



**HAL**  
open science

# Méthode de raffinement local adaptatif multi-niveaux pour la fissuration des matériaux hétérogènes

Eric Delaume

► **To cite this version:**

Eric Delaume. Méthode de raffinement local adaptatif multi-niveaux pour la fissuration des matériaux hétérogènes. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier, 2017. Français. NNT : 2017MONT028 . tel-01919694

**HAL Id: tel-01919694**

**<https://theses.hal.science/tel-01919694>**

Submitted on 12 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
Docteur

Délivré par l'Université de Montpellier

Préparée au sein de l'école doctorale  
Information, Structures, Systèmes  
Et de l'unité de recherche UMR5508 (LMGC)  
Spécialité : Mécanique et Génie Civil

Présentée par Eric Delaume

## Méthode de raffinement local adaptatif multi-niveaux pour la fissuration des matériaux hétérogènes

Soutenance prévue le 27/11/2017 devant le jury composé de

M. Yann MONERIE	Professeur	UM	Président
M. David DUREISSEIX	Professeur	INSA-Lyon	Rapporteur
M. Jean-François REMACLE	Professeur	EPL-UCL	Rapporteur
Mme Anne-Sophie CARO	Maître-Assistant	IMT Mines Alès	Examineur
Mme Céline PÉLISSOU	Ingénieur chercheur	IRSN	Examineur
M. Loïc DARIDON	Professeur	UM	Directeur
M. Frédéric PERALES	Ingénieur chercheur	IRSN	Encadrant
M. Frédéric DUBOIS	Ingénieur chercheur	UM	Membre invité









*“Si debugger, c’est supprimer des bugs,  
alors programmer ne peut être que les ajouter”*  
Edsger Dijkstra



# Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu Frédéric Perales, mon encadrant IRSN, de m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet de thèse. Tes conseils, aussi bien scientifiques que personnels, ainsi que ta constante disponibilité y sont pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail. Je te remercie de m'avoir transmis ton goût et ta rigueur pour la programmation, et de m'avoir ouvert des portes après la thèse. Je n'aurais pu imaginer meilleur guide durant ces trois années. Je tiens également à remercier mon encadrant côté Montpellier (LMGC) Frédéric Dubois. Même avec la charge de travail que tu avais, tu as toujours répondu à mes questions et su me rassurer dans les moments de doutes (cf. CFRAC). Ton expertise dans les domaines scientifiques de cette thèse ont permis d'aiguiser mes connaissances et de prendre du recul. Enfin, je remercie mon directeur de thèse Loïc Daridon pour la qualité de ses conseils. Ton calme et ta sérénité ont su me rassurer dans les périodes de stress.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Yann Monerie pour l'honneur qu'il m'a fait de présider mon jury de thèse et pour l'aide qu'il m'a apporté durant ces trois années. Je remercie également David Dureisseix et Jean-François Remacle d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail. Leurs remarques et questions pertinentes ont permis de me préparer au mieux aux questions du jour J. Je remercie Anne-Sophie Caro et Céline Pelissou pour avoir accepté d'évaluer ce travail et d'avoir apporté un regard applicatif à ces travaux majoritairement tournés vers le numérique.

Durant deux années, ma thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire de Physique et de Thermoécanique des Matériaux (LPTM) et je souhaite remercier l'ensemble des membres de ce laboratoire de m'avoir accueilli et de m'avoir soutenu surtout la dernière année. Je remercie tout particulièrement Bruno Piar, Farice Babik et Raphaël Monod pour l'aide qu'ils m'ont donné avec Pelicans. Je reste convaincu que le ratio bug corrigés/bug introduits est supérieur à 1 (en tout cas je l'espère). Je souhaite également remercier les membres du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de m'avoir accueilli durant une année au sein de leur laboratoire. Je souhaite remercier plus particulièrement Rémy pour l'aide

qu'il m'a donné avec LMGC90 ainsi que PTA et Bili pour les discussions scientifiques et surtout non scientifiques. Vous êtes un trio avec qui j'ai passé une super année à Montpellier.

Je remercie également mes compagnons de thèse Kajetan, Lolo, Julien, Xavier, Tarik, Lhassan, Falaouate, Jack, ... avec qui nous avons partagé des moments plus ou moins forts. Je souhaite bon courage à Adrien, Noé et Polo pour leurs dernières années de thèse.

Je souhaite également remercier mes amis les plus proches qui m'ont permis de penser à autre chose qu'à la thèse.

Un grand merci à ma famille de m'avoir soutenu tout au long de mon cursus et d'avoir cru en moi. Je remercie également ma belle famille de m'avoir réconforté dans les moments pénibles.

J'ai gardé le meilleur pour la fin et je terminerai en remerciant Pauline qui partage ma vie depuis plusieurs années déjà. Tu as su me soutenir dans les moments les plus difficiles (ce n'était pas rigolo tous les jours pendant la rédaction). Ta patience et tes encouragements m'ont permis de me surpasser et de ne rien lâcher. Pour tout cela je te dédie cette thèse.

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1 Contexte industriel . . . . .	14
2 Objectif de la thèse . . . . .	16
3 Approche développée . . . . .	16
4 Plan de l'étude . . . . .	17
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>19</b>
1.1 Mécanique des Solides Déformables . . . . .	21
1.1.1 Formulation forte d'un problème de Mécanique des Solides Déformables . . . . .	21
1.1.2 Formulation faible d'un problème de Mécanique des Solides Déformables . . . . .	21
1.1.3 Méthode des Eléments Finis . . . . .	22
1.2 Autour des méthodes de raffinement . . . . .	24
1.2.1 $p$ -raffinement . . . . .	24
1.2.2 $r$ -raffinement . . . . .	25
1.2.3 $s$ -raffinement . . . . .	25
1.2.4 $h$ -raffinement . . . . .	26
1.2.5 Couplage des méthodes . . . . .	27
1.3 Méthode CHARMS . . . . .	28
1.3.1 Notations et notions importantes . . . . .	29
1.3.2 Motifs et équations de raffinement . . . . .	30
1.3.3 Hiérarchie d'espace d'approximation . . . . .	34
1.3.4 Procédure de raffinement . . . . .	35
1.4 Bilan du chapitre . . . . .	38
<b>2 Raffinement CHARMS en Mécanique des Solides Déformables</b>	<b>41</b>
2.1 Cas du raffinement <i>a priori</i> . . . . .	43
2.1.1 Principe . . . . .	43
2.1.2 Validation au travers de cas tests . . . . .	43
2.2 Cas du raffinement adaptatif . . . . .	51
2.2.1 Critère de raffinement utilisé . . . . .	52
2.2.2 Mise en œuvre du raffinement adaptatif . . . . .	54
2.2.3 Etude paramétrique du critère proposé . . . . .	56

2.2.4	Validation au travers de cas tests . . . . .	61
2.2.5	Application du raffinement adaptatif à un matériau hétérogène . . .	67
2.3	Bilan du chapitre . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Méthodes CHARMS et méthode d'« Eigen-Erosion »</b>	<b>75</b>
3.1	Méthode d' « Eigen-Erosion » . . . . .	77
3.1.1	Formulation . . . . .	77
3.1.2	Mise en œuvre . . . . .	77
3.1.3	Algorithme . . . . .	79
3.2	Couplage du raffinement CHARMS <i>a priori</i> et de la méthode d'« Eigen-Erosion » . . . . .	80
3.2.1	Principe du couplage CHARMS - « Eigen-Erosion » . . . . .	81
3.2.2	Validation . . . . .	81
3.3	Couplage du raffinement CHARMS adaptatif et de la méthode d'« Eigen-Erosion » . . . . .	87
3.3.1	Algorithme et mises à jour . . . . .	87
3.3.2	Critère de raffinement pour l'érosion . . . . .	88
3.3.3	Validation du raffinement adaptatif . . . . .	89
3.3.4	Etude paramétrique du critère de raffinement . . . . .	93
3.4	Bilan du chapitre . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Méthode CHARMS et Modèles de Zones Cohésives Frottantes</b>	<b>99</b>
4.1	Modèle de Zones Cohésives Frottantes . . . . .	101
4.1.1	Principe . . . . .	101
4.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	103
4.1.3	Loi cohésive retenue . . . . .	105
4.1.4	Traitement numérique : méthode NSCD . . . . .	108
4.2	Stratégie de raffinement dans le cadre de l'approche multicorps . . . . .	110
4.3	Couplage du raffinement <i>a priori</i> et le modèle CZM . . . . .	113
4.3.1	Principe du raffinement dans une zone d'intérêt . . . . .	113
4.3.2	Validation du raffinement <i>a priori</i> . . . . .	114
4.4	Couplage du raffinement adaptatif et le modèle CZM . . . . .	118
4.4.1	Algorithme . . . . .	118
4.4.2	Résultats et difficultés du raffinement adaptatif . . . . .	119
4.5	Bilan du chapitre . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Effet de la morphologie des inclusions sur la fissuration d'un béton</b>	<b>123</b>
5.1	Echantillons élémentaires . . . . .	125
5.1.1	Echantillons numériques . . . . .	125
5.1.2	Modélisation . . . . .	126
5.2	Résultats . . . . .	129
5.2.1	Comportements apparents . . . . .	129
5.2.2	Trajets de fissure . . . . .	130

5.3	Bilan . . . . .	133
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>135</b>
<b>Annexes</b>		<b>139</b>
A	Méthodes de raffinements . . . . .	141
A.1	Méthodes de raffinement $s$ . . . . .	141
A.2	Méthodes de raffinement $h$ . . . . .	146
B	Motifs et équations de raffinement des éléments 3D . . . . .	150
B.1	Élément hexaédrique . . . . .	150
B.2	Élément tétraédrique . . . . .	152
C	Critères basés sur l'estimation d'erreurs . . . . .	157
C.1	Estimation d'erreur basée sur la comparaison de maillages raffinés . . . . .	157
C.2	Estimation basée sur l'erreur en relation de comportement . . . . .	158
C.3	Estimation basée sur les résidus d'équilibre . . . . .	159
C.4	Estimation basée sur le lissage des contraintes . . . . .	160
D	Mises à jour des champs Éléments Finis lors du raffinement adaptatif . . . . .	163
D.1	Mises à jour des champs . . . . .	163
D.2	Mise à jour des lois volumiques . . . . .	164
D.3	Mise à jour du système linéaire . . . . .	164
E	Méthodes classiques de fissuration . . . . .	165
E.1	Mécanique linéaire de la rupture . . . . .	165
E.2	Méthode Thick Level Set (TLS) . . . . .	166
E.3	Méthode des Éléments Finis Étendus (XFEM) . . . . .	167
E.4	Méthode des Phase Field . . . . .	168
F	Échantillons pour des volumes élémentaires pré-entaillés de type milieu à matrice cimentaire . . . . .	170
<b>Bibliographie</b>		<b>175</b>



# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des travaux du laboratoire de Micromécanique et Intégrité des Structures (MIST). Ce laboratoire est une entité commune à l'IRSN, au CNRS et à l'Université de Montpellier. Les thématiques traitées pour la sûreté nucléaire sont les changements d'échelle, les couplages multi-physiques et la fissuration-fracturation. Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'opération de recherche fissuration-fracturation.

## 1 Contexte industriel

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) est un EPIC (Etablissement Public à Caractère Industriel et Commercial) dont la mission est d'apporter un appui technique aux pouvoirs publics en matière de risques liés aux installations nucléaires. Les cinq axes d'étude et d'expertise de l'Institut sont les suivants :

- surveillance radiologique de l'environnement et intervention en situation d'urgence radiologique,
- radioprotection de l'homme,
- prévention des accidents majeurs dans les installations nucléaires,
- sûreté des réacteurs,
- sûreté des usines, des laboratoires, des transports et des déchets,
- expertise nucléaire de défense.

Ce travail de thèse s'inscrit dans la stratégie de la sûreté-sécurité de l'IRSN et contribue à la recherche relative à la question « Comment mieux caractériser et modéliser les modes de dégradation du confinement des matières radioactives, en particulier la deuxième et la troisième barrière, en cas d'agressions internes et externes ? » et plus particulièrement : « *Avec quel niveau de précision les caractéristiques des fuites de l'enceinte de confinement en cas d'endommagement de celle-ci sont-elles connues ?* ».

Ce travail a été effectué au sein du MIST dans une collaboration étroite entre le Laboratoire de Physique et de Thermomécanique des Matériaux (LPTM), dont l'une des missions est de comprendre et de modéliser l'évolution au cours du temps du comportement des matériaux utilisés dans l'industrie nucléaire (métaux, bétons, polymères...) sous l'effet des différentes contraintes qu'ils subissent (thermique, mécanique, irradiation...), et le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC), dont l'expertise dans les approches mises en jeu dans ce travail est reconnue. Le contexte de cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'extension de la durée de vie des centrales nucléaires, et plus particulièrement le vieillissement des enceintes de confinement. Le béton constituant ces enceintes peut être soumis à des évolutions microstructurelles dues à différents facteurs (chimiques, thermiques, mécaniques, ...). Ces évolutions peuvent entraîner la formation de fissures et ainsi être préjudiciables à l'étanchéité du bâtiment représentant l'ultime barrière de sûreté, après la gaine de combustible et le circuit primaire (voir Figure 1). En situation

accidentelle, des produits de fission peuvent être relâchés dans l'enceinte de confinement, créant une surpression. La présence de fissures dans le béton de l'enceinte peut contribuer à un rejet de ces produits dans l'environnement. Afin de pouvoir déterminer un éventuel taux de fuite, c'est-à-dire la quantité de matière radioactive relâchée dans l'environnement, une étude fine des fissures est nécessaire (trajet, épaisseur, ...).

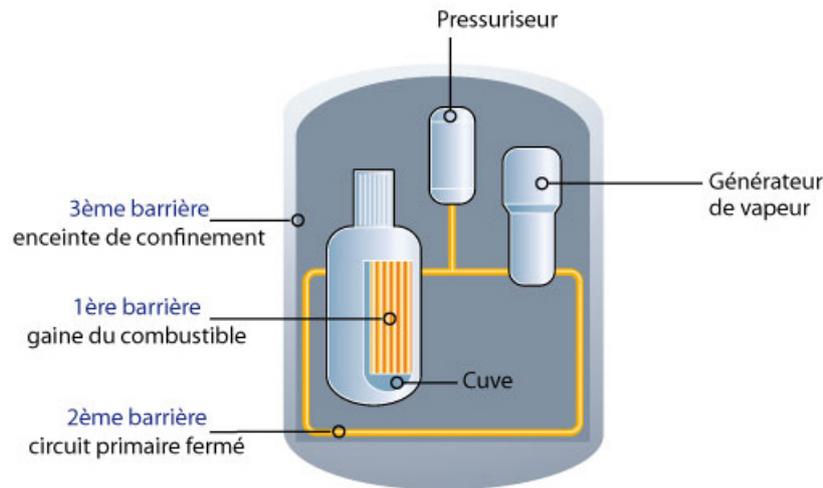


Figure 1: Illustration des trois barrières de sûreté d'une centrale nucléaire.

Les techniques de simulation de la fissuration basées sur les Modèles de Zones Cohésives (CZM) mises en place dans le cadre du laboratoire MIST décrivent finement les phénomènes physiques liés à la fissuration. Ces méthodes, particulièrement efficaces pour la simulation de l'amorçage et de la propagation de multifissures en présence de mécanismes couplés, s'avèrent cependant relativement coûteuses en temps de calcul. Plusieurs stratégies sont développées pour réduire ces coûts ou diminuer le temps de restitution des calculs :

- mise en place de plans d'expériences adaptatifs (krigeage [1]),
- couplage avec des prédicteurs de fissuration moins précis et moins coûteux (« Eigen-Erosion » [2]),
- méthodes numériques (parallélisation, optimisation du code, ...).

Ce travail s'inscrit dans ce dernier point afin de réduire le coût de chaque calcul tout en conservant une bonne précision dans les zones d'intérêt.

Dans cette étude, les méthodes de fissuration retenues sont la méthode d'« Eigen-Erosion » et l'approche micromécanique basée sur les CZM.

La première méthode, de type « killing element », repose sur une formulation variationnelle de la rupture décrite par Schmidt et al. [3] et est basée sur des critères énergétiques. Cette méthode vérifie asymptotiquement le critère de Griffith. Ses atouts majeurs sont sa simplicité de mise en œuvre, son faible coût numérique (de l'ordre d'une résolution Eléments Finis classique) et son indépendance au maillage. Initialement développée dans

le cadre de matériaux homogènes fragiles, elle a été étendue aux matériaux hétérogènes fragiles [4].

La seconde méthode repose sur une approche micromécanique basée sur des Modèles de Zones Cohésives Frottantes [5]. Cette méthode repose sur un découplage du comportement en une partie volumique, décrivant le comportement des mailles et une partie surfacique décrivant la fissuration aux interfaces des mailles. Elle permet l'étude fine de l'initiation, de la propagation de multifissures ainsi que des phénomènes post ruptures (contact, frottement, cicatrisation, ...) tout en conservant les grandeurs clés des approches globales de la mécanique de la rupture classique. Cette approche permet également des couplages multi-physiques (thermo-mécanique, chimio-mécanique, ...). Cependant elle ne permet la propagation de fissures qu'à l'interface entre les mailles et est donc dépendante de la topologie du maillage.

## 2 Objectif de la thèse

L'objectif de ce travail de thèse est de réduire les temps de calcul liés aux problématiques de fissuration, tout en conservant une bonne précision. La stratégie adoptée est l'adaptation de la discrétisation spatiale fine dans des zones d'intérêt à l'aide de techniques de raffinement local adaptatif pour limiter le nombre de mailles nécessaire à la résolution d'un problème de fissuration avec une précision donnée.

## 3 Approche développée

Afin de réduire les coûts numériques, la stratégie consiste à générer un maillage initial grossier, puis à raffiner les zones d'intérêt au cours du calcul.

Les méthodes d'adaptation spatiale les plus courantes sont les méthodes de remaillages (voir annexe A.2.1). Ces méthodes consistent à diminuer localement la taille des mailles tout en conservant la conformité du maillage. Elles génèrent donc une zone de transition entre les mailles grossières et les mailles raffinées. Cette zone doit être relativement étendue pour ne pas dégrader la qualité des mailles (mailles plates ou distordues). Ce type de méthode nécessite un coût numérique important car le maillage doit être régénéré, au moins pour partie, à chaque étape de raffinement.

La méthode de raffinement adaptatif retenue ici est la méthode CHARMS basée sur le raffinement des fonctions d'interpolation, contrairement aux méthodes classiques basées sur le raffinement des mailles. Les fonctions de base à raffiner sont remplacées par une combinaison linéaire de fonctions de base ayant un support plus petit que celui de la fonction grossière. Cette méthode a fait l'objet d'études dans le cadre de la mécanique des fluides [6] et est, dans cette thèse, adaptée à la Mécanique des Solides Déformables pour *in fine* être appliquée à la mécanique de la rupture et plus précisément aux méthodes utilisées par le MIST.

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucun artifice mathéma-

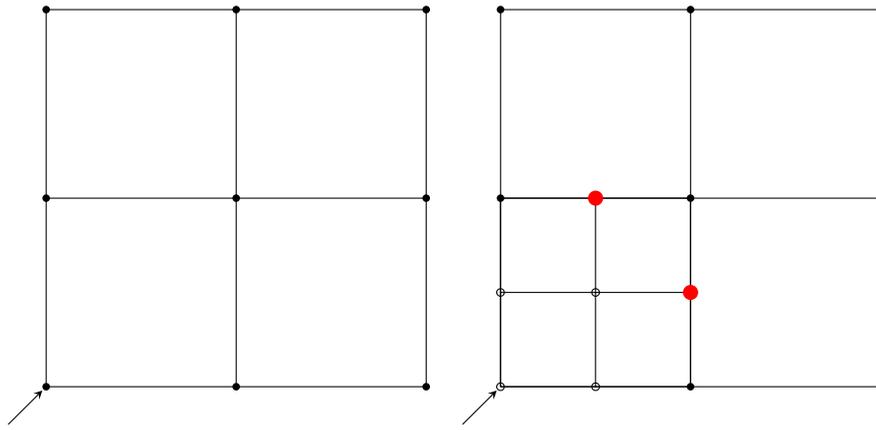


Figure 2: Mise en évidence des points géométriques n'étant reliés à aucune fonction d'interpolation (en rouge). A gauche, le maillage initial où la fonction à raffiner est montrée par une flèche, et à droite le maillage raffiné obtenu, les fonctions de base raffinées étant montrées par des cercles.

tique pour gérer les non-conformités entre les mailles raffinées et les mailles grossières : les non-conformités sont purement géométriques. Les maillages raffinés avec cette méthode restent conformes au sens des Eléments Finis : ces non-conformités, appelées « Hanging nodes » (voir Figure 2), ne sont pas prises en compte dans le système algébrique car aucun degré de liberté n'est relié à ces nœuds. La Figure 2 montre le raffinement d'une fonction de base (montrée par une flèche) et les points géométriques non conformes générés.

Classiquement, les critères de raffinement permettant de sélectionner les zones d'intérêt à raffiner sont basés sur une estimation de l'erreur *a posteriori* (en loi de comportement, en résidu d'équilibre, ...). La détermination de ces estimateurs peut se révéler coûteuse car elle nécessite la résolution de systèmes supplémentaires. Bien que ce type de critères permette de piloter le raffinement automatiquement (raffinement réalisé jusqu'à ce que l'erreur soit inférieure à une valeur cible), les critères de raffinement utilisés dans cette thèse sont basés sur des grandeurs calculées lors de la résolution du problème. L'utilisation de tels critères nécessite de définir un niveau de raffinement maximal (ou une taille de maille minimum à atteindre).

## 4 Plan de l'étude

Ce mémoire s'articule selon cinq chapitres.

Le premier chapitre introduit le problème dynamique de référence dans le cadre de la Mécanique des Solides Déformables (MSD). Un état de l'art des méthodes de raffinement est effectué, puis la méthode de raffinement CHARMS est détaillée. Une attention particulière est portée aux éléments clés de cette méthode : les motifs de raffinement et les équations de raffinement. Enfin, la procédure de raffinement est présentée.

Le deuxième chapitre a pour but de valider la méthode CHARMS appliquée à la MSD. Dans un premier temps, le raffinement CHARMS est appliqué *a priori*. Puis, un critère de raffinement générale basé sur l'intensité et le gradient d'un champ est proposé afin de raffiner adaptativement au cours de la simulation. Après avoir présenté l'algorithme de raffinement adaptatif et les mises à jour nécessaires, une étude paramétrique du critère est réalisée. Enfin, le raffinement adaptatif est validé à l'aide de cas tests.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode CHARMS à la méthode d'« Eigen-Erosion ». La méthode de raffinement CHARMS est appliquée *a priori* puis adaptativement à la méthode d'érosion. Le critère de raffinement exprimé selon le taux de restitution d'énergie locale à une maille est ensuite introduit. Après avoir validé le couplage du raffinement adaptatif grâce à la méthode CHARMS à l'« Eigen-Erosion », une étude paramétrique de ce critère est réalisée.

Le quatrième chapitre introduit le principe des Modèles de Zones Cohésives. Deux critères de raffinement spécifiques sont introduits. Le premier concerne les zones d'insertion des lois cohésives et le second concerne les simulations réalisées en parallèle. Le raffinement *a priori* est appliqué et validé aux CZM. Les difficultés du raffinement adaptatif appliqué aux CZM sont ensuite mises en évidence.

Le dernier chapitre est consacré à la fissuration d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) de béton numérique. Un facteur influent de la fissuration est la modélisation géométrique des inclusions (granulats). L'étude porte sur l'influence de la circularité des inclusions sur le comportement apparent et la propagation de fissures (en 2D). L'objectif est de déterminer si des inclusions anguleuses sont plus limitantes d'un point de vue de la tenue mécanique que des inclusions circulaires à même fraction volumique.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

*Ce premier chapitre a pour but de présenter les formulations faibles des problèmes de dynamique en Mécanique des Solides Déformables élastiques linéaires avec l'hypothèse des petites perturbations.*

*Après avoir détaillée la formulation variationnelle, les principaux types de raffinement sont présentés. La méthode de raffinement choisie pour cette étude, appelée méthode CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement Methods), est une méthode de  $h$ -raffinement conforme basée sur le raffinement des fonctions d'interpolation Eléments Finis. Les notions et les notations sont dans un premier temps introduites puis les éléments clés de cette méthode son détaillés. Enfin la procédure de raffinement local adaptatif est présentée.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Mécanique des Solides Déformables</b>	<b>21</b>
1.1.1	Formulation forte d'un problème de Mécanique des Solides Déformables	21
1.1.2	Formulation faible d'un problème de Mécanique des Solides Déformables	21
1.1.3	Méthode des Eléments Finis	22
<b>1.2</b>	<b>Autour des méthodes de raffinement</b>	<b>24</b>
1.2.1	$p$ -raffinement	24
1.2.2	$r$ -raffinement	25
1.2.3	$s$ -raffinement	25
1.2.4	$h$ -raffinement	26
1.2.5	Couplage des méthodes	27
<b>1.3</b>	<b>Méthode CHARMS</b>	<b>28</b>
1.3.1	Notations et notions importantes	29
1.3.2	Motifs et équations de raffinement	30

---

1.3.3	Hiérarchie d'espace d'approximation . . . . .	34
1.3.4	Procédure de raffinement . . . . .	35
<b>1.4</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>38</b>

---

## 1.1 Mécanique des Solides Déformables

Dans cette section, la formulation variationnelle d'un problème de mécanique dans le cadre des solides déformables ayant un comportement élastique linéaire est brièvement présenté.

### 1.1.1 Formulation forte d'un problème de Mécanique des Solides Déformables

Soit un solide représenté par l'adhérence d'un ouvert connexe de  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , où  $d \in \llbracket 2, 3 \rrbracket$ , et de frontière  $\partial\Omega$ . Le solide est supposé élastique linéaire et soumis à des déplacements imposés  $u_d$  sur  $\Gamma_u \in \partial\Omega$ , à un champs de forces surfaciques  $F$  sur  $\Gamma_F \in \partial\Omega$  tels que  $\Gamma_u \cap \Gamma_F = \emptyset$  et  $\Gamma_u \cup \Gamma_F = \partial\Omega$ , et à un champ de forces volumiques  $f$  (voir Figure 3). Soit  $u$  le champ de déplacements inconnu du solide soumis à ce chargement.

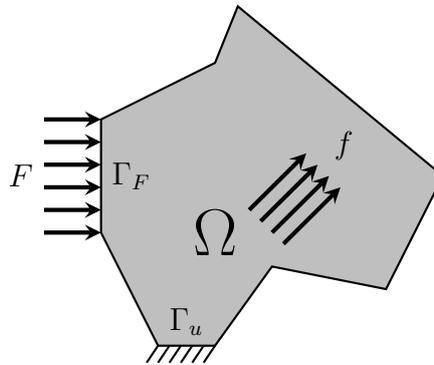


Figure 3: Problème mécanique générique

Le problème de mécanique s'écrit alors :  
trouver le champ des déplacements  $u$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \sigma + f = \rho \ddot{u} & \text{dans } \Omega \text{ (Equation de la dynamique)} \\ \sigma = C : \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \text{ (Loi de comportement)} \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla(u) + \nabla(u)^T) = \nabla_s(u) & \text{dans } \Omega \text{ (Petites perturbations)} \\ \sigma \cdot n = F & \text{sur } \Gamma_F \text{ (Condition de Neumann)} \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_u \text{ (Condition de Dirichlet)} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations,  $C$  est le tenseur d'élasticité (tenseur symétrique positif),  $\nabla_s$  correspond au gradient symétrique,  $\rho$  est la masse volumique, et  $n$  est une normale sortante à  $\partial\Omega$ .

### 1.1.2 Formulation faible d'un problème de Mécanique des Solides Déformables

La méthode des Eléments Finis permet d'approximer la solution de (1.1) en se basant sur une formulation faible du problème.

Soit les espaces variationnels  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{V}$  tels que :

$$\mathbf{S} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = u_d \text{ sur } \Gamma_d \right\} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_d \right\} \quad (1.3)$$

où  $H^1(\Omega)$  est un espace de Sobolev.

La projection de l'équation d'équilibre sur les champs de déplacements virtuels  $v \in \mathbf{V}$  s'écrit :

trouver  $u \in \mathbf{S}$  tel que

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (C : \varepsilon(u)) + f) \cdot v dV = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dV \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (1.4)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, la loi de comportement et l'hypothèse des petites perturbations, le problème (1.4) devient :

trouver  $u \in \mathbf{S}$  tel que

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dV + \int_{\Omega} \nabla_s(u) : C : \nabla_s(v) dV = \int_{\Omega} f \cdot v dV + \int_{\Gamma_F} F v dS \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (1.5)$$

Une approximation de Galerkin du problème variationnel (1.5) est obtenue en approximant les espaces  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{V}$  par des espaces de dimension finie  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{V}_h$ . L'approximation variationnelle s'écrit donc :

trouver  $u_h \in \mathbf{S}_h$  tel que

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_h \cdot v_h dV + \int_{\Omega} \nabla_s(u_h) : C : \nabla_s(v_h) dV = \int_{\Omega} f \cdot v_h dV + \int_{\Gamma_F} F \cdot v_h dS \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \quad (1.6)$$

### 1.1.3 Méthode des Eléments Finis

**Discrétisation spatiale** La méthode des Eléments Finis permet, à partir d'une partition  $\mathcal{M}$  de  $\Omega$ , de construire un sous-espace de dimension finie de  $H^1(\Omega)$  engendré par une famille  $\{\varphi_i \mid i \in \llbracket 0, N_{node} - 1 \rrbracket\}$ , où  $N_{node}$  est le nombre de nœuds, telle que chaque fonction de base  $\varphi_i$  reliée au nœud  $a_i \in \Omega$  vérifie la propriété :

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}) \quad (1.7)$$

Les espaces  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{V}_h$  sont définis tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_h = \text{vect} \left\{ \varphi_i \mid i \in \mathbb{I} \right\} \\ \mathbf{S}_h = u_{dh} + \mathbf{V}_h \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\mathbb{I}$  représente les indices  $i$  associés à des nœuds  $a_i$  n'appartenant pas à  $\Gamma_u$  et  $u_{dh}(x) = \sum_{i \notin \mathbb{I}} u_d(a_i) \varphi_i(x)$ . Ainsi, toutes fonctions  $u \in H^1(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$  peuvent être approximées

par :

$$\forall x \in \Omega, \quad u_h(x) = \sum_{i \in \mathbb{I}} u_i \varphi_i(x) + u_{dh}(x) \quad v_h(x) = \sum_{i \in \mathbb{I}} v_i \varphi_i(x) \quad (1.9)$$

où  $u_i = u(a_i)$  et  $v_i = v(a_i)$ . L'approximation variationnelle (1.6) peut être réécrite :

trouver  $u_h \in \mathbf{S}_h$  tel que

$$\sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \left( \int_{\mathcal{K}_e} \rho \ddot{u}_h \cdot v dV + \int_{\mathcal{K}_e} \nabla_s(u_h) : C : \nabla_s(v_h) dV \right) = \sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \left( \int_{\mathcal{K}_e} f \cdot v_h dV + \int_{\Gamma_F^e} F \cdot v_h dS \right) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h \quad (1.10)$$

où  $N_{mesh}$  correspond au nombre de mailles de la partition.

Avec une indexation convenable des réels  $u_i$  dans un vecteur  $U \in \mathbb{R}^N$ , le problème (1.10) s'écrit, sous forme matricielle :

trouver  $U \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (1.11)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ij} = \sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \int_{\mathcal{K}_e} \rho \varphi_i \varphi_j dV \quad (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket \\ K_{ij} = \sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \int_{\mathcal{K}_e} \nabla_s(\varphi_i) \nabla_s(\varphi_j) C_{ij} dV \quad (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket \\ F_j = \sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \left( \int_{\mathcal{K}_e} f \varphi_j dV + \int_{\Gamma_F^e} F \varphi_j dS \right) \quad j \in \llbracket 0, N \rrbracket \end{array} \right. \quad (1.12)$$

**Discrétisation temporelle** Dans la suite, la discrétisation temporelle du problème (1.11) repose sur une  $\theta$ -méthode, avec  $\theta \in [0, 1]$ . Le problème est intégré sur l'intervalle  $]t_n, t_{n+1}]$  de taille  $\Delta t$ . L'inconnue du problème est  $\dot{U}(t_{n+1})$ . En notant  $\tilde{M} = M + \Delta t^2 \theta^2 K$ , le problème (1.11) devient (voir [7] pour plus de détails) :

trouver  $\dot{U}(n+1)$  tel que

$$\dot{U}(n+1) = \dot{U}(n) + \tilde{M}^{-1} \left( \Delta t F(n+\theta) - \Delta t \theta K(U(n) + \Delta t \dot{U}(n)) \right) \quad (1.13)$$

où  $\dot{U}(n+1)$ ,  $\dot{U}(n)$ ,  $U(n+1)$  et  $U(n)$  représentent respectivement les vitesses et les déplacements aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$ , et  $F(n+\theta) = \theta F(t_{n+1}) + (1-\theta)F(t_n)$ . La matrice  $\tilde{M}$  est inversible si  $\Delta t$  est assez petit et si la matrice  $M$  est définie positive.

## 1.2 Autour des méthodes de raffinement

Il existe principalement deux façons d'augmenter la précision locale d'une solution obtenue à l'aide d'un calcul Eléments Finis. La première consiste à réduire, dans la zone d'intérêt, la taille des mailles et la seconde revient à augmenter la richesse des fonctions d'interpolation.

Cette section a pour but de présenter les quatre types de raffinement de maillage existants avec leurs avantages et leurs inconvénients. Le premier type de raffinement présenté ( $p$ -raffinement) repose sur l'augmentation de l'ordre du polynôme lorsque les fonctions d'interpolation sont polynomiales. Le deuxième type ( $r$ -raffinement) consiste à augmenter la précision localement en redistribuant spatialement les degrés de liberté en tenant compte de la zone d'intérêt. Le troisième type ( $s$ -raffinement) est basé sur l'utilisation de maillages supplémentaires fins locaux pour enrichir la solution du maillage initial grossier. Enfin, le dernier type ( $h$ -raffinement) consiste à subdiviser les mailles afin d'augmenter localement le nombre de degrés de liberté.

### 1.2.1 $p$ -raffinement

La stratégie utilisée pour augmenter le nombre de degrés de liberté dans le raffinement de type  $p$  est l'augmentation de l'ordre du polynôme  $p$  des fonctions d'interpolation Eléments Finis tout en conservant la taille des mailles  $h$  constante [8].

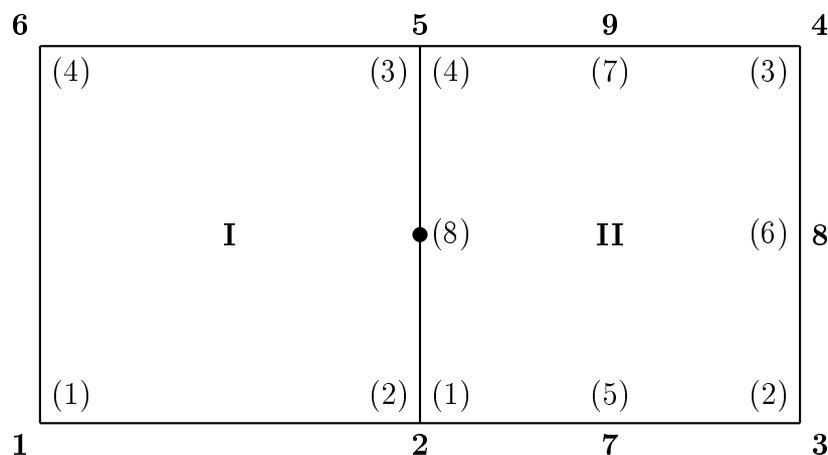


Figure 4: Illustration d'un raffinement grâce à la méthode  $p$  dans l'élément II, les numéros en gras représentent les nœuds « globaux » et les numéros entre parenthèses les nœuds « locaux ».

La Figure 4 illustre le maillage obtenu par le raffinement de type  $p$  appliqué à l'élément II : l'élément I constitué de fonctions d'interpolation d'ordre  $p$  valant 1, et l'élément II dont l'ordre  $p$  a été augmenté à 2 [9]. Pour assurer la continuité des champs, le degré du polynôme de l'approximation sur l'interface dans l'élément II est diminué afin que l'ordre soit le même que l'élément I [9].

L'inconvénient majeur du type  $p$  est que ce genre de méthodes ne permette pas d'améliorer la discrétisation de la géométrie car il dépend du maillage initial et son utili-

sation est donc difficile lorsque la géométrie présente des singularités. D'un point de vue coût numérique, le raffinement de type  $p$  est similaire au raffinement  $h$  à même nombre de degrés de liberté et fournit de meilleurs résultats dans le cadre des éléments finis [10].

Ce type de raffinement a été étendu aux comportements plastique parfait [10], élasto-plastique [11] et aux non linéarités géométriques simples [12].

### 1.2.2 $r$ -raffinement

Le raffinement de type  $r$  consiste à optimiser la position des nœuds (voir Figure 5) afin de mieux détecter des phénomènes locaux et d'améliorer l'approximation des géométries locales complexes [13]. L'ordre des polynômes d'interpolation et le nombre de mailles restent inchangés.



Figure 5: Maillage de base avec la zone d'intérêt à raffiner en hachurée et maillage raffiné avec la méthode  $r$

L'idée du raffinement  $r$  est de déplacer les nœuds dans les zones d'intérêt, sans rajouter de degrés de liberté par rapport au maillage initial. La taille des mailles possédant une erreur faible augmente et la taille des mailles avec une erreur importante diminue [14]. Cette méthode est basée sur des transformations géométriques du maillage de référence [15] [16]. Malgré sa facilité de mise en oeuvre, l'inconvénient majeur est la dégradation de la qualité du maillage après transformation (mailles distordues ou « plates ») qui est préjudiciable à une résolution de type Eléments Finis et va à l'encontre de l'objectif visé qui est l'amélioration locale de la solution calculée. Cette limitation est due à la conservation du nombre de degrés de liberté du maillage initial. D'un point de vue coût numérique, étant donné que le nombre de degrés de liberté reste inchangé, le temps de calcul est le même que celui du maillage initial.

La méthode de raffinement de type  $r$  a été appliquée principalement en 2D aux comportements élastique linéaire [14] et visco-élasto-plastique [13].

### 1.2.3 $s$ -raffinement

Le raffinement de type  $s$  consiste à superposer, dans les zones d'intérêt, un maillage de pas plus fin et dont l'ordre des polynômes d'interpolation est supérieur ou égal à celui du maillage initial [17] (voir Figure 6). Ainsi un nouveau problème est défini, contenant le problème résolu sur chaque maillage et un couplage entre les différents maillages.

Bien que cette méthode permette l'utilisation de maillages réguliers et structurés, le problème complet contient l'ensemble des degrés de liberté de chaque maillage et le coût mémoire peut devenir rédhibitoire [18].

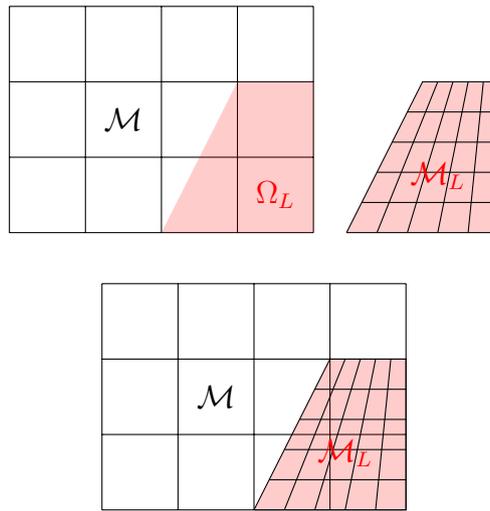


Figure 6: Exemple de raffinement  $s$  :  $\mathcal{M}$  représente le maillage initial d'un domaine  $\Omega$  et  $\Omega^L \subset \Omega$  la zone d'intérêt dont le maillage fin associé est  $\mathcal{M}_L$ , les deux maillages représentant un maillage composite.

Deux principaux types de méthodes dérivent de la méthode de raffinement de type  $s$  : les méthodes basées sur la décomposition de domaine (par exemple la méthode Arlequin [19]) et les méthodes multigrilles. Ces méthodes sont décrites en annexe A.1.

#### 1.2.4 $h$ -raffinement

Les méthodes de type  $h$  sont très largement utilisées pour réduire l'erreur de discrétisation spatiale [8]. Dans ces méthodes, l'erreur est diminuée en réduisant la taille de maille  $h$ , ce qui implique une augmentation du nombre de degrés de liberté, l'ordre du polynôme restant identique. Dans la pratique, le degré du polynôme est relativement faible ( $p < 3$ ).

Il existe deux familles de raffinement de type  $h$  :  $h$  conforme et  $h$  non conforme. Ces méthodes sont détaillées en annexe A.2 et rapidement présentées ici :

- Conforme – Le premier type consiste à augmenter localement la densité de mailles en générant un nouveau maillage grâce à un logiciel de génération de maillage (Gmsh, par exemple [20]) en imposant une taille de maille fine dans les zones d'intérêt. Ces méthodes de remaillage sont très largement utilisées dans les codes de calculs mais elles peuvent être coûteuses en temps pour générer des mailles de tailles inférieures avec une qualité raisonnable. De plus, plus la taille de maille nécessaire est petite par rapport aux mailles grossières, plus la zone de transition est importante pour conserver une conformité du maillage et une qualité liée aux mailles correcte. Des méthodes de remaillage sont présentées en annexe A.2.
- Non conforme – Le second type de méthodes consiste à diviser une maille grossière en mailles de tailles inférieures. Un exemple d'un tel raffinement est présenté sur la Figure 7. Le problème majeur de ce type de raffinement est qu'il introduit en général une non-conformité entre mailles raffinées et mailles non raffinées (le nœud

10 sur la Figure 7). Ces nœuds, appelés « Hanging nodes », introduisent une non-conformité. La principale différence entre les méthodes  $h$  non conformes repose sur la manière dont sont traitées les non-conformités (ces non-conformités correspondent à une non-conformité au sens des Eléments Finis).

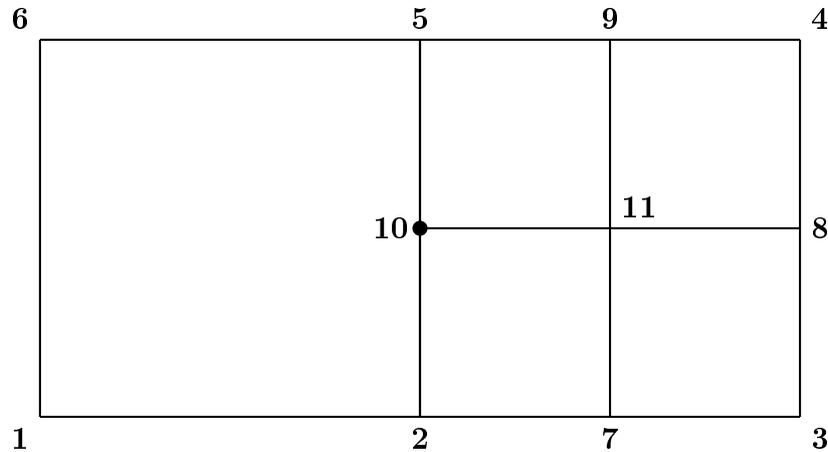


Figure 7: Illustration d'un raffinement grâce à la méthode  $h$ .

La méthode de raffinement utilisée dans cette thèse appartient à la famille de méthodes  $h$  conforme. Il s'agit de la méthode CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement MethodS) [21] qui est basée sur le raffinement des fonctions d'interpolation Elements Finis, contrairement aux autres méthodes basées sur le raffinement des mailles. Cette méthode gère implicitement les éventuelles non-conformités du maillage car les nœuds « esclaves » ou « Hanging Nodes » représentant ces non-conformités ne sont pas pris en compte dans le système. Cette méthode de raffinement est basée sur une hiérarchie de maillages raffinés emboîtés. Une fonction de base peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions de base associées au maillage immédiatement plus fin et ces combinaisons définissent des relations parents/enfants. Raffiner une fonction de base revient donc à remplacer cette fonction de base par l'ensemble de ses enfants. Les principaux avantages de cette méthode sont les suivants :

- elle ne modifie pas le problème discrétisé une fois le raffinement réalisé,
- la qualité des mailles raffinées est la même que celle des mailles grossières indépendamment du nombre de raffinements réalisés,
- la procédure de raffinement s'applique aux éléments de Lagrange 2D et 3D et ne nécessite aucune modification pour des éléments d'ordre  $p > 1$ .

Cette méthode de raffinement est détaillée de manière précise dans la section 1.3.

### 1.2.5 Couplage des méthodes

Ces méthodes ont été couplées afin de cumuler leurs avantages. La méthode  $hp$ , couplant le type  $h$  et le type  $p$ , est la plus répandue. Ce couplage permet d'augmenter,

d'une part, la vitesse de convergence de la méthode  $h$  et, d'autre part, d'augmenter l'approximation de la discrétisation de la géométrie [12]. La difficulté de ce couplage est de déterminer la méthode de raffinement à appliquer (méthode  $h$  ou méthode  $p$ ). Plusieurs critères ont été définis. Dans [9], les auteurs définissent un critère de raffinement basé sur l'ordre  $p$  de l'interpolation et la régularité de la solution. Dans [22], l'idée est de résoudre le problème sur le maillage initial, puis de raffiner d'abord avec un  $h$  raffinement (mailles grossières divisées en deux) et ensuite avec du  $p$  raffinement, et enfin de déterminer une erreur (en énergie) entre les deux solutions. Si cette erreur est acceptable, alors le raffinement optimal à appliquer est obtenu grâce au critère suivant : les ordres d'interpolation  $p_1$  et  $p_2$  des éléments  $h$  raffinés doivent vérifier la condition  $p_1 + p_2 - 1 = p$ , où  $p$  est l'ordre d'interpolation de l'élément grossier. Dans [23], le couplage  $hp$  a été appliqué au cadre des équations de transport neutronique et il a été montré que, dans ce cadre, un bon critère est l'utilisation du  $p$  raffinement tant que l'ordre d'interpolation  $p < 4$  puis d'utiliser le  $h$ -raffinement. Ce couplage et le choix du  $p$  raffinement ou du  $h$  raffinement sont directement liés à la régularité de la solution.

Un autre couplage a également été réalisé entre le  $h$  raffinement et le  $r$  raffinement [24]. Le  $h$ -raffinement permet d'augmenter le nombre initial de degrés de liberté et le  $r$  raffinement permet d'augmenter la densité de degrés de liberté dans les zones d'intérêt sans modifier le nombre de degrés de liberté. Dans ce couplage, le  $h$  raffinement peut être réalisé par exemple lorsque la taille de maille est très éloignée de la taille de maille optimale et le  $r$  raffinement est réalisé lorsque la taille de maille est plus ou moins optimale.

### 1.3 Méthode CHARMS

La méthode CHARMS considère le raffinement d'un « point de vue » fonctions d'interpolation Eléments Finis (appelées « fonctions de base » par la suite). Cette méthode consiste à remplacer des fonctions de base grossières par des fonctions de base raffinées dont le support est inférieur à celui de la fonction initiale. De fait, en réduisant le support, la taille des mailles diminue et le nombre de degrés de liberté augmente localement.

Après avoir introduit les notations et les notions générales, la notion de motif de raffinement est expliquée. Cette notion permet de définir la stratégie de découpe d'un support d'une fonction reliée à un élément de référence. Les motifs présentés dans ce chapitre permettent de conserver la qualité de maille ou d'en assurer la non dégénérescence lors de raffinements successifs. Ces motifs de raffinement permettent également de définir des relations entre les fonctions grossières et les fonctions de base raffinées : il s'agit des équations de raffinement. Ces équations définissent le lien entre un élément de référence et un motif de raffinement et permettent ainsi de créer une hiérarchie entre les différents espaces d'approximation engendrés par le raffinement.

La procédure présentée dans cette section permet de raffiner un ensemble de fonctions de base en assurant, d'une part, qu'il n'y ait pas de perte d'informations et, d'autre part, que chaque espace multiniveau généré soit libre.

### 1.3.1 Notations et notions importantes

Le raffinement de maillage à l'aide de la méthode « CHARMS » (Conforming Hierarchical Adaptive MethodS) est basé sur le « dé/raffinement des fonctions de base ». La méthode [21] s'applique à des Eléments Finis conformes lagrangiens (voir [25] pour plus de détails).

Un Elément Fini lagrangien de référence est un triplet  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathcal{P}})$  où  $\widehat{\mathcal{K}}$  est un sous-ensemble compact, connexe, lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ),  $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{a}_k \in \widehat{\mathcal{K}}; 0 \leq k \leq \widehat{N}_{node} - 1\}$  est un ensemble de  $\widehat{N}_{node}$  points distincts de  $\widehat{\mathcal{K}}$ , appelés nœuds de Lagrange, et  $\widehat{\mathcal{P}}$  est un espace vectoriel de fonctions  $\mathcal{P} : \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_{\widehat{N}_{node}-1}) \in \mathbb{R}^{\widehat{N}_{node}}, \exists ! \mathcal{P} \in \widehat{\mathcal{P}}, \forall k \in \llbracket 0, \widehat{N}_{node} - 1 \rrbracket, \mathcal{P}(\widehat{a}_k) = \alpha_k$ .

Pour un niveau de raffinement  $j \in \llbracket 0, J \rrbracket$ , où  $J \in \mathbb{N}$  représente le niveau de raffinement maximal, les notations suivantes sont utilisées :

- $T_e^{(j)}$  : transformation géométrique de l'élément de référence  $\widehat{\mathcal{K}}$  vers l'élément réel  $\mathcal{K}_e^{(j)}$  ( $\mathcal{K}_e^{(j)} = T_e^{(j)}(\widehat{\mathcal{K}})$ ),
- $\Sigma_j = \{a_i^{(j)}; 0 \leq i \leq N_{node}^{(j)} - 1\}$  : ensemble des nœuds de Lagrange de niveau de raffinement  $j$ , avec  $N_{node}^{(j)}$  le nombre de nœuds de Lagrange de niveau  $j$ ,
- $\varphi_i^{(j)}$  : fonction de base de niveau de raffinement  $j$ , avec pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq N_{node}^{(j)} - 1$ ,  $\varphi_i^{(j)}(a_l^{(j)}) = \delta_{il}$ ,
- $X_j$  : espace d'approximation  $H^1(\Omega)$  conforme dont  $\{\varphi_0^{(j)}, \dots, \varphi_{N_{node}^{(j)}-1}^{(j)}\}$  est une base de cet espace,
- $\mathcal{M}_j$  : maillage Eléments Finis généré à partir d'éléments de référence,
- $B_j$  : ensemble des fonctions de base associées au maillage  $\mathcal{M}_j$  :  $\{\varphi_0^{(j)}, \dots, \varphi_{N_{node}^{(j)}-1}^{(j)}\}$ .

La méthode repose sur une suite d'espaces d'approximations  $H^1(\Omega)$ -conformes emboîtés  $X_0 \subset \dots \subset X_J$ ,  $J \geq 1$ , engendrés par des ensembles  $B_j$ ,  $j \in \llbracket 0, J - 1 \rrbracket$  de fonctions de base de résolution spatiale d'autant plus fine que  $j$  est grand. Dans ce cadre, Krysl, Grinsprun et Schröder [21] (voir également [26], [27], [28]) ont développé une méthode consistant à ajouter ou enlever des fonctions de base à un ensemble  $B_j$  afin de raffiner ou de déraffiner l'espace d'approximation  $X_j$ , tout en garantissant une indépendance linéaire entre les fonctions de base de  $B_j$ .

Il est important de noter que puisque  $X_j \subset X_{j+1}$ , chaque fonction de base de  $B_j$  peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions de base de l'ensemble  $B_{j+1}$ . Ainsi, pour raffiner une fonction de base de niveau  $j$ , il suffit de retirer cette fonction et de la remplacer par la combinaison linéaire de fonctions de niveau  $j + 1$ . Ces combinaisons linéaires définissent des relations parents/enfants entre deux niveaux consécutifs. De même, pour déraffiner une fonction de base de niveau  $j + 1$ , il suffit de

remplacer la combinaison linéaire des fonctions enfants par les fonctions de base parents de niveau  $j$ . Dans la suite, le raffinement de fonctions de base est détaillé.

### 1.3.2 Motifs et équations de raffinement

Pour raffiner une fonction de base, la méthode CHARMS nécessite un motif de raffinement afin de définir les combinaisons linéaires entre les fonctions de base grossières et les fonctions de base raffinées. Un motif de raffinement peut être défini de la manière suivante [6] : il s'agit d'un quadruplet  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P}, \widehat{\mathcal{M}})$  où  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$  représente un Élément Fini de référence de Lagrange satisfaisant les conditions de compatibilité [25], et  $\widehat{\mathcal{M}} = \left\{ \mathcal{K}_e^{(1)}; 0 \leq e \leq \widehat{N}_{mesh}^{(1)} - 1 \right\}$  est un maillage géométriquement conforme de l'intérieur  $\widehat{\mathcal{K}}$  généré à partir de l'élément de référence  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ , avec  $\widehat{N}_{mesh}^{(1)}$  le nombre de mailles composant le motif. Dans le cas d'un maillage géométriquement conforme, les conditions de compatibilité assurent que les noeuds d'une face commune appartiennent à chacun des éléments partageant la face. Un exemple de motif incompatible est montré sur la Figure 8.

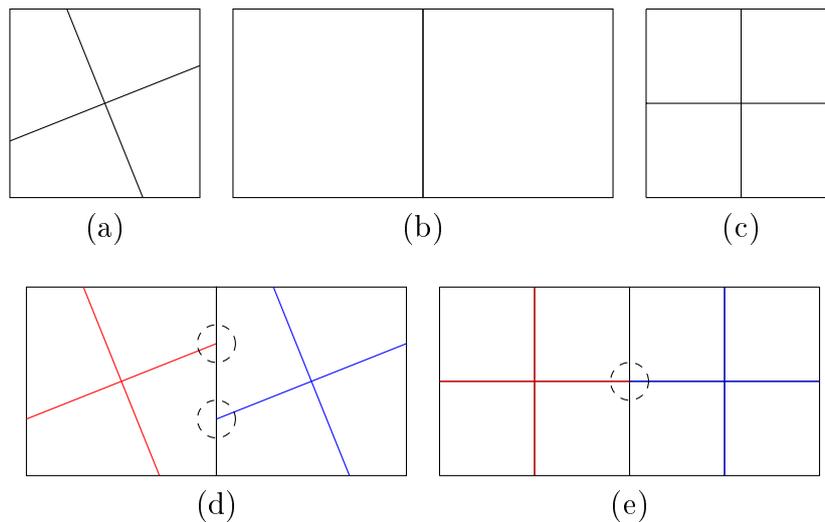


Figure 8: Exemple de motifs de raffinement (a) non compatible et (c) compatible amenant à un maillage (d) non conforme et (e) conforme en raffinant un maillage conforme (b).

La stratégie utilisée dans ce travail pour obtenir un motif de raffinement vérifiant les conditions de compatibilité est de diviser les arêtes de l'élément de référence en un nombre fini d'arêtes identiques. Dans ce travail de thèse, les arêtes de l'élément de référence sont coupées en deux arêtes de tailles égales et les motifs de raffinement considérés sont les suivants :

- un quadrangle divisé en quatre quadrangles semblables (voir Figure 9),
- un triangle divisé en quatre triangles semblables (voir Figure 10),
- un cube divisé en huit cubes semblables (voir annexe B.2 ),

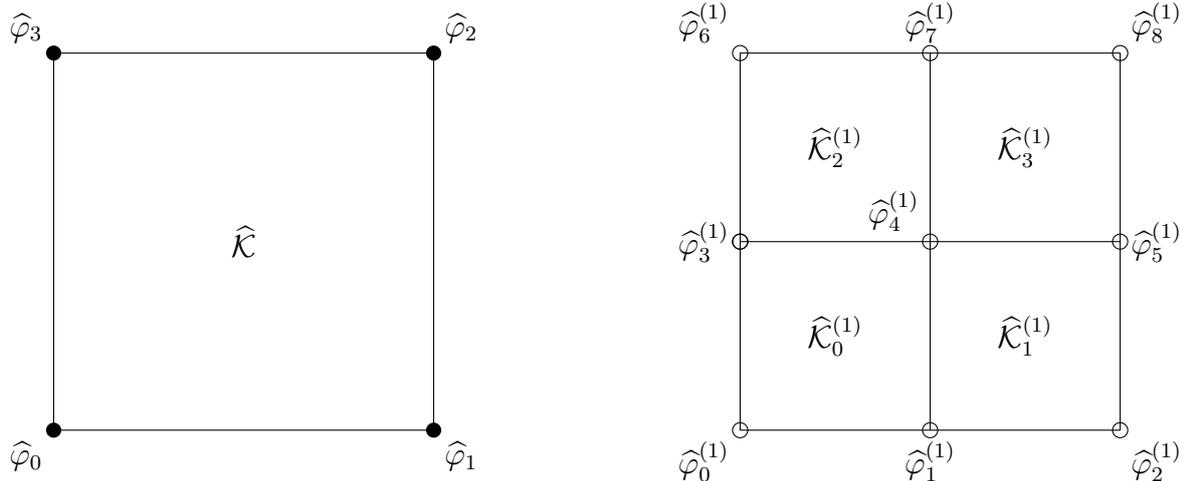


Figure 9: Exemple de motif de raffinement d'un quadrangle : l'élément de référence (à gauche) et le maillage de l'élément de référence (à droite).

- un tétraèdre divisé en huit tétraèdres selon la stratégie utilisée par [29] qui assure la non dégénérescence de la qualité des tétraèdres raffinés (stratégie détaillée dans l'annexe B.1).

L'exemple de la Figure 9 illustre la notion de motif de raffinement d'un quadrangle. Les éléments considérés dans la suite sont d'ordre 0 et 1 mais il est important de noter que cette méthode permet le raffinement d'éléments d'ordre supérieur (voir [6] pour un exemple de motif d'ordre 2). La construction des espaces d'approximation emboîtés repose sur un Élément Fini de référence et un maillage de son support géométrique (voir Figure 9).

L'élément clé de la méthode CHARMS est l'équation de raffinement qui relie les fonctions de base grossières aux fonctions de base raffinées. Cette équation dépend du motif de raffinement. Elle peut être généralisée et écrite de la manière suivante pour une fonction de base  $\widehat{\varphi}_i$  reliée à un élément de référence  $\widehat{\mathcal{K}}$  :

$$\forall i \in \llbracket 0, \widehat{N}_{node} - 1 \rrbracket, \quad \widehat{\varphi}_i = \sum_{k=0}^{\widehat{N}_{node}^{(1)} - 1} \widehat{\beta}_{ik} \widehat{\varphi}_k^{(1)} \quad \text{avec} \quad \widehat{\beta}_{ik} = \widehat{\varphi}_i(\widehat{a}_k^{(1)}) \quad (1.14)$$

où  $\widehat{N}_{node}$  correspond au nombre de nœuds de l'élément de référence,  $\widehat{N}_{node}^{(1)}$  représente le nombre de nœuds de Lagrange du motif de raffinement relié à l'élément de référence et  $\widehat{\varphi}_k^{(1)}$  les fonctions de base reliées à ces nœuds. Avec un motif de raffinement quadrangulaire

(voir motif de la Figure 9), les équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\varphi}_0^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_3^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \widehat{\varphi}_4^{(1)} \\ \widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_5^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \widehat{\varphi}_4^{(1)} \\ \widehat{\varphi}_2 = \widehat{\varphi}_8^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_5^{(1)} + \widehat{\varphi}_7^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \widehat{\varphi}_4^{(1)} \\ \widehat{\varphi}_3 = \widehat{\varphi}_6^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_3^{(1)} + \widehat{\varphi}_7^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \widehat{\varphi}_4^{(1)} \end{array} \right. \quad (1.15)$$

et celles obtenues avec un motif triangulaire (voir Figure 10) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\varphi}_0^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_3^{(1)} \right) \\ \widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_4^{(1)} \right) \\ \widehat{\varphi}_2 = \widehat{\varphi}_5^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_3^{(1)} + \widehat{\varphi}_4^{(1)} \right) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

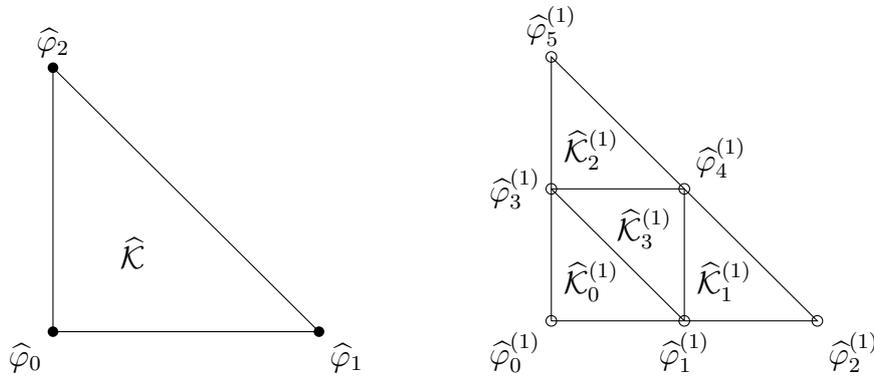


Figure 10: Motif de raffinement lié à un élément de référence triangulaire : l'élément de référence (à gauche) et le maillage de l'élément de référence (à droite).

En appliquant récursivement un motif de raffinement sur l'ensemble d'un maillage, des espaces d'approximation emboîtés sont générés. Soit  $\mathcal{M}_j$  un maillage raffiné  $j$  fois, tel que  $\mathcal{M}_j = \left\{ \mathcal{K}_e^{(j)} ; e \in \llbracket 0, N_{mesh}^{(j)} - 1 \rrbracket \right\}$ , où  $N_{mesh}^{(j)}$  représente le nombre de mailles du maillage  $\mathcal{M}_j$ , et le maillage  $\mathcal{M}_{j+1}$  obtenu en raffinant le maillage  $\mathcal{M}_j$ . Le maillage  $\mathcal{M}_{j+1}$  est constitué des éléments  $\mathcal{K}_{ef}^{(j+1)}$  tels que  $\mathcal{K}_{ef}^{(j+1)} = T_e^{(j)}(\widehat{\mathcal{K}}_f^{(1)})$ , où  $e \in \llbracket 0, N_{mesh}^{(j)} - 1 \rrbracket$  et  $f \in \llbracket 0, \widehat{N}_{mesh}^{(1)} - 1 \rrbracket$ . Ainsi, pour obtenir le maillage raffiné  $\mathcal{M}_{j+1}$ , seuls la transformation  $T_e^{(j)}$  et le motif de raffinement doivent être connus. De même que pour les éléments de référence et les motifs de raffinement, deux espaces d'approximation de niveaux de raffinement consécutifs sont liés par l'équation de raffinement. Pour une fonction de base  $\varphi_i^{(j)}$  de niveau de raffinement  $j$  appartenant à l'ensemble  $B_j$ , il est possible de l'exprimer comme

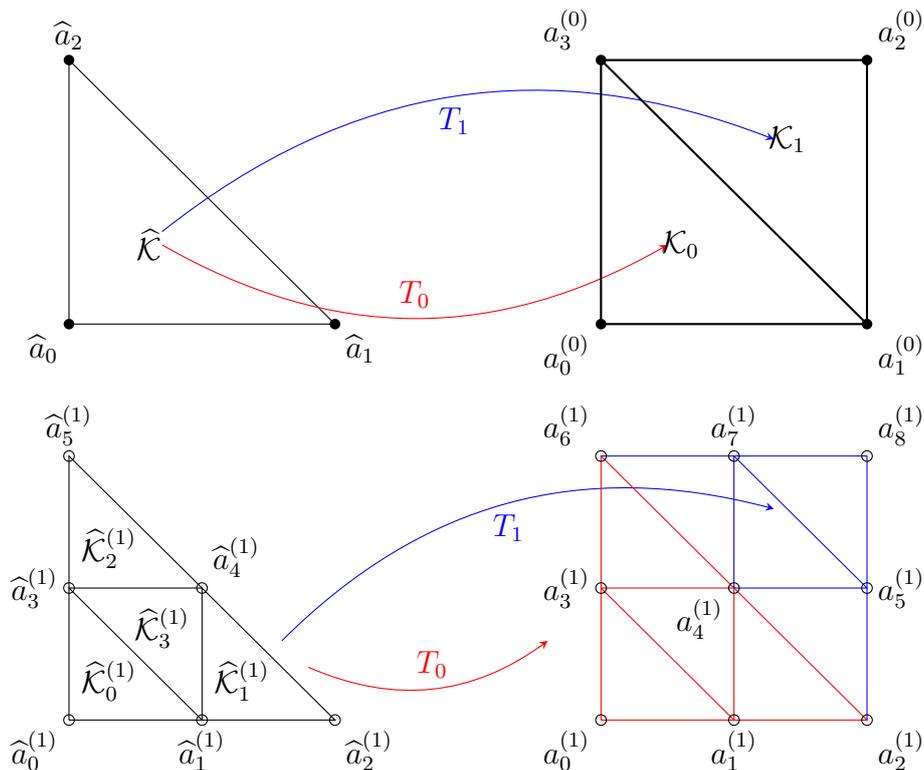


Figure 11: Illustration des transformations géométriques liées au maillage réel (en haut à droite) à partir de l'élément de référence (en haut à gauche) et maillage raffiné obtenu (en bas à droite) grâce à ces transformations et au motif relié à l'élément de référence (en bas à gauche).

une combinaison linéaire de fonctions de base raffinées  $\varphi_t^{(j+1)}$  de niveau de raffinement  $j + 1$  (étant donné que  $X_j \subset X_{j+1}$ ) :

$$\forall l \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket, \varphi_l^{(j)} = \sum_{t=0}^{N_{node}^{(j+1)} - 1} \beta_{lt}^{(j)} \varphi_t^{(j+1)} \quad (1.17)$$

où les coefficients  $\beta_{lt}^{(j)}$  sont donnés  $\forall (l, t) \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_{node}^{(j+1)} - 1 \rrbracket$  par :

$$\beta_{lt}^{(j)} = \begin{cases} \widehat{\beta}_{ik} & \text{(voir équation (1.14)) si } \exists (e, i, k) \text{ t.q. } a_l^{(j)} = T_e^{(j)}(\widehat{a}_i) \text{ et } a_t^{(j+1)} = T_e^{(j)}(\widehat{a}_k^{(1)}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $(e, i, k) \in \llbracket 0, N_{mesh}^{(j)} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \widehat{N}_{node} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \widehat{N}_{node}^{(1)} - 1 \rrbracket$ .

La Figure 11 montre le maillage réel obtenu grâce aux transformations géométriques  $T_0$  et  $T_1$  appliquées à l'élément de référence triangulaire  $\widehat{\mathcal{K}}$  et le raffinement de ce maillage basé sur le motif de raffinement triangulaire. Dans cette Figure, étant donné que  $a_0^{(0)} = T_0(\widehat{a}_0)$  et  $a_3^{(1)} = T_0(\widehat{a}_3^{(1)})$ , le coefficient  $\beta_{03}^{(0)}$  reliant les fonctions de base  $\varphi_0^{(0)}$  et  $\varphi_3^{(1)}$  est égal au coefficient  $\widehat{\beta}_{03}$  (ici égal à 0.5, voir équation 1.16). Le coefficient  $\beta_{07}^{(0)}$  liant les fonctions de base  $\varphi_0^{(0)}$  et  $\varphi_7^{(1)}$  est, quant à lui, nul :  $a_0^{(0)}$  est bien l'image de  $\widehat{a}_0$  par la transformation  $T_0$  mais le nœud  $a_7^{(1)}$  ne peut pas être exprimé en fonction de la transformation géométrique  $T_0$  (étant donné qu'il dépend de la transformation géométrique  $T_1$ ).

Il est important de noter que, dans les équations de raffinement (1.14) et (1.17), aucune modification ne doit être apportée pour les appliquer à des éléments d'ordre supérieur. De plus, les coefficients  $\widehat{\beta}_{ik}$  peuvent être déterminés *a priori*.

Ces équations de raffinement définissent des relations parents/enfants entre les fonctions de base de niveaux de raffinement consécutifs. Ces relations sont présentées dans la section suivante.

### 1.3.3 Hiérarchie d'espace d'approximation

Dans le cas où les coefficients  $\beta_{lt}^{(j)}$  de l'équation de raffinement (1.17) sont non nuls, des relations entre les fonctions de base grossières et raffinées sont établies : la fonction  $\varphi_l^{(j)}$  de niveau de raffinement  $j$  est dite fonction parent de la fonction de base  $\varphi_t^{(j+1)}$ . De même, la fonction  $\varphi_t^{(j+1)}$  de niveau de raffinement  $j+1$  est dite fonction enfant de  $\varphi_l^{(j)}$ .

De même que pour les fonctions, il est possible de définir une relation parents/enfants entre les mailles  $\mathcal{K}_e^{(j)}$  d'un maillage  $\mathcal{M}_j$  et les mailles  $\mathcal{K}_{ef}^{(j)}$  d'un maillage  $\mathcal{M}_{j+1}$  : la maille  $\mathcal{K}_{ef}^{(j+1)}$ , où  $e \in \llbracket 0, N_{mesh}^{(j)} - 1 \rrbracket$  et  $f \in \llbracket 0, \widehat{N}_{mesh}^{(1)} - 1 \rrbracket$  est dite maille enfant de la maille  $\mathcal{K}_e^{(j)}$ . A l'inverse, la maille  $\mathcal{K}_e^{(j)}$  est dite maille parent de la maille  $\mathcal{K}_{ef}^{(j+1)}$ . La différence entre les mailles et les fonctions enfants/parents est qu'une fonction enfant peut avoir plusieurs fonctions parents alors qu'une maille enfant n'a qu'une seule maille parent. Les fonctions de base n'ayant qu'une seule fonction parent sont appelées fonctions enfants privées ( $a_k^{(j)} = a_l^{(j+1)}$ , avec  $(k, l) \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_{node}^{(j+1)} - 1 \rrbracket$ ).

Grâce à un motif de raffinement  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P}, \widehat{\mathcal{M}})$  appliqué uniformément sur un maillage  $\mathcal{M}_0$  géométriquement conforme d'un domaine  $\Omega$  obtenu à partir de l'élément de référence  $(\widehat{\mathcal{K}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ , il est possible de construire :

1. une hiérarchie de maillages emboîtés  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_J$  (voir Figure 12),
2. une hiérarchie d'espaces d'approximation  $H^1(\Omega)$ -conformes  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_J$ ,
3. des ensembles de fonctions de base  $B_0, B_1, \dots, B_J$ , tels que  $B_j = \left\{ \varphi_k^{(j)}; 0 \leq k \leq N_{node}^{(j)} - 1 \right\}$  engendrant des espaces d'approximation associés, deux ensembles  $B_j$  et  $B_{j+1}$ ,  $0 \leq j \leq J-1$ , étant reliés par l'équation de raffinement (1.17).

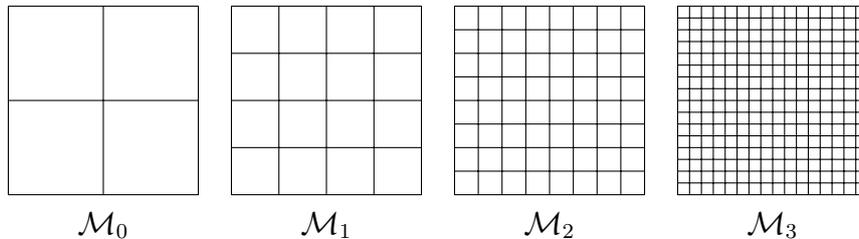


Figure 12: Exemple de maillages emboîtés, l'élément de référence est un élément  $\mathbb{Q}_1$  et le motif de raffinement est décrit par celui de la Figure 9.

Dans la pratique, la hiérarchie de maillages emboîtés n'est jamais construite explicitement. Le motif de raffinement est appliqué localement dans les zones d'intérêt. La

difficulté liée au raffinement local avec la méthode CHARMS est la sélection d'une famille libre de fonctions de base de l'ensemble multiniveau de  $\bigcup_{j=0}^J B_j$ . La procédure présentée dans la suite permet de sélectionner une famille libre de fonctions de base.

Soit  $\mathfrak{B}$  un sous-ensemble de  $\bigcup_{j=0}^J B_j$ .  $\mathfrak{B}$  est une famille libre si  $\forall (j, j') \in \llbracket 0, J - 1 \rrbracket^2$ ,  $\forall (k, k') \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_{node}^{(j')} - 1 \rrbracket$  deux nœuds  $a_k^{(j)}$  et  $a_{k'}^{(j')}$  associés à deux fonctions de base distinctes de  $\mathfrak{B}$  n'ont pas la même position géométrique. Un tel sous-ensemble  $\mathfrak{B}$  est appelé base multiniveau et engendre un espace d'approximation multiniveau.

*Remarque importante :*

Soit  $\mathcal{B}$  un espace d'approximation multiniveau de  $\mathfrak{B}$  et  $u = \sum_{i=0}^{N_{node}^{(\mathcal{B})}} u_i \varphi_i$ , avec  $N_{node}^{(\mathcal{B})}$  le nombre de fonctions de base de  $\mathcal{B}$ . La valeur du champ au nœud  $i$  ( $u_i$ ) n'est pas forcément la valeur approchée du champ  $u$  au nœud associé à la fonction de base  $\varphi_i$ . En effet, étant donné que l'espace d'approximation multiniveau peut contenir des fonctions de base de niveaux de raffinement différents, une fonction de base de niveau de raffinement inférieur dont le support est non nul sur le nœud peut avoir une contribution. Dans la Figure 13, le nœud relié à la fonction de base raffinée  $\varphi_2^{(1)}$  n'a pas uniquement la contribution de sa fonction de base mais également la contribution des fonctions de base grossières avec un support non nul sur le nœud, ici  $\varphi_1^{(0)}$ ,  $\varphi_3^{(0)}$  et  $\varphi_4^{(0)}$ .

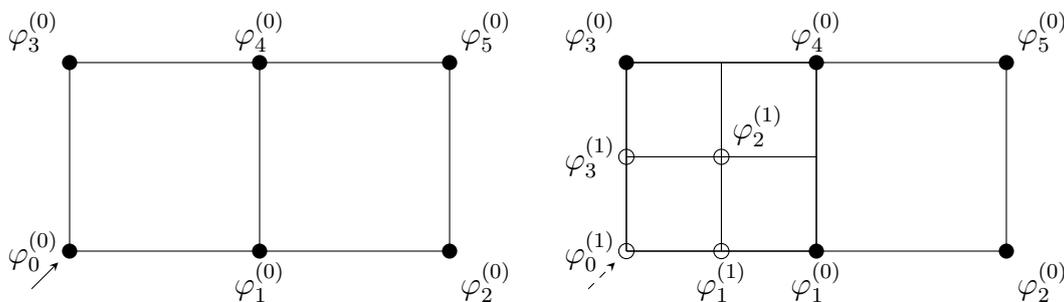


Figure 13: Illustration de la contribution de fonctions de base de différents niveaux : à gauche le maillage initial et à droite le maillage obtenu en raffinant uniquement la fonction de base  $\varphi_0^{(0)}$  grâce au motif de raffinement présenté sur la Figure 9.

Une procédure de génération de bases multiniveaux est présentée dans la suite.

### 1.3.4 Procédure de raffinement

La procédure de raffinement consiste à ajouter et à enlever certaines fonctions de base d'une base multiniveau  $\mathfrak{B}^*$  pour obtenir une nouvelle base multiniveau  $\mathfrak{B}$  de résolution spatiale plus fine, en assurant l'indépendance linéaire entre les familles de fonctions de base. Il faut également assurer que toutes les fonctions de base de  $\mathfrak{B}^*$  sont représentées dans la nouvelle base  $\mathfrak{B}$  pour ne perdre aucune information.

Avant d'expliciter la procédure de raffinement, il convient de définir ce qu'est une fonction  $\mathfrak{B}$ -raffinée : soit  $j \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket$ , une fonction de base  $\varphi_i^{(j)}$  est dite  $\mathfrak{B}$ -raffinée si et seulement s'il existe une fonction de base  $\varphi_{i'}^{(j')} \in \mathfrak{B}$ , avec  $j' \in \llbracket j+1, J \rrbracket$  et  $i' \in \llbracket 0, N_{node}^{(j')} - 1 \rrbracket$ , dont le nœud associé à cette fonction et le nœud associé à  $\varphi_i^{(j)}$  sont confondus ( $a_i^{(j)} = a_{i'}^{(j')}$ ). Dans le cas où  $j' = j+1$ , la fonction  $\varphi_i^{(j)}$  est dite  $\mathfrak{B}$ -raffinée une seule fois. Sur la Figure 13, en supposant que  $\varphi_0^{(1)} \in \mathfrak{B}$ , la fonction de base  $\varphi_0^{(0)}$  est dite  $\mathfrak{B}$ -raffinée une seule fois : les nœuds associés à  $\varphi_0^{(0)}$  et  $\varphi_0^{(1)}$  sont confondus et  $\varphi_0^{(1)} \in \mathfrak{B}$ .

Les fonctions de base  $\mathfrak{B}$ -raffinées ne peuvent pas être dans  $\mathfrak{B}$  sinon la base multiniveau n'est plus libre. Cette remarque est une conséquence de la règle assurant qu'une famille de fonctions de base soit libre. De plus, si  $\varphi_i^{(j)}$  est dite  $\mathfrak{B}$ -raffinée une seule fois, alors  $\varphi_i^{(j)}$  est l'unique parent de  $\varphi_{i'}^{(j+1)}$ .

### Procédure de raffinement

Soit  $\mathfrak{B}^*$  une base multiniveau et soit  $\varphi_i^{(j)} \in \mathfrak{B}^*$ , avec  $i \in \llbracket 0, N_{node}^{(j)} - 1 \rrbracket$ , une fonction de base de niveau de raffinement  $j \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket$ . Raffiner cette fonction de base consiste à produire une nouvelle base multiniveau  $\mathfrak{B}$  à partir de  $\mathfrak{B}^*$  en enlevant (désactivant), d'une part, la fonction de base  $\varphi_i^{(j)}$  à raffiner et en ajoutant (activant), d'autre part, tous ses enfants  $\varphi_k^{(j+1)}$ , avec  $k \in \llbracket 0, N_{node}^{(j+1)} - 1 \rrbracket$ , de niveau de raffinement  $j+1$  qui ne sont pas  $\mathfrak{B}^*$ -raffinés. Ainsi, si la base  $\mathfrak{B}^*$  à raffiner respecte bien la règle assurant qu'il s'agit d'une base multiniveau, l'indépendance linéaire des ensembles multiniveaux est assurée.

Pour qu'il n'y ait pas de perte d'information, il faut assurer que si une base multiniveau  $\mathfrak{B}$  est obtenue à partir de  $\mathfrak{B}^*$  par le raffinement d'une fonction de base alors  $\text{vect } \mathfrak{B}^* \subset \text{vect } \mathfrak{B}$ . Toutefois, la procédure de raffinement décrite n'empêche pas la perte d'informations. La Figure 14 illustre le fait que la fonction de base  $\varphi_0^{(0)}$  n'est pas représentable dans la nouvelle base multiniveau constituée des fonctions de base  $\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$  et  $\varphi_0^{(2)}$  :  $\varphi_0^{(0)}$  ne peut pas être exprimée comme combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$  et  $\varphi_0^{(2)}$ .

Néanmoins, il a été prouvé dans [6] que si tout enfant d'une fonction de base  $\mathfrak{B}$ -raffinée est soit lui même  $\mathfrak{B}$ -raffiné, soit dans  $\mathfrak{B}$ , alors toutes les fonctions de base  $\mathfrak{B}$ -raffinées appartiennent à  $\text{vect } \mathfrak{B}$ . Si une base multiniveau  $\mathfrak{B}$  obtenue grâce à la procédure de raffinement ci-dessus à partir de  $\mathfrak{B}^*$  vérifie cette propriété alors  $\text{vect } \mathfrak{B}^* \subset \text{vect } \mathfrak{B}$ . Cela signifie qu'il n'y a aucune perte d'informations si les bases multiniveaux engendrées par la procédure de raffinement respectent cette propriété.

Cette procédure de raffinement permet de raffiner l'ensemble des fonctions de base de  $\mathfrak{B}^*$ . Il est également possible de ne raffiner qu'un ensemble  $\mathbf{F}^*$  de fonctions de base de  $\mathfrak{B}^*$ . Ceci produit une base multiniveau  $\overline{\mathfrak{B}}$  qui est indépendante de l'ordre dans lequel les fonctions de base de  $\mathbf{F}^*$  sont raffinées.

Lorsqu'un tel ensemble de fonctions de base est raffiné, seules les fonctions de base actives sont connues. Il est cependant nécessaire de connaître les mailles actives afin de réaliser des intégrations pour le calcul de champs. Seules les mailles actives peuvent être

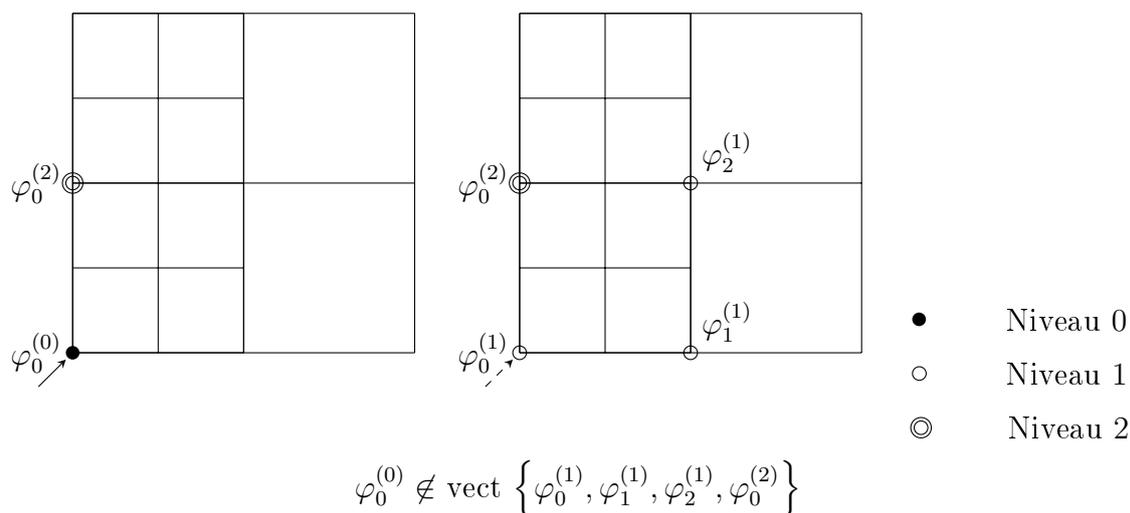


Figure 14: Illustration de la perte d'informations lors du raffinement de la fonction de base  $\varphi_0^{(0)}$ .

utilisées comme domaines d'intégration élémentaires en appliquant les règles de quadrature. Une maille  $\mathcal{K}^{(j)}$  de niveau de raffinement  $j$  d'un maillage  $\mathcal{M}_j$  est active si la maille  $\mathcal{K}^{(j)}$  n'intersecte aucun support d'une fonction de base active  $\varphi_k^{(j')}$ , où  $j' \in \llbracket j+1, J \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 0, N_{\text{node}}^{(j')} - 1 \rrbracket$ . En notant  $\widetilde{\mathcal{M}}_j$  l'ensemble des mailles actives du maillage  $\mathcal{M}_j$ , où  $j \in \llbracket 0, J \rrbracket$ , l'ensemble  $\bigcup_{l=0}^J \widetilde{\mathcal{M}}_l$  est appelé maillage multiniveau de  $\Omega$ . De tels maillages ne sont pas géométriquement conformes mais sont par construction  $H^1(\Omega)$ -conformes. Cette non-conformité géométrique ne pose aucun problème car ces maillages multiniveaux ne sont utilisés que pour délimiter les domaines d'intégration élémentaires et pour la sauvegarde (post traitement).

La méthode CHARMS peut être utilisée telle que présentée mais d'un point de vue numérique, des matrices possédant une largeur de bande importante sont construites. L'exemple présenté sur la Figure 15 illustre une situation simple qui mène à la construction d'espaces d'approximation  $\text{vect } \mathfrak{B}_k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , engendré par  $3k+4$  fonctions de base dont les supports s'intersectent deux à deux. Dans cet exemple, la fonction de base montrée par une flèche est raffinée successivement et donne ainsi les espaces d'approximation  $\mathfrak{B}_{k+1}$  à partir de  $\mathfrak{B}_k$ . Les matrices de rigidité associées à ces espaces d'approximations sont pleines (aucun élément nul).

La stratégie de type « au-plus-un-niveau-de-différence » introduite par Krysl [21] est utilisée dans cette thèse. Cette règle pratique limite la largeur de bande de la matrice de rigidité en imposant une condition sur le nombre de niveaux de raffinement séparant deux fonctions de base dont les supports s'intersectent. Cette règle permet de réduire la largeur de bande de la matrice de rigidité mais elle implique une augmentation du nombre de fonctions de base raffinées.

Avant d'énoncer la règle « au-plus-un-niveau-de-différence », la notion d'ascendant d'une fonction  $\varphi^{(j)}$  doit être préalablement introduite : est appelée ascendant de la fonction  $\varphi^{(j)}$  toute fonction de niveau  $j-1$  dont le support intersecte celui de  $\varphi^{(j)}$ .

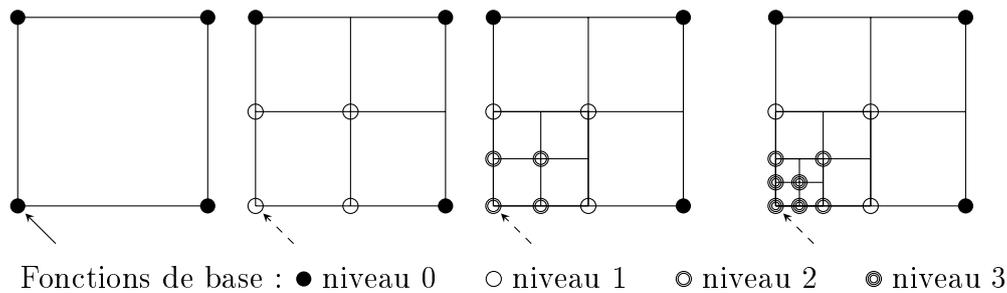


Figure 15: Exemple d'espaces d'approximation conduisant à des matrices de rigidité pleines localement.

### Règle « au-plus-un-niveau-de-différence »

Soit  $F^*$  un ensemble de fonctions de base de la base multiniveau  $\mathfrak{B}^*$ . Lors du raffinement des fonctions de base  $\varphi \in F^*$ , les ascendants de cette fonction sont également raffinés et ce principe s'applique récursivement.

Cette règle pratique permet d'assurer que l'écart entre les niveaux des fonctions de base des espaces d'approximation soit limité. Bien que cette règle implique une augmentation de fonctions de base par base multiniveau (voir Figure 16), la matrice de rigidité associée possède une largeur de bande diagonale faible.

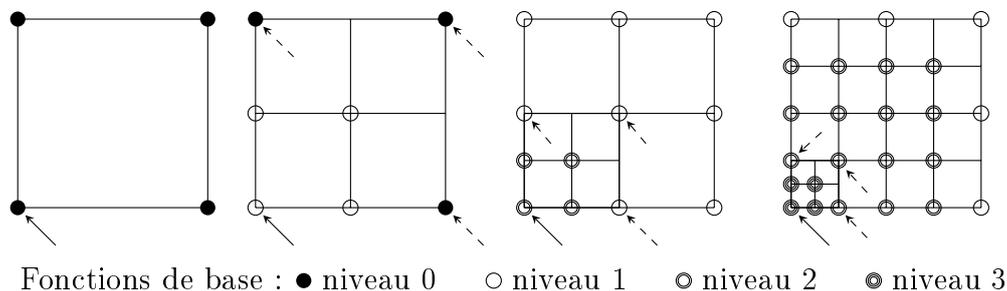


Figure 16: Exemple d'application de la règle « au-plus-un-niveau-de-différence ».

## 1.4 Bilan du chapitre

Plusieurs méthodes de raffinement de maillage ont été présentées dans ce chapitre avec leurs avantages et leurs inconvénients. Les méthodes sont basées soit sur la diminution de la taille des mailles, soit sur l'augmentation du degré d'interpolation. Les principaux inconvénients des méthodes diminuant la taille des mailles sont la génération de mailles distordues (méthodes  $h$  conformes et  $r$ ), le traitement spécifique des non-conformités entre mailles grossières et mailles raffinées (méthodes  $h$  non conformes et  $s$ ) et la limitation du nombre de degrés de liberté initial (méthode  $r$ ). L'inconvénient majeur de la méthode  $p$  est qu'elle ne permet pas d'améliorer la discrétisation initiale de la géométrie.

Dans cette thèse, le choix a été porté sur la méthode de  $h$  raffinement CHARMS. Ce choix a été motivé par le raffinement des mailles sans perte de qualité et sans insertion de

« Hanging Nodes ». Elle repose sur la notion clé du motif de raffinement. Ce motif doit être compatible pour assurer la conformité du maillage lors du raffinement des fonctions de base. Le choix fait dans cette thèse est l'utilisation d'un motif de raffinement obtenu en divisant les arêtes de l'élément de référence en un nombre d'arêtes égales. Un tel motif permet de conserver la qualité des mailles grossières pour les mailles raffinées (éléments triangulaires, quadrangulaires et hexaédriques) ou d'assurer la non dégénérescence des mailles raffinées (éléments tétraédriques).

Des relations entre les fonctions de base grossières et les fonctions raffinées sont définies grâce au motif de raffinement : une fonction de niveau de raffinement  $j$  ( $j \in \llbracket 0, J - 1 \rrbracket$ , où  $J \in \mathbb{N}$  est le niveau de raffinement maximal) est exprimée comme combinaison linéaire de ses enfants (de niveau  $j + 1$ ). En appliquant le motif de raffinement dans les zones d'intérêt, des espaces d'approximation emboîtés sont construits. La procédure de raffinement consistant à retirer les fonctions de base à raffiner et ajouter les enfants de cette fonction, assure l'indépendance linéaire des familles générées et aucune perte d'informations. Une règle pratique a été énoncée afin de limiter la largeur de la bande de la matrice de rigidité.

Bien que cette méthode de raffinement peut être utilisée à des ordres supérieurs, uniquement des éléments d'ordre  $p \leq 1$  sont considérés dans cette thèse. Cette méthode de raffinement a été implémentée dans le logiciel PELICANS [30] dans le cadre de la mécanique des fluides et les détails relatifs à l'implémentation sont précisés dans [6]. La première étape a été d'appliquer la méthode CHARMS aux solides déformables. Cette mise en œuvre spécifique est présentée dans le chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Raffinement CHARMS en Mécanique des Solides Déformables

*Ce chapitre a pour but de valider la méthode CHARMS dans le cadre de la Mécanique des Solides Déformables (MSD). Après avoir présenté le principe du raffinement a priori, le raffinement sans adaptation est, dans un premier temps, validé au travers de cas tests.*

*Un critère de raffinement adaptatif est ensuite introduit pour cibler des zones d'intérêt sans connaissance a priori du problème. L'algorithme de raffinement adaptatif est introduit puis une étude paramétrique est réalisée sur le critère de raffinement proposé. Le raffinement adaptatif est enfin validé au travers de cas tests.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Cas du raffinement <i>a priori</i></b>	<b>43</b>
2.1.1	Principe	43
2.1.2	Validation au travers de cas tests	43
<b>2.2</b>	<b>Cas du raffinement adaptatif</b>	<b>51</b>
2.2.1	Critère de raffinement utilisé	52
2.2.2	Mise en œuvre du raffinement adaptatif	54
2.2.3	Etude paramétrique du critère proposé	56
2.2.4	Validation au travers de cas tests	61
2.2.5	Application du raffinement adaptatif à un matériau hétérogène	67
<b>2.3</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>71</b>

---



## 2.1 Cas du raffinement *a priori*

Afin de valider la méthode CHARMS pour la Mécanique des Milieux Déformables, le raffinement est, dans un premier temps, appliqué *a priori* grâce à un indicateur de raffinement géométrique. Après avoir explicité le principe du raffinement *a priori* de validation, plusieurs cas tests sont étudiés.

### 2.1.1 Principe

Le raffinement s'effectue dans cette section selon un critère géométrique sans adaptation du maillage au cours du calcul. La méthode des Eléments Finis et la méthode CHARMS ont été implémentées dans la plateforme PELICANS [30]. La stratégie de validation de la méthode développée est la suivante :

- Génération d'un maillage grossier (par un mailleur externe (Gmsh [20]) ou par PELICANS),
- Sélection d'une zone d'intérêt à l'aide d'un indicateur géométrique *arbitraire*,
- Raffinement des fonctions de base dans la région sélectionnée à l'aide de la méthode CHARMS,
- Réalisation d'un calcul Eléments Finis,
- Comparaison des résultats avec un calcul de référence.

Dans les différents cas tests présentés, une erreur relative basée sur l'énergie élastique est calculée dans la zone d'intérêt afin d'évaluer les performances de la méthode CHARMS. L'erreur relative calculée par rapport à une solution de référence obtenue avec un maillage fin est définie par :

$$e_E = \frac{|E_{ZI}^{simu} - E_{ZI}^{ref}|}{|E_{ZI}^{ref}|} \quad (2.1)$$

où  $E_{ZI}^{simu}$  et  $E_{ZI}^{ref}$  représentent respectivement l'énergie élastique de la zone d'intérêt d'un maillage raffiné et d'un maillage de référence.

Pour la validation de la méthode CHARMS sans adaptation, le niveau maximal de raffinement est fixé à  $J = 1$  puis  $J = 2$ , le chargement appliqué étant constant. Dans la suite, les erreurs locales et globales obtenues avec un maillage raffiné 1 fois puis 2 fois dans les zones d'intérêt sont comparées à celles obtenues avec des maillages homogènes (même taille de mailles pour l'ensemble du maillage).

### 2.1.2 Validation au travers de cas tests

#### 2.1.2.1 Plaque trouée carrée

Le cas test est composé d'une plaque carrée trouée soumise à un chargement en traction (Figure 17). Les caractéristiques mécaniques et numériques sont précisées dans le tableau

1. Au vu de la géométrie de la Figure 17, les zones d'intérêt sont situées au niveau des coins du trou carré.

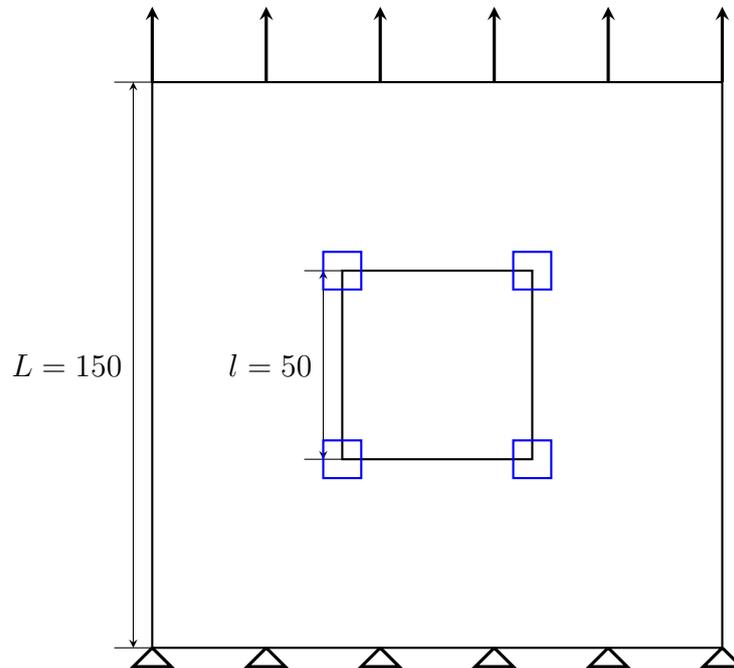


Figure 17: Géométrie de la plaque trouée, les dimensions sont en  $mm$ . Les zones bleues correspondent aux zones d'intérêt où l'erreur relative en énergie (2.1) est déterminée.

Module d'Young	$E = 300MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.4$
Evolution	Quasi-statique
Type de résolution	Implicite
Type de maille	Carré
Taille des mailles grossières	$h1 = 1.67mm$ $h2 = 1.25mm$ $h3 = 0.83mm$ $h4 = 0.5mm$ $h5 = 0.42mm$

Tableau 1: Plaque carrée trouée : caractéristiques mécaniques et numériques.

Pour les tailles des mailles  $h1$ ,  $h2$ ,  $h3$  et  $h4$ , des raffinements sur 1 niveau puis sur 2 niveaux ont été réalisés dans la zone d'intérêt. Les maillages raffinés dans les zones d'intérêt obtenus avec une taille de maille initiale  $h1$  sont montrés dans la Figure 18.

L'évolution de l'erreur relative locale dans les zones d'intérêt en fonction du nombre total de mailles est présentée sur la Figure 19. La courbe en noir correspond aux erreurs locales obtenues avec un maillage homogène pour les tailles de mailles  $h1$ ,  $h2$ ,  $h3$ ,  $h4$  et  $h5$ . Les erreurs obtenues avec les maillages raffinés *a priori* avec la méthode CHARMS dans les zones d'intérêt sont inférieures à celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles. La réduction de l'erreur locale avec un maillage raffinée dans la zone d'intérêt est plus rapide que celle d'un maillage homogène. Le raffinement grâce

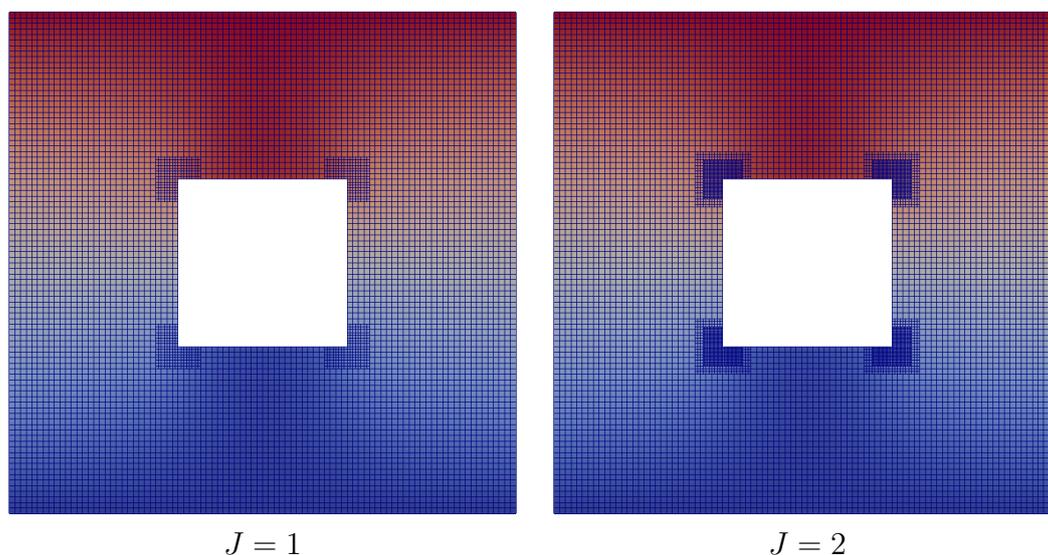


Figure 18: Plaque carrée trouée : maillages raffinés obtenus pour  $J = 1$  (à gauche) et  $J = 2$  (à droite) avec une taille initiale de mailles  $h_1$ , les couleurs correspondent à l'intensité du déplacement vertical.

à la méthode CHARMS permet donc une réduction efficace de l'erreur locale avec moins de mailles et donc un temps de calcul plus faible.

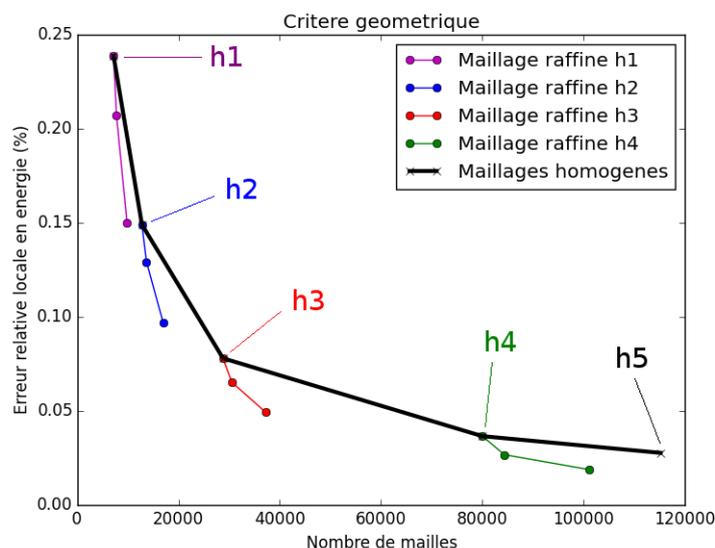


Figure 19: Plaque carrée trouée : erreurs relatives locales obtenues avec des maillages raffinés sur 1 et 2 niveaux dans les zones d'intérêt et avec des maillages homogènes.

La Figure 20 montre l'évolution des erreurs relatives globales en énergie dans la structure en fonction du nombre de mailles. Les erreurs obtenues avec les maillages raffinés dans les zones d'intérêt sont également inférieures à celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles.

**La méthode CHARMS permet donc de réduire les erreurs locale et globale en introduisant moins de mailles qu'un maillage homogène.**

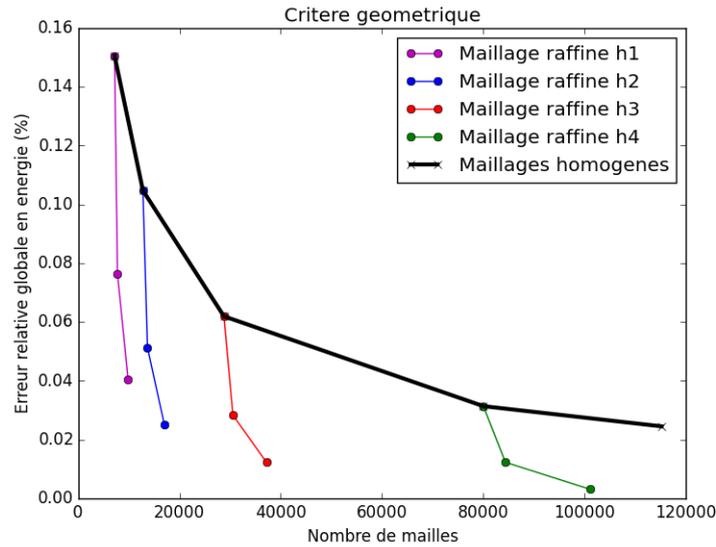


Figure 20: Plaque carrée trouée : erreurs relatives globales obtenues avec des maillages raffinés sur 1 et 2 niveaux dans les zones d'intérêt et avec des maillages homogènes.

### 2.1.2.2 Cas des bords courbes

Dans ce paragraphe, le raffinement de bords courbes est étudié. Le premier cas test est un cylindre creux soumis à un déplacement interne dont la solution analytique est utilisée comme solution de référence et le second cas est une plaque carrée contenant un trou circulaire en son centre.

**Cylindre creux** Le cas test proposé est celui d'un cylindre creux dont le rayon interne est soumis à un déplacement imposé et le rayon externe à un déplacement nul. Ce cylindre est supposé infiniment long, sous l'hypothèse des petites perturbations et des déformations planes, et l'évolution est supposée quasi-statique. En utilisant un repère orthonormé cylindrique, le déplacement  $\vec{u}(r, \theta, z)$  ne dépendant ni de  $\theta$  (cylindre de révolution), ni de  $z$  (cylindre infiniment long), il peut s'écrire  $u_r(r) \cdot \vec{e}_r$ . La structure peut être modélisée par un quart de cercle en 2D (Figure 21) en imposant des conditions de symétrie (déplacements selon  $\vec{e}_\theta$  bloqués sur les deux tranches du quart de cylindre). Les propriétés mécaniques et de la simulation sont présentées dans le tableau 2.

Module d'Young	$E = 1.3GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.4$
Evolution	Quasi-statique
Rayon interne et externe	$a = 100mm, b = 200mm$
Type de mailles	Triangles
Taille des mailles initiales	$h1 = 2.5mm$ $h2 = 1.25mm$ $h3 = 0.625mm$

Tableau 2: Cylindre creux : caractéristiques mécaniques et numériques.

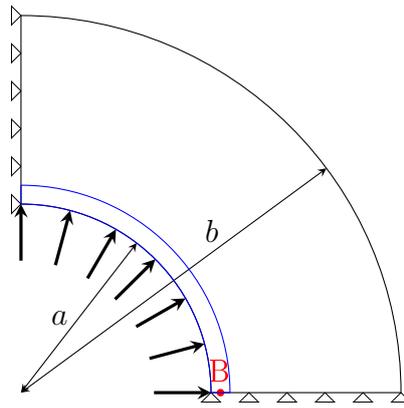


Figure 21: Géométrie du cylindre creux soumis à un déplacement interne.  $a$  représente le rayon interne et  $b$  le rayon externe du cylindre. Au point rouge B, une erreur relative en déplacement radial est calculée et la zone bleue correspond à la zone d'intérêt.

La solution analytique de ce problème est connue :

$$\forall r \in [a, b], \quad u_r(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad (2.2)$$

où  $u_r(a) = u_0 \neq 0$ ,  $u_r(b) = 0$  et les coefficients  $A$  et  $B$  sont définis par

$$A = \frac{u_0}{a(1 - \iota)}, \quad B = \frac{au_0}{\iota - 1} \quad (2.3)$$

où le paramètre  $\iota > 1$  est défini par  $b = \sqrt{\iota}a$ .

Dans ce cas test, l'erreur relative en déplacement radial est déterminée au niveau du point rouge montré sur la Figure 21. En appliquant un chargement de  $1 \times 10^{-3}m$  et avec  $\iota = 4$ , la valeur théorique du déplacement au nœud est déterminée analytiquement.

Le raffinement *a priori* dans la zone d'intérêt est réalisé sur les maillages de tailles de maille initiales  $h1$  et  $h2$ . Les erreurs relatives en déplacement par rapport à la solution analytique au point B sont montrées dans la Figure 22. La courbe en noir correspond aux erreurs obtenues avec des maillages homogènes de tailles de mailles  $h1$ ,  $h2$  et  $h3$ . Les erreurs obtenues avec les maillages raffinés dans la zone d'intérêt sont supérieures à celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles. Le raffinement CHARMS ne permet donc pas de réduire l'erreur locale des structures aux bords courbes. Cette limitation s'explique par le fait que la méthode CHARMS conserve la géométrie du maillage initial grossier : la discrétisation géométrique de l'arc de cercle n'évolue pas avec le raffinement, contrairement au cas des maillages homogènes.

La Figure 23 illustre plusieurs discrétisations obtenues pour un maillage homogène et raffiné. L'erreur de discrétisation spatiale  $e_d$  est mise en évidence. La discrétisation avec un maillage homogène fin introduit moins d'erreur de discrétisation (nœuds positionnés sur la courbe réelle) contrairement à celle obtenue avec la méthode CHARMS.

Ainsi une attention particulière doit être portée à la discrétisation initiale d'une structure ayant des bords courbes. Deux choix sont possibles : favoriser un maillage fin homogène ou utiliser une méthode de raffinement gérant ce problème (raffinement multi-grilles [31] ou zooms structuraux [32] [33]). Afin d'apprécier les performances de la

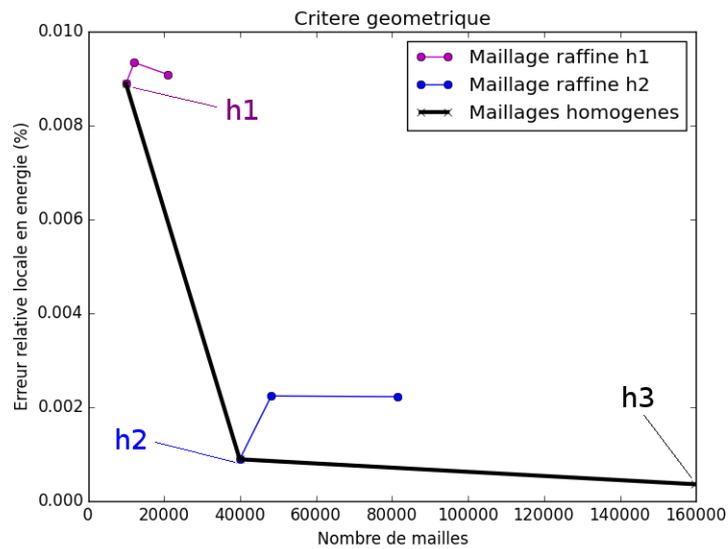


Figure 22: Cylindre creux : erreurs relatives locales obtenues avec un maillage raffiné dans les zones d'intérêt sur 1 et 2 niveaux et avec des maillages fins homogènes.

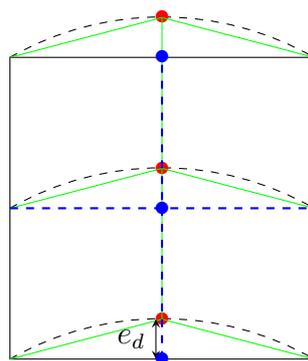


Figure 23: Maillages obtenus lors de la discrétisation d'une structure courbe. En pointillés noirs, la structure réelle, en pointillés bleus, la discrétisation obtenue avec la méthode CHARMS et en vert la discrétisation obtenue avec un maillage fin homogène.  $e_d$  représente l'erreur de discrétisation entre le maillage homogène fin et le maillage raffiné.

méthode de raffinement proposée, le nombre de faces de la discrétisation de la courbe est fixée pour utiliser la méthode de raffinement CHARMS sans introduire une erreur de discrétisation supplémentaire.

**Plaque carrée avec trou circulaire** Le cas test de la Figure 24 est composé d'une plaque avec un trou circulaire en son centre et soumise à un chargement en traction. Les caractéristiques mécaniques et numériques sont identiques à celles du Tableau 2 avec comme tailles de mailles  $h1 = 5mm$ ,  $h2 = 2.5mm$  et  $h3 = 1.25mm$ . Pour ce cas test, le nombre de faces permettant de discrétiser le trou est égal au nombre de faces du maillage grossier (28 faces). L'erreur relative en énergie (2.1) dans la zone d'intérêt (voir Figure 24) par rapport à des maillages homogènes est à nouveau considérée.

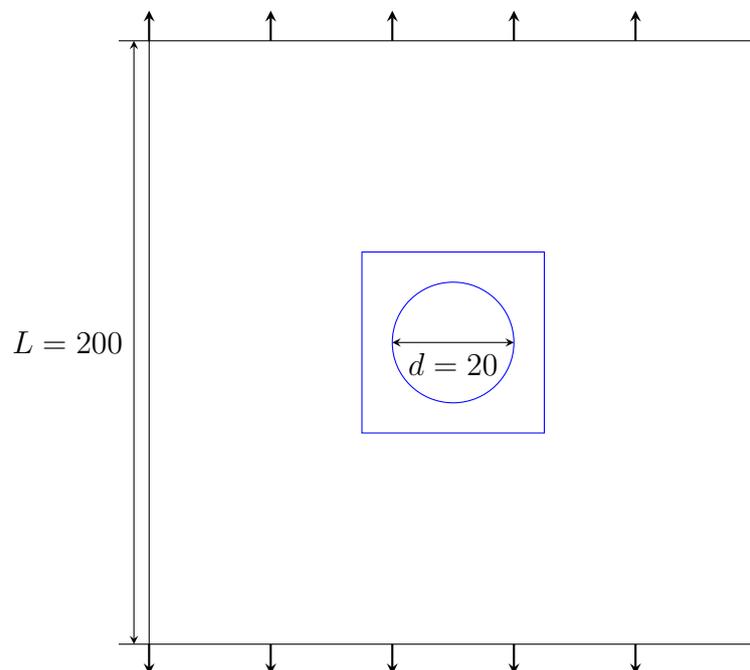


Figure 24: Géométrie de la plaque avec un trou circulaire soumise à un chargement en traction, les dimensions sont en  $mm$ . La zone en bleue correspond à la zone d'intérêt où est déterminée l'erreur relative en énergie.

Les maillages raffinés dans la zone d'intérêt sur  $J = 1$  et  $J = 2$  niveaux, de taille de mailles initiale  $h1$ , sont montrés sur la Figure 25

Les erreurs relatives en énergie de la zone d'intérêt obtenues en fonction du nombre de mailles sont présentées sur la Figure 26. La courbe en noir correspond aux erreurs relatives obtenues avec des maillages homogènes de tailles de mailles  $h1$ ,  $h2$  et  $h3$ . En fixant le nombre de faces de la discrétisation du trou de la plaque, les erreurs locales obtenues avec des maillages raffinés dans la zone d'intérêt est plus faible que celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles.

Les erreurs globales relatives en énergie sont montrées sur la Figure 27. Les erreurs obtenues avec les maillages raffinés sont également moins importantes que celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles.

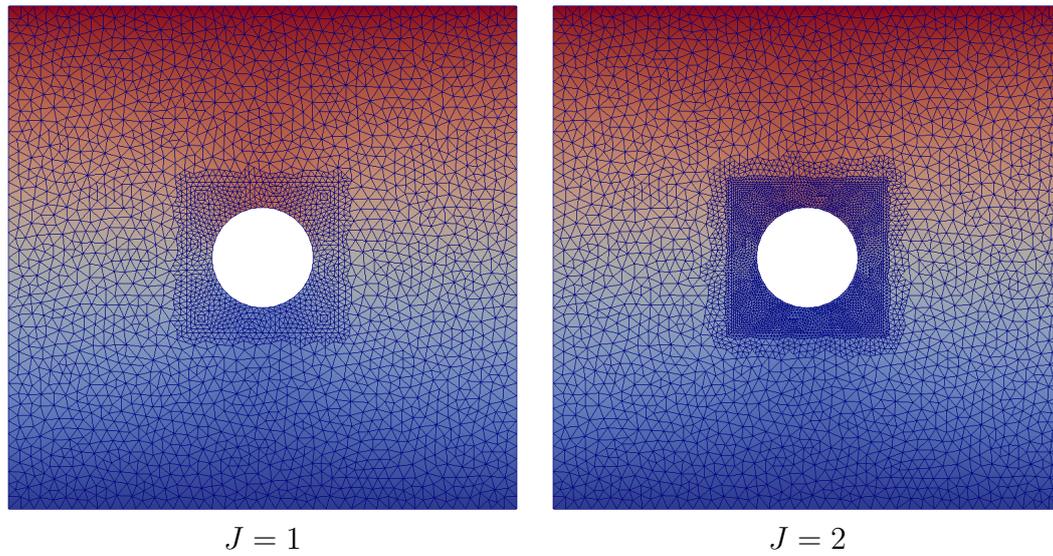


Figure 25: Plaque carrée avec trou circulaire : maillages raffinés obtenus pour  $J = 1$  (à gauche) et  $J = 2$  (à droite) avec une taille initiale de mailles  $h_1$ , les couleurs correspondent à l'intensité du déplacement vertical.

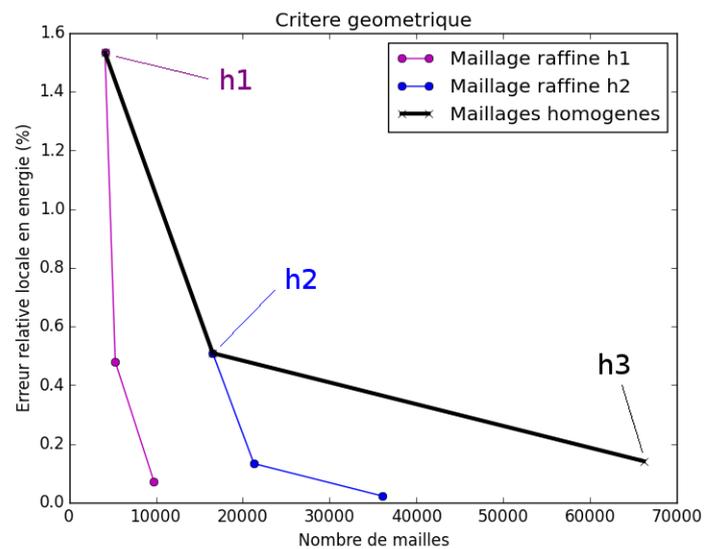


Figure 26: Plaque carrée avec trou circulaire : erreurs relatives locales obtenues avec des maillages raffinés sur 1 et 2 niveaux dans les zones d'intérêt et avec des maillages homogènes.

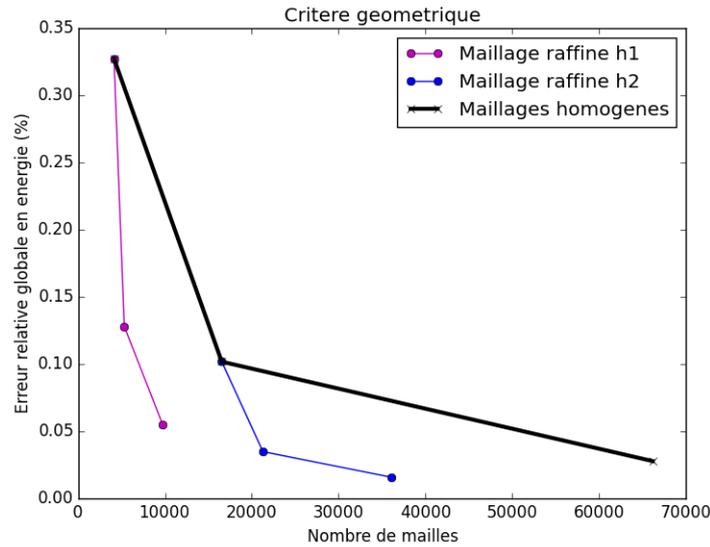


Figure 27: Plaque carrée avec trou circulaire : erreurs relatives locales obtenues avec des maillages raffinés sur 1 et 2 niveaux dans les zones d'intérêt et avec des maillages homogènes.

Le raffinement *a priori* grâce à la méthode CHARMS permet donc de réduire l'erreur relative locale dans la zone où le raffinement est réalisé mais également l'erreur relative globale en énergie. Ces erreurs comparées à celles obtenues avec des maillages homogènes sont plus faibles à un nombre fixé de mailles. **Le raffinement CHARMS permet donc de réduire le nombre de mailles générées tout en réduisant efficacement l'erreur locale et globale lorsque le raffinement est réalisé dans les zones où ces erreurs sont importantes.**

## 2.2 Cas du raffinement adaptatif

Contrairement au raffinement *a priori*, le raffinement adaptatif nécessite des critères de raffinement pour déterminer les zones d'intérêt à raffiner afin d'augmenter la précision locale sans connaissance *a priori* de leur localisation. Les critères sont classiquement basés sur une estimation d'erreur. Les zones présentant une estimation d'erreur trop importante sont raffinées. L'objectif des méthodes d'estimation d'erreur est de borner l'erreur analytique  $e^h$  définie par  $e^h = \|u - u^h\|$ , où  $u$  représente la solution théorique du problème,  $u^h$  est la solution discrète et  $\|\cdot\|$  est une norme *ad hoc*. Un tel estimateur peut être appliqué soit localement (à un élément  $\mathcal{K}$  ou à un patch d'éléments  $\omega \subset \mathcal{M}$ ) soit globalement à l'ensemble du maillage. Dans la pratique, les estimateurs locaux sont utilisés.

L'estimation locale de l'erreur  $\Psi_{\mathcal{K}}^h$  est définie par :

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 \Psi_{\mathcal{K}}^h \leq e_{\mathcal{K}}^h \leq \alpha_2 \Psi_{\mathcal{K}}^h \quad (2.4)$$

où  $e_{\mathcal{K}}^h$  est l'erreur théorique locale de discrétisation. La solution analytique étant

généralement inconnue, les estimations d'erreur sont évaluées au cours du calcul à partir de la solution déterminée. L'erreur de discrétisation est diminuée en raffinant les zones dont les estimations d'erreur dépassent une valeur seuil. Les principaux estimateurs d'erreur sont basés sur la comparaison de maillages raffinés, sur l'erreur en relation de comportement, sur les résidus d'équilibre ou sur le lissage des contraintes (voir annexe C).

Bien que les méthodes d'estimation d'erreur permettent de borner l'erreur exacte et donc de piloter le raffinement de manière fine et automatique, elles nécessitent des étapes de résolution supplémentaires qui augmentent significativement le coût numérique.

Dans ce travail, un nouveau critère basé sur une grandeur scalaire calculée lors de la résolution du problème est proposé. Le principe du raffinement adaptatif appliqué à la Mécanique des Solides Déformables est ensuite expliqué avec les mises à jour nécessaires lorsqu'un raffinement est réalisé. Une étude paramétrique du critère proposé est réalisée et le raffinement adaptatif basé sur ce critère est enfin validé au travers de cas tests.

### 2.2.1 Critère de raffinement utilisé

Le critère de raffinement proposé est basé sur l'intensité d'un champ *ad hoc* et de son gradient. Ce critère est calculé lors d'un post traitement du champs d'intérêt et n'augmente pas significativement le coût numérique d'une simulation. L'hypothèse forte de ce type de critère est de relier l'erreur d'un champ approximé à la concentration en intensité et en gradient du champ d'intérêt. Néanmoins si un espace d'approximation est pauvre, un champ complexe ne peut pas être déterminé avec précision donc cette hypothèse semble cohérente. La méthode CHARMS permettant d'augmenter la qualité locale d'une interpolation, le raffinement basé sur ce critère permet donc d'augmenter la précision locale d'un champ complexe.

Dans la littérature, il existe peu de critères basés sur cette hypothèse. Dans [34], les auteurs ont proposé ce type de critère dans le cadre de la mécanique des fluides. Il est basé sur la solution calculée  $u_{\mathcal{K}}^h$  sur un élément  $\mathcal{K}$  et la taille de maille de cet élément  $h_{\mathcal{K}}$ . L'idée est de calculer, pour chaque élément, la quantité  $h_{\mathcal{K}}^l |u^h|_{\mathcal{K}}^l$ , où  $|\cdot|_{\mathcal{K}}^l$  représente une semi-norme sur l'élément (dans la pratique  $l = 2$ ), puis de déterminer la valeur  $\Psi = \max_{\mathcal{K}}(h_{\mathcal{K}}^l |u^h|_{\mathcal{K}}^l)$  sur l'ensemble des éléments du maillage. Ainsi, un élément  $\mathcal{K}$  est raffiné s'il vérifie la condition :

$$h_{\mathcal{K}}^l |u^h|_{\mathcal{K}}^l > a\Psi \quad (2.5)$$

où  $a$  est une constante arbitraire. Cette constante joue le rôle d'une valeur seuil pour le processus de raffinement.

Pour ce type de critère, il est nécessaire de préciser un critère d'arrêt, c'est-à-dire le nombre de raffinements maximum ou la taille de maille minimale.

Le critère développé dans cette partie est écrit sous la forme générale suivante :  $\forall i \in$

$\llbracket 0, N_{node} - 1 \rrbracket$

$$\mathcal{C}^{crit} \leq \mathcal{C}_i(\mathcal{F}) = \left( \frac{\|\mathcal{F}_i\|_2}{\|\mathcal{F}^{max}\|_2} \right)^\alpha \left( \frac{\|\nabla\mathcal{F}_i\|_2}{\|\nabla\mathcal{F}\|_2^{max}} \right)^{1-\alpha} \left( (1 - \xi) + \xi \left( \frac{1}{2} \right)^{rl} \right) \quad (2.6)$$

où  $\mathcal{F}_i$  et  $\nabla\mathcal{F}_i$  représentent respectivement l'intensité d'un champ  $\mathcal{F}$  (dans cette étude  $\mathcal{F}$  est un grandeur scalaire) et le gradient de ce champ calculés au nœud  $i$ ,  $\|\cdot\|_2$  représente la norme  $L^2$ .  $\mathcal{F}^{max} = \max_{N_{node}}(\mathcal{F}_i)$  est la valeur maximale de l'intensité du champ  $\mathcal{F}$  sur l'ensemble des  $N_{node}$  nœuds et  $\|\nabla\mathcal{F}\|_2^{max} = \max_{N_{node}}(\|\nabla\mathcal{F}_i\|_2)$  est la valeur maximale du gradient normé du champ sur les  $N_{node}$  nœuds du maillage.

Le paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  permet de pondérer l'influence de l'intensité du champ et du gradient sur le raffinement : pour  $\alpha$  proche de 0, le gradient joue un rôle prédominant pour le raffinement et pour  $\alpha$  proche de 1, l'intensité du champ  $\mathcal{F}$  pilote le raffinement.

Le dernier terme du critère permet de piloter l'influence de la zone de transition entre deux niveaux de raffinement :  $rl$  représente le niveau de raffinement de la fonction de base reliée au nœud  $i$  et  $\frac{1}{2}$  correspond au rapport entre les tailles de mailles de deux niveaux de raffinement consécutifs (si le motif de raffinement choisi divise une arête de l'élément de référence en trois arêtes égales, alors ce rapport est égal à  $\frac{1}{3}$ ). Ainsi, si  $\xi = 1$ , la valeur du critère à atteindre pour raffiner une fonction de base une première fois est deux fois inférieure à la valeur pour raffiner cette fonction une deuxième fois. Si  $\xi = 0$ , la fonction de base est raffinée  $J$  fois, où  $J$  représente le niveau de raffinement maximal précisé dans le jeu de données. Le terme  $\xi$  permet donc de définir une valeur seuil à dépasser pour chaque niveau de raffinement, deux valeurs seuils étant liées par l'expression  $2\mathcal{C}^{(j)} = \mathcal{C}^{(j+1)}$ , où  $\mathcal{C}^{(j)}$  et  $\mathcal{C}^{(j+1)}$  représentent respectivement la valeur seuil pour le raffinement  $j$  et celle pour le raffinement  $j + 1$ , avec  $j \in \llbracket 0, J - 1 \rrbracket$ .

Lorsque la valeur du critère  $\mathcal{C}_i$  calculée au nœud  $i$  dépasse la valeur seuil  $\mathcal{C}^{crit} \in [0, 1]$  alors la fonction de base liée à ce nœud est raffinée.

Dans ce chapitre, uniquement le comportement élastique est considéré. Les champs d'intérêt retenus sont les champs de contraintes et de déformations. Le critère est donc appliqué à la contrainte de von Mises et à la déformation équivalente de von Mises.

- La contrainte de von Mises  $\sigma^{VM}$  est définie par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_D : \sigma_D} \quad (2.7)$$

où  $\sigma_D$  représente le champ des contraintes déviatoriques défini par  $\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3}tr(\sigma)\mathbf{1}$ , avec  $tr(\sigma)$  la trace du champ des contraintes et  $\mathbf{1}$  la matrice identité.

- La déformation équivalente de von Mises  $\varepsilon_{VM}$  vérifie :

$$\varepsilon_{VM} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_D : \varepsilon_D)} \quad (2.8)$$

où  $\varepsilon_D$  représente le champ des contraintes déviatoriques défini par  $\varepsilon_D = \varepsilon - \frac{1}{3}tr(\varepsilon)\mathbf{1}$ , avec  $tr(\varepsilon)$  la trace du champ des déformations.

Le choix s'est porté sur l'intensité pour localiser les zones de fortes concentrations d'un champ, et le gradient pour déterminer les zones où la variation spatiale de ce champ est importante. De plus, le choix des grandeurs d'intérêt peut être directement lié à la physique étudiée.

## 2.2.2 Mise en œuvre du raffinement adaptatif

### 2.2.2.1 Algorithme

Le raffinement adaptatif a nécessité des modifications majeures dans le code de calcul XPER (tableaux dynamiques, mapping, projection de lois de comportement à la volée, etc) dues à l'évolution du nombre de degrés de liberté au cours de la simulation.

Le pseudo code d'adaptation est décrit dans l'Algorithme 1. La notation utilisée est identique à celle du paragraphe précédent avec  $\mathcal{C}^{crit}$  la valeur du champ critique imposée,  $N_{node}$  correspond au nombre de nœuds reliés à une fonction de base, sans les nœuds géométriques (c'est-à-dire non reliés à une fonction de base, cf. chapitre 1).

```

while  $t \leq t_{final}$  do
   $Raff = false$ 
  for  $i = 0, N_{node} - 1$  do
    Calcul du critère  $\mathcal{C}_i(\mathcal{F})$ 
    if  $\mathcal{C}_i(\mathcal{F}) \geq \mathcal{C}^{crit}$  then
      Raffinement de la fonction de base reliée au nœud  $i$ 
       $Raff = true$ 
    end
  end
  if  $Raff == true$  then
    Mises à jour (DOF, matrices, champs, CL)
  end
  Résolution standard EF
   $t = t + \Delta t$ 
end

```

**Algorithme 1** : Algorithme de raffinement local adaptatif.

Dans l'Algorithme 1, le raffinement local est réalisé avant la résolution du système. Le raffinement est donc piloté par la valeur des champs calculés au temps précédent, c'est-à-dire qu'au temps  $t + \Delta t$ , la valeur de  $C_n(\mathcal{F})$  est calculée à partir des champs calculés au

temps  $t$  tel que  $\mathcal{F}^{i+1}(x_{new}) = \sum_{j=0}^{N_{node}^{new}} \varphi_j^{i+1}(x_{new})\mathcal{F}^i(x_{new})$ , où  $x_{new}$  représente les nœuds du nouveau maillage (au temps  $t + \Delta t$ ),  $\varphi^{i+1}$  sont les fonctions de base du nouveau maillage et  $\mathcal{F}^i$  la grandeur d'intérêt à l'instant  $t$ .

Trois mises à jour principales sont nécessaires après le raffinement : celle des champs discrets, celle des lois volumiques et celle de la connectivité (et donc du système linéaire). Ces mises à jour sont détaillées dans l'annexe D.

### 2.2.2.2 Analyse temporelle des mises à jour

Pour analyser l'influence en temps de chaque mise à jour, le cas test décrit sur la Figure 28 est considéré. Le solide est soumis à un chargement en traction et le matériau a un comportement élastique. Les zones d'intérêt sélectionnées pour le raffinement sont ici choisies par un indicateur géométrique *ad hoc*. Ces zones sont raffinées sur un niveau et sont situées aux coins du solide.

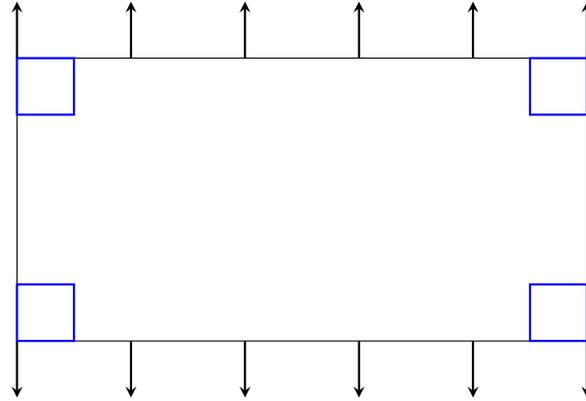


Figure 28: Cas test étudié pour l'analyse temporelle des mises à jour. Les zones bleues correspondent aux zones de raffinement.

Le Tableau 3 résume les coûts temporels de chaque mise à jour et des principales étapes de calcul. Les temps  $t_{i-1}$ ,  $t_i$  et  $t_{i+1}$  correspondent respectivement à l'instant avant le raffinement ( $t - \Delta t$ ), à l'instant où le raffinement est réalisé ( $t$ ) et à l'instant suivant le raffinement ( $t + \Delta t$ ). Les temps correspondant aux étapes de sauvegarde et de post traitement sont intégrés dans le temps total.

	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$
Nombre de mailles	125000	156212	156212
MAJ C en $s$ (%)	0	1.464 (2.38)	0
MAJ LV en $s$ (%)	0	0.84 (1.17)	0
MAJ Connect en $s$ (%)	0	0.224 (0.36)	0
Réso en $s$ (%)	1.468 (19.6)	37.532 (61.1)	2.688 (24.2)
Raff en $s$ (%)	0.12 (1.6)	13.472 (21.9)	0.256 (2.3)
Total en $s$	7.496	61.428	11.1

Tableau 3: Temps des différentes mises à jour (MAJ) et des étapes du calcul séquentiel du cas test de la Figure 28 : Lois Volumiques (LV), Champs (C), Connectivité (Connect), Résolution (Réso), Raffinement (Raff).

A l'instant  $t_{i-1}$ , le nombre de mailles est de 125000. L'étape de résolution est la plus coûteuse parmi l'ensemble des étapes (le reste du temps correspond à la sauvegarde et au post traitement). Lorsque le raffinement est réalisé (au temps  $t_i$ ), le nombre de mailles augmente de 25%. Les étapes les plus coûteuses restent celles de la résolution du système linéaire et le raffinement. L'étape de résolution (Réso) prend en compte le redimensionnement du système linéaire. Le coût est donc important lors du raffinement

et chute à l'instant  $t_{i+1}$ . Les mises à jour représentent environ 4% du temps de calcul. A l'instant  $t_{i+1}$ , les temps en pourcentage sont légèrement supérieurs à ceux de l'instant  $t_{i-1}$  dû à l'insertion de fonctions de base raffinées. Néanmoins, les étapes de raffinement aux instants  $t_{i-1}$  et  $t_{i+1}$  n'ont pas un coût nul malgré qu'aucun raffinement ne soit réalisé. Ces coûts correspondent aux vérifications du critère de raffinement mais ils restent toutefois négligeables par rapport à ceux des résolutions.

Cette simulation a également été réalisée en parallèle sur deux processeurs et les coûts temporels des étapes sont résumés dans le Tableau 4.

	$t_{i-1}$	$t_i$	$t_{i+1}$
Mailles	62500	78106	78106
MAJ C en $s$ (%)	0	0.764 (2.42)	0
MAJ LV en $s$ (%)	0	0.272 (0.86)	0
MAJ Connect en $s$ (%)	0	0.172 (0.54)	0
Réso en $s$ (%)	0.796 (18.9)	21.332 (67.5)	1.48 (24.3)
Raff en $s$ (%)	0.06 (1.4)	4.404 (12.8)	0.136 (2.2)
Total en $s$	4.2	31.6	6.1

Tableau 4: Temps des différentes mises à jour (MAJ) et des étapes du calcul par processeur du cas test de la Figure 28 : Lois Volumiques (LV), Champs (C), Connect (Connectivité), Résolution (Réso), Raffinement (Raff).

Les temps sont pratiquement divisés par deux comparés à la simulation séquentielle. Les coûts relatifs de chaque étape par rapport au temps total est similaire à la simulation séquentielle.

La résolution d'un nouveau système linéaire et l'étape de raffinement ayant un coût important, il est rédhibitoire d'effectuer un raffinement à chaque pas de temps.

La section suivante concerne la validation des critères de raffinement et de la méthode CHARMS dans le cadre de la mécanique des solides. L'objectif est de déterminer l'influence des différents paramètres introduits dans la section 2.2.1.

### 2.2.3 Etude paramétrique du critère proposé

L'influence des paramètres  $\alpha$  et  $\xi$  du critère (2.6) est étudiée dans cette section. Les critères considérés sont des critères en contrainte de von Mises et en déformation de von Mises. Dans ce cas, les critères sont définis de la manière suivante :

- critère en contrainte de von Mises :

$$\mathcal{C}_{\sigma_{VM}}^{crit} \leq \mathcal{C}_i(\sigma_{VM}) \quad (2.9)$$

- critère en déformation de von Mises :

$$\mathcal{C}_{\varepsilon_{VM}}^{crit} \leq \mathcal{C}_i(\varepsilon_{VM}) \quad (2.10)$$

Pour cette étude paramétrique, le cas test considéré est la plaque trouée composée d'un trou carré en son centre de la section 2.1.2.1. A chargement constant imposé, le raffinement de maillage s'étend spatialement à chaque itération en baissant les valeurs seuils des critères de raffinement. Le niveau maximal de raffinement est fixé à 2 ( $J = 2$ ) et les valeurs critiques ( $\mathcal{C}^{crit}$ ) sont diminuées de 2% à chaque pas de temps, avec  $\mathcal{C}^{crit} = 1$  au début du calcul. La simulation est réalisée sur 50 pas de temps afin de raffiner l'ensemble du maillage à la fin de la simulation ( $\mathcal{C}^{crit} = 0$  à la fin de la simulation). L'énergie relative en énergie (2.1) est à nouveau déterminée dans les zones d'intérêt de la Figure 17 après chaque étape de raffinement.

**Influence du paramètre  $\alpha$**  Le paramètre  $\alpha$  permet de pondérer l'intensité du champ et du gradient : pour  $\alpha$  proche de 0, le raffinement est piloté par le gradient du champ et pour  $\alpha$  proche de 1, le raffinement est régi par l'intensité. Le paramètre  $\xi$  est ici pris égal à 1, c'est-à-dire qu'une zone de transition entre les niveaux de raffinement est prise en compte (une valeur seuil par niveau de raffinement).

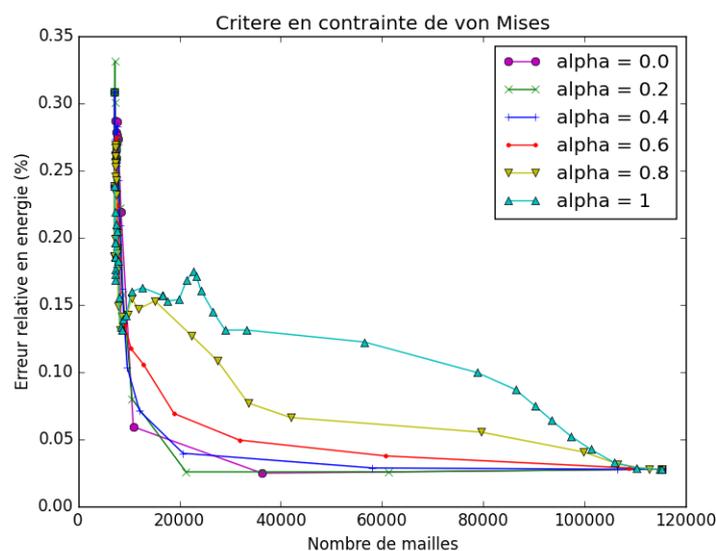


Figure 29: Plaque carrée avec trou carré : évolution de l'erreur relative locale en énergie en fonction du nombre de mailles et pour différentes valeurs de  $\alpha$  obtenue avec le critère en contrainte équivalente (2.9).

Les Figures 29 et 30 montrent respectivement l'évolution de l'erreur relative locale en énergie en fonction du nombre de mailles pour différentes valeurs de  $\alpha$  avec le critère de raffinement basé sur la déformation équivalente de von Mises (2.9) et celui basé sur la contrainte équivalente (2.10). Les erreurs relatives locales en énergie dans la zone d'intérêt diminuent globalement au cours des étapes de raffinement pour l'ensemble des valeurs  $\alpha$  et pour les deux critères de raffinement considérés. Néanmoins une tendance se dessine : plus  $\alpha$  est faible et plus l'erreur diminue rapidement. Ainsi **plus l'influence du gradient est importante dans le critère de raffinement, plus l'erreur relative locale en énergie est faible** et l'énergie converge rapidement vers l'énergie obtenue avec le maillage de référence. Le critère où le gradient prédomine semble donc être le bon critère pour ce

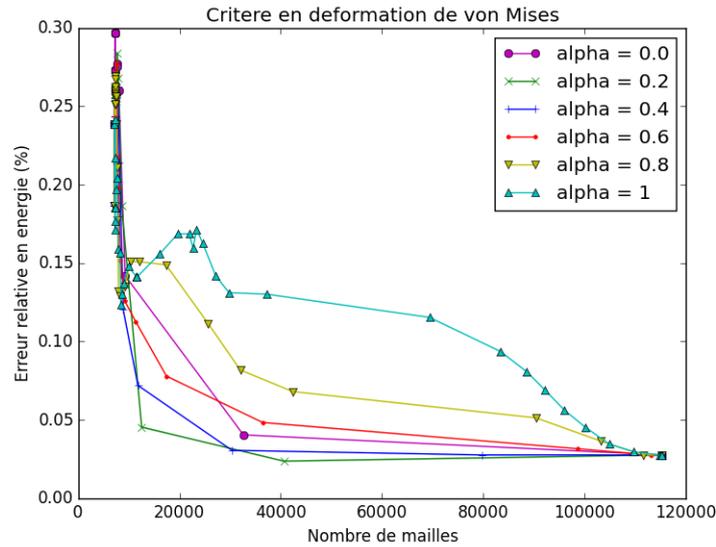


Figure 30: Plaque carrée avec trou carré : évolution de l'erreur relative locale en énergie en fonction du nombre de mailles et pour différentes valeurs de  $\alpha$  obtenue avec le critère en déformation équivalente (2.10).

cas test.

Néanmoins, les erreurs locales augmentent lors des premières étapes de raffinement. Il faut que le raffinement soit réalisé autour de la singularité pour réduire l'erreur en énergie. En effet, lorsque le raffinement est uniquement réalisé à l'endroit où le critère est maximum, le champs est localement perturbé ce qui augmente l'erreur locale. Néanmoins, une fois que la zone autour de la singularité est raffinée, le champs n'est plus perturbé et l'erreur locale chute.

Les Figures 31 et 32 montrent respectivement les erreurs relatives globales obtenues avec un maillage raffiné avec le critère en contrainte équivalente et en déformation équivalente en fonction du nombre total de mailles. L'énergie globale des maillages raffinés converge également vers l'énergie du maillage de référence pour l'ensemble des valeurs de  $\alpha$ . La même tendance que pour l'erreur relative locale se dessine : plus  $\alpha$  est faible et plus l'erreur relative globale diminue rapidement à même nombre de mailles. Contrairement à l'erreur locale, l'erreur globale n'augmente pas lors des premières étapes de raffinement. La perturbation locale des champs lors des premières étapes de raffinement n'ont aucune influence sur l'erreur globale.

**Le raffinement piloté par le gradient ( $\alpha < 0.5$ ) donne globalement une meilleure précision globale et locale que par l'intensité ( $\alpha > 0.5$ ) à même nombre de mailles.** Néanmoins, en cas de singularités, le raffinement doit être étendu autour de ces dernières pour permettre une réduction de l'erreur locale. Pour la validation de la méthode CHARMS, la valeur de  $\alpha$  est fixée à 0.4.

**Influence du paramètre  $\xi$**  Le paramètre  $\xi$  permet de définir des valeurs seuils critiques pour le raffinement de chaque niveau de raffinement. Lorsque  $\xi = 0$ , une seule valeur

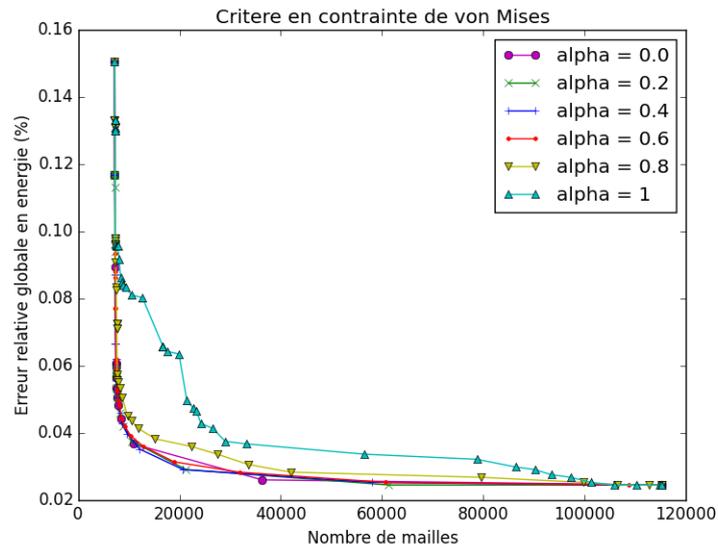


Figure 31: Plaque carrée avec trou carré : évolution de l'erreur relative globale en énergie en fonction du nombre de mailles et pour différentes valeurs de  $\alpha$  obtenue avec le critère en contrainte équivalente (2.9).

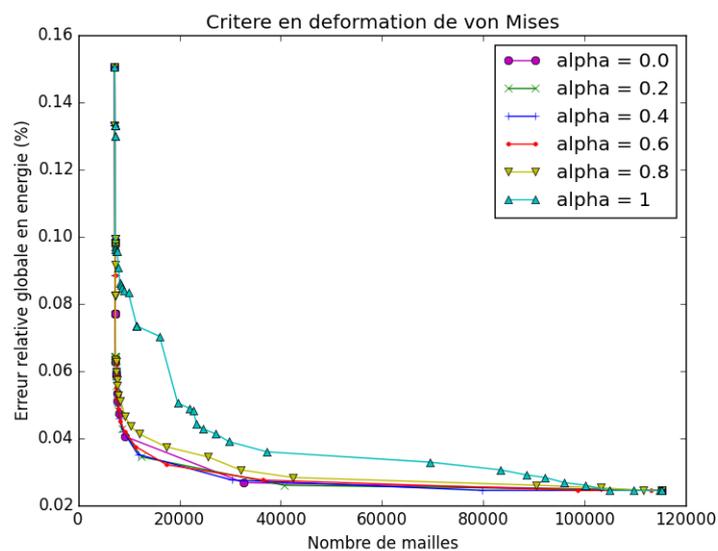


Figure 32: Plaque carrée avec trou carré : évolution de l'erreur relative globale en énergie en fonction du nombre de mailles et pour différentes valeurs de  $\alpha$  obtenue avec le critère en déformation équivalente (2.10).

critique est définie et si une fonction de base vérifie le critère de raffinement, elle est directement raffinée  $J$  fois,  $J$  étant le nombre de niveaux de raffinement maximal. Lorsque  $\xi = 1$ ,  $J$  valeurs seuils sont définies. Pour qu'une fonction de base de niveau  $j + 1$  soit raffinée, la valeur liée à cette fonction doit être deux fois plus élevée que la valeur seuil du niveau  $j$  (à cause du motif de raffinement choisi, voir section 2.2.1). Ce paramètre, lorsqu'il est égal à 0, permet donc d'accélérer la convergence de l'erreur si l'erreur est effectivement reliée au critère de raffinement.

Les Figures 33 et 34 montrent respectivement les évolutions des erreurs relatives locales en énergie en fonction du nombre de mailles pour différentes valeurs de  $\alpha$  avec les critères en contrainte équivalente et en déformation équivalente.

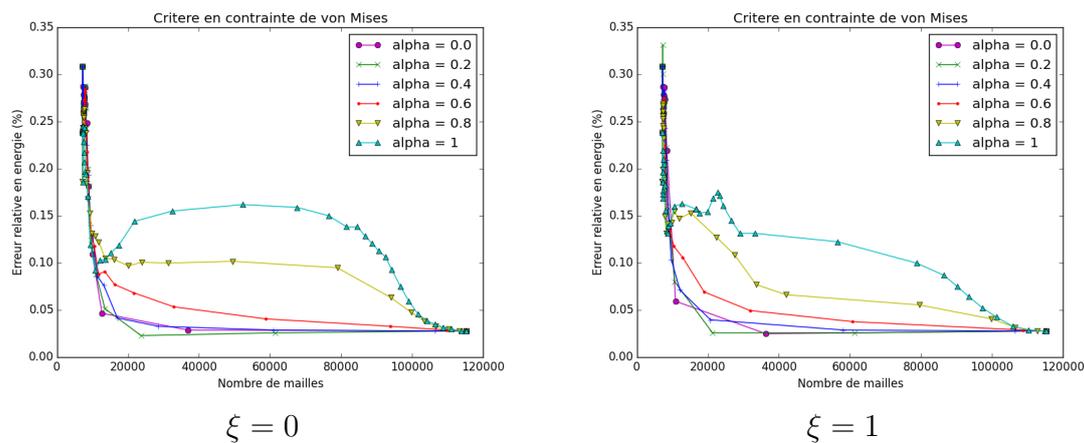


Figure 33: Plaque carrée avec trou carré : évolutions des erreurs locales en énergie en fonction du nombre de mailles et de  $\xi$  avec le critère en contrainte équivalente pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

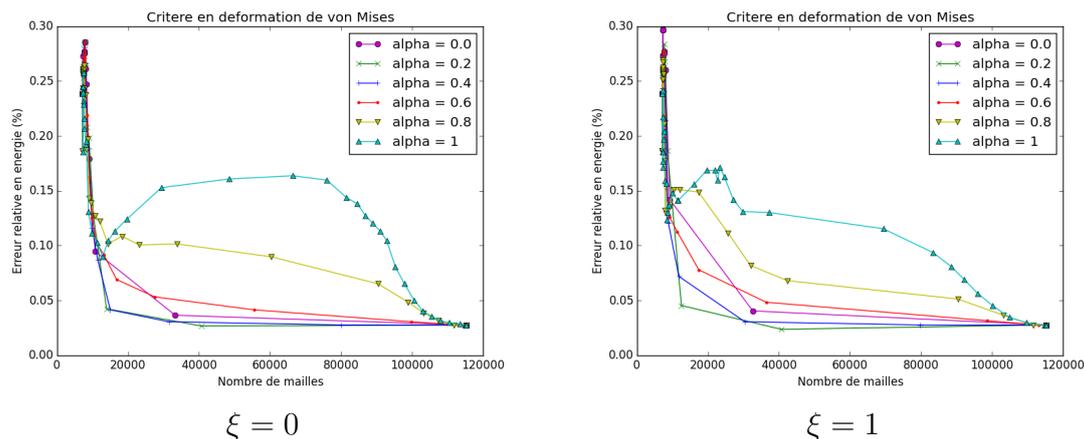


Figure 34: Plaque carrée avec trou carré : évolutions des erreurs locales en énergie en fonction du nombre de mailles et de  $\xi$  avec le critère en déformation équivalente pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Les Figures 33 et 34 mettent en évidence que pour des valeurs du paramètre  $\alpha < 0.5$ , la prise en compte du paramètre  $\xi$  a peu d'influence sur la convergence de l'erreur relative locale tandis que pour  $\alpha > 0.5$ , le paramètre  $\xi = 0$  ralentit la convergence de l'erreur.

Dans ce cas test, étant donné les singularités induites, les zones où le gradient est important sont localisées au niveau des coins du trou avec une valeur importante comparée au reste de la structure. Ainsi, lorsque le raffinement est piloté par le gradient, la valeur du paramètre  $\xi$  a peu d'influence sur le raffinement et donc sur l'erreur relative locale. La variation spatiale de l'intensité étant moins importante que celle du gradient, le critère en intensité a tendance à raffiner l'ensemble du maillage avant de réaliser le raffinement sur le second niveau lorsque  $\xi = 1$ . Les résultats obtenus avec  $\alpha > 0.5$  et  $\xi = 1$  donnent une meilleure convergence de l'erreur car, l'erreur étant principalement reliée au gradient et non à l'intensité, le maillage est raffiné une première fois dans les zones où l'intensité n'est pas forcément maximale alors qu'avec  $\xi = 0$ , uniquement les zones ayant une intensité maximale sont raffinées.

Les Figures 35 et 36 montrent l'influence du paramètre  $\xi$  sur l'erreur relative globale en fonction du nombre de mailles avec différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  pour un raffinement basé sur la contrainte équivalente et sur la déformation équivalente. Pour les valeurs  $\alpha < 0.5$ , les observations sont les mêmes que pour l'erreur locale : le paramètre  $\xi$  n'a pas d'influence significative sur l'erreur relative globale. Pour  $\alpha > 0.5$ , contrairement à l'erreur locale, le paramètre  $\xi = 0$  accélère la convergence de l'erreur relative globale comparé aux résultats obtenus avec  $\xi = 1$ .

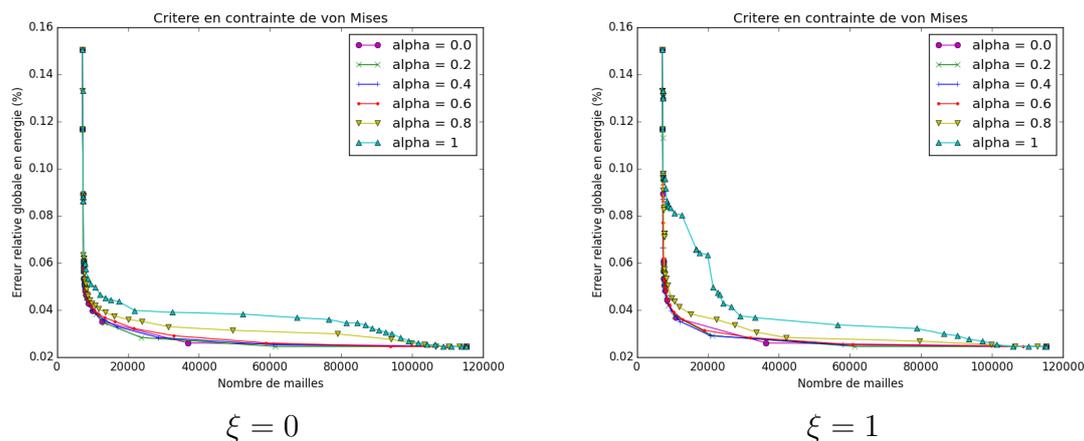


Figure 35: Plaque carrée avec trou carré : évolutions des erreurs globales en énergie en fonction du nombre de mailles et de  $\xi$  avec le critère en contrainte équivalente pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Pour des situations à concentration de contraintes ou de déformations, les critères priorisant les effets de gradient peuvent se contenter de peu de raffinements successifs, alors que ces derniers sont bénéfiques pour le critère priorisant l'intensité des champs.**

Dans la section suivante, les deux valeurs de  $\xi$  sont considérées.

## 2.2.4 Validation au travers de cas tests

Pour la validation de la méthode CHARMS adaptative, les paramètres  $\alpha$  et  $\xi$  sont fixés tel que  $\alpha = 0.4$  et  $\xi \in [0, 1]$ . Les erreurs relatives en énergie (2.1) sont comparées

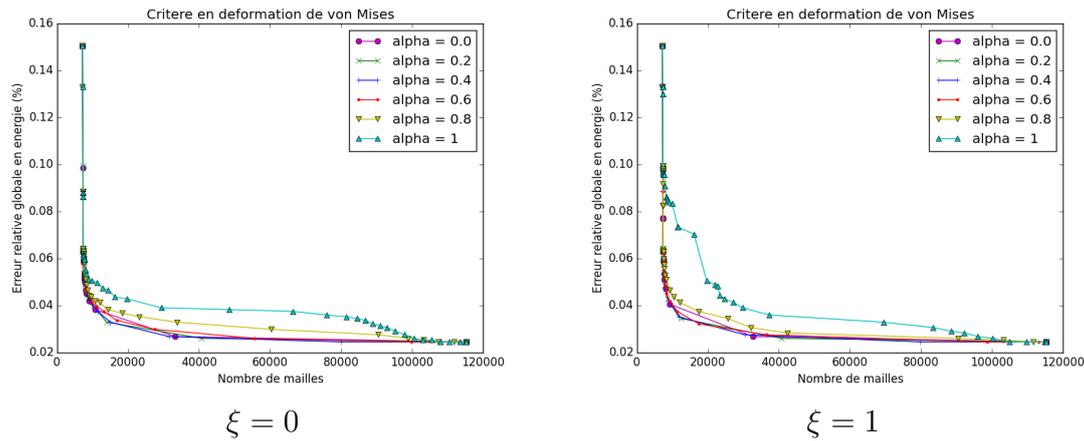


Figure 36: Plaque carrée avec trou carré : évolutions des erreurs globales en énergie en fonction du nombre de mailles et de  $\xi$  avec le critère en déformation équivalente pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

entre un maillage raffiné dans une zone d'intérêt et un maillage homogène. L'objectif du raffinement adaptatif est d'obtenir une erreur relative locale plus faible avec un maillage raffiné qu'avec un maillage homogène à même nombre de mailles. Pour les cas tests, le chargement appliqué est constant et la valeur du seuil de raffinement est diminuée de 2% à chaque pas de temps. Les maillages sont obtenus grâce à une triangulation de Delaunay en utilisant le logiciel de maillage GMSH [20], les motifs de raffinement utilisés sont donc ceux présentés sur la Figure 10. Le niveau de raffinement maximal est fixé à 2.

**Poutre en L** Le cas test est composé d'une poutre en L encastée à la base et soumise à un chargement en déplacement vertical de  $1\text{mm}$  au niveau du segment AB (voir Figure 37). Les caractéristiques mécaniques et de la simulation sont précisées dans le Tableau 5.

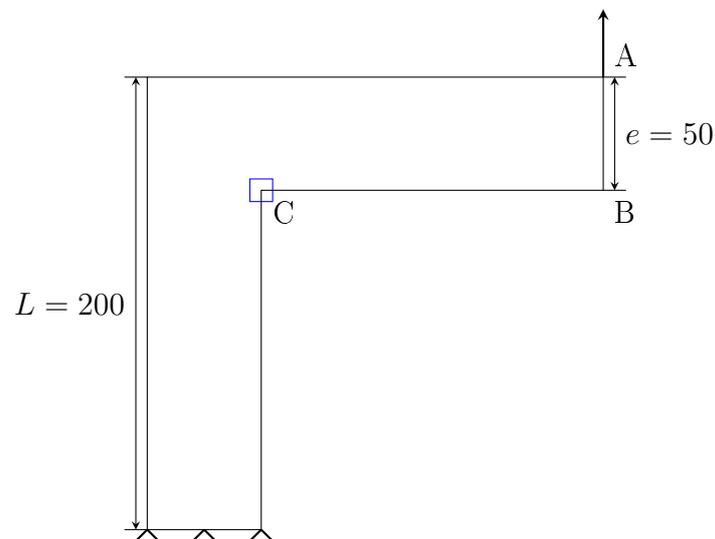


Figure 37: Géométrie de la poutre en L, les dimensions sont en  $\text{mm}$ . La zone en bleu correspond à la zone où est calculée l'erreur relative locale en énergie.

Les évolutions des erreurs relatives locales en fonction du nombre de mailles avec le critère en contrainte équivalente et en déformation équivalente sont respectivement

Module d'Young	$E = 300MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.4$
Evolution	Quasi-statique
Type de résolution	Implicite
Type de maille	Triangle
Taille des mailles grossières	$h_{coarse} = 2.5mm$

Tableau 5: Poutre en L : caractéristiques mécaniques et numériques.

exposées sur les Figures 38 et 39.

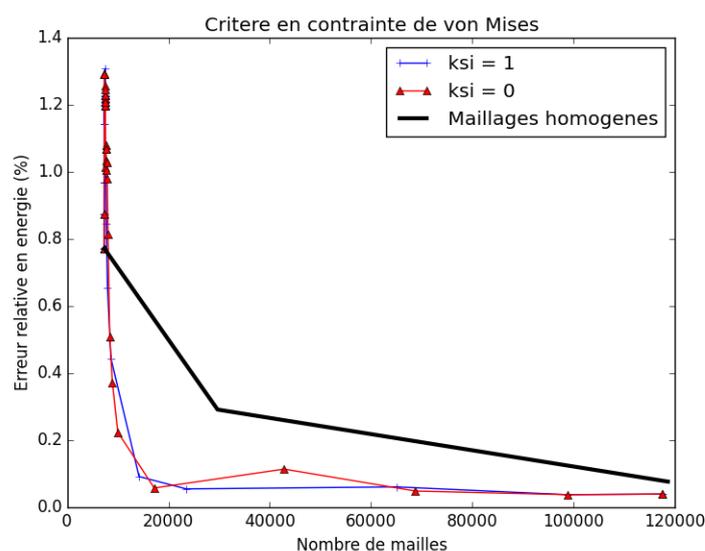


Figure 38: Poutre en L : évolution pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) des erreurs relatives obtenues avec un raffinement basé sur la contrainte de von Mises avec le paramètre  $\alpha = 0.4$  en fonction du nombre total de mailles.

Ces figures mettent en évidence le fait que le raffinement CHARMS permet d'obtenir une erreur relative locale en énergie plus faible que celle obtenue avec des maillages homogènes pour un nombre donné de mailles. Les erreurs relatives obtenues pour les maillages totalement raffinés sont bien égales à celles obtenues avec un maillage homogène avec une taille de mailles égale. Néanmoins, les premières étapes de raffinement pilotées par les deux critères considérés augmentent l'erreur locale. Ceci est dû au fait que le raffinement ne s'est pas suffisamment étendu pour discrétiser correctement les singularités situées au niveau de la singularité géométrique (point C). Les deux valeurs du paramètre  $\xi$  considérées n'ont pas d'influence significative sur l'évolution de l'erreur. Les Figures 40 et 41 présentent la configuration des maillages nécessaires pour obtenir une erreur locale en énergie plus faible que celles des maillages homogènes pour un nombre donné de mailles.

Ces figures illustrent que les zones où le gradient est important sont situées au niveau du coude de la poutre (point C) et au niveau des extrémités de l'encastrement. L'introduction de mailles supplémentaires dans ces zones permet une diminution significative de l'erreur relative locale.

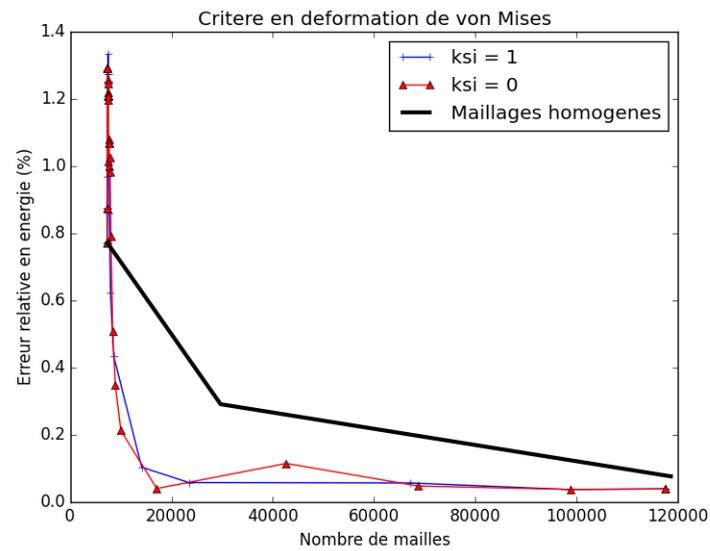


Figure 39: Poutre en L : évolution pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) des erreurs relatives obtenues avec un raffinement basé sur la déformation de von Mises avec le paramètre  $\alpha = 0.4$  en fonction du nombre total de mailles.

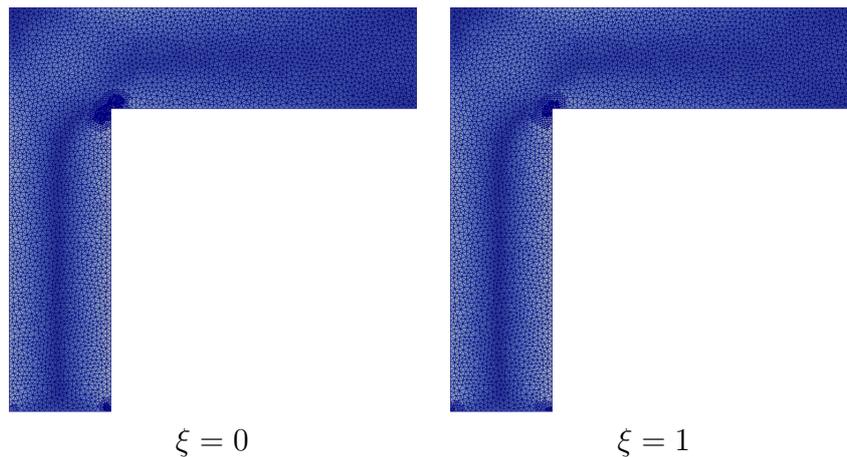


Figure 40: Critère en contrainte de von Mises : configurations des maillages nécessaires pour obtenir une erreur relative en énergie plus faible que celle des maillages homogènes à un nombre de mailles égales.

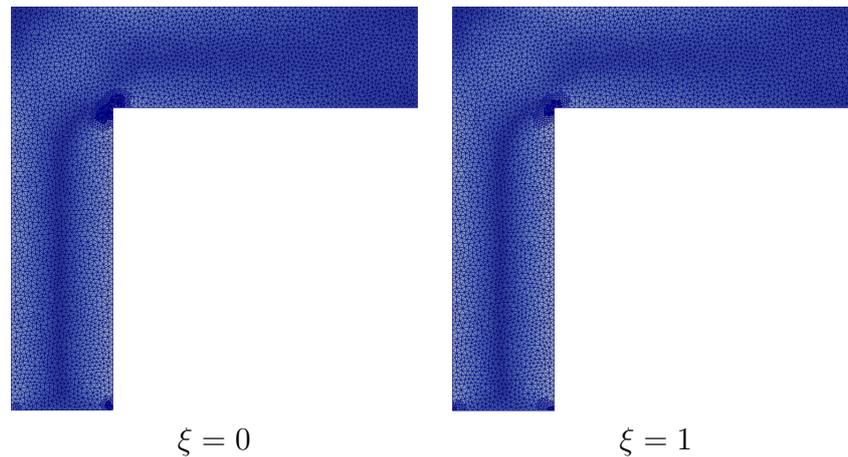


Figure 41: Critère en déformation de von Mises : configurations des maillages nécessaires pour obtenir une erreur relative en énergie plus faible que celle des maillages homogènes à un nombre de mailles égales.

Les évolutions des erreurs globales en fonction du nombre de mailles pour les deux critères sont exposées sur les Figures 42 et 43. Les erreurs relatives globales obtenues avec des maillages raffinés sont également plus faibles que celles obtenues avec des maillages homogènes à même nombre de mailles, le paramètre  $\xi$  ayant une influence minime sur l'évolution de l'erreur relative globale.

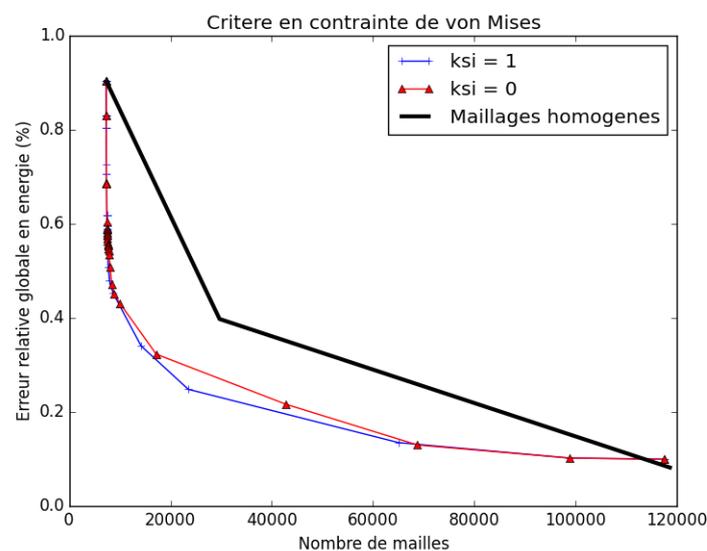


Figure 42: Poutre en L : évolution pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) des erreurs relatives globales obtenues avec un raffinement basé sur la contrainte de von Mises avec le paramètre  $\alpha = 0.4$  en fonction du nombre total de mailles.

**D'un point de vue du coût numérique, il semble donc plus efficace d'utiliser un maillage raffiné grâce à la méthode de raffinement CHARMS que d'utiliser un maillage dont la discrétisation spatiale est homogène.**

**Plaque carrée avec trou circulaire** Le cas test considéré est celui présenté sur la Figure 24 du paragraphe 2.1.2.2. Le nombre de faces pour la discrétisation du trou

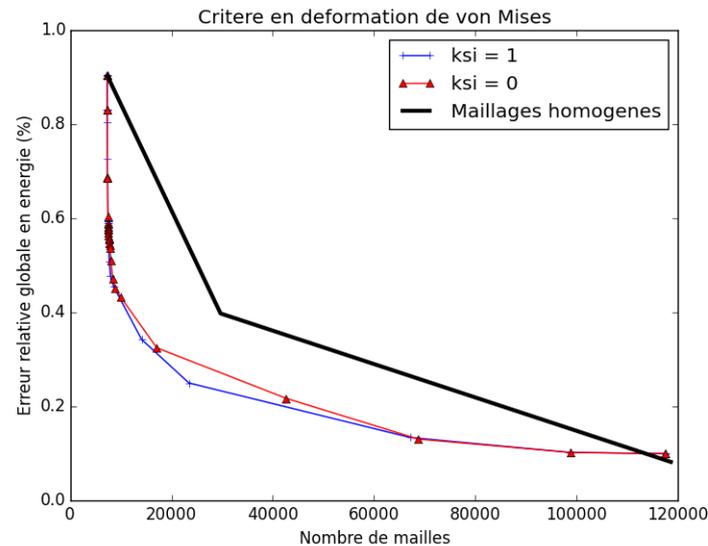


Figure 43: Poutre en L : évolution pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) des erreurs relatives globales obtenues avec un raffinement basé sur la déformation de von Mises avec le paramètre  $\alpha = 0.4$  en fonction du nombre total de mailles.

circulaire est également fixé (28 faces). L'erreur relative en énergie (2.1) faite dans la zone d'intérêt (voir Figure 24) par rapport à un maillage fin est à nouveau considérée.

Les Figures 44 et 45 montrent respectivement les évolutions des erreurs relatives locales en énergie en fonction du nombre de mailles obtenues avec un raffinement basé sur le critère en contrainte de von Mises et basé sur la déformation de von Mises.

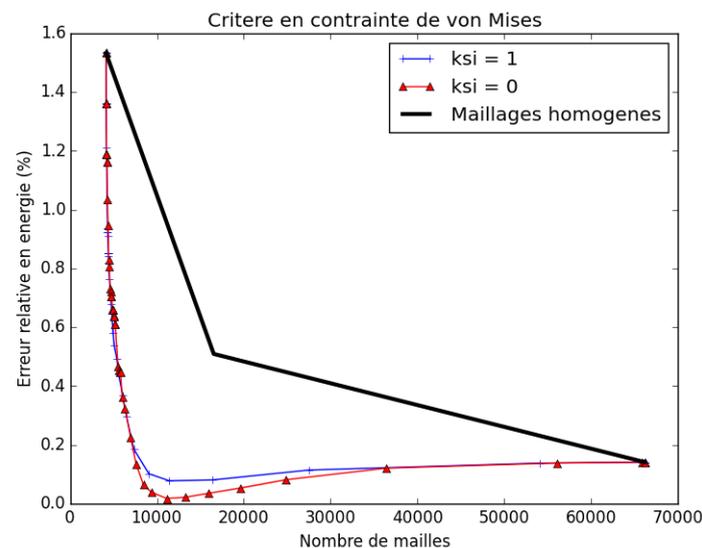


Figure 44: Evolution des erreurs relatives en fonction du nombre de mailles obtenues avec le critère de raffinement en contrainte de von Mises pour  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$ .

En fixant le nombre de faces pour la discrétisation du trou circulaire, l'erreur réalisée avec raffinement est moins élevée que celle des maillages homogènes pour un nombre de mailles donné. L'erreur réalisée une fois l'ensemble du maillage initial raffiné deux fois converge bien vers l'erreur réalisée avec un maillage homogène dont les tailles de mailles

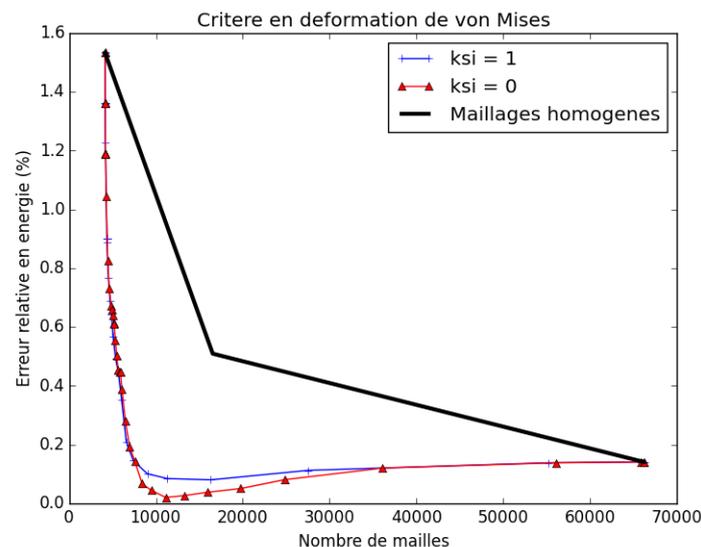


Figure 45: Plaque carrée avec trou circulaire : évolution des erreurs relatives en fonction du nombre de mailles obtenues avec le critère de raffinement en déformation de von Mises pour  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$ .

sont égales. Pour ce cas test, l'erreur obtenue grâce au raffinement décroît dès la première étape de raffinement, contrairement aux cas de la poutre en L et de la plaque avec un trou carré. Dans ce cas, il n'y a aucune singularité significative et donc aucune localisation des gradients en contrainte ou en déformation. Le paramètre  $\xi = 0$  donne de fait une erreur locale légèrement meilleure que lorsque  $\xi = 1$ .

Les évolutions des erreurs relatives globales en énergie obtenues avec un critère en contrainte et en déformation sont respectivement exposées sur les Figures 46 et 47. L'erreur globale obtenue avec un raffinement adaptatif est plus faible que celle obtenue avec un maillage homogène à même nombre de mailles. Le paramètre  $\xi$  n'a pas d'influence sur la précision des erreurs globales.

## 2.2.5 Application du raffinement adaptatif à un matériau hétérogène

Le cas test montré sur la Figure 48 est composé d'un bimatériau en traction, constitué de deux inclusions de rigidité plus élevée que celle de la matrice. Comme précédemment, les conditions aux limites sont imposées avec un déplacement constant ( $u = 10^{-3}m$ ) et la valeur du critère de raffinement est diminuée de 2% à chaque pas de temps. Les caractéristiques mécanique et numérique sont précisées dans le Tableau 6. Les inclusions sont discrétisées avec un nombre fixé de faces pour l'ensemble des maillages.

Les évolutions des erreurs locales relatives en énergie sont montrées sur les Figures 49 et 50. Les erreurs obtenues autour des deux inclusions en raffinant grâce à la méthode CHARMS sont inférieures à celles obtenues avec un maillage homogène. L'erreur locale liée à la grande inclusion est plus faible que celle de la petite inclusion. En effet, pour une taille de maille donnée, l'approximation de l'interpolation de la forme de l'inclusion est d'autant meilleure que l'inclusion est grande car les angles des facettes de l'inclusion

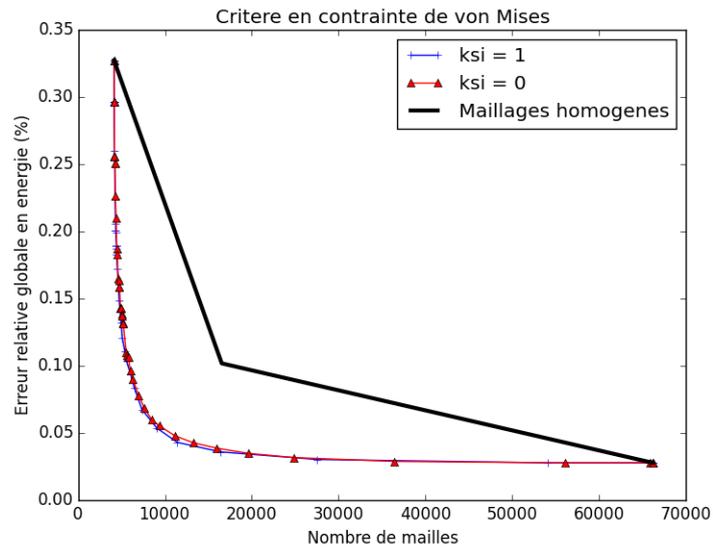


Figure 46: Plaque carrée avec trou circulaire : évolution des erreurs relatives en fonction du nombre de mailles obtenues avec le critère de raffinement en contrainte de von Mises pour  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$ .

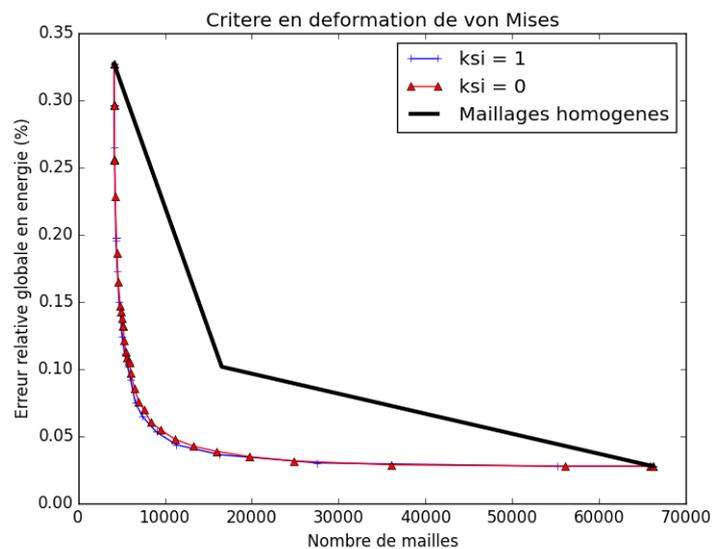


Figure 47: Plaque carrée avec trou circulaire : évolution des erreurs relatives en fonction du nombre de mailles obtenues avec le critère de raffinement en déformation de von Mises pour  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$ .

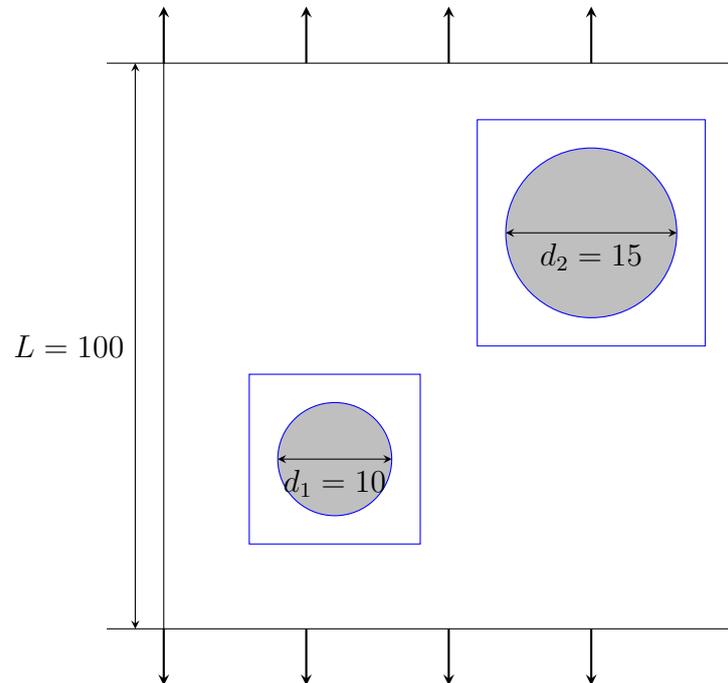


Figure 48: Géométrie d'un bimatériau soumis à un chargement en traction, les dimensions sont en  $mm$ . Les inclusions sont en gris et les zones d'intérêt où sont déterminées les erreurs relatives en énergie sont en bleu.

Module d'Young	Coefficient de Poisson
Matrice	
$E = 1.5GPa$	$\nu = 0.2$
Inclusions	
$E = 15GPa$	$\nu = 0.4$
Type de maille	Triangle
Taille des mailles grossières	$h_{coarse} = 2mm$
Evolution	Quasi-statique
Type de résolution	Implicite

Tableau 6: Bimatériau : caractéristiques mécanique et numérique.

sont moins marqués.

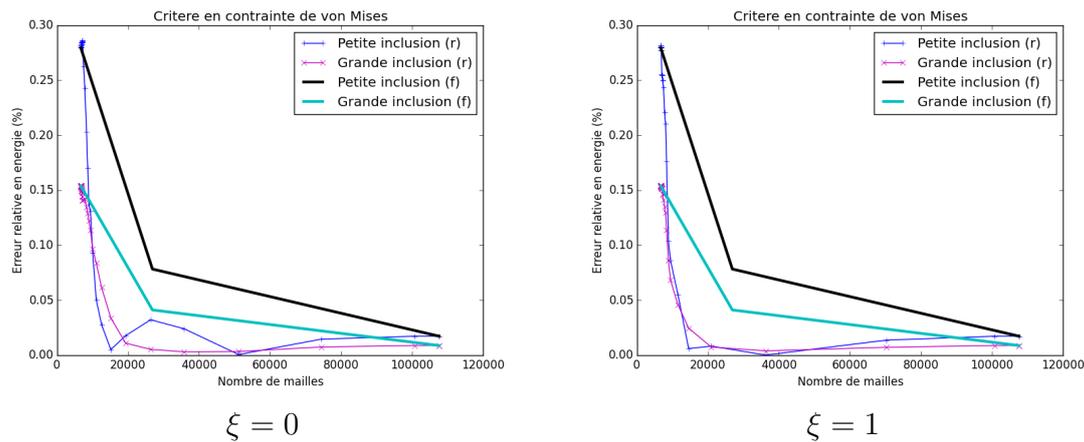


Figure 49: Critère en contrainte de von Mises : évolution des erreurs relatives locales en énergie dans chaque inclusion pour  $\xi = 0$  (gauche) et  $\xi = 1$  (droite) en fonction du nombre total de mailles avec des maillages raffinés (r) et fins homogènes (f).

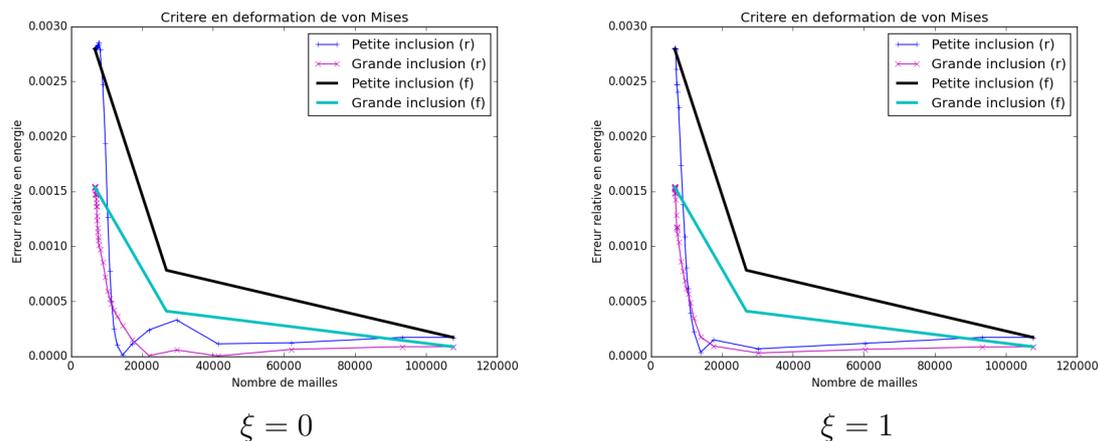


Figure 50: Critère en déformation de von Mises : évolution des erreurs relatives locales en énergie dans chaque inclusion pour  $\xi = 0$  (gauche) et  $\xi = 1$  (droite) en fonction du nombre total de mailles avec des maillages raffinés (r) et fins homogènes (f).

Les courbes obtenues avec le raffinement piloté en contrainte et en déformation sont semblables, bien que les concentrations des gradients en contraintes et en déformations soient situées à des endroits différents (voir Figure 51). Lorsque la contrainte de von Mises pilote le raffinement, les zones à l'équateur des inclusions sont raffinées alors que les zones aux pôles des inclusions sont raffinées par le critère en déformation. La concentration du gradient est due à la différence des raideurs entre la matrice et les inclusions et au chargement local en cisaillement. Ces maillages illustrent l'importance du choix des critères selon la physique étudiée.

Les Figures 52 et 53 mettent en évidence les évolutions de l'erreur globale en fonction du nombre de mailles obtenues avec un critère en contrainte équivalente et en déformation équivalente. L'erreur relative globale obtenue avec le raffinement CHARMS adaptatif est également inférieure à celle obtenue avec un maillage homogène à même nombre de mailles.

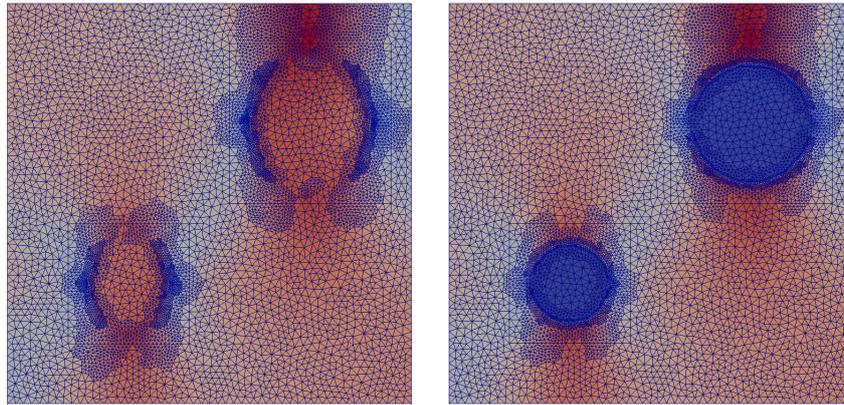


Figure 51: Maillages reliés à l'erreur relative locale minimale en énergie obtenus avec le critère en contrainte équivalente (gauche) et en déformation équivalente (droite) et le paramètre  $\xi = 1$ . Les couleurs représentent les concentrations en contrainte de von Mises (gauche) et en déformation de von Mises (droite).

Le raffinement grâce à la méthode CHARMS permet donc de réduire l'erreur locale proche des inclusions tout en réduisant l'erreur globale.

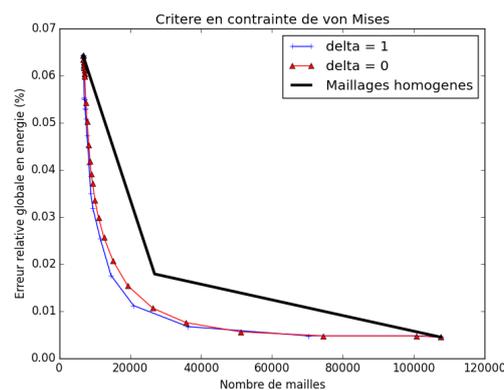


Figure 52: Critère en contrainte de von Mises : évolution des erreurs relatives globales en énergie pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) en fonction du nombre total de maille avec des maillages raffinés et homogènes.

**La méthode de raffinement CHARMS permet donc de réduire l'erreur en énergie des matériaux hétérogènes.**

## 2.3 Bilan du chapitre

Après avoir présenté le principe d'un raffinement *a priori* basé sur un indicateur géométrique, la méthode CHARMS sans adaptation a été validée dans le cadre de la Mécanique des Solides Déformables. L'erreur locale déterminée dans une zone d'intérêt et l'erreur globale en énergie obtenues avec un tel raffinement sont inférieures à celles obtenues avec un maillage homogène à même nombre de mailles. **Une simulation ayant recourt au raffinement est donc plus efficace qu'une simulation basée sur un maillage homogène pour une erreur locale souhaitée.** Néanmoins une attention

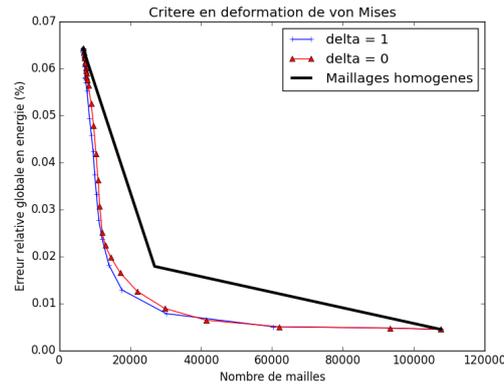


Figure 53: Critère en déformation de von Mises : évolution des erreurs relatives globales en énergie pour  $\xi = 0$  (rouge) et  $\xi = 1$  (bleu) en fonction du nombre total de maille avec des maillages raffinés et homogènes.

doit être portée pour des géométries à **surfaces courbes**. La méthode CHARMS étant basée sur un maillage initial, elle ne permet pas d'améliorer la discrétisation d'un rayon de courbure, c'est un **point de vigilance** à observer dans l'utilisation de cette méthode. Dans cette thèse le choix a été fait de fixer le nombre de faces pour la discrétisation d'un rayon de courbure.

Dans un second temps, un critère de raffinement permettant d'automatiser le raffinement au cours du calcul a été proposé. Les principaux critères de raffinement sont basés sur la recherche d'une estimation d'erreur *a posteriori* pour borner l'erreur exacte due à la discrétisation spatiale du domaine d'étude. Ces estimations fournissent des bornes correctes de l'erreur exacte locale (d'un élément ou d'un patch d'éléments) et permettent d'automatiser le raffinement local adaptatif. Tant que l'estimation d'erreur d'un élément ou d'un patch est supérieure à la précision souhaitée, l'élément est raffiné. Il est également possible de piloter le déraffinement lorsque l'estimation d'erreur est inférieure à une valeur souhaitée. Ces estimations d'erreur définissent donc des critères d'arrêt : il n'est pas nécessaire de préciser le niveau de raffinement maximal. Néanmoins ces méthodes d'estimation d'erreur requièrent la résolution de systèmes supplémentaires pour déterminer une solution plus régulière ou fine que celle obtenue avec la discrétisation initiale.

Afin d'éviter des résolutions supplémentaires dues aux estimateurs d'erreur, un critère général couplant l'intensité d'une grandeur scalaire et son gradient a été proposé. Ce critère uniquement basé sur le post traitement n'affecte pas le temps de la simulation. Contrairement aux estimations d'erreur, le raffinement nécessite un critère d'arrêt, basé sur la taille de maille minimale ou sur le niveau de raffinement maximal autorisé. Ce critère permet, d'une part, de préciser si l'intensité ou si le gradient pilote le raffinement et, d'autre part, de définir une valeur seuil pour chaque niveau de raffinement. Le choix de la grandeur analysée dépend directement de la physique étudiée.

L'algorithme de raffinement local adaptatif appliqué à la Mécanique des Milieux Déformables a été présenté dans ce chapitre. Lorsqu'un raffinement est réalisé, des mises à jour sont nécessaires car le nombre d'inconnues évolue lors d'une étape raffinement. La mise à jour engendrant un coût numérique élevé est la mise à jour du système linéaire car

les matrices doivent être redimensionnées, les autres mises à jour ayant un coût négligeable.

Une étude paramétrique du critère en contrainte de von Mises et en déformation de von Mises a été réalisée. Cette étude a permis de mettre en exergue qu'en cas d'hétérogénéité spatiale des champs mécaniques (singularités géométriques, matérielles, ...) la précision des résultats semble meilleure lorsque le gradient pilote le raffinement ( $\alpha < 0.5$ ), le paramètre  $\xi$  n'ayant pas d'influence significative lorsque le raffinement est piloté par le gradient.

Le raffinement adaptatif piloté par ces critères en gradient donnent de meilleurs résultats locaux et globaux que des maillages homogènes à même nombre de mailles.



## Chapitre 3

# Méthodes CHARMS et méthode d'« Eigen-Erosion »

*Ce chapitre a pour but de présenter le couplage de la méthode CHARMS avec la méthode d'« Eigen-Erosion » : une méthode de fissuration basée sur des grandeurs énergétiques. Après avoir introduit la méthode d'« Eigen-Erosion », son couplage avec la méthode CHARMS, dans laquelle le raffinement est appliqué a priori à partir d'un indicateur géométrique, est investigué. Après avoir explicité le principe de ce couplage, il est validé au travers d'un cas test.*

*Afin de raffiner adaptativement au cours de la simulation, le critère présenté dans le chapitre précédent est utilisé en considérant comme grandeur d'intérêt le taux de restitution d'énergie local à une maille et une distance d'alerte. Cette distance correspond à la distance entre la maille vérifiant le critère basé sur le taux de restitution d'énergie local et les zones non raffinées. Après avoir validé le couplage du raffinement adaptatif à l'érosion, une étude paramétrique est réalisée et met en évidence l'influence de cette distance sur les temps de calcul et les erreurs locales générées par le raffinement.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthode d' « Eigen-Erosion »</b> . . . . .	<b>77</b>
3.1.1	Formulation . . . . .	77
3.1.2	Mise en œuvre . . . . .	77
3.1.3	Algorithme . . . . .	79
<b>3.2</b>	<b>Couplage du raffinement CHARMS <i>a priori</i> et de la méthode d'« Eigen-Erosion »</b> . . . . .	<b>80</b>
3.2.1	Principe du couplage CHARMS - « Eigen-Erosion » . . . . .	81
3.2.2	Validation . . . . .	81
<b>3.3</b>	<b>Couplage du raffinement CHARMS adaptatif et de la méthode d'« Eigen-Erosion »</b> . . . . .	<b>87</b>
3.3.1	Algorithme et mises à jour . . . . .	87

3.3.2	Critère de raffinement pour l'érosion . . . . .	88
3.3.3	Validation du raffinement adaptatif . . . . .	89
3.3.4	Etude paramétrique du critère de raffinement . . . . .	93
<b>3.4</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>98</b>

---

### 3.1 Méthode d'« Eigen-Erosion »

Il s'agit d'une méthode récente de fissuration [2] basée sur une formulation variationnelle du critère de Griffith. Après avoir précisé cette méthode, l'algorithme général est détaillé puis les avantages et inconvénients sont présentés.

#### 3.1.1 Formulation

La méthode d'« Eigen-Erosion » repose sur la formulation variationnelle de la mécanique de la rupture proposée par Francfort et Marigo [35].

Pour un solide élastique  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  constituée de la frontière du solide non fissuré  $\Gamma$  et des lèvres d'une fissure  $L$ . Soit  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , avec  $\Gamma_1$  la frontière avec des conditions aux limites de Dirichlet et  $\Gamma_2$  celle avec des conditions aux limites de Neumann.

La fonctionnelle de l'énergie dissipée régularisée développée par Schmidt et al. [3] s'écrit :

$$G_\epsilon(u, \varepsilon^*, t) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(u) - \varepsilon^*) dV - \int_{\Gamma_2} F \cdot u dS + G_c \frac{|L_\epsilon|}{2\epsilon} \quad (3.1)$$

où les trois termes représentent respectivement l'énergie de la structure  $\Omega$ , l'énergie fournie par les forces extérieures et l'énergie dissipée par la fissure,  $\epsilon$  représente un paramètre homogène à une longueur,  $F$  est un effort extérieur,  $u$  est le déplacement et  $t$  est le temps,  $L = \{\varepsilon^* \neq 0\}$  est le support du champ d'*eigendeformation* (voir [3]),  $L_\epsilon$  est le  $\epsilon$ -voisinage de  $L$  et  $G_c$  est le taux de restitution d'énergie critique du matériau (en mode I). Enfin,  $|L_\epsilon|$  représente la mesure de  $L_\epsilon$ .

Schmidt et al. [3] ont montré que la fonctionnelle  $G_\epsilon$  est  $\Gamma$ -convergente vers la fonctionnelle  $G$ , correspondant au critère de Griffith, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

#### 3.1.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre est basée sur l'érosion d'éléments, c'est-à-dire la suppression successive d'éléments vérifiant ici un critère. La méthode repose sur le calcul d'un taux de restitution d'énergie :

$$G = - \frac{\Delta E_{\mathcal{K}}}{\Delta A_{\mathcal{K}}} \quad (3.2)$$

où  $\Delta E_{\mathcal{K}}$  est la variation d'énergie de la structure lorsque la maille  $\mathcal{K}$  est érodée et  $\Delta A_{\mathcal{K}}$  l'incrément d'avancée de fissure relié à la maille  $\mathcal{K}$ .

**Calcul de  $\Delta E_{\mathcal{K}}$**  Il s'agit ici de déterminer la variation d'énergie dans le cas où une maille  $\mathcal{K}$  est supprimée. Il est donc nécessaire de calculer l'énergie de la structure avant et après la suppression de la maille.

Soit la matrice de rigidité  $S + \Delta S_{\mathcal{K}}$  d'un solide au comportement élastique, où  $\Delta S_{\mathcal{K}}$  est la matrice de rigidité de l'élément  $\mathcal{K}$  et  $S$  la matrice de rigidité du solide sans l'élément

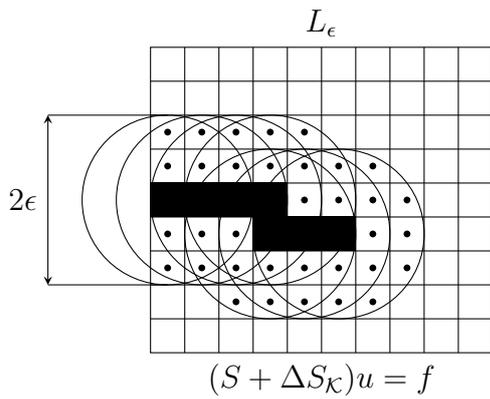


Figure 54: Configuration initiale.

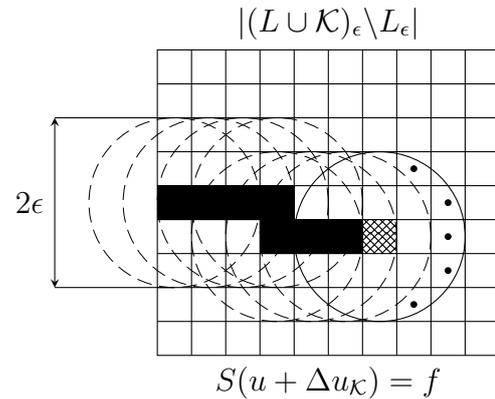


Figure 55: Configuration érodée.

$\mathcal{K}$ . Soient  $u$  le déplacement du solide avant érosion et  $u + \Delta u_{\mathcal{K}}$  le déplacement du solide érodé.

En utilisant les équations d'équilibre du solide avant et après l'érosion de l'élément  $\mathcal{K}$  (voir Figures 54 et 55), l'énergie restituée suite à la suppression de l'élément  $\mathcal{K}$  s'écrit (voir [4] pour plus de détails) :

$$-\Delta E_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}u^T \Delta S_{\mathcal{K}}u + \frac{1}{2}\Delta u_{\mathcal{K}}^T S \Delta u_{\mathcal{K}}. \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) montre que la variation d'énergie à prendre en compte dans la propagation de la fissure ne dépend pas uniquement de l'énergie locale à la maille  $\mathcal{K}$   $\left(\frac{1}{2}u^T \Delta S_{\mathcal{K}}u\right)$  mais également de l'énergie globale du solide  $\left(\frac{1}{2}\Delta u_{\mathcal{K}}^T S \Delta u_{\mathcal{K}}\right)$ . Ces deux grandeurs sont prises en compte dans la suite.

**Calcul de  $\Delta A_{\mathcal{K}}$**  L'incrément d'avancée de fissure d'un élément  $\mathcal{K} \notin L$  est calculé à l'aide d'un  $\epsilon$ -voisinage :

$$\Delta A_{\mathcal{K}} = \frac{|(L \cup \mathcal{K})_\epsilon \setminus L_\epsilon|}{2\epsilon} \quad (3.4)$$

où  $(L \cup \mathcal{K})_\epsilon$  représente les voisins de la fissure, c'est-à-dire les éléments appartenant à la  $\epsilon$ -boule de centre  $\mathcal{K}$ ,  $L_\epsilon$  représente les voisins de la fissure associés à l'état initial. Ainsi,  $(L \cup \mathcal{K})_\epsilon \setminus L_\epsilon$  représente les « nouveaux » voisins associés à la suppression de l'élément  $\mathcal{K}$  (voir Figures 54 et 55) et  $|{(L \cup \mathcal{K})_\epsilon \setminus L_\epsilon}|$  représente la mesure de l'ensemble des « nouveaux » voisins. Dans la suite de cette étude, le rayon du  $\epsilon$ -voisinage est pris égal à  $5h$ , où  $h$  représente la taille de maille caractéristique.

La question de l'initiation de la fissure se pose : si aucune fissure n'est présente dans le matériau, le volume associé à  $|{(L \cup \mathcal{K})_\epsilon \setminus L_\epsilon}|$ , en cas d'initiation à cœur (voir Figure 56(a)), est  $\pi\epsilon^2$  et la longueur d'incrément de fissuration associée est égale à  $\frac{\pi\epsilon}{2}$ . En cas d'initiation sur un bord (voir Figure 56(b)), l' $\epsilon$ -voisinage est de  $\frac{\pi\epsilon^2}{2}$  et  $\Delta A_{\mathcal{K}} = \frac{\pi\epsilon}{4}$ , et dans un coin (voir Figure 56(c)), il vaut  $\frac{\pi\epsilon^2}{4}$  et  $\Delta A_{\mathcal{K}} = \frac{\pi\epsilon}{8}$ . La longueur est donc surestimée. Pour pallier ce problème, une longueur arbitraire  $D_{equi}$  représentant le diamètre d'une boule

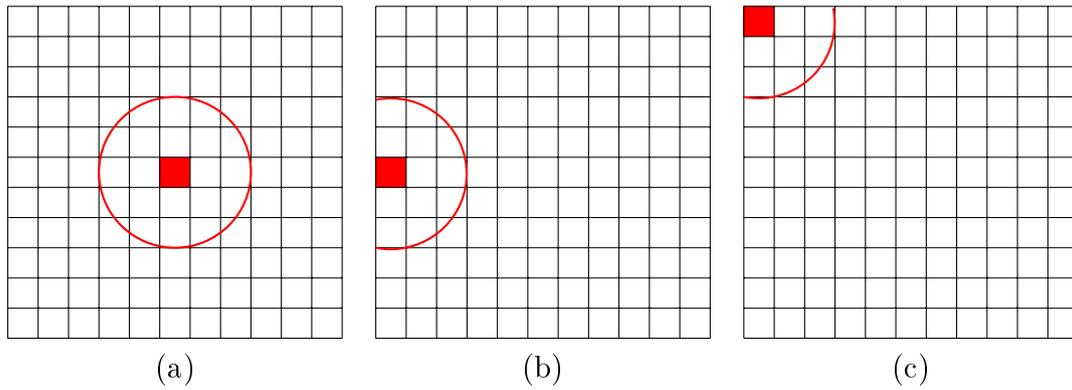


Figure 56: Mise en évidence de trois endroits où peut s'initier une fissure. La maille en rouge correspond à la maille d'intérêt et l'air du cercle en rouge correspond à son voisinage.

ayant un volume équivalent au volume de l'élément considéré est introduite. Par exemple, pour un élément carré de côté  $c$ , la longueur d'incrément de fissuration à l'initiation  $D_{equi}$  est  $\frac{2c}{\sqrt{\pi}}$ . Dans la suite, une préfissure est introduite pour chaque calcul : les éléments de la préfissure sont des éléments érodés afin de déterminer l'incrément d'avancé de fissure sans utiliser de critère d'initiation.

### 3.1.3 Algorithme

La résolution est effectuée en deux étapes :

- locale : sélection de la maille présentant le taux de restitution d'énergie local le plus élevé,
- globale : vérification du critère de Griffith au niveau de la structure après avoir supprimé la maille sélectionnée.

La sélection locale repose sur le calcul d'un taux de restitution d'énergie local à la maille. Si une maille  $\mathcal{K}'$  vérifie :

$$G_{loc}(\mathcal{K}') = \max_{\mathcal{K}} \frac{\frac{1}{2}u^T \Delta S_{\mathcal{K}} u}{\Delta A_{\mathcal{K}} G_c(\mathcal{K})}, \quad (3.5)$$

alors cette maille est sélectionnée et est susceptible d'être érodée, où  $G_{loc}(\mathcal{K}')$  correspond au taux de restitution d'énergie de la maille  $\mathcal{K}'$ ,  $G_c(\mathcal{K})$  est le taux de restitution critique relié à la maille  $\mathcal{K}$  (voir [36]) et  $E(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}u^T \Delta S_{\mathcal{K}} u$  correspond à l'énergie élastique de la maille  $\mathcal{K}$ .

Bien qu'il soit possible d'éroder plusieurs éléments à chaque itération en introduisant une tolérance dans le critère local, le choix fait dans ce travail a été de ne supprimer qu'un élément à la fois. Le critère global s'écrit donc :

$$-\Delta E_{\mathcal{K}'} - \Delta A_{\mathcal{K}'} G_c(\mathcal{K}') \geq 0. \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{K}'$  représente la maille vérifiant le critère local.

Le pseudo code de la méthode d'« Eigen-Erosion » est détaillé dans l'Algorithme 2.

```

while  $t < t_{final}$  do
  a/ Détermination des incréments de fissuration  $\Delta A_{\mathcal{K}}$  de chaque maille
  b/ Résolution EF
  c/ Sélection de la maille vérifiant le critère local (3.5) et vérification du critère global
    (3.6)
  if Critère global atteint then
    | Erosion de l'élément  $\mathcal{K}'$  vérifiant(3.5)
  end
  d/ Point fixe jusqu'à ce que le critère global ne soit plus vérifié
   $t = t + \Delta t$ 
end

```

**Algorithme 2** : Méthode d'« Eigen-Erosion ».

L'étape d/ du point fixe consiste à refaire les étapes a/, b/ et c/ jusqu'à ce que le critère global ne soit plus vérifié : tant que la structure conserve assez d'énergie pour faire propager une fissure, l'état du système est recalculé après chaque suppression d'éléments sans changer les Conditions aux Limites.

Les avantages de cette méthode sont le coût des simulations faibles (de l'ordre d'une simulation Eléments Finis), l'indépendance de l'incrément d'avancée de fissure au maillage et sa simplicité de mise en œuvre.

Les inconvénients sont une épaisseur de fissure minimale égale à la taille des mailles érodées et les phénomènes complexes tels que le recollement de fissures et le branchement de fissures ne sont actuellement pas simulables sans modifications *ad hoc*. Pour estimer correctement l'incrément d'avancée de fissure  $\Delta A$ , les maillages utilisés nécessitent une taille de maille constante et uniforme.

Dans la suite, un maillage raffiné dans une zone définie *a priori* est construit à l'aide de la méthode CHARMS et la méthode d'« Eigen-Erosion » est appliquée pour déterminer le trajet de fissure. Dans une seconde étape, la méthode d'« Eigen-Erosion » est associée à un raffinement adaptatif obtenu avec la méthode CHARMS.

## 3.2 Couplage du raffinement CHARMS *a priori* et de la méthode d'« Eigen-Erosion »

Dans cette section, la méthode d'« Eigen-Erosion » est couplée avec un raffinement *a priori* réalisé avec la méthode CHARMS. Les zones d'intérêt sont raffinées au début du calcul. Après avoir explicité le principe du couplage entre le raffinement CHARMS *a priori* et la méthode d'« Eigen-Erosion », un cas test est présenté.

### 3.2.1 Principe du couplage CHARMS - « Eigen-Erosion »

Les hypothèses faites sont que seules des mailles raffinées  $J$  fois peuvent être érodées et que l' $\epsilon$ -voisinage ne doit également contenir que des mailles raffinées de niveau  $J$ , où  $J$  correspond au niveau de raffinement maximal et cela afin de calculer le plus correctement possible l'incrément d'avancée de fissure.

Une attention particulière doit également être portée lorsque la fissure rencontre un bord du domaine où l' $\epsilon$ -voisinage n'est pas clairement défini. La solution retenue consiste à utiliser un maillage fictif étendu ayant les mêmes propriétés topologiques que le maillage de calcul [36]. Etant donné que le voisinage doit être constitué de mailles raffinées, le maillage étendu est raffiné  $J$  fois dès le début de la simulation. Ce choix a très peu d'influence sur le coût numérique car aucun calcul Eléments Finis n'est effectué dans cette zone (voir [36]).

Le principe du raffinement *a priori* appliqué à la méthode d'« Eigen-Erosion » est basé sur un indicateur géométrique. Des zones d'intérêt connues initialement sont raffinées.

La stratégie de ce couplage consiste à :

- générer un maillage grossier,
- raffiner les fonctions de base sélectionnées à l'aide du critère géométrique,
- effectuer un calcul d'érosion dans les zones raffinées. Les champs Eléments Finis dans ces zones sont gérés à l'aide de la méthode CHARMS (voir chapitre 1).

Le calcul du critère local de l'« Eigen-Erosion » (taux de restitution d'énergie local à la maille) est effectué sur les mailles raffinées uniquement. Les algorithmes de l'« Eigen-Erosion » pour le calcul des critères local et global ne sont pas modifiés. Cette stratégie est validée au travers du cas test suivant : une poutre sur trois appuis avec une préfissure [37].

### 3.2.2 Validation

Pour valider l'application de la méthode CHARMS avec un raffinement *a priori* à l'« Eigen-Erosion », une poutre trois points avec une préfissure [37] en flexion est considérée (voir Figure 57). Deux configurations sont considérées : le type I où le point  $B$  est libre et  $\zeta = 0.5$  et le type II où le déplacement vertical du point  $B$  est nul et  $\zeta = 0.6$ . Dans le type I, le chargement est principalement en mode I alors que le type II correspond à un chargement en mode mixte. Le matériau est du mortier supposé homogène dont les caractéristiques mécaniques sont précisées dans le Tableau 7. Les simulations ont été réalisées à l'aide d'un code parallélisé (XPER) et sur 48 processeurs.

Deux niveaux de raffinement maximum sont considérés :  $J = 1$  et  $J = 2$ . Les maillages initiaux ont une taille de maille telle que les mailles raffinées  $J$  fois aient une taille égale à  $0.25mm$ . Ainsi, pour  $J = 1$ , la taille de maille grossière est de  $0.5mm$  et celle pour  $J = 2$ , elle est de  $1mm$ .

**Comparaison avec les maillages de référence** La qualité de la solution obtenue avec le maillage localement raffiné est évaluée en calculant localement une erreur relative, par rapport à un maillage de référence, sur l'énergie de la maille vérifiant les critères d'érosion. Cette erreur locale s'écrit :

$$e_E = \frac{|E_{raff}(\mathcal{K}^{ero}) - E_{ref}(\mathcal{K}^{ero})|}{|E_{ref}(\mathcal{K}^{ero})|} \quad (3.7)$$

où  $E_{raff}(\mathcal{K}^{ero})$  et  $E_{ref}(\mathcal{K}^{ero})$  représentent respectivement les énergies de la maille érodée  $\mathcal{K}^{ero}$  du maillage raffiné et du maillage de référence. Les maillages de référence correspondent aux maillages grossiers totalement raffinés  $J$  fois.

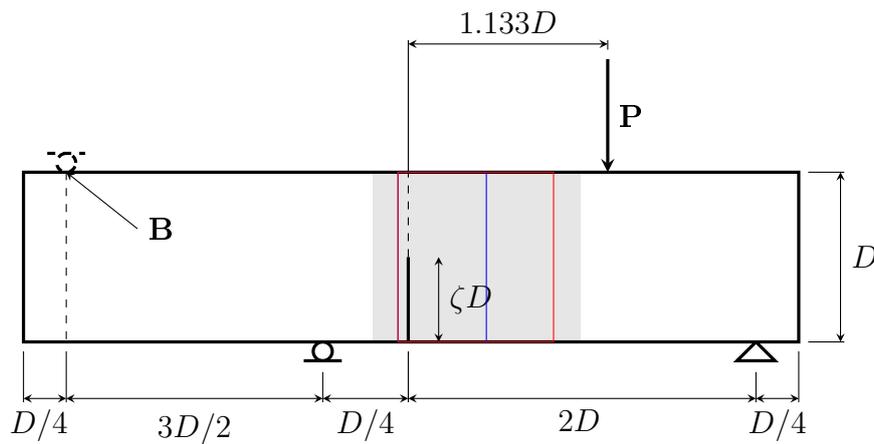


Figure 57: Géométrie de la poutre trois points avec préfiessure, avec  $D = 75mm$ . Type I : B est libre, type II : déplacement vertical du point B nul. En bleu, la zone d'intérêt du type I et en rouge celle du type II.

Module d'Young	$E = 38.4GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Taux de restitution d'énergie critique	$69J/m^2$
Incrément de déplacement au point P	$10^{-5}m$
Type de maille	Triangle
Taille des mailles raffinées	$h_{fin} = 0.25mm$
Evolution	Quasi-statique
Type de résolution	Implicite

Tableau 7: Poutre en flexion trois points : caractéristiques mécanique et numérique.

La zone d'intérêt choisie dépend du type de configuration : la zone du type II est plus étendue que celle du type I et le nombre de degrés de liberté est donc plus important pour le type II que pour le type I. Les faciès de rupture obtenus avec un raffinement *a priori* dans la zone d'intérêt sur  $J$  niveaux ( $J \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ ) sont identiques à ceux obtenus avec les maillages de référence (voir Figures 58 et 59).

Les Figures 60 et 61 montrent l'évolution de l'erreur locale (3.7) et globale en énergie pour les types I et II en fonction des itérations de la simulation. Ces figures mettent en

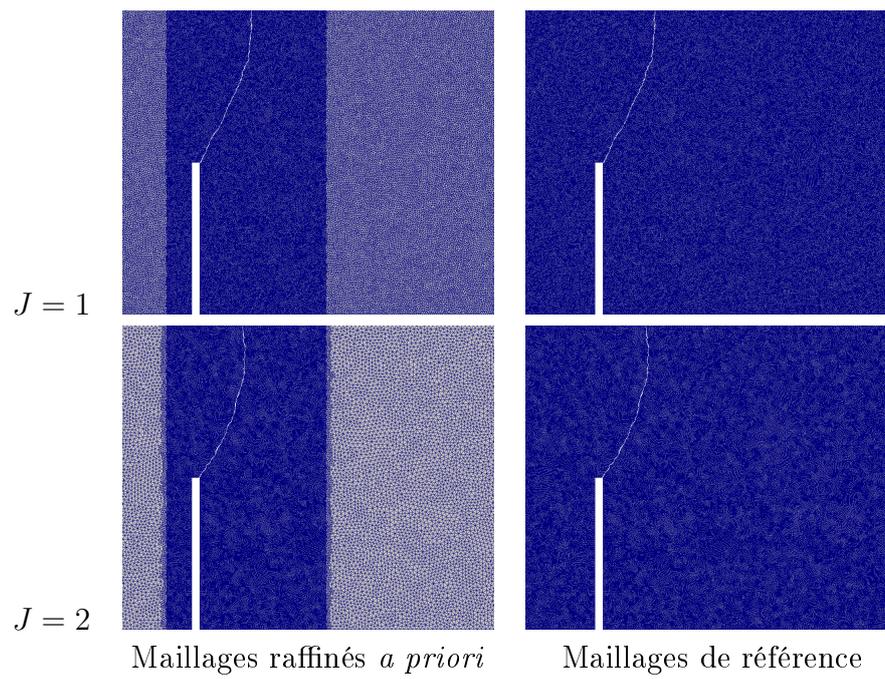


Figure 58: Type I : faciès de rupture obtenus avec les maillages raffinés *a priori* et les maillages de référence.

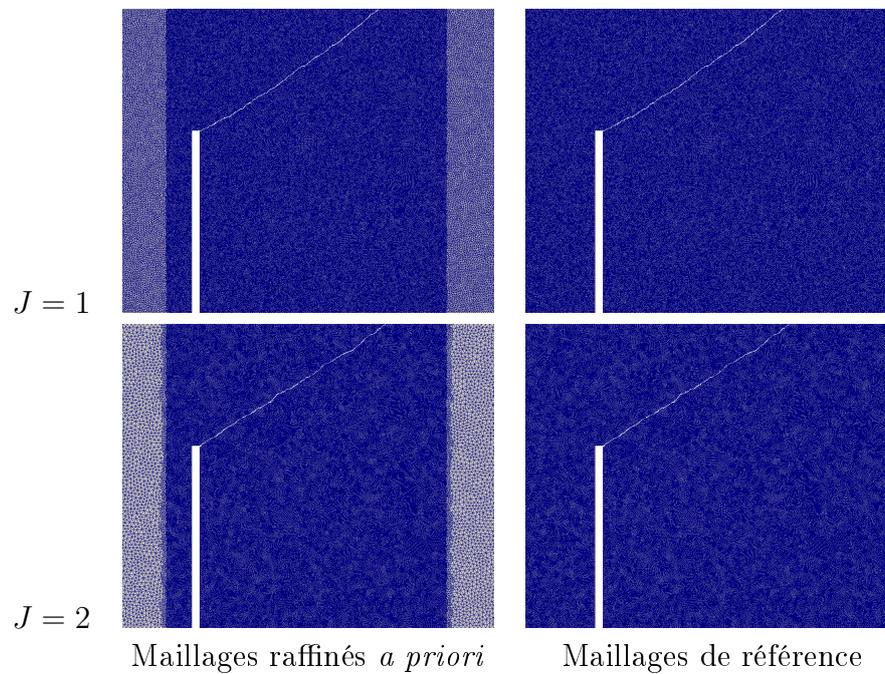


Figure 59: Type II : faciès de rupture obtenus avec les maillages raffinés *a priori* et les maillages de référence.

évidence que les erreurs pour les deux types de configuration restent faibles au cours du calcul ( $< 1\%$ ). Les erreurs obtenues avec des maillages raffinés *a priori* sur 2 niveaux sont supérieures à celles réalisées sur 1 niveau (les erreurs maximales avec un raffinement sur 1 niveau sont 4 fois inférieures à celles sur 2 niveaux). Cela est dû à la discrétisation initiale du maillage : pour un raffinement sur 2 niveaux, la taille des mailles du maillage initial est deux fois plus grande que celle du maillage initial raffiné sur 1 niveau.

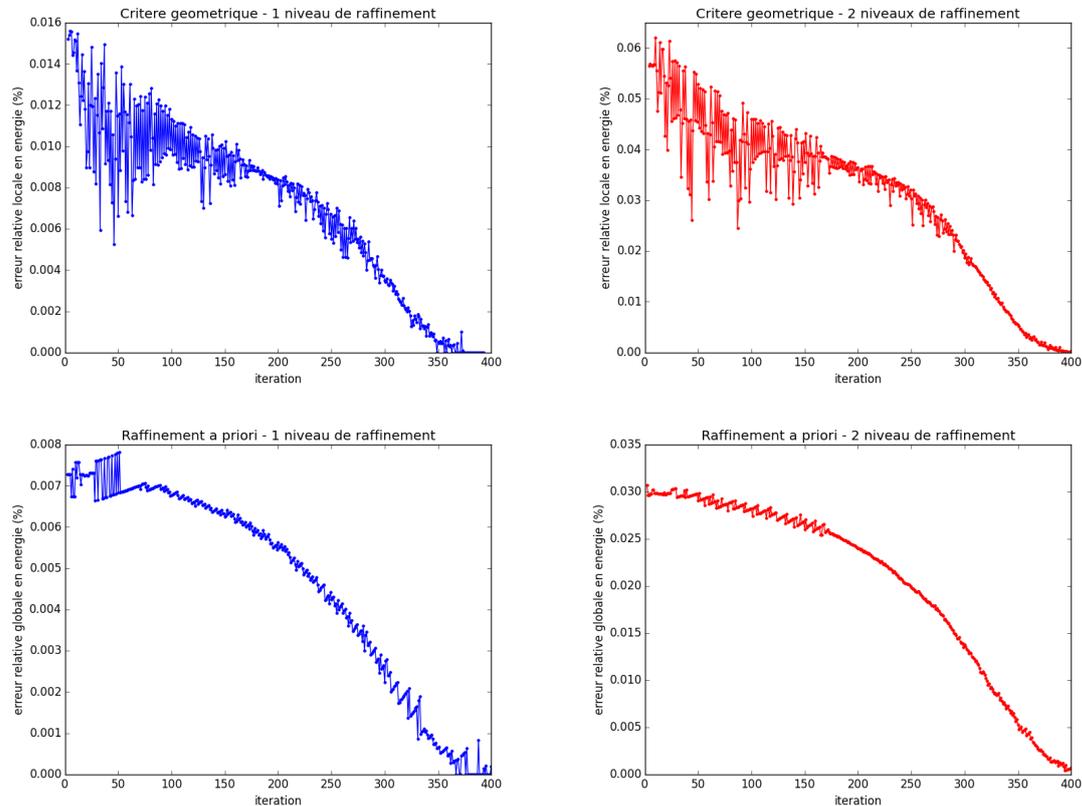


Figure 60: Type I : évolutions de l'erreur relative locale (en haut) et globale (en bas) en énergie au cours de la simulation obtenues avec un raffinement *a priori* pour deux niveaux de raffinement maximal.

Les temps de simulation en fonction du nombre de degrés de liberté sont résumés dans le Tableau 8. **Le raffinement *a priori* dans les zones d'intérêt permet une réduction de temps de calcul supérieure à 50% pour les deux types.** Cette diminution est due à la réduction du nombre de degrés de liberté. La zone d'intérêt du type I étant moins étendue que celle du type II, le gain est plus important. De plus, le maillage initial pour  $J = 2$  ( $h = 1mm$ ) étant plus grossier que pour  $J = 1$  ( $h = 0.5mm$ ), le raffinement *a priori* sur deux niveaux permet une diminution plus importante du temps de calcul que le raffinement sur 1 niveau pour une taille de maille raffinée égale.

**Amélioration du découpage des domaines raffinés par processeurs** Dans ces simulations parallèles, le découpage du domaine par processeur est homogène pour chaque simulation (voir Figure 62). Un découpage amélioré afin d'obtenir un nombre de degrés de liberté équivalent sur chaque processeur (voir Figure 63) permet une diminution du temps

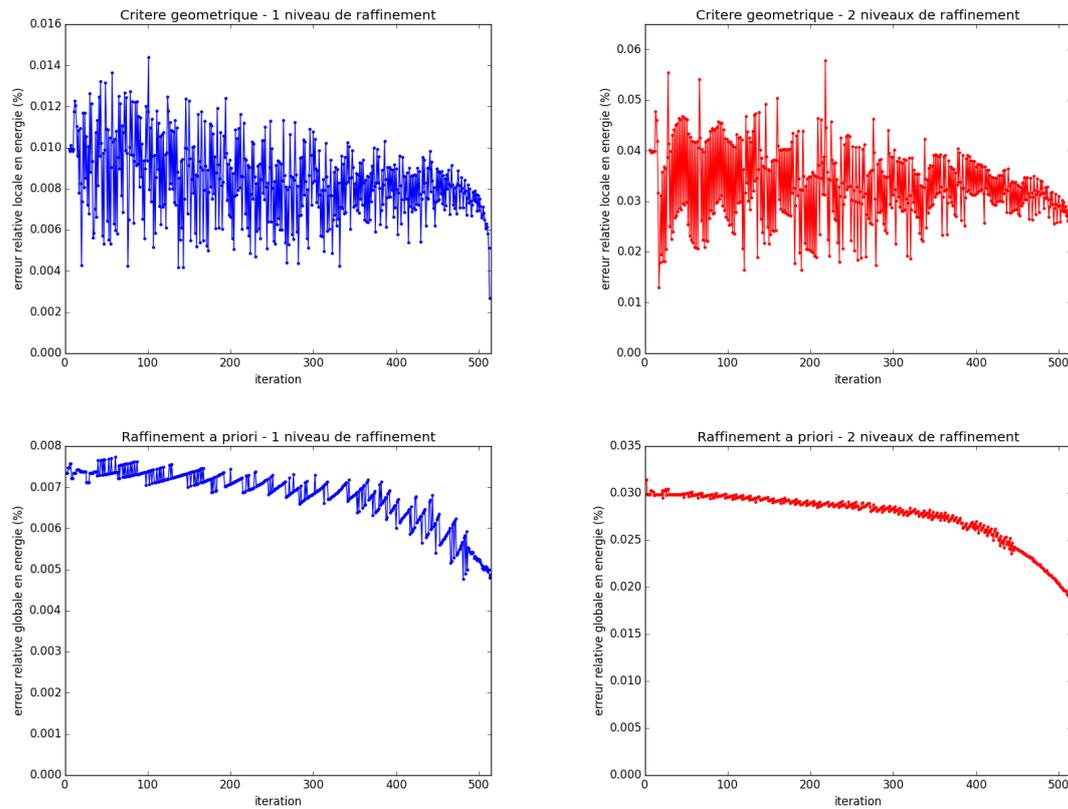


Figure 61: Type II : évolutions de l'erreur relative locale (en haut) et globale (en bas) en énergie au cours de la simulation obtenues avec un raffinement *a priori* pour deux niveaux de raffinement maximal.

	Type I		Type II	
	$J = 1$	$J = 2$	$J = 1$	$J = 2$
Totalement raffiné nombre de ddl	6.73h 1103156	7.35h 1108528	8.27h 1103252	8.53h 1105824
Raffiné <i>a priori</i> nombre de ddl	2.71h 386188	1.83h 208650	4.03h 460772	3.58h 300282
Gain relatif en temps	60%	75%	51%	58%

Tableau 8: Durées des simulations par processeur et gains relatifs grâce au raffinement *a priori* dans la zone d'intérêt pour les deux configurations considérées et pour les différents maillages utilisés.

de simulation. Les temps de simulation par processeur sont résumés dans le Tableau 9. Dans ce tableau, la première ligne correspond aux temps de simulation par processeur avec un raffinement *a priori* et un découpage amélioré du domaine par processeur. La deuxième ligne correspond aux gains de temps relatifs par rapport aux simulations avec un raffinement *a priori* et un découpage homogène du domaine. La dernière ligne correspond aux gains de temps relatifs aux maillages de références. L'amélioration du découpage du domaine et donc de la répartition équitable du nombre de degrés de liberté par processeur permet une réduction supplémentaire des temps de simulations parallèles.

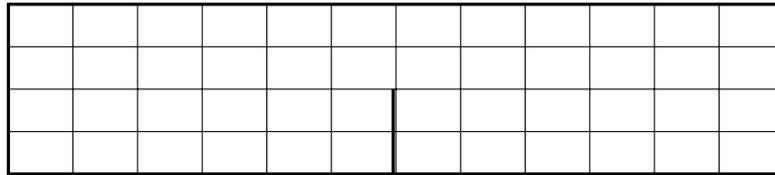


Figure 62: Découpage homogène du domaine par processeur.

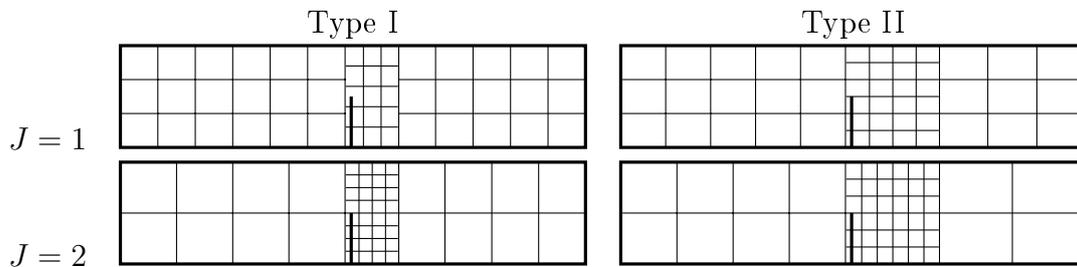


Figure 63: Découpage optimisé des domaines en 48 en fonction des niveaux maximum de raffinement et des types de configurations.

	Type I		Type II	
	$J = 1$	$J = 2$	$J = 1$	$J = 2$
Découpage optimisé	1.41h	0.71h	2.78h	1.18h
Gain relatif (découpage)	48%	61%	31%	67%
Gain relatif total	83%	90%	66%	86%

Tableau 9: Temps de calcul par processeur et gains relatifs grâce à l'optimisation du découpage du domaine et gains relatifs par rapport aux maillages de référence.

**Comparaison avec les résultats expérimentaux** Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux présentés dans [37] et [38]. La Figure 64 montre l'enveloppe expérimentale des fissures (6 essais réalisés pour le type I et 4 pour le type II) et les fissures obtenues avec un raffinement *a priori* dans les zones d'intérêt.

Les trajets de fissures simulés sont proches des résultats expérimentaux, et cela pour les deux niveaux de raffinement et les deux types de configuration considérés. La méthode d'« Eigen-Erosion » avec un raffinement *a priori* permet donc de prévoir des faciès de rupture proches des résultats expérimentaux.

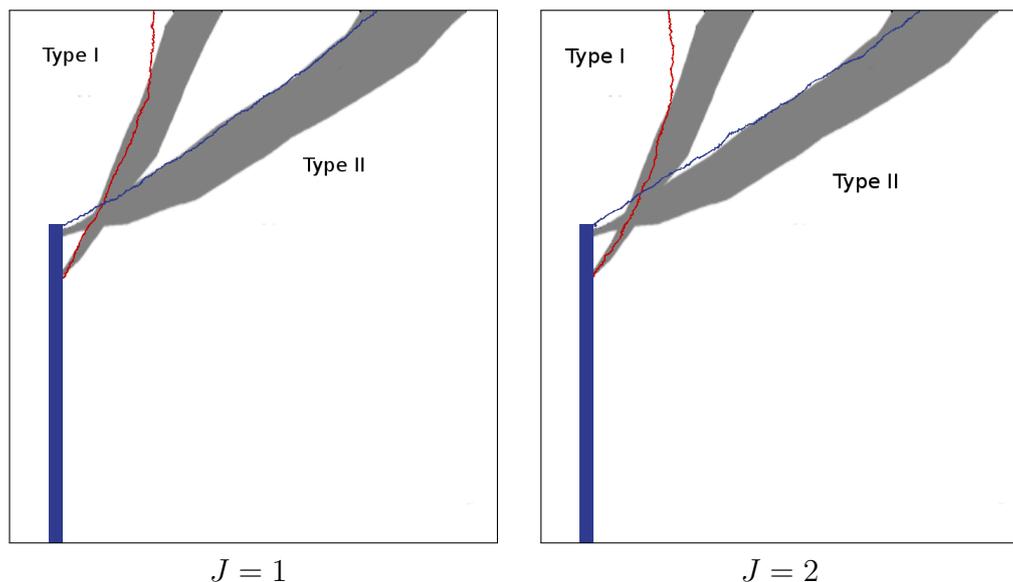


Figure 64: Enveloppe expérimentale et faciès de rupture obtenus avec un raffinement *a priori* du cas test de [37].

### 3.3 Couplage du raffinement CHARMS adaptatif et de la méthode d'« Eigen-Erosion »

Dans cette section, le principe du raffinement local adaptatif associé à la méthode d'« Eigen-Erosion » est détaillé. Après avoir brièvement explicité l'algorithme de raffinement adaptatif couplé à la méthode d'« Eigen-Erosion » et les mises à jour nécessaires dans le logiciel PELICANS, le critère (2.6) du chapitre précédent est exprimé avec, comme grandeur d'intérêt, le taux de restitution d'énergie local à une maille. Le couplage est validé au travers du cas test de la Figure 57 et une étude paramétrique du critère est ensuite réalisée.

#### 3.3.1 Algorithme et mises à jour

Le pseudo-code du raffinement adaptatif associé à la méthode d'« Eigen-Erosion » est présenté dans l'Algorithme 3. La zone située autour de la pré-fissure et le maillage étendu sont raffinés lors de la première itération. L'étape de raffinement adaptatif est réalisée avant l'étape d'érosion. Les critères de raffinement sont explicites et reposent sur les champs obtenus à l'itération précédente.

Le raffinement adaptatif nécessite des mises à jour des champs Eléments Finis et des systèmes linéaires après chaque raffinement (voir section 2.2). Ces mises à jour concernent les champs Eléments Finis présentés dans l'annexe D. De plus, le voisinage de chaque nouvelle maille raffinée doit être mis à jour.

```

Raffinement de la zone autour de la préfissure et du maillage étendu
Suppression des éléments dans la préfissure
Initialisation des champs
while  $t < t_{final}$  do
  a/ Test du critère de raffinement
  if Critère de raffinement vérifié then
    Raffinement des fonctions de base vérifiant le critère de raffinement
    Mise à jour du voisinage des mailles raffinées
    Mise à jour Eléments Finis (DOF, matrices, champs, CL)
  end
  b/ Détermination des incréments d'avancée de fissure  $\Delta A$  des mailles raffinées
  c/ Résolution EF
  d/ Calcul de l'énergie du système (3.3) et du critère global
  if Critères d'« Eigen-Erosion » vérifiés then
    | Erosion des éléments puis point fixe
  end
   $t = \Delta t + t$ 
end

```

**Algorithme 3** : Raffinement local adaptatif appliqué à la méthode d'« Eigen-Erosion ».

### 3.3.2 Critère de raffinement pour l'érosion

La méthode d'« Eigen-Erosion » est basée sur l'utilisation conjointe de deux critères énergétiques : un critère local pour sélectionner la maille avec le taux de restitution d'énergie maximal et un critère global pour vérifier le critère de Griffith. Le raffinement étant réalisé localement, la grandeur d'intérêt  $\mathcal{F}$  du critère (2.6) est le critère local de la méthode d'« Eigen-Erosion », c'est-à-dire le taux de restitution local à une maille, avec  $\alpha = 0$  et  $\xi = 0$ . Le critère utilisé s'écrit :

$$\mathcal{C}_G^{crit} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{K}_e^{(J)}}(G) = \left( \left| \frac{G(\mathcal{K}_e^{(J)})}{G^{max}} \right| \right) \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{C}_G^{crit}$  est la valeur critique de raffinement,  $\mathcal{C}_{\mathcal{K}_e^{(J)}}(G)$  est la valeur du critère pour la maille  $\mathcal{K}_e$  de niveau de raffinement maximal  $J$ ,  $G(\mathcal{K}_e^{(J)})$  et  $G^{max}$  correspondent respectivement au taux de restitution d'énergie de la maille  $\mathcal{K}_e$  raffiné  $J$  fois et au taux de restitution maximal de l'ensemble des mailles raffinées  $J$  fois ( $G^{max} = \max_e(G(\mathcal{K}_e^{(J)}))$ ). Dans la suite,  $\mathcal{C}_G^{crit}$  est pris égal à 1 afin de ne sélectionner que la maille avec le taux de restitution d'énergie maximal, c'est-à-dire la maille susceptible d'être érodée en priorité.

Afin d'assurer que les mailles appartenant au voisinage de la maille vérifiant le critère (3.8) soient également raffinées (voir section 3.2.1), deux distances  $d_{crit}$  et  $d_{raff}$  sont introduites telles que  $d_{raff} \geq d_{crit}$ . La distance  $d_{crit}$  correspond à une distance d'alerte et permet d'assurer une distance minimale entre la pointe de fissure et les mailles grossières et la distance  $d_{raff}$  correspond à la distance de raffinement. Lorsqu'une maille non raffinée est située à une distance inférieure à  $d_{crit}$  de la maille vérifiant (3.8), les fonctions de base situées à l'intérieur du cercle de centre la maille vérifiant (3.8) et de rayon  $d_{raff}$  sont raffinées (voir Figure 65). La distance  $d_{crit}$  doit être supérieure au rayon de la  $e$ -

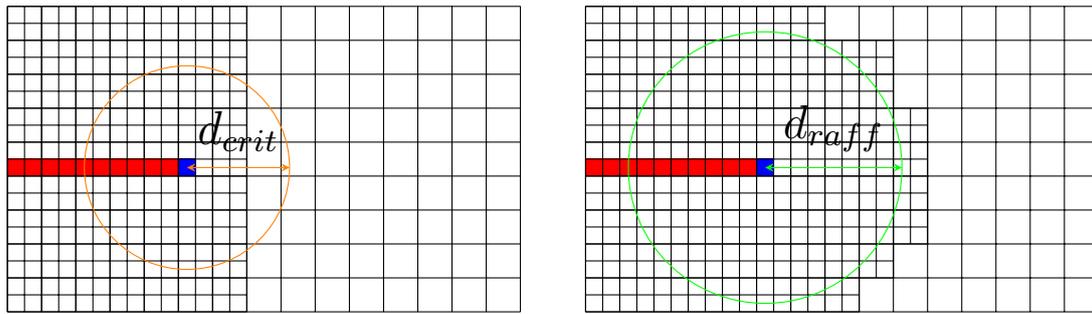


Figure 65: Mise en évidence des distances  $d_{crit}$  (rayon du cercle orange) et  $d_{raff}$  (rayon du cercle vert). En rouge les mailles érodées et en bleu la maille vérifiant le critère vérifiant (3.8). A gauche : distance entre la maille bleu et la zone grossière inférieure à  $d_{crit}$ . A droite, raffinement des fonctions de base située à une distance inférieure à  $d_{raff}$  de la maille bleu.

voisinage afin que le voisinage de la maille vérifiant le critère local soit raffiné. Le critère de raffinement d'une maille  $\mathcal{K}_e$  en prenant en compte ces distances est défini par :

$$\text{Si } d_{crit} \geq \text{dist}(\mathcal{K}_e^c, \mathcal{K}_{max}^c), \text{ raffiner les mailles vérifiant} \quad (\text{RaffEigen})$$

$$d_{raff} \geq \text{dist}(\mathcal{K}_e^c, \mathcal{K}_{max}^c)$$

où  $\text{dist}(\cdot)$  représente la distance entre deux mailles,  $\mathcal{K}_e^c$  correspond au centre de la maille  $\mathcal{K}_e$  et  $\mathcal{K}_{max}^c$  est le centre de la maille raffinée  $J$  fois vérifiant le critère (3.8).

Le critère (RaffEigen) permet de raffiner autour de la pointe de fissure et augmente donc la précision dans cette zone.

Dans la suite, le raffinement adaptatif est validé avec  $d_{crit} = 4\epsilon$  et  $d_{raff} = 2d_{crit}$ .

### 3.3.3 Validation du raffinement adaptatif

Le cas test considéré est celui de la Figure 57 pour les deux types considérés. Les maillages initiaux grossiers et les caractéristiques mécanique et numérique utilisés sont identiques à la section 3.2. Pour valider le raffinement adaptatif à la méthode d'« Eigen-Erosion », l'énergie locale à la maille supprimée obtenue avec un raffinement est comparée à celle du maillage de référence (maillage totalement raffiné  $J$  fois afin d'obtenir la même taille de maille raffinée, voir erreur (3.7)). Le raffinement adaptatif est ensuite comparé au raffinement *a priori*.

**Comparaison avec des maillages de référence** Les trajets de fissuration obtenus pour les deux types et les deux niveaux de raffinement sont montrés sur la Figure 66. Les trajets obtenus avec un raffinement adaptatif sont bien identiques à ceux obtenus avec les maillages de référence. De plus, le raffinement suit bien le trajet de la fissure.

Les Figures 67 et 68 montrent les évolutions des erreurs locales en énergie élastique de la maille vérifiant les critères de l'« Eigen-Erosion » à chaque itération (erreur (3.7)) et les erreurs globales à la structure en fonction des itérations de la simulation. Ces erreurs

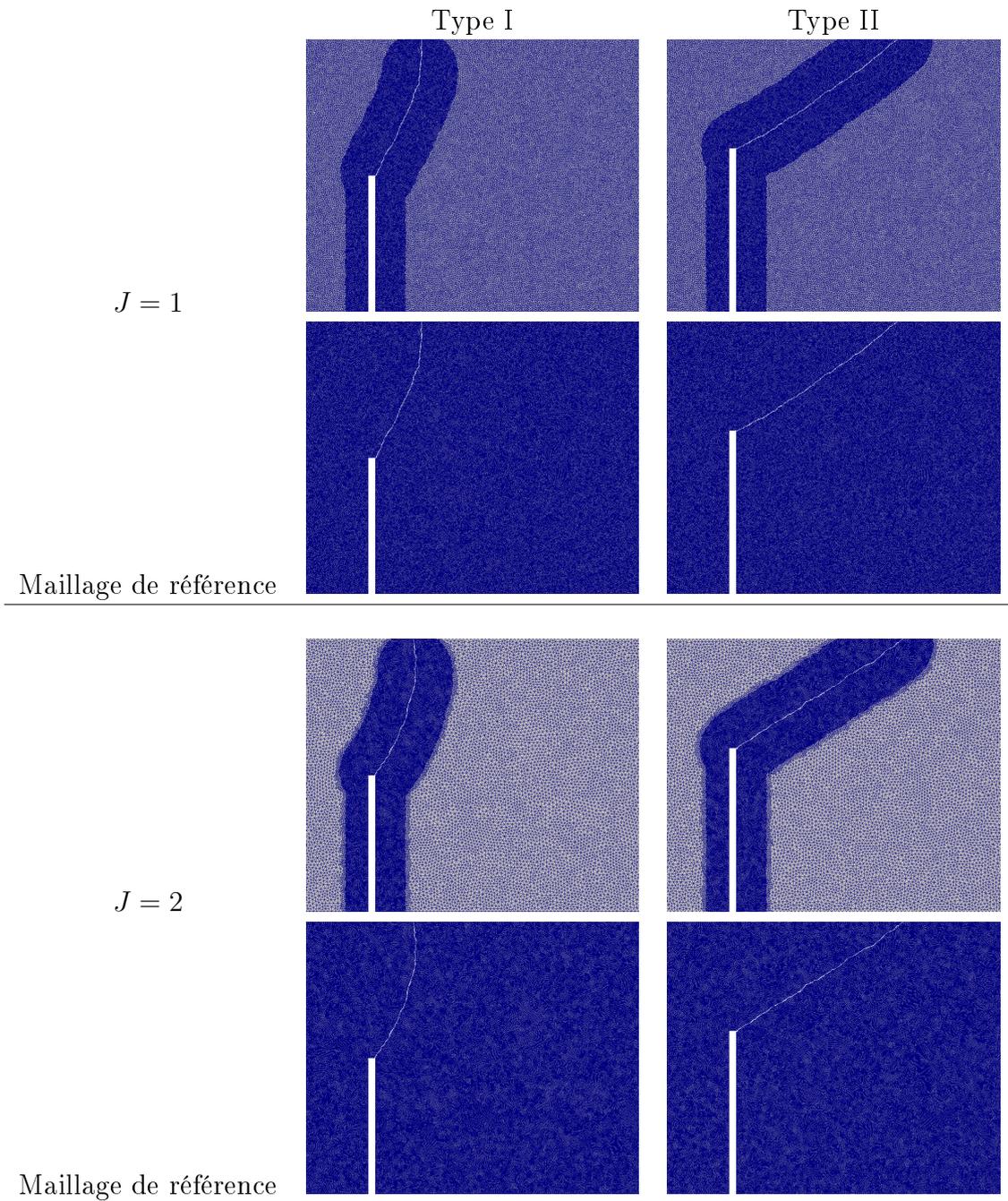


Figure 66: Faciès de fissuration.

sont déterminées à partir des maillages de référence (erreur (3.7)).

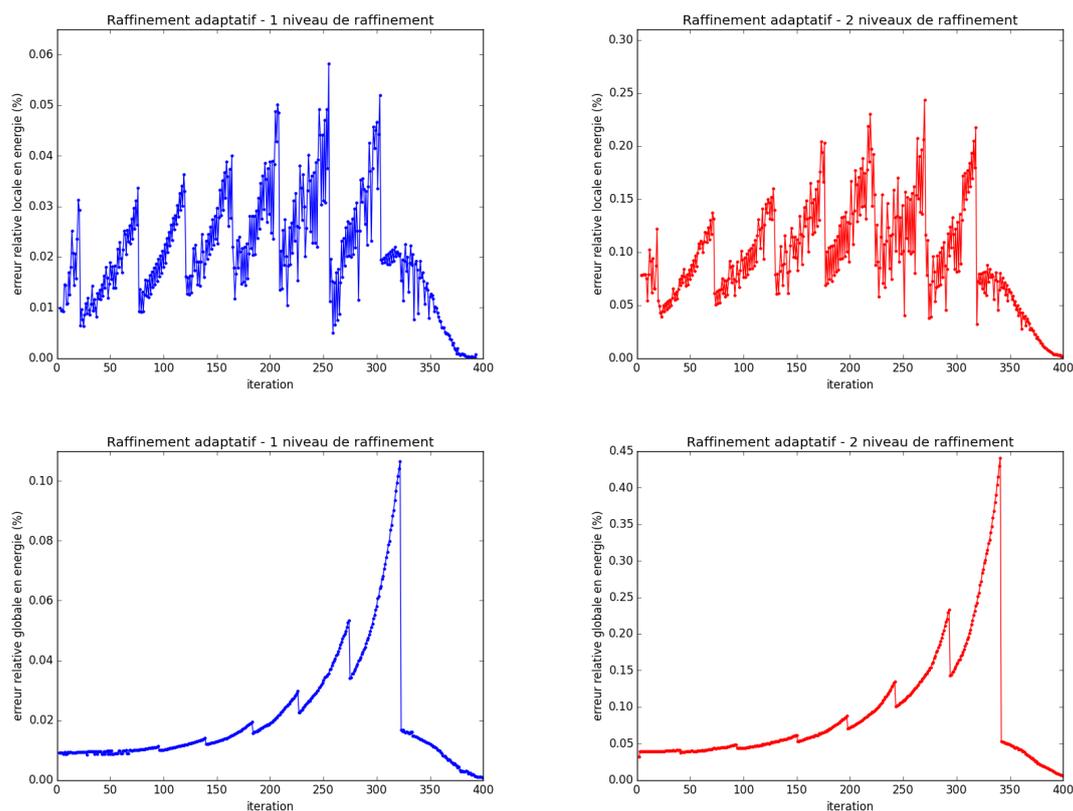


Figure 67: Type I : évolutions de l'erreur relative locale (en haut) et globale (en bas) en énergie en % au cours de la simulation obtenues avec un raffinement basé sur le critère (RaffEigen), avec  $d_{raff} = 2d_{crit}$  et  $d_{crit} = 4\epsilon$  pour deux niveaux différents de raffinement maximal.

Les erreurs relatives obtenues avec le raffinement adaptatif sont faibles ( $< 1\%$ ). Les erreurs augmentent puis diminuent rapidement. Cette augmentation peut s'expliquer par le fait que la distance entre la fissure et les zones du maillage grossier diminue. Lorsque la distance d'alerte  $d_{crit}$  entre la pointe de fissure et les mailles grossières est dépassée, une étape de raffinement est réalisée, entraînant une diminution rapide de l'erreur.

Les temps des simulations par processeur sont résumés dans le Tableau 10 pour les différentes configurations et les niveaux de raffinement maximal  $J$  considérés. **Le raffinement adaptatif permet un gain de temps important par rapport aux maillages totalement raffinés  $J$  fois (gain relatif moyen de 85% pour le type I et de 82% pour le type II).**

**Comparaison avec le raffinement *a priori*** Les maillages initiaux utilisés pour le raffinement *a priori* et adaptatif ainsi que la découpe du domaine par processeurs sont identiques pour la comparaison. Les fissures obtenues pour les deux raffinements adaptatifs sont identiques à celles obtenues avec un raffinement *a priori* et sont montrées sur la Figure 64.

Les erreurs relatives locales et globales en énergie des mailles érodées avec les maillages raffinés *a priori* sont inférieures à celles obtenues avec un maillage raffiné adaptativement

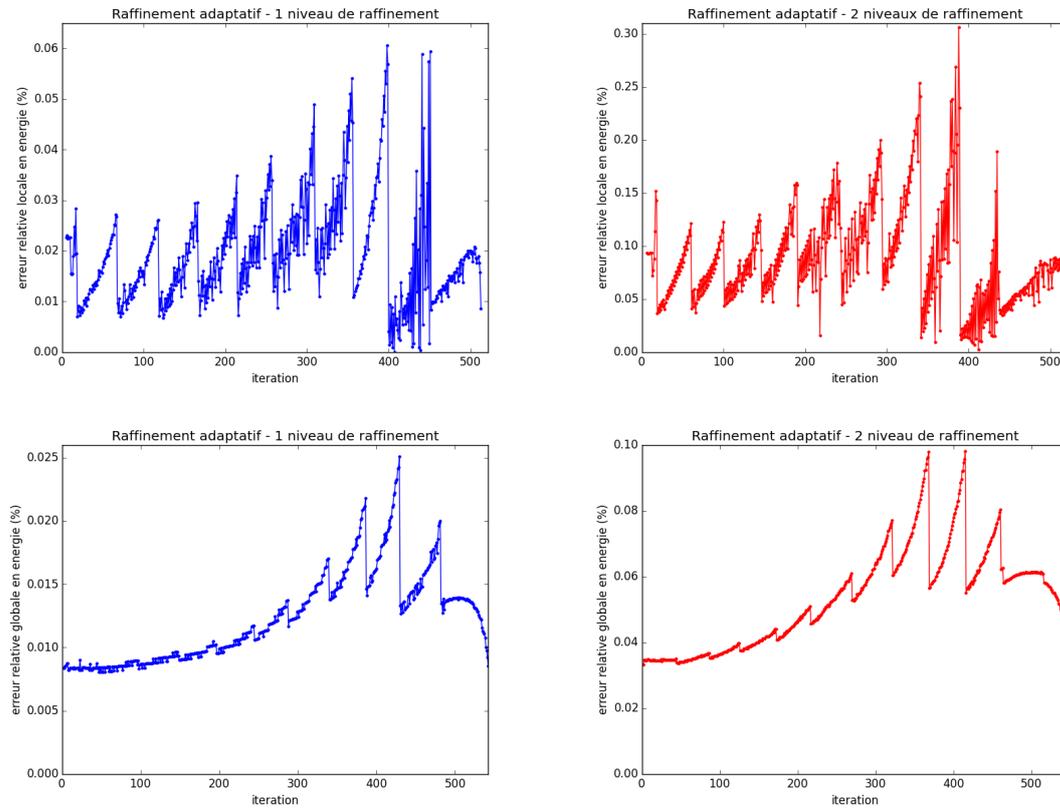


Figure 68: Type II : évolutions de l'erreur relative locale (en haut) et globale (en bas) en énergie au cours de la simulation obtenues avec un raffinement basé sur le critère (RaffEigen), avec  $d_{raff} = 2d_{crit}$  et  $d_{crit} = 4\epsilon$  pour deux niveaux différents de raffinement maximal.

	Type I		Type II	
	$J = 1$	$J = 2$	$J = 1$	$J = 2$
Totalement raffiné	6.73h	7.35h	8.27h	8.53h
Cas (2)	1.21h	0.81h	1.73h	1.25h
Gain relatif (2)	82%	89%	79%	85%

Tableau 10: Durées des simulations par processeur et gains relatifs grâce au raffinement adaptatif basé sur le critère (RaffEigen), avec  $d_{raff} = 2d_{crit}$  et  $d_{crit} = 4\epsilon$  pour les deux configurations considérées.

(gain relatif de 70% pour le type I et de 85% pour le type II). Cela est dû au fait que la zone d'intérêt sélectionnée par l'indicateur géométrique est plus étendue que celle sélectionnée par le critère (RaffEigen) avec  $d_{crit} = 4\epsilon$ . Plus la zone raffinée est étendue autour de la pointe de la fissure, plus les erreurs relatives par rapport à un maillage homogène fin sont faibles.

Du point de vue du coût numérique, les simulations basées sur le critère (RaffEigen) avec  $d_{crit} = 4\epsilon$  et  $d_{raff} = 2d_{crit}$  sont moins coûteuses que celles basées sur le raffinement *a priori* (gain relatif moyen de 45% pour le type I et de 55% pour le type II).

Pour les simulations parallèles, le développement d'une méthode numérique gérant la migration de degrés de liberté d'un processeur à un autre pour équilibrer la charge des processeurs au cours du raffinement permettrait également d'améliorer le temps de calcul. En effet, la découpe du domaine par processeur étant géométriquement homogène et fixée *a priori*, les processeurs où le raffinement est réalisé voient leur nombre de degrés de liberté augmenter contrairement aux processeurs où aucun raffinement n'est réalisé.

### 3.3.4 Etude paramétrique du critère de raffinement

Dans la suite, deux configurations du critère (RaffEigen) sont étudiées :

- $d_{raff} = d_{crit}$ , appelé Cas (1). Le Cas (1) permet un raffinement au plus juste, c'est-à-dire que seules les mailles grossières situées à une distance  $d_{crit}$  sont raffinées mais il implique une étape de raffinement à chaque avancée de fissure.
- $d_{raff} = 2 \times d_{crit}$ , appelé Cas (2). Le Cas (2) surestime la zone de raffinement mais le nombre d'étapes de raffinement est réduit. Bien que le Cas (2) augmente le nombre de mailles à raffiner, le nombre de mise à jour du système linéaire est réduit, impliquant ainsi une diminution du coût de la simulation car chaque raffinement a un coût numérique dû aux mises à jour (voir section 2.2).

Une étude est réalisée sur les différentes distances  $d_{crit}$  et  $d_{raff}$ . Le cas test considéré est le type I de la Figure 57. Une erreur locale maximale en énergie par rapport aux maillages entièrement raffinés est déterminée pour chaque simulation. Cette erreur s'écrit :

$$e_E^{max} = \max_{i \in iter} \frac{|E_{raff}^i(\mathcal{K}_{max}) - E_{fin}^i(\mathcal{K}_{max})|}{|E_{fin}^i(\mathcal{K}_{max})|} \quad (3.9)$$

où *iter* représente le nombre d'itérations total de la simulation,  $\mathcal{K}_{max}$  correspond à la maille avec le taux de restitution d'énergie maximal,  $E_{raff}^i(\mathcal{K}_{max})$  et  $E_{fin}^i(\mathcal{K}_{max})$  représentent respectivement les énergies des mailles vérifiant les critères de l'« Eigen-Erosion » pour un maillage raffiné adaptativement et le maillage entièrement raffiné (maillage de référence).

**Cas (1)** L'étude du Cas (1), où  $d_{raff} = d_{crit}$ , porte sur l'influence de la distance  $d_{crit}$  sur la précision locale et la durée des simulations. La distance  $d_{crit}$  minimale est fixée à

$2\epsilon$ , où  $\epsilon$  correspond au rayon du voisinage. Les trajets de fissure obtenus pour les cinq valeurs de  $d_{crit}$  considérées sont identiques à ceux obtenus avec les maillages de référence (voir Figures 69 et 70).

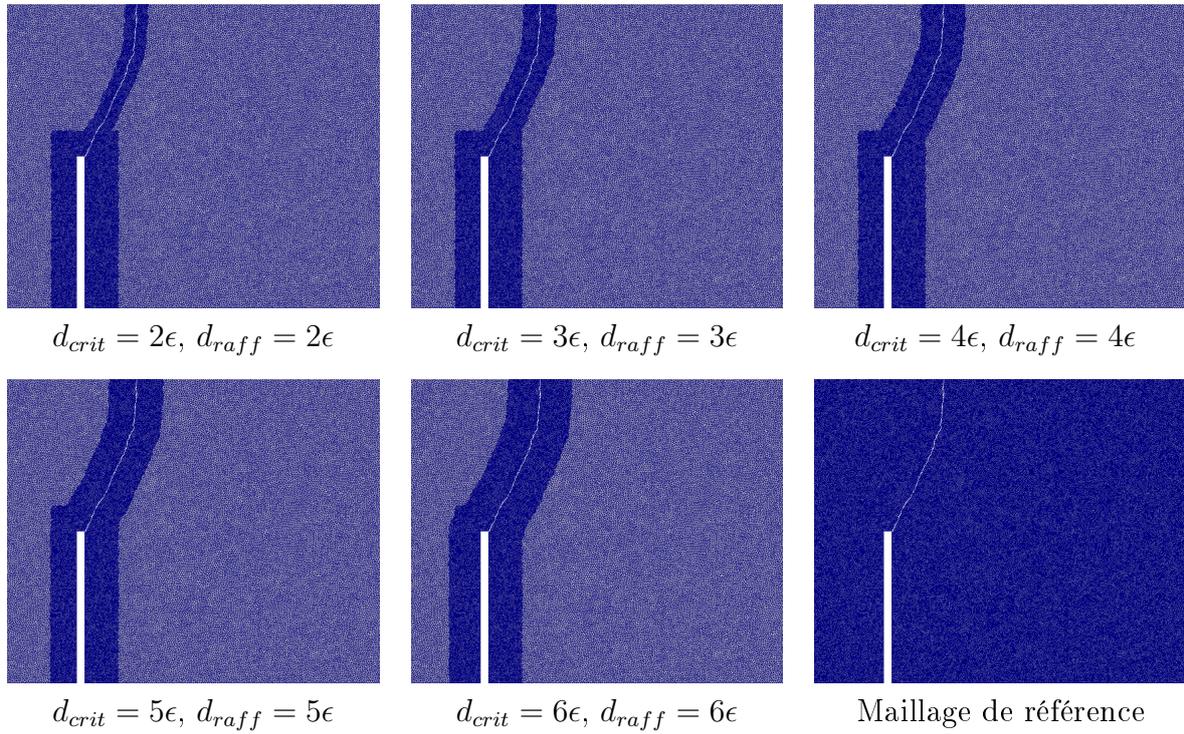


Figure 69: Cas (1) : Trajets de fissure obtenus avec  $J = 1$  en fonction de la distance  $d_{crit} = d_{raft}$ .

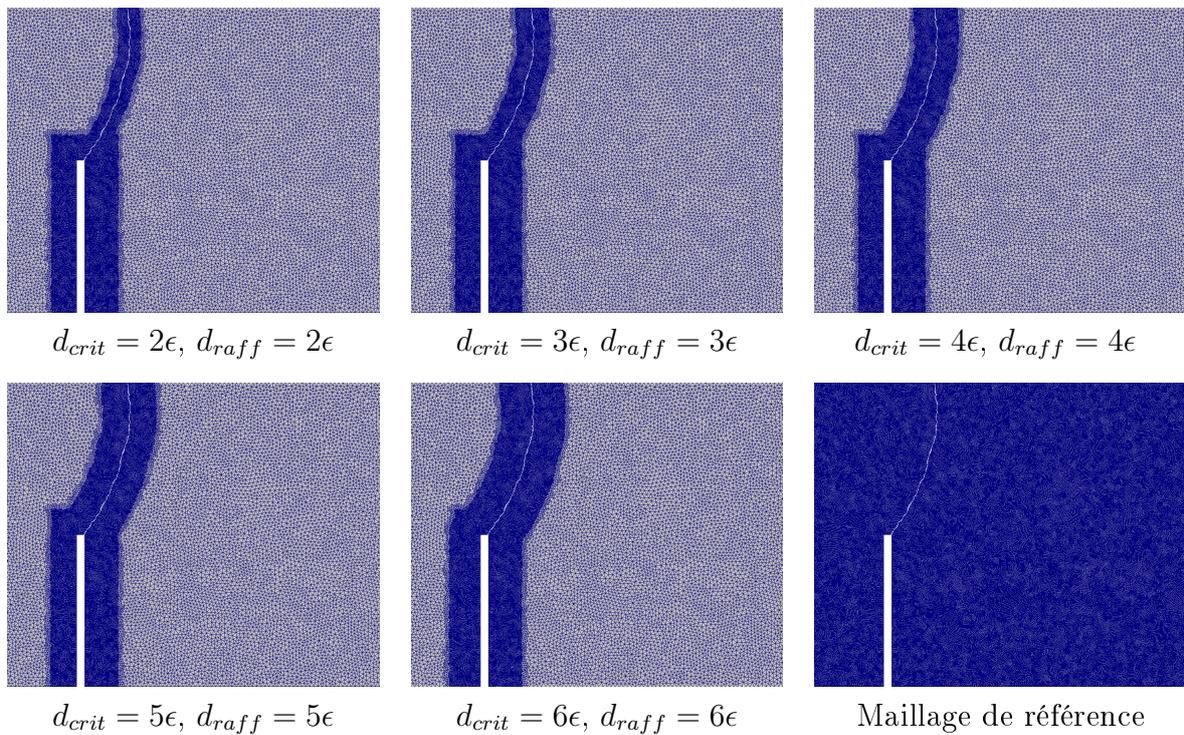


Figure 70: Cas (1) : Trajets de fissure obtenus avec  $J = 2$  en fonction de la distance  $d_{crit} = d_{raft}$ .

La Figure 71 montre les erreurs relatives locales maximales et la durée des simulations en fonction de la distance  $d_{crit}$  obtenues avec un raffinement adaptatif basé sur le Cas (1) pour différents niveaux de raffinement maximum. Cette Figure met en évidence que le raffinement basé sur le Cas (1) permet de réduire le coût numérique sans introduire d'erreur significative ( $e_E^{max} < 1\%$ ) par rapport aux maillages totalement raffinés. Les courbes illustrent également le fait que plus la longueur  $d_{crit}$  augmente, plus le temps de la simulation croît et plus l'erreur relative locale maximale diminue. De même, plus le niveau de raffinement maximal est important, plus l'erreur locale maximale est importante mais plus les temps de calcul diminuent pour une taille de mailles raffinées donnée.

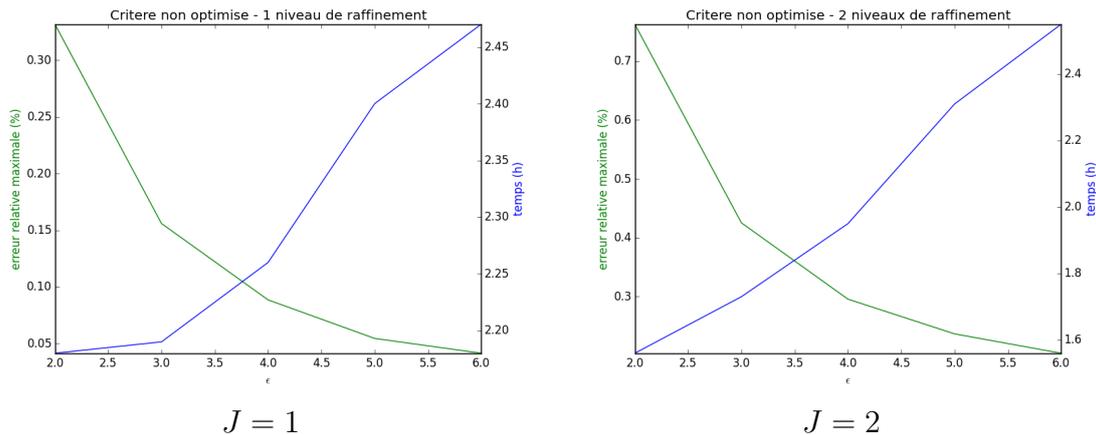


Figure 71: Cas (1) : évolution de l'erreur locale maximale et du coût numérique de la simulation en fonction de la longueur  $d_{crit}$  (multiple de  $\epsilon$ ).

Pour améliorer le rapport entre la durée de la simulation et la précision locale, la distance  $d_{crit}$  doit être égale à  $4 \times \epsilon$  lorsque  $J \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ . Néanmoins si une erreur locale faible est souhaitée,  $d_{crit}$  doit être élevée, au détriment du coût de calcul.

**Cas (2)** L'étude du Cas (2), où  $d_{raff} = 2 \times d_{crit}$ , porte également sur l'influence de la distance  $d_{crit}$  sur la précision locale et la durée des simulations. Les faciès de rupture obtenus avec un raffinement adaptatif basé sur le Cas (2), où  $d_{raff} = 2 \times d_{crit}$ , sont également tous identiques à ceux obtenus avec des maillages de référence (voir Figures 72 et 73).

La Figure 74 met en exergue l'évolution des erreurs locales  $e_E^{max}$  et de la durée d'une simulation en fonction de la taille de la distance d'alerte  $d_{crit}$ . Les constats sont semblables à ceux du Cas (1) : lorsque la longueur  $d_{crit}$  croît, le temps de la simulation augmente et l'erreur relative locale maximale diminue.

Pour un rapport optimal entre l'erreur locale maximale et le temps de simulation, il faut que  $d_{crit} = 4\epsilon$  et  $d_{raff} = 8\epsilon$  pour  $J \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ .

Le critère (RaffEigen), avec  $d_{raff} = d_{crit}$  et  $d_{raff} = 2 \times d_{crit}$ , permet donc de réduire le temps d'une simulation sans modifier le faciès de rupture et sans introduire d'erreur locale importante.

Ces deux critères sont comparés dans le paragraphe suivant.

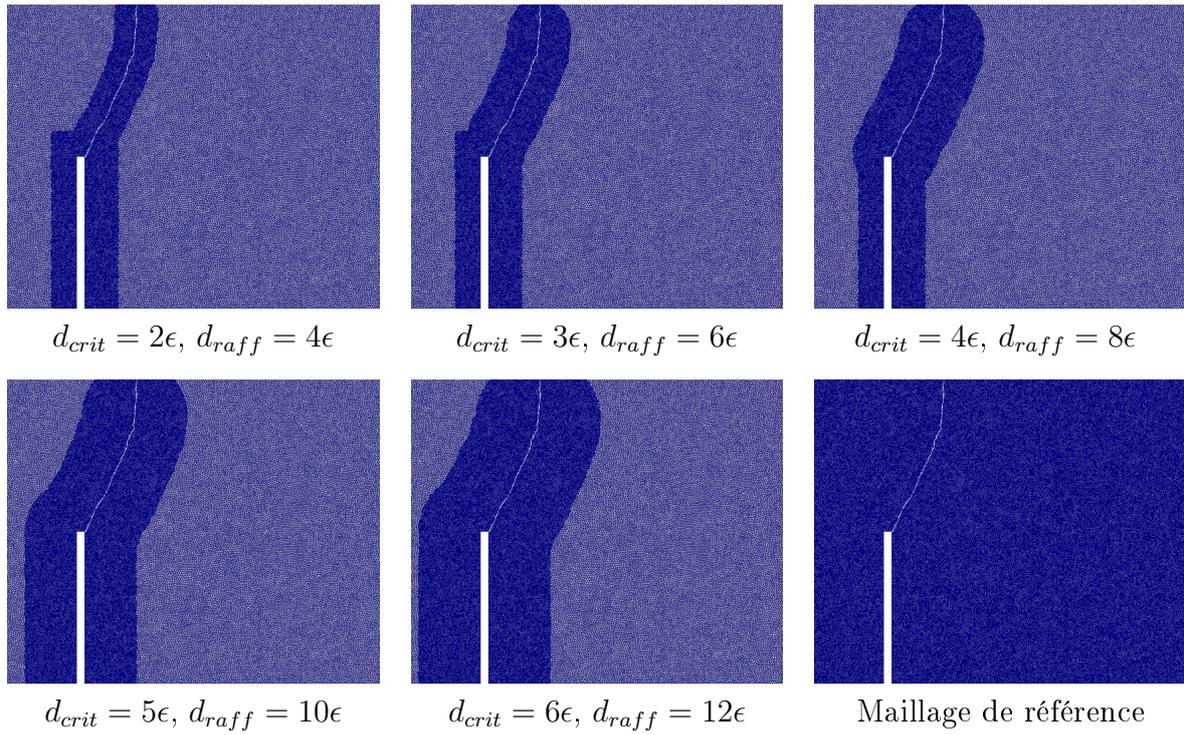


Figure 72: Cas (1) : Trajets de fissure obtenus avec  $J = 2$  en fonction de la distance  $d_{raff} = 2d_{crit}$ .

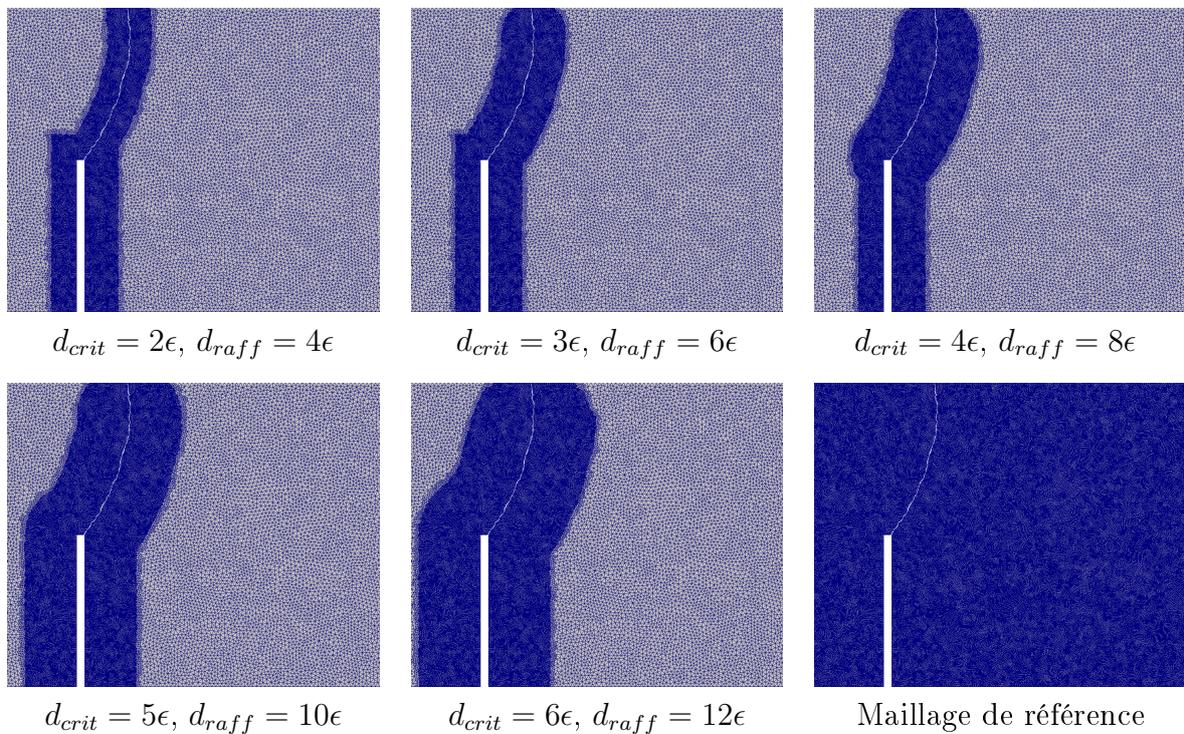


Figure 73: Cas (1) : Trajets de fissure obtenus avec  $J = 2$  en fonction de la distance  $d_{raff} = 2d_{crit}$ .

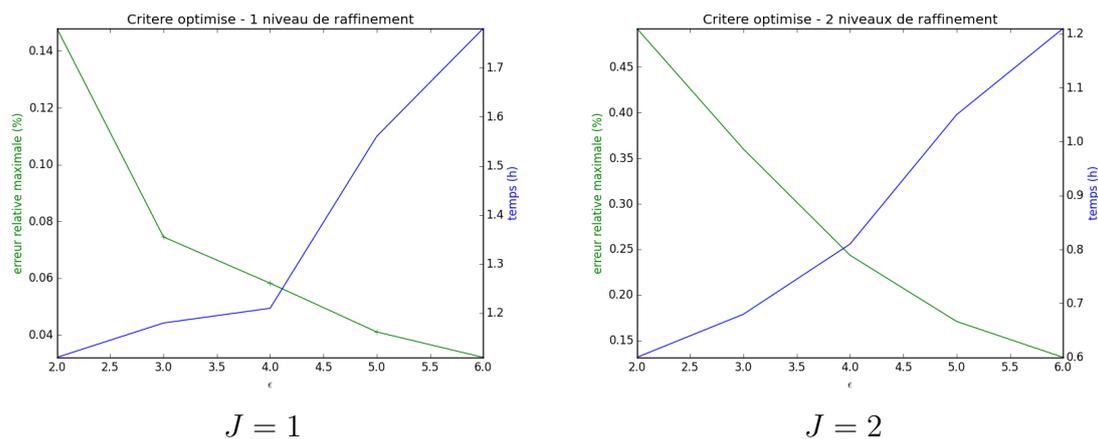


Figure 74: Cas (2) : évolution de l'erreur locale maximale et du coût numérique de la simulation en fonction de la longueur  $d_{crit}$  (multiple de  $\epsilon$ ).

**Comparaison des cas (1) et (2)** La comparaison des Figures 71 et 74 met en évidence que le Cas (2) permet d'avantage de réduire le temps des simulations tout en générant une erreur maximale plus faible que celle du Cas (1). En effet, pour  $J = 1$ , une simulation basée sur le Cas (2) est 30% plus rapide qu'avec le Cas (1) et pour  $J = 2$ , elle est 100% plus rapide.

Le nombre de degrés de liberté généré par le Cas (2) est plus important que celui du Cas (1) mais le nombre d'étapes de raffinement réalisées avec le Cas (2) est largement inférieur à celui du Cas (1) (voir Figure 75). Contrairement au raffinement basé sur le Cas (2) où le raffinement s'effectue ponctuellement, les étapes de raffinement basé sur le Cas (1) sont réalisées à chaque suppression de maille. **La distance  $d_{raff}$  permet donc de jouer sur la fréquence de raffinement. La comparaison des temps de simulation montre que les étapes de raffinement sont relativement coûteuses et qu'il est préférable de surestimer la zone d'intérêt pour réduire le nombre de raffinement.** Le fait de surestimer la zone d'intérêt permet également de diminuer l'erreur locale.

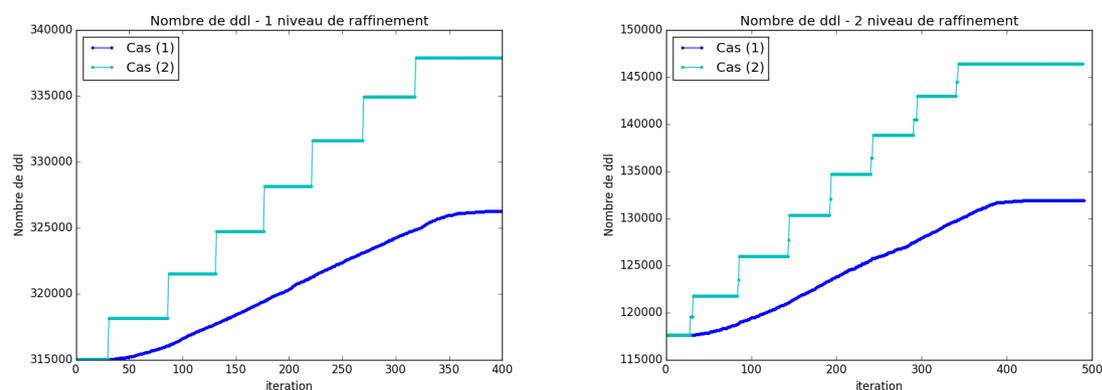


Figure 75: Comparaison du nombre de degrés de liberté (ddl) généré par les raffinements basés sur les critères (1) et (2) en fonction des itérations. A gauche  $J = 1$  avec  $d_{crit} = 4\epsilon$  et  $d_{raff} = 4\epsilon$  et à droite  $J = 2$  avec  $d_{crit} = 4\epsilon$  et  $d_{raff} = 8\epsilon$ .

### 3.4 Bilan du chapitre

La méthode d'« Eigen-Erosion » a été présentée dans ce chapitre. Cette méthode est de type « killing element » et repose sur une formulation variationnelle de la mécanique de la rupture. Elle est basée sur le calcul d'un taux de restitution d'énergie à partir d'incrément d'avancée de fissure et d'incrément d'énergie. Cette méthode permet une certaine indépendance au maillage et son coût numérique est relativement faible (de l'ordre d'une résolution Eléments Finis). Cependant, un critère d'initiation de fissure est nécessaire en l'absence de pré-fissure. Il n'est actuellement pas possible de traiter la bifurcation de fissures avec cette méthode.

La méthode d'érosion a été ensuite appliquée à la méthode de raffinement CHARMS. Ce couplage repose sur le fait que les mailles pouvant être érodées ont un niveau de raffinement maximal.

Le raffinement a été, dans un premier temps, réalisé dans une zone d'intérêt arbitraire. Pour cela, les pré-fissures et les zones où les fissures sont susceptibles de se propager sont raffinées  $J$  fois, où  $J$  correspond au niveau de raffinement maximal. La méthode d'« Eigen-Erosion » est ensuite appliquée sur le maillage raffiné. Ce couplage a été validé au travers d'un cas test. Le gain de temps grâce au raffinement *a priori* est important sans perturber le trajet des fissures et l'erreur introduite est relativement faible (erreur relative maximale locale de l'ordre de 0.01%).

Le raffinement adaptatif a été ensuite appliqué à la méthode d'« Eigen-Erosion ». La grandeur d'intérêt du critère (2.6) du chapitre précédent est le taux de restitution d'énergie local à une maille. Ce critère repose également sur une distance d'alerte et une distance de raffinement. Ces distances sont définies entre la maille présentant le taux de restitution d'énergie maximal et les zones non raffinées. Dans le cas d'une distance de raffinement supérieure à la distance d'alerte, le raffinement adaptatif surestime la zone d'intérêt mais permet de diminuer le nombre d'étapes de raffinement.

Le raffinement adaptatif a été validé au travers d'un cas test et il a été mis en évidence que **le raffinement adaptatif permet un gain de temps supérieur au raffinement *a priori* sans influencer le trajet de fissuration et avec une faible erreur (inférieure à 1%)**.

Enfin, une étude paramétrique du critère a été réalisée pour déterminer l'influence des distances introduites sur la précision et les temps de simulation. Il a été mis en évidence que plus la distance entre la pointe de fissure et la zone non raffinée est grande, plus les résultats sont précis par rapport aux maillages de référence mais plus le coût numérique est élevé.

Dans le prochain chapitre, la méthode CHARMS est appliquée à l'approche micromécanique basée sur les CZM. D'ores et déjà, les résultats obtenus indiquent que la méthode CHARMS opère avec les matériaux hétérogènes d'une part et avec les problèmes de fissuration d'autre part : elle est un bon candidat pour une méthode de raffinement adaptatif pour la fissuration des milieux hétérogènes.

# Chapitre 4

## Méthode CHARMS et Modèles de Zones Cohésives Frottantes

*Ce chapitre a pour but de présenter la méthode CHARMS couplée aux Modèles de Zones Cohésives. Le principe de l'approche micromécanique est d'abord présenté en introduisant la loi cohésive utilisée dans cette étude.*

*La stratégie de raffinement appliquée à l'approche multicorps est ensuite détaillée. Le raffinement a priori est d'abord investigué puis le principe du raffinement adaptatif couplé aux CZM est présenté en précisant les modifications implémentées. Les résultats et les difficultés du raffinement adaptatif sont enfin détaillés.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modèle de Zones Cohésives Frottantes . . . . .</b>	<b>101</b>
4.1.1	Principe . . . . .	101
4.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	103
4.1.3	Loi cohésive retenue . . . . .	105
4.1.4	Traitement numérique : méthode NSCD . . . . .	108
<b>4.2</b>	<b>Stratégie de raffinement dans le cadre de l'approche multicorps</b>	<b>110</b>
<b>4.3</b>	<b>Couplage du raffinement <i>a priori</i> et le modèle CZM . . . . .</b>	<b>113</b>
4.3.1	Principe du raffinement dans une zone d'intérêt . . . . .	113
4.3.2	Validation du raffinement <i>a priori</i> . . . . .	114
<b>4.4</b>	<b>Couplage du raffinement adaptatif et le modèle CZM . . . . .</b>	<b>118</b>
4.4.1	Algorithme . . . . .	118
4.4.2	Résultats et difficultés du raffinement adaptatif . . . . .	119
<b>4.5</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>121</b>

---



## 4.1 Modèle de Zones Cohésives Frottantes

Le concept de Modèles de Zones Cohésives (CZM) a été introduit par Dugdale [39] et Barenblatt [40] dans les années 1960. Ces modèles permettent une approche locale de la rupture tout en conservant les grandeurs énergétiques clés des approches globales de la mécanique de la rupture classique.

### 4.1.1 Principe

L'initiation et la propagation des fissures sont régies par une loi de comportement liant la traction sur les lèvres de fissure  $R^{coh}$  (vecteur contrainte cohésif) au saut de déplacement  $[u]$  (discontinuité de déplacement des lèvres de la fissure).

Deux types de CZM peuvent être distingués : extrinsèque, avec une raideur initiale infinie ; et intrinsèque, avec une raideur initiale finie (voir Figure 76). Numériquement, les lois extrinsèques sont plus stables que les lois intrinsèques [41].

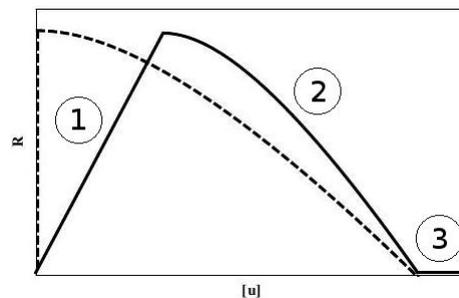


Figure 76: Deux types de CZM : extrinsèque (pointillé) et intrinsèque (trait plein).

Les Modèles de Zones Cohésives intrinsèques évoluent selon trois phases pour le vecteur contrainte cohésif (voir Figure 76) : augmentation jusqu'à une valeur critique (1), endommagement avec diminution de la valeur (2), et rupture de l'interface considérée (3). Ces modèles introduisent une perte de raideur qui doit faire l'objet d'une attention particulière [42].

Les zones cohésives peuvent être introduites soit dans des zones du maillage si le chemin de fissuration est connu *a priori*, soit à l'interface de chaque Élément Finis.

Il existe différentes formes de lois cohésives : polynômiales, trapézoïdales, bilinéaires, échelons, etc. [7].

Les CZM sont traités ici à l'aide d'une méthode Eléments Finis cohésifs-volumiques reposant sur une décomposition multicorps (voir Figure 77). Cette technique consiste à décomposer le comportement local du matériau en une partie surfacique adoucissante prenant en compte l'endommagement et une partie volumique durcissante traitant le comportement volumique du matériau sans endommagement.

Les avantages des zones cohésives sont : un armoçage de fissures sans critère d'initiation et la prise en compte des bifurcations de fissures et des mécanismes post-ruptures de type Signorini-Coulomb. Les modèles prenant en compte du frottement post-rupture sur les lèvres de la fissure sont appelés Modèles de Zones Cohésives Frottantes.

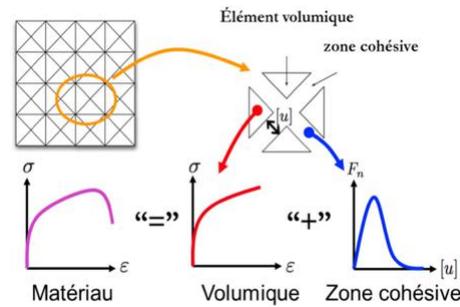


Figure 77: Méthode des Eléments Finis cohésifs-volumiques : décomposition multicorps [43]

Les CZM présentent cependant plusieurs difficultés [43] : une instabilité liée à l'adoucissement rendant le problème mal posé, la dépendance du trajet de fissure au maillage et la perte de raideur numérique dans le cas intrinsèque.

**Saut de solution dû à l'adoucissement** La discontinuité de solution est une difficulté majeure dans l'utilisation de Modèles de Zones Cohésives pour le calcul de structure. Le comportement adoucissant rend le problème mal posé et des sauts de solution peuvent apparaître avec une perte de l'unicité de la solution. Dans [43] et [44], un théorème d'unicité est démontré pour le cas de solides élastiques cohésifs soumis à une évolution quasi-statique.

Pour traiter le problème de saut de solution induit par l'introduction d'adoucissement, les deux méthodes suivantes peuvent être utilisées et ont une justification physique :

- réaliser une modélisation dynamique pour transformer l'énergie élastique stockée dans la structure en énergie cinétique,
- utiliser une technique de régularisation visqueuse permettant de retarder la restitution de l'énergie.

Dans ce travail de thèse, la première solution est retenue.

**Dépendance du chemin de fissuration au maillage** Tijssens et al. [45] ont montré que le trajet de fissuration dépendait de la morphologie du maillage Eléments Finis (voir Figure 78). En effet, étant donné que les surfaces adoucissantes sont situées à l'interface des mailles Eléments Finis, les chemins de fissuration potentiels sont les faces des éléments (les arêtes en 2D). Pour les applications souhaitées, la discrétisation doit être isotrope par rapport aux orientations et aux distributions des interfaces, et donc aux chemins de fissuration. Cette isotropie permet de ne privilégier aucun chemin de fissuration *a priori*.

**Perte de rigidité de la structure** Bien que l'insertion de zones cohésives dans l'ensemble des interfaces d'une discrétisation Eléments Finis permette une étude de la propagation des fissures sans connaître *a priori* le chemin de fissuration, les zones cohésives intrinsèques introduisent une souplesse supplémentaire artificielle qui est d'autant plus importante que

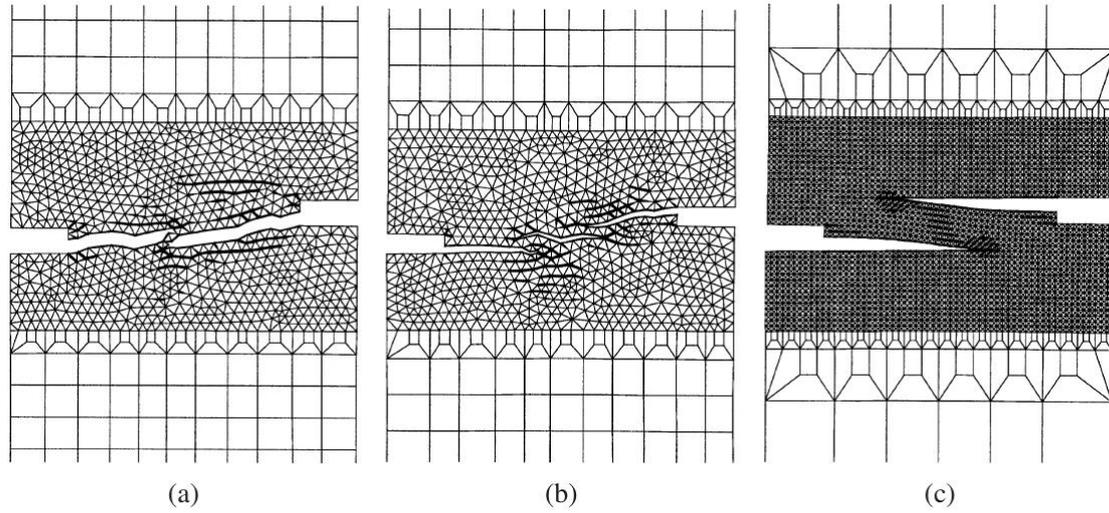


Figure 78: Mise en évidence de la dépendance du chemin de fissuration à la morphologie du maillage [45].

le maillage est fin. Une solution a été apportée par Blal [46] en calibrant la raideur initiale afin de maîtriser la perte de rigidité.

#### 4.1.2 Formulation variationnelle

En conservant la notation et les hypothèses de la section 1.1 et en introduisant  $L$  la discontinuité due à une fissure, avec  $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_u \cup L$  et  $\Gamma_u \cap L = \emptyset$  et  $\Gamma_F \cap L = \emptyset$ , le problème élastique s'écrit :

trouver le champ des déplacements  $u$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \sigma + f = \rho \ddot{u} & \text{dans } \Omega \text{ (Equation de la dynamique)} \\ \sigma = C : \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \text{ (Loi de comportement)} \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla(u) + \nabla(u)^T) = \nabla_s(u) & \text{dans } \Omega \text{ (Petites perturbations)} \\ \sigma \cdot n = F & \text{sur } \Gamma_F \text{ (Condition de Neumann)} \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_u \text{ (Condition de Dirichlet)} \\ \sigma \cdot n = R^{coh} & \text{sur } L \text{ (Relation cohésive)} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $R^{coh}$  représente le vecteur contrainte sur les lèvres de la fissure. Le système à résoudre (4.1) s'écrit sous la forme matricielle [7] :

trouver  $U \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$M\ddot{U} + KU = F + R \quad (4.2)$$

où  $R$  est défini par :

$$R_j = \sum_{e=0}^{N_{mesh}-1} \int_{L^e} R^{coh} \varphi_j dS \quad j \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (4.3)$$

et correspond à la prise en compte des discontinuités mécaniques. Ce terme nécessite

un traitement particulier dû au problème d'adoucissement surfacique et également de non-régularité dans le cas du contact frottant post-rupture. La résolution numérique est détaillée dans la suite de la section.

En intégrant temporellement le problème (4.1) sur un intervalle  $]t_n, t_{n+1}]$  de longueur  $\Delta t$  par la  $\theta$ -méthode, le problème peut s'écrire (voir [5] pour l'ensemble des développements) :

trouver  $\dot{U}(n+1) \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$\dot{U}(n+1) = V_{free} + \tilde{M}^{-1}I(n+1) \quad (4.4)$$

où  $\tilde{M} = M + \Delta t^2 \theta^2 K$  est supposée inversible,  $I(n+1)$  représente une impulsion avec  $R(n+1) = \frac{I(n+1)}{\Delta t}$  est la réaction moyenne (résultant d'une interaction cohésive, des frottements de Coulomb et des conditions de Signorini dans le cadre de cette thèse) et  $V_{free} = \dot{U}(n) + \tilde{M}^{-1}(\Delta t F(n+1) - \Delta t K(U(n) + \Delta t \theta \dot{U}(n)))$  est la vitesse libre correspondant à la vitesse sans prise en compte des efforts d'interaction.

La vitesse  $\dot{U}(n+1)$  est déterminée à partir de la vitesse libre et de la vitesse résultante aux contacts. Le déplacement  $U(n+1)$  est obtenu avec :

$$U(n+1) = U(n) + \Delta t \theta \dot{U}(n+1) + \Delta t(1-\theta)\dot{U}(n) \quad (4.5)$$

Les modèles cohésifs-frottants permettent de prendre en compte des phénomènes post-rupture :

- le contact unilatéral lorsqu'une fissure est fermée et en compression

$$g \geq 0, \quad R_N \geq 0, \quad gR_N = 0 \quad (4.6)$$

où  $g$  représente la distance entre deux corps et  $R_N$  correspond à la réaction normale entre deux corps,

- le frottement de Coulomb lorsqu'une fissure est fermée et en cisaillement

$$\|\dot{U}_T\| = 0 \Rightarrow \|R_T\| \leq \mu R_N \quad (4.7)$$

$$\|\dot{U}_T\| \neq 0 \Rightarrow R_T = -\mu R_N \frac{\dot{U}_T}{\|\dot{U}_T\|} \quad (4.8)$$

où  $U_T$  correspond au vecteur de déplacement tangentiel et  $R_T$  au vecteur de contrainte tangent.

Ainsi, le couplage de cette physique post-rupture aux modèles cohésifs peut être résumé par [5] :

$$0 \leq (R_N + R_N^{coh}) \perp [u_N] \geq 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \|R_T + R_T^{coh}\| < \mu|R_N + R_N^{coh}| \Rightarrow [\dot{u}_T] = 0 \\ \|R_T + R_T^{coh}\| = \mu|R_N + R_N^{coh}| \Rightarrow \exists \lambda > 0 \mid [\dot{u}_T] = -\lambda(R_T + R_T^{coh}) \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $N$  et  $T$  indiquent les composantes normale et tangentielle ( $R = R_N n + R_T$ ,  $[u] = [u_n]n + [u_T]$  et  $R^{coh} = R_N^{coh}n + R_T^{coh}$ , où  $n$  correspond au vecteur normal à la zone cohésive).

### 4.1.3 Loi cohésive retenue

La réaction cohésive  $R^{coh}$  est une fonction du saut de déplacement  $[u]$  et d'une variable d'endommagement  $\beta$  :

$$R^{coh} = Q(\beta)[u] \quad (4.11)$$

avec

$$Q(\beta) = \beta \left( C_N n \otimes n + C_T \frac{u_T \otimes u_T}{\|u_T\|^2} \right) \quad (4.12)$$

où  $C_N$  et  $C_T$  sont les raideurs normale et tangente de la liaison interfaciale (en  $Pa/m$ ).

La variable  $\beta$  décrit l'endommagement surfacique : pour  $\beta = 1$ , la surface cohésive est parfaite, pour  $0 < \beta < 1$ , la zone cohésive est partiellement endommagée et pour  $\beta = 0$ , la surface cohésive est totalement rompue.

La loi cohésive retenue dans ce travail, appelée loi MAL, est une extension de la loi présentée dans [47] qui permet de prendre en compte les modes mixtes. Cette loi est présentée, dans la suite, dans le cas bidimensionnel. La variable d'endommagement, dans la loi MAL, est définie par :

$$\beta = \min(g(\|[u]\|), g(\|[u_{max}]\|)) \quad (4.13)$$

où  $\|[u_{max}]\|$  correspond à la valeur maximale atteinte par  $\|[u]\|$  et  $g$  est une fonction décroissante de  $\|[u]\|$  vérifiant :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \delta_c, \\ \frac{\delta_c}{x} \left( 1 - \left( \frac{x - \delta_c}{\delta_r - \delta_c} \right)^2 \right) & \text{si } \delta_c < x < \delta_r, \\ 0 & \text{si } x \geq \delta_r, \end{cases} \quad (4.14)$$

Le critère d'initiation d'endommagement, marquant la fin de la partie élastique, est exprimé en contrainte et est quadratique tel que :

$$\left( \frac{\sigma_N}{\sigma_1^{max}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_2^{max}} \right)^2 = 1 \quad (4.15)$$

où  $\sigma_1^{max}$  et  $\sigma_2^{max}$  correspondent respectivement à la contrainte maximale dans les modes purs I et II, et  $\sigma_N$  et  $\sigma_T$  sont respectivement les composantes normale et tangente de la

contrainte limite élastique à la zone cohésive.

Le critère d'endommagement (4.15) peut être reformulé en terme de déplacements :

$$\left(\frac{[u_N]_c}{\delta_{c,1}}\right)^2 + \left(\frac{[u_T]_c}{\delta_{c,2}}\right)^2 = 1 \quad (4.16)$$

où  $\delta_{c,1}$  et  $\delta_{c,2}$  sont les déplacements limites élastiques dans les modes purs I et II, et  $[u_N]_c$  et  $[u_T]_c$  sont les composantes des déplacements limites élastiques en mode mixte.

Le déplacement relatif  $\delta$  de deux points en vis-à-vis de l'interface peut être défini en fonction des composantes normale et tangente :

$$\delta = \sqrt{[u_N]^2 + [u_T]^2} \quad (4.17)$$

En introduisant le ratio *mod* tel que :

$$mod = \begin{cases} \frac{[u_T]}{[u_N]} & \text{si } [u_N] > 0 \text{ (mode I ou mode mixte),} \\ \infty & \text{sinon (mode II)} \end{cases} \quad (4.18)$$

et le rapport entre les contraintes maximales en modes purs I et II ( $\sigma_1^{max}$  et  $\sigma_2^{max}$  en *Pa*) noté  $S_{12}^{max}$ , le déplacement limite élastique  $\delta_c$  peut s'écrire :

$$\delta_c = \begin{cases} \frac{(\sigma_1^{max})^2}{C_N C_T S_{12}^{max}} \left( \frac{1 + mod^2}{\left(\frac{\sigma_1^{max}}{C_T S_{12}^{max}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1^{max} mod}{C_N}\right)^2} \right)^{1/2} & \text{en mode I ou mixte,} \\ \frac{\sigma_2^{max}}{C_T} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.19)$$

Le critère de développement de l'endommagement (critère de propagation de fissure) est lui écrit en énergie de cohésion et est linéaire :

$$\left(\frac{w_N^r}{w_1^{max}}\right) + \left(\frac{w_T^r}{w_2^{max}}\right) = 1 \quad (4.20)$$

où  $w_N^r$  et  $w_T^r$  correspondent aux énergies de rupture normale et tangentielle et,  $w_1^{max}$  et  $w_2^{max}$  sont les énergies de rupture en modes purs I et II.

En notant  $E_{12}^{max}$  le ratio des énergies de rupture en mode I et II ( $w_1^{max}$  et  $w_2^{max}$  en

$J/m^2$ ), le déplacement relatif à rupture  $\delta_r$  s'écrit :

$$\delta_r = \begin{cases} \frac{3}{2} \left( \frac{(w_1^{max})^2 - \frac{\delta_c^2 D}{2}}{\delta_c D} \right) + \delta_c & \text{en mode 1 ou mode mixte,} \\ \frac{3}{2} \left( \frac{w_2^{max} - \frac{\delta_c^2 C_T}{2}}{\delta_c C_T} \right) + \delta_c & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.21)$$

avec

$$D = \frac{w_1^{max} C_N}{E_{12}^{max}(1 + mod^2)} + \frac{w_1^{max} C_T mod^2}{1 + mod^2} \quad (4.22)$$

L'évolution du comportement de l'interface peut être décrite par les phases suivantes (voir Figure 79) :

- pour  $u_N = 0$  et  $\beta = 1$ , les conditions de Signorini s'appliquent (1),
- pour  $0 < ||[u]|| < \delta_c$ , la variable d'endommagement  $\beta$  reste égale à 1 (l'interface n'est pas endommagée) et le comportement est linéaire (2),
- pour  $\delta_c \leq ||[u]|| \leq \delta_r$ , l'interface s'endommage et la variable  $\beta$  suit la loi (4.14). En cas de décharge,  $\beta$  reste alors constante (3),
- pour  $||[u]|| > \delta_r$ , l'interface est totalement rompue. Si  $u_N = 0$ , les conditions de Signorini-Coulomb sont appliquées et si  $u_N > 0$  les bords des lèvres de la fissure sont libres (4).

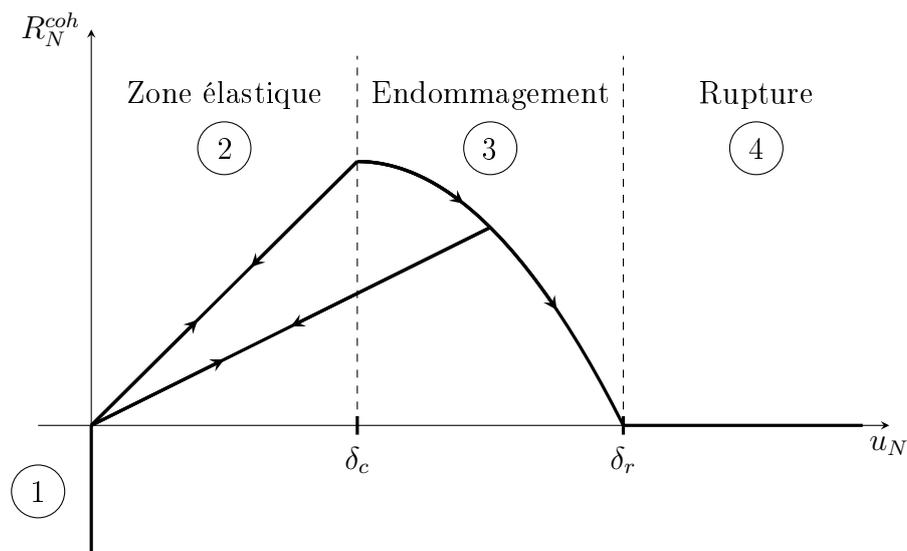


Figure 79: Contrainte cohésive surfacique en fonction du saut de déplacement normal de la loi cohésive MAL.

#### 4.1.4 Traitement numérique : méthode NSCD

L'approche Non Smooth Contact Dynamics (NSCD) a été initialement développée par Jean [48] et Moreau [49] et propose un formalisme adapté aux problèmes de contacts frottants en dynamique. Cette méthode permet de résoudre les conditions de contact unilatéral et de frottement de Coulomb sans régularisation ni pénalisation. Des modifications mineures [5] ont permis de prendre en compte les Modèles de Zones Cohésives dans la méthode de la dynamique non régulière du contact.

Comme énoncé précédemment, les CZM sont traités à l'aide d'une méthode Eléments Finis cohésifs-volumiques reposant sur une décomposition multicorps. Ainsi, chaque maille d'un maillage représente un corps ayant ses propres nœuds et chaque fonction de base a son support limité à une maille. Le nombre de nœuds et de fonctions de base est donc supérieur à celui obtenu par la méthode des Eléments Finis classique (voir Figure 80).

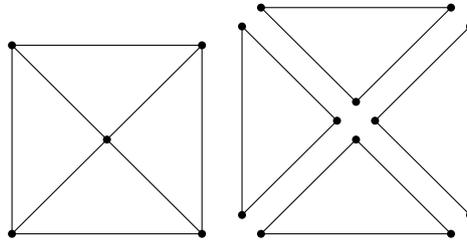


Figure 80: Maillage Eléments Finis classique (à gauche) et maillage Eléments Finis cohésifs-volumiques (à droite).

La résolution est basée sur une forme discrétisée en espace et en temps de l'équation de la dynamique et nécessite l'introduction de points de contact entre les différents corps. Elle est effectuée à deux échelles (voir Figure 81) : locale où l'équation de la dynamique est résolue aux contacts et globale où l'équation de la dynamique (4.4) est résolue aux nœuds Eléments Finis.

**Relation entre les variables locales et globales** En notant  $\dot{u}$  la vitesse relative au contact  $\alpha$ , la vitesse locale (au contact) est reliée à la vitesse globale  $U$  (au nœud du maillage) par :

$$\dot{u} = H^{*\alpha}(U)\dot{U} \quad (4.23)$$

où  $H^*$  est une application linéaire dépendant du déplacement.

De même, en notant  $r$  la résultante des réactions relatives locales au contact  $\alpha$ ,  $r$  est lié aux réactions globales  $R$  par :

$$R = H^\alpha(U)r \quad (4.24)$$

où  $H$  est une application linéaire duale de  $H^*$  ( $H^T = H^*$ ).

Les relations entre les échelles sont résumées sur la Figure 81.

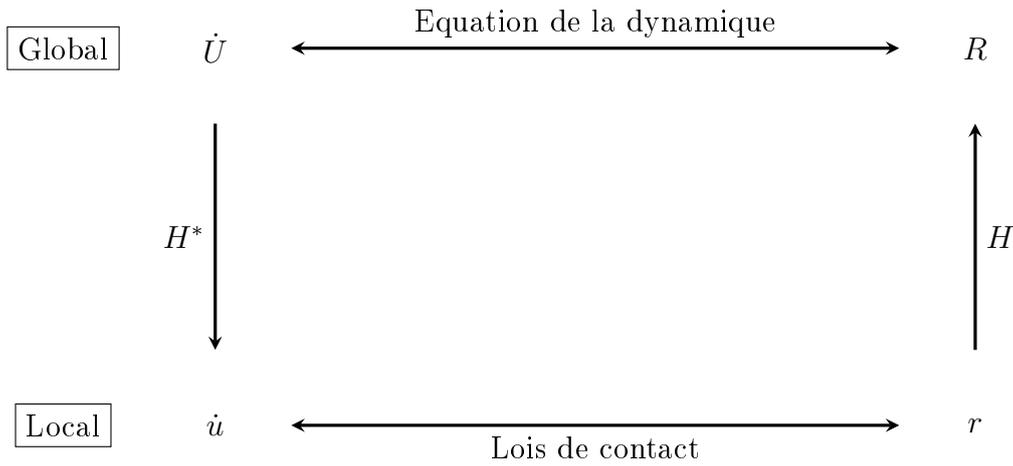


Figure 81: Schématisation de la résolution NSCD.

**Résolution locale** L'équation (4.4) est condensée aux contacts afin de faire intervenir les grandeurs locales : la vitesse relative discrète  $\dot{u}(n+1)$  et l'impulsion locale discrète  $i(n+1)$ . Pour un contact  $\alpha$ , la condensation de l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\dot{u}^\alpha(n+1) = v_{free}^\alpha + \sum_{\gamma=1}^{\chi} m^{\alpha\gamma} i^\gamma(n+1) \quad (4.25)$$

où  $v_{free}^\alpha = H^{*\alpha} V_{free}$  correspond à la vitesse libre au contact  $\alpha$ ,  $m^{\alpha\gamma} = H^{*\alpha} \tilde{M}^{-1} H^\gamma$  est la matrice de Delassus et  $\chi$  est le nombre total de contacts.

La résolution de ce problème est réalisée par une méthode de Gauss-Seidel par blocs. Cette méthode consiste à déterminer la solution au contact  $\alpha$  en supposant la solution aux autres contacts connue. En supposant que  $\alpha$  est le contact où la solution est inconnue et que les solutions aux autres contacts  $\gamma \neq \alpha$  sont connues, l'équation (4.25) devient :

$$u^\alpha(n+1) = v_{freeloc}^\alpha + m^{\alpha\alpha} i^\alpha(n+1) \quad (4.26)$$

où  $v_{freeloc}^\alpha = v_{free}^\alpha + \sum_{\gamma=1, \gamma \neq \alpha}^{\chi} m^{\alpha\gamma} i^\gamma(n+1)$ . La réaction locale au contact  $\alpha$  est donc exprimée comme une fonction linéaire de la vitesse locale relative.

En appliquant le changement de variable  $\tilde{r} = r + r^{coh}$  afin de prendre en compte la force de résistance due aux zones cohésives [5], l'équation (4.26) se réécrit :

$$u^\alpha(n+1) = \tilde{v}_{freeloc}^\alpha + m^{\alpha\alpha} \tilde{i}^\alpha(n+1) \quad (4.27)$$

où

$$\tilde{v}_{freeloc}^\alpha = v_{freeloc}^\alpha - m^{\alpha\alpha} (\tilde{i}^{coh})^\alpha(n+1) \quad (4.28)$$

Dans la pratique et pour des questions de coûts numériques, une méthode itérative est utilisée pour la résolution des contacts. Ainsi, pour chaque itération, une approximation de la vitesse locale et de l'impulsion locale est déterminée.

**Logiciels utilisés** Pour résoudre le problème, une plateforme couplant plusieurs bibliothèques est utilisée. Il s’agit du logiciel parallélisé XPER [50] basé sur la bibliothèque PELICANS<sup>1</sup> [30] dédiée à la résolution des équations aux dérivées partielles et la bibliothèque LMGC90<sup>2</sup> [51] pour le traitement des comportements surfaciques.

Au cours de chaque itération, les étapes de calcul sont :

1. calcul de la vitesse  $V_{free}$  : résolution du problème (équation (4.4)) sans contact avec PELICANS,
2. calcul des implusions (équation (4.24)) : détermination des vitesses locales libres (équation (4.23)) puis résolution du problème de contact (équation (4.27)) avec LMGC90. A partir de ces impulsions, le champ des forces de réaction de contact est déterminé,
3. calcul de la vitesse finale  $\dot{U}$  : résolution de l’équation (4.4) avec PELICANS.

Le logiciel XPER gère le couplage entre les bibliothèques LMGC90 et PELICANS.

## 4.2 Stratégie de raffinement dans le cadre de l’approche multicorps

Les CZM sont traités à l’aide d’une méthode Eléments Finis cohésifs-volumiques reposant sur une décomposition multicorps. Les zones cohésives sont insérées soit à l’interface de chaque maille (zones cohésives diffuses où chaque maille représente un corps) ou à l’interface de sous-domaines maillés (Figure 82). Ainsi, les nœuds de chaque interface cohésive doivent être dupliqués. Les fonctions de base des nœuds dupliqués ont un support restreint à la maille à laquelle elles appartiennent. Dans le cas de zones cohésives diffuses (Figure 82(b)), le nombre de nœuds et donc d’inconnues est élevé entraînant un coût numérique important.

Afin de réduire le temps de calcul d’une simulation, un raffinement avec duplication des nœuds raffinés a été développé : un nœud est dupliqué si les mailles auxquelles il appartient ont l’ensemble de leurs fonctions de base raffinées  $J$  fois, où  $J$  représente le niveau de raffinement maximal. Cette stratégie permet de localiser les zones cohésives dans les zones d’intérêt qui sont ici les zones raffinées. Cette étape de duplication est effectuée en même temps que l’étape de raffinement : lorsqu’une maille a ses fonctions de base à raffiner pour atteindre le niveau  $J$ , les nœuds sont dupliqués. La Figure 83 montre un maillage obtenu après le raffinement de la zone d’intérêt (en rouge) et la duplication des nœuds.

Cette stratégie permet de n’introduire des zones cohésives que dans les zones raffinées et donc de réduire le coût numérique. Dans la Figure 83, le domaine est constitué de six corps : deux corps constitués de cinq mailles chacun et quatre corps constitués d’une maille.

<sup>1</sup>url : <https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans/>

<sup>2</sup>url : [https://git-xen.lmgc.univ-montp2.fr/lmgc90/lmgc90\\_user.git](https://git-xen.lmgc.univ-montp2.fr/lmgc90/lmgc90_user.git)

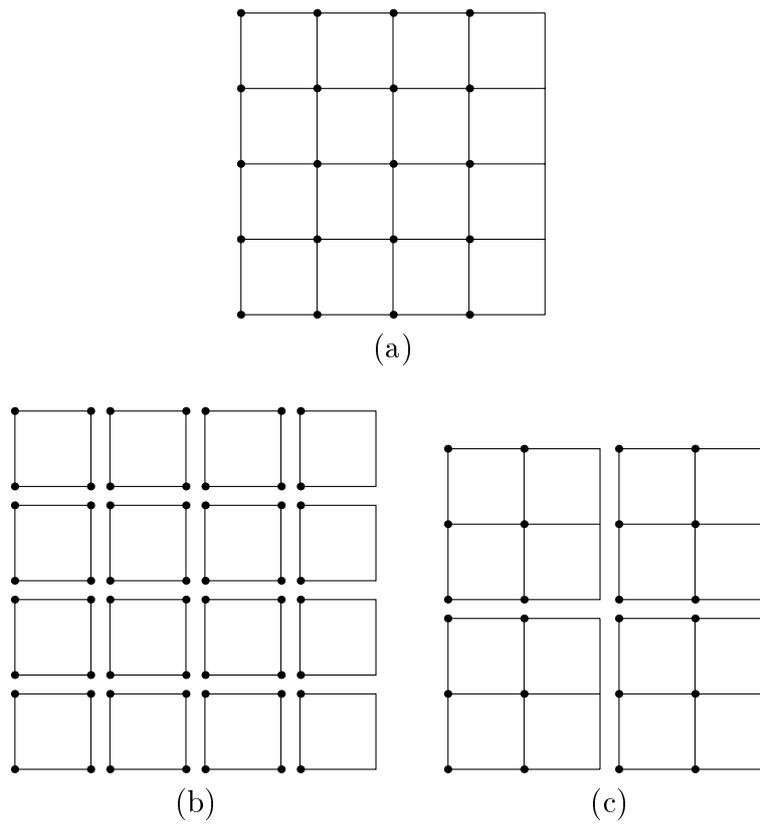


Figure 82: Maillages obtenus après duplication des nœuds des corps : (a) maillage initial, (b) maillage obtenu dans la configuration où chaque maille représente un corps, (c) maillage obtenu en divisant le maillage initial en quatre corps.

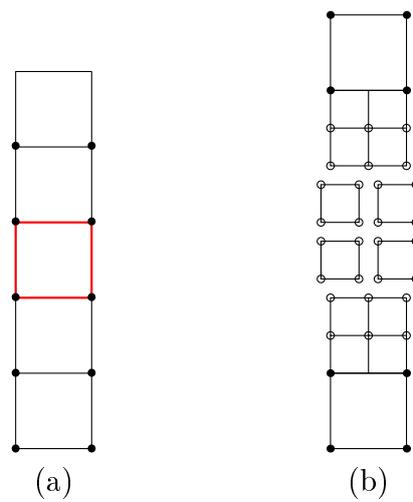


Figure 83: Exemple d'un raffinement avec duplication de nœuds: (a) maillage initial avec la zone à raffiner en rouge, (b) maillage raffiné avec les nœuds dupliqués.

Une attention particulière doit être apportée pour les simulations réalisées en parallèle. La décomposition du domaine en plusieurs sous domaines nécessite un recouvrement d'une maille appelée « halo » afin de communiquer les données entre les processeurs. Cependant, la stratégie parallèle développée nécessite que les corps appartiennent intégralement à l'ensemble des processeurs possédant au moins une partie du corps. Si le corps est discrétisé avec un grand nombre de mailles et qu'il est possédé par plusieurs processeurs, les communications peuvent devenir coûteuses en termes de temps calcul et de place mémoire.

La Figure 84 illustre le principe d'une décomposition d'un domaine constitué de deux corps en trois sous domaines en mettant les mailles « halo » en évidence. Dans cette configuration, le corps 0 est possédé intégralement par le processeur 0 mais le corps 1 étant partagé sur deux processeurs, l'ensemble des mailles de ce corps est communiqué aux processeurs 1 et 2.

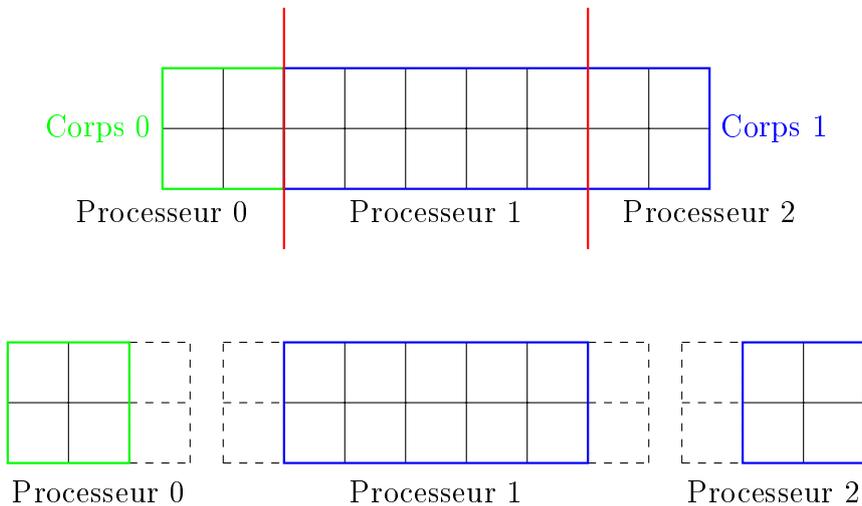


Figure 84: Exemple de décomposition d'un maillage représentant deux corps en trois sous domaines. Les mailles en pointillés représentent les mailles *halo*.

Afin d'éviter les communications dans le cas d'un corps partagé en plusieurs sous domaines, un critère *ad hoc* a été développé : les fonctions de base appartenant aux mailles « halo » sont raffinées  $J$  fois, où  $J$  représente le niveau de raffinement maximal. Ainsi, chaque maille « halo » est raffinée et correspond à un corps indépendant. Cette stratégie permet de découper un corps partagé sur plusieurs processeurs en plusieurs corps appartenant chacun à un seul processeur. Bien que le nombre de corps générés augmente, les communications sont réduites. La Figure 85 illustre les sous domaines générés en utilisant la stratégie basée sur les mailles *halo*. Le maillage est initialement constitué de deux corps et l'un des corps (corps 1) est sur deux processeurs. L'application de la stratégie génère 35 corps au total et chaque corps appartient à un seul processeur (les processeurs 0 et 2 possèdent chacun 9 corps et le processeur 1 possède 17 corps).

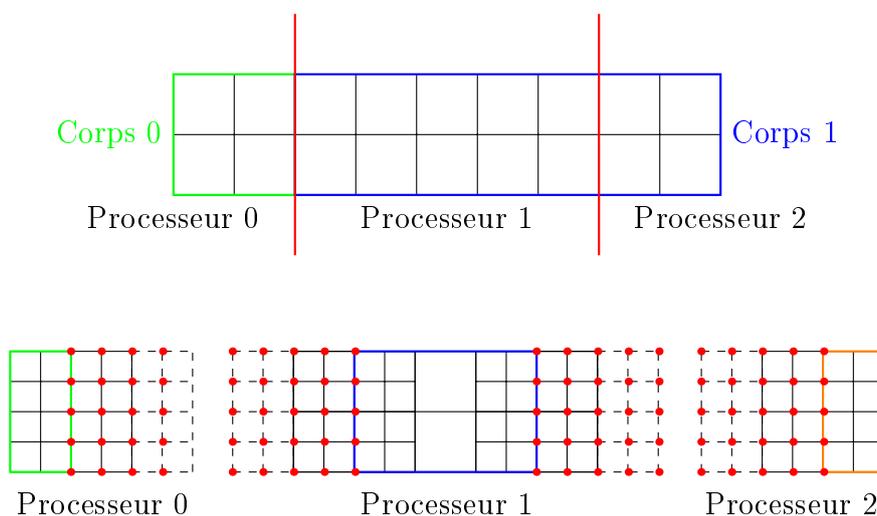


Figure 85: Application de la stratégie de raffinement et de duplication des nœuds des mailles « halo ». Le maillage initial est constitué de deux corps et est divisé en trois sous domaines. Les mailles en pointillés représentent les mailles « halo » et les points rouges correspondent aux nœuds dupliqués. Les corps vert, bleu et orange représentent chacun un corps, les autres mailles correspondent chacune à un corps indépendant.

### 4.3 Couplage du raffinement *a priori* et le modèle CZM

Dans cette section, le raffinement *a priori* est appliqué aux CZM. Après avoir détaillé le principe du couplage des deux méthodes, il est validé au travers du cas test du type II de la poutre trois points en flexion (Figure 57, chapitre 3).

#### 4.3.1 Principe du raffinement dans une zone d'intérêt

Le raffinement dans une zone d'intérêt est basé sur un indicateur géométrique. Les zones d'intérêt sont sélectionnées *a priori*. Une fois le raffinement et la duplication des nœuds réalisés dans ces zones, les zones cohésives sont introduites à l'interface des mailles raffinées. Le problème de contact est résolu dans la zone raffinée. Dans les zones non raffinées (et non conformes), la méthode CHARMS/Eléments Finis est appliquée (voir Figure 86).

La stratégie de raffinement *a priori* appliquée aux CZM peut être résumée par les étapes suivantes :

- Génération d'un maillage grossier,
- Sélection de la zone d'intérêt,
- Raffinement des fonctions de base de la zone d'intérêt et des mailles « halo » et duplication des nœuds vérifiant le critère de duplication,
- Résolution classique des contacts dans la zone raffinée.

Cette stratégie permet de n'introduire les zones cohésives que dans les zones d'intérêt raffinées et de diminuer ainsi le nombre de corps par rapport à des zones cohésives diffuses

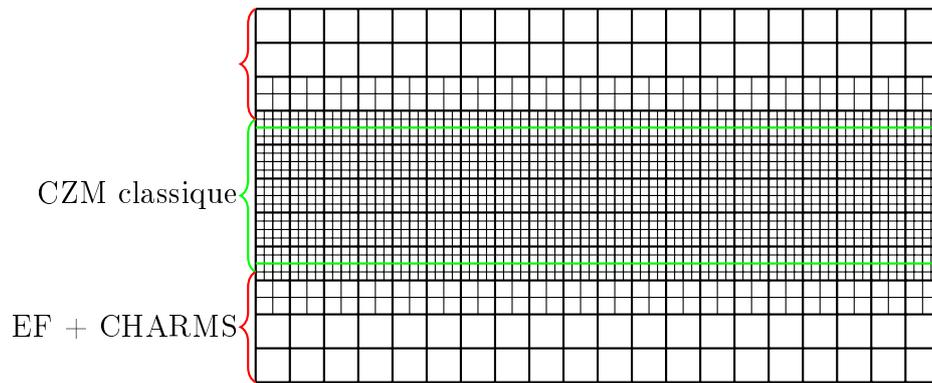


Figure 86: Exemple d'un raffinement *a priori* appliqué aux CZM. En rouge, les zones traitées avec la méthode des Eléments Finis et la méthode CHARMS (PELICANS) correspondant à un corps, et en vert la zone contenant des contacts, où chaque maille représente un corps (LMGC90).

sur un maillage homogène fin. Toutes les non-conformités géométriques sont prises en compte à l'aide de la méthode CHARMS (voir chapitre 1). Aucun contact n'est introduit au niveau des non-conformités.

### 4.3.2 Validation du raffinement *a priori*

Pour valider le raffinement *a priori* basé sur un indicateur géométrique arbitraire, le type II du cas test SEN du chapitre 3 est considéré. Le raffinement est appliqué sur un niveau de raffinement maximal  $J = 1$ , avec un maillage initial grossier constitué de mailles ayant une taille caractéristique de  $2mm$ . Les simulations sont réalisées en parallèle sur 48 processeurs et les caractéristiques mécaniques et numériques sont résumées dans le Tableau 11.

Module d'Young	$E = 38.4GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Masse volumique	$\rho = 1000kg/m^3$
Pas de temps	$10^{-7}s$
Temps final	$8 \times 10^{-4}s$
Incrément de chargement	$10^{-8}m/s$
Type de maille	Triangle
Taille des mailles grossières	$h_{grossier} = 2mm$
Taille des mailles raffinées	$h_{fin} = 1mm$
Evolution	Dynamique
Type de résolution	Semi-implicite ( $\theta = 0.5$ )

Tableau 11: Raffinement *a priori* et CZM : caractéristiques mécaniques et numériques pour la poutre SEN.

**Calibration des paramètres de la loi cohésive** La loi cohésive utilisée est la loi MAL présentée dans la section 4.1.3. Les paramètres à calibrer sont : les raideurs interfaciales

$C_N$  et  $C_T$ , l'énergie de rupture, la contrainte cohésive critique  $\sigma_1^{max}$  et l'énergie de rupture  $w_1^{max}$  en mode I ainsi que les rapports des contraintes maximales  $S_{12}^{max}$  et des énergies maximales  $E_{12}^{max}$  des modes I et II.

Les raideurs interfaciales sont déterminées selon la stratégie de [42] pour un maillage de type Delaunay :

$$C_N \geq \frac{23E}{(1-\nu)h} \quad \text{et} \quad C_T = 2 \frac{1-\nu}{1+3\nu} C_N \quad (4.29)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson,  $h$  correspond à la taille caractéristique des mailles raffinées. Ce critère assure une perte de raideur globale maximale de 5%.

La contrainte cohésive critique  $\sigma_1^{max}$  et l'énergie de rupture  $w_1^{max}$  sont celles données dans [37].

Les rapports entre les contraintes maximales et les énergies maximales en mode 1 et 2 sont tels que  $S_{12}^{max} = 0.1$  et  $E_{12}^{max} = 0.1$  [52].

Les paramètres de la loi cohésive sont résumés dans le Tableau 12.

$C_N$	$10^{14} Pa/m$
$C_T$	$7.5 \times 10^{13} Pa/m$
$\sigma_1^{max}$	$3 \times 10^6 Pa$
$w_1^{max}$	$69 J/m^2$
$S_{12}^{max}$	0.1
$E_{12}^{max}$	0.1

Tableau 12: Paramètres de la loi cohésive pour la poutre trois points en flexion.

### Comparaison avec les maillages de référence et les résultats expérimentaux

Les maillages générés sont montrés sur la Figure 87. Les faciès de rupture obtenus avec un raffinement *a priori* et avec un maillage de référence (maillages totalement raffinés une fois) sont présentés avec l'enveloppe expérimentale des fissures sur la Figure 88. Le trajet de fissure obtenu avec un raffinement est semblable à celui obtenu avec un maillage de référence. Contrairement à la méthode d'« Eigen-Erosion », il y a de légères différences entre les trajets de fissure. Le problème de contact étant multivalué, les solutions dépendent du nombre de contacts et des corps. Les corps étant différents entre le maillage raffiné et le maillage de référence, les solutions ne sont pas identiques mais sont relativement proches.

La fissure obtenue avec le maillage raffiné *a priori* se propage davantage que la fissure obtenue avec le maillage de référence. Cela peut être expliqué par une rigidité supérieure obtenue dans le cas du maillage raffiné. En effet, plus le nombre de mailles est faible, plus la rigidité apparente est élevée car les lois cohésives introduisent une souplesse additionnelle. Ce résultat est cohérent avec les instants où les fissures s'initient : la fissure s'initie à  $0.2328ms$  avec le maillage raffiné et à  $0.2497ms$  avec le maillage de référence.

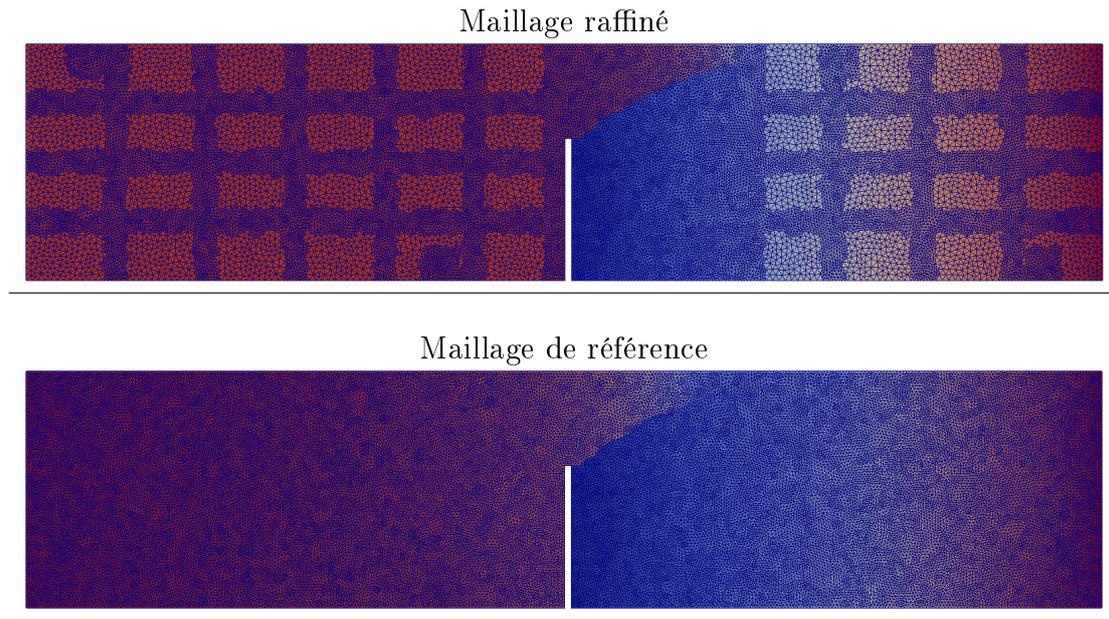


Figure 87: Maillage raffiné *a priori* et maillage de référence. Les couleurs correspondent à l'intensité du déplacement vertical.

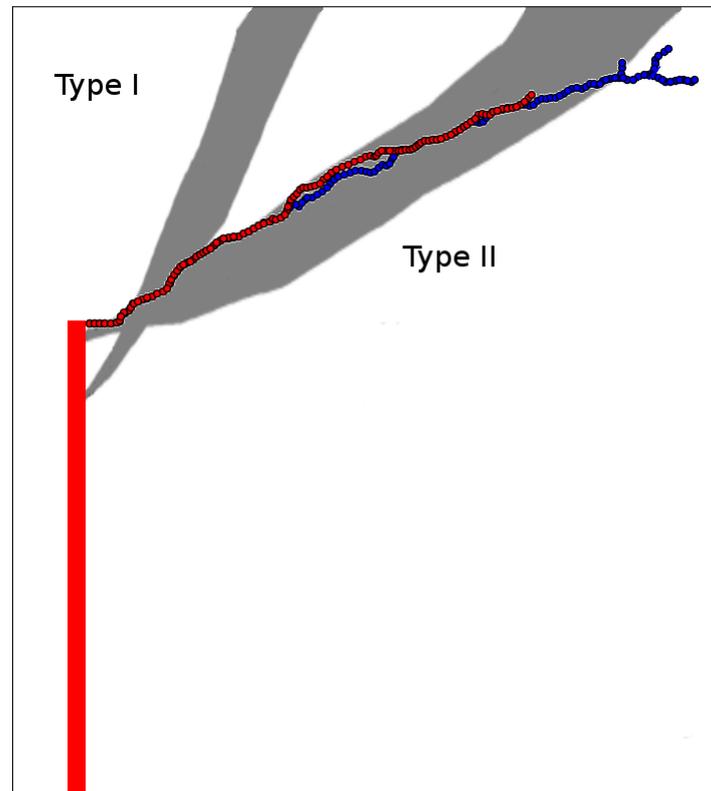


Figure 88: Comparaison des faciès de rupture obtenus avec un maillage raffiné *a priori* (en bleu) et un maillage de référence (en rouge) à l'enveloppe expérimentale des fissures.

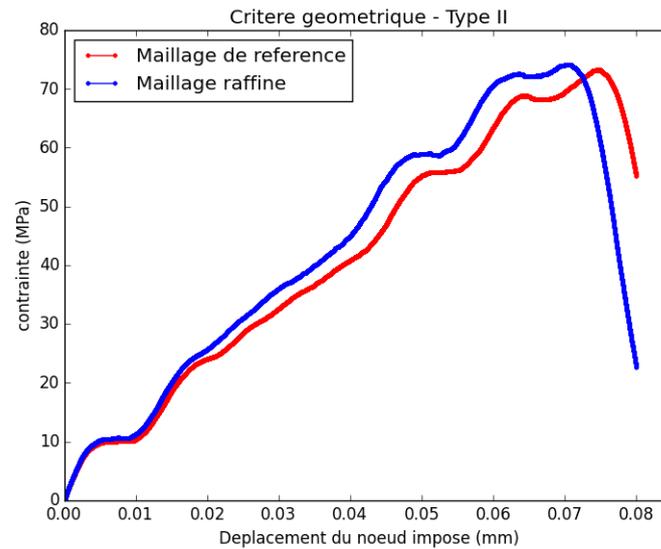


Figure 89: Type II : évolution de la contrainte verticale en fonction du déplacement vertical imposé au point de chargement.

La Figure 89 montre l'évolution de la contrainte verticale en fonction du déplacement vertical au nœud où est appliqué le chargement. Cette figure met en évidence la différence de rigidité apparente du maillage raffiné et du maillage de référence. Les courbes sont semblables et la contrainte verticale maximale est du même ordre de grandeur pour les deux maillages (erreur relative de 1%). Les fissures s'initient pour un déplacement vertical de  $7 \times 10^{-5}m$  pour le maillage raffiné *a priori* et de  $7.5 \times 10^{-5}m$  pour le maillage de référence. Ces valeurs sont proches du résultat expérimental ( $6 \times 10^{-5}m$  [38]).

Les temps de simulation sont résumés dans le Tableau 13. Contrairement à la méthode d'« Eigen-Erosion », les temps de simulation du maillage raffiné et de référence sont du même ordre lorsque le découpage du domaine par processeur est géométriquement homogène : le raffinement ne permet pas une réduction du temps de simulation, malgré la diminution du nombre de degrés de liberté et de contacts. Cela est dû à la compétition entre les temps de calcul liés à la résolution Eléments Finis et à la résolution des contacts. Pour un processeur ayant des corps comportant beaucoup de mailles, la résolution Eléments Finis est coûteuse comparée à la résolution des contacts et dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque le processeur possède beaucoup de corps constitués chacun d'une maille, la résolution des contacts est plus coûteuse que la résolution Eléments Finis. Dans la simulation avec le maillage raffiné, la résolution Eléments Finis représente 8% du temps total de la simulation (le calcul de  $v_{free}$  correspond à 6% et le calcul de la matrice de Delassus  $m$  représente 2%). 92% du temps de calcul est consacré à la résolution des contacts. Ces valeurs sont semblables pour un maillage fin homogène (93% du coût numérique est alloué à la résolution des contacts, 4% au calcul de  $v_{free}$  et 4% au calcul de la matrice de Delassus  $m$ ).

En améliorant le découpage du domaine par processeur (selon la stratégie de la Figure 63 en bas à gauche) afin d'équilibrer le nombre de corps par processeur (et donc le nombre de contact), le raffinement *a priori* permet un gain de temps relatif supérieur à 40% par

	Type II
Totalement raffiné	65.5h
nombre de ddl	407400
nombre de contacts	202770
Raffiné <i>a priori</i>	66.75h
nombre de ddl	187192
nombre de contacts	85708
Gain relatif en temps	-2%

Tableau 13: Durées des simulations par processeur et gain relatif grâce au raffinement *a priori* dans la zone d'intérêt.

rapport au maillage fin homogène (voir Tableau 14). **Ainsi, le raffinement ne permet un gain de temps de calcul qu'avec un découpage du domaine par processeur bien calibré.**

	Type II
Découpage optimisé	36.93h
Gain relatif (découpage)	44.5%
Gain relatif total	43.5%

Tableau 14: Temps de calcul par processeur, gain relatif grâce à l'optimisation du découpage du domaine et gain relatif par rapport au maillage de référence.

## 4.4 Couplage du raffinement adaptatif et le modèle CZM

Dans cette section, le raffinement adaptatif est appliqué aux CZM. Afin d'illustrer le raffinement et mettre en évidence les difficultés, le critère de raffinement adaptatif utilisé est un indicateur géométrique appliqué à un instant donné. Après avoir décrit l'algorithme de la méthode CHARMS adaptative appliquée aux CZM, les résultats du couplage sont présentés.

### 4.4.1 Algorithme

L'application du raffinement adaptatif aux CZM a nécessité des modifications dans les logiciels XPER et LMGC90 :

LMGC90 :

- introduction à la volée de contacts,
- conservation des variables internes des contacts présents avant raffinement,
- synchronisation des contacts entre LMGC90 et PELICANS.

XPER :

- mises à jour des corps et création des nouveaux corps après raffinement,
- synchronisation des nouveaux corps avec LMGC90.

Le pseudo code du raffinement adaptatif appliqué aux CZM est présenté dans l'Algorithme 4.

```

Raffinement et duplication des nœuds des mailles halo (voir section 4.2)
Initialisation des champs
while  $t < t_{final}$  do
  a/ Test du critère de raffinement
  if Critère de raffinement vérifié then
    Raffinement des fonctions de bases vérifiant le critère de raffinement
    Duplication des nœuds vérifiant le critère de duplication (voir section 4.2)
    MAJ des corps
    MAJ Eléments Finis (DOF, système linéaire, champs, CL)
    Réinitialisation des contacts en conservant l'historique des anciens contacts
  end
  b/ Résolution NLGS standard [50]
  c/ Sauvegarde
   $t = \Delta t + t$ 
end

```

**Algorithme 4 :** Raffinement local adaptatif appliqué aux Modèles de Zones Cohésives.

Lors d'une étape de raffinement, les zones des corps maillés vérifiant le critère de raffinement sont raffinées impliquant une mise à jour du nombre de mailles et la création de nouveaux corps constitués d'une maille. Les variables internes liées aux nouveaux contacts sont ensuite initialisées. Puis, une mise à jour des contacts (LMGC90) est effectuée en conservant l'historique des variables internes des anciens contacts. Enfin, la résolution du problème de contact cohésif est effectuée (voir section 4.1).

La Figure 90 illustre les différentes étapes du raffinement. La maille rouge du corps 0 est raffinée au temps  $t + \Delta t$  créant les corps 5, 6, 7 et 8. Une mise à jour est réalisée sur le corps 0 afin de prendre en compte les modifications du maillage (PELICANS). Les nouveaux contacts (contacts rouges) sont introduits en décalant les indices des contacts tout en conservant l'historique des variables internes des contacts présents au temps  $t$  (contacts bleus, LMGC90).

#### 4.4.2 Résultats et difficultés du raffinement adaptatif

Afin de mettre en évidence les difficultés du raffinement adaptatif appliqué au CZM, le critère de raffinement géométrique est appliqué à un instant arbitraire. L'idée est ici d'effectuer un calcul élastique Eléments Finis sans contact puis d'insérer les contacts à la volée avant que la fissure ne s'initie. La résolution Eléments Finis étant moins coûteuse que la résolution des contacts, le coût numérique est réduit.

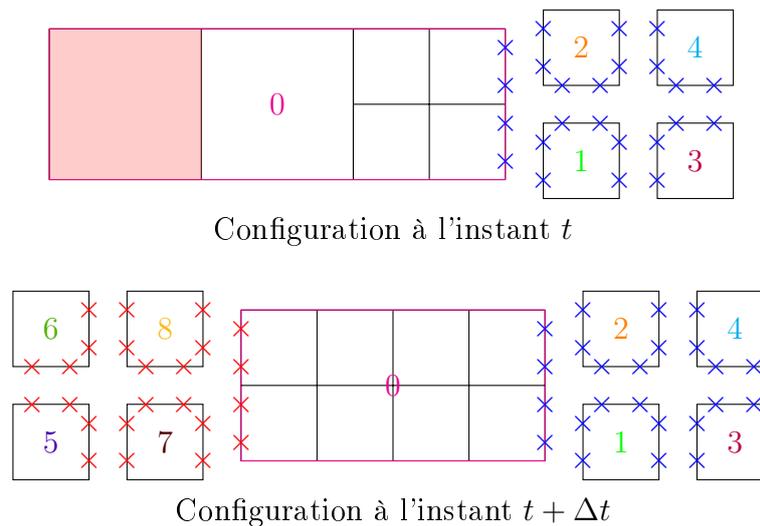


Figure 90: Configuration des corps avant et après raffinement. La maille rouge correspond à la maille raffinée à l'instant  $t + \Delta t$ . En bleu les contacts à l'instant  $t$  et en rouge les contacts générés à l'instant  $t + \Delta t$ .

Le cas test considéré est le type II de la poutre en flexion trois points montrée sur la Figure 57, la zone géométrique sélectionnée par le critère est identique à celle de la section précédente. Les caractéristiques mécaniques et numériques ainsi que la calibration des lois cohésives sont résumées dans les Tableaux 11 et 12.

En se basant sur la section 4.3, la fissure s'initie à  $0.2328ms$ . Ainsi, le critère de raffinement est appliqué à  $0.19ms$  (une marge est prise afin de prendre en compte la différence de rigidité avant et après raffinement).

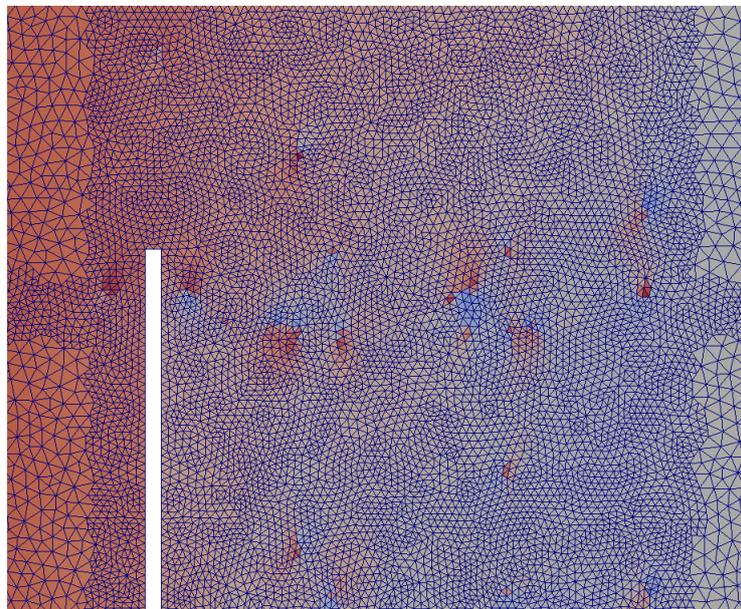


Figure 91: Maillage raffiné adaptativement à  $t = 0.19ms$ . Les couleurs correspondent à l'intensité du déplacement vertical.

Le maillage raffiné adaptativement est montré sur la Figure 91. A l'instant où le maillage est raffiné, les zones cohésives s'endommagent. Cet endommagement peut s'expliquer par le passage d'un modèle continu (rigidité infinie au niveau des nœuds) à un modèle dis-

continu (rigidité finie). Cette transition continu-discontinu produit des ondes entraînant un endommagement précoce des zones cohésives. Malgré l'introduction d'étapes de relaxation, où la variable  $\beta$  et le chargement sont figés sur plusieurs pas de temps, l'amplitude des ondes reste importante.

**Le raffinement et l'introduction de lois cohésives à la volée est fonctionnelle mais nécessite des développements numériques spécifiques pour la gestion de la transition continu-discontinu.**

Une solution envisagée est l'amortissement des ondes produites en introduisant un paramètre de viscosité afin de réaliser un amortissement de type Rayleigh :

$$A = \alpha_M M + \beta_K K \quad (4.30)$$

où  $A$  correspond à la matrice d'amortissement,  $M$  et  $K$  les matrices de masse et de rigidité,  $\alpha_A$  et  $\beta_K$  sont des constantes correspondant aux coefficient d'amortissement proportionnels de masse et de rigidité. Cet amortissement peut être réalisé localement au niveau des mailles ayant leurs nœuds dupliqués.

Une autre solution est l'utilisation de lois extrinsèques. Etant donné que ce type de loi n'introduit aucune souplesse, la transition continu-discontinu n'entraînerait pas la création d'ondes.

Ces solutions n'ont pas été mises en œuvre dans cette thèse.

## 4.5 Bilan du chapitre

La méthode utilisée dans ce chapitre repose sur une approche micromécanique basée sur les Modèles de Zones Cohésives Frottantes. Elle consiste à décomposer le comportement local d'un matériau en une partie surfacique adoucissante et une partie volumique durcissante sans endommagement. Les fissures se propagent aux interfaces des mailles d'un maillage Eléments Finis. Les Modèles de Zone Cohésive décrivent le comportement de la physique en pointe de fissure grâce à une loi reliant la contrainte aux lèvres de fissure au saut de déplacement et d'une variable d'endommagement. La loi cohésive retenue (loi MAL) permet de prendre en compte le mode mixte d'un chargement via des rapports de contraintes et d'énergies de décohésion en mode I et en mode II. De plus, les modèles cohésifs couplent la cohésion au contact unilatéral et au frottement de Coulomb. La méthode de résolution du problème cohésif est la méthode NSCD.

Le logiciel utilisé est XPER qui repose sur la bibliothèque PELICANS pour la résolution du problème Elément Finis et sur la bibliothèque LMGC90 pour la résolution des contacts. Cette approche permet d'obtenir des résultats précis mais le coût numérique de la résolution est important.

La stratégie du raffinement basée sur la méthode CHARMS est appliquée à l'approche

multicorps. La duplication de nœuds est réalisée en même temps que le raffinement si l'ensemble des fonctions de base d'une maille est raffiné au niveau maximal. Cette stratégie permet de n'introduire des lois cohésives que dans les zones raffinées. Une attention particulière est portée pour les simulations réalisées en parallèle : pour permettre une réduction du nombre de communications entre les processeurs, les fonctions de base des mailles « halo » sont raffinées.

Le couplage du raffinement *a priori* et des CZM a été investigué. Les résultats obtenus avec un maillage raffiné sont semblables à ceux obtenus avec un maillage de référence. La rigidité apparente d'un maillage raffiné est plus importante que celle d'un maillage fin homogène car le nombre de lois cohésives est plus faible. Afin de permettre une réduction du coût numérique, un découpage optimal du domaine pour équilibrer le nombre de corps par processeurs est nécessaire car la résolution des contacts est coûteuse par rapport à la résolution Eléments Finis.

Le couplage du raffinement adaptatif aux CZM est fonctionnel mais nécessite le développement d'une méthode numérique gérant la transition continu-discontinu car l'insertion de lois cohésives à la volée génère des ondes entraînant un endommagement précoce des zones cohésives. Les solutions pouvant être mises en œuvre sont l'utilisation de lois extrinsèques ou un amortissement des ondes.

# Chapitre 5

## Effet de la morphologie des inclusions sur la fissuration d'un béton

*Ce chapitre a pour but de déterminer l'influence de la forme des inclusions sur le comportement apparent et la fissuration d'un matériau de type béton pré-entaillé sous sollicitation mécanique à l'échelle mésoscopique. Pour étudier finement les phénomènes de fissuration, la méthode CHARMS a priori est appliquée aux Modèles de Zone Cohésive.*

*La première section est consacrée à la mise en place du cas d'étude. Les échantillons numériques générés avec les tirages réalisés et les choix de modélisation sont précisés.*

*Dans la seconde section, les comportements apparents et les trajets de fissure sont étudiés en fonction de la morphologie des inclusions.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Echantillons élémentaires . . . . .</b>	<b>125</b>
5.1.1	Echantillons numériques . . . . .	125
5.1.2	Modélisation . . . . .	126
<b>5.2</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>129</b>
5.2.1	Comportements apparents . . . . .	129
5.2.2	Trajets de fissure . . . . .	130
<b>5.3</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>133</b>

---



## 5.1 Echantillons élémentaires

Dans cette section, les échantillons élémentaires bidimensionnels représentant un milieu de type béton sont présentés. Cinq types d'inclusion sont considérés.

### 5.1.1 Echantillons numériques

Les échantillons considérés sont des volumes élémentaires rectangulaires de taille  $0.3m \times 0.15m$ , pré-entaillés et contenant une distribution d'inclusions de même forme et de même dimension (surface des inclusions égale à celle d'une inclusion ronde de rayon  $6mm$ ). Ces inclusions sont orientées aléatoirement et distribuées selon un processus de type sphère dure (*hardcore point process*) où la distance de répulsion entre les inclusions correspond au rayon du cercle circonscrit de l'inclusion triangulaire. La fraction volumique d'inclusions est de 14%, les échantillons sont donc composés à 86% de mortier. Cinq polygones réguliers sont considérés pour les inclusions : le triangle (3 arêtes), le carré (4 arêtes), l'hexagone (6 arêtes), l'octogone (8 arêtes), l'hexadécagone (16 arêtes). Pour chaque forme, des exemples d'échantillons sont donnés sur la Figure 92.

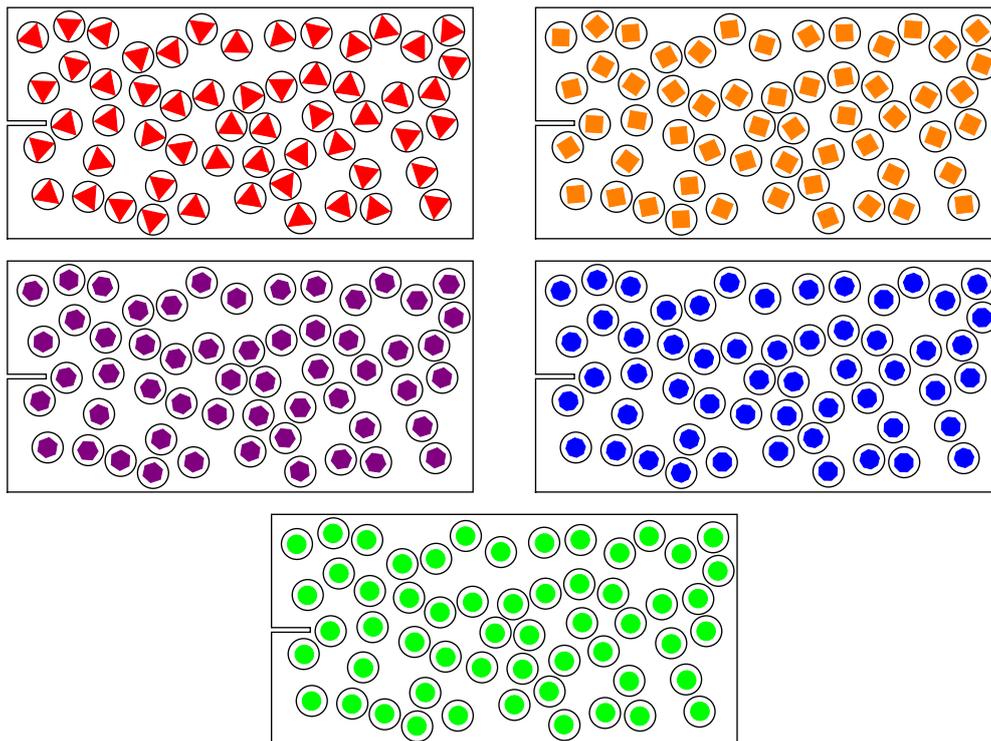


Figure 92: Cinq formes d'inclusion dans un volume élémentaire pré-entaillé, la fraction volumique étant de 14%. Le tirage des centres d'inclusions s'effectue selon un processus de type sphère dure (disques de non chevauchement en noir), les orientations étant tirées aléatoirement. Les morphologies considérées sont : triangle, carré, hexagone, octogone, hexadécagone.

Cinq tirages aléatoires des centres des inclusions et de leurs orientations ont été réalisés (25 échantillons générés au total). Pour un tirage donné, les centres des inclusions sont conservés pour les cinq formes d'inclusions considérées.

Ces échantillons sont maillés avec le logiciel GMSH [20] grâce à une triangulation de type Delaunay *a posteriori* (voir Figure 93).

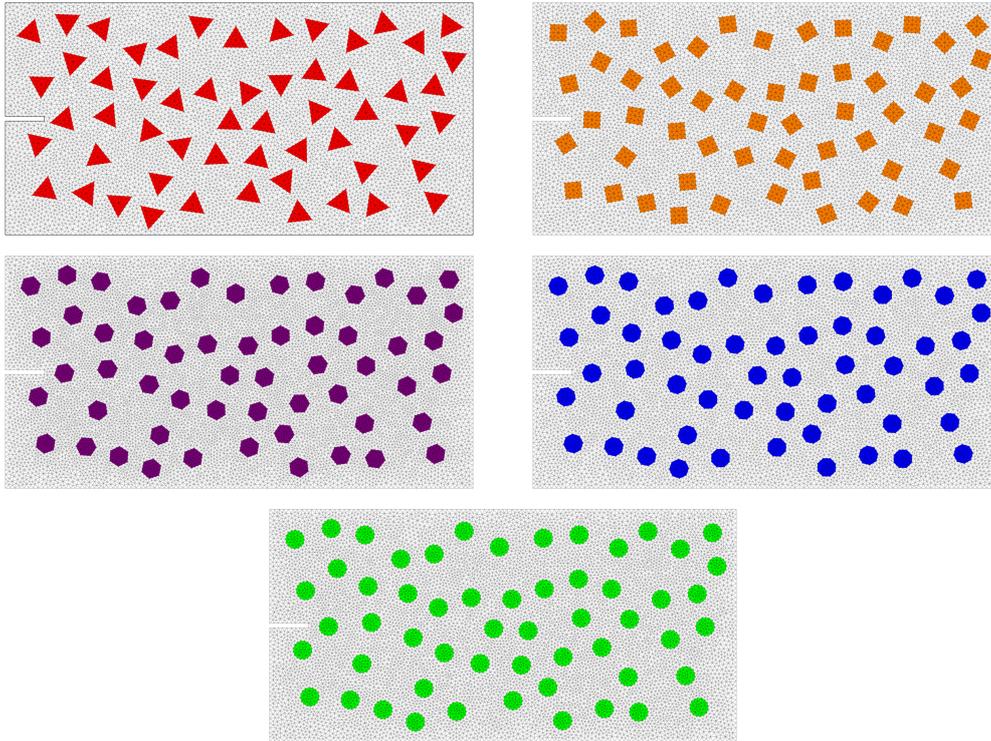


Figure 93: Cinq maillages de volumes élémentaires pré-entailés.

L'ensemble des maillages pour chaque échantillon est disponible dans l'Annexe F.

### 5.1.2 Modélisation

Les échantillons sont constitués d'une matrice cimentaire et de granulats dont les propriétés mécaniques sont issues de [36] afin de modéliser un béton d'enceinte de centrale nucléaire (voir Tableau 15).

Granulat	
Module d'Young	$E = 60GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Masse volumique	$\rho = 2600kg/m^3$
Matrice	
Module d'Young	$E = 15.9GPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Masse volumique	$\rho = 2900kg/m^3$

Tableau 15: Caractéristiques mécaniques de la matrice et des granulats.

Pour simuler la propagation de fissures, l'approche micromécanique basée sur les CZM couplée avec un raffinement *a priori* est utilisée. Ce choix a été motivé par la nécessité de modéliser les interfaces inclusions/matrices. En effet, la méthode d'« Eigen-Erosion »

est une méthode basée sur la suppression de mailles, elle nécessite l'introduction d'une interphase entre les granulats et le mortier. L'épaisseur de cette interphase doit être de l'ordre d'une taille de maille [36].

L'interface inclusions/matrices est considérée comme peu tenace. Ce comportement faible est modélisé par des valeurs de la contrainte critique et de l'énergie de rupture plus faibles que celles de la matrice et des inclusions.

La loi cohésive utilisée est la loi MAL introduite dans la section 4.1. Les paramètres de cette loi sont ceux issus de [36] et sont résumés dans le Tableau 16. Ces paramètres surfaciques sont définis pour les interfaces matrice/matrice, matrice/granat et granulat/granat. Pour l'ensemble des interfaces, les rapports des contraintes critiques en mode I et II et des énergies de rupture en mode I et II sont fixés à 0.1 [52].

Interface	$C_N$ (Pa/m)	$C_T$ (Pa/m)	$\sigma_1^{max}$ (Pa)	$w_1^{max}$ (J/m <sup>2</sup> )
matrice/matrice	$38 \times 10^{13}$	$29 \times 10^{13}$	$46 \times 10^6$	20
granulat/granat	$15 \times 10^{14}$	$12 \times 10^{14}$	$14 \times 10^8$	60
matrice/granat	$38 \times 10^{13}$	$29 \times 10^{13}$	$14 \times 10^6$	20

Tableau 16: Paramètres de la loi cohésive pour la poutre trois points en flexion.

Chaque échantillon est soumis à un chargement en traction uniaxiale (voir Figure 94). Les paramètres des simulations sont résumés dans le Tableau 17.

Pas de temps	$\Delta t = 1 \times 10^{-7} s$
Temps final	$t_{fin} = 8 \times 10^{-4} s$
Incrément de chargement	$u = 10^{-8} m$
Mailles	Triangles
Taille de maille	$h_{grossier} = 3mm$
Nombre de processeurs	48
Evolution	Dynamique
Type de résolution	Implicite

Tableau 17: Paramètres des simulations.

Etant donné qu'à l'heure actuelle le couplage entre les CZM et le raffinement adaptatif n'est pas opérationnel sans développement d'une méthode numérique spécifique (ajout de paramètres *ad hoc* comme la viscosité), un raffinement *a priori* est appliqué au maillage initial. Ce raffinement est effectué sur un niveau afin d'obtenir une taille de mailles raffinée  $h_{fin} = 1.5mm$ . Les bifurcations des fissures étant nombreuses dans un matériau hétérogène, la zone d'intérêt sélectionnée est relativement large (surface raffinée correspondant à 67% de la surface totale, voir Figure 94).

Des exemples de maillages raffinés dans la zone d'intérêt sont donnés dans la Figure 95.

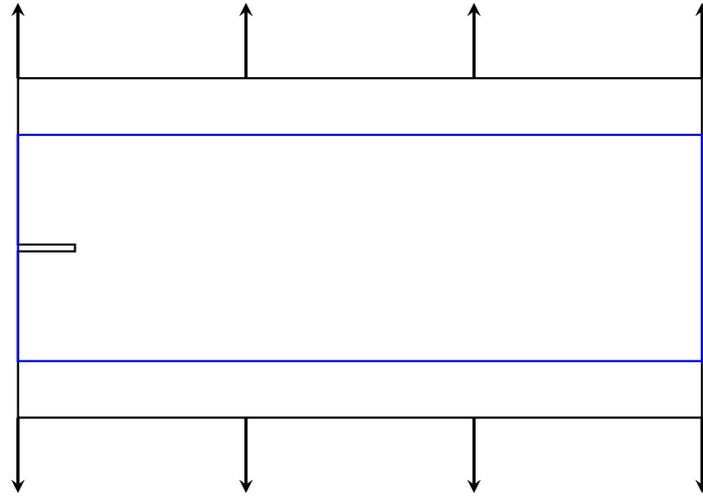


Figure 94: Mise en évidence de la zone d'intérêt sélectionnée par l'indicateur géométrique.

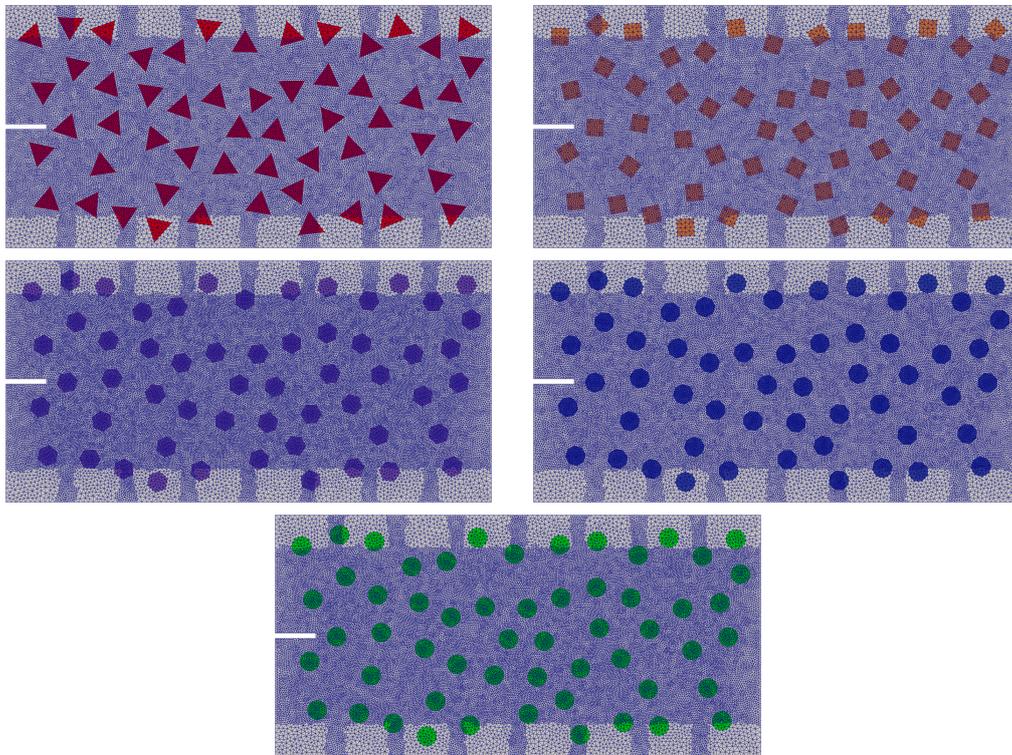


Figure 95: Cinq maillages raffinés de volumes élémentaires pré-entailés.

## 5.2 Résultats

### 5.2.1 Comportements apparents

Les comportements apparents des échantillons sont donnés sur la Figure 96 en termes de contrainte effective uniaxiale en fonction de la déformation effective uniaxiale dans le sens de la traction. Cette Figure met en évidence une certaine disparité dans les réponses effectives d'un tirage à l'autre. Il y a néanmoins une cohérence sur les comportements *moyens* (pour chaque type d'inclusions, une moyenne sur l'ensemble des cinq réalisations est calculée). La forme des inclusions ne joue pas *a priori* un rôle majeur sur le comportement effectif à rupture en mode I global de ces échantillons hétérogènes.

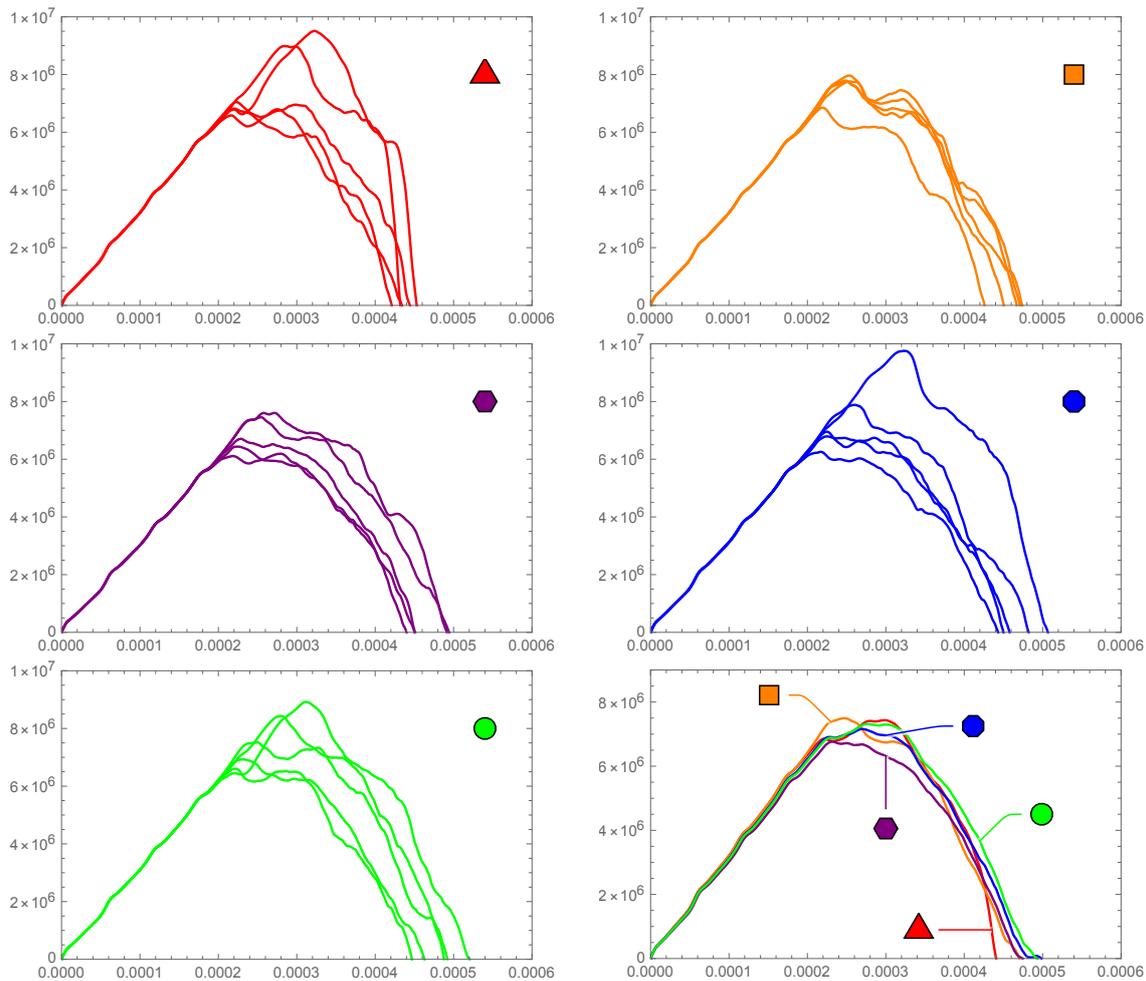


Figure 96: Comportements apparents uniaxiaux : contrainte (MPa) en fonction de la déformation. De haut en bas et de gauche à droite: inclusions triangulaires, inclusions carrées, inclusions hexagonales, inclusions octogonales, inclusions hexadecagonales. En bas à droite : comportement moyen sur l'ensemble des réalisations pour chaque type d'inclusions.

Pour analyser les résultats plus en détails, un indice de circularité des inclusions est introduit :

$$\mathcal{I} = \frac{2\mathcal{S}}{r\mathcal{S}} \in [0.5, 1] \quad (5.1)$$

où, en deux dimensions,  $\mathcal{S}$  est la surface de l'inclusion,  $\overline{\mathcal{S}}$  son périmètre et  $r$  le rayon de son cercle circonscrit. Cet indice vaut 0.5 pour un triangle et croît pour les polygones réguliers avec le nombre d'arêtes pour atteindre la valeur limite du disque pour lequel cet indice vaut 1.

La déformation apparente uniaxiale à rupture et la densité apparente d'énergie de déformation à rupture sont données sur la Figure 97 en fonction de cet indice de circularité pour l'ensemble des échantillons considérés. **Si la forme des inclusions n'a pas d'effet notable sur la densité d'énergie de déformation à rupture, il semble que la déformation à rupture croisse avec la circularité des inclusions.**

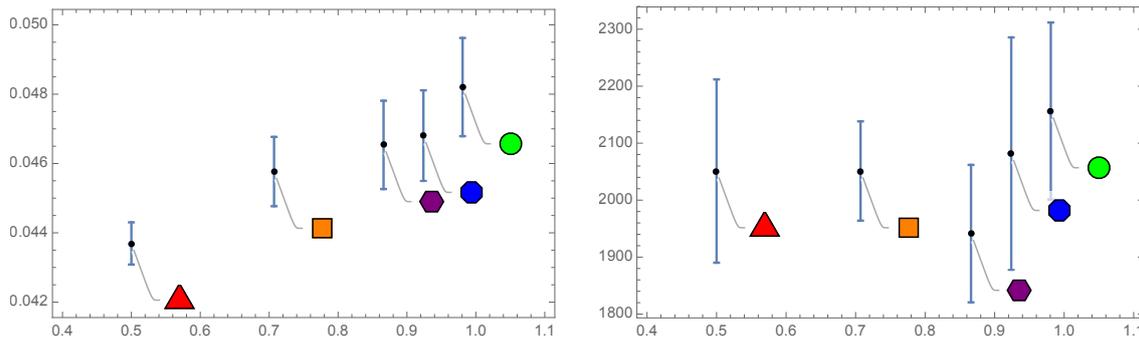


Figure 97: A gauche : la déformation apparente uniaxiale à rupture (en %) en fonction de l'indice de circularité  $\mathcal{I}$  des d'inclusions. A droite : la densité d'énergie à rupture (en  $J/m^3$ ) en fonction de l'indice de circularité  $\mathcal{I}$  des inclusions. Les moyennes et les écarts types sont donnés pour les différents échantillons.

Le rôle de la forme des inclusions sur la réponse en fissuration des échantillons est analysé plus avant dans la section suivante au travers de l'analyse des trajets de fissuration.

### 5.2.2 Trajets de fissure

La Figure 98 synthétise les différents trajets de fissuration obtenus au moment de la rupture complète de l'échantillon. La fissure principale se propage globalement en mode I mais son trajet est localement orienté par la présence des interfaces inclusions/matrice faibles. Ces interfaces faibles et les inclusions ont tendance à favoriser les branchements locaux de la fissure qui donne parfois lieu à de nombreuses ramifications. Les faciès de ces trajets de fissuration sont dans l'ensemble assez similaires pour les différents échantillons. Les inclusions les plus anguleuses (triangles et carrés) génèrent des concentrations de contraintes qui favorisent la multifissuration et l'amorçage de fissures en amont de la fissure principale.

**La densité globale de fissuration, c'est-à-dire le ratio entre la longueur totale des fissures sur la surface de l'échantillon, croît avec l'indice de circularité des inclusions** (voir Figure 99). Ce résultat paraît cohérent : les polygones réguliers ont un périmètre spécifique plus grand lorsque leur indice de circularité est petit (le triangle a le plus grand périmètre spécifique à fraction volumique donnée). Ce périmètre spécifique étant celui des interfaces inclusions/matrice correspondant aux zones de faiblesse dans ces

simulations, un indice de circularité faible introduit davantage de « pré-découpage » dans la structure et facilite la propagation via un nombre plus limité de branchements. Ce résultat semble également cohérent avec le fait que la déformation à rupture des échantillons croisse avec l'indice de circularité (Figure 97 à gauche). En d'autres termes, il semble plus facile de rompre une microstructure à inclusions anguleuses qu'une microstructure à inclusions circulaires. Cet effet est néanmoins limité puisqu'il ne s'observe pas sur la densité d'énergie de déformation apparente à rupture (Figure 97 à droite).

Dans les milieux de type béton, les fissures percolantes sont le lieu privilégié des écoulements et influent significativement sur leur perméabilité effective. Dans cette étude, uniquement l'analyse d'une seule fissure percolante est réalisée : la fissure principale. Cette dernière est ici retenue comme celle réalisant le plus court des plus longs chemins. La tortuosité de cette fissure principale, c'est-à-dire le rapport entre sa longueur effective ramenée à la longueur projetée dans le sens perpendiculaire à la traction (une grandeur supérieure à 1 dans le cas de la fissure rectiligne), est donnée sur la Figure 100, à gauche. **Cette tortuosité ne semble pas être affectée de manière significative par la forme des inclusions.** Il est crédible qu'elle soit très légèrement plus grande pour le cas des inclusions les plus anguleuses par l'effet de multifissuration en amont de la fissure principale. Ici encore, l'effet semble peu prononcé.

Enfin, la Figure 100, à droite, donne le taux de contournement des inclusions par la fissure principale. Ce taux est défini comme la fraction de la fissure principale confondue avec les interfaces inclusions/matrice sur sa longueur totale. Le seul effet notable est que, pour le cas des inclusions triangulaires, la fissure principale est « attirée » par les zones de faiblesse interfaciale ; ce qui serait également cohérent avec le fait que sa tortuosité soit dans ce cas là plus importante.

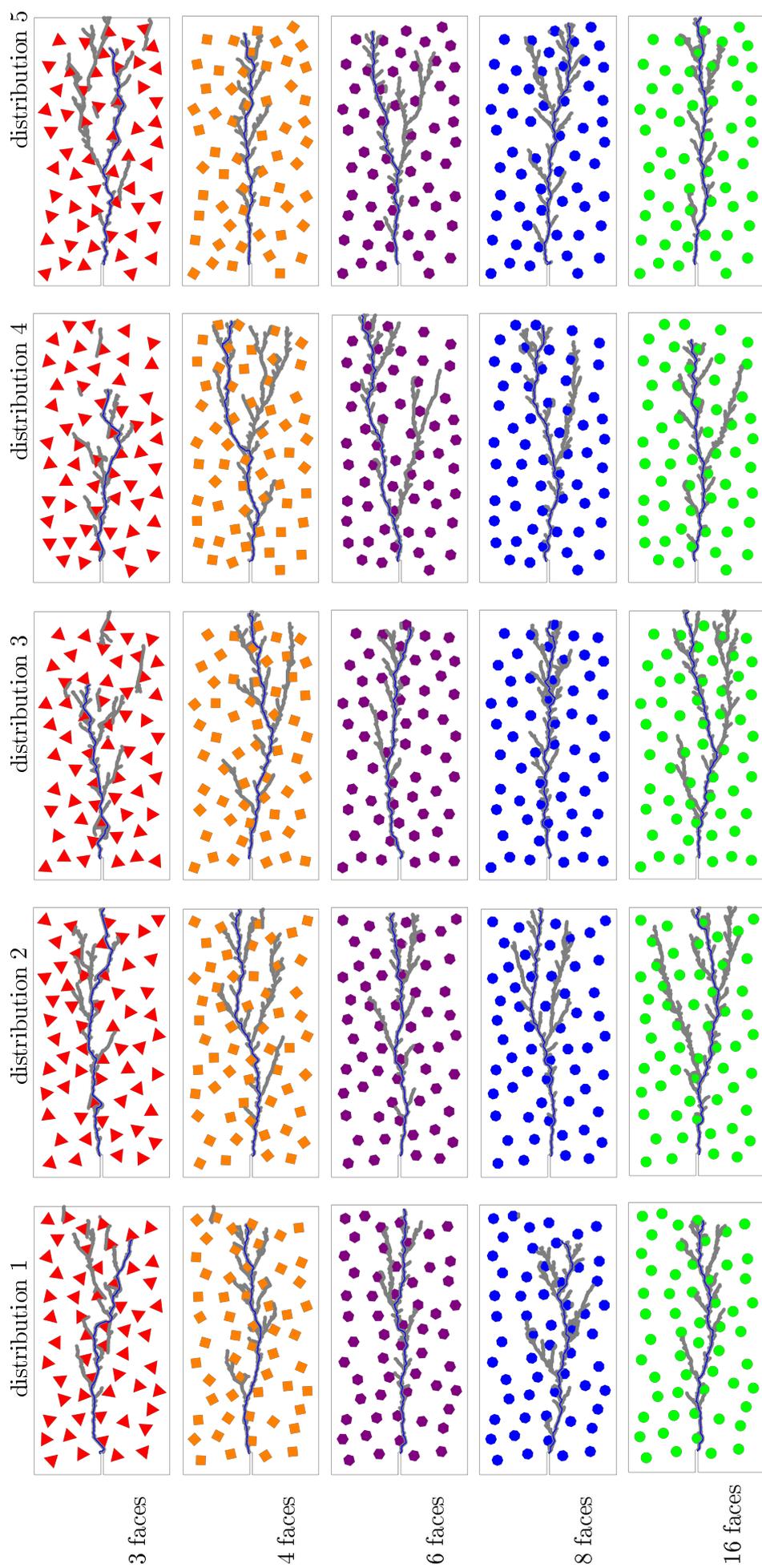


Figure 98: Trajets de fissuration pour différentes formes d'inclusions et différents tirages (en gris) et fissure principale (en bleu).

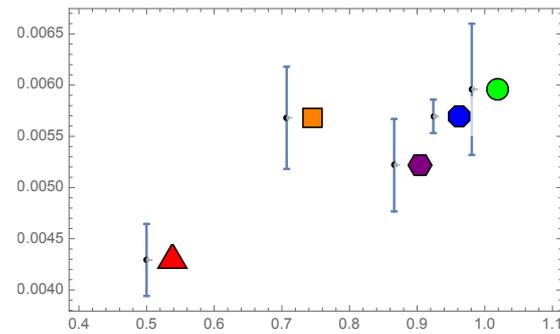


Figure 99: Densité de fissures (en  $m^{-1}$ ) en fonction de l'indice de circularité  $\mathcal{I}$  des d'inclusions. Les moyennes et les écarts types sont donnés pour les différents échantillons.

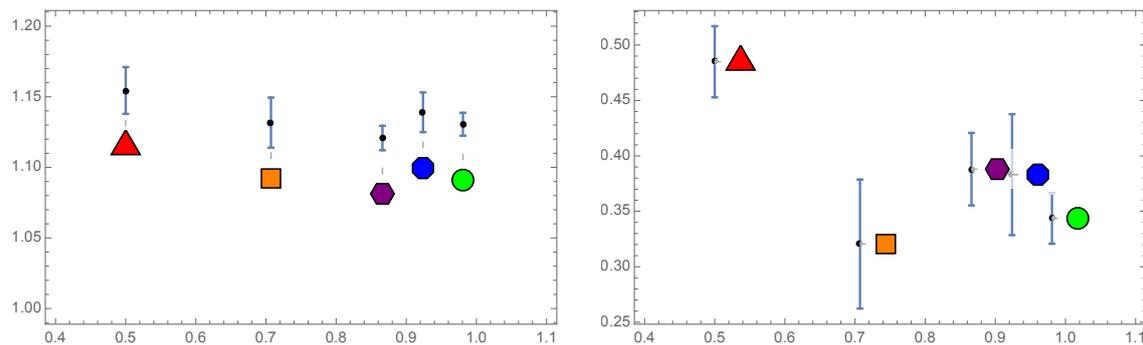


Figure 100: A gauche : la tortuosité de la fissure principale en fonction de l'indice de circularité  $\mathcal{I}$  des inclusions. A droite : le taux de contournement des inclusions par la fissure principale en fonction de l'indice de circularité  $\mathcal{I}$  des inclusions. Les moyennes et écarts types sont donnés pour les différents échantillons.

### 5.3 Bilan

L'objectif de ce chapitre a été d'utiliser la méthode de raffinement CHARMS sur une application de type industrielle. L'application consiste à montrer l'influence de la forme des granulats sur le comportement apparent et la propagation de fissure dans un matériaux de type béton sous sollicitation mécanique.

Dans cette étude, cinq formes d'inclusion sont considérées et cinq tirages sont réalisés pour chaque échantillon.

La forme des inclusions a un effet limité sur le comportement apparent des échantillons. Elle semble avoir une influence sur la déformation à rupture des échantillons : plus les inclusions sont anguleuses, plus la déformation à rupture est faible. Néanmoins, la densité d'énergie à rupture semble décorrélée de la forme des inclusions.

Les inclusions et les interfaces matrice/inclusions orientent localement le trajet des fissures mais ils restent globalement semblables. La forme des inclusions a un effet sur la densité globale de fissure : elle augmente avec le nombre d'angles des polygones formant les inclusions. Plus l'indice de circularité d'une inclusion est faible, plus les concentrations de contraintes au niveau des angles sont importantes et donc plus les branchements de fissure sont limités. La tortuosité de la fissure principale ne semble pas être affectée par

la forme des inclusions excepté pour les inclusions triangulaires où les fissures semblent être attirées par les inclusions, augmentant ainsi la tortuosité.

Les inclusions anguleuses ont tendance à limiter les bifurcations de fissures entraînant une fissuration traversante et semblent être donc plus limitantes d'un point de vue de la tenue mécanique que les inclusions sphériques.

## Conclusions et perspectives

## Conclusions

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du vieillissement des enceintes de confinement des centrales nucléaires, et plus particulièrement dans l'étude fine des éventuelles fissures en situation accidentelle. L'objectif est de réduire le coût numérique d'une simulation tout en conservant une bonne précision dans les zones où les fissures peuvent se propager. La stratégie utilisée est l'adaptation de la résolution fine en espace dans ces zones d'intérêt à l'aide d'une méthode de raffinement adaptatif : la méthode CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement MethodS). Cette méthode est basée sur le raffinement des fonctions d'interpolation Eléments Finis et gère implicitement les non-conformités géométriques.

Dans un premier temps, la méthode CHARMS a été appliquée à la Mécanique des Solides Déformables. La procédure de raffinement, basée sur un motif et des équations de raffinement, assure la conservation de l'information d'un maillage grossier vers un maillage raffiné. En terme de coût numérique, l'étape de raffinement entraîne un surcoût dû à la mise à jours du système linéaire. Une limitation a pu être mise en évidence : la méthode CHARMS ne permet pas l'amélioration de la discrétisation de bords courbes. Un critère de raffinement basé sur l'intensité et le gradient d'une grandeur directement liée à la physique étudiée a été proposé. Les grandeurs d'intérêt sont la contrainte et la déformation de von Mises. Une étude paramétrique a montré qu'en présence de singularités géométriques et matérielles, un raffinement piloté par le gradient génère des erreurs locale et globale plus faibles qu'avec un raffinement piloté en intensité. Enfin, l'erreur obtenue avec un maillage raffiné est plus faible que celle obtenue avec un maillage homogène à même nombre de mailles.

La méthode CHARMS a ensuite été appliquée à la méthode de fissuration appelée « Eigen-Erosion ». Cette méthode de type « killing element » est basée sur des critères énergétiques et sur le calcul d'un taux de restitution d'énergie. Le couplage de la méthode d'« Eigen-Erosion » et de la méthode CHARMS est basé sur l'hypothèse qu'une maille ne peut être supprimée que si son niveau de raffinement est égal au niveau de raffinement maximal imposé. Pour ce couplage, la grandeur d'intérêt du critère de raffinement proposé est le taux de restitution d'énergie local à une maille. Afin d'assurer une bonne estimation de l'incrément d'avancée de fissure, deux distances ont été introduites : une distance d'alerte assurant une distance minimale entre la pointe de la fissure et les mailles non raffinées et une distance de raffinement correspondant à la distance à raffiner entre la pointe de la fissure et les mailles grossières. Le couplage a été validé et le gain de temps est conséquent tout en introduisant une faible erreur et sans influencer le trajet des fissures. L'étude paramétrique réalisée sur ce critère a pu mettre en évidence qu'une distance de raffinement supérieure à la distance d'alerte permet un gain de temps et une erreur plus faible.

Enfin, la méthode de raffinement a été appliquée aux Modèles de Zones Cohésives. Cette méthode traitée à l'aide d'une méthode Éléments Finis cohésifs-volumiques permet une étude fine des phénomènes liés à la fissuration. La loi cohésive introduite permet de prendre en compte des modes de chargement complexes (modes mixtes). Les résultats obtenus avec un maillage raffiné sont en adéquation avec les résultats de référence. Un raffinement dans une zone d'intérêt arbitraire permet un gain numérique sous réserve d'une répartition optimale des processeurs en parallèle.

Le raffinement adaptatif est fonctionnel mais n'est pas pleinement opérationnel : bien que les fonctions soient raffinées adaptativement, que les nœuds soient dupliqués à la volée et que les lois soient introduites aux interfaces dupliquées, le passage continu-discontinu introduit des ondes entraînant un endommagement précoce des interfaces cohésives.

L'application présentée dans ce travail vise à mettre en évidence l'influence de la morphologie des inclusions d'un matériau de type béton sur le comportement apparent et sur la fissuration. Les simulations réalisées avec un raffinement *a priori* couplé au CZM ont permis de montrer que plus les inclusions sont anguleuses, plus la déformation à rupture est faible et moins les bifurcations de fissures semblent nombreuses. Les inclusions anguleuses semblent donc plus limitantes que des inclusions sphériques couramment utilisées dans les volumes élémentaires numériques de béton.

## Perspectives

La méthode de raffinement CHARMS est valide pour des comportements élastiques. Une extension aux comportements volumiques avec variables internes (par exemple plastique) est envisageable. Pour cela, deux axes peuvent être considérés : considérer un comportement purement élastique dans les zones grossières et introduire des variables internes dans les zones raffinées, ou réaliser des projections des variables internes entre plusieurs niveaux de raffinement [53].

Les simulations parallèles avec raffinement adaptatif et méthode d'« Eigen-Erosion » permettent une diminution efficace des coûts numériques. Ces simulations sont actuellement basées sur un découpage initial homogène par processeur. Ainsi, la charge des processeurs où des fonctions de base sont raffinées augmente, déséquilibrant les charges. Un équilibrage automatique et dynamique de la charge des processeurs à l'aide de la migration de degrés de liberté entraînerait une diminution supplémentaire du coût numérique (*dynamic load balancing* géré par la bibliothèque AMPI basé sur le planificateur Charm++ [54], par exemple). Cette méthode pourrait également être étendue au couplage CHARMS et CZM afin d'équilibrer le nombre de contacts par processeur.

La méthode CHARMS permettant le déraffinement, l'étude menée dans ce travail peut être appliquée au raffinement/déraffinement : le raffinement serait réalisé en pointe de fissures et les zones où la fissure s'est propagée seraient déraffinées. Cette stratégie permettrait une réduction supplémentaire du coût numérique.

Pour le couplage raffinement adaptatif et CZM, une méthode numérique gérant la tran-

sition continu-discontinu est nécessaire. Les solutions envisagées sont l'introduction d'un terme d'amortissement afin de limiter les ondes générées lors de la duplication des nœuds ou l'utilisation de lois extrinsèques afin de n'introduire aucune souplesse supplémentaire.

Pour compléter l'étude de l'application du VER, l'influence de pré-endommagements au niveau des inclusions sur la fissuration peut être étudiée. Ces endommagements représenteraient les effets du vieillissement d'un béton.

Enfin, d'un point de vue de la modélisation, une extension aux modèles thermiques [36] et à la diffusion d'espèces chimiques des méthodes de raffinement couplés aux modèles de fissuration est envisageable.

# Annexes

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Méthodes de raffinements</b>	<b>141</b>
A.1	Méthodes de raffinement $s$	141
A.2	Méthodes de raffinement $h$	146
<b>B</b>	<b>Motifs et équations de raffinement des éléments 3D</b>	<b>150</b>
B.1	Élément hexaédrique	150
B.2	Élément tétraédrique	152
<b>C</b>	<b>Critères basés sur l'estimation d'erreurs</b>	<b>157</b>
C.1	Estimation d'erreur basée sur la comparaison de maillages raffinés	157
C.2	Estimation basée sur l'erreur en relation de comportement	158
C.3	Estimation basée sur les résidus d'équilibre	159
C.4	Estimation basée sur le lissage des contraintes	160
<b>D</b>	<b>Mises à jour des champs Éléments Finis lors du raffinement adaptatif</b>	<b>163</b>
D.1	Mises à jour des champs	163
D.2	Mise à jour des lois volumiques	164
D.3	Mise à jour du système linéaire	164
<b>E</b>	<b>Méthodes classiques de fissuration</b>	<b>165</b>
E.1	Mécanique linéaire de la rupture	165
E.2	Méthode Thick Level Set (TLS)	166
E.3	Méthode des Éléments Finis Etendus (XFEM)	167
E.4	Méthode des Phase Field	168
<b>F</b>	<b>Échantillons pour des volumes élémentaires pré-entailés de type milieux à matrice cimentaire</b>	<b>170</b>

---



## A Méthodes de raffinements

### A.1 Méthodes de raffinement *s*

#### A.1.1 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin est appliquée à des problèmes de mécanique dont le domaine peut être divisé en zones distinctes [19]. L'objectif est de réaliser les calculs simultanément sur différentes zones. Chacune zone est reliée à un état mécanique propre, soit au niveau de la formulation (numérique, analytique, physico-chimique, ...), soit au niveau de la discrétisation (finesse, ordre, ...). Les différentes zones peuvent présenter des interfaces non conformes géométriquement entre elles. La particularité est de coupler les différents modèles de façon volumique et non sur une frontière.

Considérons deux modèles définis sur deux ouverts connexes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , recouvrant le domaine d'étude  $\Omega$  et formant une partition, tel que  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$  (voir Figure 101) et  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = S$  (voir Figure 101).

Dans la zone de recouvrement  $S$ , plusieurs états mécaniques indépendants coexistent. La condition importante est que les états sont égaux sur  $S$  si les modèles mécaniques sont identiques.

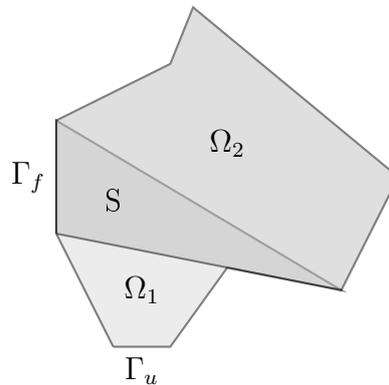


Figure 101: Superposition de deux modèles indépendants : les états mécaniques des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peuvent être différents, la zone de recollement étant la zone  $S$ .  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_f$  représentent respectivement les contours imposés en déplacement et en force.

Ainsi, pour recoller en volume les différents modèles dans la zone  $S$ , des techniques de couplage (par exemple des forces fictives ou des multiplicateurs de Lagrange [19]) permettent de contrôler l'écart entre les deux états mécaniques (déplacements, contraintes, déformations, ...). Cependant, le raccord n'est réalisé que sur une partie de la zone de recouvrement  $S$ , appelée zone de collage  $S_c$  (voir Figure 102). Ceci permet ainsi de laisser une zone où les modèles ne seront pas influencés l'un par l'autre ; cette zone étant appelée zone sans collage  $S_{sc}$ . De plus, on a  $S = S_c \cup S_{sc}$  et  $S_c \cap S_{sc} = \emptyset$ .

Enfin, la répartition de l'énergie globale doit permettre de ne pas prendre en compte l'énergie plusieurs fois dans la zone de recouvrement  $S$ . Pour cela, chacun des travaux virtuels est pondéré par des fonctions, dites de pondération ou de mélange, qui forment

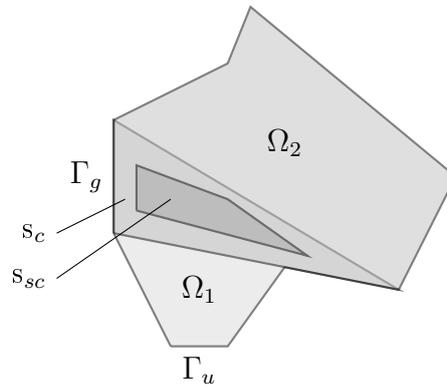


Figure 102: Exemple d'un raccord Arlequin : mise en évidence de la zone de collage  $S_c$  et de la zone sans collage  $S_{sc}$ .

une partition de l'unité sur l'ensemble du domaine d'étude. Ces fonctions de pondération sont définies par :

$$\begin{cases} \alpha_1 : \Omega_1 \rightarrow [0, 1], \alpha_1 = 1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ \alpha_2 : \Omega_2 \rightarrow [0, 1] \alpha_2 = 1 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ sur } \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{cases} \quad (.1)$$

Ces fonctions permettent de définir l'influence de chaque modèle dans la zone de recouvrement et donc le niveau de confiance lui étant attribué.

Cette méthode multi-échelles a été appliquée sur de nombreuses applications ([55] [56], ...) et notamment à la rupture dynamique tridimensionnelle [57].

### A.1.2 Méthodes multi-grilles locales

Largement utilisée dans le cadre de la mécanique des fluides, l'idée des méthodes multi-grilles locales est, à partir d'un maillage initial grossier recouvrant le domaine d'étude, de superposer des maillages de plus en plus fins dans les zones d'intérêt [58] (voir Figure 103) jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint (taille de maille ou précision dans la zone).

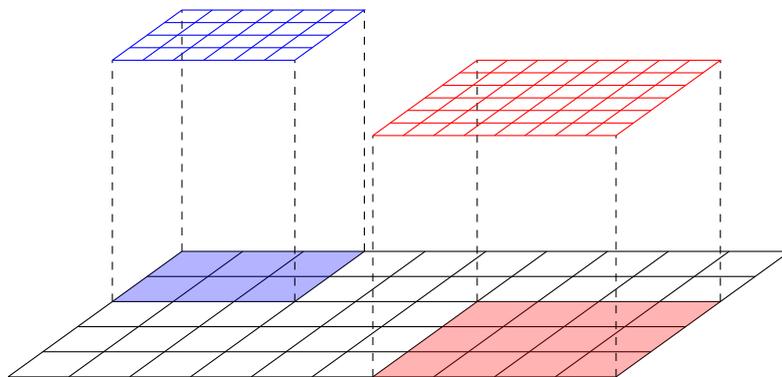


Figure 103: Exemple d'un maillage multi-grilles locales. Le maillage grossier est le maillage initial et les zones d'intérêt en couleur ont été enrichies grâce à une grille locale de pas de discrétisation plus fin.

Ces méthodes résolvent le problème éléments finis sur un maillage donné en interagis-

sant avec une hiérarchie de maillages. Ce type de méthode peut être vu de deux façons complémentaires [59]. La première consiste à considérer les grilles grossières comme des grilles de correction permettant d'accélérer la convergence sur les grilles fines en lissant les hautes fréquences. La seconde considère les grilles fines comme des grilles de correction permettant d'augmenter la précision sur les grilles grossières. Les méthodes basées sur cette seconde vision sont présentées dans la suite.

Les différentes grilles sont reliées par des opérateurs d'interpolation : les interpolations réalisées des grilles fines vers les grilles grossières sont appelées restriction et inversement, la phase où les informations sont interpolées des grilles grossières vers les grilles fines est nommée prolongation. L'opération de restriction permet de corriger les solutions sur les maillages grossiers et l'opération de prolongement permet d'imposer des Conditions aux Limites (CL) sur les maillages fins locaux ainsi que de lisser les hautes fréquences. Plusieurs opérateurs de prolongation peuvent être utilisés. La méthode la plus simple, appelée méthode de collocation, consiste à interpoler les variables nodales du maillage grossier grâce aux fonctions d'interpolation de ce maillage vers le maillage immédiatement plus fin. Une autre méthode consiste à utiliser la méthode Mortar qui permet le raccordement des interfaces non conformes de différentes grilles [60].

Les méthodes multi-grilles locales se différencient principalement par le choix des opérateurs de restriction et de prolongation.

**Local Defect Correction** Dans la méthode Local Defect Correction (LDC) [61], le problème considéré est résolu sur l'ensemble des grilles jusqu'à ce que la solution du problème ait convergé. Dans la suite, la méthode LDC est expliquée pour deux grilles hiérarchiques mais cette méthode peut être appliquée à un ensemble de grilles fines emboîtées non régulières. Le processus itératif de cette méthode peut être schématisée par la Figure 104.

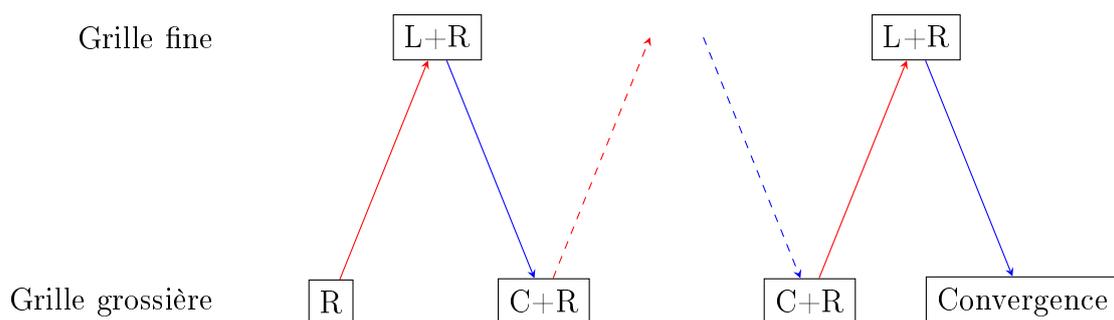


Figure 104: Illustration d'un processus itératif de la méthode LDC sur deux grilles appelé  $\wedge$ -cycle. R correspond à la résolution, L à l'étape de lissage et C à l'étape de correction. Les flèches en rouge représentent les opérations de prolongement et les flèches en bleu les opérations de restriction.

La méthode de prolongation utilisée pour déterminer les CL du maillage immédiatement plus fin à partir d'un maillage grossier est la méthode de collocation. Soit  $\Omega_0$  un domaine d'étude discrétisé par le maillage grossier  $G_0$  et  $\Omega_1$  une zone d'intérêt telle que  $\Omega_1 \subset \Omega_0$ , discrétisée par un maillage plus fin  $G_1$  (voir Figure 105).

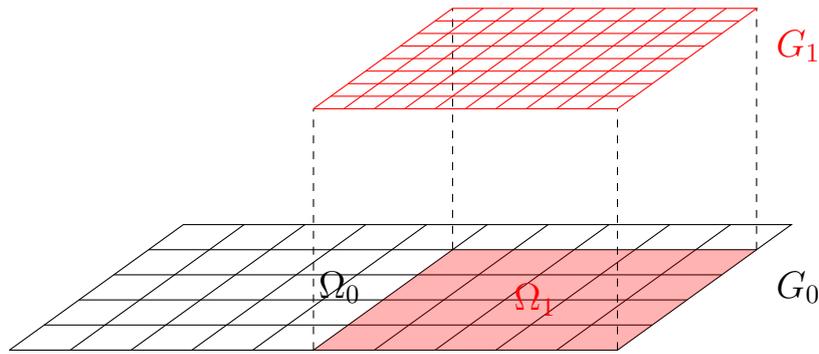


Figure 105: Illustration de la méthode LDC sur deux grilles, la zone en rouge correspondant à la zone d'intérêt.

Les CL sont appliquées sur le contour de  $\Omega_0$  et peuvent être de type Dirichlet ou Neumann. Les CL appliquées sur le contour  $\Gamma_1$  de  $\Omega_1$  sont d'une part les CL appliquées sur  $\Gamma_0$  si  $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$  et d'autre part des conditions de Dirichlet obtenues en interpolant la solution  $u_h^0$  grossière sur  $\Gamma_1 \setminus \Gamma_1 \cap \Gamma_0$  (étape de prolongement).

L'étape de restriction consiste à corriger le problème grossier via un résidu calculé sur la grille immédiatement plus fine. Dans la méthode LCD, cette étape nécessite d'introduire deux sous-grilles supplémentaires  $G'_0$  et  $G''_0$  [61]. La première sous-grille  $G'_0$  est constituée des noeuds de  $G_0$  strictement inclus dans le domaine  $\Omega_1$  discrétisé par  $G_1$  et représente la zone de restriction où la solution fine calculée sur  $G_1$  est interpolée (classiquement avec un polynôme) sur les noeuds de la grille  $G_0$  (voir Figure 106). La seconde grille  $G''_0$  est constituée des noeuds appartenant à l'intérieur de  $G'_0 \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_0)$  et représente l'ensemble des noeuds où une correction du second membre est effectuée.

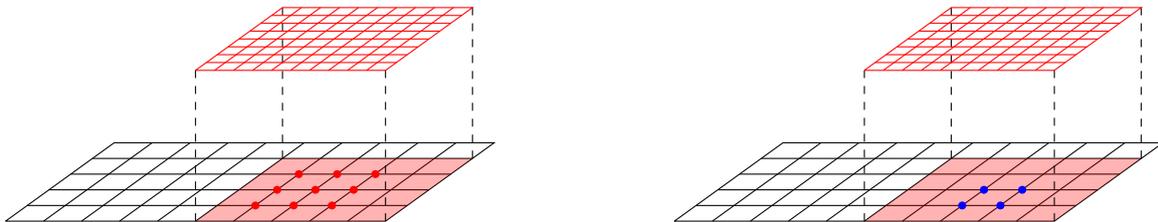


Figure 106: Illustration des deux sous-grilles : les noeuds rouges représentent les noeuds appartenant à la grille  $G'_0$  et les noeuds bleus appartenant à la grille  $G''_0$ .

Etant donné que la méthode LCD ne corrige la solution grossière que dans une zone réduite à la zone de restriction, elle nécessite une zone de restriction  $G'_0$  assez large pour être efficace. Ce schéma est ensuite réitéré jusqu'à convergence en utilisant la solution la plus grossière corrigée pour l'étape de prolongement.

**Fast Adaptive Composite Grid** La méthode Fast Adaptive Composite Grid (FAC) [62] est similaire à la méthode LDC et aux techniques multi-niveaux locales classiques ([63]). La différence est que cette méthode est plus robuste et plus efficace que la méthode LDC. L'avantage de cette méthode est de pouvoir utiliser différents solveurs pour chaque grille, ce qui rend la méthode plus générale.

Dans la suite, la méthode FAC est illustrée sur deux grilles : une grille  $G_0$  recouvrant

le domaine  $\Omega_0$  et une grille fine locale  $G_1$  recouvrant un domaine  $\Omega_1$  (avec  $\Omega_1 \subset \Omega_0$ ). La méthode FAC est une méthode itérative pour la résolution de problèmes aux conditions aux limites et est basée sur une grille composite formée par les différentes sous-grilles. Dans l'exemple, la grille composite  $G_{0,1}$  est telle que  $G_{0,1} = G_0 \cup G_1$ . De plus, la grille grossière sur  $\Omega_1$  est notée  $G_0^1$  (voir Figure 107).

Pour cette méthode, l'interface  $\Gamma$  entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_0 \setminus \Omega_1$  coïncide avec une ligne de la grille de  $G_0$ . L'interface du maillage grossier  $\Gamma_0$  est telle que  $\Gamma_0 = \Gamma \cap G_0$  et l'interface de la grille fine vérifie  $\Gamma_1 = \Gamma \cap G_1$ . Un exemple des différentes interfaces est montré sur la Figure 107.

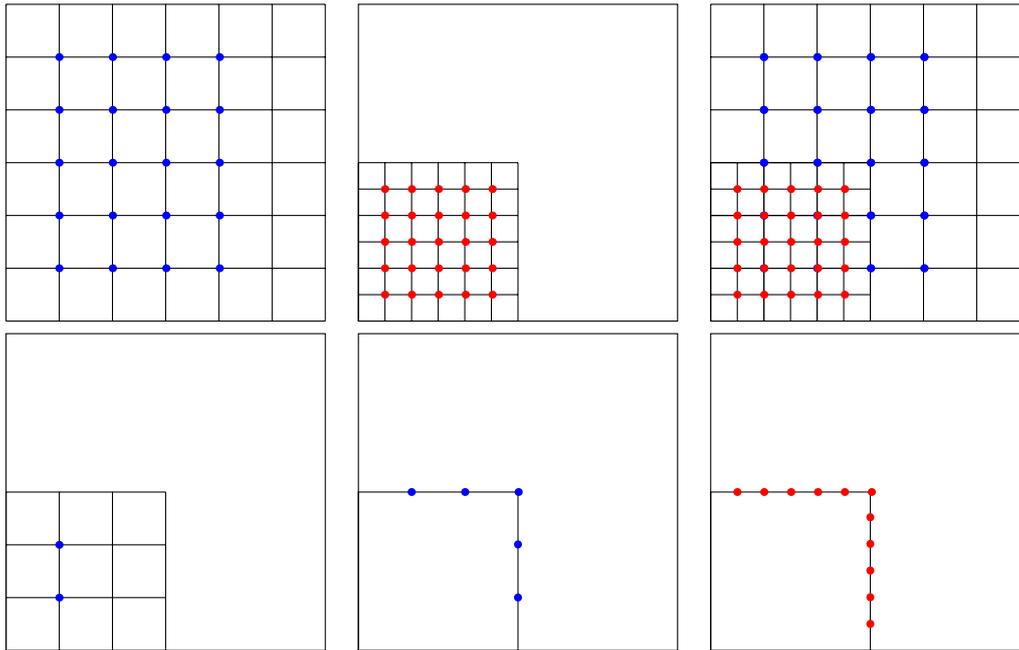


Figure 107: Illustration des différentes grilles nécessaires à la méthode FAC : de gauche à droite,  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_{0,1}$ ,  $G_0^1$ ,  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ .

La grille composite peut être partitionnée de la manière suivante :

$$G_{0,1} = G_1 \cup \Gamma_0 \cup G_0^0 \quad (.2)$$

où la grille  $G_0^0$  représente l'ensemble des nœuds de la grille  $G_0$  qui ne sont pas contenus dans  $\Omega_1$  ni dans  $\Gamma$ .

Le problème de base à résoudre est le problème suivant :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega_0 \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (.3)$$

où  $L$  est un opérateur différentiel en espace,  $u$  la solution du problème et  $f$  le second membre.

La méthode FAC consiste à discrétiser ce problème sur les grilles  $G_0$  et  $G_1$  pour obtenir le problème discrétisé sur le maillage composite  $G_{0,1}$  : le problème discrétisé est le même que sur  $G_0$  pour les nœuds  $x \in G_0^0$ . De même, le problème discrétisé est le même que

sur  $G_1$  pour les noeuds  $x \in G_1$ . Pour certains noeuds de  $G_1$  proches de l'interface, des inconnues apparaissent aux noeuds « esclaves »  $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_0$ . Pour éliminer ces inconnues aux noeuds esclaves, un opérateur d'interpolation  $p$  entre  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  est introduit. Aux noeuds  $x \in \Gamma_0$ , le maillage composite est localement non uniforme. Ces noeuds peuvent être traités de plusieurs manières [64]. Une des façons est de traiter ces noeuds comme s'ils appartenaient à la grille uniforme grossière  $G_0$ .

Ainsi, pour résoudre le problème discrétisé sur le maillage composite, deux problèmes discrétisés sont résolus à chaque itération : un sur  $G_0$  et l'autre sur  $G_1$ . Les solutions obtenues sont utilisées pour améliorer l'approximation de la solution du maillage composite.

L'algorithme de la méthode FAC est le suivant :

Pour une approximation initiale sur la grille composite donnée,

Boucle sur  $i = 1, 2, \dots$

1. Initialisation :

Calcul du résidu sur la grille composite

Restriction du résidu de la grille composite sur le maillage global grossier  $G_0$

Restriction du résidu de la grille composite sur le maillage local fin  $G_1$

2. Résolution sur le maillage grossier global  $G_0$

3. Résolution sur le maillage local fin  $G_1$

4. Etape de correction de l'approximation sur la grille  $G_{0,1}$

Comparée à la méthode LDC, la solution n'est pas enrichie sur le maillage grossier global mais sur le maillage composite [64]. Dans cet algorithme, il n'y a aucune étape de lissage mais il est possible d'en introduire [65].

Ces méthodes multi-grilles permettent une augmentation locale du nombre de degrés de liberté mais elles nécessitent une résolution du problème sur plusieurs maillages.

## A.2 Méthodes de raffinement $h$

### A.2.1 Méthodes de remaillages

Les méthodes de raffinement  $h$  les plus utilisées sont les méthodes de remaillage. Pour ces méthodes, les zones d'intérêt présentant une erreur trop élevée sont remaillées avec une taille de maille inférieure. Un nouveau maillage est donc généré à chaque raffinement. Les stratégies de remaillage sont basées sur un critère d'optimalité qui varient suivant les auteurs [66] et peuvent générer des maillages différents (distribution spatiale et nombre d'éléments différents). Ces critères d'optimalité sont basés sur des fonctions permettant

d'obtenir une taille de maille en fonction de l'erreur souhaitée. Ces fonctions reposent sur d'autres critères dépendant de la vision d'un auteur sur la distribution de l'erreur sur un maillage optimal. Dans [67] [68], les auteurs considèrent que la distribution d'erreur doit être globalement uniforme dans un maillage optimal, alors que dans [69] la distribution d'erreur doit être localement uniforme dans les éléments du nouveau maillage générés.

### A.2.2 Raffinement $h$ non conforme

**$h$  non conforme** La famille de méthodes de type  $h$  non conformes consiste à introduire des relations supplémentaires aux nœuds non conformes afin de garantir la continuité des champs cinématiques d'une maille à l'autre. Ces nœuds appelés « Hanging Nodes » n'ont pas de degrés de liberté et sont difficiles à gérer. Il existe plusieurs méthodes pour les prendre en compte, comme contraindre la valeur au nœud en interpolant les valeurs des nœuds conformes adjacents [70] [71] (interpolation des valeurs des nœuds 2 et 5 de la Figure 7 pour fixer la valeur au nœud 10). Une autre façon de traiter ces non-conformités est d'utiliser une méthode basée sur des multiplicateurs de Lagrange [19] et une méthode de pénalisation. L'utilisation de cette famille de méthode nécessite une modification de la méthode numérique ainsi que du schéma numérique.

**$h$  conforme** La seconde famille est appelée raffinement de type  $h$  conforme et consiste à introduire des éléments supplémentaires pour rendre le maillage raffiné conforme (voir Figure 108).

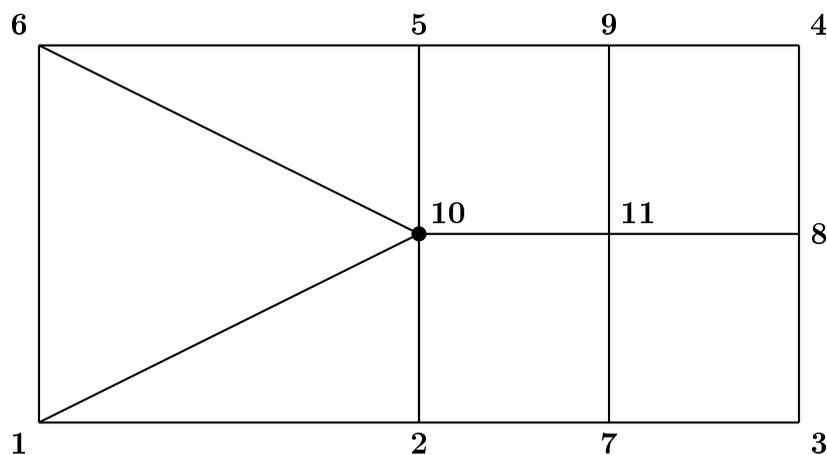


Figure 108: Illustration d'un raffinement  $h$  conforme.

Une méthode basée sur cette idée appliquée aux mailles triangulaires en deux dimensions est la méthode « Green-Red » [72]. Cette méthode consiste à raffiner un triangle en quatre triangles en connectant les centres de chaque arête du triangle (raffinement « Red »). Ce raffinement préserve la qualité de la maille initiale mais peut créer des nœuds non conformes lorsqu'une maille raffinée est située à côté d'une maille non raffinée. En cas de non-conformité, un raffinement supplémentaire est appliqué (raffinement « Green ») en reliant les nœuds non conformes au nœud opposé de la maille adjacente non raffinée.

Cette méthode a été étendue aux géométries 3D pour les tétraèdres [73] et les hexaèdres [74] mais est complexe à mettre en place.

Bien que cette méthode assure la conformité entre mailles raffinées et non raffinées, les mailles générées dans la zone de transition ne conservent pas la qualité des mailles non raffinées et peuvent « s'aplatir » lors d'un raffinement sur plusieurs niveaux. Ces mailles dites « plates » sont préjudiciables à la précision de la solution calculée.

Une autre méthode s'appliquant à des éléments triangulaires rectangles isocèles a été développée dans [75]. Cette méthode, appelée 4k, est basée sur la subdivision des arêtes des éléments triangles en deux arêtes égales. La subdivision d'une arête concerne donc au minimum deux mailles si l'arête ne fait pas partie du contour du maillage (voir Figure 109). Le raffinement d'une arête intérieure reliée à deux mailles triangulaires génère quatre mailles triangulaires et celui d'une arête du contour génère deux mailles triangulaires.

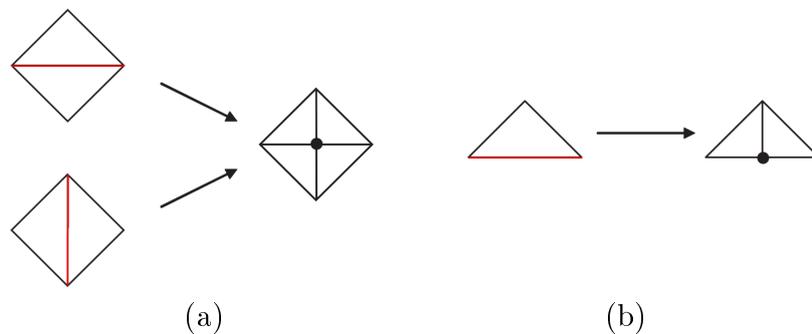


Figure 109: Motifs de raffinement possibles décrits dans [75] : (a) mailles dont l'arête appartient à l'intérieur (b) arête appartenant au contour.

Pour conserver la topologie des triangles, seules les arêtes opposées à l'angle droit des mailles peuvent être subdivisées. Dans le cas où une autre arête de l'élément doit être raffinée, une procédure récursive a été développée afin de transformer le sous maillage admissible à un des motifs de la Figure 109. Cette procédure consiste à subdiviser les arêtes des éléments voisins jusqu'à ce que l'arête à raffiner appartienne à un élément dont l'angle droit lui fait face. Cette procédure est illustrée sur la Figure 110.

Lorsque l'arête en pointillés de la Figure 110(a) doit être subdivisée, cette arête ne correspondant à aucun des motifs de la Figure 109, des arêtes supplémentaires doivent être

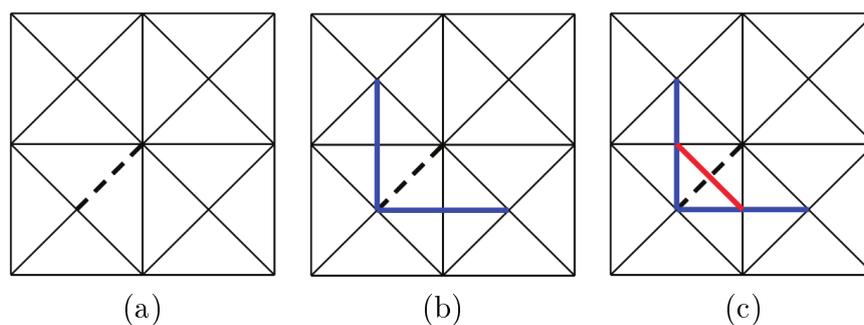


Figure 110: Procédure récursive de subdivision d'arêtes : (a) arête à raffiner en pointillés, (b) subdivision des arêtes des éléments voisins, (c) subdivision de l'arête en pointillés.

subdivisées (Figure 110(b)) afin d'obtenir une configuration admissible (Figure 110(c)). Une méthode semblable à la méthode 4k mais applicable à des maillages triangulaires non structurés a été développée dans [76]. Cette méthode est basée sur la subdivision de l'arête la plus longue d'un élément triangulaire et a été optimisée en recourant à une méthode de triangulation de type Delaunay. Cette dernière méthode, applicable aux éléments tridimensionnels, assure la création de mailles raffinées dont la qualité ne dégénère pas.

Bien que ces méthodes permettent d'obtenir des maillages raffinés conformes, ces méthodes sont complexes à implémenter dans un code de calcul, et la qualité des mailles initiales n'est pas conservée lors du raffinement.

## B Motifs et équations de raffinement des éléments 3D

Les motifs de raffinement et les équations associées sont présentées pour les éléments linéaires hexaédriques et tétraédriques. Une attention particulière est accordée aux éléments tétraédriques en explicitant la stratégie utilisée afin d'assurer que le motif soit constitué exclusivement de tétraèdres et qu'un raffinement successif basé sur ce motif ne dégenère pas la qualité des mailles. Pour les éléments de référence tridimensionnels, la stratégie pour l'obtention du motif de raffinement est la même que pour les éléments bidimensionnels : chaque arête de l'élément de référence est divisée en deux arêtes égales.

### B.1 Élément hexaédrique

La Figure 111 montre le motif de raffinement d'un cube, le Tableau 18 présente les coordonnées des nœuds reliés aux fonctions de base raffinées et les équations reliées au motif de raffinement sont données par les équations (.4).

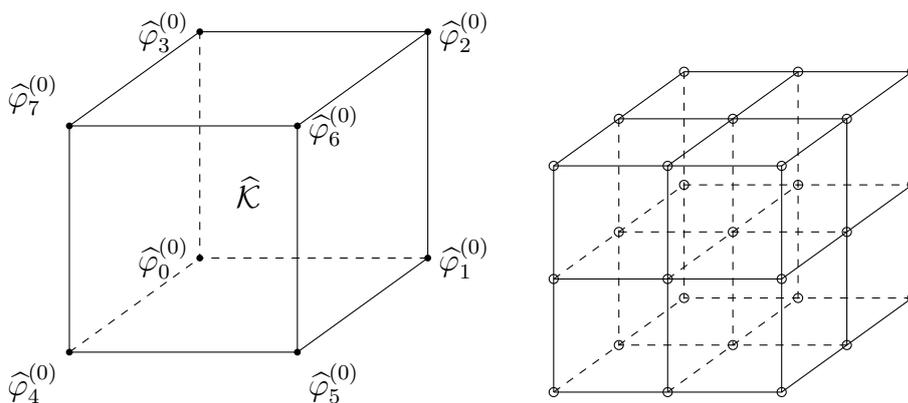


Figure 111: Motif de raffinement d'un élément  $\mathbb{Q}_1$  cubique.

Fonction raffinée	Coordonnées	Fonction raffinée	Coordonnées
$\varphi_0^{(1)}$	(0, 0, 0)	$\varphi_1^{(1)}$	(0.5, 0, 0)
$\varphi_2^{(1)}$	(1, 0, 0)	$\varphi_3^{(1)}$	(0, 0.5, 0)
$\varphi_4^{(1)}$	(0.5, 0.5, 0)	$\varphi_5^{(1)}$	(1, 0.5, 0)
$\varphi_6^{(1)}$	(0, 1, 0)	$\varphi_7^{(1)}$	(0.5, 1, 0)
$\varphi_8^{(1)}$	(1, 1, 0)	$\varphi_9^{(1)}$	(0, 0, 0.5)
$\varphi_{10}^{(1)}$	(0.5, 0, 0.5)	$\varphi_{11}^{(1)}$	(1, 0, 0.5)
$\varphi_{12}^{(1)}$	(0, 0.5, 0.5)	$\varphi_{13}^{(1)}$	(0.5, 0.5, 0.5)
$\varphi_{14}^{(1)}$	(1, 0.5, 0.5)	$\varphi_{15}^{(1)}$	(0, 1, 0.5)
$\varphi_{16}^{(1)}$	(0.5, 1, 0.5)	$\varphi_{17}^{(1)}$	(1, 1, 0.5)
$\varphi_{18}^{(1)}$	(0, 0, 1)	$\varphi_{19}^{(1)}$	(0.5, 0, 1)
$\varphi_{20}^{(1)}$	(1, 0, 1)	$\varphi_{21}^{(1)}$	(0, 0.5, 1)
$\varphi_{22}^{(1)}$	(0.5, 0.5, 1)	$\varphi_{23}^{(1)}$	(1, 0.5, 1)
$\varphi_{24}^{(1)}$	(0, 1, 1)	$\varphi_{25}^{(1)}$	(0.5, 1, 1)
$\varphi_{26}^{(1)}$	(1, 1, 1)		

Tableau 18: Fonctions de base raffinées et coordonnées des nœuds reliés à ces fonctions.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \widehat{\varphi}_0^{(0)} = \widehat{\varphi}_0^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_3^{(1)} + \widehat{\varphi}_9^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_4^{(1)} + \widehat{\varphi}_{10}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{12}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_1^{(0)} = \widehat{\varphi}_2^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_1^{(1)} + \widehat{\varphi}_{11}^{(1)} + \widehat{\varphi}_5^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_4^{(1)} + \widehat{\varphi}_{10}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{14}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_2^{(0)} = \widehat{\varphi}_8^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_7^{(1)} + \widehat{\varphi}_5^{(1)} + \widehat{\varphi}_{17}^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{16}^{(1)} + \widehat{\varphi}_4^{(1)} + \widehat{\varphi}_{14}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_3^{(0)} = \widehat{\varphi}_6^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_7^{(1)} + \widehat{\varphi}_3^{(1)} + \widehat{\varphi}_{15}^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{16}^{(1)} + \widehat{\varphi}_4^{(1)} + \widehat{\varphi}_{12}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_4^{(0)} = \widehat{\varphi}_{18}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_{19}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{21}^{(1)} + \widehat{\varphi}_9^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{22}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{10}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{12}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_5^{(0)} = \widehat{\varphi}_{20}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_{19}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{23}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{11}^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{22}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{14}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{10}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_6^{(0)} = \widehat{\varphi}_{26}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_{25}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{23}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{17}^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{14}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{22}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{16}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)} \\
 \widehat{\varphi}_7^{(0)} = \widehat{\varphi}_{24}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \widehat{\varphi}_{21}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{25}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{15}^{(1)} \right) + \frac{1}{4} \left( \widehat{\varphi}_{12}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{16}^{(1)} + \widehat{\varphi}_{22}^{(1)} \right) + \frac{1}{8} \widehat{\varphi}_{13}^{(1)}
 \end{array} \right. \quad (.4)$$

## B.2 Élément tétraédrique

Contrairement aux autres éléments présentés, les tétraèdres introduisent une difficulté supplémentaire pour le raffinement. En effet, le raffinement d'un cube revient à couper ce cube en huit cubes identiques, alors qu'un tétraèdre ne peut se couper en huit tétraèdres identiques. Ainsi, si aucune précaution n'est prise, les mailles raffinées peuvent dégénérer, c'est-à-dire que les mailles raffinées générées peuvent être préjudiciables à la résolution éléments finis (mailles dites « plates »).

En se basant sur la même stratégie de raffinement que précédemment, c'est-à-dire couper chaque arête en leur milieu afin d'introduire des nœuds associés à des fonctions de base, les tétraèdres raffinés obtenus sont montrés sur la Figure 112. A chaque sommet du tétraèdre de base est associé un tétraèdre raffiné et ces quatre tétraèdres raffinés sont identiques (comme lors du raffinement d'un cube). Toutefois, un problème apparaît : deux pyramides à base carrée apparaissent au centre de l'élément de base. D'après la définition d'un motif de raffinement de la section 1.3.2, un motif de raffinement est obtenu à partir de l'élément de référence lui-même. La question est donc de savoir comment couper ces deux éléments afin d'obtenir d'une part des tétraèdres et d'autre part une qualité constante au cours d'un raffinement sur plusieurs niveaux.

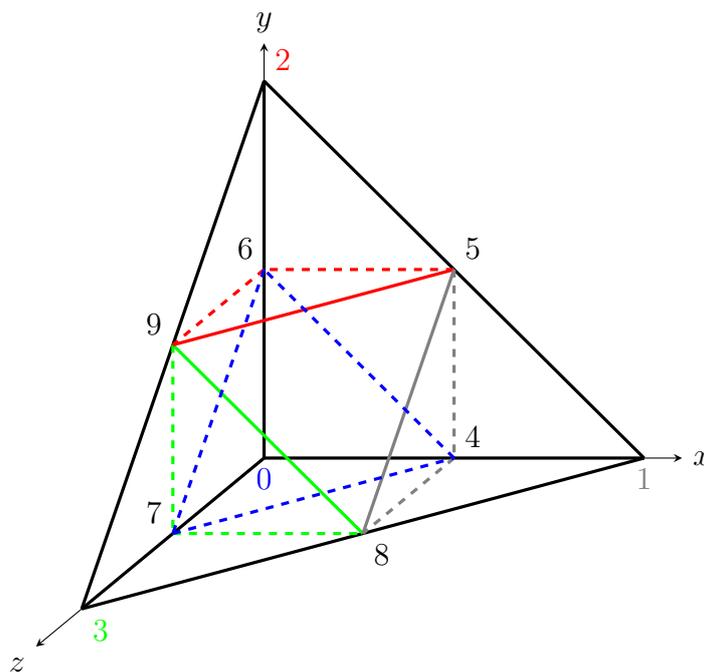


Figure 112: Motif de raffinement d'un tétraèdre à l'aide de la stratégie jusqu'alors utilisée. Mise en évidence des deux pyramides à base carrée au centre du tétraèdre de base.

Deux possibilités de découpe se présentent alors : soit selon l'une des diagonales principales de la base carrée (diagonale 8-6, appelée classe 1 sur la Figure 113) ou selon l'autre diagonale principale (diagonale 9-4, appelée classe 2 sur la Figure 114).

Toutefois, il a été prouvé [29] que si la diagonale de découpe est toujours la même, les mailles obtenues sur plusieurs niveaux tendent à dégénérer.

La stratégie assurant la non dégénérescence des mailles est décrite dans [29]. Cette

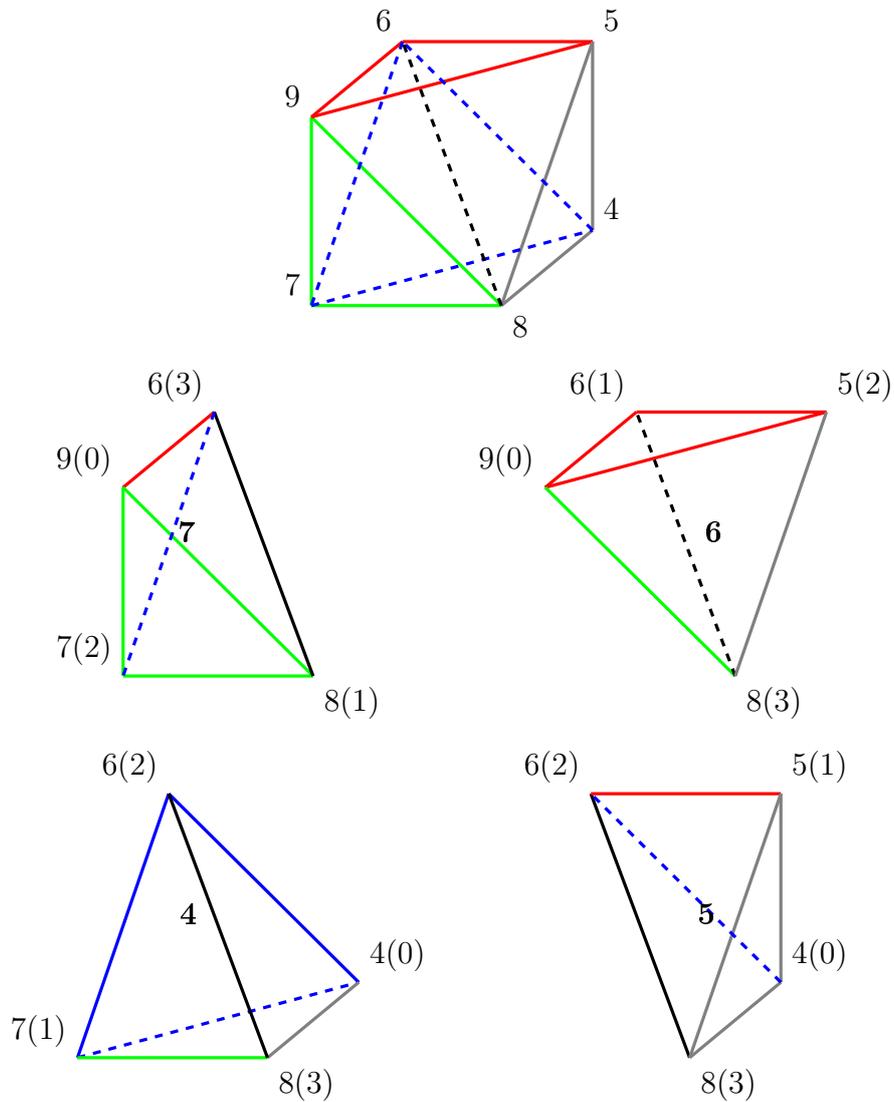


Figure 113: Tétraèdres obtenus à partir des deux pyramides à base carrée lors de la découpe de la base selon la diagonale 8-6 (appelé classe 1), ainsi que de la numérotation associée à chaque nœud et chaque tétraèdre (en parenthèse le numéro des nœuds locaux).

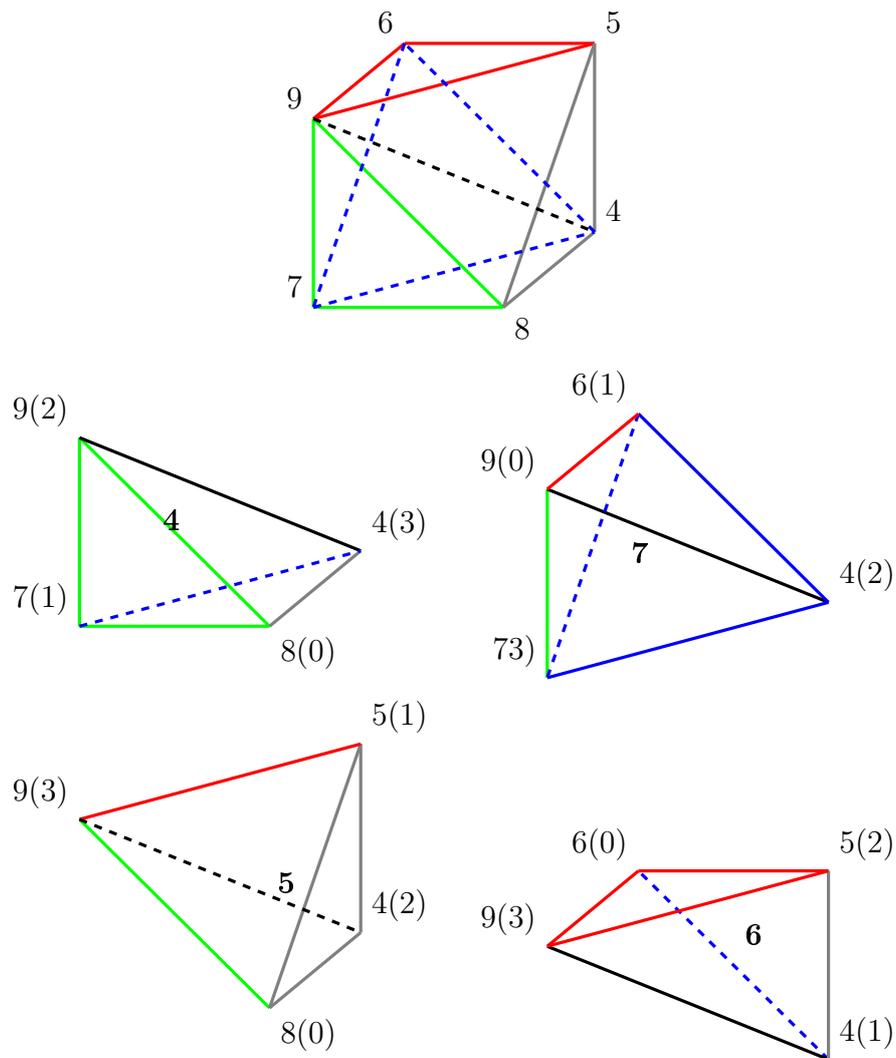


Figure 114: Tétraèdres obtenus à partir des deux pyramides à base carrée lors de la découpe de la base selon la diagonale 9-4 (appelé classe 2), ainsi que de la numérotation associée à chaque nœud et chaque tétraèdre (en parenthèse le numéro des nœuds locaux).

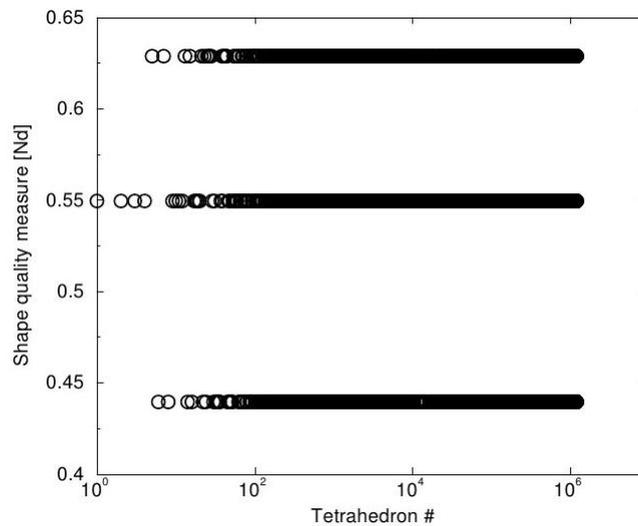


Figure 115: Mesures de qualité pour chaque tétraèdre raffiné obtenues pour un raffinement sur sept niveau.

stratégie se déroule en trois étapes :

- numérotation des nœuds et des tétraèdres raffinés (voir Figure 112),
- lors du premier raffinement, une diagonale de découpe est choisie arbitrairement (diagonale 8-6 ou 9-4),
- si un raffinement successif est effectué (deux niveaux de raffinement au minimum), la diagonale de découpe des mailles 6 et 7 est changée.

Par exemple, si un tétraèdre est raffiné deux fois, lors du premier raffinement, la diagonale de découpe est choisie arbitrairement. Lors du deuxième raffinement, la diagonale de découpe des mailles 6 et 7 change et les diagonales de découpe des autres mailles sont conservées.

Cette stratégie assure que la qualité des mailles ne se dégrade pas. Dans [29], les auteurs définissent une mesure de qualité comme étant le rapport du rayon de la boule inscrite dans le tétraèdre sur le rayon de la boule circonscrite au tétraèdre et ils ont effectué le raffinement successif d'un tétraèdre (voir Figure 115).

Sur la Figure 115, les mesures de qualité obtenues restent constantes. Cela signifie que les mailles obtenues ne dégénèrent pas avec la stratégie présentée.

Les équations de raffinement reliées à l'élément de référence (Figure 116) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0^{(0)} = \varphi_0^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \varphi_4^{(1)} + \varphi_6^{(1)} + \varphi_7^{(1)} \right) \\ \varphi_1^{(0)} = \varphi_1^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \varphi_4^{(1)} + \varphi_5^{(1)} + \varphi_8^{(1)} \right) \\ \varphi_2^{(0)} = \varphi_2^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \varphi_5^{(1)} + \varphi_6^{(1)} + \varphi_9^{(1)} \right) \\ \varphi_3^{(0)} = \varphi_3^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \varphi_7^{(1)} + \varphi_8^{(1)} + \varphi_9^{(1)} \right) \end{array} \right. \quad (.5)$$

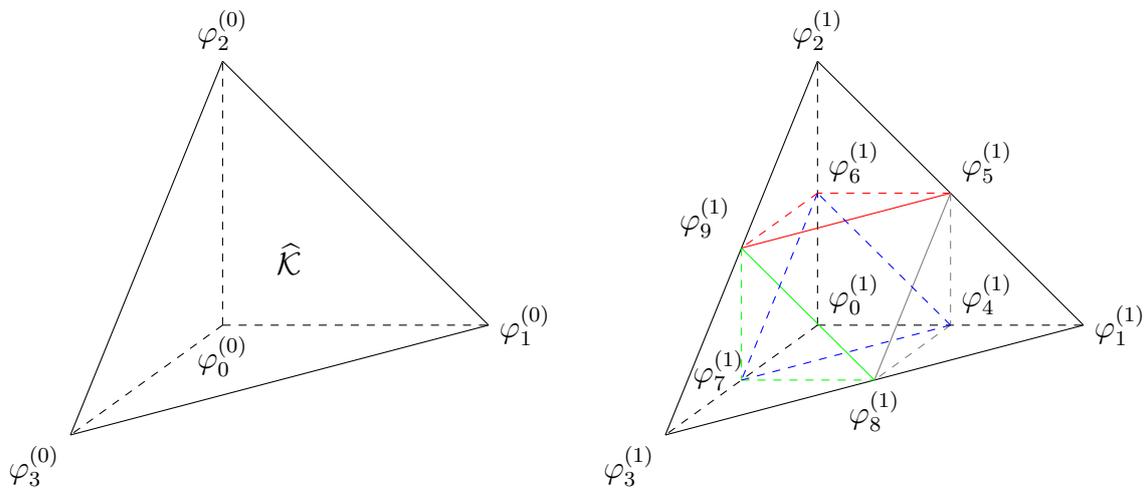


Figure 116: Motif de raffinement d'un élément tétraédrique  $\mathbb{P}_1$ . Les niveaux de raffinement des différentes fonctions de base sont précisées entre parenthèses.

## C Critères basés sur l'estimation d'erreurs

### C.1 Estimation d'erreur basée sur la comparaison de maillages raffinés

L'estimateur d'erreur est basé sur la propriété de convergence au maillage de la Méthode des Eléments Finis : plus la discrétisation du domaine est fine, plus la solution tend vers la solution exacte ( $\lim_{h \rightarrow 0} e^h = 0$ ). L'idée générale est de comparer la qualité des solutions obtenues sur deux maillages de niveau  $j$  et  $j+1$  [77]. Pour définir une erreur locale, une norme permet de comparer la valeur d'un champs sur un élément de niveau  $j$  et ses enfants. L'indicateur d'erreur peut être calculé aux nœuds, aux points de Gauss ou sur un élément.

Lorsqu'il est déterminé aux nœuds, la construction est obtenue par comparaison des valeurs aux nœuds coïncidents (voir Figure 117).

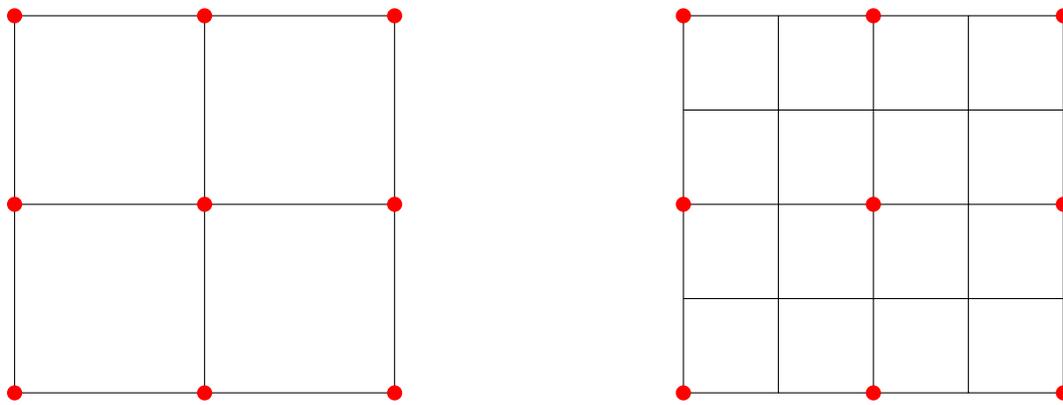


Figure 117: Maillages hiérarchiques de niveaux de raffinements différents. Les points rouges sont les nœuds communs aux deux maillages.

En déplacement, il s'écrit :

$$e_{a_i^{(j)}} = \frac{\|u(a_i^{(j)}) - u(a_k^{(j+1)})\|_2}{\|u(a_k^{(j+1)})\|_2} \quad (.6)$$

où  $u(a_i^{(j)})$  et  $u(a_k^{(j+1)})$  représentent respectivement la valeur du déplacement aux nœuds  $a_i^{(j)}$  et  $a_k^{(j+1)}$ ,  $a_k^{(j+1)}$  coïncide avec le nœud  $a_i^{(j)}$ ,  $\|\cdot\|_2$  représente la norme  $L^2$ . L'indicateur est calculé pour l'ensemble des nœuds du maillage  $M_j$ .

Lorsque l'indicateur est défini aux points de Gauss d'un élément parent, un opérateur de restriction des points de Gauss du maillage  $M_{j+1}$  vers ceux du maillage  $M_j$  doit être introduit.

Enfin, lorsque l'estimateur d'erreur est associé à un élément (variable scalaire généralement calculée par intégration sur l'élément), l'indicateur est calculé en comparant la valeur scalaire de la maille parent à la somme des valeurs des mailles enfants.

L'initialisation du raffinement nécessite la connaissance de la solution sur deux maillages de niveaux de raffinement consécutifs. Ainsi, la résolution du problème sur le mail-

lage grossier global  $M_0$  et sur un maillage global raffiné  $M_1$  doit être réalisée. Puis, après le calcul d'estimateur d'erreur, le maillage  $M_0$  est divisé en deux zones : une zone où la précision est suffisante et une zone où la précision souhaitée n'est pas atteinte. Dans la seconde zone, le maillage sera effectivement localement raffiné et les estimateurs d'erreur seront à nouveau calculés grâce à un maillage local  $M_3$  recouvrant cette zone. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la convergence entre deux maillages de niveaux de raffinement consécutifs  $M_j$  et  $M_{j+1}$  soit atteinte sur l'ensemble du domaine à la précision souhaitée.

L'avantage de ce type d'estimateurs d'erreur est que la précision de l'estimation est correcte et permet de contrôler efficacement la précision. L'inconvénient majeur est que la détermination est coûteuse car elle nécessite la résolution sur deux maillages minimum à chaque pas de temps.

Cette méthode d'estimation d'erreur a été appliquée à une méthode multigrille dans le cadre de la dynamique transitoire non linéaire [77] et à une méthode de raffinement basée sur la bisection d'éléments appliquée à la thermique et à la mécanique non linéaire [78]. Une extension de cette estimation aux méthodes de raffinement  $p$  semble possible [79].

## C.2 Estimation basée sur l'erreur en relation de comportement

Le critère est basé sur la détermination d'un couple formé d'un champ de contraintes statiquement admissibles et d'un champ de déplacements cinématiquement admissibles vérifiant une relation de comportement. Si ce couple vérifie les conditions d'admissibilité et la relation de comportement, alors il s'agit de la solution exacte du problème [80]. Sinon le résidu en relation de comportement est déterminé comme étant la norme de la différence obtenue pour ce couple sur la relation de comportement.

Pour un matériau élastique, le résidu peut s'écrire  $r^h = \|\sigma^{SA} - C\varepsilon(u^{CA})\|$ , où  $\sigma^{SA}$  est le champ des contraintes statiquement admissibles,  $C$  est le tenseur d'élasticité,  $\varepsilon$  est le champ des déformations déterminé à partir de  $u^{CA}$  le champ des déplacements cinématiquement admissibles et enfin  $\|\cdot\|$  est la norme en énergie. L'estimation d'erreur est définie pour chaque élément  $\mathcal{K}$  par :

$$e_{\mathcal{K}}^h = \frac{\|\sigma_{\mathcal{K}}^{SA} - C\varepsilon_{\mathcal{K}}^{CA}\|}{\frac{1}{2}(\|\sigma_{\mathcal{K}}^{SA}\|^2 + \|C\varepsilon_{\mathcal{K}}^{CA}\|^2)} \quad (.7)$$

Le champ cinématiquement admissible utilisé pour cette mesure est le champ de déplacements obtenu par la Méthode des Eléments Finis ( $u^h$ ) :  $u^{CA} = u^h$ . On a donc  $\varepsilon^{CA} = \varepsilon^h$ .

La difficulté de cette méthode réside dans la détermination d'un champ de contraintes statiquement admissibles qui vérifie la relation en comportement en tout point. Une des techniques consiste à construire  $\sigma_{SA}$  en se basant sur la condition de prolongement

admissible [81] :

$$\int_{\mathcal{K}} (\sigma^{SA} - \sigma^{CA}) \text{grad}(\varphi_i) dV = 0 \quad \forall \mathcal{K} \in \Omega, \quad \forall i \in \llbracket 0, N_{ddl} - 1 \rrbracket \quad (.8)$$

avec  $\mathcal{K}$  un élément du maillage,  $\varphi_i$  représente la fonction de base reliée au nœud  $i$  et  $N_{ddl}$  le nombre de nœuds de l'élément  $\mathcal{K}$ . Cette condition impose que le travail du champ  $\sigma_{SA}$  soit égal au travail de la contrainte discrète  $\sigma_h$  (ou  $\sigma_{CA}$ ) quel que soit l'élément  $\mathcal{K}$  considéré. Sur les bords de l'élément  $\mathcal{K}$ , une fonction constante  $\delta_{\mathcal{K}}$  est construite telle que  $\delta_{\mathcal{K}_1} + \delta_{\mathcal{K}_2} = 0$ , où  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sont deux éléments. Pour construire les champs de contraintes statiquement admissibles, des densités d'effort  $F_{\mathcal{K}}$  sont construites à l'interface de chaque élément  $\mathcal{K}$  pour assurer la continuité du vecteur du champ de contraintes :

$$\sigma_{\mathcal{K}}^{SA} \cdot n_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{K}} \cdot F_{\mathcal{K}} \quad (.9)$$

où  $n_{\mathcal{K}}$  représente la normale sortante à l'élément  $\mathcal{K}$ . Ces densités d'efforts sont déterminées en vérifiant l'équilibre avec les forces intérieures  $f$  sur chaque élément :

$$\int_{\mathcal{K}} f u_s dV + \int_{\Gamma_{\mathcal{K}}} \alpha_{\mathcal{K}} F_{\mathcal{K}} dS = 0 \quad (.10)$$

où  $u_s$  représente le déplacement du corps rigide  $\mathcal{K}$ .

Ainsi, le champ des contraintes statiquement admissibles  $\sigma^{SA}$  est déterminé en résolvant le problème local suivant :

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma_{\mathcal{K}}^{SA}) + f = 0 \text{ dans } \mathcal{K} \\ \sigma_{\mathcal{K}}^{SA} \cdot n_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{K}} \cdot F_{\mathcal{K}} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{K} \end{cases} \quad (.11)$$

Cette méthode permet de déterminer une borne supérieure de l'erreur de discrétisation et est applicable à tout type de comportement et de méthode de raffinement. Néanmoins, elle nécessite une étape de résolution supplémentaire pour construire le champ des contraintes statiquement admissibles, augmentant le coût de calcul. C'est pourquoi cet estimateur d'erreur est rarement utilisé dans la pratique.

### C.3 Estimation basée sur les résidus d'équilibre

Proposé par Babuska et Rheinboldt [82] dans le cadre de la méthode des Éléments Finis appliquée à la mécanique des solides, ce critère est basé sur le fait que le champ des contraintes obtenu ne vérifie pas l'équation d'équilibre localement. Ainsi, pour quantifier l'erreur commise sur le champ des contraintes, des résidus d'équilibre sont déterminés pour chaque élément.

Le résidu d'équilibre est divisé en deux parties sur l'élément  $\mathcal{K}$  considéré :

- le résidu intérieur  $r_{int} = \text{div}(\sigma_{\mathcal{K}}^h) + f$ , où  $\sigma_{\mathcal{K}}^h$  est le champ des contraintes et  $f$  sont les forces volumiques imposées. Ce résidu permet de quantifier l'erreur d'équilibre du champ de contraintes  $\sigma^h$  (le champs  $\sigma^h$  n'est pas statiquement admissible),

- le résidu  $r_\Gamma$  sur le bord  $\Gamma$  de l'élément non inclus dans les bords imposés en déplacement, tel que :
  - si le bord  $\Gamma$  de l'élément  $\mathcal{K}_1$  n'est pas un bord imposé en force et est commun à un élément  $\mathcal{K}_2$ , alors  $r_\Gamma = \sigma_{\mathcal{K}_1}^h \cdot n_{\mathcal{K}_1} + \sigma_{\mathcal{K}_2}^h \cdot n_{\mathcal{K}_2}$ , avec  $n_i$  la normale sortante de l'élément  $i$ ,
  - si  $\Gamma$  est un bord imposé en force, alors  $r_\Gamma = F - \sigma_{\mathcal{K}}^h \cdot n_{\mathcal{K}}$ , avec  $F$  la force imposée.

Ce résidu permet de quantifier le saut des contraintes dans la direction  $n$  entre deux éléments adjacents et la différence entre les conditions aux limites en force imposées et calculées.

Les estimateurs d'erreur basés sur le résidu d'équilibre peuvent être calculés sur l'ensemble du maillage, l'information est globale (estimateur explicite), ou sur chaque élément ou sur un patch d'éléments, l'information est locale (estimateur implicite).

Bien que l'estimateur explicite soit simple à intégrer dans un code de calcul, il est basé sur des constantes souvent difficiles à déterminer pour passer du résidu d'équilibre à une approximation globale de l'erreur. Ces constantes sont la plupart du temps approximées, rendant l'estimation de l'erreur peu précise. Dans le cadre du raffinement local adaptatif, étant donné que l'erreur globale peut être très différente de l'erreur locale, cet estimateur ne permet pas un raffinement optimal.

L'estimateur implicite est plus adapté à un raffinement de maillage. Toutefois, les problèmes élémentaires pour approximer une erreur locale à partir des résidus locaux augmentent le coût numérique et n'ont pas toujours de solution si le problème est mal posé.

## C.4 Estimation basée sur le lissage des contraintes

Initialement développée par Zienkiewicz et Zhu [69], cette méthode est basée sur la discontinuité du champ des contraintes à l'interface de deux éléments. L'erreur est estimée sur le champ des contraintes :  $\|e^h\| = \|\sigma - \sigma^h\|$ . Pour cela, le champ des contraintes  $\sigma$  est approximé par un champ de contraintes  $\sigma^*$  plus régulier que celui obtenu par la Méthode des Eléments Finis  $\sigma^h$  car ce champ présente des discontinuités aux interfaces entre les éléments. L'idée est de construire un champ  $\sigma^*$  lissé et continu. Pour lisser ce champ, le champ des contraintes  $\sigma^h$  est interpolé aux nœuds des éléments et les mêmes fonctions de bases que celles du champ des déplacements sont utilisées pour obtenir un champ continu :

$$\sigma^* = \varphi \bar{\sigma}^* \quad (.12)$$

où  $\varphi$  représente la matrice des fonctions de bases et  $\bar{\sigma}^*$  les valeurs nodales du champ de contraintes obtenues à partir des valeurs du champ des contraintes grâce à une méthode de minimisation des moindres carrés. Le système linéaire à résoudre pour construire  $\sigma^*$

devient le suivant :

$$\int_{\Omega} {}^t\varphi(\sigma^* - \sigma^h)d\Omega = 0 \quad (.13)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme d'un système linéaire du type  $Ax = b$ , où  $A = \int_{\Omega} {}^t\varphi\varphi d\Omega$ ,  $x = \bar{\sigma}^*$  et  $b = \int_{\Omega} {}^t\varphi\sigma^h d\Omega$ .

En résolvant ce système, l'estimation de l'erreur est déterminée. Il peut être résolu de manière locale en moyennant l'écart des deux champs de contraintes sur chaque élément et constitue un critère de raffinement local adaptatif.

Cette approche locale de lissage du champ de contraintes a comme avantages d'être simple et moins coûteuse en temps calcul que le critère précédent. Néanmoins, cette approche n'est pas assez précise pour garantir que l'estimation de l'erreur soit fiable et des coefficients empiriques doivent être introduits dans le cas d'éléments quadratiques.

Dans l'optique d'améliorer le lissage du champ de contraintes  $\sigma^*$ , une approche alternative a été développée par Zienkiewicz et Zhu [83] [84]. Cette approche, appelée SPR (Superconvergent Patch Recovery), repose sur des patchs formés par un ensemble d'éléments, et de « super-convergence » aux points d'intégration (points de Gauss) où sont calculés les contraintes. Le lissage des contraintes sur les patchs ne repose plus sur des fonctions d'interpolation mais sur des polynômes, chaque patch ayant sa propre fonction polynomiale. L'idée est d'exprimer le champ des contraintes lissées sur un patch  $\tilde{\sigma}$  comme étant une fonction polynomiale du même ordre que les fonctions de base utilisées pour le champ des déplacements :

$$\tilde{\sigma} = Pa \quad (.14)$$

où  $P$  correspond à une base polynomiale et  $a$  représente l'ensemble des coefficients polynomiaux. Ces coefficients sont obtenus en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$F(a) = \sum_{i=1}^m (\sigma_h(x_i) - P(x_i)a)^2 \quad (.15)$$

avec  $m$  le nombre de points de Gauss du patch et  $x_i$  les coordonnées de ces points.

La valeur nodale du champ des contraintes lissées au nœud  $k$  (notée  $\bar{\sigma}_k^*$ ) peut ainsi être déterminée :

$$\bar{\sigma}_k^* = P(x_k)a \quad (.16)$$

où  $x_k$  représente les coordonnées du nœud  $k$ .

En cas de recouvrement de patchs, les différentes valeurs nodales calculées sont moyennées. Une fois les valeurs nodales  $\bar{\sigma}^*$  déterminées, le champ des contraintes lissées continu peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma^* = \varphi\bar{\sigma}^* \quad (.17)$$

où  $\varphi$  représente la matrice des fonctions de base du même ordre que celles utilisées pour la résolution du champ des déplacements.

Cette approche permet d'obtenir une bonne précision de l'estimation de l'erreur. Toutefois, le coût numérique est plus important que la première approche. Son rap-

port qualité/coût et sa simplicité font de cet estimateur un des plus utilisés dans les codes de calcul industriels (par exemple CAST3M [18]).

## D Mises à jour des champs Eléments Finis lors du raffinement adaptatif

### D.1 Mises à jour des champs

La mise à jour des champs discrets ne concerne que les résolutions à l'aide de schéma implicite ou semi-implicite. Pour ces schémas, il est nécessaire de connaître au temps  $t_{i+1}$  la valeur des champs au temps  $t_i$ . Ainsi, les champs calculés au temps précédent sur le maillage grossier sont sauvegardés. Après raffinement, la valeur de ces champs est projetée sur le nouveau maillage. Uniquement les champs de déplacement et de vitesse sont concernés par cette mise à jour, les autres champs sont obtenus à partir de la solution en déplacement au temps  $t_{i+1}$ .

Pour les Conditions aux Limites, il est nécessaire de corriger la valeur de la contribution des nœuds imposés reliés aux fonctions de base raffinées dans le cas où une fonction de base grossière a une contribution non nulle en ce point (voir la remarque de la section 1.3.3). La Figure 118 illustre le cas où aucune correction n'est réalisée. La frontière est en partie raffinée et la fonction de base reliée au nœud 0 a une contribution non nulle au nœud 1. Les valeurs reliées aux fonctions de base de la frontière rouge sont imposées à 1. Etant donné que la fonction de base reliée au nœud 0 a un support non nul au nœud 1 ( $\varphi_0^{(0)}(a_1^{(1)}) = 0.5$ ), la valeur approchée du champ  $u$  calculée au nœud 1 devient 1.5.

Il s'agit de retrancher les contributions des fonctions de base plus grossière aux nœuds reliés aux fonctions de base plus fines afin que le champ calculé aux nœuds des frontières imposées soit égal au champ imposé.

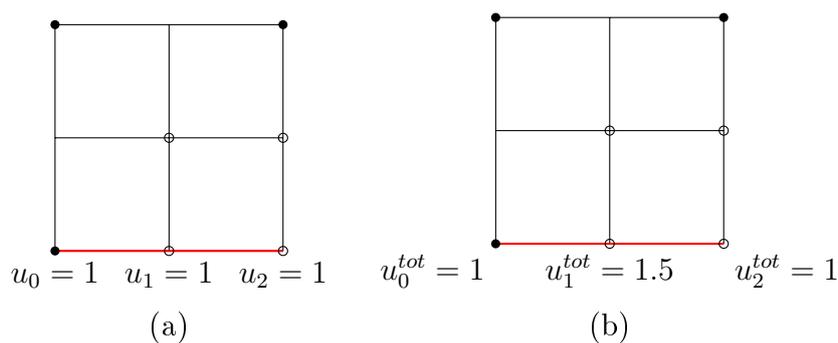


Figure 118: Exemple de frontière imposée partiellement raffinée. La frontière imposée est en rouge, les nœuds non raffinés sont représentés par un point et les nœuds raffinés par un cercle. (a) Contributions reliées aux fonctions de base des nœuds imposés et (b) contributions calculées aux nœuds imposés.

A la place d'attribuer la valeur nodale imposée au nœud 1, la contribution du nœud 0 est retranchée à la valeur imposée au nœud 1. Cette correction permet de retrouver la valeur imposée du champ  $u$  (voir la Figure 119).

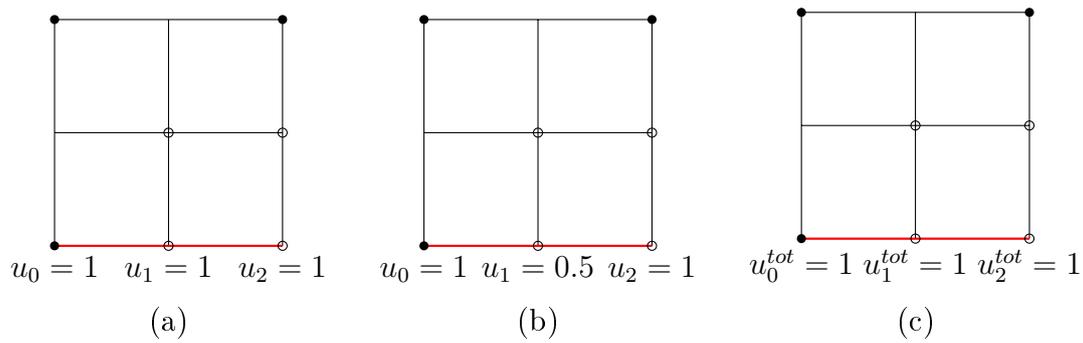


Figure 119: (a) Valeurs des contributions initialement imposées (b) valeurs des contributions corrigées (c) valeurs du champs  $u$  calculé aux nœuds.

## D.2 Mise à jour des lois volumiques

Lorsqu'une maille grossière est raffinée, elle génère des mailles raffinées avec de nouveaux points de quadrature. Les nouvelles lois sont obtenues par copie des lois sur les mailles parents (Algorithme 5).  $N_{mesh}$  représente le nombre de mailles,  $lois\_volumiques(\mathcal{K}, ip)$  est une méthode rendant les lois volumiques de la maille  $\mathcal{K}$  au  $ip$ -ième point de quadrature,  $parent(\mathcal{K})$  retourne le numéro de la maille parent de  $\mathcal{K}$  et  $N_{ip}(\mathcal{K})$  correspond au nombre de points de quadrature de la maille  $\mathcal{K}$ . Cet Algorithme ne peut être appliqué qu'aux lois sans variables internes. Un travail supplémentaire doit être réalisé pour les projections de variables internes.

```

for  $\mathcal{K} = 0, N_{mesh} - 1$  do
  if  $lois\_volumiques(\mathcal{K}, 0) == 0$  then
     $\mathcal{K}^{parent} = parent(\mathcal{K})$ 
     $lvp = lois\_volumiques(\mathcal{K}^{parent}, 0)$ 
    for  $ip = 0, N_{ip}(\mathcal{K}) - 1$  do
       $lois\_volumiques(\mathcal{K}, ip) = lvp$ 
    end
  end
end

```

**Algorithme 5** : Initialisation des lois volumiques des mailles raffinées.

## D.3 Mise à jour du système linéaire

Lors du raffinement, les fonctions de base à raffiner sont désactivées et les fonctions enfants engendrées par ces fonctions de base sont activées. Par conséquent, le nombre d'inconnues du problème évolue. Une mise à jour des inconnues et donc du système linéaire est nécessaire. Il est généralement plus rapide de réinitialiser le système linéaire que de le modifier localement (c'est-à-dire enlever ou ajouter des lignes et des colonnes au système existant). Cette étape du raffinement engendre un coût numérique important.

## E Méthodes classiques de fissuration

### E.1 Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture est fondée sur la théorie de l'élasticité classique et repose sur trois paramètres ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ) caractérisant l'intensité des contraintes et des déformations en pointe de fissure. Ces paramètres sont appelés facteurs d'intensité de contraintes en mode  $I$  (traction normale),  $II$  (cisaillement plan) et  $III$  (cisaillement antiplan) et sont exprimés en  $Pa\sqrt{m}$ . Ils sont déterminés par une analyse complète du problème aux limites et vérifient la solution asymptotique de Westergaard [85] :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma(r, \theta) = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_i(\theta) \quad (.18)$$

où  $\sigma$  est la contrainte en pointe de fissure,  $i$  dépend des modes de rupture,  $(r, \theta)$  sont des coordonnées polaires d'un point du solide dans un repère situé en pointe de fissure et aligné avec la direction de fissuration et  $\Sigma_i(\theta)$  sont des fonctions angulaires de  $\theta$ .

Irwin [86] propose une condition de propagation de fissure, initialement développée en mode  $I$ , puis généralisée pour tous les modes, basée sur les facteurs d'intensité de contraintes et sur une valeur critique  $K_{ic}$  appelé ténacité propre au matériau :

pour  $i = I, II, \text{ ou } III$

$$\begin{cases} K_i < K_{ic} \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ K_i = K_{ic} \Rightarrow \dot{l} > 0 \end{cases} \quad (.19)$$

où  $l$  représente la longueur de la fissure. Bien qu'étant cohérent avec la théorie de l'élasticité classique, ce résultat n'est pas réaliste car les contraintes doivent rester finies en tout point du solide.

L'approche énergétique de Griffith [87] fait le lien entre la perte d'énergie du système et l'avancée de fissure en élasticité linéaire et permet de s'affranchir des singularités des contraintes en pointe de fissure. Le taux de restitution d'énergie, noté  $G$ , quantifie l'énergie consommée par la structure pour permettre l'accroissement de la surface fissurée, notée  $S$  :

$$G = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial S} = 2\gamma \quad (.20)$$

où  $E_{pot}$  représente l'énergie potentielle et  $\gamma$  correspond à l'énergie de liaison. La condition de propagation s'écrit :

$$\begin{cases} G < G_c \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ G = G_c \Rightarrow \dot{l} > 0 \end{cases} \quad (.21)$$

où  $G_c$  représente une valeur critique de  $G$  et est appelé taux de restitution critique.

Par ailleurs, les facteurs d'intensité de contraintes sont reliées au taux de restitution

d'énergie par :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (.22)$$

où  $E^* = \frac{E}{1-\nu}$  en déformations planes et  $E^* = E$  en contraintes planes, avec  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau, et  $\mu$  un coefficient de Lamé.

L'intégrale de Rice [88] permet d'évaluer simplement le taux de restitution d'énergie dans le cas d'un matériau élastique (linéaire ou non) et s'écrit :

$$J = \int_{\Gamma} \left( \rho w_{elas}(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dS \quad (.23)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $w_{elas}$  est la densité massique d'énergie élastique,  $n$  est une normale sortante à  $\Gamma$  et  $\Gamma$  est un contour ouvert entourant la pointe de fissure. La valeur de l'intégrale est indépendante du choix de  $\Gamma$  en élasticité linéaire, sans forces volumiques et sans moments volumiques. La condition de propagation s'écrit :

$$\begin{cases} J < J_c \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ J = J_c \Rightarrow \dot{l} > 0 \end{cases} \quad (.24)$$

où  $J_c$  correspond à une valeur critique de propagation de fissure. Il existe une équivalence entre  $G$  et  $J$  dans le cas d'une fissure rectiligne.

Les méthodes basées sur ces grandeurs ne permettent pas de prendre en compte des phénomènes complexes comme l'amorçage de fissure.

## E.2 Méthode Thick Level Set (TLS)

La méthode des Level Set, développée par Osher et Sethian [89], est une technique numérique permettant de suivre l'évolution d'une interface, comme une fissure. Dans cette méthode, l'interface est représentée par la Level Set zéro d'une fonction  $\phi(x(t), t)$ . L'espace fonctionnel de cette fonction est supérieur d'une dimension à celui de l'interface. L'évolution de l'interface peut être exprimée grâce à l'équation d'évolution de  $\phi$ . Afin de faciliter la compréhension de cette méthode, les fissures sont en une dimension dans un espace en deux dimensions.

L'évolution d'une interface  $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$  peut être exprimée comme une courbe de Level Set d'une fonction  $\phi(x, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , où

$$\gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, t) = 0\}. \quad (.25)$$

L'équation (.25) montre que l'évolution de l'interface  $\gamma(t)$  peut être remplacée par l'équation d'évolution de  $\phi$  en dérivant l'équation  $\phi(x(t), t) = 0$  par rapport au temps. L'équation obtenue sur  $\phi$  et donc sur  $\gamma$  est la suivante :

$$\phi_t + F \|\nabla \phi\| = 0 \quad (.26)$$

où  $\phi(x, t = 0)$  est une donnée et  $F$  est la vitesse du front à  $x \in \gamma(t)$  dans la direction normale à l'interface. La condition initiale sur  $\phi$  est définie de la manière suivante :

$$\phi(x, t) = \pm \min_{x_\gamma \in \gamma(t)} \|x - x_\gamma\| \quad (.27)$$

où la fonction  $\phi$  représente la distance signée à l'interface.

L'avantage de cette méthode est que l'évolution de l'interface est déterminée sur un maillage fixe : aucune méthode de remaillage n'est nécessaire. Un des inconvénients est que cette méthode est basée sur une fonction définie dans l'espace de définition est d'une dimension supérieure à celui de la fissure. Ceci peut entraîner des coûts numériques (calcul, mémoire) importants.

Afin de représenter des interfaces (un segment en deux dimensions) la méthode des Level Set a été étendue : une fissure est représentée comme étant la Level Set zéro d'une fonction  $\psi(x, t)$ . Le point singulier en pointe de fissure peut être représenté par les Level Set zéro de deux fonctions,  $\phi_i(x, t)$  et  $\psi(x, t)$ , l'indice  $i$  représentant la  $i$ -ème pointe de fissure. En cas de fissure coin (fissure reliée à un bord libre de la structure), une seule fonction  $\phi$  est nécessaire. Ainsi, une fissure est définie comme suit :

$$\{x : \psi(x, t) = 0 \text{ et } \phi(x, t) \leq 0\} \quad (.28)$$

Les fissures sont ainsi représentées par une Level Set zéro d'une fonction  $\psi$  et la pointe de fissure par l'intersection d'une Level set zéro  $\psi$  et d'une Level Set zéro orthogonale d'une fonction  $\phi_i$ , en cas de plusieurs pointes de fissure,  $\phi$  sinon.

Cette méthode a été couplée à la méthode des Eléments Finis étendus (X-FEM) [90].

### E.3 Méthode des Eléments Finis Etendus (XFEM)

Contrairement à des méthodes de fissuration nécessitant une étape de remaillage, la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [91] ne nécessite pas de mailler finement la fissure. En effet, le maillage est fixé et l'évolution de la fissure est indépendante de la géométrie du maillage. Les discontinuités sont modélisées par un enrichissement local des fonctions de base.

L'approximation du déplacement s'écrit :

$$u^h(x, t) = \sum_{i \in I} u_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{j \in L} b_j(t) \varphi_j(x) H(\psi(x, t)) + \sum_{k \in K} \varphi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 a_k^l(t) B_l(r, \theta) \right) \quad (.29)$$

où  $\varphi_i(x)$  est la fonction de base associée au nœud  $i$  et au temps  $t$ ,  $L$  représente l'ensemble des nœuds dont le support est intersecté par la fissure (cercles sur la Figure 120),  $K$  correspond à l'ensemble des nœuds dont les éléments contiennent la pointe de fissure (carrés sur la Figure 120), et  $u_i$ ,  $b_j$  et  $a_k$  sont les degrés de liberté nodal correspondant au déplacement.

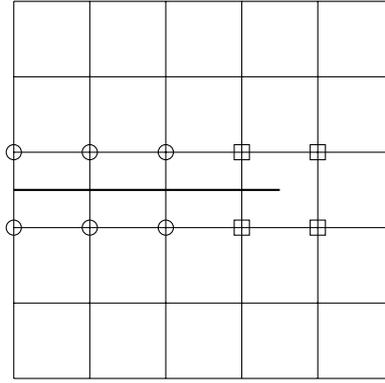


Figure 120: Mise en évidence des noeuds à enrichir. Les noeuds montrés par un cercle sont enrichis par la fonction Heaviside  $H$  et ceux montrés par un carré par la fonction  $B_I$

Dans l'équation (.29), les fonctions d'enrichissement sont les fonctions  $H(\psi(x, t))$  et  $B_I(r, \theta)$  telles que :

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0 \\ -1 & \text{pour } y < 0 \end{cases} \quad (.30)$$

$$B_I(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (.31)$$

où le couple  $(r, \theta)$  représente des coordonnées polaires dont l'origine est la pointe de la fissure et  $\theta = 0$  est tangent à la pointe de la fissure.

Le facteur d'intensité des contraintes est calculé à l'aide de l'intégrale  $J$  (intégrale de Rice (.23)). L'angle de propagation de la pointe de la fissure,  $\theta_c$ , dépend des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  :

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right), \quad -\pi < \theta_c < \pi \quad (.32)$$

La méthode des X-FEM est applicable à des évolutions quasi-statique et dynamique aux matériaux élastiques en 2D [92] et 3D [93]. Cette méthode a été étendue à la mécanique de la rupture ductile dans le cas d'une plasticité monotone [94] [95].

## E.4 Méthode des Phase Field

Dans la méthode Phase-Field, la géométrie de la fissure est approximée par une représentation étalée définie par un paramètre scalaire  $d(x)$ , où  $x \in \Omega$ , avec  $d(x) = 1$  lorsque  $x$  appartient à la fissure  $\Gamma$  et  $d(x) = 0$  lorsque  $x$  est situé loin de la fissure [96]. Cette fonction est obtenue en résolvant le problème aux limites :

$$\begin{cases} d - l^2 \Delta d = 0 & \text{dans } \Omega \\ d(x) = 1 & \text{sur } \Gamma \\ \nabla d(x) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (.33)$$

où  $l$  représente est un paramètre de régularisation décrivant l'étalement de la fissure,  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace et  $n$  est la normale sortante à  $\partial\Omega$ .

Ce problème peut être réécrit sous la forme :

$$d(x) = \text{Arg}\left\{\inf_{d \in B} \Gamma_l(d)\right\} \quad (.34)$$

où  $B = \{d | d(x) = 1 \text{ sur } \Gamma \forall x \in \Gamma\}$  et  $\Gamma_l = \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla(d)) d\Omega$  représente la taille totale de la fissure. La fonction  $\gamma(d)$  représente la densité de fissure par unité de volume et est définie par :

$$\gamma(d, \nabla(d)) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} \nabla d \cdot \nabla d \quad (.35)$$

Cette méthode est basée sur l'approche variationnelle de la mécanique de la rupture de Francfort et Marigo [35], dont la fonctionnelle est définie par :

$$E(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} W_u(\varepsilon(u)) d\Omega + G_c H^{d-1}(\Gamma) \quad (.36)$$

où  $W_u$  représente la densité d'énergie,  $\varepsilon$  correspond au tenseur des déformations,  $G_c$  est le taux de restitution critique d'énergie et  $H^{d-1}$  est la mesure d'Hausdorff donnant la longueur de la fissure. La méthode des Phase-Field consiste à régulariser la fonctionnelle (.36) :

$$E(u, \Gamma) = \int_{\Omega} W_u(\varepsilon(u)) d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(d) dS \quad (.37)$$

La méthode des Phase-Field a été appliquée à la fissuration fragile en quasi-statique [97] et dynamique [98], et à la fissuration multi-physique [99].

## F Échantillons pour des volumes élémentaires pré-entailés de type milieux à matrice cimentaire

Tableau 19: Cinq tirages d'inclusions triangulaires dans un volume élémentaire pré-entailé, fraction volumique de 14%; tirage des centres d'inclusions selon un processus de type sphère dure, tirage aléatoire des orientations.

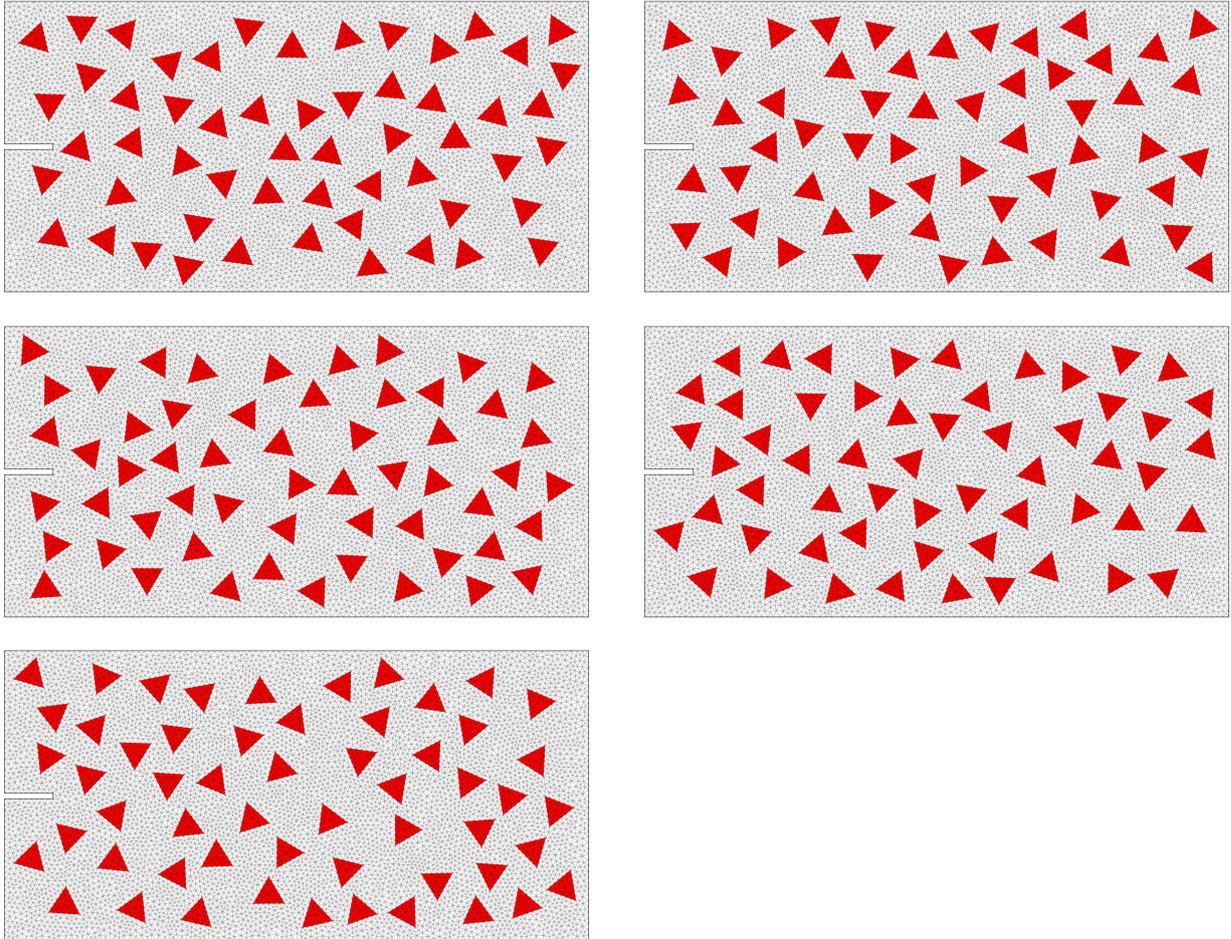


Tableau 20: Cinq tirages d'inclusions carrées dans un volume élémentaire pré-entaille, fraction volumique de 14%; tirage des centres d'inclusions selon un processus de type sphère dure, tirage aléatoire des orientations.

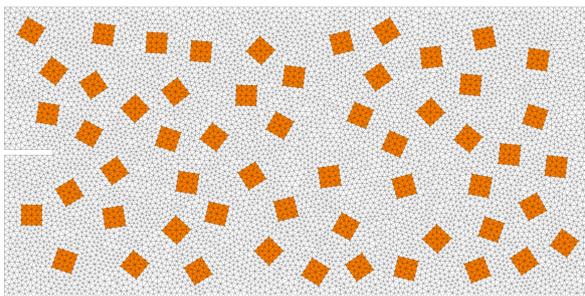
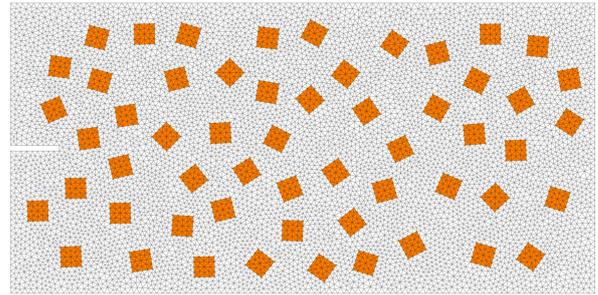
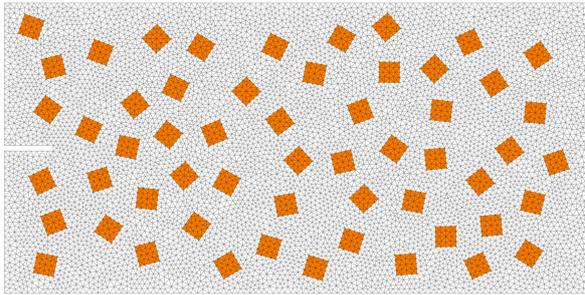
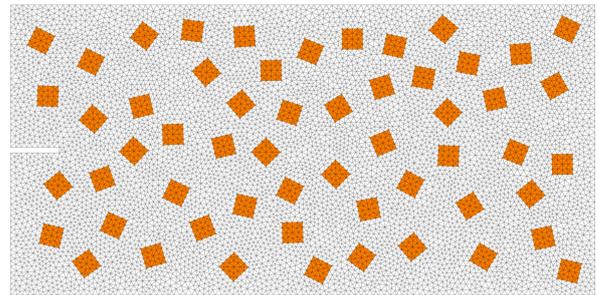
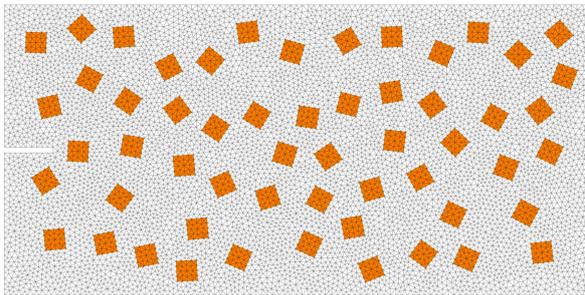


Tableau 21: Cinq tirages d'inclusions hexagonales dans un volume élémentaire pré-entaille, fraction volumique de 14%; tirage des centres d'inclusions selon un processus de type sphère dure, tirage aléatoire des orientations.

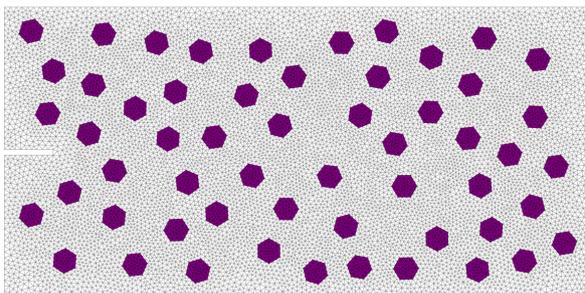
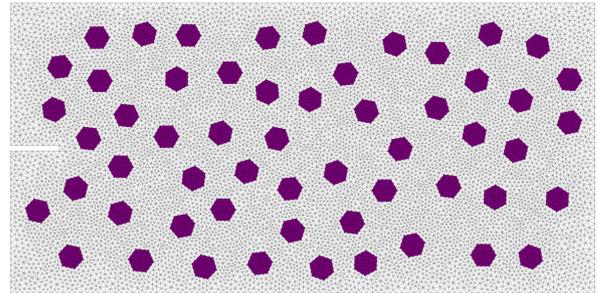
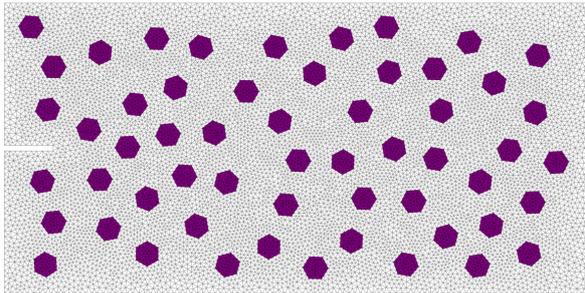
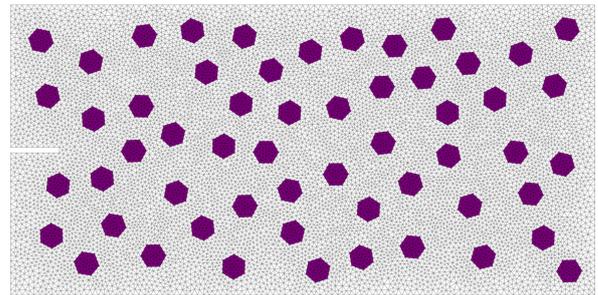
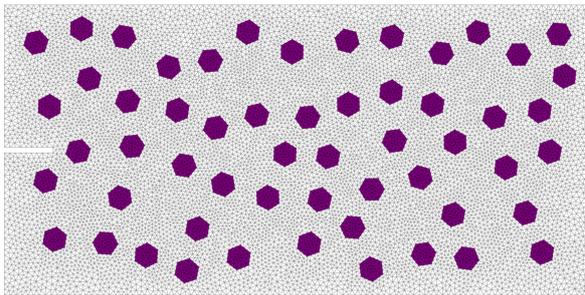


Tableau 22: Cinq tirages d'inclusions octogonales dans un volume élémentaire pré-entaille, fraction volumique de 14%; tirage des centres d'inclusions selon un processus de type sphère dure, tirage aléatoire des orientations.

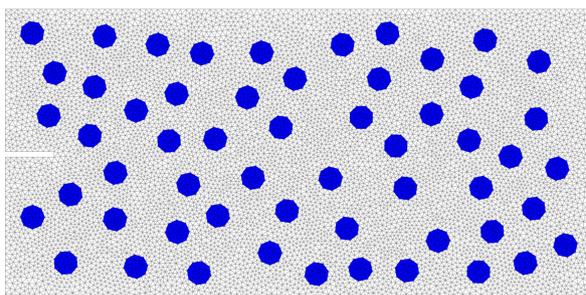
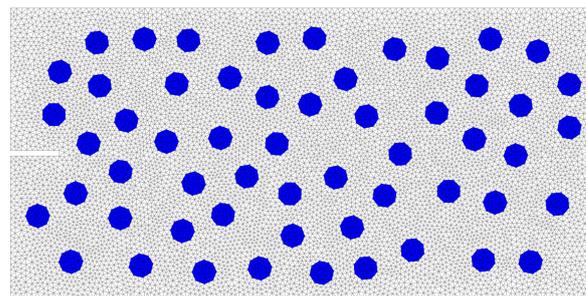
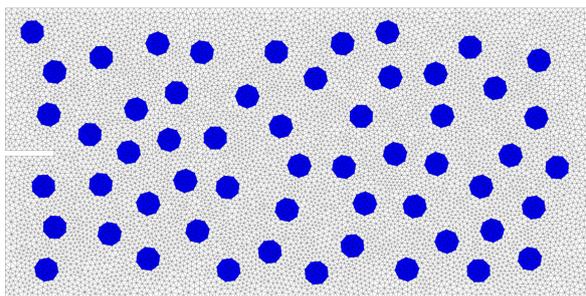
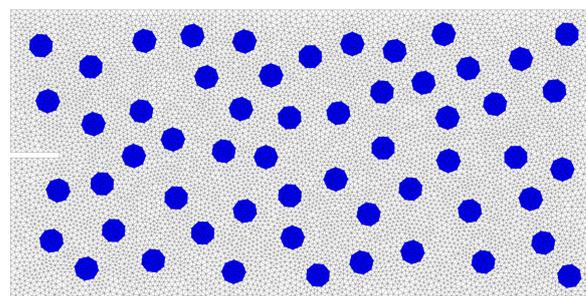
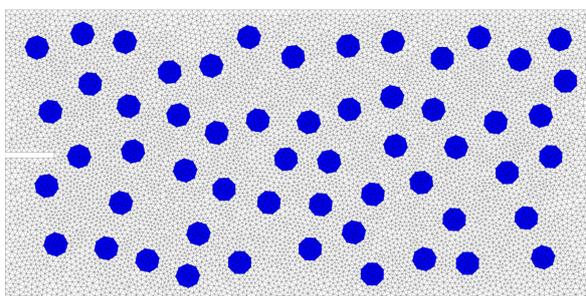
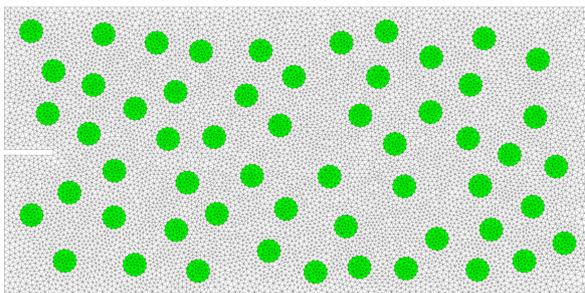
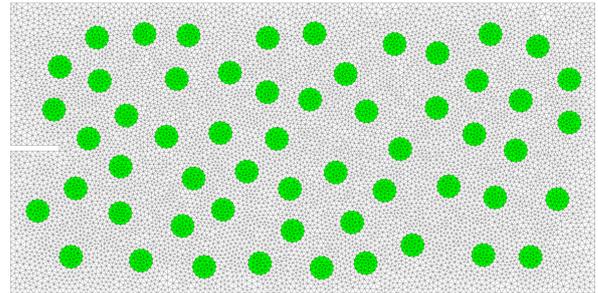
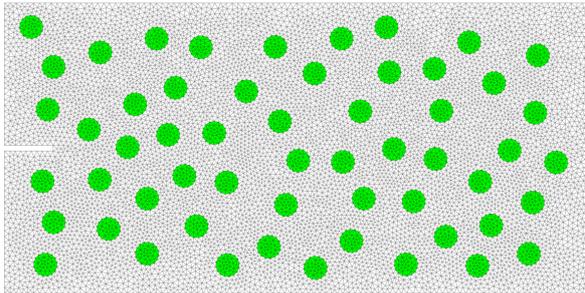
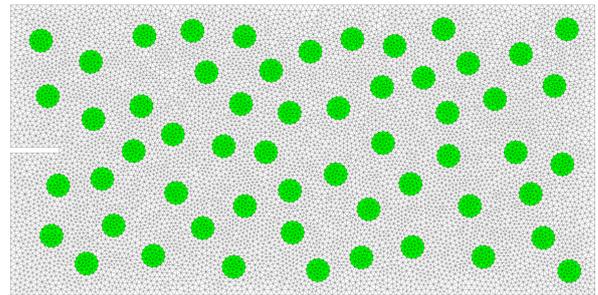
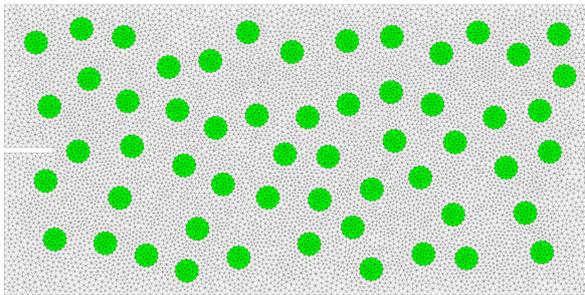


Tableau 23: Cinq tirages d'inclusions à 16 faces dans un volume élémentaire pré-entailé, fraction volumique de 14%; tirage des centres d'inclusions selon un processus de type sphère dure, tirage aléatoire des orientations.



# Bibliographie

- [1] S. Marmin, D. Ginsbourger, J. Baccou, F. Perales, and J. Liandrat, “Processus gaussiens déformés pour l’apprentissage de zones instationnaires,” *47<sup>th</sup> annual meeting of the French Statistical Society*, 2015.
- [2] A. Pandolfi and M. Ortiz, “An eigenerosion approach to brittle fracture,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, pp. 694–714, 2012.
- [3] B. Schmidt, F. Fraternali, and M. Ortiz, “Eigenfracture : an eigendeformation approach to variational fracture, vol. 7,” *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, pp. 1237–1266, 2009.
- [4] L. Bichet, F. Dubois, Y. Monerie, C. Péliou, and F. Perales, “Méthode d’eigenerosion : mise en oeuvre et extension aux matériaux hétérogènes,” *Matériaux 2014, Montpellier*.
- [5] M. Jean, V. Acary, and Y. Monerie, “Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials,” *Philosophical Transactions Mathematical, Physical Engineering Sciences*, vol. 359, pp. 2497–2518, 2001.
- [6] S. Minjeaud, *Raffinement local adaptatif et méthodes multiniveaux pour la simulation d’écoulement multiphasiques*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2010.
- [7] F. Perales, *Fissuration des matériaux à gradient de propriétés. Application au zircaloy hydrure*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2005.
- [8] I. Babuska, W. Gui, and B. Szabo, “Performance of the h, p and h-p versions of the finite element method,” 1984.
- [9] M. Ainsworth and B. Senior, “An adaptatif refinement strategy for hp-finite element computations,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 26, pp. 165–178, 1998.
- [10] A. Dünster and E. Rank, “The  $p$ -version of the finite element method compared to an  $h$ -version for the deformation theory of plasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 1925–1935, 2001.
- [11] S. Holzer and Z. Yosibash, “The  $p$ -version of the finite element method in incremental elasto-plastic analysis,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 1859–1878, 1996.
- [12] R. Krause, R. Mücke, and E. Rank, “ $hp$ -version finite elements for geometrically non-linear problems,” *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 887–897, 1995.

- [13] S. Ghosh and S. Manna, “ $r$ -adapted arbitrary lagrangian-eulerian finite-element method in metal-forming simulation,” *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 2, pp. 271–282, 1993.
- [14] A. Tezuka and O. Okuda, “An adaptive mesh refinement for the finite element method (trial by the  $r$ -method),” *JSME International Journal Serie I*, vol. 31(1), pp. 50–55, 1988.
- [15] J. Lang, W. Cao, W. Huang, and R. Russel, “A two-dimensional moving finite element method with local refinement based on a posteriori error estimates,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 46, pp. 75–94, 2003.
- [16] W. Cao, W. Huang, and R. Russel, “Comparison of two-dimensional  $r$ -adaptive finite element methods using various error indicators,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 56, pp. 127–143, 2001.
- [17] J. Fish, “The  $s$ -version of the finite element method,” *Computers & structures*, vol. 43(3), pp. 539–547, 1992.
- [18] L. Barbié, I. Ramière, and F. Lebon, “Strategies involving the local defect correction multi-level refinement method for solving three-dimensional linear elastic problems,” *Computers & structures*, vol. 130, pp. 73–90, 2014.
- [19] H. Ben Dhia, “Multiscale mechanical problem : the arlequin method,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Série II b*, pp. 899–904, 1998.
- [20] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, pp. 1309–1331, 2008.
- [21] P. Krysl, E. Grinsprun, and P. Schröder, “Natural hierarchical refinement for finite element methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 1109–1124, 2003.
- [22] L. Demkowicz, W. Rachowicz, and P. Devloo, “A fully automatic  $h$   $p$ -adaptivity,” *TICAM Report 01-28*.
- [23] R. Herbin, D. Fournier, and R. Le Tellier, “Discontinuous galerkin discretization and  $h$   $p$ -refinement for the resolution of the neutro transport equation,” *SIAM Journal on Scientific Computing, Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 35, 2013.
- [24] H. Askes and A. Rodriguez Ferran, “A combined  $r$   $h$ -adaptive scheme based on domain subdivision. formulation and linear examples,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, pp. 253–273, 2001.
- [25] G. Dhatt and G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*. MALOINE S.A., 1981.
- [26] E. Grinsprun, P. Krysl, and P. Schröder, “Charms: a simple framework for adaptive simulation,” *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2002*, vol. 21, pp. 281–290, 2002.

- [27] P. Krysl, A. Trivedi, and B. Zhu, “Object-oriented hierarchical mesh refinement with charms,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, pp. 1401–1424, 2004.
- [28] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, and B. Piar, “A multigrid method with local adaptive refinement, application to a ternary cahn-hilliard model,” *ESAIM: Proc.*, 2009.
- [29] L. Endres and P. Krysl, “Octasection-based refinement of finite element approximations on tetrahedral meshes that guarantees shape quality,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, pp. 69–82, 2004.
- [30] B. Piar, “Pelicans: Un outil d’implémentation de solveurs d’équations aux dérivées partielles,” *Note Technique 2004/33, IRSN*, 2004.
- [31] H. Liu, *Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l’interaction mécanique Pastille-Gaine*. PhD thesis, Université d’AIX-MARSEILLE, 2016.
- [32] L. Daridon, D. Dureisseix, S. Garcia, and S. Pagano, “Changement d’échelles et zoom structural,” *10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France*, 2011.
- [33] A. Chagneau, P. Alart, and S. Pagano, “Fiabilisation de la résolution numérique pour la méthode de zoom structural,” *13e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France*, 2017.
- [34] R. Löhner, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz, “An adaptive finite element procedure for compressible high speed flow,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, pp. 441–465, 1985.
- [35] G. Francfort and J.-J. Marigo, “Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, vol. 46(8),” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, pp. 1319–1342, 1998.
- [36] L. Bichet, *Mécanismes de transports dans la fissuration des matériaux hétérogènes : application à la durée de vie d’exploitation des centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Montpellier, 2017.
- [37] J. C. Gálvez, M. Elices, G. V. Guinea, and J. Planas, “Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading,” *International Journal of Fracture*, vol. 84, pp. 267–284, 1998.
- [38] C. A. Cendón, J. C. Gálvez, M. Elices, and J. Planas, “Modelling the fracture of concrete under mixed loading,” *International Journal of Fracture*, vol. 103, pp. 293–310, 2000.
- [39] D. S. Dugdale, “Yielding of steel sheets containing slits,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, pp. 100–104, 1960.
- [40] G. I. Barenblatt, “The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fractures,” *Advances In Applied Mechanics*, vol. 7, pp. 55–129, 1962.
- [41] D. Kubair and P. Geubelle, “Comparative analysis of extrinsic and intrinsic cohesive models of dynamic fracture,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 3853–3868, 2003.

- [42] N. Blal, *Modélisation micromécanique et identification de l'endommagement par approches cohésives*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2013.
- [43] Y. Monerie, *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 2000.
- [44] Y. Monerie and V. Acary, "Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement," *Revue européenne des éléments finis*, vol. 10, pp. 489–503, 2001.
- [45] M. G. A. Tijssens, B. L. J. sluys, and E. van der Giessen, "Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces," *European Journal of Mechanics and Solids*, vol. 19, pp. 761–779, 2000.
- [46] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano, "On mesh-size to cohesive zone parameters relationships," *Fifth International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN 2011)- Liège, Belgium, 14-17 November 2011*.
- [47] F. Perales, S. Bourgeois, A. Chrysochoos, and Y. Monerie, "Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of nonlinear heterogeneous materials," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, pp. 3378–3398, 2008.
- [48] M. Jean, "The non-smooth contact dynamics method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, pp. 235–257, 1999.
- [49] J.-J. Moreau, "Numerical aspects of the sweeping process," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, pp. 329–349, 1999.
- [50] F. Perales, F. Dubois, Y. Monerie, B. Piar, and L. Stainier, "A non smooth contact dynamics-based multi-domain solver. code coupling (xper) and application to fracture," *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 19, pp. 389–417, 2010.
- [51] F. Dubois, M. Jean, M. Renouf, R. Mozul, A. Martin, and M. Bagneris, "Lmgc90," *10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France*.
- [52] L. Snozzi, F. Gatuingt, and J. Molinari, "A meso-mechanical model for concrete under dynamic tensile and compressive loading," *International Journal of Fracture*, vol. 178, pp. 179–194, 2012.
- [53] L. Barbié, *Raffinement de maillage multi-grille local en vue de la simulation 3D du combustible nucléaire des Réacteurs à Eau sous Pression*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2013.
- [54] B. Acun, A. Gupta, N. Jain, A. Langer, H. Menon, E. Mikita, X. Ni, M. Robson, Y. Sun, E. Totoni, L. Wesolowski, and L. Kale, "Parallel programming with migratable objects: Charm++ in practice," *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, pp. 647–658, 2014. IEEE Press.
- [55] K. Kpogan, *Simulation numérique de le planéité des tôles métalliques formées par laminage*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.

- [56] R. Cottreau, "Numerical strategy for unbiased homogenization of random materials," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 95, pp. 71–90, 2013.
- [57] M. Silani, H. Talebi, S. Ziaei-Rad, A. Hamouda, G. Zi, and T. Rabczuk, "A three dimensional extended arlequin method for dynamic fracture," *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 425–431, 2015.
- [58] M. Berger and J. Oliger, "Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 53, pp. 484–512, 1984.
- [59] A. Brandt, "Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems," *Mathematics of Computation*, vol. 31(138), pp. 333–390, 1977.
- [60] P. Hauret and M. Ortiz, "Bv estimates for mortar methods in linear elasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 4783–4791, 2006.
- [61] W. Hackbush, "Local defect correction method and domain decomposition techniques," *Computing*, vol. 5, pp. 89–113, 1984.
- [62] S. McCormick and J. Thomas, "The fast adaptive composite grid (fac) method for elliptic equations," *Mathematics of Computation*, vol. 46, pp. 439–456, 1986.
- [63] M. Berger and A. Jameson, "An adaptative multigrid method for the euler equations," *Lecture Notes in Physics, Proc. 9th International Conference in Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Juin, 1984, Saclay, France.
- [64] P. Ferret, "The finite difference based fast composite grid method," *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 3(5), pp. 391–411, 1996.
- [65] L. Hart, S. McCormick, and A. O’Gallagher, "The fast adaptive composite-grid method(fac): Algorithms for advanced computers," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 19, pp. 103–125, 1986.
- [66] P. Díez and A. Huerta, "A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, pp. 215–229, 1999.
- [67] L.-Y. Li and P. Bettess, "Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 911–915, 1995.
- [68] L.-Y. Li, P. Bettess, and J. W. Bull, "Theoretical formulations for adaptive finite element computations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 911–915, 1995.
- [69] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 24, pp. 337–357, 1987.
- [70] M. Ainsworth and B. Senior, "Aspects of an adaptive hp-finite element method : Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.150, pp. 65–87, 1997.

- [71] G. Bessette, E. Becker, L. Taylor, and D. Littlefield, "Modeling of impact problems using an  $h$ -adaptive, explicit lagrangian finite element method in three dimensions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 1649–1679, 2003.
- [72] R. Bank, A. Sherman, and A. Weiser, "Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement," *Scientific Computing, Applications of Mathematics and Computing to the Physical Sciences*, 1983.
- [73] J. Bey, "Tetrahedral grid refinement," *Computing*, vol. 55, pp. 355–378, 1995.
- [74] G. Nicolas, T. Fouquet, S. Geniaut, and S. Cuvilliez, "Improved adaptive mesh refinement for conformal hexahedral meshes," *Advances in Engineering Software*, vol. 102, pp. 14–28, 2016.
- [75] K. Park, G. Paulino, W. Celes, and R. Espinha, "Adaptive mesh refinement and coarsening for cohesive zone modeling of dynamic fracture," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, pp. 1–35, 2012.
- [76] M. Rivara, "New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations," *Numerical Method in Engineering*, vol. 40, pp. 3313–3324, 1997.
- [77] E. Biotteau, *Stratégie multigrille et raffinement automatique à précision contrôlée pour la dynamique transitoire non-linéaire*. PhD thesis, Université de Lyon, 2010.
- [78] R. Pethe, L. Stainier, and T. Heuzé, "Variational  $h$ -adaptation for problems in multiphysics," *13ème colloque national en calcul des structures, CSMA2017, Giens (Var), France*, Mai 2017.
- [79] M. Bergallo, C. Neumann, and V. Sonzogni, "Composite mesh concept based fem error estimation and solution improvement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, pp. 755–774, 2000.
- [80] P. Ladevèze, J. P. Pelle, and P. Rougeot, "Error estimation and mesh optimization for classical finite elements," *Engineering Computations*, vol. 8, pp. 69–80, 1991.
- [81] P. Ladevèze and E. A. W. Maunder, "A general method for recovering equilibrating element traction," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, pp. 111–151, 1996.
- [82] I. Babuska and W. C. Rheinboldt, "A-posteriori error estimates for the finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1597–1615, 1978.
- [83] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery (spr) and adaptive finite element refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101, pp. 207–224, 1992.
- [84] M. Ainsworth and J. T. Oden, "A posteriori error estimation in finite element analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, pp. 1–88, 1997.
- [85] H. Westergaard, "Bearing pressures and cracks," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, pp. 49–53, 1939.

- [86] G. Irwin, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, pp. 361–364, 1957.
- [87] A. Griffith, "The phenomena of rupture and flow in solids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pp. 163–198, 1920.
- [88] J. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386, 1968.
- [89] S. Osher and J. Sethian, "Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations," *Journal of computational physics*, vol. 79, pp. 12–49, 1988.
- [90] M. Stolarska, D. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, pp. 943–960, 2001.
- [91] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131–150, 1999.
- [92] N. Sukumar and J.-H. Prévost, "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part i: Computer implementation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 7513–7537, 2003.
- [93] C. Duarte, O. Hamzeh, T. Liszka, and Tworzydło, "A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 2227–2262, 2001.
- [94] T. Elguedj, A. Gravouil, and A. Combescure, "Appropriate extended functions for x-fem simulation of plastic fracture mechanics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 501–515, 2006.
- [95] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, and S. Marie, "Level set x-fem non matching meshes: application to dynamic crack propagation in elasto-plastic media," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69(8), pp. 1553–1569, 2006.
- [96] C. Miehe, M. Hofacker, and F. Welschinger, "A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 2765–2778, 2010.
- [97] B. Bourdin, "Numerical implementation of the variational formulation of quasi-static brittle fracture," *Interfaces and Free Boundaries*, vol. 9, pp. 411–430, 2007.
- [98] B. Bourdin, C. Larsen, and C. Richardson, "A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization," *International Journal of fracture*, vol. 168, pp. 133–143, 2011.
- [99] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker, "A phase field model of electromechanical fracture," *Journal of the mechanics and Physics of Solids*, vol. 58, pp. 1716–1740, 2010.



**Titre** : Méthode de raffinement local adaptatif multi-niveaux pour la fissuration des matériaux hétérogènes

**Résumé** : Afin d'anticiper les effets du vieillissement des enceintes de confinement des centrales électronucléaires, l'IRSN effectue des recherches avancées sur le vieillissement du béton. Les problématiques de fissuration liées au vieillissement sont abordées à l'aide d'une méthode micromécanique basée sur des Modèles de Zones Cohésives Frottantes et à l'aide de la méthode d'« Eigen-Erosion » basée sur des considérations énergétiques. L'objectif de la thèse est de réduire les temps de calcul liés à ces deux approches, tout en conservant une bonne précision dans les zones d'intérêt, en adaptant la discrétisation en espace à l'aide de techniques de raffinement local adaptatif. La méthode de raffinement retenue est la méthode CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement Methods). Cette méthode, basée sur le raffinement des fonctions de base, permet un raffinement sans dégradation de la qualité des mailles initiales. En particulier, les non-conformités géométriques sont naturellement prises en compte. Initialement appliquée à la Mécanique des Fluides, cette méthode est d'abord étendue à la Mécanique des Milieux Déformables en proposant un critère de raffinement général, puis elle est appliquée à la méthode d'« Eigen-Erosion » et aux Modèles de Zones Cohésives. Enfin, l'influence de la morphologie des inclusions d'un Volume Élémentaire Représentatif de béton numérique sur le comportement apparent et sur la fissuration est étudiée.

**Mots clé** : CHARMS – Fissuration – Modèles de Zones Cohésives – « Eigen-Erosion » – Raffinement local adaptatif – Critère de raffinement

---

**Title**: Local adaptive refinement and multilevel method for the fracture of heterogeneous materials

**Abstract** : In order to anticipate effects of ageing in confinement structures of nuclear power plant, the IRSN develops research programs to study the ageing of concrete. A micromechanical approach, based on Cohesive Zone Models, and the “Eigen-Erosion” method, based on energetics consideration, are used. The aim of this study is to reduce the computational cost while keeping simulations with good accuracy in the areas of interest. The strategy is to adapt the spatial discretization in the areas of interest using local adaptive refinement technics. The selected refinement method is called CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement Methods). CHARMS is based on the refinement of basis functions and enables refinement without any loss of the initial mesh quality. The geometrical non-conformities are implicitly handled. Initially applied to Fluid Mechanics, the method is first extended to Solid Mechanics with a specific refinement criterion. It is then applied to “Eigen-Erosion” and to Cohesive Zone Models. The inclusion's shape of a Representative Elementary Volume of numerical concrete is studied in order to determine the influence over the apparent behaviour and the crack propagation.

**Key words**: CHARMS – Crack – Cohesive Zone Model – “Eigen-Erosion” – Local adaptive refinement – Refinement criterion

---

**Laboratoires** :

LPTM : Laboratoire de **P**hysique et de **T**hermomécanique des **M**atériaux (IRSN)

LMGC : Laboratoire de **M**écanique et **G**énie **C**ivil (UM)