



HAL
open science

Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide-structure non linéaire. Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale

Jean-François Sigrist

► **To cite this version:**

Jean-François Sigrist. Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide-structure non linéaire. Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes (UNAM), 2004. Français. NNT: . tel-01936834

HAL Id: tel-01936834

<https://theses.hal.science/tel-01936834>

Submitted on 27 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2004

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

***Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

JEAN-FRANÇOIS SIGRIST

le 26 novembre 2004

à l'Ecole Centrale de Nantes

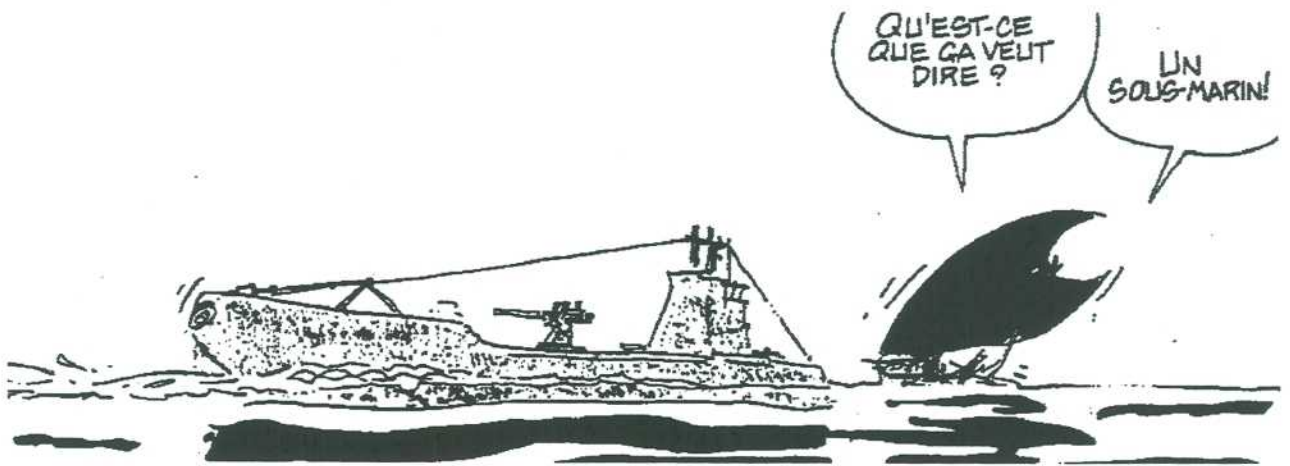
**MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE D'UN PROBLEME COUPLE FLUIDE/STRUCTURE NON LINEAIRE.
APPLICATION AU DIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES NUCLEAIRES DE PROPULSION NAVALE**

JURY

Président :	Donatien LE HOUËDEC – Professeur, Ecole Centrale de Nantes
Rapporteurs :	Roger OHAYON – Professeur, CNAM Paris M'Hamed SOULI – Professeur, Université de Lille
Examineurs :	Bernard PESEUX – Professeur, Ecole Centrale de Nantes Christian LAINE – Docteur-Ingénieur, DCN Propulsion Maxime LEBEAU – Directeur du Développement et de l'Ingénierie, DCN Propulsion
Invités :	François AXISA – Conseiller Scientifique, ENSTA Daniel BROCC – Ingénieur de Recherche, CEA Saclay Philippe THEVENIN – Ingénieur, DCN (Technologie et Innovation)

" Si tout est danger sur un de vos navires soumis au hasard de l'océan (...), à bord du Nautilus, le coeur de l'homme n'a plus rien à redouter. (...) Voilà le navire par excellence! Et s'il est vrai que l'ingénieur ait plus de confiance dans le bâtiment que le constructeur, et le constructeur plus que le capitaine lui-même, comprenez avec quel abandon je me fie à mon Nautilus, puisque j'en suis à la fois le capitaine, le constructeur et l'ingénieur! "

JULES VERNE - *Vingt mille lieues sous les mers* - Hetzel, 1869



HUGO PRATT - *La ballade de la mer salée* - Casterman, 1975

Remerciements

La soutenance d'une thèse est l'aboutissement d'un long travail personnel d'analyse, de développement et de synthèse. Sa réalisation n'aurait cependant pas été possible sans la contribution et le soutien des différentes personnes que je tiens à remercier ici.

Je souhaite commencer ces remerciements en témoignant à mon collègue et ami Christian LAINÉ toute ma gratitude : son implication constante, ses conseils judicieux, sa confiance entière (et bien d'autres choses encore...) m'ont permis de mener à bien ce travail de recherche et au-delà de trouver une motivation très forte dans ma vie professionnelle.

Je tiens à remercier Monsieur Philippe THÉVENIN pour le soutien apporté au niveau de la Direction Technique de DCN à ma démarche de formation par la recherche, pour son implication dans le suivi de cette étude et pour sa présence dans le jury. Je souhaite également évoquer la mémoire de Monsieur Louis LE GUEN, qui a contribué à la mise en place de ce projet à la Direction Technique de DCN.

Je remercie ensuite Bernard PESEUX pour avoir encadré cette thèse, m'initiant ainsi aux méthodes de simulation numérique de problèmes couplés, et pour m'avoir fait confiance dans la conduite de ces travaux de recherche, compte tenu du contexte particulier dans lequel ils se sont déroulés.

Je remercie Messieurs François AXISA, Roger OHAYON et M'hamed SOULI pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail en acceptant la tâche de rapporteur, pour le temps qu'ils m'ont accordé et pour les conseils qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie Monsieur Donatien LE HOUËDEC d'avoir accepté d'assumer la tâche de président du jury, malgré un délai de lecture de mon mémoire extrêmement serré.

Je remercie Monsieur Maxime LEBEAU, Directeur du Développement et de l'Ingénierie à DCN Propulsion, pour sa participation dans le jury de thèse et la confiance qu'il m'a accordée pour mener à bien cette étude en parallèle de mes activités d'ingénieur à DCN Propulsion.

Je remercie Monsieur Christophe LE BIGOT, Chef du Service Technique et Scientifique de DCN Propulsion, pour la liberté qu'il m'a octroyée dans l'organisation de mon travail au sein du service.

Les séances de travail autour des problèmes d'interactions fluide/structure avec Daniel BROU au CEA Saclay ont été l'occasion d'échanges scientifiques et humains extrêmement enrichissants et chaleureux. Je le remercie vivement d'avoir été présent dans mon jury de thèse, et j'espère apprendre encore beaucoup en travaillant avec lui!

Xavier BOISSIÈRE et Dominique LEMOINE, mes collègues au sein du Service Technique et Scientifique, ont toujours répondu à mes questions relatives à leur domaine de spécialité, et m'ont transmis la passion du métier, dans une ambiance de travail toujours conviviale, un grand merci à eux!

Serge DEFAY, pour son introduction aux techniques numériques de traitement du signal, Thierry PAGEAUD pour son efficacité dans la commande d'articles et d'ouvrages scientifiques et François CORRE pour sa disponibilité au quotidien, ont aussi contribué à la réussite de ce projet.

Je n'oublie pas Lydia JOUHANNET qui assure dans la bonne humeur tout le travail logistique d'organisation de mes missions, élément indispensable dans la conduite d'un travail de R&D.

Christelle, Antoine, Cédric et Vincent ont largement participé à cette thèse en réalisant une partie non négligeable des tâches de développement numérique : je partage donc avec eux les retours positifs formulés sur mon travail... Je leur adresse tous mes vœux de réussite dans l'aventure qu'ils entreprennent! Merci également aux stagiaires Laurent, Sylvain et Thomas.

Un merci amical à Arnaud et Arnaud pour leur lecture du mémoire!

Enfin, j'ai une pensée très particulière pour mes parents et pour mes amis, tout particulièrement Nathalie et Christophe, qui m'ont soutenu dans mes moments de doute, m'ont écouté parler de mon métier et qui, je l'espère, en auront découvert avec intérêt certains aspects lors de la soutenance.

Table des matières

Avant-propos	13
Notations	15
Introduction	19
1 Modélisation du problème couplé	27
1.1 Problème générique d'étude	27
1.2 Equations du problème couplé	32
1.2.1 Cas linéaire : problème aux valeurs propres	32
1.2.2 Cas non linéaire : problème d'évolution	34
1.3 Analyse mathématique des équations du problème couplé	36
2 Résolution du problème aux valeurs propres	43
2.1 Discrétisation du problème structure	44
2.2 Discrétisation du problème fluide	45
2.2.1 Eléments finis	45
2.2.2 Equation intégrale	47
2.2.2.1 Principe de la méthode	47
2.2.2.2 Application au problème fluide	49
2.3 Couplage des problèmes	50
2.3.1 Couplage éléments finis/éléments finis	51
2.3.2 Couplage éléments finis/équation intégrale	52
2.4 Formulation du problème modal	56
2.4.1 Problème couplé avec ballonnement fluide	56
2.4.2 Problème couplé sans ballonnement fluide	57
2.5 Algorithme de résolution du problème modal non symétrique	57
3 Résolution du problème d'évolution	61
3.1 Principes de résolution d'un problème couplé fluide/structure	61
3.2 Résolution du problème fluide	65
3.2.1 Discrétisation des équations du problème fluide : méthode des volumes finis	65
3.2.2 Gestion du couplage pression/vitesse : algorithme PISO	70
3.2.3 Maillage mobile, formulation ALE	71
3.2.4 Modélisation de la surface libre	73
3.3 Résolution du problème structure	75
3.3.1 Discrétisation éléments finis	75
3.3.2 Algorithmes d'intégration temporelle	80

3.3.2.1	Méthode explicite	81
3.3.2.2	Méthode implicite	82
3.3.2.3	Méthode mixte	83
3.4	Couplage des problèmes	86
3.4.1	Couplage en temps	86
3.4.1.1	Couplage explicite	86
3.4.1.2	Filtrage numérique des efforts fluide	88
3.4.2	Couplage en espace	91
3.4.2.1	Gestion des incompatibilités de maillage	91
3.4.2.2	Algorithme de remaillage du problème fluide	94
4	Validations élémentaires du code fluide	101
4.1	Ballotement d'un fluide contenu dans un réservoir axi-symétrique	102
4.1.1	Position du problème	102
4.1.2	Calcul du coefficient d'effort fluide	103
4.2	Oscillations d'un cylindre rigide dans un espace annulaire fluide	110
4.2.1	Position du problème	110
4.2.2	Calcul des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés	113
4.3	Couplage fluide/structure en milieu fluide incompressible confiné	121
4.3.1	Problème linéaire	122
4.3.2	Problème non linéaire	125
5	Application des méthodes numériques	129
5.1	Etude du problème couplé fluide/structure générique	129
5.1.1	Analyse modale	129
5.1.1.1	Masse ajoutée et masse déplacée	130
5.1.1.2	Couplage de modes	133
5.1.2	Analyse temporelle	139
5.1.2.1	Etude linéaire	139
5.1.2.2	Etude non linéaire	141
5.2	Etude d'un problème couplé fluide/structure industriel	144
	Conclusion	167
	Annexes	i
	A Solutions analytiques	i
A.1	Poutre élastique couplée avec un fluide confiné	i
A.2	Ballotement fluide dans un espace confiné	v
	B Calcul numérique des coefficients des matrices D et S	vii
	C Résultats numériques	xi
C.1	Algorithme de Lanczos	xi
C.2	Calcul de modes propres	xii
	D Organisation de la procédure de calcul couplé	xv

E Propulsion navale nucléaire	xix
E.1 Définitions des principaux éléments	xix
E.2 Fonctionnement d'une chaufferie nucléaire	xx
Table des figures	xxv
Liste des tableaux	xxviii
Bibliographie	xxix

Avant-propos

Le présent mémoire expose le travail de recherche réalisé en vue de l'obtention du Doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes. Cette étude a été menée au sein du Service Technique et Scientifique de DCN Propulsion, en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Structures de l'Ecole Centrale de Nantes, dans le cadre d'une formation par la Recherche.

Ce travail est avant tout celui d'un ingénieur de bureau d'études, confronté à la problématique de modélisation de systèmes couplés fluide/structure et à son application à des projets industriels. L'appréhension de ce type de problèmes requiert une approche généraliste et multi-disciplinaire, et correspond à la philosophie générale de l'étude, conduite à l'interface entre le monde industriel et l'univers académique.

L'un des objectifs de cette thèse est de proposer un transfert des concepts et méthodes développés par le chercheur vers les préoccupations de l'ingénieur. Cette démarche, qui correspond à un besoin industriel concret, se veut également le reflet de la volonté de l'auteur d'établir des passerelles entre deux mondes qui ont beaucoup à apprendre en travaillant ensemble.

La rédaction du présent mémoire a été faite dans le but de proposer une introduction aux principes généraux de calculs couplés fluide/structure, même si certaines parties sont *a priori* d'un abord plus délicat. Puisse ce document servir de base de travail à un lecteur (étudiant, ingénieur, etc...) désirant avoir une première approche de cette problématique, avant de se tourner vers les grands ouvrages de référence sur le sujet.

Le cas d'étude générique permet de proposer un modèle simple de système mécanique couplé fluide/structure, sur lequel différentes méthodes de résolution peuvent être expérimentées ; il peut également constituer un *benchmark* de validation de codes de calcul.

Un travail de recherche étant fait pour être partagé et discuté, l'auteur est naturellement disposé à échanger, avec curiosité et plaisir, les points de vue autour de son étude.

JEAN-FRANÇOIS SIGRIST
Nantes, Décembre 2004

Notations

Notations mathématiques

$\sum_{i=1}^{i=I} x_i y_i = x_i y_i$	convention de sommation
$\{ \}$	vecteur colonne
$\langle \rangle$	vecteur ligne
$[]$	matrice
$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in [1, I]}$	vecteur de dimension I
$\mathbf{X} = (X_{i,j})_{i,j \in [1, I] \times [1, J]}$	matrice de dimension $I \times J$
T	opérateur de transposition
-1	opérateur d'inversion
$\langle x \rangle [A] \{ y \} = x_i A_{ij} y_j$	produit scalaire
$\nabla \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\}_{i \in [1, I]}$	opérateur gradient sur la fonction scalaire $\varphi(\mathbf{x})$
$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right]_{i,j \in [1, I] \times [1, J]}$	dérivée de la fonction vectorielle $\phi(\mathbf{x})$
$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$	divergence d'une fonction vectorielle $\phi(\mathbf{x})$
$\nabla \cdot \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial x_j} \right\}_{i \in [1, I]}$	divergence d'une fonction matricielle $\Phi(\mathbf{x})$
$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$	laplacien d'une fonction scalaire φ
$\Re(z), \Im(z)$	partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe z
$\epsilon(x)$	signe d'un nombre réel x
p	variable de LAPLACE
$ H(\omega) , \Phi(\omega)$	module et argument de la fonction de transfert $H(\omega)$
$\delta_{i,j}$	symbole de KRONECKER

Notations du problème structure

Ω_S	domaine structure
$\partial \Omega_S$	frontière du domaine structure
$\partial \Omega_{S_o}$	frontière du domaine structure à déplacement imposé
$\partial \Omega_{S_\sigma}$	frontière du domaine structure à effort imposé

Γ_{SF}	interface structure/fluide
\mathbf{n}_S	normale extérieure au domaine structure sur $\partial\Omega_S$
\mathbf{n}	normale intérieure au domaine structure sur Γ_{SF}
\mathbf{u}	champ de déplacement de la structure
u	déplacement en traction/compression de la structure
v	déplacement en flexion de la structure
δu	déplacement virtuel en traction/compression
δv	déplacement virtuel en flexion
ρ_S	masse volumique de la structure
E	module d'YOUNG de la structure
R	rayon de la structure
L	longueur de la structure
e	épaisseur de la structure
S	section de la structure
I	inertie de la structure
φ	effort fluide
\mathbf{M}_S	matrice masse structure
\mathbf{K}_S	matrice raideur structure
\mathbf{R}_S	vecteur d'efforts non linéaire structure
\mathbf{R}	matrice d'interaction fluide/structure
\mathbf{U}	vecteur des degrés de liberté structure en traction/compression
\mathbf{V}	vecteur des degrés de liberté structure en flexion
$\{U_i\}$	vecteur élémentaire des degrés de liberté structure en traction/compression
$\{V_i\}$	vecteur élémentaire des degrés de liberté structure en flexion
$\langle N_u \rangle$	vecteur des fonctions de forme des degrés de liberté structure en traction/compression
$\langle N_v \rangle$	vecteur des fonctions de forme des degrés de liberté structure en flexion
N_u^i	fonction de forme élémentaire des degrés de liberté structure en traction/compression
N_v^i	fonction de forme élémentaire des degrés de liberté structure en flexion
$[\Lambda_S^i]$	matrice de localisation des degrés de liberté de l'élément fini structure

Notations du problème fluide

Ω_F	domaine fluide
$\partial\Omega_F$	frontière du domaine fluide
$\partial\Omega_{F_0}$	frontière du domaine fluide à pression imposée
$\partial\Omega_{F_\pi}$	frontière du domaine fluide à gradient de pression imposé
Γ_{FS}	interface fluide/structure
\mathbf{n}_F	normale extérieure au domaine fluide sur $\partial\Omega_F$
\mathbf{n}	normale extérieure au domaine fluide sur Γ_{FS}
$\mathbf{v} = (v_i)$	champ de vitesse du fluide
p	champ de pression du fluide
δp	champ de pression virtuelle

$\sigma_{\mathbf{v},p}$	champ de contrainte dans le milieu fluide
ρ_F	masse volumique du fluide
μ	viscosité du fluide
R'	rayon du fluide
H	hauteur du fluide
\mathbf{M}_F	matrice masse fluide
\mathbf{K}_F	matrice raideur fluide
\mathbf{R}^T	matrice d'interaction structure/fluide
\mathbf{P}	vecteur des degrés de liberté fluide en pression
$\{P_{n,m}\}$	vecteur élémentaire des degrés de liberté fluide en pression
$\langle N_{n,m}^F \rangle$	vecteur des fonctions de forme du degré de liberté fluide en pression
N_i^F	fonction de forme élémentaire du degré de liberté fluide en pression
$[\Lambda_F^{n,m}]$	matrice de localisation des degrés de liberté de l'élément fini fluide
σ	potentiel de simple couche
φ	potentiel de double couche
$[S]$	matrice des coefficients de simple couche
$[D]$	matrice des coefficients de double couche
s	composantes symétriques du champ de pression
a	composantes anti-symétriques du champ de pression

Nombres sans dimension

α	ratio de confinement
η	ratio d'allongement
λ	ratio de remplissage
ξ	ratio de déplacement
ϵ	ratio d'épaisseur
\mathcal{M}	nombre de masse
\mathcal{F}	nombre de FROUDE dynamique
\mathcal{S}	nombre de REYNOLDS dynamique

Introduction

Présentation du problème industriel

Le dimensionnement de structures navales militaires doit répondre aux exigences de conception prenant en compte les conditions opérationnelles sévères dans lesquelles le navire (bâtiment de surface ou sous-marin) est supposé évoluer en mission. L'exigence de tenue au choc hydrodynamique, c'est-à-dire la résistance à l'agression que constitue l'explosion d'une mine à proximité du navire (voir FIG. 1), constitue ainsi une des spécificités de la construction navale militaire.

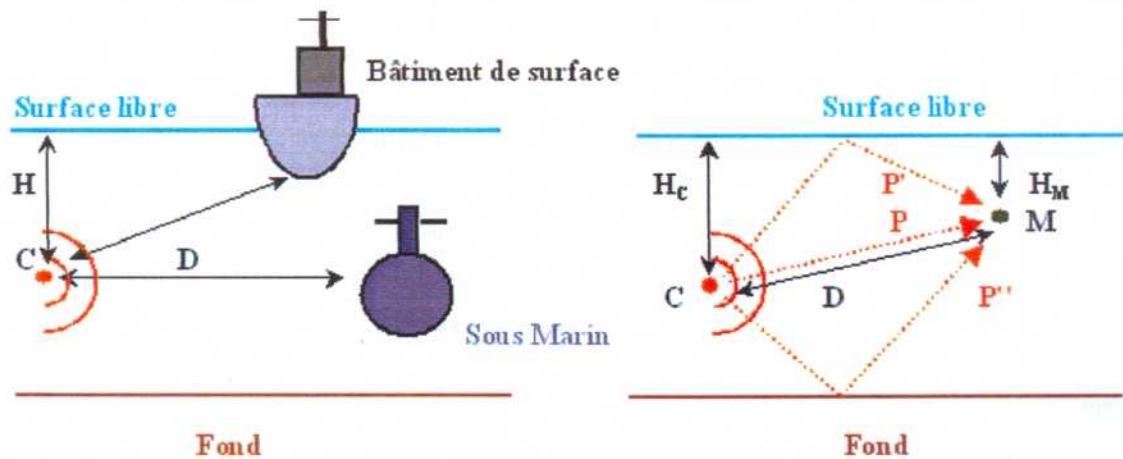


FIG. 1 – Choc sur navire par explosion sous-marine

Les phénomènes physiques caractéristiques d'une explosion sous-marine sont bien connus [27] et sont les suivants.

Onde de choc primaire La détonation de la charge explosive engendre une onde de pression sphérique à décroissance exponentielle dans le temps se propageant dans l'eau à la vitesse des ondes sonores. Le profil de pression est donné par :

$$P(t) = P_m e^{-\frac{t}{\theta}}$$

avec les caractéristiques P_m (pression maximale) et θ (temps de décroissance) données en fonction de C (masse équivalent TNT de la charge) et D (distance de la charge au point de mesure) par :

$$P_m = P_o \times \left[\frac{C^a}{D} \right]^b \quad \theta = \theta_o \times C^a \left[\frac{C^a}{D} \right]^{-c}$$

où P_o et θ_o sont les valeurs de pression et de temps dépendant de l'explosif.

Bulle de gaz L'explosion de la charge s'accompagne de la formation d'une bulle de gaz qui peut atteindre des dimensions importantes. Dans un premier temps, la forte pression des gaz permet une expansion rapide de la bulle, dont le rayon atteint sa valeur maximale R_m . La bulle se comprime sous l'effet du fluide environnant, et son rayon devient minimum. Le phénomène de croissance/décroissance se reproduit plusieurs fois, avec une période T , en se combinant avec un mouvement de migration de la bulle dans le fluide. R_m et T sont donnés par :

$$R_m = R_o \times \left[\frac{C}{H + H_o} \right]^a \quad T = T_o \times \frac{C^a}{(H + H_o)^d}$$

avec H la hauteur d'immersion de la charge, R_o et H_o étant des constantes dépendant de la nature de l'explosif¹.

Les réflexions de l'onde primaire Lorsque l'explosion se produit à grande distance de la cible, l'onde de choc peut parvenir sur cette dernière de façon directe sans atténuation notable (FIG. 1, trajet P), après réflexion sur la surface (trajet P') ou après réflexion sur le fond (trajet P''). La réflexion de l'onde acoustique est gouvernée par les lois de FRESNEL, la transmission d'énergie à la traversée des dioptries eau/air et eau/fond dépendant de l'impédance acoustique des différents milieux. Les effets de l'onde réfléchie sur la surface se font sentir principalement sur les bâtiments de surface, pour lesquels le choc transversal est en général d'intensité moindre que le choc vertical.

Un ordre de grandeur des différents paramètres définissant l'explosion sous-marine est donné dans le TAB. 1.

Paramètres	Ordre de grandeur
C	$10^2 - 10^3$ kg
R	$10^0 - 10^1$ m
H	$10^1 - 10^2$ m
θ	$10^{-1} - 10^{-2}$ s
T	10^0 s

TAB. 1 – Ordre de grandeur des caractéristiques d'une explosion sous-marine

Les effets d'une explosion sous-marine sur des structures totalement ou partiellement immergées sont différents selon le type de phénomène.

L'onde primaire vient heurter la structure immergée et la met en mouvement. Localement, la structure tend à se déformer ou à s'enfoncer ; globalement, le choc est transmis à l'intérieur de la structure. L'effet de l'onde de pression se propage tout d'abord dans les parties situées sous la ligne de flottaison, puis vers les super-structures. Compte tenu de la répartition des masses et raideurs à l'intérieur de la coque, les effets du choc sont atténués dans les super-structures et loin des bordés.

La bulle a deux effets principaux : elle engendre un violent flux d'eau et oscille en émettant des ondes de pression secondaires. Localement, le flux d'eau peut contribuer à l'enfoncement, voire à la destruction, de la structure immergée ; globalement, les oscillations basse fréquence de la bulle peuvent exciter les modes de la poutre navire et entraîner sa rupture par résonance.

¹ a , b , c et d sont des constantes caractéristiques du modèle utilisé pour décrire les effets de l'explosif, dont nous ne précisons pas ici volontairement les dimensions physiques.

La simulation des phénomènes d'explosions sous-marines [131] et de leurs effets sur des structures immergées [130] [112] constitue un domaine d'étude à part entière, nécessitant en soit la résolution d'un problème couplé fluide/structure, dans lequel le milieu fluide est infini. Si les publications dans ce domaine sont en majorité dédiées à l'étude de cas académiques [90] [96] [101] [102], les méthodes ainsi développées sont applicables à des études industrielles : la FIG. 2 donne une visualisation d'un calcul d'explosion sous-marine à proximité d'un bâtiment de surface.

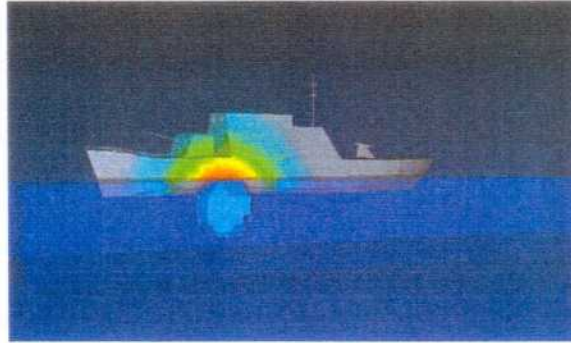


FIG. 2 – Exemple de calcul de choc hydrodynamique sur un bâtiment de surface

Les sollicitations dynamiques dues aux effets de l'onde de choc primaire et de la pulsation de bulle affectent la coque du navire et se propagent ensuite à l'intérieur du navire. Une description classique d'un choc ressenti sur un équipement interne à un navire soumis à un choc hydrodynamique est donnée par les profils temporels de déplacement, vitesse et accélération. La FIG. 3 donne un exemple de profils type d'une excitation sur un matériel embarqué¹. Le signal en accélération présente une composante haute fréquence avec un niveau d'accélération élevé, correspondant à l'impact de l'onde primaire, et une composante basse fréquence avec un niveau d'accélération plus faible, s'amortissant au cours du temps, qui correspond à l'effet de pulsation de bulle.

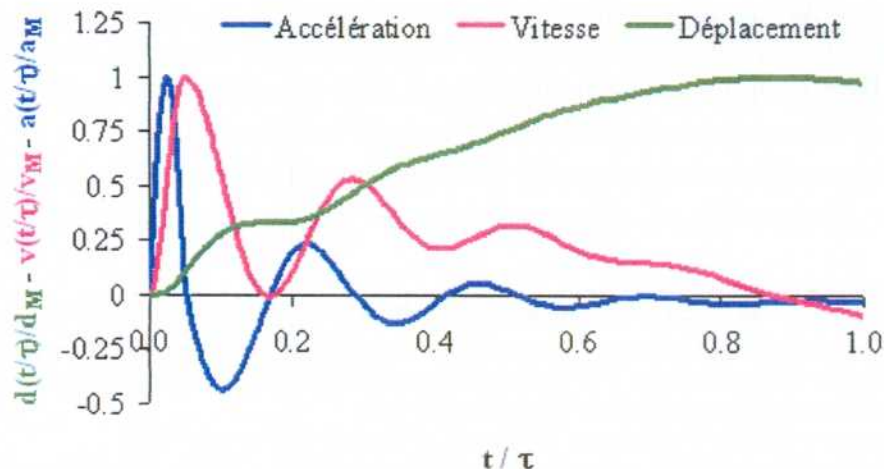


FIG. 3 – Profils temporels type d'une excitation dynamique sur un matériel embarqué

¹Les profils temporels sont adimensionnalisés et notés respectivement $a(t/\tau)/a_M$ (accélération), $v(t/\tau)/v_M$ (vitesse) et $d(t/\tau)/d_M$ (déplacement), avec a_M , v_M et d_M les valeurs maximales d'accélération, vitesse et déplacement et τ la durée du choc.

Au niveau des équipements embarqués, et en particulier les équipements d'énergie/propulsion du navire¹, nous retrouvons un grand nombre de situations où des structures mécaniques se trouvent en présence de fluide (réservoirs, échangeurs thermiques, capacités nucléaires principales ou auxiliaires), posant ainsi un problème d'interactions fluide/structure, dans lequel le milieu fluide est confiné.

Les analyses de dimensionnement de bureau d'études réalisées jusqu'à maintenant dans le domaine de la propulsion navale nucléaire tenaient compte de la présence du fluide de façon conservative, c'est-à-dire en augmentant la masse de la structure par une masse estimée de fluide participant au couplage.

Avec la formalisation des méthodes numériques appliquées aux problématiques d'interactions fluide/structure [106] et le développement de ces méthodes dans des outils de calcul scientifique généralistes [183], la prise en compte des phénomènes d'interactions fluide/structure est envisageable dans les études de dimensionnement de structures industrielles en phase de conception amont. De nombreuses études ont ainsi été conduites pour industrialiser les méthodes de calculs couplés².

Les industriels intègrent progressivement la présence du fluide dans leurs modèles de dimensionnement. Ce changement de méthodologie de calcul est rendu nécessaire par les exigences de **maîtrise des marges de dimensionnement**, qui constitue un enjeu à la fois technique et économique. Dans le processus industriel, une connaissance affinée des marges permet des gains économiques substantiels au moment de la conception détaillée et en situation de maintien en condition opérationnelle :

- *en phase de conception détaillée*, une bonne maîtrise des marges permet un dimensionnement au plus juste des structures et le gain généré dans ce cas par rapport à une structure surdimensionnée peut être important ;
- *en phase de maintien en condition opérationnelle*, une connaissance précise des marges permet de situer l'intervalle dans lequel il est pertinent de travailler et de privilégier une solution industrielle respectant à la fois les contraintes techniques et économiques pour la modification envisagée.

Un des moyens de maîtriser et d'améliorer les marges de dimensionnement est d'accroître la connaissance de la précision des outils de calculs utilisés et de prendre en compte un ensemble de phénomènes physiques de plus en plus proche de la réalité opérationnelle, en particulier les phénomènes d'interactions fluide/structure.

Une collaboration technique et scientifique a ainsi été engagée entre DCN Propulsion et le GÉM de l'Ecole Centrale de Nantes, précurseur dans le domaine de la simulation numérique de problèmes couplés, en particulier avec le développement de méthodes de résolution par équations intégrales [28] [85] [110] [114] [115] [123]. Ce travail de Recherche et Développement est engagé afin de :

- connaître le niveau de représentativité des outils de calcul existants ;
- prévoir les possibilités de couplage des méthodes pour affiner la modélisation ;
- proposer l'application de ces méthodes aux projets de propulsion navale nucléaire en cours [194] [197].

¹Nous proposons en annexe E une présentation succincte du principe de propulsion nucléaire.

²Dans le domaine nucléaire civil par exemple, nous trouvons de nombreuses références d'études prenant en compte les phénomènes de couplage fluide/structure. Une bibliographie exhaustive sur le sujet est quasiment impossible à établir ; à titre d'illustrations, nous citons par exemple les travaux suivants :

- calcul des fréquences propres d'un faisceau de tubes d'un générateur de vapeur [122] ;
- analyse dynamique d'un modèle de cœur avec description des effets de couplage fluide/structure [66] ;
- dimensionnement vis-à-vis de l'instabilité vibratoire, phénomènes de masse et amortissement ajoutés [63] [98] [107] ;
- étude des phénomènes dynamiques de couplage fluide/structure sur des éléments particuliers : tuyauteries [129], assemblages d'éléments combustibles [136], réflecteurs [108].

Démarche d'étude

La modélisation d'un système couplé fluide/structure constitue un problème *multi-physique* et *multi-disciplinaire*, ce qui en rend la compréhension physique et la résolution numérique à la fois riche et complexe. Nous appréhendons la problématique des interactions fluide/structure et son application au cas industriel qui a motivé cette étude avec la démarche d'étude représentée par la FIG. 4.

Nous nous attacherons en particulier à proposer différentes modélisations de la physique du problème fluide (modèle d'écoulement potentiel régi par l'équation de LAPLACE, modèle d'écoulement général régi par les équations de NAVIER-STOKES) et nous détaillerons les méthodes de résolution utilisées (éléments finis, équation intégrale, volumes finis). Nous étudierons alors le couplage de ces méthodes avec le problème structure, décrit avec des modèles linéaires et non linéaires simples et résolu avec une approche éléments finis.

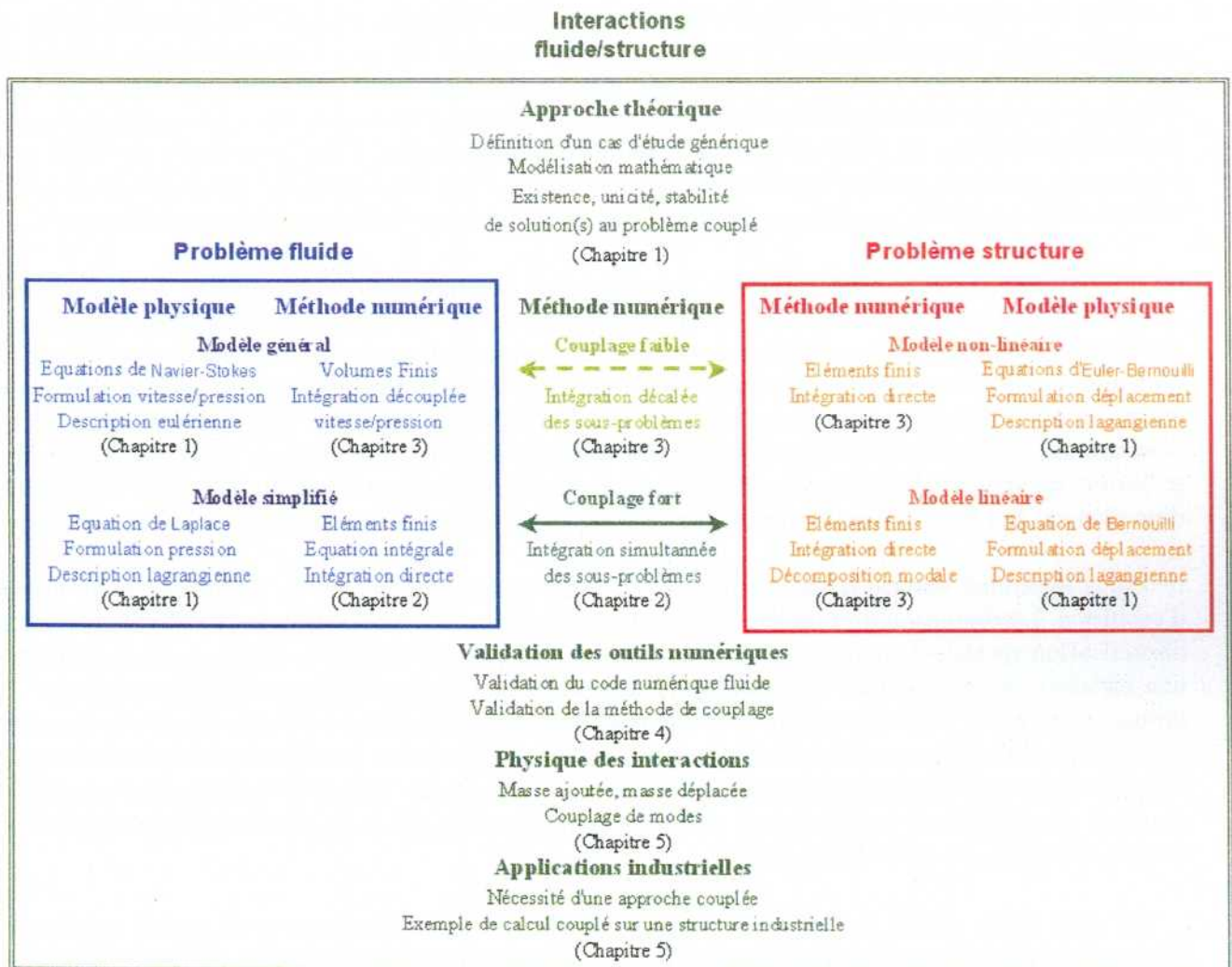


FIG. 4 – Modélisation et simulation numérique d'un problème d'interactions fluide/structure : démarche d'étude

L'un des objectifs de l'étude est de faire le lien entre les méthodes de calcul couplé développées dans les laboratoires de recherche et leur application à l'étude de projets industriels ; une des contraintes de notre travail est de pouvoir mettre en œuvre ces méthodes avec les codes de calcul généralistes utilisés en bureau d'études.

Le travail engagé dans cette thèse permettra en particulier de :

- réaliser l'intégration dans le code de calcul de structures ANSYS [170] d'un élément fini fluide permettant l'analyse modale de problèmes couplés avec une représentation axi-symétrique ;
- proposer une maquette numérique de couplage entre le code éléments finis structure ANSYS et le code volumes finis fluide STAR-CD [184] [185] permettant l'analyse temporelle de problèmes couplés.

Dans le chapitre 1, nous définissons un cas générique d'étude pour un problème couplé fluide/structure. Ce cas d'étude est une modélisation très simplifiée d'un système mécanique couplé avec un fluide, représentatif du comportement des structures internes de capacités auxiliaires d'un réacteur de propulsion navale (générateur de vapeur, pressuriseur). Nous présentons ensuite deux modélisations du problème couplé en formulant un problème aux valeurs propres et un problème d'évolution correspondant à la dynamique du système couplé étudié. La modélisation du problème structure utilise les équations de la dynamique des structures spécialisées au cas d'une poutre linéaire et non linéaire. Le problème fluide est décrit avec des modèles physiques de complexité croissante pour lesquelles nous détaillons les expressions mathématiques exprimant la condition de surface libre, la condition de paroi rigide et la condition de couplage avec la dynamique de la structure. Nous présentons également dans ce chapitre quelques résultats mathématiques répondant à des considérations théoriques d'existence, unicité et de stabilité de la solution au problème couplé, dont nous donnons une interprétation physique.

Le chapitre 2 présente les méthodes numériques de résolution du problème aux valeurs propres. Les problèmes fluide et structure sont formulés respectivement en pression et en déplacement avec une description lagrangienne, sur domaine de calcul fixe. Les méthodes utilisées sont bien formalisées sur le plan numérique ; elles utilisent un couplage entre une discrétisation éléments finis du problème structure et une approche éléments finis ou équation intégrale du problème fluide, les deux sous-problèmes étant résolus simultanément. Ce chapitre propose une application de ces méthodes au cas d'étude générique et permet de spécifier le développement, dans le code de calcul structure utilisé par DCN Propulsion, d'un élément fini fluide formulé en pression avec représentation axi-symétrique en série de FOURIER.

Nous abordons ensuite dans le chapitre 3 les méthodes numériques de résolution du problème d'évolution. La résolution du problème structure est conduite avec une méthode éléments finis pour la discrétisation spatiale des équations et une méthode d'intégration temporelle directe (pour le problème non linéaire) ou une méthode de décomposition modale (pour le problème linéaire). La résolution du problème fluide est conduite au moyen d'une discrétisation volumes finis, à l'aide d'un code de calcul fluide généraliste. Nous mettons alors en œuvre dans le code fluide une procédure de couplage explicite, les problèmes fluide et structure étant résolus alternativement. Ce travail de modélisation permet de proposer une maquette numérique de couplage entre les deux codes de calcul généralistes fluide et structure utilisés par DCN Propulsion.

Le code fluide utilisé est un code commercial pour lequel il n'existe pas de cas de validations élémentaires pour l'application envisagée. Nous proposons alors dans le chapitre 4 une démarche de validation du code CFD, qui consiste à calculer des coefficients caractéristiques de la physique des interactions fluide/structure et à confronter les résultats numériques avec les valeurs données par des modèles analytiques. Ce travail nous permet ainsi de proposer un *benchmark* général de qualification d'un code fluide pour des applications à la simulation numérique de problèmes couplés fluide/structure.

Nous terminons enfin au chapitre 5 par une étude numérique relative au problème couplé générique, ce qui nous permet de mettre en évidence les principaux phénomènes d'interactions fluide/structure :

masse de fluide ajoutée, masse de fluide déplacée, couplage des modes hydroélastiques structure et des modes de surface libre fluide. Nous proposons enfin une application des méthodes de résolution du problème modal à l'étude des modes propres couplés de l'ensemble panier et cuve d'un réacteur nucléaire de propulsion navale. Cette étude met en évidence l'importance des interactions fluide/structure dans le cas industriel et souligne la nécessité d'en proposer une modélisation correcte dans les études de dimensionnement d'ensemble.

Nous proposons dans les différents chapitres les éléments bibliographiques utilisés au fur et à mesure de la progression de l'étude, les références étant regroupées par thème en fin du présent document.

*

* *

Modélisation du problème couplé

Nous présentons dans ce chapitre un problème générique sur lequel sont formulés différents problèmes d'interactions fluide/structure et appliquées différentes méthodes de résolution numérique. Le problème générique est choisi de façon à proposer un modèle simplifié mais représentatif de structures de propulsion navale nucléaire. Nous écrivons pour ce cas d'étude les équations modélisant :

- un problème *linéaire* (problème aux valeurs propres du système couplé fluide/structure). Le problème structure est formulé en déplacement, les équations utilisées sont celles de l'élasticité linéaire en petites transformations. Le fluide est supposé incompressible, non visqueux et non turbulent, en petites transformations. L'état du fluide est dans ces conditions décrit par la variable scalaire pression. Les conditions de couplage à l'interface traduisent la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes et de l'accélération ;
- un problème *non linéaire* (problème d'évolution du système soumis à une sollicitation dynamique). Le problème structure utilise un modèle de comportement avec prise en compte de termes de déformations non linéaires du second ordre. La formulation du problème structure utilise les inconnues en déplacement, le comportement dynamique est supposé élastique. Le problème fluide utilise le modèle général des équations de conservation (masse et quantité de mouvement) de la dynamique des fluides, formulées en pression/vitesse. L'écoulement fluide est supposé incompressible, visqueux et non turbulent. Les équations du problème couplé sont écrites dans le référentiel relatif. Nous adoptons une approche lagrangienne pour la structure et eulérienne pour le fluide. Les conditions de couplage expriment la continuité de la vitesse et des contraintes à l'interface fluide/structure.

Nous terminons l'exposé par une étude bibliographique théorique relative à l'analyse des équations du problème couplé. Nous rappelons ainsi des résultats généraux d'existence, d'unicité et de stabilité pour des problèmes couplés linéaires et non linéaires. Ces considérations théoriques nous permettent de préciser le cadre formel des modélisations mathématiques du problème couplé et de justifier les choix de résolution numérique retenus dans cette thèse.

1.1 Problème générique d'étude

Le problème générique couplé fluide/structure étudié est représenté par la FIG. 1.1. Nous considérons une poutre élastique verticale de section circulaire, encastrée à une extrémité, libre à l'autre, partiellement immergée dans un fluide lourd et incompressible contenu dans une cavité cylindrique rigide, concentrique à la poutre. Ce cas élémentaire d'étude est une modélisation très simplifiée d'un système mécanique couplé avec un fluide, représentatif du comportement des structures internes de capacités auxiliaires d'un réacteur de propulsion navale (générateur de vapeur, pressuriseur).

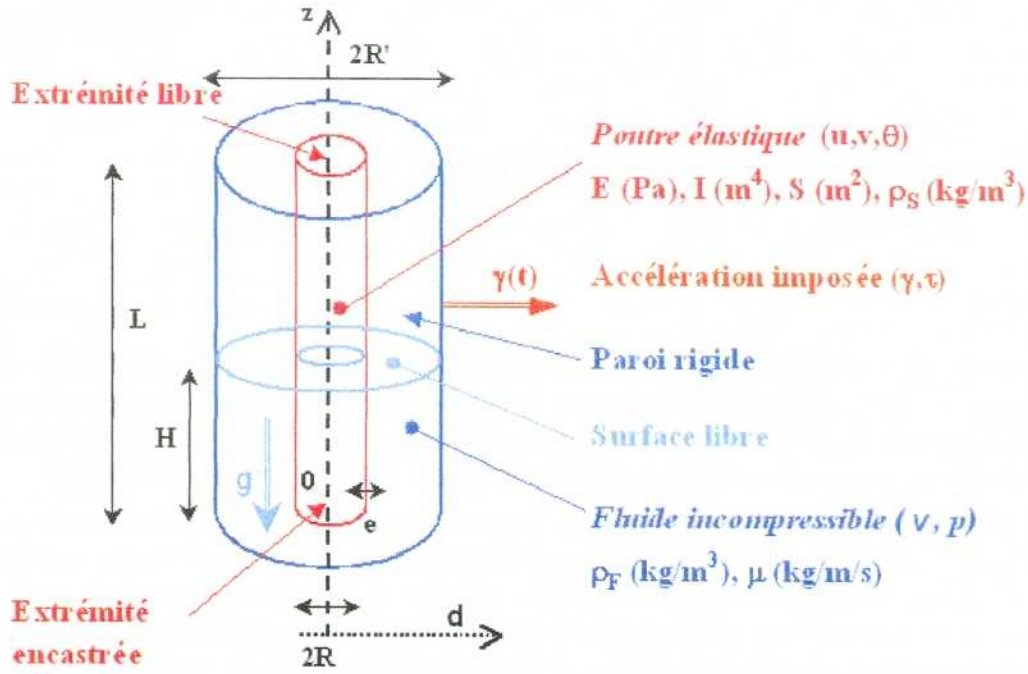


FIG. 1.1 – Problème générique couplé fluide/structure

Le problème étudié est à symétrie de révolution ; nous adoptons les notations suivantes : \mathbf{d}^\top est la direction verticale ascendante (repérée par la variable z) et \mathbf{d} la direction transversale au problème ; \mathbf{d}^\perp est le vecteur normal à \mathbf{d} tel que $(\mathbf{d}, \mathbf{d}^\perp, \mathbf{d}^\top)$ soit un trièdre droit direct. Dans le plan défini par $(\mathbf{d}, \mathbf{d}^\perp)$, \mathbf{n} est la normale sortante au domaine structure, de sorte que $\mathbf{n} = \mathbf{d} \cos \theta + \mathbf{d}^\perp \sin \theta$ avec $\theta = (\mathbf{d}, \mathbf{n})$. Avec ces notations, nous définissons plus précisément le problème couplé de la façon suivante.

La structure occupe le domaine $\Omega_S = \{(r, \theta, z), r \in [R - e, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, L]\}$ de frontière $\partial\Omega_S$, réunion des éléments de frontière $\partial\Omega_{S_0} = \{(r, \theta, z), r \in [R - e, R], \theta \in [0, 2\pi], z = 0\}$ (extrémité encastrée), $\partial\Omega_{S_L} = \{(r, \theta, z), r \in [R - e, R], \theta \in [0, 2\pi], z = L\}$ (extrémité libre) et $\Gamma_{SF} = \{(r, \theta, z), r = R, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]\}$ (interface structure/fluide). La structure est supposée élastique, homogène et isotrope ; ses caractéristiques physiques sont notées E (module d'YOUNG), ρ_S (masse volumique), ses caractéristiques géométriques sont notées R (rayon), e (épaisseur), I (inertie de flexion) et S (section droite). Les inconnues du problème structure sont les champs scalaires de déplacement $u(z, t)$ (mouvement de traction/compression dans la direction verticale) et $v(z, t)$ (mouvement de flexion dans la direction transversale).

Le fluide occupe le domaine $\Omega_F = \{(r, \theta, z), r \in [R, R'], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]\}$ de frontière $\partial\Omega_F$, réunion des éléments de frontière $\partial\Omega_{F_0} = \{(r, \theta, z), r \in [R, R'], \theta \in [0, 2\pi], z = H\}$ (surface libre) $\partial\Omega_{F\pi} = \{(r, \theta, z), r = R', \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]\}$ (paroi rigide) et $\Gamma_{FS} = \{(r, \theta, z), r = R, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]\}$ (interface fluide/structure). Le fluide est supposé incompressible ; ses caractéristiques physiques sont notées ρ_F (masse volumique) et μ (viscosité cinématique). Les inconnues du problème fluide sont les champs scalaire $p(r, \theta, z, t)$ (pression) et vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, z, t)$ (vitesse).

La sollicitation dynamique appliquée à l'ensemble est un *choc sinus* dans la direction transversale \mathbf{d} , caractérisé par le profil d'accélération $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0 \sin(2\pi t/\tau) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau \leq t \end{cases}$$

où γ_0 est l'amplitude du choc et τ sa durée. Le signal choisi permet de proposer un modèle simplifié du choc réellement appliqué sur un équipement, en réduisant sa représentation à deux paramètres élémentaires (durée et amplitude).

Les profils de vitesse $\dot{d}(t)$ et de déplacement $d(t)$ correspondants sont respectivement :

$$\dot{d}(t) = \begin{cases} \frac{\gamma_0 \tau}{2\pi} [1 - \cos(2\pi t/\tau)] & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau \leq t \end{cases} \quad d(t) = \begin{cases} \frac{\gamma_0 \tau^2}{4\pi^2} [2\pi t/\tau - \sin(2\pi t/\tau)] & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{\gamma_0 \tau^2}{2\pi} & \tau \leq t \end{cases}$$

Une représentation graphique des profils temporels adimensionnalisés de déplacement, de vitesse et d'accélération du choc sinus est donnée par la FIG. 1.2.

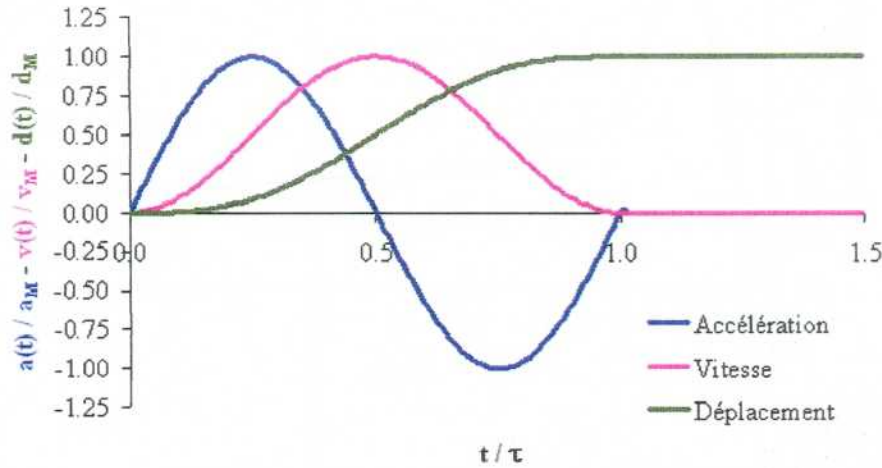


FIG. 1.2 – Profils temporels d'accélération, vitesse et déplacement du choc sinus

Nous caractérisons également le signal d'accélération $t \mapsto \gamma(t)$ par le calcul de son spectre de réponse $\omega \mapsto \hat{\gamma}(\omega)$ [171]. Nous rappelons que par définition, le spectre de réponse donne la réponse d'un système élémentaire masse (m), raideur (k), amortissement (c) soumis à l'accélération γ^1 .

De façon plus précise, le spectre en *pseudo-accelération* est une représentation de la fonction $\omega \mapsto \hat{\gamma}(\omega, \xi) = \omega^2 \times \max_{t \geq 0} \{ \tilde{z}(t, \omega, \xi, \gamma) \}$ où $\tilde{z}(t, \omega, \xi, \gamma)$ est le déplacement relatif du système masse-raideur-amortissement, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + 2\xi\omega \frac{d\tilde{z}}{dt} + \omega^2 \tilde{z} = -\gamma$$

¹La connaissance du spectre de réponse permet de déterminer la valeur du *déplacement relatif maximal* et la valeur de l'*accélération absolue maximale* d'un système masse-raideur-amortissement soumis à une excitation dynamique. Le spectre de réponse donne donc deux informations dimensionnantes pour le système soumis au choc et permet de comparer simplement deux excitations dynamiques. En partant du postulat que l'effet du choc sur une structure continue est décrit en première approximation par son effet sur un système à un degré de liberté de masse et de raideur équivalente, nous pouvons conclure qu'une sollicitation dynamique sera d'autant plus sévère pour la structure que les valeurs de son spectre de réponse sont élevées. Cette information demeure qualitative et ne reste vraie que dans l'hypothèse, nécessaire mais non suffisante, de linéarité [171].

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre du système et $\xi = \frac{c}{\sqrt{km}}$ coefficient d'amortissement du système. La réponse du système $\tilde{z}(t, \omega, \xi, \gamma)$ est donnée par l'intégrale de DUHAMEL [169] :

$$\tilde{z}(t, \omega, \xi, \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \times \int_0^t -\gamma(t') e^{-[\xi\omega(t-t')] \sin[\omega(\xi)(t-t')] dt' \quad (1.1)$$

pour $\xi < 1$, avec $\omega(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}$.

Nous calculons alors le spectre de réponse par résolution numérique de l'équation (1.1)¹. La FIG. 1.3 donne une représentation du spectre de réponse normalisé en pseudo-accelération du signal d'accélération du choc sinus.

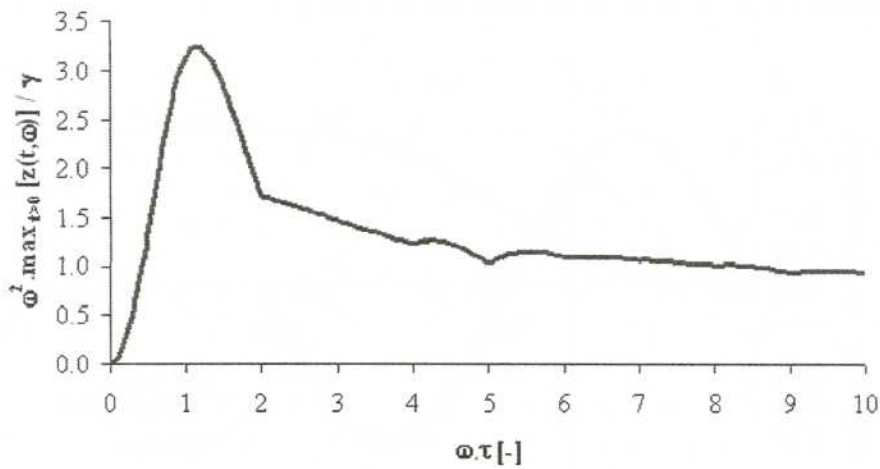


FIG. 1.3 – Spectre de réponse normalisé en pseudo-accelération du choc sinus

Le spectre de réponse fait apparaître les zones suivantes :

- zone *impulsionnelle* pour $\omega \times \tau \ll 1$. La durée du choc est très courte devant la période propre du système. Le système atténue les effets du choc. L'amplitude de la pseudo-accelération est très inférieure à l'amplitude maximale du choc ; d'autre part, pendant le choc, le déplacement relatif du système est opposé au déplacement imposé ;
- zone *statique* pour $\omega \times \tau \gg 1$. La durée du choc est grande devant la période propre du système. A tout instant, le système atteint sa position d'équilibre avant que ne se produisent des variations significatives du mouvement imposé ; le déplacement relatif résultant est très faible. Tout se passe comme si l'accélération était une accélération statique ;
- zone *intermédiaire* pour $\omega \times \tau \simeq 1$. La durée du choc est très proche de la pulsation propre du système. Le système a tendance à amplifier les effets du choc, l'amplification est plus ou moins importante selon la forme du choc. La pseudo-accelération peut alors dépasser la valeur maximale de l'accélération absolue imposée (dans le cas du choc sinus, la FIG. 1.3 montre que l'amplification en accélération dans la zone intermédiaire est de $\times 3.5$ environ). Dans cette zone

¹Le calcul numérique d'un spectre de réponse peut être réalisé à l'aide de différents algorithmes, voir par exemple [164].

le déplacement maximal est observé en fin de choc, ou après le choc. Dans l'étude numérique proposée dans le chapitre 5, nous nous placerons dans cette zone de réponse, en ajustant le temps de choc sur la première période propre du système.

Nous définissons enfin les nombres sans dimension suivants qui caractérisent la géométrie du problème et la physique du couplage :

- ratio de confinement $\alpha = \frac{R'}{R}$;
- ratio d'allongement $\eta = \frac{R}{L}$;
- ratio de remplissage $\lambda = \frac{H}{L}$;
- ratio d'épaisseur $\varepsilon = \frac{e}{R}$;
- ratio de déplacement $\xi = \frac{\gamma\tau^2}{4\pi\alpha R}$;
- nombre de masse : $\mathcal{M} = \frac{\rho_S}{\rho_F}$;
- nombre de FROUDE dynamique : $\mathcal{F} = \frac{e}{R} \times \sqrt{\frac{E}{\rho_S g L}}$;
- nombre de REYNOLDS dynamique : $\mathcal{S} = \frac{2\pi(\alpha - 1)^2 R^2}{\nu\tau}$.

Le nombre de masse \mathcal{M} permet de quantifier les effets de masse ajoutée (voir sous-paragraphe 5.1.1.1), le nombre de FROUDE dynamique \mathcal{F} permet de quantifier les effets de couplage entre les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballotement (voir sous-paragraphe 5.1.1.2) et le nombre de REYNOLDS dynamique \mathcal{S} permet de quantifier les effets de viscosité sur la dynamique du système (voir section 4.2) [97].

Les caractéristiques géométriques et physiques du problème couplé sont les suivantes :

Problème structure

- Rayon : $R = 0.1$ m ;
- Epaisseur : $e = 0.02$ m ;
- Longueur : $L = 1$ m ;
- Masse volumique : $\rho_S = 7800$ kg/m³ ;
- Module d'YOUNG : $E = 6.04 \times 10^8$ Pa ;

Problème fluide

- Rayon intérieur : $R = 0.1$ m ;
- Rayon extérieur : $R' = 0.2$ m ;
- Masse volumique : $\rho_F = 1000$ kg/m³ ;
- Accélération de la pesanteur : $g = 9.81$ m/s² ;
- Hauteur : 0.75 m $\leq H \leq 1$ m.

Remarque 1 Le problème couplé défini par la FIG. 1.1 avec ces caractéristiques physiques et géométriques constitue le problème standard d'étude. Les résultats de calcul présentés dans la suite de

l'étude sont obtenus sur ce problème standard, sauf lorsque mentionné explicitement. En particulier, pour l'analyse modale présentée au chapitre 5, l'étude illustrant le couplage de modes utilise des valeurs numériques permettant de bien mettre en évidence le phénomène; dans ce cas, les caractéristiques du problème ne sont pas précisées, le problème étant défini par la valeur du nombre de FROUDE dynamique correspondant.

1.2 Equations du problème couplé

1.2.1 Cas linéaire : problème aux valeurs propres

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'analyse modale du problème couplé décrit par la FIG. 1.1. La modélisation du problème aux valeurs propres utilise une théorie linéaire du comportement de la structure et du fluide. Les deux milieux sont supposés homogènes, linéaires et isotropes, en petites transformations. Nous supposons d'autre part les deux milieux fluide et structure fixes : l'hypothèse de petits déplacements permet de confondre la configuration actuelle et la configuration de référence des deux problèmes.

Nous nous intéressons dans ce contexte à la caractérisation des modes propres du système couplé. Les modes propres des deux sous-systèmes découplés sont :

- les modes propres de *flexion* de la poutre. Ces modes décrivent les petits mouvements en déplacement transversal de la poutre ;
- les modes propres de *ballotement* (ou *sloshing*) du fluide. Ces modes décrivent les petits mouvements de la surface libre du fluide et les fluctuations de pression correspondantes.

Les modes propres du système fluide/structure résultent d'un couplage entre les modes des deux sous-systèmes découplés, selon un processus physique qui fera l'objet d'une étude détaillée au chapitre 5.

Différentes formulations du problème couplé sont possibles pour l'analyse modale [106]. L'approche la plus classique consiste à utiliser les équations de l'élasticité linéaire pour la structure, en adoptant une formulation en déplacement. La modélisation du problème fluide peut être réalisée à partir de différentes formulations : en déplacement [94] [143], en potentiel des vitesses [116], en potentiel des déplacements [146] ou en pression [65].

Nous adoptons une formulation en pression (fluide)/déplacement (structure) du problème couplé. Cette formulation présente l'avantage de travailler avec une grandeur scalaire décrivant le milieu fluide, avec une interprétation assez immédiate du point de vue de l'ingénieur. Comme nous le verrons par la suite, cette formulation conduit à un problème aux valeurs propres non symétrique¹, ce qui nécessite l'utilisation d'algorithmes de recherche de valeurs propres appropriés [174], et ne permet pas d'utiliser des méthodes spectrales [89] pour l'analyse dynamique du système couplé, puisque les modes propres obtenus ne vérifient pas les conditions d'orthogonalité requises pour appliquer ce type de méthodes².

¹La formulation en déplacement du problème fluide permet d'obtenir une formulation symétrique du problème couplé, mais cette représentation du problème fluide génère des modes propres non physiques. La suppression de ces modes parasites peut néanmoins être obtenue avec un traitement particulier des conditions de couplage [143].

²Il est cependant possible d'obtenir un problème symétrique en introduisant une variable supplémentaire φ telle que $p = \rho_F \omega^2 \varphi$ (φ représente le potentiel des déplacements fluide). Le problème fluide est ainsi écrit en formulation mixte pression/potentiel des déplacements. Cette transformation proposée pour la première fois par OHAYON et VALID [109] permet d'obtenir une formulation symétrique du problème aux valeurs propres dans le cas d'un système couplé fluide/structure. Elle est décrite et discutée par GIBERT dans [89] et MORAND-OHAYON dans [106]. BOUJOT propose une analyse mathématique de la formulation mixte dans [145]. Des exemples d'applications avec le code CASTEM sont proposées par AXISA et *al.* dans [59] et [60]. La méthode est appliquée dans l'étude du cas industriel au chapitre 5.

Les équations des deux sous-problèmes fluide et structure linéaires sont les suivantes.

Problème structure La dynamique des vibrations linéaires de la poutre en flexion est décrite par la théorie linéaire d'EULER-BERNOULLI [89]. L'équation locale du mouvement s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_S S v + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \varphi \quad (1.2)$$

avec les conditions aux limites traduisant l'encastrement en $z = 0$ (déplacement et rotation nuls) :

$$v|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.3)$$

et l'extrémité libre en $z = L$ (effort et moment nuls) :

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right|_{z=L} = 0 \quad (1.4)$$

Dans l'équation locale (1.2), φ représente l'effort exercé par le fluide sur une tranche circulaire de la poutre, à z donné; cet effort s'écrit :

$$\varphi = \begin{cases} \int_0^{2\pi} -p(R, \theta, z) R \cos \theta d\theta & \text{pour } 0 \leq z \leq H \\ 0 & \text{pour } H < z \leq L \end{cases} \quad (1.5)$$

Problème fluide Le fluide est supposé irrotationnel, parfait et incompressible. Compte tenu de ces hypothèses, les équations du fluide s'écrivent :

– conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$;

– conservation de la quantité de mouvement $\rho_F \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0$.

En écrivant la divergence de la seconde équation et en prenant en compte la première équation, nous pouvons formuler le problème à partir de l'inconnue en pression seulement. Le problème fluide est ainsi régi par l'équation de LAPLACE [25] :

$$\Delta p = 0 \quad (1.6)$$

avec les conditions aux limites traduisant la présence d'une paroi rigide (en $z = 0$ et $r = R'$) :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R'} = 0 \quad (1.8)$$

La condition de surface libre prend en compte les ondes de gravité du fluide et s'écrit au premier ordre [141] :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=H} = \frac{\omega^2}{g} p|_{z=H} \quad (1.9)$$

La condition de couplage avec la dynamique de la structure traduit la continuité de la composante normale de l'accélération au niveau de l'interface fluide/structure :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = \omega^2 \rho_F v \cos \theta \quad (1.10)$$

Remarque 2 La condition de surface libre (1.9) permet de décrire les modes de ballonnement du fluide. La condition de surface libre sans prise en compte de ces modes fluide s'exprime alors simplement par la relation [139] :

$$p|_{z=H} = 0 \quad (1.11)$$

Lorsque la cavité fluide est totalement remplie (i.e. pour $H = L$) et que le fluide est confiné, la condition de surface libre donnée par (1.9) ou (1.11) est remplacée par une condition de paroi rigide, similaire à (1.7), soit :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (1.12)$$

Les méthodes de résolution du problème aux valeurs propres sont exposées dans le chapitre 2. La technique de résolution utilise un couplage entre une discrétisation éléments finis du problème structure et une résolution du problème fluide avec une méthode d'éléments finis ou une méthode de discrétisation de l'équation intégrale fluide. Les deux problèmes sont résolus simultanément et la condition de couplage, discrétisée sur un domaine fixe, est vérifiée à tout instant : le couplage numérique des deux problèmes ainsi réalisé est un *couplage fort*.

1.2.2 Cas non linéaire : problème d'évolution

Nous nous intéressons dans un second temps à l'analyse temporelle du problème couplé décrit par la FIG. 1.1. Les équations dynamiques du problème couplé sont écrites *dans le référentiel relatif en translation* dans la direction \mathbf{d} . Dans le cas général, nous supposons la structure élastique, homogène et isotrope ; le comportement dynamique est écrit en terme de déplacement, les équations du mouvement prennent en compte des termes non linéaires au second ordre.

Le fluide est supposé incompressible, newtonien¹ et non turbulent². Le domaine fluide se déforme au cours du temps pour suivre les mouvements de l'interface fluide/structure. La formulation du problème fluide est donc plus générale que celle utilisée pour le problème modal.

Problème structure La modélisation du problème structure utilise les équations d'EULER-BERNOULLI non linéaires faisant apparaître les termes du second ordre en déplacement³. Les équations décrivent la dynamique de traction/compression (degré de liberté u) et de flexion (degré de liberté v) de la poutre ; compte tenu des notations précisées au paragraphe précédent, le champ de déplacement de la structure est $\mathbf{u} = v\mathbf{d} + u\mathbf{d}^\top$. Dans une approche au second ordre, les dynamiques de traction/compression et de flexion sont couplées ; les équations du mouvement sont données par [20] :

$$\rho_S S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0 \quad \forall z \in [0, L] \quad (1.13)$$

¹L'hypothèse de fluide newtonien postule une relation linéaire entre le taux de variation spatiale du champ de vitesses et les contraintes visqueuses, et suppose implicitement que le comportement du fluide est insensible au temps [25]. Cela n'est pas le cas pour tous les fluides ; il existe des matériaux dont la réponse fait intervenir le temps, par exemple :

- selon la durée d'application d'une contrainte fixe dans le temps ;
- selon la vitesse de chargement d'une contrainte variable dans le temps.

²Le phénomène de turbulence est un phénomène physique dont la modélisation est complexe [26] et pour lequel il existe différents modèles [53] et différents traitements numériques [99]. Notre travail constitue une première approche des techniques de calcul numérique en mécanique des fluides à l'étude d'un problème couplé. Nous nous limitons par conséquent au cas d'un écoulement non turbulent.

³Nous travaillons avec les équations de comportement données dans [20] ; d'autres théories non linéaires du comportement dynamique des poutres sont bien évidemment possibles, voir par exemple [18].

$$\rho_S S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho_S S \gamma + \varphi \quad \forall z \in [0, L] \quad (1.14)$$

avec φ représentant les efforts exercés par le fluide sur une tranche de la poutre à z donné.

Les conditions aux limites du problème structure (extrémité libre et encadrée) s'expriment alors de la façon suivante [4] :

– extrémité encadrée

$$u|_{z=0} = 0 \quad v|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (1.15)$$

– extrémité libre

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z=L} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = 0 \quad \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = 0 \quad (1.16)$$

Les conditions initiales du problème structure au repos à l'instant $t = 0$ s'expriment comme :

$$u|_{t=0} = 0 \quad v|_{t=0} = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.18)$$

Problème fluide La modélisation du problème fluide utilise les équations de NAVIER-STOKES [25].

L'état du fluide est caractérisé par le champ scalaire de pression p et le champ vectoriel de vitesse \mathbf{v} . Le fluide est soumis à l'action de la pesanteur $-g \mathbf{d}^\top$ (constante dans le temps) et aux forces d'inertie $-\gamma \mathbf{d}$ (variables dans le temps). Les équations locales de conservation écrites dans le domaine fluide $\Omega_F(t)$ décrivent la dynamique du fluide :

– conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F(t) \quad (1.19)$$

– conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = -(\gamma \mathbf{d} + g \mathbf{d}^\top) \quad \text{dans } \Omega_F(t) \quad (1.20)$$

Ces équations sont assorties des conditions aux limites suivantes. Au niveau des parois rigides $\partial\Omega_{F_\pi}(t)$, immobiles dans le référentiel relatif, la vitesse du fluide est nulle :

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_{F_\pi}(t) \quad (1.21)$$

La surface libre $\Omega_{F_o}(t)$ est une isobare :

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{F_o}(t) \quad (1.22)$$

Les conditions initiales du problème correspondent à l'équilibre hydrostatique du fluide (champ de pression hydrostatique, fluide au repos sans écoulement) :

$$p|_{t=0} = p_0 \quad \text{dans } \Omega_F(0) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_F(0) \quad (1.24)$$

Problème couplé Le couplage des deux problèmes s'exprime de la façon suivante. Au niveau de l'interface fluide/structure $\Gamma(t)$, variable dans le temps, la condition de liaison cinématique des deux problèmes est la suivante :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma(t) \quad (1.25)$$

Cette équation exprime la continuité de la vitesse à l'interface : le fluide adhère à la paroi mobile. La seconde condition de couplage exprime les efforts exercés par le fluide sur la structure. Le calcul des efforts est donné par la relation :

$$\varphi(z, t) = \int_0^{2\pi} \mathbf{d} \cdot \sigma_{v,p}(R, \theta, z, t) \cdot \mathbf{n} R d\theta \quad (1.26)$$

où $\sigma_{v,p}$ est le champ de contraintes fluide écrit sur la configuration de référence de la structure.

La méthode de résolution du problème temporel est présentée au chapitre 3. La technique de calcul utilise un couplage explicite asynchrone entre une discrétisation spatiale avec une méthode éléments finis, temporelle avec intégration directe explicite et/ou implicite pour le sous-problème structure et une discrétisation spatiale avec une méthode volumes finis, temporelle avec une méthode implicite par séparation d'opérateurs pour le sous-problème fluide. La méthode introduit une approximation dans les échanges d'énergie entre le fluide et la structure, dans la mesure où l'approche explicite décalée ne décrit pas exactement la loi d'action/réaction : le couplage numérique ainsi mis en place est un *couplage faible*.

1.3 Analyse mathématique des équations du problème couplé

Après avoir exposé les différentes équations utilisées pour modéliser le problème couplé dans le cas d'un problème aux valeurs propres (cas linéaire) et d'un problème d'évolution (cas non linéaire), nous nous intéressons à des aspects théoriques relatifs aux systèmes d'équations ainsi posés. La question qui se pose est de savoir s'il existe une (ou plusieurs) solution(s) au problème couplé, et en quels termes mathématiques peuvent être formulées l'existence et, le cas échéant, l'unicité de la solution au problème couplé.

Ces questions théoriques constituent un domaine d'étude à part entière, dépassant très largement le cadre de cette thèse, pour lequel il existe de nombreuses publications théoriques. Des méthodes générales d'analyse mathématique des problèmes d'évolution en temps sont formalisées par DAUTRAY et LIONS [165] et sont appliquées par différents auteurs à la démonstration d'existence et d'unicité de solutions pour des problèmes couplés dans différentes situations. Ces méthodes utilisent une approche énergétique du problème, exprimé au sens mathématique à partir de la théorie des espaces de HILBERT et de l'analyse fonctionnelle qui fournit un cadre d'analyse adapté au problème à étudier [161] [177]. Cette approche permet de poser les questions de l'existence et de l'unicité de solutions sous une forme qui se prête bien à une analyse physique et numérique.

Une première approche mathématique du problème des vibrations de corps élastiques couplés avec un fluide est proposée par CERNEAU et SANCHEZ-PALENCIA [147].

Dans le cas de problèmes couplés formulés sur domaines fixes, BOUJOT propose plusieurs résultats mathématiques correspondant à différentes formulations de problèmes couplés dynamiques évoquées à la section 1.2 [146]. ACHAB et *al.* proposent un résultat de convergence et des résultats généraux d'existence et d'unicité pour un problème couplé en formulation pression/déplacement [142]. PAPI propose une analyse d'un problème de couplage fluide/structure dans le cas d'une plaque élastique, décrite par les équations de LOVE-KIRSCHHOFF, couplée avec un fluide compressible, et montre l'existence et l'unicité d'une solution en utilisant une méthode de perturbation du problème linéaire [156].

FLORI montre l'existence et l'unicité d'une solution pour un problème de couplage identique prenant en compte la viscosité dans le fluide, en utilisant une méthode de point fixe [149]. MUREA propose une démonstration générale d'existence et d'unicité d'une solution, dans le cas d'une structure élastique et d'un fluide visqueux et incompressible, basée sur une application du théorème du Min-Max [155].

Dans le cas de problèmes couplés formulés sur des domaines variables au cours du temps, GUMMET propose une analyse numérique des schémas de couplage utilisant l'approche ALE pour le cas d'un écoulement fluide incompressible [154], GRANDMONT propose un travail théorique autour de l'existence et l'unicité de solutions pour un problème couplé non linéaire [151] [152]. FLORI et ORENGA donnent également des résultats théoriques pour des problèmes couplés formulés sur des domaines dépendant du temps [150].

Une partie de notre étude bibliographique a été consacrée à la lecture des travaux de ces différents auteurs. Nous retenons de cette analyse les trois résultats suivants. Dans un premier temps, nous exposons la construction mathématique d'un opérateur de masse ajoutée, défini dans le cas d'un problème couplé linéaire sur un domaine fixe en supposant le fluide incompressible. La définition de cet opérateur abstrait rejoint les observations physiques de l'effet de masse ajoutée. Dans un second temps, nous donnons le sens mathématique de l'existence et de l'unicité d'un problème couplé élasto-acoustique sur domaine fixe, et nous présentons enfin un résultat de stabilité pour un problème couplé en domaine variable au cours du temps, pour un cas proche de celui étudié dans cette thèse. Ces résultats nous permettent de mieux appréhender les aspects théoriques de l'analyse d'un problème couplé, et leurs implications au niveau numérique.

Un résultat général : définition de l'opérateur de masse ajoutée Nous considérons le problème couplé linéaire décrit par la FIG. 1.4. Nous nous plaçons dans le cas général d'un problème tridimensionnel en fluide incompressible, dans le cadre d'une formulation pression/déplacement. Nous montrons qu'avec l'hypothèse de fluide incompressible, l'étude du problème couplé peut se réduire à l'étude du problème structure, écrit avec un opérateur de masse ajoutée traduisant l'effet de la présence du fluide sur la dynamique de la structure. Nous rappelons le principe de construction mathématique de cet opérateur, sa propriété de symétrie et son caractère défini positif.

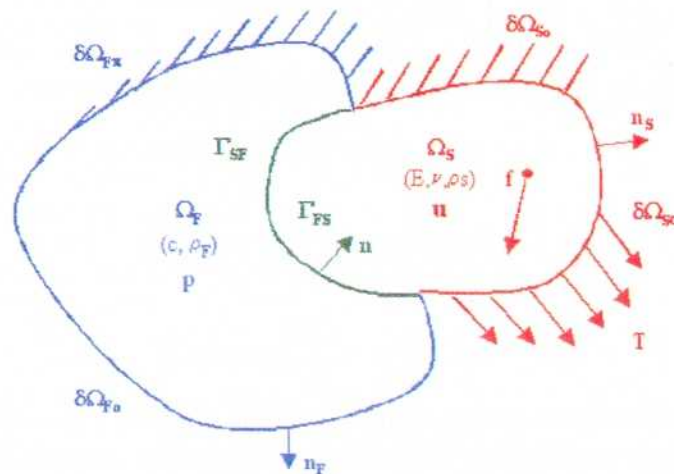


FIG. 1.4 – Problème général couplé fluide/structure linéaire en formulation pression/déplacement

Pour ce problème général, nous supposons :

- le problème structure décrit par les équations de l'élasticité linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_S \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_S = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_{S\sigma} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_{S_0} \end{array} \right.$$

avec \mathbf{n}_S est la normale sortante sur $\partial\Omega_S$;

- le problème fluide décrit par l'équation de LAPLACE

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_F \\ p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_0} \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_F} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \end{array} \right.$$

avec \mathbf{n}_F est la normale sortante sur $\partial\Omega_F$;

- le couplage des deux problèmes exprimé par

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_S = p \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_{SF} \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_F} = -\rho_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_{FS} \end{array} \right.$$

avec \mathbf{n} est la normale à l'interface fluide/structure, sortante pour le milieu fluide Ω_F et rentrante pour le milieu structure Ω_S (voir FIG. 1.4).

Dans ce contexte, il est possible d'éliminer la pression dans le problème structure. Considérons pour \mathbf{u} donné, le problème auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \pi = 0 \text{ dans } \Omega_F \\ \pi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F_0} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{n}_F} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{F\pi} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{n}_F} = -\rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

de sorte que $p = \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}$. La formulation variationnelle de ce problème est :

$$k_F(\pi, \delta\pi) = \langle \varphi_F, \delta\pi \rangle, \forall \delta\pi$$

avec :

$$k_F(\pi, \delta\pi) = \int_{\Omega_F} \nabla \pi \cdot \nabla \delta\pi \, d\Omega$$

et :

$$\langle \varphi_F, \delta\pi \rangle = - \int_{\Gamma} \rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \, d\Gamma$$

Ce problème admet une solution unique π qui dépend de $\mathbf{u}|_{\Gamma}$ [177] : nous définissons un opérateur Φ_{Δ} de Γ sur Ω_F^1 tel que $\pi = \Phi_{\Delta}(\mathbf{u}|_{\Gamma})$. En utilisant l'opérateur de trace Φ_S de Ω_S sur Γ tel que

¹L'expression employée ici est simplifiée : les opérateurs agissent sur un espace de fonctions définies sur les ensembles Γ , Ω_F , Ω_S , etc... Une définition rigoureuse des opérateurs élémentaires et de l'opérateur de masse ajoutée nécessite de préciser les espaces fonctionnels sur lesquels ils s'appliquent. Nous nous contentons ici de présenter le principe de construction sans détailler ces aspects théoriques, et nous renvoyons le lecteur vers les références [111] [148] pour un développement mathématique plus rigoureux.

$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}|_{\Gamma} = \Phi_S(\mathbf{u})$, et l'opérateur de trace Φ_F de Ω_F sur Γ tel que $\pi \mapsto \pi|_{\Gamma} = \Phi_F(\pi)$, il est alors possible de définir un opérateur Φ par composition [111] comme :

$$\Phi = \Phi_F \circ \Phi_{\Delta} \circ \Phi_S$$

Cet opérateur permet d'écrire le travail des forces de pression dans le champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ sous la forme :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{u} \rangle = -\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$$

Nous posons alors par définition $m_H(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$. Cet opérateur est symétrique et défini positif [148]. Nous donnons en annexe A l'expression de cet opérateur de masse ajoutée dans le cas du problème générique décrit par les équations (1.2) à (1.10) et la condition de surface libre décrite par (1.11).

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème général d'existence d'un opérateur de masse ajoutée :

Théorème 1 *Dans le cas d'un fluide incompressible avec surface libre décrite par la condition $p|_{\partial\Omega_{F_0}} = 0$, le problème d'évolution linéaire s'écrit :*

$$\frac{d^2}{dt^2} [m_S(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + m_H(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})] + k_S(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

avec les conditions initiales $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_o$, $\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_o$.

$m_S(\cdot, \cdot)$ et $k_S(\cdot, \cdot)$ sont les opérateurs de masse et de raideur de la structure [166] et $m_H(\cdot, \cdot)$ est l'opérateur de masse ajoutée. Cet opérateur est symétrique et défini positif. Dans le cas du problème générique étudié, l'opérateur de masse ajoutée $m_H(\cdot, \cdot)$ s'écrit :

$$m_H(v(t), \delta v) = \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \pi_l \left(\int_0^H v(z, t) \cos(q_l z) dz \right) \times \left(\int_0^H \delta v(z) \cos(q_l z) dz \right)$$

avec $(\pi_l)_{l \geq 1}$ nombres réels dépendant de la géométrie du problème.

Ce théorème permet de faire le lien avec l'interprétation physique suivante de l'effet du fluide sur la structure. En utilisant une caractérisation des valeurs propres du problème couplé par un quotient de RAYLEIGH [148], il est possible de montrer que les valeurs propres de la structure couplée avec le fluide $(\omega_n^h)_{n \geq 1}$ forment une suite infinie dénombrable non décroissante telle que $\forall n \geq 1, \omega_n^h < \omega_n^o$ avec $(\omega_n^o)_{n \geq 1}$ suite des valeurs propres de la structure dans le vide.

L'interprétation physique des propriétés de l'opérateur de masse ajoutée est immédiate : les fréquences propres de la structure en présence de fluide sont plus faibles que les fréquences propres de la structure dans le vide¹.

Nous verrons au chapitre 2 les méthodes numériques permettant de discrétiser l'opérateur de masse ajoutée et nous reviendrons sur la caractérisation des effets de masse ajoutée au chapitre 5.

¹Cet effet de masse ajoutée est facilement observable expérimentalement sur des structures simples, voir par exemple [75] et [188].

Un résultat d'existence et d'unicité Nous poursuivons en énonçant un résultat d'existence et d'unicité de solution pour le problème couplé générique décrit par la FIG. 1.1. Nous reprenons les résultats de PAPI [156], établis dans un cas structure bidimensionnel avec l'opérateur ∇^2 , que nous transposons au problème structure poutre monodimensionnel à l'opérateur $\frac{\partial^4}{\partial z^4}$. Nous supposons pour l'exemple la poutre encastree à ses deux extrémités¹, et le fluide compressible² avec une surface libre décrite par la condition (1.11). Nous énonçons alors le résultat suivant [157] :

Théorème 2 (PAPI-ORENGA, 1994) *En définissant les espaces fonctionnels $\tilde{V}_S = H^4(0, L)$, $V_S = H^2(0, L)$, $V_S^0 = H_0^2(0, L)$, $V_F = H^1(\Omega_F)$ et $H_F = L^2(\Omega_F)$, il existe une solution unique (v, p) au problème couplé elasto-acoustique en pression/déplacement, telle que $v \in W^{2,\infty}(0, T; H_S) \times W^{1,\infty}(0, T; V_S) \times L^\infty(0, T; V_S^0)$ et $p \in W^{1,\infty}(0, T; V_F) \times L^\infty(0, T; H_F)$. Cette solution est donc bornée dans le temps.*

Le traitement d'un fluide incompressible avec description de la surface libre prenant en compte les effets de ballonnement (équation [1.9]) reste à conduire. Le résultat exposé ci-dessus nous permet néanmoins de comprendre le sens mathématique à donner à la solution du problème couplé. Un des points clé de la démonstration du théorème 2 utilise une formulation énergétique obtenue après élimination des termes de couplage à l'interface. L'interprétation physique de ce point de démonstration repose sur le fait qu'à l'interface, les échanges d'énergie mécanique sont bornés : il n'y a pas d'instabilité dans un problème couplé utilisant la formulation pression/déplacement sur domaine fixe. Ceci permet de valider l'utilisation de la formulation non symétrique obtenue à partir des équations linéaires formulées en pression/déplacement. Les valeurs propres du système couplé sont toutes à partie imaginaire nulle ; l'existence d'une valeur propre à partie imaginaire non nulle pourrait entraîner une instabilité physique intrinsèque pour le problème couplé, ce qui contredirait le résultat précédent.

Un résultat de stabilité Nous terminons en présentant un résultat de stabilité sur un problème couplé. Nous nous plaçons dans le cas général où la structure est modélisée par les équations linéaires, en description lagrangienne et le fluide est modélisé par les équations non linéaires, en description eulérienne. Le problème est étudié dans le cas tridimensionnel par GRANDMONT [151]. Nous pouvons adapter les résultats démontrés dans ce travail à notre cas d'étude, en supposant à nouveau pour l'exemple, et pour des raisons identiques à celles évoquées précédemment, la poutre encastree à ses deux extrémités. En écrivant la formulation variationnelle du problème couplé, il est possible d'éliminer les termes de couplage et de formuler l'équation bilan suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{v}^2 d\Omega + \nu \int_{\Omega_F(t)} (\nabla \mathbf{v})^2 d\Omega + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 dz \\ = - \int_{\Omega_F(t)} (\gamma \mathbf{d} + g \mathbf{d}^\top) \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_0^L \rho_S \gamma \frac{\partial v}{\partial t} dz \end{aligned} \quad (1.27)$$

¹Cette hypothèse permet d'assurer l'ellipticité de la forme bilinéaire de raideur structure [148] et de se placer dans des conditions de raisonnement similaires à [156].

²Le problème fluide dynamique est formulé en pression, comme dans le cas incompressible. L'évolution de la pression est cette fois-ci régie par l'équation de propagation des ondes acoustiques :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0$$

où c est la célérité des ondes acoustiques dans le milieu fluide.

Le bilan énergétique donné par l'équation (1.27) nous permet d'obtenir le résultat de stabilité suivant [153] :

Théorème 3 (GRANDMONT-MADAY, 1998) *Soient les espaces fonctionnels $V_F = H^1(\Omega_F(t))$, $V_F = L^2(\Omega_F(t))$, $H_S = L^2(0, L)$ et $V_S = \{v \in H^2(0, L), v|_{z=0, L} = \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0, L} = 0\}$. Alors, si il existe une solution au problème couplé, son énergie reste bornée au sens suivant :*

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0, T; H_F)}^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_{L^2(0, T; V_F)}^2 + \|v\|_{W^{1, \infty}(0, T; H_S)}^2 + \|v\|_{L^\infty(0, T; V_S)}^2 \leq C \|\gamma\|_{\infty, [0, T]}$$

Ce résultat permet donc de nous assurer de la stabilité d'un problème couplé fluide (non linéaire)/structure (linéaire) et d'en appréhender la formulation mathématique.

Au chapitre 3, nous proposons une méthode numérique de résolution basée sur une résolution explicite décalée des deux sous-problèmes fluide et structure. Les méthodes numériques utilisées ne sont pas directement écrites sur la formulation du problème couplé qui a permis d'énoncer le résultat de stabilité précédent. L'une des conséquences de ce choix de résolution numérique est que le problème couplé peut présenter des instabilités numériques; nous proposerons un traitement numérique de ces instabilités en nous appuyant sur le fait que le problème étudié est physiquement stable.

*
* *

Nous avons présenté dans ce chapitre un système couplé fluide/structure générique et les équations correspondant aux problèmes de l'analyse modale et temporelle du système. Nous avons en particulier présenté des modèles de fluide de complexité croissante, décrivant la physique du problème à partir du modèle d'écoulement potentiel et du modèle d'écoulement général décrit par les équations de NAVIER-STOKES. Ces équations sont couplées avec celles de la dynamique de la structure, pour laquelle nous avons rappelé un modèle linéaire et un modèle non linéaire. Un point de vue théorique sur les équations du problème couplé nous a permis d'énoncer des résultats mathématiques, dont nous avons donné une interprétation physique, et de justifier les choix de modélisation retenus. Nous présentons dans le chapitre suivant les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème aux valeurs propres.

Résolution du problème aux valeurs propres

Nous présentons dans ce chapitre les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème aux valeurs propres. Ces méthodes numériques sont bien formalisées et validées, sur le plan théorique et sur le plan numérique. MAKERLE propose une bibliographie très complète sur le sujet en répertoriant de nombreux exemples d'application [103].

Dans notre cas d'étude, le problème structure est résolu à l'aide d'une discrétisation de type éléments finis. La résolution du problème fluide utilise :

- une méthode de type *éléments finis*. Le problème est écrit sous forme faible, au sens d'une formulation variationnelle qui est discrétisée en utilisant un développement en série de FOURIER de l'inconnue pression. Ce choix de représentation permet de ramener le problème fluide tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Nous rappelons les définitions des matrices fluide élémentaires et nous donnons leur expression analytique ;
- une méthode de type *équation intégrale*. Le problème formulé sur le domaine fluide est transformé en une équation intégrale vérifiée sur la frontière du domaine fluide. Cette équation intégrale est ensuite discrétisée avec une méthode de collocation par points. Nous exposons le principe de calcul pour le problème fluide et formulons le problème aux valeurs propres correspondant à la détermination des modes de ballonnement de la surface libre fluide.

Nous présentons ensuite la technique de couplage éléments finis/éléments finis et éléments finis/équation intégrale appliqué au problème d'étude et nous formulons les expressions du problème aux valeurs propres pour le système couplé avec et sans prise en compte des modes de ballonnement du fluide.

Dans le cas d'étude du système couplé sans prise en compte des modes de ballonnement, le problème aux valeurs propres est formulé du point de vue de la structure ; les effets du fluide se traduisent par un opérateur de masse ajoutée, symétrique : le problème aux valeurs propres résultant est donc symétrique.

Dans le cas d'étude du système couplé avec prise en compte des modes de ballonnement, le problème aux valeurs propres obtenu est non symétrique : nous exposons alors le principe de l'algorithme utilisé pour la recherche des valeurs propres du système.

Les techniques de couplage étudiées dans ce chapitre sont appliquées à un cas industriel présenté dans le chapitre 5, section 5.2. L'élément fini fluide axi-symétrique en série de FOURIER défini dans ce chapitre sera implanté dans le code commercial ANSYS pour permettre l'analyse modale de problèmes couplés en géométrie axi-symétrique avec chargement non axi-symétrique.

2.1 Discrétisation du problème structure

La discrétisation du problème structure est réalisée en écrivant le problème sous forme faible et en discrétisant la formulation faible ainsi obtenue aux moyens d'éléments finis¹. Le problème structure est écrit au sens d'une formulation variationnelle [177] [166], obtenue en multipliant l'équation locale par un champ de déplacement virtuel δv vérifiant les conditions aux limites en déplacement, en intégrant par parties et en tenant compte des conditions aux limites. Le problème aux valeurs propres s'écrit alors sous forme faible :

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z) dz = \omega^2 \int_0^L \rho_S S v(z) \delta v(z) dz \quad \forall \delta v \quad (2.1)$$

La discrétisation de cette expression utilise de façon classique des éléments finis poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud ; sur l'élément $n \equiv [z_n, z_{n+1}]$, le déplacement v est calculé comme :

$$v|_{[z_n, z_{n+1}]} = \langle N_n^S \rangle \{V_n\}$$

avec :

- $\{V_n\}$ le vecteur des valeurs nodales de l'élément

$$\{V_n\} = \langle v_n, \theta_n, v_{n+1}, \theta_{n+1} \rangle^T$$

où $\theta = \frac{\partial v}{\partial z}$;

- $\langle N_n^S \rangle$ le vecteur des fonctions de forme associées (nous choisissons des fonctions cubiques)

$$\langle N_n^S(s) \rangle = \langle 1 - 3s^2 + 2s^3, l_n(s - 2s^2 + s^3), 3s^2 - 2s^3, l_n(-s^2 + s^3) \rangle$$

avec $z = z_n + sl_n$, pour $s \in [0, 1]$, et $l_n = z_{n+1} - z_n$.

Le problème modal discrétisé s'écrit ainsi :

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Les matrices \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S sont assemblées à partir des matrices élémentaires \mathbf{m}_S^n et \mathbf{k}_S^n ; les composantes (i, j) des matrices élémentaires sont calculées à partir des relations :

$$k_{S(i,j)}^n = \int_{z_n}^{z_{n+1}} EI \frac{d^2 N_i^S}{dz^2} \frac{d^2 N_j^S}{dz^2} dz$$

et :

$$m_{S(i,j)}^n = \int_{z_n}^{z_{n+1}} \rho_S S N_i^S N_j^S dz$$

Avec les fonctions de forme choisies, ces matrices élémentaires ont pour expression [11] :

$$\mathbf{m}_S^n = \frac{\rho_S S l_n}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_n & 54 & -13l_n \\ 22l_n & 4l_n^2 & 13l_n & -3l_n^2 \\ 54 & 13l_n & 156 & -22l_n \\ -13l_n & -3l_n^2 & -22l_n & 4l_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_S^n = \frac{EI}{l_n^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_n & -12 & 6l_n \\ 6l_n & 4l_n^2 & -6l_n & 2l_n^2 \\ -12 & -6l_n & 12 & -6l_n \\ 6l_n & 2l_n^2 & -6l_n & 4l_n^2 \end{bmatrix}$$

¹Les ouvrages de référence [1], [9] [14] et [21] proposent différentes présentations de la méthode des éléments finis. Nous reviendrons sur la méthode de façon plus détaillée au chapitre 3 pour l'étude du problème structure non linéaire.

2.2 Discrétisation du problème fluide

2.2.1 Éléments finis

La discrétisation du problème fluide avec une méthode éléments finis utilise les mêmes principes que ceux utilisés pour le problème structure. Nous commençons par établir la formulation variationnelle du problème aux valeurs propres fluide. L'équation locale est multipliée par un champ de pression virtuelle δp satisfaisant les conditions aux limites homogènes, puis intégrée sur tout le domaine fluide. L'utilisation des formules d'intégration par parties généralisée et la prise en compte des conditions aux limites permet d'obtenir la formulation suivante, vérifiée pour tout champ de pression virtuelle δp :

$$\int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_0^H \nabla p(r, \theta, z) \nabla \delta p(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \omega^2 \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} p(r, \theta, H) \delta p(r, \theta, H) r dr d\theta \quad (2.3)$$

avec le calcul du produit scalaire $\nabla p \nabla \delta p$ exprimé en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\nabla p \nabla \delta p = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \delta p}{\partial z}$$

Compte tenu de l'axi-symétrie de la géométrie et de la non axi-symétrie du chargement sur le problème à traiter, nous adoptons une représentation axi-symétrique en série de FOURIER de la variable pression¹. Le développement fait apparaître les modes de pression symétriques (notés s) et anti-symétriques (notés a) :

$$p(r, \theta, z, t) = \underbrace{\sum_{s=0}^{s=+\infty} p_s(r, z, t) \cos(s\theta)}_{\text{modes symétriques}} + \underbrace{\sum_{a=1}^{a=+\infty} p_a(r, z, t) \sin(a\theta)}_{\text{modes anti-symétriques}} \quad (2.4)$$

Nous nous ramenons ainsi dans le plan (r, z) , dans lequel le domaine fluide est $\Omega_F = \{(r, z) \in [R, R'] \times [0, H]\}$. Ce domaine est discrétisé avec des éléments fluides linéaires à quatre nœuds $[r_m, r_{m+1}] \times [z_n, z_{n+1}]$ avec $(n, m) \in [1, N] \times [1, M]$. Chaque nœud possède un degré de liberté (voir FIG. 2.1).

Les composantes $(p_s)_{s \geq 1}$ du développement (2.4) se calculent sur chaque élément comme :

$$p_s|_{[r_m, r_{m+1}] \times [z_n, z_{n+1}]} = \langle N_{n,m}^F \rangle \{P_{n,m}^s\}, \forall s \geq 1$$

et une relation identique pour p_a .

$\{P_{n,m}^s\}$ est le vecteur des inconnues nodales et $\langle N_{n,m}^F \rangle$ le vecteur des fonctions de forme. Les fonctions de forme pour l'élément de dimensions $2a \times 2b$ sont linéaires. En posant $r = r_o + \xi a$, $z = z_o + \eta b$ avec $2a = r_{m+1} - r_m$ et $2b = z_{n+1} - z_n$, la fonction de forme associée au nœud i est :

$$N_i^F(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

¹Dans le cas d'un problème fluide sans surface libre, la solution en pression est définie à une constante près. La matrice de raideur issue de la discrétisation du produit scalaire $\nabla p \nabla \delta p$ est donc singulière. Dans le cas d'un problème à symétrie de révolution, la représentation proposée permet d'une part de se ramener à un problème bidimensionnel ; elle permet d'autre part de reporter la singularité sur le mode symétrique d'ordre $s = 0$. Dans le cas présent, nous nous intéressons aux modes symétriques d'ordre $s = 1$ compte tenu de la condition de couplage (1.10). La matrice de raideur correspondant à ces modes n'est donc pas singulière, ce qui permet un calcul direct de l'opérateur de masse ajoutée. Nous mettons ainsi en évidence deux avantages d'une telle représentation de l'inconnue fluide.

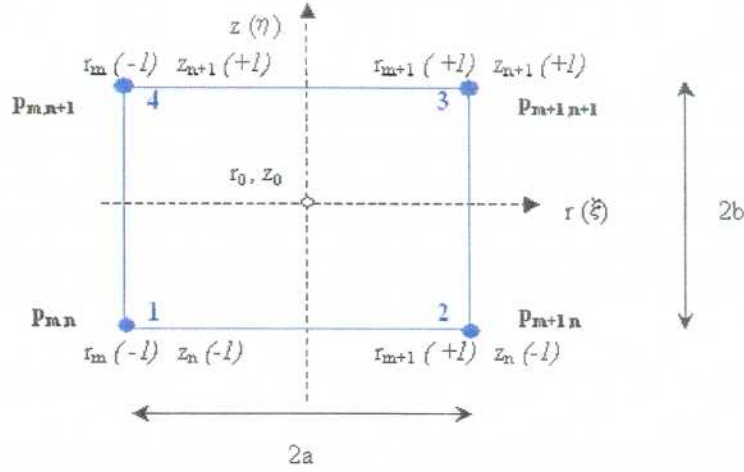


FIG. 2.1 – Élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)

avec $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ et $(\xi, \eta) \in [-1, +1] \times [-1, +1]$.

En développant δp selon une relation identique à (2.4), puis en tenant compte de l'expression de $\nabla p \nabla \delta p$ en coordonnées cylindriques et en utilisant enfin l'orthogonalité des fonctions trigonométriques, nous formulons le problème aux valeurs propres discret :

$$(\mathbf{H}_F + s^2 \mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{P}^s(\omega) = \mathbf{0}, \quad \forall s \geq 0 \quad (2.5)$$

et un système identique en a , $\forall a \geq 1$.

Les matrices \mathbf{M}_F , \mathbf{H}_F et \mathbf{K}_F sont assemblées à partir des matrices élémentaires $\mathbf{m}_F^{N,m}$, $\mathbf{k}_F^{n,m}$ et $\mathbf{h}_F^{n,m}$ (N correspond à la ligne d'éléments situés en $z = H$). Les composantes de ces matrices sont définies par :

$$\begin{aligned} m_F^{N,m}(i,j) &= \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{1}{g} N_i^F|_{z=H} N_j^F|_{z=H} r dr \\ h_F^{n,m}(i,j) &= \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{\partial N_i^F}{\partial r} \frac{\partial N_j^F}{\partial r} + \frac{\partial N_i^F}{\partial z} \frac{\partial N_j^F}{\partial z} r dr dz \\ k_F^{n,m}(i,j) &= \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{N_i^F N_j^F}{r} dr dz \end{aligned}$$

Le calcul des matrices élémentaires est alors donné, après changement de variables sur l'élément de référence, par :

$$\begin{aligned} m_{(i,j)}^F &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{g} N_i^F|_{\eta=1} N_j^F|_{\eta=1} a(r_0 + a\xi) d\xi \\ h_{(i,j)}^F &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{a^2} \frac{\partial N_i^F}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^F}{\partial \xi} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial N_i^F}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^F}{\partial \eta} (r_0 + a\xi) ab d\xi d\eta \\ k_{(i,j)}^F &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^F N_j^F \frac{ab}{r_0 + a\xi} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Les matrices élémentaires peuvent être calculées en ayant recours à des techniques d'intégration numérique [9]. Dans notre cas, un calcul analytique est possible ; les matrices élémentaires sont données explicitement par :

$$m_{(i,j)}^F = \frac{a}{8} \left[r_0 + \frac{\xi_i \xi_j r_0}{3} + \frac{a}{3} (\xi_i + \xi_j) \right] [(1 + \eta_i)(1 + \eta_j)] \quad (2.6)$$

$$h_{(i,j)}^F = abr_0 \left[\frac{\xi_i \xi_j}{4a^2} \left(1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right) + \frac{\eta_i \eta_j}{4b^2} \left(1 + \frac{\xi_i \xi_j}{3} \right) \right] + \frac{a^2}{12b} \eta_i \eta_j (\xi_i + \xi_j) \quad (2.7)$$

$$k_{(i,j)}^F = \frac{b}{8} \left[2(\xi_i + \xi_j) - \frac{2r_0}{a} \xi_i \xi_j + \left(1 - \frac{r_0}{a} (\xi_i + \xi_j) + \frac{r_0^2}{a^2} \xi_i \xi_j \right) \ln \left(\frac{r_0 + a}{r_0 - a} \right) \right] \left[1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right] \quad (2.8)$$

Les expressions précédentes permettent de définir analytiquement des matrices de masse et de raideur d'un élément fini fluide formulé en pression avec représentation en série de FOURIER. Ces éléments seront ensuite intégrés dans le code ANSYS pour permettre l'étude de cas industriels adoptant une représentation axi-symétrique de la géométrie du problème couplé avec un chargement non axi-symétrique (voir section 5.2 et [187]).

2.2.2 Equation intégrale

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent la méthode de discrétisation éléments finis du problème fluide. Cette méthode s'appuie sur la formulation variationnelle du problème fluide et nécessite une discrétisation de l'ensemble du domaine fluide. Dans le cas étudié, nous utilisons l'hypothèse d'axi-symétrie du problème pour nous ramener à un problème bidimensionnel. Dans le cas général, la taille du domaine fluide peut être importante, voire infinie dans le cas de fluides non bornés, et la méthode trouve alors ses limites.

Pour ce type de problèmes, l'utilisation d'éléments infinis peut être envisagée [64] [?]. Une alternative possible est de proposer une représentation équivalente du problème fluide sous forme d'une équation intégrale écrite sur la *frontière* du domaine fluide. La résolution numérique du problème est alors conduite en discrétisant l'équation intégrale fluide sur un domaine bidimensionnel.

Cette méthode est utilisée pour la résolution de problèmes d'acoustique fluide ou de couplage élasto-acoustique [16] et trouve des applications dans le domaine naval, en particulier pour l'étude de l'interaction entre une onde de choc (par exemple provoquée par une explosion sous marine) et une structure immergée (par exemple une coque de sous-marin) [130].

La méthode d'équation intégrale peut être couplée avec une méthode de type éléments finis ce qui permet en particulier l'étude de problèmes couplés où le fluide est compressible et/ou le domaine fluide est non borné. Cette méthode est cependant rarement utilisée pour des problèmes de fluide incompressible en domaine borné. L'utilisation de la méthode pour notre cas d'étude nous permet de proposer un exemple d'application à un problème couplé avec fluide incompressible en milieu confiné, avec prise en compte des phénomènes de ballonnement de la surface libre.

2.2.2.1 Principe de la méthode

La méthode est basée sur les résultats mathématiques suivants [160]. Soit Ω un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, de normale extérieure \mathbf{n} . Soit φ solution du problème :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \varphi &= \varphi_o \text{ sur } \partial\Omega_o \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_o \text{ sur } \partial\Omega - \partial\Omega_o \end{aligned}$$

Soit d'autre part G solution de GREEN du problème (*i.e.* solution de $\Delta G = \delta$ au sens des distributions [177] dans Ω).

L'utilisation de la formule de GREEN permet d'écrire la relation suivante, pour un problème de fluide intérieur :

$$\int_{\partial\Omega} [G(M_0, M) \frac{\partial\varphi}{\partial n}(M) - \varphi(M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M)] dS = \begin{cases} 4\pi\varphi(M_0) & M_0 \in \Omega \\ 2\pi\varphi(M_0) & M_0 \in \partial\Omega \\ 0 & M_0 \notin \Omega \cup \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette relation constitue l'équation intégrale du problème fluide. La résolution de cette équation intégrale peut être conduite à l'aide :

- d'une méthode *d'éléments finis de frontière* : il s'agit alors d'associer à l'équation intégrale une formulation variationnelle symétrique [93] ; cette formulation variationnelle est alors discrétisée à l'aide d'une technique éléments finis [45]. Cette approche permet un couplage avec une discrétisation de la forme variationnelle du problème structure : le problème couplé ainsi obtenu est symétrique. Cette approche se prête bien à l'étude de problèmes de rayonnement acoustique de structures [44] ;
- d'une méthode de *collocation par points* : il s'agit de discrétiser la frontière du domaine fluide, de vérifier l'équation intégrale aux nœuds du maillage, et de formuler ainsi une relation linéaire entre les valeurs nodales des potentiels de simple et double couche [126]. Cette méthode de discrétisation peut être couplée avec une méthode éléments finis structure [123], la formulation obtenue est alors non symétrique.

Nous utiliserons cette dernière méthode, en adaptant à notre cas d'étude les principes numériques de résolution proposés par DELHOMMEAU [28].

L'équation (2.9) fait apparaître les distributions suivantes :

- *potentiel de double couche* sur $\partial\Omega$: $\mu(M) = \varphi(M)$;
- *potentiel de simple couche* sur $\partial\Omega$: $\sigma(M) = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}(M)$.

Avec ces définitions, la relation (2.9) est alors formulée :

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu(M_0)}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mu(M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) dS \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \sigma(M) G(M_0, M) dS \quad \forall M_0 \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

La méthode numérique de collocation par points nécessite une triangularisation Ω_h du domaine Ω ; la frontière $\partial\Omega$ est alors constituée de J facettes élémentaires $(\partial\Omega_j)_{j \in [1, J]}$ de sorte que $\partial\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{j=J} \partial\Omega_j$.

Sur chaque facette $\partial\Omega_j$, nous utilisons l'approximation suivante des potentiels $\mu(M) = \mu(M_j) = \mu_j$ et $\sigma(M) = \sigma(M_j) = \sigma_j, \forall M \in \partial\Omega_j$.

L'équation intégrale s'écrit sur le domaine discrétisé Ω_h :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu(M_i)}{2} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{j=J} \mu_j \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G}{\partial n}(M_i, M) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{j=J} \sigma_j \int_{\partial\Omega_j} G(M_i, M) dS \quad \forall M_i, i \in [1, J] \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'équation intégrale discrétisée est ainsi écrite sous forme matricielle :

$$[D]\{\mu\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.12)$$

avec :

$$D_{(i,j)} = -\frac{1}{2}\delta_{i,j} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G}{\partial n}(M_i, M) dS$$

et :

$$S_{(i,j)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_j} G(M_i, M) dS$$

Dans le cas tridimensionnel, la fonction de GREEN correspondant au problème fluide incompressible est donnée par¹ :

$$G(M_o, M) = \frac{1}{|M_o M|}$$

Le calcul des coefficients $D_{(i,j)}$ et $S_{(i,j)}$ utilise alors la méthode numérique des singularités [28], permettant le calcul des intégrales singulières (termes diagonaux des matrices). Nous rappelons dans l'annexe B la méthode numérique utilisée, avec un exemple d'application à un calcul d'intégrale afin de valider l'implémentation de la méthode dans un programme de calcul sous l'environnement MATLAB.

2.2.2.2 Application au problème fluide

L'expression (2.12) obtenue à partir de la discrétisation de l'équation intégrale pour le problème fluide intérieur incompressible peut être utilisée pour le calcul des modes de ballonnement d'un fluide. Sur le domaine fluide Ω_F l'équation locale $\Delta p = 0$ est résolue par discrétisation de l'équation intégrale fluide en distinguant :

- la portion de surface $\partial\Omega_{F_o}$ correspondant à la surface libre, décrite par la condition aux limites (1.9)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} p$$

- la portion de surface restante $\partial\Omega_F - \partial\Omega_{F_o}$, décrite par les conditions aux limites (1.7)-(1.8)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

¹Dans le cas bidimensionnel axi-symétrique harmonique, BÉROT détaille la solution de GREEN pour un problème fluide compressible, voir [115].

Nous séparons dans les vecteurs $\{\mu\}$ et $\{\sigma\}$ les valeurs prises par les potentiels de simple et double couche sur $\partial\Omega_{F_o}$ et $\partial\Omega_F - \partial\Omega_{F_o}$, de façon à écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{D}_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \bar{\mathbf{S}} \\ \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{S}_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma_o \end{Bmatrix}$$

Nous déduisons alors :

$$\mu = \mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{S}}\sigma_o - \mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{D}}\mu_o$$

d'où :

$$(\mathbf{D}_o - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{D}})\mu_o = (\mathbf{S}_o - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{S}})\sigma_o$$

ou encore :

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2\mathbf{M}_F)\mathbf{P}_o(\omega) = 0 \quad (2.13)$$

avec les matrices de masse et de raideur fluide calculées comme :

$$\mathbf{M}_F = -\frac{\mathbf{S}_o - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{S}}}{g} \quad \mathbf{K}_F = \mathbf{D}_o - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{D}}$$

Dans (2.13), \mathbf{P}_o désigne le vecteur des inconnues en pression au centre des facettes de la surface libre.

Dans le cas d'une méthode éléments finis, les matrices du problème sont creuses mais de grande taille, alors qu'avec la méthode d'équation intégrale les matrices obtenues sont pleines mais de petite taille.

La validation de cette approche et de son développement dans MATLAB est réalisée en comparant les résultats de calcul numérique avec la solution analytique obtenue pour le problème axi-symétrique étudié (voir annexe C).

2.3 Couplage des problèmes

Nous nous intéressons maintenant au couplage des deux problèmes. En écrivant la formulation variationnelle du problème couplé, il apparaît les termes supplémentaires suivants :

- terme de pression dans la formulation variationnelle du problème structure pour le champ de déplacement virtuel $\delta\mathbf{v}$

$$\int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{v} d\Gamma$$

- terme d'accélération dans la formulation variationnelle du problème fluide pour le champ de pression virtuelle δp

$$-\rho_F\omega^2 \int_{\Gamma} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta p d\Gamma$$

Nous allons décrire le couplage entre les deux problèmes en discrétisant le terme de travail virtuel des efforts fluide $\langle \varphi, \delta\mathbf{v} \rangle$, calculé au niveau de l'interface fluide/structure¹, avec les deux approches (éléments finis, équation intégrale) présentées dans les paragraphes précédents, dans le cas du problème couplé étudié.

¹Dans notre cas, l'interface fluide/structure Γ est le domaine $\Gamma = \{r = R, \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]\}$.

2.3.1 Couplage éléments finis/éléments finis

Compte tenu du choix de représentation de la variable pression selon l'équation (2.4), de la condition de couplage (1.10), de la forme de l'interface fluide/structure et des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques $\cos(s\theta)$ et $\sin(a\theta)$, le calcul de $\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle &= R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^H p(R, z) \delta v(z) dz \\ &= \pi R \int_0^H p(R, z) \delta v(z) dz \end{aligned}$$

où p est la composante d'ordre $s = 1$ dans le développement en série de FOURIER (2.4).

Le calcul des termes d'interaction fluide/structure est réalisé au niveau de l'interface. Nous utilisons un couplage conforme entre les éléments poutre monodimensionnels et les éléments fluide bidimensionnels, comme représenté par la FIG. 2.2. La discrétisation du travail virtuel des efforts de pression est alors :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = -\langle \delta V \rangle \left(\sum_{n=1}^{n=N_h} [\Lambda_n^S]^T \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{N_n^S(z)\} \langle N_{n,1}^F(z) \rangle dz [\Lambda_{n,1}^F] \right) \{P\}$$

En reprenant les notations des paragraphes précédents relatifs à la discrétisation éléments finis des sous-problèmes structure et fluide : $\langle \delta V \rangle$ est le vecteur des quantités nodales en déplacement virtuel structure, $\{P\}$ est le vecteur des inconnues nodales en pression fluide, $[\Lambda_n^S]$ et $[\Lambda_{n,1}^F]$ sont les matrices de localisation des degrés de liberté élémentaires dans le maillage global structure et fluide. N_h est le nombre d'éléments finis structure sur l'interface fluide/structure.

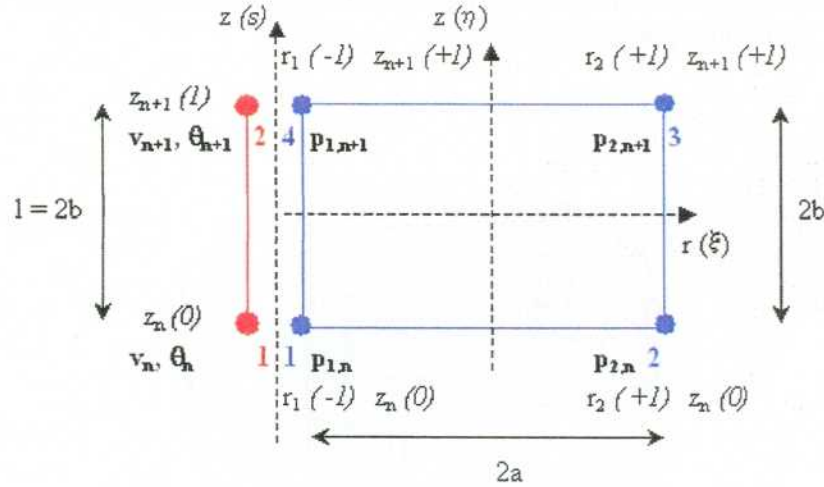


FIG. 2.2 – Couplage conforme entre un élément fini poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (v, θ) et un élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)

L'expression précédente met en évidence une matrice élémentaire d'interaction fluide/structure, notée $[r^n]$ dont les composantes se calculent comme :

$$\begin{aligned} r_{(i,j)}^n &= \pi R \int_{z_n}^{z_{n+1}} N_i^S N_j^F dz \\ &= \pi R \int_0^1 N_i^S(s) N_j^F(s) ds \end{aligned}$$

avec $N_j^F(s) = \frac{(1 - \xi_j)(1 - \eta_j + 2\eta_j s)}{4}$ en tenant compte du changement de variable $\eta = -1 + 2s$ introduit pour réaliser le couplage conforme entre l'élément poutre et l'élément fluide et faire coïncider les variables locales des deux éléments couplés suivant z .

La matrice élémentaire \mathbf{r} est donnée explicitement par [114] :

$$\mathbf{r} = \pi R \begin{bmatrix} \frac{7l}{20} & 0 & 0 & \frac{3l}{20} \\ \frac{l^2}{20} & 0 & 0 & \frac{l^2}{30} \\ \frac{3l}{20} & 0 & 0 & \frac{7l}{20} \\ \frac{-l^2}{30} & 0 & 0 & \frac{-l^2}{20} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

L'assemblage des matrices élémentaires $[r_n]$ permet d'obtenir une matrice d'interaction fluide/structure pour le problème couplé ; cette matrice est notée $[R]$. Le calcul de $\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle$ est alors :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = -\langle \delta V \rangle [R] \{P\} \quad (2.15)$$

2.3.2 Couplage éléments finis/équation intégrale

La résolution du problème fluide par discrétisation de l'équation intégrale pour le problème du laplacien nécessite le maillage de la frontière du domaine fluide tridimensionnelle avec J facettes notées $(\partial\Omega_j)_{j \in [1, J]}$, comme représenté par la FIG. 2.3.

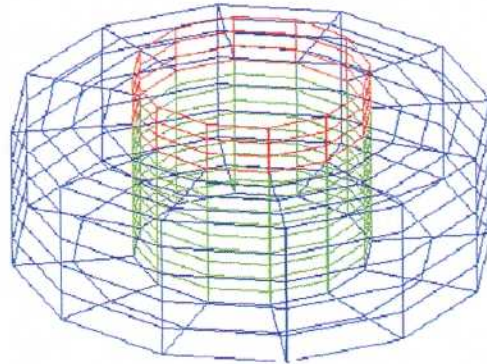


FIG. 2.3 – Maillage de la frontière du problème posé par la FIG. 1.1 (maillage de la frontière fluide en bleu, de la structure en rouge et de l'interface fluide/structure en vert)

Nous avons montré au sous-paragraphe 2.2.2.1 le lien entre la pression et la dérivée normale de la pression sur l'interface fluide structure selon :

$$[D]\{P\} = -[S]\left\{\frac{\partial P}{\partial n}\right\}$$

où $\{P\}$ et $\left\{\frac{\partial P}{\partial n}\right\}$ sont les valeurs nodales de pression et de gradient de pression sur l'interface fluide/structure.

Nous calculons alors $\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle$ de la façon suivante :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\partial \Omega_j} p \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

avec :

$$\int_{\partial \Omega_j} p \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \langle \delta V \rangle_j [N_j]^T \{n_j\} A_j P_j$$

où $[N_j] = [N^S(M_j)]$, avec N^S fonction de forme pour l'élément fini structure et M_j centre de la facette $\partial \Omega_j$. $\{n_j\}$ est la normale locale en M_j , P_j est la valeur au centre de la facette $\partial \Omega_j$ d'aire A_j , calculée à partir de la relation :

$$P_j = - \sum_{i=1}^{i=J} (D^{-1} S)_{ji} \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_i$$

où $\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_i$ est la valeur de $\frac{\partial p}{\partial n}$ au point $M_i \in \partial \Omega_i$.

Compte tenu de la condition de couplage $\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_F \omega^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sur l'interface Γ , nous trouvons donc :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = \rho_F \omega^2 \sum_{j=1}^{j=J} \sum_{i=1}^{i=J} \langle \delta V_j \rangle [N_j]^T \{n_j\} A_j (D^{-1} S)_{ji} \langle n_i \rangle [N_i] \{V_i\}$$

ou encore :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = -\rho_F \omega^2 \langle \delta V \rangle [R]^T [A] [D^{-1} S] [R] \{V\} \quad (2.16)$$

Dans cette expression, $[A]$ est la matrice des aires des facettes de l'interface fluide/structure ; cette matrice est diagonale :

$$A_{i,j} = \delta_{ij} A_i$$

$[R]$ est la matrice de couplage fluide/structure. Dans le cas de la FIG. 2.3, cette matrice est de dimension $NN_\theta \times 2(N+1)$, avec N le nombre d'éléments finis discrétisant la poutre et NN_θ le nombre de facettes sur la poutre. La structure de la matrice $[R]$ est donnée par la FIG. 2.4. Le motif est répété N_b fois dans le cas d'un couplage entre un élément fini structure et N_b bandes de facettes fluide [114].

Remarque 3 Pour le problème couplé fluide/structure étudié, la relation réellement utilisée entre $\{\sigma\}$ et $\{\mu\}$ doit être modifiée pour prendre en compte les différentes conditions aux limites. Nous distinguons plus précisément trois portions de surface sur le domaine fluide :

1. interface fluide/structure : les distributions correspondantes sont μ_1 et σ_1 ;
2. surface libre : les distributions correspondantes sont μ_2 et σ_2 ;
3. paroi rigide : les distributions correspondantes sont μ_3 et σ_3 .

Nous écrivons alors la relation (2.12) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{D}_4 & \mathbf{D}_5 & \mathbf{D}_6 \\ \mathbf{D}_7 & \mathbf{D}_8 & \mathbf{D}_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_4 & \mathbf{S}_5 & \mathbf{S}_6 \\ \mathbf{S}_7 & \mathbf{S}_8 & \mathbf{S}_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

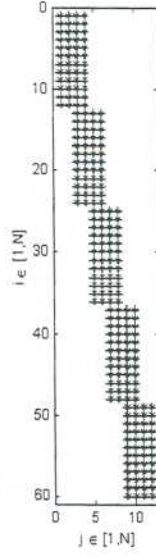


FIG. 2.4 – Structure de la matrice de couplage fluide/structure. Cas du couplage élément finis/équation intégrale

De cette relation, nous déduisons :

$$\mu_3 = \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_7 \sigma_1 + \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_8 \sigma_2 + \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_9 \sigma_3 - \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_8 \mu_2 - \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_7 \mu_1$$

et par suite une relation du type :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_1 & \tilde{\mathbf{D}}_2 \\ \tilde{\mathbf{D}}_3 & \tilde{\mathbf{D}}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1 & \tilde{\mathbf{S}}_2 \\ \tilde{\mathbf{S}}_3 & \tilde{\mathbf{S}}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_1 &= \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_7 & \tilde{\mathbf{D}}_2 &= \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_8 \\ \tilde{\mathbf{D}}_3 &= \mathbf{D}_4 - \mathbf{D}_6 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_7 & \tilde{\mathbf{D}}_4 &= \mathbf{D}_5 - \mathbf{D}_6 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{D}_8 \\ \tilde{\mathbf{S}}_1 &= \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_7 & \tilde{\mathbf{S}}_2 &= \mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_8 \\ \tilde{\mathbf{S}}_3 &= \mathbf{S}_4 - \mathbf{D}_6 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_7 & \tilde{\mathbf{S}}_4 &= \mathbf{S}_5 - \mathbf{D}_6 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_8 \\ \tilde{\mathbf{S}}_5 &= \mathbf{S}_3 - \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_3 & \tilde{\mathbf{S}}_6 &= \mathbf{S}_6 - \mathbf{D}_8 \mathbf{D}_9^{-1} \mathbf{S}_9 \end{aligned}$$

Cette expression générale permet de traiter les différents cas de couplage, en reprenant le raisonnement ci-dessus.

Surface libre sans ballottement Dans ce cas de calcul, nous avons $\sigma_3 = 0$ et $\mu_2 = 0$, de sorte que nous pouvons écrire :

$$\sigma_2 = \tilde{\mathbf{S}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_3 \mu_1 - \tilde{\mathbf{S}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_3 \sigma_1$$

d'où la relation écrite sur l'interface fluide structure :

$$[\mathbf{D}_\Gamma] \{\mu_\Gamma\} = [\mathbf{S}_\Gamma] \{\sigma_\Gamma\}$$

avec μ_Γ et σ_Γ représentant les doublets et les sources sur Γ , et :

$$\mathbf{D}_\Gamma = \tilde{\mathbf{D}}_1 - \tilde{\mathbf{S}}_2 \tilde{\mathbf{S}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_3 \quad \mathbf{S}_\Gamma = \tilde{\mathbf{S}}_1 - \tilde{\mathbf{S}}_2 \tilde{\mathbf{S}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_3$$

Le travail virtuel des forces de pression est alors :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = -\rho_F \omega^2 \sum_{j=1}^{j=J} \sum_{i=1}^{i=J} \langle \delta V_j \rangle [N_j]^T \{n_j\} A_j (D_\Gamma^{-1} S_\Gamma)_{ji} \langle n_i \rangle [N_i] \{V_i\}$$

c'est-à-dire :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = \omega^2 \langle \delta V \rangle [M_H] \{V\} \quad (2.17)$$

avec :

$$\mathbf{M}_H = -\rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\Gamma^{-1} \mathbf{S}_\Gamma \mathbf{R}$$

Surface libre avec ballonnement Dans ce cas de calcul, nous avons seulement $\sigma_3 = 0$. Nous déduisons alors les relations suivantes :

- pour le problème structure

$$[D_\Gamma] \{\mu_\Gamma\} = [S_\Gamma] \{\sigma_\Gamma\} + [S_o^*] \{\sigma_o\}$$

- pour le problème fluide

$$[D_o] \{\mu_o\} = [S_o] \{\sigma_o\} + [S_\Gamma^*] \{\sigma_\Gamma\}$$

avec :

$$\mathbf{D}_\Gamma = \tilde{\mathbf{D}}_1 - \tilde{\mathbf{D}}_2 \tilde{\mathbf{D}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_3 \quad \mathbf{S}_\Gamma = \tilde{\mathbf{S}}_1 - \tilde{\mathbf{D}}_2 \tilde{\mathbf{D}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_3 \quad \mathbf{S}_o^* = \tilde{\mathbf{S}}_2 - \tilde{\mathbf{D}}_2 \tilde{\mathbf{D}}_4^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_4$$

et :

$$\mathbf{D}_o = \tilde{\mathbf{D}}_4 - \tilde{\mathbf{D}}_3 \tilde{\mathbf{D}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_2 \quad \mathbf{S}_o = \tilde{\mathbf{D}}_3 - \tilde{\mathbf{D}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_2 - \tilde{\mathbf{S}}_4 \quad \mathbf{S}_\Gamma^* = \tilde{\mathbf{S}}_4 - \tilde{\mathbf{D}}_3 \tilde{\mathbf{D}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_2$$

μ_Γ et σ_Γ représentent les doublets et les sources sur l'interface avec la structure et μ_o et σ_o les sources et doublets sur la surface libre.

Le travail virtuel des forces de pression est alors :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle &= \rho_F \sum_{j=1}^{j=J} \sum_{i=1}^{i=J} \langle \delta V_j \rangle [N_j]^T \{n_j\} A_j (D_\Gamma^{-1} S_\Gamma)_{ji} \langle n_i \rangle [N_i] \{\ddot{V}\}_i \\ &\quad - \frac{\omega^2}{g} \sum_{j=1}^{j=J} \sum_{i=1}^{i=J_o} \langle \delta V_j \rangle [N_j]^T \{n_j\} A_j (D_\Gamma^{-1} S_\Gamma^*)_{ji} \{P_i\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\langle \varphi, \delta \mathbf{v} \rangle = \omega^2 \langle \delta V \rangle [M_H] \{V\} + \omega^2 \langle \delta V \rangle [M_P] \{P\} \quad (2.18)$$

avec $\{V\}$ représentant les degrés de liberté structure en déplacement (valeurs nodales pour le maillage par éléments finis du problème structure) et $\{P\}$ les degrés de liberté fluide en pression (valeurs centrales pour le maillage par facettes du problème fluide). J et J_o sont les nombres de facettes respectivement sur l'interface fluide structure et sur la surface libre.

Les matrices \mathbf{M}_H et \mathbf{M}_P sont données par :

$$\mathbf{M}_H = -\rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\Gamma^{-1} \mathbf{S}_\Gamma \mathbf{R} \quad \mathbf{M}_P = -\frac{1}{g} \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\Gamma^{-1} \mathbf{S}_o^* \quad (2.19)$$

Le problème fluide s'écrit également :

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{P}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_U \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

avec :

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{D}_o \quad \mathbf{M}_F = -\frac{1}{g} \mathbf{S}_o$$

et :

$$\mathbf{M}_U = -\rho_F \mathbf{S}_\Gamma^* \mathbf{R} \quad (2.21)$$

2.4 Formulation du problème modal

A partir des différentes méthodes de couplage présentées précédemment, nous proposons maintenant la formulation finale du problème couplé en distinguant d'une part le cas général prenant en compte les modes de flexion de la structure et les modes de ballottement du fluide, et d'autre part le cas particulier des modes de flexion de poutre couplée avec un fluide sans modes de ballottement.

L'expression des équations du problème couplé est donnée dans le cas d'un couplage éléments finis/éléments finis et dans le cas d'un couplage éléments finis/équation intégrale.

2.4.1 Problème couplé avec ballottement fluide

A partir des expressions établies dans les paragraphes précédents, nous donnons l'expression du problème aux valeurs propres pour le système couplé, prenant en compte les phénomènes de flexion élastique de la structure et les phénomènes de surface libre du fluide. Les systèmes matriciels obtenus avec les deux méthodes de discrétisation du problème fluide sont les suivants. Le problème aux valeurs propres obtenu est non symétrique : il sera résolu avec un algorithme de recherche de valeurs propres adapté (voir section 2.5).

Couplage éléments finis/éléments finis La discrétisation éléments finis/éléments finis de la formulation variationnelle du problème couplé permet d'écrire le système matriciel non symétrique suivant :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

En distinguant les nœuds de la surface libre \mathbf{P}_o des nœuds du reste du domaine fluide $\tilde{\mathbf{P}}$, le vecteur des inconnues nodales fluide $\{P\}$ s'écrit sous la forme :

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_o \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{Bmatrix}$$

Nous pouvons formuler le système matriciel couplé en partitionnant les matrices de masse et de raideur :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R}_o^T & \mathbf{M}_F^o & \mathbf{0} \\ -\rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}_o & \tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o & \tilde{\mathbf{K}}_F^o \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} & \tilde{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \\ \tilde{\mathbf{P}}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Nous déduisons alors :

$$\tilde{\mathbf{P}} = -\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^o \mathbf{P}_o + \rho_F \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{V}$$

et le système suivant, portant sur les degrés de liberté \mathbf{V} et \mathbf{P}_o :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}_o - \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T & \mathbf{0} \\ -\rho_F (\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T) & \mathbf{M}_F^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Couplage éléments finis/équation intégrale La formulation matricielle du problème dans le cas d'un couplage éléments finis/équation intégrale est obtenue à partir des équations (2.18) et (2.20). Elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H & \mathbf{M}_P \\ \mathbf{M}_U & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

avec \mathbf{M}_H , \mathbf{M}_P et \mathbf{M}_u données par les équations (2.19) et (2.21).

2.4.2 Problème couplé sans ballonnement fluide

Lorsque les phénomènes de ballonnement fluide ne sont pas pris en compte, le problème couplé est formulé du point de vue structure avec l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{V}(\omega) = \omega^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{V}(\omega) \quad (2.24)$$

Le problème aux valeurs propres ainsi posé est symétrique, l'opérateur \mathbf{M}_H possédant la propriété de symétrie. \mathbf{M}_H est obtenu en éliminant la pression dans le problème structure. Cet opérateur prend la forme suivante (en reprenant les notations définies précédemment) :

– couplage éléments finis/éléments finis

$$\mathbf{M}_H = \rho_F \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}$$

– couplage éléments finis/équation intégrale

$$\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\Gamma^{-1} \mathbf{S}_\Gamma \mathbf{R}$$

Remarque 4 La matrice de masse ajoutée \mathbf{M}_H discrétise la forme bilinéaire de masse ajoutée $m_H(.,.)$ définie de façon théorique au chapitre 1. La définition théorique de cette forme bilinéaire utilise la composition de trois applications ; il est donc naturel de retrouver dans la définition de la matrice \mathbf{M}_H une multiplication de trois matrices.

2.5 Algorithme de résolution du problème modal non symétrique

L'étude numérique du problème modal couplé nécessite la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (2.25)$$

avec des matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} non symétriques.

Il existe des méthodes permettant d'obtenir une formulation symétrique pour le problème couplé [67] [77] [109] [124]. Dans notre cas, l'étude du problème modal se limite à un calcul de modes et de fréquences propres du système couplé¹. Il est alors possible d'utiliser pour ce type de problème des adaptations de l'algorithme de LANCZOS [172] au cas non symétrique [174]².

¹Une analyse dynamique du problème couplé linéaire utilisant une décomposition sur base modale [89] aurait nécessité le calcul des masses modales de chaque mode propre, et l'utilisation des propriétés d'orthogonalité des modes aux matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} , justifiant le recours à une formulation symétrique. Dans l'étude numérique présenté au chapitre 5, nous résolvons le problème temporel pour le système couplé linéaire avec une méthode d'intégration directe qui peut être conduite sur un problème matriciel non symétrique. Nous choisissons donc de travailler sur le système non symétrique.

²Un exemple d'application de cet algorithme à la recherches de modes propres d'un système couplé élasto-acoustique est proposé dans [175].

Nous développons dans MATLAB un code de calcul permettant l'analyse modale du problème couplé générique et d'un problème industriel. Nous utiliserons pour cette étude l'algorithme de LANCZOS non symétrique, et nous développons alors une fonction spécifique dans MATLAB. Nous montrerons également que la fonction d'extraction de valeurs propres eig disponible dans MATLAB¹ permet de déterminer les éléments propres du système couplé de façon aussi efficace que l'algorithme de LANCZOS non symétrique (voir annexe C.1). Dans la suite de l'étude, les valeurs propres seront calculées avec l'une ou l'autre de ces méthodes, sans mention explicite à l'algorithme utilisé.

Le principe de l'algorithme de LANCZOS est le suivant [174]. Considérons le problème aux valeurs propres (2.25) et le problème transposé :

$$\mathbf{K}^T \mathbf{z} = \lambda \mathbf{M}^T \mathbf{z} \quad (2.26)$$

Ces deux problèmes possèdent des valeurs propres communes et il est possible d'obtenir des vecteurs propres $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in [1, n]}$ de (2.25) et des vecteurs propres $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in [1, n]}$ de (2.26) tels que $\forall (i, j)$:

$$\mathbf{z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i = \delta_{ij}$$

Les vecteurs \mathbf{x}_i et \mathbf{z}_i sont les vecteurs propres à gauche et à droite du problème (2.25).

L'idée de l'algorithme est de générer des vecteurs $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in [1, m]}$ et $\{\mathbf{w}_i\}_{i \in [1, m]}$ avec $m \leq n^2$ vérifiant les conditions de **M**-bi-orthonormalité suivantes :

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

où $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_i]_{i \in [1, m]}$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_i]_{i \in [1, m]}$. Ces vecteurs sont les vecteurs de LANCZOS à droite et à gauche. Pour $n = m$, ils sont confondus avec les vecteurs propres à droite et à gauche ; pour $m \leq n$ ils donnent une approximation des m premières valeurs propres de (2.25).

La construction de ces vecteurs est la suivante. Partant de deux vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{w}_1 tels que $\mathbf{w}_1^T \mathbf{v}_1 = 1$, nous calculons ensuite par récurrence les m vecteurs de LANCZOS à l'aide des relations :

$$\mathbf{v}_{j+1} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{j+1}}{\delta_{j+1}}$$

$$\mathbf{w}_{j+1} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{j+1}}{\beta_{j+1}}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{j+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{v}_j - \alpha_j \mathbf{v}_j - \beta_j \mathbf{v}_{j-1}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{j+1} = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^T \mathbf{w}_j - \alpha_j \mathbf{w}_j - \beta_j \mathbf{w}_{j-1}$$

Les coefficients α_i , β_i et δ_i sont donnés par :

$$\alpha_j = \mathbf{w}_j^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{w}_j$$

¹La fonction eig procède à l'extraction des valeurs propres d'un problème du type (2.25). Cette fonction est réalisée en plusieurs étapes [167] [180] :

- pré-conditionnement du système (fonction balance) ;
- transformation de HESSENBERG (fonction hess) ;
- détermination des valeurs propres sur la matrice transformée avec l'algorithme QR (fonction qr) [162] [168].

Le traitement numérique proposé (pré-conditionnement, transformation de HESSENBERG) permet d'améliorer le calcul des valeurs propres dans le cas de matrices non symétriques, souvent mal conditionnées pour le problème de valeurs propres.

² n est la taille du problème, m est le nombre de vecteurs propres extraits.

$$\delta_{j+1} = \|\tilde{\mathbf{w}}_{j+1}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{w}}_{j+1}\|^{1/2}$$

$$\beta_{j+1} = \delta_{j+1} \varepsilon(\tilde{\mathbf{w}}_{j+1}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{w}}_{j+1})$$

avec $\varepsilon(x)$ désignant le signe de la quantité x (-1 si négatif, $+1$ si positif et 0 si nul).

Lors de la récursion, les vecteurs de LANCZOS \mathbf{v}_j et \mathbf{w}_j peuvent perdre leur propriété de bi-orthogonalité par rapport aux matrices \mathbf{M} et \mathbf{M}^T . A chaque itération, nous calculons les quantités suivantes :

$$\theta_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{j+1} \quad \phi_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{M}^T \mathbf{w}_{j+1}$$

et si l'une de ces deux valeurs dépasse une tolérance ϵ_0 , les vecteurs de LANCZOS sont re-calculés avec la condition de bi-orthogonalité forcée suivante :

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_{j+1} - \theta_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_{j+1} - \phi_i \mathbf{w}_i$$

La détermination des m vecteurs de LANCZOS permet de construire une matrice tridiagonale \mathbf{T} définie par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}$$

qui possède la propriété essentielle suivante ; soient \mathbf{x}_i un vecteur propre de (2.25) et \mathbf{y}_i tels que : $\mathbf{x}_i = \mathbf{V} \mathbf{y}_i$, alors en multipliant (2.25) par $\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}$ et en utilisant $\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}$, nous avons :

$$\mathbf{T} \mathbf{y}_i = \mu_i \mathbf{y}_i$$

où

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

La matrice \mathbf{T} est tri-diagonale :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_3 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_m \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_m & \alpha_m \end{bmatrix}$$

et dans le cas général, elle est non symétrique puisque $\beta_j = \pm \delta_j$; sa taille est égale au nombre de vecteurs de LANCZOS extraits. Les valeurs propres $\{\mu_i\}_{i \in [1, m]}$ de la matrice \mathbf{T} sont des approximations des inverses des m valeurs propres du système initial.

L'extraction des valeurs propres de \mathbf{T} fournit donc les valeurs propres du système initial en commençant par l'extrémité inférieure du spectre de (2.25). Lorsque la taille de la matrice \mathbf{T} est augmentée, les valeurs propres μ_i se rapprochent des valeurs propres du système initial.

*
* *

Nous avons présenté dans ce chapitre les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème aux valeurs propres formulé sur le cas générique d'étude. Nous avons utilisé une méthode de discrétisation éléments finis du problème structure sur domaine fixe. Cette approche numérique est couplée avec deux approches de résolution du problème fluide : discrétisation éléments finis, d'une part et discrétisation de l'équation intégrale du problème fluide par une méthode de collocation par points, d'autre part. Le principe des méthodes a été rappelé sur le problème fluide ainsi que les formulations correspondantes du problème couplé. La validation des deux approches développées dans un code de calcul sous MATLAB est proposée en annexe C. Dans la suite de l'étude, les calculs couplés seront réalisés avec une méthode éléments finis, la méthode d'équation intégrale étant d'un usage moins direct pour les problèmes industriels étudiés. L'analyse modale d'un réacteur de propulsion avec prise en compte du couplage fluide/structure, présentée à la section 5.2, utilise l'élément fini fluide axi-symétrique étudié dans ce chapitre. Cet élément sera à terme implanté dans le code éléments finis généraliste ANSYS [187]. Nous présentons dans le chapitre suivant les méthodes de calcul utilisées pour résoudre le problème d'évolution.

Résolution du problème d'évolution

Nous exposons dans ce chapitre la méthode de résolution numérique appliquée à l'étude du problème d'évolution décrit par les équations (1.13) à (1.26). Nous commençons par rappeler les différentes stratégies de résolution d'un problème couplé fluide/structure, ainsi que les algorithmes de couplage utilisés dans différentes études numériques. L'interfacage des codes de calculs numériques structure et fluide utilisés dans cette thèse nous impose de retenir une méthode de couplage générale basée sur une intégration *explicite* et *décalée* des deux sous-problèmes. Le couplage ainsi obtenu est qualifié de *couplage faible*.

Nous exposons ensuite les méthodes de résolution spécifiques à chaque sous-problème :

- la résolution du problème fluide utilise une méthode de discrétisation en espace de type *volumes finis*, avec une intégration temporelle basée sur un algorithme *implicite* utilisant une technique de *découplage* des équations en pression et en vitesse du problème ;
- la résolution du problème structure utilise une méthode de discrétisation en espace de type *éléments finis*, avec une intégration temporelle basée sur des méthodes *explicites* et/ou *implicites*.

Nous terminons en détaillant la stratégie de couplage des deux problèmes en abordant les aspects :

- de couplage en *temps* : approximation en temps des quantités physiques échangées entre les codes et traitement des instabilités numériques induites par la méthode de résolution ;
- de couplage en *espace* : transfert des informations en espace entre les deux solveurs, gestion des non compatibilités de maillage.

3.1 Principes de résolution d'un problème couplé fluide/structure

La simulation numérique de problèmes couplés fluide/structure nécessite la résolution de problèmes distincts fluide et structure, couplés par une condition d'échange d'énergie au niveau de leur interface de contact [97].

La classe de problèmes couplés à laquelle nous nous intéressons dans cette thèse satisfait les hypothèses suivantes :

- les milieux fluides et solides échangent des énergies d'origine *mécanique* ;
- les phases solides et fluides sont *distinctes* ;
- les milieux solides et fluides *n'échangent pas de masse*.

Dans ce contexte, la formulation du problème couplé est typiquement basée sur la description suivante des sous-problèmes fluide et structure :

- le problème structure est formulé en *déplacement*; il s'agit de résoudre les équations du mouvement, et de déterminer les champs de déplacement \mathbf{u} , de déformations $\varepsilon(\mathbf{u})$ et de contraintes $\sigma(\mathbf{u})$ dans le domaine structure Ω_S ;
- le problème fluide est formulé en *pression/vitesse*; il s'agit de résoudre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et de déterminer les champs de pression p et de vitesse \mathbf{v} dans le domaine fluide $\Omega_F(t)$.

Au niveau de l'interface, les grandeurs échangées sont (voir FIG. 3.1) :

- des *efforts* du fluide vers la structure ;
- des *déplacements* de la structure vers le fluide.

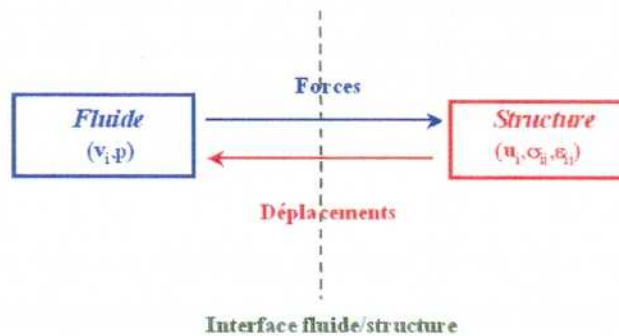


FIG. 3.1 – Schématisation générale d'un problème de couplage mécanique fluide/structure

Du point de vue numérique, la résolution du problème peut être conduite en utilisant différentes approches [128]. La discrétisation en espace du problème couplé peut utiliser une combinaison des techniques de discrétisation classiques pour chacun des sous-problèmes (différences finies, éléments finis, volumes finis) :

- la discrétisation du problème structure est réalisée le plus souvent au moyen d'*éléments finis* [21], bien adaptés à la résolution des équations d'équilibre de la mécanique des solides élastiques [6]. D'autres approches sont cependant possibles : DEMIRDZIC et MUZAFERIJA [8], GIANNOPAPA et PAPADAKIS [88] utilisent par exemple une discrétisation de type volumes finis pour la résolution de problèmes linéaires et non linéaires ;
- la discrétisation du problème fluide est conduite à l'aide de techniques de type *volumes finis* [31], bien adaptées à la représentation des lois de conservation de la mécanique des fluides. D'autres techniques sont évidemment utilisables, en particulier une résolution au moyen d'éléments finis, même si ces méthodes très utilisées il y a une vingtaine d'années [49] ont été supplantées par des méthodes de type volumes finis, développées de façon majoritaire dans les codes de mécanique des fluides¹.

La résolution du problème couplé est alors conduite en échangeant les informations entre les deux sous-problèmes [100] ; il existe une grande variété de stratégies de couplage, qui dépendent en particulier des modélisations retenues pour les deux milieux et des techniques de discrétisation employées pour

¹Il faut toutefois noter que du point de vue numérique et mathématique, l'étude théorique de la méthode des éléments finis a permis d'énoncer des résultats de convergence assez généraux [6], alors que la méthode des volumes finis continue de faire l'objet d'études théoriques, relatives par exemple à des résultats de convergence [163].

résoudre chacun des deux problèmes. Le couplage réalisé entre les deux sous-problèmes peut être plus ou moins fort (voir FIG. 3.2) :

- dans un *couplage fort*, les équations décrivant les deux milieux sont résolues simultanément, et les échanges d'énergies entre les deux systèmes vérifient de façon exacte le principe d'action/réaction¹ : le couplage obtenu est numériquement conservatif. Cette technique est facilement applicable pour des domaines de calcul fixes [95] [127], elle l'est moins dans un cas plus général où les équations à résoudre sont non linéaires et les domaines fluide et/ou structure varient dans le temps. Des travaux récents [76], encore limités à des cas académiques, proposent une méthode de résolution fortement couplée. Ces méthodes sont basées sur une représentation similaire des deux problèmes, par exemple en adoptant une formulation en pression/vitesse pour le solide² ;
- dans un *couplage faible*, les équations décrivant les deux milieux sont résolues simultanément ou alternativement, mais les échanges d'énergie ne vérifient pas strictement le principe d'action/réaction : le couplage obtenu est par essence non conservatif [120] ; il s'agira alors de limiter ou compenser les pertes d'énergie [117], en adoptant une stratégie de couplage adaptée au problème posé. Cette méthode est plus générale que la précédente, mais moins robuste [128].

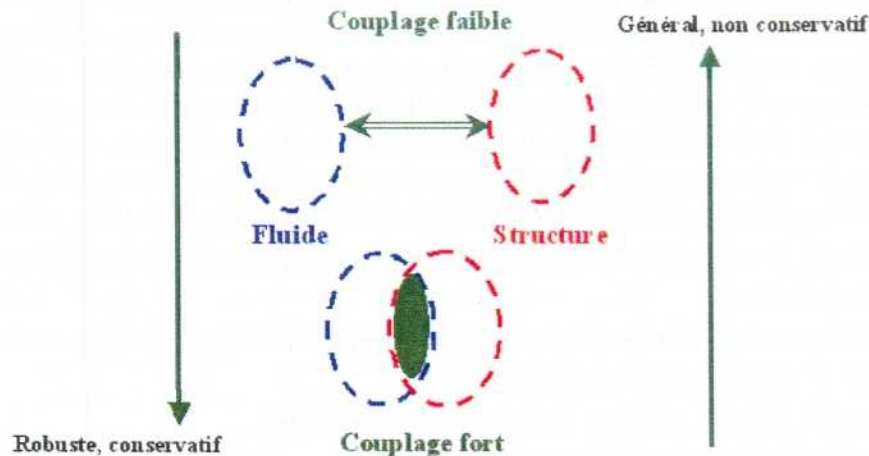


FIG. 3.2 – Couplage fort et couplage faible [128]

De façon générale, la simulation numérique de problèmes couplés fluide/structure utilisera donc les éléments suivants.

Un code de dynamique des structures qui permet de résoudre le sous-problème structure, en discrétisant les équations aux dérivées partielles du modèle choisi pour la structure. Plus précisément, le code de dynamique des structures doit être capable de :

- recevoir les informations représentant les forces exercées par le fluide sur l'interface fluide/structure. Ces informations sont reçues dans un certain format et doivent être exprimées dans la formulation adoptée par le code de structure (par exemple, relativement au maillage de la structure, aux éléments finis choisis) ;

¹Cette technique de couplage est utilisée dans le chapitre 2 pour la résolution du problème modal.

²Cette approche permet d'utiliser des méthodes numériques adaptées à la formulation retenue pour le problème couplé, par exemple une discrétisation en espace de type volumes finis, avec une intégration en temps avec l'algorithme PISO [88].

- avancer en temps le problème structure ;
- transférer des déplacements, voire des vitesses, au code fluide pendant la simulation dans un format défini lié à la formulation adoptée par ce dernier.

Un code de dynamique des fluides en domaine mobile qui permet de résoudre le sous-problème fluide en discrétisant les équations aux dérivées partielles du modèle choisi pour le fluide. Plus précisément, le code de dynamique des fluides doit être capable de :

- recevoir les informations représentant des déplacements d'une partie de sa frontière ;
- avancer en temps le problème fluide en domaine déformable, le plus souvent en maillage mobile ; la formulation du problème utilise pour cela le plus généralement des méthodes de type ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) [125] qui permettent de ré-écrire les équations du fluide dans un repère mobile, lié au point considéré [54] [135]. Ceci permet d'adopter une approche plutôt *lagrangienne* près de la structure (le maillage fluide suit la structure) et plutôt *eulérienne* loin de celle-ci ;
- transférer des forces exercées sur l'interface fluide/structure au code structure, dans un format défini à l'avance, lié à la formulation adoptée par celui-ci.

Une interface de couplage en espace qui assure la traduction des forces et des déplacements mentionnés ci-dessus, lorsque les maillages ou les formulations adoptés dans chaque code sont différents. Cette tâche est effectuée indépendamment des schémas retenus dans chaque code et sa complexité est très variable, en fonction des discrétisations retenues dans chacun des outils numériques fluide et structure. Nous entendons par discrétisation en espace, non seulement le maillage, mais aussi le type d'approximations en espace (volumes finis, éléments finis, approches modales pour la structure). Les configurations classiquement rencontrées sont les suivantes :

- les maillages et les formulations des codes fluide et structure sont identiques (par exemple, des éléments finis) ;
- les maillages sont identiques mais pas les formulations (par exemple, éléments finis pour la structure et volumes finis pour le fluide) ;
- les formulations sont identiques mais pas les maillages ;
- les formulations et les maillages sont différents.

Suivant la configuration du calcul, la manière dont les échanges d'informations en espace sont organisés peut s'avérer cruciale. Si nous supposons qu'aucune erreur n'est produite par le schéma en temps (typiquement lorsque le pas de temps est pris extrêmement petit), alors des approximations dans l'échange des forces peuvent modifier significativement les résultats numériques.

Une interface de couplage en temps qui organise l'échange des informations dans le temps et rend effectif le couplage entre les codes fluide et structure. C'est à son niveau que le couplage retenu est plus ou moins fort. Au niveau continu, ces échanges sont exacts à tout moment, en vertu du principe d'action et de réaction. A cause de la discrétisation en temps et de l'emploi de solveurs séparés pour le fluide et la structure, il est quasiment impossible de vérifier exactement ce principe à chaque instant ; la stratégie de couplage mise en place aura donc pour but de violer le moins possible ce principe. De plus, la stabilité et la précision du schéma sont bien moins satisfaisantes que celles des schémas utilisés pour chaque solveur : l'algorithme de couplage en temps devra reproduire assez finement les échanges d'énergie pour pouvoir permettre des simulations qualitativement précises. Parmi les nombreuses méthodes de couplage possibles [68] [84] [117] [118] [119] [120], nous pouvons distinguer les classes suivantes :

- les algorithmes *décalés*, pour lesquels chaque sous-système est avancé en temps successivement ;
- les algorithmes *parallèles*, pour lesquels les deux sous-systèmes sont avancés en temps parallèlement ;
- les algorithmes *itérés*, pour lesquels chaque pas de temps peut donner lieu à plusieurs calculs (comparables à ceux des algorithmes précédents pour un seul pas de temps).

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la mise en œuvre d'un processus de couplage utilisant une résolution du problème fluide général par une technique de discrétisation de type volumes finis, réalisée au moyen d'un code CFD généraliste¹ et l'une des deux représentations suivantes de la dynamique de la structure :

- une décomposition de la réponse de la structure linéaire sur la base de ses modes propres non couplés, ce qui conduit à intégrer un petit nombre d'équations scalaires découplées dans lesquelles les efforts exercés par le fluide sur la structure sont projetés sur chaque mode ;
- une discrétisation spatiale du problème structure par la méthode des éléments finis, la résolution du problème temporel qui en résulte étant effectuée avec des méthodes utilisées classiquement en dynamique des structures.

Nous utiliserons une technique de couplage très générale, basée sur une résolution *explicite* et *décalée* des problèmes fluide et structure. L'étude numérique du problème couplé est entièrement réalisée avec le code fluide, dans lequel nous développerons des sous-routines en langage FORTRAN [186] dédiées à la résolution du problème structure et à l'organisation des échanges d'informations au niveau du couplage (couplage en temps, couplage en espace), selon le principe général de la FIG. 3.3 (voir page suivante).

Nous détaillons maintenant les méthodes numériques utilisées pour la résolution des sous-problèmes fluide (section 3.2) et structure (section 3.3), les différents aspects du couplage entre les deux problèmes seront abordés en fin de chapitre (section 3.4).

3.2 Résolution du problème fluide

3.2.1 Discrétisation des équations du problème fluide : méthode des volumes finis

Les inconnues du problème fluide sont les champs eulériens de pression p et de vitesse $\mathbf{v} = (v_i)$. L'évolution temporelle de ces champs est régie par les équations de NAVIER-STOKES [25], qui s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = S_{v_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \phi)}{\partial x_j} = S_\phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (3.3)$$

¹CFD signifie *Computational Fluid Dynamics*. Le code CFD utilisé dans cette thèse est le code commercial STAR-CD dans sa version 3.15 [184] [185]. Les méthodes numériques présentées ci-après sont des méthodes générales utilisées pour résoudre un problème fluide. Elles sont en particulier disponibles dans le code STAR-CD, mais pourraient tout aussi bien faire l'objet d'un développement numérique spécifique. L'utilisation du code commercial STAR-CD nous permet d'éviter ces développements numériques et de consacrer l'étude à la réalisation d'une maquette numérique de couplage entre ce code CFD et un code structure. Du point de vue numérique, le code STAR-CD fonctionne comme une boîte noire : l'implémentation des méthodes numériques présentées n'est pas accessible à l'utilisateur. De ce fait, une partie importante du travail sera consacrée à l'appropriation et la validation du code CFD : cet aspect sera développé dans le chapitre 4.

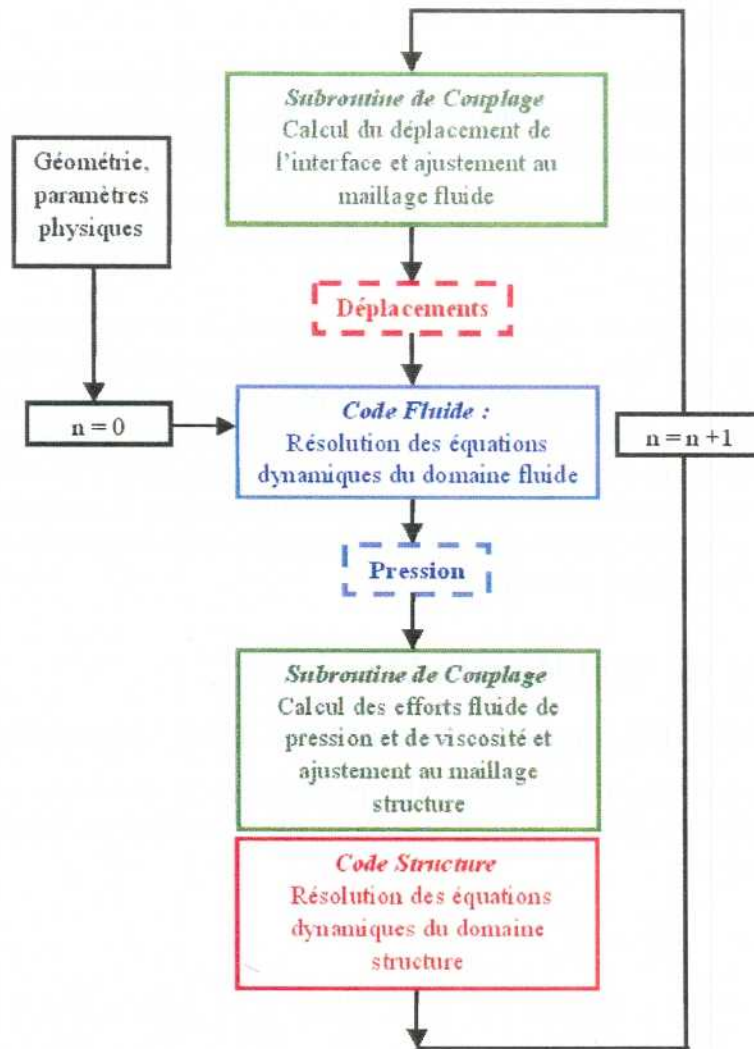


FIG. 3.3 – Procédure de couplage fluide/structure développée dans le code CFD

Ces équations traduisent à l'échelle locale la conservation de la masse (équation [3.1]), de la quantité de mouvement (équation [3.2]) et de toute quantité scalaire ϕ (équation [3.3]). S_{v_i} et S_ϕ désignent les termes source des équations de conservation.

La résolution numérique du problème fluide est réalisée avec une technique de type volumes finis [31]. Les équations de conservation sont intégrées sur un volume de contrôle Ω , de frontière $\partial\Omega$. En supposant le domaine de contrôle fixe au cours du temps, nous pouvons utiliser la relation de dérivation sous le signe \int :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega$$

et la formule de GAUSS :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi dn_j$$

où $dn = (dn_j)$ est le vecteur de surface élémentaire sortant défini sur $\partial\Omega$ et ϕ est une fonction définie sur Ω .

Compte tenu de ces deux relations, les équations de conservation intégrées sur Ω s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v_j dn_j = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v_i v_j dn_j = \int_{\Omega} S_{v_i} d\Omega - \int_{\partial\Omega} p dn_j + \int_{\partial\Omega} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dn_j \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v_j \phi dn_j = \int_{\Omega} S_\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dn_j \quad (3.6)$$

Le domaine fluide est discrétisé en cellules élémentaires, sur lesquelles sont écrites les équations (3.4), (3.5) et (3.6). Pour simplifier l'approche, nous nous plaçons dans le cas d'un problème bidimensionnel cartésien, tel que représenté par la FIG. 3.4. Dans ce cas, les volumes de contrôle sont délimités par quatre faces planes, notées suivant la direction des nœuds comme e , w , n , et s , de sorte que : $\partial\Omega = \sum_k \partial\Omega_k$ avec $k = e, w, n, s$.

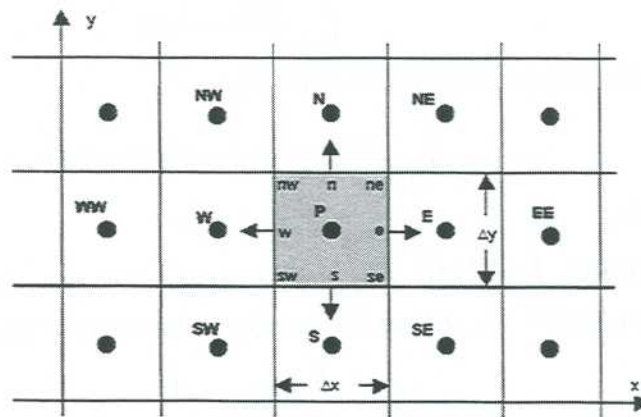


FIG. 3.4 – Maillage d'un problème fluide dans le cas bidimensionnel cartésien

Sur la cellule élémentaire considérée (en gris sur la FIG. 3.4), nous écrivons la forme approchée des équations de conservation intégrées (3.4) à (3.6) :

$$\frac{(\rho\Omega)^{n+1} - (\rho\Omega)^n}{\delta t} + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \rho^{n+1} v_j^{n+1} dn_j = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\rho v_i \Omega)^{n+1} - (\rho v_i \Omega)^n}{\delta t} + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \rho^{n+1} v_i^{n+1} v_j^{n+1} dn_j &= \int_{\Omega} S_{v_i} d\Omega - \sum_k \int_{\partial\Omega_k} p^{n+1} dn_j \\ &+ \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \mu \left(\frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{n+1}}{\partial x_i} \right) dn_j \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{(\rho\phi\Omega)^{n+1} - (\rho\phi\Omega)^n}{\delta t} + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \rho^{n+1} v_j^{n+1} \phi^{n+1} dn_j = \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega + \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \Gamma \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x_j} dn_j \quad (3.9)$$

Remarque 5 Dans la discrétisation proposée, le terme transitoire est traité dans les équations discrétisées précédentes avec un schéma d'EULER :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\phi d\Omega = \frac{(\rho\phi\Omega)^{n+1} - (\rho\phi\Omega)^n}{\delta t}$$

Ce schéma est robuste, totalement implicite, inconditionnellement stable, précis en $\mathcal{O}(\delta t)$. Nous pouvons également utiliser un schéma en $\mathcal{O}(\delta t^2)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\phi d\Omega = \frac{3/2(\rho\phi\Omega)^{n+1} - 2(\rho\phi\Omega)^n + 1/2(\rho\phi\Omega)^{n-1}}{\delta t^2}$$

Ce schéma est plus précis, mais non borné et peut générer des oscillations numériques.

Les équations précédentes sont alors discrétisées de la façon suivante.

Les intégrales de surface $\int_{\partial\Omega_k} \rho^{n+1} v_j^{n+1} \phi^{n+1} dn_j = \int_{\partial\Omega_k} f(\phi) dS$ sont approchées au moyen de différents schémas numériques plus ou moins précis en espace. Par exemple, pour $k = e$, un schéma au premier ordre s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega_e} f dS = f_e S_e$$

et un schéma au quatrième ordre prend la forme :

$$\int_{\partial\Omega_e} f dS = \frac{S_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se})$$

avec S_e aire de $\partial\Omega_e$.

Les intégrales de volume $\int_{\Omega} S_{\phi}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} q d\Omega$ sont calculées avec des schémas numériques plus ou moins précis en espace. Un schéma au premier ordre est écrit par exemple comme :

$$\int_{\Omega} q d\Omega = q_P V$$

et un schéma au quatrième ordre s'écrira :

$$\int_{\Omega} q d\Omega = \frac{V}{36} (16q_P + 4q_s + 4q_n + 4q_w + 4q_e + q_{se} + q_{sw} + q_{ne} + q_{sw})$$

avec V volume de Ω .

Les inconnues nodales aux différents points de la surface de contrôle (points $n, ne, w, sw, s, e, etc...$) sont calculées à partir des valeurs des inconnues au centre de la cellule de contrôle (points $P, N, S, W, E, etc...$) à l'aide de schémas d'interpolation basés sur des développements en série de TAYLOR; les schémas les plus utilisés sont les suivants :

- schéma upwind (*Upwind Differencing Schemes* ou UDS) qui prend en compte la direction de l'écoulement dans la détermination de la quantité à interpoler Φ : la valeur de Φ_e sur une face de la cellule est prise égale à la valeur au nœud situé en amont de l'écoulement

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \Phi_E & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases}$$

Cette approximation du premier ordre satisfait les conditions aux limites mais elle introduit de la diffusion numérique;

- schéma centré (*Central Differencing Schemes* ou CDS) qui utilise une interpolation linéaire entre les deux nœuds voisins du nœud à calculer

$$\Phi_e = \Phi_E \lambda_e + \Phi_P (1 - \lambda_e)$$

avec le facteur d'interpolation linéaire

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

L'interpolation a une précision du second ordre mais introduit des oscillations numériques;

- schéma upwind linéaire (*Linear Upwind Differencing* ou LUD) qui est un schéma hybride entre les schémas UD et CDS car il utilise le sens de l'écoulement (UD) et les nœuds voisins (CD) pour calculer la quantité Φ_e

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P + \lambda_1 (\Phi_P - \Phi_W) & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \Phi_E + \lambda_2 (\Phi_E - \Phi_{EE}) & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases}$$

avec λ_1 et λ_2 des facteurs d'interpolation linéaire. Ce schéma est d'ordre deux, il réduit les diffusions numériques mais peut produire des solutions qui ne respectent pas les conditions aux limites;

- schéma MARS (*Monotone Advection Reconstruction Scheme*) précis au second ordre en espace¹.

L'écriture de l'équation de conservation pour un volume de contrôle avec les approximations et les interpolations précédentes permet d'obtenir, après report au second membre de tous les termes connus (conditions aux limites, termes temporels explicites), une équation algébrique pour chaque cellule de calcul. La sommation de ces équations sur l'ensemble des cellules du maillage permet alors d'écrire un système d'équations algébriques du type :

$$A_P \Phi_P + \sum_N A_N \Phi_N = b_P \iff \mathbf{A}(\Phi) \{\Phi\} = \{b\} \quad (3.10)$$

¹Ce schéma est le fruit d'un développement spécifique dans STAR-CD [185]; pour des raisons de confidentialité, il n'est pas possible d'obtenir plus de détails sur son formalisme. C'est le schéma de discrétisation standard du code, dont l'usage est recommandé pour la résolution de problèmes d'évolution en temps. Ce schéma sera utilisé de façon systématique dans la suite de l'étude; son utilisation est validée par les calculs élémentaires présentés au chapitre 4.

où P est le point central du volume de contrôle, N désignant les centres des cellules voisines. $\mathbf{A}(\Phi)$ est une matrice creuse présentant un couplage important entre les différents termes, $\{\Phi\}$ contient les valeurs nodales des variables inconnues et $\{b\}$ contient les valeurs nodales des variables connues. Le système (3.10) est non linéaire et peut être résolu avec une méthode itérative de type NEWTON [173]. Nous notons Φ^0 une estimation de la solution du problème non linéaire. L'utilisation de la relation :

$$\mathbf{A}(\Phi^{q+1}) = \mathbf{A}(\Phi^q) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi_q} \cdot (\{\Phi^{q+1}\} - \{\Phi^q\})$$

permet de proposer le schéma itératif :

$$\{\Phi^{q+1}\} = \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \Phi_q} \cdot \left(\{b\} - \mathbf{A}(\Phi^q)\{\Phi^q\} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi_q} \{\Phi^q\} \right)$$

Soit $\mathbf{r}^q = \{b\} - \mathbf{A}(\Phi^q)\{\Phi^q\}$ le résidu à l'itération q . La convergence est obtenue lorsqu'un critère de convergence est satisfait, ou lorsque $m = M$, M étant le nombre maximum d'itérations maximum. Le critère de convergence s'écrit :

$$\frac{\|\mathbf{r}^{q+1} - \mathbf{r}^q\|}{\|\mathbf{r}^q\|} \leq \epsilon$$

où $\|\cdot\|$ est une norme vectorielle donnée. Dans la version du code CFD utilisée dans le cadre de ce travail, l'intégration en temps des équations discrétisées du problème structure est conduite avec un algorithme utilisant une stratégie différente. La méthode utilisée est basée sur un découplage des résolutions du champ de pression et de vitesse, dont nous donnons maintenant le principe.

3.2.2 Gestion du couplage pression/vitesse : algorithme PISO

La résolution du problème fluide avec un algorithme totalement couplé utilisant une méthode implicite itérative est très coûteuse en temps de calcul. Une méthode alternative consiste à résoudre le problème en découplant les inconnues pression et vitesse : cette méthode est dite méthode de séparation d'opérateurs (ou *Operator Splitting*) ; son principe est le suivant.

En adoptant une formulation du problème avec les inconnues (p, \mathbf{v}) , les équations de conservation du problème fluide sont ré-écrites sous la forme suivante [25] :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{v})}{\partial x_j} + S_i \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}(\mathbf{v})) \right] + \frac{\partial S_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

avec $\tau_{ij}(\mathbf{v})$ tenseur des contraintes visqueuses. L'équation (3.11) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation (3.12) est l'équation de POISSON, obtenue à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Ces équations sont discrétisées avec une méthode volumes finis telle que présentée dans le paragraphe précédent, ce qui permet d'obtenir deux équations algébriques de la forme :

$$A_P \mathbf{v}_P^{n+1} = \sum_N A_N \mathbf{v}_N^{n+1} + B_P^n \mathbf{v}_P^n + D(p^{n+1}) + S_v^{n+1}$$

$$A_P p_P^{n+1} = \sum_N A_N p_N^{n+1} + S_p^{n+1}(\mathbf{v})$$

où \mathbf{v}_P et p_P désignent les valeurs des champs de vitesse et de pression au nœud P (centre de la cellule fluide élémentaire) et \mathbf{v}_N et p_N désignent les valeurs au centre des cellules voisines notées N . Les exposants n et $n+1$ désignent les valeurs calculées respectivement au pas de temps t_n et t_{n+1} .

La résolution de ce système couplant les inconnues nodales de vitesse \mathbf{v}_N et de pression p_N est conduite avec une méthode de séparation d'opérateurs, basée sur une série de prédictions/corrections. L'algorithme utilisé est l'algorithme PISO [38]. Cet algorithme réalise les étapes d'estimations successives $\mathbf{v}^{(q),n+1}, p^{(q),n+1}$ des quantités à calculer $\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}$; ces estimations sont obtenues en résolvant les équations non linéaires :

$$A_P \mathbf{v}_P^{(q+1),n+1} = \sum_N A_N \mathbf{v}_N^{(q),n+1} + B_P^n \mathbf{v}_P^n + D(p^{(q),n+1}) + S_{\mathbf{v}}^{n+1}$$

$$A_P p_P^{(q),n+1} = \sum_N A_N p_N^{(q),n+1} + S_p^{(q),n+1}(\mathbf{v})$$

avec la prédiction $\mathbf{v}^{(0),n+1}$ donnée par la résolution de :

$$A_P \mathbf{v}_P^{(0),n+1} = \sum_N A_N \mathbf{v}_N^{(0),n+1} + B_P^n \mathbf{v}_P^n + D(p^n) + S_{\mathbf{v}}^{n+1}$$

Le processus est itéré jusqu'à satisfaction d'un critère de convergence portant sur la norme des résidus calculés à chaque itération interne.

L'algorithme PISO présente les avantages suivants par rapport aux méthodes implicites itératives :

- précision de calcul comparable;
- temps de calcul moins importants;
- très bonne stabilité numérique.

Remarque 6 Cet algorithme est également écrit pour résoudre les équations de transport des quantités turbulentes [39] et des quantités scalaires [40], par exemple la variable VOF (Volume Of Fluid) qui représente la fraction massique du fluide, et qui est utilisée pour la description de la surface libre (voir paragraphe 3.2.4).

La résolution des équations de prédiction/correction dans l'algorithme PISO nécessite l'inversion d'un système matriciel. Cette opération peut se faire à l'aide de méthodes *directes* (élimination de GAUSS, décomposition LU, réduction cyclique) ou *itératives* [173] (méthode de JACOBI, méthode de GAUSS-SEIDEL, décomposition incomplète LU, algébrique multigrille [37]).

3.2.3 Maillage mobile, formulation ALE

La résolution du problème couplé utilise une formulation du problème fluide en maillage mobile, ce qui permet au domaine fluide de s'adapter aux mouvements de la structure. Les équations de conservation décrites dans les paragraphes précédents doivent être adaptées pour prendre en compte les mouvements du maillage fluide. Dans le cas d'un calcul avec maillage mobile, le bilan de conservation est écrit sur un volume de contrôle élémentaire $\Omega(t)$ variable avec le temps; la règle de LEIBNITZ permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \phi v_j^* dn_j$$

où $\mathbf{v}^* = (v_j^*)$ est la vitesse de grille.

Compte tenu de cette relation, les équations de conservation s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \rho(v_j - v_j^*) dn_j = 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \rho v_i (v_j - v_j^*) dn_j &= \int_{\Omega(t)} S_{v_i} d\Omega - \int_{\partial\Omega(t)} p dn_j \\ &+ \int_{\Omega(t)} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dn_j \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \phi d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \rho (v_j - v_j^*) \phi dn_j = \int_{\Omega(t)} S_\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dn_j \quad (3.15)$$

Le problème est donc constitué des inconnues p, v_i, v_i^* et ϕ . Le problème fait donc apparaître des inconnues supplémentaires v_i^* , ce qui impose d'utiliser une relation supplémentaire : l'équation de conservation de l'espace (ou *Space Conservation Law*) [29] permet de fermer le problème. Cette équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d\Omega = \int_{\partial\Omega(t)} v_j^* dn_j \quad (3.16)$$

La stratégie de résolution du problème consiste alors à déterminer le champ de vitesse de grille \mathbf{v}^* à partir de la connaissance des déplacements du maillage, afin de satisfaire l'équation (3.16). Les équations de conservation modifiées (3.13) à (3.15) sont alors résolues en connaissant v_j^* , qui définit ainsi un terme source dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Si le mouvement de grille est connu, il est alors possible de déterminer une vitesse de grille \mathbf{v}^* telle que l'équation de conservation de volume soit toujours satisfaite [31]. A titre d'illustration, considérons le cas bidimensionnel cartésien suivant (voir FIG. 3.5).

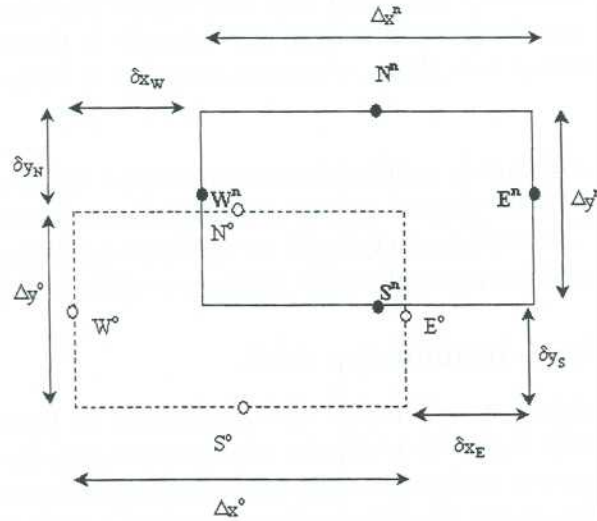


FIG. 3.5 – Problème cartésien bidimensionnel avec maillage mobile

Dans la situation initiale, la cellule fluide est notée (W^o, S^o, E^o, N^o) ; dans la situation finale après déplacement, la cellule fluide est notée (W^n, S^n, E^n, N^n) . Le taux de variation de volume calculé à

partir de la forme intégrale de l'équation de conservation de volume est la somme des termes suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_e^I}{\delta t} &= w_x^e \Delta y^n & \frac{\delta V_w^I}{\delta t} &= -w_x^w \Delta y^n \\ \frac{\delta V_n^I}{\delta t} &= w_y^n \Delta x^n & \frac{\delta V_e^I}{\delta t} &= w_y^n \Delta x^n\end{aligned}$$

D'autre part, le taux de variation de volume dû au mouvement de grille est la somme des termes suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_e^{II}}{\delta t} &= \frac{\Delta y^o + \Delta y^n}{2} \frac{\delta x_e}{\delta t} & \frac{\delta V_e^{II}}{\delta t} &= -\frac{\Delta y^o + \Delta y^n}{2} \frac{\delta x_w}{\delta t} \\ \frac{\delta V_e^{II}}{\delta t} &= \frac{\Delta x^o + \Delta x^n}{2} \frac{\delta y_n}{\delta t} & \frac{\delta V_e^{II}}{\delta t} &= -\frac{\Delta x^o + \Delta x^n}{2} \frac{\delta y_s}{\delta t}\end{aligned}$$

De sorte que si nous posons [29] :

$$w_x^e = \frac{\Delta y^o + \Delta y^n}{2\Delta y^n} \frac{\delta x_e}{\delta t} \quad w_y^e = 0$$

ainsi que :

$$w_x^n = 0 \quad w_y^n = \frac{\Delta x^o + \Delta x^n}{2\Delta x^n} \frac{\delta y_n}{\delta t}$$

et des expressions similaires pour les points w et s , nous avons $\frac{\delta V^I}{\delta t} = \frac{\delta V^{II}}{\delta t}$, ce qui assure qu'aucun débit massique artificiel n'est créé, *i.e.* que l'équation (3.16) est satisfaite.

3.2.4 Modélisation de la surface libre

La résolution du problème couplé étudié nécessite la prise en compte d'une surface libre fluide. Dans le cas linéaire (voir chapitres 1 et 2), la modélisation de la surface libre est faite avec une équation linéarisée. Dans le cas général, la condition de surface libre s'exprime par une relation du type $p|_{\partial\Omega_o(t)} = P_o$, où $\partial\Omega_o(t)$ représente la surface libre mobile. Pour prendre en compte cette formulation de surface libre, il existe deux grandes familles de méthodes [47] : les méthodes de suivi d'interface (*interface tracking*) et les méthodes de capture d'interface (*interface capturing*)¹.

Méthodes de suivi d'interface Dans ces méthodes, le maillage fluide se déforme pour suivre les mouvements réels de la surface libre [35] [52]. Ce type de méthode permet donc une simulation très précise de l'évolution de la surface libre, mais reste limitée au cas de géométries simples et de phénomènes dynamiques plutôt lents. La modélisation de la surface libre $\partial\Omega_o$ est basée sur la résolution d'une condition cinématique :

$$(v_i - v_i^*) \cdot n_i|_{\partial\Omega_o} = 0$$

avec \mathbf{v} vitesse du fluide et \mathbf{v}^* vitesse de grille, et d'une condition dynamique :

$$[n_i \cdot \tau_{ij} \cdot n_j] = \sigma(R_t^{-1} + R_s^{-1}) \quad [n_i \cdot \tau_{ij} \cdot t_j] = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad [n_i \cdot \tau_{ij} \cdot s_j] = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

¹Le développement de méthodes de calcul des problèmes fluide sans maillage (*meshless methods*) [159], en particulier la méthode *Smoothed Particule Hydrodynamics* [176] et la méthode *Level-Set* permettent de nouvelles approches dans la simulation de problèmes d'évolution de surface libre. L'intégration de ce type de méthodes dans des codes commerciaux reste néanmoins à conduire, avant d'envisager leur utilisation en bureau d'études.

avec $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ trièdre local sur $\partial\Omega_o$ (\mathbf{n} est la normale sortante), R_t et R_s les rayons de courbure dans les directions \mathbf{t} et \mathbf{s} et σ la tension de surface. $[\phi]$ désigne le saut de la quantité ϕ , $[\phi] = \phi^+ - \phi^-$ avec ϕ^+ valeur de ϕ pour le fluide lourd et ϕ^- valeur de ϕ pour le fluide léger. La résolution numérique doit mettre en œuvre un algorithme de gestion des déplacements des nœuds de l'interface et des nœuds en profondeur du maillage fluide afin d'éviter des distorsions trop importantes du domaine de calcul. Cette méthode est par exemple utilisée par MATHIEU [104] pour la résolution d'un problème couplé avec grands déplacements fluide.

Méthodes de capture d'interface Dans ces méthodes, le maillage fluide est fixe et contient initialement deux entités distinctes représentant un fluide lourd et un fluide léger. Ce type de méthodes permet la simulation de problèmes de surface libre dans le cas de géométries complexes. Différentes approches sont possibles :

- une première approche consiste à résoudre les équations de NAVIER-STOKES en monophasique en distinguant le fluide léger (air) et le fluide lourd (eau). Chaque fluide est alors caractérisé par la valeur prise par une variable scalaire ϕ , qui vaut 1 pour le fluide lourd et 0 pour le fluide léger. Cette variable scalaire satisfait l'équation de transport :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi(v_j - v_j^*))}{\partial x_j} = 0$$

qui est résolue avec les autres équations de conservation.

Cette méthode ne permet pas de suivi très précis de la surface libre, notamment en cas de déferlement, lorsque les deux phases se mélangent ;

- une seconde approche consiste à utiliser une formulation du problème fluide basée sur les équations de NAVIER-STOKES pour un problème fluide diphasique, en distinguant une phase correspondant au fluide léger et une phase correspondant au fluide lourd. Pour chaque phase α , les équations de conservation sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^\alpha r^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^\alpha r^\alpha v_j^\alpha)}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho^\alpha r^\alpha v_i^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^\alpha r^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha - r^\alpha \tau_{ij}^\alpha)}{\partial x_j} &= S_{v_i}^\alpha - r^\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} + M_i^\alpha \end{aligned}$$

r^α désigne la fraction massique de la phase α et M^α désigne le terme d'interaction de la phase β sur la phase α . Les équations précédentes sont complétées avec les relations suivantes :

$$\sum_{\alpha} r^\alpha = 1 \quad M^\alpha = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$$

avec $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \forall \alpha, \beta$. La première relation traduit la conservation de la matière, la seconde propose un modèle d'interaction entre les phases α et β .

Cette méthode permet de mieux décrire les phénomènes de mélange des deux phases, mais nécessite l'utilisation d'un code fluide formulé de façon à résoudre les équations diphasiques : la résolution du problème nécessite l'utilisation d'un algorithme totalement couplé [24], tel que présenté en fin de sous-paragraphe 3.2.1.

Dans notre étude, nous utilisons une méthode de capture d'interface, basée sur une formulation VOF (*Volume of Fluid*) [36]. L'approche proposée est basée sur une résolution découplée des équations fluide en pression/vitesse ; l'algorithme PISO est adapté pour prendre en compte la résolution de l'équation de transport de la variable scalaire ϕ [40]¹. La résolution de l'équation de transport permet

¹D'autres mises en œuvre de la méthode sont possibles, voir par exemple [22] qui propose une résolution du problème avec une méthode VOF utilisant une formulation totalement couplée en pression/vitesse.

de calculer la valeur du scalaire ϕ dans tout le domaine fluide, la surface libre correspond à la ligne de niveau $\phi = 1/2$. Les termes de tension superficielle [57] sont pris en compte dans le code par le modèle de force de surface continu (*Continuum Surface Force*) [23] : les effets de tension superficielle¹ se traduisent par une discontinuité de pression $[p] = p^+ - p^-$ à l'interface séparant les deux fluides, donnée par :

$$[p] = \sigma \kappa$$

avec σ le coefficient de tension de surface et κ la courbure moyenne de la surface libre, calculée à partir de la variable ϕ selon :

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right)$$

La différence de pression induite par les effets de surface libre est alors ajoutée en terme source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ce qui permet de fermer le problème. La méthode sera validée au chapitre 4 avec la simulation d'un problème dynamique de ballonnement fluide.

3.3 Résolution du problème structure

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème structure. Nous utilisons une discrétisation en espace des équations non linéaires du mouvement de la poutre à l'aide d'une technique éléments finis. La méthode est présentée au paragraphe 3.3.1. L'intégration en temps des équations (non linéaires) discrétisées peut être conduite avec différents algorithmes dont nous exposons les principes dans le paragraphe 3.3.2. Les méthodes explicites et implicites utilisent des approches bien connues. Nous proposons un algorithme mixte basé sur une description implicite des termes linéaires et explicite des termes non linéaires. En fin d'exposé, nous rappelons sous forme de remarque le principe de résolution par superposition modale du problème structure dans le cas linéaire.

Dans cette section, les efforts extérieurs dus à l'action du fluide sur la structure ne sont pas pris en compte, le couplage des deux problèmes faisant l'objet de la section 3.4.

3.3.1 Discrétisation éléments finis

La méthode de discrétisation du problème structure utilise une technique éléments finis [9] [14]. Cette technique est basée sur une discrétisation de la formulation faible des équations du mouvement de la structure [166]. Les équations du problème structure (1.13) à (1.18) ne sont pas résolues directement au sens fort, mais au sens d'une formulation variationnelle, exprimant un principe de conservation de l'énergie.

Nous commençons donc par écrire la formulation variationnelle du problème structure à partir des équations locales (1.13) et (1.14). Multiplions ces équations par des champs de déplacement virtuels, notés respectivement δu (traction/compression) et δv (flexion), vérifiant les conditions aux limites (1.15) et (1.16), puis intégrons sur toute la longueur de la poutre. Nous obtenons ainsi les équations suivantes :

$$\int_0^L \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u \, dz - \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right) \delta u \, dz = 0$$

¹Ces effets sont évoqués ici car le modèle de surface libre mis en œuvre dans le code CFD les prend en compte par défaut. Compte tenu de la gamme de fréquences des phénomènes vibratoires étudiés dans cette thèse, les effets d'ondes de capillarité et de tension superficielle seront cependant négligeables [57].

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dz + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \delta v dz - \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v dz \\ = - \int_0^L \rho S \gamma \delta v dz \end{aligned}$$

Après intégration par parties, et en tenant compte des conditions aux limites, nous écrivons alors la formulation variationnelle sous la forme :

$$\int_0^L \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dz + \int_0^L ES \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} dz + \int_0^L ES \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \delta u}{\partial z} dz = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dz + \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial z^2} dz + \int_0^L ES \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} dz \\ = - \int_0^L \rho S \gamma \delta v dz \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les équations intégrées (3.17) et (3.18) constituent la *formulation faible* du problème. L'intervalle $[0, L]$ est discrétisé en éléments finis monodimensionnels à deux nœuds $[z_i, z_{i+1}]$ de façon à écrire la relation¹ :

$$\int_0^L (\cdot) dz = \sum_{i=1}^I \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\cdot) dz$$

Sur chaque élément, nous écrivons l'approximation suivante des inconnues en déplacement :

$$u|_{[z_i, z_{i+1}]} = \langle N_u^i \rangle \{U_i\} \quad v|_{[z_i, z_{i+1}]} = \langle N_v^i \rangle \{V_i\}$$

où $\{U_i\}$ et $\{V_i\}$ sont les degrés de liberté aux nœuds de l'élément et N_u^i et N_v^i sont les fonctions de forme sur l'élément i . Nous utilisons des éléments finis à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud : pour le nœud i en z_i , les degrés de liberté sont notés $u_i = u|_{z_i}$, $v_i = v|_{z_i}$ et $\theta_i = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z_i}$, voir

FIG. 3.6.

Les fonctions de forme utilisées sur un élément fini $[z_i, z_{i+1}]$ de longueur l_i sont linéaires pour les degrés de liberté en traction/compression et cubiques pour les degrés de liberté en flexion :

$$\begin{aligned} N_{u,i}(s) &= 1 - s \\ N_{v,i}(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ N_{\theta,i}(s) &= l_i(s - 2s^2 + s^3) \\ N_{u,i+1}(s, \theta) &= s \\ N_{v,i+1}(s, \theta) &= 3s^2 - 2s^3 \\ N_{\theta,i+1}(s) &= l_i(-s^2 + s^3) \end{aligned}$$

avec $s = (z - z_i)/l_i$, $s \in [0, 1]$. Nous avons ainsi $\langle N_u^i \rangle = \langle N_{u,i}, N_{u,i+1} \rangle$ et $\langle N_v^i \rangle = \langle N_{v,i}, N_{\theta,i}, N_{v,i+1}, N_{\theta,i+1} \rangle$.

¹Dans la suite, nous utilisons les indices $i, i+1$ pour la discrétisation en espace, les indices $n, n+1$ pour la discrétisation en temps et les indices $q, q+1$ pour désigner les itérations internes de l'algorithme implicite.

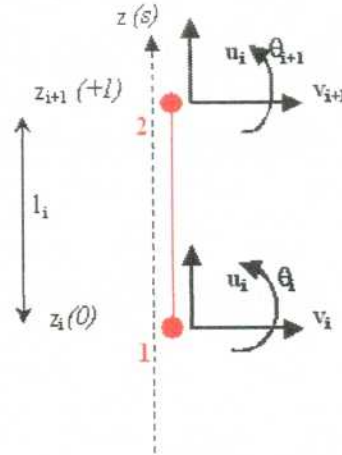


FIG. 3.6 – Élément fini poutre à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud (u, v, θ)

Nous utilisons une technique de GALERKIN qui consiste à utiliser une interpolation identique pour les fonctions de test δu et δv [14]. En reportant les expressions précédentes dans la formulation variationnelle du problème, la discrétisation de l'équation (3.17) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta U_i \rangle \rho S \{ N_u^i \} \langle N_u^i \rangle \{ \ddot{U}_i \} dz + \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta U_i \rangle ES \left\{ \frac{dN_u^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \{ U_i \} dz \\ & + \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta U_i \rangle ES \left\{ \frac{dN_u^i}{dz} \right\} \frac{1}{2} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{ V_i \} dz = 0 \end{aligned}$$

et la discrétisation de l'équation (3.18) prend la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta V_i \rangle \rho S \{ N_v^i \} \langle N_v^i \rangle \{ \ddot{V}_i \} dz + \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta V_i \rangle EI \left\{ \frac{d^2 N_v^i}{dz^2} \right\} \left\langle \frac{d^2 N_v^i}{dz^2} \right\rangle \{ V_i \} dz \\ & + \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta V_i \rangle ES \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left[\left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \{ U_i \} + \frac{1}{2} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{ V_i \} \right] \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{ V_i \} dz \\ & = - \sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \langle \delta V_i \rangle \rho S \gamma \{ N_v^i \} dz \end{aligned}$$

Les degrés de liberté d'un élément fini $\{U_i\}$ et $\{V_i\}$ sont extraits dans le vecteur des degrés de liberté du problème complet $\{U\}$ et $\{V\}$ par les relations $\{U_i\} = [\Lambda_i] \{U\}$ et $\{V_i\} = [\Lambda_i] \{V\}$, avec $[\Lambda_i]$ *matrice de localisation*. En utilisant ces relations, et en tenant compte du fait que la formulation variationnelle est valable pour tout déplacement virtuel $\{\delta U\}$ et $\{\delta V\}$, nous pouvons formuler le problème non linéaire discrétisé comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}(t) \\ \ddot{\mathbf{V}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u(\mathbf{V}(t)) \\ \mathbf{R}_v(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_v(t) \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Les matrices de masse $[M_u]$, $[M_v]$ sont obtenues par assemblage des matrices de masse élémentaires $[m_u^i]$ et $[m_v^i]$ selon :

$$[M_u] = \sum_{i=1}^{i=I} [\Lambda_i]^T [m_u^i] [\Lambda_i] \quad [M_v] = \sum_{i=1}^{i=I} [\Lambda_i]^T [m_v^i] [\Lambda_i]$$

Les matrices de raideur $[K_u]$, $[K_v]$ sont données par une relation d'assemblage similaire. Les matrices élémentaires sont données par :

– matrices de masse

$$[m_u^i] = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho S \{N_u^i\} \langle N_u^i \rangle dz \quad [m_v^i] = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho S \{N_v^i\} \langle N_v^i \rangle dz$$

– matrices de raideur

$$[k_u^i] = \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_u^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle dz \quad [k_v^i] = \int_{z_i}^{z_{i+1}} EI \left\{ \frac{d^2N_v^i}{dz^2} \right\} \left\langle \frac{d^2N_v^i}{dz^2} \right\rangle dz$$

Les termes non linéaires $\{R_u(\mathbf{V})\}$ et $\{R_v(\mathbf{U}, \mathbf{V})\}$ sont obtenus par assemblage selon la relation :

$$\{R_u(\mathbf{V})\} = \sum_{i=1}^{i=I} [\Lambda_i]^T \{r_u^i(\mathbf{V}_i)\} \quad \{R_v(\mathbf{U}, \mathbf{V})\} = \sum_{i=1}^{i=I} [\Lambda_i]^T \{r_v^i(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i)\}$$

avec les termes non linéaires élémentaires donnés par :

– terme non linéaire de traction/compression

$$\{r_u^i(\mathbf{V}_i)\} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{ES}{2} \left\{ \frac{dN_u^i}{dz} \right\} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \langle V_i \rangle dz$$

– terme non linéaire de flexion

$$\{r_v^i(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i)\} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left[\left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \{U_i\} + \frac{1}{2} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{V_i\} \right] \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \langle V_i \rangle dz$$

Le terme de chargement est donné par assemblage des termes élémentaires :

$$\{\Phi_v^i\} = \int_{z_i}^{z_{i+1}} -\rho S \gamma \{N_v^i\} dz$$

selon la relation $\{\Phi_v\} = \sum_{i=1}^{i=I} [\Lambda_i]^T \{\Phi_v^i\}$.

Comme nous le verrons au paragraphe suivant, l'intégration numérique du problème (3.19) avec une méthode implicite nécessite le calcul de la matrice tangente, définie par :

$$[K_T(\mathbf{U}, \mathbf{V})] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{V}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{U}} & \mathbf{K}_v + \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{V}} \end{bmatrix}$$

Compte tenu des expressions de $\{R_u(\mathbf{V})\}$ et $\{R_v(\mathbf{U}, \mathbf{V})\}$, de la relation $\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial U_i} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{U}}$ avec $\frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{U}} = [\Lambda_i]$ et de relations identiques pour les degrés de liberté $\{V\}$, les termes tangents s'obtiennent par assemblage des termes élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_u^i}{\partial \mathbf{V}_i} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_u^i}{dz} \right\} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle dz \\ \frac{\partial \mathbf{r}_v^i}{\partial \mathbf{V}_i} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{V_i\} dz \\ \frac{\partial \mathbf{r}_v^i}{\partial \mathbf{V}_i} &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{V_i\} + \int_{z_i}^{z_{i+1}} ES \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_u^i}{dz} \right\rangle \{U_i\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \\ &\quad + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{ES}{2} \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \langle V_i \rangle \left\{ \frac{dN_v^i}{dz} \right\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle \{V_i\} \left\langle \frac{dN_v^i}{dz} \right\rangle dz \end{aligned}$$

Remarque 7 Afin de simplifier la mise en œuvre du couplage fluide/structure dans le code STAR-CD (voir section 3.4), nous avons recours à un algorithme de maillage du fluide basé sur un déplacement transversal de l'interface fluide/structure, correspondant aux mouvements de flexion de la poutre. Nous négligerons donc les déplacements verticaux, correspondant aux mouvements de traction/compression.

Si nous négligeons les termes d'énergie cinétique des termes de traction/compression de la poutre, la première équation du système (3.19) s'écrit alors [12] :

$$[K_u]\{U\} = -\{R_u(\mathbf{V})\}$$

soit :

$$\{U\} = -[K_u]^{-1}\{R_u(\mathbf{V})\}$$

En reportant cette expression dans la seconde ligne du système (3.19), la dynamique de flexion de la poutre s'écrit :

$$[M_v]\{\ddot{V}\} + [K_v]\{V\} + \{R_v(-K_u^{-1}R_u(\mathbf{V}), \mathbf{V})\} = \{\Phi_v\} \quad (3.20)$$

Cette équation permet de décrire la dynamique de la poutre en terme de mouvements non linéaires de flexion uniquement. L'utilisation d'un algorithme d'intégration temporelle implicite de cette équation requiert le calcul de la matrice tangente du système. A partir des expressions précédentes, nous déduisons :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_v + \frac{d\mathbf{R}_v}{d\mathbf{V}}$$

avec :

$$\frac{d\mathbf{R}_v}{d\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial \mathbf{R}_v}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{K}_u^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{V}}$$

Nous validerons également l'hypothèse consistant à négliger l'énergie cinétique des termes de traction/compression pour le cas étudié. Les calculs couplés présentés au chapitre 5 utiliseront alors la description du mouvement de la poutre en terme de flexion non linéaire uniquement.

Le calcul des intégrales définissant les différentes matrices élémentaires est réalisé numériquement avec une méthode de GAUSS [173]. L'approximation numérique s'écrit :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \psi(z) dz = \frac{l_i}{2} \int_{-1}^{+1} \psi\left(\frac{l_i}{2}(\zeta + 1)\right) d\zeta$$

et utilise le schéma d'intégration à L points :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{l=0}^{l=L-1} \alpha_l \psi(\zeta_l)$$

avec $\{\alpha_L\} = \{\alpha_l\}_{l \in [0, L-1]}$ solution de :

$$[V_L]\{\alpha_L\} = \{\beta_L\}$$

où $[V_L]$ est la matrice de VANDERMONDE du système $(\zeta_l)_{l \in [0, L-1]}$ [181], $\{\beta_L\} = \{\beta_l\}_{l \in [0, L-1]}$ avec $\beta_l = \frac{2}{l+1}$ si l est pair, et $\beta_l = 0$ si l est impair. $(\zeta_l)_{l \in [0, L-1]}$ sont les L racines dans $[-1, +1]$ du polynôme de LEGENDRE Π_L de degré L , défini par :

$$\Pi_L(\zeta) = \frac{1}{2^L L!} \frac{d^L}{d\zeta^L} [(\zeta^2 - 1)^L]$$

Le schéma est exact sur \mathcal{P}_{2L-1} , espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $2L - 1$ [1].

Les points d'intégration ζ_l et les poids associés α_l pour la méthode de GAUSS sont donnés dans le TAB. 3.1. Dans le cas étudié, nous utilisons une formule à $L = 5$ points, alors que l'ordre maximum des polynômes à intégrer est 8, ce qui garantit une intégration numérique exacte.

3.3.2 Algorithmes d'intégration temporelle

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'intégration temporelle du problème structure semi-discrétisé en espace. De façon générale, la discrétisation spatiale du problème structure non linéaire par une technique éléments finis conduit à l'écriture d'un système matriciel différentiel de la forme [14] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X}) = \Phi \quad (3.21)$$

avec Φ le chargement sur la structure, \mathbf{M} et \mathbf{C} les matrices de masse et d'amortissement de la structure¹ ; $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ est le terme de raideur, qui se décompose en une partie linéaire et une partie non linéaire :

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_L \mathbf{X} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X})$$

Nous présentons dans ce paragraphe le principe d'une intégration temporelle directe de (3.21) avec différentes méthodes ; nous rappelons les méthodes classiquement utilisées (méthode explicite et méthode implicite) et nous proposons une méthode mixte basée sur une approche explicite des termes non linéaires et une approche implicite des termes linéaires.

¹Dans notre description du problème structure, nous n'avons pas fait état des phénomènes d'amortissement. La résolution du problème couplé est écrite avec un algorithme tenant compte d'un amortissement structure par l'intermédiaire d'une matrice d'amortissement $[C]$ qui peut évaluer en faisant l'hypothèse de RAYLEIGH [89], c'est-à-dire en supposant une relation du type :

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{M} + \mu \mathbf{K}$$

Dans notre cas d'étude, les algorithmes d'intégration temporelle utilisés sont développés en prenant en compte cette matrice $[C]$ de façon à proposer un modèle général. Les calculs présentés au chapitre 5 sont cependant réalisés sans amortissement structurel.

L	ζ_l	α_l
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	0	0.88888 88888 88889
	± 0.774596669241483	0.55555 55555 55556
4	± 0.339981043584856	0.65214 51548 62546
	± 0.861136311594053	0.34785 48451 37454
	0	0.56888 88888 88889
5	± 0.538469310105683	0.47862 86704 99366
	± 0.906179845938664	0.23692 68850 56189
	± 0.238619186083197	0.46791 39345 72691
6	± 0.661209386466265	0.36076 15730 48139
	± 0.932469514203152	0.17132 44932 79170
	0	0.41795 91836 73469
7	± 0.405845151377397	0.38183 00505 05119
	± 0.741531185599394	0.27970 53914 89277
	± 0.949107912342759	0.12948 49661 68870

TAB. 3.1 – Points d'intégration ζ_l et poids d'intégration w_l pour la méthode de GAUSS [9]

3.3.2.1 Méthode explicite

Les méthodes explicites [10] consistent à intégrer l'équation d'équilibre écrite au pas de temps t_n , en proposant des schémas d'approximations des dérivées en temps à partir de données connues au pas de temps courant.

L'équation d'équilibre est écrite sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t_n) + \mathbf{K}(\mathbf{X}(t_n)) = \Phi(t_n)$$

Le schéma explicite le plus utilisé est le schéma aux différences finies centrées, obtenu de la façon suivante. A partir des développements TAYLOR de l'inconnue \mathbf{X} à $t_{n+1} = t_n + \delta t$ et $t_{n-1} = t_n - \delta t$:

$$\mathbf{X}(t_n + \delta t) = \mathbf{X}(t_n) + \delta t \dot{\mathbf{X}}(t_n) + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

$$\mathbf{X}(t_n - \delta t) = \mathbf{X}(t_n) - \delta t \dot{\mathbf{X}}(t_n) + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

il est possible de déduire :

- un schéma d'approximation de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}(t_n)$ au premier ordre en δt

$$\dot{\mathbf{X}}(t_n) = \frac{\mathbf{X}(t_n + \delta t) - \mathbf{X}(t_n - \delta t)}{2\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)$$

- un schéma d'approximation de l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}(t_n)$ au premier ordre en δt

$$\ddot{\mathbf{X}}(t_n) = \frac{\mathbf{X}(t_n + \delta t) - 2\mathbf{X}(t_n) + \mathbf{X}(t_n - \delta t)}{\delta t^2} + \mathcal{O}(\delta t)$$

En reportant dans l'équation d'équilibre écrite à t_n^1 , nous obtenons l'équation explicite donnant \mathbf{X}_{n+1} en fonction des quantités connues $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n-1}$:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\delta t}\right) \mathbf{X}_{n+1} = \Phi_n - \mathbf{K}(\mathbf{X}_n) + \frac{2\mathbf{M}}{\delta t^2} \mathbf{X}_n + \left(\frac{\mathbf{C}}{2\delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2}\right) \mathbf{X}_{n-1} \quad (3.22)$$

Le schéma explicite nécessite l'inversion de la matrice $\tilde{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\delta t}$, cette inversion est réalisée une seule fois en début de calcul. Nous utilisons une méthode de GAUSS, avec une factorisation *LU* de la matrice à inverser [173].

La relation explicite (3.22) se prête bien à un algorithme de couplage fluide/structure explicite tel que décrit par la FIG. 3.3 et la FIG. 3.7 (voir section 3.4) : pour avancer en temps la structure entre t_n et t_{n+1} , nous avons besoin d'un calcul du chargement Φ_n , dont la partie fluide provient de l'intégration au pas de temps précédent du problème fluide. Par contre, cette méthode possède des critères de stabilité numérique [2] [10] assez contraignants pour un calcul couplé fluide/structure.

3.3.2.2 Méthode implicite

Les méthodes implicites [19] consistent à intégrer l'équation d'équilibre écrite au pas de temps t_{n+1} , en proposant des schémas d'approximations des dérivées en temps à partir de données qui ne sont pas toutes connues, ce qui conduit à une équation implicite non linéaire sur l'inconnue à calculer. L'un des schémas implicites les plus utilisés est le schéma de NEWMARK [17]. Ce schéma repose sur les approximations suivantes ; le développement limité suivant [177] :

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{X}(t_n) + \delta t \dot{\mathbf{X}}(t_n) + \delta t^2 \left[\beta \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) + (1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{X}}(t_n) \right] + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

permet d'écrire une approximation de l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1})$ au premier ordre en δt :

$$\ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) = \frac{\mathbf{X}(t_{n+1}) - \mathbf{X}(t_n)}{\beta \delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}(t_n)}{\beta \delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{X}}(t_n) + \mathcal{O}(\delta t)$$

Le développement limité suivant donne d'autre part une approximation de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}(t_{n+1})$ au premier ordre en δt :

$$\dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) = \dot{\mathbf{X}}(t_n) + \delta t \left[\gamma \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}) + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}(t_n) \right] + \mathcal{O}(\delta t)$$

β et γ sont les paramètres de la méthode².

En reportant les approximations de la vitesse et de l'accélération au temps t_{n+1} dans l'équation d'équilibre écrite à t_{n+1} , nous obtenons ainsi une équation implicite en \mathbf{X}_{n+1} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t}\right) \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}) &= \Phi_{n+1} + \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t}\right) \mathbf{X}_n \\ + \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t} - \mathbf{C}(1 - \frac{\gamma}{\beta})\right) \dot{\mathbf{X}}_n &+ \left(\mathbf{M}\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) + \mathbf{C}\gamma \delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\right) \ddot{\mathbf{X}}_n \end{aligned}$$

¹Dans la suite, nous notons $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}(t_n)$, $\Phi_n = \Phi(t_n)$, etc..., $\forall n > 0$.

²Une étude de stabilité [2] [19] montre que le choix :

$$\beta = 1/4 \quad \gamma = 1/2$$

est celui qui confère à la méthode une stabilité numérique inconditionnelle et qui limite les oscillations numériques.

Dans le cas linéaire ($\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_L \mathbf{X}$), cette équation est résolue directement après inversion de la matrice $\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t} + \mathbf{K}_L$. Dans le cas non linéaire ($\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}_L \mathbf{X} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X})$), cette équation implicite peut être résolue avec un algorithme de point fixe [3], basé sur des itérations internes utilisant l'approximation :

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^{q+1}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^q) + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{n+1,q} (\mathbf{X}_{n+1}^{q+1} - \mathbf{X}_{n+1}^q)$$

En reportant dans l'équation implicite, nous écrivons l'équation suivante, dont l'inconnue est \mathbf{X}_{n+1}^{q+1} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t} + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{n+1,q} \right) \mathbf{X}_{n+1}^{q+1} &= \Phi_{n+1} - \mathbf{K}(\mathbf{X}_{n+1}^q) + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{n+1,q} \mathbf{X}_{n+1}^q + \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t} \right) \mathbf{X}_n \\ &+ \left(\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t} - \mathbf{C}(1 - \frac{\gamma}{\beta}) \right) \dot{\mathbf{X}}_n + \left(\mathbf{M}(\frac{1}{2\beta} - 1) + \mathbf{C}\gamma \delta t (\frac{1}{2\beta} - 1) \right) \ddot{\mathbf{X}}_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

La résolution de cette équation nécessite à chaque itération interne q l'inversion de la matrice $\frac{\mathbf{M}}{\beta \delta t^2} + \frac{\mathbf{C}\gamma}{\beta \delta t} + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{n+1,q}$; nous utilisons à nouveau l'algorithme LU .

Le critère d'arrêt des itérations internes est un critère de convergence du type :

$$\frac{\|\mathbf{X}_{n+1}^{q+1} - \mathbf{X}_{n+1}^q\|}{\|\mathbf{X}_{n+1}^q\|} \leq \epsilon$$

où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle et ϵ est un critère fixé. La norme matricielle utilisée dans notre cas est la norme infinie $\|(X_k)_{k \in [1,K]}\|_\infty = \max \{|X_k|, k \in [1, K]\}$. Le processus itératif est initialisé à partir d'une estimation du déplacement \mathbf{X}_{n+1}^0 , obtenue à partir des termes de raideur linéaires.

Le schéma de NEWMARK est inconditionnellement stable ; le choix du pas de temps est guidé par des considérations de précision. Pour le couplage avec la résolution du problème fluide dans le cas d'un algorithme explicite, les efforts fluides proviennent d'un calcul correspondant au pas de temps précédent. Nous adapterons l'équation ci-dessous en utilisant une estimation de Φ_{n+1} , donnée par $\tilde{\Phi}_{n+1} = 2\Phi_n - \Phi_{n-1}$ (voir section 3.4) ; ce décalage introduit un amortissement numérique, qui sera réduit avec l'utilisation d'un pas de temps petit.

3.3.2.3 Méthode mixte

La méthode explicite présentée est simple à mettre en œuvre, mais limitée par une condition de stabilité ; la méthode implicite est inconditionnellement stable mais plus délicate à mettre en œuvre. Nous proposons une méthode alternative consistant à réaliser un traitement implicite des termes linéaires et un traitement explicite des termes non linéaires. Le schéma mixte ainsi proposé possède potentiellement la simplicité de mise en œuvre des calculs explicites, conjuguée à la stabilité de l'approche implicite.

Au premier ordre, un tel schéma peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - 2\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n-1}}{\delta t^2} + \mathbf{C} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_{n-1}}{2\delta t} + \mathbf{K}_L \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n) - \Phi_{n+1} = 0$$

Pour obtenir un schéma au second ordre, nous chercherons alors à résoudre :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{K}_L \mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n) - \Phi_{n+1} + \delta t \left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_{n+1} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n) \right]' = 0$$

avec les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}'_{n+1} &= \frac{\mathbf{X}_{n+1} - 3\mathbf{X}_n + 3\mathbf{X}_{n-1} - \mathbf{X}_{n-2}}{\delta t^3} + \mathcal{O}(\delta t) \\ \dot{\mathbf{X}}'_{n+1} &= \frac{\mathbf{X}_{n+1} - 2\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n-1}}{\delta t^2} + \mathcal{O}(\delta t) \\ \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n)' &= \frac{\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n) - \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_{n-1})}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)\end{aligned}$$

ce qui donne le schéma à l'ordre deux en δt :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{2\delta t} + \mathbf{K}_L\right)\mathbf{X}_{n+1} &= \bar{\Phi}_{n+1} + \left(\frac{5\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{2\mathbf{C}}{2\delta t}\right)\mathbf{X}_n \\ - \left(\frac{4\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{2\mathbf{C}}{2\delta t}\right)\mathbf{X}_{n-1} &+ \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2}\mathbf{X}_{n-2} + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_{n-1}) - 2\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{X}_n)\end{aligned}\quad (3.24)$$

De même, ce schéma utilise une estimation des efforts au pas de temps t_{n+1} donnée par $\bar{\Phi}_{n+1} = 2\Phi_n - \Phi_{n-1}$.

Remarque 8 Dans le cas d'un problème d'évolution linéaire, il peut s'avérer plus simple de traiter le problème dynamique en utilisant une décomposition du mouvement sur base modale.

L'équation matricielle du mouvement est dans le référentiel en mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\Gamma + \Phi$$

La structure possède des modes propres $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ ¹, solutions du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\mathbf{X}_n = \mathbf{0}$$

Les modes propres vérifient les conditions d'orthogonalité [89] :

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_m = \mu_n \delta_{n,m} \quad \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_m = \omega_n^2 \mu_n \delta_{n,m}$$

où μ_n est la masse généralisée du mode propre \mathbf{X}_n .

Les modes propres forment une base de l'espace des déplacements, la réponse de la structure s'écrit :

$$\mathbf{X}(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n(t) \mathbf{X}_n(z)$$

¹Les modes propres $(X_n)_{n \geq 1}$ d'une poutre encastree/libre sont donnés par [5] :

$$X_n(z) = \cosh(\Omega_n z/l) - \cos(\Omega_n z/l) + \lambda_n [\sin(\Omega_n z/l) - \sinh(\Omega_n z/l)]$$

avec :

$$\lambda_n = \frac{\cosh(\Omega_n l) + \cos(\Omega_n l)}{\sinh(\Omega_n z) + \sin(\Omega_n z)}$$

et Ω_n racine de :

$$\cosh(\Omega_n l) \cos(\Omega_n l) + 1 = 0$$

où $(\xi_n)_{n \geq 1}$ sont les coordonnées généralisées. En reportant cette expression dans l'équation dynamique linéaire de la structure, en multipliant à gauche par \mathbf{X}_n et en tenant compte des conditions d'orthogonalité des modes, nous obtenons les équations scalaires découplées :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + 2\zeta_n \omega_n \frac{d\xi_n}{dt} + \omega_n^2 \xi_n = -\kappa_n \gamma + \frac{(\Phi, \mathbf{X}_n)}{\mu_n} \quad \forall n \geq 1 \quad (3.25)$$

avec κ_n le facteur de participation du mode n donné dans le cas de la poutre par :

$$\kappa_n = \frac{\int_0^H X_n(z) dz}{\int_0^H X_n^2(z) dz}$$

et ζ_n le coefficient d'amortissement modal. Les valeurs des masses généralisées, facteurs de participation et masses modales [89] pour chaque mode propre de la poutre encastree/libre sont données dans le TAB. 3.2.

n	$\mu_n / \rho_S S$ [%]	κ_n [%]	$M_n / \rho_S S$ [%]
1	39.15	78.30	61.31
2	21.70	43.39	18.83
3	12.72	25.44	6.47
4	9.09	18.19	3.31
5	7.07	14.15	2.00

TAB. 3.2 – Caractéristiques modales (masses généralisées μ_n , facteurs de participation κ_n et masses modales M_n) des premiers modes propres d'une poutre élastique encastree/libre

Chaque équation modale (3.25) peut être intégrée à l'aide du schéma numérique suivant (θ -schéma) :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n^{i+1} = \dot{\xi}_n^i [1 - 2\delta t \zeta_n \omega_n] + \left[\frac{(\Phi^i, \mathbf{X}_n)}{\mu_n} - \omega_n^2 \xi_n^i - \kappa_n \gamma_{i+1} \right] \delta t \\ \xi_n^{i+1} = \xi_n^i + [(1 - \theta) \dot{\xi}_n^{i+1} + \theta \dot{\xi}_n^i] \delta t \end{cases} \quad (3.26)$$

L'intégration temporelle nécessite le calcul du produit scalaire (Φ^i, \mathbf{X}_n) pour chaque mode considéré ; ce produit scalaire est calculé numériquement avec une relation du type :

$$(\Phi, \mathbf{X}_n) = \int_0^L \varphi(z) X_n(z) dz \sim \sum_l w_l \varphi(z_l) X_n(z_l)$$

où $(z_l)_{l \geq 1}$ sont les centres des cellules fluide en contact avec l'interface fluide/structure.

La méthode sera testée dans le cas d'un comportement linéaire de la structure et validée sur le problème couplé à la section 4.3.

3.4 Couplage des problèmes

Après avoir présenté les méthodes numériques de résolution des problèmes fluide et structure, nous nous intéressons maintenant au couplage des deux problèmes. La solution retenue avec le code CFD consiste à réaliser un couplage explicite entre les deux problèmes, résolus successivement et avancés en temps de manière décalée, selon le principe général de la FIG. 3.7.

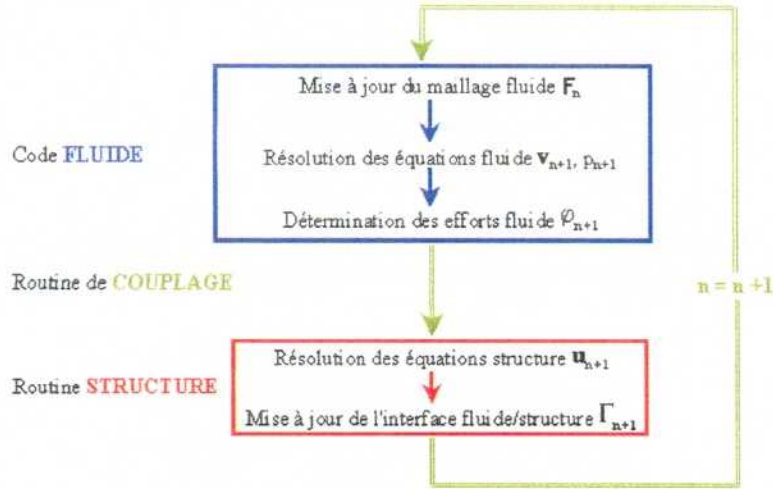


FIG. 3.7 – Procédure de couplage fluide/structure. Principe général

Ce choix est guidé à la fois par des questions de simplicité de mise en œuvre, notamment en vue d'un couplage avec un code structure externe au code fluide et par des considérations de formulation du code CFD utilisé pour l'étude. La stratégie de résolution basée sur l'algorithme PISO ne permet pas à l'utilisateur d'accéder aux grandeurs calculées pour le problème fluide au sein d'un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$; les résultats de calcul pour le problème fluide ne sont disponibles qu'à la fin de l'intervalle au temps t_{n+1} , et le problème fluide ne peut recevoir d'informations qu'au début de l'intervalle au temps initial t_n . Dans ce contexte, un couplage explicite basé sur le principe de la FIG. 3.7 reste le plus général et le plus immédiat dans la programmation au sein du code fluide.

Nous détaillons maintenant les aspects du couplage en temps et du couplage en espace pour l'algorithme explicite utilisé dans notre étude. Le couplage en temps précise la méthode de résolution explicite, ainsi que la stabilisation numérique du schéma de couplage par filtrage numérique des oscillations non physiques à haute fréquence sur les efforts fluide. Le couplage en espace aborde la projection des efforts fluide sur le maillage structure et l'interpolation des déplacements de l'interface fluide/structure sur le problème fluide dans le cas de discrétisations non conformes des problèmes, ainsi que les algorithmes de remaillage du problème fluide.

3.4.1 Couplage en temps

3.4.1.1 Couplage explicite

Le couplage en temps des deux sous-problèmes fluide et structure utilise un algorithme de couplage *explicite* et *décalé* qui consiste à résoudre alternativement les problèmes, en commençant par le problème structure. Le principe général de l'algorithme non linéaire est schématisé par la FIG. 3.8.

Son principe est le suivant : nous supposons connus l'état du fluide pour l'instant t_{n-1} (caractérisé par les champs de pression p_{n-1} et de vitesse \mathbf{v}_{n-1}) et l'état de la structure pour l'instant t_n (caractérisé

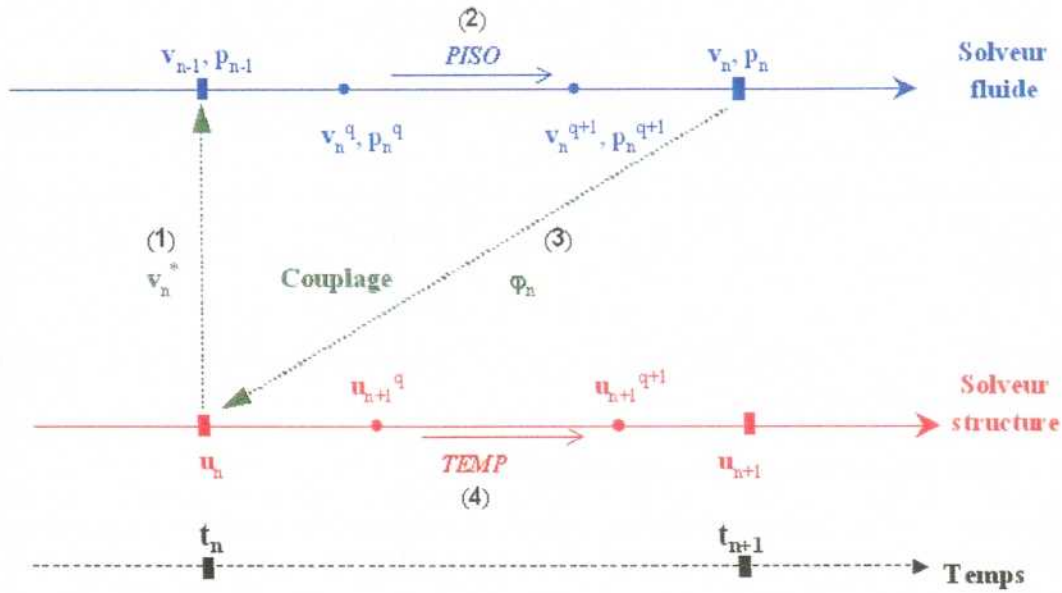


FIG. 3.8 – Couplage fluide/structure explicite décalé développé dans le code Star-CD

par le champ de déplacement \mathbf{u}_n); nous déduisons alors le mouvement de l'interface fluide/structure et un champ de vitesse de grille pour le maillage fluide \mathbf{v}_n^* (1). Le problème fluide est alors résolu et avancé de t_{n-1} à t_n , en utilisant l'algorithme PISO, ce qui conduit après itérations internes au code fluide, à la connaissance des champs p_n et \mathbf{v}_n (2), desquels sont déduits les efforts exercés par le fluide sur la structure φ_n (3). Le problème structure est alors avancé en temps entre t_n et t_{n+1} , à l'aide de l'algorithme structure noté symboliquement TEMP, nécessitant le cas échéant des itérations internes, ce qui permet alors le calcul du champ de déplacement \mathbf{u}_{n+1} (4). Le problème couplé est avancé en temps et le processus est ensuite itéré pour le pas de temps suivant.

La procédure est explicite et n'utilise pas d'itérations internes : elle trouvera donc ses limites dans l'étude de problèmes fluide/structure très fortement couplés. Le contexte général de notre étude est celui de phénomènes d'interactions fluide/structure [57], par opposition à des phénomènes plus complexes comme le cas d'instabilités sous écoulement [58], où le couplage physique des problèmes est plus fort. Les interactions entre le fluide et la structure se traduisent essentiellement par des effets de masse ajoutée, que la procédure de calcul proposée permet de bien reproduire¹, et qui justifie le développement d'une méthode explicite pour la simulation du problème étudié.

Dans la méthode de couplage, les conditions de couplage des problèmes (1.25) et (1.26) sont approchés de la façon suivante.

La continuité de la vitesse à l'interface fluide/structure pour la résolution du problème fluide sur l'intervalle de temps $[t_{n-1}, t_n]$ utilise la vitesse sur l'interface $\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t_n, \Gamma}$ calculée au pas de temps

¹Nous verrons au chapitre 5 que des effets de couplage de modes sont également bien décrits par la méthode numérique utilisée, ce qui la rend assez générale pour l'étude de phénomènes d'interactions fluide/structure.

t_n :

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_{n-1}} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t_n, \Gamma} = \frac{\mathbf{u}_n^\Gamma - \mathbf{u}_{n-1}^\Gamma}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t)$$

avec \mathbf{u}_n^Γ et \mathbf{u}_{n-1}^Γ les valeurs des déplacements de l'interface fluide/structure calculées aux instants t_n et t_{n-1} (la structure est en avance sur le fluide).

Le calcul des efforts fluide exercés à l'interface fluide/structure pour la résolution du problème structure sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ utilise les efforts sur l'interface $\varphi|_{t_n, \Gamma}$ calculés au pas de temps t_n :

$$\varphi|_{t_n, \Gamma} = 2\varphi_n^\Gamma - \varphi_{n-1}^\Gamma + \mathcal{O}(\delta t)$$

avec φ_n^Γ et φ_{n-1}^Γ les efforts fluide sur la structure calculés aux instants t_n et t_{n-1} (le fluide est en retard sur la structure).

3.4.1.2 Filtrage numérique des efforts fluide

Compte tenu des méthodes numériques utilisées dans l'approche de résolution par couplage faible, la simulation du problème couplé utilise une dynamique à *trois* champs :

- les champs de pression et de vitesse (\mathbf{v}, p) ;
- le champ de déplacement \mathbf{u} ;
- le champ de vitesse de grille \mathbf{v}^* .

L'évolution des champs fluide (\mathbf{v}, p) et structure \mathbf{u} correspond à leur dynamique physique propre. Le champ de vitesse de grille \mathbf{v}^* obéit à une dynamique dépendant des deux précédentes, compte tenu de la résolution de la loi de conservation en espace (voir paragraphe 3.2.3) et de l'algorithme de remaillage du problème fluide utilisé (voir sous-paragraphe 3.4.2.2) ; sa description est donc assez délicate. Lorsque le mouvement de maillage est de faible amplitude, la méthode peut engendrer des oscillations numériques qui peuvent se traduire éventuellement par des instabilités numériques pour le problème couplé [117] [120].

Ceci peut devenir très gênant lorsque le sujet de l'étude est relatif aux instabilités dues à la physique du couplage fluide/structure [91] [119]. Différentes solutions ont été proposées pour traiter ce problème :

- une première méthode consiste à travailler sur un domaine spatial fixe avec des conditions aux limites et d'interface formulées pour compenser l'absence de mouvement. Cette méthode, dite méthode de *transpiration* [81], est utilisée par exemple par FERNANDEZ-VALLERA [86] pour la détermination de fréquences propres d'une structure couplée avec un fluide visqueux et appliquée par FANION pour l'étude de l'instabilité d'aile d'avion [80] ;
- une seconde méthode consiste à réaliser un couplage *implicite* entre les problèmes fluide et structure, nécessitant la mise en œuvre d'un processus itératif entre chaque sous-problème au sein du pas de temps d'intégration. A chaque itération interne, un schéma de relaxation permet l'atténuation des oscillations numériques. Cette méthode est utilisée par exemple par PENROSE et STAPPLES pour la simulation numérique du fonctionnement de valves cardio-vasculaires [113].

Notre étude est dédiée à la description d'effets d'interactions fluide/structure : le phénomène est physiquement stable (voir chapitre 1). Les instabilités potentielles sont dues à l'existence d'oscillations numériques sur les efforts fluide. Dans ce contexte, il est loisible de proposer un traitement numérique du problème. La suppression des oscillations numériques sera obtenue en incorporant dans la procédure de couplage un filtre numérique hautes fréquences sur les efforts calculés par le code fluide.

Les efforts filtrés seront alors projetés sur le maillage structure. Le processus itératif décrit par la FIG. 3.7 est alors modifié pour prendre en compte le filtre numérique ; la procédure est alors représentée par la FIG. 3.9.

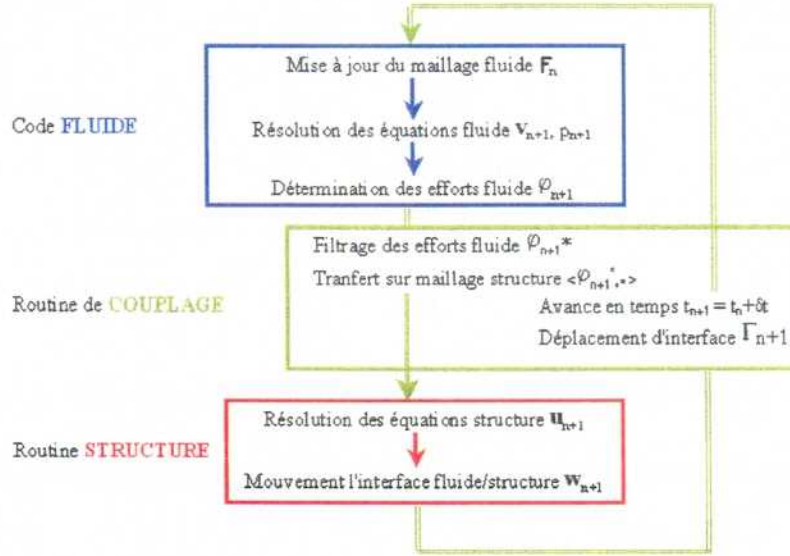


FIG. 3.9 – Procédure de couplage. Couplage en temps : filtrage des efforts fluide

L'utilisation du filtre est basée sur les éléments de traitement de signal suivants [158]. Les efforts fluides calculés numériquement présentent des oscillations hautes fréquences, que nous souhaitons éliminer avec un filtre passe-bas du premier ordre, représenté par sa fonction de transfert continue $H(p)$ donnée par :

$$H(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$$

avec $\omega_0 \tau = 2\pi$, où ω_0 est la pulsation de coupure du filtre.

Pour $p = j\omega$, nous écrivons $H(j\omega) = |H(\omega)|e^{-j\Phi(\omega)}$ avec :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Une représentation du module $|H(\omega)|$ et de l'argument $\Phi(\omega)$ est donnée par la FIG. 3.10.

Il s'agit maintenant de transposer la fonction de transfert continue $H(p)$ en fonction de transfert *discrète*, en utilisant une méthode approchée [182] ; différentes approximations de l'opérateur de LAPLACE p (dérivée) sont utilisables.

Pour déterminer la fonction de transfert discrète, nous utiliserons l'approximation bilinéaire :

$$p = \frac{2}{\delta t} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

avec δt le pas de temps de calcul. En reportant l'expression de p en fonction de z dans $H(p)$, nous obtenons :

$$H(z) = \frac{\varphi^*(z)}{\varphi(z)} = \frac{(z + 1)\delta t}{2\tau(z - 1) + \delta t(z + 1)}$$

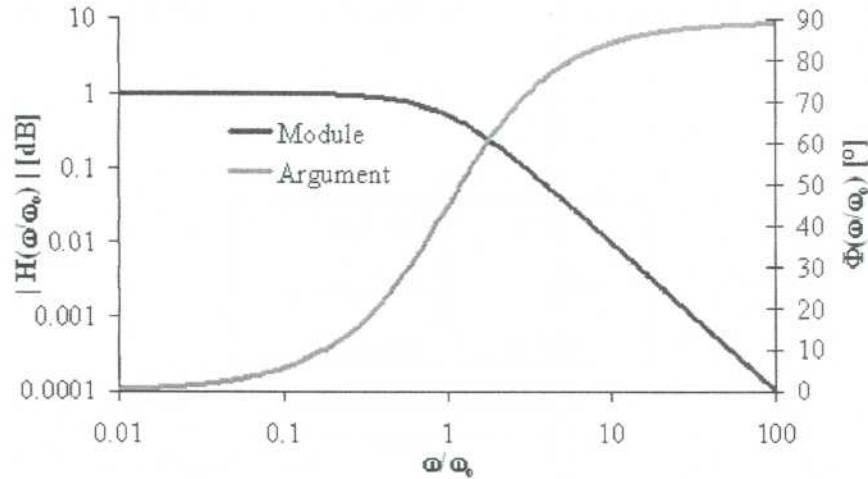


FIG. 3.10 – Module et argument de la fonction de transfert pour le filtre passe-bas du premier ordre

$\varphi(z)$ est la transformée en z du signal non filtré et $\varphi^*(z)$ est la transformée en z du signal filtré. Nous déduisons alors :

$$\varphi^*(z) = \frac{\delta t}{2\tau + \delta t} \cdot [\varphi(z) + z^{-1}\varphi(z) - z^{-1}\varphi^*(z)] + \frac{2\tau}{2\tau + \delta t} \cdot z^{-1}\varphi^*(z)$$

ou encore, en utilisant les propriétés de la transformée en z :

$$\varphi_n^* = \frac{\delta t}{2\tau + \delta t} \cdot [\varphi_n + \varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^*] + \frac{2\tau}{2\tau + \delta t} \cdot \varphi_{n-1}^* \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) constitue l'équation récurrente constitutive du filtre, en utilisant la représentation de la FIG. 3.11.

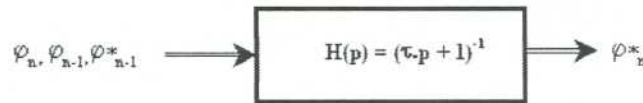


FIG. 3.11 – Filtrage des efforts

Les solveurs fluide et structure s'apparentent à des fonctions de transfert notées $F(p)$ et $S(p)$; les algorithmes d'avance en temps des domaines discrets fluide et structure impliquent un bouclage sur les fonctions $F(p)$ et $S(p)$; le filtrage $H(p)$ fonctionne en boucle fermée entre les codes fluide et structure. En boucle ouverte, le filtre $H(p)$ est stable ; nous nous assurerons sur les exemples de validation proposés au chapitre 4 que le filtre n'est pas instable en boucle fermée.

Nous nous intéressons maintenant aux aspects de couplage en espace des sous-problèmes fluide et structure.

3.4.2 Couplage en espace

3.4.2.1 Gestion des incompatibilités de maillage

Dans le cas d'étude, le maillage fluide mis en place est plus dense que le maillage structure : nous cherchons à décrire des effets dans le fluide (couche limite, évolution de la surface libre) qui nécessitent l'utilisation d'une discrétisation riche en cellules fluides. Typiquement, le maillage fluide utilisé est fortement raffiné au niveau des parois rigides et mobiles, ainsi qu'au niveau de la surface libre, comme le montre la FIG. 3.12.



FIG. 3.12 – Maillage du problème fluide dans le code CFD

Le maillage structure mis en place comporte comparativement moins d'éléments ; dans le cas linéaire, une dizaine d'éléments finis est suffisante pour décrire correctement la dynamique de la poutre. Les deux maillages peuvent être totalement différents à ce niveau, comme représenté de façon schématique par la FIG. 3.13.

Dans le cas de problèmes couplés tridimensionnels, la non conformité des maillages fluide et structure peut être gérée numériquement au moyen d'éléments finis d'interpolation [61], qui permettent de projeter les déplacements (de la structure vers le fluide) et les efforts (du fluide vers la structure). Les choix de modélisation adoptés pour la description de la dynamique de poutre en flexion sont les suivants :

- les efforts fluides sont intégrés sur la section de la poutre ;
- les déplacements de la structure se font dans la direction transversale.

Dans le cas du problème étudié, et compte tenu de l'hypothèse d'échanges fluide/structure par tranches à l'interface, la mise en œuvre de la technique d'interpolation des efforts et des déplacements dans notre procédure de couplage éléments finis/volumes finis se trouve ainsi simplifiée, puisque réalisée dans la direction z uniquement.

Dans la situation décrite par la FIG. 3.13, soient $(z_i)_{i \in [1, I+1]}$ les coordonnées des $I + 1$ points du maillage structure suivant z (I éléments finis structure) et $(z_j)_{j \in [1, J+1]}$ les coordonnées des points des

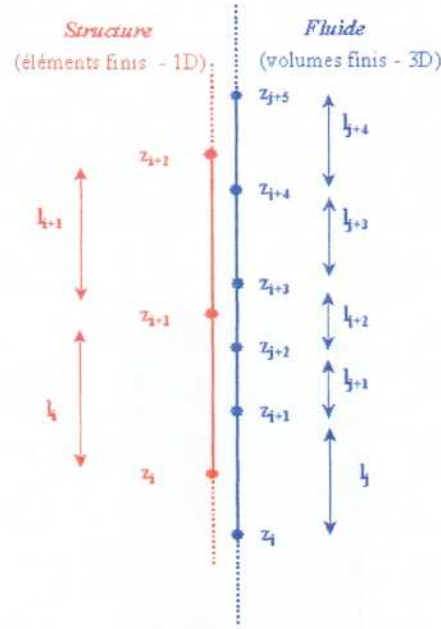


FIG. 3.13 – Maillages fluide et structure à l'interface

cellules fluide situées en $r = R, \forall \theta \in [0, 2\pi]$ (J volumes finis fluide suivant z).

La formulation variationnelle du problème structure prenant en compte le couplage fluide/structure fait apparaître un terme supplémentaire par rapport à l'expression (3.18) pour exprimer le travail des efforts fluide. Le travail virtuel des efforts fluide dans le champ de déplacement virtuel en flexion δv s'écrit :

$$\int_0^L \varphi(v, z, t) \delta v(z) dz$$

La discrétisation de ce terme est alors :

$$\sum_{i=1}^{i=I} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \varphi(v, z, t) \delta v(z) dz$$

Sur chaque élément fini structure $[z_i, z_{i+1}]$, nous écrivons l'effort élémentaire, calculé avec des fonctions d'interpolation cubiques de la quantité $\delta v(z)$, sous la forme discrétisée suivante :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \varphi(v, z, t) \delta v(z) dz \simeq \Phi_i \times \langle \delta V_i \rangle \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1/2 \\ l_i/12 \\ 1/2 \\ -l_i/12 \end{array} \right\}$$

avec $\langle \delta V_i \rangle$ déplacement virtuel pour l'élément i , l_i longueur de l'élément i et Φ_i effort fluide s'exerçant sur tout l'élément i . Φ_i est alors calculé en prenant en compte la contribution de toutes les cellules fluides en vis-à-vis de l'élément fini structure.

D'autre part, lorsque les déplacements $(V_i)_{i \in [1, I+1]}$ des nœuds du maillage structure sont calculés, il faut interpoler ces déplacements sur le maillage fluide $(V_j)_{j \in [1, J+1]}$.

Pour ce faire, nous déterminons pour chaque élément fini $i \equiv [z_i, z_{i+1}]$ les valeurs suivantes, parmi les données du maillage fluide (voir FIG. 3.14) :

$$z_{i0} = \sup_{j \in [1, J+1]} \{z_j < z_i\}$$

et :

$$z_{in+1} = \inf_{j \in [1, J+1]} \{z_j > z_{i+1}\}$$

de sorte que $z_{ij} \in [z_i, z_{i+1}], \forall ij \in [1, in]$.

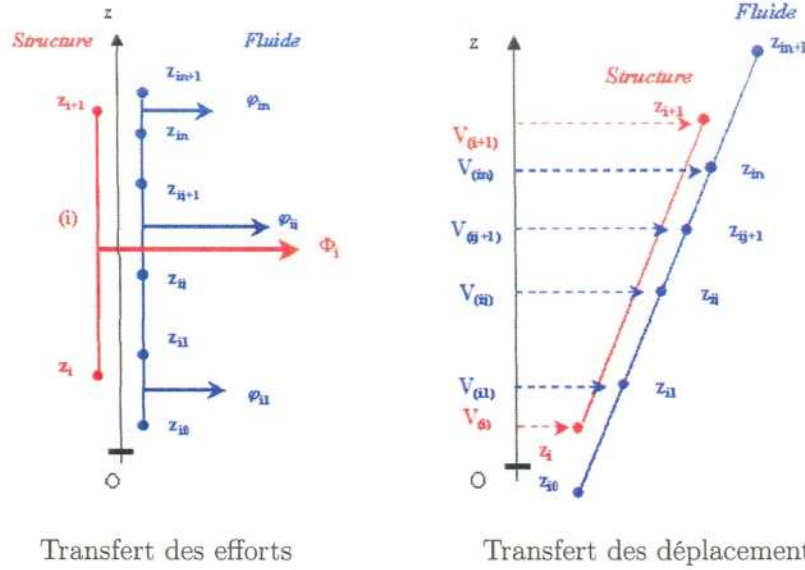


FIG. 3.14 – Transfert des efforts et des déplacements entre les maillages fluide et structure

Nous définissons alors pour chaque cellule fluide de l'interface en regard de l'élément fini i les coefficients suivants¹ :

- coefficients d'effort $\phi_{ij} = \frac{z_{ij} - \max(z_i, z_{ij-1})}{z_{ij} - z_{ij-1}}$;
- coefficients de déplacement $\lambda_{ij} = \frac{z_{ij} - z_i}{z_{i+1} - z_i}$.

Les efforts fluides sont déterminés par le code CFD pour chaque tranche fluide ; nous déduisons la projection sur l'élément fini i de l'effort fluide :

$$\Phi_i = \sum_{ij=1}^{ij=in-1} \phi_{ij} \varphi_{ij} \quad (3.28)$$

où φ_{ij} est l'effort fluide pour la tranche $[z_{ij}, z_{ij+1}]$, donné par le calcul CFD.

Les déplacements sont déterminés pour chaque élément fini par la procédure d'intégration temporelle du problème dynamique structure ; nous déduisons alors la projection des déplacements sur une tranche fluide selon :

$$V_{(ij)} = V_{(i)} + \lambda_{ij}(V_{(i+1)} - V_{(i)}) \quad (3.29)$$

¹Ces grandeurs sont calculées une seule fois au début de simulation.

où $V_{(ij)}$ est le déplacement du nœud fluide z_{ij} au niveau de l'interface.

La procédure de couplage en espace est alors intégrée dans la procédure de couplage générale comme indiqué par la FIG. 3.15.

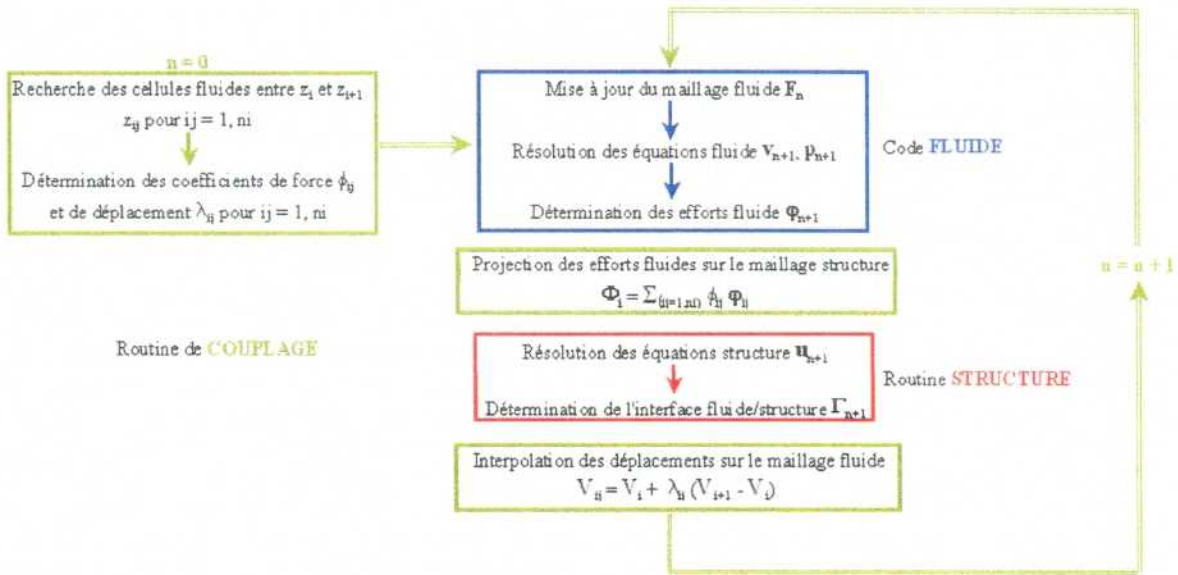


FIG. 3.15 – Procédure de couplage. Couplage en espace : projection des efforts et des déplacements

3.4.2.2 Algorithme de remaillage du problème fluide

Le second aspect du couplage en espace est relatif à la stratégie de remaillage du problème fluide. Compte tenu de l'approche par tranches du problème, nous décrivons la méthode de remaillage pour un problème bidimensionnel.

Algorithme standard Le maillage du problème utilise des cellules à quatre nœuds, avec I nœuds dans la direction r et J nœuds dans la direction θ . Un nœud du maillage est noté $M(i, j)$; la numérotation associée utilise l'ordre lexicographique, le numéro du nœud $M(i, j)$ est ainsi $\mathcal{N}(i, j) = i + (j - 1) \times I$. Le maillage standard ainsi obtenu est représenté par la FIG. 3.16.

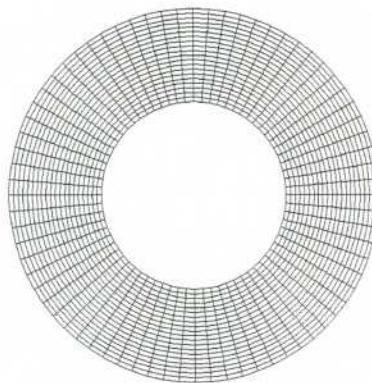


FIG. 3.16 – Maillage non déformé utilisé dans l'algorithme standard

Nous nous plaçons dans le cas d'un mouvement imposé du cylindre intérieur, d'une quantité δ donnée dans la direction x , comme représenté par la FIG. 3.17.

Les points du cylindre extérieur $M(I, j)_{j \in [1, J]}$ sont immobiles, les points du cylindre intérieur $M(1, j)_{j \in [1, J]}$ sont tous déplacés d'une quantité δ suivant x . Les nouvelles coordonnées de ces points sont alors :

$$\begin{aligned} x(1, j) &= R \cos \theta_j + \delta & y(1, j) &= R \sin \theta_j \\ x(I, j) &= \alpha R \cos \theta_j & y(I, j) &= \alpha R \sin \theta_j \end{aligned}$$

avec $\theta_j = (\mathbf{\Omega M}_{(1, j)}, \mathbf{e}_x) = (\mathbf{O M}_{(I, j)}, \mathbf{e}_x) = \frac{(j-1)2\pi}{J}$. Pour j fixé, les points $M(i, j)_{j \in [2, J-1]}$ situés entre $M(1, j)$ et $M(I, j)$ sont répartis de façon régulière¹ ; les nouvelles coordonnées des points sont alors :

$$x/y(i, j) = x/y(1, j) + (i-1) \times \frac{x/y(I, j) - x/y(1, j)}{I-1}$$

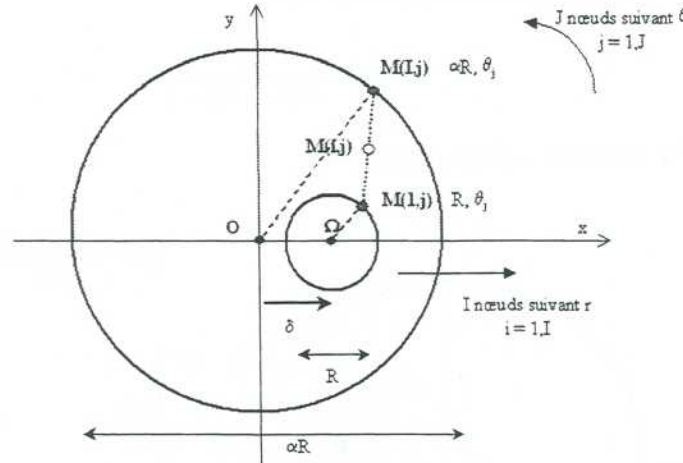


FIG. 3.17 – Déplacement du cylindre intérieur d'une quantité δ . Algorithme de remaillage de base

Cette stratégie de maillage présente l'avantage de la simplicité de mise en œuvre, mais elle restera limitée à des amplitudes de mouvement petites devant les dimensions de l'espace annulaire, typiquement pour $\xi \leq 50\%$ ². Dans le cas de déplacements plus importants, une technique de remaillage préservant la qualité des cellules peut s'avérer nécessaire, ce que nous proposons ci-après.

Algorithme amélioré Différentes techniques de remaillage du problème fluide peuvent être envisagées pour préserver la qualité du maillage du domaine fluide [62] [133]. Une famille de techniques possibles est basée sur la résolution d'un problème du type $\Delta \mathbf{u}^* = 0$ sur le domaine réel du fluide, avec $\mathbf{u}^*(r, \theta, z) = (u_x^*(r, \theta, z), u_y^*(r, \theta, z), u_z^*(r, \theta, z))$ représentant le champ de déplacement du maillage. Les conditions aux limites sur les frontières du domaine sont les déplacements

¹La méthode se généralise bien évidemment à un maillage non régulier, utilisant par exemple un rapport de forme entre les cellules successives, dans le cas où nous souhaitons calculer précisément l'écoulement au voisinage de la paroi en mouvement.

² ξ est le rapport entre le déplacement imposé δ et la taille de l'espace annulaire $R(\alpha - 1)$.

imposés (*i.e.* les déplacements calculés des interfaces) ; ces conditions s'expriment dans notre cas comme :

$$u_X^*(R, \theta, z) = v(z) \cos \theta \quad u_Y^*(R, \theta, z) = v(z) \cos \theta \quad u_Z^*(R, \theta, z) = 0$$

où v représente la composante transverse du déplacement de la poutre. La méthode nécessite donc la résolution d'un problème de laplacien mais est particulièrement efficace dans le cas de déplacements importants du cylindre intérieur.

Dans le cas de déplacements d'amplitude modérée, mais non négligeable devant les dimensions de l'espace annulaire, nous proposons une approche équivalente basée sur des considérations géométriques élémentaires et assurant la conservation d'un rapport de forme des cellules fluides \hat{R}_θ , que nous pouvons quantifier par :

$$\hat{R}_\theta = \frac{\pi}{JR(\alpha - 1)}$$

Après déplacement δ du cylindre intérieur, la situation est définie par la FIG. 3.18. Le rapport de forme dans cette configuration est évalué par :

$$\hat{R}_\theta = \frac{\tilde{\theta}}{R(\alpha - 1) - \delta}$$

avec $\tilde{\theta}$ angle de la première cellule fluide.

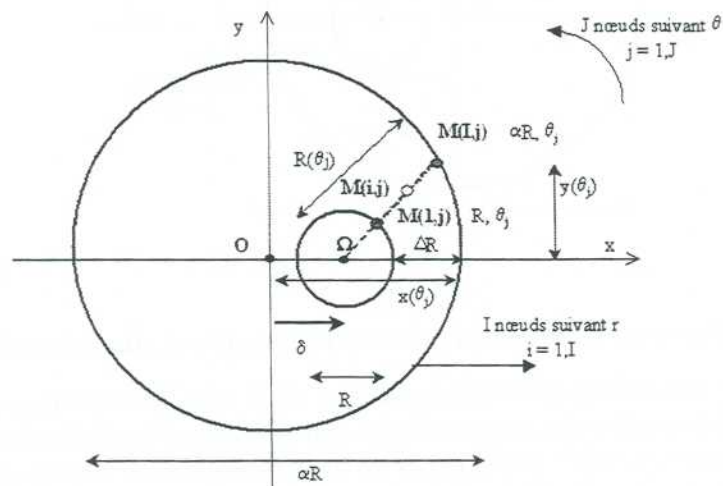


FIG. 3.18 – Déplacement du cylindre intérieur d'une quantité δ . Algorithme de remaillage amélioré

Le remaillage proposé assure une répartition régulière du volume des cellules fluide, les angles θ_j vérifient :

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \delta\theta$$

Les angles $(\theta_j)_{j \in [1, J]}$ sont donc en raison arithmétique et comme $\sum_j \theta_j = 2\pi$, $\delta\theta$ se calcule directement :

$$\delta\theta = \frac{2}{J} \times \frac{\pi - J\tilde{\theta}}{J - 1}$$

Les coordonnées des points $M(1, j)_{i \in [1, J]}$ du cylindre intérieur sont :

$$x(1, j) = \delta + R \cos \theta_j \quad y(1, j) = R \sin \theta_j$$

et les coordonnées des points $M(I, j)_{i \in [1, J]}$ du cylindre extérieur sont :

$$x(I, j) = \delta + R(\theta_j) \cos \theta_j \quad y(I, j) = R(\theta_j) \sin \theta_j$$

θ_j est connu pour tout j ; nous déterminons $R(\theta_j)$ à partir des deux relations :

$$y(I, j) = R(\theta_j) \sin \theta_j \quad \text{et} \quad y(I, j) = \sqrt{(\alpha R)^2 - (\delta + R(\theta_j) \cos \theta_j)^2}$$

Après élimination de $y(I, j)$, $R(\theta_j)$ s'exprime finalement comme :

$$R(\theta_j) = -\delta \cos \theta_j + \sqrt{(\alpha R)^2 - (\delta \sin \theta_j)^2}$$

Le remaillage entre les points $M(1, j)$ et $M(I, j)$ distants de $\Delta R_j = R(\theta_j) - R$ est effectué avec un ratio de maillage suivant r , noté δR_j tel que :

$$\delta r_{i,(j)} = \delta R_j \times \delta r_{i-1,(j)} \quad \forall i$$

où $\delta r_{i,(j)}$ est la distance entre les points $M(i, j)$ et $M(i + 1, j)$ pour j donné. Les $\delta r_{i,(j)}$ sont en raison géométrique, ce qui permet de déduire :

$$\delta r_{1,(j)} = \Delta R_j \times \frac{1 - \delta r_j}{1 - (\delta r_j)^I}$$

Nous disposons alors de tous les éléments géométriques définissant le remaillage d'une tranche du problème fluide. La technique de remaillage avec conservation du rapport de forme des cellules est illustrée par la la FIG. 3.19.

Algorithme alternatif Dans le cas où une description très fine de l'écoulement autour de la paroi du cylindre en mouvement est nécessaire, la technique de maillage présentée peut trouver ses limites, puisque l'épaisseur des couches radiales de cellules est variable en fonction du déplacement du cylindre intérieur. Une alternative possible consiste alors à définir une zone de maillage fixe $[R, R + r]$ et $[R' - r', R']$ autour des cylindres intérieur et extérieur ; cette zone est déplacée en fonction du mouvement des cylindres sans modification du rapport de forme des cellules fluide, et une zone de maillage $[R + r, R' - r']$ qui est remaillée selon les principes exposés ci-dessus. Dans la configuration initiale du problème fluide, les maillages utilisés pour l'algorithme amélioré et le présent algorithme alternatif sont représentés par la FIG. 3.20.

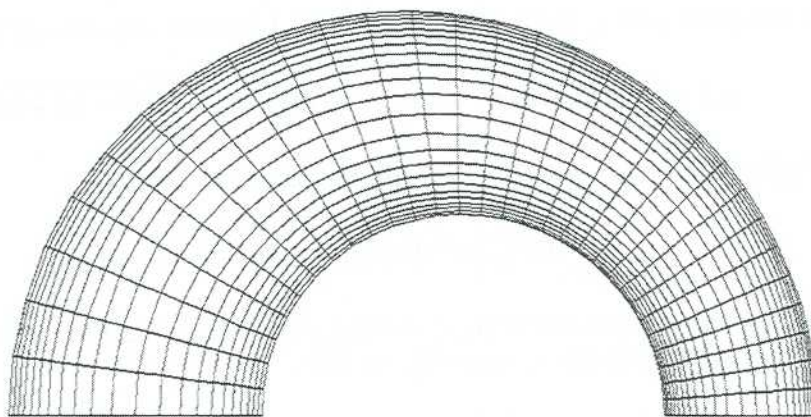


FIG. 3.19 – Maillage déformé avec conservation du rapport de forme de cellules suivant θ et ratio de discrétisation suivant r

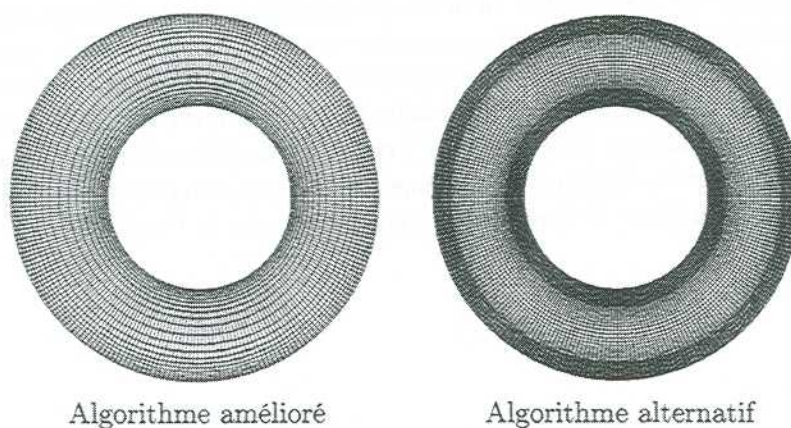


FIG. 3.20 – Maillages non déformés utilisés dans l'algorithme amélioré et l'algorithme alternatif

Nous présenterons dans la section 4.2 au chapitre suivant une comparaison des performances des deux algorithmes pour un calcul numérique de coefficients de masse et d'amortissement ajoutés.

*
* *

Nous avons développé dans ce chapitre les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème d'évolution formulé sur le cas générique d'étude. Nous avons utilisé un couplage explicite décalé en temps entre les deux sous-problèmes. Le problème fluide est discrétisé avec une méthode volumes finis et avancé en temps avec un algorithme implicite découplé en pression/vitesse. Le problème structure est discrétisé avec une méthode éléments finis et avancé en temps avec un algorithme d'intégration temporelle explicite, implicite ou mixte. Les aspects de couplage en temps et en espace ont aussi été détaillés. Le choix de couplage numérique est général et robuste, mais n'est pas intrinsèquement conservatif. La méthode permet de proposer une maquette numérique de couplage entre deux codes généralistes fluide et structure. Le choix de modélisation est guidé par la méthode de résolution des deux sous-problèmes et la contrainte d'utiliser un code CFD généraliste qui n'est pas développé pour traiter spécifiquement des problèmes de couplage avec un code externe. Une démonstration de la capacité du code CFD à traiter des problèmes de couplage fluide/structure s'avère nécessaire : nous proposons dans le chapitre suivant la démarche de validation du code fluide mise en place pour répondre à ce besoin.

Validations élémentaires du code fluide

Nous utilisons dans la présente étude le code commercial STAR-CD [184] [185] pour la résolution du problème fluide selon les principes numériques présentés au chapitre précédent. Le recours à un code commercial permet d'éviter le développement de ces méthodes numériques et d'appréhender la mise en œuvre d'un calcul couplé avec des outils numériques généralistes. Cependant, une partie non négligeable de l'étude a consisté à valider le code en vue des applications spécifiques à notre étude.

En effet, même si le développement d'un code de calcul scientifique obéit à des normes de qualité très strictes, les cas-tests proposés pour la validation générale d'un code ne couvrent pas tous les domaines d'utilisation : il reste à la charge de l'utilisateur du code un travail important d'appropriation et de validation de l'outil numérique. Nous présentons donc dans ce chapitre trois cas de validation élémentaires du code fluide STAR-CD utilisé dans le cadre de cette thèse.

Les cas d'études proposés permettent de qualifier le code CFD pour le traitement de problèmes d'interactions fluide/structure. Les cas traités sont les suivants :

- étude d'un problème de ballotement d'un fluide contenu dans un réservoir axi-symétrique¹ et soumis à une accélération transversale (problème 3D). Cette étude permet de valider le calcul d'efforts fluide avec la méthode VOF implantée dans le code CFD. Le calcul fluide numérique est comparé avec un calcul linéaire utilisant une discrétisation éléments finis axi-symétrique du problème fluide, en appliquant la méthode exposée au paragraphe 2.2.1. Les aspects de précision en temps et en espace sont étudiés. Nous mettons également en évidence les différences entre une approche du problème en référentiel absolu (résolution du problème avec utilisation de la technique de maillage mobile selon la loi de déplacement correspondant à l'excitation imposée) ou relatif (résolution du problème sur maillage fixe, avec prise en compte d'un terme source dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour décrire les efforts d'inertie dans le référentiel en translation) ;
- étude des oscillations libres et forcées d'un cylindre rigide dans un espace annulaire en fluide incompressible, visqueux ou non (problème 2D). Cette étude permet de valider le calcul d'efforts fluide avec frontière mobile, en distinguant la contribution des efforts de pression et des efforts de viscosité. Les résultats des calculs sont comparés avec les modèles analytiques de FRITZ (fluide incompressible non visqueux [87]) et de CHEN (fluide incompressible visqueux [69]), ce qui permet de valider le calcul numérique des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés avec le code STAR-CD. Les aspects de convergence en espace et en temps sont également étudiés ;
- étude du problème couplé linéaire et non linéaire avec surface libre. Cette étude permet de valider les différents aspects de la procédure de couplage fluide/structure explicite proposée :

¹La simulation de problèmes de *sloshing* dans des réservoirs bidimensionnels ou tridimensionnels est un cas d'étude assez classique [50]. La géométrie qui nous intéresse est cependant assez différente des cas d'études académiques à cause du confinement du fluide dans un espace annulaire axi-symétrique.

couplage en espace (remaillage, interpolation et projection des quantités calculées), couplage en temps (filtrage des efforts, algorithmes de résolution du problème structure). Les résultats de calcul sont comparés avec des résultats numériques obtenus à partir d'un couplage fort (éléments finis/éléments finis) du problème.

4.1 Ballotement d'un fluide contenu dans un réservoir axi-symétrique

4.1.1 Position du problème

Le problème étudié est représenté par la FIG. 4.1 : il s'agit de la partie fluide seule du problème générique couplé défini dans le chapitre 1.

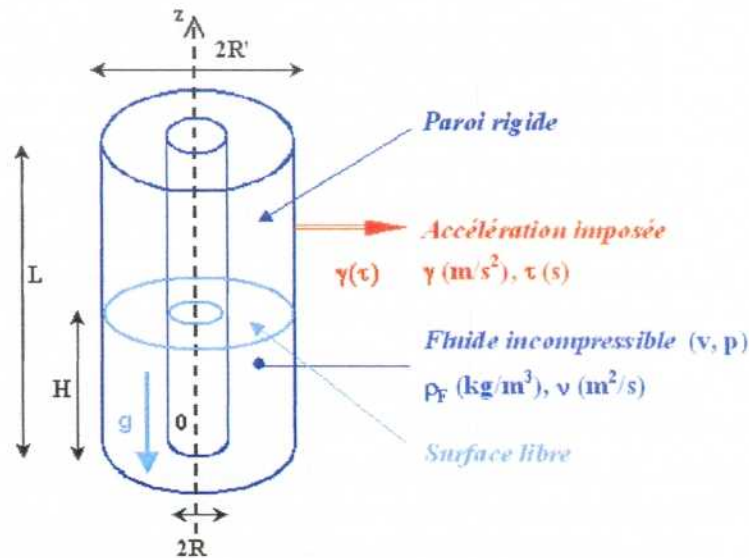


FIG. 4.1 – Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique soumis à une accélération imposée

Le problème posé peut être décrit par les équations linéaires suivantes. Le fluide est supposé parfait, incompressible, décrit par la variable pression, dont l'évolution est régie par l'équation de LAPLACE $\Delta p = 0$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R, R'} = -\rho \gamma \cos \theta \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

pour les parois rigides soumises à l'accélération transversale et :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=H} = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right|_{z=H}$$

pour la surface libre.

La résolution de ce problème est conduite avec une technique éléments finis, suivant les principes exposés au chapitre 2, en ayant recours à une modélisation axi-symétrique du problème et une représentation de p en série de FOURIER, pour les termes symétriques d'ordre $s = 1$ (compte tenu de la condition aux limites en $r = R, R'$).

La discrétisation éléments finis permet d'obtenir le système différentiel suivant :

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{K}_F \mathbf{P}(t) = \gamma(t) \mathbf{\Phi}_F \quad (4.1)$$

où \mathbf{M}_F et \mathbf{K}_F sont les matrices de masse et de raideur du problème, dont l'expression est donnée au paragraphe 2.2.1, et $\mathbf{\Phi}_F$ est le terme de chargement sur le problème fluide, obtenu par discrétisation du terme aux limites en $r = R, R'$.

L'intégration temporelle du système est réalisée avec l'algorithme de NEWMARK. A partir des valeurs nodales de pression pour les nœuds situés en $r = R$, nous calculons l'effort intégré φ sur le cylindre intérieur selon la relation :

$$\varphi(t) \sim \sum_{i=1}^{I_R} w_i P_i(t)$$

avec I_R le nombre d'éléments fluide en contact avec la ligne $r = R$ et $w_i = \frac{l_{i-1} + l_i}{2}$ où l_i est la hauteur de l'élément fini i pour tout $i \in [1, I_R - 1]$ et $l_0 = l_{I_R} = 0$.

Ces efforts sont adimensionnalisés par le terme de masse d'eau déplacée m_o , obtenu dans le cas d'une condition de surface libre $p|_{z=H} = 0$ avec la solution analytique présentée en annexe A.1 (équation [A.3]) et par l'accélération maximale du choc γ_o , de façon à obtenir le coefficient d'effort fluide ϕ défini par :

$$\phi(t) = \frac{\varphi(t)}{m_o \gamma_o}$$

4.1.2 Calcul du coefficient d'effort fluide

Le calcul numérique du coefficient d'effort est réalisé avec le code CFD en utilisant les principes exposés à la section 3.2. Le maillage utilisé est un maillage régulier constitué de $N_r \times N_\theta \times N_z$ cellules fluide, comme représenté par la FIG. 4.2.

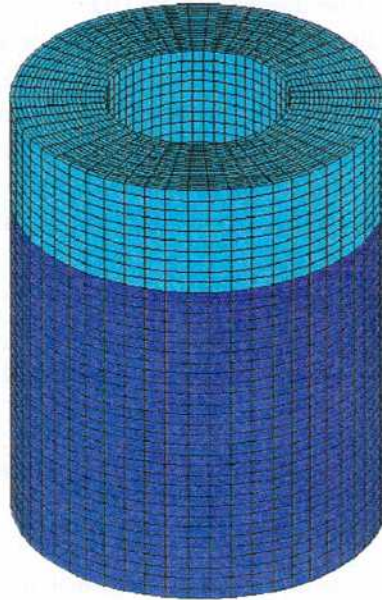


FIG. 4.2 – Maillage du problème fluide

Les dimensions du problème étudié sont : $R = 0.1$ m, $R' = 0.2$ m, $L = 1$ m, $H = 0.75$ m. Nous utilisons la méthode VOF de STAR-CD. Les caractéristiques du fluide lourd (noté L) sont celles de l'eau à température ambiante et pression atmosphérique normale, $\rho_L = 997$ kg/m³ et $\mu_L = 8.87 \times 10^{-3}$ kg/m/s et les caractéristiques du fluide léger (noté l) sont celles de l'air dans les mêmes conditions, $\rho_l = 1.205$ kg/m³ et $\mu_l = 1.81 \times 10^{-5}$ kg/m/s [51]. Les caractéristiques du choc imposé sont¹ $\tau = 1$ s et $\gamma_o = 0.5$ m/s². Le temps de simulation est $T_\infty = 2$ s.

Le maillage standard utilise $N_r = 10$ cellules dans la direction radiale, $N_\theta = 270$ cellules dans la direction ortho-radiale et $N_z = 30$ cellules dans la direction verticale, soit $N = 81000$ cellules fluide. Le pas de temps utilisé est $\delta t = 0.002$ s. Le schéma numérique de discrétisation des équations de conservation est le schéma MARS. Le schéma d'intégration temporel est le schéma d'EULER implicite associé à l'algorithme PISO.

La FIG. 4.3 donne l'évolution du coefficient d'effort fluide ϕ , comparé avec la valeur donnée par le modèle linéaire éléments finis, et le nombre d'itérations PISO à chaque pas de temps pour différentes qualités de maillage fluide. Les mouvements de surface libre sont d'amplitude limitée, le comportement de la surface libre reste proche du domaine linéaire : il y a une bonne concordance entre le calcul CFD et le calcul linéaire, pour toutes les qualités de maillage proposées. Le nombre d'itérations PISO est à peu près équivalent pour tous les maillages étudiés : le nombre moyen d'itérations est de l'ordre de $\bar{N}_{\text{piso}} \sim 5$.

La FIG. 4.4 donne l'évolution du coefficient d'effort fluide ϕ et le nombre d'itérations PISO à chaque pas de temps pour différents schémas de discrétisation. Les schémas étudiés sont ceux détaillés dans le paragraphe 3.2.1, c'est-à-dire les schémas MARS, LUD, CD et UD. Les résultats de calcul sont identiques pour les schémas MARS, LUD et UD ; le schéma CD n'a pas donné de résultats satisfaisants sur l'exemple traité : à la fin du choc imposé, *i.e.* pour $t \sim \tau$, nous notons une instabilité numérique importante et le calcul diverge². Le nombre d'itérations PISO est assez différent selon les schémas utilisés, comme le montre le TAB. 4.1 : le schéma UD nécessite moins d'itérations PISO que les schémas MARS et LUD. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'étant moins précise en espace, la première approximation obtenue dans l'algorithme PISO avec une discrétisation UD est assez éloignée de la solution ; les itérations suivantes améliorent la qualité du calcul de façon plus importante que dans le cas où la prédiction est de meilleure qualité. Le critère de sortie de l'algorithme PISO porte sur la variation relative de la norme des résidus : l'amélioration du calcul par les étapes de correction est donc relativement plus grande dans le cas d'une première prédiction assez grossière (schéma peu précis) que dans le cas d'une première prédiction plus fine (schéma plus précis). Le nombre d'itérations nécessaires avec un schéma d'ordre élevé est donc en général plus grand, c'est ce que nous constatons dans cet exemple.

Schéma	MARS	LUD	CD	UD
\bar{N}_{piso}	5.4098	5.431	2.671	4.124

TAB. 4.1 – Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique. Nombre moyen d'itérations PISO pour différents schémas de discrétisation

¹Les caractéristiques du choc sont choisies de façon à exciter le premier mode de surface libre du fluide, sans générer d'effets non linéaires, afin d'obtenir une comparaison correcte avec le modèle linéaire.

²Nous nous bornons à relever cette observation, sans chercher à étudier plus précisément l'influence des paramètres de calcul (discrétisation en espace, en temps, algorithme d'intégration, *etc.*) sur l'instabilité observée.

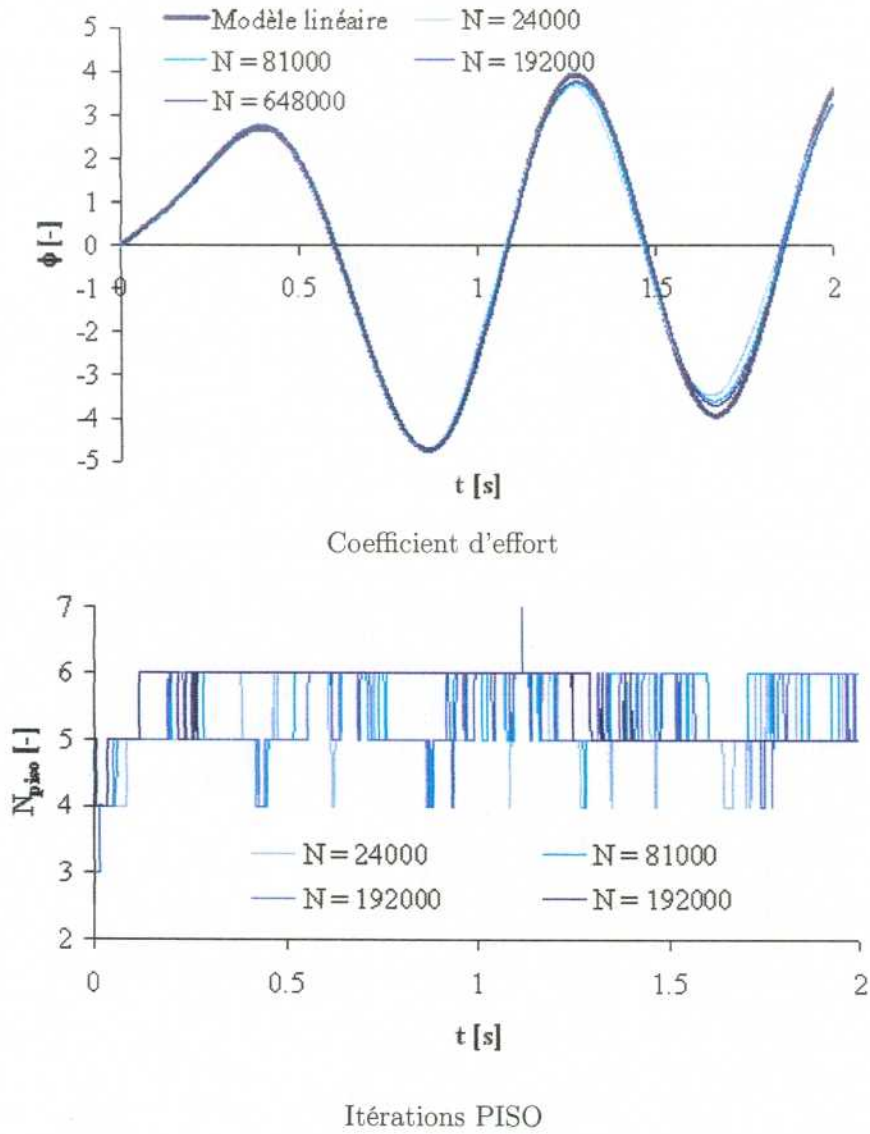


FIG. 4.3 – Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO pour différentes qualités de maillage fluide

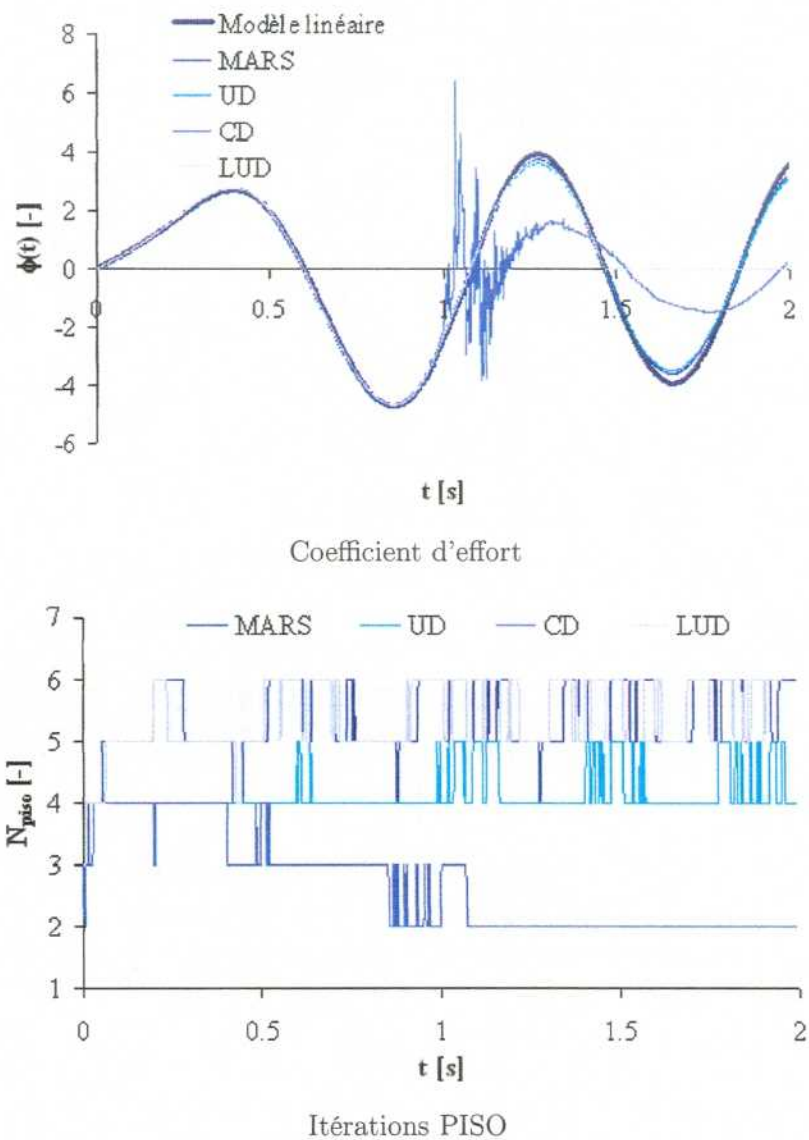


FIG. 4.4 – Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO pour différents schémas de discrétisation

La FIG. 4.5 donne les résultats de calcul du coefficient d'effort pour des calculs réalisés avec un pas de temps de plus en plus petit. Nous notons l'apparition d'oscillations numériques de plus en plus marquées au fur et à mesure que le pas de temps est diminué. La convergence en temps résulte donc d'un choix optimum entre stabilité numérique et précision du calcul.

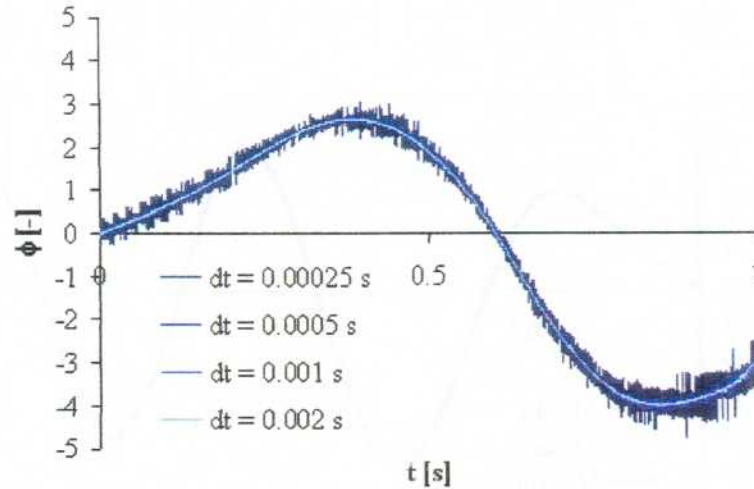


FIG. 4.5 – Calcul du coefficient d'effort : influence du pas de temps

Les calculs sont réalisés en utilisant la technique de maillage mobile, l'ensemble des points du maillage fluide étant déplacés de façon identique suivant la valeur de déplacement due au choc et notée $d(t)$ (voir chapitre 1).

Lorsque le problème est affiné en temps, les variations de déplacement deviennent très faibles entre deux itérations temporelles et le mode de calcul de la dérivée temporelle $\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t}$ du champ de vitesse de grille (par résolution de la loi de conservation en espace [3.16]) génère des oscillations numériques.

Ce terme dérivée est utilisé au second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour calculer les champs de pression et de vitesse : l'oscillation numérique est donc propagée dans le calcul des efforts, c'est ce que nous constatons sur la FIG. 4.5. Le choix du pas de temps de calcul resultera donc d'un compromis entre précision et stabilité numérique.

Nous nous intéressons maintenant aux aspects liés à la mise en œuvre du calcul dans différents référentiels. De façon générale, le problème étudié peut être ainsi formulé :

- en référentiel *absolu*, en utilisant une méthode de maillage mobile et imposant un mouvement d'ensemble du maillage fluide ;
- en référentiel *relatif*, en travaillant sur un domaine fixe et en utilisant un terme source dans l'équation de la quantité de mouvement.

Dans le cas d'un mouvement d'ensemble du maillage fluide, le terme $\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t}$ s'identifie en théorie au terme source d'inertie $\gamma(t)\mathbf{d}$ correspondant à une modélisation en maillage fixe du problème formulé dans le référentiel relatif : les deux approches sont donc physiquement et numériquement équivalentes.

La FIG. 4.6 donne une comparaison des efforts calculés avec une modélisation en référentiel absolu et une modélisation en référentiel relatif pour le cas étudié. Les résultats de calcul sont identiques, ce qui valide l'équivalence des deux approches dans le code STAR-CD.

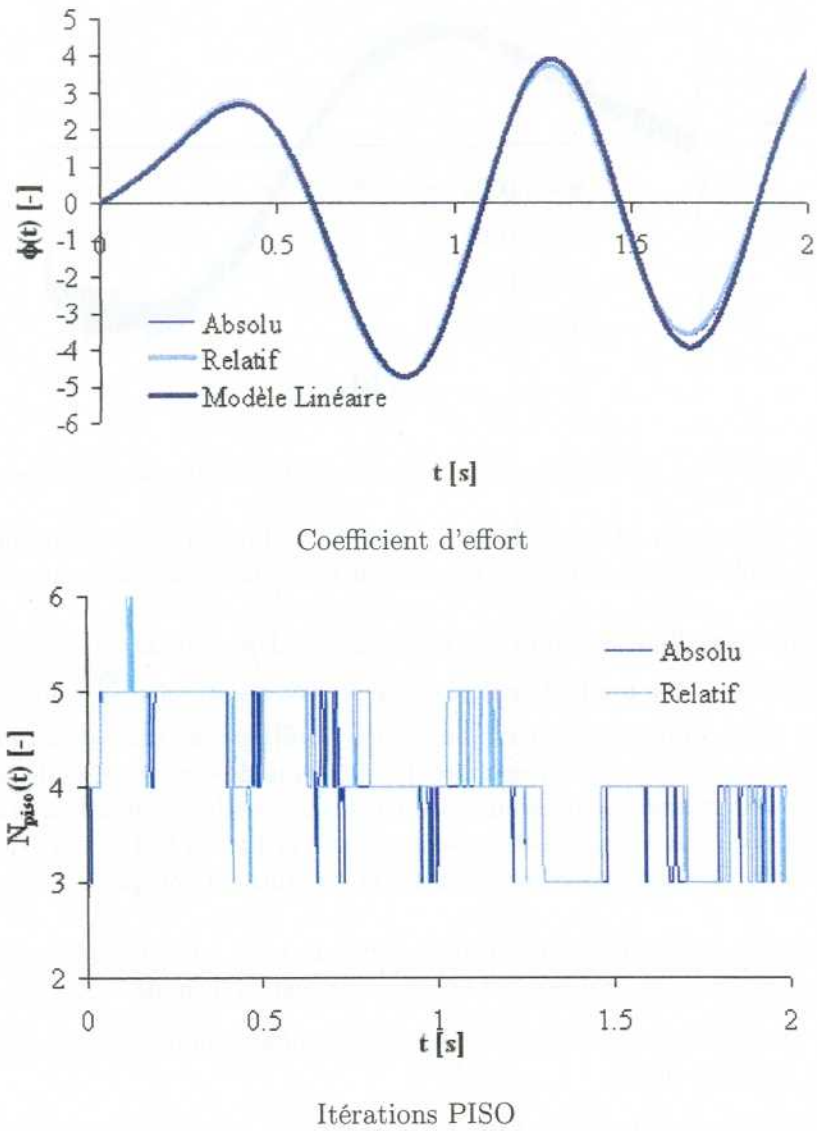


FIG. 4.6 – Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO en repère absolu et relatif

Le nombre d'itérations PISO requis pour chaque calcul est similaire avec un nombre moyen d'itérations un peu plus grand pour la modélisation en référentiel relatif, TAB. 4.2.

Référentiel de calcul	Absolu	Relatif
\bar{N}_{piso}	4.085	4.161

TAB. 4.2 – Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique. Nombre moyen d'itérations PISO pour différentes représentations du problème (en référentiel relatif ou absolu)

En fait l'équivalence des deux approches n'est pas tout à fait exacte du point de vue numérique. Dans le cas d'un mouvement imposé dont l'amplitude est petite devant les dimensions du problème, la méthode de maillage mobile produit des oscillations numériques qui sont d'autant plus importantes que le mouvement imposé est petit.

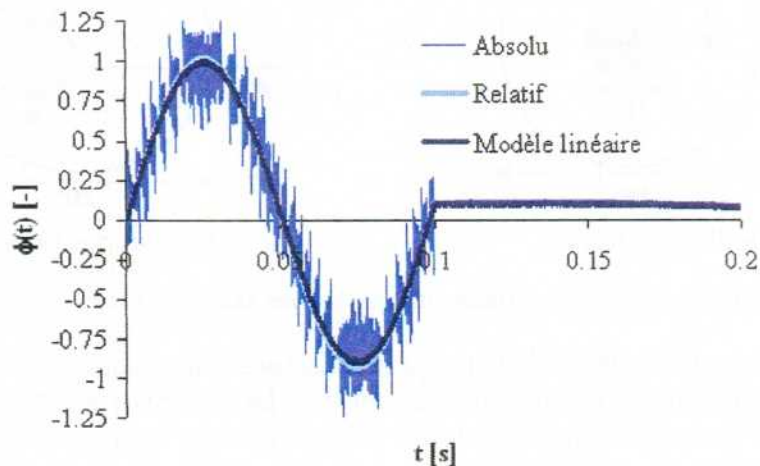


FIG. 4.7 – Oscillations numériques sur le coefficient d'effort : influence du repère de calcul

Dans le cas précédent, le ratio de déplacement est de l'ordre de $\xi = 20\%$, ce qui est suffisamment important pour ne pas produire d'oscillations parasites. Plaçons nous maintenant dans le cas d'un choc plus court $\tau = 0.1$ s avec une amplitude $\gamma_o = 2.5$ m/s², de sorte que le ratio de déplacement soit $\xi = 2\%$. Les résultats de calcul numérique sont différents : dans le cas d'une formulation en référentiel relatif, le coefficient d'effort calculé avec le code CFD s'identifie avec le résultat donné par l'approche linéaire ; dans le cas d'une formulation en référentiel absolu, le coefficient d'effort calculé est fortement parasité par les oscillations numériques (voir FIG. 4.7). Nous avons donc intérêt à privilégier une approche en référentiel relatif afin de limiter les mouvements de maillage et les oscillations numériques qui peuvent en résulter.

Ces observations numériques permettent de valider la mise en œuvre de la méthode VOF dans le code STAR-CD et d'en définir les limites et les conditions de mise en œuvre ; les résultats de calcul justifient en particulier l'utilisation du schéma MARS et le choix d'une modélisation en référentiel relatif du problème couplé, telle que nous l'avons présenté au chapitre 1.

4.2 Oscillations d'un cylindre rigide dans un espace annulaire fluide

4.2.1 Position du problème

Nous nous intéressons dans cette section au problème des oscillations d'un cylindre rigide de rayon R dans un espace fluide annulaire bidimensionnel délimité par un cylindre concentrique de rayon R' (voir FIG. 4.8). Nous supposons le fluide incompressible et initialement au repos. Ses caractéristiques sont notées ρ (masse volumique) et μ (viscosité cinématique) et supposées constantes. Le problème posé est celui du calcul des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés qui traduisent l'effet du fluide sur le système mécanique en mouvement. Ce problème élémentaire est résolu analytiquement par FRITZ [87] dans le cas d'un fluide non visqueux ($\mu = 0$) et par CHEN [69] dans le cas d'un fluide visqueux ($\mu \neq 0$).

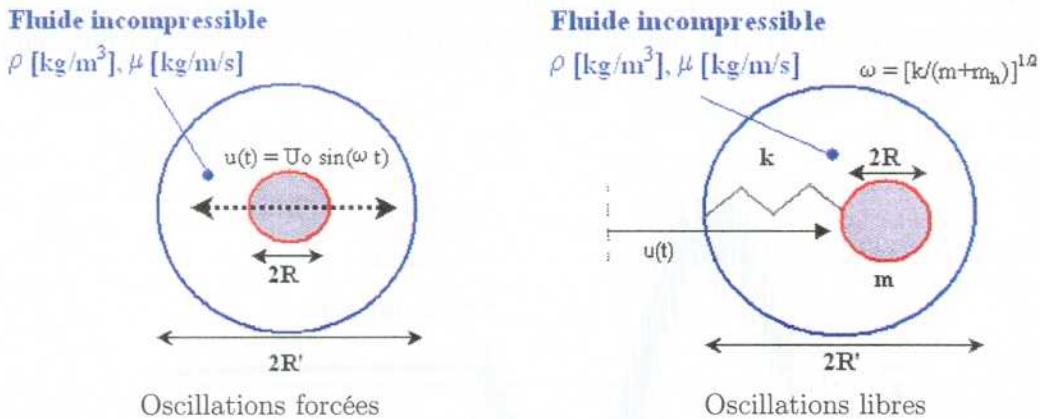


FIG. 4.8 – Oscillations d'un cylindre rigide dans un espace annulaire fluide visqueux incompressible

Le calcul numérique des coefficients de masse et amortissement ajoutés et la comparaison avec ces modèles analytiques ont fait l'objet de nombreuses études. La première est celle de YANG et MORAND [140] qui ont proposé un calcul numérique de ces coefficients dans le cas de CHEN avec une méthode éléments finis sur domaine de calcul fixe.

Le développement récent des techniques de calcul en maillage mobile avec formulation ALE [125] permet de proposer une nouvelle approche dans le calcul des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés [98] [138].

Les techniques de maillage mobile sont intégrées dans les codes de calcul CFD basés sur une résolution numérique avec la méthode des volumes finis [30] [42]. Dans le cas du code STAR-CD, notre recherche bibliographique ne nous a pas permis d'identifier un travail de validation sur les cas de FRITZ et de CHEN. Nous proposons donc une validation élémentaire en nous intéressant aux deux cas d'oscillations du cylindre correspondant à :

- un régime d'*oscillations forcées*. Le mouvement imposé est harmonique et défini par $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$. Il s'agit alors de calculer les efforts de pression exercés par le fluide sur le cylindre en mouvement et de les relier à l'accélération par l'intermédiaire du coefficient de masse ajoutée ;
- un régime d'*oscillations libres*. Le cylindre a une masse m , il est relié par un ressort de raideur k au cylindre extérieur. Il est écarté d'une quantité u_0 de sa position d'équilibre. L'équation de son mouvement est alors :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (4.2)$$

avec les conditions initiales $u(0) = u_o$, $\dot{u}(0) = 0$. ω et ξ sont respectivement la pulsation propre et le coefficient d'amortissement du système, prenant en compte les effets du fluide. Il s'agira de calculer ce coefficient d'amortissement ajouté et de le comparer à un modèle analytique.

Les efforts exercés par un fluide sur un solide rigide, dont le mouvement $u(t)$ est connu, peuvent s'écrire de façon générale sous la forme [71] :

$$\varphi = -C_M \frac{d^2u}{dt^2} - C_V \frac{du}{dt} \quad (4.3)$$

où C_M est le *coefficient de masse ajoutée* et C_V est le *coefficient d'amortissement ajouté*. Dans l'équation (4.3), le terme $-C_M \frac{d^2u}{dt^2}$ est relié aux efforts de pression (terme de contraintes normales) et le terme $-C_V \frac{du}{dt}$ est relié aux efforts de viscosité (terme de contraintes tangentielles).

Ces coefficients peuvent être évalués dans des situations particulières à l'aide de formules analytiques ou semi-empiriques [70], qui peuvent couvrir un grand nombre de configurations rencontrées en génie nucléaire. Dans le cas académique étudié, il existe une solution analytique au problème fluide posé, dans l'hypothèse de petites perturbations. Nous notons $C_M = m_d C_\pi$ et $C_V = m_d C_\nu$ où m_d est la masse d'eau déplacée $m_d = \rho \pi R^2$; les coefficients C_π et C_ν sont alors donnés par les relations :

$$C_\pi = \Re(H) \quad C_\nu = -\omega \Im(H)$$

où H est calculé avec les expressions analytiques suivantes :

– pour le modèle de FRITZ [87] (fluide incompressible non visqueux, $\mu = 0$)

$$H = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$$

avec $\alpha = \frac{R'}{R}$ ratio de confinement ;

– pour le modèle de CHEN [69] (fluide incompressible visqueux, $\mu \neq 0$)

$$\begin{aligned} H = & \{2a^2 [I_0(a)K_0(b) - I_0(b)K_0(a)] - 4a [I_1(a)K_0(b) + I_0(b)K_1(a)] + \\ & 4a\alpha [I_0(a)K_1(b) + I_1(b)K_0(a)] - 8\alpha [I_1(a)K_1(b) - I_1(b)K_1(a)]\} \div \\ & \{a^2(1 - \alpha^2) [I_0(a)K_0(b) - I_0(b)K_0(a)] + 2a\alpha [I_0(a)K_1(b) - \\ & I_1(b)K_0(b) + I_1(b)K_0(a) - I_0(b)K_1(b)] + 2a\alpha^2 [I_0(b)K_1(a) \\ & - I_0(a)K_1(a) + I_1(a)K_0(b) - I_1(a)K_0(a)]\} - 1 \end{aligned}$$

avec $\lambda = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}$ et $a = \lambda R$, $b = \lambda R'$, I_0 , K_0 , I_1 et K_1 sont les fonctions de BESSEL de première et seconde espèces d'ordre 0 et 1 [181];

– pour le modèle de SINYAVASKII [132] (fluide incompressible visqueux)¹ :

$$H = \frac{(\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)} + \frac{2}{R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} + i \left[\frac{2}{R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \frac{\alpha^4 + \alpha}{(\alpha^2 - 1)^2} \right]$$

¹Le modèle de CHEN constitue notre modèle analytique de référence pour le cas étudié; le modèle de SINYAVASKII est un modèle alternatif au modèle de CHEN, dont nous chercherons à évaluer la représentativité dans le cas académique étudié, en donnant une comparaison avec les calculs numériques.

Nous définissons par ailleurs le nombre de REYNOLDS dynamique S par :

$$S = \frac{\omega(\alpha - 1)^2 R^2}{\nu}$$

où ν est la viscosité dynamique du fluide¹.

H se calcule en fonction de S et de α . La FIG. 4.9 donne une représentation des coefficients C_M et C_ν en fonction de S pour un ratio de confinement $\alpha = 2$. Les modèles de CHEN et SINYAVASKII donnent des résultats assez proches sur le coefficient C_M pour $S > 100$, mais différent de façon notable pour $S < 10$ (le modèle de SINYAVASKII n'est en effet pertinent que pour $S > 10$ [71]).

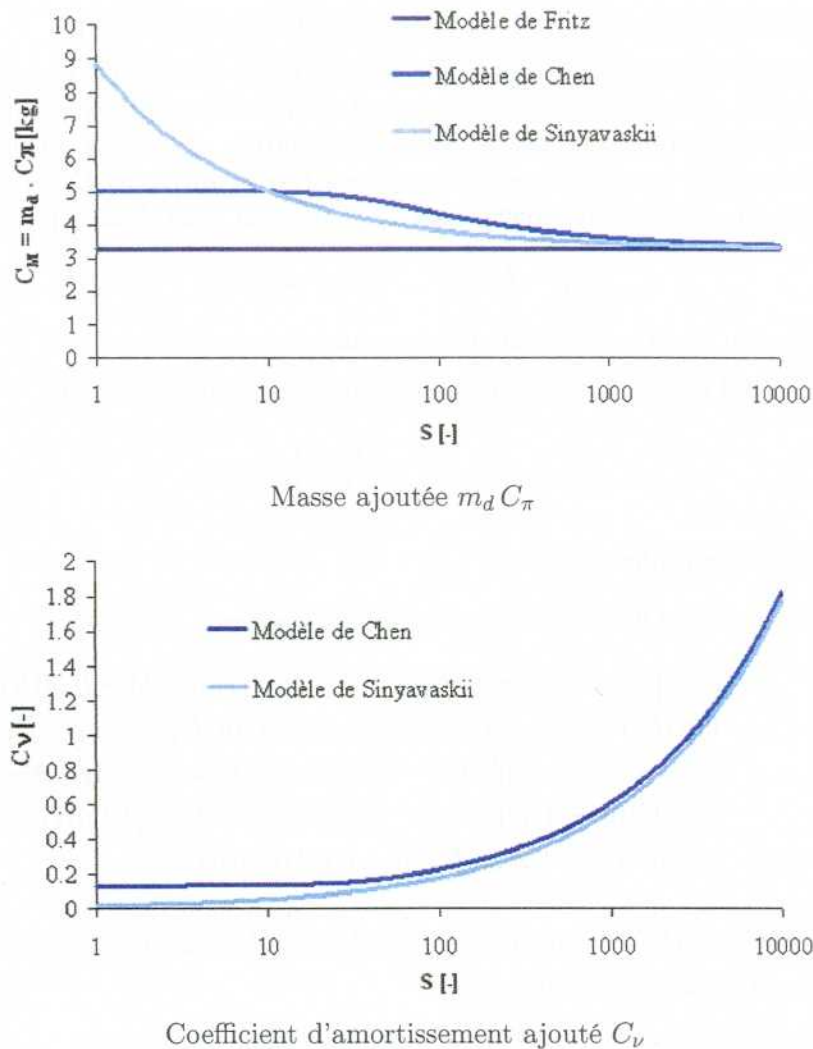


FIG. 4.9 – Coefficients $C_M = m_d C_\pi$ et C_ν en fonction de S pour $\alpha = 2$. Comparaison des modèles de FRITZ [87], CHEN [69] et SINYAVASKI [132]

¹Dans le cas d'un fluide parfait nous avons $S = \infty$. La valeur asymptotique de C_M pour $S \rightarrow \infty$ dans les modèles de fluides visqueux correspond à la valeur du coefficient de masse ajoutée donnée en fluide parfait, cf. FIG. 4.9, ce qui assure la cohérence des modèles entre eux.

A partir de ces éléments théoriques, nous proposons un calcul numérique des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés avec le code CFD STAR-CD. Le principe des calculs est exposé dans le paragraphe suivant.

4.2.2 Calcul des coefficients de masse et d'amortissement ajoutés

Nous nous plaçons dans le cas générique de la FIG. 4.8 avec les caractéristiques suivantes : $R = 0.1$ m (rayon intérieur), $\alpha = 2$ (ratio de confinement), $h = 0.01$ m (hauteur de la tranche fluide), $\rho = 1000$ kg/m³ (masse volumique), $\mu = 0.0628$ kg/m/s (viscosité dynamique). L'amplitude maximum du mouvement est $u_o = 0.005$ m, soit 5% de l'espace annulaire $R(\alpha - 1)$.

Le maillage du problème fluide utilise $N_r \times N_\theta$ cellules fluide avec un ratio de cellules suivant la direction radiale $\delta R = 1.15$. La FIG. 4.10 donne une représentation du maillage fluide correspondant à différentes qualités de discrétisation en espace.

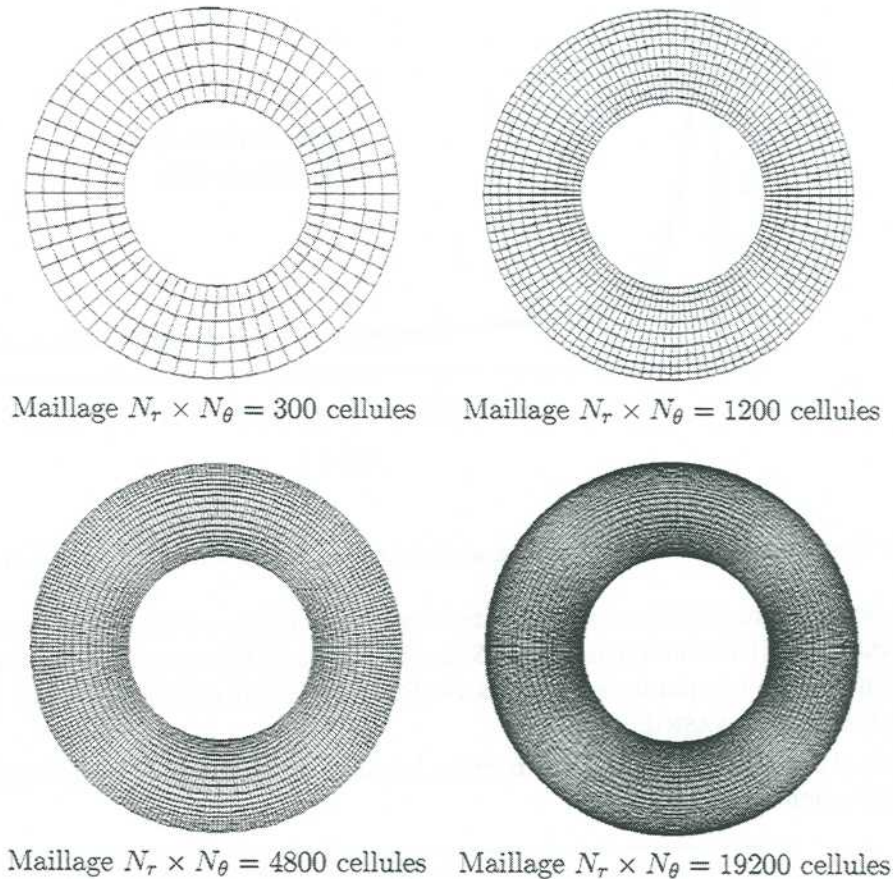


FIG. 4.10 – Maillages $N_r \times N_\theta$ du problème de CHEN

Nous utilisons le schéma de discrétisation MARS, l'algorithme PISO et l'algorithme de remaillage amélioré présenté au chapitre précédent. Le cas de référence correspond à un maillage à $N_o = 8600$ cellules et un pas de temps de simulation $\delta t_o = \frac{\pi}{250\omega}$, avec ω pulsation caractéristique des oscillations (libres ou forcées).

Oscillations forcées Nous commençons par l'étude des oscillations forcées du cylindre. Le mouvement imposé est harmonique, de pulsation ω et d'amplitude u_o . La valeur analytique du maximum

des efforts de pression φ_π est alors donnée par :

$$\varphi_\pi = \omega^2 m_d u_o C_\pi$$

Nous comparons cette valeur théorique à la valeur obtenue avec un calcul numérique conduit avec le code STAR-CD.

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas d'un fluide parfait. Le calcul du coefficient C_π est réalisé pour différentes valeurs du ratio de confinement α et le résultat est comparé avec la valeur analytique donnée par le modèle de FRITZ. La FIG. 4.11 donne une représentation des résultats de calcul et des valeurs analytiques : les comparaisons sont très satisfaisantes, les écarts entre le calcul numérique et la solution analytique sont inférieurs à 1%.

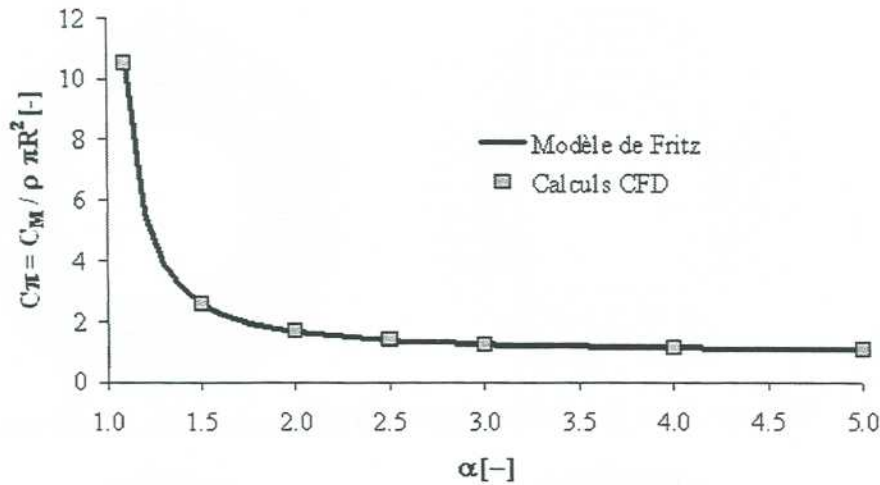


FIG. 4.11 – Oscillations forcées. Calcul de masse ajoutée en fonction du confinement α dans le cas de FRITZ

Nous poursuivons l'étude avec un fluide visqueux. L'effort φ_π est calculé pour différentes valeurs du nombre de REYNOLDS dynamique S en ajustant la pulsation des oscillations forcées ω . La FIG. 4.12 établit une comparaison entre les résultats de calcul numérique et les modèles analytiques de CHEN et SINYAVASKII.

Le TAB. 4.3 donne les écarts relatifs entre le calcul et les modèles analytiques pour le coefficient de masse ajoutée C_M .

S	10	100	1000	10000
Modèle de CHEN	+52.1%	-5.8%	-3.2%	-1.2%
Modèle de SINYAVASKII	+51.7%	+6.7%	+1.6%	+0.5%

TAB. 4.3 – Oscillations forcées. Ecarts relatifs sur le coefficient de masse ajoutée : calcul numérique comparé aux modèles de CHEN et SINYAVASKII

Le calcul numérique donne des résultats très satisfaisants : nous retrouvons des écarts entre la solution analytique et le calcul numérique du même ordre de grandeur que ceux donnés par d'autres auteurs pour des problèmes équivalents [63] ; la qualité du calcul se dégrade néanmoins

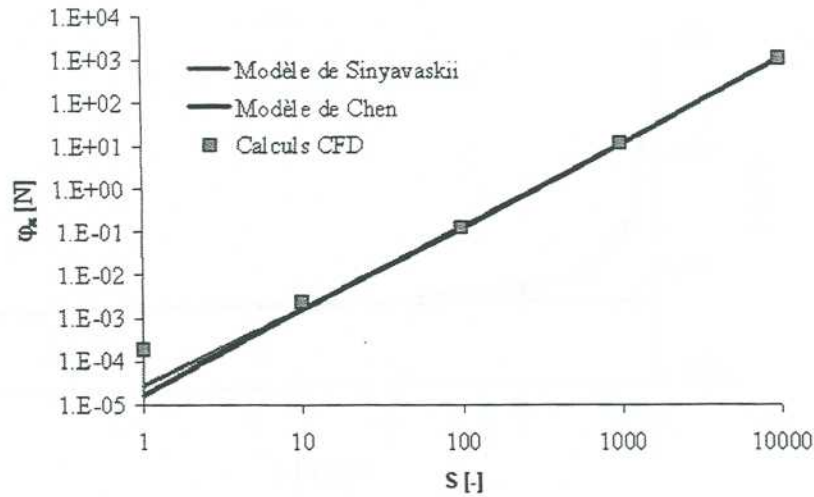


FIG. 4.12 – Oscillations forcées. Comparaison des efforts de pression maximum pour différentes valeurs du nombre de REYNOLDS dynamique S dans le cas de CHEN

assez nettement pour des petites valeurs de S .

Nous mettons en évidence la convergence du calcul pour le maillage de référence en espace (N_o cellules) et en temps (pas de temps δt_o), dans le cas $S = 100$.

La FIG. 4.13 montre l'évolution de l'erreur relative calcul/modèle de CHEN sur le coefficient C_M , en fonction du nombre de cellules N du maillage fluide utilisées pour le pas de temps δt_o et met en évidence la convergence en espace du calcul.

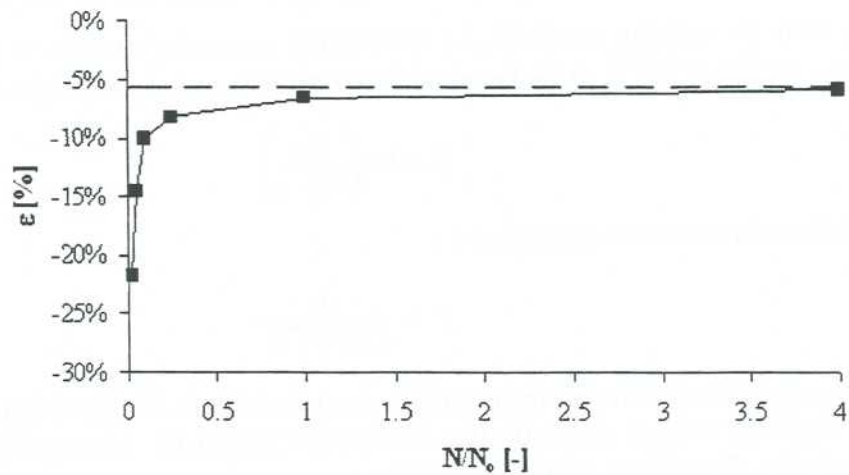


FIG. 4.13 – Oscillations forcées. Convergence en espace pour le coefficient de masse ajoutée dans le cas de CHEN pour $S = 100$

La FIG. 4.14 montre l'évolution de l'erreur relative calcul/modèle de CHEN sur le coefficient C_M , en fonction du pas de temps δt utilisé pour un nombre de cellules N_o et met en évidence la convergence en temps du calcul.

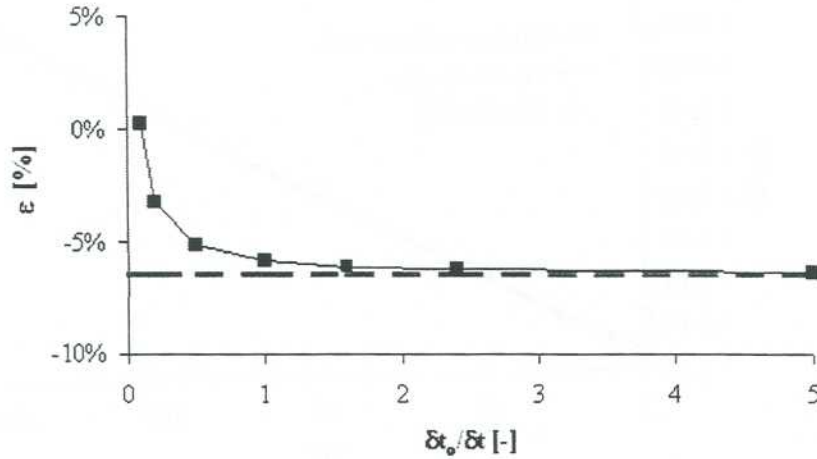


FIG. 4.14 – Oscillations forcées. Convergence en temps pour le coefficient de masse ajoutée dans le cas de CHEN pour $S = 100$

Oscillations libres Nous poursuivons avec l'étude des oscillations libres du cylindre. Le solide est écarté de sa position d'équilibre d'une quantité u_o et lâché sans vitesse initiale $\dot{u}_o = 0$. Le mouvement est alors régi par l'équation différentielle (4.2), qui prend en compte les effets du fluide. Compte tenu des conditions initiales, le mouvement du cylindre est régi par :

$$u(t) = u_o \cos[\omega(\xi)t] \cdot e^{-\xi\omega t} \quad (4.4)$$

avec $\omega(\xi) = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$. ξ est le coefficient d'amortissement, que nous allons calculer numériquement de la façon suivante. Nous définissons $u_N = u(t_N)$ où t_N est tel que $t_N = \frac{2\pi N}{\omega(\xi)}$: $(u_N)_{N \geq 1}$ sont les *maxima* successifs du mouvement sinusoïdal amorti. A partir de la relation $u_{N+1} = u_N \cdot e^{-2\pi\xi/(1-\xi^2)^{1/2}}$, et de l'expression du décrement logarithmique δ donné par :

$$\delta = \ln \left(\frac{u_N}{u_{N+1}} \right)$$

nous déduisons la valeur du coefficient ξ :

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (4.5)$$

La résolution numérique du problème couplé est conduite avec le code STAR-CD en utilisant un couplage explicite, tel que présenté dans le chapitre précédent. L'intégration de l'équation du mouvement $u(t)$ du cylindre utilise le θ -schéma :

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \left[\frac{\varphi_n}{m} - \omega_o^2 u_n \right] \delta t \\ u_{n+1} = u_n + [(1 - \theta)\dot{u}_n + \theta\dot{u}_{n+1}] \delta t \end{cases} \quad (4.6)$$

où $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre du système dans le vide et $\theta \in [0, 1]$.

Nous nous plaçons dans le cas de référence défini par les paramètres de discrétisation en espace N_o et en temps δt_o , définis lors de l'étude des oscillations forcées. La masse du système est $m = 1$ kg, la raideur k est ajustée dans ces conditions pour obtenir les valeurs souhaitées du nombre de REYNOLDS dynamique \mathcal{S} (construit à partir de la pulsation propre ω du système *couplé avec le fluide*).

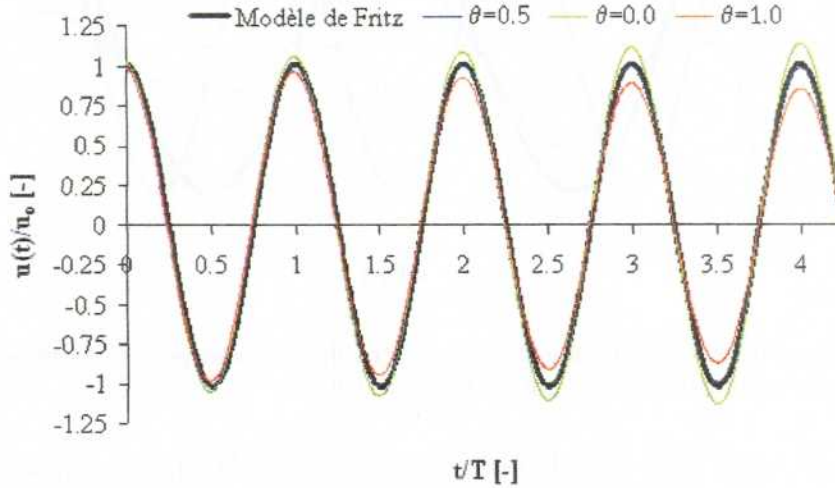


FIG. 4.15 – Amortissement numérique du θ -schéma

L'algorithme de couplage explicite est intrinsèquement non conservatif. Cependant, l'utilisation du θ -schéma permet de limiter l'amortissement numérique comme le montrent les résultats de calcul présentés par la FIG. 4.15; le cas étudié correspond à un régime d'oscillations libres du système en fluide parfait (les déplacements sont normalisés par u_o , déplacement initial, et les temps par T , période d'oscillations du système dans le fluide).

L'utilisation du schéma avec $\theta = 1$ introduit un amortissement numérique négatif; avec $\theta = 0$, le schéma génère un amortissement numérique positif. Le choix $\theta = 1/2$ permet d'obtenir un schéma nettement moins dissipatif et justifie l'utilisation de l'algorithme d'intégration asynchrone explicite pour l'étude des oscillations libres et l'évaluation numérique de l'amortissement dû aux phénomènes de dissipation visqueuse dans le fluide.

Nous commençons l'étude sur le cas $\mathcal{S} = 100$. La FIG. 4.16 donne les réponses en déplacement du système avec les différents cas de calcul :

- sans fluide;
- avec fluide non visqueux : calcul analytique avec le modèle de FRITZ et calcul numérique;
- avec fluide visqueux : calcul analytique avec le modèle de CHEN et calcul numérique.

Les résultats de calcul permettent de mettre en évidence l'influence du fluide :

- dans le cas non visqueux : effet de masse ajoutée (diminution de la fréquence des oscillations, sans amortissement de l'amplitude du mouvement);
- dans le cas visqueux : effet de masse et d'amortissement ajoutés (diminution de la fréquence des oscillations, avec amortissement de l'amplitude du mouvement).

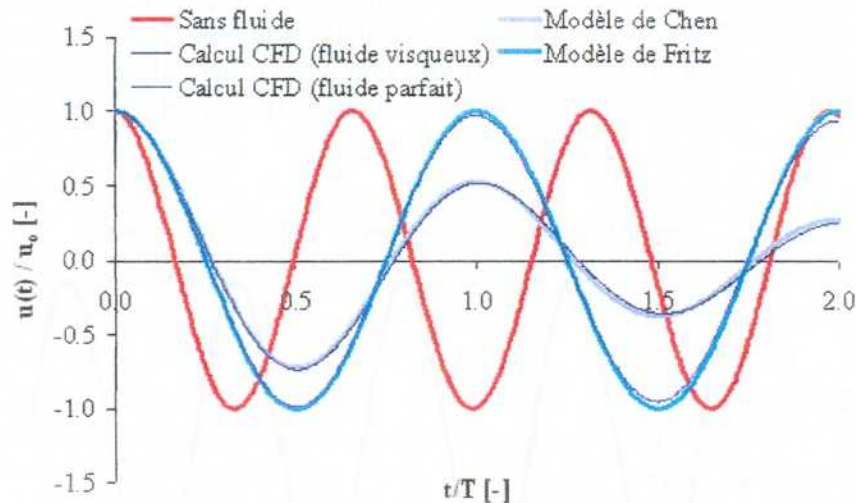


FIG. 4.16 – Oscillations libres. Comparaison des réponses en déplacement pour $S = 100$ avec et sans fluide. Comparaison des réponses calculées pour les cas de FRITZ et CHEN

Les résultats de calcul CFD avec le θ -schéma pour $\theta = 1/2$ sont comparables aux résultats analytiques, ce qui permet de valider la méthode de couplage et le calcul des efforts de viscosité par le code CFD.

La FIG. 4.17 montre la convergence en espace du calcul dans le cas $S = 100$. La valeur asymptotique de l'écart des calculs analytique et numérique du coefficient d'amortissement est de l'ordre de 7.5%, ce qui est satisfaisant : nous retrouvons des résultats d'erreurs comparables à ceux donnés dans des études numériques similaires [99].

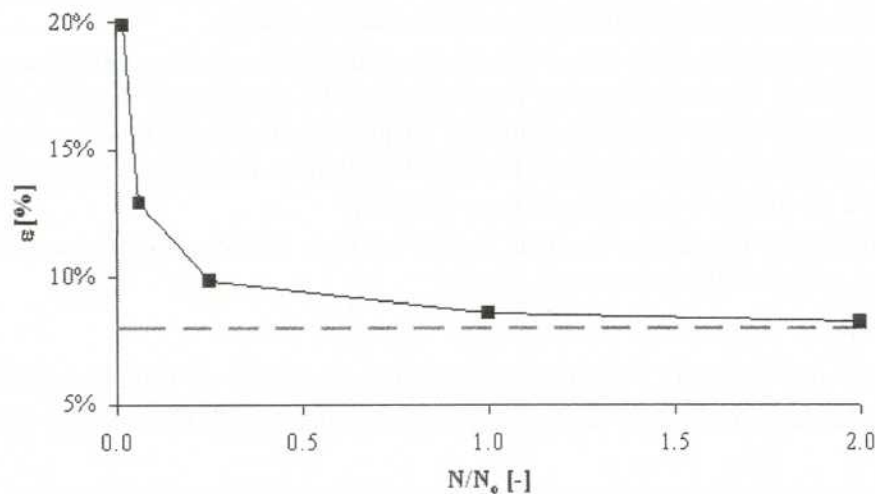


FIG. 4.17 – Oscillations libres. Convergence en espace pour le coefficient d'amortissement dans le cas de CHEN pour $S = 100$

La FIG. 4.18 donne une représentation du champ de pression et du champ de vitesse dans le fluide à différents instants de la simulation.

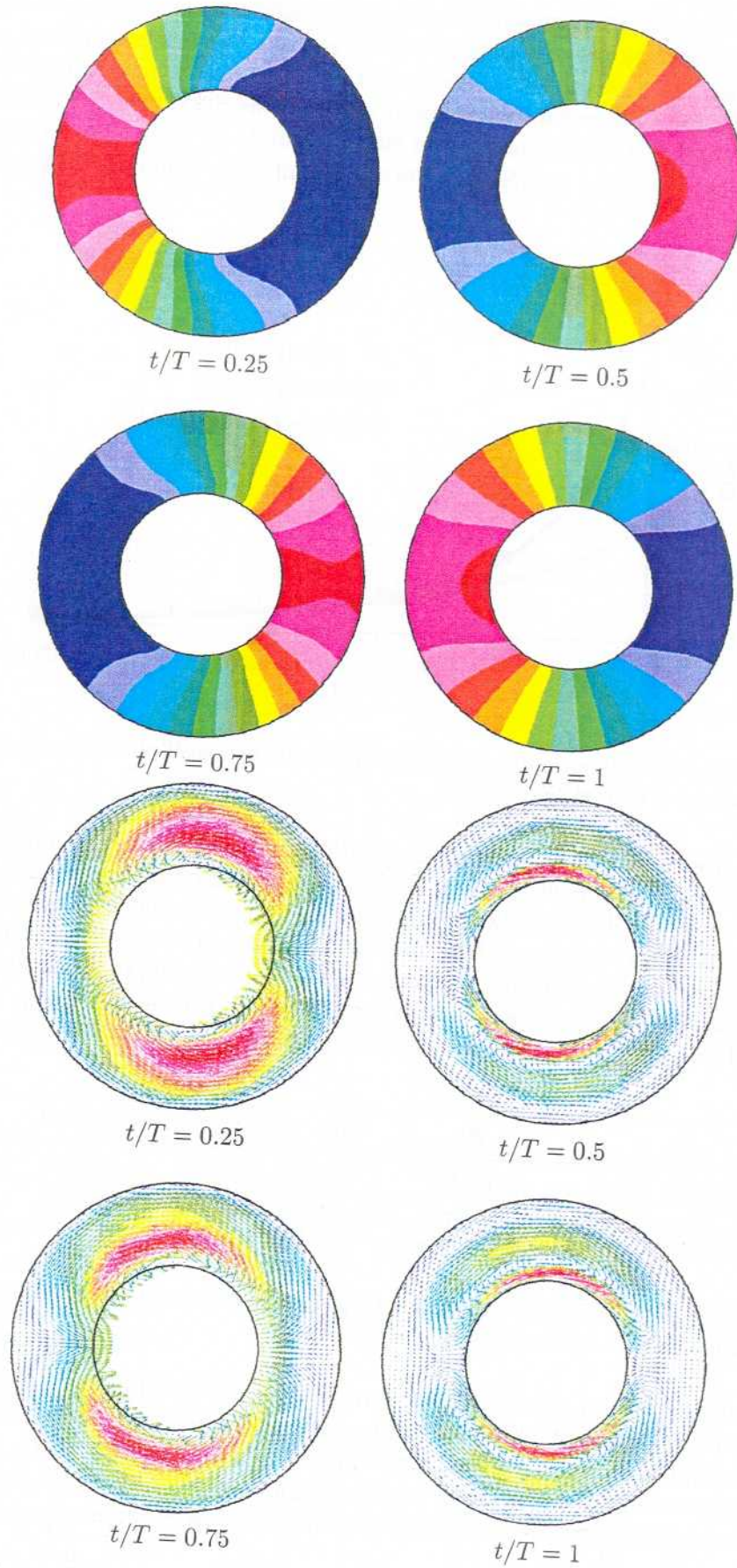


FIG. 4.18 - Oscillations libres. Champs de pression et de vitesse fluide à différents instants dans le cas $S = 100$

La FIG. 4.19 donne une comparaison des valeurs du coefficient ξ calculées pour différentes valeurs de S par rapport aux modèles de CHEN et SINYAVASKII : les résultats mettent en évidence une bonne corrélation entre les valeurs numériques et les valeurs analytiques pour le premier modèle. Nous notons des écarts assez importants pour le modèle de SINYAVASKII ; ceci s'explique par les différences observées entre les deux modèles sur le calcul de C_v (voir FIG. 4.9), notamment pour les petites valeurs de S . Le modèle de CHEN apparaît donc comme le plus pertinent pour le problème posé.

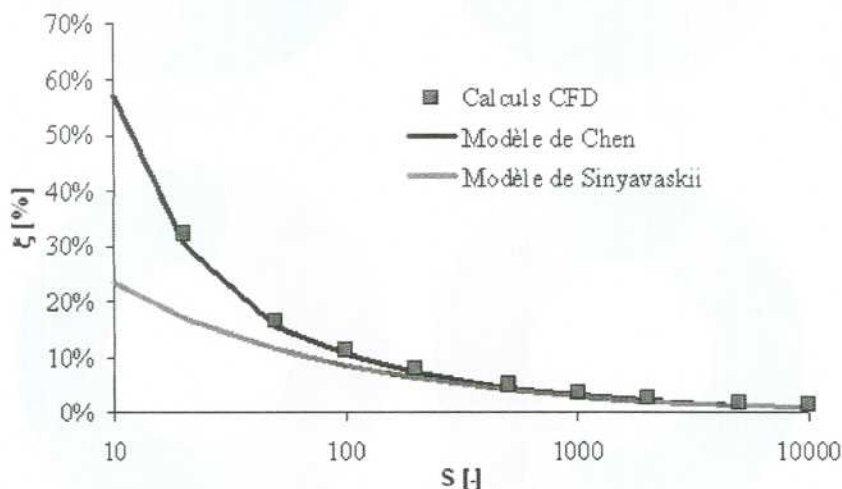


FIG. 4.19 – Oscillations libres. Comparaison des coefficients d'amortissement pour différentes valeurs du nombre de REYNOLDS dynamique S dans le cas de CHEN

La corrélation avec les modèles analytiques est d'autant meilleure que le nombre de REYNOLDS dynamique est petit, comme le montre le TAB. 4.4. Pour des grandes valeurs de S , l'écart relatif devient important : les phénomènes de dissipation numérique dus au schéma de résolution du problème fluide et au schéma de couplage explicite perturbent l'analyse. Pour ces valeurs cependant, la contribution des efforts de viscosité sur la dynamique du mouvement est négligeable devant la contribution des efforts de pression : la dynamique du système est alors décrite de façon prépondérante par les effets de masse ajoutée, et la perte de précision dans l'évaluation des efforts de viscosité n'est donc pas pénalisante dans ce cas.

S	20	50	100	200	500
Modèle de CHEN	+7.24%	+7.43%	+7.60%	+13.39%	+17.17%
Modèle de SINYAVASKII	+88.97%	+44.45%	+33.32%	+28.05%	+24.12%

TAB. 4.4 – Oscillations libres. Ecart relatif sur le coefficient d'amortissement ajouté : calcul numérique comparé aux modèles de CHEN et SINYAVASKII

Nous terminons l'étude en présentant une comparaison des résultats de calculs obtenus avec les deux algorithmes de remaillage du problème fluide présentés en fin de chapitre 3. Nous avons proposé un algorithme de maillage amélioré et un algorithme de maillage alternatif. La FIG. 4.20 compare les réponses en déplacement obtenues avec les deux algorithmes de remaillage, dans le cas de CHEN avec $S = 100$. Les maillages utilisés possèdent des caractéristiques équivalentes pour les cellules fluides

situées autour du cylindre en mouvement. Les réponses en déplacement sont équivalentes, mais les valeurs calculées du coefficient d'amortissement ξ et comparées avec le modèle analytique (voir TAB. 4.5) montrent que l'algorithme de remaillage amélioré donne des résultats un peu meilleurs que l'algorithme alternatif.

Modèle de CHEN	Algorithme amélioré	Algorithme alternatif
10.37%	11.16%	11.25%
Ecart	+7.60%	+8.50%

TAB. 4.5 – Oscillations libres. Comparaison des coefficients d'amortissement ξ calculés avec deux algorithmes de remaillage fluide pour $S = 100$

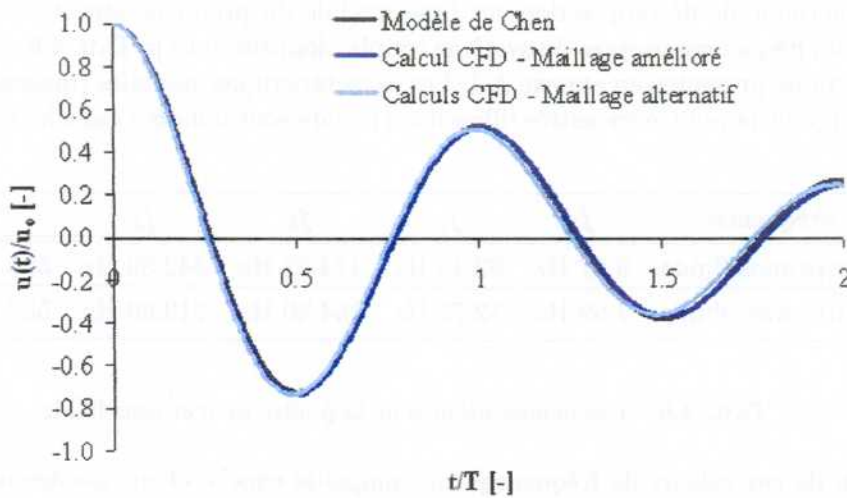


FIG. 4.20 – Oscillations libres. Comparaison des réponses en déplacement obtenues avec deux algorithmes de remaillage du problème fluide dans le cas de CHEN pour $S = 100$

Cette étude numérique permet de valider le code STAR-CD dans sa description des phénomènes d'amortissement par viscosité dans le fluide avec méthode ALE et maillage mobile. Ces calculs justifient également l'utilisation du modèle de CHEN comme solution analytique de référence pour le cas traité.

Nous nous intéressons maintenant à la validation élémentaire de la procédure de couplage décrite au chapitre 3 et développée dans le code STAR-CD.

4.3 Couplage fluide/structure en milieu fluide incompressible confiné

Nous proposons une validation élémentaire du couplage fluide/structure explicite basée sur l'étude des deux cas suivants :

- problème linéaire : structure linéaire, fluide parfait et incompressible, sans surface libre. Ce cas permet de valider la méthode de couplage avec intégration temporelle de la structure par décomposition modale ;
- problème non linéaire : structure non linéaire, fluide incompressible avec surface libre. Ce cas permet de valider la méthode de couplage avec intégration temporelle du problème structure par l'algorithme implicite et mixte.

4.3.1 Problème linéaire

Nous considérons le problème couplé fluide/structure générique décrit par la FIG. 1.1 pour lequel nous supposons le fluide incompressible et non visqueux. La cavité fluide est totalement remplie ($\lambda = 100\%$), et ne présente pas de surface libre. Nous supposons d'autre part la structure linéaire élastique. Nous nous intéressons au problème d'évolution. Les caractéristiques physiques du problème correspondent au cas standard (voir chapitre 1). Le choc imposé est défini par $\tau = 0.01$ s et $\gamma = 250$ m/s².

Compte tenu des hypothèses formulées, il existe une solution analytique pour le problème couplé, dont nous donnons le détail en annexe. La solution analytique est obtenue en résolvant le problème matriciel suivant voir annexe A.1) :

$$(\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H)\ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{K}_S\mathbf{V}(t) = -\gamma(t)(\Phi_S - \Phi_H)$$

Nous mettons d'autre part en œuvre la méthode de couplage explicite décrite au chapitre précédent, en utilisant la méthode de décomposition sur base modale du problème structure (voir remarque 8). Nous rappelons les fréquences propres du système couplé, données dans le TAB. 4.6, calculées à partir de la solution analytique présentée en annexe A.1. Les caractéristiques modales (masses modales, facteurs de participation) pour la poutre encastree/libre dans le vide sont données dans le TAB. 3.2 au chapitre 3.

Fréquence	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Poutre sans fluide	9.97 Hz	62.48 Hz	174.97 Hz	342.89 Hz	566.76 Hz
Poutre avec fluide	7.99 Hz	52.72 Hz	154.40 Hz	313.90 Hz	532.40 Hz

TAB. 4.6 – Fréquences propres de la poutre avec et sans fluide

Compte tenu de ces valeurs de fréquences, du temps de choc τ et du spectre de réponse du choc sinus (voir FIG. 1.3, chapitre 1), la réponse dynamique de la poutre fait intervenir les trois premiers modes propres. La FIG. 4.21 donne la réponse calculée avec la méthode de couplage explicite avec un à trois modes de poutre, ainsi que la réponse donnée par la solution analytique (la réponse en déplacement est ramenée à une accélération imposée unité, les temps sont rapportés au temps de choc τ). L'intégration temporelle des équations modales est réalisée avec le θ -schéma, avec $\theta = 1/2$.

Les résultats de calcul montrent que la réponse dynamique calculée avec trois modes permet de retrouver la solution analytique, ce qui valide la procédure de couplage explicite avec méthode modale pour la structure.

Le calcul numérique de φ_h , effort fluide intégré sur l'interface, est fortement parasité par des oscillations numériques. Le filtrage en boucle ouverte (c'est-à-dire sans reporter les efforts filtrés dans le calcul structure) avec une fréquence $f_o = 2000$ Hz, permet d'éliminer les oscillations parasites, sans modifier la physique du problème (voir FIG. 4.22).

Les oscillations se retrouvent dans le calcul des dérivées secondes des coordonnées généralisées $\frac{d^2\xi_n}{dt^2}$, comme le montre la FIG. 4.23 et peuvent dans certains cas entraîner l'instabilité numérique du problème structure, malgré l'intégration numérique au second ordre (permettant d'obtenir la réponse en déplacement) qui agit comme un filtre d'ordre deux. Le filtrage numérique en boucle fermée (c'est-à-dire en reportant dans le problème structure les efforts fluide filtrés selon la relation [3.27]), permet d'éliminer les oscillations parasites pour chaque coordonnée modale en accélération (voir 4.23).

Cette procédure de filtrage permet d'obtenir des résultats satisfaisants, même dans le cas où les efforts fluide sont très importants devant les efforts de raideur de la structure. Plaçons nous en effet

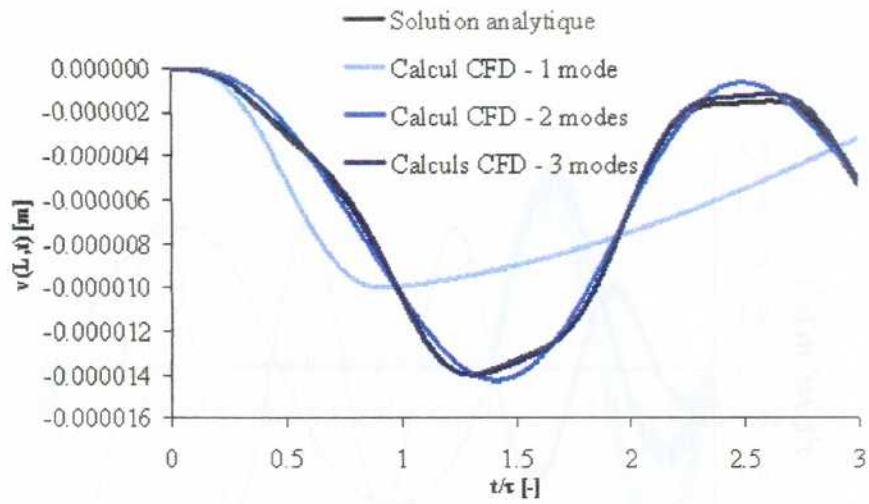


FIG. 4.21 – Problème couplé linéaire. Réponse en déplacement : méthode modale avec un, deux ou trois modes propres de structure

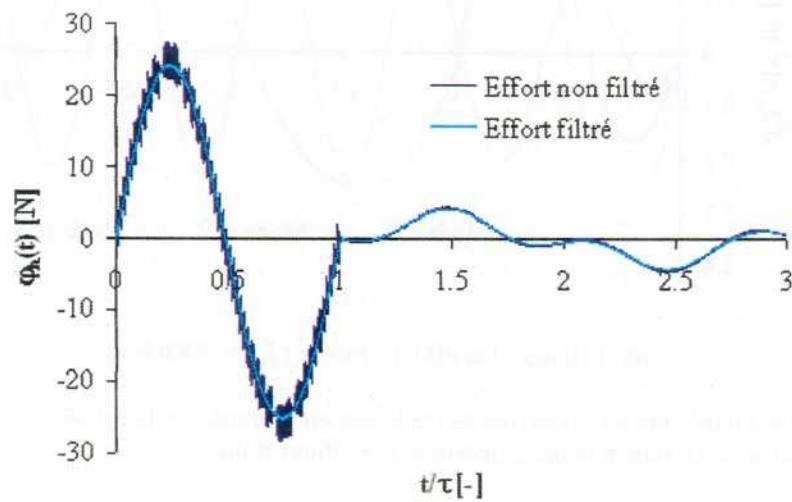
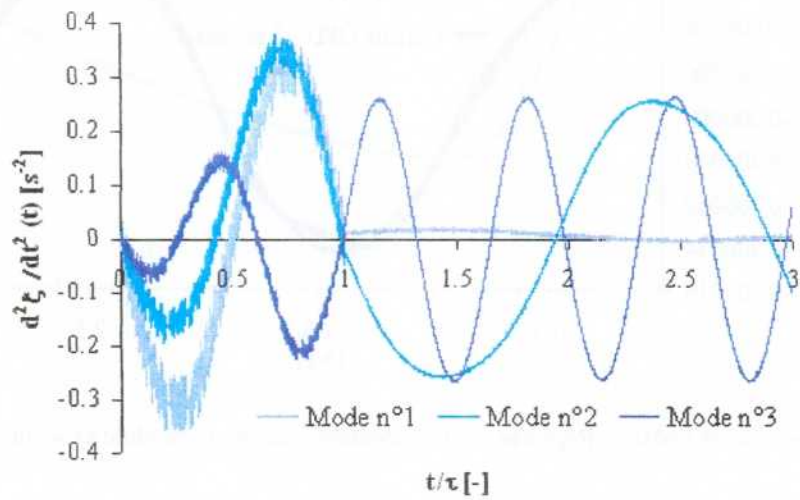
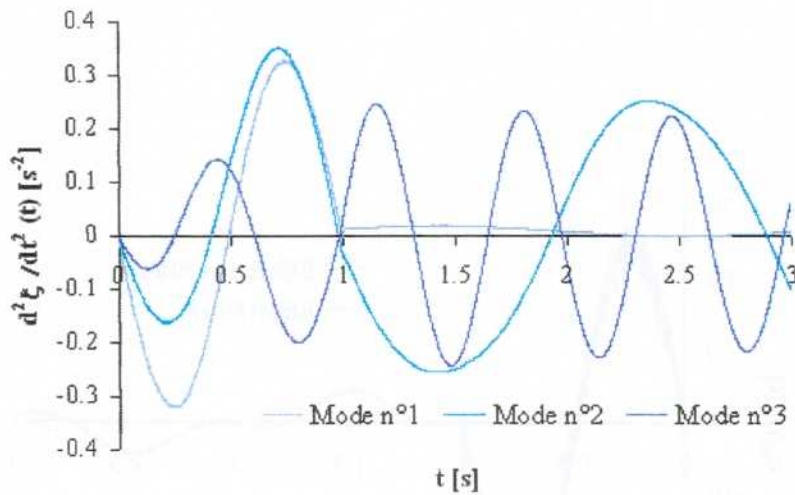


FIG. 4.22 – Problème couplé linéaire. Effort fluide intégré sur l'interface fluide/structure



Sans filtrage des efforts fluide



Avec filtrage des efforts fluide ($f_o = 2000Hz$)

FIG. 4.23 – Problème couplé linéaire. Dérivée seconde des coordonnées généralisées $\ddot{\xi}_n$ pour les trois premiers modes propres. Calcul avec et sans filtrage numérique des efforts fluide

dans le cas d'une poutre de très faible épaisseur devant son rayon, par exemple $e = 0.002$ m. Dans ce cas, la masse d'eau déplacée par une section de la poutre est $\rho_F \pi R^2$, alors que la masse d'une section de la structure est $2\rho_S \pi R e$. Compte tenu des valeurs choisies pour le problème couplé, le terme de masse d'eau déplacée est prépondérant devant la masse de la structure. La réponse dynamique du système est donc caractérisée dans les premiers instants par un mouvement de flexion de la poutre dans le référentiel relatif tel que $v(L, t) > 0$, alors que dans le cas précédent, nous avons $v(L, t) < 0$ (voir FIG. 4.24).

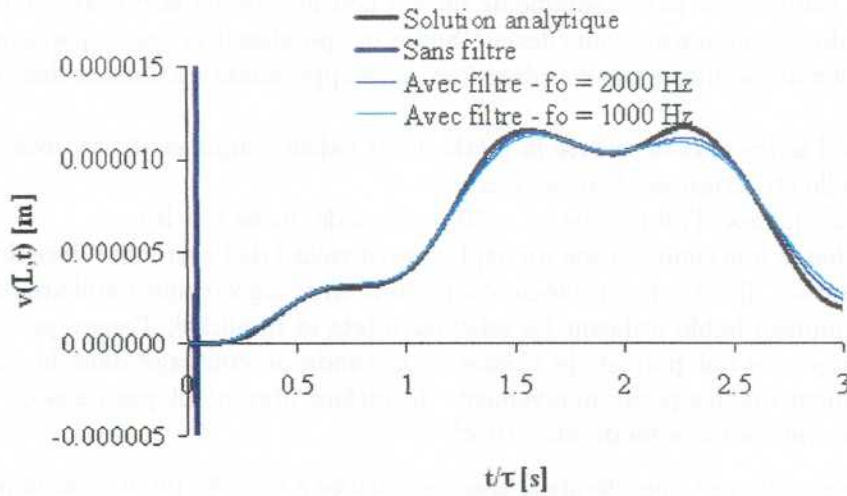


FIG. 4.24 – Problème couplé linéaire. Réponse en déplacement pour une poutre de faible épaisseur

Dans ce cas de figure, la réponse calculée par le code CFD avec la procédure de couplage explicite montre une instabilité numérique très importante : le calcul sans filtrage diverge très rapidement. L'utilisation du filtre numérique permet de retrouver la réponse attendue et de décrire les interactions fluide/structure de façon consistante avec la physique du problème (voir FIG. 4.24).

Cette étude permet ainsi de valider les aspects suivants de la procédure de couplage faible développée dans le code CFD :

- couplage en temps : méthode de couplage explicite avec décomposition modale pour le sous problème structure, intégration des équations modales avec le θ -schéma, filtrage des efforts ;
- couplage en espace : calcul des efforts fluide projetés sur chaque mode propre, remaillage du problème fluide.

Nous nous intéressons maintenant à un cas de validation de la procédure de couplage faible pour un problème non linéaire.

4.3.2 Problème non linéaire

Nous considérons maintenant le problème couplé fluide/structure générique dans lequel nous supposons le fluide incompressible et visqueux, avec une surface libre (le ratio de remplissage est fixé à $\lambda = 75\%$). Nous supposons de plus la structure non linéaire élastique et nous étudions le problème d'évolution.

En supposant l'effet du fluide sur la structure décrit par un modèle linéaire¹, nous pouvons décrire la dynamique du problème couplé en utilisant un couplage fort de type éléments finis/éléments finis et appliquer la méthode décrite au chapitre 2 pour le couplage linéaire et la méthode décrite au chapitre 3 pour la structure non linéaire. Le problème d'évolution peut s'écrire par couplage fort comme [195] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{V}}(t) \\ \ddot{\mathbf{P}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_S(\mathbf{V}(t)) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Phi_S \\ \Phi_F \end{Bmatrix} \gamma(t)$$

en ne prenant en compte que la dynamique de flexion non linéaire de la poutre (voir remarque 7).

L'intégration de ce système avec une des méthodes temporelles décrites au paragraphe 3.3.2 permet d'obtenir la solution au problème par couplage fort, avec approximation linéaire des effets d'interaction fluide/structure.

Nous mettons d'autre part en œuvre la méthode de calcul couplé explicite, avec les schémas d'intégration temporelle structure *implicite* et *mixte*².

Nous imposons un choc d'amplitude $\gamma_o = 50 \text{ m/s}^2$ et de durée $\tau = 0.1 \text{ s}$.

La FIG. 4.25 donne une comparaison du déplacement relatif de l'extrémité libre de la poutre $v(L, t)$ calculé par intégration directe du problème couplé fort avec algorithmes implicite, d'une part et par résolution avec couplage faible utilisant les schémas mixte et implicite, d'autre part : les résultats de calcul sont similaires, ce qui permet de valider la méthode de couplage dans le cas non linéaire et qui montre également que les petits mouvements de surface libre n'ont pas dans ce cas une influence significative sur les interactions fluide/structure³.

Nous déduisons également l'accélération absolue calculée à l'extrémité libre de la poutre $\frac{d^2v}{dt^2}(L, t) + \gamma(t)$ pour les différentes méthodes de calcul, voir FIG. 4.26. Les résultats de calcul mettent en évidence des instabilités numériques potentielles avec le schéma implicite, alors que le schéma mixte apparaît plus stable. Ces observations nous feront donc privilégier ce schéma dans l'étude numérique proposée au chapitre suivant.

L'ensemble des calculs proposés dans ce paragraphe permettent de valider la procédure de couplage faible sur les différents aspects du couplage numérique (en temps et en espace). Nous retenons en particulier la plus grande stabilité du schéma d'intégration mixte pour la résolution de la partie structure du problème couplé.

¹Dans le cas d'une excitation de faible amplitude en accélération, nous pouvons attendre des mouvements de faible amplitude de la surface libre, ce qui permet *a priori* de penser que le modèle linéaire du ballonnement fluide peut être valable pour décrire l'évolution du fluide.

²Le schéma explicite impose l'utilisation d'un pas de temps petit afin de satisfaire la condition de stabilité. Cette condition est assez pénalisante pour le problème fluide et les temps de calcul qui en résultent sont assez importants. D'autre part, nous avons vu au paragraphe 4.1.2 que l'utilisation de pas de temps courts entraîne des oscillations numériques importantes sur le calcul des efforts fluide, ce qui peut nuire à la stabilité numérique du problème couplé. L'utilisation des schémas mixte ou implicite autorise le recours à des pas de temps plus longs, et permet donc de s'affranchir de ces problèmes numériques.

³Nous verrons au chapitre 5 un cas où les mouvements de surface libre ont une influence plus importante sur la dynamique des interactions entre le fluide et la structure.

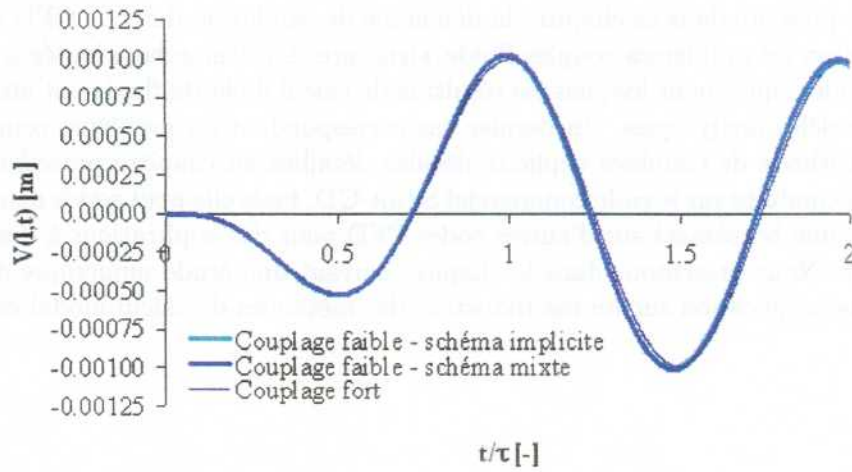


FIG. 4.25 – Problème couplé non linéaire. Réponse de la poutre en déplacement calculée par couplage fort et couplage faible avec schéma mixte et implicite

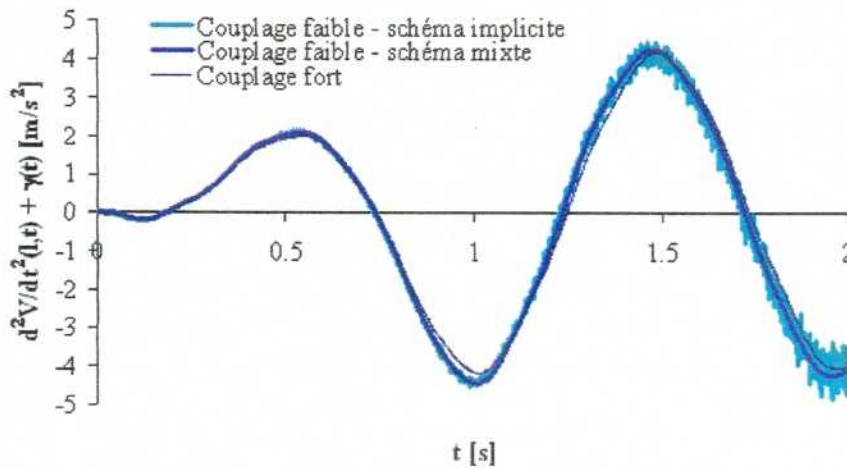


FIG. 4.26 – Problème couplé non linéaire. Réponse de la poutre en accélération calculée par couplage fort et couplage faible avec schéma mixte et implicite

*
* *

Nous avons présenté dans ce chapitre la démarche de validation du code CFD dans son utilisation pour la simulation de problèmes couplés fluide/structure. La démarche adoptée a consisté en l'étude de deux cas académiques pour lesquels les résultats de calcul d'efforts fluide ont été comparés avec des résultats de modèles analytiques. Un dernier cas correspondant au problème couplé étudié a permis de valider la méthode de couplage explicite décalée détaillée au chapitre précédent. La démarche de validation a été conduite sur le code commercial STAR-CD, mais elle peut servir de méthode générale et être utilisée comme *benchmark* sur d'autres codes CFD pour des applications à des problèmes couplés fluide/structure. Nous présentons dans le chapitre suivant une étude numérique du problème couplé générique et une application sur un cas industriel des méthodes de calcul modal exposées au chapitre 2 .

Application des méthodes numériques

Après avoir exposé et validé les méthodes proposées pour la résolution du problème couplé linéaire et non linéaire, nous présentons une application numérique de ces méthodes à deux cas d'étude.

Problème couplé fluide/structure générique Nous appliquons directement les méthodes de couplage fort et de couplage faible au cas d'étude générique défini au chapitre 1. Nous réalisons deux types d'analyse et mettons en évidence différents phénomènes physiques caractérisant les interactions fluide/structure :

- une *analyse modale* pour le cas linéaire permet d'illustrer les notions de masse ajoutée et de masse déplacée, et de mettre en évidence le phénomène de couplage de modes ;
- une *analyse temporelle* pour les cas linéaire et non linéaire permet d'illustrer les mécanismes dynamiques d'interactions fluide/structure et les effets des non linéarités de la structure.

Problème couplé fluide/structure industriel Nous proposons une application de la méthode de calcul modal par couplage éléments finis/éléments finis en formulation pression/déplacement avec modélisation axi-symétrique du problème, telle que présentée au chapitre 2. Nous étudions le système panier/cuve/fluide primaire représentatif d'un réacteur nucléaire de propulsion navale. Une analyse des problèmes découplés est exposée et permet de calculer séparément les modes propres fluide et structure. L'analyse du problème couplé est ensuite présentée et met en évidence l'importance des phénomènes d'interactions fluide/structure dans le cas industriel.

5.1 Etude du problème couplé fluide/structure générique

5.1.1 Analyse modale

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'étude modale du système couplé fluide/structure défini par la FIG. 1.1. Nous utilisons la méthode de couplage fort éléments finis/éléments finis pour conduire l'analyse du problème couplé¹. Nous avons établi dans ce cas au chapitre 2 la formulation générale suivante du problème aux valeurs propres pour le système couplé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}_o - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^o{}^T \\ 0 & \mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_F^o{}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho_F\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T & 0 \\ -\rho_F(\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o\tilde{\mathbf{K}}_F^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T) & \mathbf{M}_F^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(\omega) \\ \mathbf{P}_o(\omega) \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

¹La méthode de couplage éléments finis/équation intégrale donne des résultats de calcul équivalents, comme le montre la validation proposée en annexe C.2, mais elle est plus coûteuse en temps de calcul dans l'environnement MATLAB, ce qui nous fait privilégier l'approche éléments finis.

Cette formulation fait apparaître deux sous-problèmes aux valeurs propres, caractérisant les *modes structure hydroélastiques* et les *modes fluide de ballonnement*.

Les modes structure hydroélastiques sont les modes propres de flexion de la poutre en présence de fluide incompressible sans prise en compte d'effets de surface libre, obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{V}(\omega) = \omega^2 (\mathbf{M}_S + \rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T) \mathbf{V}(\omega) \quad (5.2)$$

Les modes fluide de ballonnement sont les modes de surface libre, sans prise en compte du couplage avec la structure, obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K}_F^o - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_F^{oT}) \mathbf{P}_o(\omega) = \omega^2 \mathbf{M}_F^o \mathbf{P}_o(\omega) \quad (5.3)$$

Les modes hydroélastiques sont calculés à partir des caractéristiques de la structure et de la prise en compte du terme de masse de fluide ajoutée $\rho_F \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T$, traduisant l'effet du fluide sur la dynamique de la structure. Nous caractérisons dans le sous-paragraphe 5.1.1.1 l'effet de masse ajoutée par un calcul des fréquences propres et des masses modales pour les modes hydroélastiques, en fonction de différents nombres sans dimension caractérisant la géométrie du problème.

La formulation (5.1) précédente montre aussi que la prise en compte des effets de surface libre dans le problème couplé fluide/structure engendre un couplage entre les modes de ballonnement du fluide et les modes hydroélastiques de la structure. La matrice de couplage des deux sous-problèmes est l'opérateur $\mathbf{R}_o^T - \tilde{\mathbf{K}}_F^o \tilde{\mathbf{K}}_F^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T$; le système matriciel couplé prend la forme caractéristique d'un problème en formulation (\mathbf{u}, p) [106]. Le phénomène de couplage de modes est étudié dans le sous-paragraphe 5.1.1.2.

5.1.1.1 Masse ajoutée et masse déplacée

Nous commençons l'analyse modale du système en caractérisant les effets de masse d'eau ajoutée et de masse d'eau déplacée ; nous nous intéressons aux modes structure hydroélastiques. Nous avons montré au chapitre 1 que l'étude du système structure en présence de fluide pouvait être conduite en modélisant les effets du fluide par un opérateur de masse ajoutée. En résolvant le problème dynamique couplé nous pouvons écrire de façon plus précise le mouvement de la poutre couplée avec le fluide comme (voir annexe A) :

$$(\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{K}_S \mathbf{V}(t) = -\gamma(t) (\Phi_S - \Phi_H) \quad (5.4)$$

avec :

- \mathbf{M}_H terme de masse d'eau ajoutée :

$$\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R}$$

- Φ_H terme de poussée d'ARCHIMÈDE (terme de masse d'eau déplacée) :

$$\Phi_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{K}_F^{-1} \Phi_F$$

avec Φ_F correspondant au terme de chargement du problème fluide (discrétisation des conditions aux limites en $r = R, R'$).

Avec cette formulation, nous retrouvons le problème modal pour les modes propres hydroélastiques, notés $(\mathbf{V}_h^n)_{n \geq 1}$ solutions de :

$$(\mathbf{K}_S - \omega_n^2 (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H)) \mathbf{V}_h^n = \mathbf{0}$$

Les modes hydroélastiques $(\mathbf{V}_h^n)_{n \geq 1}$ sont caractérisés par :

- une pulsation propre ω_n^h vérifiant le principe du Min-Max pour le quotient de RAYLEIGH [148]

$$\omega_n^h = \min_{\mathcal{V}_n} \max_{V \in \mathcal{V}_n} \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{K}_S \mathbf{V}}{\mathbf{V}^T (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{V}}$$

avec \mathcal{V}_n sous-espace de dimension n de l'espace \mathcal{V} des champs de déplacement cinématiquement admissibles ;

- une masse modale calculée en prenant en compte l'effet de poussée d'ARCHIMÈDE [89] [137]

$$\mu_n^h = \frac{(\mathbf{V}^T (\Phi_S - \Phi_H))^2}{\mathbf{V}^T (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \mathbf{V}}$$

Remarque 9 Dans le cas d'un problème très élancé ($\eta \gg 1$), confiné et sans surface libre ($\lambda = 1$), nous montrons que l'équation de la poutre couplée avec le fluide peut être approchée simplement par [189] :

$$(\rho_S S + \rho_F S_h) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -(\rho_S S - \rho_F S_f) \gamma$$

avec $S = \pi[(R + e)^2 - R^2]$, $S_h = \pi R^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$ et $S_f = \pi R^2$.

Les effets du fluide en terme de masse ajoutée et de masse déplacée peuvent donc être caractérisés pour le problème étudié par les nombres sans dimension \mathcal{M} (nombre de masse) et ϵ (ratio d'épaisseur), définis au chapitre 1.

Le nombre de masse caractérise le rapport des masses volumiques entre la structure et le fluide : plus le fluide est lourd par rapport à la structure (i.e. $\mathcal{M} \gg 1$), plus les effets de masse ajoutée sont importants. Le ratio d'épaisseur caractérise les effets de la géométrie de la poutre sur le calcul des masses ajoutées et des masses déplacées ; à masse volumique du fluide et de la structure identique ($\mathcal{M} = 1$), la masse de structure est proportionnelle à $(R + e)^2 - R^2 \simeq 2Re$ lorsque $e/R \ll 1$ alors que la masse de fluide déplacée est proportionnelle à R^2 . Le rapport de ces deux masses est alors de l'ordre de grandeur de ϵ .

Nous notons $\beta_n = \frac{\omega_n^h}{\omega_n^o}$, où ω_n^o est la pulsation propre du mode n non couplé et ω_n^h est la pulsation propre du mode n couplé. Nous définissons ensuite $\vartheta_o = \frac{\sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu_n^o}{M_S}$ le cumul des masses modales des modes structure élastiques, rapporté à la masse de la structure M_S , et $\vartheta_h = \frac{\sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu_n^h}{M_S + M_F}$ le cumul des masses modales des modes structure hydroélastiques, rapporté à la masse de la structure et du fluide $M_S + M_F$.

L'effet de masse d'eau ajoutée est illustré par le calcul de β_n : nous avons $\beta_n < 1$, $\forall n \geq 1$ d'après la définition des pulsations propres avec le quotient de RAYLEIGH et le caractère défini positif de l'opérateur de masse ajoutée. Cet effet est illustré par les FIG. 5.1 et 5.2 avec l'influence des nombres sans dimension \mathcal{M} et ϵ^1 .

La FIG. 5.1 donne l'évolution du coefficient β pour le premier mode poutre hydroélastique en fonction du ratio de remplissage λ , pour plusieurs valeurs du ratio d'épaisseur \mathcal{E} .

La FIG. 5.2 donne l'évolution du coefficient β pour le premier mode poutre hydroélastique en fonction du ratio de remplissage λ , pour plusieurs valeurs du nombre de masse \mathcal{M} .

¹Les caractéristiques géométriques et physiques du problème couplé correspondent au cas standard défini au chapitre 1 avec un ratio de remplissage $\lambda = 75\%$.

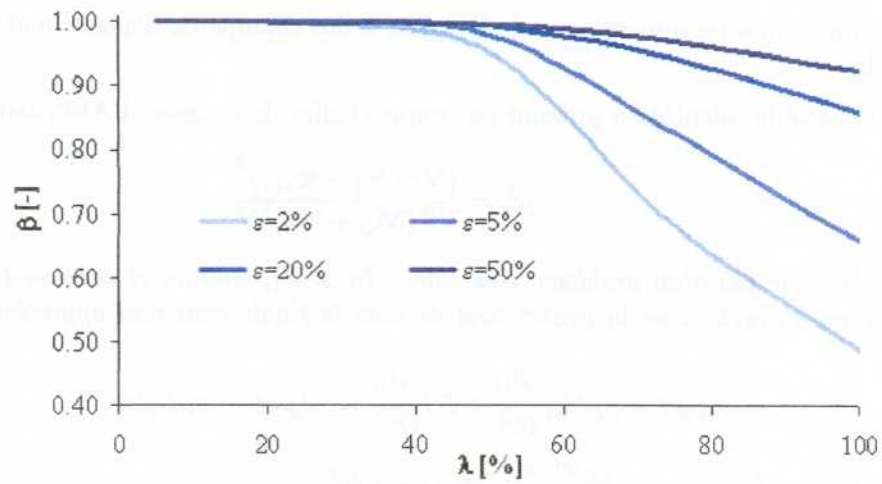


FIG. 5.1 – Evolution du ratio β pour la première fréquence propre du mode poutre hydroélastique en fonction de λ pour plusieurs valeurs de ϵ

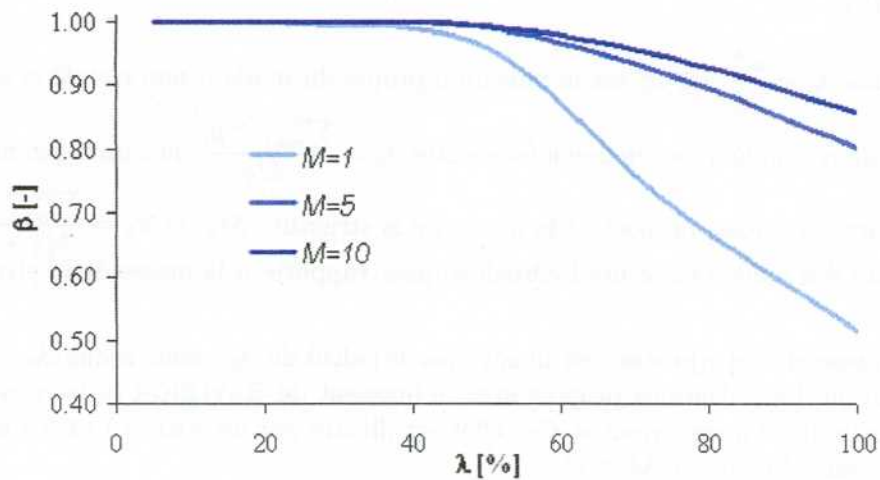


FIG. 5.2 – Evolution du ratio β pour la première fréquence propre du mode poutre hydroélastique en fonction de λ pour plusieurs valeurs de \mathcal{M}

La baisse de fréquence pour le premier mode couplé est d'autant plus importante que M et ϵ sont petits. L'effet augmente avec le remplissage et avec le confinement du problème.

L'effet de masse d'eau déplacée est illustré par le calcul de ϑ_o et ϑ_h , donné par la FIG. 5.3.

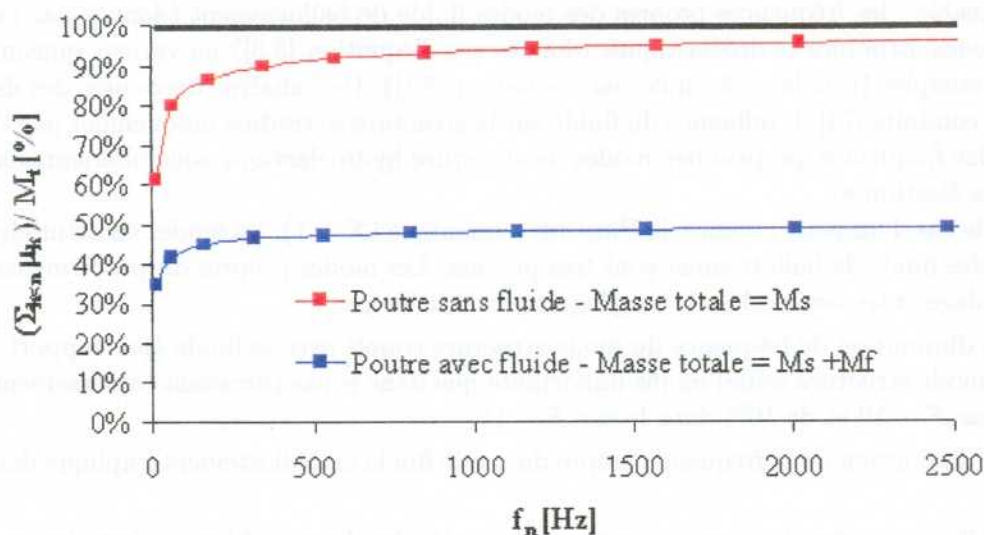


FIG. 5.3 – Cumul de masses modales pour les modes de poutre élastiques et hydroélastiques

Dans le cas élastique, les calculs de masses modales cumulées montrent que $\vartheta_o \rightarrow 100\%$ alors que dans le cas hydroélastique nous obtenons $\vartheta_h \rightarrow 50\%$. La poussée d'ARCHIMÈDE a donc pour effet de réduire les facteurs de participation, donc les masses modales¹.

L'effet de poussée d'ARCHIMÈDE est caractéristique du problème considéré, dans lequel l'ensemble du système couplé est soumis à la sollicitation dynamique. Dans le cas où la sollicitation dynamique est appliquée à la structure seule, l'effet du fluide se caractérise uniquement par un effet de masse ajoutée : l'effet de masse d'eau déplacée disparaît et le comportement dynamique du système est différent [137].

5.1.1.2 Couplage de modes

La formulation (5.1) met en évidence un couplage possible entre les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballottement. L'importance du couplage peut être évaluée en fonction du nombre de FROUDE dynamique, construit à partir des caractéristiques physiques et géométriques du problème couplé [57] [97]. La définition proposée dans notre cas pour ce nombre sans dimension est :

$$\mathcal{F} = \frac{e}{R} \times \sqrt{\frac{E}{\rho_s g L}} \quad (5.5)$$

¹La prise en compte des modes de ballottement et des modes acoustiques du fluide dans le couplage fluide/structure donne un cumul des masses modales de l'ensemble des modes couplés qui tend vers la masse totale du système couplé $M_S + M_F$. Le calcul de masses modales isolant les modes hydroélastiques permet d'apprécier l'effet de la poussée d'ARCHIMÈDE.

Les TAB. 5.1 et 5.2 donnent les fréquences propres pour le système couplé fluide/structure dans le cas de deux nombres de FROUDE dynamique¹.

Dans le cas d'un grand nombre de FROUDE dynamique ($\mathcal{F} \sim 10$), les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement sont assez éloignés. Le couplage des modes entre eux est négligeable : les fréquences propres des modes fluide de ballonnement (donnés par l'équation [5.2]) et des modes structure hydroélastiques (donnés par l'équation [5.3]) ne varient quasiment pas après couplage complet (problème formulé par l'équation [5.1]). Une analyse découplée des deux problèmes peut être conduite [74]. L'influence du fluide sur la structure se traduit uniquement par l'effet de masse ajoutée (les fréquences propres des modes de structure hydroélastique sont inférieures aux fréquences des modes élastiques).

Dans le cas d'un petit nombre de FROUDE dynamique ($\mathcal{F} \sim 1$), les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballonnement sont très proches. Les modes propres du problème couplé résultent d'un couplage entre ces modes ; le couplage se caractérise par :

- une diminution de fréquence du mode structure couplé avec le fluide (par rapport à la fréquence du mode structure seule) moins importante que dans le cas précédent (abaissement de 21% dans le cas $\mathcal{F} \sim 10$ et de 10% dans le cas $\mathcal{F} \sim 1$) ;
- une diminution de la fréquence propre du mode fluide de ballonnement impliqué dans le couplage.

Ce cas de figure montre donc qu'une analyse découplée des deux problèmes n'est plus valable [74]. Des phénomènes similaires ont été mis en évidence par PESEUX et PIARD dans un cas bidimensionnel avec un mécanisme de couplage différent [116].

La FIG. 5.4 donne l'évolution de l'abaissement en fréquence β du premier mode de structure couplé avec fluide (avec prise en compte du ballonnement) en fonction du ratio de remplissage λ , ce qui permet de visualiser l'effet du couplage en basse fréquence : l'abaissement en fréquence est plus important pour un grand nombre de FROUDE dynamique.

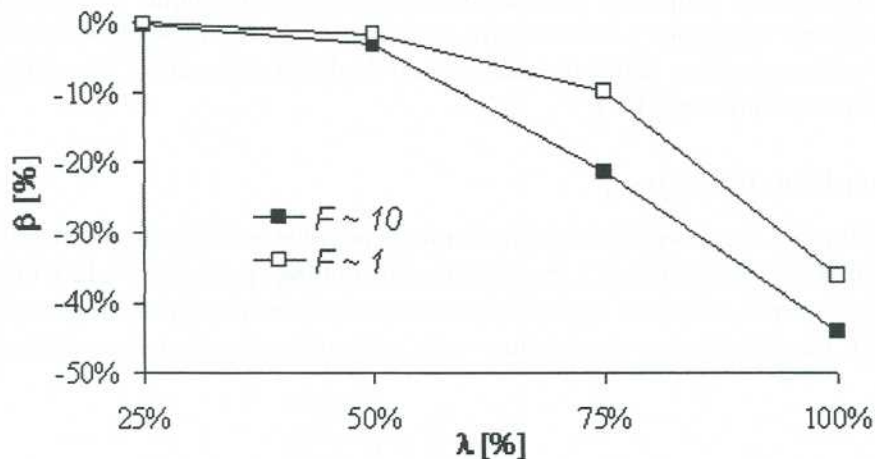


FIG. 5.4 – Evolution du ratio d'abaissement en fréquence β pour le premier mode structure en fonction du ratio de remplissage λ pour $\mathcal{F} \sim 10$ et $\mathcal{F} \sim 1$, avec ratio de confinement $\alpha = 2$ et nombre de masse $\mathcal{M} = 8$

¹Les données géométriques et physiques du problème sont ajustées dans ce cas pour obtenir les nombres de FROUDE désirés. La géométrie du problème étant fixée, le passage de $\mathcal{F} \sim 10$ à $\mathcal{F} \sim 1$ se fait en ajustant la raideur du problème structure.

$\lambda = 25\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.0996	2.8757	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.0996	2.8757	4.0789	5.1344
<i>Structure avec fluide, sans ballottement</i>	34.6724	212.768	555.541	1046.20
<i>Structure avec fluide, avec ballottement</i>	34.6729	212.770	555.543	1046.20

$\lambda = 50\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2546	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.2545	2.8760	4.0788	5.1344
<i>Structure avec fluide, sans ballottement</i>	33.6284	164.728	461.918	944.62
<i>Structure avec fluide, avec ballottement</i>	33.6349	164.733	461.918	944.620

$\lambda = 75\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2905	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.2899	2.8756	4.0787	5.1343
<i>Structure avec fluide, sans ballottement</i>	27.2966	136.706	404.423	869.101
<i>Structure avec fluide, avec ballottement</i>	27.3250	136.707	404.423	869.110

$\lambda = 100\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2962	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.2943	2.8750	4.0783	5.1341
<i>Structure avec fluide, sans ballottement</i>	19.3432	122.546	377.832	804.374
<i>Structure avec fluide, avec ballottement</i>	19.4094	122.552	377.834	804.374

TAB. 5.1 – Analyse modale du fluide et de la structure couplés et découplés, avec ou sans ballottement fluide, pour différentes hauteurs de remplissage avec un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 10$, un nombre de masse $\mathcal{M} = 8$ et un ratio de confinement $\alpha = 2$

$\lambda = 25\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.0996	2.8757	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.0989	2.8728	4.0798	5.1345
<i>Structure avec fluide, sans sloshing</i>	3.4672	21.2768	55.5542	104.618
<i>Structure avec fluide, avec sloshing</i>	3.4698	21.2952	55.5690	104.623
$\lambda = 50\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2546	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.2413	2.8402	4.0904	5.1369
<i>Structure avec fluide, sans sloshing</i>	3.3628	16.4728	46.1918	94.4619
<i>Structure avec fluide, avec sloshing</i>	3.4199	16.5525	46.1949	94.4664
$\lambda = 75\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2905	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.2126	2.6420	4.1006	5.1410
<i>Structure avec fluide, sans sloshing</i>	2.7297	13.6706	40.4423	86.9110
<i>Structure avec fluide, avec sloshing</i>	3.1352	13.6925	40.4485	86.9158
$\lambda = 100\%$				
Cas de calcul	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]
<i>Fluide sans structure</i>	1.2962	2.8761	4.0789	5.1344
<i>Fluide avec structure</i>	1.0813	2.9832	4.0931	5.1385
<i>Structure avec fluide, sans sloshing</i>	1.9343	12.2546	37.7832	80.4374
<i>Structure avec fluide, avec sloshing</i>	2.2147	12.3579	37.8024	80.4451

TAB. 5.2 – Analyse modale du fluide et de la structure couplés et découplés, avec ou sans ballonnement fluide, pour différentes hauteurs de remplissage avec un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 1$, un nombre de masse $\mathcal{M} = 8$ et un ratio de confinement $\alpha = 2$

Le TAB. 5.3 montre l'influence du nombre de masse sur les phénomènes de couplage : les effets sont plus marqués pour un petit nombre de masse, mais les tendances observées entre deux nombres de FROUDE dynamique sont les mêmes (abaissement en fréquence moindre pour une structure en présence de fluide avec ballottement pour des petits nombres de FROUDE dynamiques).

β	$\mathcal{F} \sim 1$	$\mathcal{F} \sim 10$
$\mathcal{M} \sim 1$	-41%	-62%
$\mathcal{M} \sim 10$	-9%	-21%

TAB. 5.3 – Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de FROUDE dynamique \mathcal{F} et du nombre de masse \mathcal{M} (ratio de confinement $\alpha = 2$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$)

Le TAB. 5.4 met en évidence l'influence du ratio de confinement sur le couplage de modes. Les écarts d'abaissement en fréquence entre les deux situations de calcul (nombre de FROUDE dynamique grand ou petit) sont plus marqués pour un ratio de confinement petit. Nous vérifions là un phénomène physique classique de l'interaction fluide/structure : les effets de couplage sont amplifiés dans des situations de fort confinement [97].

β	$\mathcal{F} \sim 1$	$\mathcal{F} \sim 10$
$\alpha = 2$	-9%	-21%
$\alpha = 5$	-13%	-18%

TAB. 5.4 – Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de FROUDE dynamique \mathcal{F} et du ratio de confinement α (nombre de masse $\mathcal{M} = 8$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$)

La FIG. 5.5 illustre le phénomène du couplage de modes entre les modes structure hydroélastiques et les modes fluide de ballottement dans le cas $\lambda = 75\%$ et $\mathcal{F} \sim 1$. Le couplage de modes se fait entre le premier mode poutre hydroélastique (2.7297 Hz) et le premier mode fluide de ballottement (2.8761 Hz) ; le mode couplé (3.1352 Hz) a une forme modale qui hérite des formes modales des deux modes découplés.

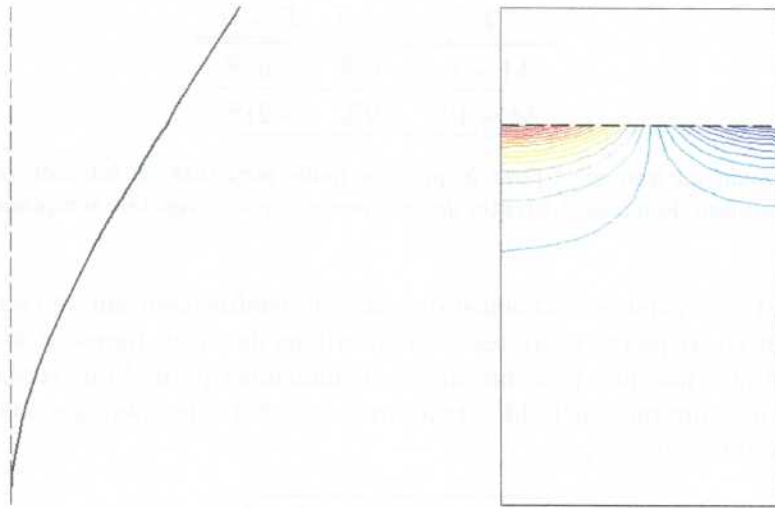
Remarque 10 *Les effets de couplage présentés dans cette étude sont en basses fréquences. Dans le domaine des hautes fréquences, un couplage similaire peut être mis en évidence [89] [105] entre :*

- les modes structure hydroélastiques ;
- les modes fluide acoustiques (correspondant aux effets de compressibilité du fluide).

Le nombre sans dimension gouvernant les effets du couplage est le nombre de compressibilité \mathcal{C} donné par :

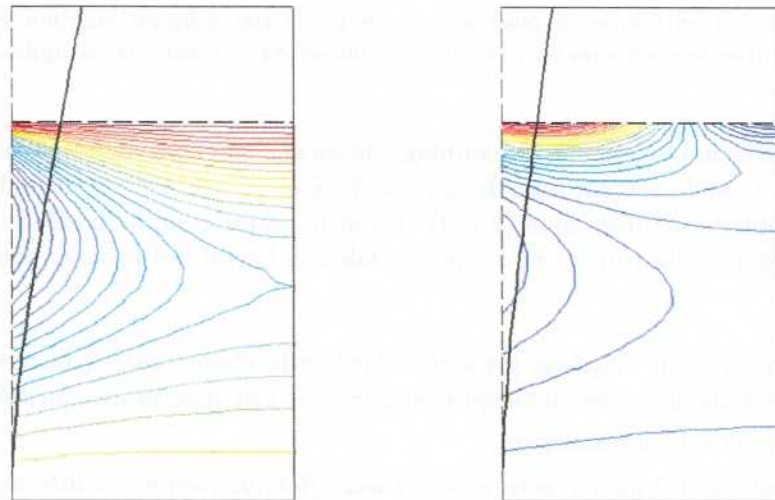
$$\mathcal{C} = \frac{1}{c} \times \sqrt{\frac{E}{\rho_S}}$$

avec c célérité des ondes acoustiques dans le fluide.



Structure seule (3.4705 Hz)

Fluide seul (2.8761 Hz)



Structure couplée avec le fluide,
sans ballotement fluide (2.7297 Hz)

Structure couplée avec le fluide,
avec ballotement fluide (3.1352 Hz)

FIG. 5.5 – Illustration du phénomène de couplage des modes fluide et structure ($\alpha = 2$, $\lambda = 75\%$, $\mathcal{F} \sim 1$, $\mathcal{M} \sim 8$). Représentation du comportement en flexion de la poutre et des iso-valeurs de pression pour le fluide dans le plan (r, z) pour $\theta = 0$ (harmonique symétrique d'ordre $s = 1$)

5.1.2 Analyse temporelle

Nous poursuivons l'étude du cas générique en réalisant une analyse temporelle du système couplé, soumis à un choc latéral imposé, comme décrit par la FIG. 1.1. La description du sous-problème fluide utilise le modèle général exposé dans le paragraphe 1.2.1 et la description du sous-problème structure utilise une approche linéaire ou non-linéaire. Dans le premier cas, nous étudions les effets dynamiques d'interactions fluide/structure; dans le second cas, nous évaluons les effets des non linéarités structure sur le comportement d'ensemble du système couplé.

La simulation numérique du problème d'évolution utilise la méthode de couplage explicite détaillée dans le chapitre 3 et validée dans la section 4.3. Le TAB. 5.5 précise les options de calcul utilisées pour les simulations numériques présentées dans cette analyse.

	Problème fluide	Problème structure
Discrétisation spatiale	Volumes finis Schéma MARS au second ordre	Eléments finis Fonctions d'interpolation cubiques
Intégration temporelle	Méthode implicite Algorithme PISO	Méthode implicite (linéaire) Méthode mixte (non-linéaire)
Paramètres de discrétisation	$N_r \times N_\theta \times N_z = 20 \times 240 \times 40$ = 192000 cellules fluide	$N = 10$ éléments finis structure
Paramètres temporels	Temps de simulation $T_\infty = 2 \times \tau$ Pas de temps $\delta t = \tau/1000$	
Méthode d'inversion matricielle	Méthode itérative Algorithme de GAUSS-SEIDEL	Méthode directe Décomposition LU
Couplage en espace	Algorithme de remaillage amélioré	
Couplage en temps	Filtrage des efforts $f_o = 100/\tau$	

TAB. 5.5 – Caractéristiques de simulation du problème couplé avec la procédure de couplage explicite

5.1.2.1 Etude linéaire

Nous commençons par une étude du système couplé avec hypothèse de linéarité de la dynamique de la structure. L'analyse modale menée au paragraphe précédent a mis en évidence le phénomène de couplage de modes pour un problème caractérisé par des petits nombres de FROUDE dynamiques. Nous allons caractériser ces effets d'interactions fluide/structure dans le domaine temporel et montrer qu'ils sont bien décrits par la procédure de couplage explicite.

L'application des techniques numériques de couplage fort éléments finis/éléments finis sur des domaines fixes permet d'obtenir une solution numérique de référence. En appliquant une démarche de discrétisation comme exposée au chapitre 2, nous obtenons l'équation matricielle suivante décrivant la dynamique du couplage dans l'approximation linéaire sur domaine fixe, avec ballottement fluide :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{V}}(t) \\ \ddot{\mathbf{P}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{Bmatrix} = -\gamma(t) \begin{Bmatrix} \Phi_S \\ \Phi_F \end{Bmatrix}$$

Ce système est intégré en temps avec l'algorithme de NEWMARK et permet d'obtenir l'évolution temporelle des grandeurs en déplacement pour la structure et en pression pour le fluide. Le système est soumis à un choc dont la durée est choisie pour coïncider avec la première période propre de la poutre

couplée avec le fluide. Le ratio de remplissage est fixé à $\lambda = 75\%$; les caractéristiques du problème sont ajustées de façon à obtenir le nombre de FROUDE dynamique voulu.

Nous commençons par un calcul correspondant à un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 10$. Dans ces conditions, les effets de couplage de modes sont négligeables ; la dynamique de flexion de la poutre est découplée de la dynamique de la surface libre. La FIG. 5.6 compare la réponse en déplacement de l'extrémité libre de la poutre, calculée avec l'approche éléments finis (avec et sans ballottement fluide) et l'approche éléments finis/volumes finis. Le déplacement $v(L, t)$ est rapporté à la longueur de la poutre L et le temps t est rapporté à la durée du choc τ .

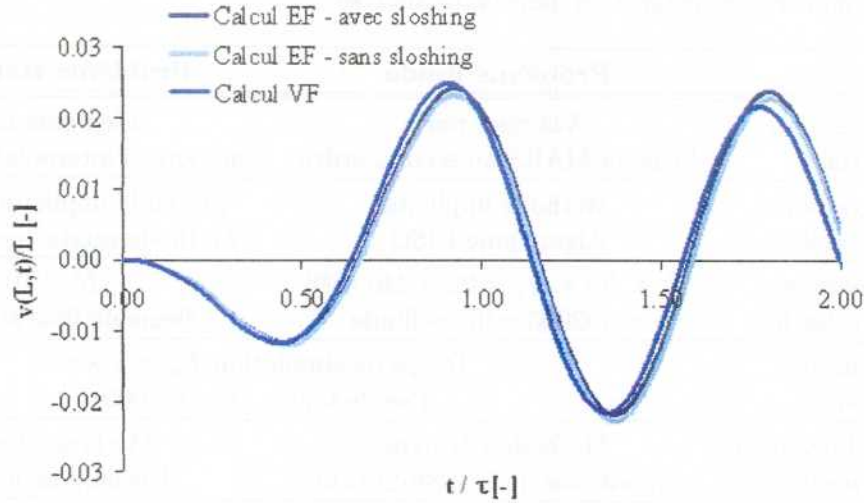


FIG. 5.6 – Réponse temporelle de la poutre couplée avec le fluide pour un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 10$

Les trois calculs donnent des résultats similaires, ce qui montre que les effets de couplage de modes ne sont pas prépondérants dans la situation de calcul choisie. La solution de calcul couplé utilisant le code CFD montre un amortissement dû aux effets de viscosité dans le fluide¹.

Nous poursuivons avec un calcul correspondant à un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 1$, pour lequel nous comparons les trois résultats de calcul (couplage fort éléments finis/éléments finis avec ou sans ballottement fluide, couplage faible éléments finis/volumes finis avec modélisation de la surface libre par la méthode VOF).

La FIG. 5.7 compare les trois résultats de calcul et met en évidence une différence de comportement calculé importante entre les modèles de calcul prenant en compte la surface libre et le modèle ne la prenant pas en compte. Les phénomènes de couplage de modes sont importants dans ce cas de figure, comme l'a montré l'analyse modale. Le calcul couplé éléments finis sans prise en compte du ballottement

¹L'amortissement constaté est également dû aux phénomènes de dissipation numérique inhérents à :

- la méthode de couplage explicite utilisée ;
- la méthode de modélisation de la surface libre dans le code STAR-CD, intrinsèquement dissipative [33].

L'amortissement numérique introduit est faible devant l'amortissement physique, mais non nul. Dans le chapitre 4, nous avons validé séparément le calcul des efforts de pression pour un problème de ballottement et le calcul des effets dissipatifs pour un problème confiné. Une description des effets dissipatifs avec ballottement pourrait permettre de mieux caractériser les phénomènes d'amortissement dans le problème posé. Dans le problème posé, ces effets ont une importance moindre par rapport aux effets de masse ajoutée, les phénomènes de ballottement fluide étant essentiellement gouvernés par la pression [50].

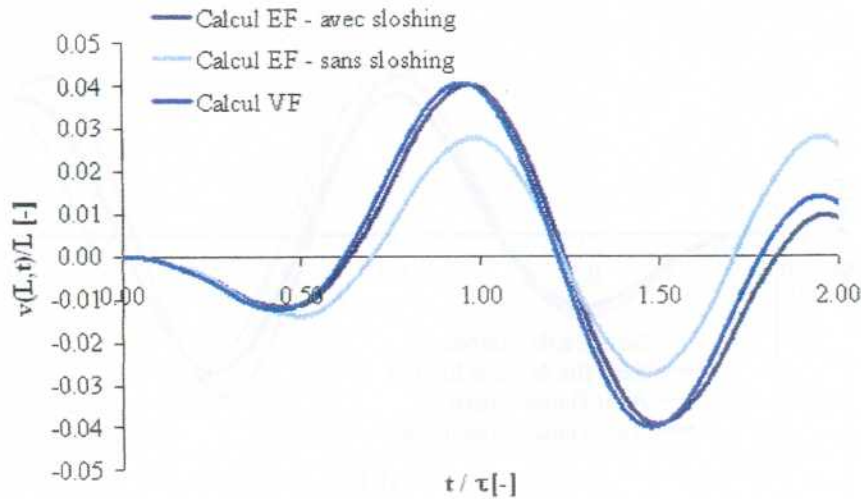


FIG. 5.7 – Réponse temporelle de la poutre couplée avec le fluide pour un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 1$

sous-estime la réponse en déplacement de la poutre. En revanche, les calculs couplés éléments finis et CFD donnent des résultats très similaires ; le calcul CFD présente un léger amortissement de la réponse en déplacement (effets physiques de viscosité du fluide et non physiques de dissipation numérique). La procédure de calcul couplé explicite éléments finis/volumes finis permet cependant de reproduire fidèlement les effets d'interactions fluide/structure caractérisés par le phénomène de couplage de mode : ce calcul permet une validation supplémentaire de la méthode pour la simulation de phénomènes d'interactions fluide/structure.

5.1.2.2 Etude non linéaire

Nous nous intéressons maintenant au problème couplé, avec prise en compte des non linéarités fluide et structure. Les non linéarités fluide sont modélisées par l'intermédiaire des termes de transport, de l'évolution sur domaine variable et de la prise en compte de la surface libre¹.

Les non linéarités structure sont modélisées par les termes de déplacement au second ordre dans l'équation dynamique de la poutre. Nous cherchons à caractériser les non linéarités en fonction de l'amplitude de l'accélération imposée pour un temps de choc donné. Le temps de choc imposé est $\tau = 0.1$ s, de l'ordre de grandeur de la période propre du premier mode couplé fluide/structure. Nous calculons alors la réponse temporelle du système et nous déduisons la flexion maximale de la poutre soumise à un choc d'amplitude donnée γ_0 .

La FIG. 5.8 donne la réponse temporelle du système pour un choc d'amplitude $\gamma_0 = 50$ m/s², avec et sans couplage fluide/structure et dans le cadre d'une analyse linéaire et non linéaire. Le couplage avec le fluide permet de mettre en évidence :

- les effets de *masse d'eau ajoutée* : la fréquence propre du système couplé est inférieure à la fréquence propre du système non couplé ;
- les effets de *masse d'eau déplacée* : la flèche maximale du système couplé est inférieure à la flèche du système non couplé, pour une même sollicitation, à cause des efforts hydrodynamiques.

¹Les calculs précédents ont montré une bonne corrélation entre les modèles linéaires et non linéaires dans le cas d'un couplage numérique fort et d'un couplage numérique faible, ce qui tend à montrer que, dans le cas traité, les non linéarités fluide ont une faible influence sur la dynamique du problème.

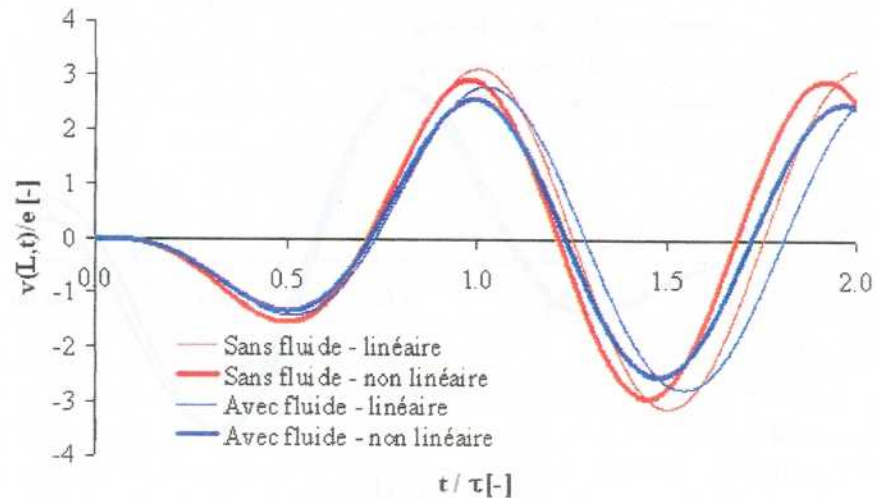


FIG. 5.8 – Réponse en déplacement de l'extrémité libre de la poutre avec et sans couplage fluide/structure. Comparaison des modèles poutre linéaire et non linéaire

La FIG. 5.9 donne l'état de la surface libre et la déformée de la poutre à différents instants pour ce cas de calcul.

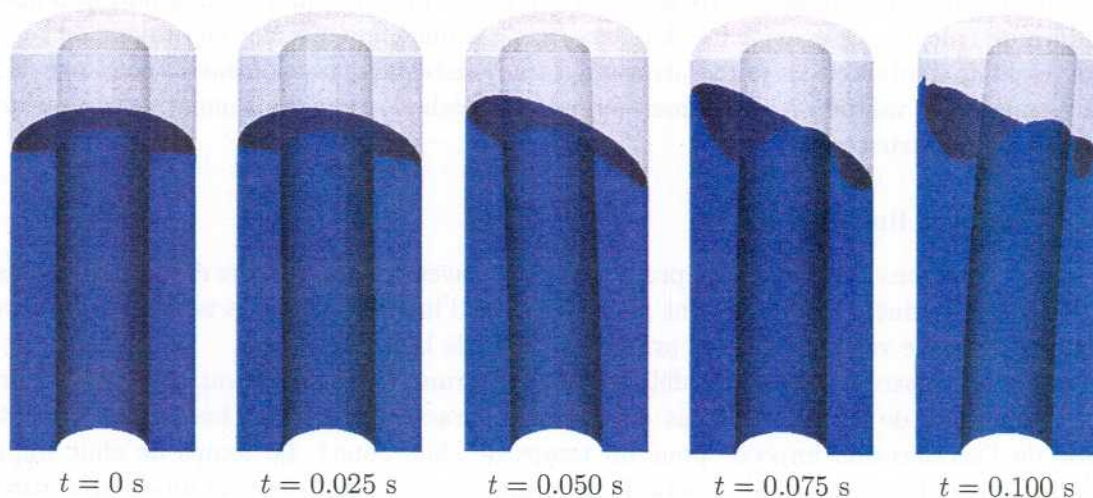


FIG. 5.9 – Etat de la surface libre du fluide et de la déformation de la poutre à différents instants

La FIG. 5.10 donne la flèche maximale calculée par une analyse linéaire et non linéaire, avec et sans couplage fluide/structure en fonction de l'amplitude de l'accélération.

Les calculs permettent de mettre en évidence l'apparition de non linéarités géométriques à partir d'une amplitude d'accélération de l'ordre de $\gamma_0 \tau^2 / R \sim 3$, ce qui correspond à une flèche maximale $V_{\max} / e \sim 2$, avec e épaisseur de la poutre (e est la plus petite dimension caractéristique du système). L'effet des non linéarités se caractérise par une rigidification de la structure, la flèche maximale donnée par une approche non linéaire étant inférieure à la flèche maximale déterminée par une analyse linéaire [12]. Ces observations sont valables pour le problème découplé comme pour le problème couplé. Les effets des non linéarités géométriques et du couplage fluide/structure conduisent à une diminution de la flèche maximale de l'extrémité libre de la poutre.

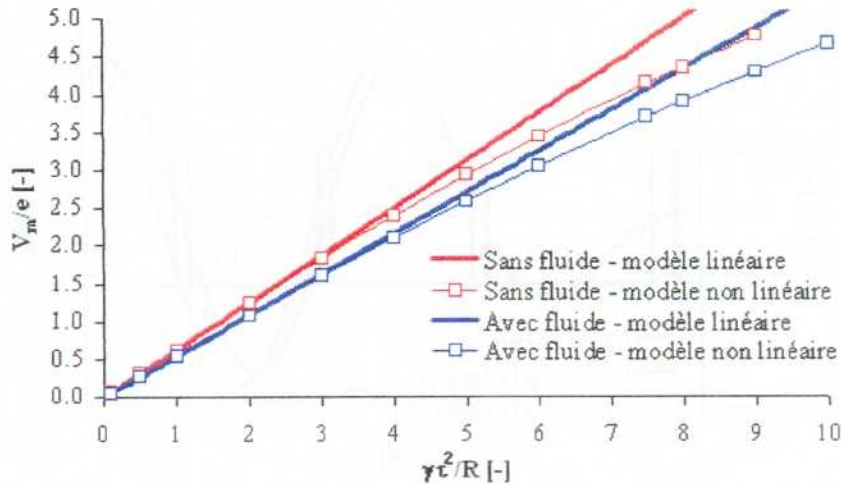


FIG. 5.10 – Déplacement maximum de l'extrémité libre de la poutre en fonction de l'amplitude de l'accélération imposée. Comparaison des calculs linéaires et non linéaires avec et sans couplage avec le fluide.

Le TAB. 5.6 donne l'écart $\varepsilon_{o,h}$ entre la valeur maximale du déplacement de l'extrémité libre de la poutre calculé avec et sans fluide en fonction de $\gamma_o\tau^2/R$ et permet de quantifier l'influence relative des effets de couplage fluide/structure et des effets des non linéarités structure.

$\gamma_o\tau^2/R$	2	4	6	8	10
$\varepsilon_{o,h}$	13.13%	12.31%	11.47%	10.48%	9.46%

TAB. 5.6 – Ecart entre la valeur maximale du déplacement de l'extrémité libre de la poutre calculé avec et sans fluide en fonction de l'accélération imposée pour un comportement non linéaire de la structure

Dans le cas d'un modèle linéaire, cet écart est de 13.42% pour toutes les valeurs de $\gamma_o\tau^2/R$. Dans le cas d'une étude non linéaire, cette valeur devient 13.13% pour $\gamma_o\tau^2/R \sim 2$ et 9.46% pour $\gamma_o\tau^2/R \sim 10$: pour le problème étudié, les effets des non linéarités géométriques deviennent prépondérants devant les effets de couplage fluide structure pour des valeurs croissantes de l'accélération imposée.

Remarque 11 Nous vérifions qu'avec le choc imposé, la réponse du système est bien non linéaire, en comparant les résultats de calculs linéaires et non linéaires pour la poutre couplée. Nous vérifions également que l'hypothèse faite sur l'énergie cinétique en traction/compression de la poutre est valable, en comparant la réponse prenant en compte les termes de flexion et de traction/compression d'une part et les termes de flexion seule d'autre part (voir remarque 7). Les calculs sont réalisés à partir de la solution numérique obtenue par couplage fort. Les résultats sont synthétisés sur la FIG. 5.11 qui donne l'évolution du déplacement relatif de l'extrémité libre de la poutre dans le cas d'un modèle linéaire et d'un modèle non linéaire (termes de flexion avec et sans prise en compte des termes de traction/compression)¹. Les résultats de calcul permettent en particulier de valider l'hypothèse faite sur l'énergie cinétique de traction/compression.

¹Les résultats de la FIG. 5.11 sont obtenus avec une méthode de calcul implicite : nous donnons également le nombre d'itérations internes de l'algorithme non linéaire implicite.

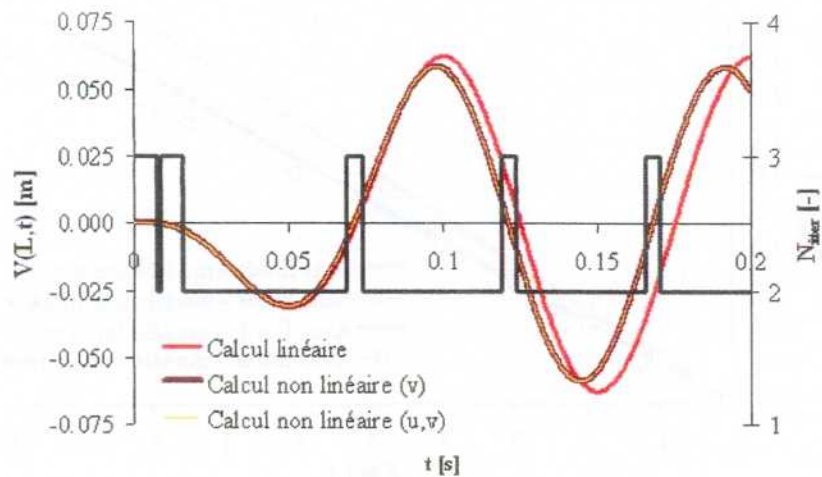


FIG. 5.11 – Comparaison de différents calculs par couplage fort. Calculs éléments finis linéaires (flexion seule) et non linéaires (flexion et traction-compression, flexion seule)

Cette étude numérique nous a permis de décrire et de comprendre les effets de l'interaction fluide/structure sur le cas d'étude générique. Nous nous intéressons maintenant à une application industrielle des méthodes de calcul présentées au chapitre 2.

5.2 Etude d'un problème couplé fluide/structure industriel

Nous donnons dans les pages suivantes un exemple d'application des méthodes numériques utilisées pour le problème aux valeurs propres. Le cas traité est celui du calcul des modes propres de l'ensemble panier et cuve d'un réacteur nucléaire de propulsion navale. L'exemple proposé reprend le texte intégral de l'article intitulé **Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure** proposé par Jean-François SIGRIST, Christian LAINÉ et Bernard PESEUX et accepté pour publication dans la revue *Mécanique & Industries* [194].

L'étude du cas industriel correspond à un problème couplé *sans surface libre* fluide. Nous supposons par ailleurs le fluide compressible; le sous-problème fluide est donc caractérisé par ses modes acoustiques. L'analyse modale prend en compte les effets d'interaction fluide/structure et utilise une approche éléments finis sur un modèle axi-symétrique du système, par couplage entre les éléments finis suivants.

Eléments coque formulés en déplacement et utilisant la relation contraintes/déformation de SANDERS-KOITER [15] [73]. La formulation des matrices élémentaires est très lourde : nous utilisons une intégration analytique des expressions obtenues avec des méthodes de calcul formel en ayant recours au logiciel MAPPLE [178];

Eléments fluide formulés en pression dont la théorie est rappelée au chapitre 2. Le calcul des matrices élémentaires est analytique et utilise les expressions (2.7) et (2.8) pour les termes de raideur. Dans l'application proposée, nous nous intéressons aux modes fluide acoustiques, en prenant en compte l'équation de compressibilité du fluide $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0$. Le terme de compressibilité $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ définit un terme de masse, dont la discrétisation conduit à l'écriture d'une matrice

élémentaire définie sur l'élément fluide de référence (FIG. 2.1) par :

$$m_{F(i,j)}^{n,m} = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{1}{c^2} N_i^F N_j^F r dr dz$$

Le calcul analytique donne l'expression suivante des composantes de la matrice $\mathbf{m}_F^{n,m}$:

$$m_{(i,j)}^F = \frac{ab}{4c^2} \left[r_0 + \frac{\xi_i \xi_j r_0}{3} + \frac{a}{3} (\xi_i + \xi_j) \right] \left[1 + \frac{\eta_i \eta_j}{3} \right]$$

Les résultats de calcul sur la géométrie industrielle sont donnés dans les pages suivantes. Cette étude permet un calcul des modes propres de la structure couplée avec le fluide et montre l'intérêt d'une modélisation couplée fluide/structure. L'étude permet d'illustrer le couplage de modes structure par le fluide et de montrer que les effets de couplage élasto-acoustiques sont négligeables (voir remarque 10).

L'étude s'intéresse également à une formulation symétrique du problème couplé, nécessaire pour une étude dynamique avec méthode spectrale.

Ce premier travail est un préalable à l'étude dynamique du système tenant compte des interactions fluide/structure. La suite de l'étude consiste en une analyse du comportement sismique du prototype à terre du réacteur de propulsion navale [197].

Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure

JEAN-FRANÇOIS SIGRIST¹, CHRISTIAN LAINÉ¹, BERNARD PESEUX²

¹ DCN Propulsion, Service Scientifique et Technique, 44620 La Montagne

² Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire Mécanique Matériaux, 44321 Nantes Cedex

Résumé – Nous présentons une analyse modale d'une structure industrielle couplée avec un fluide, en utilisant les techniques numériques de calculs couplés fluide/structure. Compte tenu de la nature axi-symétrique de la géométrie et de la nature non axi-symétrique des équations de couplage, la modélisation du problème est réalisée au moyen d'éléments finis axi-symétriques développés en série de Fourier. Un code de calcul est développé dans Matlab pour permettre l'analyse modale de la structure. Différentes formulations du problème sont comparées; les résultats de calcul Matlab sont comparés avec le code de calcul commercial Ansys. Les développements mis en œuvre pour cet exemple seront à terme intégrés dans le code de calcul Ansys pour l'étude de problèmes couplés en pression/déplacement avec développement en série de Fourier.

Mots clés : Analyse modale / couplage fluide-structure / éléments finis axi-symétriques en série de Fourier / formulations couplées symétrique et non symétrique

Abstract – This paper gives an example of numerical methods with finite element coupling for the numerical study of an industrial fluid-structure coupled problem. The problem is solved by coupling a finite element discretisation of both fluid and structure domain. The coupled system is described in terms of pressure and displacement for the fluid and structure problems. The unknown degrees of freedom are expanded in a Fourier serie. A numerical code is developed in Matlab in order to perform the modal analysis of the coupled problem. Numerical calculations are performed and compared with the Ansys code in order to validate our numerical developments.

Key words : Modal analysis / fluid-structure coupling / harmonic axisymmetric finite elements / coupled symmetric and non-symmetric formulations

1 Introduction

La simulation numérique de problèmes couplés fluide/structure fait l'objet de nombreuses études numériques qui ont permis le développement de méthodes de calcul, consistant à réaliser un couplage entre une discrétisation de type éléments finis du domaine structure et une discrétisation de type équation intégrale ou éléments finis du problème fluide [16], [18]. Ces techniques de calcul sont développées dans des laboratoires de recherche, et appliquées par exemple pour réaliser l'étude de structures immergées, avec prise en compte ou non de phénomènes de surface libre dans le fluide [7], [8], [13], [22], [23], [24], [25], [26], mais leur utilisation courante en bureau d'étude est cependant assez rare dans le cadre de projets industriels [17], [19].

Le présent article se propose d'illustrer une application de ces techniques de calcul à l'étude dynamique d'une structure représentative de l'ensemble panier et cuve d'un réacteur de propulsion navale, avec prise en compte du couplage fluide/structure.

Le modèle simplifié de la structure étudiée est représenté par la Fig. 1. On adopte un modèle axi-symétrique de l'ensemble et on distingue quatre principaux éléments :

- le corps du panier (**1**) : il s'agit de la partie supérieure de la structure intérieure du réacteur, qui contient les éléments combustibles. La géométrie est essentiellement cylindrique. Les caractéristiques géométriques et physiques sont notées E_1 (module d'YOUNG), ρ_1 (masse volumique), ν_1

(coefficient de POISSON) et e_1 (épaisseur);

- le fond du panier (2) : il s'agit de la partie inférieure de la structure intérieure du réacteur. La géométrie est plus complexe et fait apparaître deux parties sphériques. Les grandeurs caractéristiques sont notées E_2 , ρ_2 , ν_2 et e_2 ;
- la cuve (3) : il s'agit de l'enveloppe externe du réacteur. Elle est modélisée en première analyse par une partie cylindrique et par une partie sphérique. Les grandeurs caractéristiques sont notées E_3 , ρ_3 , ν_3 et e_3 ;
- le fluide primaire (4) : il est contenu entre le panier et la cuve. On note ρ_F sa masse volumique et c la célérité des ondes sonores dans ce milieu.

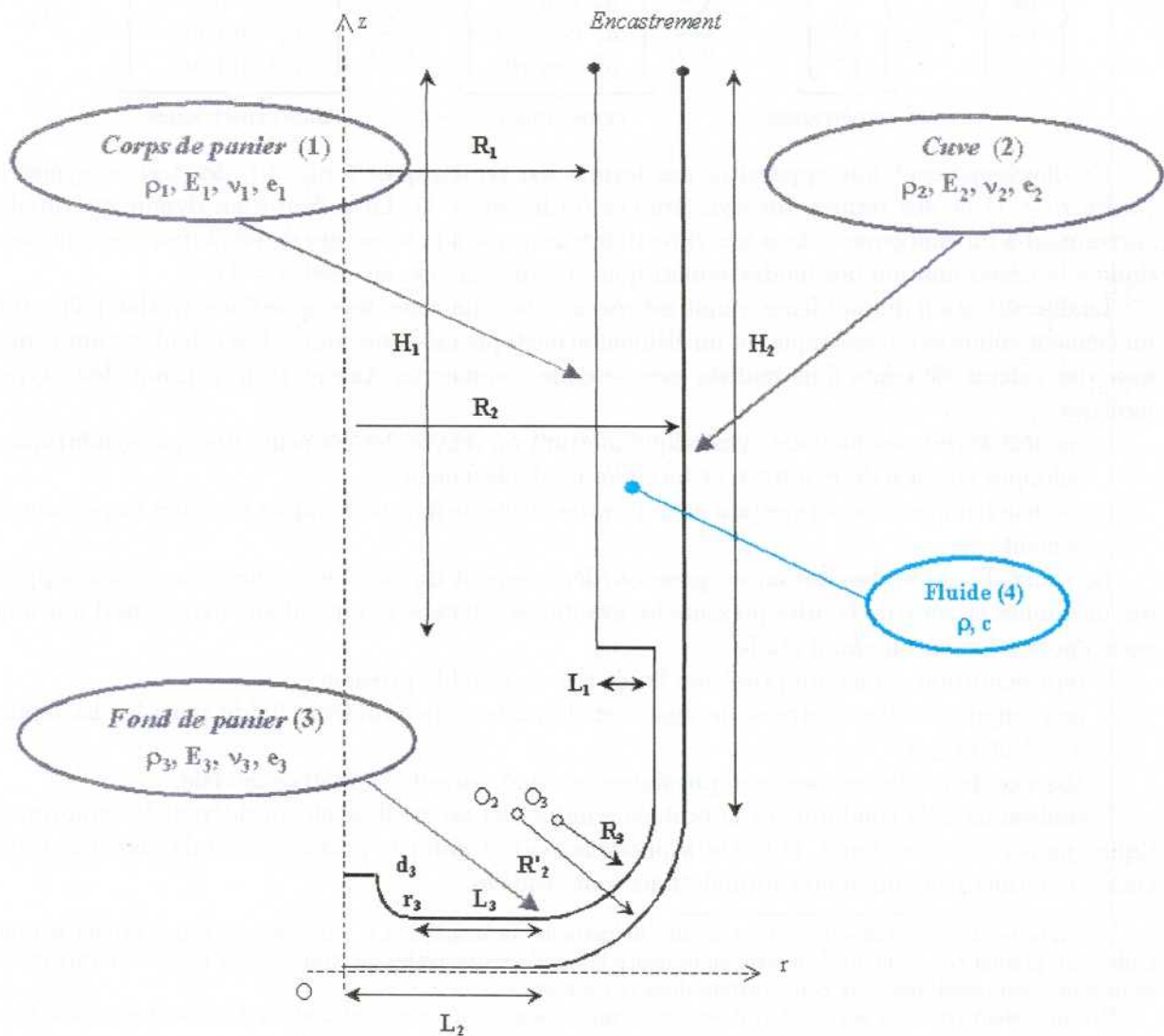


Fig. 1. Géométrie industrielle étudiée. Représentation axi-symétrique de l'ensemble panier et cuve d'un réacteur de propulsion navale

Parmi la grande variété de modélisations géométriques du problème et de représentations des inconnues du problème couplé, on privilégie une approche compatible avec les exigences d'analyse en bureau d'étude : simplicité du modèle géométrique, interprétation aisée des modes propres.

L'analyse est basée sur une discrétisation de type éléments finis pour la structure, couplée avec une discrétisation de type éléments finis pour le fluide. La modélisation adopte une formulation :

- en *déplacement* pour la structure : les inconnues du problème structure sont les déplacements, notés (u_r, u_θ, u_z) en coordonnées cylindriques ;
- en *pression* pour le fluide : l'inconnue du problème fluide est le champ de pression p .

Compte tenu de l'hypothèse de modélisation axi-symétrique de la géométrie et de la nature non axi-symétrique de la sollicitation dynamique appliquée sur la structure, on développe les inconnues du problème couplé en série de FOURIER selon la relation [21], [34] :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_r^0 \\ u_\theta^0 \\ u_z^0 \\ p^0 \end{pmatrix}}_{\text{axi-symétriques}} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} u_r^n \cos(n\theta) \\ u_\theta^n \sin(n\theta) \\ u_z^n \cos(n\theta) \\ p^n \cos(n\theta) \end{pmatrix}}_{\text{symétriques}} + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} u_r^m \sin(m\theta) \\ -u_\theta^m \sin(m\theta) \\ u_z^m \sin(m\theta) \\ p^m \sin(m\theta) \end{pmatrix}}_{\text{anti-symétriques}} \quad (1)$$

Ce développement fait apparaître des termes axi-symétriques (ordre 0), des termes symétriques (ordre $n \geq 1$) et des termes anti-symétriques (ordre $m \geq 1$). La sollicitation dynamique appliquée correspond à un chargement dans une direction transverse à la structure de révolution, on s'intéressera donc à la détermination des modes symétriques d'ordre un (*i.e.* en $\cos\theta, n = 1$).

La discrétisation du problème couplé est réalisée dans un code développé dans Matlab [20], utilisant un élément coque axi-symétrique¹ et un élément acoustique axi-symétrique. Les calculs seront comparés avec des calculs éléments finis réalisés avec le code commercial Ansys² [15], utilisant deux types de modèles :

- modèle *bidimensionnel* axi-symétrique mettant en œuvre des éléments finis axi-symétriques développés en série de FOURIER et formulés en déplacement ;
- modèle *tridimensionnel* mettant en œuvre des éléments finis volumiques formulés en pression/déplacement.

Le choix d'une représentation en pression/déplacement du problème couplé, avec développement des inconnues en série de Fourier présente les avantages suivants, et répond aux exigences d'une analyse pour application en bureau d'étude :

- représentation simple du problème fluide par la variable pression ;
- non singularité des matrices de masse et de raideur du problème fluide pour les harmoniques $n \geq 1$ et $m \geq 1$;
- absence de modes propres non physiques pouvant parasiter l'analyse modale.

L'analyse modale conduite sur le problème industriel est réalisée en considérant la structure élastique (panier et cuve) seule, le fluide acoustique seul et enfin le problème couplé élasto-acoustique. Dans ce dernier cas, différentes formulations sont étudiées.

¹Compte tenu des épaisseurs de la structure industrielle, la modélisation par éléments coque atteint ses limites. L'objet du présent travail étant de mettre en évidence le couplage des modes de structure par le fluide, l'utilisation d'un modèle de coque élastique reste donc justifiée dans ce contexte.

²Un précédent travail a permis de valider, par comparaison calcul/essai, l'utilisation du code Ansys pour l'analyse modale de structures élastiques couplées avec un fluide acoustique [31].

2 Etude de la structure dans le vide

On conduit une analyse modale sur chaque élément de la structure (panier et cuve) dans le vide. On utilise des éléments coque à deux nœuds et quatre degrés de liberté par nœud (voir Fig. 2).

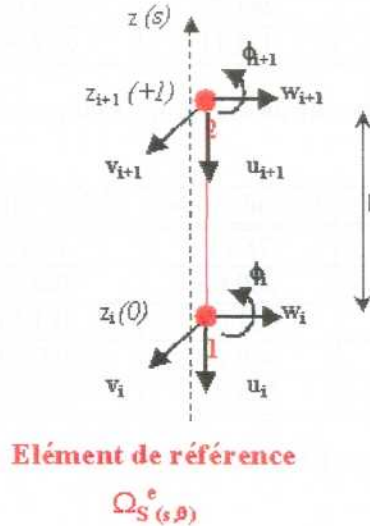


Fig. 2. Élément fini coque

Le champ de déformations est donné par le modèle de Sanders-Koitors, qui permet de décrire le comportement en flexion de la coque élastique [1]. La relation déplacements/déformations est donnée par :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial u_z}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ -\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} - \frac{3}{4} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{4r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{array} \right\} \quad (2)$$

L'analyse modale de la structure consiste à résoudre le problème aux valeurs propres symétrique suivant :

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{U}(\omega) = \mathbf{0} \quad (3)$$

avec \mathbf{K}_S et \mathbf{M}_S les matrices du système structure. Le problème aux valeurs propres est symétrique, on utilise l'algorithme de Cholesky [6], [12] pour extraire les modes propres du système.

Les premières fréquences propres du panier, calculées avec le code Matlab, sont données dans les Tab. 1 et 2 et comparées avec les fréquences propres calculées avec Ansys. Les déformées modales correspondantes dans le plan (r, z) sont données par la Fig. 3; on considère les modes symétriques d'harmonique $n = 1$, la sollicitation dynamique sur la structure étant en $\cos \theta$. Les résultats donnés par le code développé dans Matlab sont identiques aux résultats de calcul Ansys, à la fois en terme de valeurs des fréquences propres que de déformées modales.

Fréquence (Hz)	Calcul Ansys	Calcul Matlab	$\varepsilon(\%)$
f_1	44.69	44.70	0.02
f_2	140.67	140.77	0.07
f_3	245.71	245.72	0.00
f_4	284.25	284.62	0.13
f_5	322.11	322.80	0.21

Tab. 1. Premières fréquences propres du panier dans le vide

Fréquence (Hz)	Calcul Ansys	Calcul Matlab	$\varepsilon(\%)$
f_1	78.71	78.70	-0.01
f_2	260.65	260.92	0.10
f_3	431.58	424.88	-1.55
f_4	480.22	480.64	0.09
f_5	555.87	553.28	0.47

Tab. 2. Premières fréquences propres de la cuve dans le vide

La Fig. 4 donne les courbes de convergence des premières fréquences propres du panier et de la cuve pour un nombre N d'éléments, soit un nombre total de degrés de liberté de $4N$ (en ordonnée, on porte ε l'écart relatif entre les résultats du calcul Matlab et le résultat du calcul de référence obtenus par Ansys avec les éléments shell61). La convergence est obtenue assez rapidement pour les modèles étudiés, ce qui permettra de travailler avec des modèles de taille raisonnable dans le cas de l'analyse modale du système avec couplage fluide/structure.

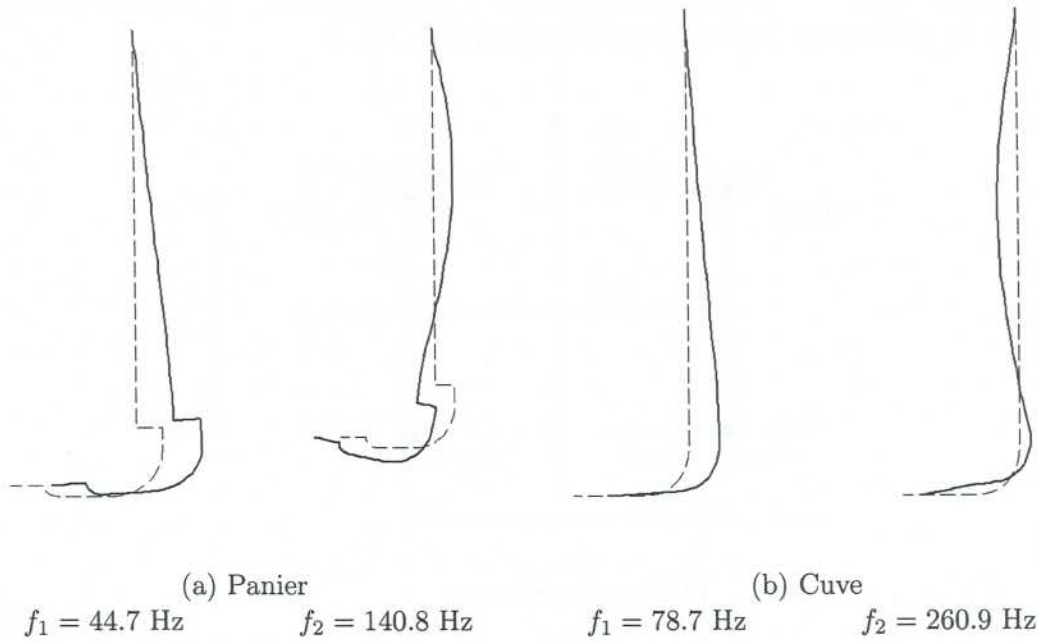


Fig. 3. Premiers modes propres d'ordre $n = 1$ du panier (a) et de la cuve (b) dans le vide obtenus avec le code de calcul développé dans Matlab

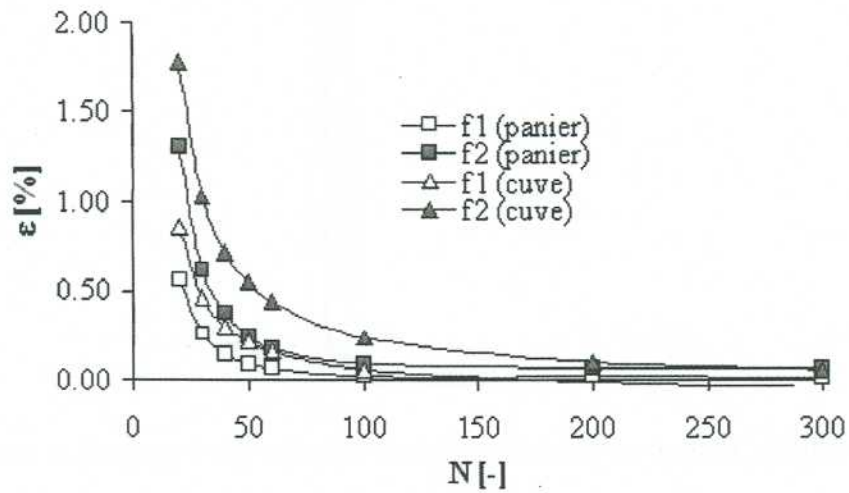


Fig. 4. Courbes de convergence des premières fréquences propres du panier et de la cuve dans le vide

3 Etude de la cavité acoustique seule

On réalise une analyse modale de la cavité fluide délimitée par le panier et la cuve. La discrétisation du domaine fluide utilise des éléments finis linéaires à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (voir Fig. 5). Le maillage de l'ensemble est visualisé par la Fig. 6.

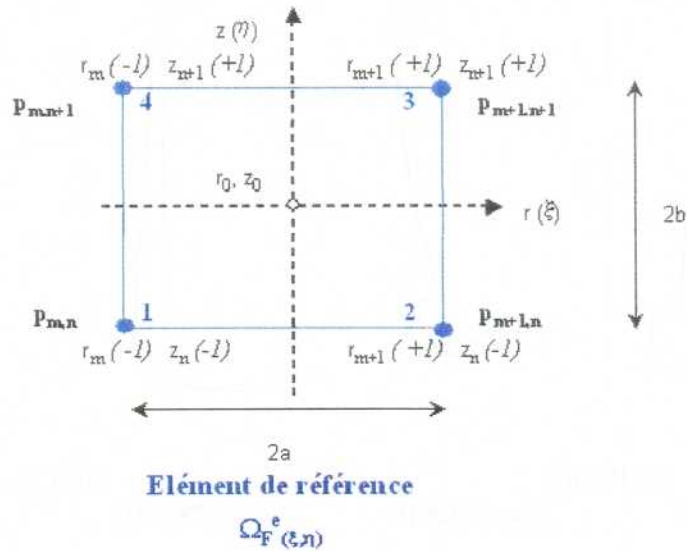


Fig. 5. Élément fini fluide



Fig. 6. Maillage de la cavité acoustique délimitée par le panier et la cuve

L'analyse modale de la cavité acoustique consiste à résoudre le problème aux valeurs propres symétrique suivant :

$$(\mathbf{K}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F) \mathbf{P}(\omega) = \mathbf{0} \quad (4)$$

avec \mathbf{K}_F et \mathbf{M}_F les matrices du système fluide; on utilise les mêmes méthodes d'extraction de valeurs propres que pour le problème structure seule.

Les premières fréquences propres de la cavité (pour l'harmonique $n = 1$), calculées avec le code Matlab, sont données dans le Tab. 3 et comparées avec les fréquences propres calculées avec Ansys, en utilisant les éléments fluides acoustiques formulés en déplacement¹ et développés en série de Fourier (éléments fluid81 du code [15]). Les déformées modales correspondantes dans le plan (r, z) sont données par la Fig. 7. Les résultats donnés par le code développé dans Matlab sont identiques aux résultats de calcul Ansys, à la fois en terme de valeurs des fréquences propres que de déformées modales. Le problème fluide comporte environ $N = 350$ degrés de liberté.

Fréquence (Hz)	Calcul Ansys	Calcul Matlab	$\varepsilon(\%)$
f_1	224.58	224.57	0.00
f_2	307.96	307.04	-0.30
f_3	419.06	406.12	-3.09
f_4	479.80	482.52	0.57
f_5	669.69	669.87	0.93

Tab. 3. Premières fréquences propres de la cavité acoustique délimitée par le panier et la cuve

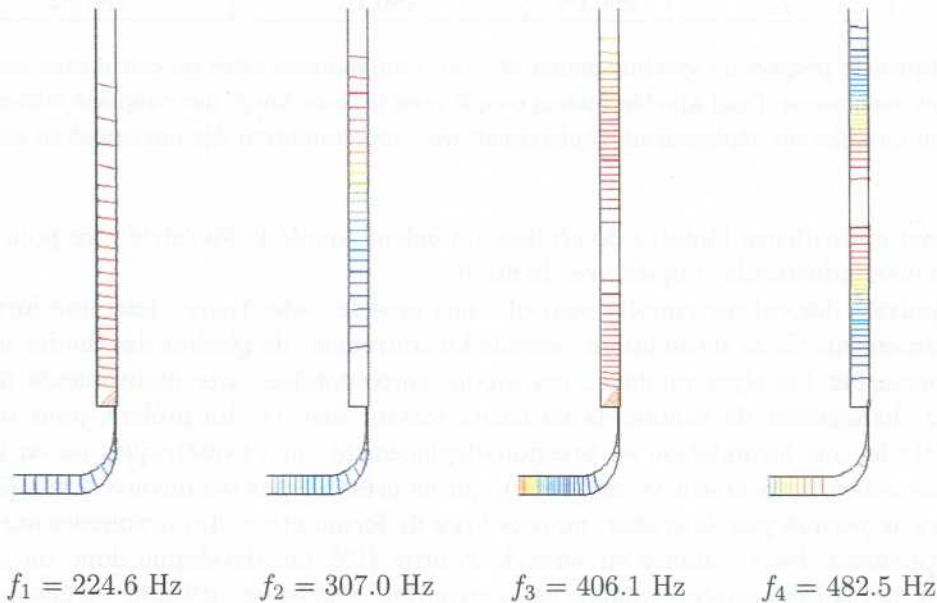


Fig. 7. Premiers modes propres de la cavité acoustique délimitée par le panier et la cuve

¹Dans Ansys, les éléments fluides à formulation en déplacement sont obtenus par modification des éléments solides. La différence entre les éléments fluides et solides est principalement dans la loi de comportement : la raideur en cisaillement est proche de zéro et les termes associés aux contraintes sont ramenés à la valeur du module du fluide. On obtient ainsi un élément qui ne peut reprendre le cisaillement, mais dont les composantes de contrainte normale sont proches de la pression instantanée [15], [33].

4 Etude de la structure couplée avec le fluide

4.1 Approche simplifiée

L'approche simplifiée du problème consiste à utiliser un modèle de masse d'eau reportée [32] pour prendre en compte la présence du fluide : la masse d'eau présente entre le panier et la cuve est reportée pour moitié entre les deux structures, ce qui permet de respecter le bilan masse total de l'ensemble structure et fluide. Cet artifice de calcul ne permet pas de bien décrire les effets du fluide sur la structure : l'utilisation du modèle de masse d'eau reportée conduit à sous-estimer très largement dans ce cas l'influence du fluide sur la structure, comme le montrent les résultats du Tab. 4. Compte tenu du confinement, la masse d'eau ajoutée, qui traduit l'effet physique du fluide sur la structure, est nettement plus importante que la masse d'eau reportée : la baisse de fréquence propre est moins importante avec le modèle de masse d'eau reportée qu'avec le modèle de masse d'eau ajoutée [32]. D'autre part, les effets de couplage des modes de cuve et de panier par le fluide ne sont pas pris en compte dans un modèle de masse d'eau reportée.

Fréquence (Hz)	Sans eau	Masse d'eau reportée	Masse d'eau ajoutée
f_1	44.70	43.38	26.03
f_2	78.71	75.55	65.62
f_3	140.77	136.56	102.94
f_4	245.71	238.27	162.30
f_5	260.65	250.19	180.32

Tab.4. Fréquences propres du système panier et cuve. Comparaison entre un calcul sans eau, avec masse d'eau reportée et avec masse d'eau ajoutée (calcul couplé avec le code Ansys par couplage éléments finis/éléments finis en formulation déplacement/déplacement avec représentation des inconnues en série de Fourier)

Ceci met en évidence l'intérêt de réaliser un calcul couplé fluide/structure pour l'analyse modale de la structure industrielle couplée avec le fluide.

Les résultats des calculs couplés sont obtenus avec le code Ansys, dans une formulation déplacement/déplacement. Cette formulation possède l'inconvénient de générer des modes non physiques, qui peuvent perturber l'analyse modale : ces modes correspondent aux mouvements de cisaillement du fluide sans changement de volume, la structure restant fixe. On lui préfère, pour une application en bureau d'étude, une formulation en pression/déplacement (non symétrique) ou en pression/potentiel des déplacements/déplacement (symétrique), qui ne présente pas ces inconvénients [33]. Cependant, le code Ansys ne permet pas de traiter, pour ce type de formulation, des problèmes axi-symétriques avec un développement des inconnues en série de Fourier [15]. On développe donc un code dans Matlab permettant de réaliser l'analyse modale de la structure étudiée, en utilisant les éléments finis présentés au paragraphe précédent.

4.2 Approche "couplage fort", formulation non symétrique

La technique de couplage éléments finis/éléments finis consiste à discrétiser les termes d'échanges entre le fluide et la structure ; on calcule ainsi une matrice d'interaction fluide/structure en couplant les degrés de liberté en déplacement de la structure et le degré de liberté pression du fluide (Fig. 8).

La matrice de couplage est calculée par assemblage des matrices élémentaires \mathbf{r}_i , pour un couplage défini par la Fig. 8. Chaque matrice élémentaire \mathbf{r}_i est calculée à partir des fonctions de forme des deux

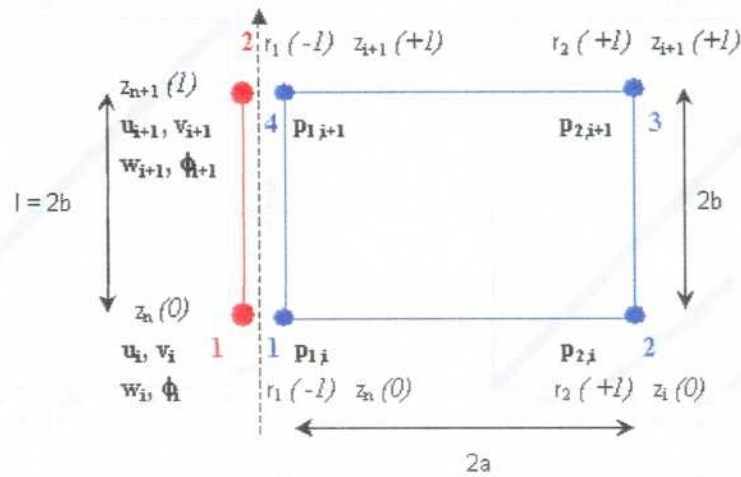


Fig. 8. Couplage éléments finis/éléments finis

éléments, selon la relation :

$$\mathbf{r}_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \{N_F(z)\} \langle \mathbf{n}_i \rangle [N_S(z)] \quad (5)$$

avec $\{N_F(z)\}$ le vecteur des fonctions de forme de l'élément fluide, $[N_S(z)]$ la matrice des fonctions de forme de l'élément structure et $\langle \mathbf{n}_i \rangle$ le vecteur des composantes de la normale sortante du milieu fluide.

Le problème aux valeurs propres à résoudre dans le cas du couplage de la géométrie industrielle prend la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_C & \mathbf{0} & \mathbf{R}_C^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_P & \mathbf{R}_P^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_C(\omega) \\ \mathbf{U}_P(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_P & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R}_C & -\rho_F \mathbf{R}_P & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_C(\omega) \\ \mathbf{U}_P(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

avec \mathbf{M}_C , \mathbf{K}_C les matrices masse et raideur de la cuve, \mathbf{M}_P , \mathbf{K}_P les matrices du panier, \mathbf{M}_F , \mathbf{K}_F les matrices du fluide et \mathbf{R}_C et \mathbf{R}_P les matrices de couplage de la cuve et du panier avec le fluide. Les matrices masse et raideur du problème couplé sont creuses comme le montre la Fig. 9, qui met en évidence les éléments non nuls des matrices.

Le système obtenu après couplage est non symétrique : on utilise alors une adaptation de Lanczos [5], [27], [28] pour traiter le problème de l'extraction des éléments propres du problème non symétrique (6). L'algorithme de Lanczos non symétrique est implanté dans le code de calcul développé dans Matlab, et validé par comparaison avec le cas théorique proposé dans [27] et rappelé en annexe ; les résultats des deux calculs sont donnés dans le Tab. 5.

On conduit une analyse modale pour un problème couplant le fluide avec le panier seul, la cuve seule et l'ensemble panier et cuve.

Le Tab. 6 compare les valeurs des premières valeurs propres du système complet (panier et cuve) couplé avec le fluide dans le cas d'un calcul Matlab et d'un calcul Ansys. Le calcul de référence Ansys est obtenu par couplage éléments finis/éléments finis en formulation déplacement/déplacement et représentation des inconnues en série de Fourier. Le calcul Matlab utilise le couplage éléments finis/éléments finis en formulation pression/déplacement et une représentation des inconnues en série de Fourier, selon les principes exposés précédemment.

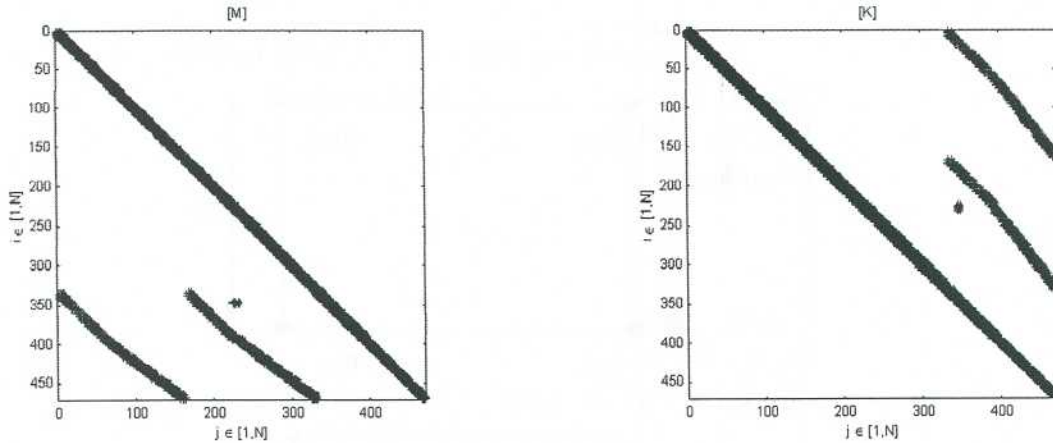


Fig. 9. Structure des matrices masse et raideur pour le problème couplé panier, cuve et fluide. Formulation (\mathbf{u}, p)

Valeurs propres théoriques	Valeurs propres calculées
$0.10000 + 0.00000i$	$0.1000 + 0.0000i$
$4.00000 \pm 1.00000i$	$4.0000 \pm 1.0000i$
$2.40000 \pm 7.32000i$	$2.39974 \pm 7.31897i$
$7.00000 + 0.00000i$	$6.99999 + 0.00000i$
$7.00000 + 0.00000i$	$7.00088 + 0.00000i$
$8.00000 \pm 127.00000i$	$7.99997 \pm 127.00001i$
$11.00000 + 0.00000i$	$11.00005 + 0.00000i$
$130.000000 + 0.00000i$	$129.99998 + 0.00000i$
$-2000.00000 + 0.00000i$	$-1999.99995 + 0.00000i$

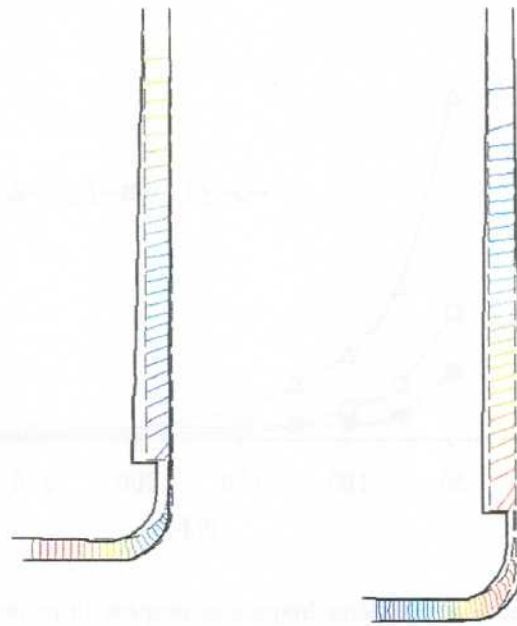
Tab. 5. Validation de l'implantation de l'algorithme non symétrique de Lanczos dans le code de calcul développé dans Matlab. Comparaison sur l'exemple théorique proposé dans [27]

La Fig. 10 donne une représentation des déformées modales des premiers modes d'ordre $n = 1$ du système couplé panier, cuve et fluide primaire.

Les résultats de calcul obtenus avec les deux méthodes sont proches, les écarts étant toutefois plus importants que pour le modèle de panier ou de cuve seuls (écarts de l'ordre de 4% en moyenne). L'écart devient assez significatif pour les fréquences au-delà du cinquième mode; on arrive dans les limites de l'outil Matlab pour le traitement de ce type de problèmes : la taille des problèmes devient trop importante pour pouvoir obtenir une bonne précision de calcul avec les fonctions de base de Matlab¹. Néanmoins, les résultats donnés par le code Matlab restent très satisfaisants pour un calcul des premiers modes.

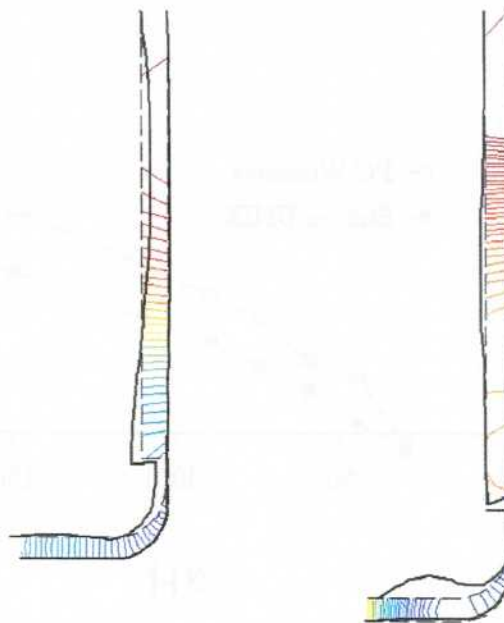
La Fig. 11 donne les courbes de convergence des trois premières fréquences propres du système couplé en fonction de la taille N du problème matriciel et la Fig. 12 compare les temps de calcul pour l'extraction des valeurs propres du système couplé en utilisant un PC standard et une station Unix avec les mêmes versions de Matlab. L'utilisation de Matlab dans l'environnement Unix est nécessaire pour pouvoir traiter un problème de grande dimension (à partir de $N \simeq 500$).

¹Une solution consisterait à développer certaines fonctions du programme sous forme de sous routines C++ ou Fortran, compilées et intégrées au code Matlab [20].



$f_1 = 26.03 \text{ Hz}$

$f_2 = 65.52 \text{ Hz}$



$f_3 = 102.94 \text{ Hz}$

$f_4 = 162.30 \text{ Hz}$

Fig. 10. Premiers modes propres de l'ensemble panier et cuve couplé avec le fluide

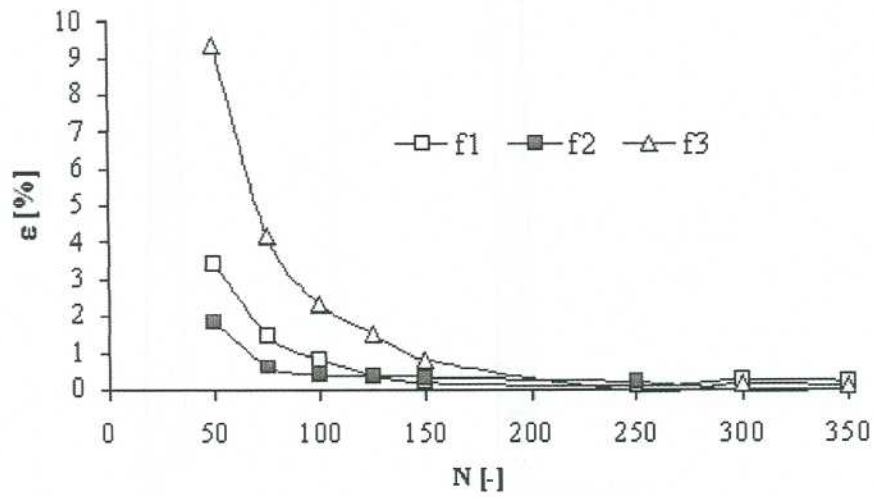


Fig. 11. Courbes de convergence des premières fréquences propres du panier et de la cuve couplés avec le fluide

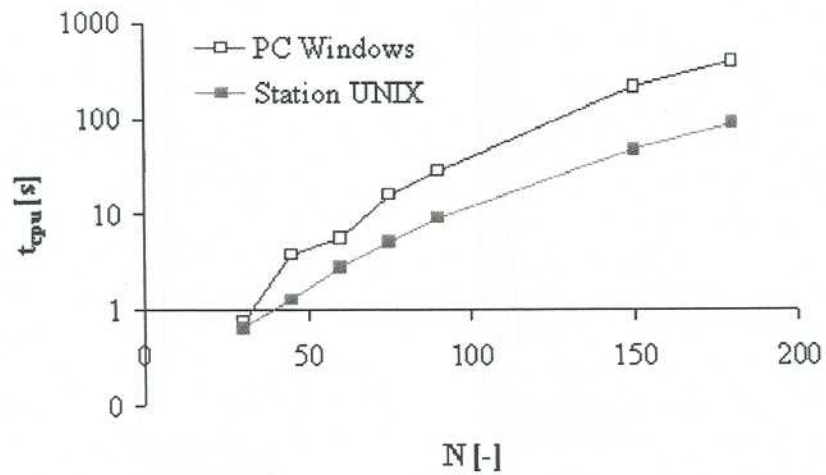


Fig. 12. Temps de calcul CPU pour l'extraction des valeurs propres du système couplé avec deux plate formes de calcul

Fréquence (Hz)	Calcul Ansys	Calcul Matlab	$\varepsilon(\%)$
f_1	26.66	26.03	-2.36
f_2	64.02	65.62	2.50
f_3	108.33	102.94	-4.98
f_4	158.24	162.30	2.57
f_5	201.23	180.32	10.39

Tab. 6. Premières fréquences propres de l'ensemble panier et cuve couplés avec le fluide

4.3 Approche "couplage fort", formulation symétrique

La formulation du problème couplé utilisant la description (\mathbf{u}, p) (déplacement/pression) conduit à un problème aux valeurs propres non symétrique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ -\rho_F \mathbf{R} & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

On peut utiliser une formulation du problème couplé à l'aide d'une description (\mathbf{u}, p, φ) (déplacement, pression, potentiel des déplacements [21]) qui conduit à un problème symétrique¹. Les équations continues du problème couplé sont alors les suivantes. Ω_S désignant le domaine structure, de frontières disjointes $\partial\Omega_{Sn}$ (tension imposée), $\partial\Omega_{So}$ (déplacement imposé) et Γ_{FS} (interface avec le fluide), les équations du problème structure sont alors :

$$\rho_s \omega^2 u_i + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } \Omega_S \quad (8.a)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j^S = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{Sn} \quad (8.b)$$

$$u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{So} \quad (8.c)$$

Ω_F désignant le domaine structure, de frontières disjointes $\partial\Omega_{Fn}$ (déplacement imposé), $\partial\Omega_{Fo}$ (pression imposée) et Γ_{SF} (interface avec la structure), les équations du problème fluide sont alors :

$$\rho_F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{p}{c^2} = 0 \text{ dans } \Omega_F \quad (9.a)$$

$$\frac{p}{\rho_F c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varphi \text{ dans } \Omega_F \quad (9.b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j = u_j n_j \text{ sur } \partial\Omega_{Fn} \quad (9.c)$$

$$p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{Fo} \quad (9.d)$$

Les équations de couplage entre les deux problèmes expriment la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes et la continuité de la composante normale du déplacement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} n_j = u_j n_j \text{ sur } \Gamma_{SF} \quad (10.a)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = \rho_F \omega^2 \varphi n_i \text{ sur } \Gamma_{FS} \quad (10.b)$$

¹D'autres formulations symétriques sont possibles, voir par exemple [9], [30].

La formulation variationnelle du problème est alors la suivante : trouver $\mathbf{u}(\omega), p(\omega), \varphi(\omega)$ dans $V_S \times V_F \times H_F$ et ω réel tels que pour tout $\delta\mathbf{u}, \delta p, \delta\varphi$ dans $V_S \times V_F \times H_F$, on ait [2], [3], [4] :

$$k_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + k'_F(p, \delta p) =$$

$$\omega^2 [m_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - m'_F(\varphi, \delta\varphi) + \tilde{r}(\mathbf{u}, \delta\varphi) + \tilde{r}^*(\varphi, \delta\mathbf{u}) + \tilde{m}_F(p, \delta\varphi) + \tilde{m}_F^*(\varphi, \delta p)] \quad (11)$$

Les espaces fonctionnels sont respectivement [29] : $V_S = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega_S)^3, \mathbf{u}|_{\partial\Omega_{S_0}} = 0\}$, $V_F = \{\varphi \in H^1(\Omega_F)\}$ et $H_F = \{\varphi \in L^2(\Omega_F), p|_{\partial\Omega_{F_0}} = 0\}$; les formes bilinéaires définies sur ces espaces sont données par : $k_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{ij}(\delta\mathbf{u}) d\Omega$, $m_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_S} \rho_S \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega$, $k'_F(p, \delta p) = \int_{\Omega_F} \frac{p \delta p}{\rho_F c^2} d\Omega$, $m'_F(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Omega_F} \rho_F \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi d\Omega$, $\tilde{r}(\mathbf{u}, \delta\varphi) = \int_{\Gamma} \rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta\varphi d\Gamma$, $\tilde{m}_F(p, \delta\varphi) = \int_{\Omega_F} \frac{p \delta\varphi}{c^2} d\Omega$; \tilde{m}_F^* et \tilde{r}^* sont les opérateurs transposés de \tilde{m}_F et \tilde{r} .

Après discrétisation de la formulation variationnelle, on établit le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_F \\ \tilde{\mathbf{R}}^T & \tilde{\mathbf{M}}_F^T & -\mathbf{M}'_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \\ \Phi(\omega) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Après élimination de la variable Φ , on obtient le problème aux valeurs propres symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{M}'_F{}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T & \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{M}'_F{}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_F^T \\ \tilde{\mathbf{M}}_F\mathbf{M}'_F{}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^T & \tilde{\mathbf{M}}_F\mathbf{M}'_F{}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_F^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{P}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Si on utilise les mêmes fonctions de forme pour p et φ et qu'on suppose les caractéristiques fluide c et ρ_F constantes, on a :

$$\mathbf{K}'_F = \frac{\mathbf{M}_F}{\rho_F} \quad \tilde{\mathbf{R}} = \rho_F \mathbf{R} \quad \mathbf{M}'_F = \rho_F \mathbf{K}_F \quad \tilde{\mathbf{M}}_F = \mathbf{M}_F \quad (14)$$

Le problème est donc symétrique mais la matrice de masse n'est plus creuse, comme le montre la Fig. 13 qui met en évidence les termes non nuls des matrices.

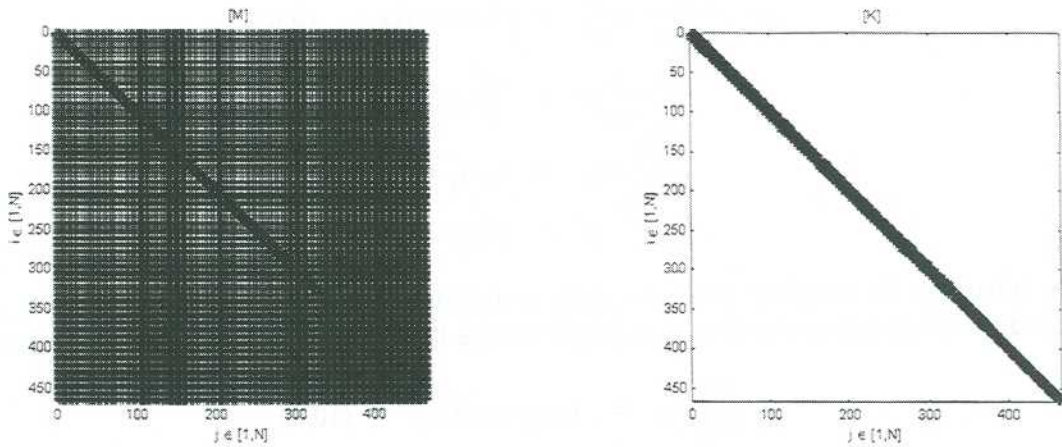


Fig. 13. Structure des matrices masse et raideur pour le problème couplé panier, cuve et fluide en formulation (\mathbf{u}, p, φ)

Le Tab. 7 compare les résultats de calculs obtenus avec le code Matlab en utilisant les formulations (\mathbf{u}, p) et (\mathbf{u}, p, φ) . Les écarts entre les deux types de calcul sont de l'ordre de 1%. Les modes propres obtenus à partir de la formulation (\mathbf{u}, p, φ) possèdent les propriétés d'orthogonalité vis-à-vis des matrices masse et raideur du système couplé, ce qui permet l'application de méthodes modales pour les calculs dynamiques [11].

Fréquence (Hz)	(\mathbf{u}, p)	(\mathbf{u}, p, φ)	$\varepsilon(\%)$
f_1	26.03	25.99	0.15
f_2	65.62	64.72	1.37
f_3	102.94	103.98	-1.01
f_4	162.30	162.17	0.08
f_5	180.32	183.70	-1.87

Tab. 7. Premières fréquences propres du problème couplé. Comparaison des formulations (\mathbf{u}, p) et (\mathbf{u}, p, φ)

La formulation (\mathbf{u}, p, φ) fait intervenir la matrice \mathbf{K}_F^{-1} : le calcul des valeurs propres du système couplé est donc influencé par la précision de l'inversion matricielle. Dans Matlab, on utilise la fonction `inv`, qui réalise une inversion matricielle à partir de l'algorithme de Cholesky ou l'algorithme de Gauss selon la nature définie positive de la matrice à inverser [12]. La Fig. 14 donne l'évolution de la première fréquence propre du système couplé en fonction de la taille du problème et l'évolution du conditionnement de la matrice \mathbf{K}_F pour le problème de l'inversion matricielle et met en évidence la corrélation entre les deux évolutions.

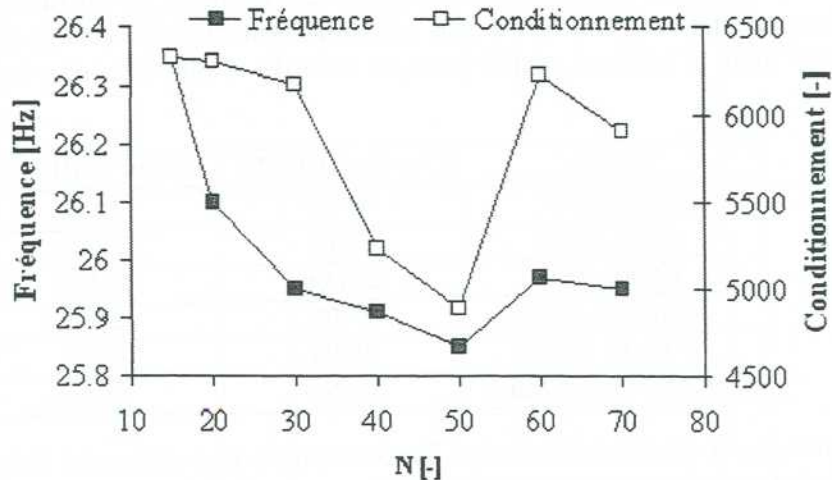


Fig. 14. Première fréquence propre du système couplé en formulation (\mathbf{u}, p, φ) et conditionnement en norme $\|\cdot\|_1$ de la matrice \mathbf{K}_F en fonction du nombre de degrés de liberté N du problème

Si on considère le fluide incompressible, on a $c \rightarrow +\infty$ et $m_F(.,.) \equiv 0$. On montre alors que le problème couplé se réduit du point de vue structure au problème symétrique suivant, faisant intervenir l'opérateur de masse ajoutée [21] :

$$\omega^2(\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H)\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{K}_S\mathbf{U}(\omega) \quad (15)$$

avec :

$$\mathbf{M}_H = \rho_F \mathbf{R}^T \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{R} \quad (16)$$

L'opérateur \mathbf{M}_H étant symétrique, le problème aux valeurs propres l'est également.

Le Tab. 8 donne les fréquences propres du système couplé calculé dans le cas d'un fluide incompressible et d'un fluide compressible : les fréquences obtenues et les déformées modales du système structure sont identiques dans les deux cas, ce qui montre que les effets de compressibilité n'interviennent pas sur les premiers modes du système couplé¹. Les fréquences propres du système couplé avec fluide incompressible sont suffisamment éloignées des premières fréquences propres de la cavité acoustique, ce qui permet de négliger les effets acoustiques pour les premiers modes [11].

Fréquence (Hz)	Compressible	Incompressible
f_1	26.03	25.96
f_2	65.62	64.82
f_3	102.94	104.23
f_4	162.30	179.25

Tab. 8. Premières fréquences propres du problème couplé. Comparaison entre un calcul couplé compressible et incompressible

On compare les résultats de calcul obtenus avec un modèle tridimensionnel Ansys utilisant les éléments structure shell63 (éléments coques linéaires bidimensionnels [15]) et les éléments fluide fluid30 (éléments fluides acoustiques tridimensionnels [33]) et un modèle bidimensionnel axi-symétrique utilisant le code de calcul Matlab. Le Tab. 9 donne une comparaison des valeurs du premier mode calculé pour le panier, la cuve et le fluide seuls ou couplés. Les résultats de calcul sont équivalents dans les deux approches, mais les temps de calcul sont très importants dans le cas d'un modèle tridimensionnel, particulièrement pour le système couplé (compte tenu de la non symétrie du problème aux valeurs propres).

Modèle	Calcul Ansys 3D	Calcul Matlab 2D
Panier seul	41.25	44.70
Cuve seule	78.64	78.70
Fluide seul	224.68	224.68
Panier et fluide	27.36	28.21
Cuve et fluide	46.98	47.00
Panier, cuve et fluide	25.64	26.03

Tab. 9. Comparaison des calculs de la première fréquence propre pour différentes situations de calcul entre un modèle tridimensionnel Ansys et un modèle bidimensionnel axi-symétrique Matlab en formulation pression/déplacement.

5 Conclusion

La présente étude a porté sur l'analyse modale d'une structure industrielle, en prenant en compte le couplage fluide/structure. Une simplification de la géométrie du problème réel nous a permis de nous placer dans le cas d'un problème axi-symétrique, présentant un chargement non axi-symétrique.

¹Des constatations identiques ont été formulées pour des structures couplées avec un fluide non borné [25].

La discrétisation du problème couplé a mis en œuvre des éléments finis axi-symétriques développés en série de Fourier :

- élément fini structure : coque élastique formulée en déplacement ;
- élément fini fluide : fluide acoustique formulé en pression.

Un code de calcul dédié a été programmé sous Matlab et réalise le maillage du problème, l'assemblage des matrices élémentaires, la détermination des éléments propres du système et la visualisation des modes propres.

Les comparaisons entre les résultats de calcul Matlab et Ansys (utilisant un couplage déplacement/déplacement) ont permis de valider les développements réalisés dans Matlab et la capacité du code élémentaire à traiter des géométries simples mais représentatives de cas industriels.

A terme, l'élément fluide ainsi développé et son couplage avec des éléments structure sera implanté dans le code Ansys pour permettre une analyse de géométries complexes, en utilisant la formulation pression/déplacement dans le cas de géométries axi-symétriques avec termes de chargement non axi-symétriques.

Références

- [1] D.G. Ashwell, R.H. Gallagher. Finite Elements for Thin Shells and Curved Members. Wiley & Sons, 1976.
- [2] J. Boujot. Interaction fluide/structure en régime transitoire. La Recherche Aéronautique, 3, 203-209, 1984.
- [3] J. Boujot. Etude d'une famille de problèmes d'évolution du second ordre correspondant à divers modèles de couplage fluide/structure. Compte Rendu à l'Académie des Sciences, I, 301, 391-394, 1985.
- [4] J. Boujot. Mathematical Formulation of Fluid-Structure Interaction Problems. Mathematical Modeling and Numerical Analysis, 21, 239-260, 1987.
- [5] F. Chatelin. Valeurs propres de matrices. Masson, 1988.
- [6] P.G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, 1988.
- [7] G. Delhommeau. Contribution à l'étude théorique et à la résolution numérique de problème de résistance de vagues. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1978.
- [8] G. Delhommeau. Les problèmes de diffraction/radiation et de résistance de vague : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités. Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Supérieure de mécanique de Nantes, 1987.
- [9] G.C. Everstine. Letter to the Editor : A Symmetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction. Journal of Sound and Vibration, 79, (1), 157-190, 1981.
- [10] R.J. Fritz. The Effect of Liquids on the Dynamic Motion of Immersed Solids. Journal of Engineering for Industry, 167-173, 1972.
- [11] R.J. Gibert. Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986.
- [12] G.H. Golub, C.F. Van Loan. Matrix Computation. Johns Hopkins University Press, 1984.
- [13] H. Oudin. Etude du comportement hydroélastique de structures marines par une formulation mixte équations intégrale/éléments finis. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1986.
- [14] H. Kardestuncer, D.H. Norrie et al. Finite Element Handbook. Mac Graw Hill, 1987.

- [15] P. Khonke. ANSYS Theory Reference. Swanson Analysis System, 1986.
- [16] J. Makerle. Finite and Boundary Element Techniques in Acoustics, a Bibliography (1990-1992). Finite Element Analysis Design, 15, 263-272, 1994.
- [17] J. Makerle. Finite Element in the Analysis of Pressure Vessel and Piping, a Bibliography (1976-1996). International Journal of Pressure Vessel and Piping, 69, 279-339, 1996.
- [18] J. Makerle. Fluid-Structure Interaction Problems, Finite Element Approach and Boundary Elements Approaches. A Bibliography. Finite Elements in Analysis and Design, 31, 231-240, 1999.
- [19] J. Makerle. Earthquake Analysis of Structures : FEM and BEM Approaches, a Bibliography (1995-1998). Finite Element Analysis Design, 32, 113-124, 1999.
- [20] M. Mokhtari, A. Mesbah. Apprendre et maîtriser Matlab. Springer Verlag, 1997.
- [21] H. J.P. Morand, R. Ohayon. Fluid-Structure Interaction. Wiley & Sons, 1995.
- [22] B. Peseux. Contribution à l'étude de structures partiellement ou totalement immergées en matériau homogène ou en composite. Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1989.
- [23] B. Peseux, G. Delhommeau. Fluid-Structure Interaction : Influence of Compressibility on the Dynamic Response of Immersed Structures. Aéronautique Conférence DGLR/AIAA, Strasbourg, 1993.
- [24] B. Peseux, F. Bérot. Vibro-Acoustic Behavior of Submersed Cylindrical Shells : Analytical Formulation and Numerical Model. Journal of Fluids and Structures, 12, 959-1003, 1998.
- [25] B. Peseux, A. Piard. Dynamic Response of Submersed Structures in Bounded Domain with Gravity Waves. Pressure Vessel and Piping. San Diego, 26-30 July 1998, 336, 187-196.
- [26] J.P. Quevat. Couplage de la méthode des équations intégrales et de la méthode des éléments finis pour la résolution d'un problème d'hydroélasticité. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1979.
- [27] C. Rajakumar, C.G. Rogers. The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 32, 1009-1026, 1991.
- [28] C. Rajakumar et al. Lanczos Algorithm for Acoustic Boundary Element Eigenvalue Problems. Journal of the American Acoustical Society, 91 (2), 939-948, 1992.
- [29] P.A. Raviart, J.M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, 1983.
- [30] G. Sandberg, P.A. Göransson. A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis. Journal of Sound and Vibration, 123 (3), 507-515, 1988.
- [31] J.F. Sigrist, C. Lainé, B. Peseux. Calcul couplé fluide/structure avec Ansys : étude numérique et expérimentale d'une plaque élastique en contact avec un fluide lourd compressible. Journal de Physique, 12, 137-144, 2002.
- [32] J.F. Sigrist, C. Lainé, D. Lemoine, B. Peseux. Choice and Limits of a Linear Fluid Model for the Numerical Study in Dynamic Fluid-Structure Interaction Problem. Pressure Vessel and Piping. Cleveland, 20-24 July 2003, 454, 87-93.
- [33] D.B. Woyak. Acoustic and Fluid Structure Interaction. Swanson Analysis System, 1995.
- [34] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. Basic Formulation and Linear Problems. 4th edition. Mac Graw Hill, 1989.

Annexe : cas élémentaire de validation du programme de calcul des modes propres d'un problème généralisé non symétrique

Le programme d'extraction des valeurs propres pour un problème généralisé non symétrique utilisé dans le code développé dans Matlab est une adaptation de l'algorithme de Lanczos [5]. Le principe de l'algorithme est détaillé dans [27]; cet algorithme est implanté dans le code de calcul Matlab pour traiter le cas industriel présenté, la validation de la fonction Matlab ainsi obtenue est faite à partir du problème présenté dans [27], correspondant aux matrices 12×12 suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} -410 & 16 & 90 & 33 & 2 & 88 & 125 & -215 & -16 & 43 & 64 & 7 \\ 340 & 38 & 99 & 81 & 2 & 54 & 195 & 220 & -41 & -1 & -92 & -26 \\ -40 & -84 & -114 & 60 & -45 & 82 & -45 & 145 & 2 & 25 & 52 & 3 \\ -110 & -30 & 75 & -120 & -40 & 26 & -220 & 150 & 44 & -32 & 24 & -15 \\ 190 & -76 & 63 & 21 & 16 & -34 & -65 & 25 & 6 & -8 & -12 & -38 \\ 30 & 4 & 27 & -33 & 31 & 74 & 160 & -170 & -46 & -15 & 64 & 49 \\ 110 & 96 & -129 & -132 & 8 & 66 & -125 & 0 & 4 & 43 & 78 & -4 \\ 340 & 26 & -39 & -144 & -43 & -92 & -30 & -145 & -36 & 19 & -68 & 6 \\ -490 & -68 & -141 & -12 & -3 & 48 & 0 & 180 & 20 & 48 & 74 & -48 \\ -30 & 54 & -12 & 9 & -39 & 22 & 160 & 40 & -11 & 12 & 82 & -45 \\ -170 & 10 & 102 & -147 & 13 & -20 & -195 & 75 & -27 & -19 & 86 & 12 \\ 290 & -4 & -54 & 147 & -29 & 50 & 140 & -195 & -17 & 40 & 44 & 18 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -41 & 176 & 393 & 42 & 14 & 616 & -700 & -1270 & 5333 & 2376 & 8320 & -14000 \\ 34 & 418 & 477 & 225 & 14 & 378 & 1685 & -315 & -455 & 5199 & -11960 & 52000 \\ -4 & -924 & -396 & 354 & -315 & 574 & 590 & 660 & 3191 & -54 & 6760 & -6000 \\ -11 & -330 & 180 & -555 & -280 & 182 & 90 & 1550 & -3712 & -5844 & 3120 & 30000 \\ 19 & -836 & 273 & 21 & 112 & -238 & -70 & 400 & -968 & -826 & -1560 & 76000 \\ 3 & 44 & 75 & -159 & 217 & 518 & -370 & -1310 & -2273 & 5722 & 8320 & -98000 \\ 11 & 1056 & -648 & -399 & 56 & 462 & -375 & 625 & 5493 & -164 & 10140 & 8000 \\ 34 & 286 & -300 & -537 & -301 & -644 & 815 & -285 & 2125 & 4724 & -8840 & -12000 \\ -49 & -748 & -576 & 93 & -21 & 336 & 900 & 540 & 6256 & -2156 & 9620 & 96000 \\ -3 & 594 & -39 & 48 & -273 & 154 & -280 & 920 & 1436 & 1493 & 10660 & 90000 \\ -17 & 110 & 261 & -690 & 91 & -140 & -210 & 1200 & -2629 & 3277 & 11180 & -24000 \\ 29 & -44 & -69 & 642 & -203 & 350 & -555 & -1285 & 4944 & 2479 & 5720 & -36000 \end{bmatrix}$$

prédiction du mouvement structure et permettant de proposer une stratégie de couplage plus implicite que celle que nous utilisons [56]. L'étude réalisée dans ce contexte est limitée à un système structure rigide, mais son extension à une structure déformable peut *a priori* s'envisager sans restriction particulière ; un travail important reste néanmoins à produire pour traiter le cas d'une structure élastique non linéaire comme nous le proposons dans notre étude. Le rapprochement de notre travail avec celui des auteurs cités permet d'envisager la mise en oeuvre d'une méthode précise et stable permettant la simulation numérique de problèmes couplés non linéaires avec des outils numériques de bureau d'étude et de proposer ainsi une application à des sujets industriels complexes.

Nous avons enfin proposé dans cette thèse une démarche de validation générale d'un code de calcul CFD pour une application à la simulation numérique de problèmes couplés. Les cas élémentaires proposés ont permis de valider séparément la description numérique des effets de ballottement et des effets de dissipation visqueuse pour le problème fluide générique étudié. Une validation plus approfondie peut être envisagée en étudiant la description numérique des effets dissipatifs dans un problème de ballottement pour permettre de mieux caractériser les phénomènes d'amortissement fluide dans le problème posé.

Aspects expérimentaux L'approche de la problématique des interactions fluide/structure proposée dans cette thèse est purement numérique et analytique. Les différentes méthodes numériques développées ont été validées par une comparaison avec des modèles analytiques. Une approche plus physique du problème est souhaitable, afin de confronter les résultats de calcul avec la réalité opérationnelle, et d'évaluer la représentativité des méthodes de calcul et des outils numériques. Un prolongement du travail engagé dans cette thèse consiste en la mise en oeuvre d'un dispositif expérimental représentant le problème couplé fluide/structure générique défini par la FIG. 1.1. Le banc d'essais proposé est représenté par la figure ci-dessous. Le spécimen étudié est un réservoir fluide rigide dans lequel est inséré un cylindre métallique encastré/libre. L'ensemble est fixé rigidement sur une table de choc délivrant un choc en accélération de type demi-sinus, de durée courte (~ 10 ms) et de grande amplitude (~ 40 g). L'instrumentation est constituée d'accéléromètres sur la structure déformable, de capteurs de pression dans le fluide et d'une caméra ultra-rapide pour la visualisation de l'évolution de la surface libre. Le développement expérimental de ce banc est en cours et servira de base à une étude expérimentale faisant suite à cette thèse.



Principe d'essais de choc pour un problème couplé fluide/structure élémentaire avec surface libre fluide

Solutions analytiques

A.1 Poutre élastique couplée avec un fluide confiné

Nous considérons le problème représenté par la FIG. A.1. Soient deux cylindres co-axiaux de rayons respectifs R_1 et R_2 et de hauteur commune L , soumis respectivement à une accélération $\gamma_1(z, t)$ et $\gamma_2(z, t)$ dans une direction transversale. L'intérieur des cylindres contient un fluide parfait incompressible, présentant une surface libre en $z = H \leq L$.

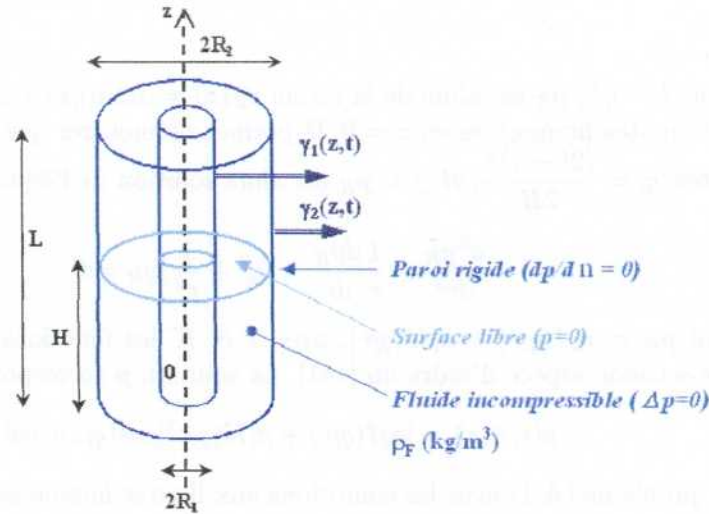


FIG. A.1 – Problème fluide tridimensionnel axi-symétrique avec surface libre

L'état du fluide est caractérisé par la pression p satisfaisant l'équation de LAPLACE $\Delta p = 0$, soit en coordonnées cylindriques dans le domaine $\Omega =]R_1, R_2[\times]0, 2\pi[\times]0, H[$ occupé par le fluide :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Les conditions aux limites suivantes sont de type DIRICHLET-NEUMANN sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine fluide et expriment la présence de la paroi rigide, de la surface libre et des parois mobiles. Ces conditions s'écrivent respectivement :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad p|_{z=H} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R_i} = -\rho_F \gamma_i \cos \theta \quad i = 1, 2$$

Le problème admet une solution dans $H^2(\Omega)$ [177]. On recherche cette solution sous la forme $p(r, \theta, z) = p_R(r)p_Z(z)\cos\theta$. En reportant cette expression dans l'équation du fluide incompressible

(A.1), nous obtenons :

$$p_Z \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} p_R p_Z + p_R \frac{d^2 p_Z}{dz^2} = 0$$

Compte tenu de la dépendance en r de p_R et de la dépendance en z de p_Z , nous pouvons alors écrire :

$$-\frac{1}{p_Z} \frac{d^2 p_Z}{dz^2} = k$$

et :

$$\frac{1}{p_R} \left(\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} - \frac{p_R}{r^2} \right) = k$$

où k est une constante. Selon le signe de k , nous déterminons différentes solutions élémentaires :

- si $k < 0$, posons $k = -q^2$; p_Z est alors de la forme $p_Z(z) = \alpha e^{qz} + \beta e^{-qz}$. Avec les conditions aux limites homogènes en $z = 0, H$ nous trouvons $\alpha = \beta = 0$, et la solution triviale $p(r, \theta, z) = 0$ pour le problème posé;
- si $k = 0$, p_Z est alors de la forme $p_Z(z) = \alpha z + \beta$. Avec les conditions aux limites homogènes en $z = 0, H$ nous déduisons $\alpha = \beta = 0$, et à nouveau la solution triviale $p(r, \theta, z) = 0$ pour le problème posé;
- si $k > 0$, posons $k = q^2$; p_Z est alors de la forme $p_Z(z) = \alpha \cos(qz) + \beta \sin(qz)$. L'expression des conditions aux limites homogènes en $z = 0, H$ permet de montrer que $\beta = 0$ et que q prend des valeurs discrètes, $q_l = \frac{(2l-1)\pi}{2H}$, $\forall l \geq 1$. p_R est alors solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 p_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_R}{dr} - \left(q_l^2 + \frac{1}{r^2} \right) p_R = 0$$

p_R s'écrit ainsi $p_R = \alpha_l I(q_l r) + \beta_l K(q_l r)$, avec I et K les fonctions de BESSEL modifiées de première et de seconde espèce d'ordre un [181]. La solution p correspondante est alors :

$$p(r, \theta, z) = [\alpha_l I(q_l r) + \beta_l K(q_l r)] \cos(q_l z) \cos \theta$$

Les solutions au problème (A.1) avec les conditions aux limites homogènes sont donc de la forme :

$$p(r, \theta, z) = \left(\sum_{l=1}^{l=+\infty} [\alpha_l A_l(r) + \beta_l B_l(r)] \cos(q_l z) \right) \cos \theta$$

en ayant posé $A_l(r) = I(q_l r)$ et $B_l(r) = K(q_l r)$.

L'expression des conditions aux limites en $r = R_i$ permet de déterminer de façon unique la solution au problème posé. Les équations de couplage sur les parois s'écrivent :

$$\sum_{l=1}^{l=+\infty} q_l (\alpha_l A_{i,l} + \beta_l B_{i,l}) \cos(q_l z) = -\rho_F \gamma_i \quad \forall i$$

en ayant posé $A_{i,l} = A'_l(R_i)$ et $B_{i,l} = B'_l(R_i)$. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, nous formulons $\forall l \geq 1$ le système suivant :

$$\alpha_l A_{i,l} + \beta_l B_{i,l} = -\frac{\rho_F}{q_l h_l} \int_0^H \gamma_i(z) \cos(q_l z) dz \quad \forall i$$

en ayant posé $h_l = H/2, \forall l \geq 1$.

La résolution du système précédent permet de trouver les constantes α_l et β_l :

$$\alpha_l = a_{1,l} \int_0^H \gamma_1(z) \cos(q_l z) dz + a_{2,l} \int_0^H \gamma_2(z) \cos(q_l z) dz$$

$$\beta_l = b_{1,l} \int_0^H \gamma_1(z) \cos(q_l z) dz + b_{2,l} \int_0^H \gamma_2(z) \cos(q_l z) dz$$

avec :

$$a_{1,l} = -\frac{\rho_F B_{2,l}}{D_l h_l} \quad a_{2,l} = \frac{\rho_F B_{1,l}}{D_l h_l}$$

$$b_{1,l} = \frac{\rho_F A_{2,l}}{D_l h_l} \quad b_{2,l} = -\frac{\rho_F A_{1,l}}{D_l h_l}$$

et $D_l = A_{1,l} B_{2,l} - A_{2,l} B_{1,l}$

La solution p s'écrit alors :

$$p(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\sum_i \Pi_{i,l}(r) \int_0^H \gamma_i(\zeta) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

en posant $\Pi_{i,l}(r) = a_{i,l} A_l(r) + b_{i,l} B_l(r)$ pour $i = 1, 2$.

Revenons maintenant au cas du problème couplé fluide/structure défini par la FIG. 1.1, avec $\gamma_1 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma$ et $\gamma_2 = \gamma$, $R_1 = R$ et $R_2 = \alpha R$. L'évolution de v (déplacement en flexion de la poutre) est régie par l'équation :

$$\rho_S S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -\rho_S S \gamma + \varphi$$

avec $\varphi(z, t)$ calculée à partir de la solution analytique précédente, ainsi :

$$\varphi(z, t) = \begin{cases} -\pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\pi_l \int_0^H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\zeta, t) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) + \rho_F S_h \gamma & z \in [0, H] \\ 0 & z \in]H, L] \end{cases}$$

où $\pi_l = \Pi_{1,l}(R)$. $\rho_F S_h$ le terme de masse d'eau déplacée par tranche, correspondant au problème fluide sous accélération constante γ avec surface libre en $z = H$; ce terme est donné par :

$$\rho_F S_h = \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \Pi_{1,l}(R) + \Pi_{2,l}(\alpha R) = \frac{m_o}{H} \quad (\text{A.3})$$

En reportant cette expression dans l'équation locale de la poutre, nous obtenons :

$$\rho_S S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -(\rho_S S - \rho_F S_h) \gamma - \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\pi_l \int_0^H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\zeta, t) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) \cdot (z \leq H)$$

En multipliant cette expression par un déplacement virtuel δv cinématiquement admissible, et en intégrant cette équation de entre 0 et L , il vient la formulation variationnelle du problème :

$$\frac{d^2}{dt^2} [m_S(v(t), \delta v) + m_H(v(t), \delta v)] + k_S(v(t), \delta v) = \langle \varphi(t), \delta v \rangle$$

avec $m_S(.,.)$ et $k_S(.,.)$ les formes bilinéaires de masse et raideur pour la poutre élastique, données respectivement par :

$$m_S(v(t), \delta v) = \int_0^L \rho_S S v(z, t) \delta v(z) dz \quad k_S(v(t), \delta v) = \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z, t) \frac{d^2 \delta v}{dz^2}(z) dz$$

$\langle \varphi(t), . \rangle$ est la forme linéaire correspondant au chargement imposé :

$$\langle \varphi(t), \delta v \rangle = -(\rho_S S - \rho_F S_h) \gamma(t) \int_0^H \delta v(z) dz - \rho_S S \gamma(t) \int_H^L \delta v(z) dz$$

$m_H(.,.)$ est la forme bilinéaire de masse ajoutée définie par :

$$m_H(v(t), \delta v) = \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \pi_l \left(\int_0^H v(z, t) \cos(q_l z) dz \right) \times \left(\int_0^H \delta v(z) \cos(q_l z) dz \right)$$

Cette forme variationnelle peut être discrétisée pour obtenir l'équation matricielle suivante :

$$(\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_H) \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_S \{V\} = -(\Phi_S - \Phi_H) \gamma$$

Remarque 12 Dans le cas d'un fluide totalement confiné dans une cavité fluide fermée, i.e. sans surface libre, les équations du problème couplé sont inchangées, à l'exception de la condition aux limites en $z = L$ qui devient :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$$

Le problème fluide se résout de la même façon. La pression s'écrit cette fois-ci comme :

$$\sum_{l=0}^{l=+\infty} q_l (\alpha_l A_{i,l} + \beta_l B_{i,l}) \cos(q_l z) = -\rho_F \gamma_i \quad \forall i$$

avec toujours $A_l(r) = I(q_l r)$ et $B_l(r) = K(q_l r)$ pour $l \geq 1$ et $A_0(r) = r$, $B_0(r) = \frac{1}{r}$. q_l est donné dans ce cas par : $q_l = \frac{l\pi}{L}$, $\forall l \geq 0$. Les coefficients α_l et β_l sont calculés avec un raisonnement identique. La solution en pression prenant en compte le couplage avec la structure s'écrit alors sous une forme identique à (A.2) :

$$p(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left[\sum_i \Pi_{i,l}(r) \int_0^L \gamma_i(\zeta) \cos(q_l \zeta) d\zeta \right] \cos(q_l z) \cos \theta$$

Dans le cas où $\gamma_i(z) = \gamma_i$ indépendante de z , le problème est bidimensionnel et correspond au cas de FRITZ [87]. Le profil de pression ne dépend pas de z et s'écrit :

$$p(r, \theta, z) = \frac{\rho_F}{R_2^2 - R_1^2} \left[(\gamma_1 R_1^2 - \gamma_2 R_2^2) r + \frac{R_1^2 R_2^2}{r} (\gamma_1 - \gamma_2) \right] \cos \theta \quad (\text{A.4})$$

L'effort s'exerçant sur une section $z = \text{cste}$ du cylindre i est noté φ_i et se calcule comme :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -m_h \gamma_1 + (m_1 + m_h) \gamma_2 \\ \varphi_2 &= (m_1 + m_h) \gamma_1 - (m_h + m_1 + m_2) \gamma_2 \end{aligned}$$

avec $m_i = \rho_F \pi R_i^2$ la masse de fluide déplacée par le cylindre i et m_h la masse hydrodynamique exprimant le couplage entre les deux cylindres est donnée par :

$$m_h = \rho_F \pi R_1^2 \times \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas qui nous intéresse, la forme bilinéaire de masse ajoutée est maintenant définie par :

$$m_H(v(t), \delta v) = \pi R \sum_{l=1}^{l=+\infty} \pi_l \left(\int_0^L v(z, t) \cos(q_l z) dz \right) \times \left(\int_0^L \delta v(z) \cos(q_l z) dz \right)$$

Le terme de masse déplacée est :

$$\langle \varphi(t), \delta v \rangle = -(\rho_S S - \rho_F S_h) \gamma(t) \int_0^L \delta v(z) dz$$

avec $S_h = \pi R^2 L$, correspondant à la poussée d'ARCHIMÈDE.

A.2 Ballotement fluide dans un espace confiné

Nous nous intéressons au calcul des modes propres de ballotement du fluide dans la configuration décrite par la FIG. A.1. Le problème aux valeurs propres est donné par les équations suivantes :

$$\Delta p = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R_i} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=H} = \frac{\omega^2}{g} p|_{z=H}$$

Il est possible de déterminer une solution analytique en utilisant une démarche similaire à celle adoptée au paragraphe précédent. Les modes propres fluide sont recherchés sous la forme particulière :

$$p(r, \theta, z, t) = p_R(r) \cos(n\theta) p_Z(z) e^{j\omega t}$$

En exprimant l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques, nous montrons que p_R et p_Z sont nécessairement de la forme :

$$p_R(r) = \alpha_n J_n(qr) + \beta_n Y_n(qr) \quad p_Z(z) = \alpha \operatorname{ch}(qz) + \beta \operatorname{sh}(qz)$$

avec J_n et Y_n les fonctions de BESSEL de première et seconde espèce d'ordre n [181].

L'expression des conditions aux limites permet de déduire que q prend les valeurs discrètes : $(q_{n,m})_{n \geq 1, m \geq 1}$ où $q_{n,m} R$ est la $m^{\text{ième}}$ racine de $D_{\alpha,n}(x) = J'_n(x) Y'_n(\alpha x) - J'_n(\alpha x) Y'_n(x)$. La pulsation propre correspondante est alors donnée par :

$$\omega_{n,m} = \sqrt{g q_{n,m} \times \operatorname{th}(q_{n,m} H)}$$

La recherche des racines de la fonction $x \mapsto D_{\alpha,n}(x)$ est faite avec une méthode numérique [173] et permet de calculer les fréquences propres de ballotement recherchées pour les différents nombres d'onde n .

Calcul numérique des coefficients des matrices D et S

Les coefficients des matrices $[D]$ et $[S]$ apparaissant dans la relation sources/doublets (2.12) sont donnés par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{i,j} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial n}(M_i, M) dS$$

et :

$$S_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_j} G(M_i, M) dS$$

Le calcul numérique de ces coefficients est basé sur le principe suivant [28].

Chaque facette S_j , centrée au point M_j , de normale extérieure \mathbf{n}_j , est composée de m_j sommets $(M_{k_j})_{k_j \in [1, m_j]}$, définissant m_j bords élémentaires (voir FIG. B.1).

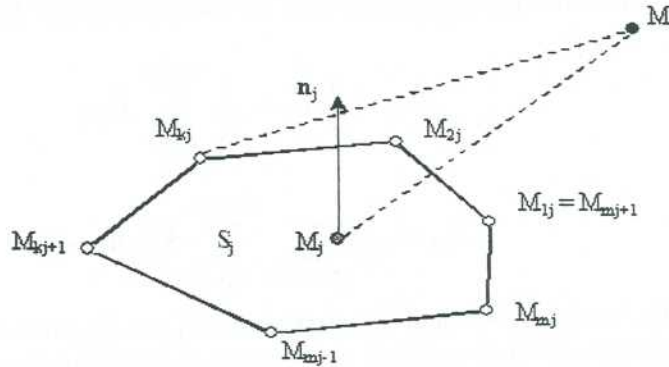


FIG. B.1 - Facette élémentaire S_j composée de m_j côtés

Nous calculons les quantités intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned} R_{i,k_j} &= \|\mathbf{M}_{k_j} \mathbf{M}_i\| \\ d_{k_j} &= \|\mathbf{M}_{k_j} \mathbf{M}_{k_j+1}\| \\ Z_{i,j} &= \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_j \\ \mathbf{V}_{k_j} &= \mathbf{n}_j \wedge \mathbf{M}_{k_j} \mathbf{M}_{k_j+1} \\ N_{i,k_j} &= R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j} + d_{k_j} \\ D_{i,k_j} &= R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j} - d_{k_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{i,k_j} &= \frac{\mathbf{M}_{k_j} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{V}_{k_j}}{d_{k_j}} \\
 \tilde{N}_{i,k_j} &= 2Y_{i,k_j+1} d_{k_j} \\
 \tilde{D}_{i,k_j} &= (R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j})^2 - d_{k_j}^2 + 2|Z_{i,j}|(R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j}) \\
 \mathbf{m}_{i,k_j} &= \frac{\mathbf{M}_{k_j} \mathbf{M}_i}{R_{i,k_j}} \\
 \mathbf{N}_{i,k_j} &= \mathbf{m}_{i,k_j} + \mathbf{m}_{i,k_j+1} \\
 \mathbf{D}_{i,k_j} &= 2(R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j} + |Z_{i,j}|)\mathbf{N}_{i,k_j} + 2(R_{i,k_j+1} + R_{i,k_j})\varepsilon(Z_{i,j})\mathbf{n}_j
 \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(Z)$ désignant le signe de la quantité Z (-1 si négatif, $+1$ si positif et 0 si nul).

Nous définissons \bar{D}_{i,k_j} par :

$$\bar{D}_{i,k_j} = Y_{i,k_j} \ln \left(\frac{N_{i,k_j}}{D_{k_j}} \right) - 2|Z_{i,j}| \arctan \left(\frac{\tilde{N}_{i,k_j}}{\bar{D}_{i,k_j}} \right) \quad (\text{B.1})$$

et pour une direction $X = x, y$ ou z , orientée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_X , nous posons :

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{i,k_j}^X &= \frac{\mathbf{V}_{k_j} \cdot \mathbf{e}_X}{d_{k_j}} \ln \left(\frac{N_{i,k_j}}{D_{i,k_j}} \right) - 2\varepsilon(Z_{i,j}) \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{e}_X \arctan \left(\frac{\tilde{N}_{i,k_j}}{\bar{D}_{i,k_j}} \right) \\
 &+ Y_{i,k_j} \mathbf{N}_{i,k_j} \cdot \mathbf{e}_X \frac{D_{i,k_j} - N_{i,k_j}}{D_{i,k_j} N_{i,k_j}} - 2|Z_{i,j}| \frac{D_{i,k_j} \mathbf{N}_{i,k_j} \cdot \mathbf{e}_X - N_{i,k_j} \mathbf{D}_{i,k_j} \cdot \mathbf{e}_X}{D_{k_j}^2 + N_{k_j}^2}
 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Le calcul des coefficients des matrices D et S est alors donné par [28] :

$$D_{i,j} = \frac{1}{2} \delta_{i,j} - \frac{1}{4\pi} \sum_{k_j=1}^{k_j=m_j} \bar{D}_{i,k_j} \quad (\text{B.3})$$

$$S_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \sum_{X=x,y,z} \sum_{k_j=1}^{k_j=m_j} \bar{S}_{i,k_j}^X \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{e}_X \quad (\text{B.4})$$

La validation des formules de calcul des coefficients $D_{i,j}$ et $S_{i,j}$ avec les approximations numériques données par les expressions (B.3) et (B.4) est réalisée en calculant deux intégrales particulières dans la configuration définie par la FIG. B.2.

Soient les intégrales suivantes :

$$S = \int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{dS(M)}{\|OM\|}$$

avec $\mathcal{C}(0, R)$ le cercle de centre O et de rayon R et :

$$D = \int_{\mathcal{C}(0,R)} \nabla_M \left(\frac{1}{\|HM\|} \right) \cdot \mathbf{n}_M dS(M)$$

avec H le point de coordonnées $(0, 0, h)$.

Nous calculons alors :

$$S = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{r dr d\theta}{r} = 2\pi R$$

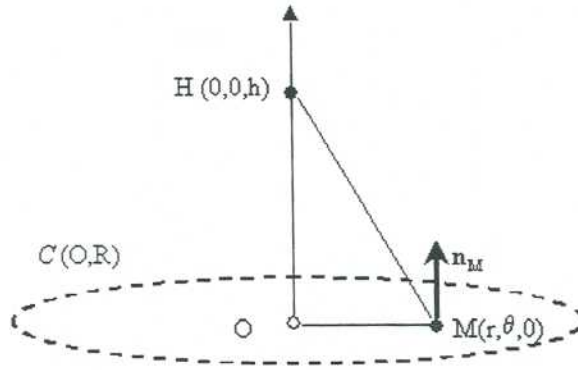


FIG. B.2 - Intégrales sur le cercle $C(0, R)$

puis :

$$D = - \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{hr \, dr \, d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = 2\pi h \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{1}{|h|} \right)$$

Le cercle $C(0, R)$ est discrétisé à l'aide de N facettes, et un calcul approché D_N et S_N des intégrales D et S est réalisé à l'aide des formules (B.3) et (B.4). La FIG. B.3 donne l'évolution des erreurs $\varepsilon_D(N)$ et $\varepsilon_S(N)$ en fonction du nombre de facettes N et montre la convergence du calcul numérique vers le calcul analytique, ce qui permet de valider les formules de calcul (B.3) et (B.3).

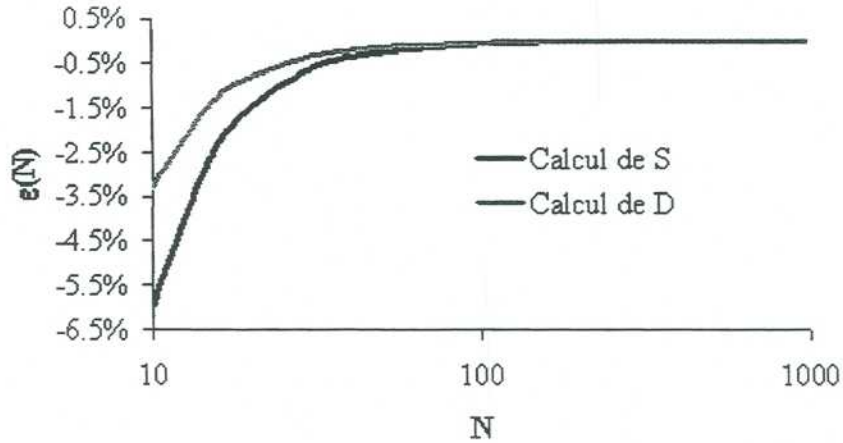


FIG. B.3 - Validation des formules de calcul (B.3) et (B.4). Convergence des valeurs numériques D_N et S_N

Résultats numériques

C.1 Algorithme de Lanczos

Le problème aux valeurs propres pour un système couplé fluide/structure en formulation pression/déplacement est non symétrique. Nous avons présenté à la section 2.5 le principe de l'algorithme de LANCZOS non symétrique [174] permettant l'extraction des valeurs propres pour un problème généralisé non symétrique. Nous développons dans MATLAB une fonction lanczos qui peut ainsi être utilisée dans le code de calcul que nous avons écrit dans MATLAB pour l'analyse modale du problème couplé générique, et du cas industriel présenté à la section 5.2. La validation de cet algorithme est réalisée sur le problème aux valeurs propres $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{X}(\omega) = 0$ avec les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} données par :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -410 & 16 & 90 & 33 & 2 & 88 & 125 & -215 & -16 & 43 & 64 & 7 \\ 340 & 38 & 99 & 81 & 2 & 54 & 195 & 220 & -41 & -1 & -92 & -26 \\ -40 & -84 & -114 & 60 & -45 & 82 & -45 & 145 & 2 & 25 & 52 & 3 \\ -110 & -30 & 75 & -120 & -40 & 26 & -220 & 150 & 44 & -32 & 24 & -15 \\ 190 & -76 & 63 & 21 & 16 & -34 & -65 & 25 & 6 & -8 & -12 & -38 \\ 30 & 4 & 27 & -33 & 31 & 74 & 160 & -170 & -46 & -15 & 64 & 49 \\ 110 & 96 & -129 & -132 & 8 & 66 & -125 & 0 & 4 & 43 & 78 & -4 \\ 340 & 26 & -39 & -144 & -43 & -92 & -30 & -145 & -36 & 19 & -68 & 6 \\ -490 & -68 & -141 & -12 & -3 & 48 & 0 & 180 & 20 & 48 & 74 & -48 \\ -30 & 54 & -12 & 9 & -39 & 22 & 160 & 40 & -11 & 12 & 82 & -45 \\ -170 & 10 & 102 & -147 & 13 & -20 & -195 & 75 & -27 & -19 & 86 & 12 \\ 290 & -4 & -54 & 147 & -29 & 50 & 140 & -195 & -17 & 40 & 44 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -41 & 176 & 393 & 42 & 14 & 616 & -700 & -1270 & 5333 & 2376 & 8320 & -14000 \\ 34 & 418 & 477 & 225 & 14 & 378 & 1685 & -315 & -455 & 5199 & -11960 & 52000 \\ -4 & -924 & -396 & 354 & -315 & 574 & 590 & 660 & 3191 & -54 & 6760 & -6000 \\ -11 & -330 & 180 & -555 & -280 & 182 & 90 & 1550 & -3712 & -5844 & 3120 & 30000 \\ 19 & -836 & 273 & 21 & 112 & -238 & -70 & 400 & -968 & -826 & -1560 & 76000 \\ 3 & 44 & 75 & -159 & 217 & 518 & -370 & -1310 & -2273 & 5722 & 8320 & -98000 \\ 11 & 1056 & -648 & -399 & 56 & 462 & -375 & 625 & 5493 & -164 & 10140 & 8000 \\ 34 & 286 & -300 & -537 & -301 & -644 & 815 & -285 & 2125 & 4724 & -8840 & -12000 \\ -49 & -748 & -576 & 93 & -21 & 336 & 900 & 540 & 6256 & -2156 & 9620 & 96000 \\ -3 & 594 & -39 & 48 & -273 & 154 & -280 & 920 & 1436 & 1493 & 10660 & 90000 \\ -17 & 110 & 261 & -690 & 91 & -140 & -210 & 1200 & -2629 & 3277 & 11180 & -24000 \\ 29 & -44 & -69 & 642 & -203 & 350 & -555 & -1285 & 4944 & 2479 & 5720 & -36000 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres correspondantes sont connues [174]. Nous comparons les valeurs propres théoriques avec les valeurs propres obtenues d'une part avec la fonction lanczos, et d'autre part avec la

Valeurs propres théoriques [174]	Fonction lanczos	Fonction eig
0.10000000000 + 0.00000000000i	0.10000000000 + 0.00000000000i	0.10000000000 + 0.00000000000i
4.00000000000 + 1.00000000000i	4.00000000000 + 1.00000000000i	4.00000000001 + 1.00000000000i
4.00000000000 - 1.00000000000i	4.00000000000 - 1.00000000000i	3.99999999999 - 1.00000000000i
2.40000000000 + 7.32000000000i	2.39973562337 - 7.31897634623i	2.39973562332 + 7.31897634624 i
2.40000000000 - 7.32000000000i	2.39973562337 + 7.31897634623i	2.39973562332 + 7.31897634624 i
7.00000000000 + 0.00000000000i	6.99999999983 + 0.00000000000i	7.00000000001 + 0.00000000000i
7.00000000000 + 0.00000000000i	7.00087589997 + 0.00000000000i	7.00000000001 + 0.00000000000i
11.00000000000 + 0.00000000000i	11.00000004837 + 0.00000000000i	11.00000000000 + 0.00000000000i
8.00000000000 + 127.00000000000i	7.99999713724 - 127.00000959629i	8.00000000001 + 127.00000000000i
8.00000000000 - 127.00000000000i	7.99999713724 + 127.00000959629i	8.00000000001 - 127.00000000000i
130.00000000000 + 0.00000000000i	129.99998469948 + 0.00000000000i	130.00000000000 + 0.00000000000i
-2000.00000000000 + 0.00000000000i	-1999.99994683834 + 0.00000000000i	-2000.00000000000 + 0.00000000000i

TAB. C.1 – Comparaison des valeurs propres du problème non symétrique de RAJAKUMAR et ROGERS [174] calculées avec l'algorithme de LANCZOS (fonction lanczos développée dans MATLAB) et la fonction MATLAB d'extraction de valeurs propres eig

fonction eig de calcul de valeurs propres de MATLAB. Les résultats sont présentés dans le TAB. C.1. Les deux fonctions donnent des résultats équivalents, très proches des valeurs théoriques attendues. La fonction eig permet de produire sur cet exemple de très bons résultats, ce qui justifiera son utilisation en substitution de la fonction lanczos dans le cas de systèmes de taille importante.

C.2 Calcul de modes propres

Nous nous plaçons dans le cas d'étude décrit par la FIG. 1.1. Les caractéristiques géométriques et physiques du problème couplé sont les suivantes :

Problème structure

- Rayon : $R = 0.1$ m ;
- Epaisseur : $e = 0.02$ m ;
- Longueur : $L = 1$ m ;
- Masse volumique : $\rho_S = 7800$ kg/m³ ;
- Module d'YOUNG : $E = 6.04 \times 10^8$ Pa ;

Problème fluide

- Rayon intérieur : $R = 0.1$ m ;
- Rayon extérieur : $R' = 0.2$ m ;
- Masse volumique : $\rho_F = 1000$ kg/m³ ;
- Accélération de la pesanteur : $g = 9.81$ m/s².

Le TAB. C.2 compare les valeurs analytiques des premiers modes propres de ballonnement du fluide avec les valeurs numériques calculées par une technique éléments finis et par résolution de l'équation intégrale fluide, décrites dans le chapitre 2. Les écarts constatés sont tous inférieurs à 2%, l'approche éléments finis avec modélisation bidimensionnelle axi-symétrique donnant des résultats un peu meilleurs que l'approche équation intégrale sur le problème tridimensionnel.

Le TAB. C.3 compare les valeurs analytiques des premiers modes propres de la poutre couplée avec le fluide (sans prise en compte des modes de ballonnement) et les valeurs numériques calculées avec une technique de couplage éléments finis/éléments finis et une résolution de l'équation intégrale fluide pour différentes hauteurs de remplissage. Les écarts par rapport à la solution analytique sont inférieurs à

Fréquence	Solution analytique	Eléments finis		Equation intégrale	
f_1	1.2987 Hz	1.2981 Hz	-0.04 %	1.3158 Hz	+1.32 %
f_2	1.8328 Hz	1.8295 Hz	-0.18 %	1.8623 Hz	+1.61 %
f_3	2.2375 Hz	2.2288 Hz	-0.38 %	2.2672 Hz	+1.33 %
f_4	2.8856 Hz	2.8978 Hz	+0.43 %	2.9257 Hz	+1.39 %

TAB. C.2 – Premières fréquences propres fluide (modes de ballonnement). Comparaison des discrétisations éléments finis et équation intégrale par rapport à la solution analytique

3% dans tous les cas, avec toutefois une précision un peu meilleure dans le cas du couplage éléments finis/éléments finis axi-symétriques.

$\lambda = 100\%$

Fréquence	Solution analytique	Eléments finis		Equation intégrale	
f_1	8.54 Hz	8.53 Hz	-0.12 %	8.45 Hz	-1.07 %
f_2	53.95 Hz	53.45 Hz	-0.93 %	53.49 Hz	-1.21 %
f_3	155.90 Hz	152.95 Hz	-1.89 %	152.51 Hz	-2.18 %
f_4	315.40 Hz	306.88 Hz	-2.70 %	305.90 Hz	-3.01 %

$\lambda = 75\%$

Fréquence	Solution analytique	Eléments finis		Equation intégrale	
f_1	9.60 Hz	9.53 Hz	-0.73 %	9.45 Hz	-1.56 %
f_2	54.93 Hz	54.68 Hz	-0.46 %	54.60 Hz	-0.60 %
f_3	159.70 Hz	156.94 Hz	-1.73 %	156.75 Hz	-1.85 %
f_4	321.50 Hz	314.40 Hz	-2.21 %	313.58 Hz	-2.46 %

TAB. C.3 – Premières fréquences de la poutre couplée avec le fluide avec condition de surface libre $p|_{z=H} = 0$. Comparaison des calculs avec couplage éléments finis/éléments finis et éléments finis/équation intégrale par rapport à la solution analytique

Le TAB. C.4 compare les valeurs numériques des premiers modes propres de la poutre couplée avec le fluide (avec prise en compte des modes de ballonnement) obtenues avec une technique de couplage éléments finis/éléments finis et une technique éléments finis/équation intégrale, pour différentes hauteurs de remplissage. L'écart entre les deux méthodes est dans ce cas très faible (inférieur à 0.5%).

L'ensemble de ces résultats numériques élémentaires permet de valider le développement du code de calcul dans MATLAB pour l'analyse modale du système couplé fluide/structure. Ceci permet également d'envisager l'utilisation de MATLAB pour conduire une analyse modale sur une géométrie industrielle, avec prise en compte du couplage fluide/structure et modélisation axi-symétrique du problème, cette fonctionnalité n'étant pas disponible pour l'instant dans le code de calcul éléments finis ANSYS.

$\lambda = 100\%$			
Fréquence	Eléments finis	Equation intégrale	Ecart
f_1	8.53 Hz	8.53 Hz	+0.00 %
f_2	53.45 Hz	53.47 Hz	+0.01 %
f_3	152.95 Hz	152.53 Hz	-0.28 %
f_4	306.88 Hz	305.56 Hz	-0.43 %
$\lambda = 75\%$			
Fréquence	Eléments finis	Equation intégrale	Ecart
f_1	9.54 Hz	9.54 Hz	+0.00 %
f_2	54.69 Hz	54.69 Hz	+0.00 %
f_3	152.95 Hz	156.56 Hz	-0.25 %
f_4	314.41 Hz	313.25 Hz	-0.37 %

TAB. C.4 – Premières fréquences de la poutre couplée avec le fluide avec condition de surface libre $\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=H} = \frac{\omega^2}{g}p|_{z=H}$. Comparaison des calculs avec couplage éléments finis/éléments finis et éléments finis/équation intégrale

Organisation de la procédure de calcul couplé

Nous donnons dans ce chapitre une vue d'ensemble de la procédure de couplage faible développée dans le code STAR-CD avec les principes numériques exposés dans le chapitre 3. L'ensemble de la procédure est décrit par la FIG. D.1. Les fichiers utilisés par le code structure sont repérés en rouge, les fichiers utilisés par le code fluide sont repérés en bleu et les fichiers relatifs aux fonctions de couplage en temps et en espace sont repérés en vert. Le schéma fait apparaître les fichiers utilisés une seule fois au moment de l'initialisation du calcul et ceux utilisés à chaque itération temporelle du problème couplé. Le fichier `poutre.exe` est le fichier exécutable STAR obtenu après compilation des fonctions FORTRAN et dont l'exécution permet de lancer un calcul couplé.

Les différents fichiers utilisés dans la programmation d'ensemble sont répertoriés dans le TAB. D.1. Des sauvegardes des résultats de calcul à chaque itération sont réalisées par l'intermédiaire de fichiers textes, dont la nomenclature est donnée par le TAB. D.2.

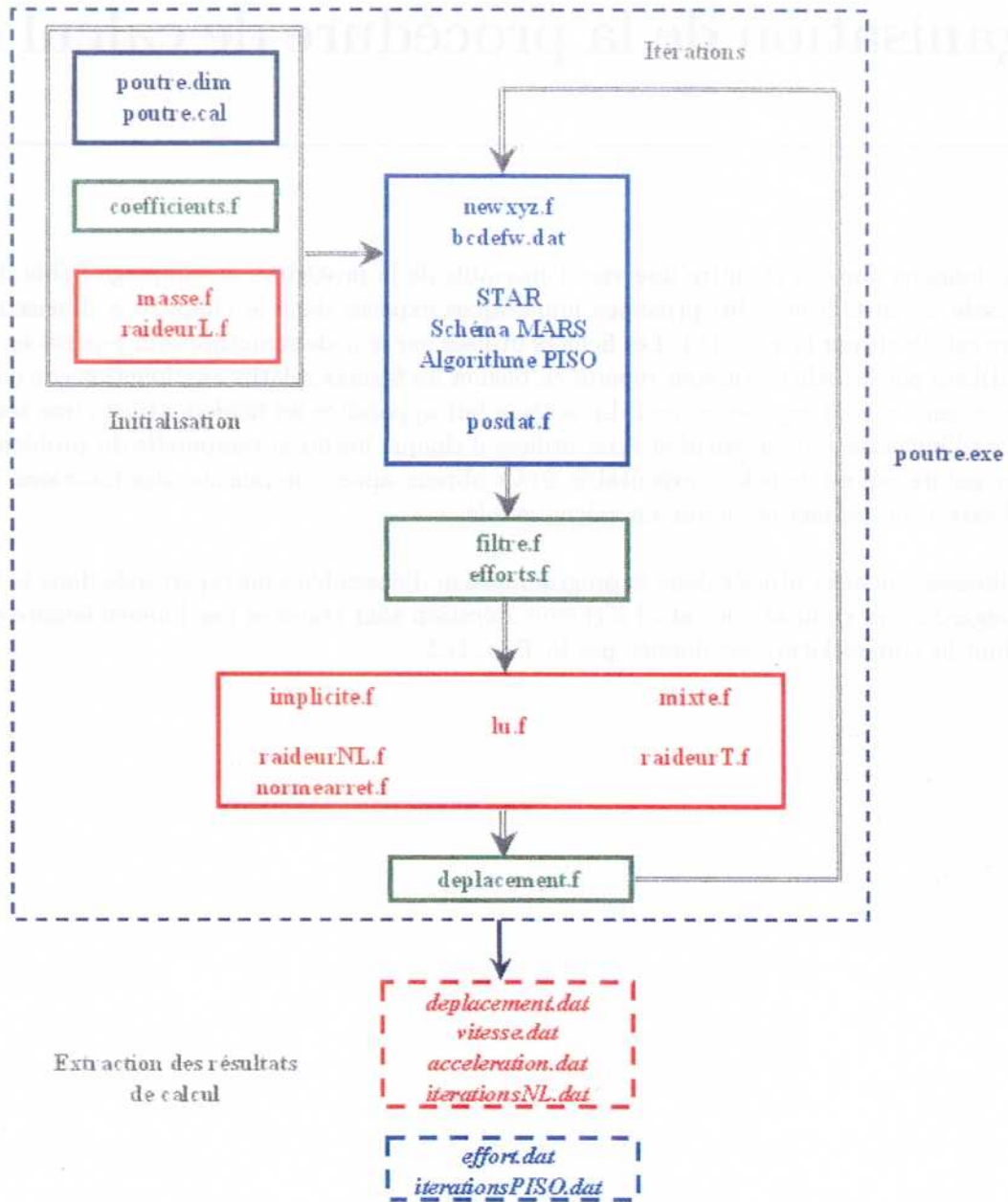


FIG. D.1 – Organisation de la procédure de couplage faible développée dans le code STAR-CD

Nom	Type	Fonction
poutre.dim	Fichier de commandes STAR-CD	Définition de la géométrie du problème
poutre.cal	Fichier de commandes STAR-CD	Définition des paramètres de calcul
coefficients.f	Fichier FORTRAN	Calcul des coefficients de déplacement et d'effort
masse.f	Fichier FORTRAN	Calcul de la matrice masse structure
raideurL.f	Fichier FORTRAN	Calcul de la matrice raideur linéaire structure
raideurNL.f	Fichier FORTRAN	Calcul des termes de raideur non linéaires du problème structure
newxyz.f	Fichier FORTRAN	Algorithme de re-maillage du problème fluide
bcdefw.f	Fichier FORTRAN	Définition des conditions aux limites en vitesse du problème fluide
posdat.f	Fichier FORTRAN	Calcul des efforts fluide sur les parois
filtre.f	Fichier FORTRAN	Filtrage numérique des efforts fluide
efforts.f	Fichier FORTRAN	Projection des efforts fluide sur le maillage structure
implicite.f	Fichier FORTRAN	Intégration temporelle implicite du problème structure
mixte.f	Fichier FORTRAN	Intégration temporelle mixte du problème structure
raideurT.f	Fichier FORTRAN	Calcul de la matrice raideur tangente du problème structure
normearret.f	Fichier FORTRAN	Critère d'arrêt des itérations internes
lu.f	Fichier FORTRAN	Inversion matricielle
deplacement.f	Fichier FORTRAN	Projection des déplacements de l'interface fluide/structure sur le maillage fluide
poutre.exe	Fichier exécutable STAR-CD	Exécution du programme

TAB. D.1 – Répertoire des fichiers de programmation utilisés par la procédure de couplage faible développée dans STAR-CD

Nom	Variable sauvegardée
deplacement.dat	Déplacement relatif de l'extrémité libre de la poutre
vitesse.dat	Vitesse relative de l'extrémité libre de la poutre
acceleration.dat	Accélération absolue de l'extrémité libre de la poutre
iterationsNL.dat	Nombre d'itérations internes de l'algorithme temporel implicite
effort.dat	Effort fluide intégré sur la poutre
iterationsPISO.dat	Nombre d'itérations internes de l'algorithme PISO

TAB. D.2 – Nomenclature des fichiers de sauvegarde des résultats de calcul

Propulsion navale nucléaire

Nous proposons dans ce chapitre une présentation succincte du procédé de propulsion navale nucléaire.

E.1 Définitions des principaux éléments

Il est d'usage de distinguer dans une chaufferie nucléaire les composants et les installations ou circuits. Les *composants principaux* sont les suivants.

La cuve en acier au carbone, entièrement revêtue d'acier inoxydable. Elle contient des habillages qui ont pour but :

- de positionner et maintenir le coeur ainsi que les mécanismes de contrôle ;
- de protéger la paroi résistante de l'irradiation ;
- d'établir la circulation du fluide caloporteur.

Les boucles et pompes primaires

Le pressuriseur qui a deux rôles principaux :

- fonction de pressurisation du circuit primaire ;
- fonction de vase d'expansion du circuit primaire.

Le générateur de vapeur

La bêche qui reçoit les effluents primaires.

Les accumulateurs implantés sur les circuits de sûreté.

Les *installations* comprennent toutes les tuyauteries, sectionnements, autres capacités et échangeurs, pompes, nécessaires à la fonction de l'installation. Les installations sont divisées en différents circuits.

Les circuits principaux : circuit primaire, circuit vapeur, circuit alimentaire ;

Les circuits auxiliaires : circuits nécessaires au bon fonctionnement des circuits principaux. Ils sont en fonctionnement continu ou intermittent. Nous distinguons :

- coté primaire : circuit primaire dérivé, circuit d'épuration, circuit de prélèvements, circuit de relevage, circuit des purges et événements, circuit de protection radiologique, circuit d'eau intermédiaire ;
- coté secondaire : circuit de remplissage, circuit d'extraction ;
- compartiment : circuit d'assèchement, circuit de ventilation.

Les circuits de sécurité : circuit d'injection de sécurité, circuit de réfrigération de secours, circuit d'empoisonnement. En marche normale ces circuits ne sont jamais en fonctionnement, leur déclenchement se fait automatiquement et de manière hiérarchisée sur détection d'anomalie.

E.2 Fonctionnement d'une chaufferie nucléaire

Une chaufferie nucléaire embarquée fonctionne de manière tout à fait similaire à une chaufferie EDF. Il s'agit d'un réacteur nucléaire à eau pressurisée. Le fluide modérateur est de l'eau légère, il sert également de fluide caloporteur. Comparativement aux chaufferies EDF, la différence majeure est la puissance unitaire, beaucoup plus faible. Le cœur est le siège de réactions nucléaires exothermiques. La chaleur produite est extraite par le fluide caloporteur. Cette eau primaire est mise en mouvement soit par des pompes primaires, soit par circulation naturelle. Réchauffée au niveau du cœur elle se refroidit dans le générateur de chaleur puis retourne vers le cœur.

Le générateur de vapeur reçoit de l'eau secondaire froide. Cette eau se réchauffe et se vaporise au contact extérieur des tubes du générateur de vapeur, tubes à l'intérieur desquels circule l'eau primaire. La vapeur produite est dirigée vers les turbines, les bouilleurs, les auxiliaires à vapeur (par exemple les éjecteurs, les boîtes étanches) avant d'être condensée dans un condenseur. Des pompes recyclent l'eau produite vers le générateur de vapeur. Le circuit secondaire est un cycle de RANKINE à vapeur saturée. Le générateur de vapeur constitue la source chaude, un condenseur refroidi par l'eau de mer constitue la source froide. L'énergie mécanique est obtenue par une turbine à vapeur.

La FIG. E.1 synthétise l'architecture des circuits principaux.

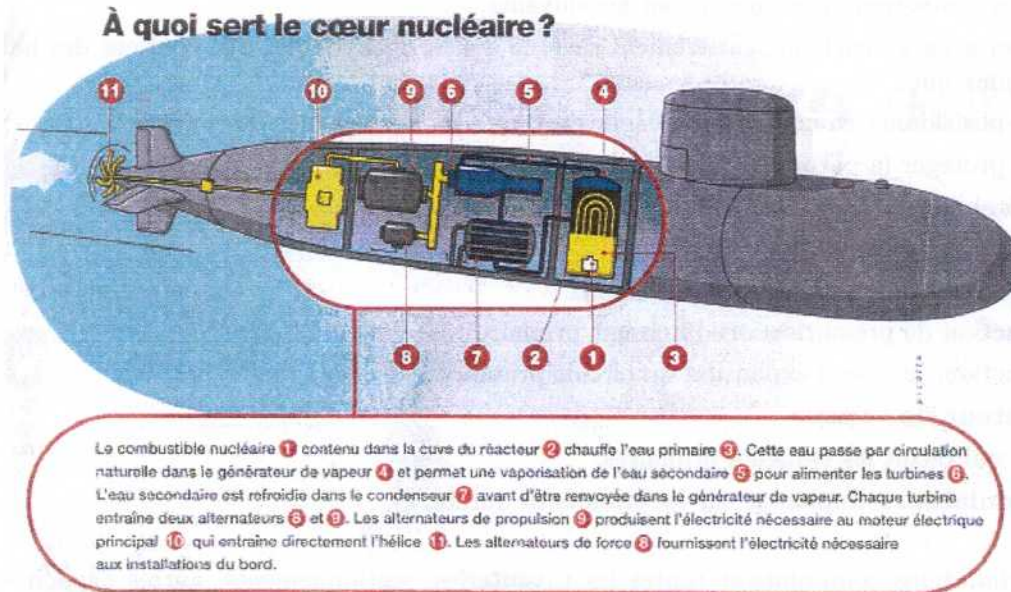


FIG. E.1 – Propulsion navale nucléaire

Les circuits auxiliaires assurent le bon fonctionnement des circuits principaux : réfrigération des pompes et fluide froid de certains échangeurs par le circuit d'eau intermédiaire, filtration, hydrogénation, épuration et analyse chimique de l'eau primaire par le circuit d'épuration.

Une instrumentation importante et toujours redondante assure le contrôle commande de la chaufferie ; tout fonctionnement anormal est transmis à l'opérateur par le biais de témoins lumineux et sonores, et des actions correctives automatiques sont effectuées en cas de dépassement de seuils. Ces actions sont hiérarchisées et demandent des moyens d'intervention de plus en plus passifs.

La FIG. E.1 montre également une différence fondamentale entre une chaufferie EDF et une chaufferie embarquée. Il s'agit des critères de masse et d'encombrement, majeurs dans un sous-marin. C'est pourquoi, depuis les SNA (Sous-marin Nucléaire d'Attaque), DCN Propulsion et Technicatome ont développé le concept de chaufferie compact. Dans ce concept, il n'y a pas de boucle primaire, mais

un seul générateur de vapeur qui sert de couvercle à la cuve. Cette géométrie a été adoptée afin de permettre un fonctionnement du circuit primaire sans pompage, c'est-à-dire en exploitant uniquement les forces volumiques gravitaires. Ce choix permet également de limiter le volume d'eau primaire. Il en résulte que l'écoulement primaire doit se réaliser du centre vers la périphérie, à l'intérieur des tubes, la disposition des tubes est globalement rayonnante de l'axe vers la périphérie.

Table des figures

1	Choc sur navire par explosion sous-marine	19
2	Exemple de calcul de choc hydrodynamique sur un bâtiment de surface	21
3	Profils temporels type d'une excitation dynamique sur un matériel embarqué	21
4	Modélisation et simulation numérique d'un problème d'interactions fluide/structure : démarche d'étude	23
1.1	Problème générique couplé fluide/structure	28
1.2	Profils temporels d'accélération, vitesse et déplacement du choc sinus	29
1.3	Spectre de réponse normalisé en pseudo-accélération du choc sinus	30
1.4	Problème général couplé fluide/structure linéaire en formulation pression/déplacement	37
2.1	Élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)	46
2.2	Couplage conforme entre un élément fini poutre à deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (v, θ) et un élément fini fluide axi-symétrique à quatre nœuds et un degré de liberté par nœud (p)	51
2.3	Maillage de la frontière du problème posé par la FIG. 1.1 (maillage de la frontière fluide en bleu, de la structure en rouge et de l'interface fluide/structure en vert)	52
2.4	Structure de la matrice de couplage fluide/structure. Cas du couplage élément finis/équation intégrale	54
3.1	Schématisme générale d'un problème de couplage mécanique fluide/structure	62
3.2	Couplage fort et couplage faible [128]	63
3.3	Procédure de couplage fluide/structure développée dans le code CFD	66
3.4	Maillage d'un problème fluide dans le cas bidimensionnel cartésien	67
3.5	Problème cartésien bidimensionnel avec maillage mobile	72
3.6	Élément fini poutre à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud (u, v, θ)	77
3.7	Procédure de couplage fluide/structure. Principe général	86
3.8	Couplage fluide/structure explicite décalé développé dans le code Star-CD	87
3.9	Procédure de couplage. Couplage en temps : filtrage des efforts fluide	89
3.10	Module et argument de la fonction de transfert pour le filtre passe-bas du premier ordre	90
3.11	Filtrage des efforts	90
3.12	Maillage du problème fluide dans le code CFD	91
3.13	Maillages fluide et structure à l'interface	92
3.14	Transfert des efforts et des déplacements entre les maillages fluide et structure	93
3.15	Procédure de couplage. Couplage en espace : projection des efforts et des déplacements	94
3.16	Maillage non déformé utilisé dans l'algorithme standard	94
3.17	Déplacement du cylindre intérieur d'une quantité δ . Algorithme de remaillage de base	95
3.18	Déplacement du cylindre intérieur d'une quantité δ . Algorithme de remaillage amélioré	96

3.19	Maillage déformé avec conservation du rapport de forme de cellules suivant θ et ratio de discrétisation suivant r	98
3.20	Maillages non déformés utilisés dans l'algorithme amélioré et l'algorithme alternatif	98
4.1	Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique soumis à une accélération imposée	102
4.2	Maillage du problème fluide	103
4.3	Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO pour différentes qualités de maillage fluide	105
4.4	Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO pour différents schémas de discrétisation	106
4.5	Calcul du coefficient d'effort : influence du pas de temps	107
4.6	Coefficient d'effort fluide et nombre d'itérations PISO en repère absolu et relatif	108
4.7	Oscillations numériques sur le coefficient d'effort : influence du repère de calcul	109
4.8	Oscillations d'un cylindre rigide dans un espace annulaire fluide visqueux incompressible	110
4.9	Coefficients $C_M = m_d C_\pi$ et C_ν en fonction de \mathcal{S} pour $\alpha = 2$. Comparaison des modèles de FRITZ [87], CHEN [69] et SINYAVASKI [132]	112
4.10	Maillages $N_r \times N_\theta$ du problème de CHEN	113
4.11	Oscillations forcées. Calcul de masse ajoutée en fonction du confinement α dans le cas de FRITZ	114
4.12	Oscillations forcées. Comparaison des efforts de pression maximum pour différentes valeurs du nombre de REYNOLDS dynamique \mathcal{S} dans le cas de CHEN	115
4.13	Oscillations forcées. Convergence en espace pour le coefficient de masse ajoutée dans le cas de CHEN pour $\mathcal{S} = 100$	115
4.14	Oscillations forcées. Convergence en temps pour le coefficient de masse ajoutée dans le cas de CHEN pour $\mathcal{S} = 100$	116
4.15	Amortissement numérique du θ -schéma	117
4.16	Oscillations libres. Comparaison des réponses en déplacement pour $\mathcal{S} = 100$ avec et sans fluide. Comparaison des réponses calculées pour les cas de FRITZ et CHEN	118
4.17	Oscillations libres. Convergence en espace pour le coefficient d'amortissement dans le cas de CHEN pour $\mathcal{S} = 100$	118
4.18	Oscillations libres. Champs de pression et de vitesse fluide à différents instants dans le cas $\mathcal{S} = 100$	119
4.19	Oscillations libres. Comparaison des coefficients d'amortissement pour différentes valeurs du nombre de REYNOLDS dynamique \mathcal{S} dans le cas de CHEN	120
4.20	Oscillations libres. Comparaison des réponses en déplacement obtenues avec deux algorithmes de remaillage du problème fluide dans le cas de CHEN pour $\mathcal{S} = 100$	121
4.21	Problème couplé linéaire. Réponse en déplacement : méthode modale avec un, deux ou trois modes propres de structure	123
4.22	Problème couplé linéaire. Effort fluide intégré sur l'interface fluide/structure	123
4.23	Problème couplé linéaire. Dérivée seconde des coordonnées généralisée $\ddot{\xi}_n$ pour les trois premiers modes propres. Calcul avec et sans filtrage numérique des efforts fluide	124
4.24	Problème couplé linéaire. Réponse en déplacement pour une poutre de faible épaisseur	125
4.25	Problème couplé non linéaire. Réponse de la poutre en déplacement calculée par couplage fort et couplage faible avec schéma mixte et implicite	127
4.26	Problème couplé non linéaire. Réponse de la poutre en accélération calculée par couplage fort et couplage faible avec schéma mixte et implicite	127

5.1	Evolution du ratio β pour la première fréquence propre du mode poutre hydroélastique en fonction de λ pour plusieurs valeurs de ϵ	132
5.2	Evolution du ratio β pour la première fréquence propre du mode poutre hydroélastique en fonction de λ pour plusieurs valeurs de \mathcal{M}	132
5.3	Cumul de masses modales pour les modes de poutre élastiques et hydroélastiques . . .	133
5.4	Evolution du ratio d'abaissement en fréquence β pour le premier mode structure en fonction du ratio de remplissage λ pour $\mathcal{F} \sim 10$ et $\mathcal{F} \sim 1$, avec ratio de confinement $\alpha = 2$ et nombre de masse $\mathcal{M} = 8$	134
5.5	Illustration du phénomène de couplage des modes fluide et structure ($\alpha = 2$, $\lambda = 75\%$, $\mathcal{F} \sim 1$, $\mathcal{M} \sim 8$). Représentation du comportement en flexion de la poutre et des iso-valeurs de pression pour le fluide dans le plan (r, z) pour $\theta = 0$ (harmonique symétrique d'ordre $s = 1$)	138
5.6	Réponse temporelle de la poutre couplée avec le fluide pour un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 10$	140
5.7	Réponse temporelle de la poutre couplée avec le fluide pour un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 1$	141
5.8	Réponse en déplacement de l'extrémité libre de la poutre avec et sans couplage fluide/structure. Comparaison des modèles poutre linéaire et non linéaire	142
5.9	Etat de la surface libre du fluide et de la déformation de la poutre à différents instants	142
5.10	Déplacement maximum de l'extrémité libre de la poutre en fonction de l'amplitude de l'accélération imposée. Comparaison des calculs linéaires et non linéaires avec et sans couplage avec le fluide.	143
5.11	<i>Comparaison de différents calculs par couplage fort. Calculs éléments finis linéaires (flexion seule) et non linéaires (flexion et traction-compression, flexion seule)</i>	144
A.1	Problème fluide tridimensionnel axi-symétrique avec surface libre	i
B.1	Facette élémentaire S_j composée de m_j côtés	vii
B.2	Intégrales sur le cercle $\mathcal{C}(0, R)$	ix
B.3	Validation des formules de calcul (B.3) et (B.4). Convergence des valeurs numériques D_N et S_N	ix
D.1	Organisation de la procédure de couplage faible développée dans le code STAR-CD	xvi
E.1	Propulsion navale nucléaire	xx

Liste des tableaux

1	Ordre de grandeur des caractéristiques d'une explosion sous-marine	20
3.1	Points d'intégration ζ_l et poids d'intégration w_l pour la méthode de GAUSS [9]	81
3.2	<i>Caractéristiques modales (masses généralisées μ_n, facteurs de participation κ_n et masses modales M_n) des premiers modes propres d'une poutre élastique encastrée/libre</i>	85
4.1	Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique. Nombre moyen d'itérations PISO pour différents schémas de discrétisation	104
4.2	Ballotement d'un fluide dans un réservoir axi-symétrique. Nombre moyen d'itérations PISO pour différentes représentations du problème (en référentiel relatif ou absolu)	109
4.3	Oscillations forcées. Ecarts relatifs sur le coefficient de masse ajoutée : calcul numérique comparé aux modèles de CHEN et SINYAVASKII	114
4.4	Oscillations libres. Ecarts relatifs sur le coefficient d'amortissement ajouté : calcul numérique comparé aux modèles de CHEN et SINYAVASKII	120
4.5	Oscillations libres. Comparaison des coefficients d'amortissement ξ calculés avec deux algorithmes de remaillage fluide pour $S = 100$	121
4.6	Fréquences propres de la poutre avec et sans fluide	122
5.1	Analyse modale du fluide et de la structure couplés et découplés, avec ou sans ballotement fluide, pour différentes hauteurs de remplissage avec un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 10$, un nombre de masse $\mathcal{M} = 8$ et un ratio de confinement $\alpha = 2$	135
5.2	Analyse modale du fluide et de la structure couplés et découplés, avec ou sans ballotement fluide, pour différentes hauteurs de remplissage avec un nombre de FROUDE dynamique $\mathcal{F} \sim 1$, un nombre de masse $\mathcal{M} = 8$ et un ratio de confinement $\alpha = 2$	136
5.3	Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de FROUDE dynamique \mathcal{F} et du nombre de masse \mathcal{M} (ratio de confinement $\alpha = 2$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$)	137
5.4	Abaissement en fréquence pour le premier mode structure en fonction du nombre de FROUDE dynamique \mathcal{F} et du ratio de confinement α (nombre de masse $\mathcal{M} = 8$, ratio de remplissage $\lambda = 75\%$)	137
5.5	Caractéristiques de simulation du problème couplé avec la procédure de couplage explicite	139
5.6	Ecarts entre la valeur maximale du déplacement de l'extrémité libre de la poutre calculé avec et sans fluide en fonction de l'accélération imposée pour un comportement non linéaire de la structure	143
C.1	Comparaison des valeurs propres du problème non symétrique de RAJAKUMAR et ROGERS [174] calculées avec l'algorithme de LANCZOS (fonction lanczos développée dans MATLAB) et la fonction MATLAB d'extraction de valeurs propres eig	xii

C.2	Premières fréquences propres fluide (modes de ballonnement). Comparaison des discrétisations éléments finis et équation intégrale par rapport à la solution analytique . . .	xiii
C.3	Premières fréquences de la poutre couplée avec le fluide avec condition de surface libre $p _{z=H} = 0$. Comparaison des calculs avec couplage éléments finis/éléments finis et éléments finis/équation intégrale par rapport à la solution analytique	xiii
C.4	Premières fréquences de la poutre couplée avec le fluide avec condition de surface libre $\frac{\partial p}{\partial z}\Big _{z=H} = \frac{\omega^2}{g}p _{z=H}$. Comparaison des calculs avec couplage éléments finis/éléments finis et éléments finis/équation intégrale	xiv
D.1	Répertoire des fichiers de programmation utilisés par la procédure de couplage faible développée dans STAR-CD	xvii
D.2	Nomenclature des fichiers de sauvegarde des résultats de calcul	xviii

Bibliographie

Modélisation physique et résolution numérique pour le problème structure

- [1] K.J. BATHE. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [2] K.J. BATHE, E.L. WILSON. Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **1**, 283-291, 1973.
- [3] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU, B. MORAND. *Non-Linear Finite Element for Continua and Structure*. Wiley & Sons, 2000.
- [4] G.R. BHARSYAM, G. PRATHAP. Galerkin Finite Element Method for Non-Linear Beam Vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, **72**, 191-203, 1972.
- [5] R.D. BLEVINS. *Formulas for Frequency and Mode Shape*. Robert. E. Kreieger Publishing Company, 1984.
- [6] P.G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, 1978.
- [7] P.G. CIARLET. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, 1986.
- [8] I. DEMIRDZIC, S. MUZAFERIJA. Finite Volume Method for Stress Analysis in Complex Domains. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **37**, 3751-3766, 1994.
- [9] G. DHATT, G. TOUZOT. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine, 1984.
- [10] M.A. DOKAINISH, K. SUBBARAJ. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-I. Explicit Methods. *Computer & Structures*, **32** (6), 1371-1386, 1989.
- [11] S. DUBIGEON. *Mécanique des milieux continus*. Ecole Centrale de Nantes, Lavoisier, 1998.
- [12] J. HINO, Y. YOSHIMURA, N. ANANTHANARAYANA. Vibration Analysis of Non-Linear Beams Subjected to a Moving Load Using the Finite Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, **100**, 477-491, 1985.
- [13] T.J.R. HUGHES, T. BELYTSCHKO. A Précis of Developments in Computational Methods for Transient Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, **50**, 1033-1041, 1983.
- [14] H. KARDESTUNCER, D.H. NORRIE et al. *Finite Element Handbook*. Mac Graw Hill, 1987.
- [15] W.T. KOITER. On the Foundations of the Linear Theory of Thin Elastic Shells. *Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, **73**, 169-195, 1970.
- [16] C. LESUEUR. *Rayonnement acoustique des structures. Vibro-acoustique, interactions fluide/structure*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 66, Eyrolles, 1988.
- [17] M.N. NEWMARK. A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **85**, 67-94, 1954.

- [18] N.G. STEPHEN, M. LEVINSON. A Second Order Beam Theory. *Journal of Sound and Vibration*, **67**, 293-305, 1979.
- [19] K. SUBBARAJ, M.A. DOKAINISH. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics-II. Implicit Methods. *Computer & Structures*, **32** (6), 1387-1401, 1989.
- [20] K. WASHIZU. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon, 1982.
- [21] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method. Basic Formulation and Linear Problems*. 4th edition. Mac Graw Hill, 1989.

Modélisation physique et résolution numérique pour le problème fluide

- [22] Y. ANDRILLON. *Simulation d'écoulement à surface libre par une méthode de capture d'interface en formulation totalement couplée*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- [23] J.U. BRACKBILL, D.B. KOTHE, C. ZEMACH. A Continuum Method for Modeling Surface Tension. *Journal of Computational Physics*, **39**, 201-225.
- [24] A. BURNS, A. SPLAWSKI, S. LO, C. GUETARI. *Application of Coupled Solver Tehnology to CFD Modeling of Multiphase Flows with CFX*. Multiphase Flow, Orlando, 14-16 March 2001.
- [25] P. CHASSAING. *Mécanique des fluides. Eléments d'un premier parcours*. Cépaduès éditions, 2000.
- [26] P. CHASSAING. *Turbulence en mécanique des fluides. Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Cépaduès éditions, 2000.
- [27] R.H. COLE. *Underwater Explosion*. Princeton University Press, 1948.
- [28] G. DELHOMMEAU. *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités*. Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1987.
- [29] I. DEMIRDZIC, M. PERIC. Space Conservation Law in Finite Volume Calculations of Fluid Flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 1037-1050, 1988.
- [30] I. DEMIRDZIC, M. PERIC. Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrary Shaped Domains with Moving Boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **10**, 771-790, 1990.
- [31] J.H. FERZIGER, M. PERIC. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1999.
- [32] J.M. FLORYAN, H. RASMUSSEN. Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries. *Applied Mechanics Review*, **42** (12), 323-341, 1989.
- [33] I. HADZIC, F. MALLON, M. PERIC. *Numerical Simulation of Sloshing*. Atelier "Marine et Simulation Numérique en Mécanique des Fluides", CD ADAPCO, Paris, 19 Novembre 2002.
- [34] F.H. HARLOW, J.E. WELCH. Numerical Simulation of Time-Dependant Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, **8** (12), 2182-2189, 1965.
- [35] M. HINATSU. Numerical Simulation of Unsteady Viscous Non-Linear Waves Using Moving Grid System Fitted on a Free Surface. *Journal Kansai Society of Naval Architecture*, **173**, 45-50, 1993.
- [36] C.W. HIRT, J.E. NICHOLS. Volume of Fluid Method for the Dynamic of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics*, **39**, 201-225, 1981.
- [37] M. HORTMANN, M. PERIC, G. SCHEUERER. Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection : Benchmark Solutions. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **11**, 189-207, 1990.

- [38] R.I. ISSA. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. *Journal of Computational Physics*, **62**, 40-65, 1985.
- [39] R.I. ISSA, A.D. GOSMAN, A.P. WATKINS. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-Iterative Implicit Scheme. *Journal of Computational Physics*, **62**, 66-82, 1986.
- [40] R.I. ISSA et al. Solution of the Implicitly Discretized Reacting Flow Equations by Operator-Splitting. *Journal of Computational Physics*, **93**, 388-410, 1991.
- [41] J. MAKERLE. Finite and Boundary Element Techniques in Acoustics, a Bibliography (1990-1992). *Finite Element Analysis Design*, **15**, 263-272, 1994.
- [42] C.R. MALISKA, J. FAVIO, V. DE VASCONCELLOS. An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **182**, 401-420, 2000.
- [43] A.A. MAMMOLI, M.S. INGBER. Stokes Flow Around Cylinders in a Bounded Two-Dimensionnal Domain Using Multipole-Accelerated Boundary Elements Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**, 8897-917, 1999.
- [44] P.O. MATTEI. *Rayonnement acoustique des structures. Méthodes d'équations intégrales de frontière*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1991.
- [45] L. MEBAREK. *Méthodes numériques par éléments finis de frontière pour le calcul par équations intégrales de champs acoustiques rayonnés par des structures axisymétriques*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1986.
- [46] S. MUZAFERIJA, M. PERIC. Computation of Free-Surface Flows Using Finite Volume Method and Moving Grids. *Numerical Heat Transfer*, **32**, 369-384, 1997.
- [47] S. MUZAFERIJA, M. PERIC. Computation of Free-Surface Flows Using Interface-Tracking and Interface-Capturing Methods. *Non linear Water Wave Interaction*. Computational Mechanics Publications, 1998.
- [48] S.V. PATANKAR, D.B. SPALDING. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **15**, 1787-1806, 1972.
- [49] O. PIRONNEAU. *Méthode des éléments finis pour les fluides*. Masson, 1988.
- [50] P.C. SAMES, D. MARCOULY, T.E. SCHELLIN. Sloshing in Rectangular and Cylindrical Tanks. *Journal of Ship Research*, **46** (3), 186-200, 2002.
- [51] E. SCHMIDT. *Properties of Water and Steam in SI-Units. 0-800 °C, 0-1000 bar*. Springer-Verlag, 1981.
- [52] A. SOULAIMANI, Y. SAAD. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Solving Three-Dimensionnal Free Surface Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **162**, 79-106, 1998.
- [53] M. TUTAR, A.E. HOLDO. Computational Modeling of Flow Around a Circular Cylindre in Sub-Critical Flow Regime with Various Turbulence Models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **35**, 763-784, 2001.
- [54] Z.U.A. WARSI. Conservation Form of the Navier-Stokes Equations in General Non-Steady Coordinates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **19** (2), 240-242, 1980.
- [55] O.C. ZIENKIEWICZ, J. WU. A General Explicit or Semi-Explicit Algorithm for Compressible and Incompressible Flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 457-479, 1992.

Interactions fluide/structure : concepts généraux et méthodes numériques

- [56] D. ABOURI, A. PARRY, A. HAMDOUNI. A Stable Fluid Rigid Body Interaction Algorithm : Application to Industrial Problems. Pressure Vessel and Piping, San Diego, 25-29 July 2004.
- [57] F. AXISA. *Interactions fluide structure*. Hermès, 2001.
- [58] F. AXISA. *Vibrations sous écoulement*. Hermès, 2001.
- [59] F. AXISA, R.J. GIBERT. *Non-Linear Analysis of Fluid Structure Coupled Transients in Piping Systems Using Finite Elements. Application to the Mechanical Effects in Sodium-Water Reaction in the Secondary Loop of a Pool-Type LMFBR*. Pressure Vessel and Piping, Orlando, 27 June-2 July 1982.
- [60] F. AXISA, H. HASSIS. *Orifice Plates as a Source of Vibrations in Piping Systems*. International Conference on Flow Induced Vibrations, Brighton, 20-22 May 1991.
- [61] A. BECKERT. Coupling Fluid (CFD) and Structural (FE) Models Using Finite Interpolation Elements. *Aerospace Science and Technology*, **4** (1), 13-22, 2000.
- [62] T. BELYTSCHKO, D.P. FLANAGAN. Finite Element Methods with User-Controlled Meshes for Fluid-Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**, 669-688, 1982.
- [63] Z. BENDJEDDOU, E. LONGATTE, A. ADOBES, M. SOULI. *Steam Generator Tube Vibrations : Experimental Determination Versus ALE Computation of Fluidelastic Forces*. Pressure Vessel and Piping, Cleveland, 20-24 July 2003.
- [64] P. BETTESS, O.C. ZIENKIEWICZ. Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1271-1290, 1977.
- [65] K.C. BISWAL, S.K. BHATTACHARYYA, P.K. SINHA. *Coupled Dynamic Response of Liquid Filled Composite Cylindrical Tanks with Baffles*. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, 17-22 November 2002.
- [66] D. BROU, J.C. QUEVAL, P. SOLLOGOUB, B. COLLARD, F. WITTERS, S. PISPIS, E. VIALLET. *Seismic Behaviour of PWR Reactor Cores : Whole Core Model with Fluid Structure Interaction Effects*. Flow Induced Vibration, Paris, 5-9 July 2004.
- [67] L. BRUSA, R. CIACCI, A. GRECO. Vibration Analysis of Coupled Fluid-Structure Systems : A Convenient Computational Approach. *Nuclear Engineering and Design*, **70**, 101-106, 1982.
- [68] F. CASADEI, J.P. HALLEUX, A. SALA, F. CHILLE. Transient Fluid-Structure Interaction Algorithms for Large Industrial Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3081-3110, 2001.
- [69] S.S. CHEN et al. Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 325-329, 1976.
- [70] S.S. CHEN. Fluid Damping for Circular Cylindrical Structures. *Nuclear Engineering and Design*, **63**, 81-100, 1981.
- [71] S.S. CHEN. *Flow-Induced Vibration of Cylindrical Structures*. Springer-Verlag, 1987.
- [72] P.C. CHEN, I. JADIC. Interfacing of Fluid and Structural Models via Innovative Structural Boundary Element Method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **36**, 1998.
- [73] J. CHUNG, J.M. LEE. Vibration Analysis of a Nearly Axisymmetric Shell Structure Using a New Finite Ring Element. *Journal of Sound and Vibration*, **219** (1), 35-50, 1999.

- [74] J.R. CHO, J.M. SONG. Assessment of Classical Numerical Models for the Separate Fluid Structure Modal Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **239** (5), 995-1012, 2001.
- [75] B. COSTA, J. PLANCHARD et al. Etude expérimentale des modes propres d'une plaque en contact avec un fluide lourd. *Journal de l'Acoustique*, **4**, 589-597, 1991.
- [76] J. DALE, A.E. HOLDO, D.B. SPALDING. *Fluid Structure Interaction Modeling*. Pressure Vessel and Piping, San Diego, 25-29 July 2004.
- [77] W.J.T. DANIEL. Modal Methods in Finite Element Fluid-Structure Eigenvalue Problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1161-1175, 1980.
- [78] J. DONEA, S. GUILIANI, J.P. HALLEUX. An Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method for Transiant Dynamic Fluid-Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**, 689-723, 1982.
- [79] G.C. EVERSTINE. Letter to the Editor : A Symmetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction. *Journal of Sound and Vibration*, **79**, (1), 157-190, 1981.
- [80] T. FANION. *Etude de la simulation numérique des phénomènes d'aéroélasticité dynamique. Application au problème du flottement des avions*. Thèse de Doctorat, Université Paris IX, 2001.
- [81] T. FANION, M.A. FERNANDEZ, P. LE TALLEC. Deriving Adequate Formulation for Fluid-Structure Interactions Problems : from ALE to Transpiration. *Revue européenne des éléments finis*, **9**, 681-708, 2000.
- [82] C. FARHAT, M. LESOINNE, P. LE TALLEC. Load and Motion Transfert Algorithm for Fluid-Structure Interaction Problems with Non-Matching Discrete Interfaces : Momentum and Energy Conservation, Optimal Discretization and Application to Aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **157**, 95-114, 1998.
- [83] C. FARHAT, M. LESOINNE, N. MAMAN. Mixed Explicit-Implicit Time Integration of Coupled Aeroelastic Problems : Three-Field Formulation, Geometric Conservation and Distributed Solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **21**, 807-835, 1995.
- [84] C.A. FELLIPA, K.C. PARK. Staggered Transiant Analysis Procedures for Coupled Mechanical Systems : Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **24**, 61-111, 1980.
- [85] Y. Q. FENG. *Contribution à l'étude du problème d'hydro-élasticité extérieur non linéaire par une méthode numérique éléments finis/éléments infinis*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1989.
- [86] M. A. FERNANDEZ VALERA. *Modèles simplifiés d'interaction fluide/structure*. Thèse de Doctorat, Université Paris IX, 2001.
- [87] R.J. FRITZ. The Effect of Liquids on the Dynamic Motion of Immersed Solids. *Journal of Engineering for Industry*, 167-173, 1972.
- [88] C.G. GIANNOPAPA, G. PAPADAKIS. *Toward a New Fluid-Structure Interaction Formulation : a Pressure-Velocity Methods for Solids*. Flow Induced Vibration, Paris, 6-9 July 2004.
- [89] R.J. GIBERT. *Vibration des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 69, Eyrolles, 1986.
- [90] S. W. GONG, K.Y. LAM, C.H. LU. Structural Analysis of a Submarine Pipeline Subjected to Underwater Shock. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **77** (7), 417-423, 2000.
- [91] N. GREFFET. *Simulation couplée fluide/structure appliquée aux problèmes d'instabilité non linéaire sous écoulement*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2001.

- [92] G.P. GURUSWAMY. Integrated Approach for Active Coupling of Structures and Fluid. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **27**, 788-793, 1989.
- [93] M.A. HAMDI. *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*. Thèse de Doctorat. Université de Technologie de Compiègne, 1982.
- [94] M.A. HAMDI, Y. OUSSET, G. VERCHERY. A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **13**, 139-150, 1978.
- [95] W. HUI et al. Vibration Analysis of Elastic Plate Submerged in Incompressible Viscous Fluid by Coupling Finite Element Method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **11** (1), 1-12, 1998.
- [96] J. JIANG, M.D. OLSON. Non-Linear Transient Analysis of Submerged Circular Plates Subjected to Underwater Explosion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **134**, 163-179, 1996.
- [97] E. DE LANGRE. *Fluides et Solides*. Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- [98] E. LONGATTE, Z. BENDJEDDOU, M. SOULI. *Numerical Simulation of Tube Bundle Vibrations in Cross Flows*. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, 17-22 November 2002.
- [99] E. LONGATTE, Z. BENDJEDDOU, M. SOULI. *Application of LES and DNS to Prediction of Tube Bundle Flow Induced Vibrations*. Flow Induced Vibration, Paris, 5-9 July 2004.
- [100] E. LONGATTE, Z. BENDJEDDOU, M. SOULI. *Comparison of Code Coupling Scheme for Simulation of Fluid-Structure Interaction*. Pressure Vessel and Piping, San Diego, 25-29 July 2004.
- [101] C.H. LU, Y.S. YE, G.X. WU. Coupled Analysis of Non-Linear Interaction Between Fluid and Structure During Impact. *Journal of Fluids and Structures*, **14** (1), 121-146, 2001.
- [102] Q.W. MA, G.X. WU, R.E. TAYLOR. Finite Element of Fully Non-Linear Interaction Between Vertical Cylinder and Steep Waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **36**, 265-285, 2001.
- [103] J. MAKERLE. Fluid-Structure Interaction Problems, Finite Element Approach and Boundary Elements Approaches. A Bibliography. *Finite Elements in Analysis and Design*, **31**, 231-240, 1999.
- [104] J. MATHIEU. *Simulation des interactions fluide/structure en théorie des grands déplacements*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1985.
- [105] H. MORAND, R. OHAYON. Substructure Variational Analysis of the Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems. Finite Element Results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**, 741-755, 1979.
- [106] H. J.P. MORAND, R. OHAYON. *Fluid-Structure Interaction*. Wiley & Sons, 1995.
- [107] H. MORITA et al. *Analysis for Fluid Damping of a Structure Surrounded by Liquid with Narrow Gaps*. Pressure Vessel and Piping, Atlanta, 2001.
- [108] T. NAKAMURA et al. *Seismic Test and Analysis on a Neutron Reflector in APWR Reactor Internals (Fluid Damping and Added Mass Effect)*. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, 17-22 November 2002.
- [109] R. OHAYON, R. VALID. True Symmetric Formulation for Fluid-Structure Interaction in Bounded Domains. Finite Element Results. *Numerical Methods in Coupled Systems*, 293-325, 1983.
- [110] H. OUDIN. *Etude du comportement hydroélastique de structures marines par une formulation mixte équations intégrales/éléments finis*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1986.

- [111] Y. OUSSET, M.N. SAYHI. Added Mass Computation by Integral Equation Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 1355-1373, 1983.
- [112] C. PEDRON. *Flambage dynamique des coques raidies cylindriques de révolution avec interaction fluide/structure*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1995.
- [113] J.M.T PENROSE, C.J. STAPLES. Implicit Fluid-Structure Coupling for Simulation of Cardiovascular Problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **1**, 1-13, 2001.
- [114] B. PESEUX. *Contribution à l'étude de structures partiellement ou totalement immergée en matériau homogène ou en composite*. Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1989.
- [115] B. PESEUX, F. BÉROT. Vibro-Acoustic Behavior of Submersed Cylindrical Shells : Analytical Formulation and Numerical Model. *Journal of Fluids & Structures*, **12**, 959-1003, 1998.
- [116] B. PESEUX, A. PIARD. *Dynamic Response of Submersed Structures in Bounded Domain with Gravity Waves*. Pressure Vessel and Piping, Vancouver 1998.
- [117] S. PIPERNO. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide structure*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1995.
- [118] S. PIPERNO. Explicit-Implicit Fluid-Structure Staggered Procedures with a Structural Predictor and Fluid Subcycling for 2D Inviscid Aeroelastic Simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25** (10), 1207-1226, 1997.
- [119] S. PIPERNO, C. FARHAT, B. LARROUTUROU. Partioned Procedures for the Transient Solution of Coupled Aeroelastic Problems. Part I : Model Problem, Theory and Two-Dimensional Application. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering*, **124**, 1-2, 1995.
- [120] S. PIPERNO, C. FARHAT. Partioned Procedures for the Transient Solution of Coupled Aeroelastic Problems. Part II : Energy Transfert Analysis and Three-Dimensionnall Application. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engineering*, **190**, 3147-3170, 2001.
- [121] J. PLANCHARD. Eigenfrequencies of a Tube Bundle Placed in a Confined Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **30**, 75-93, 1982.
- [122] J. PLANCHARD, M. IBNOU-ZAHIR. Natural Frequencies of Tube Bundle in an Incompressible Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, 47-68, 1983.
- [123] J.P. QUEVAT. *Couplage de la méthode des équations intégrales et de la méthode des éléments finis pour la résolution d'un problème d'hydroélasticité*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1979.
- [124] G. SANDBERG, P. GÖRANSSON. A Symmetric Finite Element Formulation for Acoustic Fluid-Structure Interaction Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **123** (3), 507-515, 1988.
- [125] J. SARRATE, A. HUERTA, J. DONEA. Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation for Fluid-Multi Rigid Bodies Interaction Problems. *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, 1998.
- [126] M.N. SAYHI, Y. OUSSET, G. VERCHERY. Solution of Radiation Problems by Collocation of Integral Formulation in Terms of Single and Double Layer Potentials. *Journal of Sound and Vibration*, **74** (2), 187-204, 1981.
- [127] M. SCHÄFER, I. TESCHAUER. Numerical Simulation of Coupled Fluid-Solid Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3645-3667, 2001.
- [128] M. SCHÄFER. *Coupled Fluid-Solid Problems : Survey on Numerical Approaches and Applications*. Pressure Vessel and Piping, Cleveland, 20-24 July 2003.
- [129] B. SCHREEJITH et al. Finite Element Analysis of Fluid-Structure Interaction in Pipeline Systems. *Nuclear Engineering and Design*, **227**, 313-322, 2004.

- [130] Y.S. SHIN, J.E. CHISUM. Modeling and Simulation of Underwater Shock Problems Using a Coupled Lagrangian-Eulerian Analysis Approach. *The Shock and Vibration Bulletin*, **4** (1), 1-10, 1997.
- [131] Y.S. SHIN, D.T. HOOKER. Damage Response of Submersed Imperfect Cylindrical Structures to Underwater Explosion. *Computers & Structures*, **60** (5), 683-693, 1996.
- [132] V.F. SINYAVASKI, V.S. FEDOTOVSKII, A.B. KUKHTIN. Oscillation of a Cylinder in a Viscous Liquid. *Pridladnaya Mekhanika*, **16** (1), 62-67, 1976.
- [133] R.M.C. SO, Y. LIU, Y.G. LAI. *Mesh Shape Preservation for Flow Induced Vibration Problems*. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, 17-22 November 2002.
- [134] A. SORIA, F. CASADEI. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Multicomponent Compressible Flow with Fluid-Structure Interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25** (11), 1263-1284, 1997.
- [135] M. SOULI, A. OUAHSINE, L. LEWIN. ALE Formulation for Fluid-Structure Interaction Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **190**, 659-675, 2000.
- [136] J. STABEL, M. REN. Fluid-Structure Interaction for the Analysis of the Dynamics of Fuel Storage Racks in the Case of Seismic Loads. *Nuclear Engineering and Design*, **206**, 167-176, 2001.
- [137] A.J. STURM, C. SONG. The Effect of Submergence on Structural Response in Confined Pools. *Nuclear Engineering and Design*, **60**, 287-296, 1980.
- [138] T. UCHIYAMA. Numerical Prediction of Added Mass and Damping for a Cylinder in Confined Incompressible Gas-Liquid Two-Phase Mixture. *Nuclear Engineering and Design*, **222**, 63-78, 2003.
- [139] N. VULLIERME, R. OHAYON, R. VALID. Vibrations harmoniques de structures élastiques immergées dans un liquide. *Bulletin de l'Association Technique Aéronautique et Maritime*, **81**, 403-423, 1982.
- [140] C.I. YANG, T.J. MORAN. Finite Element Solution of Added Mass and Damping of Oscillating Rods in Viscous Fluids. *Journal of Applied Mechanics*, **46**, 519-523, 1979.
- [141] O.C. ZIENKIEWICZ, P. BETTRESS. Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **13**, 1-16, 1978.

Couplage fluide/structure : approche théorique et analyse mathématique

- [142] B. ACHCHAB, A. AGOUZAL, L. LAAYOUNI, A. SOUSSI. Estimation d'erreurs en éléments finis pour un problème d'interaction fluide/structure. *Mathématiques Recherche et Applications*, **2** (1), 91-107, 2000.
- [143] A. BERMUDEZ, R. DURAN, R. RODRIGUEZ. Finite Element Analysis of Compressible and Incompressible Fluid-Solid System. *Mathematics of Computation*, **67** (21), 111-136, 1998.
- [144] A. BERMUDEZ, L. HERVELLA-NIETO, R. RODRIGUEZ. Finite Element Computation of the Vibrations of a Plate-Fluid System with Interface Damping. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3021-3038, 2001.
- [145] J. BOUJOT. Interaction fluide structure en régime transitoire. *La Recherche Aéronautique*, **3**, 203-209, 1984.
- [146] J. BOUJOT. Mathematical Formulation of Fluid-Structure Interaction Problems. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, **21**, 239-260, 1987.

- [147] S. CERNEAU, E. SANCHEZ-PALENCIA. Sur les vibrations des corps élastiques plongés dans les fluides. *Journal de Mécanique*, **15** (3), 1976.
- [148] C. CONCA, J. PLANCHARD, B. THOMAS, M. VANNINATHAN. *Problèmes mathématiques en couplage fluide/structure*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 85, Eyrolles, 1994.
- [149] F. FLORI. *Analyse d'un problème de couplage fluide/structure non linéaire*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, 1998.
- [150] F. FLORI, P. ORENGA. On a Non Linear Fluid-Structure Interaction Problem Defined on a Domain Depending on Time. *Journal of Nonlinear Analysis*, **38** (5), 549-569, 1999.
- [151] C. GRANDMONT. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'interaction fluide/structure*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [152] C. GRANDMONT. Existence for a Three-Dimensional Steady State Fluid-Structure Interaction Problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **4** (1), 76-94, 2002.
- [153] C. GRANDMONT, Y. MADAY. Analyse et méthodes numériques pour la simulation de phénomènes d'interaction fluide/structure. *ESIAM Proceedings*, **3**, 101-117, 1998.
- [154] V. GUIMET. *Analyse numérique et simulation de problèmes d'interaction fluide/structure en régime incompressible*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [155] C. MUREA. *Modélisation mathématique et numérique d'un problème tridimensionnel d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique*. Thèse de Doctorat. Université de Besançon, 1995.
- [156] R. PAPI. *Analyse d'un problème dynamique d'interaction fluide/structure*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, 1994.
- [157] R. PAPI, P. ORENGA. Analyse numérique d'un problème de couplage fluide structure. *Compte Rendu à l'Académie des Sciences*, **1**, 1087-1090, 1993.

Méthodes mathématiques et outils numériques

- [158] M. BELLANGER. *Traitement numérique du signal*. Masson, 1996.
- [159] T. BELYTCHKO et al. Meshless Methods : An Overview and Recent Developments. *Computer Methods Applications in Mechanical Engineering*, **139**, 3-47, 1996.
- [160] M. BONNET. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions, Eyrolles, 1995.
- [161] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1991.
- [162] F. CHATELIN. *Valeurs propres de matrices*. Masson, 1988.
- [163] Y. COUDIÈRE. Convergence Rate of A Finite Volume Scheme for the Linear Convection-Diffusion Equation on Locally Refined Meshes. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, **34** (6), 1123-1149, 2000.
- [164] F.W. COX. Efficient Algorithm for Calculating Shock Spectra on General Purpose Computers. *The Shock and Vibration Bulletin*, **53** (1), 143-161, 1983.
- [165] R. DAUTRAY, J.L LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1985.
- [166] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [167] B.S. GARBOW, J. M. BOYLE, J. J. DONGARRA, C. B. MOLER. *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide Extension*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 51, Springer-Verlag, 1977.

Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire. Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale

Résumé : Nous nous intéressons dans cette thèse à la modélisation et la simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire avec surface libre fluide. Nous définissons un cas générique d'étude pour lequel nous formulons un problème linéaire (problème aux valeurs propres du système couplé) et un problème non linéaire (problème d'évolution du système couplé, initialement au repos et soumis à une excitation dynamique). Le problème linéaire est formulé en pression/déplacement avec les équations de la dynamique linéaire pour la structure et l'équation de Laplace pour le fluide. La résolution du problème aux valeurs propres est conduite avec une méthode de couplage fort éléments finis (structure) et éléments finis/équation intégrale (fluide). Les formulations du problème modal couplé sont écrites dans avec prise en compte ou non des modes de ballonnement du fluide. Le problème aux valeurs propres ainsi obtenu est non symétrique : il est résolu avec l'algorithme de Lanczos non symétrique. Le problème non linéaire est formulé en pression-vitesse/déplacement avec les équations de la dynamique non linéaire pour la structure et les équations de Stokes pour le fluide. La résolution du problème d'évolution utilise une méthode de couplage faible. Le problème fluide est résolu avec une technique volumes finis, avec une représentation en maillage mobile, un algorithme temporel découplé en pression/vitesse et une méthode de capture d'interface pour la simulation de la surface libre. Le problème structure est résolu avec une technique éléments finis, un algorithme temporel mixte implicite/explicite. Le couplage des deux problèmes est détaillé pour les aspects de couplage en espace (gestion d'incompatibilité de maillage, projection des efforts et des déplacements, algorithme de remaillage du problème fluide) et en temps (approche explicite, gestion des oscillations numériques). Un travail de validation du code de calcul CFD utilisé pour l'étude est proposé en comparant les résultats de calcul pour deux problèmes fluides élémentaires avec les solutions analytiques correspondantes. Ce travail conduit à la définition d'un *benchmark* général de validation d'un code de calcul CFD. Une étude numérique est ensuite conduite et permet de mettre en évidence la physique des interactions fluide/structure sur ce cas d'étude (masse ajoutée, masse déplacée, couplage de modes, effets des non linéarités structure). Une application des techniques de calcul éléments finis/éléments finis à l'analyse modale de l'ensemble panier/cuve d'un réacteur nucléaire de propulsion navale permet de montrer l'importance des interactions fluide/structure dans le cas industriel.

Mots-clés : Interactions fluide/structure – Couplage fort – Couplage faible – Éléments finis – Volumes finis – Equation intégrale – Algorithme explicite – Benchmark

Numerical Simulation of a Non-Linear Coupled Fluid-Structure Problem. Application for the Design of Naval Nuclear Propulsion Structures

Abstract : The present work deals with the numerical simulation of a coupled fluid/structure problem with fluid free surface. A generic coupled fluid/structure system is defined, on which a linear problem (modal analysis) and a non-linear problem (temporal analysis) are stated. In the linear case, a strong coupled method is used. It is based on a finite element approach of the structure problem and a finite or a boundary element approach of the fluid problem. The coupled problem is formulated in terms of pressure and displacement, leading to a non-symmetric problem which is solved with an appropriate algorithm. In the non-linear case, the structure problem is described with non-linear equations of motion, whereas the fluid problem is modeled with the Stokes equations. The numerical resolution of the coupled problem is based on a weak coupling procedure. The fluid problem is solved with a finite volume technique, using a moving mesh technique to adjust the structure motion, a VOF method for the description of the free surface and the PISO algorithm for the time integration. The structure problem is solved with a finite element technique, using an explicit/implicit time integration algorithm. A procedure is developed in order to handle the coupling in space (fluid forces and structure displacement exchanges between fluid and structure mesh, fluid re-meshing) and in time (staggered explicit algorithm, dynamic filtering of numerical oscillations). The non linear coupled problem is solved using a CFD code, whose use for FSI problem is validated with a benchmark presented in this work. A comparison is proposed between numerical results and analytical solution for two elementary fluid problems. The validation process can be applied for any CFD numerical code. A numerical study is then proposed on the generic coupled case in order to describe the fluid/structure interaction phenomenon (added mass, displaced mass, mode coupling, influence of structural non-linearity). An industrial application of the finite element coupling techniques is exposed. A modal analysis is performed on a simplified model of a nuclear reactor ; this examples highlights the importance of fluid/structure effects in the industrial case.

Keywords : Fluid-Structure Interaction – Weak Coupling – Strong Coupling – Explicit Coupling – Finite Elements – Finite Volumes – Boundary Elements – Benchmark