HAL open science

Quelques propriétés symplectiques des variétés Kählériennes

Alexandre Vérine

▶ To cite this version:

Alexandre Vérine. Quelques propriétés symplectiques des variétés Kählériennes. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEN038 . tel-01927097

HAL Id: tel-01927097

https://theses.hal.science/tel-01927097v1

Submitted on 19 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro National de Thèse : 2018LYSEN038

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée par
l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale Numéro 512
École Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 28 septembre 2018 par
Alexandre VÉRINE

Quelques propriétés symplectiques des variétés kählériennes

Après l'avis de :

Kai CIELIEBAK	Prof. Univ.	Universität Augsburg	Rapporteur
Damien GAYET	Prof. Univ.	Université Grenoble Alpes	Rapporteur

Devant le jury composé de :

Damien GAYET	Prof. Univ.	Université Grenoble Alpes	Rapporteur
Emmanuel GIROUX	DR	Université de Montréal	Directeur de thèse
Catriona MACLEAN	MCF	Université Grenoble Alpes	Examinatrice
Jean-Paul MOHSEN	MCF	Université Aix-Marseille	Examinateur
Jean-Claude SIKORAV	Prof. Univ.	ÉNS de Lyon	Examinateur

Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que je remercie mon directeur de thèse Emmanuel Giroux de sa générosité et de la clarté avec laquelle il m'a communiqué ses maths.

Kai Cieliebak a accepté de rapporter cette thèse et m'a appris par procuration une part importante des maths contenues dans ce texte ; je lui en suis très reconnaissant. Je remercie chaleureusement Damien Gayet d'avoir eu la patience de rapporter ce manuscrit, de faire partie du jury et de son soutien permanent à Grenoble. Un grand merci à Catriona Maclean d'avoir accepté de faire partie du jury et de m'avoir initié à l'analyse complexe et fait entrevoir la géométrie algébrique en cours à l'ÉNS Lyon. Je remercie vivement Jean-Paul Mohsen de sa participation au jury. Son expertise sur la théorie de Donaldson, son humour et sa relecture attentive ont été décisifs au moment de la rédaction de cette thèse. Je suis très heureux que Jean-Claude Sikorav participe du jury de cette thèse ; merci pour tant de discussions mathématiques où j'ai pu profiter de ton expérience et de ta disponibilité.

Cette thèse a été préparée à l'UMPA, je voudrais remercier tous les membres du laboratoire de leur disponibilité. En particulier, merci à Alexey de m'avoir orienté vers un stage de maths passionnant, à Marco pour tous ses conseils de géométrie symplectique et de hors-piste et à Bruno pour ses nombreux coups de main. Merci à Magalie, Virginia, Sandy et Farah pour toute leur aide et leur gentillesse.

Une partie de cette thèse a été écrite à l'UMI-CRM du CNRS à Montréal grâce au financement du Labex MILYON. L'ambiance y fût très agréable en grande partie grâce aux discussions enrichissantes avec Dan Popovici, Christophe Mourougane, François Charette et Baptiste Chantraine.

Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire de l'Institut Fourier pour leur accueil lors de ma dernière année de thèse. Je remercie vivement Jean-Pierre Demailly de m'avoir initié à la géométrie complexe pendant le M2 puis d'avoir gardé un œil sur mon parcours. Cette thèse ne serait pas grand chose si je n'avais pas passé autant de temps avec mon «grand frère» Sylvain à disséquer des articles et à écouter ses explications (et son humour beauf').

C'est le moment de dédicacer les (ex-)doctorants Daniel (organisateur de road trip), Alessandro, Arthur et Léo (c'était vraiment très intéressant), Loïc (j'ai dit allez l'OM !), Samuel, Bruno, Sébastien (ah comment ?), Àlvaro (redoutable sabreur), Romain (vous

avez tout compris !), Mathias, papy Thomas (coucou), Alexandre, Jonathan, Mohammed, Émeric, François et François, Mickaël et Mickaël, Florian, Marie, Valentin, Olga, Abdoul Karim, Ignacio à Lyon ; Farzad (I like !), Noé et son crashproof plane, Alexandre, Jordan à Montréal ; Florent cette vieille chèvre de luxe, Romain (où est Quentin ?), Luc (incarottable), Alejandro, Baptiste, François, Bruno, Rodolfo, Renaud à Grenoble.

Table des matières

Introduction **1**

1 Géométrie symplectique des métriques singulières **5**
1.1 Résultats effectifs et constantes de Seshadri 5
1.2 Interprétation géométrique des constantes de Seshadri 8

2 Lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld et minima de fonctions convexes **11**
2.1 Introduction 11
2.2 Sous-variétés lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld... 13
2.3 ...Comme minima de fonctions ω-convexes 16
2.4 ...Comme minima de fonctions $\mathbf{C}$-convexes 20

3 Sphères lagrangiennes et cycles évanescents d'un domaine de Stein **27**
3.1 Introduction 27
3.2 Déformation symplectique vers un domaine à singularité conique 29
3.2.1 Attachement holomorphe d'une anse 29
3.2.2 La structure symplectique sur les fibres 31
3.3 Complexification 35
3.4 De Weinstein à Stein 36

Introduction

Une *variété kählérienne* est une variété complexe munie d'une 2-forme fermée ω, appelée *forme de Kähler*, qui est compatible avec la structure complexe au sens où $g(u,v) = \omega(u, iv)$ définit une métrique riemanienne. Par exemple, le projectivisé $\mathbf{C}P^n$ de l'espace hermitien standard de dimension $n+1$ a une (unique) forme de Kähler homogène σ dont l'intégrale sur une droite projective vaut 1, appelée forme de Fubini-Study. Le lieu des zéros de chaque polynôme homogène de degré k en $n+1$ variables complexes s'annulant transversalement définit une hypersurface complexe close de $\mathbf{C}P^n$ qui est en dualité de Poincaré avec $k\sigma$. D'après le théorème de plongement de Kodaira, ce phénomène est très général : soit (X, ω) une variété kählérienne close et *entière* (au sens où les périodes de la 2-forme fermée ω sont entières), alors il existe un entier k_0 tel que, pour tout entier $k \geq k_0$, (X, ω) admet des hypersurfaces complexes closes en dualité de Poincaré avec $k\omega$, appelées *sections hyperplanes complexes de degré* k. Le «grand théorème» de Matsusaka donne l'existence d'une borne supérieure sur l'entier k_0 en fonction de la dimension complexe n de X et des coefficients $(\int_X [\omega]^j \wedge [K_X]^{n-j})_{j=0}^n$ du polynôme de Hilbert de la classe de cohomologie $[\omega]$, où $[K_X]$ est la classe canonique de X. Une estimation effective de l'entier k_0 a ensuite été obtenue par Siu [Siu93], puis par Demailly [Dem96].

C'est la non dégénérescence de la forme fermée ω et non pas la structure complexe qui joue le rôle principal dans le théorème précédent de Kodaira comme l'ont montré les travaux de Donaldson [Don96]. Une variété munie d'une 2-forme fermée non dégénérée ω est une *variété symplectique* (on a «oublié» la structure complexe). Voici le théorème principal de [Don96] étendant le résultat de Kodaira aux variétés symplectiques : une variété symplectique (X, ω) close et entière quelconque admet, pour tout $k \geq k_0$ suffisamment grand, des sous-variétés symplectiques closes de codimension 2 en dualité de Poincaré avec $k\omega$ (on utilisera la terminologie *sections hyperplanes symplectiques de degré* k pour désigner de telles sous-variétés). Outre cette généralisation, les techniques développées par Donaldson ont permis l'obtention de résultats nouveaux en géométrie kählérienne ([Don96],[GP17],[Moh18]). Par ailleurs, contrairement au cas particulier des variétés kählériennes, le problème suivant est ouvert :

Problème A. Trouver une borne supérieure sur l'entier k_0 donné par le théorème de Donaldson ci-dessus.

Une telle borne devrait dépendre des mêmes données topologiques que dans le cas des variétés kählériennes (la dimension et les coefficients du polynôme de Hilbert de $[\omega]$) mais peut-être aussi d'autres données géométriques.

La première partie de cette thèse est motivée par l'implémentation des techniques d'estimations effectives de Siu et Demailly mentionnées ci-dessus dans la construction de Donaldson, que ce soit dans le cadre symplectique (pour étudier le problème ci-dessus) ou kählérien. Les objets centraux de la méthode de Siu pour estimer l'entier k_0 sur une variété kählérienne (X, ω) sont des *métriques hermitiennes à pôles logarithmiques* et à courbure positive sur un fibré en droites holomorphe de première classe de Chern $[\omega]$. Demailly a défini dans [Dem92] la notion de *constante de Seshadri* qui mesure la taille de ces pôles dans le cas où ils sont isolés (ces termes sont expliqués précisément dans les définitions 1.6 et 1.8 ci-après). L'énoncé suivant est une caractérisation symplectique des constantes de Seshadri et complète un critère de Demailly [Dem92] :

Théorème B. *Soit X une variété projective complexe de dimension n, a une classe de Kähler entière sur X et p un point de X. La constante de Seshadri de a en p est la borne supérieure de l'ensemble des réels $c > 0$ tels qu'il existe une forme de Kähler ω de classe a et un plongement holomorphe isométrique de la boule $(\{z \in \mathbf{C}^n, |z|^2 \leq \frac{c}{\pi}\}, \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j)$ dans X, centré en p.*

Ce résultat était déjà connu d'Eckl [Eck17], on en donnera une preuve différente.

Les deuxième et troisième parties de cette thèse sont motivées par l'étude des sphères lagrangiennes dans les variétés kählériennes. On dit qu'une sous-variété S d'une variété symplectique (X, ω) de dimension moitié est *lagrangienne* si la restriction de ω à S est identiquement nulle. D'après les travaux de Gromov [Gro85], les sphères lagrangiennes de dimension au moins 2 ne peuvent pas exister localement dans les variétés symplectiques, autrement dit leur existence décrit des propriétés symplectiques globales. En géométrie kählérienne, la théorie de Picard-Lefschetz donne un procédé général de construction de sphères lagrangiennes. On décrit dans ce paragraphe ce phénomène sur une variété projective complexe X. Une *déformation complexe de X au-dessus du disque vers une variété à singularité conique* est une application holomorphe Π d'une variété kählérienne $(\mathcal{X}, \Omega)$ entière et close vers le disque de $\mathbf{C}$ ayant un unique point critique p, lequel est non dégénéré, et dont une fibre régulière $\Pi^{-1}(c)$ est égale à X. Une sphère de X de dimension moitié est appelée *cycle évanescent de la déformation* Π s'il existe un arc γ reliant la valeur critique à la valeur régulière c tel que les caractéristiques de l'hypersurface $\Pi^{-1}(\gamma) \setminus p$ pour la forme symplectique Ω transportent S sur p. Les cycles évanescents sont des sous-variétés lagrangiennes de la variété kählérienne $(X, \Omega|_X)$. Réciproquement, Donaldson a formulé la question suivante :

Question C ([Don00]). Toute sphère lagrangienne d'une variété projective X est-elle le cycle évanescent d'une déformation complexe de X vers une variété à singularité conique ?

Si on oublie la structure complexe de X, la réponse à cette question est bien connue (voir par exemple la proposition 1.11 de [Sei03]) : si (X, ω) est une variété symplectique close et S est une sphère lagrangienne, alors il existe une *déformation symplectique de (X, ω) au-dessus du disque vers une variété à singularité conique de cycle évanescent S*, c'est-à-dire une application lisse Π d'une variété symplectique close $(\mathcal{X}, \Omega)$ vers le disque ayant un unique point critique p, lequel est de type Lefschetz, dont les fibres sont des sous-variétés

symplectiques, telle qu'une fibre régulière $\Pi^{-1}(c)$ est égale à (X, ω) et les caractéristiques de la préimage d'un certain arc γ reliant la valeur critique à c transportent S sur p. On construira notamment, dans un cadre légèrement différent, une telle déformation (cf. proposition 3.12).

A présent on donne quelques résultats qui, on le verra à la fin de cette introduction, sont motivés par une approche suggérée par Emmanuel Giroux de cette question de Donaldson. Ces résultats font appel à la terminologie suivante :

— Une sous-variété lagrangienne S d'une variété symplectique entière (X, ω) est dite de *Bohr-Sommerfeld* si les périodes relatives de la 2-forme fermée ω sont entières.
— Une fonction réelle sur une variété complexe est dite $\mathbf{C}$-*convexe* (ou encore strictement plurisousharmonique) si $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}} f$ est une forme de Kähler.
— Une fonction de Morse-Bott f sur une variété symplectique (V, ω) est dite ω-*convexe* s'il existe une primitive λ de ω et un champ ω-dual de λ qui est un pseudogradient pour f.
— Une *variété de Stein* est une variété complexe V admettant une exhaustion de Morse-Bott $V \to \mathbf{R}$ qui est $\mathbf{C}$-convexe.
— Une *variété de Weinstein* est une variété symplectique (V, ω) admettant une exhaustion de Morse-Bott $V \to \mathbf{R}$ qui est ω-convexe.
— Une sous-variété S d'une variété de Stein/Weinstein V de dimension moitié est appelée *minimum* $\mathbf{C}$-*convexe (resp.* ω-*convexe)* s'il existe une exhaustion $f : V \to \mathbf{R}$ de Morse-Bott et $\mathbf{C}$-convexe (resp. ω-convexe) dont S est le plus bas niveau et dont la restriction à $V \setminus S$ est une fonction de Morse.

Guedj ([Gue99]) a démontré la version relative suivante du théorème de plongement de Kodaira : dans toute variété kählérienne (X, ω) close et entière, il existe une section hyperplane complexe Y évitant une sous-variété lagrangienne close S fixée à l'avance ; en particulier S est contenue dans la variété de Stein affine $X \setminus Y$. On donne dans la deuxième partie de cette thèse un raffinement de ce théorème spécifique aux sous-variétés lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld :

Théorème D. *Soient (X, ω) une variété kählérienne close et entière et S une sous-variété lagrangienne close de Bohr-Sommerfeld, alors il existe une section hyperplane complexe Y de X évitant S telle que S est un minimum $\mathbf{C}$-convexe dans la variété de Stein affine $X \setminus Y$.*

Par ailleurs, on donne une version symplectique de ce résultat qui est un prolongement des deux théorèmes suivants. D'une part Auroux-Gayet-Mohsen [AGM01] ont établi la généralisation symplectique suivante du théorème de Guedj : toute variété symplectique (X, ω) close et entière admet une section hyperplane symplectique qui évite une sous-variété lagrangienne close fixée à l'avance. D'autre part, Giroux a démontré ([Gir02],[Gir18]) que dans chaque sous variété symplectique close et entière, il existe des sections hyperplanes symplectiques dont le complémentaire admet une exhaustion ω-convexe.

Théorème E. *Soit (X, ω) une variété symplectique close et entière et S une sous-variété lagrangienne close de Bohr-Sommerfeld, alors, il existe une section hyperplane symplectique Y de X évitant S telle que S est un minimum ω-convexe dans la variété de Weinstein $X \setminus Y$.*

On présente dans la troisième partie de cette thèse un travail en commun avec Emmanuel Giroux. On y envisage une variante de la question C dans le cadre des domaines de

Stein. Une *déformation complexe d'un domaine de Stein V au-dessus du disque vers un domaine à singularité conique* est une application holomorphe Π d'une variété complexe $\mathcal{V}$ vers le disque de $\mathbf{C}$ ayant un unique point critique p, lequel est non dégénéré, dont une fibre régulière $\Pi^{-1}(c)$ est égale à V et telle qu'il existe une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ telle qu'en tout point $p \in \mathcal{V}$, $(-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi)_q(\cdot, i\cdot)|_{\ker \mathrm{d}_q\Pi}$ est définie positive et $\{\Phi = 0\}$ est un niveau régulier transverse aux fibres de Π. Une sous-variété S d'un domaine de Stein V de dimension moitié est appelée *minimum* $\mathbf{C}$*-convexe* s'il existe une fonction $\mathbf{C}$-convexe $f : V \to \mathbf{R}$ dont S est le niveau le plus bas, ∂V est un niveau régulier et la restriction à $V \setminus S$ est une fonction de Morse.

Théorème F (avec Emmanuel Giroux)**.** *Soit S une sphère d'un domaine de Stein V qui est un minimum* $\mathbf{C}$*-convexe, alors S est un cycle évanescent d'une déformation complexe de V sur le disque vers un domaine à singularité conique.*

Ce résultat utilise crucialement les techniques de construction de structures complexes de Stein sur les variétés de Weinstein élaborées par Eliashberg et Cieliebak (voir [Eli90] et [CE12]).

En combinant ces résultats pour une sphère lagrangienne S d'une variété projective X, on peut trouver une section hyperplane complexe Y de X telle que le complémentaire d'un tube autour de Y soit un domaine de Stein dans lequel S est un minimum $\mathbf{C}$-convexe puis réaliser S comme cycle évanescent d'une déformation de ce domaine de Stein. Une perspective en prolongement de ce travail serait de réaliser une telle déformation qui soit compactifiable en une déformation de toute la variété projective X. Pour mettre en place cette stratégie, il faudrait d'abord obtenir une version du théorème précédent spécifique aux variétés affines :

Question G. Soit S une sphère d'une variété affine V qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe, alors S est-elle un cycle évanescent d'une déformation complexe de V vers une variété à singularité conique parmi des variétés affines ?

On termine cette introduction en signalant que le second chapitre de cette thèse, contenant les théorèmes D et E, a fait l'objet de la prépublication [Ver18].

On utilisera dans la suite du texte les conventions suivantes :

— les variétés sont séparées, paracompactes et lisses (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$) ; une variété *close* est une variété compacte sans bord et une variété *ouverte* est une variété dont aucune composante connexe n'est close ; les applications entre variétés sont supposées lisses sauf mention explicite du contraire ;

— on utilisera l'adjectif $\mathbf{C}$*-convexe* (ou J*-convexe* pour préciser la structure complexe) au lieu de «strictement plurisousharmonique» ;

— $\mathrm{d}^{\mathbf{C}}$ (ou d^J pour préciser la structure complexe) opère sur les fonctions lisses par $\mathrm{d}^{\mathbf{C}} f = \mathrm{d}f(J\cdot)$;

— si λ est une 1-forme dont la différentielle extérieure telle que $\mathrm{d}\lambda$ est symplectique, on note $\vec{\lambda}$ le champ de vecteurs $\mathrm{d}\lambda$-dual à λ ;

— si H est une fonction lisse et ω est une forme symplectique donnée par le contexte, on note $\vec{H}$ le champ de vecteurs (Hamiltonien) défini par $\omega(\vec{H}, \cdot) = \mathrm{d}H$;

— sur un produit d'ensembles $X_1 \times X_2$, pr_j désigne l'application de projection sur le j-ème facteur ;

— dans un espace topologique, la notation de Gromov $\mathrm{Op}\, A$ désigne un voisinage ouvert non spécifié du sous-ensemble A.

CHAPITRE 1

Géométrie symplectique des métriques singulières

Motivés par une compréhension symplectique de techniques effectives en géométrie algébrique complexe, on donne dans ce chapitre une nouvelle preuve d'un résultat d'Eckl [Eck17] interprétant les constantes de Seshadri en termes de plongements de boules kählériennes.

1.1 Résultats effectifs et constantes de Seshadri

La construction de *métriques singulières à pôles logarithmiques isolés et à courbure positive* sur les fibrés en droites holomorphes joue un rôle majeur dans l'obtention de résultats effectifs en géométrie algébrique complexe. Un premier exemple est une version effective du «grand théorème» de Matsusaka obtenue par Siu [Siu93]. La taille maximale des pôles de telles métriques singulières a été définie par Demailly [Dem92] sous le nom de *constante de Seshadri*.

Avant de définir ces deux termes, on a besoin de la notion de fonction $\mathbf{C}$-*convexe* définie par Oka et Lelong (voir par exemple la partie 1.5 de [Dem12] pour un exposé détaillé de cette notion).

Définition 1.1. Une fonction réelle ϕ lisse sur une variété complexe est dite $\mathbf{C}$-*convexe* si $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi$ est une forme de Kähler.

Proposition 1.2. *Une fonction lisse $\phi : U \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe si et seulement si il existe une fonction strictement positive $\epsilon : U \to \mathbf{R}$ telle que, pour tous $z \in U, v \in \mathbf{C}^n$, pour tout $r > 0$ suffisamment petit :*

$$\int_0^{2\pi} \phi(z + re^{i\theta}v) - (\phi(z) + \tfrac{\epsilon(z)r^2}{2})\ \mathrm{d}\theta \geq 0. \tag{1.1}$$

Définition 1.3. Une fonction continue $\phi : U \subset \mathbf{C}^n \to [-\infty, \infty[$ et localement intégrable est dite $\mathbf{C}$-*convexe* si elle vérifie la condition (1.1).

Démonstration. On donne une preuve dans le cas $n = 1$. On suppose (1.1). Alors, en prenant le développement de Taylor de ϕ en z à l'ordre 2, (1.1) s'écrit, pour tout $r > 0$ suffisamment petit :

$$\pi r^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z} \partial z}(z) - \epsilon(z) \right) + o(r^2) \geq 0.$$

Donc $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z} \partial z} > 0$ sur U, autrement dit $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi = 2i\mathrm{d}'\mathrm{d}''\phi = 4\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z} \partial z}\frac{i}{2}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$ est une forme de Kähler. La réciproque se montre similairement. □

L'exemple suivant joue un rôle important dans ce chapitre.

Exemple 1.4 (Singularité logarithmique)**.** Pour tous $\epsilon > 0, s \geq 0$, la fonction

$$s \log |z| + \epsilon |z|^2 : \mathbf{C}^n \to [-\infty, \infty[$$

est continue, localement intégrable et $\mathbf{C}$-convexe.

Proposition 1.5. *Soient U, V deux ouverts de $\mathbf{C}^n$, $\phi : V \to [-\infty, \infty[$ une fonction continue, localement intégrable et $\mathbf{C}$-convexe et $f : U \to V$ un biholomorphisme, alors $\phi \circ f$ est $\mathbf{C}$-convexe.*

D'après la proposition précédente, pour une preuve de laquelle on renvoie à [Dem12] (p. 40), la notion de $\mathbf{C}$-convexité a un sens pour les fonctions d'une variété complexe vers $[-\infty, \infty[$ qui sont continues et localement intégrables.

Définition 1.6. Soient X une variété projective complexe, $L \to X$ un fibré en droites holomorphe, $p \in X$ et $s > 0$ un réel. Une *métrique hermitienne sur $L \to X$ à singularité logarithmique d'ordre s en p et à courbure positive* est la donnée d'une application $|\cdot|_h : L \to [0, \infty]$ ayant la propriété suivante. Pour tout $q \in X$, il existe un voisinage U de q, une trivialisation holomorphe $\tau : L|_U \to U \times \mathbf{C}$ et une fonction continue $\psi : U \to [-\infty, \infty[$, localement intégrable et $\mathbf{C}$-convexe tels que, pour tout $\xi \in L|_U$,

$$|\xi|_h = e^{-\psi} |\tau(\xi)|$$

et

1. si U ne contient pas p, ψ est finie et lisse sur U ;
2. si U contient p, dans une certaine carte holomorphe (z) centrée en p :

$$\liminf_{z \to 0} \frac{\psi}{\log |z|} = s. \tag{1.2}$$

Remarque 1.7. Si la condition (1.2) de la définition précédente est vérifiée pour une carte holomorphe (z) centrée en p, alors elle l'est pour toutes (cf. corollaire 7.2 dans [Dem12]).

Définition 1.8. Soient X une variété projective complexe, a une classe de Kähler entière et $p \in X$. La *constante de Seshadri de a en p* est la borne supérieure $\nu(a, p)$ de l'ensemble des réels $\nu > 0$ tels qu'il existe un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern a ayant une métrique hermitienne à singularité logarithmique d'ordre ν en p et à courbure positive.

La proposition suivante illustre le rôle central des métriques singulières dans l'obtention de résultats effectifs.

Proposition 1.9 ([Dem92], proposition 6.8)**.** *Soient $s \geq 0$ un réel, X une variété projective complexe de dimension n, $L \to X$ un fibré en droites holomorphe et $p \in X$. Si la première classe de Chern de $L \to X$ a une constante de Seshadri strictement supérieure à $n+s$ en p alors les sections globales du fibré adjoint $K_X \otimes L$ engendrent les s-jets en p.*

Démonstration. On donne une preuve dans le langage des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel, issue de [Dem96] (pages 89–90). Il existe une métrique hermitienne h sur L de courbure positive à singularité logarithmique d'ordre supérieur à $n+s$ en p. On note $\mathcal{O}$ le faisceau d'anneaux sur X dont les sections sont les fonctions holomorphes. On note $\mathfrak{M}_p^{s+1}$ le faisceau d'idéaux des fonctions holomorphes dont le s-jet s'annule en p. On note $\mathcal{I}_h$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}$ dont la fibre en un point $q \in X$ est définie comme l'ensemble des germes de fonctions holomorphes f en q telles que, pour une certaine section locale $s : \mathrm{Op}\, q \to L$ ne s'annulant pas, fs est localement intégrable en q pour la métrique h. Comme h est lisse hors de p, $(\mathcal{I}_h)_q = \mathcal{O}_q$ pour tout $q \neq p$. On va montrer l'assertion : $(\mathcal{I}_h)_p \subset (\mathfrak{M}_p^{s+1})_p$. On prend une trivialisation holomorphe de L sur une boule holomorphe B centrée en p et on note $h = e^{-2\phi}$ dans cette trivialisation. Il existe un réel $\gamma > n+s$ tel que, quitte à rétrécir le rayon de la boule B, $\phi \leq \gamma \log |z|$ pour tout $z \in B$. Soit $f \in (\mathcal{I}_h)_p$. Alors :

$$\int_B |f|^2 |z|^{-2\gamma} < \infty.$$

On développe f en série entière $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ sur un polydisque de rayon $\epsilon > 0$ inclus dans B (où α parcourt les n-uplets d'entiers positifs ou nuls). D'après la formule de Parseval-Plancherel :

$$\sum_\alpha a_\alpha \int_{[0,\epsilon]^n} r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} |r|^{-2\gamma} < \infty.$$

Or l'intégrande est homogène de degré $2(\sum_j \alpha_j + n - \gamma) - 1$ donc, en changeant de variables :

$$\sum_\alpha a_\alpha \int_0^\epsilon t^{2(\sum_j \alpha_j + n - \gamma) - 1} < \infty.$$

D'où $a_\alpha = 0$ si $\sum_j \alpha_j \leq s$, autrement dit f s'annule à l'ordre s en p. L'assertion est démontrée.

La suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathcal{I}_h \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{I}_h \to 0$ induit la suite exacte longue de cohomologie des faisceaux :

$$\cdots \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(K_X \otimes L)) \to^r \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(K_X \otimes L) \otimes \mathcal{O}/\mathcal{I}_h) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}(K_X \otimes L) \otimes \mathcal{I}_h) \to \cdots.$$

Or, en appliquant le théorème d'annulation de Nadel ([Nad90]) au fibré en droites $L \to X$ muni de la métrique h : $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}(K_X \otimes L) \otimes \mathcal{I}_h) = 0$. Ainsi l'application linéaire r est surjective. Or, d'après le paragraphe précédent, $\mathcal{O}/\mathcal{I}_h$ est le faisceau dont la fibre en p est l'espace vectoriel des s-jets de fonctions holomorphes en p et dont les autres fibres sont nulles. Ainsi, l'application qui à chaque section globale de $K_X \otimes L$ associe son s-jet en p est surjective.

□

On illustre ici cette proposition. On suppose que les constantes de Seshadri d'une classe de Kähler entière a sur une variété complexe close X sont minorées par une constante $c > 0$ en tout point. On fixe un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern a et on pose k_0 le plus petit entier strictement supérieur à $c^{-1} \dim X$. En appliquant cette proposition en tout point avec $s = 0$, le fibré $K_X \otimes L^{k_0}$ est globalement engendré. Enfin, d'après le théorème de Bertini, $K_X \otimes L^{k_0}$ admet une section globale s'annulant transversalement ; son lieu des zéros est alors une hypersurface complexe de X en dualité de Poincaré avec $[K_X] + k_0 a$.

Les méthodes effectives exposées ci-dessus reposent essentiellement sur l'existence d'une structure complexe intégrable compatible avec ω. Cependant, l'existence de sections hyperplanes est un phénomène symplectique ; en effet, dans une variété symplectique close et entière (X, ω), Donaldson ([Don96]) a montré l'existence de sous-variétés symplectiques closes de codimension 2 de (X, ω) en dualité de Poincaré avec $k\omega$ dès que $k \geq k_0$.

Dans ce chapitre, on donne une caractérisation géométrique des constantes de Seshadri :

Théorème B. *Soit X une variété projective complexe, a une classe de Kähler entière et $p \in X$. La constante de Seshadri de a en p est la borne supérieure $c(a, p)$ de l'ensemble des réels $c > 0$ tels qu'il existe une forme de Kähler α sur X de classe a et un plongement holomorphe isométrique de la boule $(\{z \in \mathbf{C}^n, |z|^2 \leq \frac{c}{\pi}\}, \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j)$, centré en p.*

Comme on l'a appris plus tard, ce résultat était connu de Eckl [Eck17]. La preuve donnée par Eckl [Eck17] repose sur les techniques d'éclatement/effondrement dans les variétés kählériennes établies par Mc-Duff et Polterovich [MP94].

Pour minorer les constantes de Seshadri, les techniques de Siu sus-mentionnées utilisent une suite de métriques singulières à pôles logarithmiques dont les lieux singuliers sont des intersections successives (singulières) de sections hyperplanes (dont la dimension décroît vers 0). Comprendre la géométrie symplectique de ce type plus général de métriques semble être une suite naturelle de ce travail.

Au-delà de la compréhension des métriques singulières, l'approche du problème A mentionné en introduction par extension des méthodes de Demailly et Siu au cadre symplectique fait face à des difficultés, notamment l'absence de formalisme cohomologique, qui semblent pour le moment insurmontables.

1.2 Interprétation géométrique des constantes de Seshadri

On donne dans cette partie une preuve du théorème B par interpolation de fonctions $\mathbf{C}$-convexes dans $\mathbf{C}^n$. On pourrait également chercher, en utilisant ce type de méthodes, à obtenir la caractérisation plus intrinsèque suivante :

Question 1.10. Soit X une variété projective complexe, a une classe de Kähler entière et $p \in X$. La constante de Seshadri de a en p est-elle la borne supérieure de l'ensemble des réels $c > 0$ tels qu'il existe une forme de Kähler α sur X de classe a et un plongement holomorphe d'une boule $B \subset \mathbf{C}^n$ dans X centrée en p, de capacité symplectique c pour α, et sur laquelle $\alpha = -\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi$ où $\phi : B \to \mathbf{R}$ est une fonction lisse avec un unique point critique ?

On utilise les notations suivantes : $\omega = -\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}|z|^2/4$ désigne la forme de Kähler standard sur $\mathbf{C}^n$ et $B_c = \{z \in \mathbf{C}^n,\ |z|^2 < c/\pi\}$ désigne la boule standard de capacité c.

Démonstration du théorème B. Montrons que $\nu(a,p) = c(a,p)$.

On montre d'abord $\nu \geq c$. On peut supposer $c > 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$, α une forme de Kähler sur X de classe a et une boule holomorphe B de (X,α) centrée en p et Kähler-isométrique à la boule standard $B_{c-\epsilon} \subset \mathbf{C}^n$. On prend un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern a.

On donne d'abord l'idée de la preuve : il s'agit de remplacer une métrique hermitienne lisse (à courbure positive) sur L dont la courbure sur la boule holomorphe B est la forme de Kähler standard par une métrique singulière à singularité logarithmique au centre de cette boule (et à courbure positive).

On prend une métrique hermitienne h sur L lisse et de courbure de Chern $-2\pi i\alpha$. Il existe une trivialisation holomorphe $\tau : L|_{B_{c-\epsilon}} \to B_{c-\epsilon} \times \mathbf{C}$ telle que, pour tout $\xi_z \in L|_{c-\epsilon}$,

$$|\xi|_h = |\tau(\xi)|e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}.$$

En effet, si on prend une trivialisation holomorphe σ de $L|_{B_s}$ et qu'on note $\phi : B_{c-\epsilon} \to \mathbf{R}$ la fonction lisse telle que $|\xi|_h = |\sigma(\xi)|e^{-2\pi\phi}$, alors, en notant d' la partie $\mathbf{C}$-linéaire de la différentielle, $\mathrm{d}'\phi - \mathrm{d}'(\frac{1}{4}|z|^2)$ est une forme fermée sur $B_{c-\epsilon}$. D'après le lemme de Poincaré, il existe une fonction holomorphe $f : B_{c-\epsilon} \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{d}'\phi - \mathrm{d}'(\frac{1}{4}|z|^2) = d'f$. Ainsi la trivialisation $\tau := e^{2\pi f}\sigma$ convient.

En appliquant le lemme 1.11 aux réels $0 < \epsilon < c - \epsilon$ on obtient des réels $\delta > 0$, C et une fonction continue $\psi : B_{c-\epsilon} \to [-\infty, \infty[$ nulle près du bord, lisse hors de l'origine, telle que $\psi = \frac{c-2\epsilon}{2\pi}\log|z| + \frac{\delta-1}{4}|z|^2 + C$ près de l'origine et $\psi + \frac{1}{4}|z|^2$ est $\mathbf{C}$-convexe sur $B_{c-\epsilon}$. On étend ψ à X par 0 hors de $B_{c-\epsilon}$. Alors la métrique hermitienne $h' := e^{-2\pi\psi}h$ sur L vérifie $|\xi|_{h'} = e^{-2\pi(\psi+|z|^2/4)}|\tau(\xi)|$ sur $B_{c-\epsilon}$. Ainsi h' a une singularité logarithmique d'ordre $c - 2\epsilon$ en p et a une courbure positive.

On montre maintenant $c \geq \nu$. On peut supposer $\nu > 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern a muni d'une métrique hermitienne à singularité logarithmique d'ordre $\nu - \epsilon$ en p. On prend une boule B de X centrée en p biholomorphe à B_1 et une trivialisation holomorphe τ de $L|_{B_1}$. Alors, $|\xi|_h = |\xi|e^{-2\pi\psi}$ pour une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\psi : B_1 \to [-\infty, \infty[$ lisse hors de l'origine avec $\liminf_{z\to 0} \frac{\psi(z)}{\log|z|} = \frac{\nu-\epsilon}{2\pi}$.

Ici, réciproquement, l'idée est de remplacer la métrique singulière h à singularité logarithmique au centre de la boule holomorphe B par une métrique lisse dont la courbure est la forme de Kähler standard sur B.

On applique le lemme 1.12 à ψ et aux réels $0 < \epsilon < \nu - \epsilon$: il existe une fonction lisse $\mathbf{C}$-convexe $\phi : B_1 \to \mathbf{R}$ et des réels $\delta > 0$ et C tels que $\phi = \frac{\nu-2\epsilon}{\delta}\frac{|z|^2}{4} + C$ sur B_δ et $\phi = \psi$ près de ∂B_1. On pose h' la métrique hermitienne sur L telle que $h' = h$ hors de B et $|\xi|_{h'} := |\tau(\xi)|e^{-2\pi\phi}$ au-dessus de B ; elle est lisse et de courbure positive. On note $-2\pi i\alpha$ la courbure de Chern de h' ; alors α est une forme de Kähler de classe a et, sur B_δ, $\alpha = -\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi = \frac{\nu-2\epsilon}{\delta}\omega$. Ainsi, la précomposition de notre plongement holomorphe $B_\delta \to X$ par l'homothétie $B_{\nu-2\epsilon} \to B_\delta$ rappelle α en ω.

□

Lemme 1.11. *Soient $0 < \epsilon < s$ et $\delta > 0$. Alors il existe un réel C et une fonction continue $\psi : B_s \to [-\infty, \infty[$, lisse sur $B_s \setminus 0$, telle que $\psi = 0$ au voisinage de ∂B_s, $\psi = \frac{s-\epsilon}{2\pi} \log|z| + \frac{\delta-1}{4}|z|^2 + C$ au voisinage de l'origine et $\psi + \frac{1}{4}|z|^2$ est $\mathbf{C}$-convexe.*

Démonstration. D'après le lemme 1.13, il suffit de construire un réel C et une fonction lisse $h : [0, \frac{s}{\pi}] \to \mathbf{R}$ telle que $h(t) = g(t) := \frac{s-\epsilon}{4\pi} \log t + \frac{\delta}{4} t + C$ au voisinage de 0, $h(t) = \frac{t}{4}$ près de $\frac{s}{\pi}$ et, pour tout $t \in [0, \frac{s}{\pi}]$, $h'(t), (th'(t))' > 0$; en effet, $\psi(z) := h(|z|^2) - \frac{|z|^2}{4}$ définira alors la fonction désirée.

Il existe une fonction lisse $k : [0, \frac{s}{\pi}] \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ strictement croissante avec $k(t) = tg'(t)$ pour t voisin de 0 et $k(t) = \frac{t}{4}$ pour t voisin de $\frac{s}{\pi}$ (car $(tg'(t))(0) < \frac{s}{4\pi}$). Alors $h(t) := \frac{s}{4\pi} + \int_{s/\pi}^{t} \frac{k(u)\mathrm{d}u}{u}$ définit la fonction voulue.

□

Lemme 1.12. *Soient $0 < \epsilon < s$ et une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\psi : \overline{B}_1 \to \mathbf{R}$ lisse hors de l'origine telle que $\liminf_{z \to 0} \frac{\psi(z)}{\log|z|} = \frac{s}{2\pi}$. Alors il existe $\delta > 0$, $C \in \mathbf{R}$ et une fonction lisse $\mathbf{C}$-convexe $\phi : B_1 \to \mathbf{R}$ avec $\phi = \frac{s-\epsilon}{\delta} \frac{|z|^2}{4} + C$ sur B_δ et $\phi = \psi$ près de ∂B_1.*

Démonstration. Il existe $\delta > 0$, $D \in \mathbf{R}$ et une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\vartheta : B_\pi \to \mathbf{R}$ lisse hors de l'origine telle que ϑ coincide avec $\frac{|z|^2}{4} + \frac{s-\epsilon}{2\pi} \log|z| + D$ sur $B_{2\delta}$ et avec ψ près de ∂B_1. En effet, pour $D < \min_{\partial B_\pi} \psi - \frac{1}{4}$, la fonction $\max(\rho, \psi)$ est $\mathbf{C}$-convexe, vaut ρ près de l'origine et ψ près de ∂B_1. On obtient la fonction ϑ en lissant la fonction $\max(\rho, \psi)$ au voisinage de $\{\rho = \psi\}$ par le théorème de régularisation de Richberg [Ric68].

On s'est ramené à montrer l'existence d'une fonction $\mathbf{C}$-convexe lisse $\theta : B_{2\delta} \to \mathbf{R}$ avec $\theta = \rho$ près de $\partial B_{2\delta}$ et $\theta = \frac{s-\epsilon}{\delta} \frac{|z|^2}{4} + C$ sur B_δ. D'après le lemme 1.13, il suffit de construire un réel C et une fonction lisse $h : [0, \frac{2\delta}{\pi}] \to \mathbf{R}$ telle que $h(t) = g(t) := \frac{s-\epsilon}{4\pi} \log t + \frac{t}{4} + D$ pour t voisin de $\frac{2\delta}{\pi}$, $h(t) = \frac{s-\epsilon}{\delta} \frac{t}{4} + C$ pour tout $t \in [0, \frac{\delta}{\pi}]$ et $h'(t), (th'(t))' > 0$ pour tout $t \in [0, \frac{2\delta}{\pi}]$. En effet, $\theta(z) := h(|z|^2)$ sera alors la fonction désirée.

Il existe une fonction $k : [0, \frac{2\delta}{\pi}] \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ lisse strictement croissante avec $k(t) = j(t) := \frac{s-\epsilon}{\delta} \frac{t}{4}$ pour tout $t \in [0, \frac{\delta}{\pi}]$ et $k(t) = tg'(t)$ près de $\frac{2\delta}{\pi}$ (car $j(\frac{\delta}{\pi}) < (tg'(t))(\frac{2\delta}{\pi})$). Alors la fonction définie par $h(t) := g(\frac{2\delta}{\pi}) + \int_{2\delta/\pi}^{t} \frac{k(u)\mathrm{d}u}{u}$ a les propriétés voulues. □

Lemme 1.13. *Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction lisse, alors la fonction $g \circ |z|^2 : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe si et seulement si, pour tout $t \geq 0$, $g'(t) > 0$ et $(tg'(t))' > 0$.*

Démonstration. En dérivant :

$$-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}(g \circ |z|^2) = (g' \circ |z|^2)(-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}|z|^2) + (g'' \circ |z|^2)\mathrm{d}|z|^2 \wedge (-\mathrm{d}^{\mathbf{C}}|z|^2).$$

Ainsi, en tout point $z \in \mathbf{C}^n$, le sous-espace $\mathbf{C}z$ et son orthogonal pour la forme de Kähler $\omega = -\mathrm{dd}^c|z|^2/4$, $(\mathbf{C}z)^\perp$, sont également orthogonaux pour la 2-forme $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}(g \circ |z|^2)$. Donc la fonction $g \circ |z|^2$ est $\mathbf{C}$-convexe ssi les restrictions de $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}(g \circ |z|^2)$ à $(\mathbf{C}z)^\perp$ et à $\mathbf{C}z$ sont des formes de Kähler. La forme $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}(g \circ |z|^2)|_{(\mathbf{C}z)^\perp}$ (resp. $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}(g \circ |z|^2)|_{\mathbf{C}z}$) est Kähler ssi $g' \circ |z|^2 > 0$ (resp. $g' \circ |z|^2 + |z|^2 g'' \circ |z|^2 > 0$) ; en effet, $\mathrm{d}|z|^2 \wedge \mathrm{d}^{\mathbf{C}}|z|^2$ s'annule sur $(\mathbf{C}z)^\perp$ et vaut $|z|^2 \mathrm{dd}^{\mathbf{C}}|z|^2$ sur $\mathbf{C}z$.

□

CHAPITRE 2

Lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld et minima de fonctions convexes

Dans ce chapitre, on présente toute sous-variété lagrangienne close d'une variété symplectique/kählérienne close dont les périodes relatives sont entières comme lieu des minima d'une exhaustion «convexe» définie sur le complémentaire d'une section hyperplane symplectique/complexe. Dans le cadre kählérien, «convexe» signifie strictement plurisousharmonique tandis que dans le cadre symplectique, cela signifie de Lyapounov pour un champ de Liouville. En particulier, $Q \subset X \setminus Y$ est une lagrangienne ordinaire au sens de Eliashberg-Ganatra-Lazarev.

2.1 Introduction

Les propriétés de convexité rationnelle des sous-variétés lagrangiennes ont été d'abord découvertes dans $\mathbf{C}^2$ par Duval puis ont été étudiées par Duval-Sibony, Gayet et Guedj. En particulier, Guedj a obtenu la généralisation suivante d'un résultat de Duval-Sibony dans $\mathbf{C}^n$: dans une variété projective complexe X, toute sous variété close Q est rationnellement convexe, c'est-à-dire $X \setminus Q$ est remplie par des hypersurfaces complexes lisses. Plus précisément, ces hypersurfaces complexes Y sont des diviseurs très amples de degrés arbitrairement grands, donc leurs complémentaires sont des variétés affines et admettent des exhaustions $\mathbf{C}$-convexes $f : X \setminus Y \to \mathbf{R}$.

Définition 2.1. Soit V une variété de Stein et $Q \subset V$ une sous-variété close de dimension moitié. On dit que Q est un *minimum* $\mathbf{C}$*-convexe* s'il existe une exhaustion $\mathbf{C}$-convexe $f : V \to \mathbf{R}$ dont Q est un minimum de Morse-Bott et dont la restriction à $V \setminus Q$ est une fonction de Morse.

Cette propriété de convexité est plus restrictive que la convexité rationnelle ; en effet, d'après Duval-Sibony, dans $\mathbf{C}^n$ une sous-variété close de dimension moitié est rationnellement convexe si (et seulement si) elle est lagrangienne pour une certaine forme symplectique, cependant aucune sous-variété close de dimension moitié n'est un minimum $\mathbf{C}$-convexe (d'après [AN62], voir aussi la discussion clôturant cette introduction).

Dans ce chapitre, motivé par question C mentionnée en introduction, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit un minimum $\mathbf{C}$-convexe. Cette condition fait référence à une classe de Kähler et peut être énoncée plus généralement ainsi dans le cadre symplectique :

Définition 2.2. Soit (X, ω) une variété symplectique close et entière, au sens où X est une variété close et ω est une forme symplectique dont les périodes sont entières. On dit qu'une sous-variété Q *satisfait la condition de Bohr-Sommerfeld* — ou plus simplement *est Bohr-Sommerfeld* — si le morphisme $\mathrm{H}_2(X, Q, \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$ défini par l'intégration de ω prend des valeurs entières.

Dans le cadre kählérien, voici notre résultat principal (énoncé en introduction) :

Theorème D. *Soit (X, ω) une variété kählérienne close et entière et Q une sous-variété lagrangienne close satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld. Alors, pour tout entier k suffisamment grand, il existe une section hyperplane complexe Y de degré k dans X évitant Q telle que Q est un minimum $\mathbf{C}$-convexe dans $X \setminus Y$.*

Plus explicitement, il existe un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern ω tel que l'hypersurface complexe Y soit le lieu des zéros d'une section holomorphe d'une grande puissance extérieure de L.

Dans [AGM01], Auroux-Gayet-Mohsen ont redémontré le théorème de Guedj ci-dessus et l'ont étendu au cadre symplectique en utilisant des idées et des techniques développées par Donaldson dans [Don96]. Le théorème D a lui aussi une version symplectique, dont l'énoncé fait appel à la terminologie suivante :

- Une *section hyperplane symplectique de degré k* dans une variété symplectique close et entière (X, ω) est une sous-variété symplectique Y de codimension 2 en dualité de Poincaré avec $k\omega$.
- Une fonction $f : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ est *ω-convexe* si elle admet un champ de vecteurs pseudogradient de Liouville (*i.e.* ω-dual à une primitive de ω).
- Une fonction $f : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ est *ω-convexe* si elle admet un champ de vecteurs pseudogradient de Liouville (*i.e.* ω-dual à une primitive de ω).
- Une sous-variété de dimension moitié $Q \subset X \setminus Y$ est un *minimum ω-convexe* s'il existe une exhaustion ω-convexe $f : V \to \mathbf{R}$ dont Q est un minimum de Morse-Bott et qui est une fonction de Morse hors de Q.

Avec cette formulation, le théorème principal de Donaldson dans [Don96] s'énonce ainsi : toute variété symplectique entière et close contient des sections hyperplanes de tous degrés suffisamment élevés. De plus, d'après Auroux-Gayet-Mohsen [AGM01], de telles sections hyperplanes symplectiques peuvent être construites en dehors de toute sous-variété lagrangienne close fixée à l'avance. D'autre par, Giroux a montré dans [Gir18] que, pour tous degrés suffisamment élevés, les complémentaires des sections hyperplanes symplectiques de Donaldson admettent des exhaustions ω-convexes (et sont donc des variétés de Weinstein). En mélangeant ces ingrédients, on obtient :

Theorème E. *Soit (X, ω) une variété symplectique close et entière et Q une sous-variété lagrangienne close de Bohr-Sommerfeld de X. Alors, pour tout degré k suffisamment grand, il existe une section hyperplane symplectique Y de degré k dans X évitant Q telle que Q est un minimum ω-convexe dans la variété de Weinstein $X \setminus Y$.*

Dans [EGL15], Eliashberg-Ganatra-Lazarev ont introduit la définition suivante : une sous-variété lagrangienne Q d'une variété de Weinstein (W, ω) est «ordinaire» s'il existe un pseudogradient de Liouville W qui est tangent à Q (ou de façon équivalente il existe une primitive de ω dont la restriction à Q s'annule). Depuis assez longtemps, il est connu que cette propriété, qui implique que Q est une sous-variété lagrangienne exacte, est une forte contrainte. Par exemple, il est élémentaire de voir (sans aucune théorie de courbes holomorphes) qu'une sous-variété lagrangienne close de $\mathbf{C}^n$ ne peut être ordinaire. En même temps, malgré l'absence d'exemple de sous-variété lagrangienne exacte close non ordinaire dans une variété de Weinstein, on ne connaît aucune méthode générale pour prouver que les sous-variétés lagrangiennes exactes devraient *a priori* être ordinaires. Les théorèmes D et E montrent que, dans le complémentaire des sections hyperplanes complexes et symplectiques construites, la sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld Q est tangente à un pseudogradient de Liouville et est don ordinaire.

Dans la partie 2.2 on explique pourquoi la condition de Bohr-Sommerfeld nous est nécessaire et on décrit quelques propriétés des lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld. Dans la partie 2.3 on démontre le théorème E en appliquant le résultat technique principal de [Gir18]. Dans la partie 2.4 on démontre le théorème D, ainsi que son analogue du point de vue de la géométrie complexe, en utilisant des techniques qui remontent à [DS95].

2.2 Sous-variétés lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld...

On note d'abord que Cieliebak-Mohnke ont prouvé, dans [CM17, Theorem 8.3], une version du théorème principal de [AGM01] qui est spécifique aux sous-variétés lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld.

La condition de Bohr-Sommerfeld des théorèmes D et E est nécessaire, en effet :

Lemme 2.3. *Soit (X, ω) une variété symplectique close et entière et Q une sous-variété lagrangienne. On suppose qu'il existe une sous-variété $Y \subset X$ en dualité de Poincaré avec ω évitant Q et λ une primitive de ω sur $X \setminus Y$ dont la restriction à la sous-variété Q est exacte. Alors Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld de (X, ω).*

Démonstration. Il suffit de montrer l'assertion (bien connue) suivante : Soit X une variété close connexe et orientée, $Y \subset X$ une sous-variété close de codimension 2 et ω une 2-forme exacte non fermée sur X en dualité de Poincaré avec Y. Alors, pour toute surface compacte $\Sigma \subset X$ à bord disjoint de Y et pour toute primitive λ de ω sur $X \setminus Y$ dont la restriction à Q est exacte,

$$\int_\Sigma \omega = \Sigma.Y \ .$$

On suppose d'abord que Y est connexe. Pour tout 2-disque plongé D intersectant Y transversalement en un point, avec un signe $\epsilon(D) = \pm 1$, on pose $r := \epsilon(D)(\int_D \omega - \int_{\partial D} \lambda)$. Le «résidu» r ne dépend pas du choix de D. Pour voir ceci on va montrer que, pour deux tels disques D et D',

$$\epsilon(D') \int_{\partial D'} \lambda - \epsilon(D) \int_{\partial D} \lambda = \int_C \omega = \epsilon(D') \int_{D'} \omega - \epsilon(D) \int_D \omega.$$

Par connexité de Y on peut fixer un cylindre C de $X \setminus Y$ de bord $-\epsilon(D')\partial D' + \epsilon(D)\partial D$. D'une part, d'après le théorème de Stokes,

$$\int_C \omega = \epsilon(D') \int_{\partial D'} \lambda - \epsilon(D) \int_{\partial D} \lambda.$$

D'autre part, le 2-cycle $C + \epsilon(D)D - \epsilon(D')D'$ est un bord dans X et ω est fermée donc

$$\int_C \omega + \epsilon(D) \int_D \omega - \epsilon(D') \int_{D'} \omega = 0.$$

Finalement, le «résidu» r ne dépend pas de D.

Soit $\Sigma \subset X$ une surface compacte intersectant Y en dehors de $\partial\Sigma$. Par un argument de position générale on peut supposer que les intersections sont transverses. Pour chaque point $p_i \in \Sigma \cap Y$, on prend un disque $D_i \subset \Sigma$ qui intersecte Y seulement en p_i. Par le théorème de Stokes, $\int_{\Sigma \setminus \cup_i D_i} \omega = -\sum_i \int_{\partial D_i} \lambda$, ainsi :

$$\int_\Sigma \omega = \Sigma.Y \ r \ . \tag{2.1}$$

Comme ω n'est pas exacte, on peut appliquer (2.1) à une surface close Σ_0 vérifiant $\Sigma_0.Y = \int_{\Sigma_0} \omega \neq 0$. Il en résulte $r = 1$; l'assertion découle donc de (2.1).

On suppose maintenant que Y n'est pas connexe. Si $\dim X \geq 3$, alors le cycle $[Y]$ peut être représenté par une sous-variété close et connexe, par exemple par une somme connexe (en dehors de $\partial\Sigma_0$) des composantes connexes de Y. Si $\dim X = 2$, $[Y]$ est représentée par le multiple entier de n'importe quel point. Ainsi, on se ramène au cas précédent.

□

Cependant, la condition de Bohr-Sommerfeld peut facilement être obtenue après une légère modification de la forme symplectique :

Lemme 2.4 (Approximation et homothétie)**.** *Soit (X, ω) une variété symplectique close et Q une sous-variété lagrangienne close. Alors il existe une existe une 2-forme ϵ arbitrairement petite et un entier positif $k(\epsilon)$ tel que Q soit une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld de $(X, k(\omega + \epsilon))$.*

Démonstration. On raisonne comme dans [AGM01] : $\omega|_Q = 0$ donc, d'après la suite exacte longue $\cdots \to \mathrm{H}^2(X, Q; \mathbf{R}) \to \mathrm{H}^2(X; \mathbf{R}) \to \mathrm{H}^2(Q; \mathbf{R}) \to \cdots$, c'est l'image d'une classe relative $c \in \mathrm{H}^2(X, Q; \mathbf{R})$. On approxime c par une classe rationnelle $r \in \mathrm{H}^2(X, Q; \mathbf{Q})$ puis on prend une petite forme fermée ϵ s'annulant sur Q et représentant $c - r$. Alors, la forme fermée $\omega - \epsilon$ est symplectique, s'annule sur Q et ses périodes relatives — obtenues par évaluation de r sur $\mathrm{H}^2(X, Q, \mathbf{Z})$ — sont rationnelles. □

Voici la caractérisation des sous-variétés lagrangiennes de Bohr-Sommerfeld que l'on utilisera dans la preuve des théorèmes D et E.

Lemme 2.5 (Fibrés en droites plats)**.** *Soit (X, ω) une variété symplectique entière et Q une sous-variété. Alors, Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld si et seulement s'il existe un fibré en droites hermitien $L \to X$ et une connection unitaire ∇ sur L de courbure $-2i\pi\omega$ tels que $(L, \nabla)|_Q$ est un fibré plat trivial. Si Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld et, de plus, (X, ω) est une variété kählérienne, alors on peut choisir pour (L, ∇) un fibré hermitien holomorphe avec sa connection de Chern.*

Démonstration. On suppose que Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld. Comme les périodes de ω sont entières, on peut fixer un relevé c de sa classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$. On prend un fibré en droites hermitien $L_0 \to X$ de première classe de Chern c et une connection unitaire ∇_0 de courbure $-2i\pi\omega$. La sous-variété Q est Lagrangienne donc la restriction $(L_0, \nabla_0)|_Q$ est un fibré hermitien plat.

On va construire un fibré hermitien plat $(L_1, \nabla_1) \to X$ dont la restriction à Q est isomorphe à $(L_0, \nabla_0)|_Q$. Le fibré en droites désiré sera alors $L_0 \otimes L_1^{-1}$.

On rappelle que les fibrés en droites hermitiens plats au-dessus d'une variété Y sont classifiés à isomorphisme près par leur représentation d'holonomie $\mathrm{H}_1(Y, \mathbf{Z}) \to \mathrm{U}(1)$ (cf. proposition 3.6.15 dans [Thu97]). Pour construire le fibré plat (L_1, ∇_1) il suffit d'étendre la représentation d'holonomie $\rho : \mathrm{H}_1(Q, \mathbf{Z}) \to \mathrm{U}(1)$ du fibré plat $(L_0, \nabla_0)|_Q$ en un morphisme $\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{U}(1)$.

On montre d'abord que la restriction de ρ au noyau du morphisme de groupes i : $\mathrm{H}_1(Q, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z})$ induit par l'inclusion est triviale. On considère la suite exacte longue associée à la paire (X, Q) :

$$\cdots \to \mathrm{H}_2(X, Q; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_1(Q, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i} \mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z}) \to \cdots$$

où ∂ est le morphisme donné par le bord des chaînes. Il suffit de montrer que $\rho \circ \partial = 0$. Chaque classe $a \in \mathrm{H}_2(X, Q; \mathbf{Z})$ peut être représentée par une surface plongée $\Sigma \subset X$ dont le bord (éventuellement vide) est inclus dans Q. Il suit donc du lemme (bien connu) 2.6 que :

$$\rho(\partial a) = \exp\left(2i\pi \int_a \omega\right). \tag{2.2}$$

Comme Q vérifie la condition de Bohr-Sommerfeld, $\rho(\partial a) = 1$.

Ainsi ρ se factorise par le morphisme $\tilde{\rho} : \mathrm{H}_1(Q, \mathbf{Z})/\ker i \to \mathrm{U}(1)$ où $\mathrm{H}_1(Q, \mathbf{Z})/\ker i$ s'injecte dans $\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z})$. A présent $\mathrm{U}(1)$ est un groupe abélien divisible donc c'est un $\mathbf{Z}$-module injectif (voir par exemple [Wei95, Corollary 2.3.2]). On en déduit que $\tilde{\rho}$ s'étend à $H_1(X, \mathbf{Z})$.

Dans le cas où (X, ω) est une variété kählérienne, on peut prendre pour (L_0, ∇_0) un fibré en droites hermitien holomorphe avec sa connection de Chern (cf. [Dem12, Theorem 13.9.b]). D'autre part, le fibré plat (L_1, ∇_1) est isomorphe au quotient du fibré plat trivial $\tilde{X} \times \mathbf{C}$ par l'action diagonale du groupe fondamental, agissant sur le revêtement universel $\tilde{X}$ par automorphismes de revêtement et sur $\mathbf{C}$ par la représentation d'holonomie $\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{U}(1)$ (cf. proposition 3.6.15 dans [Thu97]). Par conséquent la structure complexe triviale et la connection triviale sur $\tilde{X} \times \mathbf{C}$ induisent respectivement une structure complexe et sa connection de Chern sur L_1. Le fibré $L_0 \otimes L_1^{-1}$ a donc les propriétés voulues.

Réciproquement, soit (X, ω) une variété symplectique et $L \to X$ un fibré en droites hermitien muni d'une connection unitaire ∇ de courbure $-2i\pi\omega$ tel que $(L, \nabla)|_Q$ est un fibré plat trivial. Alors, la représentation d'holonomie (triviale) ρ de $(L, \nabla)|_Q$ vérifie (2.2) ; donc Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld. □

Lemme 2.6 (Gauss-Bonnet)**.** *Soit X une variété et $L \to X$ un fibré en droites hermitien muni d'une connection unitaire ∇ dont on note $-2i\pi\omega$ la 2-forme de courbure. Soit Σ une surface connexe orientée à bord non vide et $f : \Sigma \to X$ une application. L'holonomie de ∇ le long du lacet $f|_{\partial\Sigma}$ est* $\exp(2i\pi \int_\Sigma f^\star\omega) \in \mathrm{U}(1)$.

Démonstration. On peut supposer $X = \Sigma$ et $f = \mathrm{Id}_\Sigma$ en rappelant le fibré L par l'application f. Il existe une section unitaire $s : \Sigma \to L$. Dans la trivialisation de L donnée par s, il existe une primitive α de ω telle que la connection ∇ se lit $d - 2i\pi\alpha$. Par le théorème de Stokes,

$$\int_\Sigma \omega = \int_{\partial\Sigma} \alpha \ .$$

On peut supposer que $\partial\Sigma$ est connexe. On prend $\beta : [0,1] \to \partial\Sigma$ un paramétrage de $\partial\Sigma$. Pour tout relevé parallèle unitaire $\gamma : [0,1] \to L$ de β et pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma'(t) = 2i\pi\gamma(t)\ (\beta^\star\alpha)_t(\partial_t)$ d'où

$$2i\pi \int_{\partial\Sigma} \alpha = \int_{[0,1]} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ dt = \log \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \ .$$

Une exponentiation donne le résultat. □

2.3 ...Comme minima de fonctions ω-convexes

Dans cette partie on démontre le théorème E donc Q est une sous-variété lagrangienne close de Bohr-Sommerfeld d'une variété symplectique entière (X, ω). On adoptera les notations suivantes :

— J : une structure presque-complexe ω-compatible sur X ;
— $g = \omega(\cdot, J\cdot)$: la métrique riemannienne correspondante ;
— λ_0 : la forme de Liouville sur $T^\star Q$;
— $f_0 : p \in T^\star Q \mapsto \pi|p|^2 \in \mathbf{R}$ où $|\cdot|$ est la norme sur chaque fibre de $T^\star Q \to Q$ induite par la restriction de la métrique g à Q.

En utilisant le théorème de forme normale de Weinstein, on identifie un voisinage N de $Q \subset (X, \omega)$ à un tube $\{f_0 < c\}$ autour de la section nulle Q in $(T^\star Q, \mathrm{d}\lambda_0)$ de telle sorte que, pour tout $q \in Q$, les sous-espaces $T_qQ, T_q^\star Q \subset T_q(T^\star Q)$ soient g-orthogonaux.

Grâce au lemme 2.5, on fixe un fibré en droites hermitien $L \to X$, une connection unitaire ∇ sur L de courbure $-2\pi i\omega$ et une section unitaire parallèle s_0 du fibré plat $(L, \nabla)|_Q$.

On considère les deux sections suivantes de $L|_N$:

— $s : N \to L|_N$: l'extension de la section s_0 par transport parallèle par ∇ le long des rayons dans les fibres $T^\star Q$;
— $s_0 := e^{-f_0} s : N \to L|_N$ (qui est bien définie puisque $f_0|_Q = 0$).

Pour tout entier positif k, on note L^k la puissance tensorielle k-ème du fibré L, dont la connection est de courbure $-2k\pi i\omega$, et on note $g_k := kg$ la métrique renormalisée. Pour tout entier $r \geq 0$, on munit le fibré vectoriel $\bigotimes^r T^\star X \otimes L^k$ de la connection induite par la connection de Levi-Civita pour la métrique g_k et notre connection sur L^k ; on note encore cette connection ∇. On définit la norme $\mathcal{C}^r$ d'une section $u : X \to L^k$ par $\|u\|_{\mathcal{C}^r, g_k} := \sup|u| + \sup|\nabla u|_{g_k} + \cdots + \sup|\nabla^r u|_{g_k}$. Les parties J-linéaires et $-J$-linéaires de la connection ∇ sont respectivement notées ∇' et ∇''.

Pour toute 1-forme λ sur X, on notera $\overrightarrow{\lambda}$ le champ de vecteurs qui est ω-dual à λ.

Lemme 2.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 1$, la fonction f_0 et la section s_0^k satisfont les bornes suivantes sur N :*

$$\overrightarrow{\lambda_0}.(kf_0) \geq C^{-1}(|\overrightarrow{\lambda_0}|_{g_k}^2 + |\mathrm{d}(kf_0)|_{g_k}^2),\ C^{-1}(kf_0)^{1/2} \leq |\mathrm{d}(kf_0)|_{g_k} \leq C(kf_0)^{1/2},$$
$$|\nabla s_0^k|_{g_k} \leq C(kf_0)^{1/2}e^{-kf_0},\ \|\nabla^2 s_0^k\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \leq C \text{ et } \|\nabla'' s_0^k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} \leq Ck^{-1/2}.$$

Démonstration. Quitte à renormaliser la métrique, il suffit d'établir les deux premières bornes de l'énoncé pour $k = 1$. La fonction f_0 est de Lyapounov pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{\lambda_0}$. Ceci implique la première borne. La sous-variété Q est un minimum de Morse-Bott pour f_0, d'où la deuxième borne.

Comme $s_0 = e^{-f_0}s$ avec s parallèle,

$$\nabla s_0 = -\mathrm{d}f_0 e^{-f_0}s + e^{-f_0}\nabla s = -(\mathrm{d}f_0 + 2\pi i\lambda_0)s_0.$$

Par conséquent, ∇s_0 s'annule en chaque point de la section nulle. Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla s_0|_g \leq Cf_0^{1/2}$. De plus, le 1-jet de $\nabla'' s_0$ s'annule à chaque point de Q. En effet, d'après l'identité $\lambda_0 = -\omega(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0})$ et par J-linéarité de la 1-forme $g(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0}) - i\omega(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0})$,

$$\nabla'' s_0 = -2\pi(\tfrac{\mathrm{d}f_0}{2\pi} + i\lambda_0))'' s_0 = -2\pi(\tfrac{\mathrm{d}f_0}{2\pi} - g(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0}))'' s_0,$$

donc il suffit de montrer que le 1-jet de la 1-forme $\frac{\mathrm{d}f_0}{2\pi} - g(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0})$ s'annule en chaque point de Q. Son 0-jet s'annule clairement et, pour tout vecteur $v = (v_1, v_2)$ de la somme g-orthogonale $T(T^\star Q)|_Q = TQ \oplus T^\star Q$,

$$\mathrm{d}(g(\cdot, \overrightarrow{\lambda_0}))(v, v) = g(v, v.\overrightarrow{\lambda_0}) = g(v, v_2) = g(v_2, v_2) = (\mathrm{d}^2 f_0)(v, v)/(2\pi),$$

donc son 1-jet s'annule également. Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla\nabla'' s_0|_g \leq Cf_0^{1/2}$ et $|\nabla'' s_0|_g \leq Cf_0$. Ainsi, par la règle de Leibniz, on obtient les bornes désirées sur ∇s_0^k et $\nabla^2 s_0^k$ et les deux bornes $|\nabla'' s_0^k|_{g_k} \leq Ck^{1/2}f_0 e^{-kf_0}$, $|\nabla\nabla'' s_0^k|_{g_k} \leq (kf_0^{3/2} + f_0^{1/2})Ce^{-kf_0}$. Ces deux dernières fonctions Gaussiennes de f_0 à valeurs réelles atteignent toutes deux leur maximum global en $Constante \times k^{-1}$ d'où la dernière borne du lemme.

□

En particulier, les sections s_0^k sont asymptotiquement holomorphes au sens suivant :

Définition 2.8 (Donaldson, Auroux)**.** Des sections $s_k : X \to L^k$ sont dites *asymptotiquement holomorphes* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $k \geq 1$, $\|\nabla'' s_k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} \leq Ck^{-1/2}$ et $\|s_k\|_{\mathcal{C}^2,g_k} \leq C$.

Le résultat suivant a déjà été observé dans Auroux-Gayet-Mohsen [AGM01, Remark p.746]. On rappelle que le voisinage N de Q est identifié au tube cotangent $\{f_0 < c\}$.

Lemme 2.9. *Soit $\beta : N \to [0, 1]$ une fonction à support compact (indépendante de k) avec $\beta = 1$ sur un tube $\{f_0 < b\}$. Alors, les sections $s_{0,k} := \beta s_0^k : X \to L^k$ sont asymptotiquement holomorphes.*

Preuve du lemme 2.9. Les sections s_0^k satisfont les bornes du lemme 2.7 sur N. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^0,g_k} &\leq \|d\beta\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \sup_{\{f_0>b\}} |s_0^k| + \|\nabla'' s_0^k\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \\ &\leq Ck^{-1/2}e^{-bk} + Ck^{-1/2}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\|\nabla\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^0,g_k} &\leq \|d^2\beta\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \sup_{\{f_0>b\}} |s_0^k| + 2\|d\beta\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \sup_{\{f_0>b\}} |\nabla s_0^k|_{g_k} + \|\nabla\nabla'' s_0^k\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \\ &\leq Ck^{-1}e^{-bk} + 2Ck^{-1/2}(Ck^{1/2}c^{1/2}e^{-bk}) + Ck^{-1/2}.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout k, $\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^1,g_k} \leq Ck^{-1/2}$. En raisonnant de la même façon, on obtient la borne $\|s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^2,g_k} \leq C$.

□

Le théorème de Giroux ci-dessous fournit des perturbations de $s_{0,k}$ qui s'annulent transversalement et avec la propriété suivante :

Définition 2.10 (Giroux)**.** Soit $\kappa \in]0,1[$. Une section $s : X \to L^k$ est κ-quasiholomorphe si $|\nabla'' s| \leq \kappa |\nabla' s|$ en chaque point de X.

Théorème 2.11 ([Gir18, Proposition 13])**.** *Soient $\epsilon > 0$, $\kappa \in (0,1)$ et $s_{0,k} : X \to L^k$ des sections asymptotiquement holomorphes. Alors, pour tout entier k suffisamment grand, il existe une section $s_{1,k} : X \to L^k$ avec les propriétés suivantes :*

- *$s_{1,k}$ s'annule transversalement ;*
- *$s_{1,k}$ est κ-quasiholomorphe ;*
- *$\|s_{1,k} - s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < \epsilon$;*
- *$-\log|s_{1,k}| : \{p \in X,\ s_{1,k}(p) \neq 0\} \to \mathbf{R}$ est une fonction de Morse.*

On rassemble à présent les arguments pour démontrer le théorème E.

Preuve du théorème E. Par le lemme 2.9, on peut fixer des sections $s_{0,k} : X \to L^k$ avec $s_{0,k} = s_0^k$ sur un tube $\{f_0 < b\}$. On fixe ensuite $\epsilon \in]0,1[$ et des sections $s_{1,k} : X \to L^k$ fournies par le théorème 2.11. Le sous-ensemble $Y := \{s_{1,k} = 0\} \subset (X, \omega)$ est une section hyperplane symplectique de degré k (grâce aux deux premières propriétés du théorème 2.11, voir par exemple la proposition 3 dans [Don96]) évitant la sous-variété Q (car $|s_0| = 1$ sur Q et par la troisième propriété du théorème 2.11).

Il reste à construire une exhaustion ω-convexe $f : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ ayant un minimum de Morse-Bott en Q et qui est de Morse en dehors de Q. Pour ce faire, on va recoller la fonction $f_{0,k} := kf_0 : N \to \mathbf{R}$, qui a clairement un minimum de Morse-Bott en Q, à l'exhaustion $f_{1,k} := -\log|s_{1,k}| : X \setminus Y \to \mathbf{R}$, qui est de Morse (d'après la dernière propriété du théorème 2.11) et a un nombre fini de points critiques (puisque $s_{1,k}$ s'annule transversalement).

Avant de recoller, on note que, d'après le lemme 2.7, la fonction $f_{0,k}$ est de Lyapounov pour le champ de Liouville $\overrightarrow{\lambda_0}$ avec une constante de Lyapounov pour la métrique g_k qui ne dépend pas de k. D'autre part, le lemme suivant de Giroux donne un pseudogradient de Liouville pour la fonction $f_{1,k}$. Pour pouvoir l'énoncer, on note $\lambda_{1,k}$ la 1-forme réelle

telle que, dans la trivialisation unitaire de $L^k|_{X\setminus Y}$ donnée par $s_{1,k}/|s_{1,k}|$, la connection ∇ se lise $\mathrm{d} - 2k\pi i\lambda_{1,k}$. On rappelle aussi que la notation $\overrightarrow{\lambda}$ désigne le champ de vecteurs ω-dual à une 1-forme fixée λ.

Lemme 2.12 ([Gir18, Lemma 12])**.** *Soit $\kappa \in (0,1)$ et $s_{1,k} : X \to L^k$ une section κ-quasiholomorphe. Alors :*

$$\overrightarrow{\lambda_{1,k}}.f_{1,k} \geq \tfrac{1}{2}\frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}(|\mathrm{d}f_{1,k}|^2_{g_k} + |\overrightarrow{\lambda_{1,k}}|^2_{g_k}).$$

Ainsi la fonction $f_{1,k}$ est de Lyapounov pour $\overrightarrow{\lambda_{1,k}}$, avec une constante de Lyapounov pour la métrique g_k uniforme en k.

Enfin, la fonction voulue f est construite par le lemme suivant, en recollant, sur une région annulaire $\{a < f_{0,k} < b\}$ autour de Q, la structure de Weinstein standard (de Morse-Bott) $(\overrightarrow{\lambda_0}, f_{0,k})$ sur $T^\star Q$ avec la structure de Weinstein $(\overrightarrow{\lambda_{1,k}}, f_{1,k})$ donnée par le théorème de Giroux ci-dessus. □

Dans l'énoncé ci-dessous, le nombre c désigne encore la taille du tube cotangent initial $\{f_0 < c\}$ autour de Q.

Lemme 2.13. *Soient $\kappa \in (0,1)$ et $a, b \in]0,c[$ avec $a < b$. Alors, pour tout $\epsilon \in]0,1[$ suffisamment petit et pour tout $k \geq k_0(\epsilon)$ suffisamment grand, il existe un champ de Liouville $\overrightarrow{\lambda}$ sur $X \setminus Y$ et une fonction de Lyapounov $f : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ pour $\overrightarrow{\lambda}$ tels que $(\overrightarrow{\lambda}, f) = (\overrightarrow{\lambda_0}, f_{0,k})$ sur $\{f_{0,k} \leq a\}$, $(\overrightarrow{\lambda}, f) = (\overrightarrow{\lambda_{1,k}}, f_{1,k})$ en dehors de $\{f_{0,k} < b\}$ et f n'a pas de point critique sur $\{a \leq f_{0,k} \leq b\}$.*

Démonstration. On omet les indices k dans cette preuve.

Pour l'instant, on admet les deux faits suivants : il existe une constante $C > 0$ (indépendante de k, ϵ) telle que

$$\|f_0 - f_1\|_{\mathcal{C}^1(N), g_k} \leq C\epsilon \tag{2.3}$$

et, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, la 1-forme $\lambda_1 - \lambda_0$ est exacte sur N.

On va coller les structures de Weinstein en deux étapes. On fixe deux nombres $a < a_+ < b_- < b$. Pour $\epsilon < \min(\frac{a_+ - a}{2C}, \frac{b - b_-}{2C})$, la région annulaire $\{a < f_0 < b\}$ contient les niveaux $\{f_1 = a_-\}$ et $\{f_1 = b_+\}$ (d'après la borne (2.3)).

Dans un premier temps, on raccorde les fonctions dans la région annulaire intérieure $\{f_0 \geq a\} \cap \{f_1 \leq a_-\}$; plus précisément, on construit une fonction de Lyapounov $f : X \to \mathbf{R}$ pour $\overrightarrow{\lambda_0}$ avec $f = f_0$ sur $\{f_0 \leq a\}$ et $f = f_1$ hors de $\{f_1 < a_+\}$. Il suffit de montrer que $\overrightarrow{\lambda_0}$ est transverse aux niveaux de f_0 et f_1 dans cette région intérieure ; en effet, en croissant de a à b le long de chaque trajectoire de $\overrightarrow{\lambda_0}$ on obtient une fonction f transverse aux niveaux de f_0 et f_1. Il existe une constante $C' > 0$ telle que $\|\mathrm{d}f_0\|_{g_k} \geq C'$ (d'après le lemme 2.7). Par la borne précédente et (2.3), $\|\mathrm{d}f_1\|_{g_k} \geq C' - C\epsilon$. Donc, d'après les deux conditions de Lyapounov, il existe une constante $C' > 0$ telle que $\overrightarrow{\lambda_0}.f_0 \geq C'$ (en particulier $\overrightarrow{\lambda_0}$ est transverse aux niveaux de f_0) et $\overrightarrow{\lambda_1}.f_1 \geq C'$. Par la borne précédente et encore (2.3), $\overrightarrow{\lambda_0}$ est transverse aux niveaux de f_1.

Dans un second temps, on recolle les champs de Liouville dans la région annulaire extérieure $\{a_- < f_1 < b_+\}$ (où $f = f_1$) ; plus explicitement on construit un champ de

Liouville $\overrightarrow{\lambda}$ qui est transverse aux niveaux de f dans la région extérieure et coïncide avec $\overrightarrow{\lambda_0}$ sur $\{f_1 < a_-\}$ et avec $\overrightarrow{\lambda_1}$ hors de $\{f_1 \leq b_+\}$. La 1-forme $\lambda_1 - \lambda_0$ est exacte (d'après l'assertion initiale) autrement dit il existe une fonction H telle que $\overrightarrow{\lambda_1} - \overrightarrow{\lambda_0} = \overrightarrow{\mathrm{d}H}$. On fixe une fonction plateau $\beta : \mathbf{R} \to [0,1]$ telle que $\beta = 0$ sur $\mathbf{R}_{\leq (b-a)/2}$ et $\beta = 1$ sur $\mathbf{R}_{\geq b}$ et on note $\beta_1 := \beta \circ f_1$. Alors le champ de vecteurs $\overrightarrow{\lambda} := \overrightarrow{\lambda_0} + \overrightarrow{\mathrm{d}(\beta_1 H)}$ est de Liouville et satisfait les conditions au bord désirées. De plus, $\overrightarrow{\beta_1}$ est tangent aux niveaux de f_1 et, d'après le paragraphe ci-dessus, $\overrightarrow{\lambda_0}$ et $\overrightarrow{\lambda_1}$ sont positivement transverses à ceux-ci, donc $\overrightarrow{\lambda} = (1-\beta_1)\overrightarrow{\lambda_0} + \beta_1 \overrightarrow{\lambda_1} + \overrightarrow{\beta_1} H$ est également transverse à ceux-ci.

Il reste à montrer l'assertion initiale. D'une part, $f_0 - f_1 = \mathrm{Re}\log(s_1 s_0^{-1})$ et, puisque $u_j := s_j/|s_j|$ satisfait $\nabla u_j = -2k\pi i \lambda_j u_j$,

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \tfrac{1}{2k\pi i}\left(u_0^{-1}\nabla u_0 - u_1^{-1}\nabla u_1\right) = \tfrac{1}{2k\pi i}\mathrm{d}\log(u_0 u_1^{-1}) = \tfrac{1}{2k\pi}\mathrm{d}\arg(s_1 s_0^{-1}).$$

D'autre part, $\|\log(s_1 s_0^{-1})\|_{\mathcal{C}^1, g_k} \leq C\epsilon$; c'est une conséquence des trois bornes $\|s_1 - s_0\|_{\mathcal{C}^1, g_k} < \epsilon$, $\inf |s_0| > e^{-c}$, et $\|\nabla s_0\|_{\mathcal{C}^0, g_k} \leq \mathit{Constante}$ (d'après le lemme 2.7). En particulier on obtient la borne (2.3) et, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $\|\arg(s_1 s_0^{-1})\|_{\mathcal{C}^0} < \pi/3$ donc $\lambda_1 - \lambda_0$ est exacte.

□

Remarque 2.14 (Une preuve alternative de l'ordinarité de la sous-variété lagrangienne $Q \subset X \setminus Y$). Pour k suffisamment grand, il est possible de choisir notre perturbation κ-quasiholomorphe $s_{1,k} : X \to L^k$ (qui s'annule transversalement et hors de Q) de $s_{0,k}$ de telle sorte que la function quotient $(s_{1,k}/s_{0,k})|_Q$ soit réelle. Cette dernière propriété, qui peut être réalisée en implémentant les techniques d'Auroux-Munoz-Presas [AMP05] dans la preuve de [Gir18, Proposition 13], implique que le champ de Liouville $\overrightarrow{\lambda_{1,k}}$ est tangent à Q.

2.4 ...Comme minima de fonctions $\mathbf{C}$-convexes

Dans cette partie on donne la preuve du théorème D, donc Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld close d'une variété kählérienne close (X, ω). En utilisant le lemme 2.5, on fixe un fibré en droites hermitien holomorphe $L \to X$ de courbure de Chern $-2\pi i\omega$ et une section unitaire parallèle $s_0 : Q \to L|_Q$. On note ∇ la connection de Chern. Soit $k \geq 1$ un entier. On utilisera les notations suivantes :

— $g_k = k\omega(\cdot, i\cdot)$: la métrique renormalisée ;
— d_k : la fonction distance à Q pour la métrique riemannienne g_k ;
— $B_k(Q, c) = \{d_k < c\}$.

On munit le fibré vectoriel $\bigotimes^r T^\star X \otimes L^k$ avec la connection induite par la connection de Levi-Civita pour la métrique g_k et la connection de L^k — on note encore cette connection ∇. On définit la norme $\mathcal{C}^r$ d'une section $u : X \to L^k$ par $\|u\|_{\mathcal{C}^r, g_k} := \sup|u| + \sum_{j=1}^r \sup|\nabla^j u|_{g_k}$.

Puisque Q est une sous-variété totalement réelle, c'est le lieu des minima de fonctions $\mathbf{C}$-convexes définies au voisinage de Q (notamment le carré de la fonction «distance à Q» d_1^2). Dans les deux prochains lemmes on construit une telle fonction sous la forme $f_0 = -\log|s_0|$, où s_0 est une section de L au voisinage de Q dont les puissances sont

asymptotiquement holomorphes (au sens précisé par le lemme 2.17) et seront après modifiées en d'authentiques sections holomorphes de L^k (voir la proposition 2.18).

Lemme 2.15. *Il existe un nombre $c > 0$ tel que la restriction du fibré L à $N := B_1(Q, c)$ admet une section holomorphe $s : N \to L|_N$. De plus, pour tout entier $r \geq 1$, la fonction à valeurs complexes $s_0/(s|_Q)$ s'étend en une fonction lisse $F : N \to \mathbf{C}$ telle que la 1-forme $\mathrm{d}''F$ et son r-jet s'annulent en chaque point de Q.*

On finira par choisir $r = n$, la dimension complexe de la variété X.

Démonstration. Comme Q est une sous-variété totalement réelle de X, elle a un voisinage N sur lequel la fonction d_1^2 est **C**-convexe (voir par exemple le lemme 3.15), donc N est une variété de Stein. Ainsi la première assertion découle des travaux de Oka [Oka39] et Grauert [Gra58].

Pour tout entier $r \geq 1$, d'après [CE12, Proposition 5.55], la fonction à valeurs complexe $s_0/(s|_Q)$ s'étend en une fonction lisse $F : N \to \mathbf{C}$ telle que, en chaque point de Q, $\mathrm{d}''F$ s'annule et son r-jet également. □

On choisit la section locale et la fonction locale suivantes :
— $s_0 := Fs : N \to L|_N$, qui étend la section $s_0 : Q \to L|_Q$;
— $f_0 := -\log|s_0| : N \to \mathbf{R}$.

Remarque 2.16 (Le cas analytique réel). Si la sous-variété Q est analytique réelle, alors on peut prendre pour $s_0 : N \to L|_N$ une section holomorphe. En effet, on peut garantir que la connection ∇ du fibré L fourni par le lemme 2.5 est analytique réelle. Dans ce cas, $s_0 : Q \to L|_Q$ est analytique réelle et peut être complexifiée.

Lemme 2.17. *On suppose $r \geq 1$. Alors, la sous-variété Q est un minimum de Morse-Bott pour la fonction f_0. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 1$, la section $s_0^k : N \to L^k|_N$ vérifie les bornes suivantes sur N :*

$$|2\pi k\omega - \mathrm{dd}^c \log|s_0^k||_{g_k} \leq Ck^{-1/2}d_k,$$
$$e^{-Cd_k^2} \leq |s_0^k| \leq e^{-d_k^2/C},$$
$$|\nabla s_0^k|_{g_k} \leq Cd_k e^{-d_k^2/C}, \|\nabla'' s_0^k\|_{\mathcal{C}^1, g_k} \leq Ck^{-r/2}.$$

Démonstration. On observe d'abord que ∇s_0 s'annule en chaque point $p \in Q$. En effet, $T_pX = T_pQ \oplus i\,T_pQ$ (puisque Q est une sous-variété totalement réelle de dimension moitié), $\nabla s_0(p) = \nabla' s_0(p)$ (car $\nabla'' s_0(p)$ s'annule) et $\nabla s_0(p)$ s'annule sur T_pQ (puisque $s_0|_Q$ est parallèle). Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla s_0| \leq Cd_1$. De même, comme le r-jet de $\nabla'' s_0$ s'annule en chaque point de Q, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\nabla'' s_0|_{g_1} \leq Cd_1^{r+1}$ et $|\nabla\nabla'' s_0|_{g_1} \leq Cd_1^r$.

Le 1-jet de la fonction $f_0 = -\log|s_0|$ s'annule en p ; en effet, $f_0(p) = 0$ et

$$\mathrm{d}f_0(p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\log(|s_0|^2) = \tfrac{1}{2}|s_0|^{-2}\,\mathrm{d}(|s_0|^2) = |s_0|^{-2}\,\mathrm{Re}\langle\nabla s_0, s_0\rangle = 0.$$

De plus,

$$2\pi\omega_p + (\mathrm{dd}^c f_0)_p = \mathrm{dd}^c \log\left|\frac{s}{s_0}\right| = -i\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log\left|\frac{s}{s_0}\right|^2 = -(i\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log|F|^2)_p = 0$$

car le 1-jet de la forme $\mathrm{d}''F$ s'annule en p. Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que $|2\pi\omega + \mathrm{dd}^c f_0|_g \leq Cd_1$. En multipliant par k on obtient la première borne de l'énoncé. D'autre part, la forme quadratique hessienne $(\mathrm{d}^2 f_0)_p : T_pX \to \mathbf{R}$ s'annule sur T_pQ et vérifie, pour tout vecteur $v \in T_pX$,

$$(\mathrm{d}^2 f_0)(v,v) + (\mathrm{d}^2 f_0)(iv,iv) = -(\mathrm{dd}^c f_0)(v,iv) = 2\pi\omega(v,iv) = 2\pi g(v,v).$$

Par conséquent, $(\mathrm{d}^2 f_0)_p$ est définie positive sur $i\,T_pQ$ et Q est un minimum de Morse-Bott minimum de la fonction f_0. Puisque Q est compacte, il existe une constante $C > 0$ sur un voisinage de Q (indépendant de k) :

$$C^{-1}d_1^2 \leq f_0 \leq Cd_1^2.$$

Autrement dit, $e^{-Cd_1^2} \leq |s| \leq e^{-d_1^2/C}$. On obtient la deuxième borne en prenant la puissance k-ème. La troisième borne et les bornes

$$|\nabla'' s_0^k|_g \leq Ckd_1^{r+1}e^{-kd_1^2/C}, \qquad |\nabla\nabla'' s_0^k|_g \leq Ckd_1^r(1+kd_1^2)e^{-kd_1^2/C}$$

découlent de cette borne et des bornes ∇s_0, $\nabla'' s_0$ et $\nabla\nabla'' s_0$ (en appliquant la règle de Leibniz à s_0^k). Les deux dernières fonctions réelles de d_1 atteignent toutes deux leur maximum global en $Constante \times k^{-1/2}$. En exprimant ces estimations pour la métrique g_k,on obtient la dernière estimation du lemme. □

Voici le résultat principal de cette partie. On rappelle que le nombre c désigne la taille du tube $N = B_1(Q,c)$.

Proposition 2.18. *Soit $\rho \in]0,c[$. Alors, il existe des sections holomorphes $s_k : X \to L^k$ telles que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $k \geq k_0(\epsilon)$ suffisamment grand, s_k s'annule transversalement et $\|s_k - s_0^k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < \epsilon$ sur $B_1(Q,\rho)$, le ρ-voisinage de Q pour la métrique g.*

On repousse la preuve de la proposition 2.18 et on explique d'abord comment elle implique le théorème D.

Preuve du théorème D. On fixe un rayon $\rho \in (0,c)$ et, par la proposition 2.18, des sections holomorphes $s_k : X \to L^k$: pour chaque $\epsilon > 0$ et pour $k \geq k_1(\epsilon)$ suffisamment grand, le lieu des zéros $Y := s_k^{-1}(0)$ est une section hyperplane complexe (lisse) et $\|s_k - s_0^k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < \epsilon$ sur $B_1(Q,\rho)$. Par les deuxième et troisièmes inégalités du lemme 2.17, il existe une constante $C > 0$ (indépendante de k et ϵ) telle que, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, sur $B_k(Q,\rho)$, les fonctions $f_1 := -\log|s_k|$ et $f_0 = -\log|s_0^k|$ vérifient

$$\|f_1 - f_0\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < C\epsilon.$$

On prend une fonction plateau $\beta_k : X \to [0,1]$ à support dans $B_k(Q,\rho)$, avec $\beta_k = 1$ sur $B_k(Q,\rho/2)$ et $\|\beta_k\|_{\mathcal{C}^2,g_k} \leq C'$ pour une constante $C' > 0$ (indépendante de k). La fonction $f := \beta_k f_0 + (1-\beta_k)f_1 : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ est exhaustive, atteint un minimum de Morse-Bott en Q et ses points critiques restent dans un compact. (On note que, pour ϵ suffisamment petit, ce minimum est global. En effet, sur $\{\beta_k = 1\}$, $f = f_0$, et sur $\{\beta_k < 1\}$, $f_1 \geq -\log(|s_0| + \epsilon) \geq -\log(e^{-\rho^2/C} + \epsilon) > 0$.)

On montre à présent que f est **C**-convexe. D'abord, puisque s_k est holomorphe, $-\mathrm{dd}^c f_1 = 2k\pi\omega$. Ainsi, par la première borne du lemme 2.17, il existe une constante $C'' > 0$ telle que $\|\mathrm{dd}^c(f_0 - f_1)\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \leq C'' k^{-1/2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\|2k\pi\omega + \mathrm{dd}^c f\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \\
&= \|\mathrm{dd}^c(\beta_k(f_0 - f_1))\|_{\mathcal{C}^0,g_k} \\
&\leq \|\beta_k\| C'' k^{-1/2} + \|(f_0 - f_1)\mathrm{dd}^c\beta_k\| + \|\mathrm{d}(f_0 - f_1) \wedge \mathrm{d}^c\beta_k\| + \|\mathrm{d}^c(f_1 - f_0) \wedge \mathrm{d}\beta_k\| \\
&\leq C'' k^{-1/2} + 3(C\epsilon)C'. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $k \geq k_0(\epsilon)$ suffisamment grand, $\|2k\pi\omega + \mathrm{dd}^c f\|_{\mathcal{C}^0,g_k} < 2\pi$. Cette inégalité garantit que la fonction f est **C**-convexe. Une perturbation $\mathcal{C}^2$-petite de la fonction f à support dans un compact de $Y \setminus Q$ est de Morse en dehors de Q et vérifie les propriétés du théorème D. □

On cherche maintenant à prouver la proposition 2.18. Le lemme ci-dessous définit des sections globales de L^k qui seront plus tard rendues holomorphes. La norme L^2 d'une section $s : X \to \bigotimes^r T^\star X \otimes L^k$ pour la métrique g_k est définie par

$$\|s\|_{\mathrm{L}^2,g_k} := \left(\int_X |s|^2_{g_k} \tfrac{(k\omega)^n}{n!}\right)^{1/2}.$$

Lemme 2.19. *Soit $\beta : X \to [0,1]$ une fonction à support dans N avec $\beta = 1$ sur un tube $B(Q,\rho)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que les sections $s_{0,k} := \beta s_0^k : X \to L^k$ vérifient les bornes suivantes :*

$$\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^1,g_k} \leq Ck^{-r/2}, \|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathrm{L}^2,g_k} \leq Ck^{(n-r)/2}$$

Démonstration. Les sections s_0^k vérifient les bornes du lemme 2.17 sur N. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^0,g} &\leq \|\mathrm{d}\beta\|_{\mathcal{C}^0,g} \sup_{\{d_1>\rho\}} |s_0^k| + \sup_{B(Q,2\rho)} |\nabla'' s_0^k|_g \\
&\leq C(e^{-k/C} + k^{-(r-1)/2}) .
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^0,g} \\
&\leq \|\mathrm{d}^2\beta\|_{\mathcal{C}^0,g} \sup_{\{d_1>\rho\}} |s_0^k| + 2\|\mathrm{d}\beta\|_{\mathcal{C}^0,g} \sup_{\{d_1>\rho\}} |\nabla s_0^k|_g + \sup_{B(Q,2\rho)} |\nabla\nabla'' s_0^k|_g \\
&\leq Ce^{-k/C} + Ce^{-k/C} + Ck^{-(r-2)/2}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathrm{L}^2,g_k} \leq Ck^{n/2}\|\nabla'' s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^0,g_k},$$

la norme $\mathcal{C}^1$ et la norme L^2, pour la métrique g_k, vérifient les bornes de l'énoncé. □

On va utiliser la version suivante des estimations L^2 de Hörmander :

Théorème 2.20 (cf. [Dem12, theorem VIII.6.5] et la discussion qui suit)**.** *Soient* (X, ω) *une variété kählérienne close et entière et* $L \to X$ *un fibré en droites holomorphe hermitien de courbure de Chern* $-2\pi i\omega$*. On pose* $C := \sup |\frac{\mathrm{Ricci}(\omega)}{2\pi}|_g$*. Alors, pour tout* $k > C$ *et pour toute section lisse* $u : X \to \bigwedge^{1,0} T^\star X \otimes L^k$ *vérifiant* $\nabla'' u = 0$*, il existe une section lisse* $t : X \to L^k$ *vérifiant :*

$$\nabla'' t = u \text{ et } \|t\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{n(k-C)} \|u\|^2_{\mathrm{L}^2} .$$

En appliquant ce lemme aux sections $s_{0,k}$ du lemme 2.19, on obtient des sections lisses $t_k : X \to L^k$ telles que $\|t_k\|_{\mathrm{L}^2, g_k} \leq Ck^{(n-r-1)/2}$ et, pour k suffisamment grand, $\nabla''(s_{0,k} - t_k) = 0$. Le prochain lemme convertit nos estimations L^2 en estimations $\mathcal{C}^1$.

Lemme 2.21. *Soient* (X, ω) *une variété kählérienne close et entière et* $L \to X$ *un fibré en droites holomorphe hermitien de courbure de Chern* $-2\pi i\omega$*. Alors, il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout entier* $k \geq 1$ *et pour toute section* $t : X \to L^k$ *:*

$$\|t\|_{\mathcal{C}^1, g_k} \leq C(\|\nabla'' t\|_{\mathcal{C}^1, g_k} + \|t\|_{\mathrm{L}^2, g_k}).$$

Démonstration. La borne désirée est locale. En un point fixé $p \in X$, on va l'obtenir sur une g_k-boule de rayon uniforme centrée en p — où, pour k suffisamment grand, la géométrie de L^k est comparable avec celle du fibré trivial au-dessus de la boule unité de l'espace euclidien $(\mathbf{C}^n, g_0)$. Il existe des constantes $R, C > 0$ et une famille (indexée par $p \in X, k$) de cartes holomorphes $\underline{z}_p^k : B_k(p, R) \to \mathbf{C}^n$ centrées en p telles que,

$$\|(\underline{z}_p^k)_\star g_k - g_0\|_{\mathcal{C}^1, g_0} \leq Ck^{-1/2} \text{ sur } (\underline{z}_p^k)(B_k(p, R)). \tag{2.5}$$

En effet, pour tout $p \in X$, il existe un rayon $R > 0$ et une carte holomorphe centrée $\underline{z}_p : B(p, R) \to \mathbf{C}^n$ dont la différentielle en l'origine $\mathrm{d}\underline{z}_p(p)$ est une isométrie. La post-composition de $\underline{z}_p$ par l'homothétie $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ de rapport $k^{1/2}$ fournit $\underline{z}_p^k$ (comme X est compacte les constantes C, R peuvent bien être choisies indépendantes de $p \in X$).

On prend une section pic de Hörmander en p (voir par exemple [Don96, Proposition 34]) : pour k suffisamment grand, il existe une section holomorphe $s_p : X \to L^k$ vérifiant les bornes :

$$|s_p(p)| = 1, \inf_{B_k(p,R)} |s_p| \geq C^{-1} \text{ et } \|s_p\|_{\mathcal{C}^1, g_k} \leq C,$$

pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de p et k.

Soient t une section de L^k et $p \in X$. On pose $f := \frac{t}{s_p}$. Grâce aux identités $\nabla t = \mathrm{d}f\ s_p + f\nabla s_p$, $\nabla\nabla t = \mathrm{d}^2 f\ s_p + 2\mathrm{d}f \otimes \nabla s_p + f\nabla\nabla s_p$ et aux bornes sur la section pic, il suffit de montrer que, pour k suffisamment grand,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1(B_k(p,R/6)), g_k} \leq C\|\mathrm{d}'' f\|_{\mathcal{C}^1(B_k(p,R)), g_k} + C\|f\|_{\mathrm{L}^2(B_k(p,R)), g_k}.$$

Dans le reste de la preuve, on identifiera le domaine de la carte $\underline{z}_p^k$ avec son image dans $\mathbf{C}^n$. On note $B_0(q, R)$ la boule de rayon R en un point q de $\mathbf{C}^n$ et on note μ la forme de volume euclidienne sur $\mathbf{C}^n$. On montre à présent la borne (standard) suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1(B_0(0,R/5)), g_0} \leq C\|\mathrm{d}'' f\|_{\mathcal{C}^1(B_0(0,R/2)), g_0} + C\|f\|_{\mathrm{L}^2(B_0(0,R/2)), g_0}.$$

Ceci terminera la preuve car, grâce à la comparaison (2.5) de la métrique renormalisée g_k avec la métrique plate g_0, pour k suffisamment grand, on a les inclusions $B_k(p, R/6) \subset B_0(0, R/5)$ et $B_0(0, R/2) \subset B_k(p, R)$ et il existe une constante $C > 0$ (indépendante de k et p) telle que, sur $B_0(0, R/2)$,

$$\mu \leq (1 + Ck^{-n/2})\frac{(k\omega)^n}{n!} \text{ et } (1 - Ck^{-1/2})|\cdot|_{g_0} \leq |\cdot|_{g_k} \leq (1 + Ck^{-1/2})|\cdot|_{g_0} .$$

D'une part, d'après [HW68, Lemma 4.4] :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(B_0(0,R/4))} \leq C\|\mathrm{d}''f\|_{\mathcal{C}^0(B_0(0,R/2))} + C\|f\|_{\mathrm{L}^2(B_0(0,R/2)),g_0} .$$

D'autre part on a la borne suivante (voir [CE12, Lemma 8.37] par exemple) :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1(B_0(0,R/5)),g_0} \leq C\|\mathrm{d}''f\|_{\mathcal{C}^1(B_0(0,R/4)),g_0} + C\|f\|_{\mathcal{C}^0(B_0(0,R/4))} .$$

Dans les deux estimations ci-dessus, les constantes ne dépendent que de R et n. On obtient ainsi la borne désirée. □

Par les lemmes 2.21 et 2.19, et en fixant $r = n$, on obtient l'estimation suivante : pour tout $\epsilon > 0$, pour $k \geq k_1(\epsilon)$ suffisamment grand,

$$\|t_k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} \leq C(\|\nabla''s_{0,k}\|_{\mathcal{C}^1,g_k} + k^{-1/2}\|s_{0,k}\|_{\mathrm{L}^2,g_k}) \leq Ck^{(n-r-1)/2} < \epsilon/2.$$

D'autre part, par le théorème de Bertini, pour k suffisamment grand il existe une section $s_k : X \to L^k$ s'annulant transversalement avec

$$\|s_k - (s_{0,k} - t_k)\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < \epsilon/2.$$

Par conséquent s_k vérifie les conclusions de la proposition 2.18. Ceci clôt la preuve du théorème D.

On termine cette partie en donnant un énoncé de géométrie complexe qui est une variante du théorème D :

Théorème 2.22. *Soient X une variété complexe close, a une classe de Kähler et Q une sous-variété close. On suppose que Q est une sous-variété lagrangienne de Bohr-Sommerfeld pour une certaine forme de Kähler dans a. Alors, il existe un fibré en droites holomorphe $L \to X$ de première classe de Chern a, et, pour tout k suffisamment grand, il existe une métrique hermitienne h_k sur L^k de courbure de Chern positive et une section holomorphe $s_k : X \to L^k$ s'annulant transversalement telle que la fonction $-\log|s_k|_{h_k} : X \setminus s_k^{-1}(0) \to \mathbf{R}$ admette Q comme minimum de Morse-Bott et soit de Morse ailleurs.*

Preuve du théorème 2.22. On fixe une forme de Kähler $\omega \in a$ telle que $\omega|_Q = 0$ ainsi qu'un fibré en droites holomorphe hermitien $L \to X$ de courbure de Chern $-2i\pi\omega$ dont la restriction à Q est un fibré plat trivial (par le lemme 2.5). On fixe $\epsilon, \rho > 0$ et on répète la construction de 2.4 pour obtenir des sections $s_0^k, s_k : X \to L^k$ avec les propriétés du lemme 2.17 et de la proposition 2.18. On garde les notations $f_0 = -\log|s_0^k|$ et $f_1 = -\log|s_k|$.

Pour construire la métrique hermitienne désirée sur L^k, on va procéder comme dans la dernière étape de la preuve de la proposition D mais on va modifier la métrique hermitienne h^k de L^k au lieu de la fonction f_1. On prend une fonction plateau $\beta_k : X \to [0, 1]$ à support dans $B_k(Q, \rho)$, avec $\beta_k = 1$ sur $B_k(Q, \rho/2)$ et telle que $\|\mathrm{d}\beta_k\|_{\mathcal{C}^1,g_k} < C'$, pour

une certaine constante $C' > 0$ indépendante de k. On définit une nouvelle métrique hermitienne sur L^k par :

$$h'_k = e^{2\beta_k(f_1 - f_0)} h^k.$$

La fonction exhaustive $-\log |s_k|_{h'_k} : \{s_k \neq 0\} \to \mathbf{R}$ vaut f_0 sur $B_k(Q, \rho/2)$ donc a un minimum de Morse-Bott en Q. De plus,

$$2k\pi\omega - \mathrm{dd}^c \log |s_k|_{h'_k} = -\mathrm{dd}^c(\beta_k(f_1 - f_0)).$$

Ainsi, en répétant l'estimation (2.4), pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ suffisamment petit et pour tout $k \geq k_0(\epsilon)$ suffisamment grand, $\|2k\pi\omega - \mathrm{dd}^c \log |s_k|_{h'_k}\|_{\mathcal{C}^0, g_k} < 2\pi$. Cette inégalité garantit que la fonction $-\log |s_k|_{h'_k}$ est $\mathbf{C}$-convexe. Finalement, il existe une fonction $\mathcal{C}^2$-petite $\eta_k : X \setminus Y \to \mathbf{R}$ à support compact disjoint de Q telle que, en posant la métrique hermitienne $h''_k := e^{-2\eta_k} h'_k$, la fonction $-\log |s_k|_{h''_k} = -\log |s_k|_{h'} + \eta_k$ soit de Morse hors de Q.

La métrique hermitienne h''_k et la section $s_k : X \to L^k$ ont ainsi les propriétés voulues. $\square$

CHAPITRE 3

Sphères lagrangiennes et cycles évanescents d'un domaine de Stein

3.1 Introduction

Ce chapitre présente un travail en commun avec Emmanuel Giroux. On donne une condition suffisante pour qu'une sphère lagrangienne d'un domaine de Stein soit un cycle évanescent d'une déformation complexe vers un domaine à singularité conique. Notre motivation initiale est la question suivante de Donaldson [Don00] (évoquée en introduction) :

Question C. *Dans une variété projective X, toute sphère lagrangienne est-elle un cycle évanescent d'une déformation complexe de X vers une variété à singularité conique ?*

On commence par définir les notions de domaine de Stein, de déformation vers un domaine à singularité conique et de cycle évanescent.

Définition 3.1. Un *domaine de Stein* est une variété complexe compacte à bord [1] V telle qu'il existe une fonction $\mathbf{C}$-convexe ϕ dont ∂V est un niveau régulier.

Définition 3.2. Une *fibration de Lefschetz en domaines de Stein* est une fonction holomorphe Π d'une variété complexe compacte à bords et à coins $\mathcal{V}$ vers un disque fermé $D \subset \mathbf{C}$ avec les propriétés suivantes.

— (Points critiques non dégénérés) Chaque point critique est dans l'intérieur de $\mathcal{V}$ et la hessienne complexe de Π y est non dégénérée.

— (Fibres de Stein) Il existe une fonction lisse $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $q \in \mathcal{V}$, la forme quadratique $(-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi)_q(\cdot, i\cdot)|_{\ker \mathrm{d}_q\Pi}$ est définie positive et $\{\Phi = 0\}$ est un niveau régulier transverse à chaque fibre de Π.

Définition 3.3. Soit V un domaine de Stein. Une *déformation de V au-dessus du disque vers un domaine à singularité conique* est la donnée d'une fibration de Lefschetz en domaines de Stein Π ayant un unique point critique telle que la valeur $1 \in D$ est régulière et $\Pi^{-1}(1) = V$.

1. Une variété complexe à bords et à coins signifie une variété lisse à bords et à coins munie d'un plongement lisse de codimension 0 dans une variété complexe sans bord.

Définition 3.4. Soit V un domaine de Stein et $\Pi : \mathcal{V} \to D$ une déformation de V au-dessus du disque vers un domaine à singularité conique. On appelle p l'unique point critique de Π. Une sphère $S \subset V$ de dimension moitié est un *cycle évanescent de la déformation* Π s'il existe une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ ayant les propriétés de la définition 3.2 et un arc $\gamma \subset D$ reliant 1 à $\Pi(p)$ tels que les caractéristiques de l'hypersurface réelle $\Pi^{-1}(\gamma) \setminus p \subset \mathcal{V}$ pour la 2-forme $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi$ transportent S sur p.

Remarque 3.5. Si $S \subset V$ est un cycle évanescent d'une déformation de V, alors, pour toute fonction Φ avec les propriétés de la définition précédente, S est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique $(V, -\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi|_V)$.

Démonstration. Cet argument est tiré de la partie 16.b) de [Sei08]. On prend un arc γ de D, paramétré par $u : [0,1] \to D$ avec $u(0) = 0$ et $u(1) = \Pi(p)$, tel que les caractéristiques de $\Pi^{-1}(\gamma)$ pour $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi$ envoient S sur p. Il suffit de montrer que le sous-ensemble Δ des points de $\Pi^{-1}(\gamma)$ envoyés par les caractéristiques sur le point critique (appelé onglet de Lefschetz) est un disque lagrangien de $\mathcal{V}$. L'idée est la suivante : les caractéristiques contractent l'onglet Δ tout en préservant la forme symplectique $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi$, notée ici ω, ce qui force $\omega|_\Delta = 0$.

On va choisir un champ de vecteurs défini au voisinage de Δ qui dirige ces caractéristiques de S vers p. Pour ce faire, on épaissit le paramétrage de l'arc en un plongement $u : [0,1] + i]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbf{C} \to D \subset \mathbf{C}$ de différentielle $\mathbf{C}$-linéaire en chaque point de $[0,1]$. On va montrer que le gradient $\vec{v}$ de la fonction $-\mathrm{Re}\ u^{-1} \circ \Pi$ pour la métrique riemannienne $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ convient. L'hypersurface caractéristique est le lieu des zéros de la fonction $H := \mathrm{Im}\ u^{-1} \circ \Pi$. Par construction, $\vec{v} \in (\ker \mathrm{d}\Pi)^\omega \subset (\ker \mathrm{d}H)^\omega$; de plus, pour tout $q \in \Pi^{-1}([0,1])$, $\mathrm{d}_q H(\vec{v}) = -\mathrm{Re}\ \mathrm{d}_q(u^{-1} \circ \Pi)(J\vec{v}) = -g(\vec{v}, J\vec{v}) = 0$ donc $\vec{v} \in (\ker \mathrm{d}H) \cap (\ker \mathrm{d}H)^\omega$. Et comme $\vec{v}$ s'annule seulement en p et $-\mathrm{Re}\ \mathrm{d}(u^{-1} \circ \Pi)(\vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$, il engendre bien les caractéristiques de S vers p.

On note (f^t) le flot du champ de vecteurs $\vec{v}$. Le point critique p est un zéro non dégénéré de $\vec{v}$ qui est hyperbolique car $\vec{v}$ est un gradient. Ainsi, pour tout vecteur w tangent à la variété stable de $\vec{v}$ (qui n'est autre que l'onglet de Lefschetz Δ), $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{d}f^t(w) = 0$. Or, le flot de difféomorphismes (f^t) est symplectique (engendré par le hamiltonien $-H$), donc pour tous vecteurs u, w tangents à la variété stable au même point q,

$$\omega_q(u, w) = \lim_{t\to+\infty} \omega_{f^t(q)}(\mathrm{d}f^t(u), \mathrm{d}f^t(w)) = 0.$$

□

Définition 3.6. Soit S une sous-variété d'un domaine de Stein V de dimension moitié. On dit que S est un *minimum* $\mathbf{C}$*-convexe* s'il existe une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\phi : V \to \mathbf{R}$ de Morse-Bott dont ∂V est un niveau régulier et dont S est le plus bas niveau.

Remarque 3.7. Si $S \subset V$ est un minimum $\mathbf{C}$-convexe, alors, il existe une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\phi : V \to \mathbf{R}$ de Morse dont ∂V est un niveau régulier et telle que $S \subset V$ est une sous-variété lagrangienne de $(V, -\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi)$ qui est *ordinaire* pour la structure de Weinstein $(V, -\mathrm{d}^{\mathbf{C}}\phi, \phi)$ au sens d'Eliashberg-Ganatra-Lazarev [EGL15].

Dans ce chapite, on donne une preuve du résultat suivant (énoncé en introduction) :

Théorème F (avec Emmanuel Giroux)**.** *Soit V un domaine de Stein et $S \subset V$ une sphère qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe. Alors, S est un cycle évanescent d'une déformation de V au-dessus du disque vers un domaine à singularité conique.*

3.2 Déformation symplectique vers un domaine à singularité conique

Dans cette partie, on décrit d'abord un procédé général d'attachement holomorphe d'anse au produit d'une variété complexe V par le disque $D^2 \subset \mathbf{C}$. On applique ensuite ce procédé au cas particulier d'un domaine de Stein V pour réaliser toute sphère qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe comme cycle évanescent d'une «déformation symplectique vers un domaine à singularité conique».

3.2.1 Attachement holomorphe d'une anse

On décrit d'abord la topologie de l'espace total de cette déformation :

Remarque 3.8. Soit V une variété complexe, $S \subset V$ une sphère totalement réelle de dimension moitié dont on fixe un plongement $i : S^n \to V$ et D^2 un disque ouvert contenant 1. Alors le fibré normal de la sphère $1 \times S \subset D^2 \times V$ admet une trivialisation canonique ; en effet, la structure complexe identifie le fibré normal à S dans V à TS puis un rappel par i identifie ce fibré à TS^n donc ceci fournit un isomorphisme du fibré normal à $1 \times S \subset D^2 \times V$ vers le fibré $\underline{\mathbf{R}} \oplus TS^n$ qui s'identifie canoniquement au fibré trivial sur S^n. On note $\hat{V}(S)$ la variété (de dimension $2n+2$) obtenue en attachant une anse d'indice $n+1$ à $D^2 \times V$ le long de la sphère $1 \times S$ pour cette trivialisation du fibré normal.

Sous hypothèse d'analycité réelle de la sphère d'attachement, la structure complexe produit de $D^2 \times V$ s'étend à la variété $\hat{V}(S)$:

Lemme 3.9. *Soit V une variété complexe, $S \subset V$ une sphère analytique réelle totalement réelle de dimension moitié dont on fixe un plongement analytique réel $i : S^n \to V$. Alors, il existe une variété complexe $\mathcal{V}_0$ (difféomorphe à $\hat{V}(S)$), une fonction holomorphe Π_0 de $\mathcal{V}_0$ vers un voisinage $D \subset \mathbf{C}$ de l'arc $[0,1]$, un ouvert $1 \ni D_1 \subset D$ et un $(n+1)$-disque $\Delta \subset \mathcal{V}$ tels que :*

- (Fibres de référence) $\Pi_0^{-1}(D_1) = D_1 \times V$ *comme variétés complexes et* $\Pi_0|_{D_1 \times V} = \mathrm{pr}_1$ *;*
- (Anse d'indice $n+1$) Π_0 *a un unique point critique p, $p \in \Delta$, la hessienne complexe de Π_0 en p est non dégénérée, p est l'unique point critique de la fonction $-\mathrm{Re}\ \Pi_0|_\Delta$ et est d'indice $(n+1)$ et $\partial\Delta = 1 \times S$.*

Pour toute métrique riemannienne g sur $\mathbf{C}^{n+1}$, tous réels $0 < \epsilon < 1$ et $\eta > 0$, on utilisera les notations suivantes (décrivant le modèle de l'anse) :

- $D_1 = \{x + iy \in \mathbf{C} |\ |x-1| < \epsilon, |y| < \epsilon\}$;
- $D = \{x + iy \in \mathbf{C} |\ -\epsilon < x < 1+\epsilon, |y| < \epsilon\}$;
- $\Delta_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^n x_i^2 < 1+\epsilon\}$: le $(n+1)$-disque descendant ;
- R : la fonction «distance au carré à Δ» pour la métrique g ;
- $\pi = \sum_{i=0}^n z_i^2 : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$;
- $U_0 = \{x + iy \in \mathbf{C}^{n+1} | \sum_{i=0}^n x_i^2 < 1+\epsilon, R < \eta\} \cap \pi^{-1}(D)$: l'anse.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On va complexifier le modèle de Morse donné par le $(n+1)$-disque Δ_ϵ et la fonction $\sum_{i=0}^n x_i^2 : \Delta_\epsilon \to [0, 1+\epsilon[$.

En divisant par la racine carrée du rayon, on obtient une trivialisation $\tau : \pi^{-1}(]1-\epsilon, 1+\epsilon[) \to]1-\epsilon, 1+\epsilon[\times S$ de π. Comme τ est une application analytique réelle entre les

deux sous-variétés analytiques réelles et totalement réelles de dimension moitié $\Delta_\epsilon \subset \mathbf{C}^{n+1}$ et $]1-\epsilon, 1+\epsilon[\times S \subset D_1 \times V$, elle s'étend (de manière unique) en un biholomorphisme σ entre des voisinages respectifs W_0 et W_1 de $\Delta_\epsilon \subset \mathbf{C}^{n+1}$ et $]1-\epsilon, 1+\epsilon[\times S \subset D_1 \times V$; de plus, $\mathrm{pr}_1 \circ \tau = \sum_{i=0}^n z_i^2$ (par unicité du prolongement analytique).

Pour tout réel $\eta > 0$ suffisamment petit, $U_0 \cap \pi^{-1}(D_1) \subset W_0$. L'identification σ fournit alors la variété complexe $\mathcal{V}_0 = U_0 \cup_\sigma (D_1 \times V)$ et l'application holomorphe $\Pi_0 = \sum_{i=0}^n z_i^2 \cup_\sigma \mathrm{pr}_1$ voulues.

□

On transforme à présent l'application holomorphe Π_0 en une fibration singulière en renonçant partiellement à l'intégrabilité de la structure complexe :

Proposition 3.10. *On garde les notations du lemme 3.9. Alors, il existe une variété presque complexe $(\mathcal{V}, J)$ (difféomorphe à $\hat{V}(S)$), une fonction pseudo-holomorphe Π de $\mathcal{V}$ vers un voisinage $D \subset \mathbf{C}$ de l'arc $[0,1]$, un ouvert $1 \ni D_1' \subset D$, un $(n+1)$-disque $\Delta \subset \mathcal{V}$ et un voisinage U de Δ tels que :*

- (Fibres de référence) *J est intégrable sur $\Pi^{-1}(D_1')$, $\Pi^{-1}(D_1') = D_1' \times V$ comme variétés complexes et $\Pi|_{D_1' \times V} = \mathrm{pr}_1$;*
- (Anse d'indice $n+1$) *J est intégrable sur U, Π a un unique point critique p, $p \in \Delta$, la hessienne complexe de Π en p est non dégénérée, p est l'unique point critique de la fonction $-\mathrm{Re}\ \Pi|_\Delta$ et est d'indice $n+1$ et $\partial\Delta = 1 \times S$.*
- (Fibration singulière) *L'application différentiable Π est localement triviale au-dessus de $D \setminus 0$ et $\Pi^{-1}(0) \setminus p$ est difféomorphe à $V \setminus S$.*

Démonstration. Soient $\epsilon, \eta > 0$ et g une métrique riemannienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Les fibres $\Pi_0^{-1}(t)$ de l'application construite au lemme 3.9 sont seulement des quadriques pour $t \in D \setminus D_1$; on va pousser un voisinage du bord de chacune de ces fibres dans la partie triviale $D_1 \times V$ pour raccorder la fibre à $V \setminus S$. On prend un disque $1 \ni D_1' \subset D_1$ et un plongement lisse $f : U_0 \subset \mathbf{C}^{n+1} \to U_0$ avec les propriétés du lemme 3.11 puis on pose $\mathcal{V} = f(U_0) \cup_\sigma (h(D) \times V) \subset \mathcal{V}_0$ (qui est difféomorphe à $\mathcal{V}_0$). On pose ensuite $\Pi : \mathcal{V} \to D$ l'application lisse telle que $\Pi = \Pi_0 \circ f^{-1}$ sur U_0' et $\Pi = g^{-1} \circ \mathrm{pr}_1$ sur $(D_1 \times V) \setminus \sigma^{-1}(U_0'')$ (qui est bien définie sur l'intersection car $\pi \circ f = h \circ \pi$). On obtient ainsi la propriété «fibration singulière».

Il reste à construire la structure presque complexe J sur $\mathcal{V}$: on restreint la structure complexe de $\mathcal{V}_0$ en une structure complexe J_0 sur $\mathcal{V}$, on pose l'ouvert

$$U := \{R < \eta/3\} \subset \mathcal{V}$$

et on prend une structure presque-complexe J sur $\mathcal{V}$ telle que $J = J_0$ sur $U \cup \Pi^{-1}(D_1')$ (ce qui implique les deux premières propriétés) et telle que $\mathrm{d}\Pi$ est J-linéaire.

□

Le lemme ci-dessous est utilisé dans la preuve de la proposition 3.8 et sera également utilisé dans la sous-partie suivante.

Lemme 3.11. *Soient $\epsilon > 0$ un réel et g une métrique riemannienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Alors, pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit, il existe un disque $D_1' \subset D_1$ et un plongement lisse $f : U_0 \subset \mathbf{C}^{n+1} \to U_0$ avec les propriétés suivantes :*

1. *$R \circ f = R$;*

2. *$f = \mathrm{Id}$ sur $\{R < \eta/3\} \cup \pi^{-1}(D_1')$;*
3. *il existe un plongement lisse $h : D \to D_1$ tel que, sur $\{R \geq \eta/2\}$, $\pi \circ f = h \circ \pi$;*
4. *pour tout $t \in D$, la fonction R n'a pas de point critique en restriction au cobordisme $f(\pi^{-1}(t)) \cap \{\eta/3 \leq R \leq \eta/2\}$.*

Démonstration. Pour $\eta > 0$ suffisamment petit, les fibres de π sont transverses aux niveaux de R sur $U_0 \setminus 0_{\mathbf{C}^{n+1}}$. Ainsi on peut prendre un champ de vecteurs $\vec{x}$ sur $U_0 \setminus 0_{\mathbf{C}^{n+1}}$ tel que $\mathrm{d}\pi(\vec{x}) = \partial_x$ et $\vec{x} \in \ker \mathrm{d}R$. On prend $\alpha : \mathbf{R}_{\geq 0} \to [0,1]$ et $\beta : \mathbf{R} \to [0,1]$ deux fonctions plateau avec $\alpha = 0$ sur $[0, \eta/3]$, $\alpha = 1$ sur $\mathbf{R}_{\geq \eta/2}$, $\beta = 1$ sur $\mathbf{R}_{\leq 1-\epsilon/2}$ et $\beta = 0$ sur $\mathbf{R}_{\geq 1-\epsilon/3}$. Soit $T > 1 + \epsilon/2$. Le temps T du flot du champ de vecteurs $\vec{x}_0 := (\alpha \circ R)(\beta \circ \mathrm{Re}\ \pi)\vec{x}$ est un plongement lisse $f : U_0 \subset \mathbf{C}^{n+1} \to U$ vérifiant la propriété 1. (car $\vec{x}_0.R = 0$). D'autre part, au vu du support de β, f stabilise $\pi^{-1}(D)$. La propriété 2. s'obtient en regardant les supports de α et β. La restriction de $\mathrm{d}\pi(\vec{x}_0) = (\alpha \circ R)(\beta \circ \mathrm{Re}\ \pi)\partial_x$ à $\{\alpha \circ R = 1\}$ se factorise par π, d'où la propriété 3. Comme $R|_{\pi^{-1}(t) \cap \{\eta/3 \leq R \leq \eta/2\}}$ n'a aucun point critique, la propriété 4. découle de la propriété 1.

□

3.2.2 La structure symplectique sur les fibres

Si l'on suppose de plus que la variété complexe V est un domaine de Stein et que S est un minimum $\mathbf{C}$-convexe, on peut construire une structure symplectique sur chaque fibre de l'application donnée par la proposition 3.10 :

Proposition 3.12. *Soient V un domaine de Stein, $S \subset V$ une sphère lisse et $\phi : V \to \mathbf{R}$ une exhaustion $\mathbf{C}$-convexe dont S est le plus bas niveau et qui est de Morse excellente hors de S. Alors, il existe une variété complexe $(\mathcal{V}, J)$, une fonction pseudo-holomorphe Π de $\mathcal{V}$ vers un voisinage $D \subset \mathbf{C}$ de l'arc $[0,1]$, un ouvert $1 \ni D_1' \subset D$, un $(n+1)$-disque $\Delta \subset \mathcal{V}$, un voisinage U de Δ, une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ et une 1-forme Λ vérifiant les propriétés de la proposition 3.10 et les propriétés suivantes :*

— (Fibre de référence) $\Phi|_V = \phi$;

— (Cycle évanescent) *La 2-forme $\mathrm{d}\Lambda|_{\ker \mathrm{d}\Pi}$ est non dégénérée en tout point et l'union des caractéristiques de l'hypersurface $\Pi^{-1}(]0,1])$ pour la 2-forme $\mathrm{d}\Lambda$ est $\Delta \setminus p$;*

— (Fibres convexes) *Soit $t \in D$. En restriction à $\Phi^{-1}(t) \setminus p$, Φ est de Morse-Bott et est de Morse excellente hors de Δ et le $\mathrm{d}\Lambda$-dual de Λ est un pseudogradient de Φ. En restriction à $\Phi^{-1}(t) \cap U \setminus p$ (resp. $\Phi^{-1}(t)$ dans le cas où $t \in D_1'$), Φ est J-convexe et $\Lambda = -\mathrm{d}^J\Phi$. De plus, Φ est J-convexe au point p.*

— (Famille de cobordismes) *Il existe deux valeurs régulières $a < b^+$ de Φ telles que $\{\Phi \leq a\} \subset U$, les niveaux $\{\Phi = a\}$ et $\{\Phi = b^+\}$ sont transverses à chaque fibre de Π et $\{\Phi \leq b^+\} \cap \Pi^{-1}(1) = V$.*

Remarque 3.13. Ce résultat est analogue à une «déformation symplectique» décrite par Seidel ([Sei03, Proposition 1.11]) dans le cadre des domaines de Liouville.

Démonstration. **Si la sphère $S \subset V$ est analytique réelle :**

Soient $0 < \epsilon < 1$ et $\eta > 0$. Comme $S \subset V$ est analytique réelle, on prend la variété presque complexe $(\mathcal{V}, J)$, l'application $\Pi : \mathcal{V} \to D$, les ouverts $1 \ni D_1' \subset D_1 \subset D$ et le disque Δ donnés par la preuve de la proposition 3.10.

On construit d'abord la fonction Φ. D'après le lemme 3.16, au voisinage de $S \subset V$, il existe une métrique riemannienne g telle que ϕ est la fonction «distance au carré à S» pour g au voisinage de S. On prend une extension de la métrique riemannienne g à $\mathcal{V}$ de sorte que la restriction de g à un voisinage de $D_1 \times S \subset D_1 \times V$ soit la métrique produit. Pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit, la fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ vérifiant :

— $\Phi = R$ sur $\{R < \eta\}$;

— $\Phi = \phi \circ \mathrm{pr}_2$ sur $D_1 \times V \subset \mathcal{V}$;

est bien définie. En effet, pour $\eta > 0$ suffisamment petit, si $t \in D_1$ la fibre $(t \times V) \cap \{R < \eta\} \subset (\mathcal{V}, g)$ est totalement géodésique, donc $R = \phi \circ \mathrm{pr}_2$ sur $(D_1 \times V) \cap \{R < \eta\}$. De plus :

— Φ est J-convexe sur $\{R < \eta\}$;

— $\Phi|_{\Pi^{-1}(t)}$ est J-convexe sur $\{R < \eta/3\}$ si $t \in D$ (resp. sur tout $\Pi^{-1}(t)$ si $t \in D_1'$).

La première assertion suit du lemme 3.15 et la seconde des propriétés 2. et 3. du lemme 3.11.

On construit maintenant la 1-forme Λ. Soit $t \in D$. On montre qu'il existe une 1-forme λ_t sur $\Pi^{-1}(t)$ dont le $\mathrm{d}\lambda_t$-dual est de type gradient pour $\Phi|_{\pi^{-1}(t)}$ et telle que $\lambda_t = -\mathrm{d}^J\Phi_{\Pi^{-1}(t)}$ au voisinage de $\{\Phi \leq \eta/3\}$ (resp. partout dans le cas où $t \in D_1'$). D'une part, en restriction à $\Pi^{-1}(t) \cap \{\Phi \leq \eta/3\}$, la fonction Φ est J-convexe donc la 1-forme $-\mathrm{d}^J\Phi$ convient. D'autre part, en restriction à $\Pi^{-1}(t) \cap \{\Phi > \eta/2\}$, la fonction Φ est J_0-convexe donc la 1-forme $-\mathrm{d}^{J_0}\Phi$ convient. Il reste à construire λ_t sur $\Pi^{-1}(t) \cap \{\eta/3 \leq \Phi \leq \eta/2\}$. D'après la propriété 3. du lemme 3.11, chaque fonction $\Phi|_{\Pi^{-1}(t)}$ est sans point critique sur le cobordisme $\{\eta/3 \leq \Phi|_{\Pi^{-1}(t)} \leq \eta/2\}$. D'après le lemme 3.26 (à deux paramètres), il existe une trivialisation lisse $\Pi^{-1}(D) \cap \{\eta/3 \leq \Phi \leq \eta/2\} = D \times \{\eta/3 \leq \Phi|_{\Pi^{-1}(1)} \leq \eta/2\}$ de Π dans laquelle $\Phi = \Phi|_{\Pi^{-1}(1)} \circ \mathrm{pr}_2$. On applique alors le lemme 3.32.1 à l'image des 1-formes $-\mathrm{d}^J\Phi|_{\Pi^{-1}(t)\cap \mathrm{Op}\{\Phi=\eta/3\}}$ et $-\mathrm{d}^{J_0}\Phi|_{\Pi^{-1}(t)\cap \mathrm{Op}\{\Phi=\eta/2\}}$ par la trivialisation. Ceci fournit les 1-formes λ_t désirées. On choisit enfin une 1-forme Λ sur $\mathcal{V}$ telle que, pour tout $t \in D$, $\Lambda|_{\Pi^{-1}(t)} = \lambda_t$ et $\Lambda = -\mathrm{d}^J\Phi$ sur $\{\Phi < \eta/3\}$.

Les propriétés «fibre de référence» et «fibres convexes» sont vérifiées par construction et la propriété «cycle évanescent» est satisfaite d'après les propriétés de $\mathbf{C}$-convexité de Φ et d'après le lemme 3.14.

Il reste à montrer la propriété «famille de cobordismes». L'hypersurface $\{\Phi = \eta/4\} \subset U$ est transverse à chaque fibre $\Pi^{-1}(t)$ donc la valeur $a := \eta/4$ convient. Le domaine V est un sous-niveau régulier $\{\phi \leq b^+\}$ et $\Phi = \phi \circ \mathrm{pr}_2$ sur $\{\Phi > \eta/2\} \subset D_1' \times V$, donc la valeur b^+ convient.

Si la sphère $S \subset V$ est lisse :

On va se ramener au cas précédent. On fixe un plongement lisse $i_0 : S^n \to V$ de la sphère S. Par approximation analytique réelle, il existe une famille lisse de plongements $(i_x)_{x\in[0,1]}$ de S^n dans V telle que i_1 est analytique réel et chaque i_x est $\mathcal{C}^2$-proche de i_0. Le plongement i_0 est totalement réel (car S un minimum $\mathbf{C}$-convexe) ; on peut supposer chaque i_x totalement réel (car cette propriété est $\mathcal{C}^1$-ouverte). On prend une famille de difféomorphismes (f_x) de V étendant $(i_x \circ i_0^{-1})$ de sorte que chaque fonction $(f_x)_\star\phi$ est $\mathbf{C}$-convexe (c'est possible car la $\mathbf{C}$-convexité est une propriété $\mathcal{C}^2$-ouverte).

La sphère analytique réelle $i_1(S^n) \subset V$ est un minimum $\mathbf{C}$-convexe (pour la fonction $(f_1)_\star\phi$). En appliquant la première partie de la preuve à la sphère analytique réelle $i_1(S^n)$: on obtient une application holomorphe $\Pi : \mathcal{V} \to D$, une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ et une 1-forme Λ vérifiant les conclusions de la proposition, en particulier, si on note p le point critique de Π, les caractéristiques de $\Pi^{-1}([0,1]) \setminus p$ pour $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\Phi$ transportent $i_1(S^n)$ sur

p. Toujours d'après la première partie de la preuve, il existe un voisinage $D_1 \subset D$ de 1 tel que $\Pi^{-1}(D_1) = D_1 \times V$ comme variétés complexes et $\Phi|_{1\times V} = \phi \circ f_1^{-1}$.

On note $x+iy$ la coordonnée complexe sur le premier facteur de $D_1 \times V$. On va modifier, pour un petit réel $\delta > 0$, la fonction Φ au voisinage de $i_1(S^n)$ en une nouvelle fonction $\tilde{\Phi}$ de sorte que les caractéristiques de l'hypersurface $[1, 1+\delta] \times V \subset \mathcal{V}$ pour $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\tilde{\Phi}$ transportent la sphère analytique réelle $\{1\} \times i_1(S^n)$ sur la sphère «initiale» $\{1+\delta\} \times S$. On reparamètre la famille (f_x) : on prend une fonction plateau $m : \mathbf{R} \to [0, 1]$ telle que $m = 1$ sur $\mathbf{R}_{\leq 1}$ et $m = 0$ sur $\mathbf{R}_{\geq 1+\delta}$ et on pose $g_x = f_{m(x)}^{-1}$ et $\phi_x = \phi \circ g_x$ pour tout $x \in [1, 1+\delta]$. D'après les propriétés de (f_x), chaque fonction $g_x^\star\phi : V \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe et a un 1-jet nul en tout point de $i_x(S^n)$. Quitte à prendre une famille (f_x) encore plus $\mathcal{C}^2$-petite et à diminuer $\delta > 0$, on peut prendre un fonction $\tilde{\Phi} : D_1 \times V \to \mathbf{R}$ avec les propriétés suivantes :

— pour tout $x \in [1, 1+\delta]$, $\tilde{\Phi}(x, \mathrm{pr}_2) = \phi_x$ et $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\Phi}(x, \mathrm{pr}_2) = 0$

— $\tilde{\Phi} = \Phi$ hors d'un voisinage de l'anneau $\cup_{x\in[1,1+\delta]}\{x\} \times i_{m(x)}(S^n)$;

— la restriction de $\tilde{\Phi}$ à chaque fibre est $\mathbf{C}$-convexe.

Pour tout $x \in [1, 1+\delta]$, on note $\vec{u}_x$ le champ de vecteurs de V tel que, pour tout $p \in V$, $(1, \vec{u}_x(p)) \in T_{(x,p)}(D_1 \times V)$ engendre la direction caractéristique pour $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\tilde{\Phi}$. On note $\vec{v}_x = \frac{\partial g_x}{\partial x} \circ g_x^{-1}$; les trajectoires du champ de vecteurs $(1, -\vec{v}_x)$ défini sur $D_1 \times V$ envoient $i_1(S^n)$ sur S. Soit $x \in [1, 1+\delta]$, $p \in i_x(S)$. Il suffit de vérifier que $\vec{u}_x + \vec{v}_x$ est $\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi_x$-orthogonal à $i_x(S^n) \subset V$; en effet, ceci implique que $\vec{u}_x + \vec{v}_x$ est tangent à $i_{m(x)}(S^n)$ (puisque $i_{m(x)}(S^n) \subset V$ est lagrangienne) et donc que les caractéristiques pour $-\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\tilde{\Phi}$ envoient $i_1(S^n)$ sur S. Soient $x \in [1, 1+\delta]$ et $p \in i_{m(x)}(S^n)$. Par définition de $\vec{u}_x$ et en utilisant $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\Phi}(x, \mathrm{pr}_2) = 0$:

$$\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi_x(\vec{u}_x, \cdot) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}^{\mathbf{C}}\phi_x) = 0.$$

Or, en utilisant $\mathrm{d}\phi(g_x(p)) = 0$ puis $\vec{v}_x(g_x) = \mathrm{d}g_x(\vec{v}_x)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}^{\mathbf{C}}\phi_x) = \mathrm{d}^2\phi(\vec{v}_x(g_x), \mathrm{d}^{\mathbf{C}}g_x(\cdot)) = \mathrm{d}^2\phi(\mathrm{d}g_x(\vec{v}_x), \mathrm{d}^{\mathbf{C}}g_x(\cdot)).$$

D'autre part, en utilisant encore $\mathrm{d}\phi(g_x(p)) = 0$, on a :

$$\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi_x(\vec{v}_x, \cdot) = \mathrm{d}^2\phi(\mathrm{d}g_x(\vec{v}_x), \mathrm{d}^{\mathbf{C}}g_x(\cdot)) - \mathrm{d}^2\phi(\mathrm{d}g_x(\cdot), \mathrm{d}^{\mathbf{C}}g_x(\vec{v})).$$

En regroupant ces trois calculs :

$$\mathrm{dd}^{\mathbf{C}}\phi_x(\vec{u}_x + \vec{v}_x, \cdot) = -\mathrm{d}^2\phi(\mathrm{d}g_x(\cdot), \mathrm{d}^{\mathbf{C}}g_x(\vec{v})).$$

Comme ϕ est constante sur S, la restriction de cette 1-forme à $Ti_{m(x)}(S^n)$ est nulle.

□

Le lemme ci-dessous est utilisé dans la preuve de la proposition précédente ; il emploie les notations fixées après le lemme 3.9.

Lemme 3.14. *Soient $\epsilon > 0$ et g une métrique riemannienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Les caractéristiques de l'hypersurface $\pi^{-1}(]0, 1+\epsilon]) \setminus 0_{\mathbf{C}^{n+1}}$ pour la forme symplectique $\omega := -\mathrm{dd}^c R$ transportent S^n sur $0_{\mathbf{C}^{n+1}}$, l'union de ces caractéristiques est Δ_ϵ.*

Démonstration. Le champ de vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$ défini par $\omega(\vec{x}, i\cdot) = \mathrm{Re}\, \mathrm{d}\pi$ dirige les caractéristiques. Il suffit de montrer que le champ de vecteurs $\vec{x}$ est tangent à Δ_ϵ. La fonction R admet Δ_ϵ comme lieu critique donc, d'après le lemme d'Hadamard, il existe une famille $(B^z)_{z\in\mathbf{C}^{n+1}}$ de formes bilinéaires sur $\mathbf{R}^{n+1}$ telle qu'au voisinage de Δ_ϵ, $R(z) = B^z(\mathrm{Im}z, \mathrm{Im}z)$. Soit $z \in \Delta_\epsilon$. En différentiant R deux fois, pour tous vecteurs $u, v \in T_z\mathbf{C}^{n+1}$, $\omega_z(u, iv) = 2B^z(u_y, v_y) + 2B^z(v_x, u_x)$, où u_x (resp. u_y) désigne la projection du vecteur $u \in \mathbf{C}^{n+1}$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$ (resp. $i\mathbf{R}^{n+1}$). Ainsi $B^z(\vec{x}_y, \cdot) = 0$ donc, par non dégénérescence de la forme $B^z = \mathrm{d}^2R(z)$, $\vec{x}_y = 0$ c'est-à-dire $\vec{x} \in T\Delta_\epsilon$. □

Les deux lemmes ci-dessous sont utilisés dans la preuve de la proposition 3.9.

Lemme 3.15. *Soit (V, J) une variété presque complexe, $S \subset V$ une sous-variété close totalement réelle et g une métrique riemannienne sur V. Alors la fonction «distance à S au carré» pour la métrique g est $\mathbf{C}$-convexe au voisinage de S.*

Démonstration. Comme S est totalement réelle, il existe un champ F de sous-espaces J-invariants de $TV|_S$ tel que $TV|_S = TS \oplus JTS \oplus F$.

Soit $p \in S$. La fonction «distance à S au carré» pour la métrique g, notée r^2, a un point critique en p, on note $H : T_pV \to \mathbf{R}$ sa forme quadratique Hessienne. La restriction de la forme quadratique H à tout sous-espace d'intersection nulle avec T_pS est définie positive. Il suffit de montrer que la forme quadratique $H^{\mathbf{C}} := H + J^\star H$ est définie positive ; en effet, si la fonction r^2 est $\mathbf{C}$-convexe en chaque point de la sous-variété close S alors elle l'est au voisinage de S. Comme H est positive, $H^{\mathbf{C}}$ l'est aussi. Soit $u = v + Jw + x \in T_pV = T_pS \oplus JT_pS \oplus F_p$, alors :

$$H^{\mathbf{C}}(u) = H(v + Jw + x) + H(Jv - w + Jx).$$

Ainsi, si $H^{\mathbf{C}}(u) = 0$ alors $H(v + Jw + x) = H(Jv - w + Jx) = 0$ donc $v + Jw + x \in T_pS$ et $Jv - w + Jx \in T_pS$ c'est-à-dire $u = 0$.

□

Lemme 3.16 (Une version du lemme de Morse)**.** *Soit V une variété, $S \subset V$ une sous-variété close et $\phi : V \to \mathbf{R}$ une fonction dont S est un minimum (local) transversalement non dégénéré. Alors, il existe une métrique riemannienne g sur V telle que, au voisinage de S, ϕ est la fonction «distance à S au carré» pour la métrique g.*

Démonstration. On prend un voisinage $U \subset V$ de S. On identifie U à un tube autour de la section nulle S du fibré normal $\pi : NS \to S$. On pose $\phi^1 : U \to \mathbf{R}$ la fonction dont la restriction à chaque fibre $\pi^{-1}(p)$ est la forme quadratique hessienne de la fonction $\phi|_{\pi^{-1}(p)}$ au point p. Par hypothèse la forme quadratique $\phi^1|_{\pi^{-1}(p)}$ est définie positive. On prend g une métrique riemannienne sur U telle que, pour tous $q \in \pi^{-1}(p)$, $v \in \ker \mathrm{d}_q\pi = \pi^{-1}(p)$: $g(v, v) = \phi^1(v)$ et telle que chaque fibre $\pi^{-1}(p)$ est orthogonale à S. D'après la première condition, la fonction «distance à p au carré» pour la métrique induite par g sur $\pi^{-1}(p)$ coïncide avec $\phi^1|_{\pi^{-1}(p)}$. D'après la seconde condition, quitte à rétrécir U, chaque fibre est une sous-variété totalement géodésique. Ainsi, la fonction «distance à S au carré» pour la métrique g coïncide avec $\phi^1|_{\pi^{-1}(p)}$.

D'après le lemme de Morse à paramètre, quitte à rétrécir le tube U, il existe un difféomorphisme h de U relevant l'identité de S tel que $h^\star\phi^1 = \phi$. Ainsi, ϕ est la fonction «distance à S au carré» pour la métrique riemannienne $h^\star g$.

□

3.3 Complexification

Une fois une déformation symplectique $\Pi : (\mathcal{V}, J) \to D$ vers un domaine à singularité conique (au sens de la proposition 3.12) obtenue, on adopte la stratégie suivante pour transformer J en une structure complexe sur $\mathcal{V}$, relativement à l'onglet de Lefschetz et à $\Pi^{-1}(1) = V$, telle que Π soit holomorphe. On va construire une «famille analytique réelle» de structures complexes sur les fibres de $\Pi|_{D\cap\mathbf{R}}$ puis «complexifier» cette famille en une structure complexe sur $\mathcal{V}$. Dans cette partie on montre un lemme d'existence et d'unicité de telles complexifications semblable à la complexification de Bruhat-Whitney [BW59].

On précise d'abord la notion de «famille analytique réelle» de structures complexes :

Définition 3.17. Soit Π une application d'une variété $\mathcal{W}$ vers un intervalle ouvert I. On appelle *famille analytique réelle de structures complexes sur les fibres de* Π (ou, si l'application Π est donnée par le contexte, *famille analytique de structures complexes sur* $\mathcal{W}$) la donnée d'un(e classe d'équivalence d') atlas analytique réel $(\phi_i : U_i \subset \mathcal{W} \to V_i \subset I \times \mathbf{C}^n)$ de $\mathcal{W}$ tel que, pour tous indices i, j et pour tout $t \in I$:

— $\Pi|_{U_i} = \mathrm{pr}_1 \circ \phi_i$;

— $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{(t\times\mathbf{C}^n)\cap V_i} : (t \times \mathbf{C}^n) \cap V_i \to (t \times \mathbf{C}^n) \cap V_j$ est un biholomorphisme.

Une famille analytique réelle de structures complexes sur les fibres de Π induit une structure complexe sur chaque sous-variété analytique réelle $\Pi^{-1}(t)$.

Notation 3.18. On utilisera la notation (J_t) pour désigner une famille analytique réelle sur les fibres de Π, où J_t est la structure complexe induite sur la fibre $\Pi^{-1}(t)$

On montre maintenant qu'une telle famille analytique réelle de structures complexes admet une unique «complexification», au sens suivant :

Définition 3.19. Soit $\mathcal{W}$ une variété, I un intervalle ouvert, $\Pi : \mathcal{W} \to I$ une application et (J_t) une famille analytique réelle de structures complexes sur les fibres de Π. Une *complexification de* (J_t) est la donnée d'une variété complexe $(W^{\mathbf{C}}, J^{\mathbf{C}})$, d'une submersion holomorphe $\Pi^{\mathbf{C}} : \mathcal{W}^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ et d'un plongement analytique réel $i : \mathcal{W} \to \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ tel que $\Pi^{\mathbf{C}} \circ i = \Pi$ et, pour tout $t \in I$, $i_\star J_t = J^{\mathbf{C}}|_{(\Pi^{\mathbf{C}})^{-1}(t)}$.

Attention, la dimension réelle d'une complexification $\mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ d'une famille analytique réelle de structures complexes $\Pi : \mathcal{W} \to I$ est $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{W} + 2$; informellement, seule la direction de la base I est complexifiée.

Lemme 3.20. *Soit* $\Pi : \mathcal{W} \to I$ *une application et* (J_t) *une famille analytique réelle de structures complexes sur les fibres de* Π. *Alors,* (J_t) *admet des complexifications. De plus, si* (Π_1, J_1, i_1) *et* (Π_2, J_2, i_2) *sont deux complexifications de* (J_t)*, alors, le difféomorphisme analytique réel* $i_2 \circ i_1^{-1} : i_1(\mathcal{W}) \to i_2(\mathcal{W})$ *s'étend en un biholomorphisme* $j_{12} : \mathrm{Op}\ i_1(\mathcal{W}) \to \mathrm{Op}\ i_2(\mathcal{W})$ *tel que* $\Pi_2 \circ j_{12} = \Pi_1|_{\mathrm{Op}\ i_1(\mathcal{W})}$.

Démonstration. La preuve de ce lemme imite la preuve de la complexification de Bruhat-Whitney d'une variété analytique réelle (voir la proposition 1 de [BW59]).

On démontre l'unicité. Soit $p_1 \in i_1(\mathcal{W})$. On pose $p_2 = (i_2 \circ i_1^{-1})(p_1)$. D'abord, pour $j \in \{1, 2\}$, il existe un voisinage ouvert $U_j \subset \mathcal{W}_j$ de p_j et un biholomorphisme $\phi_j : U_j \to$

$\phi_j(U_j) \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_j = \Pi_j|_{U_j}$. Comme $\Pi_i \circ i_j = \Pi$, $V_j := \phi_j(U_j \cap i_j(\mathcal{W}))$ est un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{C}^n$. Le difféomorphisme analytique réel

$$i_{12} := \phi_2 \circ i_2 \circ i_1^{-1} \circ \phi_1^{-1} : V_1 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{C}^n \to V_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{C}^n$$

peut alors être complexifié en un biholomorphisme $i_{12}^{\mathbf{C}} : \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_1 \to \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_2$. Par unicité du prolongement analytique, $\Pi_2 \circ i_{12}^{\mathbf{C}} = \Pi_1|_{\mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_1}$. Soit $p_1' \in i_1(\mathcal{W})$ un autre point, si on prend de même ϕ_1' et ϕ_2', alors, par unicité du prolongement analytique, les extensions $i_{12}^{\mathbf{C}} : \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_1 \to \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_2$ et $(i_{12}')^{\mathbf{C}} : \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_1' \to \mathrm{Op}_{\mathbf{C}^{n+1}} V_2'$ se recollent, c'est-à-dire $(i_{12}')^{\mathbf{C}} = \phi_2' \circ \phi_2^{-1} \circ i_{12}^{\mathbf{C}} \phi_1 \circ (\phi_1')^{-1}$. On obtient ainsi le biholomorphisme global désiré j_{12}.

On montre l'existence. On prend un atlas dénombrable et localement fini $(\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbf{R} \times \mathbf{C}^n)_i$ de $\mathcal{W}$ tel que $\Pi|_{U_i} = \Pi \circ \phi_i$ et chaque restriction $\phi_i|_{\Pi^{-1}(t)} : \Pi^{-1}(t) \cap U_i \to (t \times \mathbf{C}^n) \cap V_i$ est un biholomorphisme. Les arguments donnés dans la preuve de la proposition 1 de [BW59] montrent qu'il existe des voisinages $V_i^{\mathbf{C}}$ de V_i dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et $V_{ij}^{\mathbf{C}}$ de V_{ij} dans $V_i^{\mathbf{C}}$ et des biholomorphismes $\phi_{ij}^{\mathbf{C}} : V_{ij}^{\mathbf{C}} \to V_{ji}^{\mathbf{C}}$ tels que $\phi_{ij}^{\mathbf{C}}(V_{ij}) = V_{ji}^{\mathbf{C}}$, $\phi_{ji} \circ \phi_{ij} = \mathrm{Id}_{V_{ij}^{\mathbf{C}}}$, $\phi_{jk}(\phi_{ij}^{\mathbf{C}}(V_{ij}^{\mathbf{C}})) \subset V_{jk}^{\mathbf{C}}$, $\phi_{jk}^{\mathbf{C}} \circ \phi_{ij}^{\mathbf{C}} = \phi_{ik}^{\mathbf{C}}$, $V_i^{\mathbf{C}} \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{C}^n) = V_i$, $V_{ij}^{\mathbf{C}} \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{C}^n) = V_{ij}$, $\phi_{ij}^{\mathbf{C}}|_{V_{ij}} = \phi_{ij}$ et $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_{ij}^{\mathbf{C}} = \mathrm{pr}_1 : V_{ij}^{\mathbf{C}} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$.

On prend pour $\mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ le quotient de l'union disjointe $\coprod V_i^{\mathbf{C}}$ par la relation d'équivalence $\phi_{ij}^{\mathbf{C}}(z_i) \sim z_j$. D'après la condition de cocycle $\phi_{jk}^{\mathbf{C}} \circ \phi_{ij}^{\mathbf{C}} = \phi_{ik}^{\mathbf{C}}$ c'est une variété complexe (*a priori* non séparée) dont les cartes sont données par les applications quotient $V_i^{\mathbf{C}} \to \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$. D'après les propriétés de l'assertion, les inclusions $V_i \to V_i^{\mathbf{C}}$ induisent un plongement analytique réel $i : \mathcal{W} \to \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ et une submersion holomorphe $\Pi^{\mathbf{C}} : \mathcal{W}^{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ telle que $\Pi^{\mathbf{C}} \circ i = \Pi$.

Pour montrer que l'espace topologique $\mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ est séparé, les ouverts $V_i^{\mathbf{C}}, V_{ij}^{\mathbf{C}}$ de l'assertion ci-dessus doivent être choisis avec plus de soin. Ceci peut être fait en suivant les arguments de la preuve de la proposition 1 de [BW59]. □

3.4 De Weinstein à Stein

Une déformation symplectique $\Pi : (\mathcal{V}, J) \to D$ d'un domaine de Stein V vers un domaine à singularité conique (au sens de la proposition 3.12) induit, par restriction à la préimage de l'arc $[0, 1]$, une famille de cobordismes de Weinstein qui sont de Stein près du bord inférieur. On explique dans cette partie comment transformer ces structures de Weinstein en des structures de Stein (relativement au bord inférieur et à la fibre $\Pi^{-1}(1) = V$) dont les structures complexes forment une famille analytique réelle (au sens de la définition 3.17). Le thème «From Stein to Weinstein» du livre [CE12] est central dans cette partie ; on utilisera certains résultats de ce livre sans démonstration.

On emploiera les notions de structure de Weinstein/Stein dans le cadre suivant :

Définition 3.21. Un *cobordisme* est une variété compacte dont le bord est l'union de deux variétés, le «bord inférieur» $\partial_- W$ et le «bord supérieur» $\partial_+ W$ dont l'union disjointe forme le bord de W.

Définition 3.22. Soit W un cobordisme. Une *structure de Weinstein sur le cobordisme* W est la donnée d'une 1-forme λ sur W et d'une fonction de Morse excellente $\phi : W \to \mathbf{R}$ telles que la forme $\omega := \mathrm{d}\lambda$ est symplectique, le champ de vecteurs ω-dual de λ, noté $\vec{\lambda}$,

est un pseudogradient pour la fonction ϕ, $\partial_- W$ et $\partial_+ W$ sont deux niveaux réguliers de ϕ et $\vec{\lambda}$ pointe à l'intérieur (resp. extérieur) de W en tout point de $\partial_- W$ (resp. $\partial_+ W$) pour l'orientation de W définie par ω.

Définition 3.23. Soit W un cobordisme. Une *structure de Stein sur le cobordisme* W est la donnée d'une structure complexe J sur W et d'une fonction de Morse excellente et J-convexe $\phi : W \to \mathbf{R}$ telles que $\partial_- W$ et $\partial_+ W$ sont deux niveaux réguliers de ϕ.

Notation 3.24. Une structure de Stein (J, ϕ) induit une structure de Weinstein canonique $(-\mathrm{d}^J\phi, \phi)$ qu'on note $\mathfrak{W}(J, \phi)$. Quand on utilisera la notation $\mathfrak{W}(J, \phi)$, on sous-entendra que J est une structure complexe intégrable et que f est J-convexe.

Remarque 3.25. D'après les deux définitions précédentes, les familles de fonctions de Morse sous-jacentes de structures de Weinstein/Stein n'ont pas d'«accidents» (croisement de valeurs critiques, naissance/mort de point critique ...).

On utilisera la propriété suivante des fonctions de Morse excellentes pour se ramener à l'étude de familles de Weinstein/Stein dont la famille de fonctions sous-jacentes est constante.

Lemme 3.26. *Soit $\Pi : \mathcal{W} \to I$ une submersion lisse vers un intervalle. Soit $\Phi : \mathcal{W} \to \mathbf{R}$ une fonction et deux réels $a < b$ tels que, pour tout $t \in I$, $\phi_t := \Phi|_{\Pi^{-1}(t)}$ est une fonction de Morse excellente et $\Pi^{-1}(t)$ est un cobordisme dont le bord inférieur (resp. supérieur) est le niveau régulier $\{\phi_t = a\}$ (resp. $\{\phi_t = b\}$). Alors, il existe une trivialisation*

$$\tau : \mathcal{W} \to I \times \Pi^{-1}(1)$$

et une famille de difféomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ $(u_t)_{t\in I}$ telles que, pour tout $t \in I$, $u_t \circ \phi_t \circ \tau^{-1}|_{\mathrm{pr}_1^{-1}(t)} = \phi$, $\tau^{-1}|_{\mathrm{pr}_1^{-1}(1)}$ est l'inclusion, $u_1 = \mathrm{Id}$ et $u_t = \mathrm{Id}$ au voisinage de $\partial[a, b]$. Dans le cas particulier où ϕ_t n'a aucun point critique, on peut choisir $u_t = \mathrm{Id}$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{W} = I \times \Pi^{-1}(1)$ et que Π est la première projection ; en effet, si on prend une connexion ξ de Π telle qu'en chaque $p \in \partial W$, $\xi_p \subset \ker \mathrm{d}_p\Phi$, alors le transport parallèle pour ξ trivialise $\Pi|_{\{a\leq\Phi\leq b\}}$.

En réalisant les chemins suivis par les points (resp. valeurs) critiques de la famille de fonctions de Morse $(\phi_t)_{t\in I}$ sur $\Pi^{-1}(1)$ par une famille de difféomorphismes de $\Pi^{-1}(1)$ (resp. difféomorphismes croissants de $\mathbf{R}$) issue de l'identité, on peut supposer que les points (resp. valeurs) critiques de la famille (ϕ_t) sont constants. On va construire une famille de difféomorphismes (f_t) de $\Pi^{-1}(1)$ issue de l'identité telle que $\phi_t \circ f_t = \phi$. Pour ce faire on suit la méthode du chemin de Moser (voir p. 259 dans [The99] pour une application similaire) : il suffit de trouver une famille de champs de vecteurs complets $(\vec{v}_t)_{t\in I}$ sur $\Pi^{-1}(1)$ telle que :

$$\mathrm{d}\phi_t(\vec{v}_t) + \dot{\phi}_t = 0 \tag{3.1}$$

(en effet, le flot (f_t) de $(\vec{v}_t)$ conviendra d'après la formule de Lie-Cartan). Sur le complémentaire V d'un petit voisinage de l'union des points critiques de ϕ_t,

$$\vec{v}_t^V := -\dot{\phi}_t|\mathrm{d}\phi_t|^{-2} \operatorname{grad} \phi_t$$

(pour une métrique riemannienne auxiliaire) donne une solution de l'équation (3.1) qui est tangente à $\partial\Pi^{-1}(1)$ donc complète. Pour chaque point critique p_i de ϕ_t, on identifie un voisinage U_i de p_i à un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$. D'après le lemme de division d'Hadamard, il existe une famille de formes bilinéaires symétriques $(B_t^x)_{x\in U_i}$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\phi_t(x) - \phi_t(0) = B_t^x(x,x)$. L'équation (3.1) s'écrit $C_t^x(\vec{v}_t, x) = -\dot{B}_t^x(x,x)$ où C_t^x est la forme bilinéaire $(\partial_x B_t^x(\cdot))(x,\cdot) + 2B_t^x$. Quitte à rétrécir U_i, pour tout $x \in U_i$, la forme bilinéaire C_t^x est non dégénérée (car $C_t^0 = 2B_t^0 = \mathrm{d}^2\phi_t(0)$). Ainsi le champ de vecteurs C_t^x-dual de la 1-forme $-\dot{B}_t^x(x,\cdot)$, noté $\vec{v}_t^{U_i}$, est une solution de (3.1) sur U_i. Quitte à agrandir V, on peut recoller les solutions $\vec{v}_t^V$ et $\vec{v}_t^{U_i}$ sur $V \cap (\cup_i U_i)$ avec une fonction plateau.

□

La proposition suivante est le résultat principal de cette partie.

Proposition 3.27. *Soit I un intervalle fermé contenant* 1. *Soit $(\lambda_t^0, \phi)_{t\in I}$ une famille de structures de Weinstein sur un cobordisme W. Soit $(J_t)_{t\in I}$ une famille lisse de structures presque complexes sur W qui se restreint en une famille analytique réelle de structures complexes (sur les fibres de la restriction de* pr_1*) au voisinage de $(I \times \partial_- W) \cup ((I \cap \mathbf{R}_{\geq 1}) \times W) \subset I \times W$ et telle que chaque J_t est compatible avec $\mathrm{d}\lambda_t^0$. On suppose que $(\lambda_t^0, \phi) = \mathfrak{W}(J_t, \phi)$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ (resp. sur tout W dans le cas où $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$). Alors, il existe un difféomorphisme croissant v de $\mathbf{R}$, une famille de structures de Weinstein $(\lambda_t^s, v \circ \phi)_{t\in I, s\in[0,1]}$ sur le cobordisme W et une famille analytique réelle de structures complexes (J_t^1) sur $I \times W$ avec les propriétés suivantes :*

- *$(\lambda_t^1, v \circ \phi) = \mathfrak{W}(J_t^1, v \circ \phi)$;*
- *$J_u^1 = J_u$ et $\lambda_u^s = \lambda_u^0$ pour $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$;*
- *$v|_{\mathrm{Op}\,\phi(\partial_- W)} = \mathrm{Id}$ et, sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$, $J_t^1 = J_t$ et $\lambda_t^s = \lambda_t^0$.*

Remarque 3.28. Cet énoncé est analogue au théorème 13.6 de [CE12] ; la seule différence est que, dans l'hypothèse comme dans la conclusion, la famille de structures complexes est analytique réelle.

Avant de démontrer cette proposition, on explique comment déduire de celle-ci le théorème F.

Démonstration du théorème F. Soit V un domaine de Stein et $S \subset V$ une sphère qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe. On prend un domaine de Stein V° et une fonction $\mathbf{C}$-convexe $\phi : V^\circ \to \mathbf{R}$ telle que V est un sous-niveau $\{\phi \leq b\}$, ∂V° est un niveau $\{\phi = b^+\}$, S est le plus pas niveau de ϕ, ϕ est une fonction de Morse excellente sur $V^\circ \setminus S$ et n'a pas de point critique sur $\{b \leq \phi \leq b^+\}$.

En appliquant la proposition 3.12 à $\phi : V^\circ \to \mathbf{R}$ et à la sphère analytique réelle $S \subset V^\circ$, on obtient une application lisse et pseudo-holomorphe Π d'une variété presque complexe $(\mathcal{V}, J)$ vers un voisinage ouvert D de l'arc $[0,1] \subset \mathbf{C}$, une fonction $\Phi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$, une 1-forme Λ sur $\mathcal{V}$ et deux valeurs $a < b^+$ avec les propriétés de la proposition 3.12. On prend un intervalle fermé $[0,1] \Subset I \subset D \cap \mathbf{R}$ et un réel $b < b^+$ tel que, pour tout $t \in I$, $\{b \leq \Phi|_{\Pi^{-1}(t)} \leq b^+\}$ est un compact de $\Pi^{-1}(t)$ sans point critique de $\Phi|_{\Pi^{-1}(t)}$. On note $\mathcal{W} := \{a \leq \Phi \leq b^+\} \cap \Pi^{-1}(I)$. La famille de structures presque complexe $(J|_{\Pi^{-1}(t)\cap\mathcal{W}})$ se restreint en une famille analytique réelle de structures complexes sur les fibres de $\Pi|_{\mathrm{Op}_{\mathcal{W}}(\{\Phi=a\}\cup\Pi^{-1}(1))}$.

On note $W := \{a \leq \phi \leq b^+\}$. En utilisant le lemme 3.26, on fixe une trivialisation $\tau : \mathcal{W} \to I \times W$ et une famille $(u_t)_{t\in I}$ de difféomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ telles que,

pour tout $t \in I$, $u_t \circ \Phi|_{\Pi^{-1}(t)} \circ \tau^{-1}|_{t\times\Pi^{-1}(1)} = \phi$, $u_1 = \mathrm{Id}$ et $u_t|_{\mathrm{Op}\, a} = \mathrm{Id}$. On pousse en avant chaque forme de Liouville $\lambda_t := \Lambda|_{\Pi^{-1}(t)}$ et chaque structure presque complexe J_t sur le cobordisme W par le difféomorphisme $\tau|_{\Pi^{-1}(t)}$. Alors, $(\lambda_t, \phi)_{t\in I}$ est une famille de structures de Weinstein sur W, il existe un voisinage $U \subset I\times W$ de $(I\times\{\phi = a\})\cup(1\times W)$ tel que la famille lisse $(J_t)_{t\in I}$ de structures presque complexes sur W se restreint en une famille analytique réelle de structure complexes sur les fibres de $\mathrm{pr}_1 : U \to I$ et $\mathfrak{W}(J_t, \phi) = (\lambda_t, \phi)$ sur $\mathrm{Op}\{\phi = a\}$ (resp. sur tout W dans le cas où $t \in \mathrm{Op}_I(\mathbf{R}_{\geq 1} \cap I)$, quitte à diminuer $I \ni [0, 1]$).

D'après la proposition 3.27, il existe un difféomorphisme croissant v de $\mathbf{R}$, une famille de structures de Weinstein $(\lambda_t^1, v\circ\phi)_{t\in I}$ sur W et une famille analytique réelle de structures complexes (J_t^1) sur $I \times W$ vérifiant les conclusions de la proposition 3.27. On rappelle à présent, pour chaque $t \in I$, la fonction $v \circ \phi$, la forme de Liouville λ_t^1 et la structure complexe J_t^1 sur la sous-variété $\{a \leq \Phi|_{\Pi^{-1}(t)} \leq b^+\} \subset \mathcal{W}$ par le difféomorphisme $\tau|_{t\times W}$. On obtient ainsi une fonction $\Phi^1 : \mathcal{W} \to \mathbf{R}$, une 1-forme Λ^1 sur $\mathcal{W}$ et une famille analytique réelle (J_t^1) de structures complexes sur les fibres de $\Pi|_{\mathcal{W}}$ telles que :

— en restriction à $\{a \leq \Phi_{\Pi^{-1}(t)} \leq b^+\}$, (Λ^1, Φ) est une structure de Weinstein et, dans le cas où $t \in \mathrm{Op}\, 1$, $(\Lambda^1, \Phi) = \mathfrak{W}(J_t^1, \Phi)$ et $J_t^1 = J_t$;

— sur $\mathrm{Op}_{\mathcal{W}}\{\Phi = a\}$, $\Phi^1 = \Phi$, $\Lambda^1 = \Lambda$ et $(J_t^1) = (J_t)$.

Par le lemme 3.20 on peut prendre une complexification $\Pi^{\mathbf{C}} : \mathcal{W}^{\mathbf{C}} \to D' := \mathrm{Op}_{\mathbf{C}}\, \mathring{I}$ de la famille analytique réelle (J_t^1) sur les fibres de $\Pi|_{\{a<\Phi<b^+\}\cap\Pi^{-1}(\mathring{I})}$ (où l'on a identifié le plongement analytique réel $\{a < \Phi < b^+\} \cap \Pi^{-1}(\mathring{I}) \to \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ à l'inclusion). On prend un ouvert $U \subset \mathcal{V}$ avec les propriétés de la proposition 3.12, qu'on peut supposer de la forme $\{\Phi < a^+\}$ où $a^+ > a$ est une valeur régulière de $\Phi|_{\Pi^{-1}(t)}$ pour tout $t \in D$. Par unicité de la complexification de la famille analytique réelle (J_t^1) sur les fibres de $\Pi|_{\{a<\Phi<a^+\}\cap\Pi^{-1}(\mathring{I})}$ (cf. lemme 3.20), il existe un plongement holomorphe $i^{\mathbf{C}} : \mathrm{Op}_{\mathcal{V}}(\{a < \Phi < a^+\}\cap\Pi^{-1}(\mathring{I})) \to \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ tel que $i^{\mathbf{C}}_{\{a<\Phi<a^+\}\cap\Pi^{-1}(\mathring{I})} = \mathrm{Id}$ et $\Pi^{\mathbf{C}}|_{\Pi^{-1}(D'')\cap\{a<\Phi<a^+\}} = \Pi \circ i^{\mathbf{C}}$. On peut supposer que la source de $i^{\mathbf{C}}$ est de la forme $\Pi^{-1}(D'') \cap \{a < \Phi < a^+\}$ pour un certain voisinage ouvert $D'' \subset D'$ de $\mathring{I}$.

On pose la variété complexe $\mathcal{V}' = (\Pi^{-1}(D'') \cap \{\Phi < a^+\}) \cup_{i^{\mathbf{C}}} ((\Pi^{\mathbf{C}})^{-1}(D'') \cap \mathcal{W}^{\mathbf{C}})$. On pose $\Pi' : \mathcal{V}' \to D''$ l'application holomorphe telle que $\Pi = \Pi^{\mathbf{C}}$ sur $(\Pi^{\mathbf{C}})^{-1}(D'') \cap \mathcal{W}^{\mathbf{C}}$ et $\Pi'' = \Pi$ sur $\Pi^{-1}(D'') \cap \{\Phi < a^+\}$. On prend une fonction lisse $\Phi' : \mathcal{V}' \to \mathbf{R}$ telle que $\Phi' = \Phi$ sur $\Pi^{-1}(D'') \cap \{\Phi < a\}$ et $\Phi' = \Phi^1$ sur $\{a < \Phi < b^+\} \cap \Pi^{-1}(\mathring{I})$. Comme, pour tout $t \in \mathring{I}$, le sous-niveau $\{\Phi'|_{\Pi'^{-1}(t)} \leq b\}$ est régulier et est compact dans $\Pi'^{-1}(t)$ et la fonction $\Phi'|_{\{\Phi'|_{\Pi'^{-1}(t)}\leq b\}}$ est $\mathbf{C}$-convexe, il existe un voisinage $D''' \subset D''$ de $\mathring{I}$ tel que ces deux propriétés restent vérifiées pour tout $t \in D'''$ (en effet, la $\mathbf{C}$-convexité est une propriété ouverte en topologie $\mathcal{C}^2$). Ainsi $\Pi' : \{\Phi' \leq b\} \cap \Pi'^{-1}(D''') \to D'''$ est une déformation de V vers un domaine à singularité conique et, d'après la propriété «cycle évanescent» de la proposition 3.12, S est un cycle évanescent de cette déformation.

□

L'objectif du reste de cette partie est la preuve de la proposition 3.27. Dans la prochaine proposition, on utilisera le lemme d'approximation bien connu suivant dû aux travaux de Whitney [Whi34] et Grauert [Gra58] (voir également la partie 5.8 dans [CE12]) :

Lemme 3.29. *Soit $r \geq 0$ un entier et i une application lisse entre variétés analytiques réelles. Alors, il existe une application analytique réelle i^1 arbitrairement proche de i pour la topologie $\mathcal{C}^r$ de Whitney.*

Proposition 3.30. *On fait les hypothèses de la proposition 3.27 en supposant de plus que $\phi : W \to \mathbf{R}$ a un unique point critique p. Alors, il existe un voisinage $U \subset I \times W$ de $(I \times \partial_- W) \cup ((I \cap \mathbf{R}_{\geq 1}) \times W)$ et une famille analytique réelle de structures complexes (J_t^0) sur U avec les propriétés suivantes :*

- *la variété stable de p pour chaque champ de Liouville $\vec{\lambda}_t^0$ est incluse dans $U \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(t)$ et est J_t^0-totalement réelle ;*
- *$J_t^0 = J_t$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ (resp. sur tout W dans le cas où $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$).*

Démonstration. La variété stable du point critique pour chaque champ de Liouville $\vec{\lambda}_t^0$ est un k-disque plongé $D_t^k \subset W$ qui est $\mathrm{d}\lambda_t^0$-isotrope, où $0 \leq k \leq n$ est l'indice du point critique p. À $0 < t < 1$ fixé, pour fixer les idées, on décrit l'extension de la structure complexe $J_t|_{\mathrm{Op}\,\partial_- W}$ à l'anse dans le cas particulier où $k = n$ et où un voisinage annulaire $A_t^n \subset D_t^n$ de la sphère descendante est analytique réel (pour la structure sous-jacente à la structure complexe J_t, qui est intégrable près de $\partial_- W$) : on obtient la structure complexe désirée par le recollement (holomorphe) de la complexification du disque D_t^n avec un voisinage de $\partial_- W$ le long de la complexification de l'anneau A_t^n.

On va donner une version 1-paramétrique de cette construction garantissant que les extensions de structures complexes forment une famille analytique réelle. On peut supposer que $\partial_- W = \{\phi = 0\}$, $I = [0, 2]$ et que la famille (J_t) se restreint en une famille analytique réelle sur $U_0 := (I \times \{\phi < \epsilon\}) \cup (]1 - \delta, 2] \times W)$ pour deux réels $\epsilon, \delta > 0$. On fixe un atlas analytique réel de U_0 ayant les propriétés de la définition 3.17 pour $(J_t)|_{U_0}$. On affirme qu'il existe $\epsilon' \in]0, \epsilon[$, un $2n$-disque $D^{\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}^n$ et une application lisse $j : I \times D^{\mathbf{C}} \to I \times W$ tels que :

1. $j_t(D^{\mathbf{C}}) \cup \{\phi < \epsilon'\}$ est un voisinage ouvert de l'union du disque stable avec $\{\phi = 0\}$;
2. la restriction de j_t à $j_t^{-1}(\{\phi < \epsilon'\})$ (resp. à tout $D^{\mathbf{C}}$ dans le cas particulier où $t \in]1 - \delta/3, 1 - \delta/4[$) est holomorphe ;
3. j définit une carte de $I \times W$ compatible avec la restriction de l'atlas analytique réel de U_0 à $U_0' := (I \times \{\phi < \epsilon'\}) \cup (]1 - \delta/3, 2] \times W)$ et $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{pr}_1$.

Cela fournira l'extension désirée de la famille de structures complexe $(J_t)|_{U_0'}$ et achèvera la preuve du lemme ; en effet, chaque j_t étend (par les propriétés 1. et 2.) $J_t|_{U_0' \cap (t \times W)}$ en une structure complexe J_t^0 au voisinage de $D_t^k \cup \partial_- W$ (resp. sur tout W dans le cas particulier où $t > 1 - \delta/3$) et la propriété 3. garantit que (J_t^0) est une famille analytique réelle de structures complexes. Il reste à montrer l'affirmation précédente.

Paramétrage des disques stables : Soit $\eta > 0$, on note $D_0 := \{(x, x') \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}, |x| \leq 6 \text{ et } |x'| < \eta\}$, $A_0 := \{1 \leq |x| \leq 6 \text{ et } |x'| < \eta\}$. Il existe une application lisse $i : I \times (D_0 \cap (\mathbf{R}^k \times 0_{\mathbf{R}^{n-k}})) \to W$ telle que, pour tout $t \in I$, i_t est un paramétrage du disque stable D_t^k et $i_t(A_0 \cap (\mathbf{R}^k \times 0_{\mathbf{R}^{n-k}})) \subset \{\phi < \epsilon\}$. Chaque disque stable $D_t^k \subset W$ est J_t-totalement réel ; en effet, il est isotrope pour $\mathrm{d}\lambda_t^0$ qui est compatible avec J_t. On étend i en une application $i : I \times D_0 \to W$ telle que chaque i_t est un plongement J_t-totalement réel (quitte à diminuer $\eta > 0$).

Approximation analytique réelle des sphères descendantes : On note $D := \{|x| < 4 \text{ et } |x'| < \eta\}$, $A := \{2 < |x| < 4 \text{ et } |x'| < \eta\}$, $I_- := [0, 1 - \delta/4[\subset I$ et $I_0 :=]1 - \delta/2, 1 - \delta/4[\subset I_-$. D'après le lemme 3.29, il existe une approximation lisse $i^1 : I \times D_0 \to W$ de i telle que l'application

$$i^1|_{(I_- \times A) \cup (I_0 \times D)} : (I_- \times A) \cup (I_0 \times D) \to U_0 \tag{3.2}$$

est analytique réelle et $i^1 = i$ sur $(I \times \mathrm{Op}\,\partial D_0) \cup (]1-\delta/5, 2] \times D_0)$. On choisit cette approximation suffisamment fine en topologie $\mathcal{C}^1$ de sorte que, pour tout $t \in I$, l'application i^1_t soit un plongement J_t-totalement réel.

Complexification des sphères descendantes : On prend un réel $\rho > 0$, on note $A^{\mathbf{C}} := \{x + iy \in \mathbf{C}^n, x \in A \text{ et } |y| < \rho\}$ et $D^{\mathbf{C}} := \{x \in D \text{ et } |y| < \rho\}$. Pour tout $t \in I_-$, le plongement $i^1_t|_A$ est J_t-totalement réel et analytique réel donc, quitte à diminuer $\rho > 0$, il s'étend en une application J_t-holomorphe $i^{\mathbf{C}}_t : A^{\mathbf{C}} \to W$ (voir par exemple le lemme 5.40 de [CE12]). De même, pour tout $u \in I_0$, le plongement J_u-totalement réel et analytique réel $i^1_u : D \to W$ se complexifie en une application J_u-holomorphe $i^{\mathbf{C}}_u : D^{\mathbf{C}} \to W$. L'application $i^{\mathbf{C}} : (I_- \times A^{\mathbf{C}}) \cup (I_0 \times D^{\mathbf{C}}) \to W$ ainsi définie est analytique réelle.

Recollement de l'anse au bord inférieur : On pose les rétrécissements $A' := \{3 < |x| < 4 \text{ et } |x'| < \eta\} \subset A$, $A'^{\mathbf{C}} := \{x \in A' \text{ et } |y| < \rho\}$ et $I'_0 :=]1-\delta/3, 1-\delta/4[\subset I_0$. On montre ci-dessous qu'il existe une application lisse

$$i' : I_- \times D^{\mathbf{C}} \to W$$

telle que i'_t est un plongement, $i'_t = i^{\mathbf{C}}_t$ sur $D \cup (A')^{\mathbf{C}}$ et, pour tout $u \in I'_0$, $i'_u = i^{\mathbf{C}}_u$ sur $D^{\mathbf{C}}$. Tout d'abord, pour tout $t \in I_-$, $\mathrm{d}i^1_t|_D$ s'étend par J_t-linéarité en une section s_t du fibré vectoriel $\mathrm{Iso}(TD^{\mathbf{C}}|_D, i^\star_t(TW)) \to D$ (s_t est un isomorphisme car i^1_t est J_t-totalement réel) ; cette section s_t coïncide avec celle induite par $\mathrm{d}i^{\mathbf{C}}_t|_A$ et, pour tout $u \in I_0$, avec celle induite par $\mathrm{d}i^{\mathbf{C}}_u|_D$. A présent, il existe une application $i' : I_- \times D^{\mathbf{C}} \to W$ telle que $i' = i^{\mathbf{C}}$ sur $(I_- \times A'^{\mathbf{C}}) \cup (I'_0 \times D^{\mathbf{C}})$ et $\mathrm{d}i'_t$ induit la section s_t (voir le «deuxième théorème d'isotopie et de plongement» dans [Cer61], p.318) ; c'est l'application désirée.

Quitte à choisir l'approximation i^1 construite en (3.2) assez $\mathcal{C}^0$-fine et à diminuer $\eta, \rho > 0$, on peut prendre une valeur $0 < \epsilon'' < \epsilon$ tel que, pour tout $t \in I_-$,

$$\phi|_{i^1_t(D_0 \setminus D)} < \epsilon'' < \phi|_{i'_t(D^{\mathbf{C}} \setminus A'^{\mathbf{C}})}. \tag{3.3}$$

D'après l'inégalité de gauche dans (3.3), $i'_t(D^{\mathbf{C}}) \cap \{\phi < \epsilon''\}$ est un voisinage ouvert de $i^1_t(D_0) \cup \partial_- W$. On montre ici que l'application i' vérifie les propriétés 2. et 3. Pour tout $t \in I_-$, $i'_t|_{i'^{-1}_t(\{\phi<\epsilon''\})}$ est holomorphe (car $i'^{-1}_t(\{\phi < \epsilon''\}) \subset A'^{\mathbf{C}}$ d'après l'inégalité de droite dans (3.3)) et, pour tout $u \in I'_0$, i'_u est holomorphe. La carte $I_- \times D^{\mathbf{C}} \ni (t, z) \mapsto (t, i'_t(z)) \in I \times W$ de $I \times W$, nommée abusivement i', vérifie $\mathrm{pr}_1 \circ i' = \mathrm{pr}_1$. De plus, la restriction de notre atlas analytique réel de U_0 à $U''_0 := (I \times \{\phi < \epsilon''\}) \cup (]1-\delta/3, 2] \times W)$ est compatible avec cette carte ; en effet $i'^{-1}(U''_0) \subset (I_- \times A'^{\mathbf{C}}) \cup (I'_0 \times D^{\mathbf{C}})$ (puisque on a déjà vu que $i'^{-1}_t(\{\phi < \epsilon''\}) \subset A'^{\mathbf{C}}$) donc $i'|_{i'^{-1}(U_0)} : (t, z) \mapsto (t, i^{\mathbf{C}}_t(z))$ et est ainsi analytique réelle.

Retour sur l'approximation analytique réelle : Il reste à modifier l'application i' de sorte à ce que chaque $i'_t(D^{\mathbf{C}}) \cap \mathrm{Op}\,\partial_- W$ soit un voisinage du disque stable lisse D^k_t. Pour ce faire on prend une famille $(g_t)_{t \in I}$ de difféomorphismes de W telle que, pour tout $t \in I$, $g_t \circ i^1_t = i_t$, $g_t = \mathrm{Id}$ sur $\mathrm{Op}\,\partial W$ et $g_u = \mathrm{Id}$ pour $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$. On note $g : I \times W \ni (t, p) \mapsto (t, g_t(p)) \in I \times W$. D'après les propriétés de la famille (g_t), $j = g \circ i'$ est l'application voulue.

□

On énonce ci-dessous une version du théorème d'existence 1-paramétrique de structures de Stein de Cieliebak-Eliashberg (théorème 13.6 dans [CE12]).

Théorème 3.31. *Soit I un intervalle fermé contenant 1. Soit $(\lambda_t^0, \phi)_{t\in I}$ une famille de structures de Weinstein sur un cobordisme W et $(J_t^0)_{t\in I}$ une famille lisse de structures presque complexes sur W telle que chaque J_t est compatible avec $\mathrm{d}\lambda_t^0$. On suppose que ϕ est une fonction de Morse ayant un unique point critique p dont on note D_t le disque stable pour le champ de Liouville $\vec{\lambda}_t^0$. On suppose que J_t^0 est intégrable au voisinage U_t de $D_t \cup \partial_- W$ si $t \in I$ et sur tout W si $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$. On suppose aussi que $(\lambda_t^0, \phi) = \mathfrak{W}(J_t^0, \phi)$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ si $t \in I$ et sur tout W si $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$. Alors, il existe un difféomorphisme croissant v de $\mathbf{R}$, une famille $(\lambda_t^s, v \circ \phi)_{t\in I, s\in[0,1]}$ de structures de Weinstein sur W et une famille lisse $(h_t)_{t\in I}$ de plongements $W \to W$ avec les propriétés suivantes :*

- *$h_t(W) \subset U_t$;*
- *$(\lambda_t^1, v \circ \phi) = \mathfrak{W}(h_t^\star J_t^0, v \circ \phi)$;*
- *$h_u = \mathrm{Id}$ et $\lambda_u^s = \lambda_u^0$ pour $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$;*
- *$v|_{\mathrm{Op}\,\phi(\partial_- W)} = \mathrm{Id}$ et, au voisinage de $\partial_- W$, $h_t = \mathrm{Id}$ et $\lambda_t^s = \lambda_t^0$.*

Esquisse de démonstration. On suit les étapes «Step 2» et «Step 3» de la preuve du théorème 13.6 de [CE12] (p. 281).

L'assertion suivante est démontrée dans «Step 2» : il existe une famille $(\lambda_t^s, \phi_t^s)_{t\in I, s\in[0,1]}$ de structures de Weinstein sur W avec les propriétés suivantes :

- au voisinage U_t' de $D_t \cup \partial_- W$, $(\lambda_t^1, \phi_t^1) = \mathfrak{W}(J_t^0, \phi)$;
- hors d'un ouvert $U_t' \subset U_t'' \subset U \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(t)$ et au voisinage de $\partial_- W$, $(\lambda_t^s, \phi_t^s) = (\lambda_t^0, \phi)$;
- ϕ_t^s a pour unique point critique p et $\phi_t^s = \phi$ sur D_t ;
- pour $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$, $(\lambda_u^s, \phi_u^s) = (\lambda_u^0, \phi)$ sur W.

En appliquant une version 1-paramétrique du lemme 3.26 aux fonctions ϕ_t^s sur le cobordisme W, on construit une famille de difféomorphismes (f_t^s) de W telle que $\phi_t^s \circ f_t^s = \phi$ et $f_t^0 = \mathrm{Id}$. La preuve de ce lemme garantit les conditions $f_t^s|_{D_t \cup \mathrm{Op}\,\partial W} = \mathrm{Id}$ et, pour tout $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$, $f_u^s = \mathrm{Id}$. La famille de structures de Weinstein $((f_t^s)^\star \lambda_t^s, \phi)_{t\in I, s\in[0,1]}$ relie alors $(\lambda_t^0, \phi)_{t\in I}$ à une famille qui coïncide avec $\mathfrak{W}((f_t^1)^\star J_t^0, \phi)$ au voisinage de $D_t \cup \partial_- W$.

Ainsi, il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier où $(\lambda_t^0, \phi) = \mathfrak{W}(J_t^0, \phi)$ sur le voisinage U_t de $D_t \cup \partial_- W$. On utilise à présent une version 1-paramétrique du théorème 8.5 de [CE12] relative au temps $t \geq 1$: il existe une famille de fonctions à niveaux J_t^0-convexes [2] $\phi_t : U_t \to \mathbf{R}$ avec les propriétés suivantes :

- il existe une valeur régulière $c \in]\phi(p), \phi(\partial_+ W)[$ de ϕ_t telle que le sous-niveau $\{\phi_t \leq c\}$ est un voisinage de $D_t \cup \partial_- W$ inclus dans U_t ;
- il existe une famille $(v_t)_{t\in I}$ de difféomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ telle que $\phi_t = v_t \circ \phi$ hors d'un voisinage $U_t' \subset U_t$ de D_t (resp. sur tout W dans le cas où $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$) ;
- $\phi_t = \phi$ sur un voisinage $U_t'' \subset U_t'$ de $D_t \cup \partial_- W$;
- ϕ_t a pour unique point critique p.

On prend un difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$ w_0 tel que $w_0|_{[\phi(\partial_- W), c]} = \mathrm{Id}$ et $w_0 \circ v_t(c) = \phi(\partial_+ W)$ puis un difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$ convexe w tel que les fonctions $\psi_t := w \circ w_0 \circ \phi_t$ sont J_t^0-convexes et $w|_{\mathrm{Op}\, w_0(\phi(\partial_- W))} = \mathrm{Id}$. Pour chaque $t \in I$, les fonctions ψ_t et $\psi := w \circ \phi$ coïncident au voisinage de $\partial_- W \cup D_t$, vérifient $\psi_t(\{\phi_t = c\}) = \psi(\partial_+ W)$, ont pour seul point critique p, ont des pseudogradients respectifs qui coïncident sur D_t donc, d'après le lemme 9.29 de [CE12] (cf. version de l'errata), il existe une famille de

2. une fonction à niveaux $\mathbf{C}$-convexes est une fonction dont la post-composition par un certain difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe

plongements $(h_t : W \to \{\phi_t \leq c\})_{t\in I}$ telle que $\psi_t \circ h_t = \psi$ au voisinage de $\partial W \cup D_t$ et, pour $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$, $h_u = \mathrm{Id}$. Ainsi, la fonction ψ est $h_t^\star J_t^0$-convexe. Il reste à interpoler entre la famille de Weinstein $((w' \circ \psi)\lambda_t^0, \psi)_{t\in I}$ (qui est en effet de Weinstein, car w est convexe et d'après le critère i) du lemme 12.1 de [CE12]) et la famille de Weinstein $\mathfrak{W}(h_t^\star J_t^0, \psi)_{t\in I}$ parmi des structures de Weinstein de fonction fixe égale ψ (relativement à $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ et au temps $t \geq 1$). Pour ce faire on renvoie à la fin de «Step 3». □

Avant de montrer comment le lemme 3.30 et le théorème 3.31 impliquent la proposition 3.27, on énonce sans preuve un lemme d'interpolation de structures de Weinstein sur un cobordisme sans point critique issu de [CE12] (lemme 12.7).

Lemme 3.32. *Soit W un cobordisme.*

1. *Soit (λ_1, ϕ) une structure de Weinstein sur W telle que ϕ est sans point critique. Soit $(\lambda'_t, \phi)_{t\in D^2}$ une famille de structures de Weinstein sur $\mathrm{Op}\,\partial W$ telle que $\lambda_1|_{\mathrm{Op}\,\partial W} = \lambda'_1$. Alors, il existe une famille de structures de Weinstein $(\lambda_t, \phi)_{t\in D^2}$ sur W et une famille (C_t) de constantes positives telles que $\lambda_t = \lambda'_t$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ et $\lambda_t = C_t\lambda'_t$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_+ W$.*
2. *Soit $(\lambda_t^0, \phi)_{t\in[0,1]}$ une famille de structures de Weinstein sur W telle que ϕ est sans point critique. Soit $(\lambda_t'^s, \phi)_{t\in[0,1],s\in[0,1]}$ une famille de structures de Weinstein sur $\mathrm{Op}\,\partial W$ telle que $\lambda_t^0|_{\mathrm{Op}\,\partial W} = \lambda_t'^0$. Alors, il existe une famille de structures de Weinstein $(\lambda_t^s, \phi)_{t\in[0,1],s\in[0,1]}$ sur W et une famille (C_t^s) de constantes positives telles que $\lambda_t^s = \lambda_t'^s$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_- W$ et $\lambda_t^s = C_t^s\lambda_t'^s$ sur $\mathrm{Op}\,\partial_+ W$.*

Démonstration de la proposition 3.27. On choisit des valeurs régulières $\phi(\partial_- W) = c_1 < c_2 < \cdots < c_N = \phi(\partial_+ W)$ de la fonction de Morse excellente $\phi : W \to \mathbf{R}$ telles que ϕ a exactement un point critique sur chaque $\{c_k \leq \phi \leq c_{k+1}\}$. On montre le résultat par récurrence sur $\{\phi \leq c_k\}$.

On suppose qu'il existe un difféomorphisme croissant v^1 de $\mathbf{R}$, une famille $(\lambda_t^s, v^1 \circ \phi)_{t\in I,s\in[0,1]}$ de structures de Weinstein sur le cobordisme $\{\phi \leq c_k\}$ et une famille analytique réelle (J_t^1) de structures complexes sur $I \times \{\phi \leq c_k\}$ avec les trois propriétés de la proposition 3.27.

On prend une valeur régulière $c_k^- < c_k$ telle que ϕ n'a pas de valeur critique sur $[c_k^-, c_k]$. Il existe une extension de la famille de structures de Weinstein $(\lambda_t^s, v^1 \circ \phi)|_{\{\phi\leq c_k^-\}}$ à W ; en effet, d'après le lemme 3.32.2, il existe une famille de structures de Weinstein $(\tilde{\lambda}_t^s, v^1 \circ \phi)$ sur $\{c_k^- \leq \phi \leq c_k\}$ et une famille de constantes $C_t^s > 0$ telles que :

— $\tilde{\lambda}_t^0 = \lambda_t^0$ et, pour tout $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$, $\tilde{\lambda}_u^s = \lambda_u^s$;

— sur $\mathrm{Op}\{\phi = c_k^-\}$, $\tilde{\lambda}_t^s = \lambda_t^s$ et, sur $\mathrm{Op}\{\phi = c_k\}$, $\tilde{\lambda}_t^s = C_t^s\lambda_t^s$.

La famille $(\tilde{\lambda}_t^s, v^1 \circ \phi)$ s'étend alors en l'extension désirée.

On choisit une famille $(\tilde{J}_t^1)_{t\in I}$ de structures presque complexes sur W telle que $\tilde{J}_t^1$ est compatible avec $\mathrm{d}\tilde{\lambda}_t^1$ et $\tilde{J}_t^1 = J_t^1$ sur $\mathrm{Op}\{\phi \leq c_k^-\}$ (resp. sur tout W dans le cas où $t \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$).

On applique alors le lemme 3.30 puis le théorème 3.31 à la famille de structures de Weinstein $(\tilde{\lambda}_t^1, v^1 \circ \phi)_{t\in I}$ et à la famille de structures presque complexes $(\tilde{J}_t^1)$ sur le cobordisme $\{c_k^- \leq \phi \leq c_{k+1}\}$. On obtient ainsi un difféomorphisme croissant v^2 de $\mathbf{R}$, une famille de structures de Weinstein $(\lambda_t^s, v^2 \circ v^1 \circ \phi)_{t\in I,s\in[1,2]}$ sur le cobordisme $\{\phi \leq c_{k+1}\}$, une famille analytique réelle de structures complexes (J_t^2) au voisinage U de $(I \times \{\phi \leq$

$c_k\}) \cup (I \cap \mathbf{R}_{\geq 1}) \times \{\phi \leq c_{k+1}\}$ et une famille de plongements $(h_t : W \to U \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(t))_{t \in I}$ avec les trois propriétés suivantes :

— $(\lambda_t^2, v^2 \circ v^1 \circ \phi) = \mathfrak{W}(h_t^\star J_t^2, v^2 \circ v^1 \circ \phi)$;

— $h_u^\star J_u^2 = \tilde{J}_u^1$ et $\lambda_u^s = \tilde{\lambda}_u^1$ pour tout $u \in \mathrm{Op}(I \cap \mathbf{R}_{\geq 1})$ et pour tout $s \in [1,2]$;

— $v^2|_{\mathrm{Op}\,\mathbf{R}_{\leq v^1(c_k^-)}} = \mathrm{Id}$ et, sur $\mathrm{Op}\{\phi \leq c_k^-\}$, $h_t = \mathrm{Id}$, $J_t^2 = J_t^1$ et $\lambda_t^s = \lambda_t^1$ pour tout $s \in [1,2]$.

La famille $(h_t^\star J_t^2)$ est analytique réelle sur $I \times \{\phi \leq c_{k+1}\}$ (car c'est le rappel par le plongement $I \times W \ni (t,p) \mapsto (t, h_t(p)) \in I \times W$ de la famille analytique réelle de structures complexes $(J_t^2|_{h_t(W)})$). On obtient finalement la famille de Weinstein désirée sur $\{\phi \leq c_{k+1}\}$ en concaténant $(\tilde{\lambda}_t^s, v^2 \circ v^1 \circ \phi)_{t \in I, s \in [0,1]}$ et $(\lambda_t^s, v^2 \circ v^1 \circ \phi)_{t \in I, s \in [1,2]}$. Ceci achève la récurrence. $\square$

Bibliographie

[AS95] U. Angehrn et Y.T. Siu. Effective freeness and point separation for adjoint bundles. *Invent. Math.* **122** (1995), no. 2, 291–308.

[AGM01] D. Auroux, D. Gayet et J.-P. Mohsen. Symplectic hypersurfaces in the complement of an isotropic submanifold. *Math. Ann.* **321** (2001), 739–754.

[AMP05] D. Auroux, V. Muñoz et F. Presas. Lagrangian submanifolds and Lefschetz pencils. *J. Sympl. Geom.* **3** (2005), 171–219.

[AN62] A. Andreotti et R. Narasimhan. A topological property of Runge pairs. *Ann. of Math.* **76** (1962), 499–509.

[BW59] F. Bruhat et H. Whitney. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels. *Commentarii mathematici Helvetici* **33** (1959) : 132–160.

[Cer61] J. Cerf. Topologie de certains espaces de plongements. *Bulletin de la S.M.F.* **89** (1961), 227–380.

[CE12] K. Cieliebak et Y. Eliashberg. *From Stein to Weinstein and Back – Symplectic Geometry of Complex Affine Manifolds.* Colloq. Publ. **59**, Amer. Math. Soc., 2012. Errata in www.ams.org/publications/authors/books/postpub/coll-59-errata.pdf

[CM17] K. Cieliebak et K. Mohnke. Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings. *Invent. math.* (2017) (doi.org/10.1007/ s00222-017-0767-8).

[Dem92] J.-P. Demailly. Singular hermitian metrics on positive line bundles. *Complex algebraic varieties* (Bayreuth, 1990), 87–104, Lecture Notes in Math., 1507, Springer, Berlin, 1992.

[Dem96] J.-P. Demailly. Effective bounds for very ample line bundles. *Invent. Math.* **124** (1996), 243–261.

[Dem00] J.-P. Demailly. Méthodes L2 et résultats effectifs en géométrie algébrique. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998-99. *Astérisque* **266** (2000), Exp. No. 852, 3, 59–90.

[Dem12] J.-P. Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry.* Preprint 2012, Inst. Fourier, Grenoble (www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook).

[Don96] S. K. Donaldson. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *J. Diff. Geom.* **44** (1996), 666–705.

[Don00] S. K. Donaldson. Polynomials, vanishing cycles and Floer homology. In *Mathematics : frontiers and perspectives*, 55–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[DS95] J. Duval et N. Sibony. Polynomial convexity, rational convexity, and currents. *Duke Math. J.* **79** (1995) ,487–513.

[Eck17] T. Eckl. Kähler packings and Seshadri constants on projective complex surfaces. *Differential Geom. Appl.* **52** (2017), 51–63.

[EGL15] Y. Eliashberg, S. Ganatra et O. Lazarev. *Flexible Lagrangians.* Preprint 2015 (arXiv.org/abs/1510.01287).

[Eli90] Y. Eliashberg. Topological characterization of Stein manifolds of dimension >2. *Internat. J. Math.* **1** (1990), no. 1, 29–46.

[Gir02] E. Giroux. Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* Vol. II (Beijing, 2002) Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 405–414.

[Gir18] E. Giroux. *Remarks on Donaldson's symplectic submanifolds.* Preprint 2018 (arxiv.org/abs/1803.05929).

[GP17] E. Giroux et J. Pardon. Existence of Lefschetz fibrations on Stein and Weinstein domains. *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 2, 963–997.

[Gra58] H. Grauert. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.* **135** (1958), 263–273.

[Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.* **82** (1985), no. 2, 307–347.

[Gue99] V. Guedj. Approximation of currents on complex manifolds. *Math. Ann.* **313** (1999), 437–474.

[HW68] L. Hörmander et J. Wermer. Uniform approximation on compact sets in $\mathbf{C}^n$. *Math. Scand.* **223** (1968), 5–21.

[MP94] D. McDuff et L. Polterovich. Symplectic packings and algebraic geometry (with an Appendix by Y. Karshon). *Invent. Math.* **115.3** (1994), 405-430.

[Moh18] J.-P. Mohsen. *Construction of negatively curved complete intersections.* Preprint 2018 (arxiv.org/abs/1805.10411)

[Nad90] A. M. Nadel. Multiplier Ideal Sheaves and Kahler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature. *Ann. of Math.* **132.3** (1990), 549–596.

[Oka39] K. Oka. Sur les fonctions des plusieurs variables. III : Deuxième problème de Cousin. *J. Sc. Hiroshima Univ.* **9** (1939), 7–19.

[Ric68] R. Richberg. Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. *Math. Ann.* **175** (1968) 257–286.

[Sei03] P. Seidel. A long exact sequence for symplectic Floer cohomology. *Topology* **42** (2003), 1003-1063.

[Sei08] P. Seidel. *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, Zürich, 2008.

[Siu93] Y.T. Siu. An effective Matsusaka big theorem. *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), no. 5, 1387–1405.

[The99] D. Théret. A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions. *Topology Appl.* **96** (1999), no. 3, 249–266.

[Thu97] W. P. Thurston. *Three–Dimensional Geometry and Topology.* Princeton Math. Ser. **35**, S. Levy ed., Princeton Univ. Press, 1997.

[Ver18] A. Vérine. *Bohr-Sommerfeld Lagrangian submanifolds as minima of convex functions.* Preprint 2018 (arxiv.org/abs/1803.07162)

[Wei95] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[Whi34] H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 63-89 .

Abstract :

Symplectic geometry and complex geometry are closely related, in particular by Donaldson and Auroux's asymptotically holomorphic techniques and by Eliashberg and Cieliebak's work on pseudoconvexity. The work presented in this thesis is motivated by these two connections.

We first give the following symplectic characterisation of Seshadri constants. In a complex manifold, the Seshadri constant of an integral Kähler class at a point is the upper bound on the capacities of standard balls admitting, for some Kähler form in this class, a codimension 0 holomorphic and iso-Kähler embedding centered at this point. This criterion was known by Eckl in 2014 ; we give a different proof of it.

The second part is motivated by Donaldon's following question : 'Is every Lagrangian sphere of a complex projective manifold a vanishing cycle of a complex deformation to a variety with a conical singularity ?' On the one hand, we present every closed Lagrangian submanifold of a closed symplectic/Kähler manifold whose relative periods are integers as the lowest level set of a 'convex' exhaustion defined on the complement of a symplectic/complex hyperplane section. In the Kähler setting 'complex' means strictly plurisubharmonic while in the symplectic setting it refers to the existence of a Liouville pseudogradient. On the other hand, we prove that any Lagrangian sphere of a Stein domain which is the lowest level-set of a 'convex' function is a vanishing cycle of some complex deformation over the disc to a variety with a conical singularity.

Résumé :

La géométrie symplectique et la géométrie complexe sont intimement liées, en particulier par les techniques asymptotiquement holomorphes de Donaldson et Auroux d'une part et par les travaux d'Eliashberget et Cieliebak sur la pseudoconvexité d'autre part. Les travaux présentés dans cette thèse sont motivés par ces deux liens.

On donne d'abord la caractérisation symplectique suivante des constantes de Seshadri. Dans une variété complexe, la constante de Seshadri d'une classe de Kähler entière en un point est la borne supérieure des capacités de boules standard admettant, pour une certaine forme de Kähler dans cette classe, un plongement holomorphe et iso-Kähler de codimension 0 centré en ce point. Ce critère était connu de Eckl en 2014 ; on en donne une preuve différente.

La deuxième partie est motivée par la question suivante de Donaldson : «Toute sphère lagrangienne d'une variété projective complexe est-elle un cycle évanescent d'une déformation complexe vers une variété à singularité conique ?» D'une part, on présente toute sous-variété lagrangienne close d'une variété symplectique/kählérienne close dont les périodes relatives sont entières comme lieu des minima d'une exhaustion «convexe» définie sur le complémentaire d'une section hyperplane symplectique/complexe. Dans le cadre kählérien, «convexe» signifie strictement plurisousharmonique tandis que dans le cadre symplectique, cela signifie de Lyapounov pour un champ de Liouville. D'autre part, on montre que toute sphère lagrangienne d'un domaine de Stein qui est le lieu des minima d'une fonction «convexe» est un cycle évanescent d'une déformation complexe sur le disque vers un domaine à singularité conique.