle est discrète lorsqu'on utilise la SVD, on a alors un point par valeur singulière.

2.3. Régularisation par algorithme itératif

Lorsque le problème à résoudre est non-linéaire, la solution ne peut plus être calculée de manière explicite ni régularisée simplement. Il devient alors nécessaire d'utiliser des méthodes itératives qui vont effectuer à chaque itération une approximation linéaire du problème.

Les méthodes itératives présentent également des avantages lorsque :

- Les méthodes directes ne sont pas applicables (ou trop coûteuses)
- Le problème est mal conditionné et comprend un trop grand nombre de variables

2.3.1. Principe des méthodes itératives

Le principe des méthodes itératives est relatif à la minimisation d'une fonction coût. Il est possible d'exprimer de plusieurs manières une fonction coût, cependant nous conserverons ici la définition issue des moindres carrés ordinaires. La fonction coût à minimiser représente l'écart quadratique entre les mesures \tilde{T} et la sortie du problème direct T . Elle s'écrit de la manière suivante :

$$J(Q) = (\tilde{T} - T(Q))^T (\tilde{T} - T(Q)) \quad (2.38)$$

Et la solution du problème de minimisation s'écrit :

$$\hat{Q} = \arg[\min(J(Q))] \quad (2.39)$$

2.3.2. Classification des algorithmes de résolution

Il existe différentes classifications communément utilisées [Gaspar, 2013] :

Les algorithmes déterministes ou non : les algorithmes déterministes accomplissent un processus prédéfini pour résoudre un problème, ils donnent toujours le même résultat pour une même initialisation. Les algorithmes non-déterministes doivent deviner à chaque étape la meilleure solution.

Les algorithmes stochastiques donnent des résultats différents d'une exécution à l'autre. Ceci est dû au fait que, contrairement aux déterministes, ils supposent que tous les paramètres sont des variables aléatoires [N. Champagnat et al, 2013]. La résolution du problème inverse consiste donc à déterminer la densité de probabilité à posteriori, à partir de laquelle on calculera un estimateur central (moment d'ordre 0), et un estimateur de dispersion (moment d'ordre 1), qui correspondent respectivement à la valeur estimée des paramètres et à leur variance.

Les algorithmes de recherche locale et de recherche globale : Les algorithmes de recherche locale convergent vers un minimum local (pouvant être le minimum global) à partir de l'initialisation de la méthode, tandis que les algorithmes de recherche globale sont capables de trouver le minimum global d'une fonction.

Les algorithmes à individu unique ou à base de population : les algorithmes à individu unique n'utilisent qu'un candidat qui est « amélioré » au fil des itérations, tandis que les algorithmes à base de population manipulent un ensemble de candidats simultanément.

Les algorithmes d'ordre 0, 1, 2 : Les algorithmes d'ordre 0 n'utilisent que la valeur de la fonctionnelle J , tandis que les algorithmes d'ordre 1 utilisent le gradient de la fonctionnelle et ceux d'ordre 2 utilisent la dérivée seconde de la fonctionnelle.

On pourrait encore classer les algorithmes selon leurs performances, en fonction du nombre d'inconnues recherchées ou bien par difficulté de programmation. Pour la suite de cette section, nous utiliserons la classification basée sur l'ordre de la fonctionnelle utilisée. Pour chaque ordre, quelques méthodes seront énoncées avec certaines de leurs propriétés.

Algorithmes d'ordre 0

Les méthodes d'ordre 0 sont particulièrement adaptées lorsque l'on ne peut pas calculer le gradient de la fonction coût (critère discontinu). Ces algorithmes sont simples à programmer, mais sont très « gourmands » en temps de calcul car nécessitant de nombreuses simulations du modèle direct afin de calculer la fonction coût et son évolution. Cependant le principal avantage de ce type de méthode est qu'elles sont, pour la plupart, les plus appropriées pour rechercher le minimum global d'une fonction.

Un algorithme célèbre est celui du Simplex [Dantzig, 1990][Murty, 1983][Padberg, 1999]. C'est une des méthodes d'ordre 0 convergeant vers un minimum local. Aujourd'hui, les méthodes les plus populaires basées sur l'approche stochastique, sont les algorithmes génétiques. Ces deux méthodes permettent la convergence vers le minimum global [Orlande et al, 2011] [Favennec et al, 2011].

Algorithmes d'ordre 1

Les méthodes d'ordre 1 sont des algorithmes de recherche locale, déterministes à individu unique. Ces méthodes s'appuient sur le gradient ∇J de la fonction coût J afin de minimiser cette même fonction. Le gradient d'une fonction donnant la direction de plus grande pente, l'opposé du gradient donne la direction où la fonctionnelle diminue le plus fortement localement.

La méthode des gradients conjugués

Le principe de la MGC est introduit ici mais sera détaillé au chapitre 3, ainsi que l'utilisation de la méthode de l'état adjoint pour le calcul du gradient du critère [Jarny et al, 1991] [Ozisik & Orlande, 2000][Maillet et al, 2011a]. Toujours dans le cadre de l'estimation d'un flux, le processus itératif définissant la MGC s'écrit comme suit :

$$\hat{Q}^{k+1} = \hat{Q}^k + \gamma^k d^k \quad (2.40)$$

avec Q^k l'estimation du flux à l'itération k, γ^k la profondeur de descente à l'itération k, et d^k la direction de descente à l'itération k définie par :

$$d^k = \nabla J(\hat{Q}^k) + \beta^k d^{k-1} \quad (2.41)$$

où β^k est le coefficient de conjugaison des directions de descentes, et $\beta^0 = 0$

Cet algorithme ne nécessite aucune inversion de matrice car les problèmes sont résolus dans le sens direct. Il existe des variantes de cette méthode, notamment avec différentes expressions du calcul du coefficient de conjugaison.

L'algorithme des gradients conjugués est réputé pour sa stabilité et sa facilité d'implémentation. Cependant, il peut nécessiter un nombre important d'itération avant de converger.

Cette méthode est applicable à de nombreux problèmes car :

- Elle ne demande pas de calcul de Hessien (dérivées secondes) et est donc moins lourde sur le plan du calcul.
- Elle est capable d'atteindre le minimum global d'une fonctionnelle sans trop de difficultés.
- Elle ne demande pas autant d'itérations qu'un algorithme d'ordre 0.
- Elle peut gérer l'estimation d'un grand nombre de paramètres simultanés.

Algorithme d'ordre 2

Les méthodes d'ordre 2 utilisent non seulement la dérivée première de la fonction coût mais aussi la dérivée seconde, le Hessien \mathbf{H} .

Contrairement au gradient (dérivée première) qui est un vecteur de N composantes, le Hessien est une matrice $N \times N$. Chaque composante du Hessien renseigne sur la courbure locale de la fonction J . La dérivée seconde permet de mesurer la non-linéarité d'une fonction, ainsi, lorsque la fonction recherchée est linéaire, les méthodes d'ordre 2 sont capables de trouver le minimum en une seule itération, sous réserve d'initialiser ce que l'on souhaite

estimer proche de la solution réelle. L'inconvénient est la charge de calcul nécessaire à l'évaluation de la matrice \mathbf{H} .

Ce type de méthode semble plutôt adapté à des estimations de paramètres thermo-physiques tels que les diffusivités thermiques, la masse volumique,...

Algorithme de Gauss-Newton

Nous utilisons ici la méthode de Gauss-Newton [Ozisik et Orlande, 2000] [Maillet et al, 2011], qui est de type gradient avec optimisation du pas basé sur l'hypothèse de linéarité du modèle par rapport au vecteur paramètres $\hat{\mu}$ près de la solution

La méthode repose sur une approximation du Hessien. Pour ce faire, on dérive le critère par rapport au vecteur paramètre, qui devient :

$$\nabla J(\mu) = -2 \cdot \mathbf{S}^T(\mu) \cdot (\tilde{T} - T(\mu)) \quad (2.42)$$

Avec \mathbf{S} la matrice de sensibilités qui dépend des paramètres μ à estimer.

En dérivant de nouveau l'équation (2.42) par rapport aux paramètres on obtient le Hessien :

$$\mathbf{H}(J(\mu)) = 2 \cdot \mathbf{S}^T(\mu) \cdot \mathbf{S}(\mu) + 2 \cdot \mathbf{X}(\mu) \quad (2.43)$$

Où $\mathbf{X}(\mu)$ est une matrice composée des dérivées secondes du modèle T

$$\mathbf{X}(\mu) = -T'' \cdot (\tilde{T} - T) \quad (2.44)$$

Ces calculs sont rapidement très lourds, on utilise donc l'approximation de « Gauss-Newton » en négligeant ces dérivées secondes, et en posant $\mathbf{X}(\mu) = 0$

La relation qui lie le paramètre $\hat{\mu}^{(k+1)}$ au paramètre $\hat{\mu}^{(k)}$ est donnée par :

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \hat{\mu}^{(k)} - \lambda^{(k)} \cdot [\mathbf{S}^T(\hat{\mu}^{(k)}) \cdot \mathbf{S}(\hat{\mu}^{(k)})]^{-1} \mathbf{S}^T(\hat{\mu}^{(k)}) \cdot (\tilde{T} - T(\hat{\mu}^{(k)})) \quad (2.45)$$

avec $\lambda^{(k)} \cdot [\mathbf{S}^T(\hat{\mu}^{(k)}) \cdot \mathbf{S}(\hat{\mu}^{(k)})]^{-1}$ la profondeur de descente, $\lambda^{(k)}$ le coefficient de relaxation. Si $\lambda^{(k)} = 1$, on a le pas de Gauss-Newton.

Exemple linéaire

Soit μ le vecteur paramètres. Dans tous les problèmes d'estimation de paramètres, certains paramètres sont connus avant de commencer l'expérience. On posera ici la notation, μ_r le vecteur de paramètres que l'on cherche à estimer et μ_c le sous-vecteur des paramètres supposés connus, on écrit :

$$\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_r ; \boldsymbol{\mu}_c]^T \quad (2.46)$$

On note $\hat{\boldsymbol{\mu}}_r$ l'estimation de $\boldsymbol{\mu}_r$, et $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c$ le vecteur des valeurs éventuellement biaisées des paramètres supposés connus et dont les valeurs exactes sont contenues dans $\boldsymbol{\mu}_c$.

Soit \tilde{T} le vecteur des mesures expérimentales et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le vecteur des erreurs de mesures (les erreurs de mesure sont des réalisations d'une variable aléatoire de moyenne nulle, il n'y a donc pas d'erreur systématique, l'écart-type vaut σ_ε constant).

Les erreurs de mesures sont supposées indépendantes à chaque instant, ainsi la matrice de covariance du bruit de mesure est diagonale et s'exprime comme suit :

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{I}(\sigma_\varepsilon)^2 \quad (2.47)$$

La méthode d'estimation a pour rôle de donner la meilleure estimation $\hat{\boldsymbol{\mu}}_r$ du vecteur des paramètres exacts $\boldsymbol{\mu}_r$. Si l'on suppose que le modèle est correct et que les mesures sont dépourvues de bruit, alors : $\tilde{T} = T(\boldsymbol{\mu})$

En réalité, les mesures sont entachées d'erreurs. En considérant, à juste titre, le vecteur bruit $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme purement additif, on peut écrire :

$$\tilde{T} = T + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.48)$$

La fonction coût que l'on souhaite minimiser pour réaliser l'estimation est l'estimateur des moindres carrés ordinaires vu dans l'équation (2.38)

$$J(\hat{\boldsymbol{\mu}}_r, \boldsymbol{\mu}_c) = (\tilde{T} - T(\boldsymbol{\mu}))^T (\tilde{T} - T(\boldsymbol{\mu})) = \sum_{i=1}^n (\tilde{T}_i - T_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}))^2 \quad (2.49)$$

La valeur optimale du paramètre $\hat{\boldsymbol{\mu}}_r$ sera celle qui minimise la fonction coût, et donc annule le gradient de la manière suivante :

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}_r} J(\hat{\boldsymbol{\mu}}_r, \boldsymbol{\mu}_c) = 0 \quad (2.50)$$

Lorsque le modèle est non-linéaire, la minimisation de (2.50) nécessite d'utiliser une méthode itérative comme celle présentée dans l'équation (2.45).

Confiance dans les estimations

Soit $\hat{\boldsymbol{\mu}}_r(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c)$ l'estimation des paramètres pour une valeur fixée, des paramètres supposés connus $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_c$, à une valeur différente de la valeur exacte $\boldsymbol{\mu}_c$. Soit \boldsymbol{e}_r le vecteur de l'erreur d'estimation de $\hat{\boldsymbol{\mu}}_r$ et \boldsymbol{e}_c l'erreur déterministe sur le paramètre fixé $\boldsymbol{\mu}_c$.

$$e_r = \hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c) - \mu_r \quad (2.51)$$

$$e_c = \tilde{\mu}_c - \mu_c \quad (2.52)$$

En utilisant l'hypothèse de linéarité, on peut écrire :

$$\hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c) \approx (\mathbf{H}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}_r^T \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{S}_c \tilde{\mu}_c) \quad (2.53)$$

On peut ainsi développer :

$$\tilde{T} = T(\mu) + \varepsilon \approx \mathbf{S}_r \cdot \mu_r + \mathbf{S}_c \cdot \mu_c + \varepsilon \quad (2.54)$$

L'erreur d'estimation peut alors être approchée par :

$$e_r = \hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c) - \mu_r \approx (\mathbf{H}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}_r^T \cdot \varepsilon - (\mathbf{H}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{S}_c^T \cdot e_c \quad (2.55)$$

La matrice de covariance s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{cov}(e_r) = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.56)$$

Les composantes de la matrice de covariance sont :

$$\mathbf{cov}(e_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathbf{cov}(e_r) & \dots & \mathbf{cov}(e_r) \\ & \sigma_2^2 & & \mathbf{cov}(e_r) \\ & & \ddots & \vdots \\ sym & & & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

La diagonale principale contient les variances individuelles des erreurs associées à chaque composante du vecteur des estimations $\hat{\mu}_r$, et les autres éléments sont les covariances des erreurs croisées.

Dans le cadre de l'estimation d'un paramètre unique ne dépendant pas de l'erreur d'un autre paramètre, la matrice de covariance est un scalaire de la valeur de la variance sur le paramètre estimé.

La densité de probabilité des erreurs de mesure est supposée vérifier une loi normale, ainsi la quantité $\frac{(\hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c) - \mu_{r,k})}{\sigma_k}$ obéit à une loi de Student : $t_{1-\alpha/2}(n-p)$ [G. Saporta, 2006].

Avec $(k = 1, \dots, p)$ et p le nombre de paramètres, n le nombre de mesures et $\alpha = 5\%$

Pour une valeur fixée de $\tilde{\mu}_c$, l'intervalle de confiance à 95% associé à l'estimation $\hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c)$ de la valeur exacte μ_r est :

$$\hat{\mu}_r(\tilde{\mu}_c) \pm INT_k \quad (2.58)$$

avec $INT_k = t_{0,975}(n-p) \cdot \sigma_k$ et $(k=1, \dots, p)$

Lorsque le nombre de paramètres est faible devant le nombre de mesures $n \gg p$, on peut considérer le comportement d'une loi normale, on a ainsi :

$$t_{0,975}(n-p) \approx 2 \quad (2.59)$$

2.4. Filtrage de données

Nous avons montré, dans le paragraphe 2.1, que disposer de mesures totalement dénuées de perturbations (bruit de mesure) ne permet pas forcément d'obtenir une solution stable. Cependant, lorsque le problème est résolu exactement au même endroit que la prise de mesure, la suppression (ou la forte réduction) du bruit de mesure prend tout son sens car elle peut être une méthode de régularisation efficace.

Le caractère mal posé du problème de détermination du membre de droite de l'équation (2.60) vient du fait que des données discrètes et bruitées engendrent inévitablement de grandes erreurs dans le calcul des dérivées partielles.

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \tilde{T} = \hat{Q} \quad (2.60)$$

Avec $\tilde{T} = T + \varepsilon$

Le but n'est donc pas ici d'agir sur l'opérateur, mais directement sur \tilde{T} ou plutôt sur la réduction de ε .

2.4.1. Filtrage par décomposition en valeurs singulières SVD

Régularisation par SVD tronquée

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire de mesures $\tilde{\mathbf{T}}(M, N)$ (à savoir ici le champ de température spatial 2D à un instant donné) est donnée par l'expression :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \quad (2.61)$$

Cette décomposition mathématique est une factorisation matricielle qui donne de manière directe une matrice rectangulaire \mathbf{W} diagonale contenant les valeurs singulières de la matrice $\tilde{\mathbf{T}}$ (dans l'ordre décroissant). Il est alors possible de mettre en place un filtre passe-bas en tronquant ces modes à partir d'un certain rang, de la même manière que dans (2.36).

La troncature d'une partie des valeurs singulières est un moyen de compresser les données d'entrées (matrice $\tilde{\mathbf{T}}(M,N)$). Le filtrage est effectué sur le champ de température 2D à chaque pas de temps.

Le principal défaut de la décomposition SVD est son manque de « finesse » lors de la décomposition et de la troncature. En effet, dans le cas de la mise en place d'un filtre passe-bas (suppression des hautes fréquences à partir d'un certain seuil), lorsque l'on supprime progressivement les valeurs singulières les plus faibles (coefficients diagonaux de la matrice S), le signal risque :

- soit d'être biaisé, nous perdons alors de l'information utile
- soit d'être toujours trop bruité

A titre d'exemple, la Figure 12 montre un profil 1D d'un signal simulé, bruité, puis filtré avec SVD par troncature :

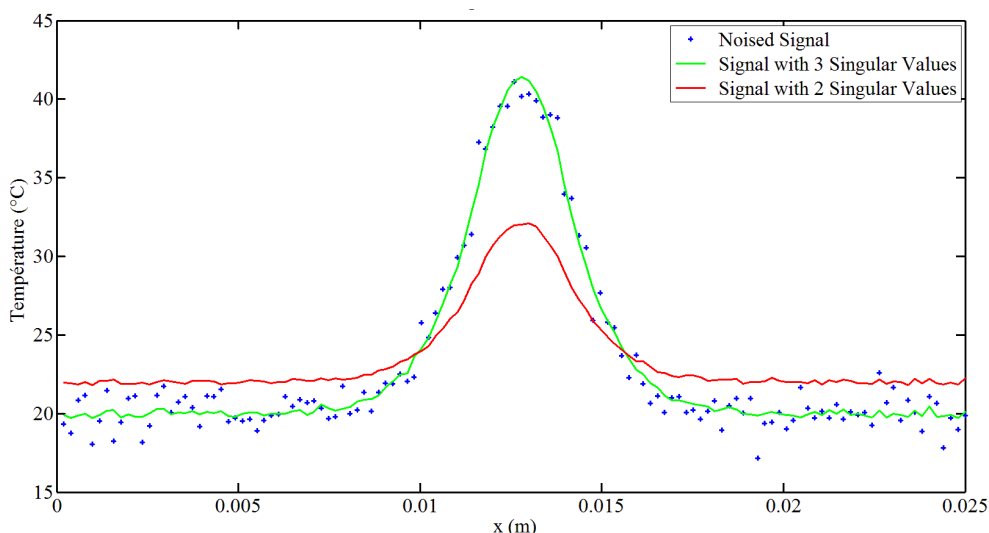


Figure 12 – Profil 1D d'un signal en température bruité, puis décomposé avec SVD, et tronqué à deux niveaux de valeur singulière

Sur la Figure 12, la courbe bleue représente le profil 1D d'un signal 2D simulé numériquement avec un schéma Crank-Nicholson aux différences finies. A ce signal est ajouté un bruit de mesure synthétique d'écart-type $\sigma = 0,2K$.

En ne conservant que 2 valeurs singulières, le signal est fortement biaisé. En conservant les 3 premières valeurs singulières, on obtient un signal qui semble correctement filtré, même si de nombreuses perturbations persistent, notamment lorsque le signal est censé ne pas évoluer spatialement.

Une solution pour « filtrer » plus finement le signal consiste en la mise en place de cette SVD tronquée selon plusieurs directions (x, y, t) de la matrice 3D $\mathbf{T}(x, y, t)$, ou encore de procéder à la décomposition selon d'autres modes. Cette méthode est décrite dans le chapitre 3.

2.4.2. Filtrage par décomposition en Séries de Fourier

En 1807, Fourier a montré qu'une fonction presque arbitraire peut être décrite par une série de sinus et cosinus de diverses fréquences. La transformation de Fourier est une opération mathématique qui consiste à décomposer une fonction selon ses fréquences, de même qu'un prisme décompose la lumière en couleurs. Elle transforme une fonction f dépendant du temps, en une nouvelle fonction f_2 qui dépend de la fréquence. La série de Fourier d'une fonction périodique ne comporte que les sinusoides de fréquences égales à des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Quand la fonction n'est pas périodique, mais décroît assez vite à l'infini pour que l'aire située sous son graphe soit finie, on peut toujours la décrire par une superposition de sinus et de cosinus. Cependant, il faut calculer les coefficients à toutes les fréquences possibles.

On appelle cette décomposition la transformée de Fourier de la fonction, elle s'exprime de la manière suivante dans [Fourier, 1822] pour une période de 0 à 1 :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{-2\pi i k t} \quad (2.62)$$

où C_k est le coefficient de Fourier de la fréquence k :

$$C_k = \int_0^1 f(t) \cdot e^{2\pi i k t} \cdot dt \quad (2.63)$$

avec i la variable complexe

Par la suite, des méthodes de décomposition numériques ont été mises au point, on retrouve d'ailleurs assez aisément la FFT (Fast Fourier Transform) sur Matlab ou Python. Cet outil est très utile et puissant pour le traitement de signaux, cependant, l'analyse de Fourier ne convient pas à tous les signaux ni à tous les problèmes. Les problèmes non-linéaires sont en effet difficiles à prédire par l'analyse de Fourier, de plus elle nous oblige à choisir comme variable soit le temps, soit la fréquence. Pourtant, les expériences que l'on rencontre quotidiennement imposent une description en temps-fréquences. Une première solution a été de développer ce que l'on appelle la transformée de Fourier à fenêtre [C. Catz, 1996]. Elle consiste à décomposer un signal en fréquences, intervalle par intervalle : de cette manière, on limite la plage de temps analysée. La taille de la fenêtre ne change pas pendant l'analyse mais on la remplit successivement d'oscillations de fréquences différentes. Cette technique permet

localement de balayer tout le spectre tout en sachant où l'on se situe sur le signal (à quel instant pour un signal variant au cours du temps).

La mise en place d'un filtrage par décomposition en séries de Fourier suivie d'un filtre passe-bas [Dumas, 2011] [Thome, 2016], est similaire à la mise en place d'un filtrage par décomposition SVD avec troncature des hautes valeurs singulières.

2.4.3. Filtrage par décomposition en Ondelettes

Les ondelettes fonctionnent quasiment de la même manière, à une distinction près, que le nombre d'oscillation ne varie pas car nous n'avons toujours qu'une seule et même petite onde capable de s'étirer et de comprimer à volonté. [Daubechies, 1992] [Burke B, 1995] [Kadoch, 2011]. C'est ainsi que l'on parvient à tenir compte à la fois de l'aspect temporel et fréquentiel d'un signal décomposé en ondelettes. La subtilité réside essentiellement dans le choix du type d'ondelette. Certaines seront optimisées pour le filtrage de données, d'autres pour de la compression, d'autres pour des analyses plus fines encore, etc.

La transformation en ondelettes consiste à créer, à partir d'une fonction mère Ψ , qui ressemble à une petite onde, une famille d'ondelettes $\Psi(ax+b)$, où a et b sont des nombres réels : a sert à comprimer ou étirer la fonction, et b sert à la déplacer le long du signal analysé. Quand on analyse un signal $f(t)$ avec des ondelettes, on le transforme en une fonction de deux variables que sont le temps et l'échelle d'analyse :

$$c(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(at+b) dt \quad (2.64)$$

En termes de filtrage des données, la marge de manœuvre est plus grande avec les ondelettes qu'avec SVD. Cependant, cet outil reste gourmand en calculs.

En diffusion de la chaleur, qui plus est sans terme d'advection, il n'est pas indispensable d'avoir une description temps-fréquence précise. Les décompositions en valeurs singulières et en séries de Fourier sont suffisantes, et elles sont d'ailleurs abondamment utilisées dans la communauté de la thermique.

Conclusion chapitre

Ce chapitre a permis de comprendre les deux concepts opposés de problème direct et problème inverse. Nous avons pu mettre en évidence les difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes inverses. Notamment le caractère mal-posé, ainsi que différentes méthodes de régularisation envisageables pour permettre cette résolution. Nous avons balayé les trois grandes classes de méthodes de régularisation que sont la recherche de quasi-solution, les méthodes itératives, ou encore le filtrage des données. Certains exemples ont mis en lumière les limites de chacune de ces méthodes (notamment le filtrage des données).

Dans le chapitre qui va suivre, nous nous intéressons à une des grandes problématiques de ces travaux : l'estimation de sources de chaleur. Ce chapitre 3 a pour but de mettre à l'épreuve principalement deux méthodes, l'une dites « directe » et l'autre itérative dans des conditions proches de celles rencontrées expérimentalement lors d'essais mécaniques. Ces méthodes seront appliquées à des données simulées numériquement puis une expérience thermique servira de validation.

Nomenclature

A	Matrice	$Imp(t)$	Réponse impulsionnelle
a	Diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)	$Ind(t)$	Réponse indicielle
Fo	Nombre de Fourier	X	Vecteur paramètres
S	Matrice des Sensibilités	Q	Vecteur flux
t	Vecteur temps (s)	T_0	Température initiale (°C ou K)
T	Température (K ou °C)	C_p	Capacité calorifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
\tilde{T}	Température en sortie de capteur	$u(t)$	Indice
x, y, z	Coordonnées spatiales	w	Valeur singulière de W
H	Hessien	C_k	Coefficient de Fourier
k	Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	i	Variable complexe
$\ A\ $	Norme d'opérateur de la matrice A	$s(t)$	Sortie d'un système linéaire
d	Direction de descente	$e(t)$	Entrée d'un système linéaire
\hat{Q}	Vecteur flux estimé	J	Fonction coût
INT	Intervalle de confiance		

Symboles Grecs

Δt	Pas de temps (s)	$\delta(t)$	Dirac
ε	Erreur, Ecart	ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)
Ω	Domaine spatial	ψ	Fonction mère ondelette
γ	Paramètre de régularisation	Σ	Somme
λ^k	Coefficient de relaxation	δT	Vecteur échauffement (°C)
κ	Nombre de conditionnement d'une matrice A	φ	Densité de flux surfacique (W/m^2)
μ	Vecteur des paramètres	k	Conductivité thermique
$\hat{\mu}$	Approximation de μ	σ	Ecart-type

Abréviations

MCO	Moindres carrés ordinaires	DIAG	Vecteur diagonal d'une matrice
MGC	Méthode du gradient conjugué		

Indices

0	Condition à t=0	k	Itération
∞	Ambiance (extérieures)		

Exposants

T	Transposée d'une matrice
-1	Inverse d'une matrice

Liste des figures

Figure 1 – Schématisation d’un problème inverse en thermique	24
Figure 2 - Schéma du milieu semi-fini 1D sans terme source	25
Figure 3 – Schématisation de la théorie des systèmes linéaires	26
Figure 4 - Schéma d’un système thermique.....	28
Figure 5 - Estimation de propriétés thermiques d’un milieu semi-infini.....	29
Figure 6 - Estimation de flux à partir d’une mesure de température en profondeur dans un milieu semi-infini	30
Figure 7 - Schéma du milieu semi-infini, sur lequel est appliqué un flux instationnaire en surface	36
Figure 8 – Echauffements au cours du temps mesurés à différentes profondeurs dans un milieu semi-infini soumis en surface à deux niveaux successifs de densité de flux.....	36
Figure 9 – Réponses indicielles $ind(z,t)$	37
Figure 10 – Estimations du flux reçu en surface pour des mesures non-bruitées prises.....	38
Figure 11 - Exemple de courbe en L permettant de déterminer le paramètre de régularisation	40
Figure 12 – Profil 1D d’un signal en température bruité, puis décomposé avec SVD, et tronqué à deux niveaux de valeur singulière.....	50

Références bibliographiques

O. ALIFANOV ET E. ARTYUKHIN, 1975, Regularized numerical solution of non-linear inverse heat-conduction problem, *Journal of engineering physics and thermophysics* 29, 934-938

J.V. BECK ET AL, 1985, *Inverse Heat Conduction. Ill-Posed Problems*, J. Wiley & Sons. XVII, 308 S., £ 46.00. ISBN 0-471-08319-4

C.A. BREBBIA ET AL, 1984, *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*, Springer Berlin Heidelberg

B. BURKE, 1995, *Ondes et ondelettes : La saga d'un outil mathématique*, Belin

CARSLAW & JAEGER, 1959, *Conduction of heat in solids*, second edition, Oxford University Press

C. CATZ, 1996, *Analyseurs de Fourier, Techniques de l'ingénieur, R1156v1*

G.B. DANTZIG, 1987, *Origins of the simplex method*. In G. Nash, éditeur, *A History of Scientific Computing*, ACM Press Hist. Ser., pages 141–151. ACM Press, Reading, MA, États-Unis.

N. CHAMPAGNAT ET AL, 2013, *Modélisation déterministe-stoechastique, CEMRACS*

I. DAUBECHIES, 1992, *Ten lectures on wavelets, Society for industrial and applied mathematics*

A.B. DE VRIENDT, 1982, *La transmission de la chaleur*, Morin

J. DUMAS, 2001, *Cours : Analyse du signal (FFT et Filtrage numérique) & Analyse des systèmes*

Y. FAVENNEC, P. LE MASSON, AND Y. JARNY, 2011, *Optimization methods for non linear estimation or function estimation, Metti Spring School 5, Lecture 7, Roscoff*

J. FOURIER, 1822, *Théorie analytique de la chaleur*, chap. III (fondements de la transformée de Fourier)

J. FRITZ, 1982, *Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 4th ed*

J. GASPAR, 2013, *Fluxmétrie et caractérisation thermique instationnaires des dépôts des composants face au plasma du Tokamak JET par techniques inverses*, PhD Thesis, Université d'Aix-Marseille

J. HADAMARD, 1932, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, *Hermann*

C. HANSEN, 1987, *The truncatedSVD as a method for regularization*, Volume 27, Issue 4, pp 534-553

C. HANSEN ET AL, 2006, *Deblurring Images : Matrices, Spectra, and Filtering*, SIAM

B. HAY, J-R. FILTZ ET J-C. BATSALE, 2004, Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash, *Techniques de l'ingénieur, Mesure et contrôle, RÉF : R2955 V1*

Y. JANNOT, 2011, *Théorie et pratique de la métrologie thermique*, Cours Université de Nancy

Y. JARNY ET AL, 1999, *Introduction aux problèmes inverses*, *METTI*

M. KERN, 2002, Problèmes inverses : aspects numériques, *Cours Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci*

M. KERN, 2010, Problèmes inverses, *Techniques de l'ingénieur*

F. KWOK – Cours d'analyse Numérique, Université de Genève

B. KADOCH, K. LYER, D. DONZIS, K. SCHNEIDER, M. FARGE & P.K. YEUNG, 2011, On the role of vortical structures for turbulent mixing using direct numerical simulation and wavelet-based coherent vorticity extraction, *Journal of Turbulence, Article N20, Volume 12*

J. LELONG, 2007, Etude asymptotique des algorithmes stochastiques et calcul du prix des options parisiennes, PhD Thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées

C. LE NILIOT, 2002, HDR, La méthode des Eléments de Frontière pour la Résolution de Problèmes Inverses en Conduction de la Chaleur : Applications numériques et Expérimentales

MAILLET ET AL, 2011, Problèmes inverses en diffusion thermique : Formulation et résolution du problème des moindres carrés, *Techniques de l'ingénieur Transfert thermiques* (TIB214DUO – référence : be8267)

K.G. MURTY (1983). *Linear programming*. John Wiley & Sons Inc., New York. ISBN 0-471-09725-X. MR 720547.

NICHOLAS J. HIGHAM, 1996, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, *Soc. Ind. Appl. Math.*, 690 p. (ISBN 0-89871-355-2), p. 126

H.R.B. ORLANDE, O. FUDYM, D.MAILLET, R.M. COTTA, 2011 *Thermal Measurements and Inverse Techniques*, Taylor & Francis Group

ORLANDE & OZISIK, 1980, *Inverse Heat Transfert*, John Wiley

M. PADBERG, 1999, *Linear Optimization and Extensions*, deuxième édition, Springer-Verlag.

C. PAULUS, 2006, Filtrage de données sismiques multicomposantes et estimation de la polarisation, PhD Thesis, Institut national polytechnique de Grenoble

H.B. RAZAFINDRADINA ET AL, 2010, Compression d'images par SVD et sur approximation des composantes de chrominances, *ARIMA*

F RIGOLLET, O FUDYM, D PETIT, C LE NILIOT, D MAILLET, 2011, Basics for linear estimation, the white box case, *SFT2011 - Lecture 2*

C. RODIET ET AL, 2015, Estimation par méthodes spectrales régularisées de sources thermomécaniques localisées : validation numérique, *Congrès Français de Thermique 2015*

J-F. SACADURA, 1980, Transferts thermiques : Initiation et approfondissement, Lavoisier

G. SAPORTA, 2006, Probabilités, Analyse des données et Statistiques, *Paris, Editions Technip, p622*

A.N. THIKONOV ET ARSENIN, 1977, *Solutions of ill-posed problems*, Winston & Sons

N. THOME, 2016, Cours : Base du traitement des images « Introduction et fondements »

J. TODD, 1968, Programmation en mathématiques numériques, vol. 7, Besançon, Editions du CNRS, (ISBN 978-2-222-01037-1), « On condition numbers », p. 141-159

G. TOUZOT, E. LEFRANCOIS, G. DHATT, 1984, *Méthode des éléments finis*, Lavoisier

E. WALTER ET AL, 1994, *Identification de modèles paramétriques : à partir de données expérimentales*, Elsevier/Masson

CHAPITRE 3

ESTIMATION DE SOURCES DE CHALEUR

Sommaire

1. Etude en configuration 2D	61
1.1. Simulation de données bruitées	62
1.2. Méthode « directe »	65
1.2.1. Description de la méthode	66
1.2.2. Filtrage SVD directionnel	67
1.2.3. Résultats d'estimation.....	69
1.3. Méthode du gradient conjugué.....	70
1.3.1. Description de la méthode	70
1.3.2. Le problème inverse	71
1.3.3. Problème adjoint et équation du gradient	72
1.3.4. Problème de sensibilités et profondeur de descente	72
1.3.5. Critère d'arrêt	73
1.3.6. Optimisations de l'algorithme	73
1.3.7. Optimisation du problème direct	75
1.4. Résultats d'estimations	76
1.4.1. Signal non-bruité.....	76
1.4.2. Signal bruité.....	78
2. Etude en configuration 3D	80
2.1. Simulation de données numériques 3D.....	81
2.2. Estimation de sources avec un modèle 2D	83
3. Expérience thermique.....	87

Chapitre 3 : Estimation de sources de chaleur

3.1. Banc expérimental.....	87
3.2. Résultats d'estimation.....	91
3.3. Evaluation des pertes convecto-radiatives.....	92
Nomenclature	95
Liste des figures.....	96
Références bibliographiques.....	99

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier numériquement les performances de deux méthodes d'estimation de source de chaleur, et de déterminer quelle est la plus adaptée à des matériaux composites à matrice thermoplastique. On rappelle ici, que l'objectif final est d'estimer des sources de chaleur dans les composites sollicités mécaniquement.

Les méthodes sont d'abord testées et comparées sur des données 2D simulées. Les deux méthodes d'estimation de source que sont la méthode dite « directe » [A .Chrysochoos et al, 1999] et la « méthode du gradient conjugué » [Ozisk, 2012] [Gaspar, 2013] sont explicitées. Les techniques de filtrage de données employées sont également présentées pour une partie de la « régularisation » de la solution des problèmes inverses.

Ensuite, un cas numérique de référence 3D proche de la configuration expérimentale présentée dans le dernier chapitre est décrit. L'estimation de sources de chaleur est réalisée selon un modèle 2D avec la méthode inverse présentant le plus d'avantages. Le but est dans ce paragraphe de quantifier l'erreur due à la considération bidimensionnelle du réel phénomène 3D.

En fin de chapitre, une expérience thermique de validation est présentée. Il s'agit de valider les approches inverses d'estimation de sources de chaleur sur des données expérimentales issues de la thermographie IR. Cette partie a également pour but de quantifier les erreurs dues aux pertes convecto-radiatives.

1. Etude en configuration 2D

Afin d'être le plus représentatif du phénomène de diffusion de la chaleur dans un composite thermiquement mince à matrice polymère, on se propose de travailler dans un premier temps sur des données simulées numériquement. Le but est de trouver un bon compromis entre la simplicité de l'environnement de travail, pour pouvoir comparer réellement les performances des méthodes et la fidélité de la représentation numérique à l'expérience.

Nous verrons expérimentalement à la fin du chapitre (et également dans le chapitre 5) qu'il est possible de négliger les pertes convecto-radiatives (qui représentent environ 5% du terme source estimé) et également considérer la température comme homogène selon l'épaisseur des échantillons dont nous disposons. Cette hypothèse revient à considérer notre échantillon comme un corps mince, et ainsi travailler en 2D.

Dans un premier temps, les données manipulées sont numériques en 2D et sans pertes convecto-radiatives afin de comparer les comportements des deux méthodes inverses employées.

1.1. Simulation de données bruitées

L'équation de diffusion de la chaleur en 2D est donnée par :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} - \bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} T(x, y, t)) = g(x, y, t) \quad (3.1)$$

$\rho C_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}$ Représente la partie stockage de chaleur

$\bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} T(x, y, t))$ Représente la diffusion et les échanges de chaleur

$g(x, y, t)$ Correspond à la production interne de chaleur (W / m^3)

Le milieu est considéré comme indéformable, d'où l'absence de terme d'advection dans l'équation. Le problème est aussi considéré comme linéaire, donc la conductivité thermique ne varie pas avec la température et ainsi ne varie pas spatialement. L'équation de diffusion devient :

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} - a \cdot \nabla^2 T(x, y, t) = G(x, y, t) \quad (3.2)$$

Avec,

a la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$), T la température ($^{\circ}C$),

ρ la masse volumique ($kg.m^{-3}$), C_p la capacité calorifique ($J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$),

$G(x, y, t) = \frac{g(x, y, t)}{\rho.C_p}$ ($^{\circ}C / s$).

On impose des conditions aux limites de type Neumann en imposant un flux nul :

$$\begin{aligned} -k \cdot \frac{dT(0, y, t)}{dx} \Big|_{0 \leq y \leq Ly} = 0 & \quad ; \quad -k \cdot \frac{dT(Lx, y, t)}{dx} \Big|_{0 \leq y \leq Ly} = 0 \\ -k \cdot \frac{dT(x, 0, t)}{dy} \Big|_{0 \leq x \leq Lx} = 0 & \quad ; \quad -k \cdot \frac{dT(x, Ly, t)}{dy} \Big|_{0 \leq x \leq Lx} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Expérimentalement, il n'est pas aberrant de considérer ces échanges nuls car les surfaces d'échange aux bords d'un matériau mince ($e \leq 2mm$) sont extrêmement petites.

La condition initiale est une température homogène à $20^{\circ}C$:

$$T(x, y, t = 0) = T_{init} = 20^{\circ}C \quad (3.4)$$

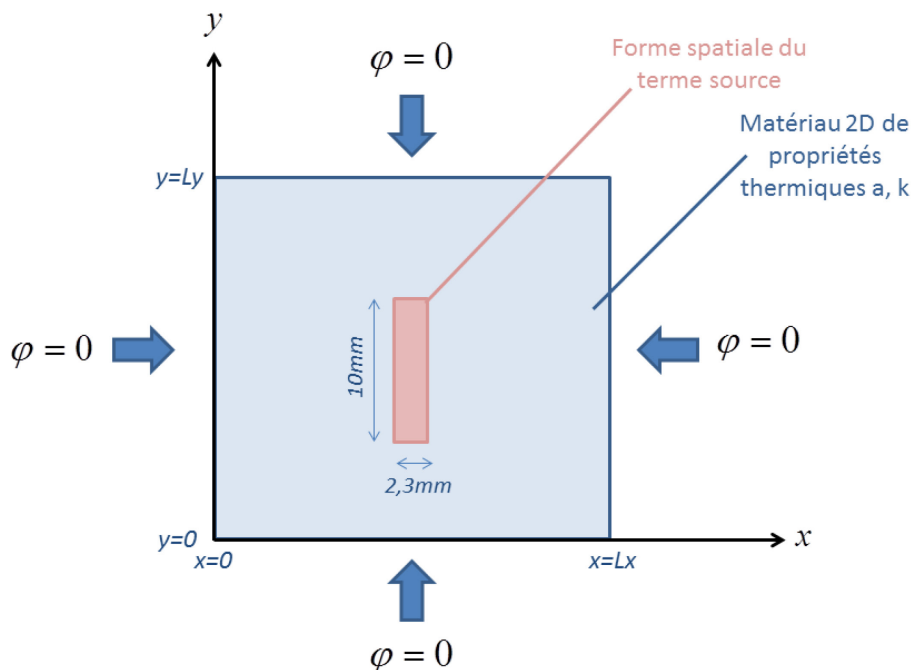


Figure 1 – Schéma du domaine 2D avec terme source et conditions aux limites adiabatiques

Les pertes par convections, analogues à un domaine tridimensionnel mince de part et d'autre de chaque face, ne sont pas représentées dans cette partie du chapitre. Cette partie a pour but de valider numériquement certaines méthodes inverses.

Les propriétés physiques choisies sont les suivantes :

$$k = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\rho = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$C_p = 1213 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$$

D'où,
$$a = \frac{k}{\rho \cdot C_p} \approx 4,12 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s} .$$

La diffusivité est proche de celle rencontrée dans les composites étudiés dans le chapitre 5 (composites à matrice PEEK et renforts avec des fibres de carbone et de verre).

Les conditions aux limites sont de types adiabatiques (Figure 1). Les sources sont choisies de sorte à obtenir une élévation en température de 10 à 20 degrés (élévations relevées lors d'essais sur certains polymères en traction simples).

Un créneau de source spatio-temporel est imposé afin de mettre les méthodes d'estimation dans les conditions les plus difficiles (Figure 2).

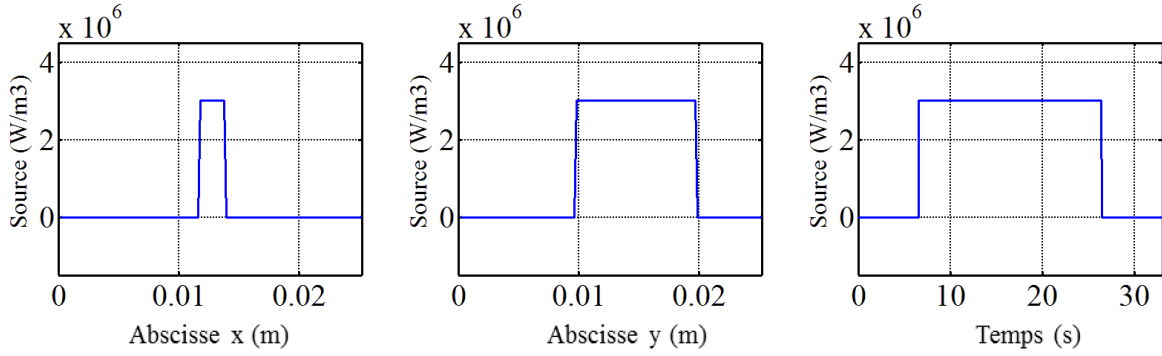


Figure 2 - Profils 1D des sources imposées au domaine 2D selon x , y , à $t=25s$ et profil 1D selon t , à $x=1,5cm$ et $y=1,2cm$

La simulation de ces données nécessite la résolution de l'équation de la chaleur. Cependant, la forme spatiale et temporelle des termes sources n'est pas homogène. La résolution est donc effectuée avec une méthode numérique avec discrétisation du domaine spatio-temporel.

Un « crime de l'inverseur » se produit lorsque le modèle utilisé pour produire les données est le même que pour les inverser [J. Kaipio et E. Somersalo, 2005]. Afin d'éviter cela, les données sont simulées à l'aide du logiciel Starccm+. Le logiciel résout l'équation de la chaleur en volumes finis, avec une discrétisation spatiale d'ordre 2, et avec un maillage spatio-temporel plus fin que celui requis pour la résolution du problème inverse (présentée au paragraphe 1.2).

Le domaine de calcul est bidimensionnel de dimensions $L_x = 2,5cm \times L_y = 2,5cm$. Le maillage réalisé est de 300×300 mailles, et la simulation est réalisée à une fréquence de 90Hz.

Une fois simulées, les données Starccm+ sont modifiées spatio-temporellement, c'est-à-dire que leur résolution ainsi que le pas de temps sont modifiés pour être similaire à ce qu'enregistrerait une caméra infra-rouge et pour pouvoir être traité par les méthodes inverses.

Le nouveau maillage 2D, choisi pour réaliser l'inversion, est un maillage de 100×100 pixels. Avec une fréquence d'acquisition « expérimentale » de 30Hz. On obtient ainsi les caractéristiques spatio-temporelles suivantes :

$$\Delta x = \Delta y = 2,5 \cdot 10^{-4} m \qquad \Delta t = 0,033s$$

Ces pas spatiaux et temporels restent suffisamment petits pour permettre d'estimer avec précision la forme spatio-temporelle ainsi que la puissance des termes sources. Le nombre de Fourier lié à ces paramètres garantit également la stabilité, même d'un schéma explicite :

$$Fo = Fo_x = Fo_y = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta y)^2} \approx 0,22 \leq 0,25 \tag{3.5}$$

Pour simuler un cas concret, un bruit est ajouté au champ de température. Celui-ci est blanc, gaussien, centré en 0. Son écart-type est $\sigma = \pm 0,2^{\circ}\text{C}$ (l'ordre de grandeur d'un bruit obtenu sur une caméra IR). L'évolution du champ de température simulé est présentée sur la Figure 3.

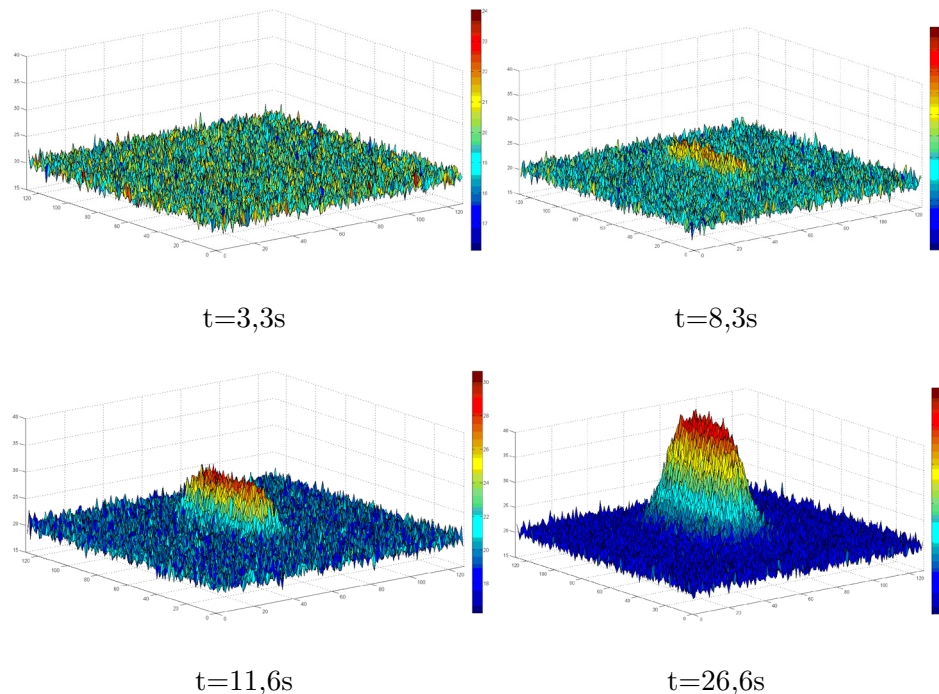


Figure 3 – Evolution du champ de température simulé (avec Starccm+), la résolution est réduite ($\Delta x = \Delta y = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$), et bruité ($\sigma = \pm 0,2^{\circ}\text{C}$ avec Matlab), stimulé par une source de chaleur de $3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$

Les thermogrammes mettent en évidence les propriétés classiques de déphasage et d'amortissement de l'opérateur de diffusion de la chaleur (Figure 3).

Nous disposons à présent d'un champ de température 2D instationnaire simulé et bruité. Le but de ce chapitre est de comparer les performances de deux méthodes radicalement opposées que sont une méthode « directe » et la méthode du gradient conjugué.

1.2. Méthode « directe »

Cette méthode est qualifiée de « directe » car le calcul inverse détaillé dans §1.2.1 ne nécessite pas d'inversion de matrice ni d'itération. Avec un schéma implicite, le calcul « direct » demande une inversion de matrice, alors que le calcul « inverse » (calcul du champ de termes sources 2D) ne requiert qu'un produit matrice vecteur suivi d'une soustraction, d'où l'appellation de « méthode directe ».

1.2.1. Description de la méthode

Cette méthode est la plus simple à mettre en œuvre en termes de programmation. Elle repose sur une discrétisation du champ de température pour effectuer le calcul des gradients et Laplaciens (dérivées secondes). On considère notre matériau indéformable, sans advection, à l'image d'un échantillon qui ne subirait que de très faibles déformations ($\varepsilon \leq 3\%$).

L'équation régissant la diffusion de la chaleur dans le matériau est donc :

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} - a \nabla^2 T(x, y, t) = G(x, y, t) \quad (3.6)$$

La résolution du problème inverse est basée sur une discrétisation selon un schéma implicite aux différences finies (ordre 1 en temps et ordre 2 en espace), et l'estimation du champ de termes sources se fait par identification des dérivées premières et secondes de la température.

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} \simeq \frac{T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N}{\Delta t} \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 T(x, y, t) \simeq (\nabla^2 T^{N+1}) \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 T^{N+1} \simeq \frac{T_{i-1,j}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}}{\Delta y^2} \quad (3.9)$$

N – Indice temporel courant ; $N+1$ – Indice temporel futur

La discrétisation implicite permet la stabilité inconditionnelle du schéma numérique et l'obtention d'un opérateur matriciel liant directement les causes (conditions aux limites et sources) avec les conséquences (champs de température). La discrétisation est faite de manière à ce que les sources recherchées soient à l'échelle du pixel (centrées autour de chaque nœud du maillage cartésien). Le système est linéaire, les propriétés thermiques ne dépendent pas de la température. Aucun *a priori* sur la forme spatio-temporelle n'est donné. La température initiale doit être connue. On discrétise l'équation de diffusion de la chaleur, et on fait apparaître le nombre de Fourier local :

$$Fo_x = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \text{ et } Fo_y = a \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \quad (3.10)$$

On suppose le domaine isotrope, et le pas spatial est le même selon x et y , on a donc $Fo = Fo_y = Fo_x$. Ces nombres de Fourier apparaissent sur (et autour de) la diagonale de l'opérateur matriciel \mathbf{A} .

Détails du Schéma implicite

$$(1+4Fo)T_{i,j}^{N+1} - Fo(T_{i-1,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1} + T_{i,j-1}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}) = \Delta t.G_{i,j}^N + T_{i,j}^N \quad (3.11)$$

Mais T est une matrice 2D qui varie au cours du temps, donc pour pouvoir écrire et résoudre le système sous la forme $\mathbf{A}x = b$, il faut réaliser un changement de variable $k = N_x(j-1) + i$.

i et j sont les coordonnées de chaque nœud du maillage 2D. T devient alors un vecteur qui varie au cours du temps, l'équation à résoudre devient alors :

$$(1+4Fo)T_k^{N+1} - Fo(T_{k-1}^{N+1} + T_{k+1}^{N+1} + T_{k-N_x}^{N+1} + T_{k+N_x}^{N+1}) = \Delta t.G_k^N + T_k^N \quad (3.12)$$

Soit une expression matricielle du type :

$$\mathbf{A}T^{N+1} = \Delta t.G^N + T^N \quad (3.13)$$

Avec \mathbf{A} l'opérateur matriciel contenant sur sa diagonale les termes $(1+4Fo)$, et autour les termes $(-Fo)$. Pour retrouver les termes sources, il suffit d'appliquer l'opérateur \mathbf{A} sur le champ de température et de lui soustraire le champ de température au pas de temps précédent.

$$G^N = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{A} . T^{N+1} - T^N) \quad (3.14)$$

Malgré tout, les calculs des laplaciens et gradients de température sont affectés par le bruit de mesure. Même si elle n'est pas inversée, \mathbf{A} possède un nombre de conditionnement suffisamment élevé pour amplifier le bruit de mesure. Tout ceci justifie l'application d'un filtrage préalable des données d'entrée qui sera réalisée avec la décomposition en valeurs singulières (ou Singular Value Decomposition soit SVD) [Gerbrands, 1980] [Pradere et al, 2014].

1.2.2. Filtrage SVD directionnel

On se propose d'utiliser une méthode de filtrage capable de remplir trois critères :

- réduire le plus possible l'écart-type du bruit de mesure
- ne pas biaiser le signal
- être la plus rapide possible

La décomposition en valeur singulières est un outil de factorisation des matrices. Il est optimisé pour traiter des matrices en 2D. Afin d'optimiser le filtrage du champ de

température 2D instationnaire, on opte pour un filtrage par SVD appliqué selon plusieurs directions :

La première étape est une décomposition en valeurs singulières purement spatiale. On décompose chaque champ de température $T_i(x,y)$, issu de $T(x,y,t)$. Une fois que chaque champ $T_i(x,y)$ a été décomposé avec SVD puis filtré par troncature de spectre, on obtient un champ préfiltré $T_{f_1}(x,y,t)$.

Ce champ est ensuite soumis à un deuxième processus de filtrage par SVD, en balayant l'axe y , sur chaque matrice $T_y(x,t)$ extraite de $T_{f_1}(x,y,t)$. On obtient ainsi le champ filtré $T_{f_2}(x,y,t)$.

La troisième étape est aussi un filtrage SVD spatio-temporel, en balayant l'axe x , sur chaque matrice $T_x(y,t)$ extraite de $T_{f_2}(x,y,t)$. On obtient ainsi le champ filtré $T_{f_3}(x,y,t)$.

Dans le cadre de nos mesures simulées numériquement auxquelles un bruit de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = 0,2K$ est ajouté, le meilleur compromis pour ne pas biaiser le signal est obtenu en conservant 17 valeurs singulières sur les matrices $T_i(x,y)$, 12 sur les matrices $T_y(x,t)$ et 12 sur les matrices $T_x(y,t)$. Cette technique de filtrage dans plusieurs directions de la matrice température permet de supprimer d'avantage de bruit de mesure que si le filtrage n'était effectué spatialement uniquement. La conservation d'un nombre important de valeurs singulières permet de ne pas biaiser le signal et perdre de l'information concernant la diffusion de la chaleur. Pour s'en convaincre, il est nécessaire de supprimer les valeurs singulières progressivement en vérifiant à chaque fois que les profils 1D spatio-temporels des écarts (entre le signal brut et le signal filtré) soient centrés en zéro. Le nouveau bruit de mesure résiduel possède ainsi une amplitude et un écart-type fortement réduits (Figure 4) :

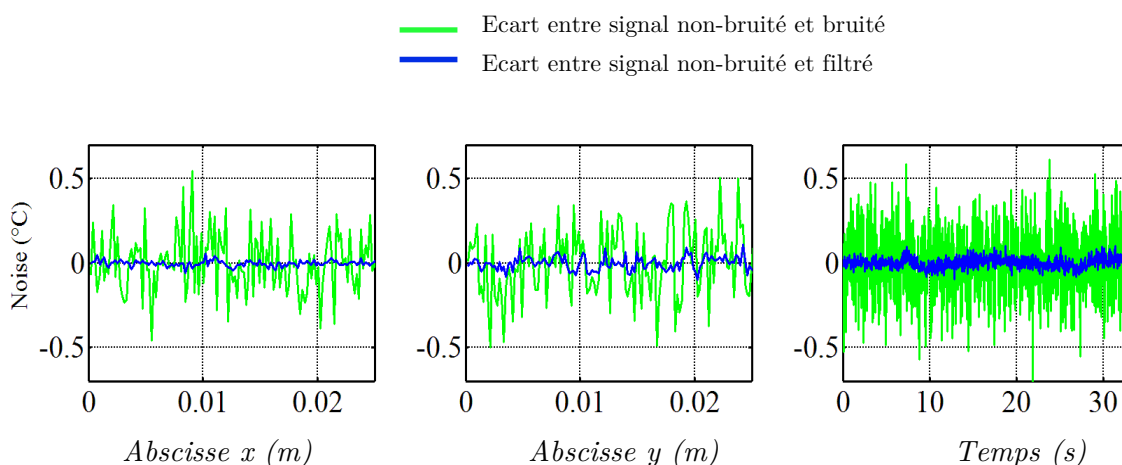


Figure 4 – Profils 1D (selon x , y , temps) des écarts entre le signal non-bruité (simulé avec Starccm+) et les signaux bruité ($\sigma = 0,2K$) puis filtré par SVD

Les nouveaux écarts-types du bruit de mesure résiduel (post-filtrage) sont présentés ci-dessous ainsi que le rapport de réduction du bruit selon les différents axes de la matrice de données :

$$\frac{\sigma(x)_{\text{bruité}}}{\sigma(x)_{\text{filtré}}} = \frac{0,1798}{0,018} = 9,98 \quad \frac{\sigma(y)_{\text{bruité}}}{\sigma(y)_{\text{filtré}}} = \frac{0,207}{0,0401} = 5,16 \quad \frac{\sigma(t)_{\text{bruité}}}{\sigma(t)_{\text{filtré}}} = \frac{0,2006}{0,0305} = 6,58$$

Cette technique est relativement efficace car malgré la présence de 3 étapes de filtrage, elle se révèle être très rapide ($< 2min$ pour une matrice température $100 \times 100 \times 1000$ points).

1.2.3. Résultats d'estimation

Les profils 1D de l'estimation de termes sources par la méthode directe sont choisis aux coordonnées suivantes :

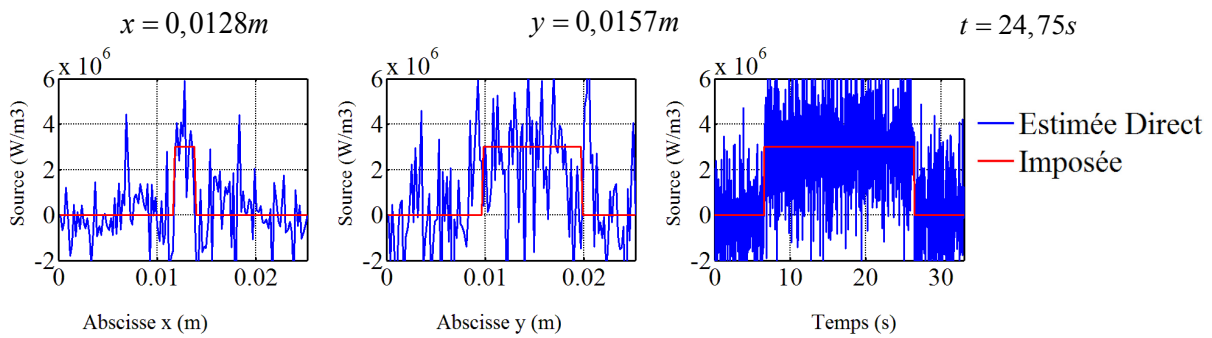


Figure 5 – Profils 1D (x , y et t) de l'estimation des termes sources avec la méthode directe (sur données filtrées avec SVD, en conservant 17 valeurs singulières sur les champs $T_t(x,y)$, 12 valeurs singulières sur les champs $T_x(y,t)$ et 12 valeurs singulières sur les champs $T_y(x,t)$)

La méthode directe ne semble pas (même avec un filtrage conséquent) être efficace pour la reconstruction de sources sous forme de créneau (Figure 5). Pour obtenir un résultat correct, il est nécessaire de réaliser une opération de régularisation supplémentaire. Il est possible, à l'aide d'une moyenne temporelle glissante, de régulariser davantage l'estimation des termes sources et ainsi obtenir une solution correcte (Figure 6).

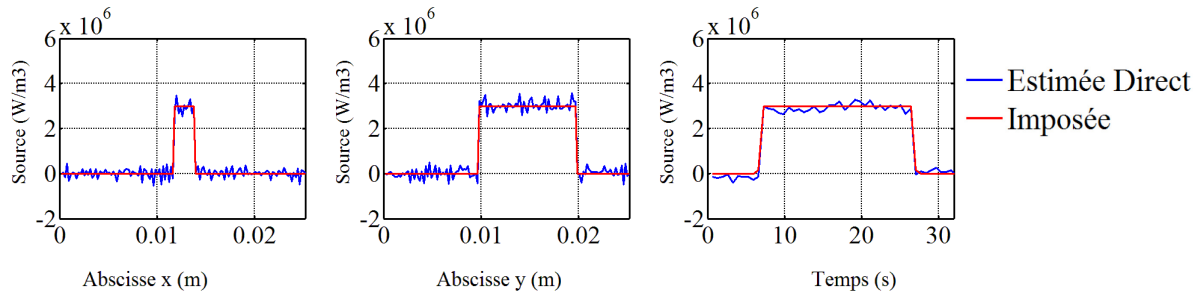


Figure 6 - Profils 1D (x , y et t) de l'estimation des termes sources avec la méthode directe (sur données filtrées avec SVD), ($\Delta x = \Delta y = 2,5 \cdot 10^{-4} m$; $\Delta t = 0,033s$), avec post-moyenne temporelle glissante sur 20 pas de temps

Cependant, cette astuce induit une perte d'information. Le risque est de régulariser de manière excessive. Cette perte d'information implique que l'acquisition des images IR soit effectuée à fréquence élevée et de préférence sur un matériau peu diffusif. Le prix à payer est une forte perte en résolution temporelle.

Après toute une série de tests, le meilleur choix (dans ce cas de figure simulé) semble être la mise en place d'une moyenne temporelle glissante d'une largeur de 20 pas de temps, soit une réduction de la fréquence d'un facteur 20. On pourra appliquer cette méthode dans le cadre de matériaux relativement bien connus et dont le caractère isotrope ou orthotrope est avéré.

Dans un souci de mise en place d'un outil plus général, capable de fonctionner dans des configurations beaucoup plus complexes, on choisit de s'intéresser à la méthode du gradient conjugué. Cette méthode peut nécessiter, selon le cas étudié, un nombre important d'itérations. Des optimisations seront donc apportées à l'algorithme (pour que la convergence soit plus rapide) ainsi qu'à la fonction de résolution des équations (pour que le calcul soit le moins lourd possible).

1.3. Méthode du gradient conjugué

Nous avons pu voir dans le chapitre 2, un certain nombre de méthodes de résolution de problèmes inverses. Nous avons pu voir dans le paragraphe précédent §1.2, les limites d'application de la méthode « directe ». Le but de ce paragraphe est à la fois de trouver une manière plus efficace de régulariser la solution mais aussi de trouver une méthode pouvant être généralisable et être utilisée dans des configurations particulières comme : des problèmes non-linéaires, des géométries complexes, des plages de paramètres plus larges, etc.

Dans notre configuration, on souhaite estimer un terme source par pixel et par unité de temps. On se retrouve encore une fois face à un problème linéaire où on souhaite estimer un grand nombre de paramètres. L'algorithme des gradients conjugué semble être adapté à ce type de problème car il est réputé pour être extrêmement stable lorsque le nombre de paramètres à estimer est important.

1.3.1. Description de la méthode

La méthode des gradients conjugués consiste à résoudre le problème direct correspondant à notre expérience et de minimiser l'écart quadratique entre les résultats d'un problème direct de modélisation et des mesures. La résolution successive d'un problème adjoint et d'un problème de sensibilité permet de déterminer respectivement la direction et la profondeur de

descente [Rodrigues et al, 2004] [Gaspar, 2013]. Le problème direct est défini par l'équation de diffusion de la chaleur (3.2). L'équation de la chaleur est encore une fois manipulée en 2D.

Remarque : La méthode du gradient conjugué est détaillée dans ce chapitre uniquement pour l'estimation de sources de chaleur. L'estimation d'autres paramètres induisent des modifications de l'expression de certaines grandeurs, notamment celle du gradient du critère [Ozisik, 2000] [Gaspar, 2013].

1.3.2. Le problème inverse

Pour des raisons de clarté de lecture, les équations qui suivent sont présentées sous leur forme mathématique fonctionnelle et non sous leur forme matricielle discrétisée.

Le problème inverse consiste à estimer G afin de minimiser l'écart quadratique défini par le critère suivant :

$$J(G(x, y, t)) = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^t (T_{calculée}(x, y, t, G(x, y, t)) - T_{mesurée}(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.15)$$

$T_{mesurée}$ - Température mesurée par thermographie infra-rouge

$T_{calculée}$ - Température calculée par résolution du problème direct

La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative qui consiste à approcher le nouvel itéré G^{it+1} à partir de l'itéré précédent G^{it} comme suit :

$$G^{it+1}(x, y, t) = G^{it}(x, y, t) + P_{descente}^{it} \cdot D_{descente}^{it}(x, y, t) \quad (3.16)$$

G^{it} - Termes source estimé à l'itération it

$P_{descente}^{it}$ - Profondeur de descente calculée à l'itération it

$D_{descente}^{it}$ - Direction de descente calculée à l'itération it

La particularité de cette méthode est de construire la direction de descente $D_{descente}^{it}$ de telle manière que les directions de descente successives soient conjuguées entre elles. Pour ce faire, la direction de descente à chaque itération est calculée comme suit :

$$D_{descente}^{it}(x, y, t) = \nabla J^{it}(x, y, t) + \beta^{it} \cdot D_{descente}^{it-1}(x, y, t) \quad (3.17)$$

Avec β^{it} le coefficient de conjugaison défini par [Polak-Ribière-Polyak, 1969] :

$$\beta^{it} = \frac{\iiint \nabla J^{it}(x, y, t) \cdot (\nabla J^{it}(x, y, t) - \nabla J^{it-1}(x, y, t)) dx dy dt}{\left\| \nabla J^{it-1}(x, y, t) \right\|^2} \quad (3.18)$$

On montre mathématiquement d'après [Ozisik, 2000] que dans le cas où la fonction inconnue est un terme source, le gradient du critère est égal aux multiplicateurs de Lagrange : $\nabla J = \psi$

Le problème direct, le problème adjoint et le problème des sensibilités, sont résolus à chaque itération. Cependant, afin d'alléger la lecture, dans la suite du paragraphe, les variables ne comporteront pas l'indice it .

1.3.3. Problème adjoint et équation du gradient

Le problème adjoint permet d'obtenir l'expression du gradient du critère ∇J afin de déterminer la direction de descente $D_{descente}$.

Calcul des erreurs en sortie du calcul direct :

$$\varepsilon(x, y, t) = T_{calculé}(x, y, t) - T_{mesuré}(x, y, t) \quad (3.19)$$

Le problème adjoint s'écrit de la manière suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial \nabla J(G(x, y, t))}{\partial t} + k \cdot \nabla^2 (\nabla J(G(x, y, t))) = \varepsilon(x, y, t) \quad (3.20)$$

La résolution du problème adjoint permet de calculer les multiplicateurs de Lagrange :

$$\rho C_p \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial t} + k \nabla^2 \Psi(x, y, t) = \varepsilon(x, y, t) \quad (3.21)$$

Ce problème est résolu de manière rétrograde en temps, on s'intéresse donc à une condition finale : $\Psi(x, y, t_{final}) = 0$

1.3.4. Problème de sensibilités et profondeur de descente

La résolution du problème de sensibilités a pour but de donner les équations permettant d'obtenir la fonction de sensibilité $\delta T(x, y, t)$ en fonction des inconnues à estimer et ainsi de calculer la profondeur de descente $P_{descente}^{it}$, les équations du problème de sensibilités sont :

$$\frac{\partial \rho C_p \delta T(x, y, t)}{\partial t} - k \nabla^2 \delta T(x, y, t) = D_{descente}(x, y, t) \quad (3.22)$$

Calcul de la profondeur de descente :

$$P_{descente} = \frac{\sum_1^{N_x \cdot N_y} \int_0^t (T_{calculé}(x, y, t) - T_{mesuré}(x, y, t)) \cdot \delta T(x, y, t) dt}{\sum_1^{N_x \cdot N_y} \int_0^t (\delta T(x, y, t))^2 dt} \quad (3.23)$$

1.3.5. Critère d'arrêt

En accord avec le « discrepancy principle », les itérations se poursuivent tant que le critère n'est pas inférieur ou égal à la valeur seuil définie par :

$$Seuil = \frac{1}{2} N_x \cdot N_y \cdot N_t \cdot \sigma^2 \quad (3.24)$$

N_x, N_y, N_t - Nombre de points selon les axes x, y, t

σ - Ecart-type du bruit de mesure

Remarque : Lors d'une mesure expérimentale, l'écart-type du bruit perturbateur du signal peut être estimé numériquement sur les zones où le signal est stable et centré en zéro.

1.3.6. Optimisations de l'algorithme

Les problèmes rencontrés par ce type de méthode relèvent généralement de la convergence du calcul itératif, ou encore de la tendance de l'algorithme à « expliquer » localement par la physique un bruit de mesure qui n'est pas physique.

Afin d'éviter cela, on se propose d'ajouter deux caractéristiques à l'estimation :

- Mise en place d'un filtrage préalable des données, de la même manière que pour la méthode directe.
- Mise en place d'un seuil d'arrêt des calculs de l'algorithme, propre à chaque pixel et non pas basé sur l'ensemble des points du maillage.

Comparaison des différentes techniques de calculs MGC

Le filtrage de données ainsi que le critère local permettraient d'éviter une description physique du bruit de la part de l'algorithme, et accélèreraient les calculs. Le passage à un critère « local » modifierait l'expression du seuil car il est propre à chaque pixel :

$$Seuil = \frac{1}{2} N_t \cdot \sigma^2 \quad (3.25)$$

σ - Ecart-type du bruit de mesure, N_t - Nombre de pas de temps

Tentons de vérifier ces hypothèses d'amélioration en comparant l'impact de ces deux types de modifications sur la précision de l'estimation. Les 4 combinaisons envisageables sont :

Cas 1 : Application de la méthode du gradient conjugué sur un signal bruité, avec un critère d'arrêt de l'algorithme global.

Cas 2 : Application de la méthode du gradient conjugué sur un signal bruité, avec un critère d'arrêt de l'algorithme local.

Cas 3 : Application de la méthode du gradient conjugué sur un signal filtré au préalable, avec un critère d'arrêt de l'algorithme global.

Cas 4 : Application de la méthode du gradient conjugué sur un signal filtré au préalable, avec un critère d'arrêt de l'algorithme local.

La meilleure combinaison sera celle donnant le résidu dont l'écart-type est le plus faible, et dont la moyenne est la plus proche de zéro car le bruit ajouté numériquement pour l'étude est un bruit gaussien centré en zéro.

Remarque : Ces différentes configurations testées ne seront pas présentées dans les résultats car trop fastidieuses. Des tableaux récapitulatifs (Figure 7, Figure 8) viennent illustrer le choix de la meilleure combinaison entre filtrage et critère.

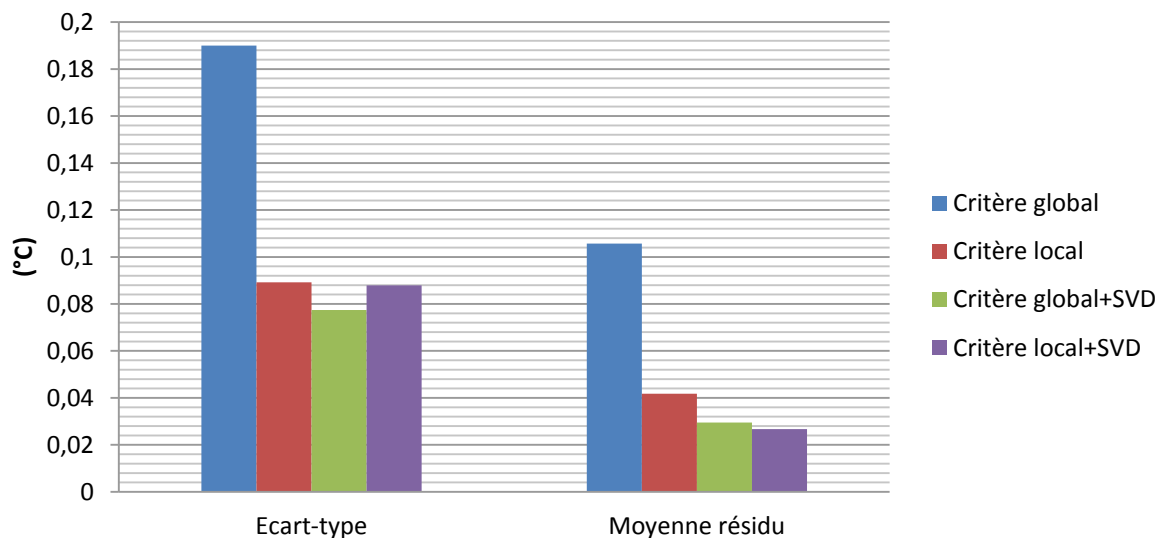


Figure 7 – Ecart-type et moyenne du résidu entre le signal mesuré (températures) et le signal estimé, pour chaque combinaison d'améliorations de l'algorithme MGC (voir les cas 1 à 4)

Les écart-types des résidus entre les données et les estimations (du champ de températures et du champ de sources) sont plus faibles dans le cadre de données filtrées avec un critère d'arrêt global (Figure 7, Figure 8).

Cependant, la moyenne des erreurs est bien plus proche de zéro dans le cadre de données filtrées avec un critère d'arrêt local. C'est pourquoi cette méthode sera celle employée dans le chapitre 5 dédié aux résultats expérimentaux.

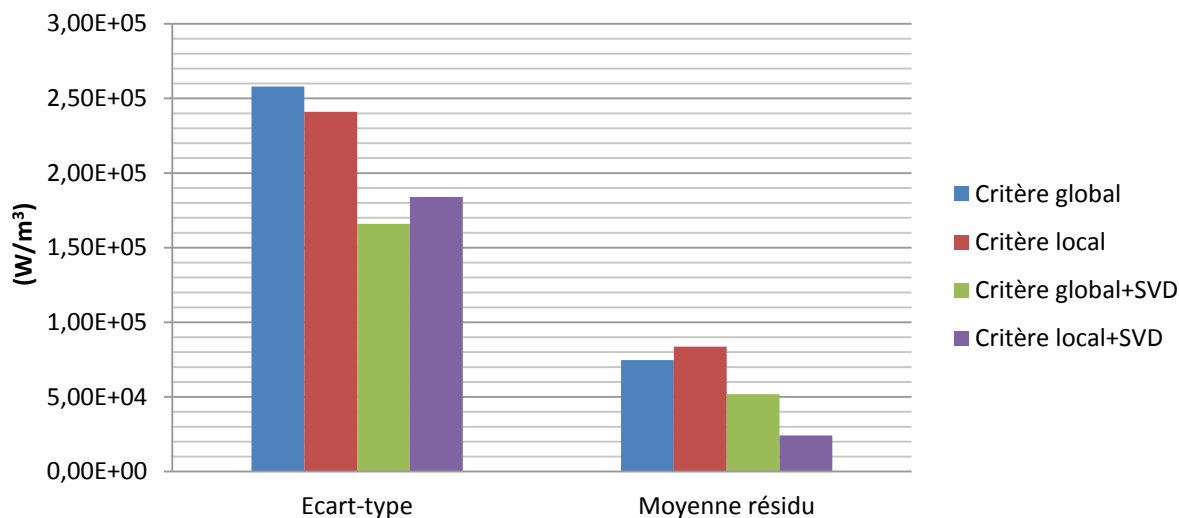


Figure 8 - Ecart-type et moyenne du résidu entre les sources imposées et les sources estimées, pour différents algorithmes MGC (voir les cas 1 à 4)

1.3.7. Optimisation du problème direct

L'algorithme du gradient conjugué peut être « ajusté » de plusieurs manières, notamment en jouant sur le choix du critère d'arrêt comme vu dans la partie précédente. Cependant, toute la charge de calcul est portée par la résolution des 3 problèmes : direct, adjoint et sensible. En effet, ces trois problèmes sont basés sur le même maillage pour la résolution de l'équation de diffusion que pour le problème direct. Il est possible de le résoudre de plusieurs manières : code de calculs volumes finis de type ANSYS ou STARCCM+, code de calculs éléments finis de type COMSOL ou CAST3M, etc. Le problème étant la demande en calcul machine.

On se propose, de développer un code de résolution. Les 3 problèmes direct, adjoint et sensible sont résolus par un schéma explicite aux différences finies. Ce schéma est préféré à d'autres pour sa simplicité de résolution. *Remarque*: Dans cette partie, on effectue de nouveau le changement de variable détaillé en (3.12).

Un schéma implicite nécessite une inversion de matrice pour résoudre le problème direct :

$$T^{N+1} = \mathbf{A}^{-1}(\Delta t.G^N + T^N) \quad (3.26)$$

Un schéma explicite ne nécessite qu'un produit matrice-vecteur (pour chaque pas de temps) :

$$T^{N+1} = \mathbf{A}T^N + \Delta t.G^N \quad (3.27)$$

L'opérateur matriciel \mathbf{A} est lacunaire, et beaucoup d'opérations sont réalisées inutilement :

$$\begin{bmatrix} C & Fo & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Fo & C & Fo & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Fo & C & Fo & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Fo & C & Fo & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Fo & C & Fo & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Fo & C & Fo & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Fo & C & Fo & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Fo & C & Fo \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Fo & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ T_{k-Nx} \\ \vdots \\ T_{k-1} \\ T_k \\ T_{k+1} \\ \vdots \\ T_{k+Nx} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Avec $C = 1 - 4Fo$

Il est possible de remplacer le produit matrice-vecteur $\mathbf{A}T^N$ par des produits simples terme à terme, de par l'aspect lacunaire et tri-diagonal des matrices de transfert, ce qui optimise encore la vitesse des calculs. La méthode de calcul est détaillée en *annexe 2*. Il faut simplement veiller à la stabilité du schéma : $Fo = Fo_x = Fo_y < \frac{1}{4}$,

1.4. Résultats d'estimations

Dans ce paragraphe, l'objectif est de mettre en évidence l'influence du bruit de mesure sur la reconstruction de champs de sources, et de comparer les caractéristiques de chaque méthode.

1.4.1. Signal non-bruité

Comparons à présent les deux méthodes d'estimations (Directe et MGC) sur les signaux simulés avec Starccm+, non-bruités.

Résultats méthode directe

Sans bruit de mesure, le signal est parfaitement reconstruit, avec la méthode directe utilisant un schéma numérique implicite. Il est même impossible de distinguer les profils imposés des profils estimés (Figure 9).

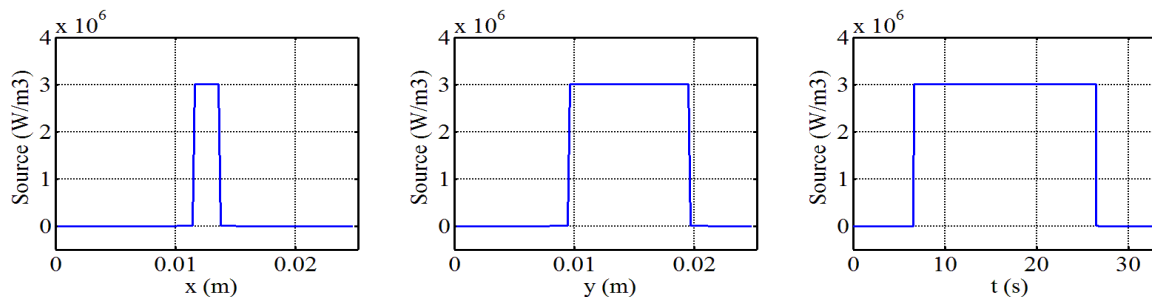


Figure 9 – Profils 1D selon x , y , t de l'estimation des sources avec la méthode directe, à partir du signal 2D non bruité simulé avec Starccm+

Résultats méthode du gradient conjugué

L'estimation basée sur un signal en température non-bruité semble être légèrement moins efficace avec une méthode itérative comme le gradient conjugué qu'avec la méthode directe, comme le montre la Figure 10. Le niveau de précision atteinte semble cependant tout à fait comparable. Cependant, pour parvenir à cette estimation, il est nécessaire de faire fonctionner l'algorithme pendant un grand nombre d'itérations (environ 500) au risque de rendre la solution instable.

De plus, des perturbations au niveau des fronts persistent. Elles sont issues de la difficulté à représenter des pentes infinies avec un modèle de diffusion, car ce modèle a tendance à « atténuer les fronts » et « lisser » le signal. Cependant l'estimation reste de bonne qualité.

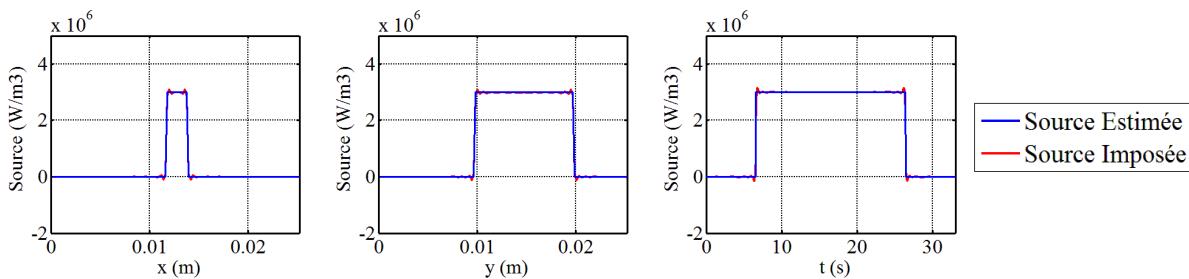


Figure 10 – Profil 1D selon x , y , t de l'estimation des sources avec MGC, à partir du signal 2D non-bruité simulé avec Starccm+

Même s'il est nécessaire d'arrêter l'algorithme manuellement (ou de fixer un seuil lié à un bruit de mesure très faible), il est possible de nous convaincre davantage de la convergence de la solution en comparant les champs de température simulé (avec Starccm+) puis estimé (avec MGC).

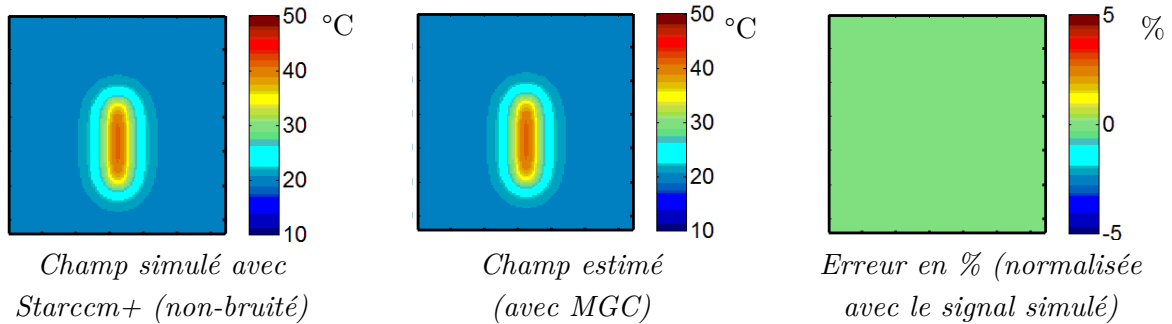


Figure 11 - Champs de température 2D ($t=15s$)

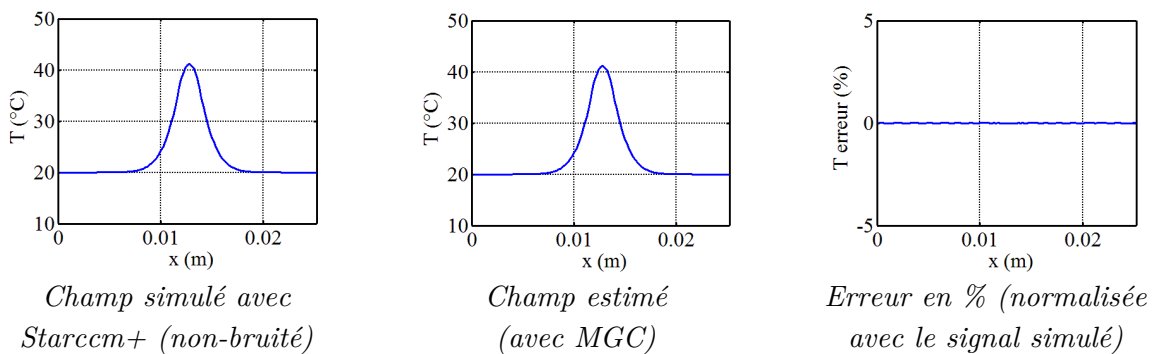


Figure 12 - Profil 1D des températures selon x

L'estimation du champ de température semble « parfaite » comme le montrent les Figure 11 et Figure 12. En effet, sans la présence de bruit de mesure, l'algorithme peut se permettre de réaliser un grand nombre d'itérations sans pour autant perdre en stabilité.

1.4.2. Signal bruité

On décide de bruite le signal comme décrit dans §1.1 du chapitre 3 avec un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 0,2^{\circ}C$.

Résultats Méthode directe

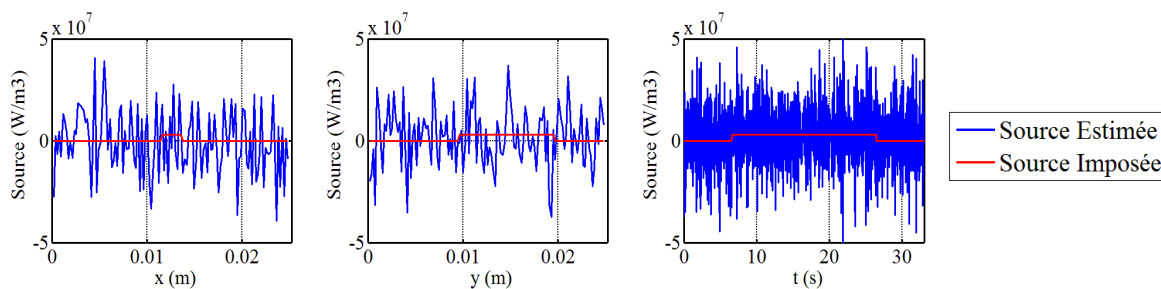


Figure 13 - Profils 1D selon x , y , t de l'estimation des sources avec la méthode directe, à partir du signal 2D bruité simulé avec Starccm+

L'estimation est catastrophique pour un signal bruité avec la méthode directe (Figure 13). On ne parvient pas à distinguer la moindre source. L'ensemble reste centré en zéro.

Résultats Méthode du Gradient Conjugué

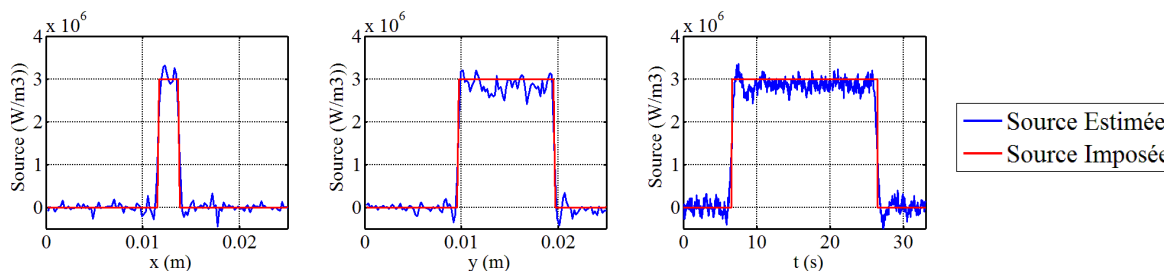


Figure 14 - Profils 1D selon x , y , t de l'estimation des sources avec MGC, à partir du signal 2D bruité simulé avec Starccm+

La méthode MGC parvient, malgré la présence du bruit de mesure, à estimer correctement les sources tant sur le plan spatial que temporel (Figure 14).

Les deux méthodes inverses nécessitent d'initialiser correctement la température du domaine lors de chaque résolution du problème direct, mais également de connaître le plus exactement possible les propriétés thermo-physiques du matériau.

L'estimation par méthode directe s'avère être très décevante et les résultats peu exploitables dès lors qu'un bruit de mesure est présent.

La MGC appelle et résout le problème direct (équation de diffusion de la chaleur) n fois (nombre d'itérations), or dans le sens direct, l'opérateur diffusion de l'équation de la chaleur tend à atténuer les fronts et les instabilités. La MGC régularise bien mieux une solution lorsque le nombre d'itérations est faible, mais la précision augmente lorsque le nombre d'itération est grand. La convergence et l'estimation sont ainsi optimisées grâce à la mise en

place d'un critère de convergence local qui permet de réduire le nombre d'itérations inutiles par rapport à un critère global (où l'ensemble du champ est modifié à chaque itération). Le pré-filtrage des données d'entrée réalisé avec SVD réduit l'écart-type du bruit de mesure et ainsi, cela permet à l'algorithme d'itérer plus sans pour autant perdre en stabilité. Cette combinaison est un très bon compromis pour représenter les échelons de source tout en régularisant l'estimation.

La méthode directe possède cependant l'avantage de donner une solution en une unique étape de calcul. De plus, dans certaines conditions, lorsque l'on réalise une post-moyenne glissante temporelle sur le champ de sources estimé, on obtient une estimation s'approchant de la solution exacte.

Pour résumer, la méthode directe fonctionne à la perfection lorsque la mesure n'est entachée d'aucun bruit de mesure et réalise l'estimation en une unique étape. Cependant, la réalité expérimentale nous amène à préférer la méthode du gradient conjugué, car elle reste stable dans une plus large gamme de situations expérimentales.

Dans la pratique, il n'existe pas de matériau mince au comportement bidimensionnel. Cependant les matériaux suffisamment minces ont un comportement qui tend vers celui de la diffusion 2D.

Plaçons-nous dans un cadre plus proche de la réalité expérimentale, et tentons d'estimer des termes sources 3D à partir d'une mesure 2D par thermographie IR. On se propose dans la partie qui va suivre, de simuler des données 2D bruitées, comme pourrait le mesurer une caméra IR sur une face d'un matériau. Le but est de vérifier si les méthodes bidimensionnelles développées dans la partie précédente peuvent permettre d'estimer une source volumique dont la profondeur est inconnue.

2. Etude en configuration 3D

Dans ce paragraphe, on simule des données numériques en 3D sans pertes convecto-radiatives sur les deux faces du domaine. Les méthodes présentées dans les paragraphes précédents ont été choisies bidimensionnelles pour leur caractère simple, et dans le but de mettre en place une méthode applicable sur le plan industriel.

Dans certains cas de figure expérimentaux, on pourra estimer les pertes convecto-radiatives. Pour tenir compte de ces pertes avec un modèle inverse 2D, la méthode consiste à considérer

chaque maille comme une petite ailette à température constante à un instant donné. L'équation de diffusion de la chaleur prend la forme suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T(x,y,t)) = g(x,y,t) - P(x,y,t) \quad (3.29)$$

Avec $P(x,y,t) = \frac{2 \times S_{ech} \times (T(x,y,t) - T_{ext}) \times h}{V}$, et $S_{ech} = \Delta x \cdot \Delta y$, $V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot e$

D'où $P(x,y,t) = \frac{2 \times (T(x,y,t) - T_{ext}) \times h}{e}$ et h le coefficient d'échange convecto-radiatif obtenu par linéarisation des pertes radiatives (*annexe 4*).

L'objectif de cette partie est donc de valider numériquement le fait que l'estimation des termes sources d'un matériau mince puisse être traitée en considération 2D et s'avérer efficace.

Le calcul préalable du nombre sans dimension Biot peut permettre de vérifier si l'hypothèse de « corps mince » est acceptable, et ainsi valider l'utilisation d'un modèle 2D :

$h = 10 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ pour un air calme

$e = 0,0015 m$ l'épaisseur moyenne des échantillons composites étudiés

$k = 0,6 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ la conductivité thermique moyenne d'une résine thermoplastique

$$Bi = \frac{h \cdot e}{k} = \frac{10 \times 0,0015}{0,6} \approx 0,025 \ll 0,1 \quad (3.30)$$

$Bi \ll 0,1$, donc pour les valeurs de h, e, k définies précédemment, l'hypothèse de « corps mince » est acceptable.

Dans ce sous-chapitre, on procèdera en simulant numériquement un champ de température qui serait expérimentalement mesuré sur une des faces d'un matériau mince. A ce champ de température sera appliqué des méthodes inverses d'estimation de sources 2D détaillées précédemment. Enfin nous validerons ou non la pertinence de l'usage de ces méthodes.

2.1. Simulation de données numériques 3D

On utilise un code commercial volumes finis (Starccm+). On choisit des propriétés physiques proches de celles d'un composite à matrice thermoplastique.

$$k = 0,6 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$$

$$\rho = 1200 kg \cdot m^{-3}$$

$$C_p = 1213 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$$

Le milieu est de nouveau choisi comme étant isotrope, afin que le caractère orthotrope ne perturbe pas le résultat que l'on souhaite mesurer, c'est-à-dire l'effet 3D du domaine sur l'estimation. La source de chaleur imposée est un créneau selon les directions x , y , z , et selon le temps. Sa densité volumique de flux est de $\|G\|=1.10^7 W / m^3$. La simulation donne un champ de température en surface qui semble correspondre à ce qui se produit au cœur de l'échantillon de 1,5mm d'épaisseur. La source prend effet au centre du matériau et possède les dimensions suivantes :

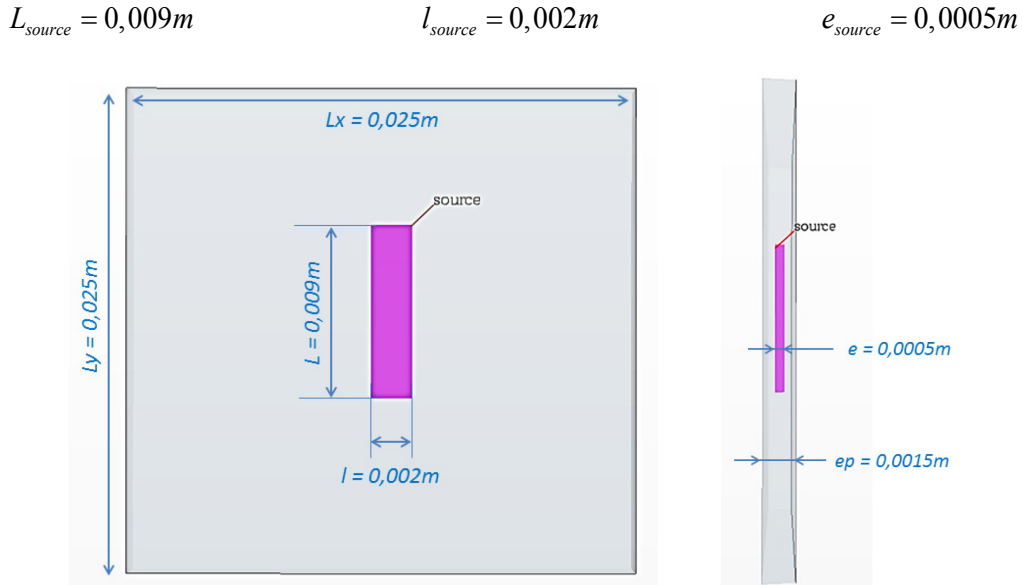


Figure 15 – Position de la source de chaleur interne dans le cadre d'une simulation du transfert de chaleur en 3D avec Starccm+

Le profil temporel du terme source imposé dans la simulation numérique est présenté sur la Figure 16.

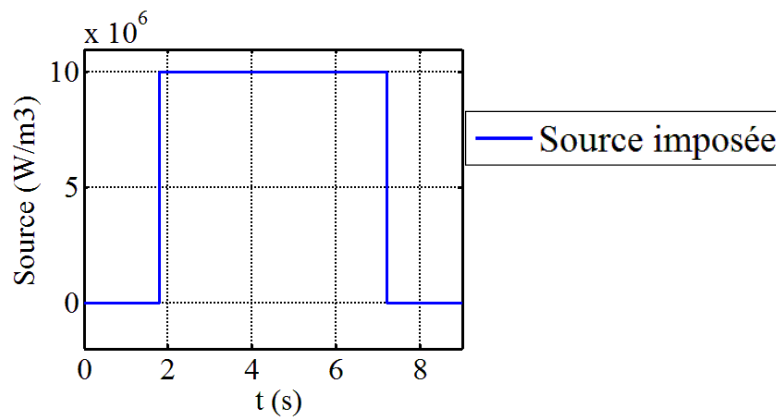


Figure 16 – Profil temporel de la source de chaleur interne dans le cadre d'une simulation du transfert en 3D avec Starccm+

La courbe rouge (Figure 17) représente l'évolution de la température au cœur de la source de chaleur, la courbe verte représente l'évolution de la température en surface (surface observable par thermographie IR expérimentalement). On remarque qu'en surface, l'évolution de la température est décalée d'environ $1s$ (Figure 17), soit une durée tout à fait acceptable devant la durée de l'expérience.

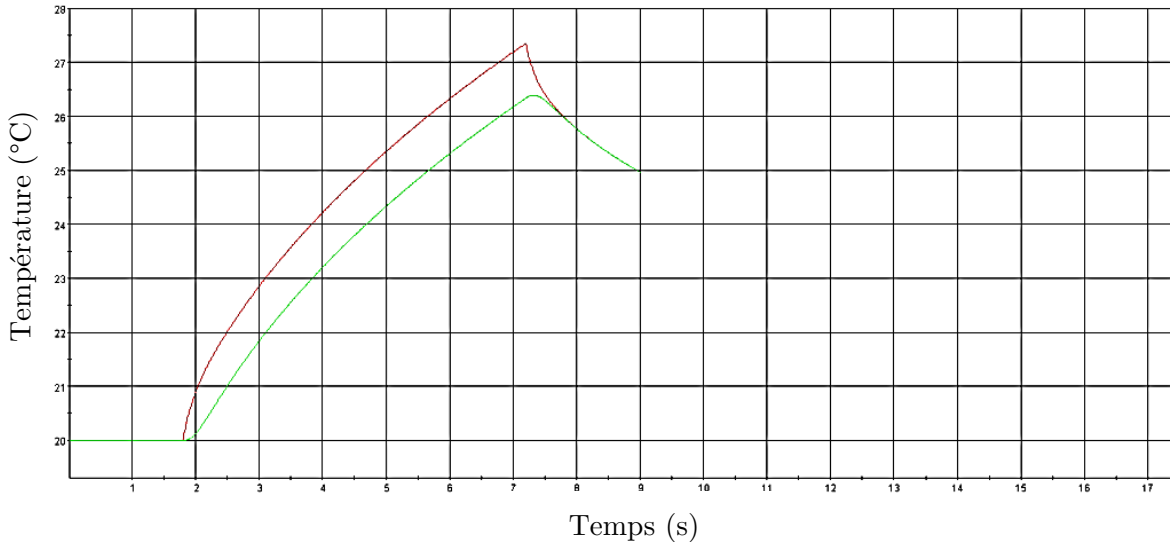


Figure 17 – Evolution de la température au cœur de la source (en rouge) et en surface (en vert), au cours du temps

2.2. Estimation de sources avec un modèle 2D

Afin que cette expérience numérique soit la plus représentative d'une expérience réelle, on se propose d'estimer les termes sources de chaleur imposé au domaine en minimisant l'écart entre le champ de température simulé (sur l'une des faces du domaine et bruité artificiellement $\sigma = 0,2^{\circ}C$) et le champ de température modélisé par la méthode du gradient conjugué en 2D (de manière classique, sans filtrage des données). Le but est de vérifier la pertinence de l'utilisation d'un modèle 2D sur un matériau dont le transfert de chaleur est en réalité tridimensionnel. Le critère d'arrêt de l'algorithme est calculé de manière à respecter de discrepancy principle, c'est-à-dire que lorsque la fonction coût passe sous le seuil correspondant au bruit de mesure l'algorithme doit s'arrêter.

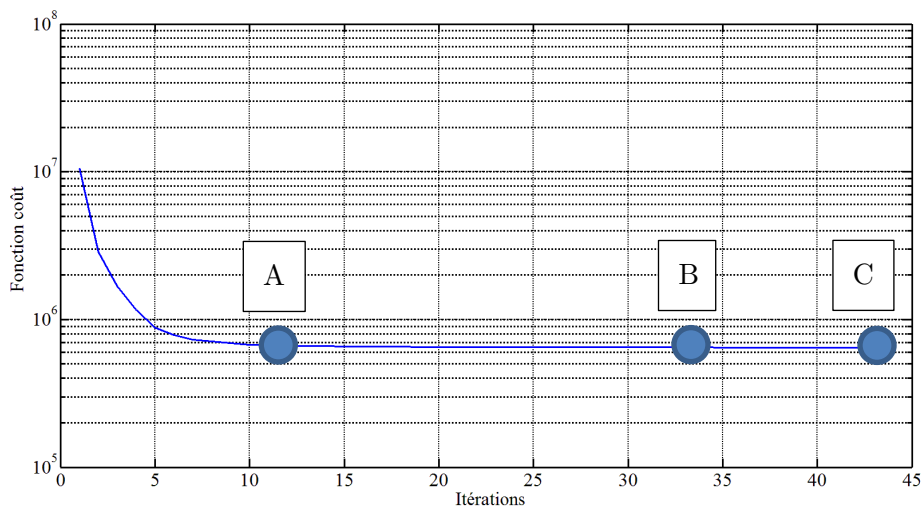


Figure 18 – Evolution du résidu de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme MGC, les données d'entrées sont relevées à partir de la température simulée (Starccm+) sur une des faces du domaine 3D

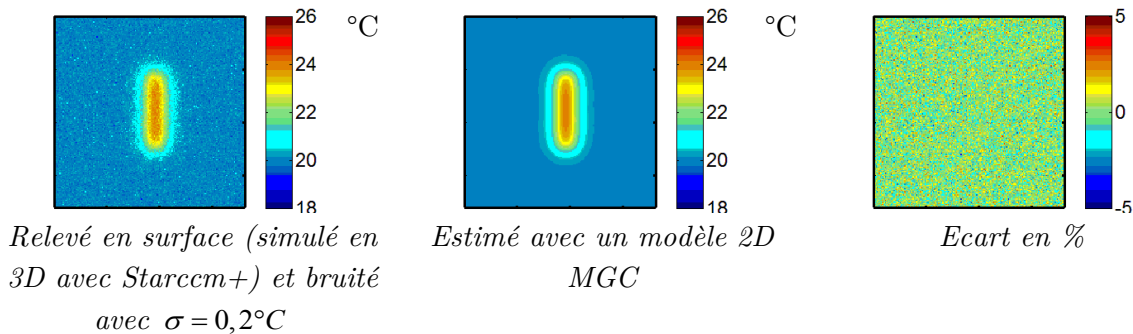


Figure 19 – Champ de température (à $t=7s$)

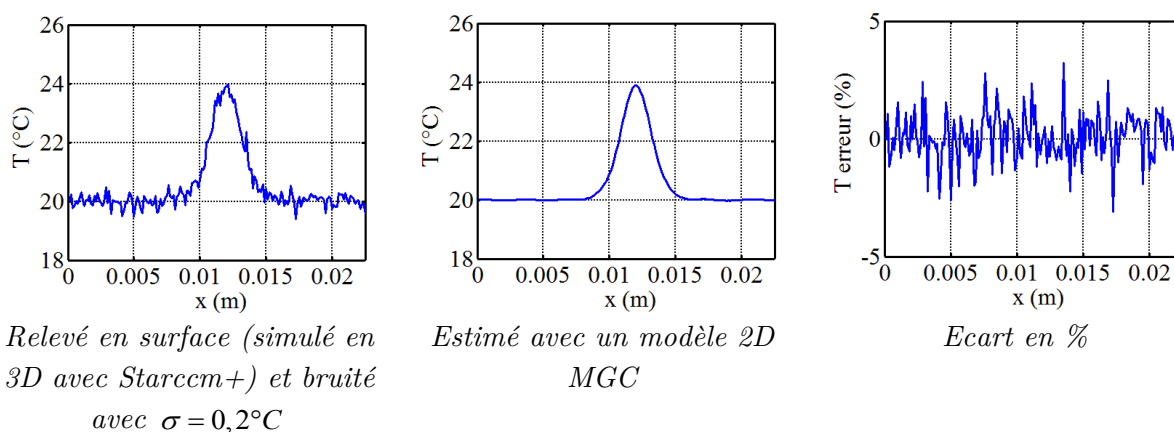


Figure 20 – Profils 1D selon x (à $y=L_y/2$) des champs de température (à $t=7s$)

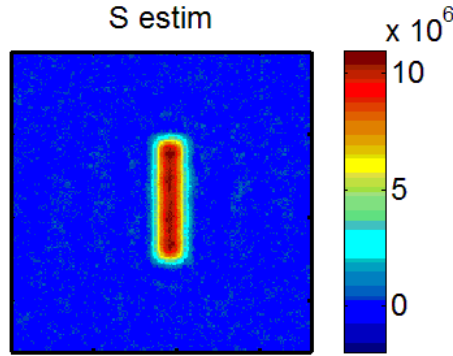


Figure 21 – Estimation spatiale 2D de la source (à $t=7s$), à partir du champ de température relevé sur une des faces de la simulation 3D et bruité

La Figure 22, la Figure 23 et la Figure 24 montrent les estimations spatio-temporelles des termes sources pour différents nombre d'itérations de l'algorithme. En estimant avec un modèle inverse 2D un signal issu d'un transfert de chaleur 3D, on s'expose à un biais d'intensité de la source estimée, cependant, ce biais est quantifiable et dépend du rapport des volumes des termes sources.

Durant la simulation 3D sur Starccm+, on impose une source volumique $G = 1,0 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ (courbe bleue) sur un volume $V_1 = L_{source} \times l_{source} \times e_{source} = 0,009\text{m} \times 0,002\text{m} \times 0,0005\text{m} = 9,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$, ce qui nous permet d'obtenir un flux $\Phi = 0,09 \text{ W}$.

Le modèle 2D estime des termes sources basés sur un volume occupant toute l'épaisseur. $V_2 = L_{source} \times l_{source} \times e_{echantillon} = 0,009\text{m} \times 0,002\text{m} \times 0,0015\text{m} = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$. Ainsi, pour retrouver la puissance volumique exacte, il est nécessaire d'ajuster la valeur de la source estimée par le modèle 2D avec le rapport des volumes V_2/V_1 .

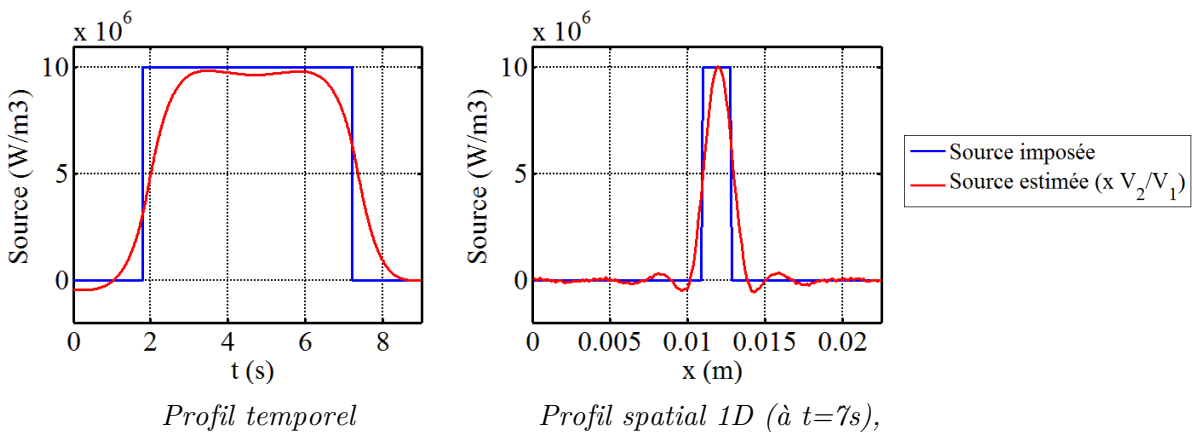


Figure 22 - Profils 1D spatio-temporels de l'estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^\circ\text{C}$, pour 11 itérations (cas A sur la Figure 18)

Durant cette estimation (Figure 22), l'algorithme est arrêté après n'avoir réalisé que 11 itérations. La solution est très stable mais semble bien trop régularisée pour être précise.

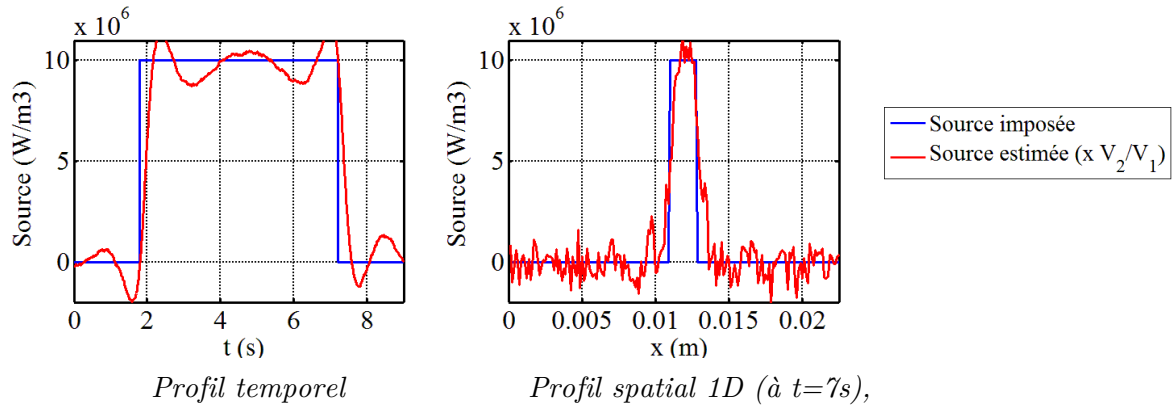


Figure 23 – Profils 1D spatio-temporels de l'estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^\circ\text{C}$, pour 45 itérations (cas C sur la Figure 18)

Si on laisse l'algorithme calculer au-delà du critère seuil (Figure 23), les propriétés statistiques du bruit commencent à être modélisées et une série de perturbations apparaissent comme une accentuation des over-shoot temporels avant et après les fronts, ou encore l'augmentation des perturbations spatiales.

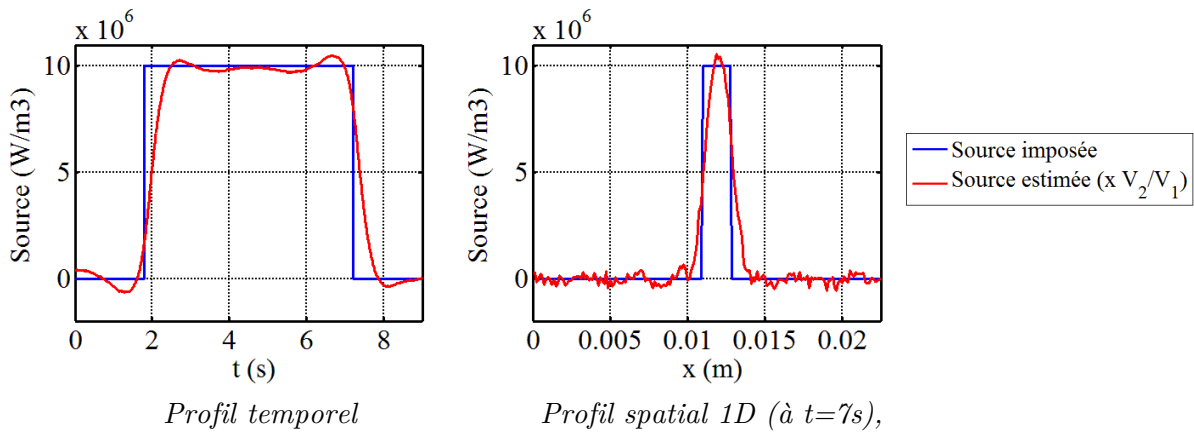


Figure 24 - Profils 1D spatio-temporels de l'estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^\circ\text{C}$, pour 34 itérations (cas B sur la Figure 18)

Lorsque le critère est atteint on obtient une solution optimale (Figure 24) en termes de précision et de régularisation. Il n'y a qu'un léger déphasage de l'ordre de grandeur du temps caractéristique de diffusion selon l'épaisseur.

La profondeur des sources est très difficilement estimable. De plus, dans le cadre de la mise en place d'un outil simple d'utilisation sur le plan expérimental, et au vu des résultats de l'estimation 2D d'un phénomène 3D, nous utiliserons la MGC en 2D dans la suite du manuscrit.

Un comportement 3D est complexe à modéliser sur le plan mécanique, il l'est également sur le plan thermique car le matériau est un composite. En effet, les sources de chaleur peuvent apparaître sous l'effet d'un trop grand nombre de paramètres (dissipation thermo-plastique, friction fibre-matrice, rupture locale de fibre, rupture de la matrice,...).

Quelques tests supplémentaires ont été réalisés sur une estimation 3D tenant compte de la profondeur des sources de chaleur. Ces tests ont nécessité une mesure des deux côtés de l'échantillon concerné. Ils ont surtout révélé le fait qu'un a priori sur la profondeur est nécessaire pour estimer correctement les sources. De plus, la mise en place d'un tel dispositif expérimental en service est très complexe, notamment dans le domaine de l'industrie aéronautique (sur avion en service par exemple).

Cette partie a montré qu'il était possible d'estimer un terme source volumique à partir de mesures du champ de température en surface. Cependant, elle a également montré la nécessité d'avoir un a priori sur la position de la source selon l'épaisseur.

Dans le dernier paragraphe, on propose de réaliser une expérience thermique afin de vérifier la validité des méthodes inverses basées sur une discrétisation 2D.

3. Expérience thermique

Avant d'appliquer nos méthodes d'estimation de sources à des matériaux composites en charge, nous choisissons dans un premier temps de travailler sur une expérience où la source de chaleur que l'on souhaite retrouver avec nos méthodes inverses est une source connue et imposée volontairement, et ceci à des fins de validation expérimentalement des méthodes mises en place ainsi que des différentes hypothèses effectuées.

3.1. Banc expérimental

Nous travaillons avec de minces échantillons de vinyle dans lesquels ont été placés des résistances électriques chauffantes planes et souples (Figure 25).

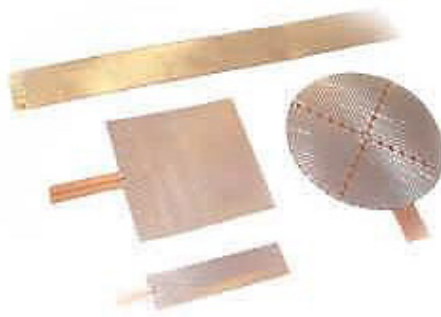


Figure 25 – Résistances électriques planaires souples, par Captec®

Une résistance rectangulaire chauffante est positionnée entre deux plaques de vinyle de manière à obtenir une production de chaleur interne au matériau étudié (Figure 27).

La résistance est collée en « sandwich » entre les deux plaques et le contact est réalisé à l'aide d'une pâte thermique utilisées pour dissiper la chaleur des composants électroniques. On obtient ainsi un matériau d'une épaisseur $e_{éch} = 2 \cdot e_{\text{vinyle}} + e_{\text{résistor+pâte}} \approx 0,0015m$

Les dimensions de la résistance rectangulaire sont : $L_{\text{résistor}} = 0,03m$; $l_{\text{résistor}} = 0,003m$.

La résistance est alimentée par un générateur électrique et l'échantillon est placé face à la caméra thermique dans une enceinte permettant de réduire les mouvements d'air et l'échange radiatif avec les corps chauds de la pièce environnante.

La puissance du générateur est $\Phi = 0,14W$. On fait l'hypothèse qu'une densité volumique de chaleur prend effet selon toute l'épaisseur de l'échantillon, on obtient ainsi l'expression du terme source suivante :

$$S = \frac{\Phi}{V} = \frac{\Phi}{L_{\text{résistor}} \cdot l_{\text{résistor}} \cdot e_{éch}} \approx 1,03 \cdot 10^6 W / m^3 \quad (3.31)$$

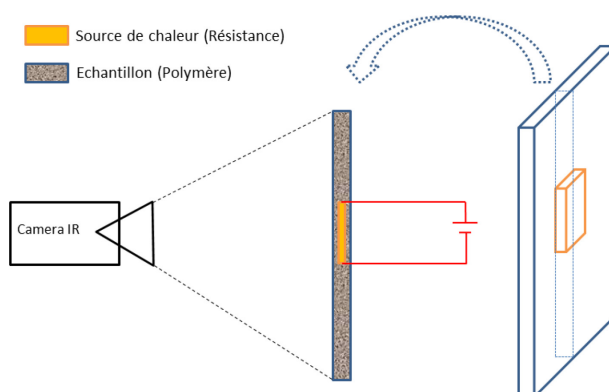


Figure 26 – Schéma de principe du banc expérimental

Un revêtement noir (émissivité $\varepsilon > 0,96$) est déposé sur les plaques de vinyle afin de pouvoir négliger les flux ambiants susceptibles d'être réfléchis (Figure 27) et rendre opaque l'échantillon.

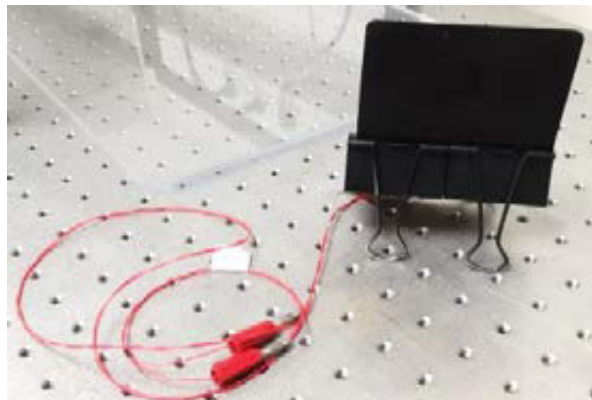


Figure 27 – Photo de l'échantillon préparé composé d'une résistance planaire positionnée entre deux plaques minces de vinyle, le revêtement noir est une mince couche de peinture d'émissivité $\varepsilon > 0,96$

Les propriétés physiques du matériau (vinyle) sont connues :

$$\rho = 1380 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$C_p = 1160 \text{ J.kg}^{-1} . \text{K}^{-1}$$

$$k = 0,355 \text{ W.m}^{-1} . \text{K}^{-1}$$

La source électrique est allumée puis coupée à deux reprises pendant l'expérience, ses profils selon x , y , et t sont présentés sur la Figure 28.

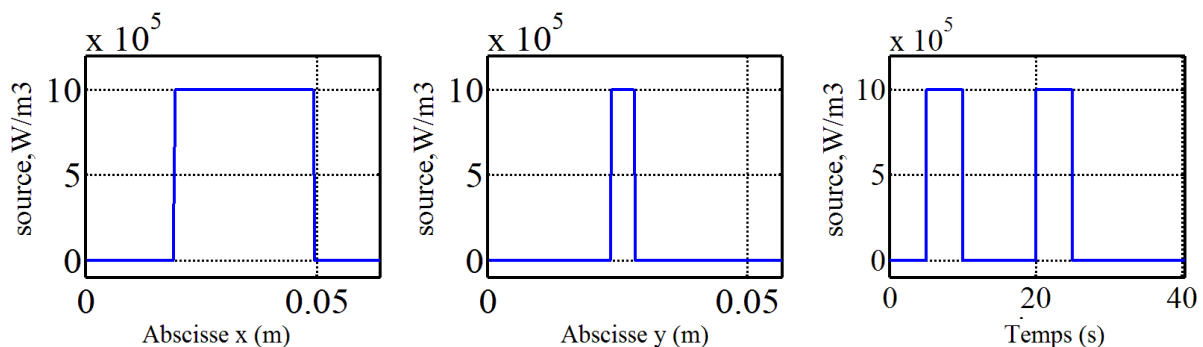


Figure 28 – Profils 1D de la source imposée expérimentalement, source calculée à partir de la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la résistance planaire et du volume associé selon toute l'épaisseur de l'échantillon

L'expérience dure 40s et l'acquisition des images est effectuée à 50Hz, soit un pas de temps $\Delta t = 0,02s$. La caméra est positionnée de manière à avoir un pas spatial de $\Delta x = \Delta y = 3,517.10^{-4}m$. Le thermogramme d'une zone de chauffe (moyennée sur 4 pixels, au milieu de la zone de chauffe) est présenté sur la Figure 29.

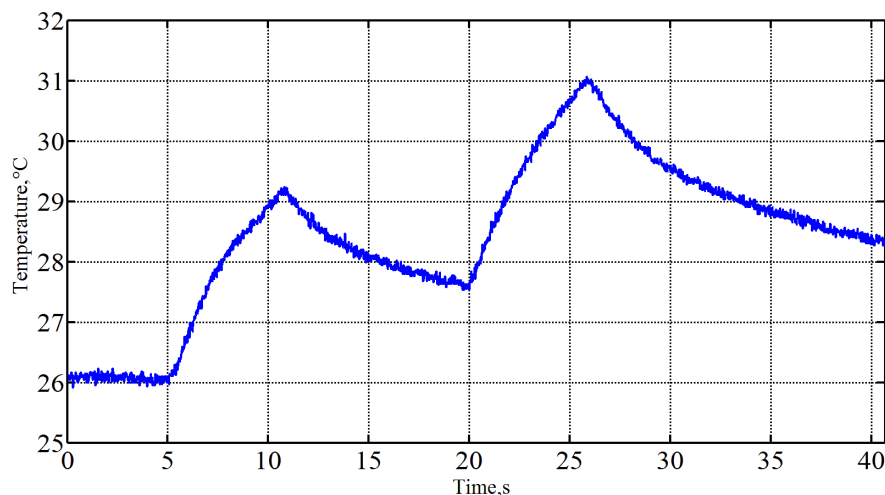


Figure 29 – Thermogramme sur la zone de chauffe moyennée sur 4 pixels au milieu de la zone où la source est présente

On souhaite dans un premier temps filtrer notre signal de manière à rendre nos mesures plus proches d'un signal idéal et atténuer au maximum le bruit de mesure. Ainsi, lorsqu'on applique la méthode de filtrage par SVD directionnelle détaillée dans §1.2.2, on parvient à atténuer fortement le bruit de mesure comme le montre la Figure 30.

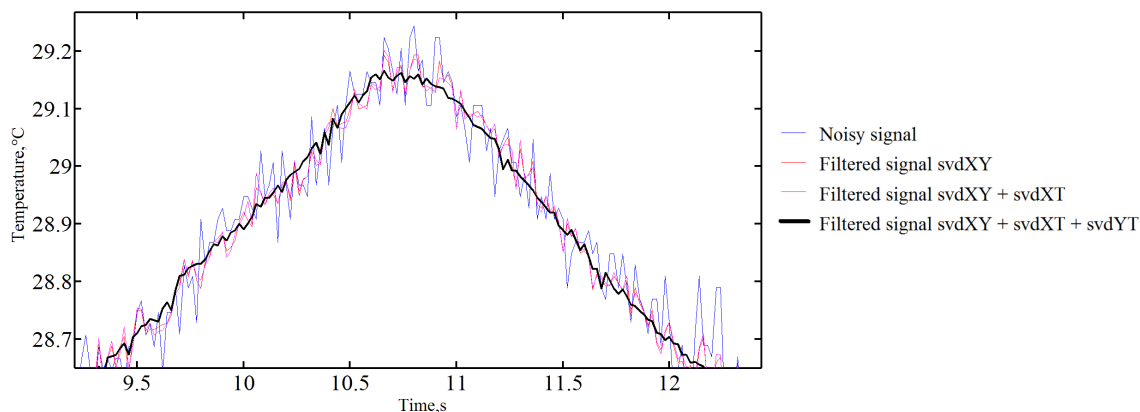


Figure 30 – Zoom sur le premier pic du thermogramme issu de la mesure infrarouge en face avant du matériau, étapes de filtrage avec SVD selon la méthode présentée dans §1.2.2

Le champ de température 2D filtré, à un instant donné, a l'allure suivante (Figure 31):

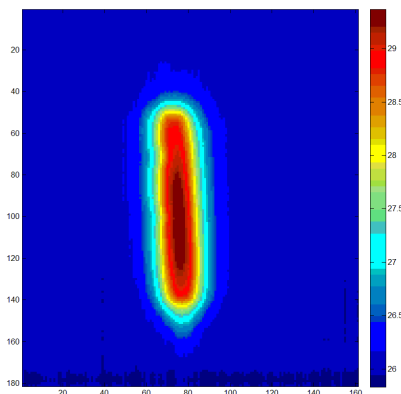


Figure 31 – Champ de température 2D à $t=32s$, après avoir subi le filtrage SVD directionnel décrit dans §1.2.2

On mesure à l'aide d'un thermocouple, une température de l'air ambiant à $T_{ext}=26^{\circ}C$. Les corrélations empiriques permettant de déterminer le coefficient de convection naturelle autour d'une plaque verticale sont détaillées en *annexe 4*. Une approximation des pertes radiatives de l'échantillon est décrite en *annexe 4*.

3.2. Résultats d'estimation

On applique à présent les deux méthodes Directe et MGC afin de comparer une fois de plus leurs performances sur des données expérimentales. On choisit cette fois-ci de tenir compte des pertes convecto-radiatives de la même manière que dans l'équation (3.29). Les résultats d'estimation de sources sont présentés en 2D sur la Figure 32 et les profils 1D sont présentés sur la Figure 33.

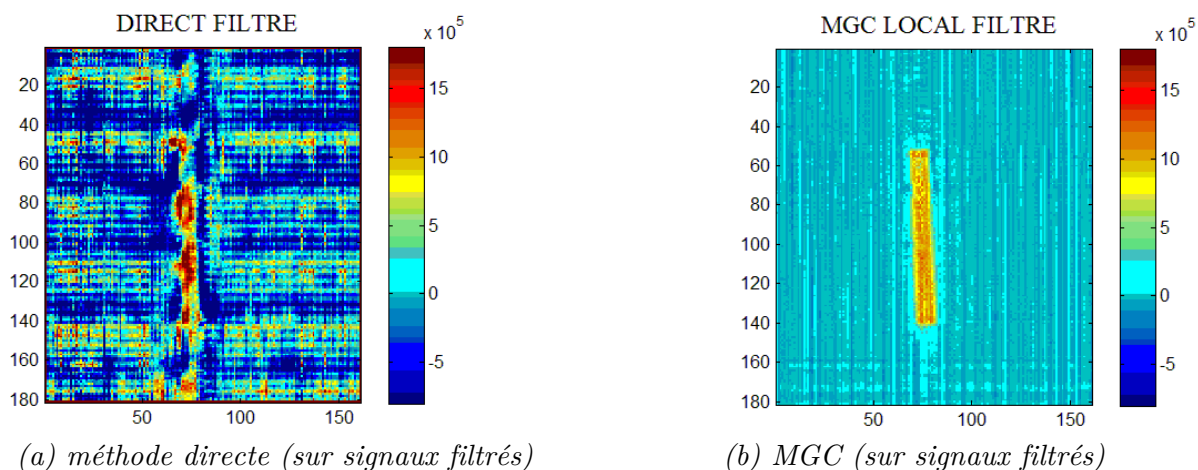


Figure 32 – Estimation de termes source 2D à partir de la mesure du champ de température par thermographie IR sur une des faces de l'échantillon

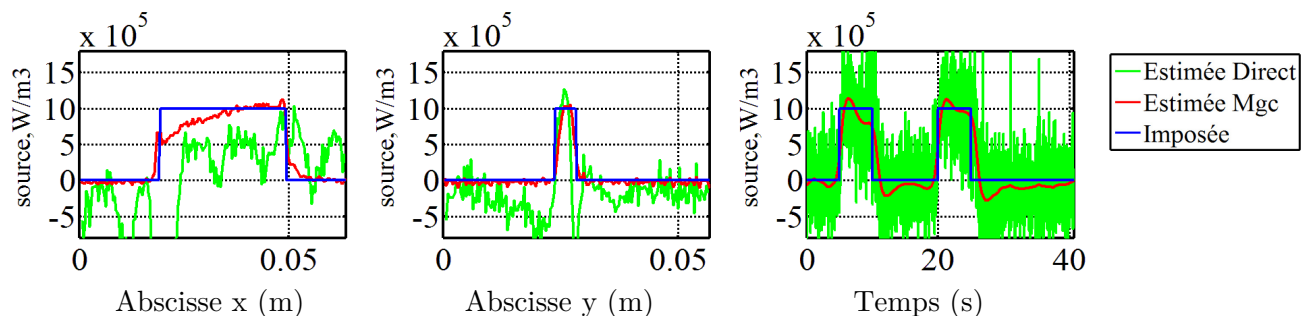


Figure 33 – Profils 1D des estimations Méthode Directe et MGC

L'estimation de l'allure temporelle des termes sources de chaleur est relativement précise, cependant on voit apparaître au niveau des variations brutales, des dépassements supérieurs et inférieurs caractéristiques des méthodes itératives.

Les erreurs d'estimations sont également, en partie, dues à la connaissance des différents éléments composant l'échantillon. Les propriétés physiques de l'échantillon sont considérées connues et proche de celles du vinyle (principal élément de l'échantillon). Or, la pâte de contact entre les deux plaques de vinyle est en suffisamment grande quantité pour modifier la disposition volumique des propriétés physique de l'échantillon.

Les résultats restent néanmoins encourageant et assez similaires à ceux obtenus avec des données numériques bruitées. La valeur de la source estimée est estimée de manière très efficace. La modélisation 2D utilisée par l'algorithme fonctionne très bien, ce qui nous laisse penser que notre hypothèse de corps mince est valable sur cet échantillon et que l'hypothèse considérant la source comme prenant effet sur la totalité de l'épaisseur est également valable. La méthode « directe » quant à elle se révèle encore une fois très instable (même après avoir filtré le signal).

3.3. Evaluation des pertes convecto-radiatives

Les sources volumiques produites sont de l'ordre de $10^6 W/m^3$, lorsque nous ramenons cette valeur à une puissance surfacique (en normalisant par l'épaisseur), nous obtenons une valeur de l'ordre de $2.10^3 W/m^2$. Une approximation linéaire des pertes convecto-radiative est représentée sur la Figure 34. Les calculs sont détaillés en annexe 4.

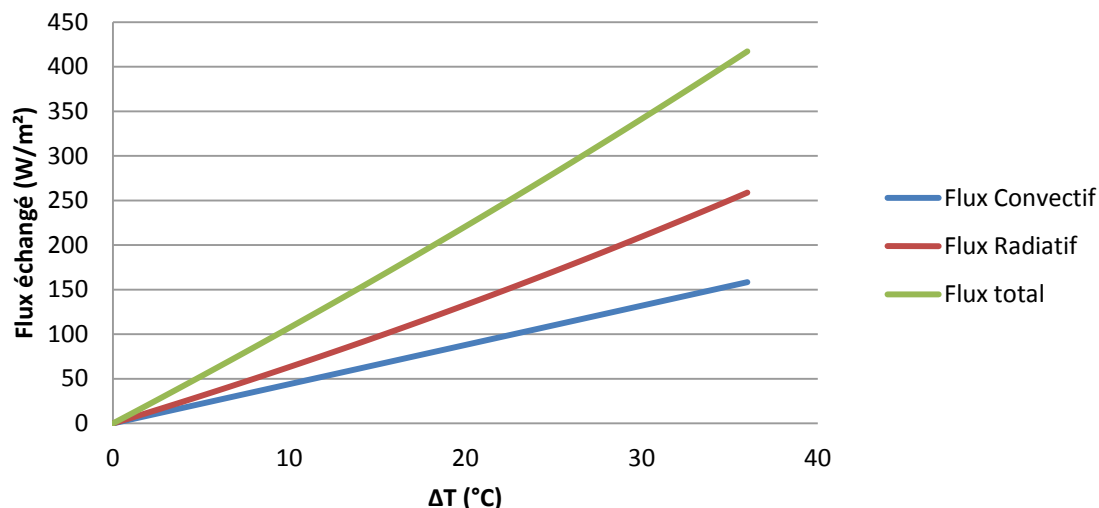


Figure 34 – Approximation linéaire sur les flux perdus par la plaque en fonction de la température de plaque

En admettant que des pertes inférieures à 5% de la valeur de la source volumique puissent être négligées, on obtient une valeur seuil s'élevant à 100W/m².

Dans les conditions de notre expérience, l'élévation en température maximale s'élève à 5°C, il est ainsi possible de négliger ces pertes.

Dans le cadre d'essais sur des composites à matrice thermodurcissable de type Epoxy, les échauffements peuvent atteindre 30 à 40 °C, il est donc nécessaire de prendre en compte les pertes dans les codes d'estimations de termes sources.

Dans le chapitre 5, nous travaillons avec des composites à matrice thermoplastique PEEK. A la rupture, ces matériaux subissent des échauffements de l'ordre de 5 à 10°C. On pourra dans ces cas-là s'affranchir encore une fois dans nos modèles, du calcul des pertes convecto-radiatives.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu comparer deux méthodes d'estimation de sources de chaleur : la méthode directe et la méthode du gradient conjugué.

Il ressort que, dans certains cas de figures simples (linéaires, cartésiens,...) et dans une certaine gamme de diffusivités thermiques, la méthode directe peut donner des résultats intéressants. Malheureusement, dans la plupart des cas, ces résultats peuvent surtout donner une simple tendance, ou éventuellement servir de pré-estimation pour initialiser une méthode itérative.

La méthode du gradient conjugué n'est pas utilisée ici pour résoudre des équations sous leur forme non-linéaire, mais elle prouve cependant qu'elle est bien plus robuste et stable que la méthode directe. De plus, les optimisations en termes de calcul et de précision en font une méthode tout à fait compétitive sur le plan de la durée de calcul. Elle possède surtout l'énorme avantage de pouvoir être implémentée sur des cas beaucoup plus complexes (géométrie, linéarité, grand nombre de paramètres à estimer, etc.).

Enfin, ce chapitre a montré qu'un modèle 2D peut suffire à la modélisation d'un domaine mince.

Les estimations de termes sources appliquées aux matériaux composites seront réalisées uniquement avec la méthode des gradients conjugués, afin de conserver une résolution temporelle élevée.

Les essais réalisés dans le chapitre 5 sont des expériences en traction uniquement. Sur le type d'échantillon étudié, ce type d'essai n'induit aucun délaminage notable, l'endommagement et les fissures ont donc lieu selon toute l'épaisseur du matériau, ce qui nous permet même de faire l'hypothèse 2D dans une plus large gamme d'épaisseurs et diffusivités. Les sources prennent effets selon la quasi-totalité de l'épaisseur de matériau.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter encore une fois des cas numériques de références afin de valider des méthodes d'estimations de diffusivités thermiques directionnelles. Ces estimations ont pour objectif, dans le chapitre 5, d'être appliquées à de vrais matériaux composites, pour tenter de déceler leur niveau d'endommagement.

Nomenclature

A	Matrice	g	Source ($W.m^{-3}$)
a	Diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)	N_x, N_y, N_t	Nombre de points selon x, y, t
Fo_x	Nombre de Fourier selon la direction x	G	Sources de chaleur (homogène à une température)
$T_{calculée}$	Température calculée par résolution du problème direct	V_1, V_2	Volume des sources selon la configuration (2D ou 3D)
t	Vecteur temps (s)	k_x	Conductivité selon x
T	Température (K ou °C)	x, y, z	Coordonnées spatiales
t_{final}	Temps final	J	Fonction coût (ou critère)
$D_{descente}$	Direction de descente	Cp	Capacité calorifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
$P_{descente}$	Profondeur de descente	Lx, Ly	Dimensions du domaine 2D
k	Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	$T_{mesurée}$	Température mesurée
$T(x, y, t)$	Champ de température 2D au cours du temps	$T_i(x, y)$	Matrice 2D du champ de température, extrait de $T(x, y, t)$ à un instant t donné

Symboles Grecs

β	Coefficient de conjugaison	∇	Gradient
Δt	Pas de temps (s)	∇^2	Laplacien
ε	Erreur, Ecart	Ψ	Multiplicateur de Lagrange
∇J	Gradient du critère	σ	Ecart-type
ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)		

Abréviations

SVD	Décomposition en valeurs singulières
It	Itération
MGC	Méthode du gradient conjugué

Indices

0	Condition à $t=0$
∞	Ambiance (extérieures)

Exposants

T	Transposée d'une matrice
-1	Inverse d'une matrice

Liste des figures

Figure 1 – Schéma du domaine 2D avec terme source et conditions aux limites adiabatiques	63
Figure 2 - Profils 1D des sources imposées au domaine 2D selon x, y, à t=25s et profil 1D selon t, à x=1,5cm et y=1,2cm.....	64
Figure 3 – Evolution du champ de température simulé (avec Starccm+), la résolution est réduite ($\Delta x = \Delta y = 2,5.10^{-4} m$), et bruité ($\sigma = \pm 0,2^{\circ}C$ avec Matlab), stimulé par une source de chaleur de $3.10^6 W/m^3$	65
Figure 4 – Profils 1D (selon x, y, temps) des écarts entre le signal non-bruité (simulé avec Starccm+) et les signaux bruité ($\sigma = 0,2K$) puis filtré par SVD.....	68
Figure 5 – Profils 1D (x, y et t) de l'estimation des termes sources avec la méthode directe (sur données filtrées avec SVD, en conservant 17 valeurs singulières sur les champs $T_x(x, y)$, 12 valeurs singulières sur les champs $T_x(y, t)$ et 12 valeurs singulières sur les champs $T_y(x, t)$)	69
Figure 6 - Profils 1D (x, y et t) de l'estimation des termes sources avec la méthode directe (sur données filtrées avec SVD), ($\Delta x = \Delta y = 2,5.10^{-4} m$; $\Delta t = 0,033s$), avec post-moyenne temporelle glissante sur 20 pas de temps.....	69
Figure 7 – Ecart-type et moyenne du résidu entre le signal mesuré (températures) et le signal estimé, pour chaque combinaison d'améliorations de l'algorithme MGC (voir les cas 1 à 4) .	74
Figure 8 - Ecart-type et moyenne du résidu entre les sources imposées et les sources estimées, pour différents algorithmes MGC (voir les cas 1 à 4).....	75
Figure 9 – Profils 1D selon x, y, t de l'estimation des sources avec la méthode directe, à partir du signal 2D non bruité simulé avec Starccm+.....	77
Figure 10 – Profil 1D selon x, y, t de l'estimation des sources avec MGC, à partir du signal 2D non-bruité simulé avec Starccm+	77
Figure 11 - Champs de température 2D (t=15s).....	78
Figure 12 - Profil 1D des températures selon x	78
Figure 13 - Profils 1D selon x, y, t de l'estimation des sources avec la méthode directe, à partir du signal 2D bruité simulé avec Starccm+.....	79
Figure 14 - Profils 1D selon x, y, t de l'estimation des sources avec MGC, à partir du signal 2D bruité simulé avec Starccm+	79
Figure 15 – Position de la source de chaleur interne dans le cadre d'une simulation du transfert de chaleur en 3D avec Starccm+	82

Figure 16 – Profil temporel de la source de chaleur interne dans le cadre d’une simulation du transfert en 3D avec Starccm+	82
Figure 17 – Evolution de la température au cœur de la source (en rouge) et en surface (en vert), au cours du temps	83
Figure 18 – Evolution du résidu de la fonction coût en fonction du nombre d’itérations de l’algorithme MGC, les données d’entrées sont relevées à partir de la température simulée (Starccm+) sur une des faces du domaine 3D	84
Figure 19 – Champ de température (à t=7s)	84
Figure 20 – Profils 1D selon x (à y=Ly/2) des champs de température (à t=7s)	84
Figure 21 – Estimation spatiale 2D de la source (à t=7s), à partir du champ de température relevé sur une des faces de la simulation 3D et bruité.....	85
Figure 22 - Profils 1D spatio-temporels de l’estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^{\circ}C$, pour 11 itérations (cas A sur la Figure 18).....	85
Figure 23 – Profils 1D spatio-temporels de l’estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^{\circ}C$, pour 45 itérations (cas C sur la Figure 18).....	86
Figure 24 - Profils 1D spatio-temporels de l’estimation de source, à partir du signal relevé sur une des faces du domaine de simulation starccm+, avec un bruit blanc gaussien $\sigma = \pm 0,2^{\circ}C$, pour 34 itérations (cas B sur la Figure 18).....	86
Figure 25 – Résistances électriques planaires souples, par Captec®.....	88
Figure 26 – Schéma de principe du banc expérimental	88
Figure 27 – Photo de l’échantillon préparé composé d’une résistance planaire positionnée entre deux plaques minces de vinyle, le revêtement noir est une mince couche de peinture d’émissivité $\varepsilon > 0,96$	89
Figure 28 – Profils 1D de la source imposée expérimentalement, source calculée à partir de la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la résistance planaire et du volume associé selon toute l’épaisseur de l’échantillon.....	89
Figure 29 – Thermogramme sur la zone de chauffe moyennée sur 4 pixels au milieu de la zone où la source est présente.....	90
Figure 30 – Zoom sur le premier pic du thermogramme issu de la mesure infrarouge en face avant du matériau, étapes de filtrage avec SVD selon la méthode présentée dans §1.2.2.....	90
Figure 31 – Champ de température 2D à t=32s, après avoir subi le filtrage SVD directionnel décrit dans §1.2.2	91
Figure 32 – Estimation de termes source 2D à partir de la mesure du champ de température par thermographie IR sur une des faces de l’échantillon	91

Figure 33 – Profils 1D des estimations Méthode Directe et MGC.....	92
Figure 34 – Approximation linéaire sur les flux perdus par la plaque en fonction de la température de plaque.....	93

Références bibliographiques

- J. V. BECK, B. BLACKWELL, C. R. ST. CLAIR, JR, 1985, *Inverse heat conduction, Ill-posed Problems*, Wiley-Interscience Publication
- J. V. BECK, 1998, Parameter estimation concepts and modeling : flash diffusivity application, *Inverse Problem In Engineering: Theory and Practice*, ASME.
- A.CHRYSOCHOOS, S. ANDRE, ET H.LOUCHE, 2000, An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation, *International journal of engineering science* 38, no 16 (2000): 1759–1788.
- V. DELOBELLE, D. FAVIER, H. LOUCHE, 2011, Validation expérimentale d'estimations de sources de chaleur : cas uniforme, *CFM2011, Besançon*
- J. GASPAR, 2013, Fluxmétrie et caractérisation thermiques instationnaires des dépôts des composants face au plasma du Tokamak JET par techniques inverses, PhD Thesis, Université d'Aix-Marseille
- J.J. GERBRANDS, 1981, On the relationships between SVD, KLT and PCA, *Pattern recognition* 14, no 1-6 (1981): 375–381.
- INCROPERA & DEWITT, 1996, *Fundamentals of heat and mass transfer*, Wiley
- J. KAIPIO & E. SOMERSALO, 2007, Statistical inverse problems : Discretization, model reduction and inverse crimes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol 198, 493-504
- H. LOUCHE, 2009, Etudes de certains phénomènes de localisation à partir de champs thermomécaniques, HDR, Université de Savoie
- S. MECHOUD, 2013, Estimation de la diffusion thermique et du terme source du modèle de transport de la chaleur dans les plasmas de tokamaks, PhD Thesis, Université de Grenoble
- M.N. OZISIK, H.R.B. ORLANDE, 2000, Inverse heat transfer : Fundamentals and applications, *Taylor & Francis*
- C. PRADERE, J.P. CAUMES, E. PALOMO ET J. C. BATSALE, 2014, Use of SVD decomposition to increase signal and noise ratio on THz imaging measurements, *QIRT Conf. Open-Archives*, 7

F.A. RODRIGUES, H.R.B ORLANDE, ET G.S DULIKRAVICH, 2004, Simultaneous Estimation of Spatially Dependent Diffusion Coefficient and Source Term in a Nonlinear 1D Diffusion Problem, *Mathematics and Computers in Simulation* 66, no 4-5 (juillet 2004): 409-24

YANG, CHING-YU, 1998, Solving the two-dimensional inverse heat source problem through the linear least squares error method, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, no 2 393–398.

YANG, CHING-YU, 1999, Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems, *Applied Mathematical Modelling* 23, no 6 469–478.

YANG, CHING-YU, 2006, The Determination of Two Moving Heat Sources in Two-Dimensional Inverse Heat Problem, *Applied Mathematical Modelling* 30, no 3 278-92

YANG, CHING-YU, 2009, Direct and Inverse Solutions of the Two-Dimensional Hyperbolic Heat Conduction Problems, *Applied Mathematical Modelling* 33, no 6 (juin 2009): 2907-18

YANG, YU-CHING, ET WIN-JIN CHANG, 2006, Simultaneous Inverse Estimation for Boundary Heat and Moisture Fluxes of a Double-Layer Annular Cylinder with Interface Resistance, *Applied Mathematics and Computation* 176, no 2

CHAPITRE 4

ESTIMATION DE PARAMETRES

Sommaire

1. Généralités sur les méthodes d'estimation.....	103
1.1. Excitation aléatoire	104
1.2. Excitation périodique	104
1.3. Excitation impulsionnelle.....	105
2. Modélisations thermiques	105
2.1. Modélisation 1D avec les quadripôles thermiques	106
2.1.1. Description du modèle	106
2.1.2. Validation numérique du modèle	109
2.2. Modélisation orthotrope 3D avec quadripôles thermiques.....	111
2.2.1. Description de la méthode	112
2.2.2. Caractérisation de la diffusivité longitudinale a_z	115
2.2.3. Caractérisation de diffusion transverse a_x et a_y	119
2.3. Validation numérique des méthodes d'estimation.....	121
2.3.1. Fabrication de données numériques bruitées.....	121
2.3.2. Analyse spectrale du signal en face arrière	122
2.3.3. Estimation de la diffusivité longitudinale a_z (selon l'épaisseur).....	122
2.3.4. Estimation de la diffusivité effective (direction transverse).....	125
Nomenclature	130
Liste des figures.....	131
Références Bibliographiques	133

Dans le chapitre précédent, nous avons pu comparer deux méthodes d'estimation de sources de chaleurs 2D. Le but est d'être capable de retrouver spatialement et temporellement les sources de chaleur générées par une pièce mécanique sollicitée : sur un hélicoptère, ou plus académiquement lors d'un essai mécanique contrôlé de type quasi-statique ou fatigue. L'objectif premier est de comprendre les mécanismes d'endommagement en couplant le comportement thermique et mécanique du matériau mais aussi de lier le niveau d'énergie de la source avec la profondeur des défauts liés à ces échauffements.

De nombreux composites sont pourvus de fibres dans de multiples directions, celles-ci rendent le matériau beaucoup moins sujet à des macro-fissures ; l'endommagement subi est ainsi qualifié de « diffus ». Cet endommagement diffus est contrôlable et mesurable lors d'un essai mécanique, la variation de module d'élasticité ainsi que la raideur permettent de déterminer ce niveau d'endommagement [Boulebbad-Gomez et al, 2016]. Cependant ce type d'expérimentation reste destructif, et il serait intéressant de mettre en place une méthode non-destructive capable de révéler le niveau d'endommagement de matériaux ayant subi différents chargements et contraintes dans leur mode de fonctionnement habituel.

Dans ce quatrième chapitre, nous présentons plusieurs méthodes (monodimensionnelles et tridimensionnelles) d'estimation de diffusivités thermiques car l'estimation de ce paramètre « post-utilisation » peut être une solution envisageable pour quantifier le niveau ainsi que le type d'endommagement.

1. Généralités sur les méthodes d'estimation

L'estimation des propriétés thermiques des matériaux consiste généralement à solliciter thermiquement l'échantillon et à observer sa réponse en température en fonction du temps et de l'espace. La minimisation de l'écart entre les mesures et une modélisation thermique de l'échantillon permet d'accéder aux paramètres recherchés. Plusieurs techniques d'excitation sont envisageables pour réaliser les estimations selon le paramètre recherché. Ces paramètres (ou groupement de paramètres) peuvent être :

- Des diffusivités thermiques, des temps caractéristiques de diffusion, ...
- Des conductivités thermiques, des capacités calorifiques, des masses volumiques,...
- Des coefficients convectifs ou radiatifs,...
- Des paramètres géométriques,...

Il existe deux grandes familles de techniques de caractérisation thermique : les techniques en régime stationnaire et les techniques en régime transitoire.

Pour connaître la conductivité thermique d'un échantillon, l'utilisation d'une méthode en régime stationnaire est suffisante : l'échantillon à caractériser est soumis à un flux constant. Lorsque le régime stationnaire est obtenu, le gradient de température dans l'échantillon est mesuré. Cette méthode est efficace pour caractériser des conductivités thermiques, mais pour estimer des paramètres dépendants du temps, des techniques en régime transitoire sont nécessaires.

Dans les techniques en régime transitoires, on observe un signal dans sa phase transitoire. On peut distinguer trois excitations communément utilisées : l'excitation aléatoire, l'excitation périodique et l'excitation impulsionnelle.

1.1. Excitation aléatoire

Dans ce cas, l'excitation est aléatoire et possède un spectre temporel proche d'un bruit blanc. La réponse thermique de l'échantillon permet de construire un modèle de comportement paramétrique de l'expérience [S. Brahim et al, 2007, 2008] [J-L. Bodnar et al, 2010] et finalement à calculer la réponse de l'échantillon. Cette méthode est intéressante lorsque l'on souhaite modérer la puissance instantanée reçue par l'échantillon.

1.2. Excitation périodique

Dans ce cas l'échantillon est sollicité par une source d'énergie périodique dont on connaît la fréquence. On mesure alors la réponse du matériau à cette excitation et plus particulièrement le déphasage entre la réponse et l'excitation et le module. Ces quantités peuvent être mesurées au travers de différents traceurs physiques [Gervaise 1999] [Rigollet 2000] [Museux, Perez, Serra, 2008] :

- Thermomécanique élastique, on mesure les déformations mécaniques induites par le chauffage périodique. Ces déformations peuvent être mesurées de différentes façons : microphone, détecteur piézoélectrique, interféromètre polarisé, corrélation d'image,...
- Effet mirage, mesure des variations de l'indice de réfraction de l'air dues aux échanges thermiques entre la surface chauffée et l'air situé au-dessus de cette surface.
- Radiométrie IR, mesure du flux infrarouge émis par la surface chauffée.
- Photo-réflexion modulée, mesure de la variation du coefficient de réflexion de la surface chauffée, fonction de sa température.

1.3. Excitation impulsionnelle

La méthode « Flash » consiste à exciter thermiquement la surface considérée avec une fonction de Dirac de puissance et à observer l'évolution en température de la surface chauffée (face avant) ou de la face opposée (face arrière) avec un capteur adapté (détecteur, caméra,...). Cette méthode a été initialement développée par [Parker, 1961] qui caractérisait des matériaux de quelques millimètres d'épaisseur avec une excitation de l'ordre de la milliseconde, la mesure était effectuée en face arrière. La diffusivité a était identifiée au temps de demi-montée du matériau.

L'apport de nouvelles technologies permettant une acquisition plus rapide et une excitation très courte ont ensuite permis de caractériser des matériaux plus fins et plus diffusifs. L'impulsion peut être produite par des lampes flash ou par un laser de puissance, le choix du système de chauffage dépend en général du matériau que l'on souhaite caractériser. En effet, pour des matériaux très conducteurs comme les métaux ou le carbone, le refroidissement est très rapide et il convient d'avoir une excitation de durée négligeable par rapport au temps caractéristique de diffusion du matériau étudié. De nombreuses publications traitent cette méthode parmi lesquelles : [Faugeroux 2003] [Krapez 2004] [Rigollet 1999-2000] [Souhar, 2008].

Le thermogramme peut également être mesuré de différentes manières : avec des thermocouples lorsque c'est possible (mais cela requiert beaucoup de minutie et précision), ou avec des détecteurs infrarouges qui doivent nécessairement avoir un temps de réponse court pour acquérir précisément le début du refroidissement. La géométrie, le temps caractéristique de diffusion dans le matériau, et les hypothèses faites aux limites sont les contraintes qui fixent les réglages, la méthode et la localisation de la mesure. La minimisation de l'écart entre le signal observé et un modèle thermique approprié conduit à l'estimation des propriétés thermiques du matériau.

2. Modélisations thermiques

Nous allons nous centrer sur deux types de sollicitation :

- L'une « impulsionnelle et homogène » pour pouvoir estimer la diffusivité thermique en 1D selon l'épaisseur du matériau.
- L'autre « localisée » pour pouvoir estimer en 3D les diffusivités directionnelles d'une zone choisie au préalable.

Le but de la modélisation est de pouvoir lier l'observable aux paramètres que l'on cherche à estimer. L'estimation de paramètres est réalisée en minimisant la fonction coût entre l'observable (température mesurée) avec la sortie du modèle.

2.1. Modélisation 1D avec les quadripôles thermiques

2.1.1. Description du modèle

Dans un premier temps, on s'intéresse à la mise en place d'une méthode d'estimation de la diffusivité selon l'épaisseur du matériau. On choisit donc de caractériser les propriétés thermiques d'un échantillon en le stimulant sur une de ses faces avec une impulsion de flux $Q(t)$. On calcule la température en face arrière avec le formalisme des quadripôles thermiques. Le modèle est 1D et linéaire (les propriétés thermiques ne varient pas en fonction de la température). On suppose un échange convecto-radiatif linéaire et constant en face avant et face arrière du matériau avec la température ambiante. Celui-ci est un coefficient d'échange global (convecto-radiatif) supposé identique sur les 2 faces (Figure 1).

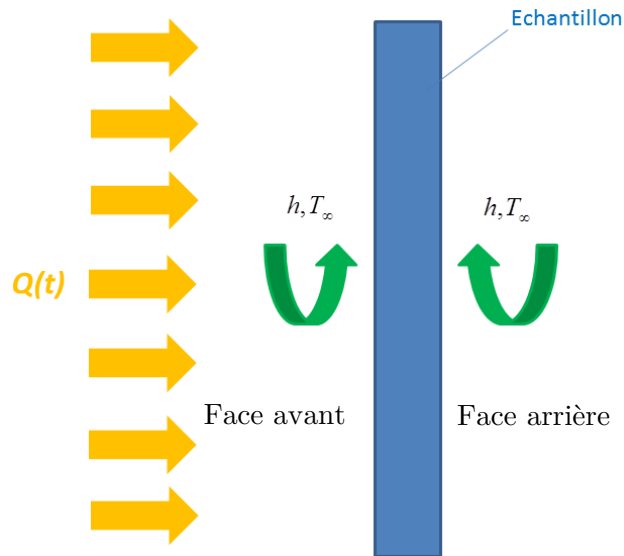


Figure 1 – Schématisation de la modélisation quadripôles 1D avec échange convecto-radiatif h sur les faces avant et arrière

Pour résoudre l'équation de la chaleur en régime transitoire, il est courant d'utiliser soit des séparations de variables, soit d'utiliser la transformée de Laplace. Lorsque l'on applique la transformée de Laplace relativement à la variable temporelle t , on a :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \cdot f(t) \cdot dt \quad (4.1)$$

L'équation aux dérivées partielles (équation de diffusion de la chaleur) se simplifie et il ne reste que la (ou les) variables spatiales.

On peut exprimer dans l'espace de Laplace les échauffements par rapport à la température ambiante et les flux comme dans [Maillet, André, Batsale, Degiovanni, Moyne, 2000], un schéma du formalisme des quadripôles est présenté sur la Figure 2.

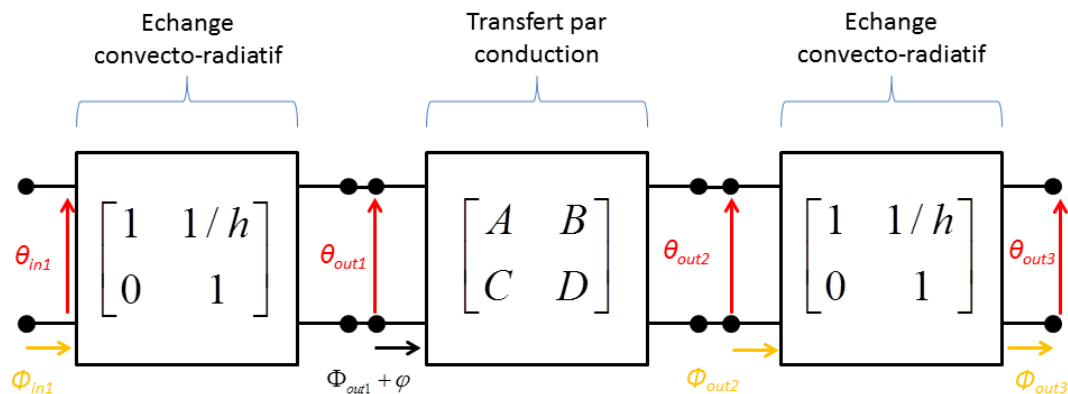


Figure 2 – Schéma de la modélisation quadripôles d'un matériau monocouche avec échange convectivo-radiatif sur ses faces avant et arrière

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{in1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{out1} \\ \phi_{out1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{out1} \\ \phi_{out1} + \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{out2} \\ \phi_{out2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{out2} \\ \phi_{out2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{out3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$\theta(p)$ - La transformée de Laplace de l'échauffement

$\phi(p)$ - La transformée de Laplace de la densité de flux

in est l'indice correspondant à l'amont du système thermique

out est l'indice correspondant à l'aval du système thermique

avec $A = \cosh(\chi e)$; $B = \frac{1}{k_z \cdot \chi} \cdot \sinh(\chi e)$; $C = k_z \cdot \chi \cdot \sinh(\chi e)$, et $\chi = \sqrt{\frac{p}{a_z}}$

avec $\varphi(p)$ Transformée de Laplace de $Q(t)$

Expérimentalement, une caméra IR est placée en face arrière pour mesurer la température. Cette température est associée à θ_{out2} . Le but est donc de trouver une expression, à l'aide des quadripôles, de θ_{out2} .

On en déduit donc :

$$\phi_{out1} = -h \cdot \theta_{out1} \quad (4.5)$$

$$\theta_{out1} = A.\theta_{out2} + B.\phi_{out2} \quad (4.6)$$

$$\phi_{out1} + \varphi = C.\theta_{out2} + A.\phi_{out2} \quad (4.7)$$

$$\phi_{out2} = h.\theta_{out2} \quad (4.8)$$

En remplaçant et en réduisant, on trouve :

$$\theta_{out2} = \frac{\varphi}{2.A.h + B.h^2 + C} \quad (4.9)$$

Avec e, k, a les épaisseurs, la conductivité et la diffusivité thermique effective du matériau.

Afin de nous affranchir de la mesure de l'épaisseur du matériau (source d'erreurs supplémentaires), et par soucis de corrélation de certains paramètres entre eux, on effectue

les groupements de paramètres suivants : $\eta_1 = \frac{a}{e^2}$; $\eta_2 = \frac{h.e}{k}$; $\eta_3 = \frac{1}{\rho.C_p.e}$; et $\chi_{new} = \sqrt{\frac{p}{\eta_1}}$, on

obtient l'expression suivante :

$$\theta_{out2} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\varphi}{2.\eta_2 \cdot \cosh(\chi_{new}) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_{new}} + \chi_{new} \right) \cdot \sinh(\chi_{new})} \quad (4.10)$$

Une fois la résolution effectuée, on utilise une transformée Laplace inverse pour revenir dans l'espace temporel, on utilise celle décrite dans [De Hoog, 1982].

Remarque : Il est courant de rencontrer des problèmes dans les calculs numériques lorsque les temps diffusifs sont trop faibles. Ainsi on utilise les relations d'Euler :

$$\cosh(\chi e) = \frac{\exp(\chi e) + \exp(-\chi e)}{2} ; \sinh(\chi e) = \frac{\exp(\chi e) - \exp(-\chi e)}{2} \quad (4.11)$$

En effet, lorsque e ou p sont trop grands, le calcul numérique de ces fonctions sort de la précision machine. Ce genre de problème est très bien illustré par le calcul numérique suivant : $10^{17} - 10^{17} + 1$ donne 1, alors que $10^{17} + 1 - 10^{17}$ donne 0.

Même en jouant sur le nombre de bits de codage (64 ou 32), la limite peut rapidement être atteinte. En factorisant, on obtient :

$$\cosh(\chi e) = \exp(\chi e) \cdot \left(\frac{1 + \exp(-2\chi e)}{2} \right) ; \sinh(\chi e) = \exp(\chi e) \cdot \left(\frac{1 - \exp(-2\chi e)}{2} \right) \quad (4.12)$$

On obtient ainsi l'expression beaucoup plus stable :

$$\theta_{out2} = \frac{2.\varphi.\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\exp(-\chi_{new})}{2.\eta_2 \cdot (1 + \exp(-\chi_{new})) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_{new}} + \chi_{new} \right) \cdot (1 - \exp(-\chi_{new}))} \quad (4.13)$$

Le but est donc, via les relations d'Euler, de ne faire apparaître aucun terme sujet à sortir de la précision machine. Ces problèmes arrivent généralement aux temps très courts car, lorsque $t \rightarrow 0$, la variable de Laplace p devient très grande. L'expression (4.13) est plus stable car elle ne fait apparaître que des $\exp(-\chi_{new}) = \exp(-\sqrt{p/\eta_1})$.

2.1.2. Validation numérique du modèle

2.1.2.1. Simulation de données numériques 1D bruitées

On simule la diffusion monodimensionnelle de la chaleur au sein d'un matériau mince de dimensions : $L = 0,05m$; $l = 0,05m$; $e = 0.002m$. Le logiciel utilisé est Starccm+. On choisit de mettre en place un maillage orthogonal raffiné selon la direction z (épaisseur) avec 15 mailles. Les propriétés physiques du matériau isotrope sont :

$$\rho = 1623 \text{ kg.m}^{-3} ; C_p = 987 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} ; k = 5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \rightarrow a_z = 3,12.10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Le temps caractéristique de diffusion est de $1,28s$. On souhaite imposer une impulsion de flux $Q(t)$ sur la face avant. On pose $Q = 100 \text{ kW.m}^{-2}$ et ce flux est imposé pendant une durée de $0,003s$. Cette durée est suffisamment petite pour être considérée comme une impulsion face au temps caractéristique de diffusion. On réalise une simulation de la diffusion de la chaleur jusqu'à une durée de $1,5s$ (à la fréquence de $1kHz$). La température initiale est de 20°C et les propriétés sont considérées constantes. L'évolution de la température en face arrière est présentée sur la Figure 3. La simulation numérique Starccm+ ne prend en compte aucun échange convecto-radiatif, ainsi lorsque le palier de la température maximale est atteinte, la température reste stable.

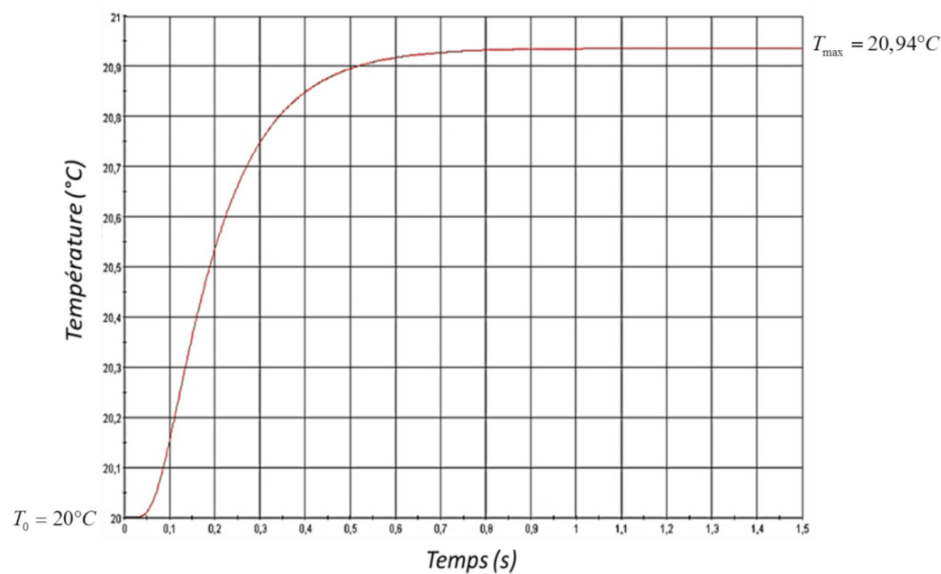


Figure 3 – Evolution temporelle du champ de température moyenné spatialement en face arrière du matériau (Thermogramme issu d'une simulation numérique Starccm+, sans pertes convecto-radiatives)

2.1.2.2. Estimation avec Quadripôles 1D et Gauss-Newton

L'objectif est de réaliser une minimisation de l'écart-quadratique entre les données simulées avec Starccm+ et la sortie de la modélisation par les quadripôles.

Remarque : le signal 1D simulé est également bruité avec un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 0,02^\circ\text{C}$, de manière à obtenir un signal proche d'un signal expérimental réel moyenné spatialement en face arrière.

Cette minimisation est réalisée en ajustant de manière itérative le paramètre $\eta_1 = a_z / e^2$. L'épaisseur étant connue, cela revient à ajuster la valeur de la diffusivité a_z . Dans la simulation numérique Starccm+, les échanges convecto-radiatifs ne sont pas pris en compte, ainsi on fixe dans le modèle quadripôles 1D, $h.e/k = 0$.

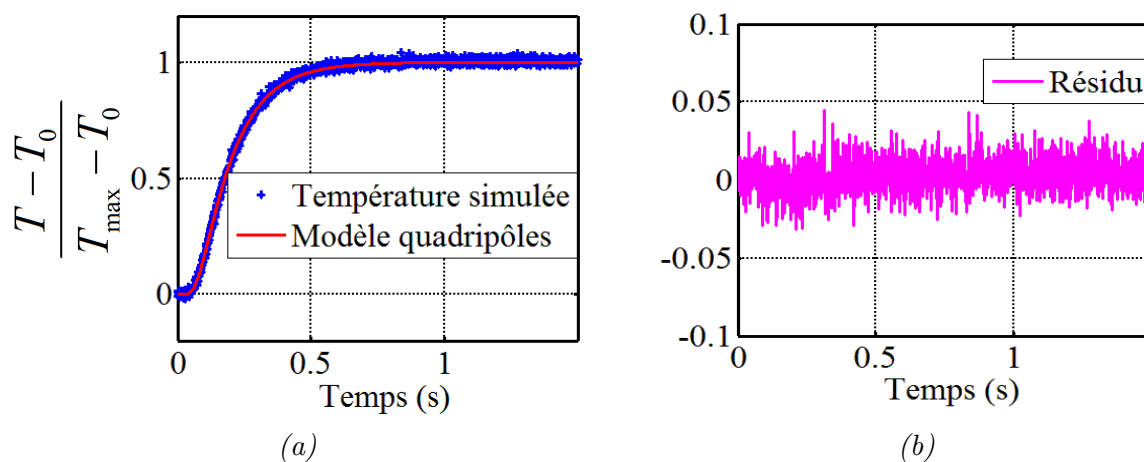


Figure 4 – Résultat de la minimisation (a) entre les données simulées (et bruitées) et le modèle quadripôles 1D, les signaux sont normalisés par rapport à la température maximale, résidu entre les deux signaux (b)

La minimisation (Figure 4) est réalisée par l'algorithme de Gauss-Newton (vu au §2.3.2 du chapitre 2) sur un signal normalisé et permet d'obtenir le résultat suivant : $a_z / e^2 = 0,775 \text{ s}^{-1}$.

Donc connaissant parfaitement l'épaisseur de l'échantillon simulé $e = 0,002\text{m}$, on obtient : $a_{\text{estimé}} = 3,10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ à 3% près pour un intervalle de confiance de 95,4%.

Et, la diffusivité imposée dans la simulation Starccm+ vaut : $a_{\text{imposé}} = 3,121 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, soit une erreur de 0,6% liée directement aux propriétés statistiques du bruit de mesure ajouté. La procédure d'estimation de a_z est tout à fait satisfaisante. Elle conviendra parfaitement à nos futures estimations expérimentales.

N.B.1 : L'incertitude est calculée en utilisant les relations détaillées dans le chapitre 2, §Algorithme de Gauss-Newton.

N.B.2 : Dans cette validation numérique, nous avons fixé à 0 le coefficient convecto-radiatif, cependant ce paramètre pourra être estimé par le modèle quadripôle, il nous sera utile lors de véritables expérimentations développées dans le chapitre 5.

2.2. Modélisation orthotrope 3D avec quadripôles thermiques

On souhaite maintenant caractériser les propriétés thermiques dans les directions transverses (x et y) du matériau. Il convient alors d'imposer un chauffage inhomogène (plutôt localisé) sur une surface du matériau et d'observer la diffusion dans les directions x et y du matériau sur la face opposée, l'expérience est schématisée sur la Figure 5 :

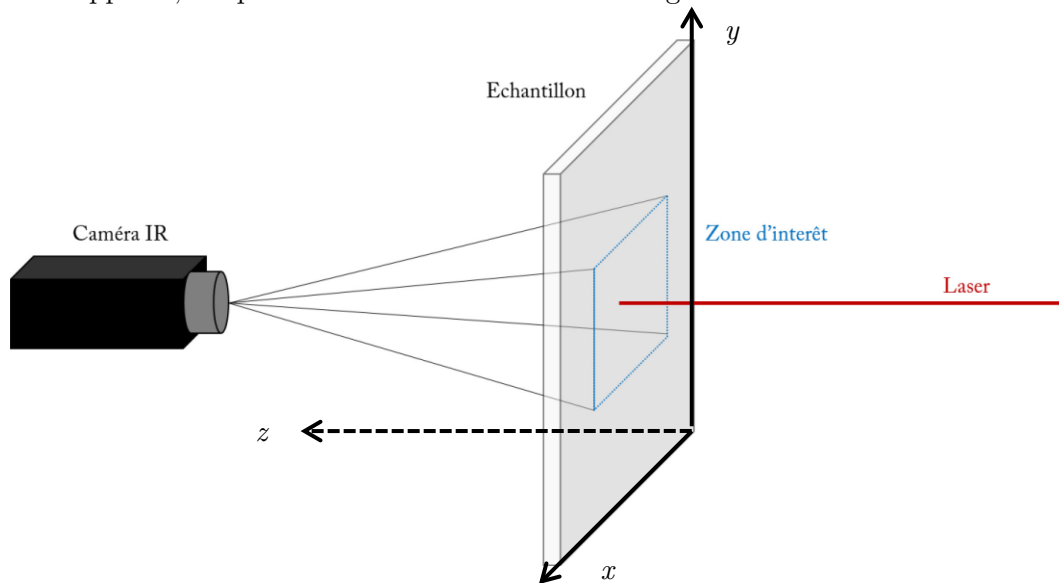


Figure 5 - Schéma de principe de la mesure IR pour caractériser la diffusivité thermique directionnelle

Pour cela, il convient de développer un modèle 3D prenant en compte les différentes directions de diffusion dans le matériau. Dans ce chapitre, sont présentés les détails mathématiques de la modélisation du phénomène de diffusion. Dans le but de valider la méthode, les minimisations et les estimations sont réalisées dans §2.3 sur des données bruitées simulées numériquement.

L'équation de diffusion de la chaleur en 3D (sans terme source) s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dT(x,y,z,t)}{dt} + a_x \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dx^2} + a_y \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dy^2} + a_z \frac{d^2T(x,y,z,t)}{dz^2} = 0 \quad (4.14)$$

La modélisation employée est encore une fois basée sur le formalisme des quadripôles thermiques.

2.2.1. Description de la méthode

On souhaite caractériser les propriétés thermiques d'un échantillon en le chauffant sur une de ses faces avec un créneau de flux localisé de la forme :

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 < t < \tau, \quad Q &= 1 \\ \text{pour } \tau < t, \quad Q &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le principe consiste donc à exciter thermiquement avec un laser (créneau temporel localisé spatialement (Figure 6)) une face de l'échantillon et de relever par thermographie IR le champ de température sur la face opposée [Souhar, 2008][Gaverina, 2017]. Les estimations des diffusivités thermiques dans les directions x, y, z sont réalisées (sur plusieurs zones d'intérêt) en minimisant l'écart entre les températures mesurées avec des températures simulées (en face arrière, $z = e$) par un modèle de diffusion à l'aide du formalisme des quadripôles en 3D orthotrope.

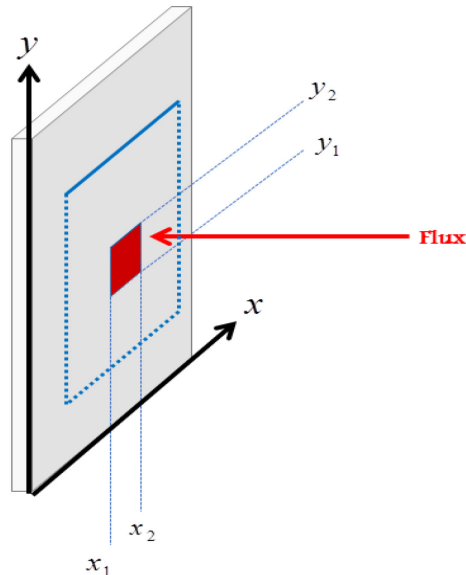


Figure 6 – Zoom sur la forme spatiale du flux imposé en face avant du matériau

On modélise la température en face arrière en utilisant les quadripôles thermiques. La modélisation est 3D et linéaire (les propriétés thermiques ne varient pas en fonction de la température).

En pratique, les échauffements mesurés en face arrière durant le temps de l'expérience sont faibles, ce qui peut amener à négliger les échanges convecto-radiatifs. Cependant on tiendra compte d'un coefficient d'échange convecto-radiatif constant et identique sur les deux faces du matériau dans la modélisation, ce coefficient pourra nous être utile pour manipuler les signaux expérimentaux dans le chapitre 5. Dans le cadre d'une validation numérique, on considèrera ce coefficient nul.

On peut exprimer dans l'espace de Laplace les échauffements par rapport à la température ambiante et les flux de la même manière que pour le cas monodimensionnel, et on montre, d'après [Batsale, Mailliet, Degiovanni, 1994], que l'expression de la température en face arrière s'écrit sous la forme :

$$\theta_{out} = \frac{\Phi_{in}}{2.A.h + B.h^2 + C} \quad (4.16)$$

avec $A = \cosh(\chi e)$; $B = \frac{1}{k_z \cdot \chi} \cdot \sinh(\chi e)$; $C = k_z \cdot \chi \cdot \sinh(\chi e)$

La modélisation tridimensionnelle nécessite de manipuler les grandeurs différemment : la variable temporelle t est transformée en variable de Laplace p , les variables spatiales x et y sont décomposées en harmoniques de Fourier α_n et β_m .

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{x_{\max}} \text{ et } \beta_m = \frac{m\pi}{y_{\max}} \quad (4.17)$$

n et m représentent les numéros d'harmoniques, χ dépend de n et m et prend certaines valeurs selon le cas étudié.

e, k_z, a_x, a_y, a_z sont respectivement l'épaisseur, la conductivité et les diffusivités thermiques effectives selon x, y et z , du matériau. p est la variable de Laplace

Φ_{in} la densité de flux reçue par le matériau en face avant en $W.m^{-2}$.

La forme intégrale de la décomposition est la suivante :

$$\theta_{out}(\alpha_n, \beta_m, p) = \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{t=0}^{\infty} T_{out}(x, y, t) \cdot \cos(\alpha_n \cdot x) \cdot \cos(\beta_m \cdot y) \cdot \exp(-p \cdot t) \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (4.18)$$

$T_{out}(x, y, t)$ la température en face arrière dans l'espace réel (spatio-temporel).

La densité de flux est présente sous la forme d'un produit de deux fonctions spatiales et temporelles :

$$\Phi_{in} = \varphi(p) \cdot F(\alpha_n, \beta_m) \quad (4.19)$$

L'expression dans l'espace de Laplace d'un créneau de flux de durée τ est :

$$\varphi(p) = TL(Q(t)) = \frac{1 - e^{-p \cdot \tau}}{p} \quad (4.20)$$

Posons, comme pour le cas 1D, les changements de variables suivants :

$$\eta_1 = \frac{a_z}{e^2} ; \eta_2 = \frac{h.e}{k_z} ; \eta_3 = \frac{1}{\rho.C_p.e},$$

Ces changements de variables ont pour objectif de regrouper des paramètres dont les coefficients de sensibilités sont fortement corrélés. L'estimation de tous ces paramètres est par conséquent impossible, c'est la raison pour laquelle on se concentrera sur l'estimation de ces nouveaux regroupements de paramètres indépendants.

Afin de réaliser ce calcul intégral au complet, le calcul est découpé en 4 termes :

1^{er} terme : Harmonique n=0, m=0

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{p}{\eta_1}} \quad (4.21)$$

$$\Phi_{0,0} = \varphi.(x_2 - x_1).(y_2 - y_1) \quad (4.22)$$

$$\theta_1 = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{0,0}}{2.\eta_2.\cosh(\chi_1) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_1} + \chi_1\right).\sinh(\chi_1)} \quad (4.23)$$

2^{ème} terme : n=0, m>0

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{p + a_y.\beta_m^2}{\eta_1}} \quad (4.24)$$

$$\Phi_{0,\beta} = \varphi.(x_2 - x_1) \cdot \frac{\sin(\beta_m.y_2) - \sin(\beta_m.y_1)}{\beta_m} \quad (4.25)$$

$$\theta_{0,\beta} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{0,\beta}}{2.\eta_2.\cosh(\chi_2) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_2} + \chi_2\right).\sinh(\chi_2)} \cdot \cos(\beta_m.y) \quad (4.26)$$

$$\theta_2 = \sum_{\beta_m} \theta_{0,\beta} \quad (4.27)$$

3^{ème} terme : n>0, m=0

$$\chi_3 = \sqrt{\frac{p + a_x.\alpha_n^2}{\eta_1}} \quad (4.28)$$

$$\Phi_{\alpha,0} = \varphi.(y_2 - y_1) \cdot \frac{\sin(\alpha_n.x_2) - \sin(\alpha_n.x_1)}{\alpha_n} \quad (4.29)$$

$$\theta_{\alpha,0} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{\alpha,0}}{2.\eta_2.\cosh(\chi_3) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_3} + \chi_3\right).\sinh(\chi_3)} \cdot \cos(\alpha_n.x) \quad (4.30)$$

$$\theta_3 = \sum_{\alpha_n} \theta_{\alpha,0} \quad (4.31)$$

4^{ème} terme : $n > 0, m > 0$

$$\chi_4 = \sqrt{\frac{p + a_x \cdot \alpha_n^2 + a_y \cdot \beta_m^2}{\eta_1}} \quad (4.32)$$

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \varphi \cdot \frac{\sin(\alpha_n \cdot x_2) - \sin(\alpha_n \cdot x_1)}{\alpha_n} \cdot \frac{\sin(\beta_m \cdot y_2) - \sin(\beta_m \cdot y_1)}{\beta_m} \quad (4.33)$$

$$\theta_{\alpha,\beta} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{\alpha,\beta}}{2 \cdot \eta_2 \cdot \cosh(\chi_4) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_4} + \chi_4\right) \cdot \sinh(\chi_4)} \cdot \cos(\alpha_n \cdot x) \cdot \cos(\beta_m \cdot y) \quad (4.34)$$

$$\theta_4 = \sum_{\alpha_n} \sum_{\beta_m} \theta_{\alpha,\beta} \quad (4.35)$$

Température finale

$$\theta_{out}(x, y, p) = \frac{\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + 4\theta_4}{x_{max} y_{max}} \quad (4.36)$$

$$T_{out}(x, y, t) = L^{-1}(\theta_{out}(x, y, p)) \quad (4.37)$$

L'expression (4.37) permet de reconstruire le champ de température en face arrière au cours du temps. Cependant, ce calcul est couteux en temps, car chaque point physique est modélisé.

On souhaite pouvoir estimer, sur une zone prédéfinie, les diffusivités effectives dans les 3 directions x, y, z . Pour ce faire, les minimisations ne seront pas réalisées dans l'espace physique mais dans l'espace des harmoniques fréquentielles (voir §2.2.3).

Le calcul des diffusivités transverses a_x et a_y , dépend fortement de la diffusivité a_z , il est donc nécessaire d'estimer ce paramètre au préalable.

2.2.2. Caractérisation de la diffusivité longitudinale a_z

(Longitudinale : Dans la direction de l'épaisseur)

La caractérisation de la diffusivité thermique longitudinale peut être effectuée à l'aide d'une modélisation 1D avec une sollicitation impulsionnelle (méthode flash). Cette méthode nécessite de mettre en place un banc expérimental spécifique et de posséder une lampe au temps d'impulsion très faible et d'un capteur (détecteur IR, caméra IR,...) très rapide. Les sollicitations impulsionnelles seront préférées lors de la caractérisation de matériaux très diffusifs comme les métaux.

L'objectif est ici d'utiliser un unique banc expérimental pour déterminer la diffusivité thermique dans toutes les directions. Ainsi, on utilise la modélisation 3D pour estimer dans un premier temps, la diffusivité thermique a_z , pour cela 2 méthodes se présentent à nous :

- Modélisation des harmoniques $n = 0$ et $m = 0$
- Modélisation d'une harmonique $n > 1$ et $m = 0$ ou $m > 1$ et $n = 0$ mais uniquement aux temps courts

2.2.2.1. Modélisation quadripôles 3D $n=0, m=0$

Cette méthode consiste à minimiser le signal 2D mesuré expérimentalement en face arrière d'un échantillon par thermographie IR, avec le modèle quadripôles 3D en ne tenant compte que des harmoniques $n = m = 0$ [Souhar et al, 2013]. Cette manœuvre revient à moyenniser le signal selon les deux directions x et y , et donc de ne tenir compte que du transfert selon l'épaisseur z .

Les coefficients de sensibilités de l'épaisseur et de la diffusivité étant corrélés, on estimera de nouveau l'inverse du temps diffusif de la couche η_1 . Une mesure annexe de l'épaisseur permettra ensuite de remonter à la diffusivité. Il n'est plus nécessaire de modéliser la forme spatiale du flux imposé en face avant car les signaux sont moyennés :

$$\Phi_{in} = \varphi(p) = \frac{1 - e^{-p \cdot \tau}}{p} \quad (4.38)$$

L'évolution de la température moyennée en face arrière :

$$\theta = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{in}}{(2 \cdot \eta_2) \cdot \cosh(\chi_1) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_1} + \chi_1 \right) \cdot \sinh(\chi_1)} \quad (4.39)$$

Avec $\chi_1 = \sqrt{p/\eta_1}$

2.2.2.2. Modélisation quadripôles 3D aux temps courts

Une deuxième méthode s'appuie sur une partie de la modélisation tridimensionnelle. Lorsque l'on moyenne le signal sur une direction (par exemple y), et que l'on décompose en harmoniques de Fourier le signal selon x , le modèle avec lequel on réalise la minimisation dépend des paramètres a_z et a_x . En ne tenant pas compte des pertes convecto-radiatives, l'expression dans l'espace de Laplace du signal à modéliser est :

$$\theta_{\alpha,0} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{\alpha,0}}{\chi_3 \cdot \sinh(\chi_3)} \quad (4.40)$$

Si l'on souhaite également modéliser un échange convecto-radiatif sur les faces avant et arrière du matériau, l'expression dans l'espace de Laplace du signal devient :

$$\theta_{\alpha,0} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{\alpha,0}}{2 \cdot \eta_2 \cdot \cosh(\chi_3) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_3} + \chi_3 \right) \cdot \sinh(\chi_3)} \quad (4.41)$$

Si l'on souhaite s'assurer de la stabilité des fonctions cosinus et sinus hyperboliques aux temps courts (variable p grande) ou aux grandes épaisseurs, on peut écrire la modélisation de la manière suivante (comme vu dans §2.1.1) :

$$\theta_{\alpha,0} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \cdot \frac{\Phi_{\alpha,0} \cdot \exp(-\chi_3)}{2 \cdot \eta_2 \cdot (1 + \exp(-\chi_3)) + \left(\frac{\eta_2^2}{\chi_3} + \chi_3 \right) \cdot (1 - \exp(-\chi_3))} \quad (4.42)$$

avec $\eta_1 = \frac{a_z}{e^2}$; $\eta_2 = \frac{h \cdot e}{k_z}$; $\eta_3 = \frac{1}{\rho \cdot Cp \cdot e}$ et $\chi_3 = \sqrt{\frac{p + a_x \left(\frac{n\pi}{x_{\max}} \right)^2}{\eta_1}}$

Le modèle dépend des deux paramètres a_z et a_x , or nous souhaitons estimer uniquement a_z dans un premier temps. On réalise donc une étude des coefficients de sensibilités du modèle par rapport aux paramètres a_z et a_x à estimer :

$$S(t, a_z) = \frac{\partial [L^{-1}(\theta_{\alpha,0})]}{\partial a_z} \quad (4.43)$$

$$S(t, a_x) = \frac{\partial [L^{-1}(\theta_{\alpha,0})]}{\partial a_x} \quad (4.44)$$

Les courbes des sensibilités (réduites) du modèle aux paramètres a_z et a_x montrent que le rapport des sensibilités a_z/a_x augmente avec la réduction du temps de modélisation (voir §2.3.3). Le but est de réduire suffisamment le temps de modélisation pour que la diffusion transverse (selon x ou y) n'ait pas encore commencé, tout en conservant suffisamment de points temporels de mesure pour permettre à l'algorithme de réaliser la minimisation quadratique.

On réalise donc les estimations de a_z pour une valeur arbitraire de a_x (puisque ce paramètre n'est pas sensible pour cette durée réduite). De plus, les minimisations sont effectuées sur des points centrés autour de la zone de chauffe, et de préférence sur un minimum de points afin d'atténuer encore plus la sensibilité au paramètre a_x .

Il faut cependant déterminer une durée optimale d'estimation en dessous de laquelle le nombre de points de mesure n'est plus suffisant pour une estimation correcte. En effet, à partir d'une certaine réduction du nombre de points temporels, l'écart-type et la moyenne du résidu entre les mesures et le modèle augmentent.

La durée optimale de modélisation sera le résultat du meilleur compromis entre le rapport des sensibilités aux diffusivités le plus élevé et l'écart-type et la moyenne des résidus les plus proche de zéro.

Détermination du temps optimal

Le choix du temps optimal permettant la minimisation s'appuie sur deux résultats d'estimation :

- Le rapport des sensibilités maximales des deux paramètres (a_x et a_z) ou (a_x et a_z / e^2), car l'objectif est d'être en mesure de négliger la sensibilité du paramètre a_x devant celle de a_z .
- L'écart-type et la moyenne du résidu entre le modèle et les mesures.

La réduction du temps de modélisation entraîne une augmentation du rapport des sensibilités :

$$R = \frac{S_{\max}(a_z)}{S_{\max}(a_x)} \quad (4.45)$$

L'écart-type du résidu diminue avec la réduction du temps de modélisation jusqu'à atteindre un temps limite en deçà duquel, le nombre temporel de points de mesure n'est pas suffisant pour garantir une minimisation optimale de l'algorithme Gauss-Newton. Cette minimisation optimale correspond à celle effectuée sur un temps (d'acquisition et de modélisation) suffisamment petit pour avoir un rapport des sensibilités grand, et suffisamment grand pour avoir un écart-type du résidu réduit. L'algorithme permettant de déterminer le temps optimal de modélisation pour la minimisation quadratique est présenté sur la Figure 7.

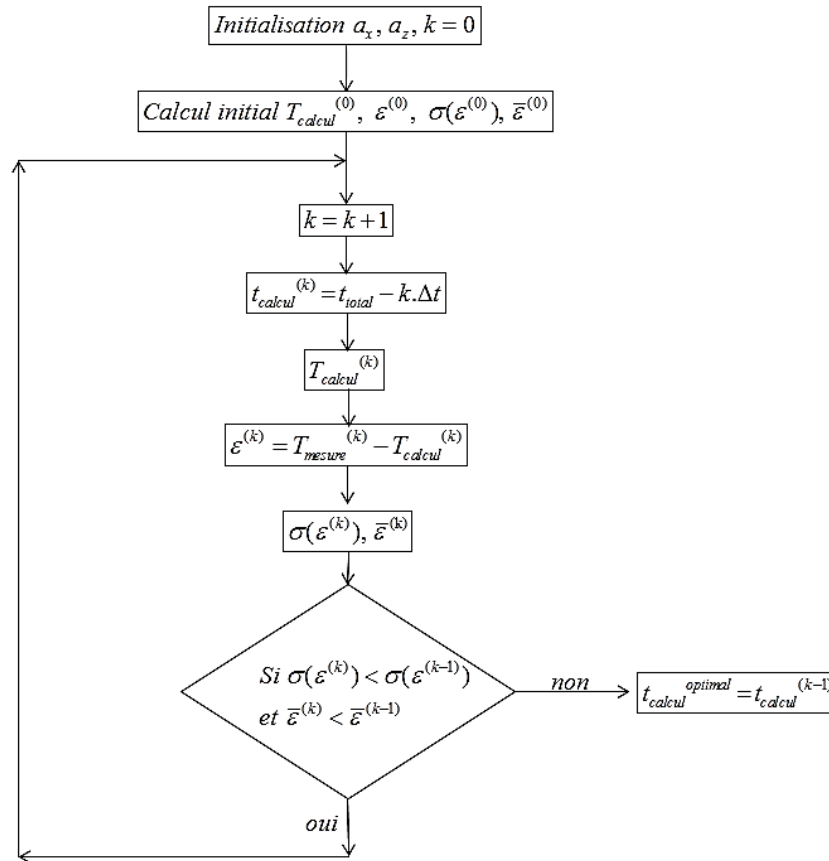


Figure 7 – Algorithme de détermination du temps optimal pour la minimisation du signal expérimental (moyenné sur une dimension spatiale et décomposé en harmoniques de Fourier sur l'autre dimension spatiale) avec le signal modélisé avec les quadripôles (et décomposé en harmoniques de Fourier selon le même protocole)

2.2.3. Caractérisation de diffusion transverse a_x et a_y

Lorsque l'on souhaite caractériser la diffusivité thermique transverse effective selon une direction privilégiée, deux approches simples sont envisageables : une caractérisation dans l'espace physique, ou une caractérisation dans l'espace de Fourier.

Dans les deux cas, l'estimation des diffusivités transverses a_x et a_y nécessite de connaître la diffusivité selon l'épaisseur a_z , ou plutôt l'inverse d'un temps caractéristique de diffusion selon l'épaisseur $\eta_1 = a_z / e^2$

Caractérisation dans l'espace physique

La minimisation de la fonction coût est réalisée sur au minimum 2 points physiques (pixel) au cours du temps. Cette méthode consiste à réduire l'écart entre le thermogramme expérimental du pixel correspondant à la zone de pointage du laser, et d'une zone plus excentrée le long de l'axe considéré.

Cette méthode est très simple à mettre en place, mais elle présente cependant quelques inconvénients :

- Tenir compte de deux pixels indépendants a pour conséquence d'obtenir deux signaux expérimentaux relativement bruités.
- Pour estimer une valeur effective sur toute une direction de la zone étudiée, ne tenir compte que de deux pixels est source d'erreurs.
- Dans le cas contraire, il est nécessaire de réaliser un calcul complet du domaine et réaliser une minimisation sur plusieurs pixels, ce qui est très coûteux en temps de calcul.

Cette méthode n'est donc pas adaptée à ce que l'on souhaite estimer ici, à savoir une diffusivité effective directionnelle sur une zone, elle a cependant le mérite d'afficher un résultat bidimensionnel sur la face concernée et ainsi pouvoir prédire un premier ajustement des paramètres que l'on souhaite estimer précisément.

Caractérisation dans l'espace de Fourier

Pour estimer les diffusivités transversales, on préfère découper la modélisation 3D. On choisit d'utiliser les parties **2^{ème} terme** & **3^{ème} terme** de la résolution 3D en moyennant à tour de rôle une des dimensions x ou y du signal expérimental. On exprime la modélisation de la température en face arrière. On souhaite que cette modélisation soit fonction des diffusivités transversales a_x et a_y et de l'inverse du temps diffusif longitudinal $\eta_1 = a_z / e^2$.

Estimons d'abord la diffusivité thermique (effective sur la zone étudiée) selon l'axe x . Le but est de minimiser le signal expérimental moyenné selon y avec le signal modélisé. Le signal est modélisé par les équations (4.29, 4.30, 4.31) dans l'espace de Laplace et de Fourier. La minimisation est, quant à elle, réalisée dans l'espace Temporel-Fourier. Une étape intermédiaire consiste donc à réaliser une transformée de Laplace inverse.

Le signal 2D instationnaire sur la face étudiée est moyenné sur une direction pour en privilégier une autre. Cette dimension spatiale (vecteur spatial x ou y) est décomposée en harmoniques fréquentielles. Afin de s'affranchir d'une partie du bruit de mesure, une ou plusieurs harmoniques sont choisies (celles avec le plus haut rapport signal sur bruit). Cette méthode présente deux avantages :

- Le bruit de mesure est considérablement réduit par le choix d'une (ou des) harmonique(s) préférentielle(s), mais également par la moyenne spatiale réalisée au préalable.
- Il n'est pas nécessaire de modéliser l'ensemble de la diffusion du domaine, seule une direction est nécessaire, ainsi qu'une partie du signal (quelques harmoniques).

La décomposition spectrale permet également de mettre en avant différents aspects de la dynamique du transfert de chaleur au sein du matériau. Les harmoniques $n=0$ et $m=0$ ne sont sensibles aux variations des conditions aux limites qu'aux temps longs. Plus les harmoniques étudiées sont grandes, plus leur modélisation possède un caractère « haute-fréquence ». Ainsi, à partir de l'harmonique $n=4$, on observe une dynamique de réchauffement et de refroidissement qui s'approche de la réelle dynamique des sollicitations extérieures (flux localisé en face arrière). Cette méthode est bien plus adaptée à l'estimation que l'on souhaite réaliser, nous l'utiliserons pour la suite de l'étude. Il faut néanmoins réaliser la transformée de Fourier du signal expérimental.

2.3. Validation numérique des méthodes d'estimation

2.3.1. Fabrication de données numériques bruitées

Nous choisissons dans un premier temps, afin de pouvoir valider la méthode, de travailler avec des données numériques bruitées simulées à l'aide du logiciel Starccm+. La configuration géométrique choisie est la suivante : nous disposons d'un matériau d'épaisseur $e=0,002m$, de longueur $Ly=0,02m$ ($Ny=200, \Delta y=0,1mm$) et de largeur $Lx=0,01m$ ($Nx=100, \Delta x=0,1mm$). Un créneau de flux temporel est imposé en face avant afin de simuler un échauffement dû à l'absorption d'un faisceau laser ; ce faisceau laser est maintenu pendant une durée $\tau=10s$. Le temps total simulé est de $30s$ à une fréquence de $100Hz$ (soit $Nt=3000$ pas de temps). Les propriétés physiques du matériau choisies sont dans une gamme représentative des composites polymère/carbone, - une masse volumique $\rho=1200kg/m^3$ et une chaleur spécifique $C_p=1213J/kg/K$. La valeur du flux simulé imposé est arbitraire car tous les signaux (échauffements) sont adimensionnés par leur valeur maximale, et seule la dynamique de l'échauffement est nécessaire à l'estimation des diffusivités thermiques. Ainsi, le seul critère à respecter est celui permettant l'obtention d'un signal avec des valeurs largement supérieures à la précision machine.

$$a_z \text{ imposée} = 1,374.10^{-7} m^2 / s \quad a_x \text{ imposée} = 1,374.10^{-7} m^2 / s \quad a_y \text{ imposée} = 2,748.10^{-7} m^2 / s$$

L'échantillon modélisé est un parallélépipède rectangle d'épaisseur e . Le flux correspondant au laser est appliqué sur une zone carrée de taille $[-2,5.\Delta x, +2,5.\Delta x]$ et $[-2,5.\Delta y, +2,5.\Delta y]$ par rapport au centre de la face avant de coordonnées $[0,0]$. Avec un pas d'espace $\Delta x = \Delta y = 10^{-4}m$ et un pas de temps $\Delta t = 10ms$.

Le bruit de mesure ajouté est un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 0,1^\circ C$. L'écart-type est déterminé à partir des bruits de mesures rencontrés expérimentalement.

Un profil 1D de ce signal illustre l'amplitude du bruit de mesure ajouté sur la Figure 8.

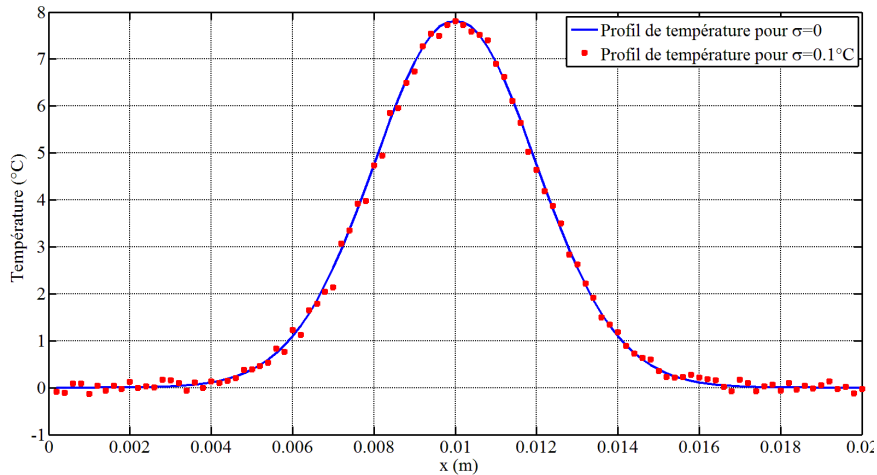


Figure 8 - Profil 1D de l'échauffement simulé (avec Starccm+) en face arrière du matériau (et bruité), selon l'axe x (à $y=L_y/2$), à $t = 25s$

2.3.2. Analyse spectrale du signal en face arrière

Avant de minimiser l'écart entre le modèle et les données, on se propose d'analyser le spectre de Fourier du signal expérimental (simulé et bruité) moyenné selon y . On le décompose donc à l'aide de fonctions cosinus, en balayant les harmoniques 1 à 9. (Cf Figure14, §2.3.4)

2.3.3. Estimation de la diffusivité longitudinale a_z (selon l'épaisseur)

Méthode harmoniques $n=0$ et $m=0$

Lorsque l'on applique la méthode des harmoniques nulles pour estimer la diffusivité longitudinale du domaine dont le champ de température en face arrière a été simulé avec Starccm+, on obtient la minimisation présentée sur la Figure 9.

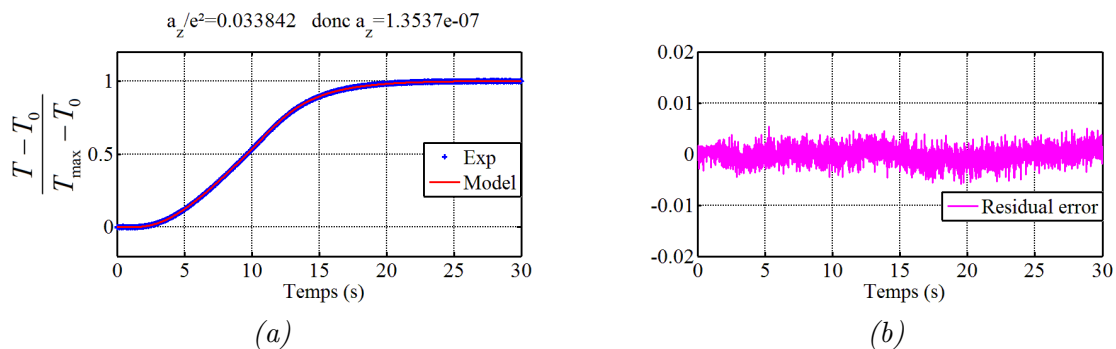


Figure 9 – Minimisation (a) entre les données simulées avec Starccm+ (et bruitées) moyennées spatialement et la transformée de Fourier pour les harmoniques $n=0$ et $m=0$ du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b)

Diffusivité imposée	Paramètre estimé
$a_z \text{ imposée} = 1,374.10^{-7} m^2 / s$	$\eta_1 = a_z / e^2 = 0,0338 s^{-1}$

On trouve une diffusivité a_z estimée $= 1,35 \cdot 10^{-7} m^2 / s$ à 4% près pour un intervalle de confiance de 95,4%.

Cette technique est très performante mais nécessite cependant d'avoir un temps de modélisation (ou d'expérience) important car, bien que le chauffage ait été coupé à 10s, l'harmonique $n=0$ n'atteint pas de maximum avant 25 à 30s (contrairement aux autres harmoniques $n > 0$ qui ont un comportement plus sensible aux variations de sollicitations en face avant.

Méthode temps courts

On réalise une étude des sensibilités du modèle aux paramètres a_z et a_x . Pour ce faire, on utilise les expressions (4.43) et (2.13).

En réduisant progressivement le temps utile d'estimation, le rapport des sensibilités aux diffusivités thermiques $S(a_z)/S(a_x)$ augmente. Il faut cependant déterminer une durée optimale d'estimation en dessous de laquelle le nombre de points de mesure n'est plus suffisant pour une estimation correcte. En effet, à chaque réduction du nombre de points temporels, l'écart-type du résidu entre les mesures et le modèle augmente. La durée optimale sera le résultat du meilleur compromis entre rapport des sensibilités aux diffusivités et écart-type des résidus.

On calcule successivement les sensibilités réduites du modèle (à l'harmonique $n=2$) par rapport aux paramètres a_x et a_z en fixant à tour de rôle leur valeur (erronée, mais du bon ordre de grandeur $a_x = a_z = 5 \cdot 10^{-7} m^2 / s$).

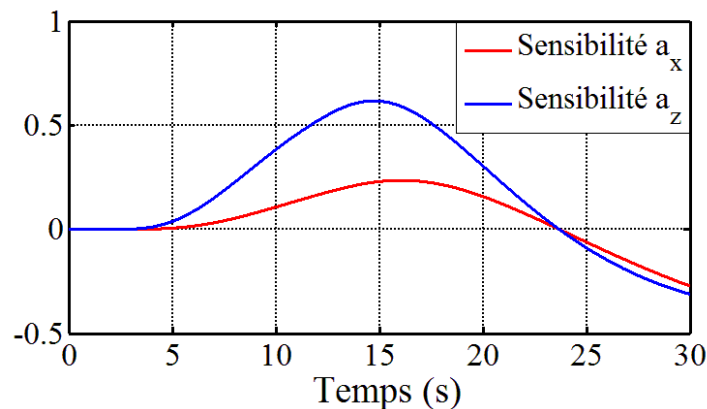


Figure 10 - Sensibilités réduites du modèle par rapport aux paramètres a_x et a_z jusqu'à 30s de modélisation

Comme le montre la Figure 10, les sensibilités aux deux paramètres sont corrélées. Elles suivent les mêmes tendances et ont des valeurs comparables. Le modèle ne peut donc pas estimer a_x et a_z simultanément.

Le rapport maximal des sensibilités est ici de 1,90. Lorsque l'on tente de minimiser le signal (ici l'harmonique $n=2$) en faisant varier a_z avec une valeur fixe de a_x , on obtient les résultats présentés sur la Figure 11.

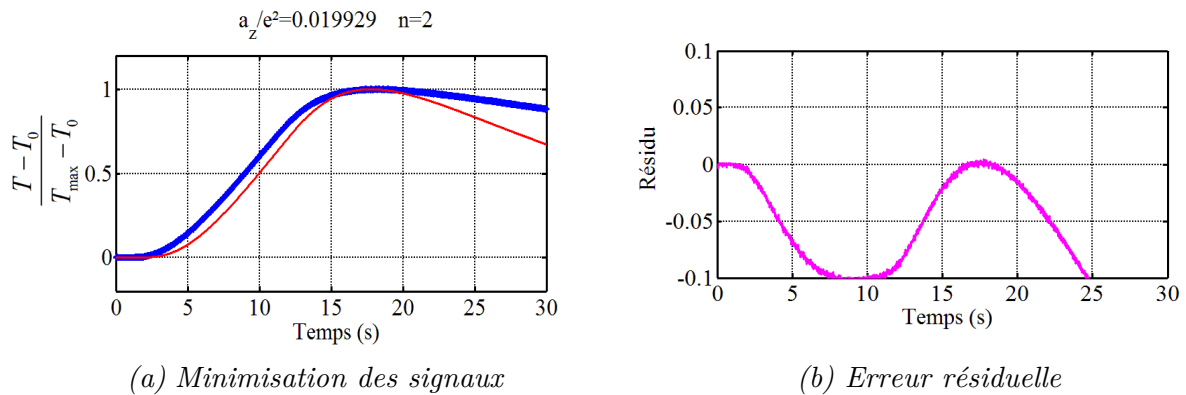


Figure 11 – Minimisation de l'harmonique de Fourier $n=2$ du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l'axe y , avec l'harmonique de Fourier $n=2$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, avec $a_x = 5.10^{-7} m^2 / s$, jusqu'à 30s

L'algorithme Gauss-Newton ne parvient pas à minimiser l'écart entre le modèle et les mesures (Figure 11) car la modélisation est fortement sensible à la valeur du paramètre a_x aux temps longs. Le but est donc de réduire la durée de modélisation pour atteindre un rapport de sensibilités plus grand et pouvoir négliger l'influence de la valeur fixée de a_x .

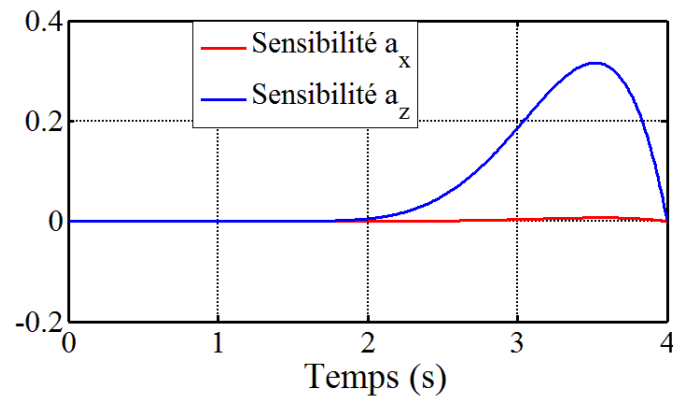


Figure 12 - Sensibilités réduites du modèle par rapport aux paramètres a_x et a_z , jusqu'à 4s

Lorsque l'on réduit la durée de modélisation à 4s (Figure 12), on parvient à obtenir un rapport des sensibilités de 38,9. Il est donc possible d'injecter dans le modèle une valeur arbitraire de a_x pour estimer a_z ou a_z / e^2 . On obtient ainsi la minimisation présentée sur la Figure 13.

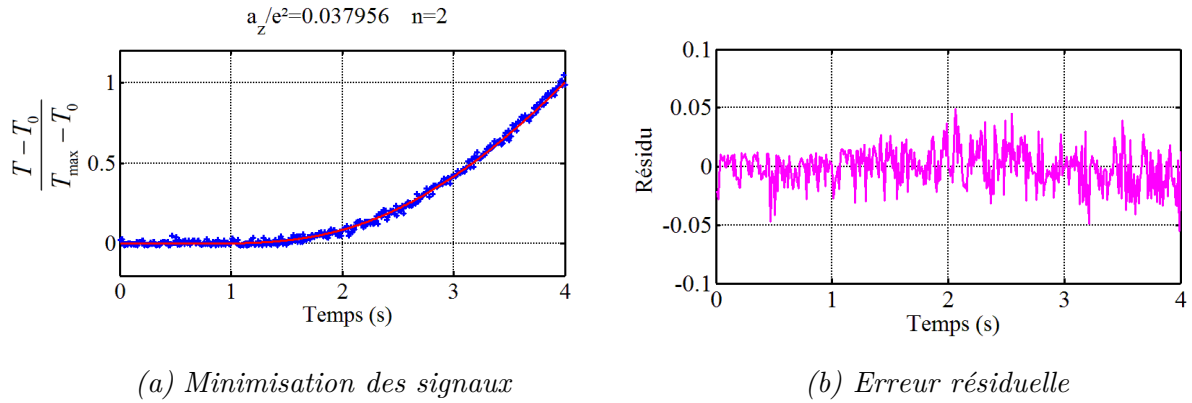


Figure 13 – Minimisation de l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l’axe y , avec l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l’aide du maximum du signal de chacun (la valeur finale), avec $a_x = 5.10^{-7} m^2 / s$ jusqu’à $4s$

On trouve $\eta_1 = 0,0379 s^{-1}$, donc pour une épaisseur $e = 0,002m$ on a :

$a_z = 1,5.10^{-7} m^2 / s$ à 10% pour un intervalle de confiance de 95,4% .

Et la valeur imposée lors de la simulation Starccm+ est $a_{z\text{ imposée}} = 1,374.10^{-7} m^2 / s$, soit une erreur de 9,4% . Cette méthode est simple à mettre en place et élégante à manipuler, elle reste cependant moins efficace que la méthode de l’harmonique $n = 0$ que nous préférons utiliser dans la suite du manuscrit. On peut cependant lui accorder l’avantage de ne nécessiter que d’une modélisation (ou acquisition) de faible durée, ce qui peut être un atout important selon le cas de figure traité.

2.3.4. Estimation de la diffusivité effective (direction transverse)

En travaillant sur la totalité du temps de la simulation, mais en fixant le paramètre estimé précédemment a_z (ou η_1) avec la méthode de l’harmonique $n = 0$, nous parvenons à estimer a_x . On procède de la même manière pour estimer a_y , l’estimation de a_y ne dépend pas de celle de a_x (Figure 14).

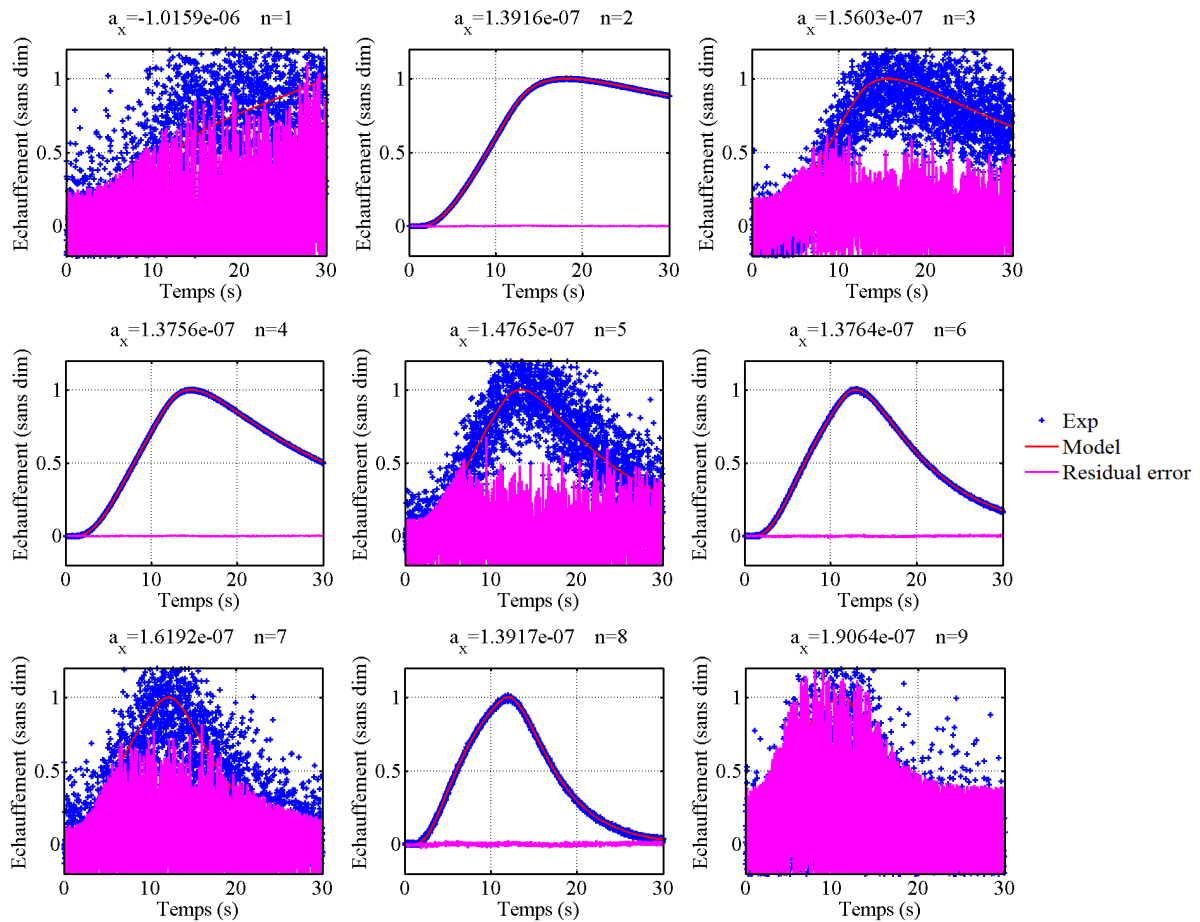


Figure 14 – Minimisation entre la Transformée de Fourier du signal (simulé avec Starccm+ et bruité) et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $n=1$ à $n=9$ d'un signal moyenné selon y , et normalisé par le maximum de chacune des harmoniques, a_x est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles.

Les harmoniques paires se démarquent par leur excellent rapport signal sur bruit. Elles permettent des minimisations et des estimations bien plus précises que les autres. De plus, elles permettent d'obtenir une valeur de diffusivité bien plus stable qu'avec les autres harmoniques comme le montre le récapitulatif sur la Figure 15.

L'incertitude de l'estimation réalisée sur chaque harmonique de Fourier est directement liée à la pré-estimation de la diffusivité selon l'épaisseur et aux propriétés statistiques du bruit de mesure présent sur chaque harmonique, on obtient le récapitulatif présenté sur la Figure 15.

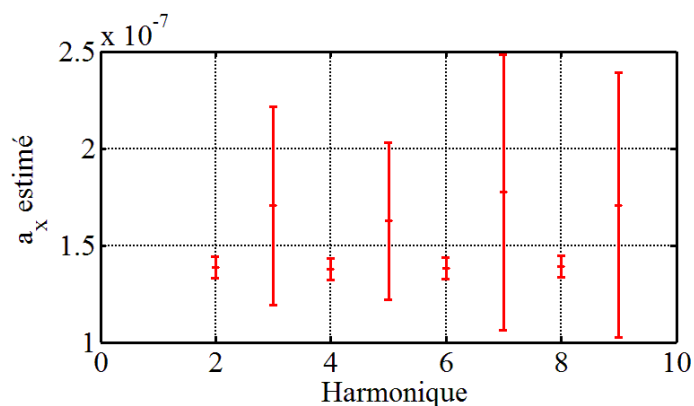
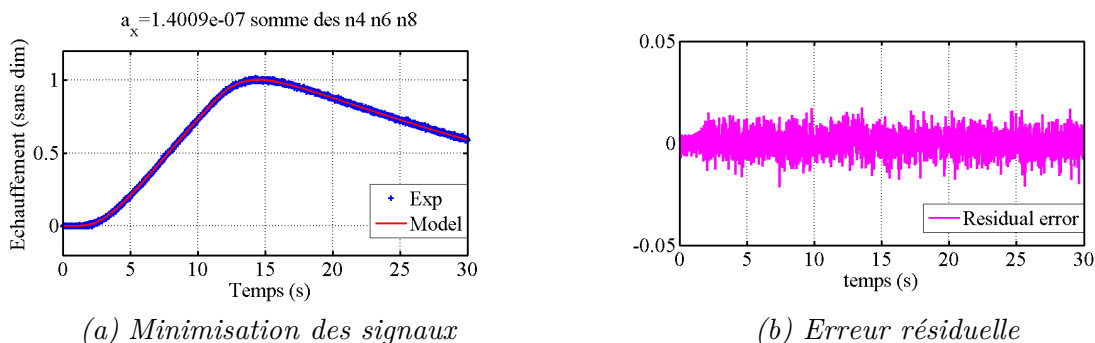


Figure 15 – Récapitulatif des estimations des diffusivités thermiques a_x , par harmonique $n=1$ à 9 , présentées sur la Figure 14

Il est donc possible de choisir une de ces harmoniques pour réaliser l'estimation de la diffusivité transversale (selon x ou y), ou bien, afin de tenir compte plus largement du comportement de diffusion de la chaleur, nous pouvons sommer ces harmoniques paires et ne minimiser notre signal expérimental que sur une unique transformée de Fourier du thermogramme, somme des harmoniques $n=4$, $n=6$ et $n=8$. La minimisation est présentée sur la Figure 16. On choisit d'exclure l'harmonique $n=2$ car sa décroissance (post-chauffage), typique de la diffusion transversale (selon x), n'est pas aussi prononcée que sur les harmoniques $n=4$, $n=6$ et $n=8$.



(a) Minimisation des signaux

(b) Erreur résiduelle

Figure 16 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$, du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l'axe y , avec la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_x calculée avec la méthode des harmoniques nulles

Le modèle estime une diffusivité de $a_{x\text{ estimé}} = 1,366.10^{-7} m^2 / s$ à 3% près pour un intervalle de confiance de 95,4%. La simulation numérique CFD a été réalisée avec une diffusivité de $a_{x\text{ imposée}} = 1,374.10^{-7} m^2 / s$, soit une erreur de 0,6%. Les résultats selon y sont semblables à ceux obtenus selon x . Ils sont présentés sur la Figure 17, la Figure 18 et la Figure 19.

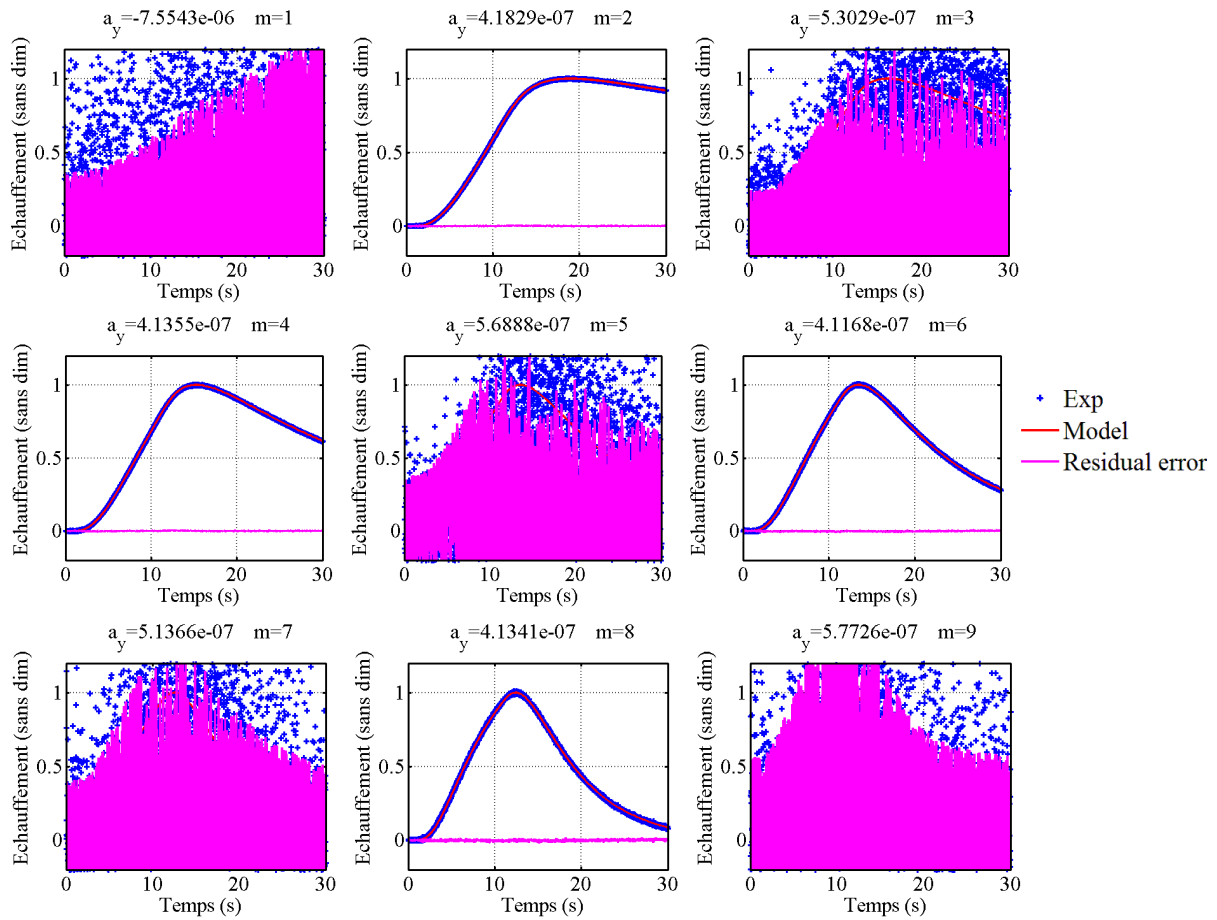


Figure 17 - Minimisation entre la Transformée de Fourier du signal (simulé avec Starccm+ et bruité) et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $m=1$ à $m=9$ d'un signal moyenné selon x , et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles.

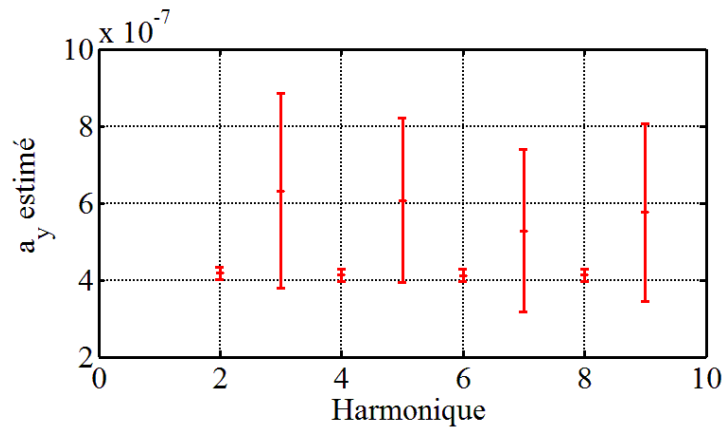


Figure 18 - Récapitulatif des estimations des diffusivités thermiques a_y , par harmonique $m=1$ à 9 , présentées sur la Figure 17

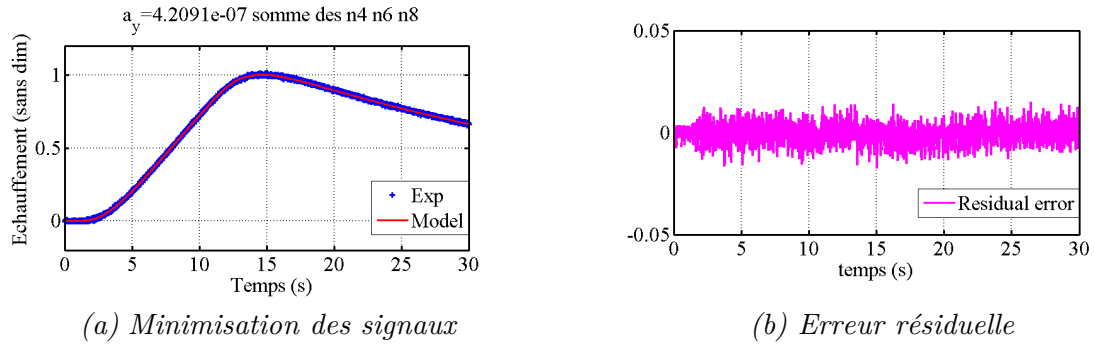


Figure 19 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $m=4$, $m=6$, $m=8$, du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l'axe x , avec la somme des harmoniques de Fourier $m=4$, $m=6$, $m=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles

L'optimisation réalisée avec l'algorithme de Gauss-Newton selon une minimisation des moindres carrés nous donne :

$$a_{y \text{ estimé}} = 4,162.10^{-7} m^2 / s \text{ à } 3\% \text{ près pour un intervalle de confiance de } 95,4\% .$$

$$\text{et } a_{y \text{ imposée}} = 4,122.10^{-7} m^2 / s , \text{ soit une erreur de } 1,4\% .$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu mettre en place et valider numériquement une méthode d'estimation des diffusivités thermiques directionnelles. Cette méthode a l'avantage de permettre d'estimer avec une unique expérience, les diffusivités thermiques selon l'épaisseur et les directions transverses.

L'originalité et la force de cette méthode repose sur le fait que les minimisations soient effectuées dans l'espace de Fourier et non dans l'espace réel, ce qui permet ainsi de traiter des problèmes multidimensionnels, d'estimer des valeurs effectives, tout en écartant le bruit de mesure des signaux mesurés.

Elle sera utilisée dans le chapitre 5 pour mesurer la dégradation des propriétés thermiques lorsqu'un matériau composite est endommagé.

Nomenclature

a	Diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)	N_x, N_y, N_t	Nombre de points selon x, y, t
e	Epaisseur (m)	k_x	Conductivité selon x
$Q(t)$	Flux imposé	h	Coefficient convecto-radiatif
t	Vecteur temps (s)	x, y, z	Coordonnées spatiales
T	Température (K ou °C)	n, m	Harmoniques selon x, y
$T_{mesuré}$	Température mesurée	C_p	Capacité calorifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
$S(t, X)$	Matrice des sensibilités	Lx, Ly	Dimensions du domaine 2D
$A, B,$ C, D	Coefficients des matrices des quadripôles	t_{diff}	Temps caractéristique de diffusion
k	Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	C_p	Capacité calorifique

Symboles Grecs

η_1, η_2, η_3	Groupements de paramètres	\sinh, \cosh	Sinus et cosinus hyperboliques
Δt	Pas de temps (s)	ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)
$\varphi(p)$	Transformée de Laplace d'une densité surfaccique de flux	ε	Erreur, Ecart
$\theta(p)$	Transformée de Laplace d'un échauffement	Δx	Pas spatial
χ	Groupement comprenant la variable de Laplace p	σ	Ecart-type

Abréviations

SVD	Décomposition en valeurs singulières
MGC	Méthode du gradient conjugué

Indices

0	Condition à t=0	$out2$	Sortie du système thermique 2
∞	Ambiance (extérieures)		

Exposants

T	Transposée d'une matrice
-1	Inverse d'une matrice

Liste des figures

Figure 1 – Schématisation de la modélisation quadripôles 1D avec échange convecto-radiatif h sur les faces avant et arrière.....	106
Figure 2 – Schéma de la modélisation quadripôles d’un matériau monocouche avec échange convecto-radiatif sur ses faces avant et arrière.....	107
Figure 3 – Evolution temporelle du champ de température moyenné spatialement en face arrière du matériau (Thermogramme issu d’une simulation numérique Starccm+, sans pertes convecto-radiatives).....	109
Figure 4 – Résultat de la minimisation (a) entre les données simulées (et bruitées) et le modèle quadripôles 1D, les signaux sont normalisés par rapport à la température maximale, résidu entre les deux signaux (b).....	110
Figure 5 - Schéma de principe de la mesure IR pour caractériser la diffusivité thermique directionnelle	111
Figure 6 – Zoom sur la forme spatiale du flux imposé en face avant du matériau.....	112
Figure 7 – Algorithme de détermination du temps optimal pour la minimisation du signal expérimental (moyenné sur une dimension spatiale et décomposé en harmoniques de Fourier sur l’autre dimension spatiale) avec le signal modélisé avec les quadripôles (et décomposé en harmoniques de Fourier selon le même protocole).....	119
Figure 8 - Profil 1D de l’échauffement simulé (avec Starccm+) en face arrière du matériau (et bruité), selon l’axe x (à $y=Ly/2$), à $t = 25s$	122
Figure 9 – Minimisation (a) entre les données simulées avec Starccm+ (et bruitées) moyennées spatialement et la transformée de Fourier pour les harmoniques $n=0$ et $m=0$ du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b).....	122
Figure 10 - Sensibilités réduites du modèle par rapport aux paramètres a_x et a_z jusqu’à 30s de modélisation.....	123
Figure 11 – Minimisation de l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l’axe y, avec l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l’aide du maximum du signal de chacun, avec $a_x = 5.10^{-7} m^2 / s$, jusqu’à 30s.....	124
Figure 12 - Sensibilités réduites du modèle par rapport aux paramètres a_x et a_z , jusqu’à 4s	124
Figure 13 – Minimisation de l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l’axe y, avec l’harmonique de Fourier $n=2$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l’aide du maximum du signal de chacun (la valeur finale), avec $a_x = 5.10^{-7} m^2 / s$ jusqu’à 4s.....	125

Figure 14 – Minimisation entre la Transformée de Fourier du signal (simulé avec Starccm+ et bruité) et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $n=1$ à $n=9$ d'un signal moyenné selon y , et normalisé par le maximum de chacune des harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles. 126

Figure 15 – Récapitulatif des estimations des diffusivités thermiques a_x , par harmonique $n=1$ à 9, présentées sur la Figure 14 127

Figure 16 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$, du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l'axe y , avec la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles 127

Figure 17 - Minimisation entre la Transformée de Fourier du signal (simulé avec Starccm+ et bruité) et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $m=1$ à $m=9$ d'un signal moyenné selon x , et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles. 128

Figure 18 - Récapitulatif des estimations des diffusivités thermiques a_y , par harmonique $m=1$ à 9, présentées sur la Figure 17 128

Figure 19 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $m=4$, $m=6$, $m=8$, du signal simulé avec Starccm+ (et bruité) moyenné selon l'axe x , avec la somme des harmoniques de Fourier $m=4$, $m=6$, $m=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles 129

Références Bibliographiques

J. C. BATSALE, D. MAILLET AND A. DEGIOVANNI, 1994, Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales-calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 37

J. L. BODNAR, J-C. CANDORE, J-L. NICOLAS ET D. CARON, 2010, Random photothermal thermography : Principle and examples of applications, *10th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography, Québec, Canada*

N. BOULEBBAD-GOMEZ, J-P. CHARLES, N. LAHELLEC ET C. HOCHARD, 2016, Analysis of the matrix transverse damage in a ud ply of an unbalanced hybrid peek-carbon/glass composite under combined static load, *17th European Conference on Composite Materials, Munich*

S.BRAHIM, J-L. BODNAR, P. GROSSEL ET P. HERVE, 2007, Analyses photo thermiques face arrière sous excitation aléatoire et analyse paramétrique : application à la mesure de diffusivité thermique, *Congrès Français de Thermique 2007, Ile des Embiez*

S. BRAHIM, J-L. BODNAR, J-L. NICOLAS ET P. GROSSEL, 2008, Approche de la mesure de diffusivité thermique par radiométrie photothermique aléatoire face avant à l'aide du système SAMMIR, *Congrès Français de Thermique*

F.R. DE HOOG, J.H. KNIGHT AND A.N. STOKES, 1982, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *J. Sci. And Stat, Comput. SIAM*, 3, 357-366.

O. FAUGEROUX , J-L. BODNAR , B. CLAUDET , T. MOURILLON, 2003, Contrôle non destructif par technique infrarouge : Application à la caractérisation de revêtements métalliques, *Actes du congrès thermogram' 2003, 26-27 Senart, pp. 75 – 86*

O. FAUGEROUX, B. CLAUDET, S. BENET, J.J. SERRA, D. BOISSON, 2003, Caractérisation thermophysique de revêtements par méthode photothermique impulsionnelle en face avant, *Int. Jour. Of Thermal Sciences*

C. GERVAISE, C. NOUALS, J-J. SERRA, 2000, Estimation des propriétés thermiques à l'échelle millimétrique par méthodes périodiques : Résolution du problème direct et du problème inverse, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 39, Issue 3, March 2000, Pages 422-432

F. GESSON , O. FAUGEROUX , JEAN-LUC BODNAR , T. MOURILLON, 2003, Estimation de l'épaisseur de revêtement de chrome par radiométrie photothermique impulsionnelle face avant, *Contrôles Essais-Mesures*, pp 23-26

MAILLET ET AL, 2010, Problèmes inverses en diffusion thermique : Formulation et résolution du problème des moindres carrés, *Techniques de l'ingénieur*

MAILLET ET AL, 2011, Problèmes inverses en diffusion thermique : Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation, *Techniques de l'ingénieur*

D. MAILLET, S. ANDRE, J-C. BATSALE, A. DEGIOVANNI, C. MOYNE, 2000, *Thermal Quadrupoles*, Wiley & Sons

N. MUSEUX, C. LORMEL, L. PEREZ, L. AUTRIQUE, J-J. SERRA, 2008, *Congrès Français de Thermique*

W.J. PARKER, R.J. JENKINS, C P. BUTLER, AND G.L. ABBOTT, 1961, Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity, *Journal of Applied Physics* 32

Y. SOUHAR, J. DILLET, B. REMY, Y. JANNOT AND A. DEGIOVANNI, 2008, Caractérisation de matériaux anisotropes à haute température par méthode impulsionnelle et thermographie infrarouge, *Congrès Français de Thermique*

CHAPITRE 5

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Sommaire

1. Introduction	137
2. Présentation des échantillons	137
2.1. Le matériau	138
2.2. Les échantillons	138
3. Pré-caractérisation thermique des échantillons sains.....	139
3.1. Mesure de masse volumique	139
3.2. Mesure de capacité calorifique.....	140
3.3. Estimation de diffusivités thermiques	143
3.3.1. Banc expérimental	143
3.3.2. Résultats d'estimations de diffusivités	145
4. Tests thermomécaniques	150
4.1. Forme des échantillons.....	151
4.2. Description du banc	151
4.3. Résultats qualitatifs : repérage de macro-fissures.....	153
4.4. Résultat quantitatif : estimation de sources.....	157
4.4.1. Fissure A (suivie d'une rupture)	159
4.4.2. Fissure B (sans rupture)	162
5. Mesure du niveau d'endommagement	165
5.1. Essais mécaniques	165
5.2. Estimation de diffusivités thermiques	167
5.2.1. Estimation des diffusivités selon l'épaisseur 1D	167
5.2.2. Estimation des diffusivités directionnelles 3D.....	169
5.3. Mesures d'endommagement mécanique et thermique.....	171

Chapitre 5 : Résultats Expérimentaux

6. Détection de délaminage	174
6.1. Banc expérimental 1D.....	174
6.2. Résultats	176
7. Conclusions.....	178
Nomenclature	179
Liste des figures.....	180
Références bibliographiques.....	184

1. Introduction

Les méthodes développées et présentées dans les chapitres précédents ont pour but d'évaluer la possibilité d'évaluer l'endommagement d'un composite sans le détériorer après une utilisation de celui-ci en phase fonctionnelle.

Dans ce chapitre sont présentés des résultats préliminaires visant à corrélérer le niveau d'endommagement mécanique à la dégradation de la diffusivité thermique du composite. La mesure de diffusivité thermique a pour avantages d'être non destructive, relativement rapide et pouvant être réalisée sur une grande surface d'échantillon.

Pour tester ce nouveau contrôle non destructif, des éprouvettes neuves de composite sont tout d'abord caractérisées thermiquement.

Ensuite, des tests de traction thermomécaniques sont réalisés sur les échantillons pendant lesquels les sources de chaleur émises, conséquentes aux endommagements du matériau, sont estimées (par thermographie IR) et corrélées aux champs de déformations mesurés par ailleurs (à l'aide de logiciels de corrélation d'images). Nous utilisons le champ de températures ainsi que les propriétés estimées lors de la première étape pour nous permettre à l'aide de la méthode du gradient conjugué développée au chapitre 3 d'estimer le champ des termes sources. Le but est de lier la concentration des déformations avec l'apparition (spatio-temporelle) et le niveau d'énergie des sources de chaleur.

Enfin, une nouvelle caractérisation des diffusivités thermiques des éprouvettes endommagées est réalisée pour corrélérer la dégradation de ce paramètre au niveau d'endommagement des éprouvettes.

Une dernière partie du chapitre traite de la détection du délaminage dans les matériaux composites, mais cette courte expérience concerne un autre type de composite décrit dans le paragraphe concerné.

Nous commençons par présenter les éprouvettes de travail, en incluant les détails du matériau ainsi que les processus de fabrication.

2. Présentation des échantillons

Les matériaux étudiés dans ce chapitre ont initialement été utilisés et étudiés dans le cadre de la thèse de Nassira Boulebbad-Gomez, doctorante au LMA et chez Airbus Helicopter.

2.1. Le matériau

Le matériau composite hybride carbone/verre tissé déséquilibré étudié ici est produit en combinant une résine thermoplastique PEEK avec du carbone dans la direction de la chaîne et du verre dans la direction de la trame (Figure 1). Le ratio volumique entre la chaîne et la trame est de 87%/13%. La chaîne de carbone utilisée est de haute résistance (T300J : fils de carbone composés de 3000 fibres - 198 g/km - Module traction 230GPa - Résistance 4210MPa) et la trame de verre utilisée est composée de fils EC9 68 Z40 PPG 1383 (68 g/km). Le type de tissage est un tissage simple, la chaîne et la trame sont alignées de sorte à former un motif croisé simple. Chaque fil de trame croise les fils de chaîne en passant sur le premier, puis sous le suivant, et ainsi de suite. La matrice est en Polyether-ether-ketone (PEEK), un polymère thermoplastique semi-cristallin organique présentant d'excellentes propriétés de résistance mécanique, thermique et chimique. En termes de traitement, les plaques ont été consolidées par un procédé de pressage à chaud (395°C, 11 bars). Le composite obtenu de cette façon possède une bonne stabilité entre épaisseur et fraction volumique des fibres. Les plaques sont fabriquées à l'aide de 8 couches pour obtenir une plaque de 1,3 mm d'épaisseur [Boulebbad-Gomez, 2016].

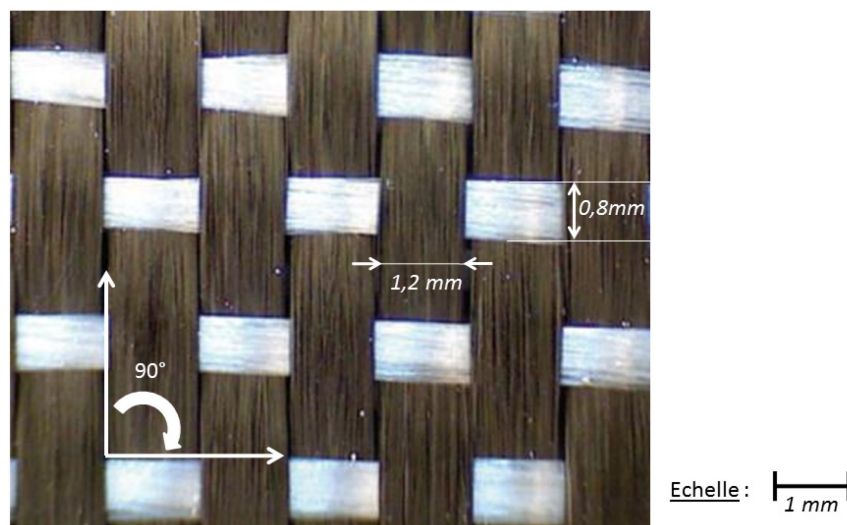


Figure 1 – Composite hybride asymétrique PEEK - Carbone/Verre, fabriqué par Porcher Industries

2.2. Les échantillons

On dispose d'échantillons de différentes orientations : 56°(x3) et 78°(x3). Les orientations sont définies par l'angle entre la direction verticale de traction et la direction des fibres de carbone. Ces échantillons sont composés de 8 plis, par conséquent leur épaisseur est d'environ 1,35mm.

Les échantillons dont l'orientation dépasse les 70° ont tendance à localiser les déformations et donc à voir naître des macro-fissures au sein de la matrice. Ces fissures se propagent entre les fibres de carbone, et cassent ainsi les zones les moins résistantes de l'échantillon, à savoir la matrice et les fibres de verre en faible proportion. La thermographie IR et la corrélation d'image seront utilisées sur ce type d'échantillon, permettant de visualiser et d'estimer des sources de chaleur localisées.

Les échantillons dont l'orientation est inférieure à 67° ont un comportement différent. L'expérience montre [N. Boulebbad-Gomez, 2016], que ceux possédant l'endommagement le plus « homogène » ou « diffus » sont les échantillons dont les fibres de carbone sont orientées entre 56° et 30° . Dans ces configurations, les fibres de carbone (plus résistantes que la matrice et les fibres de verre) ont une orientation proche de la direction de traction, ainsi ce sont elles qui subissent la majeure partie des efforts ; l'endommagement prend donc effet parsemant la matrice d'une multitude de micro-fissures donnant son caractère diffus à l'endommagement. On étudiera plutôt la variation des diffusivités thermiques pour déterminer l'endommagement de ces échantillons en fonction du chargement subi.

3. Pré-caractérisation thermique des échantillons sains

Pour pouvoir évaluer la dégradation (diminution) éventuelle de la diffusivité thermique après l'endommagement mécanique des éprouvettes, une caractérisation des échantillons avant les tests de traction est réalisée. De plus, l'estimation des sources internes émises pendant les tests de traction nécessite la connaissance de l'ensemble des propriétés thermiques : conductivité thermique (k), le produit (ρCp). C'est pour cette raison que des mesures de masse volumique et de capacité calorifique sont également réalisées. Ces mesures seront réalisées sur un petit élément de notre matériau composite (d'environ 3cm^2). Il est important que cet élément soit suffisamment grand pour être représentatif de l'ensemble de l'échantillon, mais également suffisamment petit pour être analysable par les systèmes de mesure de capacité calorifique et de masse volumique.

Echantillon représentatif

L'échantillon choisi a les dimensions suivantes : $L = 2\text{cm} \times l = 1,7\text{cm} \times e = 0,135\text{cm}$. Il comporte 7 mèches de fibres de carbone et 6 mèches de fibres de verre sur 8 plis.

3.1. Mesure de masse volumique

La pycnométrie des gaz est l'une des techniques les plus fiables pour obtenir la densité. Cette technique est non destructive car elle utilise la méthode de déplacement des gaz pour mesurer

le volume. On utilise ici l'hélium comme milieu de déplacement. Ce calcul de densité (par déplacement de gaz) est très précis (même sur des matériaux poreux) car la petite taille des atomes d'hélium permet d'accéder aux zones les plus fines [L. Aiche Belkadi, 2009].

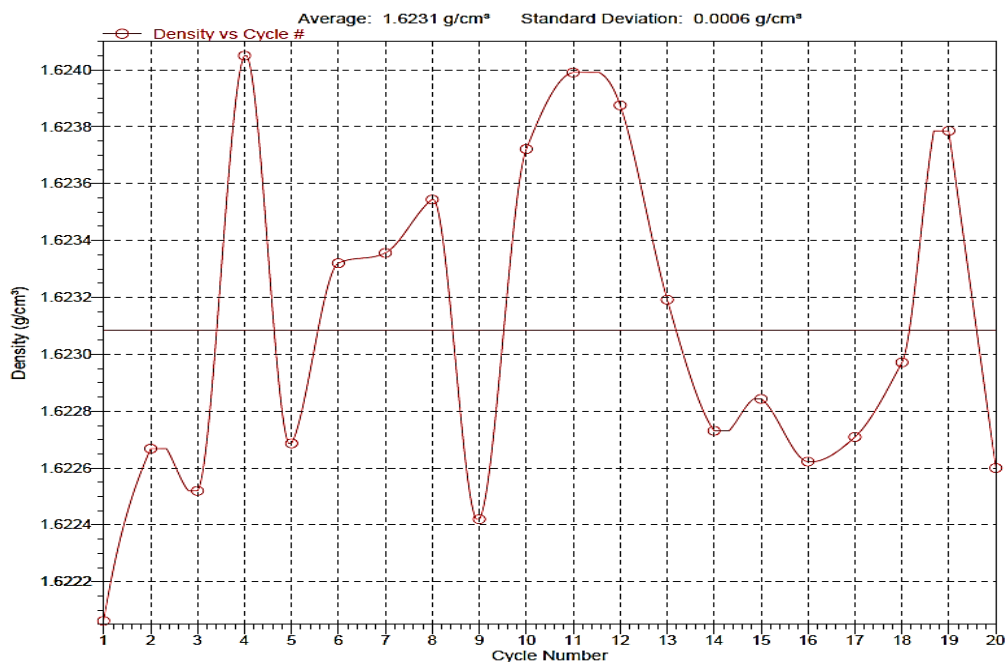


Figure 2 – Densité du matériau composite hybride étudié, évaluée à chaque cycle de mesure avec un pycnomètre à Helium

Après 20 cycles de mesure, on obtient une valeur moyenne de : $\rho = 1623,1 \pm 0,6 \text{ kg.m}^{-3}$

3.2. Mesure de capacité calorifique

La détermination de la capacité calorifique massique à pression de référence $P^0 = 10^5 \text{ Pa}$, d'un matériau solide, est faite ici à l'aide d'un microcalorimètre de type TIAN-CALVET [B-E. Handy et al, 1993]. La méthode employée est connue sous le nom de « méthode de chute ». Cette appellation provient du fait que l'échantillon étudié chute dans la cellule expérimentale du calorimètre.

La manipulation consiste à mesurer l'accroissement d'enthalpie ΔH (chaleur mise en jeu à pression constante) d'une masse m connue avec précision d'un solide de capacité calorifique massique cp dont la température s'élève de T_i (température initiale du matériau, extérieure au calorimètre) à T_f (température finale du matériau, à l'intérieur du calorimètre). L'échantillon est donc mis à stabiliser à la température ambiante T_i , lorsque l'équilibre thermique avec le milieu ambiant est atteint, on le laisse chuter dans la cellule du calorimètre à conduction.

En négligeant l'énergie cinétique acquise pendant la chute, et en considérant que l'échantillon est toujours à T_i lorsqu'il atteint la cellule, le thermogramme obtenu doit être proportionnel à l'accroissement d'enthalpie.

$$\Delta H = m \int_{T_i}^{T_f} Cp(T).dT \quad (5.1)$$

En admettant qu'avec cette variation de température, la capacité calorifique n'a pas variée, la relation devient :

$$\Delta H = m.Cp(T_m).\Delta T \quad (5.2)$$

avec m la masse de l'échantillon (kg), ΔH l'accroissement d'enthalpie (J)

$Cp(T_m)$ la capacité calorifique moyenne entre T_i et T_f ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)

L'acquisition du signal est effectuée toute les secondes. Le signal S est relevé en Volt sur la Figure 3.

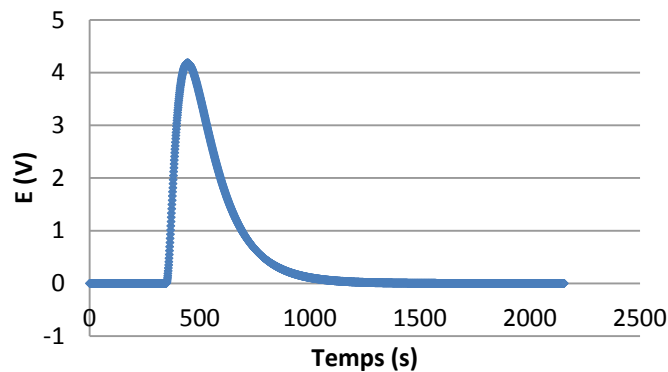


Figure 3 – Acquisition du signal proportionnel à l'élévation en température, au cours du temps

Soit S l'aire sous la courbe calculée avec la méthode des trapèzes :

$$S(t) \approx \frac{1}{2} \cdot (E(t_i) - E(t_{i+1}) - 2.E_{base}) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (5.3)$$

On obtient $S = 1009,6 V.s$

On sait que l'augmentation d'enthalpie est proportionnelle à l'aire sous la courbe :

$$\Delta H = \nu.S \quad (5.4)$$

L'étalonnage du système nous donne la sensibilité ν de l'appareillage de mesure, ainsi il nous est possible à partir de la capacité calorifique d'un matériau connu de connaître le lien entre

l'aire sous la courbe (*en V.s*) et sa conversion (*en J.s*). Nous obtenons ici à l'aide d'un échantillon d'alumine le coefficient suivant : $\nu = 4,5 \cdot 10^{-3} J.V^{-1}.s^{-1}$

D'où pour notre échantillon composite $\Delta H = 4,54 J$

Avec une masse d'échantillon $m = 0,0932 g$

et $T_i = 20,7^\circ C$, $T_f = 70,3^\circ C$, on obtient : $Cp(T_m) \approx 983 J.kg^{-1}.K^{-1}$

Estimation des incertitudes

La capacité calorifique est exprimée de la manière suivante :

$$Cp = \frac{\nu \cdot S}{m \cdot \Delta T} \quad (5.5)$$

D'où l'expression de l'erreur :

$$\left(\frac{u_{Cp}}{Cp} \right)^2 = \left(\frac{u_\nu}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{u_S}{S} \right)^2 + \left(\frac{u_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta T}}{\Delta T} \right)^2 \quad (5.6)$$

L'erreur sur la mesure de température $u_{\Delta T}$ dépend de la précision du thermocouple employé, on a $\Delta T = T_f - T_i = 49,6^\circ C$ à 0,4% près pour un intervalle de confiance de 95,4%. L'erreur sur la mesure de la masse de l'échantillon u_m dépend de la précision de la balance utilisée, on a $m = 0,0932 g$ à 0,02% près pour un intervalle de confiance de 95,4%. L'erreur sur le calcul de l'intégrale S est directement issue de la somme des erreurs réalisées sur l'approximation de la méthode des trapèzes appliquée à chaque pas de temps.

$$u_{S_i} \approx -\frac{(t_{i+1} - t_i)^3}{12} \cdot E''(t_i) \quad (5.7)$$

$$u_S = \sum_{i=1}^n u_{S_i} \text{ avec } n \text{ le nombre de trapèzes} \quad (5.8)$$

On obtient : $S = 1009,6 V.s$ à 5% près pour un intervalle de confiance de 95,4% .

De la même manière, on obtient une erreur sur la constante d'étalonnage.

$\nu = 4,5 \cdot 10^{-3} J.V^{-1}.s^{-1}$ à 5% près.

Le calcul de l'erreur sur la capacité calorifique donne enfin :

$Cp(T_m) = 983 J.kg^{-1}.K^{-1}$ à 7% près pour un intervalle de confiance de 95,4% .

3.3. Estimation de diffusivités thermiques

On se propose ici d'appliquer les méthodes développées dans le chapitre 4 sur nos composites sains. Le but étant de pouvoir estimer une valeur des diffusivités thermiques dans chaque direction. Le principe de l'expérience est schématisé dans le chapitre 4, Figure 5.

3.3.1. Banc expérimental

Pour solliciter nos échantillons avec un flux très localisé, nous disposons d'un laser OEM Vert de $532nm$ et de puissance $600mW$ (Classe 4). Ce laser traverse en partie une lame semi-transparente, passe par un diaphragme réducteur afin de réduire et homogénéiser la forme spatiale, puis vient impacter en face avant de l'échantillon composite (Figure 4). La taille de chauffe est circulaire avec un diamètre d'environ $1mm$.

Une partie du faisceau laser est dévié par une lame semi-transparente vers une lame opaque. Cette lame opaque, s'échauffe instantanément en face avant. Ce flux réémis en face avant permet de connaître le déclenchement réel du laser.

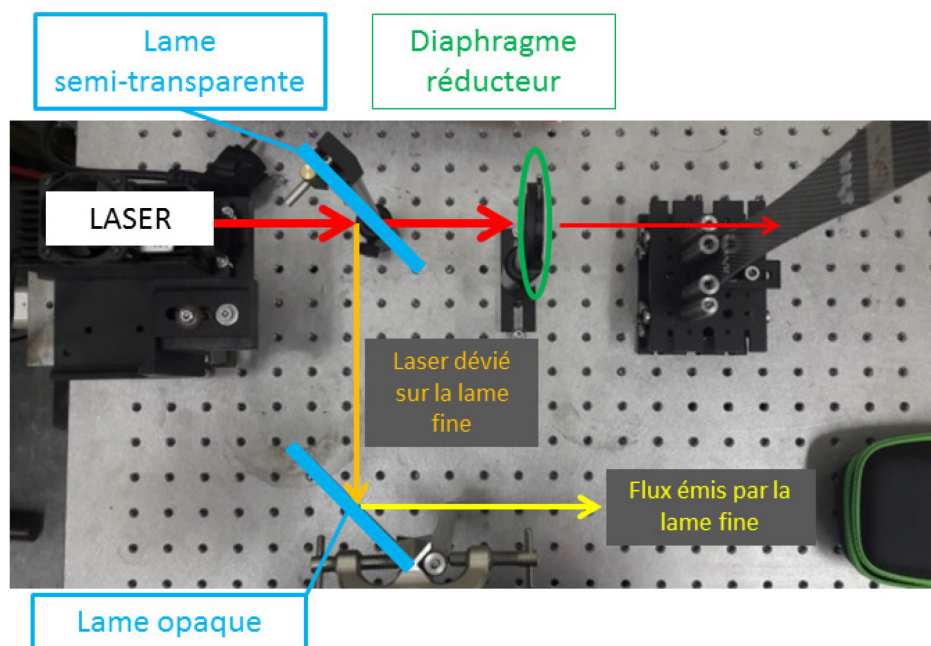


Figure 4 – Photo du banc expérimental avec circuit du laser utilisé pour la sollicitation localisée

En face arrière, une caméra IR est disposée de manière à avoir dans son champ de vision l'échantillon ainsi que la lame opaque (Figure 5).

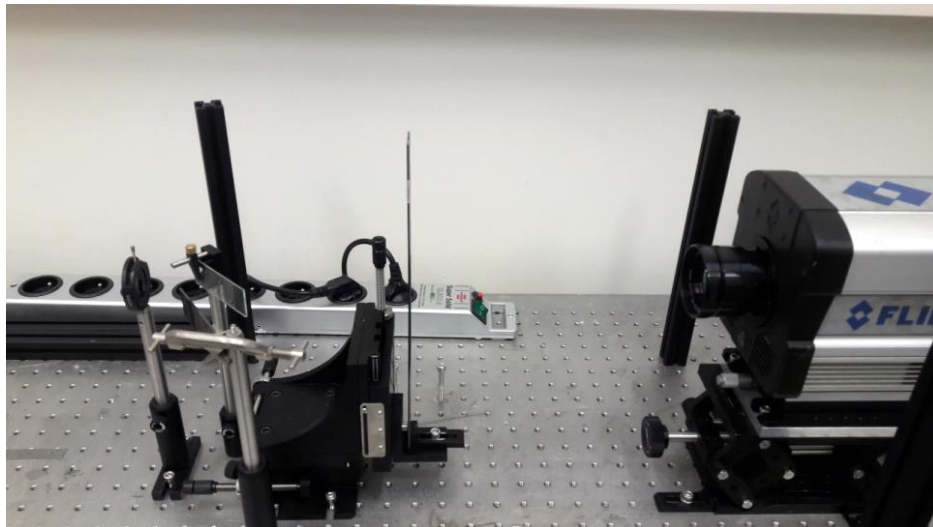


Figure 5 – Photo du banc expérimental côté caméra

Le modèle de la caméra IR est une caméra Flir de type SC6000 à matrice de détecteurs *InSb* refroidis à $77K$. La matrice de détecteurs infrarouges est une matrice de 640×512 pixels d'un pas de $25\mu m$. La gamme de longueurs d'ondes observable est de 3 à $5\mu m$. La sensibilité thermique est inférieure à $20mK$ au voisinage de la température ambiante.

Hypothèses

En considérant une scène suffisamment proche de la caméra, on pourra négliger la transmittivité du milieu, car les pics d'absorption du rayonnement IR par la vapeur d'eau (inférieurs à $3\mu m$ et supérieurs à $5\mu m$) sont hors de la bande spectrale de la caméra IR utilisée (3 à $5\mu m$).

Pour s'affranchir du flux radiatif issu de l'ambiance et réfléchi par la surface considérée, nous appliquerons un mince revêtement noir dont l'émissivité est supérieure à $0,96$ pour les expériences de quantification des sources de chaleur.

Connaître la température exacte de la face arrière n'est pas indispensable car l'estimation des diffusivités thermiques repose sur une mesure de la dynamique de l'échauffement. L'important est simplement d'avoir un signal suffisamment intense pour être détectable.

A l'aide d'un régle métallique placé contre l'échantillon que l'on souhaite observer, nous pouvons réaliser correctement la netteté de l'image, et également déterminer la taille de chaque pixel. Le pas spatial dans notre configuration est de :

$$\Delta x = \Delta y = \frac{0,06m}{564 \text{ pixels}} = 1,064 \cdot 10^{-4} m \quad (5.9)$$

L'objectif utilisé est un objectif de 50mm dont la focale est fixée à une distance d'environ 20cm .

3.3.2. Résultats d'estimations de diffusivités

Nous disposons de 6 éprouvettes saines :

- 3 éprouvettes en 56° , 8 plis, N263/N264/N265
- 3 éprouvettes en 78° , 8 plis, N257/N258/N259

Les différents échantillons sont issus de la même plaque composite et sont donc conçus selon le même processus industriel. Ce processus est extrêmement fiable et permet d'obtenir des séries d'éprouvettes très similaires. Ainsi, il est possible à partir de la série d'éprouvettes composites dont nous disposons, de déterminer des propriétés thermiques effectives stables dans chaque direction principale.

L'estimation de diffusivités thermiques dans les directions des fibres permettra, dans le paragraphe suivant §4, de pouvoir estimer le plus précisément possible les termes sources de chaleur prenant effet durant les expériences de traction.

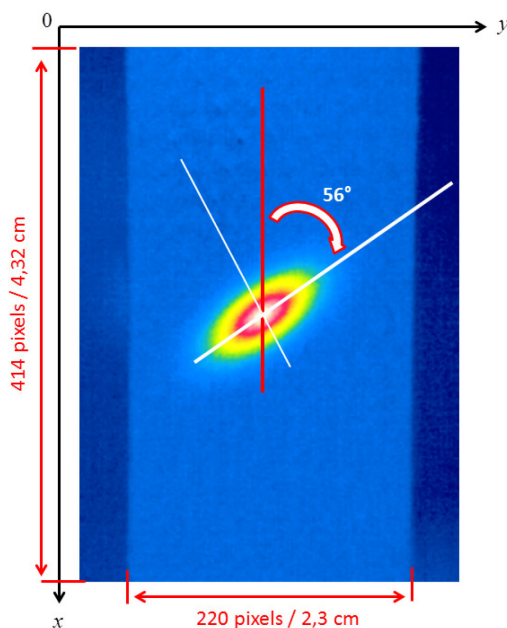


Figure 6 – Tache de diffusion en face arrière d'une des éprouvettes saine (N264, 56°), 2s après l'impact du laser en face avant

La tache de diffusion arrière (Figure 6) permet d'ores et déjà de vérifier qualitativement l'orientation des fibres de carbone à 56° , car le carbone est un bien meilleur conducteur que le verre ou le PEEK. Cette visualisation confirme également le caractère orthotrope du matériau dont le transfert de chaleur est principalement régi par les fibres.

3.3.2.1. Estimation de la diffusivité selon l'épaisseur

On choisit d'estimer la diffusivité thermique selon l'épaisseur du matériau avec l'une des méthodes vues dans le chapitre 4. La méthode retenue (montrant le plus de stabilité et la plus faible dépendance au bruit de mesure) est celle qui consiste à minimiser le signal de l'harmonique 0 (moyenné spatialement dans les deux directions principales) avec l'harmonique 0 du modèle quadripôles (Cf Chapitre 4 §2.2.2.1).

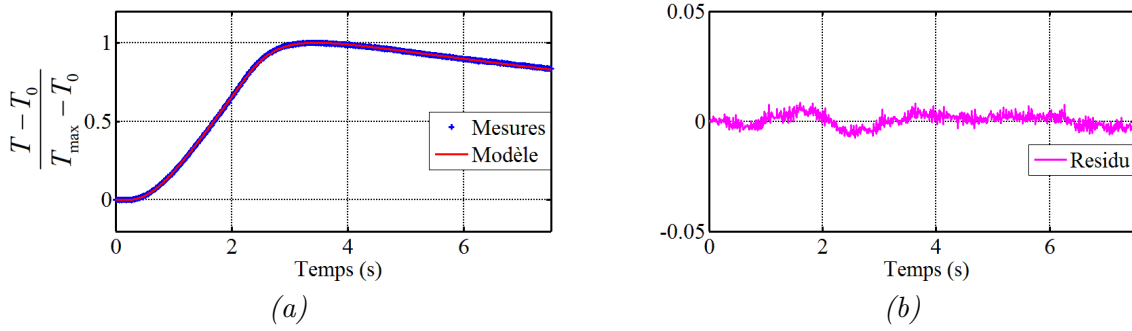


Figure 7 – Minimisation (a) entre le signal relevé en face arrière du composite N264 (56°) moyenné selon x et y et la transformée de Fourier pour les harmoniques $n=0$ et $m=0$ du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b)

Le refroidissement après 3s (normalisé par le maximum) (Figure 7(a)) est caractéristique des pertes convecto-radiatives sur les deux faces de l'échantillon. Pour améliorer la minimisation entre les deux signaux (expérimental et modélisé), ces pertes convecto-radiatives ont été modélisées et sont caractérisées par le paramètre $\eta_2 = h.e / k$ défini dans le chapitre précédent. Ce paramètre est estimé, mais n'est pas corrélé avec le groupement de paramètres $\eta_1 = a_z / e^2$.

La moyenne du résidu est de $0,00038^\circ\text{C}$, soit très proche de zéro. L'écart-type du résidu est de $0,003^\circ\text{C}$, soit 0,3% de la valeur maximale du signal (Figure 7).

Comme cela est montré dans le chapitre 4 §2.2.2.1, on estime le groupement de paramètres $\eta_1 = a_z / e^2$. L'estimation finale de a_z dépend de e^2 . Ainsi, la moindre erreur de mesure de l'épaisseur (au micromètre près) se propage et engendre de grandes variations de l'estimation de la diffusivité thermique, comme le montre la relation suivante :

$$\left(\frac{u_{a_z}}{a_z}\right)^2 = \left(\frac{u_{\eta_1}}{\eta_1}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{u_e}{e}\right)^2 \quad (5.10)$$

On souhaite ici n'estimer qu'un unique paramètre η_1 . Aucun biais systématique n'est introduit car le modèle ne dépend que de η_1 . L'erreur d'estimation s'exprime de la manière suivante :

$$e_r = \hat{\eta}_1 - \eta_1 \quad (5.11)$$

Avec η_1 la valeur vraie du paramètre recherché, et $\hat{\eta}_1$ la valeur approchée par l'algorithme Gauss-Newton. Soit ε le bruit de mesure, sa matrice de covariance vaut :

$$\text{cov}(\varepsilon) = \mathbf{I} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.12)$$

Avec \mathbf{I} la matrice identité et σ_ε l'écart-type du bruit de mesure. Soit S le vecteur des sensibilités du paramètre η_1 , alors la matrice de covariance s'écrit de la manière suivante :

$$\text{cov}(\mathbf{e}_r) = (S^T S)^{-1} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.13)$$

Dans le cas de l'estimation d'un unique paramètre, la matrice de covariance donne un scalaire du type :

$$\text{cov}(e_r) = \sigma_{e_r} \quad (5.14)$$

Ainsi, la matrice des sensibilités joue un rôle plus ou moins amplificateur du bruit de mesure présent initialement. D'après la relation (2.59) définie au chapitre 2, on a :

$$\eta_1 = \hat{\eta}_1 \pm 2 \cdot \sigma_{e_r} \text{ pour un intervalle de confiance de } 95,4\% \quad (5.15)$$

La minimisation entre le signal et le modèle à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton (Figure 8) donne, pour chaque échantillon les résultats présentés en Figure 8 :

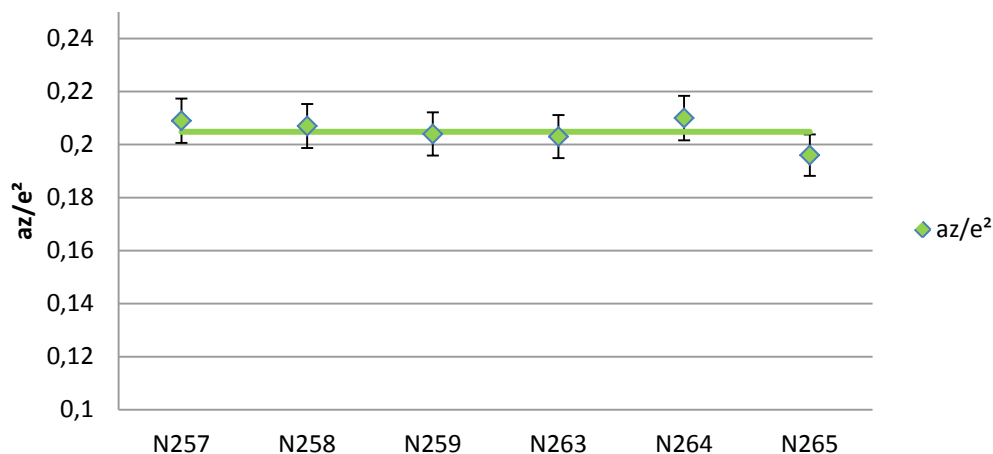


Figure 8 – Estimations de $\eta_1 = a_z / e^2$ (selon l'épaisseur) pour chaque éprouvette composite saine (présentée en 3.3.2)

On obtient une valeur stable qui confirme l'excellente reproductibilité du processus de fabrication de ces éprouvettes. Soit une valeur moyenne de $\eta_1 = 0,204 \pm 0,00408s^{-1}$. Ainsi $\eta_1 = 0,204 s^{-1}$ à 4% près pour un intervalle de confiance de 95,4% .

Avec une épaisseur moyenne de $e \approx 1,35mm$, on obtient une diffusivité moyenne de $a_z = 3,72 \cdot 10^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$ à 8% près pour un intervalle de confiance de 95,4%. η_1 est l'unique paramètre estimé par le modèle, il ne dépend pas de l'estimation d'un autre paramètre au préalable, ainsi ce paramètre n'est sujet qu'à une erreur de type A, c'est-à-dire que la

multiplication des mesures tend à réduire l'incertitude. L'estimation de a_z dépend de l'incertitude de la mesure de l'épaisseur. Ainsi cette grandeur est sujette aux deux types d'incertitudes A et B.

3.3.2.2. Estimation des diffusivités directionnelles

On souhaite estimer les diffusivités dans le sens des fibres de carbones et de verre. Une fois ces grandeurs connues, elles nous permettront d'utiliser la méthode du gradient conjugué pour estimer les termes sources de chaleur durant un essai.

Pour estimer ces diffusivités directionnelles on traite encore une fois le signal mesuré en (Figure 6) de la même manière que dans le chapitre 4 – Estimation de paramètres. Il suffit simplement de pivoter l'image IR dans le sens trigonométrique de manière à obtenir les fibres de carbones selon l'axe vertical et les fibres de verre selon l'axe horizontal. L'ellipse est alors étirée selon la verticale. Dans le sens des fibres de carbones, nous obtenons, pour chaque harmonique de Fourier, les estimations rassemblées sur la Figure 9 :

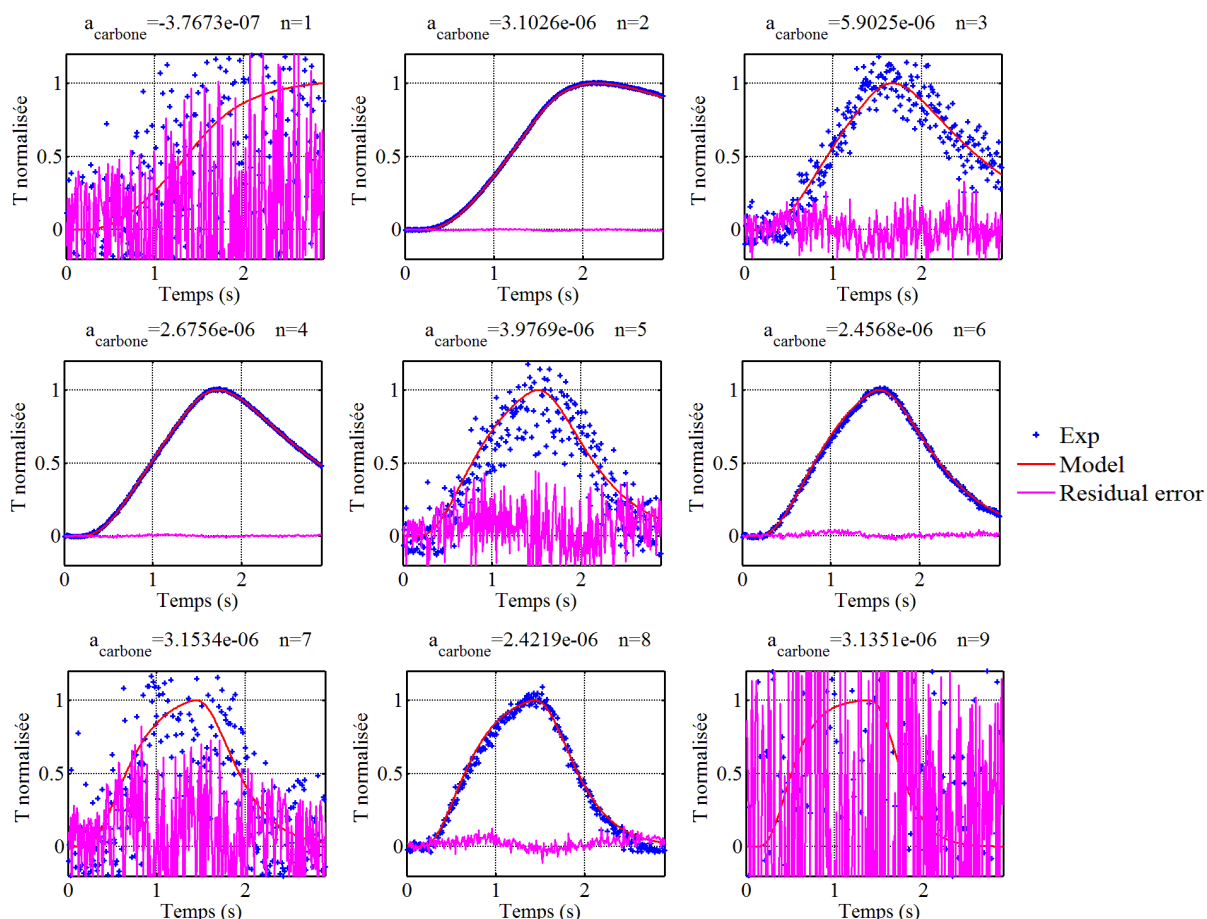


Figure 9 - Minimisations entre la Transformée de Fourier du signal expérimental moyenné sur la direction des fibres de verre (fibres de carbone orientées verticalement) pour l'éprouvette N264 (56°), et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $n=1$ à $n=9$, et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles

Les harmoniques les plus sensibles au transfert de chaleur transverse et possédant le meilleur rapport signal sur bruit sont les harmoniques 4, 6 et 8. Si l'on choisit cette fois-ci de minimiser non pas chaque harmonique mais la somme de ces 3 harmoniques, nous obtenons le signal présenté sur la Figure 12.

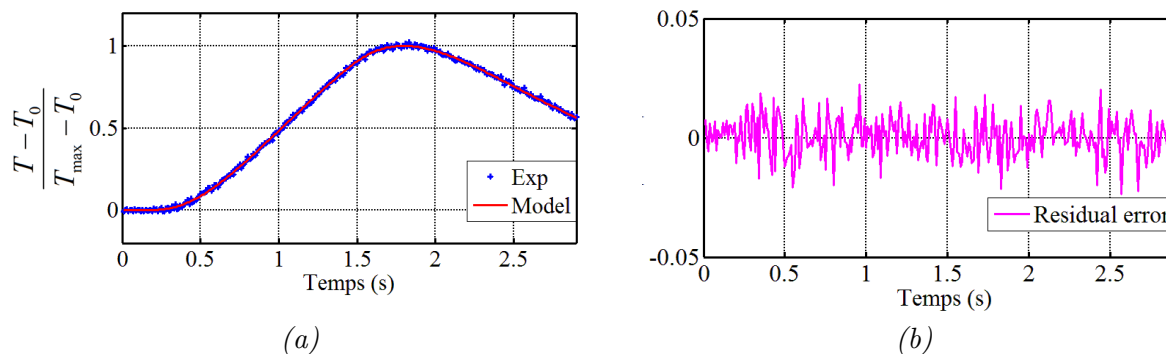


Figure 10 - Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$, du signal expérimental moyenné selon la direction des fibres de verre (pour l'éprouvette N264), avec la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles

Ces expériences sont répétées sur chaque éprouvette, et les résultats sont présentés sur la Figure 11.

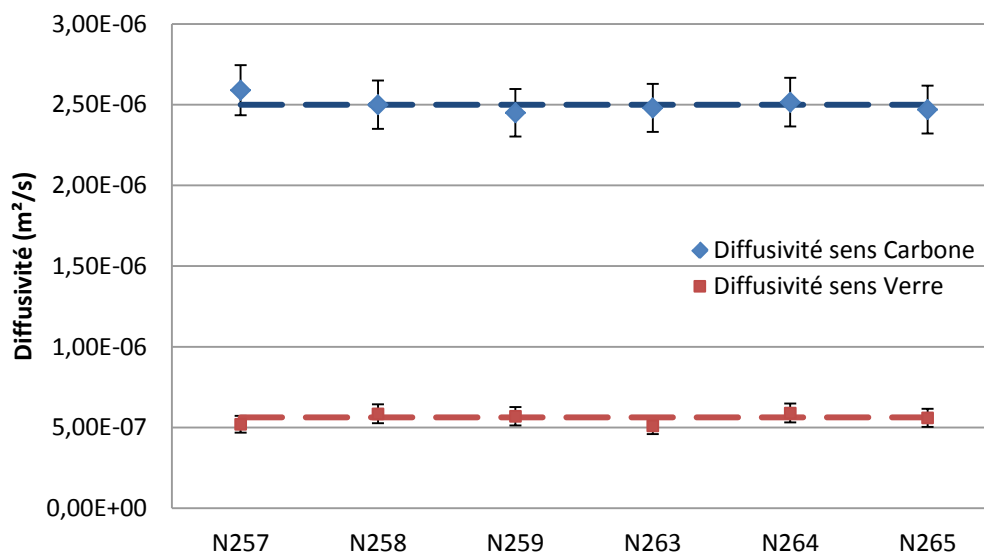


Figure 11 - Estimations des diffusivités transverses (selon l'axe des fibres de carbone et de verre) pour chaque éprouvette composite hybride

L'erreur d'estimation des paramètres $a_{carbone}$ et a_{verre} dépend de l'erreur réalisée précédemment sur le paramètre $\eta_1 = a_z / e^2$.

Ainsi, deux types d'erreurs sont cumulés ici :

- Une erreur statistique due au bruit de mesure
- Une erreur systématique induite par le précédent calcul de η_1

On obtient encore une fois des valeurs extrêmement stables :

$a_{\text{carbone}} \approx 2,5.10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ à 4% près pour un intervalle de confiance de 95,4%	$a_{\text{verre}} \approx 5,63.10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$ à 11% près pour un intervalle de confiance de 95,4%
--	--

4. Tests thermomécaniques

Pour estimer le champ des termes sources des matériaux composites pendant un essai mécanique, il est nécessaire de connaître les propriétés thermophysiques de ces matériaux. La masse volumique, la capacité calorifique, et les diffusivités directionnelles ont été déterminées dans le paragraphe précédent, nous avons :

$cp(J.kg^{-1}.K^{-1})$	$\rho(kg.m^{-3})$	$a_{\text{carbone}}(m^2.s^{-1})$	$a_{\text{verre}}(m^2.s^{-1})$
983	1623	$2,5.10^{-6}$	$5,63.10^{-7}$

Figure 12 – Tableau récapitulatif des propriétés thermo-physiques estimées, du matériau composite hybride sain (sur 6 échantillons)

De précédentes expériences [N. Boulebbad-Gomez, 2016], ainsi que nos films IR, montrent clairement deux catégories d'échantillons et d'endommagement :

- Les échantillons dont les fibres de carbone sont orientées de 90° à 70° sont sujets à la création de macro-fissures et donc à des échauffements très localisés.
- Les échantillons dont les fibres de carbone sont orientées de 70° à 30° sont plutôt sujets à des endommagements diffus.

On qualifie de macro-fissure la propagation d'une rupture de la matrice entre deux mèches de fibres sur toute la largeur de l'échantillon.

Un endommagement diffus sera, quant à lui, plutôt assimilé à un ensemble de microfissures ne traversant pas l'échantillon au complet, ainsi qu'au comportement viscoplastique de la matrice. Cet endommagement ne génère pas de sources de chaleur localisée, il y a donc peu d'intérêt à appliquer des méthodes d'estimation de termes sources de chaleur. Ce type d'échantillon sera plutôt analysé en post-traitement. Le but sera d'être capable de déterminer l'évolution des propriétés thermiques (comme la diffusivité thermique) pour tenter de déterminer l'endommagement mécanique.

4.1. Forme des échantillons

En ce qui concerne l'état de la technique des méthodes de test de tension transversale, des tests standards existent. La norme [Norme 2 - ASTM D5083] préconise des échantillons rectangulaires sans languette conique (sources de défaillances précoces, de délaminage, avec une sous-estimation de la force due à une concentration de contraintes dans ces zones). Enfin, la géométrie utilisée est de type « haltère » (Figure 13), avec l'avantage de ne pas avoir besoin d'utiliser des onglets renforcés pour éviter l'apparition d'effets de serrage. Le rayon élevé du bord des éprouvettes est choisi afin d'éviter un champ de contrainte non uniforme dans la longueur du calibre. On parle d'essai « matériau » et non d'un essai « structure ».

Les spécimens sont usinés à leur forme finale à l'aide d'un coupe-jet d'eau, un outil industriel capable de couper une grande variété de matériaux à l'aide d'un jet d'eau très haute pression à grande vitesse, sans utiliser ici d'abrasifs ajoutés. C'est le procédé préféré lorsque les matériaux en cours de coupe sont sensibles aux températures élevées générées par d'autres méthodes.

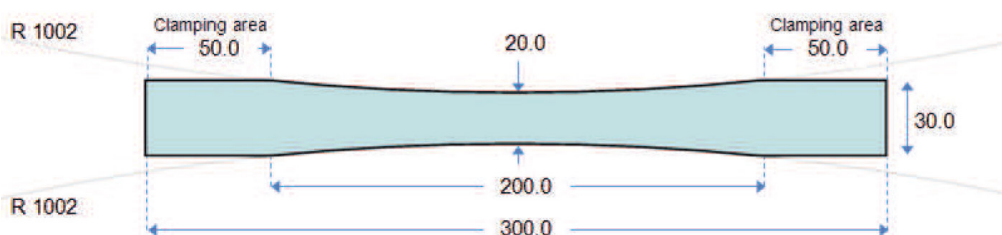


Figure 13 – Géométrie d'échantillon pour test de traction quasi-statique selon la norme 2 ASTM D5083, côtes en mm, (extrait de [N. Boulebbad-Gomez, 2016])

4.2. Description du banc

L'expérience consiste à réaliser des essais de traction (simple, quasi-statique, fatigue,...) sur nos matériaux, et de disposer de part et d'autre de la machine de traction (Figure 15):

- Une caméra IR Flir SC6000 afin de mesurer le champ de températures au cours du temps pour estimer le champ des termes sources par méthode inverse.
- Une caméra visible afin d'obtenir à l'aide d'un logiciel de corrélation d'images, des champs de déformations et de contraintes.

C'est ce type d'expérience qui a été utilisée dans [Andriyana et al, 2010] [Renault et al, 2010] [Maurel et al, 2011] [André et al, 2012] [Roche et al, 2013].

Aramis® est un logiciel de corrélation d'images numériques. Les images sont issues d'un système de mesure (Figure 14) sans contact et indépendant des matériaux. Ce système offre une solution fiable pour les analyses plein-champ ou basées sur des points.

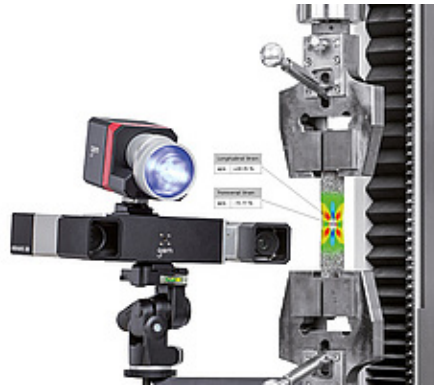


Figure 14 – Schéma d'une mesure optique avec corrélation d'images

Pour des échantillons et des composants chargés de manière statique ou dynamique, Aramis® fournit :

- Coordonnées des points de mesures
- Déplacements, vitesses et accélérations
- Contraintes de surface

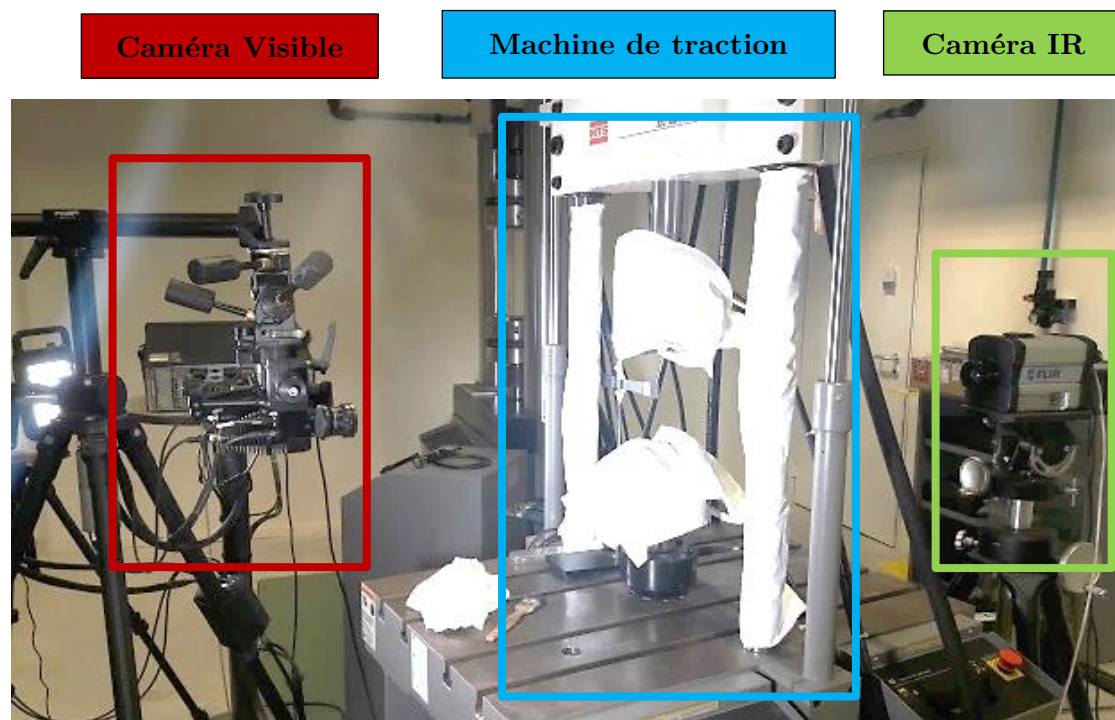


Figure 15 – Banc expérimental thermomécanique, avec caméra visible à gauche, caméra IR à droite, banc de traction au centre

Les essais de traction statique sont effectués avec des cycles de charge et décharge, en utilisant une machine MTS 100 KN (Figure 15). Les spécimens sont fixés à la machine à

l'aide de mâchoires hydrauliques. Nous ne dépasserons pas les 3% de déformation afin de ne pas subir trop d'effet d'advection de la matière (matériau étiré).

Remarque : Les contraintes expérimentales de positionnement de la caméra IR nous obligent à mesurer le champ de température à une distance plus grande que celle choisie pour la mesure de diffusivité thermique. On obtient ainsi une résolution des échantillons composites plus faible que précédemment, avec un pas spatial passant de $1,064.10^{-4}m$ à $3,7.10^{-4}m$ par pixel.

4.3. Résultats qualitatifs : repérage de macro-fissures

On s'intéresse plus particulièrement ici aux éprouvettes avec des fibres de carbones orientées à 78° . Ces échantillons ont la particularité de présenter un grands nombre de macro-fissures. L'échantillon N258 subit les charges et décharges présentées sur la Figure 16.

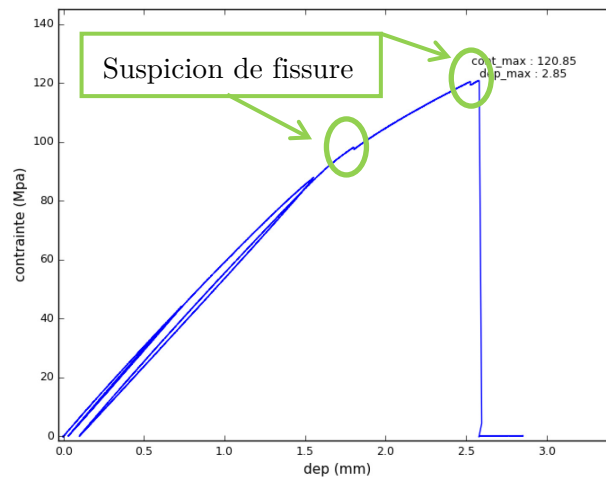


Figure 16 – Cycles contrainte-déplacement de l'éprouvette N258 sur 3 charges/décharges jusqu'à 120MPa

Le cycle contrainte-déplacement obtenu sur l'ensemble de l'échantillon donne déjà des informations sur l'apparition de certains défauts. En effet, quand on regarde les zones entourées en vert sur la Figure 16, des petits sursauts apparaissent et peuvent laisser penser qu'un événement s'est produit, comme l'apparition d'une fissure par exemple. L'éprouvette arrive à la rupture juste avant d'atteindre les 120MPa.

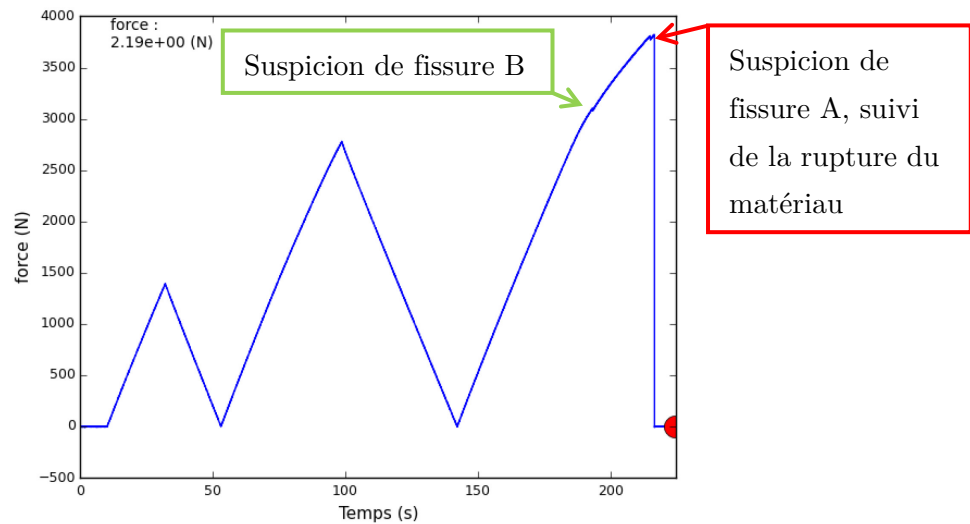


Figure 17 – Force de traction subie au cours du temps par l'échantillon N258 (78°)

Un changement de pente de l'augmentation de la force au cours du temps prend effet au niveau de la suspicion de fissure B de la Figure 17. Cette modification est directement liée à l'apparition d'une importante macro-fissure. Il s'en suit une rupture du matériau, au niveau de la suspicion de fissure A (Figure 17).

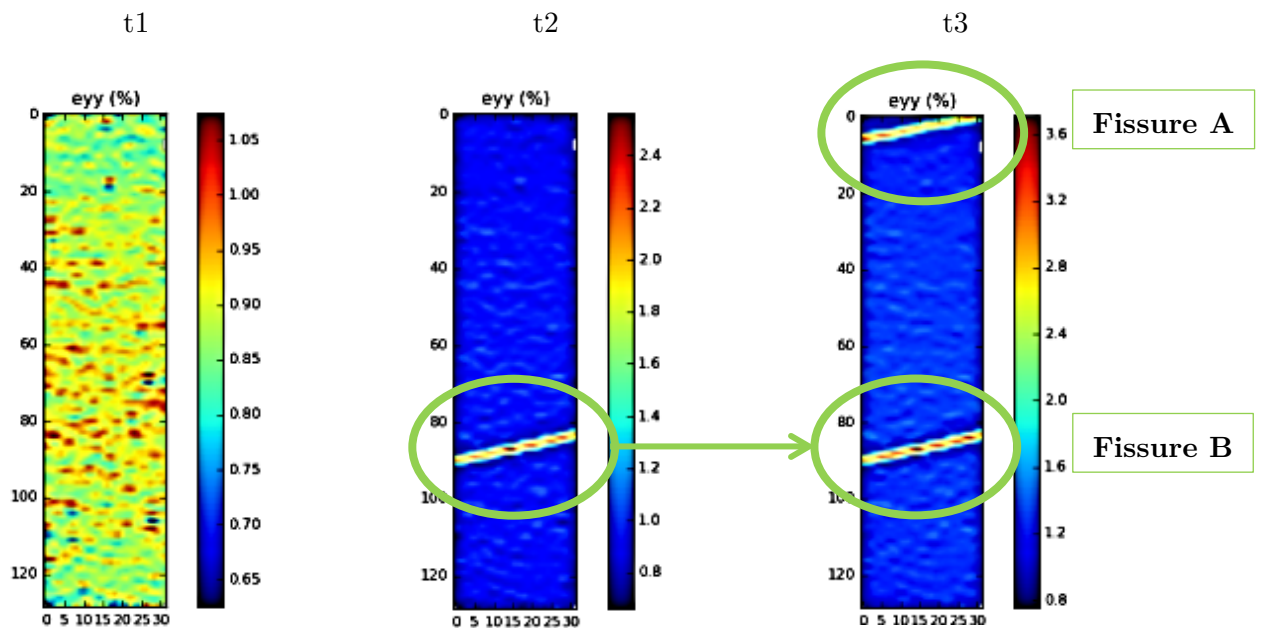


Figure 18 - Déformations locales au cours du temps, calculées par le logiciel Aramis à partir du système d'acquisition optique, de l'échantillon composite N258 (78°)

La Figure 18 montre les résultats de la corrélation d'image du logiciel Aramis à trois instants différents t1, t2 et t3. Ces trois instants sont mis en évidence sur la Figure 19.

Fonctionnement du calcul de corrélation d'images avec Aramis

Le système permet l'acquisition directe d'images au moyen de caméras visibles. La corrélation d'images numériques (DIC) est une méthode de mesure des coordonnées sans contact pour l'évaluation des surfaces, des déplacements et de la déformation (en 2D ou en 3D si plusieurs caméras sont connectées).

Des marqueurs de points (réguliers ou aléatoires) sont utilisés pour décrire des zones d'images discrètes. Ceci permet au logiciel de mailler virtuellement l'éprouvette observée. Les résultats de mesure sont basés sur l'analyse des points et l'analyse plein champ. L'objectif est de déterminer les comportements statiques et dynamiques des échantillons, tels que les déplacements et contraintes.

La Figure 19 présente le déplacement du vérin (et donc de l'échantillon) au cours du temps. On remarque au cours de l'essai de traction, au milieu de la troisième et dernière charge en traction (amenant à 120MPa l'échantillon), que des déformations se localisent, elles sont entourées en vert sur la Figure 18.

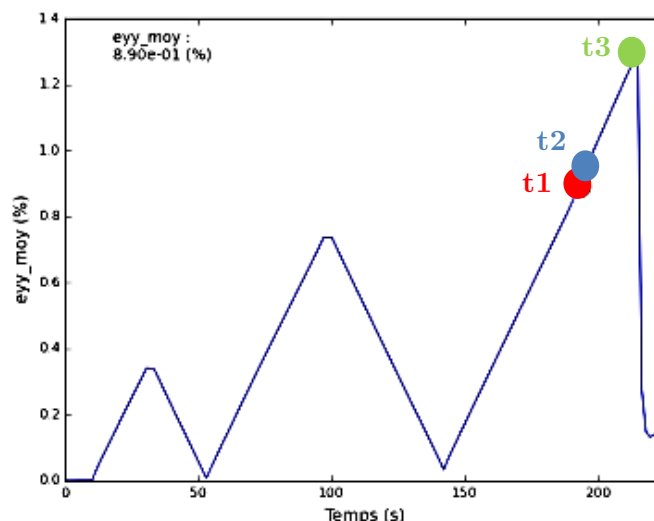


Figure 19 – Avancement au cours du temps du déplacement subi par l'échantillon N258 (78°) avec repérage des instants t_1 , t_2 et t_3

Les photos de la Figure 20 mettent qualitativement en évidence le lien entre la localisation des déformations calculées par le logiciel Aramis® et les macro-fissures observables au microscope.

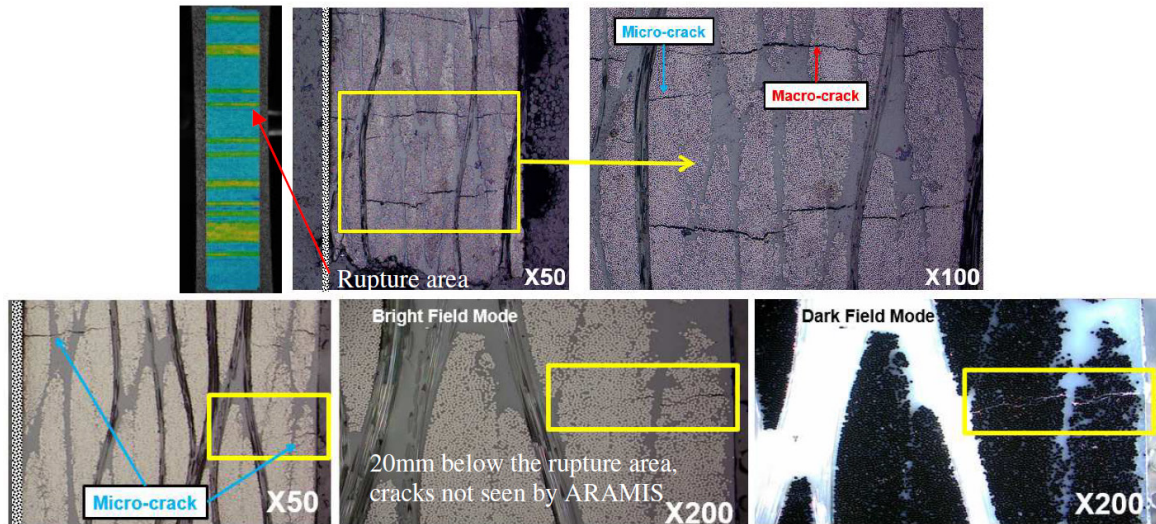


Figure 20 – Essai quasi-statique en traction sur échantillon avec fibres de carbone orientées à 90°. Zoom au microscope proche de la zone de rupture à 20mm de distance d'un objectif (x50-x100-x200), extrait de [N. Boulebbad-Gomez et al, 2016]

Remarque : Ces photos ne sont pas issues de l'échantillon N258 (78°), mais d'un échantillon du même type, de 2mm d'épaisseur et avec des fibres de carbonés orientées à 90°.

A présent, intéressons-nous à la mesure du champ de température au cours de l'essai subi par l'échantillon N258. Le champ de température mesuré par la caméra IR semble également faire apparaître les mécanismes de la rupture (Figure 21).

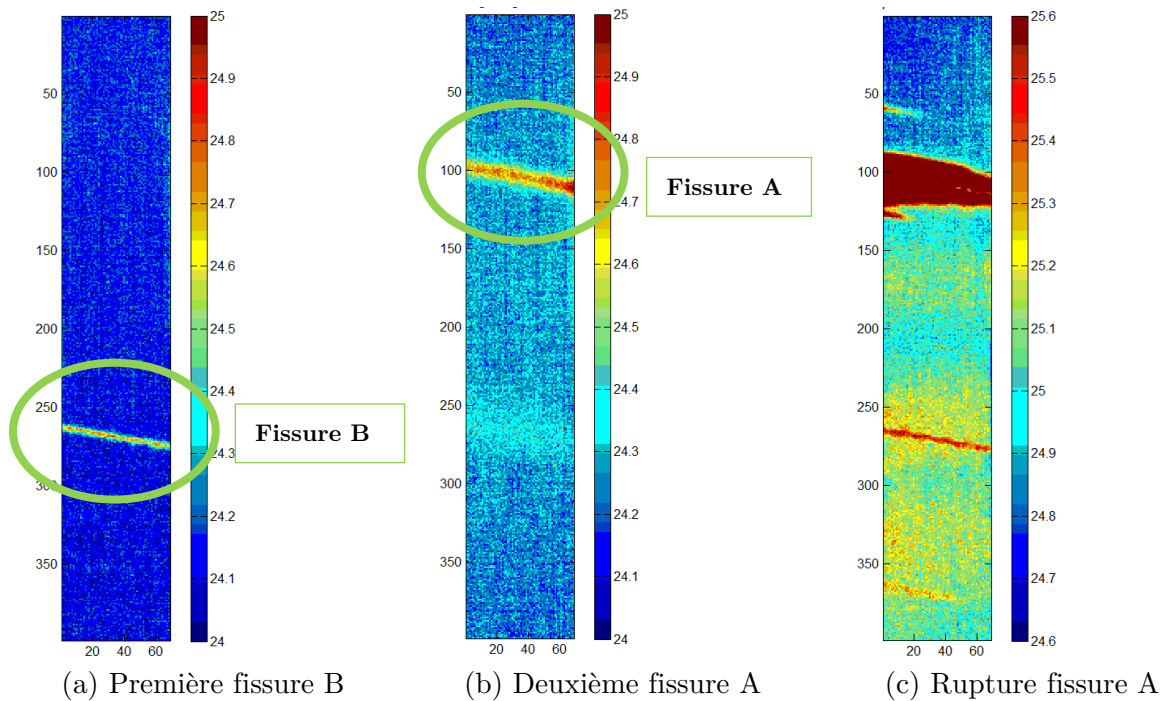


Figure 21 – Champs de température de l'échantillon N258 (78°) au cours de l'essai de traction

La Figure 21(a) montre l'apparition d'un échauffement localisé au même endroit que la première localisation de déformations repérée par le logiciel Aramis® sur la Figure 18. Cette zone n'engendre pas de rupture, mais cet échauffement semble révélateur d'une fissure importante du matériau.

En continuant à tirer sur le matériau, nous voyons apparaître sur la Figure 21(b) une seconde macro fissure.

La Figure 21(c) montre que la seconde macro-fissure est immédiatement suivie d'une rupture de l'échantillon, Cette rupture entraîne un dégagement d'énergie sous la forme d'un « choc » qui révèle la précédente macro-fissure (par frictions et compressions), et révèle également un ensemble d'autres fissures, sans doute moins « profondes » qui n'avaient pas été visualisées auparavant durant l'essai.

Lorsqu'à cet instant final (Figure 21(c)), on retrace un profil 1D vertical du champ de température, nous pouvons observer sur la Figure 22 trois zones distinctes : la zone de rupture de l'échantillon, un ensemble de fissures non détectées auparavant pendant l'essai, et des zones où la température augmente de manière plus diffuse.

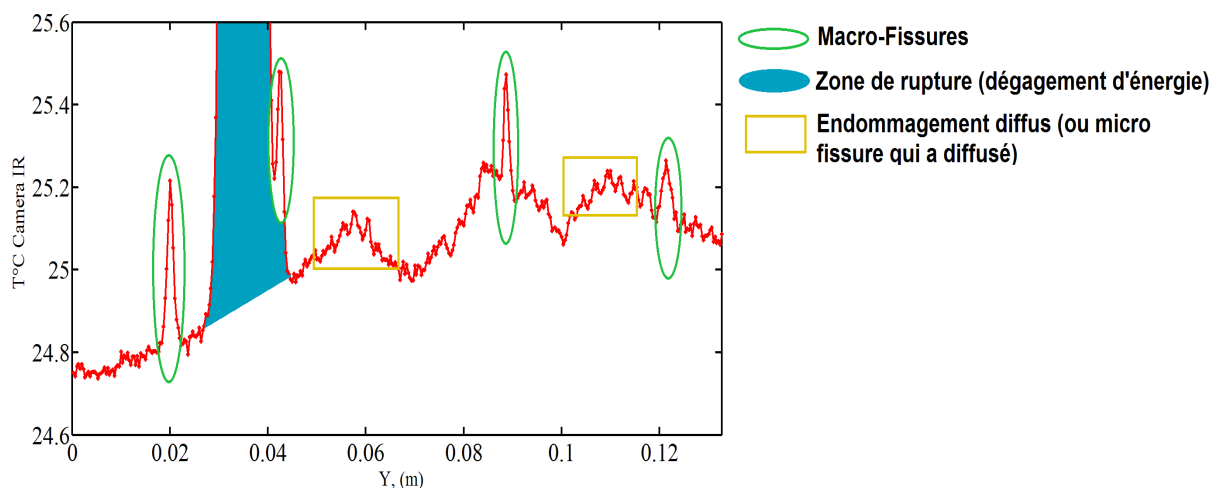


Figure 22 – Profil 1D vertical du champ de température au moment de la rupture (Figure 21(c)) de l'échantillon N258 (78°)

4.4. Résultat quantitatif : estimation de sources

Afin de réduire le temps de calcul et de simplifier l'étude, on traite de manière séparée chaque échauffement localisé (associé à un terme source, associé lui-même à une fissure).

On choisit de pivoter de 78° le champ de température mesuré de manière observer un matériau où les fibres de carbone sont verticales et les fibres de verres horizontales. Cette

manœuvre permet de programmer la résolution des équations (de l'algorithme MGC) dans un repère cartésien orthotrope.

Les échauffements sont mesurés au niveau des fissures par fenêtrage. Pour la fissure qui mène à la rupture l'échauffement est mesuré très proche de la zone de rupture.

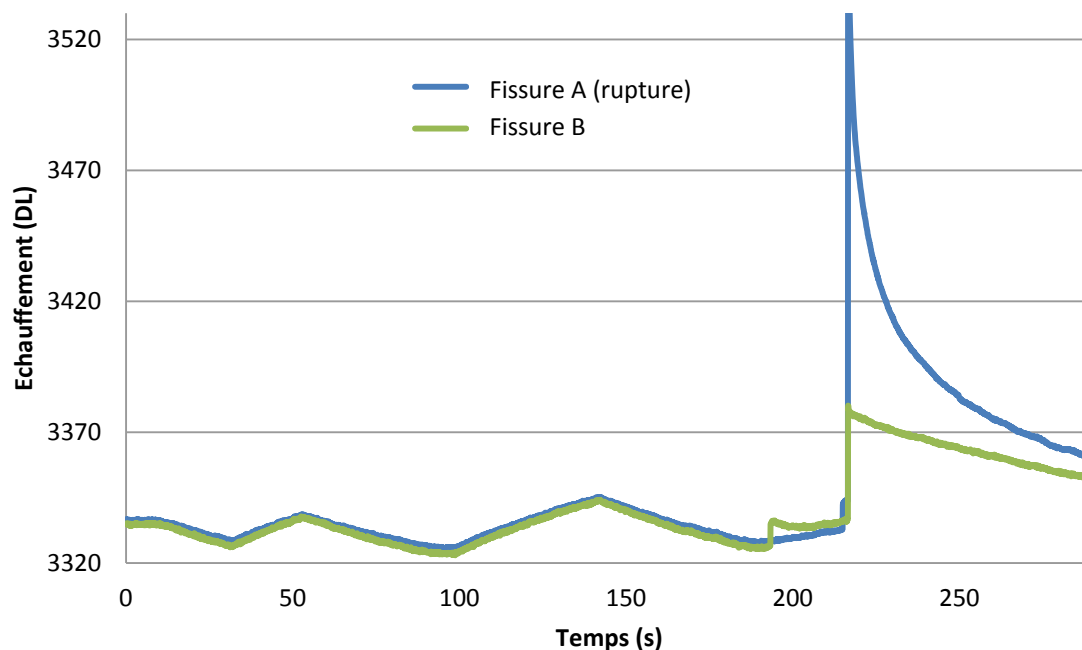


Figure 23 – Thermogrammes moyens des deux zones de fissure, en DL (Digital Level), de l'éprouvette N258 (78°), jusqu'à la rupture

Pendant l'essai, lors de la première phase de traction, on remarque que la température diminue dans un premier temps sur la Figure 23. Cette dernière courbe est tracée en DL(t), les DL (Digital Levels) sont des niveaux informatiques issus de la conversion brute des luminances captées par le détecteur de la caméra IR. Ce comportement apparaît lorsque le matériau n'a toujours pas été endommagé, ce phénomène est réversible. A l'image d'un gaz dont la température chute lorsqu'il est dilaté, l'échantillon subit des détentes locales qui tendent à le refroidir. On constate également que ces successions d'échauffements et refroidissements oscillent autour de la température de départ.

On s'intéresse aux énergies mises en jeu lors des sursauts de température. On utilise donc la méthode du gradient conjugué (mise en place dans le chapitre 3) sur chaque zone où l'on remarque l'apparition de fissures. La résolution de l'équation de la chaleur utilisée par l'algorithme du gradient conjugué nécessite que le signal soit, cette fois-ci, exploité en (°C) et non en (DL).

On applique cette méthode d'estimation uniquement sur la fin du signal, car les échauffements et refroidissements successifs qui ont lieu de 0 à 180s sont très homogènes, et

ne révèlent pas de localisation. On applique la méthode de 180s à 270s pour la fissure B (soit une durée de 80s), et on applique la méthode de 193s à 220s pour la fissure A (soit une durée de 27s) avec un arrêt juste après la rupture.

4.4.1. Fissure A (suivie d'une rupture)

Intéressons-nous d'abord à la fissure A (qui est la seconde à apparaître pendant l'essai). Cette fissure est immédiatement suivie de la rupture totale de l'échantillon.

La Figure 24 donne le profil temporel de la source estimée sur la zone englobant la fissure A. On observe l'apparition d'aucune source et un état très stable autour de zéro avant la rupture.

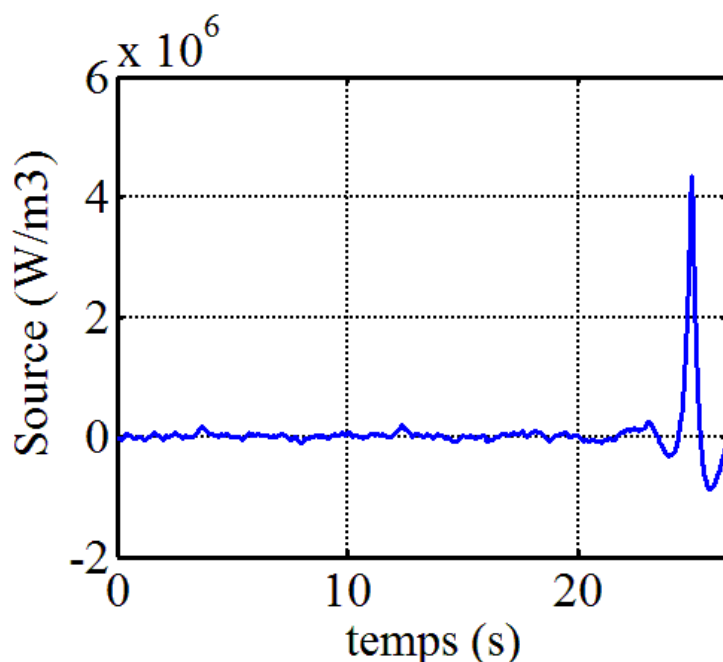


Figure 24 - Profil temporel de la source estimée sur la fissure A, n'entraînant pas la rupture (source moyennée sur la zone où la source prend effet spatialement), pour l'essai sur l'éprouvette N258 (78°),

La zone où la source prend effet est définie par une bande verticale de 4 pixels de largeur et 60 pixels de longueur.

Comme dit précédemment dans §4.2, le pas spatial a été affecté par les contraintes expérimentales de positionnement de la caméra IR, on a ainsi un pas spatial de $3,7 \cdot 10^{-4} m$. Le profil spatial de la source estimée, à l'instant où il est maximal, est donné sur les Figure 25 et Figure 26.

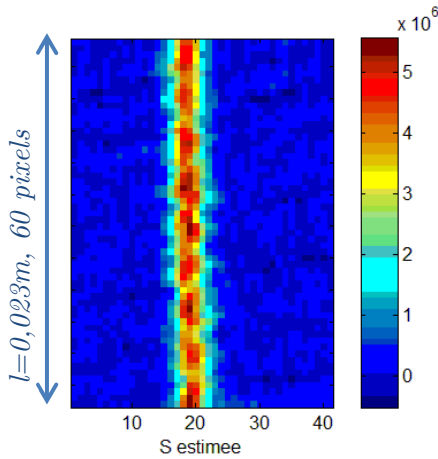


Figure 25 – Champ des termes source estimés à l’instant du pic de production de chaleur, fissure A, jusqu’à la rupture (niveaux de couleurs en W/m^3)

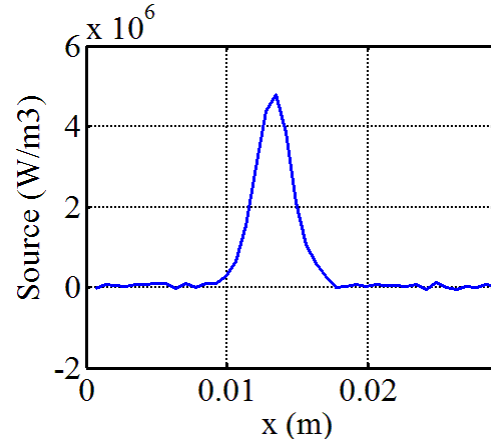


Figure 26 - Profil 1D des termes source estimés à l’instant du pic de production de chaleur, fissure A, jusqu’à la rupture

Malgré l’arrêt de l’algorithme d’estimation juste à l’instant qui suit la rupture (aucune diffusion latérale n’est donc observable), la méthode du gradient conjugué parvient à estimer avec stabilité la source naissant au cœur de cette fissure. Son niveau d’énergie est d’environ $5.10^6 W/m^3$ (Figure 26). On peut donc associer la rupture de ce type de matériau (avec cette orientation) avec cette densité volumique de puissance estimée. A titre de comparaison, N. Renault estime dans [N. Renault, 2007] des sources du même ordre de grandeur allant de $1.10^6 W/m^3$ à $8.10^6 W/m^3$ sur des composites à matrice thermoplastique PEHD.

Pour se convaincre également de la convergence de l’algorithme, observons les champs de températures mesuré par thermographie et estimé par MGC, et vérifions si le critère de convergence a été atteint par l’algorithme (Figure 27).

Le bruit de mesure de la caméra IR est estimé à $0,05^\circ C$. Nous avons pu dans le chapitre 3 définir le critère d’arrêt de l’algorithme du gradient conjugué qui s’exprime (dans le cas global) de la manière suivante :

$$Seuil = \frac{1}{2} N_x \cdot N_y \cdot N_t \cdot \sigma^2 = 2360 \quad (5.16)$$

N_x, N_y, N_t - Nombre de points selon les axes x, y, t

σ – Ecart-type du bruit de mesure

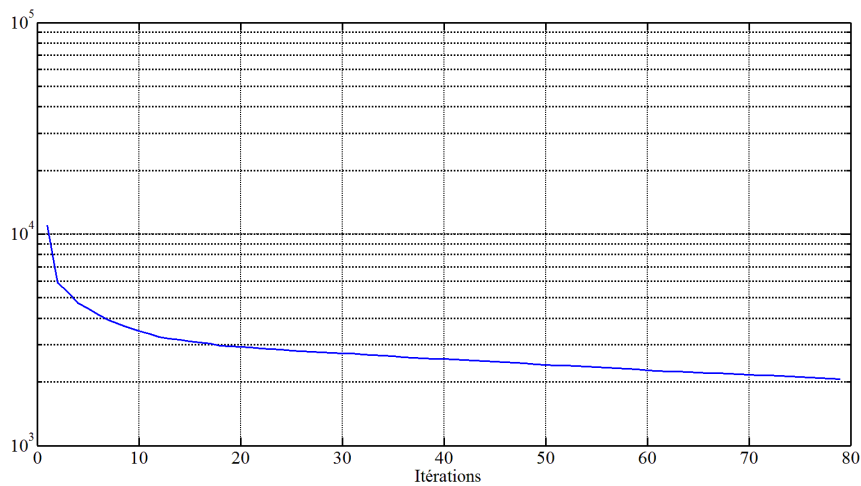


Figure 27 – Evolution du critère de l'algorithme MGC utilisé pour l'estimation de source de l'échantillon N258 (78°) pendant l'essai de traction, autour de l'apparition de la fissure A en fonction de l'avancée des itérations

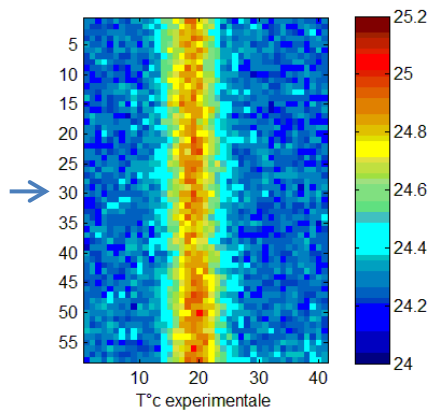


Figure 28 - Champ de température mesuré par thermographie IR (niveaux de couleurs en °C), à $t=34s$

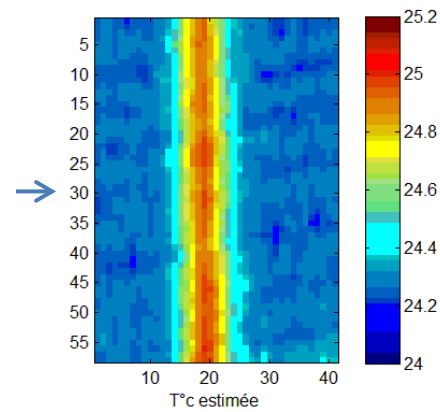


Figure 29 - Champ de température estimé par l'algorithme MGC (niveaux de couleurs en °C), à $t=34s$

La Figure 28 montre le champ de température mesuré par thermographie infrarouge autour de la fissure A. La Figure 29 montre le champ de température estimé à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué.

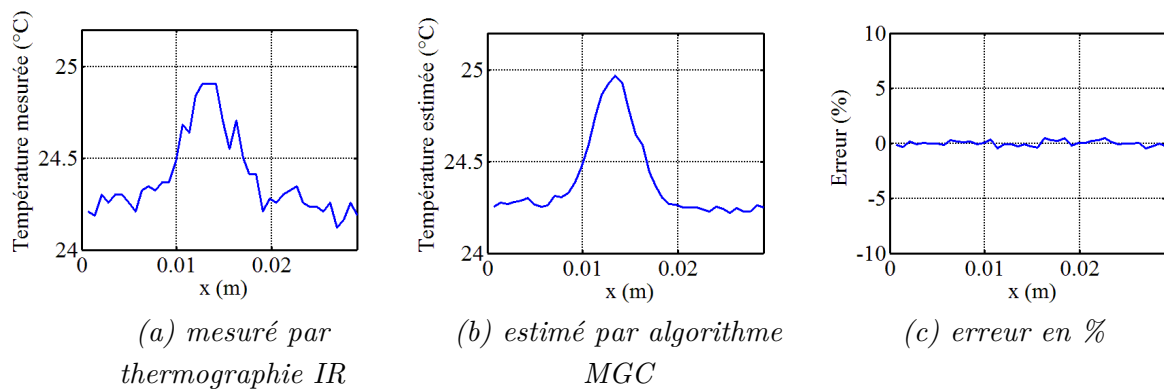


Figure 30 - Profils 1D (au niveau du pixel vertical n°30 marqué par une flèche bleue sur les Figure 28 et Figure 29) à $t=34s$

La Figure 30 montre un profil 1D du champ de température mesuré, puis estimé, et enfin l'erreur correspondante en pourcentage. Ainsi on observe qu'après avoir convergé (en seulement 80 itérations), l'algorithme estime un champ de température tout à fait correct avec une erreur relative inférieure à 1%.

Remarque : L'instant d'affichage des profils (Figure 30) n'est pas calculé à partir du début de l'expérience thermomécanique, mais à partir de l'extrait du signal de 193 à 220s.

4.4.2. Fissure B (sans rupture)

Intéressons-nous maintenant à la fissure B (qui apparaît bien avant la fissure A). Comparons les niveaux d'énergies mis en jeu.

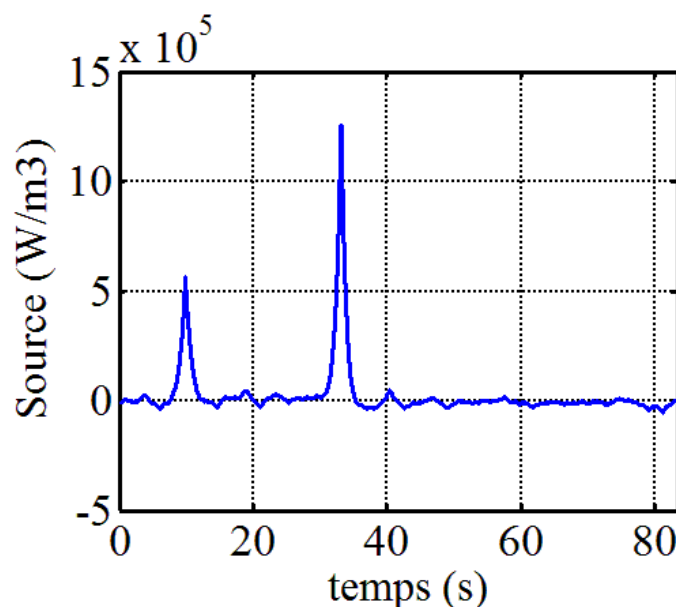


Figure 31 – Profil temporel des sources estimées sur la fissure B, (source moyennée sur la zone où la source prend effet spatialement)

La fissure associée à ces deux pics de source de chaleur (Figure 31) n'est pas suivie d'une rupture.

Le premier pic de la Figure 31 (qui apparaît au bout de 10s de la plage temporelle choisie pour appliquer la MGC, ou après 193s du temps réel de l'essai) semble être issu de la création de la fissure B et révèle un terme source dépassant difficilement les $5 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$. Cette densité volumique d'énergie n'est pas suffisamment importante pour être issue de la rupture totale des 8 plis.

Le second pic observé (Figure 31) semble frôler les $1,3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ et s'approcher du niveau d'énergie mis en jeu lors de la rupture de la fissure A (Figure 32, Figure 33, Figure 34, Figure 35).

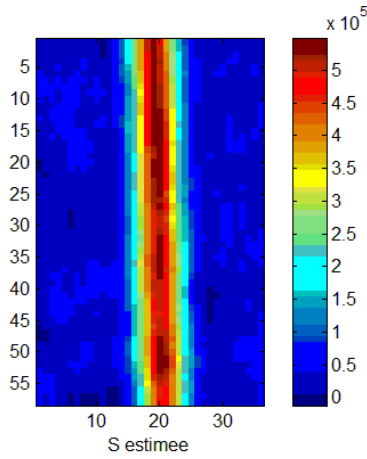


Figure 32 – Champ des termes source estimés à l’instant du premier pic de production de chaleur ($t=10s$), fissure B, niveaux de couleurs en W/m^3

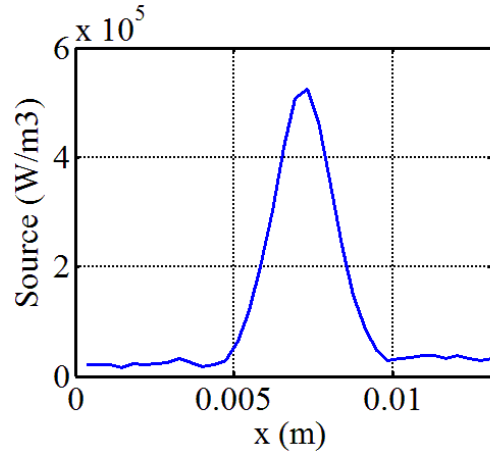


Figure 33 – Profil 1D des termes source estimés à l’instant du premier pic de production de chaleur ($t=10s$), fissure B

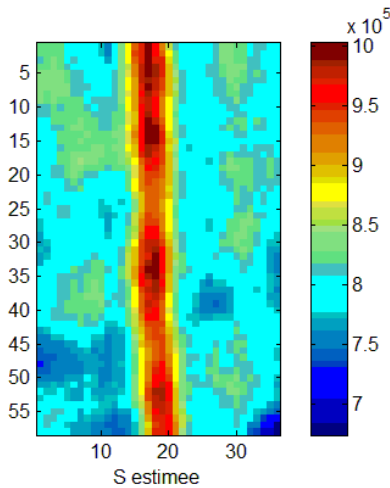


Figure 34 – Champ des termes source estimés à l’instant du deuxième pic de production de chaleur ($t=35s$), fissure B, niveaux de couleurs en W/m^3

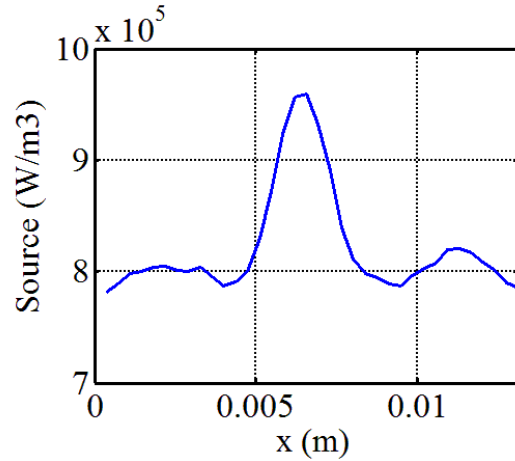


Figure 35 – Profil 1D des termes source estimés à l’instant du deuxième pic de production de chaleur ($t=35s$), fissure B

Le choc, de la rupture de la fissure A, semble dégager une énergie suffisante pour générer de nouvelles contraintes mécaniques (et phénomènes locaux de friction [Renshaw et al, 2011]), provoquant ainsi de nouveaux échauffements sur les précédentes fissures (non suivies d’une rupture). Ce mécanisme semble être analogue à la vibro-thermographie employée couramment en contrôle non-destructif [Reifsnider et al, 1980]. Il serait donc envisageable de mettre en place une méthode de visualisation des fissures à posteriori.

Le mécanisme semble suivre la logique suivante :

Choc \rightarrow Frictions & Compressions (Fibres/Matrice) \rightarrow Echauffement

Pour se convaincre de la convergence de l’algorithme, observons encore une fois les champs de températures mesuré par thermographie et estimé par MGC.

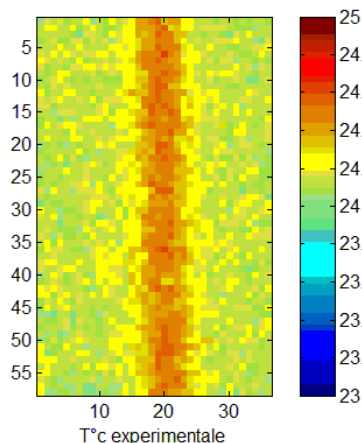


Figure 36 - Champ de température mesuré par thermographie IR (niveaux de couleurs en °C), à $t=11s$

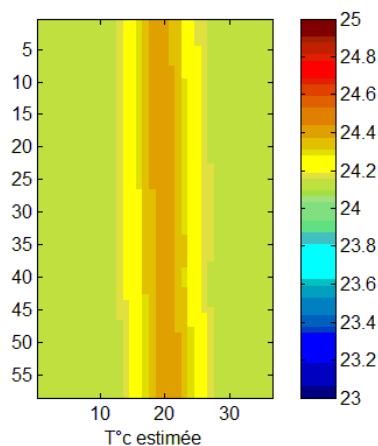


Figure 37 - Champ de température estimé par l'algorithme MGC (niveaux de couleurs en °C), à $t=11s$

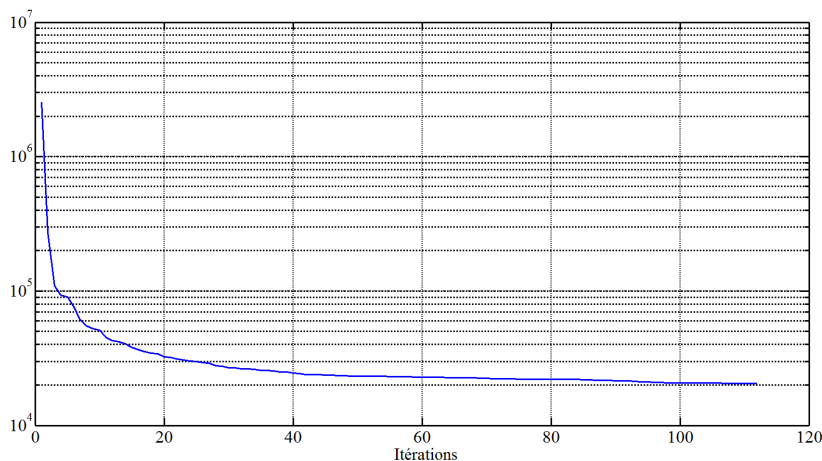


Figure 38 - Evolution du critère de l'algorithme MGC utilisé pour l'estimation de source de l'échantillon N258 (78°) pendant l'essai de traction, autour de l'apparition de la fissure B, en fonction de l'avancée des itérations

La Figure 36 montre le champ de température mesuré par thermographie infrarouge autour de la fissure B. La Figure 37 montre le champ de température estimé à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué.

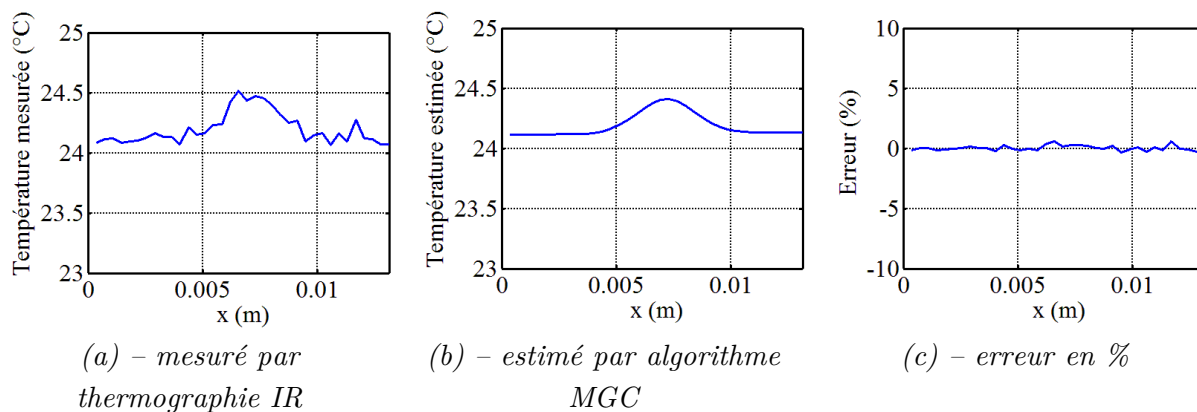


Figure 39 - Profils 1D mesuré (à gauche), estimé (au centre), erreur en % (à droite), à $t=11s$

La Figure 39 montre un profil 1D du champ de température mesuré, puis estimé, et enfin l'erreur correspondante en pourcentage. Ainsi on observe qu'après avoir convergé, l'algorithme estime un champ de température tout à fait correct avec une erreur relative encore une fois inférieure à 1%.

Les méthodes d'estimations, et plus particulièrement la méthode du gradient conjugué, ont été validées numériquement, puis avec une expérience thermique dans le chapitre 3. Enfin nous venons de montrer qu'elles donnaient des résultats cohérents et très encourageants concernant les matériaux composites.

La suite de l'étude consisterait à trouver un lien plus précis entre les différents mécanismes de ruptures rencontrés dans un composite et la valeur des termes sources estimés. Une campagne d'expérimentations beaucoup plus large permettrait de mieux comprendre la relation entre un type de composite, l'orientation de ses fibres, son épaisseur, et un niveau d'énergie.

De manière générale, dans le cadre d'un matériau sollicité mécaniquement, les sources de chaleurs qui apparaissent peuvent être issues de sources externes au matériau, de la dissipation intrinsèque aux irréversibilités mécaniques, d'un terme de couplage thermomécanique, et/ou d'un terme de couplage entre déformation et température [O. Westphal, 2014]. (Cf annexe 7).

Une estimation précise des termes sources globaux mis en jeu au sein d'un composite peut permettre d'identifier, en fonction de la puissance ou la localisation, le mécanisme de dissipation mécanique mis en jeu.

5. Mesure du niveau d'endommagement

5.1. Essais mécaniques

Initialement, nous disposions également de matériaux avec des fibres de carbone orientées à 67°. Cependant, avec cette orientation, le comportement des matériaux est situé trop à la frontière entre un endommagement localisé et un endommagement diffus, on ne peut pas obtenir de résultat significatif. Une à deux macro-fissures, apparaissent fréquemment durant les essais.

Les courbes donnant la déformation moyenne verticale au cours du temps (Figure 42), ne sont valables que si l'on peut considérer l'endommagement comme diffus ; c'est-à-dire lorsque cette moyenne spatiale n'englobe pas de macro-fissure [N. Boulebbad-Gomez, 2016]. Une

seule macro-fissure peut fausser un calcul de déformation car localement les déformations sont très importantes.

Nous nous intéresserons donc en priorité aux 3 échantillons 56° dont on sait que l'endommagement subi sera diffus. Ils ont subi les chargements suivant :

Echantillon	Contrainte maximale subie (MPa)
N264	100
N263	118
N265	124 (rupture)

Chaque échantillon subit 4 cycles de charge/décharge en atteignant différentes contraintes maximales. Le but est d'obtenir trois niveaux d'endommagement différents et de tenter de les retrouver en utilisant les grandeurs mécaniques puis thermiques.

Bien que l'essai soit piloté en déplacement, il est possible à l'aide des données de la machine de traction MTS et du logiciel Aramis, de retrouver la contrainte en fonction du déplacement.

Sachant que les échantillons étudiés (N264, N263, N265) s'endommagent de manière diffuse, les graphes « contrainte-déplacement » et « contrainte-déformation moyenne » sont identiques (Figure 40, Figure 41)

Seul l'échantillon N265 donne des courbes très différentes car la rupture fausse les résultats (Figure 42).

Chaque échantillon N263, N264 et N265 subit les cycles de charges et décharges présentés sur les Figure 40, Figure 41 et Figure 42.

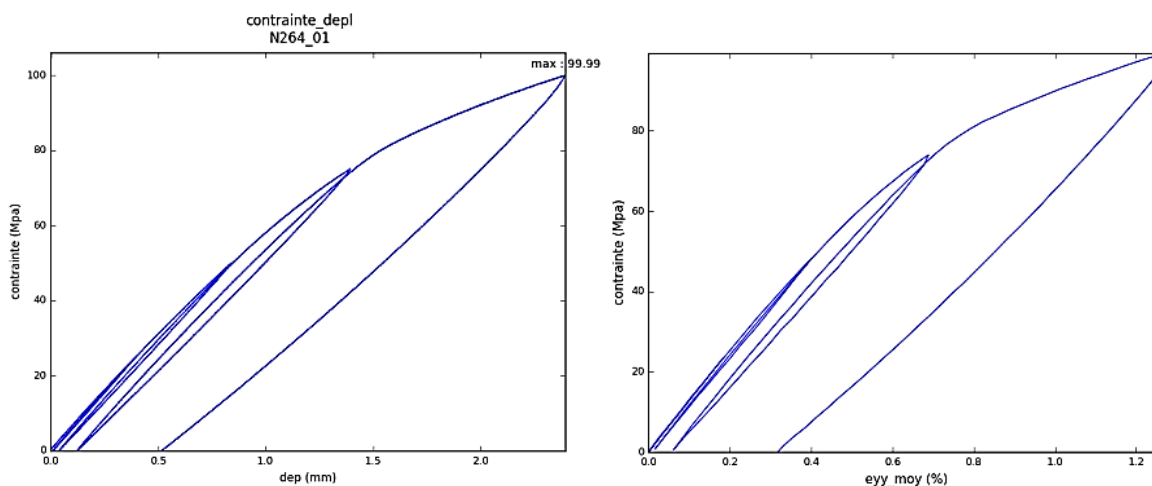


Figure 40 – Courbe contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l'échantillon N264 (jusqu'à 100MPa)

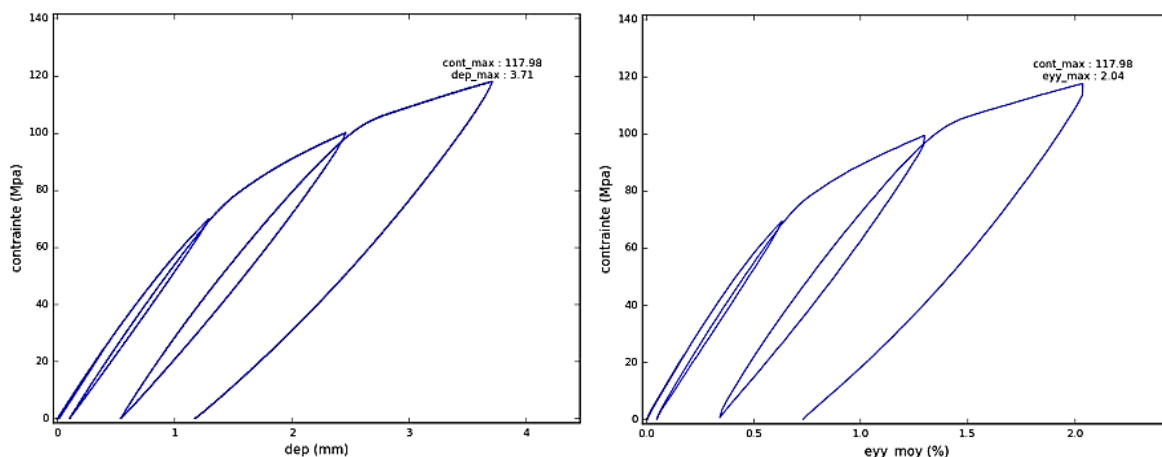


Figure 41 – Courbes contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l'échantillon N263 (jusqu'à 118MPa)

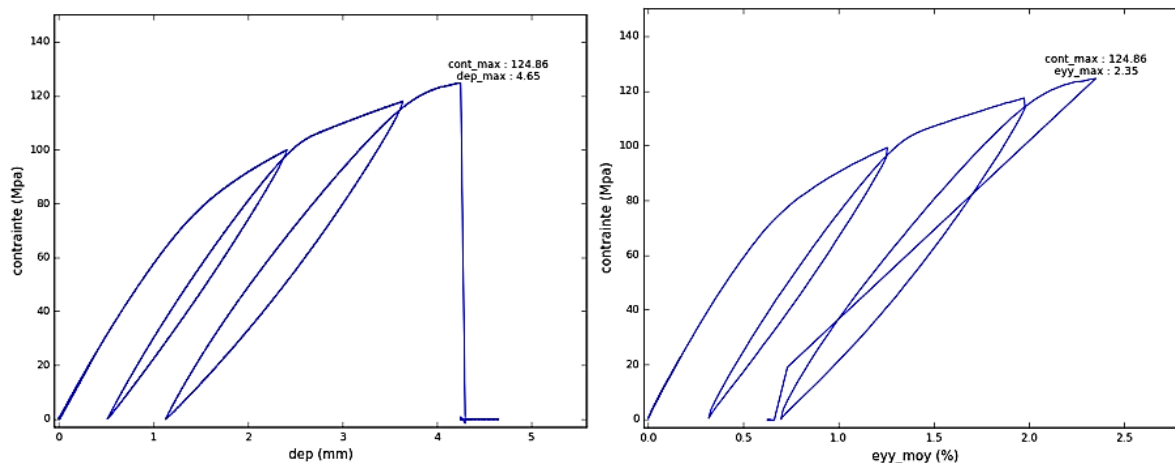


Figure 42 - Courbe contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l'échantillon N265 (jusqu'à rupture à 124MPa)

5.2. Estimation de diffusivités thermiques

On se propose de nouveau d'estimer les diffusivités thermiques directionnelles, mais cette fois-ci sur les échantillons endommagés.

5.2.1. Estimation des diffusivités selon l'épaisseur 1D

Dans le chapitre 4, deux méthodes d'estimation de la diffusivité thermique selon l'épaisseur sont présentées. Ici, nous utiliserons, comme dans §3.3.2.1 du chapitre 5, la méthode consistant à minimiser le signal expérimental moyenné spatialement en face arrière avec un modèle quadripôle 1D (soit aucune décomposition en harmoniques spatiales) car cette méthode donne des résultats plus stable (que la méthode des temps courts) et son incertitude associée est plus faible.

Prenons par exemple le cas de l'éprouvette N263 dont l'estimation par minimisation entre le signal mesuré et le signal modélisé est présentée sur la Figure 43.

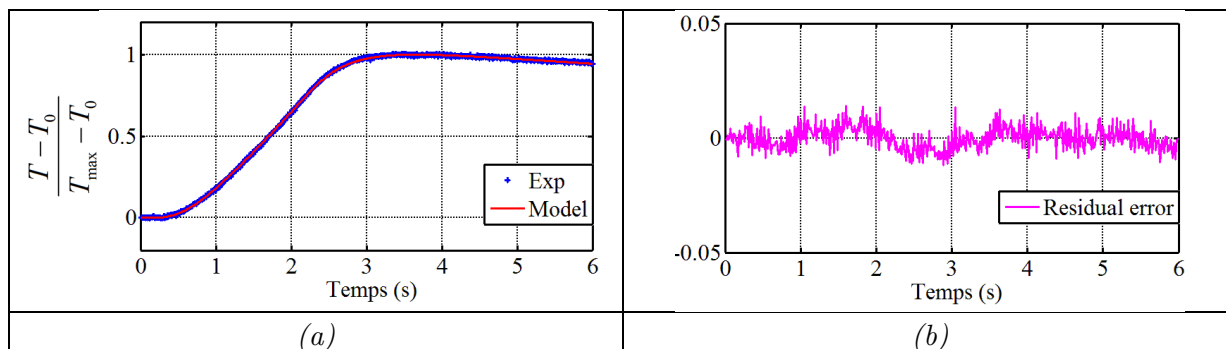


Figure 43 – Minimisation (a) entre le signal relevé en face arrière du composite N263 (56°) moyenné selon x et y et la transformée de Fourier pour les harmoniques $n=0$ et $m=0$ du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b)

Selon la méthode présentée dans le chapitre 4, et vue dans §3.3 du chapitre 5, la méthode des harmoniques nulles donne l'inverse d'un temps diffusif suivant : $a_z / e^2 \approx 0,212 \text{ m}^2 / \text{s}$

Echantillon	$a_z / e^2 \text{ (s}^{-1}\text{)}$	Incertitude pour un intervalle de confiance à 95,4%
N264	0,206	4%
N263	0,212	4%
N265	0,194	4,5%

Figure 44 – Résultat d'estimations des inverses de temps diffusifs pour chaque échantillon

On retrouve très peu de disparité (Figure 44). C'est bien en accord avec le fait que ces matériaux subissent très peu de délaminage. La diffusivité longitudinale (selon l'épaisseur) n'est pas affectée (Figure 45).

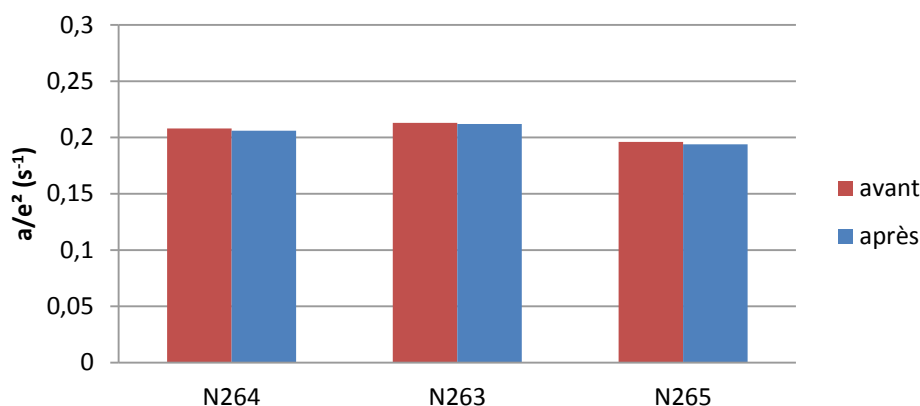


Figure 45 – Inverse de temps diffusifs selon l'épaisseur pour chaque niveau d'endommagement

5.2.2. Estimation des diffusivités directionnelles 3D

Prenons encore une fois comme exemple pour illustrer la minimisation, l'échantillon N263. Commençons par réaliser une minimisation du signal expérimental harmonique par harmonique.

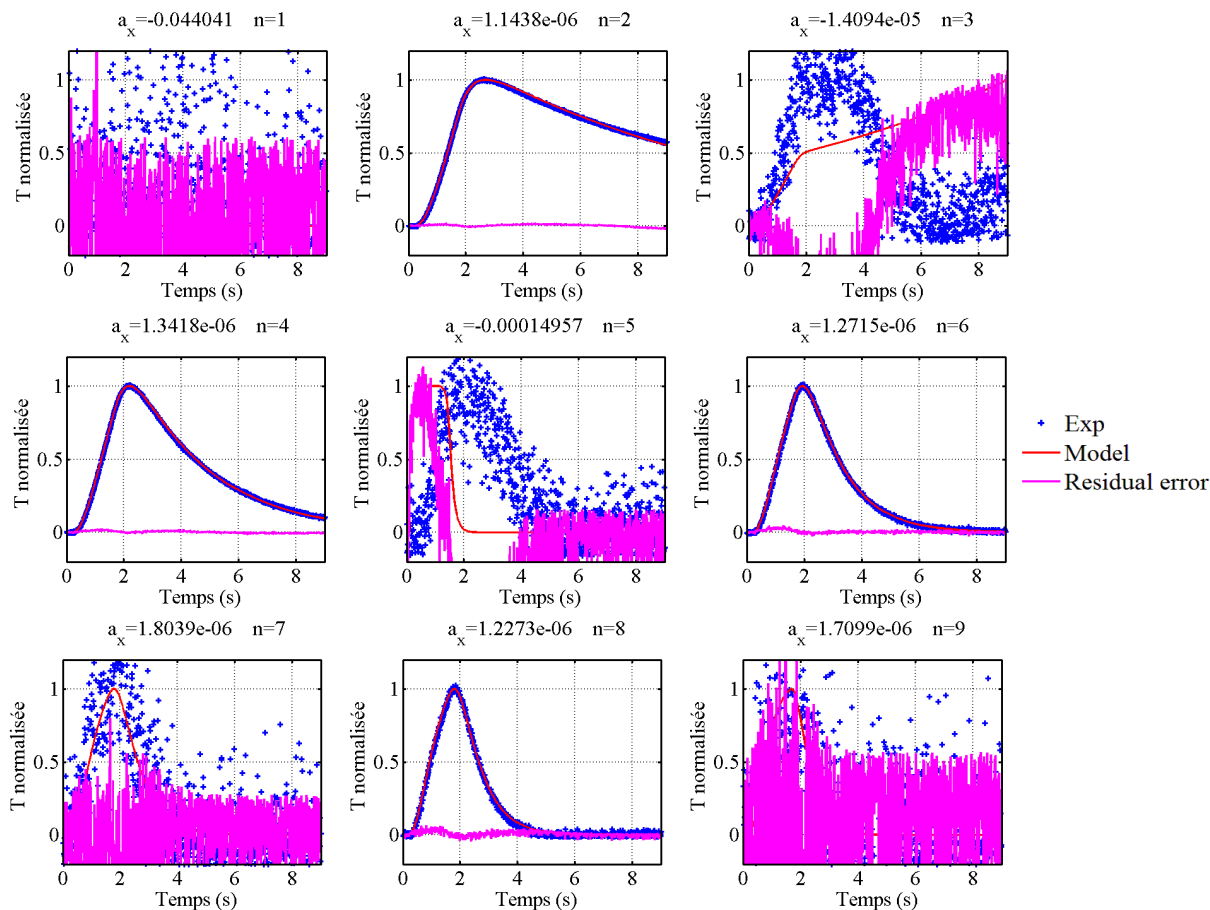


Figure 46 – Minimisations entre la Transformée de Fourier du signal expérimental moyenné sur y (direction de traction orientée verticalement) pour l'éprouvette N263 (56°) endommagée, et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques $n=1$ à $n=9$, et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles

De même que lors de l'étude sur des signaux numériques dans le chapitre 4, on observe (Figure 46), que seules les harmoniques paires contiennent des parts importantes du signal et que le bruit de mesure est décomposé sur les harmoniques impaires. Ceci vient des propriétés paires de la décomposition en cosinus, et de la position centrale de la sollicitation laser sur le matériau (Figure 4).

Plus les harmoniques sont grandes, plus elles contiennent des informations sur la diffusion transversale (x, y) et moins sur la diffusion longitudinale (z). Ainsi, l'harmoniques $n=2$ n'est pas aussi sensible que l'harmonique $n=6$ pour estimer la diffusivité selon x car elle est

moins sensible au transfert de chaleur dans cette direction. Cependant, les effets de bords apparaissent comme des perturbateurs de l'estimation à des temps plus réduits lorsque l'harmonique choisie est grande. Un compromis consiste à se baser sur l'harmonique $n=4$. Mais une autre solution peut également être envisagée, celle de réaliser la minimisation sur des sommes d'harmoniques, comme par exemple la somme des harmoniques 4, 6 et 8.

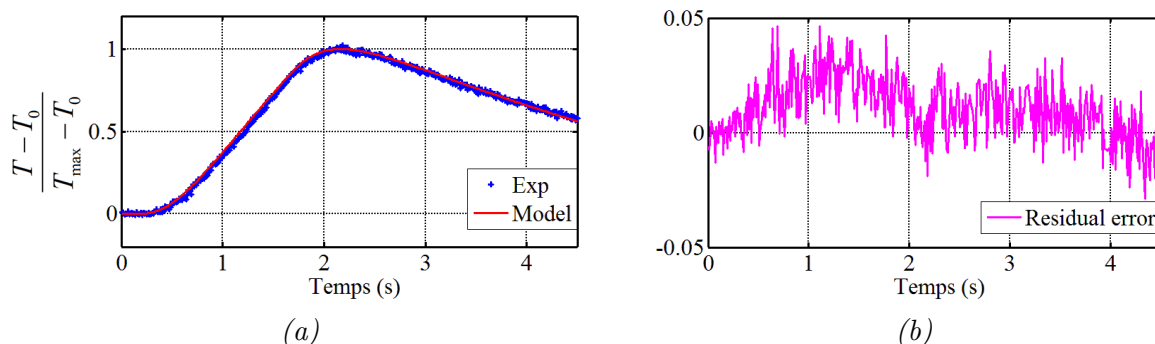


Figure 47 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$, du signal expérimental moyenné selon y (pour l'éprouvette N263), avec la somme des harmoniques de Fourier $n=4$, $n=6$, $n=8$ du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles

La minimisation sur un signal (Figure 47) comprenant la somme de trois harmoniques est acceptable car elle donne une valeur très stable et un résidu centré en zéro. La moyenne du résidu est de $0,0003^\circ\text{C}$, soit très proche de zéro. L'écart-type du résidu est de $0,006^\circ\text{C}$, soit $0,6\%$ de la valeur maximale du signal

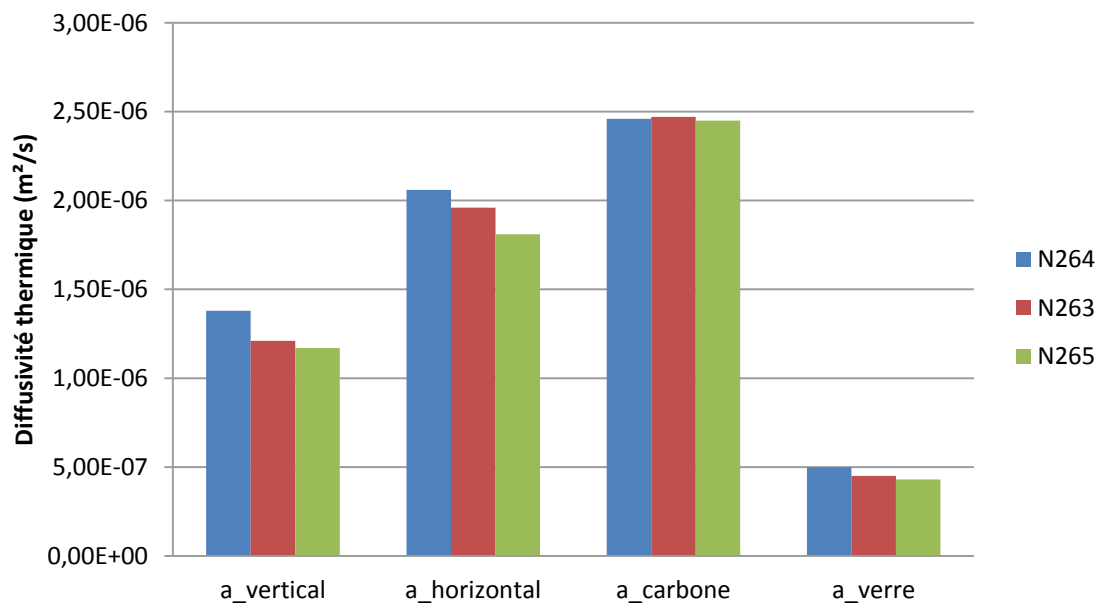


Figure 48 – Récapitulatif des résultats d'estimation de diffusivités par échantillon et par orientation

	Sens vertical		Sens horizontal		Sens carbone		Sens verre	
	$a_x(\text{m}^2/\text{s})$	$2\sigma(\%)$	$a_y(\text{m}^2/\text{s})$	$2\sigma(\%)$	$a_c(\text{m}^2/\text{s})$	$2\sigma(\%)$	$a_v(\text{m}^2/\text{s})$	$2\sigma(\%)$
N264	$1,38.10^{-6}$	5	$2,06.10^{-6}$	6	$2,46.10^{-6}$	4	$5,0.10^{-7}$	11
N263	$1,21.10^{-6}$	5	$1,96.10^{-6}$	6	$2,47.10^{-6}$	4	$4,5.10^{-7}$	11
N265	$1,17.10^{-6}$	5	$1,81.10^{-6}$	6	$2,45.10^{-6}$	4	$4,3.10^{-7}$	12

Figure 49 - Tableau récapitulatif des résultats d'estimation de diffusivités par échantillon et par orientation

Le tableau récapitulatif nous donne d'importantes informations sur l'endommagement des échantillons (Figure 48, Figure 49) :

Dans la direction de traction (verticale) la chute de diffusivité semble surtout être notable entre 100 et 118MPa. Bien que l'essai à 124MPa ait été mené jusqu'à la rupture de l'échantillon, l'essentiel de l'endommagement semble avoir été subi du début de la phase plastique jusqu'à environs 120MPa.

Selon la direction horizontale, une diminution est également mesurable.

Dans la direction des fibres de verre que la dégradation semble également importante.

La diffusivité dans la direction des fibres de carbone n'est quasiment pas altérée, ainsi on peut conclure que les fibres de carbone n'ont pas été endommagées, ce qui est en accord avec l'endommagement diffus prédit sur ce type de matériau.

Le caractère diffus semble être dû à l'endommagement de la matrice et de certaines fibres de verres. La diminution de la diffusivité dans la direction des fibres de verre mène à penser que les microfissures responsables de l'endommagement de la matrice se sont propagées (à courte échelle) en cassant des fibres de verres.

5.3. Mesures d'endommagement mécanique et thermique

Il est possible avec les résultats d'essais d'évaluer le niveau d'endommagement mécanique de chaque échantillon en se basant sur la variation de module d'élasticité. Si l'on se base sur un calcul de l'endommagement des matériaux endommagés de manière homogène comme dans [P. Lavedeze et al, 1992] [F. Lachaud, 1997] [N. Boulebbad-Gomez, 2016] on obtient :

$$ENDO_{méca} (\%) = 1 - \frac{E_{final}}{E_{init}} \quad (5.17)$$

Avec E_{init} le module d'élasticité initial et E_{final} le module d'élasticité final.

Remarque : L'endommagement est calculé dans la direction de traction (verticale)

En nous basant sur la méthode de calcul de l'endommagement mécanique précédente, il est possible d'exprimer la diminution de la diffusivité thermique (dans la direction de traction) en pourcentage.

$$ENDO_{th} (\%) = 1 - \frac{a_{\text{matériau endo}}}{a_{\text{matériau sain}}} \quad (5.18)$$

Cependant, la comparaison avec l'endommagement mécanique ne peut se faire que selon la même direction.

De plus, il est important de connaître la diffusivité thermique de ce même matériau avant d'avoir été endommagé. Ces matériaux sont fabriqués par des processus industriels fiables, on peut ainsi considérer qu'un ensemble d'échantillons sains du même type que ceux endommagés, peut servir de référence en termes de diffusion de la chaleur (Figure 13). Dans le sens de la traction, la diffusivité thermique effective verticale des éprouvettes saines est :

$$a_{\text{vertical}}(\text{sain}) = 1,6.10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Ainsi pour chaque échantillon, on obtient les résultats présentés sur la Figure 50, et la Figure 51.

	N264 – 100MPa	N263 – 118MPa	N265 – 124MPa (rupture à 124MPa)
Endommagement mécanique	17,9%	30,9%	>32%
Endommagement thermique	13.7%	24,3%	24,4%

Figure 50 – Tableau récapitulatif de l'endommagement calculé avec les données d'essais mécaniques et avec les diffusivités thermiques mesuré à posteriori sur les trois échantillons (56°)

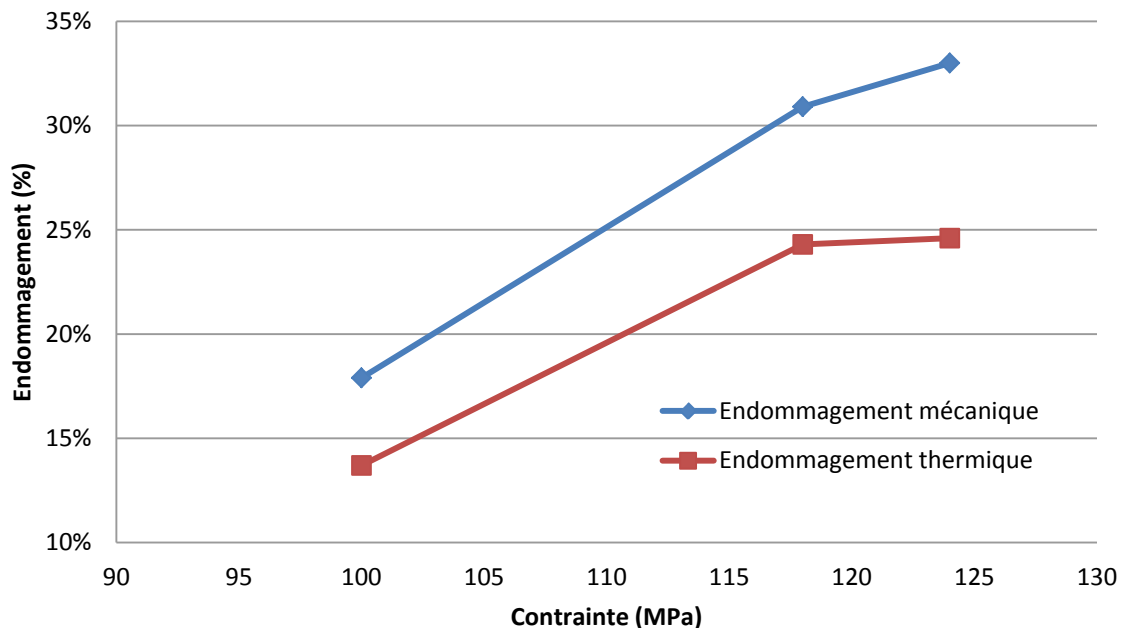


Figure 51 – Evolution de l'endommagement (mécanique & thermique) en fonction de la contrainte mécanique rencontrée par un composite hybride carbone/verre/peek avec des fibres de carbones orientées à 56°

Les calculs de l'endommagement mécanique et thermique sont basés sur des champs moyennés sur des zones plus ou moins étalées, ainsi les grandeurs estimées sont « effectives » sur la zone choisie.

De plus, cette dernière expérience montre (bien que réalisée sur 3 échantillons) un comportement très corrélé entre les deux calculs de l'endommagement (Figure 50, Figure 51). Il est possible de déterminer le niveau d'endommagement d'une pièce via l'estimation des propriétés thermique, et ce sans connaître le chargement subi par une pièce.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude sur un plus grand nombre d'échantillons, en faisant varier l'orientation des fibres, l'épaisseur du matériau,... mais surtout en faisant varier le type d'essai en s'intéressant de plus près à la fatigue de ces matériaux.

En pratique, les pièces composites utilisées dans l'industrie possèdent des renforts bien plus équilibrés (+/- 45° par exemple) qui leurs confèrent un comportement quasi-isotrope ainsi qu'un endommagement très diffus.

Cet élargissement de l'étude passe bien évidemment par une série d'améliorations du système d'acquisition des images thermiques, ainsi que de la chaîne de mesure : calibrage de la taille de la sollicitation laser, stabilisation temporelle du flux laser, ...

Dans le dernier paragraphe, on se propose de mettre en place un banc expérimental permettant de détecter le délaminage d'une pièce composite.

6. Détection de délaminage

Nos échantillons de composites tissés déséquilibrés à matrice PEEK ont été conçus de manière à être peu sujets au délaminage (d'autant plus pendant un essai en traction simple). On choisit donc pour cette dernière partie d'étudier un nouvel échantillon composite constitué de plis unidirectionnels en carbone (+/- 45°) noyés dans une matrice Epoxy thermodurcissable. Ce matériau a été choisi déjà endommagé, et surtout, soupçonné d'avoir subi un délaminage.

6.1. Banc expérimental 1D

On se propose de mettre en place une méthode simple capable de détecter un délaminage [J-C Krapez, 2004].

La méthode n°1, candidate à la détection de délaminage est basée sur la célèbre méthode flash développée par Parker en 1961. Cette méthode consiste à solliciter l'échantillon sur une de ses faces avec un flux réparti de manière homogène sur la surface. Ainsi, à partir de la dynamique de chauffe (sur la face sollicitée ou sur la face opposée), il est possible d'estimer des paramètres physiques comme la diffusivité thermique. Dans notre cas, on ne travaille plus sur un unique pixel en se basant sur le temps de demi-montée de la température pour estimer la diffusivité comme le faisait Parker, mais plutôt sur un champ bidimensionnel relevé en face arrière par thermographie infrarouge.

On utilise donc la méthode 1D détaillée dans le chapitre 4. La particularité de cette expérience est de minimiser l'écart quadratique entre l'échauffement de chaque pixel au cours du temps et sa modélisation semi-analytique réalisée à l'aide des quadripôles thermiques.

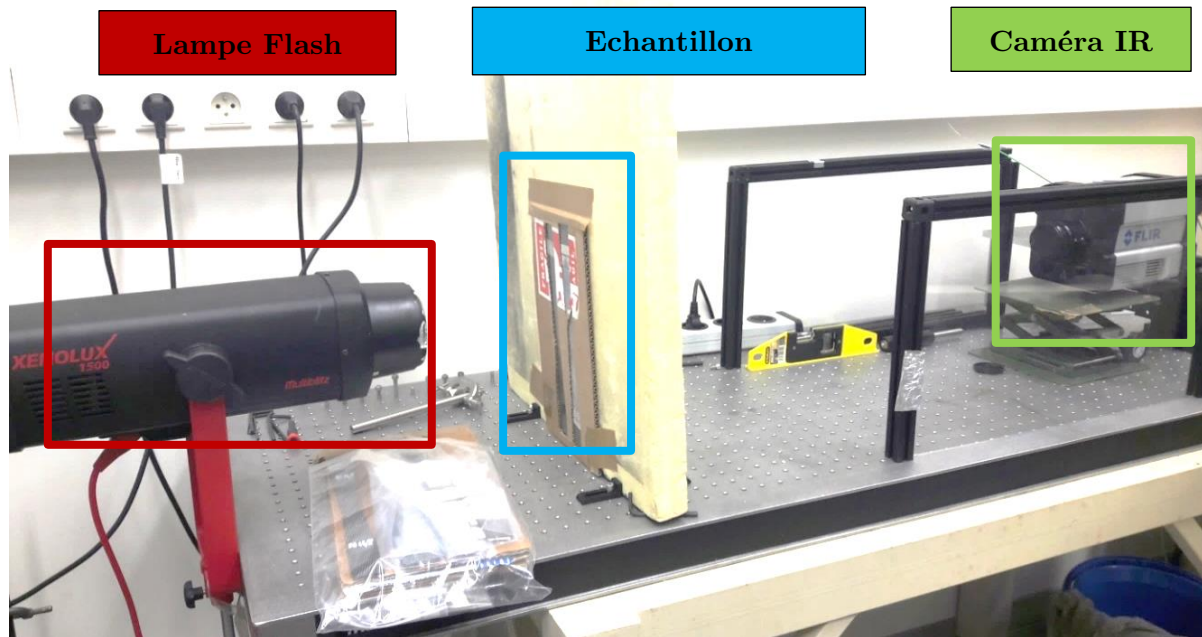


Figure 52 – Banc expérimental « méthode flash 1D » développé au laboratoire

L'expérience réalisée en laboratoire est présentée sur la Figure 52.

La lampe flash éclaire la face avant de l'échantillon avec une puissance suffisante pour que la température soit mesurable en face arrière par thermographie IR. Seule la dynamique du transfert de chaleur nous intéresse, cependant la puissance doit être suffisante pour produire un échauffement détectable tout en restant dans le domaine de linéarité.

Le flash éclaire pendant une durée de 2,5ms. Cette durée peut être considérée comme une impulsion lorsqu'on la compare au temps caractéristique de diffusion selon l'épaisseur du matériau (environ 4s).

La caméra IR acquiert les images IR à la fréquence de 200Hz, cette fréquence est suffisamment élevée pour enregistrer la totalité du phénomène de diffusion thermique selon l'épaisseur (le temps caractéristique de diffusion de ce matériau est d'environ 4s).

L'unité d'acquisition du signal importe peu. Le calcul de la diffusivité thermique selon l'épaisseur est directement lié à la dynamique de montée en température et non à l'amplitude. De ce fait dans cette expérience, nous travaillons avec des données brutes exprimées en DL (niveaux informatiques non converties en températures). Ces niveaux informatiques sont liés à la luminance ($W.m^{-2}.sr^{-2}$) reçue par la cellule photosensible de la caméra IR. Lorsqu'elle est nécessaire, la conversion du signal en températures ($^{\circ}C$) nécessite de connaître l'émissivité de la surface observée.

Les signaux sont ensuite adimensionnés par rapport à leur maximum afin de pouvoir s'affranchir, dans la modélisation quadripôles 1D, de la puissance de chauffe imposée en face avant du matériau.

6.2. Résultats

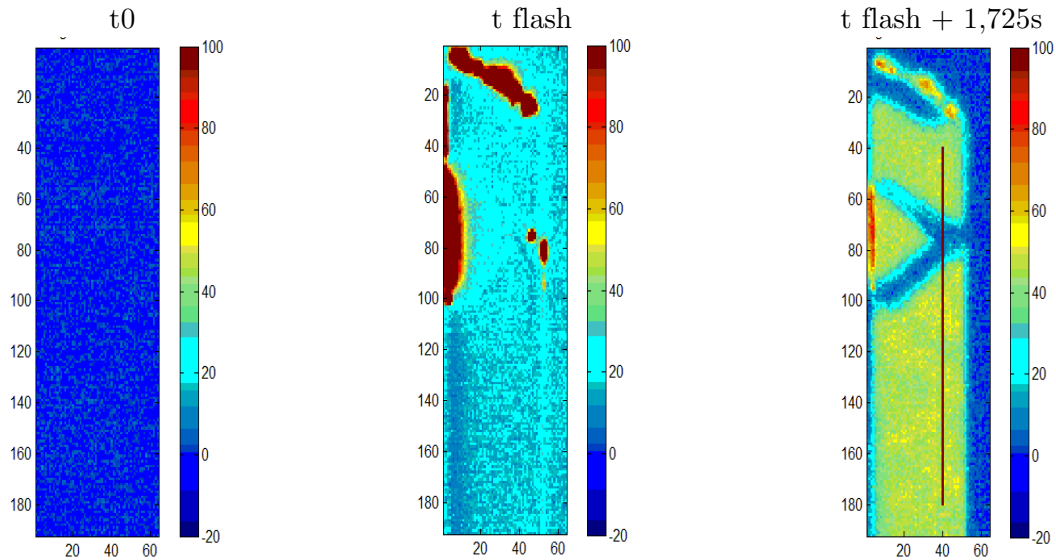


Figure 53 - Champs de DL en face arrière, à différents instants, sur l'échantillon carbone/epoxy suspecté de délaminage

On remarque sur le champ de température (Figure 53), qu'avant la sollicitation thermique (à t_0), la température de l'éprouvette est homogène. L'acquisition est faite à 200Hz ainsi la seconde image représente le champ de température en face arrière à l'instant où le flash est allumé en face avant (les zones de forts échauffements sont directement issues de la lumière émise en direct par la lampe flash). Ces « fuites » permettent d'ailleurs de repérer parfaitement l'instant de déclenchement du flash). Ce n'est qu'au bout de $1,725\text{s}$ qu'apparaît nettement la variation de température entre les zones 'saines' et les zones 'endommagées'.

La ligne rouge verticale balaye le 40^{ème} pixel en x , de 40 à 180 pixels sur y (Figure 54). On estimera la diffusivité thermique propre à chaque pixel grâce à une minimisation de type Gauss-Newton entre un modèle semi-analytique basé sur les quadripôles thermiques et les données expérimentales.

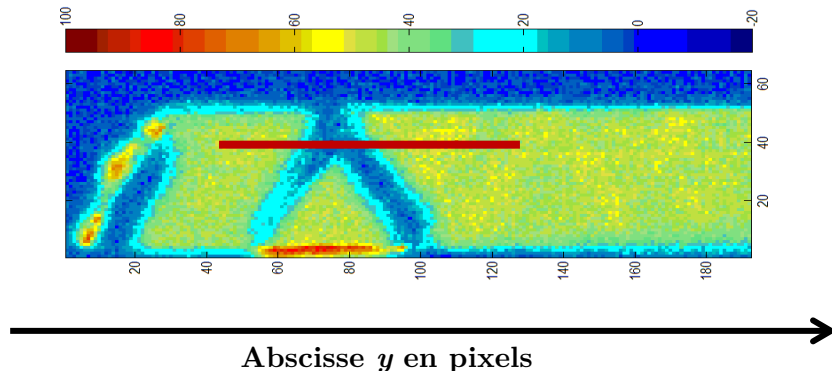


Figure 54 - Repérage de la zone endommagée et estimation de diffusivité

Nous estimons pour chaque pixel balayé le long de la droite rouge (Figure 54) la diffusivité thermique monodimensionnelle (selon l'épaisseur).

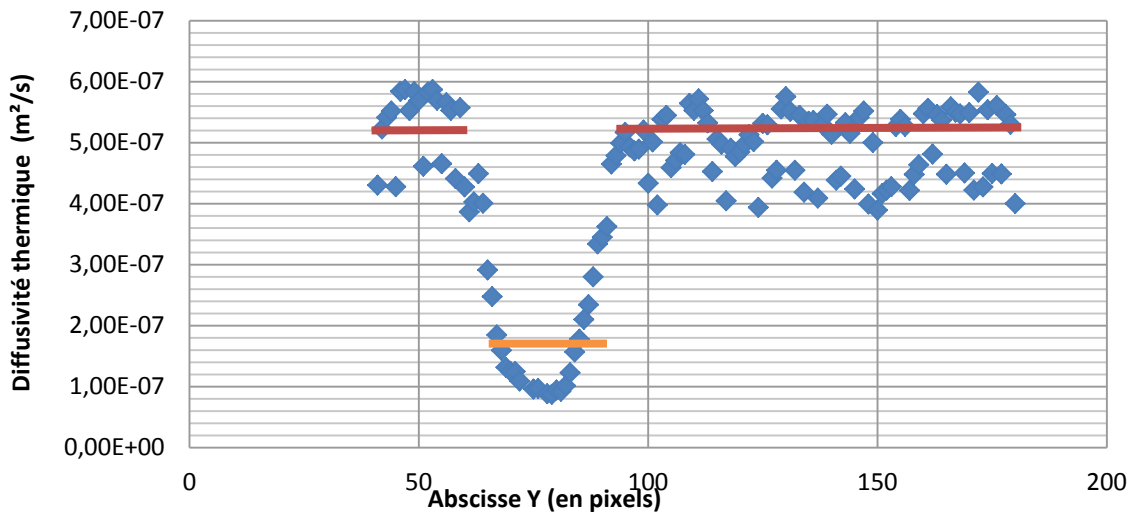


Figure 55 - Résultat de l'estimation des diffusivités thermiques sur chaque pixel balayé le long de la ligne rouge de la Figure 54, éprouvette composite carbone/époxy suspectée de délaminage

On remarque, sur la Figure 55, un facteur 5 entre la diffusivité d'une zone saine et d'une zone endommagée.

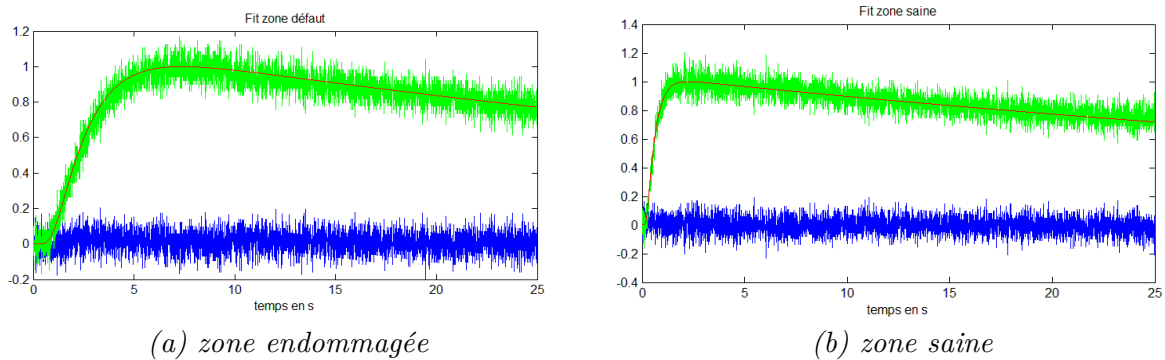


Figure 56 - Comparatif des échauffements (exprimés en valeurs brutes DL normalisées par le maximum), pour 1 pixel

Sur la Figure 56, la courbe verte représente le signal expérimental, la courbe rouge le modèle minimisé, et en bleu le résidu centré en zéro. La chute progressive de la température correspond aux pertes convecto-radiatives, ce terme « perturbateur » est pris en compte par la modélisation dans le paramètre $\eta_2 = \frac{h.e}{k}$.

La thermique, et plus particulièrement la méthode flash 1D, peut donc être un excellent moyen de révéler à posteriori le délaminage (même local) d'un composite.

Pour conclure, cette méthode est qualitativement très efficace et permet de détecter des défauts dans le sens de l'épaisseur assez facilement. Cependant, sur le plan quantitatif, l'hypothèse consistant à traiter de manière indépendante chaque pixel est à prendre avec précautions, notamment près des bords et des fortes discontinuités car le transfert de chaleur n'est localement plus monodimensionnel.

7. Conclusions

Dans ce chapitre, dans un contexte de mise en place de méthodes permettant de détecter des défauts, de les quantifier, et de mesurer un niveau d'endommagement, nous avons pu mettre en application de manière expérimentale les méthodes d'estimation de sources de chaleur et d'estimation de diffusivités thermiques directionnelles.

Les dissipations thermiques au sein d'un matériau composite peuvent dépendre d'un grand nombre de paramètres comme : le nombre de plis, le nombre de fibres, le type de matrice, le type de fibres, l'épaisseur du matériau, l'orientation des fibres, le type d'essai,...

Cette partie de l'étude a montré la robustesse (en termes de stabilité) de la méthode du gradient conjugué. Les localisations de sources ainsi que leurs intensités sont significatives et en accord avec les événements mécaniques observés. Ces méthodes pourront permettre une poursuite des recherches.

L'estimation des diffusivités directionnelles a permis de mettre en relation la dégradation de propriétés de tenue mécanique et la dégradation des propriétés thermiques d'un matériau endommagé selon différents niveaux. Lorsque l'endommagement peut être considéré comme diffus, les méthodes présentées dans les chapitres 4 et 5 permettent de déceler le niveau d'endommagement d'une pièce mécanique.

Nomenclature

a	Diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)	N_x, N_y, N_t	Nombre de points selon x, y, t
e	Épaisseur du matériau (m)	k_x	Conductivité selon x
$Q(t)$	Flux imposé	h	Coefficient convecto-radiatif
t	Vecteur temps (s)	x, y, z	Coordonnées spatiales
T	Température (K ou °C)	\sinh, \cosh	Sinus et cosinus hyperboliques
$T_{mesuré}$	Température mesurée	n, m	Harmoniques selon x, y
$S(t, X)$	Matrice des Sensibilités	cp	Capacité calorifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
k	Conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	Lx, Ly	Dimensions du domaine 2D
$W_{obj}, W_{refl}, W_{atm}$	Flux considération Corps-Noir	E	Accroissement d'enthalpie (J)
t_{diff}	Temps caractéristique de diffusion	m	Masse d'un échantillon (kg)

Symboles Grecs

η_1, η_2, η_3	Groupements de paramètres	sig	Ecart-type
Δt	Pas de temps (s)	ρ	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)
$\varphi(p)$	Flux transformé	σ	Groupement de paramètres
θ	Température transformée	ε	Emissivité
Δx	Pas spatial		

Abréviations

SVD	Décomposition en valeurs singulières	IR	Infrarouge
MGC	Méthode du gradient conjugué	It	Itération

Indices

0	Condition à $t=0$
∞	Ambiance (extérieures)

Exposants

T	Transposée d'une matrice
-1	Inverse d'une matrice

Liste des figures

Figure 1 – Composite hybride asymétrique PEEK - Carbone/Verre, fabriqué par Porcher Industries.....	138
Figure 2 – Densité du matériau composite hybride étudié, évaluée à chaque cycle de mesure avec un pycnomètre à Helium	140
Figure 3 – Acquisition du signal proportionnel à l'élévation en température, au cours du temps.....	141
Figure 4 – Photo du banc expérimental avec circuit du laser utilisé pour la sollicitation localisée.....	143
Figure 5 – Photo du banc expérimental côté caméra	144
Figure 6 – Tache de diffusion en face arrière d'une des éprouvettes saine (N264, 56°), 2s après l'impact du laser en face avant.....	145
Figure 7 – Minimisation (a) entre le signal relevé en face arrière du composite N264 (56°) moyenné selon x et y et la transformée de Fourier pour les harmoniques n=0 et m=0 du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b).....	146
Figure 8 – Estimations de $\eta_1 = a_z / e^2$ (selon l'épaisseur) pour chaque éprouvette composite saine (présentée en 3.3.2).....	147
Figure 9 - Minimisations entre la Transformée de Fourier du signal expérimental moyenné sur la direction des fibres de verre (fibres de carbone orientées verticalement) pour l'éprouvette N264 (56°), et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques n=1 à n=9, et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles	148
Figure 10 - Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier n=4, n=6, n=8, du signal expérimental moyenné selon la direction des fibres de verre (pour l'éprouvette N264), avec la somme des harmoniques de Fourier n=4, n=6, n=8 du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l'aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles	149
Figure 11 - Estimations des diffusivités transverses (selon l'axe des fibres de carbone et de verre) pour chaque éprouvette composite hybride.....	149
Figure 12 – Tableau récapitulatif des propriétés thermo-physiques estimées, du matériau composite hybride sain (sur 6 échantillons).....	150
Figure 13 – Géométrie d'échantillon pour test de traction quasi-statique selon la norme 2 ASTM D5083, côtes en mm, (extrait de [N. Boulebbad-Gomez, 2016])	151
Figure 14 – Schéma d'une mesure optique avec corrélation d'images	152
Figure 15 – Banc expérimental thermomécanique, avec caméra visible à gauche, caméra IR à droite, banc de traction au centre	152

Figure 16 – Cycles contrainte-déplacement de l'éprouvette N258 sur 3 charges/décharges jusqu'à 120MPa.....	153
Figure 17 – Force de traction subie au cours du temps par l'échantillon N258 (78°).....	154
Figure 18 - Déformations locales au cours du temps, calculées par le logiciel Aramis à partir du système d'acquisition optique, de l'échantillon composite N258 (78°).....	154
Figure 19 – Avancement au cours du temps du déplacement subi par l'échantillon N258 (78°) avec repérage des instants t1, t2 et t3.....	155
Figure 20 – Essai quasi-statique en traction sur échantillon avec fibres de carbone orientées à 90°. Zoom au microscope proche de la zone de rupture à 20mm de distance d'un objectif (x50-x100-x200), extrait de [N. Boulebbad-Gomez et al, 2016].....	156
Figure 21 – Champs de température de l'échantillon N258 (78°) au cours de l'essai de traction.....	156
Figure 22 – Profil 1D vertical du champ de température au moment de la rupture (Figure 21(c)) de l'échantillon N258 (78°).....	157
Figure 23 – Thermogrammes moyens des deux zones de fissure, en DL (Digital Level), de l'éprouvette N258 (78°), jusqu'à la rupture.....	158
Figure 24 - Profil temporel de la source estimée sur la fissure A, n'entraînant pas la rupture (source moyennée sur la zone où la source prend effet spatialement), pour l'essai sur l'éprouvette N258 (78°),	159
Figure 25 – Champ des termes source estimés à l'instant du pic de production de chaleur, fissure A, jusqu'à la rupture (niveaux de couleurs en W/m ³).....	160
Figure 26 - Profil 1D des termes source estimés à l'instant du pic de production de chaleur, fissure A, jusqu'à la rupture.....	160
Figure 27 – Evolution du critère de l'algorithme MGC utilisé pour l'estimation de source de l'échantillon N258 (78°) pendant l'essai de traction, autour de l'apparition de la fissure A en fonction de l'avancée des itérations.....	161
Figure 28 - Champ de température mesuré par thermographie IR (niveaux de couleurs en °C), à t=34s.....	161
Figure 29 - Champ de température estimé par l'algorithme MGC (niveaux de couleurs en °C), à t=34s.....	161
Figure 30 - Profils 1D (au niveau du pixel vertical n°30 marqué par une flèche bleue sur les Figure 28 et Figure 29) à t=34s.....	161
Figure 31 – Profil temporel des sources estimées sur la fissure B, (source moyennée sur la zone où la source prend effet spatialement).....	162
Figure 32 – Champ des termes source estimés à l'instant du premier pic de production de chaleur (t=10s), fissure B, niveaux de couleurs en W/m ³	163
Figure 33 – Profil 1D des termes source estimés à l'instant du premier pic de production de chaleur (t=10s), fissure B.....	163

Figure 34 – Champ des termes source estimés à l’instant du deuxième pic de production de chaleur (t=35s), fissure B, niveaux de couleurs en W/m^3	163
Figure 35 – Profil 1D des termes source estimés à l’instant du deuxième pic de production de chaleur (t=35s), fissure B.....	163
Figure 36 - Champ de température mesuré par thermographie IR (niveaux de couleurs en °C), à t=11s.....	164
Figure 37 - Champ de température estimé par l’algorithme MGC (niveaux de couleurs en °C), à t=11s.....	164
Figure 38 – Evolution du critère de l’algorithme MGC utilisé pour l’estimation de source de l’échantillon N258 (78°) pendant l’essai de traction, autour de l’apparition de la fissure B, en fonction de l’avancée des itérations	164
Figure 39 – Profils 1D mesuré (à gauche), estimé (au centre), erreur en % (à droite), à t=11s	164
Figure 40 – Courbe contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l’échantillon N264 (jusqu’à 100MPa)	166
Figure 41 – Courbes contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l’échantillon N263 (jusqu’à 118MPa)	167
Figure 42 - Courbe contrainte-déplacement & contrainte-déformation de l’échantillon N265 (jusqu’à rupture à 124MPa)	167
Figure 43 – Minimisation (a) entre le signal relevé en face arrière du composite N263 (56°) moyenné selon x et y et la transformée de Fourier pour les harmoniques n=0 et m=0 du signal modélisé, les deux signaux sont normalisés par rapport à leur température maximale, résidu entre les deux signaux (b).....	168
Figure 44 – Résultat d’estimations des inverses de temps diffusifs pour chaque échantillon	168
Figure 45 – Inverse de temps diffusifs selon l’épaisseur pour chaque niveau d’endommagement	168
Figure 46 – Minimisations entre la Transformée de Fourier du signal expérimental moyenné sur y (direction de traction orientée verticalement) pour l’éprouvette N263 (56°) endommagée, et la Transformée de Fourier du signal modélisé avec les quadripôles, pour les harmoniques n=1 à n=9, et normalisé par le maximum de chaque harmoniques, a_z est calculée au préalable avec la méthode des harmoniques nulles.....	169
Figure 47 – Minimisation de la somme des harmoniques de Fourier n=4, n=6, n=8, du signal expérimental moyenné selon y (pour l’éprouvette N263), avec la somme des harmoniques de Fourier n=4, n=6, n=8 du signal modélisé, les thermogrammes sont normalisés à l’aide du maximum du signal de chacun, a_z calculée avec la méthode des harmoniques nulles	170
Figure 48 – Récapitulatif des résultats d’estimation de diffusivités par échantillon et par orientation	170

Figure 49 - Tableau récapitulatif des résultats d'estimation de diffusivités par échantillon et par orientation.....	171
Figure 50 – Tableau récapitulatif de l'endommagement calculé avec les données d'essais mécaniques et avec les diffusivités thermiques mesuré à postériori sur les trois échantillons (56°).....	172
Figure 51 – Evolution de l'endommagement (mécanique & thermique) en fonction de la contrainte mécanique rencontrée par un composite hybride carbone/verre/peek avec des fibres de carbones orientées à 56°	173
Figure 52 – Banc expérimental « méthode flash 1D » développé au laboratoire.....	175
Figure 53 - Champs de DL en face arrière, à différents instants, sur l'échantillon carbone/epoxy suspecté de délaminage	176
Figure 54 - Repérage de la zone endommagée et estimation de diffusivité.....	177
Figure 55 - Résultat de l'estimation des diffusivités thermiques sur chaque pixel balayé le long de la ligne rouge de la Figure 54, éprouvette composite carbone/époxy suspectée de délaminage.....	177
Figure 56 - Comparatif des échauffements (exprimés en valeurs brutes DL normalisées par le maximum), pour 1 pixel	177

Références bibliographiques

- L. AICHE-BELKADI, 2009, Modification des propriétés de surface de poudres en lit fluidisé assisté par une post-décharge d'azote, PhD Thesis, Université de Toulouse
- A. ANDRIYANA, L. SILVA, ET N. BILLON, 2010, Viscoelastic Characterization of Short Fibres Reinforced Thermoplastic in Tension and Shearing, *Applied Mechanics and Materials* 24-25 (juin 2010): 419-23
- S. ANDRE, N. RENAULT, Y. MESHAKA, ET C. CUNAT, 2012, From the Thermodynamics of Constitutive Laws to the Thermomechanical Experimental Characterization of a Semicrystalline Polymer from IR Imaging, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 24, no 1 (1-20)
- J. BELOTTEAU, 2009, Comportement et rupture d'un acier au C-Mn en présence de vieillissement sous déformation, PhD Thesis, Ecole centrale des arts et manufactures « Ecole centrale Paris »
- B. BERTHEL, 2007, Mesures thermographiques de champs de dissipation accompagnant la fatigue à grand nombre de cycles des aciers, PhD Thesis, Université de Montpellier II
- N. BOULEBBAD-GOMEZ, J.-P. CHARLES, N. LAHELLEC ET C. HOCHARD, 2016, Analysis of the matrix transverse damage in a ud ply of an unbalanced hybrid peek-carbon/glass composite under combined static load, *17th European Conference on Composite Materials, Munich*
- F.R. DE HOO, J.H. KNIGHT AND A.N. STOKES, 1982, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *J. Sci. and Stat. Comput. S.I.A.M.*, 3, 357-366.
- B. EYGLUNENT, 2003, *Manuel de thermique - Théorie et pratique*, Hermès - Lavoisier, 374 p.
- L. GAVERINA, 2017, Caractérisation thermique des milieux hétérogènes par excitation laser mobile et thermographie infrarouge, PhD Thesis, Université de Bordeaux
- B.E. HANDY, S.B. SHARMA, B.E. SPIEWAK AND J.A. DUMESIC, 1993, A Tian-Calvet heat-flux microcalorimeter for measurement of differential heats of adsorption, *Measurement Science and Technology, Volume 4, Number 12*
- J-C. KRAPEZ, 2004, Caractérisation des matériaux par le biais d'une sollicitation thermique externe ou interne, Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Bordeaux I

- F. LACHAUD, 1997, Délaminage de matériaux composites à fibres de carbone et à matrice organiques : étude numérique et expérimentale, suivi par émission acoustique, PhD Thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse
- P. LADEVEZE, E. LE DANTEC, 1992, Damage modelling of the elementary ply for laminated composites, *Composites Science and Technology*, (43) 257-267
- T. LISLE, 2014, Analyse par thermographie infrarouge de l'endommagement des structures composites sous sollicitations quasi-statiques, PhD Thesis, Université de Toulouse
- A. MAUREL-PANTEL, E. BAQUET, J. BIKARD, ET N. BILLON, 2011, Coupled Thermo Mechanical Characterisation of Polymers Based on Inverse Analyses and IR Measurements, *Applied Mechanics and Materials* 70 (393-398)
- M. PONCELET, 2007, Multi axialité, hétérogénéités intrinsèques et structurales des essais d'auto-échauffement et de fatigue à grand nombre de cycles, PhD Thesis, Ecole normale supérieure de Cachan
- K.L. REIFSNIDER, E.G. HENNEKELL, J.C. DUKE Jr, W.W.STINCHCOMB, 1980, Damage in composites Materials : The mechanics of vibrothermography, *Springer*
- N. RENAULT, S. ANDRE, D. MAILLET, ET C. CUNAT, 2010, A Spectral Method for the Estimation of a Thermomechanical Heat Source from Infrared Temperature Measurements, *International Journal of Thermal Sciences* 49, no 8 (août 2010): 1394-1406
- N. RENAULT, 2007, Etude du couplage thermomécanique du PEHD par essais mécaniques et inversion d'images infrarouges, PhD Thesis, Institut national polytechnique de Lorraine
- J. RENSHAW, J.C. CHEN, S.D. HOLLAND, R.B.THOMPSON, 2011, The sources of heat generation in vibrothermography, *NDT & E International*, Vol44, Issue 8
- J.M. ROCHE, D. BALAGEAS, B. LAPEYRONNIE, F. PASSILLY, ET A. MAVEL, 2013, Use of infrared thermography for in situ damage monitoring in woven composites, *Photomechanics Conference*, 2013:27-9
- Y. SOUHAR ET AL, 2008, Caractérisation de matériaux anisotropes à haute température par méthode impulsionnelles et thermographie infrarouge, *Congrès Français de Thermique 2008, Toulouse*
- O. WESTPHAL, 2014, Analyse thermomécanique de l'endommagement en fatigue de stratifiés carbone/époxy : Détermination de la limite d'endurance à partir d'essais d'auto-échauffement, PhD Thesis, Université Nantes Anger LeMans

Chapitre 5 : Résultats Expérimentaux

Normes

Norme 1 - ASTM D3039 / D3039M - 14 - Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials

Norme 2 - ASTM D5083 - 17 - Standard Test Method for Tensile Properties of Reinforced Thermosetting Plastics Using Straight-Sided Specimens

Conclusions et Perspectives

Ce travail s'inscrit directement dans un contexte à la fois académique et industriel puisqu'il a pour but d'aider à la compréhension de certains mécanismes de rupture mais également de développer pour l'aéronautique un outil non destructif de détermination de l'endommagement. Il est donc important de commencer cette conclusion par quelques rappels sur l'analyse et le contrôle des matériaux.

Rappels sur le contexte de l'étude

Les matériaux composites sont utilisés pour leurs propriétés mécaniques remarquables et surtout pour leur excellent rapport rigidité sur masse. Ils sont employés de manière croissante dans tous les domaines et notamment en aéronautique où l'allègement et la réduction des consommations en carburant font partie des principaux objectifs.

Cependant, la forte hétérogénéité de ces matériaux complexifie la compréhension et surtout l'anticipation des phénomènes mécaniques qu'ils subissent. L'endommagement peut prendre des formes très diverses comme : des macro-fissures entre les mèches (groupements de fibres), des microfissures dans la matrice, des ruptures de fibres, des délaminages entre les plis, etc.

L'endommagement prend essentiellement deux formes : une localisée et une diffuse. Afin de mettre en évidence ces deux types d'endommagement, on propose de travailler sur un matériau composite académique développé pour des applications hautes-performances en aéronautique. Ce matériau est conçu volontairement de manière déséquilibrée, c'est-à-dire que la matrice thermoplastique en PEEK est renforcée par des fibres de carbone et de verre (tissées perpendiculairement) avec des fractions volumiques respectives de 87% et 13%. Ainsi, en faisant varier l'orientation de ces fibres, on parvient à modifier le type d'endommagement [Boulebbad-Gomez et al, 2016].

Des essais préliminaires ont montré que, lorsque les fibres de carbone ont une orientation supérieure à 70° par rapport à la direction de sollicitation, l'endommagement subi par le matériau se localise et se manifeste sous la forme de macro-fissures. En revanche, lorsque les fibres de carbone ont une orientation inférieure à 67° par rapport à la direction de sollicitation, l'endommagement subi par le matériau prend un aspect diffus.

Bien que limitée sur le plan de la bande des fréquences et sur le nombre de points de mesure, la détection de défauts la plus répandue dans l'industrie reste aujourd'hui la méthode acoustique [J. Antoni, 2006] [E. Cardenas Cabada et al, 2015]. Cependant, la thermique peut également être une voie efficace pour la détection de défauts ou pour effectuer des contrôles non-destructifs.

Conclusions sur le travail réalisé

Nous avons développé deux outils mettant en jeu la résolution de deux problèmes inverses en thermique :

- Problème n°1 : l'estimation d'un champ instationnaire 2D des termes sources de chaleur sur des matériaux composites sollicités mécaniquement afin de répondre au problème de l'endommagement localisé,
- Problème n°2 : l'estimation des diffusivités directionnelles sur des matériaux composites déjà endommagés afin de déterminer le niveau d'endommagement diffus.

Le traitement du problème n°1 a permis de développer et de comparer les performances de deux méthodes d'estimation des sources volumiques de chaleur en 2D : la méthode directe et la méthode du gradient conjugué. Ces méthodes ont été développées en 2D pour en faciliter l'exploitation. Cette comparaison a montré le net avantage de la méthode du gradient conjugué, qui s'est révélée bien plus robuste et stable que la méthode directe.

L'utilisation de cette méthode sur nos matériaux composites déséquilibrés durant un essai en traction a montré une forte concordance entre l'apparition de termes sources de chaleur et celle de macro-fissures. Sur le plan quantitatif, leurs intensités estimées sont significatives et en accord avec les événements mécaniques observés. On obtient des ordres de grandeurs similaires à ceux obtenus dans les précédents travaux sur des composites à matrice thermoplastiques. Il a ainsi été révélé que les macro-fissures entraînant une rupture totale de l'échantillon sont caractérisées par des sources de 10^6 à 10^7 W.m^{-3} .

Il ressort de cette étude, que l'estimation des termes sources de chaleur est un bon moyen de détecter des défauts. Une application idéale en aéronautique serait la mise en place d'un système de contrôle embarqué. Cependant, l'intégration d'un tel système de contrôle paraît encore difficile, du fait de la très basse température et des coefficients convectifs trop grands qu'un aéronef est susceptible de rencontrer à haute altitude.

Le traitement du problème n°2 a lui aussi, permis de mettre en place et de valider numériquement une méthode d'estimation des diffusivités thermiques directionnelles. Cette méthode possède l'avantage de permettre d'estimer avec une unique expérience, les diffusivités thermiques selon l'épaisseur et les directions transverses du matériau étudié. L'originalité et la force de cette méthode reposent sur le fait que les minimisations sont effectuées dans l'espace de Fourier et non dans l'espace réel, ce qui permet de traiter des problèmes multidimensionnels, d'estimer des valeurs effectives, tout en réduisant le bruit des signaux mesurés.

Les calculs de l'endommagement mécanique et thermique sont basés sur des champs moyennés, ainsi les grandeurs estimées sont « effectives » sur la zone choisie. On observe une forte corrélation entre l'endommagement calculé à l'aide de la variation du module d'élasticité, et celui calculé à l'aide de la variation des diffusivités thermiques. Ce résultat donne d'excellents espoirs quant à la possibilité de cartographier l'endommagement des pièces à risque d'un hélicoptère ou d'un avion à l'aide de leur caractérisation thermique. C'est pourquoi il serait intéressant de développer une procédure de balayage et d'analyse de certaines pièces à risque d'un aéronef.

Perspectives

Il sera nécessaire par la suite, d'élargir l'étude sur l'estimation des termes sources avec des matériaux sollicités en fatigue. Cela permettrait d'observer de manière plus précise l'évolution et le vieillissement d'une macro-fissure n'ayant pas entraîné la rupture, ainsi que les niveaux de source volumique associés.

Le développement de la méthode d'estimation des diffusivités a montré que la thermique pouvait être un excellent complément au contrôle non-destructif par voie acoustique abondamment employé dans l'industrie. Cependant, il est important d'étendre cette étude à une plus large gamme de matériaux composites (matrice, fibres, orientation, etc.), et surtout à des tests en fatigue. La méthode consisterait à déterminer le niveau d'endommagement non pas en fonction de la contrainte subie, mais en fonction du nombre de cycles.

Les deux approches développées peuvent s'avérer complémentaires. L'estimation des sources de chaleur pourrait en amont permettre de distinguer les endommagements localisés des zones dont l'endommagement est diffus, afin de pré-cartographier les zones analysables grâce à l'estimation des diffusivités thermiques.

Un enrichissement de ces deux études se ferait également par une série d'améliorations du système d'acquisition des images thermiques, ainsi que de la chaîne de mesure en calibrant la taille de la sollicitation laser, en stabilisant de manière temporelle le flux laser, etc.

ANNEXES

ANNEXE 1 : DISCRETISATION SCHEMA CRANK NICHOLSON

Le schéma aux différences finies de Crank-Nicholson est connu pour son caractère inconditionnellement stable [Yang, 1997] [Incropera et DeWitt, 1996] :

On pose i l'indice de l'axe x , j l'indice de l'axe y , et N l'indice temporel.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N}{\Delta t} \quad (7.1)$$

$$\Delta T(x, y, t) \simeq \frac{1}{2}(\Delta T^{N+1}) + \frac{1}{2}(\Delta T^N) \quad (7.2)$$

$$\Delta T^{N+1} \simeq \frac{T_{i-1,j}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}}{\Delta y^2} \quad (7.3)$$

$$\Delta T^N \simeq \frac{T_{i-1,j}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i+1,j}^N}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i,j+1}^N}{\Delta y^2} \quad (7.4)$$

Pour pouvoir résoudre l'équation selon un formalisme « produit matrice-vecteur », il est important de réaliser le changement de variable suivant : $k = N_x(j-1) + i$

Les matrices A et B contiennent les termes qui régissent la diffusion de la chaleur :

$$Fo_x = \frac{k}{\rho.Cp} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} ; Fo_y = Fo_x \quad (7.5)$$

D'où l'expression matricielle réduite suivante :

$$A . T^{N+1} = B . T^N + \Delta t . G \quad (7.6)$$

ANNEXE 2 : OPTIMISATION TERME A TERME

Détails des calculs réalisés pour le calcul terme à terme.

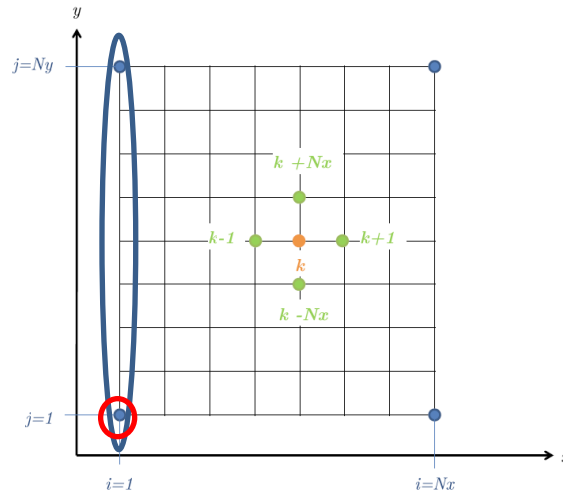


Figure 1 – Schématisation du maillage différences finies nécessaire à la résolution du problème direct de l'algorithme du gradient conjugué

```
% Centre domaine i = 2 : Nx-1 / j = 2 : Ny-1
```

$$k = Nx(j-1) + i$$

$$T_k^{N+1} = (1 - 4Fo)T_k^N + Fo_x(T_{k-1}^N + T_{k+1}^N) + Fo_y(T_{k-Nx}^N + T_{k+Nx}^N) + G_k^N$$

```
% Bord gauche i = 1 / j = 2 : Ny-1
```

$$k = Nx(j-1) + i$$

$$T_k^{N+1} = (1 - 2Fo_x - 2Fo_y)T_k^N + Fo_y(T_{k-Nx}^N + T_{k+Nx}^N) + 2Fo_x(T_{k+1}^N) + G_k^N$$

```
% Coin bas gauche i = 1 / j = 1
```

$$k = Nx(j-1) + i$$

$$T_k^{N+1} = (1 - 2Fo_x - 2Fo_y)T_k^N + 2Fo_x T_{k+1}^N + 2Fo_y T_{k+Nx}^N + G_k^N$$

Figure 2 – Détails des opérations du schéma explicite pour les cas du centre du domaine, le bord gauche et le coin bas gauche du champ 2D discrétisé

Ainsi pour chaque bord du domaine, on a une expression différente du champ de température à l'instant N+1.

ANNEXE 3 : SCHEMA NUMERIQUES ORTHOTROPES**Cas n°1 : Détails du Schéma implicite**

$$\frac{T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N}{\Delta t} - a_x \frac{T_{i-1,j}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1}}{\Delta x^2} - a_y \frac{T_{i,j-1}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}}{\Delta y^2} = G_{i,j}^N \quad (7.7)$$

$$T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N - \frac{\Delta t}{a_x \Delta x^2} (T_{i-1,j}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1}) - \frac{\Delta t}{a_y \Delta y^2} (T_{i,j-1}^{N+1} - 2T_{i,j}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}) = \Delta t \cdot G_{i,j}^N \quad (7.8)$$

$$\text{avec } Fo_x = \frac{\Delta t}{a_x \Delta x^2}; Fo_y = \frac{\Delta t}{a_y \Delta y^2}$$

$$(1 + 2Fo_x + 2Fo_y)T_{i,j}^{N+1} - Fo_x (T_{i-1,j}^{N+1} + T_{i+1,j}^{N+1}) - Fo_y (T_{i,j-1}^{N+1} + T_{i,j+1}^{N+1}) = \Delta t \cdot G_{i,j}^N + T_{i,j}^N \quad (7.9)$$

Avec le changement de variable $k = N_x(j-1) + i$

$$(1 + 2Fo_x + 2Fo_y)T_k^{N+1} - Fo_x (T_{k-1}^{N+1} + T_{k+1}^{N+1}) - Fo_y (T_{k-N_x}^{N+1} + T_{k+N_x}^{N+1}) = \Delta t \cdot G_k^N + T_k^N \quad (7.10)$$

Cas n°2 : Détails du Schéma Explicite

$$\frac{T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N}{\Delta t} - a_x \frac{T_{i-1,j}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i+1,j}^N}{\Delta x^2} - a_y \frac{T_{i,j-1}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i,j+1}^N}{\Delta y^2} = G_{i,j}^N \quad (7.11)$$

$$T_{i,j}^{N+1} = (1 - 2Fo_x - 2Fo_y)T_{i,j}^N + Fo_x (T_{i-1,j}^N + T_{i+1,j}^N) + Fo_y (T_{i,j-1}^N + T_{i,j+1}^N) + \Delta t \cdot G_{i,j}^N \quad (7.12)$$

$$T_k^{N+1} = (1 - 2Fo_x - 2Fo_y)T_k^N + Fo_x (T_{k-1}^N + T_{k+1}^N) + Fo_y (T_{k-N_x}^N + T_{k+N_x}^N) + \Delta t \cdot G_k^N \quad (7.13)$$

ANNEXE 4 : EVALUATION DES PERTES CONVECTO-RADIATIVES

Les pertes thermiques se matérialisent par des échanges convectifs et radiatifs [Eyglunet, 2003].

Pertes par convection naturelle

Régime laminaire ($Ra < 10^9$) $Nu = 0,59 Ra^{0,25}$

Régime turbulent ($10^9 < Ra < 10^{12}$) $Nu = 0,13 Ra^{0,33}$

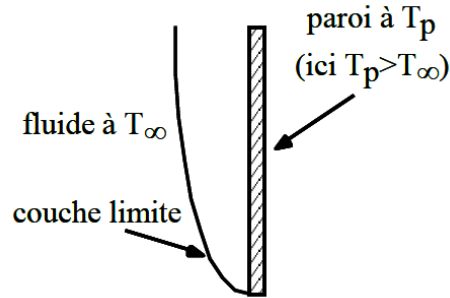


Figure 3 – Schéma de la convection naturelle sur une plaque plane verticale

T_p la température de la plaque, T_∞ la température de l'air ambiant

$T_{film} = \frac{T_p + T_\infty}{2}$ la température moyenne de film

En prenant les propriétés physiques de l'air à la température T_{film} on obtient :

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot (L^0)^3}{a \cdot \nu} \quad (7.14)$$

$g = 9,81 (m/s^2)$, $\Delta T = T_p - T_\infty$ (K), L^0 la longueur caractéristique (m)

a la diffusivité thermique du fluide (m^2/s), ν la viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

$\beta = \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_P$ le coefficient d'expansion du fluide environnant,

avec ρ la masse volumique (kg/m^3) et P la pression (Pa).

N.B : Pour un gaz parfait (comme peut être considéré l'air), $PV = nRT$, d'où $\beta = \frac{1}{T_{film}}$

Si $Ra < 10^9$, alors le régime est considéré comme Laminaire, d'où $Nu_{L^0} = 0,59.Ra^{0,25}$

Si $10^9 < Ra < 10^{12}$, alors le régime est considéré comme Turbulent, d'où $Nu_{L^0} = 0,13.Ra^{0,33}$

$$\text{Et, } Nu_{L^0} = \frac{h_{conv} L^0}{k}$$

Pertes par rayonnement

Les pertes radiatives se quantifient en faisant un bilan des flux radiatifs. Le flux net s'exprime de la manière suivante :

$$\phi_{p \rightarrow amb}^{NET} = \phi_{p \rightarrow amb} - \phi_{amb \rightarrow p} \quad (7.15)$$

Les facteurs de forme $F_{p \rightarrow amb}$ représentent la fraction de flux émis par S_p qui atteint S_{amb} . Ainsi, si l'on considère que la plaque mince verticale est seule au milieu de l'environnement radiatif ambiant, on peut écrire les relations suivantes :

$$F_{p \rightarrow amb} = 1 \quad (7.16)$$

Or la relation de réciprocité nous permet d'écrire :

$$S_p \cdot F_{p \rightarrow amb} = S_{amb} \cdot F_{amb \rightarrow p} \quad (7.17)$$

$$\text{D'où } F_{amb \rightarrow p} = F_{p \rightarrow amb} \cdot \frac{S_{amb}}{S_p}$$

Faisons également l'hypothèse que toutes les surfaces sont noires. On peut ainsi écrire :

$$\Phi_{p \rightarrow amb}^{NET} = S_p \sigma (T_p^4 - T_{amb}^4) \quad (7.18)$$

avec $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stephan-Boltzmann

Linéarisons maintenant les pertes radiatives en faisant apparaître un coefficient d'échange radiatif :

$$\phi^{NET} = h_{rad} \cdot (T_p - T_{amb}) \quad (7.19)$$

$$\text{avec } h_{rad} = \sigma \cdot (T_p^2 + T_{amb}^2) \cdot (T_p + T_{amb})$$

Pertes convecto-radiatives

Si on fait maintenant l'hypothèse d'une température d'ambiance radiative et de l'air identique, on obtient :

$$T_\infty = T_{amb} \quad (7.20)$$

$$\phi_{conv+rad} = (h_{conv} + h_{rad}) \cdot (T_p - T_\infty) \quad (7.21)$$

ANNEXE 5 : AMELIORATION DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT PAR MULTIPLICATION DES EXPERIENCES

Un bruit sera dit aléatoire si, lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les mêmes conditions, on observe N résultats différents (= N réalisations d'un même signal aléatoire).

On s'intéresse ici à la mesure de la grandeur physique T (température) uniquement sujette à des incertitudes aléatoires. Le traitement statistique des incertitudes aléatoires est basé sur la répétition des mesures de T . Si on était capable de réaliser une infinité de mesures, on déterminerait la distribution de probabilité de T , en particulier sa valeur moyenne \bar{T} et son écart-type σ . Dans la pratique, on réalise un nombre fini n de mesures, dont on cherche à extraire les meilleures estimations de T et σ .

La meilleure estimation de T , est la moyenne \bar{T} de ces mesures :

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n} \quad (7.22)$$

La meilleure estimation de l'écart type σ déduite des n mesures, notée σ_T , est donnée par :

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \quad (7.23)$$

ANNEXE 6 : CALCUL INVERSE ET CONDITIONNEMENT DE MATRICE ELEVE

Exemple d'une matrice mal conditionnée :

$$\text{Soit la matrice } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ et le vecteur second membre } T = \begin{Bmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{Bmatrix}$$

La résolution du système donne $Q = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, or si l'on entache le vecteur second membre d'une

$$\text{erreur } \tilde{T} = T + \begin{Bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{Bmatrix},$$

$$\text{alors la résolution du système donne cette fois-ci : } \hat{Q} = A^{-1} \cdot \tilde{T} = \begin{Bmatrix} 6,222 \\ 0,133 \\ 1,633 \\ -3,256 \end{Bmatrix},$$

le facteur multiplicateur entre les erreurs sur \tilde{T} et sur \hat{Q} est directement lié au nombre de conditionnement de la matrice \mathbf{A} .

Le conditionnement de \mathbf{A} vaut : $\kappa(\mathbf{A}) = 1425$

$\|\tilde{T}\| - \|T\| = 0,004$, alors que $\|\hat{Q}\| - \|Q\| = 5,21$ soit une amplification de 1302, soit un rapport d'amplification proche du nombre de conditionnement.

ANNEXE 7 : DESCRIPTION THERMOMECHANIQUE D'UN MATERIAU

Un matériau homogène sollicité mécaniquement génère des termes sources de chaleur [O. Westphal, 2014]. Ces termes sources sont issus de plusieurs mécanismes :

$$\rho.Cp.\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}(-k.\vec{\nabla}T) = g \quad (7.24)$$

$$\rho.Cp.\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}(-k.\vec{\nabla}T) = r + \Delta_{\text{int}} + \rho T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon . \partial T} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial V_k . \partial T} . \frac{\partial V_k}{\partial t} \quad (7.25)$$

Avec $\Psi = e - Ts$ l'énergie libre

e l'énergie interne, T la température en (K), s l'entropie spécifique

$Cp = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}$ la capacité calorifique

r - sources de chaleur volumiques externes

Δ_{int} - Dissipation intrinsèque des irréversibilités mécaniques

$\rho T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon . \partial T} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ - le terme de couplage entre déformation et température (thermoélastique)

$\rho T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial V_k . \partial T} . \frac{\partial V_k}{\partial t}$ - le terme de couplage thermomécanique (endommagement, viscosité,...)

Tous ces termes sont homogènes à une production volumique de chaleur, en $W.m^{-3}$.