



**HAL**  
open science

# Invariants iso-spectraux et théorèmes KAM

Thomas Wallez

► **To cite this version:**

Thomas Wallez. Invariants iso-spectraux et théorèmes KAM. Théorie spectrale [math.SP]. Université de Nantes, 2018. Français. NNT : . tel-01938728

**HAL Id: tel-01938728**

**<https://theses.hal.science/tel-01938728>**

Submitted on 28 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES  
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N°601  
*Mathématique et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Thomas WALLEZ**

« **Invariants iso-spectraux et théorèmes KAM** »

Thèse présentée et soutenue à UNIVERSITÉ DE NANTES , le 26 Octobre 2018  
Unité de recherche : **Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)**

**Rapporteurs avant soutenance :**

**M. Alain GRIGIS**, Professeur émérite, Université Paris 13

**M. Alexei IANTCHENKO**, Professeur, Université de Malmö, Suède

**Composition du jury :**

Président : **M. Luc HILLAIRET**, Professeur, Université d'Orléans

Examineurs : **M. François NICOLEAU**, Maître de conférences, Université de Nantes

**M. Petar TOPALOV**, Professeur, Northeastern University

Dir. de thèse : **M. Georgi POPOV**, Professeur, Université de Nantes.



# REMERCIEMENTS

---

Je me suis souvent vu répéter que finalement la réussite d'une soutenance de thèse tenait à deux choses. Le pot de thèse, où chacun tentera d'apporter sa petite touche culinaire personnelle, et les remerciements qui sera finalement la seule partie intelligible par la plupart des personnes présentes. C'est donc l'heure pour moi d'écrire ces lignes qui occuperont les spectateurs le temps que je déclame mon texte.

La première personne à remercier est évidemment celle qui m'a prise sous son aile le temps de ces quatre années. Merci à toi Georgi Popov. C'est grâce à toi que j'ai pu étudier certains domaines que je trouvais mystiques plus jeune (les systèmes dynamiques, la théorie KAM...). Et si la technicité demandée pour étudier ce genre de problème m'a souvent un peu dépassée tu as su te montrer rassurant en éclairant ma lanterne tout au long de cette thèse.

Je remercie aussi chaleureusement les deux rapporteurs de cette thèse Alain Grigis et Alexeï Iantchenko qui ont bien voulu accepter la lourde tâche de relire ce manuscrit pour y scruter les fautes, erreurs et maladresses parsemées. Merci à eux pour leurs rapports bienveillants.

Merci aussi à Luc Hillairet, François Nicoleau et Peter Topalov d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. J'ai eu l'occasion de vous croiser tous les trois pendant mon parcours mathématiques et je suis fier de vous voir dans ce jury. Peter je garde en mémoire cette discussion informelle un soir à la bibliothèque du CIRM dans les débuts de ma thèse. Je me sentais perdu et tu as réussi à me redonner l'espoir dont j'avais besoin pour continuer. François, je dois te remercier pour chaque cours que j'ai eu avec toi pendant mes études à l'université de Nantes. Tu as été un enseignant formidable. Tes "*Alors là, y a une astuce !*" ne cessent d'émerveiller les étudiants qui ont les chances de te côtoyer. Tu savais prendre le temps qu'il fallait pour que tout soit clair même si pour cela il fallait sacrifier le chapitre 7. Enfin merci à toi Luc pour ce TER que tu as accepté d'encadrer même si on t'a donné le sentiment, je cite, "*d'essuyer les plâtres*". Victor et moi avons pris beaucoup de plaisir à parler de mathématiques avec toi. Je ne peux pas te remercier sans évoquer celle qui a été

ma première enseignante dans le supérieur. Merci à toi Magali Hillairet de m'avoir donner mes premières armes mathématiques dans cette classe de MPSI 1 et de m'avoir permis d'essayer de rendre tout le plaisir que j'ai eu à faire des maths en me permettant à mon tour de torturer les taupins lors des traditionnelles khôlles.

Ces quatre années auront été parfois difficiles mathématiquement, mais ceux qui me connaissent bien savent que ma kryptonite c'est l'administratif<sup>1</sup>. Et si l'aventure n'est pas devenue un enfer c'est certainement en partie grâce au service secrétariat du LMJL qui est toujours prêt à nous prêter main forte au moment de maîtriser les arcanes des ordres de missions et prévisions budgétaires des rencontres doctorales. Merci donc à Ana Paula, Anaïs, Annick, Brigitte, Colette, Dominique, Katrin et Stéphanie.

Toujours dans le staff des indispensables gens qui ne font pas des maths au labo, je remercie Éric et Saïd du service informatique de veiller sur le réseau.

Merci à Claude du CRDM musicien haut en couleurs toujours prêt à discuter dans la bonne humeur avec les visiteurs de son antre même si ceux-ci pillent son trésor en embarquant des tours de livres dont ils ne liront finalement qu'une infime partie pour ensuite oublier de ramener les précieux ouvrages (Mais c'est l'occasion de se délecter des jeux de mots de ce cher Claude).

Je reviens un peu aux matheux qui rodent au LMJL. Certains auront fortement marqué mon expérience pendant ces 9 années à l'université de Nantes. Merci à Gilles Carron et ses braves <insérer-objets-mathématiques>. Érudit mathématiques toujours prêt à passer le temps nécessaire pour expliquer aux étudiants chaque subtilités d'un raisonnement. Merci pour ce stage de recherche en L3. C'est à toi que je dois d'avoir compris qu'en fin de compte le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est qu'un résultat d'algèbre linéaire. Tu n'es certainement pas étranger à ma réussite à l'agrégation tant tu as accompli un travail colossal pour que nous soyons armés au mieux. J'espère que tu me pardonnera de t'avoir piqué ton fameux tic qui permet de garder les étudiants éveillés.

Merci à Sylvain Gervais, l'alter-ego algébrique de François Nicoleau. Savant mélange de joie et de rigueur sur les sujets algébriques, tu sais rendre buvable même la plus amère des démonstrations sur les propriétés du groupe symétrique et transformer en nectar cérébral la plus simple des idées de topologie algébrique. Avoir

---

1. Mon dieu une feuille de soin !

eu l'occasion d'enseigner sur un module avec toi était presque un aboutissement pour moi tant je t'ai parfois vu comme un exemple, professionnel même lorsqu'il s'agit d'enseigner un sujet que tu n'appréciais pas intégralement.

Merci à tous les autres enseignants-chercheurs du laboratoire que j'ai pu fréquenter durant mon séjour. Pêle-mêle, le maître Zen Eric Paturel, l'homme le plus gentil du monde Friedrich Wagemann, Vincent Colin, Philippe Carmona, Colette Anné, Nicolas Pétrélis, Christophe Berton, Rodolph Turpaut, Xavier Saint-Raymond, Baptiste Chantraîne, Je-ne-suis-pas-Fred-Hérou, Hélène Mathis, Robert Petit, Laurent Piriou, Christoph Sorger, Jo Viola et tous les autres ... Le temps et la place me manquent pour que je puisse citer tous les membres du laboratoire et détailler les souvenirs que je garderais de chacun d'eux. Mais sachez qu'ils sont nombreux !

Ce laboratoire de mathématiques Jean Leray peut aussi compter sur son armada de jeunes doctorants/post doc/ATER pour rendre le cadre de travail toujours plus agréable, et le cadre de non-travail aussi d'ailleurs.

Je vais procéder par ordre chronologique en essayant de n'oublier personne.

J'ai d'abord envie de remercier les doctorants que j'ai connus lorsqu'ils étaient chargés de TD. Ils ont chacun à leur façon participé à mon envie de faire une thèse.

Un grand merci à Carlos Moraga. Merci pour les TD de calculs différentielles, merci de m'avoir fait découvrir le Geometricon et le Topologicon. Merci d'avoir toujours accepté de prendre du temps pour répondre à toutes mes questions même lorsqu'elles sortaient du cadre du cours. Tu as toujours réussi à insuffler de la vie et ta bonne humeur espagnol dans tes cours allant même jusqu'à faire apparaître une écrevisse ! Merci aussi à Salim Rivière pour les TD probas. Merci à toi aussi d'avoir accepté de prendre du temps pour répondre aussi à mes questions hors-programme. Et merci aussi pour toutes les longues discussions que nous avons eues depuis que tu es revenu au labo en qualité de PRAG. Je ne suis toujours pas sûr de savoir quelle est la bonne définition du cosinus et du produit scalaire mais au moins je sais que ça demande réflexion !

Merci à Antoine pour sa passion pour les canards et son art de l'empilement de gobelet. Je me suis essayé à cette pratique sans jamais arriver à ta cheville. Merci à Christophe pour cette bonne humeur infaillible, et surtout pour ta créativité pour les photos de carnet (Ta photo pour Antoine est à mes yeux un chef d'oeuvre). Merci aussi à ta moitié tunisienne. Ce cher Moudhaffar qui a développé une méthode infaillible pour faire régner le respect en TD (même si ça coûte cher en tableau ...).

Merci à Ilaria, qui elle aussi a une passion pour les coins, d'avoir toujours réussi à garder le sourire malgré les épreuves et les injonctions protocolaires du monde de la recherche. Merci au doctorant émérite Thomas G. J'ai essayé de suivre tes traces mais finalement ma longévité n'aura été que poussière d'étoile face à la tienne. Merci à Virgile d'avoir été essentiellement très calme même pendant le groupe de travail sur les opérateurs intégraux de Fourier qui été pourtant propice à la panique.

Après avoir fait le tour des vieux, place aux jeunes. Merci d'abord aux trois mousquetaires du bureau 9. Valentin et sa capillarité hommage à Brassens. Pierre, moins capillaire, mais tout aussi prêt à rire sur tout et n'importe quoi tant que ce n'était pas piqué des hanetons. Et Damien qui aura été une oreille attentive plus d'une fois pendant cette aventure. Aussi bien au CIRM, qu'au labo, dans les bars ou au détour d'une soirée moto. Beaucoup de bons moments ont eu lieu pendant votre séjour à tous les trois en ces murs. Votre créativité ludique n'y est sans doute pas pour rien.

Vient ensuite le temps des remerciements aux deux numéologues (ou quelque chose comme ça) que sont Victor MD et Florian. Merci à vous deux pour les nombreux coups de main informatique. Plus personnellement, merci Victor pour m'avoir fait découvrir la variation du milles feuilles charcuterie/fromage lors d'une raclette \*heavy breathing\*. Florian, j'espère que ton bassin va mieux depuis cette partie de taroinche où certains ont usé de tous les coups bas pour t'empêcher de gravir les échelons.

Merci à ceux qui ont commencé leurs thèses en même temps que moi. Je viens assez tardivement clore le rideau de notre génération.

Merci à Vytaute Pilipauskaite qui a sans doute l'un des noms les plus chantant que je connaisse. Merci Radek Novak pour les bières tchèques à Nantes et à Prague où tu fus un fantastique guide d'un soir dans cette magnifique ville qui est la tienne. Merci à Guillaume, tu es sans conteste l'une de mes plus belles rencontres pendant ces quatre ans. J'ai pu profiter un nombre incalculable de fois de ta connaissance mathématiques au moins aussi grande que ta patience et ta qualité de pédagogue. C'est aussi grâce à toi que j'ai pu découvrir autant le monde des vidéos mathématiques sur le web en particulier 3b1b. Et pour les sujets moins mathématiques je te dois la découverte d'Hollow knight/Monument Valley/Le festival ludique international de Parthenay et j'en passe. Merci pour tout ! Encore chez les géomètres/topologues, merci à Noémie pour tes fous rires sortis de nulle part quand la fatigue te rendait un peu trop sensible à mon humour. Merci à Olivier pour cette

joie inébranlable et ses bisous là où je sais. Tes mails d'insultes suite à mes fautes d'orthographe lors des annonces de séminaire des doctorants n'auront pour l'instant pas eu beaucoup d'effet. Mais promis je fais des efforts. Merci surtout à toi (et à Guillaume d'ailleurs) pour tous ces documents qui me rendent bien service dans ma nouvelle vie !

Merci à mes deux co-bureaux Thomas B et Victor VVdR. Thomas B, tu auras été un compagnon précieux pendant ces années au labo. Partageant souvent galères et doutes le temps d'une pause café. Tu auras eu à coeur d'éveiller les consciences politiques dans ce bureau occupé aux deux tiers par des trolls dont la seule action politique à consistait à battre des records à fiscal combat. Merci à toi Victor. Notre histoire a commencé il y a si longtemps qu'il y aurait trop de choses à dire entre les jeux vidéo, la bière, les jeux vidéos, les vacances à Noirmoutier, les jeux vidéo, les pâtes carbonara, les jeux vidéo... Si l'on reste dans les mathématiques je garde souvenir que tu auras été le premier à me faire découvrir que " $i^2 = -1$ "<sup>2</sup>. Dans tes remerciements tu m'as fait l'honneur de me présenter comme t'ayant ramener vers les mathématiques après t'être perdu en école d'ingénieur. Pour ma part je te dois d'avoir nourri le début de mon amour des mathématiques par ces discussions où tu me dévoilais avant l'heure certain concepts de terminale ou de prépa attisant sans cesse ma curiosité.

Merci enfin à Johan le plus nantais des angevins parisiens. Je suis content de t'avoir fait découvrir la chaleur des matchs de handball du H. Il va falloir que l'on s'organise un déplacement au stade de Coubertin pour que tu vois les ultras parisiens qui ont quand même moins de cachet que la fanfare nantaise.

Vient alors les ptits jeunes. Merci à Caroline V pour tous ces débriefs sur les vidéos de tous ces talentueux youtubeur. Merci de m'avoir convaincu de participer au Patreon de 3b1b. J'ai l'impression d'être utile à la société maintenant. Merci à Hala Gazi pour toutes les douceurs libanaises. Ta gentillesse et ton sourire était plus que bienvenue pendant ces années au labo.

Merci aux encore plus jeunes. Merci à Hélène. Après une première année plutôt calme en terme d'interactions sociales, ce fût un réel plaisir de partager des discussions autour des jeux de société et des espaces games. J'ai encore besoin de perfectionnement pour le maniement du bilig mais je ne désespère pas. J'en profite

---

2. Mais que vaut  $i^3$  alors ?



pour remercier Laura qui n'aura pas été avare en conseils pour ma nouvelle vie. Merci à Caroline R et sa passion pour les as troisièmes. Je suis encore admiratif de ton temps de trajet journalier pour venir servir la science dans la joie et la bonne humeur. Merci à Solène, aka La Bulle, pour les conseils art-déco à base de confection de tapis de bureau en feuille A4 usagées. J'en profite pour remercier Benjamin d'avoir su tenir régulièrement le rôle du 5ème homme. Merci à Zeinab pour m'avoir fait découvrir que l'expression koussi-koussa été hilarante. Merci à Maha pour les douceurs libanaises et surtout pour cette poudre de piment que tu m'as offerte. Elle réchauffe régulièrement mon coeur et mes plats. Merci à Germain que je n'oublierais jamais et certainement pas ici.

Enfin merci à mes co-bureaux de fin de thèse. Cette année avec vous deux aura été plus studieuse qu'avec les deux autres affreux jojos. Merci à Côme d'avoir été là parfois. Merci à Matthieu pour les discussions politiques et mathématiques. En ce sens tu auras brillamment repris le flambeau de Thomas B pour la conscience politique (avec le même succès) et celui de Guillaume pour les explications de tout ce que je n'avais toujours pas compris en math (avec le même succès).

Merci à Zoé qui aura réussi la prouesse inexplicable de perdre sa carte sim mais pas son téléphone. Nicolo l'infatigable sportif probabiliste qui nous aura bien aidé Victor et moi pour la préparation de nos TD de proba. Merci à Simon-va-choix, toujours partant pour boire un verre. Merci à toi de m'avoir accepté comme colocataire pour affronter l'enfer parisien.

Un grand merci à Bertrand de la cafet' pour tous les cafés/coca/thés qui furent autant d'occasion de discuter entre gentlemen. Tu auras grandement marqué ma scolarité à l'université de Nantes. J'en profite aussi pour remercier Julien Moreau qui aura été un compagnon formidable pendant mes études. Beaucoup d'évidences auront été étudiées et le coq de bruyère n'a plus de secret pour moi grâce à toi. Merci aussi à Josselin PolPotiron d'être aussi beau et génial en toutes circonstances. Julien et toi êtes devenus des amis sincères qui m'auront bien aidé à gérer les déclarations d'amour d'étudiant.

Pendant cette thèse il n'y a pas eu que des maths. Mon équilibre psychologique aura tenu en partie grâce à tous ces moldus mathématiques qui ont tous cru que je passais mon temps à jouer du tambour pendant mes recherches. Il y a le trio

Jahoo/Gueno/Luigi. Merci à vous trois pour tous les moments partagés et pour tous ceux à venir. Merci pour l'Oktoberfest surprise/express à Munich. Merci à Jahoo pour la colocation et les yaourts à la fraise. Merci à Gueno pour tes parents. Merci à Luigi pour avoir tout compris au handball. Et encore merci pour le déménagement !

Merci à tous les gens du 3SLHB pour avoir formé une seconde famille et de m'avoir permis de me défouler quand les maths me frustrait parfois. Merci de m'avoir permis de finir sur une montée obtenue dans la douleur. Mais on l'a fait les gars !

De façon assez nostalgique j'ai aussi envie de remercier Yvon Forestier, M. Godet et M. Guitteny. Mes professeurs de terminale, seconde et 3ème qui, chacun à leurs façons, m'ont fait aimer cette matière si particulière. C'est grâce à eux que j'ai pu goûter et re-goûter à la substantifique moelle des mathématiques pour la première fois.

Merci à ma famille d'avoir été présente depuis le début. Catherine, François et Anne merci d'être des frères et soeurs formidables. Merci à mes parents Bernard et Malika. La vie avec vous aura parfois été mouvementée mais après les épreuves de ces dernières années je suis heureux que vous puissiez assister à l'aboutissement de cette thèse.

Et enfin, merci à celle qui aura peut-être souffert autant que moi avec cette thèse. Merci à toi Sarah d'avoir eu la patience nécessaire pour me supporter quand parfois je gardais tout comme une cocotte minute. Mais surtout merci d'avoir résisté à l'envie de m'étriper chaque fois que j'étais en retard ou que je t'annonçait que j'avais fini dans 5 minutes. Mais surtout merci pour tous les bons moments passés et à venir. Merci pour les parties de pêche au refuge avec une guirlande de Noël. Merci d'être plus organisée que moi et de nous permettre de voyager. Merci d'être toujours partante pour jouer même si "C'est abusé la chance que j'ai". Mais surtout merci d'avoir attendu que j'ai fini mon sandwich !

Merci à tous ceux que j'ai oublié de citer. Vous êtes des gens merveilleux. Je sais que vous me pardonnerez.



# TABLE OF CONTENTS

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Formes normales de Birkhoff</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Théorème KAM pour des familles d'Hamiltoniens <math>\mathcal{C}^1</math></b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Forme Normale de Birkhoff Quantique</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>Familles <math>\mathcal{C}^1</math> de quasi-modes et invariants iso-spectraux</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Transformée de Radon</b>	<b>77</b>
<b>7</b>	<b>Transformée de Radon pour les surfaces de révolution et rigidité spectrale.</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Densités</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Intégrales oscillantes</b>	<b>96</b>
<b>C</b>	<b>Familles <math>\mathcal{C}^1</math> d'opérateurs</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>111</b>

# INTRODUCTION

---

Le but de cette thèse est d'énoncer des théorèmes de rigidité spectrale dans un contexte faisant intervenir des invariants iso-spectraux issues de la théorie KAM. Afin d'introduire les différentes notions qui apparaîtront dans la suite du texte, nous allons prendre comme point de départ l'un des problèmes les plus fameux de la géométrie spectrale. Puis nous verrons comment des généralisations naturelles de ce problème peuvent conduire à considérer les objets abstraits qui interviendront par la suite.

## 1.1 Le problème du tambour de Kac et ses généralisations

Dans un article de 1966 [18], le mathématicien polonais Marc Kac pose la question suivante :

*Can one hear the shape of a drum ? (Peut-on entendre la forme d'un tambour ?)*

D'un point de vue mathématique, sa question est la suivante. On assimile la peau d'un tambour à un sous ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  compact et connexe. Lorsque qu'une personne joue sur ce tambour, la peau de celui-ci se déforme selon l'équation des ondes. Plus précisément, si l'on note  $f(t, x)$  l'altitude de la peau à l'instant  $t$  au point  $x \in \Omega$  relativement à la position de la peau au repos et que l'on suppose que la peau du tambour est fixée au bord  $\partial\Omega$  alors la fonction  $f$  vérifie l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \Delta f = 0, \\ f(t, x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien selon les coordonnées d'espaces et  $c$  est une constante physique liée à la nature du tambour que l'on fixe ici égale à 1. Pour résoudre ce système, Kac propose de faire une séparation des variables en posant  $f(t, x) =$

$U(x)e^{i\omega t}$ . Les fonctions  $U$  solutions sont les modes fondamentaux vibratoires du tambour. La quantité  $\omega$  représente la fréquence de vibration de chacun de ces modes. Les modes de vibrations  $U$  font vibrer l'air à ces fréquences  $\omega$  ce qui produit alors le son du tambour. La solution générale  $f$  s'écrit comme une superposition de ces modes vibratoires fondamentaux. Par la séparation des variables le système devient :

$$\begin{cases} \Delta U + \omega^2 U = 0, \\ U(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette reformulation permet alors de faire un lien direct entre le son d'un tambour et les valeurs propres du laplacien sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet aux bords. Il est connu que l'ensemble de ces valeurs propres forme une suite de réels  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  qui tend vers l'infini [27].

La question de Kac peut alors se comprendre ainsi : La connaissance du spectre du laplacien sur un domaine  $\Omega$  est-il suffisant pour retrouver la forme de  $\Omega$  ? Lorsque deux domaines ont même spectre on dit qu'ils sont isospectraux. Ainsi le problème devient :

*Si pour deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  le spectre du laplacien est le même, ces deux domaines sont-ils isométriques ?*

Sous cette forme, assez lointaine des tambours, la question se transpose immédiatement à des domaines inclus dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $d$  supérieur à 2 puisque le laplacien se définit de façon naturelle sur ces espaces. On sait que la réponse à cette question est négative : Milnor avait déjà fourni deux ans auparavant un contre-exemple de deux tores en dimension 16 non-isométriques et ayant même spectre pour le laplacien [21]. Plus concrètement, en 1992 les mathématiciens Carolyn Gordon et David Webb ont exhibé deux régions du plan non-isométriques et ayant même spectre du laplacien [11]. Leurs contre-exemples sont des polygones non convexes du plan. On peut alors se poser la même question en supposant que les domaines considérés sont convexes et/ou à bord régulier. Un résultat positif dans ce sens est dû à Zelditch [32].

Si la réponse générale à la question de Kac est négative, tout espoir n'est cependant pas perdu. En effet, à défaut de pouvoir déterminer la forme exacte du tambour, certaines informations géométriques se déduisent tout de même du son de celui-ci. L'un des résultats fondamentaux dans ce sens est la loi de Weyl, déjà connue de Kac, qui s'écrit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = (2\pi)^{-d} \omega_d V(\Omega)$$

où  $N(\lambda)$  est le nombre de valeurs propres inférieures à  $\lambda$ ,  $V(\Omega)$  est le volume de  $\Omega$ ,  $\omega_d$  est le volume de la boule unité de dimension  $d$ . Ainsi on peut retrouver le volume du tambour par le son que celui-ci produit ou plus précisément par l'asymptotique du nombre de valeurs propres du laplacien. De plus dans certains cas, le deuxième terme dans le développement asymptotique de  $N$  permet de retrouver le périmètre du tambour. On peut par exemple conclure, à l'aide de l'inégalité isopérimétrique, que les disques ont chacun des sons caractéristiques parmi les tambours plans.

Le problème d'isospectralité peut aussi se formuler dans le contexte d'une variété riemannienne  $(M, g)$ . En effet, le laplacien se transpose naturellement à ce type de variété en un opérateur différentiel appelé opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$  qui est défini de façon canonique par :

$$\Delta_g(f) := \operatorname{div} \operatorname{grad}_g(f).$$

Si la variété  $M$  est compacte sans bord alors le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami est, comme dans le cas du laplacien, discret et composé de valeurs positives tendant vers l'infini. Les questions énoncées précédemment se formulent de la même façon dans ce nouveau cadre.

Un grand nombre de résultats de problèmes inverses en géométrie spectrale proviennent de l'étude de la formule de trace [12],[17],[33],[31]. Cette formule de trace, étudiée entre autres par Y. Colin de Verdière [5] J. Duistermaat et V. Guillemin [9] et S. Zelditch [30], fait le lien entre le spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami avec des invariants liés aux géodésiques périodiques comme leurs longueurs ou le spectre de l'application de Poincaré linéarisée.

On peut aussi considérer le problème de la *rigidité spectrale*. On se donne une déformation d'une variété riemannienne  $(M, g)$ , c'est à dire une famille  $\mathcal{C}^1$  de variétés riemanniennes  $(M, g_t)$ ,  $t \in [0, \delta]$ ,  $g_0 = g$  et  $\Delta_t$  les opérateurs de Laplace-Beltrami associés. On dit que la déformation est :

- *Isospectrale* si pour tout  $t \in [0, \delta]$ ,  $\operatorname{Spec}(\Delta_t) = \operatorname{Spec}(\Delta_0)$ .
- *Triviale* si il existe une famille  $\psi_t$  de difféomorphismes de  $M$  tels que  $\psi_0 = \operatorname{Id}$  et  $\psi_t^* g_t = g_0$ .

La variété riemannienne  $(M, g)$  est spectralement rigide si toute déformation isospectrale est triviale. Elle est infinitésimalement spectralement rigide si toute déformation isospectrale vérifie  $\left(\frac{d}{dt}g_t\right)_{|t=0} = 0$ . Hezari et Zelditch ont prouvé que l'ellipse est infinitésimalement spectralement rigide [15]

La rigidité spectrale des variétés riemanniennes compactes sans bord de courbure sectionnelle négative a été démontrée par V.Guillemin et D.Kazhdan en dimension deux [13], C.Croke et V.Sharafutdinov en toutes dimensions [6] et G.Paternain, M.Salo et G.Uhlmann pour les surfaces Anosov orientées [22]. La formule de trace est particulièrement utile pour les déformations  $\mathcal{C}^1(M, g_t)$  d'une variété riemannienne  $(M, g_0)$  qui a un flot géodésique Anosov puisque toutes les géodésiques périodiques sont non dégénérées et induisent une famille  $\mathcal{C}^1$  de géodésiques périodiques pour  $t$  suffisamment petit. Ceci permet de transformer le problème de la rigidité spectrale infinitésimale des variétés Anosov en un problème d'injectivité de la transformée rayon-X sur les géodésiques qui a été démontré dans le cas des variétés fermées à courbure négative en toutes dimensions [6]. De plus, pour des raisons de stabilité de structure, la rigidité spectrale infinitésimale implique la rigidité spectrale.

Ces propriétés ne sont plus valides pour des déformations de métriques riemanniennes dont le flot est proche d'être intégrable ce qui rend le problème de rigidité spectrale plus difficile dans ce cadre. La méthode de formule de trace demande des hypothèses techniques telles que la simplicité des longueurs des géodésiques périodiques (elles doivent être toutes de longueurs différentes) ainsi que la non-dégénérescence des géodésiques correspondantes et leurs itérées, ce qui n'est pas vérifié en général. Ces conditions sont non-ouvertes dans la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ . En suivant les travaux de G.Popov et P.Topalov [23] [25], nous proposons une autre méthode qui évite la formule de trace et les hypothèses associées. Cette méthode est basée sur la construction de familles  $\mathcal{C}^1$  de quasi-modes associées à des familles  $\mathcal{C}^1$  de tores invariants.

Enfin, on peut aussi choisir de considérer des opérateurs plus généraux que le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  ou l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne. On peut se demander ce qu'il se passe si l'on considère d'autres opérateurs différentiels ou plus généralement des opérateurs pseudo-différentiels. Présentons rapidement une idée de ce que sont les opérateurs pseudo-différentiels, le lecteur pouvant trouver plus de précisions dans [16], [26] et [27].

Considérons le cas de  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons d'abord quelques faits autour de la trans-



formée de Fourier. Dans la suite, les fonctions considérées appartiennent à des espaces dans lesquels les formules ont un sens. Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs complexes. La *transformée de Fourier* de  $f$ , notée  $\mathcal{F}(f)$ , est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

Cette transformée de Fourier dispose d'un grand nombre de propriétés remarquables. Notamment :

- Elle fait correspondre la dérivation à une multiplication, i.e.  $\mathcal{F}(D_{x_k} f) = \xi_k \mathcal{F}(f)$  où  $D_{x_k} = \frac{1}{i} \partial_{x_k}$ .
- Il existe une transformée de Fourier inverse qui permet de retrouver  $f$  à partir de  $\mathcal{F}(f)$ .

Rappelons qu'un opérateur différentiel linéaire  $P$  est un opérateur de la forme :

$$P(f)(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha f(x),$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \sum \alpha_i$ ,  $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$  et  $a_\alpha$  sont des fonctions sur  $\mathbb{R}^n$ . Le laplacien est un exemple de ce type d'opérateur. À l'aide des propriétés de la transformée de Fourier, ce type d'opérateur peut se réécrire sous la forme

$$P(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) f(y) dy d\xi,$$

où  $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \xi^\alpha$ . Ici la fonction  $a(x, \xi)$  est un polynôme en les variables  $\xi$ . On appelle cette fonction le *symbole* de l'opérateur différentiel  $P$ . On note parfois l'opérateur associé  $a(x, D)$ . Remarquons que le symbole d'un opérateur différentiel est toujours un polynôme. Dans le cas du laplacien, ce symbole est simplement  $\|\xi\|^2$  où la norme euclidienne.

La notion d'opérateur pseudo-différentiel apparaît alors lorsque que l'on souhaite généraliser ce type de construction pour une famille de symboles plus large que les polynômes. Les intérêts de l'étude de tels opérateurs sont multiples. Leur construction permet par exemple de transformer l'étude d'un opérateur en l'étude de son symbole et en particulier de ce que l'on appelle son *symbole principal*. Un grand nombre

de propriétés des opérateurs pseudo-différentiels se déduisent de leurs symboles principaux. L'étude de l'inversibilité par exemple est intimement liée à l'étude de son symbole principal. Certains opérateurs différentiels inversibles ont des inverses qui sont des opérateurs pseudo-différentiels mais pas différentiels. Enfin pour ce qui nous intéresse ici, certaines propriétés spectrales d'un opérateur peuvent se déduire de l'étude de son symbole.

On peut aussi définir des opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés. Ceci se fait en demandant que l'expression dans toutes cartes de ces opérateurs soient des opérateurs pseudo-différentiels sur  $\mathbb{R}^n$ . Le prix à payer est que la notion de symbole global n'est plus bien définie dans ce contexte. Cependant on peut encore associer ce que l'on appelle un symbole principal ainsi qu'un *symbole sous-principal* qui seront des fonctions sur le fibré cotangent de la variété.

On peut finalement voir la construction des opérateurs pseudo-différentiels comme une tentative de correspondance entre un certain espace de fonctions et des opérateurs. C'est en fait l'enjeu de la théorie de la quantification issue de la mécanique quantique. Il existe plusieurs façons de réaliser ce type de correspondance et nous avons ici présenté ce que l'on appelle la quantification classique.

## 1.2 Mécanique Hamiltonnienne et théorie KAM

Comme précédemment on cherche à trouver des invariants à relier au spectre d'un opérateur pseudo-différentiel. Ces invariants trouvent ici leurs origines dans la mécanique hamiltonnienne qui va nous permettre de construire un système dynamique sur le fibré cotangent de notre variété à partir du symbole principal de notre opérateur.

Nous rappelons ici quelques notions de géométrie symplectique et de mécanique hamiltonnienne, le lecteur pouvant compléter la lecture par [1] ou [8].

Une *variété symplectique*  $(M, \sigma)$  est une variété  $M$  munie d'une 2-forme  $\sigma$  fermée non dégénérée appelée *forme symplectique*. Les variétés symplectiques sont toujours des variétés de dimension paire et dans ce qui suit on supposera que nos variétés sont de dimension  $2n$ . L'exemple de référence est le fibré cotangent  $T^*M$  d'une variété quelconque  $M$  muni de la 2-forme canonique  $\sigma = d\alpha$  où  $\alpha$  est la 1-forme de Liouville donnée dans les coordonnées locales  $(x, \xi)$  de  $T^*M$  par

$$\alpha = \sum_i \xi_i dx_i \text{ aussi noté } \xi dx,$$

$$\text{et donc } \omega = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i, \text{ aussi noté } d\xi \wedge dx.$$

Un théorème de Darboux stipule que toute forme symplectique sur une variété  $M$  est localement conjuguée à la forme symplectique canonique sur un fibré cotangent de même dimension que  $M$  [20]. Les coordonnées correspondantes sont appelées coordonnées symplectiques.

Sur une variété symplectique  $(M, \sigma)$ , la non-dégénérescence de  $\sigma$  permet d'associer à toute fonction  $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$  un champ de vecteurs  $X_H$  uniquement défini par la propriété

$$\forall (x, Y) \in M \times T_x M, \sigma_x(Y, X_H(x)) = (dH)_x(Y).$$

On en déduit alors un système dynamique appelé *système hamiltonien* associé au flot de ce champ de vecteur. Dans les coordonnées locales symplectiques  $(x, \xi)$  le champ de vecteurs  $X_H$  s'exprime

$$X_H(x, \xi) = \left( \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \xi_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

On peut ensuite définir un crochet de Poisson qui munit l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$  d'une structure d'algèbre de Poisson. Le crochet de Poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  est défini par

$$\{f, g\} = \sigma(X_f, X_g).$$

Une propriété importante est que lorsque le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  est nul, alors les lignes de niveaux de  $g$  sont invariantes par le flot hamiltonien associé à  $f$ . On dit alors que  $g$  est une *intégrale première* du système hamiltonien associé à  $f$ . Remarquons que  $H$  est toujours une intégrale première du système qui lui est associé.

Les systèmes hamiltoniens qui ont un grand nombre d'intégrales premières indépendantes entre elles sont des systèmes particulièrement remarquables appelés *systèmes intégrables*. En dimension  $2n$  on demande à ce qu'il y ait  $n$  intégrales

premières indépendantes. Le théorème d'Arnold-Liouville stipule que ces systèmes ont une symétrie très forte au niveau local et un comportement simple qui permet d'avoir une expression des solutions. En substance, sous certaines hypothèses générales, il est possible de trouver localement des coordonnées symplectiques  $(\phi, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ), appelées *coordonnées actions-angles*, telles que l'hamiltonien  $H$  ne dépende que des variables d'actions  $I$ . Ainsi dans ce système de coordonnées  $H = H(I)$  et le champ de vecteur  $X_H$  est de la forme  $(\omega_I, 0)$  où  $\omega_I := \nabla_I H$ . La variété est alors localement feuilletée par des tores stables par le flot sur lesquels la dynamique est conjuguée à un flot linéaire de fréquence  $\omega_I$ . Ces tores sont appelés *tores invariants*. Sur chacun de ces tores on dit que le flot est *quasi-périodique*.

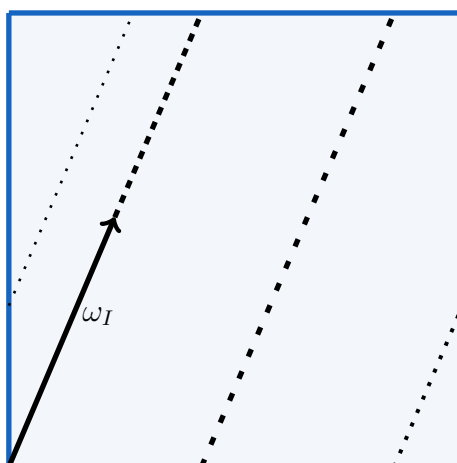


FIGURE 1.1 – Flot linéaire de fréquence  $\omega_I$  sur un tore.

On observe immédiatement ce feuilletage dans le cas du portrait de phase du pendule (cf fig. 1.2).

Ces systèmes intégrables font toutefois figure d'exceptions dans le paysage des systèmes linéaires observés en physique ou dans la nature. Néanmoins un certain nombre de systèmes physiques sont proches d'être des systèmes intégrables au sens où ils sont issus d'un hamiltonien  $H$  de la forme  $H_0 + R$  où  $H_0$  est associé à un système intégrable et  $R$  est une petite perturbation (en un sens à préciser). C'est par exemple le cas du système solaire, où l'interaction des planètes entre elles est très petite par rapport à l'action du soleil. C'est l'objet de la théorie KAM (pour Kolmogorov-Arnold-Moser) que d'étudier ce type de système et en particulier de savoir si certains des tores invariants du système associé à  $H_0$  subsistent après la

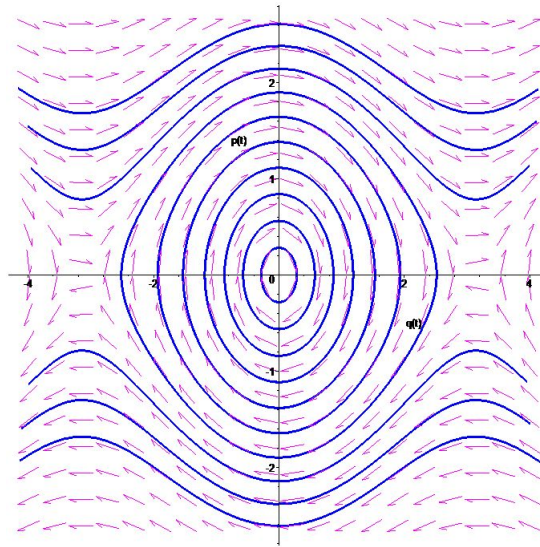


FIGURE 1.2 – Portrait de phase de l'équation du pendule  $\ddot{q} = -\sin(q)$

perturbation.

Lorsque le flot sur le tore est périodique on dit que le vecteur fréquence  $\omega$  est *résonnant* et *non-résonnant* sinon. Les vecteurs résonnants  $\omega$  sont les vecteurs tels qu'il existe un vecteur  $k \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant  $\langle \omega, k \rangle = 0$ . On peut quantifier le fait d'être proche d'une fréquence résonnante et les vecteurs qui ne le sont pas sont dit *vecteurs diophantiens*. Ce sont en général des tores invariants dont les fréquences sont diophantiennes qui subsistent après perturbation.

### 1.3 Rigidité spectrale et contexte de la thèse

On entre à présent un peu plus dans le vif du sujet de cette thèse qui traite de rigidité spectrale. On ne considère donc pas seulement un opérateur mais une famille à un paramètre d'opérateurs pseudo-différentiels qui ont tous le même spectre. On peut interpréter cette famille comme une déformation d'un opérateur pseudo-différentiel. On cherche alors à savoir si cette hypothèse d'iso-spectralité des opérateurs entraîne l'existence d'invariants de nature dynamique.

On se place dans la cas d'une variété  $M$  fermée compacte de dimension  $n \geq 2$ . On considère une famille d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre deux  $P_t = P_t(x; D)$ ,  $t \in [0; 1]$ , agissant sur les demi-densités. Plus précisément pour toute carte locale

$(\mathcal{U}; x_1, \dots, x_n)$  et pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$  on a :

$$P_t(f|dx|^{1/2}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n} e^{\langle x-y; \xi \rangle} p_t(x; \xi) f(y) dy d\xi \right) |dx|^{1/2},$$

où  $p_t$  est une fonction qui, *a priori*, dépend de  $\mathcal{U}$  et est de la forme

$$p_t(x; \xi) \sim \sum_{j=2}^{-\infty} p_{t,j}(x; \xi),$$

où  $p_{t,j}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et homogène d'ordre  $j$  en  $\xi$ .

On note  $H_t = p_{t,2}(x; \xi) \in \mathcal{C}^\infty(T^*M \setminus \{0\})$  le symbole principal de  $P_t$  qui est bien défini. Il est donné localement par la formule

$$e^{\varphi(x)} P_t(e^{i\varphi(x)}) = H_t(x; d\varphi) + \text{termes homogènes de degrés inférieurs ou égaux à un.}$$

De même le symbole sous-principal de  $P_t$  est bien défini par la formule

$$p'_{t,1}(x; \xi) = p_{t,1}(x; \xi) + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H_t}{\partial x_j \partial \xi_j}(x; \xi).$$

On dit que la famille  $P_t$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre deux si l'application  $t \mapsto p_t$  est  $\mathcal{C}^1$  dans chaque carte.

**Proposition 1.3.1.** *Soit une famille de symboles  $p_{t,j} \in \mathcal{C}^1([0; 1]; \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0))$  homogène d'ordre  $j$  pour  $j \leq 2$ .*

*Alors il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  de symboles  $t \mapsto p_t$  tels que pour tout  $t$ ,  $p_t$  est une réalisation de  $\sum_{j \leq 2} p_{t,j}$ . En d'autres termes pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , pour tout entier  $N$  positif et pour tout  $(x; \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$  tels que  $x \in K$  on a*

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( p_t(x; \xi) - \sum_{j \geq -N} p_{t,j}(x; \xi) \right) \right| \leq C_{K,N} (1 + |\xi|)^{-N-1-\beta}.$$

Le lecteur pourra trouver une démonstration de ce résultat dans [34].

On supposera dans la suite que  $P_t$  est autoadjoint dans  $L^2(M, \Omega^{1/2})$  et *elliptique*, c'est-à-dire :

$$\forall (x; \xi) \in T^*M, |H_t(x; \xi)| \geq C|\xi|^2 T^*M, \forall t \in [0; 1].$$

Ces hypothèses sont par exemple vérifiées par l'opérateur de Laplace-Beltrami dans le contexte d'une variété riemannienne.  $P_t$  étant auto-adjoint,  $H_t$  est une fonction réelle. De plus, quitte à changer de signe on peut supposer que  $H_t$  est positif. L'opérateur  $P_t$  a un spectre discret  $\sigma(P_t) = \{\lambda_{t,1} \leq \lambda_{t,2} \leq \dots\}$  où chaque  $\lambda_{t,i}$  est de multiplicité finie et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{t,n} = +\infty$ .

Dans la suite, on se placera dans des hypothèses plus faibles que l'iso-spectralité. On supposera une *iso-spectralité faible* comme dans [24] au sens suivant :

On considère une union infinie  $\mathcal{I}$  d'intervalles disjoints  $[a_k; b_k]_{k \in \mathbb{N}}$ , et deux réels  $d \geq 0$  et  $c > 0$  tels que

( $H_1$ )  $\mathcal{I} \subset (0, \infty)$  et

- $\lim a_k = \lim b_k = +\infty$ ,
- $\lim \frac{b_k - a_k}{\sqrt{a_k}} = 0$ ,
- $a_{k+1} - b_k \geq cb_k^{-d}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

( $H_2$ ) Il existe  $a \geq 1$  tel que  $\sigma(P_t) \cap [a, +\infty[ \subset \mathcal{I}$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .

On autorise ainsi le spectre à varier tout en gardant un certain contrôle sur sa variation.

Les invariants iso-spectraux que nous exhibons sont liés à des familles de *tores de Kronecker* pour le flot hamiltonien associé à  $H_t$ . Ces tores sont définis de la façon suivante :

**Définition 1.3.2** (Famille de tores de Kronecker). *Une famille de tores de Kronecker de fréquence  $\omega \in \mathbb{R}^n$  pour le flot hamiltonien associé à  $H_t$  est la donnée d'une famille de sous-variétés  $\Lambda_t(\omega)$  de  $T^*M$  telle qu'il existe une famille lisse de plongements  $f_t : \mathbb{T}^n \rightarrow T^*M$  vérifiant  $f_t(\mathbb{T}^n) = \Lambda_t(\omega)$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$  le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi + \omega s} & \mathbb{T}^n \\
 f_t \downarrow & & \downarrow f_t \\
 \Lambda_t(\omega) & \xrightarrow{\Phi_t^s} & \Lambda_t(\omega)
 \end{array}$$

où  $\Phi_t^s$  est le flot de l'hamiltonien  $H_t$  au temps  $s$ .

En d'autres termes le flot hamiltonien sur  $\Lambda_t(\omega)$  est conjugué à un flot linéaire quasipériodique sur le tore  $\mathbb{T}^n$ .

On dit que la famille est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$  si l'application  $t \mapsto f_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n, T^*M)$  est  $\mathcal{C}^1$ .

Rappelons ici quelques propriétés classiques des flots linéaires quasipériodiques sur le tore.

**Proposition 1.3.3.** Soient  $\omega \in \mathbb{R}^n$  et le flot  $F_s : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  défini pour tout  $\varphi \in \mathbb{T}^n$  et  $s \in \mathbb{R}$  par  $F_s(\varphi) = \varphi + s\omega$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\omega$  est non résonnant, i.e.  $\langle \omega, k \rangle \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ .
2. Le flot  $(F_s)$  est ergodique, i.e. toute fonction invariante par  $(F_s)$  est constante.
3. Pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{T}^n$ , la fonction moyenne temporelle  $\bar{f}$  est constante et égale à la moyenne spatiale, i.e. pour tout  $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$  :

$$\bar{f}(\varphi_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(F_s(\varphi_0)) ds = \int_{\mathbb{T}^n} f(\varphi) d\varphi.$$

4. Toutes les trajectoires de  $(F_s)$  sont denses dans  $\mathbb{T}^n$ .

On trouvera une démonstration de ces résultats dans [19].

Les tores invariants que nous étudierons dans la suite seront non résonnants. En fait leurs fréquences seront dans un ensemble de vecteurs, dit vecteurs diophantiens, qui sont des vecteurs pour lesquels nous avons un contrôle de leurs "défaut" de résonnance. Les tores non-résonnants de la "bonne dimension" offrent un panel important d'outils pour leurs études dû, entre autre, au résultat suivant :

**Théorème 1.3.4 (Herman).** Si  $\Lambda(\omega)$  est un tore de Kronecker de fréquence non résonnante, alors  $\Lambda(\omega)$  est une sous variété lagrangienne de  $T^*M$ .

*Démonstration.* On considère  $\chi^*(d\alpha)$  la 2-forme induite sur  $\Lambda(\omega)$  par l'application  $\chi : \mathbb{T}^n \rightarrow T^*M$  où  $\alpha$  est la 1-forme de Liouville sur  $T^*M$ . Elle s'écrit sous la forme :

$$\chi^*(d\alpha) = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \alpha_{kl}(\theta) d\theta_k \wedge d\theta_l,$$

avec  $\alpha_{kl}$  fonction lisse sur  $\mathbb{T}^n$ .

On note  $\phi_s$  l'application de  $\mathbb{T}^n$  sur  $\mathbb{T}^n$  conjuguée au flot  $\Phi^s$ . On a alors la relation :



$$\phi_s^*(\chi^* d\alpha) = \sum_{1 \leq k < l \leq n} \alpha_{kl}(\theta + s\omega) d\theta_k \wedge d\theta_l.$$

Or  $\phi_s = (\chi^{-1} \circ \Phi^s \circ \chi)$  et  $\Phi^s$  est un flot hamiltonien. Ainsi  $\phi_s^*(\chi^* d\alpha) = \chi^* d\alpha$ . Or  $\omega$  est non résonnant, donc toutes les trajectoires associées à  $\phi_s$  sont denses dans  $\mathbb{T}^n$ . On en déduit que les fonctions  $\alpha_{kl}$  sont constantes.

On considère maintenant le tore  $\mathbb{T}_{mn} \subset \mathbb{T}^n$  défini comme étant le tore où toutes les coordonnées sont nulles sauf celles en positions  $n$  et  $m$  qui parcourent tout  $\mathbb{T}$ . On a alors d'une part :

$$\int_{\mathbb{T}_{mn}} \chi^* d\alpha = \int_{\mathbb{T}_{mn}} \sum_{k < l} \alpha_{kl} d\theta_k \wedge d\theta_l = 4\pi^2 \alpha_{mn}.$$

D'autre part par le théorème de Stokes et puisque  $\mathbb{T}_{mn}$  n'a pas de bord :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_{mn}} \chi^* d\alpha &= \int_{\mathbb{T}_{mn}} d(\chi^* \alpha), \\ &= \int_{\partial \mathbb{T}_{mn}} \chi^* \alpha = 0. \end{aligned}$$

Finalement pour tout  $m$  et  $n$ ,  $\alpha_{mn}$  est nulle. Ainsi  $\chi^* d\alpha$  est nulle et  $\Lambda(\omega)$  est lagrangien.  $\square$

Pour chaque famille de tores invariants  $\Lambda_t(\omega)$  que l'on construit, on associe trois invariants dynamiques de la façon suivante :

- *L'action moyenne* sur le tore  $\beta_t(\omega)$  définie par

$$\beta_t(\omega) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_t(\rho_0, s)} \xi dx;$$

où  $\gamma_t(\rho_0, s)$  est la courbe intégrale associée au flot de l'hamiltonien  $H_t$  issue de  $\rho_0 \in \Lambda_t(\omega)$  parcourue du temps  $-s$  à  $s$  et  $\xi dx$  est la 1-forme de Liouville canonique sur  $T^*M$ . Cette limite est bien définie par le théorème de Birkhoff ergodique.

- *La classe de Liouville*  $I_t(\omega)$  qui se calcule de la façon suivante : on considère la base canonique  $(\gamma_i)_{i=1, \dots, n}$  de lacets du groupe fondamental du tore  $\mathbb{T}^n$ . À l'aide

du difféomorphisme  $f_t$  de  $\mathbb{T}^n$  à  $\Lambda_t(\omega)$  on ramène la 1-forme de Liouville de  $T^*M$  sur  $\mathbb{T}^n$  par  $f_t^*(\xi dx)$ . La classe de Liouville est alors le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  :

$$I_t(\omega) = \left( \int_{\gamma_1} f_t^*(\xi dx), \dots, \int_{\gamma_n} f_t^*(\xi dx) \right).$$

- La *forme normale de Birkhoff* de  $H_t$  au voisinage de  $\Lambda_t(\omega)$ . On peut démontrer l'existence d'une application exacte symplectique  $\chi_t$  d'un voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{I_t(\omega)\} \subset T^*\mathbb{T}^n$  dans un voisinage de  $\Lambda_t(\omega) \subset T^*M$  telle que  $\chi_t(\mathbb{T}^n \times \{I_t(\omega)\}) = \Lambda_t(\omega)$  et qu'ils existent deux fonctions lisses  $K_t$  et  $R_t$  vérifiant :

$$\left( \chi_t^{-1} \circ H_t \circ \chi_t \right) (\varphi, I) = K_t(I) + R_t(\varphi, I), \quad \partial_I^\alpha R_t(\varphi, I_t(\omega)) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Pour démontrer les résultats concernant l'invariance de ces quantités la stratégie sera la suivante.

- On commence par supposer l'existence d'un tore de Kronecker  $\Lambda_0(\omega)$  pour l'hamiltonien  $H_0$  de fréquence diophantienne  $\omega \in D(\kappa, \tau)$ .
- On construit une forme normale de Birkhoff homogène autour de ce tore qui permet d'écrire localement le système comme la somme d'un système intégrable et d'une perturbation. On ajoute alors une hypothèse de non-dégénérescence de cette forme normale de Birkhoff autour de  $\Lambda_0(\omega)$ .
- On démontre alors un théorème KAM qui énonce l'existence d'un temps  $\delta$  et d'un ensemble de fréquence  $\Omega_\kappa$  tels que pour tout  $\omega \in \Omega_\kappa$ , il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  de tores invariants  $\Lambda_t(\omega)$  de fréquence  $\omega$  pour  $t \in [0, \delta]$ .
- Pour chacun de ces tores on construit une famille  $\mathcal{C}^1$  de quasi-modes qui sont des solutions approchées du problème aux valeurs propres pour  $P_t$ .
- La construction de ces quasi-modes permet alors de conclure à l'invariance des quantités  $\beta_t(\omega)$ ,  $I_t(\omega)$  et  $K_t(I_t(\omega))$  pour chaque famille de tores et de démontrer le théorème principal de la thèse Th 5.0.6.

On donne ensuite une application de ce résultat de rigidité spectrale. En considérant une famille  $\Lambda_t$  une famille de tores invariants pour la famille d'hamiltonien  $H_t$

issues du théorème KAM précédant et en introduisant une forme volume  $\lambda$  appelé forme de Leray sur  $\Lambda_0$  on montre que

$$\int_{\Lambda_0} \frac{\partial H_t}{\partial t} \Big|_{t=0} d\lambda = 0.$$

On démontre ensuite une condition de rigidité spectrale pour les surfaces de révolution liée à ce dernier théorème.

# FORMES NORMALES DE BIRKHOFF

---

Dans cette partie nous allons construire des formes normales de Birkhoff. Le but est de montrer que lorsque qu'un hamiltonien admet un tore invariant ayant une fréquence dite diophantienne, alors cet hamiltonien peut se réécrire localement en un système intégrable plus une petite perturbation.

Précisons ici ce que l'on entend par fréquence diophantienne. Il y a en fait deux types de conditions diophantiennes qui vont dépendre de la nature du système dynamique que l'on étudie. Selon que celui-ci est continu ou discret on considère l'une ou l'autre des conditions.

Dans la définition qui suit on considère la norme 1 sur  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 1$ . C'est à dire

$$|k| = |(k_1, \dots, k_d)| = \sum_{j=1}^d |k_j|.$$

**Définition 2.0.1** (Conditions Diophantiennes). *Soit  $d \geq 1$ . Soit  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$  la projection canonique. Soit  $\kappa > 0$  et  $\tau > d - 1$ .*

- *On note  $D(\kappa, \tau)$  l'ensemble des éléments  $\omega \in \mathbb{T}^{d-1}$  tel qu'il existe un vecteur  $\tilde{\omega} \in \pi^{-1}(\omega)$  tel que*

$$|\langle \tilde{\omega}, k \rangle + 2\pi k_d| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau}, \quad \forall (k, k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

*Cette condition sera celle associée aux systèmes discrets.*

- *On note  $\tilde{D}(\kappa, \tau)$  l'ensemble des vecteurs  $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^d$  vérifiant*

$$|\langle \tilde{\omega}, k \rangle| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d / 0.$$

*Cette condition sera celle associée aux systèmes continus.*

Remarquons que pour les éléments  $\omega \in D(\kappa, \tau)$ , si un certain  $\tilde{\omega} \in \pi^{-1}(\omega)$  vérifie la propriété alors tous les éléments de  $\pi^{-1}(\omega)$  la vérifient aussi.

De plus ces deux ensembles sont en fait très proches comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.0.2.** *Soit  $\kappa > 0$  et  $\tau > d - 1$  alors*

- *Si  $\omega \in D(\kappa, \tau)$  alors pour tout  $\tilde{\omega}' \in \pi^{-1}(\omega)$  on a  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}', 2\pi) \in \widetilde{D}(\kappa, \tau)$ .*
- *Si  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}', \omega_d) \in \widetilde{D}(\kappa, \tau)$  alors il existe  $\kappa' > 0$  tel que  $\pi(\omega^0) \in D(\kappa', \tau)$ , où  $\omega^0 = \frac{2\pi\tilde{\omega}'}{\omega_d}$ .*

*Démonstration.* La première affirmation est une conséquence immédiate des conditions qui définissent les ensembles  $D(\kappa, \tau)$  et  $\widetilde{D}(\kappa, \tau)$ .

Pour la seconde affirmation, considérons un vecteur  $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}', \omega_d) \in \widetilde{D}(\kappa, \tau)$ . Il suffit de montrer qu'il existe  $\kappa' > 0$  tel que :

$$|\langle \tilde{\omega}', k' \rangle + 2\pi k_d| \geq \frac{\kappa'}{|k'|^\tau}, \quad \forall (k', k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}, k' \neq 0. \quad (2.1)$$

Par hypothèse, pour tout  $k = (k', k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}$  avec  $k' \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} |\langle \omega, k \rangle| &\geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \\ |\langle \omega', k' \rangle + \omega_d k_d| &\geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \\ |\langle \omega^0, k' \rangle + 2\pi k_d| &\geq \frac{\kappa^0}{|k'|^\tau}, \end{aligned}$$

en notant  $\omega^0 = \frac{2\pi\omega'}{\omega_d}$  et  $\kappa^0 = \frac{2\pi\kappa}{|\omega_d|}$ . Le but est donc de montrer que l'on peut remplacer  $k$  par  $k'$  dans le quotient quitte à changer  $\kappa^0$ . On distingue trois cas :

1. *Si  $k_d = 0$ , alors  $|k| = |k'|$  et le résultat est immédiat.*
2. *Si  $k_d \geq |\langle \omega^0, k' \rangle|$ , alors*

$$\begin{aligned} |\langle \omega^0, k' \rangle + 2\pi k_d| &\geq 2\pi|k_d| - |\langle \omega^0, k' \rangle|, \\ &\geq |\langle \omega^0, k' \rangle|, \\ &\geq \frac{\kappa^0}{|k'|^\tau}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité pouvant être vue comme une conséquence du cas précédent.

3. Si  $k_d \leq |\langle \omega^0, k' \rangle|$ , alors  $|k_d| \leq C|\omega^0||k'|$  où  $C$  est une constante indépendante de  $\omega^0$  et  $k$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned} |\langle \omega^0, k' \rangle + 2\pi k_d| &\geq \frac{\kappa^0}{(|k'| + |k_d|)^\tau}, \\ &\geq \frac{\kappa^0}{\left(1 + \frac{|k_d|}{|k'|}\right)^\tau} \times \frac{1}{|k'|^\tau}, \\ &\geq \frac{\kappa^0}{(1 + C|\omega^0|)^\tau} \times \frac{1}{|k'|^\tau}, \\ &\geq \frac{\tilde{\kappa}^0}{|k'|^\tau}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\kappa}^0 = \frac{\kappa^0}{(1+C|\omega^0|)^\tau}$ .

Finalement en prenant  $\kappa' = \min(\kappa^0, \tilde{\kappa}^0)$  on a l'inégalité (2.1). □

Les vecteurs diophantiens sont nombreux dans  $\mathbb{R}^d$  au sens où  $\tilde{D}(\kappa, \tau)$  est de mesure de Lebesgue positive et  $\bigcup_{0 < \kappa \leq 1} D(\kappa, \tau)$  est de mesure pleine. C'est à dire :

- $m(D(\kappa, \tau)) > 0$ ,
- Le complémentaire de  $\bigcup_{0 < \kappa \leq 1} D(\kappa, \tau)$  est de mesure nulle.

Comme annoncé dans l'introduction, nous faisons des hypothèses dynamiques sur le système hamiltonien associé à  $H_0$ . On suppose l'existence d'un tore de Kronecker  $\Lambda_0(\omega) \subset \{H_0 = 1\}$  de fréquence  $\omega \in \tilde{D}(\kappa, \tau)$  diophantienne, c'est à dire l'existence d'une sous variété lagrangienne  $\Lambda_0(\omega)$  et d'un difféomorphisme  $\chi$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi + \omega s} & \mathbb{T}^n \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \Lambda_0(\omega) & \xrightarrow{\Phi_0^s} & \Lambda_0(\omega) \end{array}$$

Remarquons que si  $\Lambda(\omega)$  est un tore de Kronecker alors pour  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \cdot \Lambda(\omega)$  est un tore de Kronecker de fréquence  $\lambda\omega$ .

Nous allons donc réécrire  $H_0$  localement en une forme normale de Birkhoff. L'enjeu ici est de réussir à trouver une forme normale de Birkhoff qui soit homogène. Pour cela nous allons procéder en trois temps. Premièrement nous allons montrer que lorsque qu'un système dynamique symplectique discret admet un tore de Kronecker, alors il est possible de réécrire ce système dynamique au voisinage du tore comme une somme d'un système intégrable et d'une petite perturbation. Autrement dit on redémontre un résultat de forme normale de Birkhoff pour les applications symplectiques.

Ensuite, on considère la restriction d'un hamiltonien homogène de degré 1 à une hypersurface d'iso-énergie qui est une variété de contact lorsqu'on la munit de la restriction de la 1-forme de Liouville. On suppose qu'il existe un tore de Kronecker dans cette hypersurface d'iso-énergie. On construit alors une forme normale de Birkhoff pour la forme de contact au voisinage de ce tore.

Et enfin on déduit de la forme normale de Birkhoff de la forme de contact, une forme normale de Birkhoff homogène pour  $H_0$ .

On considère donc d'abord le résultat pour des applications symplectiques.

**Théorème 2.0.3** (Forme Normale de Birkhoff pour une application symplectique). *Soit  $(X, \sigma)$  une variété symplectique exacte de dimension  $2d$  c'est à dire que  $\sigma = d\alpha$ ,  $\alpha$  étant une 1-forme. Soit  $P : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  une application symplectique exacte où  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$  sont des ouverts de  $X$ , c'est à dire que  $P^*\alpha - \alpha$  est exacte.*

*On suppose que  $P$  admet un tore de Kronecker, noté  $\Lambda(\omega)$ , de fréquence  $\omega \in D(\kappa, \tau)$  et de dimension  $d$ , c'est à dire :*

- $P(\Lambda(\omega)) \subset \Lambda(\omega)$ .
- $\forall (k, k_{d+1}) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$  tels que  $k \neq 0$ ,  $|\langle \omega, k \rangle + 2\pi k_{d+1}| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau}$ .
- *Il existe un plongement  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{U}$  tel que  $f(\mathbb{T}^d) = \Lambda(\omega)$  et la restriction de  $P$  à  $\Lambda(\omega)$  soit conjugué à la translation de vecteur  $\omega$  par  $f$ . Autrement dit,  $\forall \varphi \in \mathbb{T}^d$   $f^{-1} \circ P \circ f(\varphi) = \varphi + \omega \in \mathbb{T}^d$*

*De plus on note  $I^0$  la classe de Liouville de  $\Lambda(\omega)$ .*

*Alors il existe un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ , un symplectomorphisme exact  $\chi$  de  $\mathbb{T}^d \times D$  sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  un voisinage de  $\Lambda(\omega)$  et deux fonctions  $K \in \mathcal{C}^\infty(D')$  et  $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d \times D')$ , où  $D'$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  contenant  $D$ , tel que  $\chi^{-1} \circ P \circ \chi(\phi, I) = (\phi + \nabla K(I), I) + R(\phi, I)$  où  $\partial_I^\alpha R(\phi, I^0) = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ .*

On détaille ici une preuve inspirée par [19].

*Démonstration.* Le vecteur fréquence  $\omega$  étant diophantien, par 1.3.4 on en déduit que  $\Lambda(\omega)$  est une sous variété lagrangienne de  $X$ . On note  $I^0$  sa classe de Liouville. Rappelons qu'elle est définie par  $I^0 = \left( \int_{\alpha_1} \sigma, \dots, \int_{\gamma_d} \alpha \right)$  où  $\gamma_j$  est l'image par  $f$  des cycles fondamentaux de  $\mathbb{T}^d$ ,  $\gamma_j^0$  défini par  $\gamma_j^0(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$  où le  $t$  est en  $j$ -ème position.

D'après le théorème de Weinstein,  $\Lambda(\omega)$  admet un voisinage canonique. Autrement dit, il existe un symplectomorphisme  $\chi_0 : \mathbb{A}_D \rightarrow \mathcal{U}$  avec  $\mathbb{A}_D = \mathbb{T}^d \times D$ ,  $D = B(I^0, r_0)$ ,  $r_0 > 0$ .  $\mathbb{A}_D$  est muni de la forme symplectique canonique  $dI \wedge d\phi$  dans les coordonnées  $(\phi, I) \in \mathbb{T}^d \times D$ . De plus  $\chi_0(\varphi, I^0) = f(\varphi)$  et l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda(\omega) & \xrightarrow{P} & \Lambda(\omega) & \hookrightarrow & \mathcal{U} \\ f \uparrow & & \uparrow f & & \uparrow \chi_0 \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi + \omega} & \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\varphi \mapsto (\varphi, I^0)} & \mathbb{A}_D \end{array}$$

Le symplectomorphisme  $\chi_0$  est exact. En effet d'après [19, Th. 2.5a], il suffit de vérifier que sur tout générateur du groupe fondamentale de  $\mathbb{T}^d$ , l'intégrale du tiré en arrière de la 1-forme de Liouville de  $X$  est égale à l'intégrale de la 1-forme canonique de  $\mathbb{A}_D$ . Or :

$$\int_{\gamma_j^0} \chi_0^*(\alpha) = \int_{\gamma_j^0} f^* \alpha = I_j^0 = \int_{\gamma_j^0} Id\varphi.$$

Quitte à réduire le voisinage  $D$  et choisir  $D'$  voisinage de  $I^0$  contenant  $D$ , on considère l'application  $P_0 : \mathbb{A}_D = \mathbb{T}^d \times D \rightarrow \mathbb{A}_{D'} = \mathbb{T}^d \times D'$  définie par  $P_0 = \chi_0^{-1} \circ P \circ \chi_0$  qui correspond à l'application conjugué de  $P$  ramené sur  $\mathbb{A}_D$  via  $\chi_0$ .  $P_0$  peut s'écrire sous la forme  $P_0(\varphi, r) = (\Phi(\varphi, r), R(\varphi, r)) \in \mathbb{T}^d \times D'$ . Remarquons alors que pour tout  $\varphi \in \mathbb{T}^d$  on a :



$$\begin{aligned}
 P_0(\varphi, I^0) &= \chi_0^{-1} \circ P \circ \chi_0(\varphi, I^0), \\
 &= \chi_0^{-1} \circ P \circ f(\varphi), \\
 &= \chi_0^{-1} \circ f(\varphi + \omega), \\
 &= (\varphi + \omega, I^0).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\varphi \in \mathbb{T}^d$  on a  $\Phi(\varphi, I^0) = \varphi + \omega$  et  $R(\varphi, I^0) = I^0$ . On en déduit alors que la matrice jacobienne de  $P_0$  en un point  $(\varphi, I^0)$  est de la forme :

$$D_{(\varphi, I^0)}(P_0) = \begin{pmatrix} \text{Id} & (*) \\ 0 & D_r R_{(\varphi, I^0)} \end{pmatrix}.$$

$P_0$  étant un difféomorphisme local, sa matrice jacobienne est de rang  $2d$  et donc

$$\det(D_r R_{(\varphi, I^0)}) \neq 0, \text{ pour tout } \varphi \in \mathbb{T}^d. \quad (2.2)$$

On considère désormais les revêtements de  $\mathbb{A}_D$  et  $\mathbb{A}_{D'}$  induit par les projections  $\pi \times \text{Id} : \mathbb{R}^d \times D \rightarrow \mathbb{T}^d \times D$ . Et l'on définit  $\tilde{P}_0$  le relevé de  $P_0$  sur les revêtements avec  $\tilde{P}_0(x, r) = (\tilde{\Phi}(x, r), \tilde{R}(x, r))$ .  $\tilde{P}_0$  est alors  $2\pi$ -périodique en  $x \in \mathbb{R}^d$  et symplectique, et est donc un difféomorphisme local. On introduit le graphe de  $\tilde{P}_0$  défini par :

$$\text{Graphe}(\tilde{P}_0) = \{(x, r, \tilde{\Phi}(x, r), \tilde{R}(x, r)) \mid (x, r) \in \mathbb{R} \times D\}.$$

Et l'on considère  $\psi : \text{Graphe}(\tilde{P}_0) \rightarrow \mathbb{R}^d \times D'$  défini par  $\psi(x, r, \tilde{\Phi}, \tilde{R}) = (x, \tilde{R})$ . De par (2.2), on sait que  $\psi$  est un difféomorphisme local. Il existe donc localement en  $x$  des fonctions  $A(x, I)$  et  $B(x, I)$  telles que

$$\text{Graphe}(\tilde{P}_0) = \{(x, A(x, I), B(x, I), I) \mid (x, I) \in \mathbb{R}^d \times \tilde{R}(x, D)\}.$$

L'application  $\tilde{P}_0$  étant symplectique on en déduit que  $dA \wedge dx = dI \wedge dB$  et donc que  $\frac{\partial A}{\partial I} = \frac{\partial B}{\partial x}$ . Par le lemme de Poincaré, et parce que  $\mathbb{R}^d \times D'$  est simplement connexe, on peut donc trouver globalement une fonction  $S$  sur  $\mathbb{R}^d \times D'$  telle que

$$\text{Graphe}(\tilde{P}_0) = \{(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, I), \frac{\partial S}{\partial I}(x, I), I) \mid (x, I) \in \mathbb{R}^d \times \tilde{R}(x, D)\}.$$

On introduit une fonction  $G$  comme dans [19, §8] sous la forme

---


$$G(x, I) := \langle x, I \rangle - S(x, I).$$

Cette fonction est l'hamiltonien associé à la transformation symplectique  $\tilde{P}_0$ . Cette dénomination se justifie par le fait que l'on peut réécrire le graphe de  $\tilde{P}_0$  sous une forme rappelant les équations hamiltoniennes :

$$\text{Graphe}(\tilde{P}_0) = \left\{ \left( x, I + \frac{\partial G}{\partial I}(x, I), x + \frac{\partial G}{\partial I}(x, I), I \right) \mid (x, I) \in \mathbb{R}^d \times \tilde{R}(x, D') \right\}.$$

De plus l'invariant de Calabi de  $P_0$  étant nul, la proposition 8.6 de [19] permet de conclure que  $G$  est  $2\pi$ -périodique en  $x$ . Cette fonction passe donc au quotient sur  $\mathbb{A}_D$  et l'on notera encore  $G$  cette fonction.

On va maintenant réécrire cet hamiltonien sous une forme normale de Birkhoff. La série de Taylor de  $G$  en  $I$  au point  $I^0$  est de la forme :

$$G(x, I) \sim G(x, I^0) + \left\langle \frac{\partial G}{\partial I}(x, I^0), I - I^0 \right\rangle + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(x, I),$$

où  $g_j$  est un polynôme en  $I - I^0$  homogène de degré  $j$  et  $2\pi$ -périodique en  $x$ .

Par construction de  $G$ , on a  $\tilde{P}_0(x, I^0 + \frac{\partial G}{\partial x}(x, I^0)) = \left( x + \frac{\partial G}{\partial I}(x, I^0), I^0 \right)$ . Mais nous avons aussi  $\tilde{P}_0(x, I^0) = (x + \omega, I^0)$ . On en déduit donc que

$$\frac{\partial G}{\partial I}(x, I^0) = \omega \text{ et } \frac{\partial G}{\partial x}(x, I^0) = 0.$$

Quitte à poser  $G(x, I^0) = 0$ ,  $G$  étant défini à une constante près, le développement de Taylor de  $G$  s'écrit donc sous la forme

$$G(x, I) \sim \langle \omega, I - I^0 \rangle + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(x, I). \quad (2.3)$$

On souhaite maintenant construire deux symplectomorphismes  $\chi_1$  et  $P^0$  de  $\mathbb{A}_{D'}$  sur lui-même de sorte que en notant  $\tilde{\chi}_1$  et  $\tilde{P}^0$  les relevés de  $\chi_1$  et  $P^0$  sur  $\mathbb{R}^d \times D'$  alors  $\tilde{P}_0 \circ \tilde{\chi}_1$  et  $\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{P}^0$  aient même développement de Taylor en  $I = I^0$ . On souhaite de plus que  $\tilde{P}^0$  admette une fonction génératrice dont le développement de Taylor en  $I = I^0$  soit de la forme  $\langle x, I \rangle + K(I)$  où  $K \in \mathcal{C}^\infty(D')$  est une fonction ne dépendant pas de  $x$ .

En notant  $\mathcal{O}_m$  toute série formelle  $\sum_{j=m}^{\infty} f_j(x, I)$  où  $f_j$  est un polynôme de degré  $j$

en  $I - I^0$ , on souhaite en fait que le développement de Taylor en  $I^0$  de  $\tilde{P}_0 \circ \tilde{\chi}_1 - \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{P}^0$  soit un  $\mathcal{O}_N$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $\chi_1$  admet une fonction génératrice  $Q$  de développement de Taylor en  $I = I_0$  :

$$Q(x, I) \sim \langle x, I - I^0 \rangle + \sum_{j=2}^{\infty} q_j(x, I),$$

où  $q_j$  est un polynôme de degré  $j$  en  $I - I^0$   $2\pi$ -périodique en  $x$ .

De même on écrit le développement de Taylor de  $K$  en  $I^0$  sous la forme :

$$K(I) \sim \langle \omega, I - I^0 \rangle + \sum_{j=2}^{\infty} K_j(I),$$

où  $K_j$  est un polynôme de degré  $j$  en  $I - I^0$ .

Les premiers termes de ces développements de Taylor pour  $Q$  et  $K$  permettent de vérifier immédiatement la condition  $\tilde{P}_0 \circ \tilde{\chi}_1 - \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{P}^0 = \mathcal{O}_1$

Nous allons construire les  $K_j$  et  $q_j$  par récurrence sur  $j$ . Afin de ne pas alourdir la rédaction, on détaille ici le cas de la construction au rang  $j = 2$ . Le cas général se traitant de façon analogue.

Remarquons d'abord que grâce aux définitions précédentes nous pouvons écrire les séries formelles de Taylor de  $\tilde{P}_0, \tilde{\chi}_1$  et  $\tilde{P}^0$  en  $I^0$  :

$$\tilde{P}_0 \left( x, I + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial g_j}{\partial x}(x, I) \right) \sim \left( x + \omega + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial g_j}{\partial I}(x, I), I \right),$$

$$\tilde{P}^0(x, I) \sim \left( x + \omega + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial K_j}{\partial I}(x, I), I \right),$$

$$\tilde{\chi}_1 \left( x, I + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial q_j}{\partial x}(x, I) \right) \sim \left( x + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial q_j}{\partial I}(x, I), I \right).$$

On peut réécrire les relations précédentes sous la forme

$$\tilde{P}_0(x, I) = \left( x + \omega + \frac{\partial g_2}{\partial I}(x, I), I \right) + \mathcal{O}_2,$$

$$\tilde{P}^0(x, I) = \left( x + \omega + \frac{\partial K_2}{\partial I}(x, I), I \right) + \mathcal{O}_2,$$

---


$$\tilde{\chi}_1(x, I) = \left( x + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I), I \right) + \mathcal{O}_2.$$

Ainsi par composition des développements de Taylor et développements de Taylor de  $\partial g_2$  et  $\partial q_2$ , on a d'une part

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 \circ \tilde{\chi}_1(x, I) &= \tilde{P}_0 \left( x + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I), I \right) + \mathcal{O}_2, \\ &= \left( x + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I) + \omega + \frac{\partial g_2}{\partial I} \left( x + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I), I \right), I \right) + \mathcal{O}_2, \\ &= \left( x + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I) + \omega + \frac{\partial g_2}{\partial I}(x, I), I \right) + \mathcal{O}_2. \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{P}^0(x, I) &= \tilde{\chi}_1 \left( x + \omega + \frac{\partial K_2}{\partial I}(I), I \right) + \mathcal{O}_2, \\ &= \left( x + \omega + \frac{\partial K_2}{\partial I}(I) + \frac{\partial q_2}{\partial I} \left( x + \omega + \frac{\partial K_2}{\partial I}(I), I \right), I \right) + \mathcal{O}_2, \\ &= \left( x + \omega + \frac{\partial K_2}{\partial I}(I) + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x + \omega, I), I \right) + \mathcal{O}_2. \end{aligned}$$

Finalement,  $\tilde{P}_0 \circ \tilde{\chi}_1 - \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{P}^0 = \mathcal{O}_2$  si et seulement si

$$\frac{\partial q_2}{\partial I}(x, I) + \frac{\partial g_2}{\partial I}(x, I) = \frac{\partial K_2}{\partial I}(I) + \frac{\partial q_2}{\partial I}(x + \omega, I).$$

Les fonctions  $q_2, g_2, K_2$  étant homogènes de degré 2 en  $I - I^0$ , quitte à faire le produit scalaire par  $I - I^0$  la relation d'Euler implique qu'il est équivalent de résoudre :

$$q_2(x + \omega, I) - q_2(x, I) = h_2(x, I) - K_2(I). \quad (2.4)$$

On développe  $q_2$  et  $g_2$  en série de Fourier par rapport à la variable périodique  $x \in \mathbb{R}^d$ .

$$q_2(x, I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} q_{2,k}(I) e^{i\langle k, x \rangle},$$

$$g_2(x, I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g_{2,k}(I) e^{i\langle k, x \rangle}.$$

L'équation (2.4) est alors équivalente à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} q_{2,k}(I) e^{i\langle k, x \rangle} (e^{i\langle k, \omega \rangle} - 1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (g_{2,k}(I) e^{i\langle k, x \rangle}) - K_2(I).$$

Le terme de gauche étant nul pour  $k = 0$ , on choisit  $K_2(I) = g_{2,0}(I) = \int_{[0, 2\pi]^d} g_2(x, I) dx$  afin que celui de droite s'annule aussi et l'on pose  $q_{2,0} = 0$ .

Par unicité de la décomposition en série de Fourier, les coefficients restant de  $q_2$  sont imposés par (2) et l'on a

$$q_2(x, I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{g_{2,k}(I)}{e^{i\langle k, \omega \rangle} - 1} e^{i\langle k, x \rangle}.$$

La série ainsi que ses dérivées converge puisque  $g_2$  est lisse et que  $\omega$  est diophantien.

Finalement par récurrence on construit le développement de Taylor en  $I = I^0$  de  $Q$  et  $K$ . Par le théorème de Borel, il existe des fonctions lisses  $Q$  et  $K$  ayant ce développement de Taylor en  $I = I^0$ . On définit alors  $\chi_1$  le symplectomorphisme ayant pour fonction génératrice  $Q$  et  $P^0$  le symplectomorphisme donné par  $\chi_1^{-1} \circ P_0 \circ \chi_1$ . On définit enfin la fonction

$$R(x, I) = P^0(x, I) - (x + \nabla K(I), I).$$

Cette fonction est plate en  $I = I^0$  par construction de  $K$ .

□

**Théorème 2.0.4** (Forme Normale de Birkhoff de forme de contact). *Soit  $T^*M$  le fibré cotangent d'une variété  $M$  et  $\sigma$  la forme symplectique canonique sur  $T^*M$ . Soit  $H$  un hamiltonien positif homogène de degré 2 sur  $T^*M$ . Soit  $\Lambda(\omega) \subset \{H = 1\}$  un tore de Kronecker de fréquence diophantienne  $\omega$ . La classe de Liouville de  $\Lambda(\omega)$  est noté  $I^0 \in \mathbb{R}^n$  et l'on pose  $I^0 = (r^0, I_n^0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .*

*Alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\Lambda(\omega)$  dans  $\Sigma_1 = \{H = 1\}$ ,  $D$  un voisinage de  $r^0$*

---

dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et un difféomorphisme  $\psi : \mathbb{T}^{n-1} \times D \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{U}$  tels que  $\psi(\mathbb{T}^{n-1} \times r^0 \times \mathbb{T}) = \Lambda(\omega)$  et, en notant  $(\theta, r, t)$  les coordonnées sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times D \times \mathbb{T}$ , on a :

$$\psi^* \alpha_{|\Sigma_1} = r d\theta - \frac{K(r)}{2\pi} dt + \varepsilon,$$

où  $\alpha_{|\Sigma_1}$  est la forme de contact obtenue par restriction de la 1-forme de Liouville de  $T^*M$  à  $\Sigma_1$ ,  $K$  est une fonction lisse et  $\varepsilon$  est une 1-forme qui s'annule à l'ordre infini en  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{r^0\} \times \mathbb{T}$ .

*Démonstration.*  $\Lambda(\omega)$  est un tore de Kronecker, c'est donc en particulier une sous-variété lagrangienne de  $T^*M$ . On peut donc considérer, à l'aide du théorème de Weinstein, un voisinage tubulaire canonique  $\mathcal{U}$  de  $\Lambda(\omega)$  dans  $T^*M$ . C'est à dire qu'il existe un symplectomorphisme exact  $\chi : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \mathcal{U}$  où  $D$  est un voisinage de  $I^0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\chi(\mathbb{T}^n \times \{I^0\}) = \Lambda(\omega)$  et où  $\mathbb{T}^n \times D$  est muni de la forme symplectique  $dI \wedge d\phi$ . De plus, la restriction de  $\chi$  à  $\mathbb{T}^n \times \{I^0\}$  conjugue le flot hamiltonien de  $H$  au temps  $t$  avec la translation  $(\phi, I^0) \mapsto (\phi + t\omega, I^0)$ .

Nous allons considérer une application de Poincaré associée à ce flot. On définit

$$\Lambda^0(\omega) := \chi(\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\} \times \{I^0\}).$$

C'est une sous variété de  $\Lambda(\omega)$  qui est transverse au flot de  $H$ . On considère une section  $S$  qui est un voisinage de  $\Lambda^0(\omega)$  dans  $\{H = 1\}$  et qui est elle aussi transverse au flot.  $S$  est une variété symplectique munie de la restriction de la forme symplectique de  $T^*M$  notée  $\sigma_{|S} = d\alpha_{|S}$  avec  $\alpha$  la 1-forme de Liouville sur  $T^*M$ . On définit alors  $P$  l'application de Poincaré associé à la section  $S$  comme étant l'application de premier retour en  $S$ .

On note  $T$  le temps de premier retour associée à cette application. Ce temps vérifie la relation de Poincaré-Cartan [10]

$$P^* \alpha - \alpha = dT.$$

$P$  est donc localement un difféomorphisme symplectique exacte. Le tore  $\Lambda^0(\omega)$  vérifie les hypothèses du théorème 2.0.3 avec la fréquence  $\omega^0 = \frac{2\pi\omega'}{\omega_n}$  si l'on note  $\omega = (\omega', \omega_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . On peut donc trouver un symplectomorphisme exact  $\chi$  de  $\mathbb{T}^{n-1} \times D^0$  sur  $S$  tel que

$$P^0(\theta, r) := \chi^{-1} \circ P \circ \chi(\theta, r) = (\theta + \nabla K(r), r) + R(\theta, r),$$

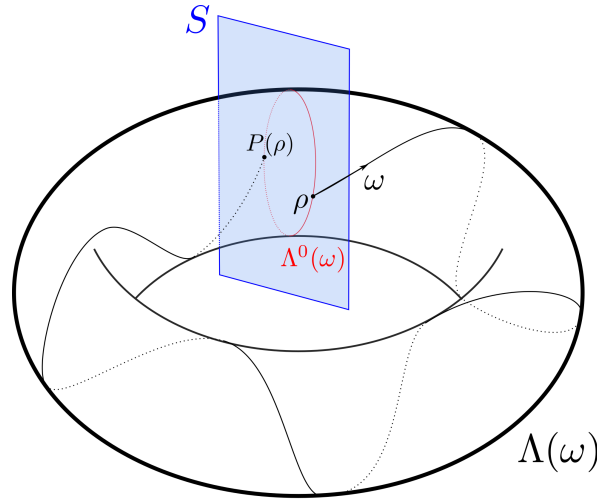


FIGURE 2.1 – Application de Poincaré.

où  $K$  et  $R$  sont des fonctions lisses données par le théorème 2.0.3 vérifiant  $\nabla K(r^0) = \omega^0$ ,  $R$  s'annule à l'ordre infini en  $r = r^0$  et  $D^0$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  contenant  $r^0$ .

La forme symplectique sur  $T^{n-1} \times D^0$  est  $\sigma^0 = dr \wedge d\theta = d(rd\theta) = d\alpha^0$ . Le symplectomorphisme  $\chi$  étant exact, il existe une fonction  $\Phi$  lisse vérifiant  $\chi^*\alpha - \alpha^0 = d\Phi$

On va définir des variétés de contact associées aux objets introduits précédemment à l'aide de cylindre d'application comme dans [10].

Premièrement on considère la variété  $S \times \mathbb{R}$  et le groupe de difféomorphismes  $\mathcal{O}$  engendré par :

$$\mathcal{F}(\rho, t) = (P(\rho), t + T(\rho)).$$

On peut munir la variété  $S \times \mathbb{R}$  d'une structure de contact via la 1-forme

$$\tilde{\alpha} = (\text{pr}_1)^*\alpha - (\text{pr}_2)^*dt,$$

où  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  sont les projections de  $S \times \mathbb{R}$  sur le premier ou le second facteur respectivement.

On considère alors le cylindre d'application  $\tilde{S} := S \times \mathbb{R} / \mathcal{O}$ . La 1-forme  $\tilde{\alpha}$  est stable par les éléments de  $\mathcal{O}$ . Cette forme de contact passe donc au quotient et permet de munir  $\tilde{S}$  d'une forme de contact que nous noterons encore  $\tilde{\alpha}$ .

Il existe un difféomorphisme entre  $\tilde{S}$  et un voisinage de  $\Lambda(\omega)$  dans  $\mathcal{U}$  qui envoie

---

la forme de contact  $\tilde{\sigma}$  sur la forme de contact de  $\{H = 1\}$  induite par la forme symplectique de  $T^*M$  [10].

De la même façon on construit une variété de contact  $\tilde{S}^0$  à partir de l'application  $P^0$ . On considère la variété  $S^0 := \mathbb{T}^{n-1} \times D^0$  ainsi que le groupe de difféomorphismes  $\mathcal{O}^0$  de  $S^0 \times \mathbb{R}$  engendré par :

$$\mathcal{F}^0(\theta, r, t) = (P^0(\theta, r), t + f(\theta, r)),$$

où  $df = (P^0)^*\alpha^0 - \alpha^0$ . La fonction  $f$  existe car  $P^0$  est exacte comme composée d'applications exactes. De plus cette condition sur  $f$  et la définition de  $P^0$  implique que

$$\begin{aligned} df &= rd(\theta + \nabla K(r)) + \varepsilon - rd\theta, \\ df &= rd\nabla K(r) + \varepsilon, \\ df &= d(\langle r, \nabla K(r) \rangle - K(r)) + \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où  $\varepsilon$  est une 1-forme s'annulant à l'ordre infini en  $r = r^0$ . Pour la suite, on impose comme condition initiale sur  $f$  la relation

$$f(0, r^0) = T(\chi(0, r^0)) + \Phi((0, r^0) - \Phi \circ P^0(0, r^0)). \tag{2.6}$$

Comme pour  $S \times \mathbb{R}$ , on munit la variété  $S^0 \times \mathbb{R}$  de la forme de contact

$$\tilde{\alpha}^0 = (pr_1)^*\alpha^0 - (pr_2)^*dt.$$

Cette forme de contact est stable par les éléments de  $\mathcal{O}^0$ . On définit alors la variété de contact  $\tilde{S}^0 := S^0/\mathcal{O}^0$  muni de la forme

$$\tilde{\sigma}^0 = rd\theta - dt$$

**Lemme 2.0.5.** *Les variétés de contact  $\tilde{S}$  et  $\tilde{S}^0$  sont contactomorphes.*

*Démonstration.* On considère l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S^0 \times \mathbb{R} &\rightarrow S \times \mathbb{R} \\ (\theta, r, t) &\mapsto (\chi(\theta, r), t + \Phi(\theta, r)). \end{aligned}$$



Alors cette application vérifie la relation

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}^0. \quad (2.7)$$

En effet on a d'une part

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \circ \mathcal{F}^0(\theta, r, t) &= (\chi \circ P^0(\theta, r), t + f(\theta, r) + \Phi \circ P^0(\theta, r)) \\ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}(\theta, r, t) &= (P \circ \chi(\theta, r), t + \Phi(\theta, r) + T \circ \chi(\theta, r)). \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} dT &= P^* \sigma - \sigma, \\ dT &= (\chi^{-1})^* ((P^0)^* (\chi^* \sigma)) - \sigma, \\ \chi^* dT &= P^{0*} (d\Phi + \sigma^0) - \chi^* \sigma, \\ d(T \circ \chi) &= d(\Phi \circ P^0) + df + \sigma^0 - \chi^* \sigma, \\ d(T \circ \chi) &= d(\Phi \circ P^0) + df + \sigma^0 - \chi^* \sigma, \\ d(T \circ \chi) &= d(\Phi \circ P^0) + df - d\Phi. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité associée à la condition initiale 2.6 sur  $f$  implique l'égalité (2.7).

Ainsi l'application  $\mathcal{G}$  passe au quotient. Et finalement

$$\mathcal{G}^*(\alpha - dt) = \chi^* \alpha - dt - d\Phi = \alpha^0 - dt$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

On souhaite maintenant construire un difféomorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{T}^{n-1} \times D^0 \times \mathbb{R}$  tel que

$$\psi^{-1} \circ \mathcal{F}^0 \circ \psi(\theta, r, t) = (\theta, r, t + 2\pi).$$

Autrement dit, on souhaite trouver un changement de variable tel que  $\mathcal{O}^0$  soit engendré par  $(\theta, r, t) \mapsto (\theta, r, t + 2\pi)$ .

Premièrement, pour  $(\theta, r)$  fixé, on fait le changement de variable  $t = f(\theta, r)s/2\pi$  par rapport à la variable réelle.

Ceci est bien un changement de variable au voisinage de  $r = r^0$  car  $f$  y est strictement positive. En effet, considérons un point  $\rho_0 \in \Lambda_0(\omega)$ . On pose pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho_j = P^j(\rho_0)$ . On a

$$\begin{aligned} T(\rho_j) &= f(\chi^{-1}(\rho_j)) + \Phi(\chi^{-1}(\rho_{j+1})) - \Phi(\chi^{-1}(\rho_j)), \\ &= f(\chi^{-1}(\rho_0)) + \Phi(\chi^{-1}(\rho_{j+1})) - \Phi(\chi^{-1}(\rho_j)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^N T(\rho_j) = f(\chi^{-1}(\rho_0)).$$

Par le théorème ergodique de Birkhoff, il existe une mesure  $\mu_0$  sur le tore  $\Lambda_0(\omega)$  telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^N T(\rho_j) = \int_{\Lambda_0(\omega)} T(\rho) d\mu_0.$$

Cette quantité est strictement positive puisque la fonction  $T$  du temps de premier retour est strictement positive.

Dans les nouvelles coordonnées  $(\theta, r, s)$  le groupe  $\mathcal{O}^0$  est engendré par

$$(\theta, r, s) \mapsto (P^0(\theta, r), s + 2\pi).$$

Et la forme de contact sur  $\tilde{S}^0$  devient  $r d\theta - d(\frac{f(\theta, r)s}{2\pi})$ .

On souhaite maintenant faire un changement de variable de façon à identifier  $P^0$  à l'identité. On considère  $\kappa$  une fonction lisse à support compact sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\kappa(s) = 0$  au voisinage de 0 et  $\kappa(s) = 1$  au voisinage de  $2\pi$ .

On introduit la famille  $J^s$  de difféomorphismes de  $\mathbb{T}^{n-1} \times D^0$  pour  $s \in [0, 2\pi]$  défini par :

$$J^t(\theta, r) = \left( \theta + \frac{t}{2\pi} \nabla K(r), r \right) + \kappa(t) R \left( \theta + \left( \frac{t}{2\pi} - 1 \right) \nabla K(r), r \right).$$

Cette famille constitue un chemin lisse de difféomorphisme entre l'identité  $\text{Id} = J^0$

et  $P^0 = J^1$ .

On prolonge cette famille à  $s \in \mathbb{R}$  par la relation

$$J^s(\theta, r) = P^0 \circ J^{s-2\pi}(\theta, r).$$

La fonction  $J^s(\theta, r)$  dépend de façon lisse de  $(\theta, r, t)$ . Et de plus par construction

$$J^s(\theta, r^0) = (\theta + t\omega^0, r^0).$$

On définit alors le difféomorphisme  $\psi(\theta, r, t) = (J^t(\theta, r), t)$ . On vérifie que  $\psi$  a les propriétés demandées. En effet en notant encore  $(\theta, r, t)$  les nouvelles coordonnées sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times D^0 \times \mathbb{R}$ , la forme  $\tilde{\alpha}^0$  devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^0 &= \langle r, d(\theta + t\nabla K(r)) \rangle - d\langle t, r, \frac{\nabla K(r)}{2\pi} \rangle - t \frac{K(r)}{2\pi} + \varepsilon, \\ &= rd\theta - \frac{K(r)}{2\pi} dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est une 1-forme différentielle ayant un zéro d'ordre infini aux points  $(\theta, r^0, t) \in \mathbb{T}^n \times D^0 \times \mathbb{R}$ . □

**Théorème 2.0.6** (Forme normale de Birkhoff homogène). *Soit  $T^*M$  le fibré cotangent d'une variété  $M$  et  $\sigma$  la forme symplectique canonique sur  $T^*M$ . Soit  $H$  un hamiltonien positif homogène de degré deux sur  $T^*M$ . Soit  $\Lambda(\omega)$  un tore de Kronecker inclus dans  $\{H = 1\}$ .*

*Alors ils existent un voisinage conique  $V$  de  $\Lambda(\omega)$  dans  $T^*M$ , un ouvert conique  $\tilde{V}$  de  $T^*\mathbb{T}^n$ , une application symplectique homogène de degré un  $\chi : \tilde{V} \rightarrow V$  et deux fonctions homogènes de degré deux  $K_0$  et  $R_0$  vérifiant*

$$H \circ \chi(\phi, I) = K_0(I) + R_0(\phi, I),$$

avec  $\partial_I^\alpha R_0(\phi, I^0) = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

*Démonstration.* On reprend les notations et objets introduits dans la démonstration précédente.

On construit une fonction sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times D \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  telle que

$$h(\theta, r, t, \tau) = h(r, \theta) \text{ et } h(r, -\frac{K(r)}{2\pi}) = 1.$$

On souhaite de plus que cette fonction vérifie une condition d'homogénéité de la forme :

$$\forall \lambda > 0, \quad h(\theta, \lambda r, t, \lambda \tau) = \lambda h(\theta, r, t, \tau). \quad (2.8)$$

Cette condition nous permettra d'identifier cette fonction à une fonction homogène d'ordre 1 sur  $T^*\mathbb{T}^n$ .

Pour construire une telle fonction, on considère l'application

$$\begin{aligned} \rho : D \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \\ (r, \lambda) &\mapsto \left( \lambda r, -\lambda \frac{K(r)}{2\pi} \right). \end{aligned}$$

Quitte à réduire  $D$ ,  $\rho$  est un plongement. En effet, le déterminant de la matrice jacobienne de  $\rho$  au point  $(r^0, \lambda)$  est :

$$\begin{aligned} \det D_{(r^0, \lambda)} \rho &= \begin{vmatrix} \lambda I_n & r^0 \\ -\lambda \nabla \frac{K(r^0)}{2\pi} & -\frac{K(r^0)}{2\pi} \end{vmatrix}, \\ &= - \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \left( K(r^0) - \langle r^0, \omega \rangle \right), \\ &= \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^n f(\theta, r^0). \end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie par la relation 2.5. En effet,  $K$  étant défini à une constante près, quitte à rajouter une constante à  $K$  on peut supposer que

$$f = \langle r, \nabla K(r) \rangle - K(r) + \varepsilon, \quad (2.9)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction s'annulant à l'ordre infini en  $r = r^0$ .

On définit alors  $h$  par la formule

$$h(\theta, r, t, \tau) = h(r, \tau) = pr_2 \circ \rho^{-1}(r, \tau),$$

où  $pr_2(r, \lambda) = \lambda$ . Cette fonction est bien homogène sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times D \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  au sens de (2.8) et vérifie  $h(r, -\frac{K(r)}{2\pi}) = 1$ .

On peut alors identifier le voisinage construit au théorème précédent à un sous-ensemble  $\mathcal{U}_0$  de  $\{h = 1\} \subset T^*\mathbb{T}^{n-1} \times T^*\mathbb{T}$  via l'injection

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{T}^{n-1} \times D \times \mathbb{T} &\rightarrow T^*\mathbb{T}^{n-1} \times T^*\mathbb{T} \\ (\theta, r, t) &\mapsto (\theta, r, t, -\frac{K(r)}{2\pi}). \end{aligned}$$

On peut alors étendre le difféomorphisme  $\psi$  du théorème 2.0.4 par homogénéité en un difféomorphisme homogène  $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow V$  où  $\tilde{V}$  est un ouvert conique de  $T^*\mathbb{T}^n$  tel que  $\tilde{V} \cap \{h = 1\} = \mathcal{U}_0$  et  $\mathcal{U}$  est un ouvert conique de  $T^*M$  tel que  $V \cap \{H = 1\} = \mathcal{U}$ . Ainsi, en notant  $\alpha$  la 1-forme de Liouville sur  $T^*M$ ,

$$\tilde{\psi}^*\alpha = rd\theta + \tau dt + \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est une 1-forme s'annulant à l'ordre infini en  $r = r^0$ .

Les propriétés d'homogénéité impliquent de plus que

$$\tilde{\psi}^*(H) = h^2.$$

On considère l'application  $T^*\mathbb{T}^{n-1} \times T^*\mathbb{T} \ni (\theta, r, t, \tau) \mapsto (\theta, t, r, \tau) = (\phi, I) \in T^*\mathbb{T}^n$ . Ce nouveau système de coordonnées permet de passer tout les éléments construits sur  $T^*\mathbb{T}^n$ . Nous noterons ces éléments de la même façon. Ainsi on a une application symplectique, que nous noterons encore  $\tilde{\psi} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$  vérifiant

$$\tilde{\psi}^*\alpha = Id\phi + \varepsilon.$$

où  $\varepsilon$  est une 1-forme s'annulant à l'ordre infini en  $I = I^0$ .

Par un théorème de Moser-Weinstein [28], on peut corriger le terme  $\varepsilon$  en  $I = I^0$ . Il existe en fait un changement de variable  $\lambda$  homogène de degré 0 vérifiant

$$\lambda = \text{identité} + O(|I - I^0|^\infty),$$

en  $I = I^0$  et  $\lambda^*\tilde{\psi}^*\alpha = Id\phi$ . Ainsi  $\Psi = \tilde{\psi} \circ \lambda$  est un symplectomorphisme. Et l'on a alors

$$\Psi^*(H)(\phi, I) = h^2(I) + \varepsilon(\phi, I)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction s'annulant à l'ordre infini en  $I = I^0$ .

Il suffit alors de prendre  $K_0 = h^2$  et  $R_0 = \varepsilon$ .

□

---

**Définition 2.0.7.** *On dira que la forme normale de Birkhoff est non dégénérée si  $\det(\partial^2 K_0(I_0)) \neq 0$ .*

Dans la suite on supposera que la forme normale de Birkhoff est non dégénérée.



# THÉORÈME KAM POUR DES FAMILLES D'HAMILTONIENS $C^1$

---

Dans cette partie nous essayons de répondre à deux questions. La première question que l'on se pose est de savoir si la forme normale de Birkhoff pour  $H_0$  peut se prolonger pour tout les  $H_t$ . Si tel est le cas cela implique que les tores invariants subsistent pendant la déformation. Le problème du temps d'existence des tores invariants pendant une déformation est en fait un problème difficile. D'autre part, une autre question liée à la théorie KAM est de prouver que lorsqu'un système hamiltonien admet un tore de Kronecker ayant de bonnes propriétés alors il existe un grand nombre d'autres tores de Kronecker au voisinage de ce premier tore. Ces différents tores pouvant éventuellement être paramétrés par leurs fréquences respectives.

La réponse que nous apportons aux deux questions sera la suivante. Si l'on suppose que  $H_0$  admet un tore de Kronecker  $\Lambda_0(\omega)$  de fréquence diophantienne  $\omega \in \widetilde{D}(\kappa, \tau)$  et que la forme normale de Birkhoff au voisinage de ce tore est non dégénérée alors il existe  $\delta \in [0, 1]$  tel qu'il existe un grand nombre de familles de tores de Kronecker pour  $t \in [0, \delta]$ . De plus on peut construire une forme normale de Birkhoff globale pour  $t \in [0, \delta]$  pour tous ces tores.

**Théorème 3.0.1** (Théorème KAM et Forme Normale de Birkhoff). *On considère une famille  $C^1$  d'hamiltoniens  $H_t$  homogènes d'ordre 2 sur  $M$  pour  $t \in [0; 1]$ . On suppose qu'il existe un tore de Kronecker  $\Lambda_0(\omega_0) \subset \{H_0 = 1\}$  pour  $H_0$  avec  $\omega_0 \in D(\kappa_0, \tau)$ , où  $0 < \kappa_0 \leq 1$  et  $\tau > n - 1$  et l'on suppose que  $\omega_0$  est de densité de Lebesgue positive dans  $\widetilde{D}(\kappa_0, \tau)$ .*

*On suppose de plus que la forme normale de Birkhoff de  $\Lambda_0(\omega_0)$  est non dégénérée.*

*Alors il existe  $0 < \kappa_1 \leq \kappa_0$  tel que pour tout  $0 < \kappa \leq \kappa_1$ , il existe  $\delta = \delta(\kappa)$  et un ensemble conique  $\Omega_\kappa \subset \mathbb{R}^n$  de mesure de Lebesgue positive tel que  $\Omega_\kappa \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset$*



$\widetilde{D}(\kappa, \tau)$  et  $\omega_0 \in \Omega_\kappa$  est un point de densité de Lebesgue positive dans  $\Omega_\kappa$ . De plus :

- (i) Pour tout  $\omega \in \Omega_\kappa$ , il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t \in [0, \delta(\kappa)]$  de tore de Kronecker  $t \mapsto \Lambda_t(\omega)$  de  $H_t$  de fréquence  $\omega$ .
- (ii) Il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t \in [0, \delta(\kappa)]$  de transformations homogènes d'ordre 1 canoniques exactes  $\chi_t : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \mathcal{U} \subset T^*M \setminus 0$  où  $D$  est un voisinage conique de  $I^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U}$  est un voisinage conique de  $\Lambda_0(\omega_0)$  tel que :

$$(H_t \circ \chi_t)(\varphi, I) = K_t(I) + R_t(\varphi, I)$$

où  $K_t$  et  $R_t$  sont homogènes d'ordre 2 en  $I$ .  $K_t$  est non dégénéré sur  $D$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial_I^\alpha R_t(\varphi, I) = 0$  pour tout  $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$  avec  $E_{t,\kappa} = \{I \in D \mid \nabla K_t(I) \in \Omega_\kappa\}$ .

*Démonstration.* En utilisant le Théorème 2.0.6 on obtient une famille  $\mathcal{C}^1$  d'hamiltoniens

$$[0, 1] \ni t \rightarrow \widetilde{H}_t := H_t \circ \widetilde{\chi}_0 \in C^\infty(\mathbb{A}_0, \mathbb{R})$$

homogènes d'ordre 2 telle que

$$\widetilde{H}_0(\varphi, I) = (H_0 \circ \widetilde{\chi}_0)(\varphi, I) = K(I) + R(\varphi, I)$$

où  $\widetilde{\chi}_0$  est une application canonique et  $K$  et  $R$  sont des fonctions homogènes d'ordre 2 en  $I$  et

$$\partial_I^\alpha R(\varphi, I^0) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad (3.1)$$

Soit  $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times D$  où  $D = \mathbb{R}_+^* \cdot B(I^0, r_0)$  est conique,  $\mathbb{R}_+^* := ]0, +\infty[$ , et  $B(I^0, r_0)$  est la boule de centre  $I^0$  et rayon  $r_0 > 0$ . La forme normale de Birkhoff de  $H_0$  est non-dégénérée en  $I_0$ , i.e.  $\det(\partial^2 K(I_0)) \neq 0$ . Quitte à diminuer  $r_0 > 0$  on suppose que

$$\nabla K : D \longrightarrow D^* := \nabla K(D) \text{ est un difféomorphisme.} \quad (3.2)$$

La transformée de Legendre  $K^*$  de  $K$  est définie par

$$K^*(\xi) := \text{Crit.val.}_{x \in D} \{\langle x, \xi \rangle - K(x)\}$$

ce qui est équivalent à

$$K(x) + K^*(\xi) = \langle x, \xi \rangle, \text{ où } x \in D \text{ et } \xi = \nabla K(x) \in D^*. \quad (3.3)$$

On a  $K^* \in C^\infty(D^*, \mathbb{R})$  et  $\nabla K^* : D^* \rightarrow D$  est l'inverse de (3.2). De plus,  $D^{**} = D$  et  $K^{**} = K$ .

Soit  $0 < a_0 \leq |\omega_0|/2$ . On introduit

$$\Omega = \Omega(a) = \mathbb{R}_+^* \cdot B(\omega_0, a) \subset D^*,$$

où  $0 < a \leq a_0$ . On a  $\text{dist}(I^0, \mathbb{R}^n / \nabla K^*(\Omega(a))) \leq Ca$ , où  $C > 0$  ne dépend pas de  $a$ , donc  $\Omega(a) \subset D^*$ , si  $a_0$  est suffisamment petit. On pose

$$\kappa = a^2.$$

Notons  $\tilde{\Omega}_\kappa$  l'ensemble de fréquences diophantiennes  $\omega \in \Omega(a)$  telles que

1.  $\tilde{\Omega}_\kappa \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset \tilde{D}(\kappa, \tau)$ ,
2. la distance de  $\omega/\|\omega\|$  au complément  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  de  $\Omega$  est  $\geq 2\kappa$ .

Notons que si  $\Lambda(\omega)$  est un tore de Kronecker de  $H_t$  de fréquence  $\omega$  alors  $\lambda\Lambda(\omega)$  est aussi un tore de Kronecker de  $H_t$  de fréquence  $\lambda\omega$  pour tout  $\lambda > 0$ . En utilisant le Théorème 9.1 [24] on obtient

**Théorème 3.0.2** (Théorème KAM homogène). *Sous les hypothèses de Théorème 3.0.1 il existe  $a_0 > 0$  et pour tout  $0 < a \leq a_0$  il existe  $\delta = \delta(a) > 0$  et une famille  $\mathcal{C}^1$  d'applications*

$$[0, \delta] \ni t \mapsto \Psi_t = (U_t, V_t) \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \Omega(a); \mathbb{T}^n \times D), \quad \Omega = \mathbb{R}_+^* \cdot B(\omega_0, a),$$

homogènes d'ordre 1 telle que

(i)

$$\forall \omega \in \Omega_\kappa, \quad [0, \delta] \ni s \mapsto \Lambda_t(\omega) = \Psi_{t,\omega}(\mathbb{T}^n)$$

est une famille  $\mathcal{C}^1$  de tores invariants de Kronecker de champs des vecteurs hamiltonien  $X_{H_t}$  de fréquence  $\omega$ , où  $\Psi_{t,\omega} := \Psi_t(\cdot; \omega)$ . De plus, pour tout  $\omega \in \Omega_\kappa$  et  $s \in \mathbb{R}$  le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n & \xrightarrow{R_{s\omega}} & \mathbb{T}^n \\ \downarrow \Psi_{t,\omega} & & \downarrow \Psi_{t,\omega} \\ \Lambda_t(\omega) & \xrightarrow{\Phi_t^s} & \Lambda_t(\omega) \end{array}$$

où  $R_{s\omega}(\phi) = \phi + s\omega \pmod{2\pi}$ .

(ii) il existe  $C > 0$  indépendant de  $a$  tel que

$$\kappa \left| \partial_\varphi^\alpha (\kappa \partial_\omega)^\beta (U_t(\varphi; \omega) - \varphi) \right| + \left| \partial_\varphi^\alpha (\kappa \partial_\omega)^\beta (V_t(\varphi; \omega) - \nabla K^*(\omega)) \right| \leq C a^3 \kappa \quad (3.4)$$

pour tout  $t \in [0, \delta]$ ,  $(\varphi, \omega) \in \mathbb{T}^n \times B(\omega_0, a)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha + \beta| \leq 3$ .

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème on considère  $\widetilde{H}_t = K + (R + H_t - H_0)$ ,  $t \in [0, \delta]$  comme une petite perturbation de  $K$  dans  $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times D$ , en prenant  $\delta = \delta(a) > 0$  suffisamment petit et en utilisant (3.1) on peut supposer que

$$\|\widetilde{H}_t - K\|_{C^\ell} = \|R + H_t - H_0\|_{C^\ell} \leq \|R\|_{C^\ell} + \|H_t - H_0\|_{C^\ell} \leq C a^3 \kappa^2, \quad (3.5)$$

où  $C^\ell(\mathbb{T}^n \times B(\omega_0, a))$  est l'espace de Hölder d'indice  $\ell \notin \mathbb{N}$  et  $\ell > 2\tau + 2$  est fixé. Puis en appliquant le Théorème 9.1 [24] avec  $\varrho = \kappa = a^2$  on obtient une famille  $C^1$  d'applications

$$[0, \delta] \ni t \rightarrow \widetilde{\Psi}_t = (\widetilde{U}_t, \widetilde{V}_t) \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \Omega; \mathbb{T}^n \times D), \quad \Omega = \mathbb{R}_+^* \cdot B(\omega_0, a),$$

qui vérifie (i) et (ii).

On définit les applications homogènes  $\Psi_t$  par  $\Psi_t(\varphi, \omega) = \widetilde{\Psi}_t(\varphi, \omega)$  pour  $\omega \in \Omega \cap \mathbb{S}^{n-1}$ .

Quitte à diminuer  $a_0$ , en utilisant l'inégalité (3.4) et le théorème des fonctions implicites on peut résoudre l'équation  $\varphi = U_t(\theta, \omega)$  par rapport à  $\theta \in \mathbb{T}^n$ . On peut donc supposer que  $U_t(\varphi, \omega) = \omega$ .  $\square$

Retour à la Démonstration du théorème 3.0.1.

Le but dans un premier temps est d'étendre la paramétrisation du théorème 3.0.2 des tores invariants par les fréquences  $\omega \in \Omega_\kappa$ , qui forment une famille discontinue de tores, en une paramétrisation lisse de tores lagrangiens.

Notons  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  la projection canonique. On cherche une famille  $C^1$   $\psi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$  et  $W_t \in C^\infty(\Omega)$  homogènes d'ordre un telles que

$$Q_t(x, \omega) := \psi_t(x, \omega) - \langle x, W_t(\omega) \rangle$$

soit  $2\pi$  périodique par rapport à  $x$  et

$$(i) \quad \forall (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \quad \nabla_x \psi_t(x, \omega) = V_t(p(x), \omega),$$

---


$$(ii) \left| \partial_x^\alpha (\kappa \partial_\omega)^\beta Q_t(x, \omega) \right| + \left| (\kappa \partial_\omega)^\beta (W_t(\omega) - \nabla K^*(\omega)) \right| \leq C a^3 \kappa$$

pour  $|\alpha + \beta| \leq 3$  et  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times B(\omega_0, a)$ . On note  $C$  des constantes positives qui ne dépendent pas du paramètre  $a$ . Pour construire  $\psi_t$  on considère la fonction

$$\tilde{\psi}_t(x, \omega) = \int_{\gamma_{t,x}} \sigma = \int_0^1 \langle V_t(p(sx), \omega), x \rangle ds, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

où

$$\gamma_{t,x} = \{(sx, V_t(p(sx), \omega)) \mid 0 \leq s \leq 1\}$$

et  $\sigma = \xi dx$  est la 1-forme canonique sur  $T^*\mathbb{R}^n$ . Alors  $\tilde{\psi}_t(x, \omega) - \langle \nabla K^*(\omega), x \rangle$  vérifie l'estimée

$$\left| \partial_x^\alpha (\kappa \partial_\omega)^\beta \left( \tilde{\psi}_t(x, \omega) - \langle \nabla K^*(\omega), x \rangle \right) \right| \leq C a^3 \kappa$$

sur  $[0, 4\pi]^n \times B(\omega_0, a)$  pour  $|\alpha + \beta| \leq 3$ . De plus  $\tilde{\psi}_t$  est homogène d'ordre un en  $\omega$ .

On pose

$$2\pi W_{tj}(\omega) = \tilde{\psi}_t(2\pi e_j, \omega), \quad \omega \in B(\omega_0, a),$$

$\{e_j\}$  étant une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi,  $W_t = (W_{t1}, \dots, W_{tn})$  est homogène d'ordre un et

$$\left| (\kappa \partial_\omega)^\beta (W_t(\omega) - \nabla K^*(\omega)) \right| \leq C a^3 \kappa$$

sur  $B(\omega_0, a)$  pour  $|\beta| \leq 1$ .

Lorsque  $\omega \in \Omega_\kappa$ ,  $\Lambda_t(\omega)$  est lagrangien. On a que pour un tel  $\omega$  la fonction  $\nabla_x \tilde{\psi}_t(x, \omega)$  est  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$  et

$$\tilde{\psi}_t(x + 2\pi m, \omega) - \tilde{\psi}_t(x, \omega) = \langle 2\pi m, W_t(\omega) \rangle, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

On considère la fonction homogène d'ordre un en  $\omega$

$$\tilde{Q}_t(x, \omega) = \tilde{\psi}_t(x, \omega) - \langle x, W_t(\omega) \rangle.$$

Elle satisfait l'estimée

$$\left| \partial_x^\alpha (\kappa \partial_\omega)^\beta \tilde{Q}_t(x, \omega) \right| \leq C a^3 \kappa \tag{3.6}$$

sur  $[0, 4\pi]^n \times B(\omega_0, a)$  pour  $|\alpha + \beta| \leq 3$ , et est  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$  sur  $\omega \in \Omega_\kappa$ .

Nous allons moyenner  $\tilde{Q}_t$  sur  $\mathbb{T}^n$  pour la rendre  $2\pi$ -périodique. Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

telle que  $\text{supp } f \subset [\pi/2, 7\pi/2]^n$ , et telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi k) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

On considère la fonction

$$Q_t(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (f\tilde{Q}_t)(x - 2\pi k, \omega).$$

Elle est  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$  par construction, elle appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ , et  $Q_t(x, \omega) = \tilde{Q}_t(x, \omega)$  pour  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega_\kappa$ . De plus,  $Q_t$  vérifie l'estimée (3.6) sur  $\mathbb{R}^n \times \Omega$  pour  $|\alpha + \beta| \leq 3$ . On pose

$$\psi_t(x, \omega) = Q_t(x, \omega) + \langle x, W_t(\omega) \rangle.$$

Rappelons que  $\text{dist}(\Omega_\kappa \cap \mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega(a)) \geq 2\kappa$ . En multipliant  $Q_t$  et  $W_t - \nabla K$  par une fonction de troncature adaptée  $h \in C^\infty(\Omega)$  homogène d'ordre 0, telle que  $h = 1$  dans un voisinage de  $\Omega_\kappa$  et  $h(\omega) = 0$  si  $\text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega(a)) \leq \kappa/2$ , on peut supposer que

$$\psi_t(x, \omega) = \langle x, \nabla K(\omega) \rangle$$

pour tout  $\omega$  tels que  $\text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega(a)) \leq \kappa$ . Cela ne change pas les estimées sur  $\psi_t$ .

En choisissant  $0 < a \leq a_0 \ll 1$  on peut supposer que

$$\Omega(a) \ni \omega \rightarrow \nabla_x \psi_t(x, \omega) \in D$$

est un plongement pour tout  $x$  fixé, on a ainsi une  $C^\infty$ -fibration de  $\mathbb{T}^n \times D$  par des tores lagrangiens

$$\Lambda_t(\omega) = \{(p(x), \nabla_x \psi_t(x, \omega)) : x \in \mathbb{R}^n\}, \quad \omega \in \Omega.$$

L'action  $I_t = (I_{t1}, \dots, I_{tn}) \in D$  sur chaque  $\Lambda_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega(a)$ , est donnée par

$$I_{tj}(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{\gamma_{tj}(\omega)} \sigma = (2\pi)^{-1} (\psi_t(2\pi e_j, \omega) - \psi_t(0, \omega)) = W_{tj}(\omega),$$

où

$$\gamma_{tj}(\omega) = \{(p(te_j), \nabla_x \psi_t(se_j, \omega)) : 0 \leq s \leq 2\pi\}.$$

Ainsi  $I_t(\omega) - \nabla K^*(\omega) = W_t(\omega) - \nabla K^*(\omega)$  vérifie (ii) sur  $\Omega(a)$ , et en choisissant  $0 < a \leq a_0 \ll 1$  on vérifie que l'application fréquence  $\Omega \ni \omega \mapsto I_t(\omega) \in D_t := I_t(\Omega(a))$  est un difféomorphisme et l'on montre que l'application inverse  $D_t \ni I \mapsto \omega_t(I) \in \Omega(a)$  vérifie

$$|\partial^\alpha (\omega_t(I) - \nabla K(I))| \leq C a^3 \kappa \quad (3.7)$$

uniformément par rapport à  $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D_t$ ,  $t \in [0, \delta]$ , et pour  $|\alpha| \leq 2$ . On pose maintenant  $\Phi_t(x, I) = \psi_t(x, \omega_t(I))$ . Alors  $\Phi_t(x, I) - \langle x, I \rangle$  est  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$ , et l'on a l'estimée

$$\left| \partial_x^\alpha (\kappa \partial_I)^\beta (\Phi_t(x, I) - \langle x, I \rangle) \right| \leq C a^3 \kappa \quad (3.8)$$

pour  $|\alpha + \beta| \leq 2$ . En résolvant les équations  $\nabla_I \Phi_t(\theta, I) = \varphi$  par rapport à  $\theta$  on obtient une famille d'applications canonique  $\chi_t$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $\theta$  on a

$$(\theta, V_t(\theta, \omega)) = (\theta, \nabla_\theta \Phi_t(\theta, I_t(\omega))) = \chi_t(\nabla_I \Phi_t(\theta, I_t(\omega)), I_t(\omega)), \quad (3.9)$$

par conséquent,

$$\Lambda_t(\omega) = \chi_t(\mathbb{T}^n \times \{I_t(\omega)\}).$$

On pose

$$\tilde{H}_t(\varphi, I) = H_t(\chi_t(\varphi, I)).$$

Alors  $\tilde{H}_t$  est constant sur  $\mathbb{T}^n \times \{I_t(\omega)\}$  et en utilisant (3.9) on pose

$$\begin{aligned} K_t(I) &= \tilde{H}_t(\nabla_I \Phi_t(0, I), I_t(\omega)), \\ &= H_t(\chi_t(\nabla_I \Phi_t(0, I), I)), \\ &= H_t(0, V_t(0, \omega_t(I))), \\ &= K(V_t(0, \omega_t(I))) + (H_t - K)(0, V_t(0, \omega_t(I))) \end{aligned}$$

et  $R_t(\varphi, I) = \tilde{H}_t(\varphi, I) - K_t(I)$ . On définit  $E_{t\kappa} = \nabla K_t^*(\Omega_\kappa) = \{I \in D \mid \nabla K_t(I) \in \Omega_\kappa\}$ . Alors  $R_t(\varphi, I) = 0$  sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ , et ainsi, toutes les dérivées de  $R_t$  s'annulent sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ , puisque chaque point de  $E_{t,\kappa}$  est de densité positive pour la mesure de Lebesgue sur  $E_{t,\kappa}$ . De plus, en utilisant (3.4), (3.5) et (3.7), on obtient que

$$\left| (\kappa \partial_I)^\beta (\nabla K_t(I) - \nabla K(I)) \right| \leq C a \kappa$$

pour  $|\beta| \leq 1$  uniformément par rapport à  $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D_t$  et  $t \in [0, \delta]$ . En particulier,  $\nabla K_t : D_t \rightarrow \Omega(a)$  est un difféomorphisme pour  $0 < a \leq a_0 \ll 1$ . En effet, pour  $|\beta| \leq 2$  on a

$$\begin{aligned} (\kappa \partial_I)^\beta (V_t(0, \omega_t(I)) - I) &= (\kappa \partial_I)^\beta (V_t(0, \nabla K(I)) - I) + \kappa O(a^3) \\ &= (\kappa \partial_I)^\beta (\nabla K^*(\nabla K(I)) - I) + \kappa O(a^3) = \kappa^2 O(a). \end{aligned}$$

□

# FORME NORMALE DE BIRKHOFF QUANTIQUE

---

Dans cette partie, on souhaite tirer profit de la forme normale de Birkhoff obtenue dans la section précédente pour trouver une réécriture de la famille d'opérateur  $P_t$  adaptée. Pour cela on fait appel à la théorie des opérateurs intégraux de Fourier afin de construire ce que l'on appellera une forme normale de Birkhoff quantique comme dans [5]. Comme pour la forme normale de Birkhoff pour l'hamiltonien qui consiste à trouver un changement de variable symplectique tel que l'hamiltonien ne dépende plus que de la moitié des variables à une perturbation près, le but ici est de trouver une famille d'opérateurs dont les symboles ne dépendent que des variables cotangentes et qui soient conjugués à la famille d'opérateurs  $P_t$ . L'intérêt d'opérateurs ne dépendant que des variables cotangentes est motivé par le lemme 4.1 qui suit. Mais avant d'énoncer le lemme nous devons introduire un fibré en droite complexe sur  $\mathbb{T}^n$  comme dans [5] ou [23].

Comme dans [5] on introduit, à l'aide de la famille  $\chi_t, \vartheta_0 \in \mathbb{Z}^n$  la classe de Maslov de la famille de tore  $\Lambda_t(\omega)$ . On construit  $\mathbb{L}$  le fibré de droites hermitien plat sur  $\mathbb{T}^n$  comme le quotient de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$  par l'action du groupe  $\mathbb{Z}^n$  définie par

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}, \quad k \cdot (x, z) = (x + 2\pi k, ze^{i\frac{\pi}{2}\langle \vartheta_0, k \rangle}).$$

Les sections  $s$  de ce fibré peuvent être identifiées aux fonctions lisses  $\tilde{s} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad \tilde{s}(x + 2\pi k) = e^{i\frac{\pi}{2}\langle \vartheta_0, k \rangle} \tilde{s}(x).$$

Une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{L})$  est alors donnée par la famille des  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  associées à



$$\tilde{e}_k(x) = e^{i\langle k+\vartheta_0/4, x \rangle}.$$

On commence par rappeler un résultat classique sur les opérateurs pseudo-différentiels sur le tore et le spectre de ceux-ci adapté à notre situation.

**Lemme 4.0.1.** *Soit  $F$  un opérateur pseudo-différentiel sur  $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{L})$  de symbole  $a(\varphi, I)$ . Alors*

$$F e_m = a(\varphi, m + \vartheta_0/4) e_m, \forall m \in \mathbb{Z}^n. \quad (4.1)$$

*Démonstration.* En identifiant les éléments  $f$  de  $C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L})$  avec les fonctions  $\tilde{f}$  de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant la condition  $\tilde{f}(x + 2k\pi) = e^{i\frac{\pi}{2}\langle k, \vartheta_0 \rangle} \tilde{f}(x)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$ , on identifie alors l'opérateur  $F$  à un opérateur pseudo-différentiel  $\tilde{F}$  de symbole  $\tilde{a}(x, \xi)$  qui est l'extension  $2\pi$ -périodique en  $x$  de  $a$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

Il suffit alors de démontrer la relation pour  $\tilde{F}\tilde{e}_m$  où  $\tilde{e}_m(x) = e^{i\langle x, m+\vartheta_0/4 \rangle}$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}^n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors on a au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \tilde{F}\tilde{e}_m(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y; \xi \rangle} \tilde{a}(x, \xi) \tilde{e}_m(y) dy d\xi, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(\langle x-y; \xi \rangle + \langle x, m+\vartheta_0/4 \rangle)} \tilde{a}(x, \xi) dy d\xi, \\ &= e^{i\langle x, m+\vartheta_0/4 \rangle} \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(\langle x-y; \xi \rangle + \langle x, m+\vartheta_0/4 \rangle - \langle x, m+\vartheta_0/4 \rangle)} \tilde{a}(x, \xi) dy d\xi, \\ &= \tilde{e}_m(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y; \xi - (m+\vartheta_0/4) \rangle} \tilde{a}(x, \xi) dy d\xi, \\ &= \tilde{e}_m(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y; \xi \rangle} \tilde{a}(x, \xi + (m + \vartheta_0/4)) dy d\xi, \\ &= \tilde{e}_m(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle 0-y; \xi \rangle} \tilde{a}(x, \xi + (m + \vartheta_0/4)) dy d\xi, \\ &= \tilde{a}(x, m + \vartheta_0/4) \tilde{e}_m(x). \end{aligned}$$

□

Considérons d'abord l'ensemble des opérateurs intégraux de Fourier associés aux applications symplectiques  $\chi_t : \mathbb{T}^n \times D \rightarrow \mathcal{U} \subset T^*M$  du théorème 3.0.1. On va identifier le symbole principal de ces opérateurs à des fonctions sur  $\mathbb{T}^n \times D$  comme dans [4] et [23]. Dans la suite on note  $\tilde{\mathcal{U}}$  la projection canonique de  $\mathcal{U}$  sur  $M$ . On

considère la sous variété lagrangienne  $C_{\chi_t}$  de  $\mathcal{U} \times T^*\mathbb{T}^n$  définie par le graphe de  $\chi_t$  dans  $\mathcal{U} \times T^*\mathbb{T}^n$ , i.e :

$$C_{\chi_t} := \{(\chi_t(\varphi, I), \varphi, I) \mid (\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D\}.$$

On note  $C'_{\chi_t}$  la sous variété lagrangienne de  $T^*(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n)$  obtenue comme l'image de  $C_{\chi_t}$  par l'application  $j : \mathcal{U} \times T^*\mathbb{T}^n \rightarrow T^*(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n)$  définie par

$$j : (x, \xi, \varphi, I) \mapsto (x, \varphi, \xi, -I).$$

On considère des opérateurs intégraux de Fourier  $T_t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n, |\Omega(\mathbb{T}^n)|^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathcal{U}}, |\Omega(\tilde{\mathcal{U}})|^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{C})$  d'ordre 0 associés à la relation  $C_{\chi_t}$ . Ces opérateurs correspondent à des opérateurs dont le noyau de Schwartz  $K_{T_t}$  est un élément de  $I^0(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n, C'_{\chi_t}; |\Omega(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n)|^{\frac{1}{2}} \otimes \text{Hom}(\mathbb{L}; (\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{C})))$ ,  $\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{C}$  désignant le fibré trivial en droite complexe au dessus de  $\tilde{\mathcal{U}}$ .

À l'aide de la forme volume canonique sur  $\mathbb{T}^n$  on peut identifier les demi-densités sur  $\mathbb{T}^n$  à des fonctions lisses. On fait de même sur  $\tilde{\mathcal{U}}$  en choisissant une forme volume afin d'identifier les opérateurs  $T_t$  à des opérateurs  $T_t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\tilde{\mathcal{U}}, \mathbb{C})$

Ce choix de trivialisations pour les demi-densités permet d'identifier les éléments  $K_{T_t}$  à des éléments de  $I^0(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n, C'_{\chi_t}; \text{Hom}(\mathbb{L}; \tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{C}))$ .

Rappelons que  $\text{Hom}(\mathbb{L}; \tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{C})$  désigne ici le fibré au dessus de  $\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n$  dont la fibre au dessus de  $(x, \varphi)$  est l'ensemble des applications linéaires  $\mathbb{L}_\varphi \rightarrow \mathbb{C}_x$ . L'ensemble des noyaux  $K_{T_t}$  peut donc être identifié à l'ensemble  $I^0(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n, C'_{\chi_t}; p_2^*(\mathbb{L}^*))$  où  $p_2^*(\mathbb{L}^*)$  est le fibré pull-back du fibré dual  $\mathbb{L}$  par la projection  $p_2 : \tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  sur le second facteur.

Le symbole principal  $\sigma(K_{T_t})$  d'un élément  $K_{T_t} \in I^0(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n, C'_{\chi_t}; p_2^*(\mathbb{L}^*))$  est une fonction dans la classe  $S^{n/2}(C'_{\chi_t}, |\Omega(C'_{\chi_t})|^{\frac{1}{2}} \otimes M(C'_{\chi_t}) \otimes \pi_2^*(\mathbb{L}^*))$  où  $\pi_2 : C'_{\chi_t} \rightarrow \mathbb{T}^n \times D$  est la projection sur  $\mathbb{T}^n \times D$  et  $M(C'_{\chi_t})$  est le fibré de Maslov sur  $C'_{\chi_t}$ . En transportant la demi-densité canonique associée au volume symplectique de  $T^*\mathbb{T}^n$  sur  $C'_{\chi_t}$  par la projection  $\pi_2$  on trivialisait canoniquement le fibré de demi-densité. Le symbole principal  $\sigma(K_{T_t})$  est alors un élément de  $S^0(C'_{\chi_t}, M(C'_{\chi_t}) \otimes \pi_2^*(\mathbb{L}^*))$ .

D'autre part, le fibré de Maslov sur  $C'_{\chi_t}$  est en fait le fibré  $\pi_2^*(\mathbb{L})$ . À l'aide de la paramétrisation de  $C'_{\chi_t}$  donnée par  $\pi_2$ , on identifie les symboles  $\sigma(K_{T_t})$  à des éléments de  $S^0(\mathbb{T}^n \times D, \mathbb{L} \otimes \mathbb{L}^*)$ . Le fibré  $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L}^*$  étant trivial et s'identifiant canoniquement à  $\mathbb{C}$  on peut conclure que les symboles  $\sigma(K_{T_t})$  s'identifient canoniquement à des

éléments de  $S^0(\mathbb{T}^n \times D)$ .

À l'aide de cette identification on peut démontrer la proposition suivante :

**Proposition 4.0.2.** *Il existe une famille d'opérateurs intégraux de Fourier  $T_t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  d'ordre 0, elliptique et microlocalement unitaire. Autrement dit :*

- Le noyau  $K_{T_t}$  de  $T_t$  est un élément de  $I^0(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n, C'_{\chi_t}; p_2^*(\mathbb{L}^*))$ .
- Le symbole principal  $\sigma(K_{T_t})$  est égale à 1.
- $WF(T_t^* T_t - \text{Id}) \cap \mathbb{T}^n \times D = \emptyset$ .

*Démonstration.* On construit l'opérateur  $T_t$  par récurrence sous la forme

$$T_t = T_{t,0} + T_{t,1} + \dots + T_{t,n} + \dots,$$

où  $T_{t,k}$  est un élément de  $I^{-k}(\tilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{T}^n; C'_{\chi_t}, p_2^*(\mathbb{L}^*))$ . On choisit  $T_{t,0}$  de symbole principal égale à 1. Avec un tel choix  $T_{t,0}^* T_{t,0} - \text{Id}$  est d'ordre au plus  $-1$ . Pour  $n \geq 0$ , on pose  $A_{t,n} = \sum_{k=0}^n T_{t,k}$  et l'on souhaite choisir  $T_{t,n+1}$  de sorte que  $A_{t,n+1}^* A_{t,n+1} - \text{Id}$  soit d'ordre  $-(n+2)$  :

$$\begin{aligned} A_{t,n+1}^* A_{t,n+1} - \text{Id} &= (A_{t,n}^* + T_{t,n+1}^*)(A_{t,n} + T_{t,n+1}) - \text{Id}, \\ &= (A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}) + A_{t,n}^* T_{t,n+1} + T_{t,n+1}^* A_{t,n} + T_{t,n+1}^* T_{t,n+1}. \end{aligned}$$

Les termes de cette somme sont tous au plus d'ordre  $-(n+1)$ , sauf le dernier qui est d'ordre au plus  $-(2n+2)$ . Le symbole principal de cette somme est donc une fonction dans  $S^{-(n+1)}(\mathbb{T}^n \times D)$ , plus précisément :

$$\begin{aligned} \sigma(A_{t,n+1}^* A_{t,n+1} - \text{Id}) &= \sigma(A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}) + \overline{\sigma(A_{t,n})} \sigma(T_{t,n+1}) + \overline{\sigma(T_{t,n+1})} \sigma(A_{t,n}), \\ &= \sigma(A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}) + \overline{\sigma(T_{t,0})} \sigma(T_{t,n+1}) + \overline{\sigma(T_{t,n+1})} \sigma(T_{t,0}), \\ &= \sigma(A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}) + \sigma(T_{t,n+1}) + \overline{\sigma(T_{t,n+1})}, \\ &= \sigma(A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}) + 2\text{Re}(\sigma(T_{t,n+1})). \end{aligned}$$

Le symbole de  $A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id}$  est réel. Il suffit donc de choisir  $T_{t,n+1}$  de telle sorte que son symbole principal soit égal à  $-(\sigma(A_{t,n}^* A_{t,n} - \text{Id})/2)$  pour annuler  $\sigma(A_{t,n+1}^* A_{t,n+1} - \text{Id})$ . On obtient ainsi un opérateur d'ordre au plus  $-(n+2)$ .

Par récurrence on construit donc un opérateur  $T_t$  tel que  $T_t^*T_t - \text{Id}$  soit d'ordre  $-\infty$  sur  $\mathbb{T}^n \times D$ .  $\square$

On définit maintenant une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs  $Q_t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L})$  par l'équation

$$T_t^*P_tT_t = Q_t.$$

Ces opérateurs sont des opérateurs pseudo-différentiels puisque la relation canonique associée est le graphe de  $\chi_t^{-1} \circ \text{Id} \circ \chi_t$ , autrement dit la diagonale de  $(\mathbb{T}^n \times D) \times (\mathbb{T}^n \times D)$ . D'autre part le symbole principal de  $Q_t$  est le pull-back du symbole principal de  $P_t$  par  $\chi_t$ , c'est à dire :

$$\sigma_{t,m}(Q_t) = H_t \circ \chi_t = K_t + R_t.$$

Concernant le symbole sous-principal  $\sigma_{m-1}(Q_t)$  de  $Q_t$ , il est donné via le théorème C.0.8 par la formule suivante :

$$\sigma_{t,m-1}(Q_t) = \frac{1}{i} \mathcal{L}_{H_{\sigma_m(P_t)}} \sigma_t(T_t) + \sigma_{t,m-1}(P_t) \sigma_t(T_t).$$

Ce symbole sous-principal est nul. En effet, d'une part, le symbole principal  $\sigma_t(T_t)$  est constant égale à 1 donc le terme de la dérivée de Lie sera nul et, d'autre part, le symbole sous-principal de  $P_t$  est nul.

On peut finalement construire la forme normale de Birkhoff quantique :

**Proposition 4.0.3.** *Il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0,  $A_t : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L})$  de symbole classique  $a_t(\varphi, I) \sim \sum_{j \leq 0} a_{t,j}(\varphi, I)$  telle que :*

- $a_{t,0} = 1$ ,
- $Q_t A_t = A_t P_t^0 + S_t$  où  $S_t \in S^{-\infty}$  est un symbole d'ordre  $-\infty$  et le symbole complet de  $P_t^0$  est de la forme  $K_t^0(I) + R_t^0(\varphi, I)$  avec :
  - $K_t^0(I) \sim \sum_{j \leq 2} K_{t,j}^0(I)$  où  $K_{t,2}^0 = K_t$  ;
  - $R_t^0(\varphi, I) \sim \sum_{j \leq 2} R_{t,j}^0(\varphi, I)$  où  $R_{t,2}^0 = R_t$  ;
  - $\partial_I^\alpha R_{t,j}^0 = 0$  sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ .

*Démonstration.* En plus des notations de l'énoncé, on écrit  $Q_t(\varphi, I) \sim \sum_{j \leq 2} q_{t,j}(\varphi, I)$ .

On cherche donc les  $a_{t,j}$ ,  $K_{t,j}^0$  et  $R_{t,j}^0$  tels que :

$$q_t \# a_t - a_t \# (K_t^0 + R_t^0) \in S^{-\infty}.$$

On rappelle que pour deux symboles  $a(\varphi, I)$  et  $b(\varphi, I)$  le symbole  $a \# b(\varphi, I)$  est

$$a \# b = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_I^\alpha a D_\varphi^\alpha b,$$

où  $D_\varphi = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

Le terme d'ordre  $l \leq 2$  de  $q_t \# a_t - a_t \# (K_t^0 + R_t^0)$  est alors

$$\sum_{\substack{j+k-|\alpha|=l \\ j \leq 0 \\ k \leq 2}} \frac{1}{\alpha!} \left( \partial_I^\alpha q_{t,k} D_\varphi^\alpha a_{t,j} - \partial_I^\alpha a_{t,j} D_\varphi^\alpha (K_{t,k}^0 + R_{t,k}^0) \right). \quad (4.2)$$

On souhaite donc à annuler tous ces termes. Nous allons d'abord regarder les termes d'ordre deux et un puis les termes d'ordre inférieur ou égaux à 0 qui se traiteront tous de la même façon.

Pour le terme d'ordre 2 on cherche donc à satisfaire l'équation :

$$q_{t,2} a_{t,0} - a_{t,0} (K_t + R_t) = 0.$$

Or par hypothèse  $a_{t,0} = 1$ . L'équation donne alors  $q_{t,2} = K_t + R_t$  ce qui est la relation déjà obtenu par le calcul du symbole principal de  $Q_t$ .

Pour le terme d'ordre 1, par le résultat précédent et le fait que  $a_{t,0} = 1$ , on cherche finalement à satisfaire l'équation :

$$q_{t,1} - (K_{t,1}^0 + R_{t,1}^0) = 0.$$

On pose  $K_{t,1}^0 = 0$ . Avec ce choix  $R_{t,1}^0 = q_{t,1}$ . On vérifie qu'alors  $R_{t,1}^0$  est plat sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ . En effet le symbole sous principal de  $Q_t$  est nul i.e. :

$$q_{t,1} + \frac{1}{2i} \sum_k \frac{\partial R_t}{\partial \varphi_k \partial I_k} = 0.$$

Ainsi  $R_{t,1}^0 = -\frac{1}{2i} \sum_k \frac{\partial R_t}{\partial \varphi_k \partial I_k}$  est plat sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$  puisque  $R_t$  l'est.

Pour les terme d'ordre inférieur ou égaux à 0, on construit les  $a_{t,j}$ ,  $K_{t,j}^0$  et  $R_{t,j}^0$  par récurrence et à l'aide du lemme suivant :

**Lemme 4.0.4.** Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}^n \times D$  telle que  $\int_{\mathbb{T}^n} f(\varphi, I) d\varphi = 0$ . Alors il existe une solution  $u \in C^\infty$  au système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\omega u(\varphi, I) = f(\varphi, I) \text{ sur } \mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}, \\ \int_{\mathbb{T}^n} u(\varphi, I) = 0, \end{cases}$$

où  $\omega = \nabla K_t$  et  $\mathcal{L}_\omega u = \langle \omega, \partial_\varphi u \rangle$ .

*Démonstration.* Nous allons construire une solution  $u$  par ses coefficients de Fourier. On écrit  $f$  et  $u$  sous forme de série de Fourier par rapport à la variable  $\varphi$ , i.e. :

$$\begin{aligned} f(\varphi, I) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle k, \varphi \rangle} f_k(I) \quad \text{où} \quad f_k(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle k, \varphi \rangle} f(\varphi, I) d\varphi. \\ u(\varphi, I) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle k, \varphi \rangle} u_k(I) \quad \text{où} \quad u_k(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle k, \varphi \rangle} u(\varphi, I) d\varphi. \end{aligned}$$

La première équation du système devient alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle k, \varphi \rangle} i\langle \omega, k \rangle u_k(I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle k, \varphi \rangle} f_k(I). \quad (4.3)$$

pour tout  $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ . Les fonctions  $(e^{i\langle k, \varphi \rangle})_{k \in \mathbb{Z}^n}$  formant une famille libre, on en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  et  $I \in E_{t,\kappa}$ ,  $i\langle \omega, k \rangle u_k(I) = f_k(I)$ .

Par hypothèse sur  $f$  et par la deuxième condition du système  $f_0 = 0 = u_0$ .

Pour les termes en  $k \neq 0$ , on considère une fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq \psi \leq 1, \\ \psi(x) = 1, \text{ pour } x \leq \frac{\kappa}{2}, \\ \psi(x) = 0, \text{ pour } x \geq \kappa. \end{cases}$$

Et l'on introduit la fonction  $g_k(I) = \langle \omega, k \rangle + i\psi(|\langle \omega, k \rangle| |k|^\tau)$ . On pose  $u_k(I) = \frac{f_k(I)}{ig_k(I)}$ .

On vérifie alors que pour tout  $k$ ,  $u_k$  est bien défini. En effet pour tout  $k \neq 0$ ,  $|g_k| \geq |\langle \omega, k \rangle|$  et  $|g_k| = 1$  si  $\langle \omega, k \rangle = 0$

Vérifions que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |u_k|$  converge et que  $u$  est alors  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}^n \times D$ . On majore séparément les termes :

- Si  $\langle \omega, k \rangle \geq \frac{\kappa}{2|k|^\tau}$ , alors  $|g_k| \geq \frac{\kappa}{2|k|^\tau}$ . Et donc  $|u_k| \leq \frac{2|k|^\tau |f_k|}{\kappa}$ .

- Si  $\langle \omega, k \rangle < \frac{\kappa}{2|k|^\tau}$ , alors  $|g_k| \geq 1$ . Et donc  $|u_k| \leq |f_k|$ .

Or  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  donc ses coefficients de Fourier  $f_k$  sont à décroissance rapide par rapport à  $k$ . Autrement dit pour tout  $\alpha > 0$ ,  $|k|^\alpha f_k(I)$  tend vers 0 uniformément en  $I \in D$ . Ainsi les fonctions  $u_k$  sont aussi à décroissance rapide par rapport à  $k$ . Donc  $u$  est  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $\varphi$ .

Pour la régularité de  $u$  en  $I$ , elle est obtenue directement par régularité des  $f_k$  par rapport à  $I$  et par théorème de dérivation des séries à l'aide des majorations précédente.

□

On reprend la démonstration de la proposition (4.0.3). Soit  $l$  un entier négatif ou nul. On suppose construit les termes :

$$\begin{cases} a_{t,j} & \text{pour } l \leq j \leq 0, \\ K_{t,k}^0 & \text{pour } l+1 \leq k \leq 2, \\ R_{t,k}^0 & \text{pour } l+1 \leq k \leq 2. \end{cases}$$

Et l'on va construire  $a_{t,l-1}$ ,  $K_{t,l}^0$  et  $R_{t,l}^0$ .

En utilisant les relations  $q_{t,2} = K_{t,2}^0 + R_{t,2}^0$ ,  $K_{t,1}^0 = 0$  et  $q_{t,1} = R_{t,1}^0$ ; le terme d'ordre  $l$  dans (4.2) donne l'équation

$$q_{t,l} - (K_{t,l}^0 + R_{t,l}^0) + F_{t,l} + G_{t,l} = 0$$

où

- $F_{t,l} = \sum_{\substack{j+k-|\alpha|=l \\ l+1 \leq k \leq 2 \\ l \leq j \leq 0}} \frac{1}{\alpha!} \left( \partial_I^\alpha q_{t,k} D_\varphi^\alpha a_{t,j} - \partial_I^\alpha a_{t,j} D_\varphi^\alpha (K_{t,k}^0 + R_{t,k}^0) \right),$
- $G_{t,l} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=1}} \left( \partial_I^\alpha q_{t,2} D_\varphi^\alpha a_{t,l-1} - \partial_I^\alpha a_{t,l-1} D_\varphi^\alpha (K_{t,2}^0 + R_{t,2}^0) \right).$

Remarquons que  $F_{t,l}$  ne dépend que de termes déjà construits.  $G_{t,l}$  dépend de termes construits et de  $a_{t,l-1}$ . De plus, en utilisant l'égalité  $q_{t,2} = K_{t,2}^0 + R_{t,2}^0$  et le fait que  $K_{t,2}^0$  ne dépend que des variables  $I$  on peut réécrire  $G_{t,l}$  sous la forme  $\frac{1}{i} \mathcal{L}_\omega a_{t,l-1} + \tilde{G}_{t,l}$  où :

---


$$\omega = \nabla K_{t,2}^2 \text{ et } \tilde{G}_{t,l} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=1}} \left( \partial_I^\alpha R_{t,2}^0 D_\varphi^\alpha a_{t,l-1} - \partial_I^\alpha a_{t,l-1} D_\varphi^\alpha R_{t,2}^0 \right).$$

On pose alors  $K_{t,l}^0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (q_{t,l} + F_{t,l}) d\varphi$ . Ainsi la fonction  $K_{t,l}^0 - F_{t,l} - q_{t,l}$  est de moyenne nulle sur  $\mathbb{T}^n$ . On peut donc utiliser le lemme (4.0.4) et définir  $a_{t,l-1}$  comme étant une solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{i} \mathcal{L}_\omega a_{t,l-1} = K_{t,l}^0 - F_{t,l} - q_{t,l} \text{ sur } \mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}, \\ \int_{\mathbb{T}^n} a_{t,l-1} d\varphi = 0. \end{array} \right.$$

Finalement, on pose  $R_{t,l}^0 = \tilde{G}_{t,l}$ . On vérifie que  $R_{t,l}^0$  est plat sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$  à l'aide de l'expression de  $\tilde{G}_{t,l}$  et en rappelant que  $R_{t,2}$  est plat sur  $\mathbb{T}^n \times E_{t,\kappa}$ .

□





# FAMILLES $\mathcal{C}^1$ DE QUASI-MODES ET INVARIANTS ISO-SPECTRAUX

---

La forme normale de Birkhoff quantique va maintenant nous permettre de construire des familles  $\mathcal{C}^1$  de quasi-modes comme dans [5] et [23]. Rappelons que ces fonctions sont des solutions approchées d'un problème aux valeurs propres pour  $P_t$  au sens où un quasi-mode est un couple  $(\mu, u)$  où  $\mu$  est un nombre et  $u$  est une fonction tels que  $P_t(u) - \mu u$  est petit. Elles ne sont pas nécessairement de bonnes approximations de fonctions propres mais elles permettent d'avoir des valeurs approchées du spectre. L'idée ici est de construire ces fonctions à l'aide des tores de Kronecker issues du théorème KAM. Cette construction permettra de faire un lien entre les invariants associées aux tores de Kronecker et le spectre des opérateurs  $P_t$ .

Nous allons d'abord considérer certaines fréquences particulières pour lesquelles il sera possible par la suite de construire des quasi-modes associés.

**Lemme 5.0.1.** *Soit  $t \in [0, \delta(\kappa)[$ , il existe un ensemble  $\Xi_\kappa^t \subset \Omega_\kappa^0$  de mesure de Lebesgue pleine dans  $\Omega_\kappa^0$  tel que :*

*Pour tout  $\omega \in \Xi_\kappa^t$ , il existe un sous ensemble infini  $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$  de  $\mathbb{Z}^n \times [1; \infty[$  et un réel  $c_0 > 0$  tel que pour tout  $(m, \mu_m^0) \in \widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$  on ait  $0 < c_0^{-1}|m| \leq \mu_m^0 \leq c_0|m|$  et :*

$$\lim_{|m| \rightarrow +\infty} \left| \mu_m^0 I_t(\omega) - (m + \vartheta_0/4) \right| = 0 \quad (5.1)$$

*On notera  $\mathcal{M}(\omega)$  la projection de  $\widetilde{\mathcal{M}}(\omega)$  sur  $\mathbb{Z}^n$ .*

*Démonstration.* On définit l'ensemble  $\Xi_\kappa^t$  comme étant l'ensemble des  $\omega \in \Omega_\kappa^0$  tels que :

$$\langle m, I_t(\omega) \rangle \neq 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \quad (5.2)$$

Montrons que  $\Omega_\kappa^0 \setminus \Xi_\kappa^t$  est de mesure de Lebesgue nulle. Par l'absurde, supposons qu'il existe  $m_0 \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  et un ensemble  $R_0 \subset \Omega_\kappa^0$  de mesure de Lebesgue positive

tels que :

$$\langle m_0, I_t(\omega) \rangle = 0, \text{ pour tout } \omega \in R_0.$$

Sachant que  $\omega \mapsto I_t(\omega)$  est un difféomorphisme local, quitte à restreindre  $R_0$  on peut supposer que  $I_t$  réalise un difféomorphisme de  $R_0$  sur  $I_t(R_0) := D_0$ . Ainsi  $D_0$  est aussi de mesure de Lebesgue positive et l'on a :

$$\langle m_0, I \rangle = 0, \text{ pour tout } I \in D_0.$$

Soit  $I^0 \in D_0$  de densité strictement positive dans  $D_0$ . En différentiant l'équation précédente par rapport à  $I$  en  $I^0$ , on obtient  $m_0 = 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $m_0 \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ .

Ainsi  $\Omega_\kappa^0 \setminus \Xi_\kappa$  est de mesure nulle, ou encore  $\Xi_\kappa^t$  est dense dans  $\Omega_\kappa^0$ .

Soit  $\omega \in \Xi_\kappa^t$ . La courbe :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \\ \mu &\longmapsto \mu \cdot I_t(\omega) \end{aligned}$$

est dense dans  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  au vu de la relation (5.2) et de la proposition (1.3.3). On considère alors une suite de voisinages ouverts  $U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_p \supset \dots$  de la classe de  $\vartheta_0/4$  dans  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  tels que  $\bigcap_{p=0}^{\infty} U_p = \vartheta_0/4$ . Par densité de la courbe  $\gamma$ , il existe une suite strictement croissante  $(\mu_p^0)_{p \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telle que  $\mu_p^0 \rightarrow +\infty$  et  $\gamma(\mu_p^0) \in U_p$  pour tout  $p$ .

Autrement dit, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $m_p \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $\left| \mu_p^0 I_t(\omega) - (m_p + \vartheta_0/4) \right| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ .

On définit alors  $\widetilde{M}(\omega) := \{(m, \mu_m^0)\}$  l'ensemble des couples  $(m_p, \mu_p^0)_{p \in \mathbb{N}}$ . Étant donné que  $I_t(\omega) \neq 0$ , il existe un réel  $c_0$  vérifiant :  $0 < c_0 \leq |I_t(\omega)| \leq c_0^{-1}$ . Mais alors :

$$\lambda_p \sim \frac{|k_p - \vartheta_0/4|}{|I_t(\omega)|} \sim \frac{|k_p|}{|I_t(\omega)|}, \text{ lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

Ceci donne l'encadrement  $c_0^{-1}|k_p| \leq \lambda_p \leq c_0|k_p|$ . □

A l'aide du lemme, on peut remarquer deux choses. D'une part l'ensemble  $\Xi_\kappa^t$  est dense dans  $\Omega_\kappa^0$  et, d'autre part, chaque point de  $\Xi_\kappa^t$  est de densité de Lebesgue

positive dans  $\Xi_\kappa^t$ .

Pour la construction des quasimodes nous aurons besoin de considérer l'intervalle

$$J_m := \left[ t, t + \frac{\delta(\kappa) - t}{|m|} \right] \subset [0, \delta(\kappa)[.$$

défini pour tout  $\omega \in \Xi_\kappa^t$  et  $m \in \mathcal{M}(\omega)$ . La régularité de la fonction  $I_t(\omega)$  par rapport à  $t$  et la relation (5.1) permet alors d'avoir le résultat suivant :

$$\left| \mu_m^0 I_s(\omega) - (m + \vartheta_0/4) \right| \leq C(\omega), \quad \text{pour tout } s \in J_m \quad (5.3)$$

où  $C(\omega)$  est une constante ne dépendant que de  $\omega$ .

Nous construisons enfin les quasimodes.

**Théorème 5.0.2.** *Soient  $t \in [0, \delta(\kappa)[$  et  $\omega \in \Xi_\kappa^t$ . Pour tout  $M$  entier positif, pour tout  $m \in \mathcal{M}(\omega)$  avec  $|m|$  suffisamment grand, pour tout  $s \in J_m$  il existe un quasi-mode  $(\mu_{m,s}^2, u_{m,s})$  de  $P_s$  d'ordre  $M$  tel que :*

- (i)  $u_{m,s} \in C^\infty(M)$  et  $\|u_{m,s}\| = 1$  ;
- (ii)  $u_{m,s}$  dépend de façon  $C^1$  de  $s$  ;
- (iii) Il existe une constante  $C_M > 0$  tel que  $\|P_s u_{m,s} - \mu_{m,s}^2 u_{m,s}\|_{L^2} \leq C_M \mu_{m,s}^{-M}$  ;
- (iv)  $\mu_{m,s}^2 = K_s^0 \left( m + \frac{\vartheta}{4} \right)$  ;
- (v) Il existe  $C_s > 0$ , tel que  $\frac{|m|}{C_s} \leq \mu_{m,s} \leq C_s |m|$  ;
- (vi)  $\frac{m + \vartheta/4}{\mu_{m,s}} = I_s(\omega) + o\left(\frac{1}{|m|}\right)$  lorsque  $|m| \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration.* On considère les fonctions  $e_m \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{L})$  introduites lors de la quantification des tores invariants. Rappelons que ces fonctions sont canoniquement identifiées aux fonctions réelles  $\widetilde{e}_m(\varphi) = e^{i\langle m + \vartheta_0/4; \varphi \rangle}$  définies sur  $\mathbb{R}^n$ . On définit alors  $u_{m,s}$  par :

$$u_{m,s} = T_s A_s e_m, \quad \text{pour tout } m \in \mathcal{M}(\omega), s \in J_m.$$

A l'aide de (4.1) et (4) on vérifie que :

$$\begin{aligned}
 P_s u_{m,s} &= P_s T_s A_s e_m \\
 &= T_s Q_s A_s e_m \\
 &= T_s A_s (P_s^0 + S_s) e_m \\
 &= T_s A_s (K_s^0(m + \vartheta_0/4) e_m + R_s^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) e_m + S_s(\varphi, m + \vartheta_0/4) e_m) \\
 &= K_s^0(m + \vartheta_0/4) u_{m,s} + T_s A_s \left[ (R_s^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) + S_s(\varphi, m + \vartheta_0/4)) e_m \right].
 \end{aligned}$$

On pose alors  $\mu_{m,s}^2 := K_s^0(m + \vartheta_0/4)$ . Montrons alors qu'il existe  $C_M > 0$  tel que :

$$\left\| T_s A_s \left( R_s^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) + S_s(\varphi, m + \vartheta_0/4) \right) e_m \right\| \leq C_M \mu_{m,s}^{-M}$$

Rappelons que  $R_s^0(\varphi, I) \sim \sum_{j \leq 2} R_{s,j}^0(\varphi, I)$  avec  $R_{s,j}^0(\varphi, I)$  homogène de degré  $j$  par rapport à  $I$ . Ainsi  $R_{s,j}^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) = \mu_m^0 R_{s,j}^0(\varphi, \frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_m^0})$ . L'inégalité (5.3) est équivalente à l'inégalité :

$$\left| I_s(\omega) - \frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_m^0} \right| \leq \frac{C}{\mu_m^0}.$$

Or, par construction,  $R_{s,j}^0$  est plat sur  $\mathbb{T}^n \times E_\kappa^t$ . Donc pour tout  $j$ , par développement de Taylor à l'ordre  $M + 2$  on a  $R_{s,j}^0(\varphi, I) = o(|I - E_\kappa^t|^{M+2})$ . Mais alors

$$\left| R_{s,j}^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) \right| \leq C_M (\mu_m^0)^{j-M+2}$$

Puis en sommant les  $R_{s,j}^0$ , on conclut que  $|R_s^0(\varphi, m + \vartheta_0/4)| \leq C (\mu_m^0)^{-M}$ .

Pour  $S_s(\varphi, m + \vartheta_0/4)$ , on obtient une majoration équivalente directement puisque  $S_s \in S^{-\infty}$ . Puis par continuité de  $T_s A_s$  on a :

$$\left\| T_s A_s \left( R_s^0(\varphi, m + \vartheta_0/4) + S_s(\varphi, m + \vartheta_0/4) \right) e_m \right\| \leq C (\mu_{m,s}^0)^{-M}$$

Pour obtenir la majoration voulue avec  $\mu_{m,s}$  il suffit de remarquer que, par construction de  $K_s^0$ , on a les inégalités  $\mu_{m,s}^2 := K_s^0(m + \vartheta_0/4) \leq C|m|^2 \leq C(\mu_m^0)^2$ .

Le dernier point du théorème s'obtient en utilisant la même inégalité et l'encadrement de  $\mu_m^0$  du lemme 5.0.1  $\square$

En faisant le lien entre les quasi-modes et l'hypothèse d'iso-spectralité, nous pouvons déduire le lemme suivant qui donne le comportement de  $\mu_{m,s}$  pour  $m$  grand.

**Lemme 5.0.3.** Soient  $t \in [0, \delta(\kappa)[$ ,  $\omega \in \Xi_\kappa^t$  et  $m \in \mathcal{M}(\omega)$ . Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ . Soit  $M$  un entier tel que  $M > 2d \geq 0$  où  $d$  est issue de la troisième hypothèse de  $(H_1)$ . On considère les quasi-modes  $(\mu_{m,s}^2, u_{m,s})$  d'ordre  $M$  donnés par le théorème (5.0.2). Alors,

- $\lim_{|m| \rightarrow +\infty} \left( \sup_{s \in J_m} |\mu_{m,t} - \mu_{m,s}| \right) = 0,$
- $\lim_{|m| \rightarrow +\infty} \left( |m| \sup_{s \in J_m} \left| \frac{\mu_{m,t} - \mu_{m,s}}{\mu_{m,t}} \right| \right) = 0$

*Démonstration.* D'après le théorème spectral,  $\frac{1}{\text{dist}(\text{Spec}(P_s); \mu_{m,s}^2)} = \|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id})^{-1}\|.$

Or,

$$\begin{aligned} \|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id})^{-1}\| &= \sup_u \frac{\|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id})^{-1} u\|}{\|u\|} \\ &= \sup_v \frac{\|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id})^{-1} (P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id}) v\|}{\|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id}) v\|} \\ &\geq \|(P_s - \mu_{m,s}^2 \text{Id}) v\|^{-1}, \text{ pour tout } v \text{ de norme } 1. \end{aligned}$$

En choisissant  $v = u_{m,s}$ , on en déduit :

$$\text{dist}(\text{Spec}(P_s); \mu_{m,s}^2) \leq \frac{C_M}{(\mu_{m,s})^M}.$$

Ainsi, par construction des quasimodes, pour tout  $m \in \mathcal{M}(\omega)$  suffisamment grand et  $s \in J_m$ , il existe une valeur propre  $\lambda_{m,s}$  de  $P_s$  telle que :

$$|\lambda_{m,s} - \mu_{m,s}^2| \leq \frac{C_M}{(\mu_{m,s})^M}. \quad (5.4)$$

Or par 5.0.2.(v) on déduit  $\lambda_{m,s} \geq \frac{\mu_{m,s}^2}{4} \geq \frac{|m|^2}{(2C_s)^2}$

Ainsi (5.4) devient

$$|\lambda_{m,s} - \mu_{m,s}^2| \leq \frac{2^M C_M}{(\lambda_{m,s})^{M/2}}. \quad (5.5)$$

Par l'hypothèse  $(H_2)$ , pour tout  $m \in \mathcal{M}$  suffisamment grand et  $s \in J_m$ , il existe un entier  $k = k(s, m)$  tel que  $\lambda_{s,m} \in [a_k, b_k]$ . Montrons que  $k(s, m)$  tend vers l'infini

lorsque  $|m|$  tend vers l'infini uniformément en  $s \in J_m$ .

Soit  $\gamma$  un réel tel que  $M > 2\gamma > 2d$ . Pour  $m \in \mathcal{M}$  suffisamment grand et  $s \in J_m$ ,

$$\mu_{m,s}^2 \in I_k := \left[ a_k - \frac{c}{2}a_k^{-\gamma}; b_k + \frac{c}{2}a_k^{-\gamma} \right].$$

Ainsi,  $b_k \geq \mu_{m,s}^2 - \frac{c}{2}a_k^{-\gamma} \geq C_1|m|^2 - C_2$  où  $C_1, C_2$  sont des constantes réelles positives. Donc  $k(s, m) \xrightarrow{|m| \rightarrow +\infty} +\infty$  uniformément en  $s \in J_m$ .

Montrons maintenant que les intervalles  $I_k$  ne s'intersectent pas à partir d'un certain rang.

Par l'hypothèse  $(H_1)$ ,  $a_{k+1} - b_k \geq cb_k^{-d}$  et  $b_k = a_k(1 + o(1))$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \left( a_{k+1} - \frac{c}{2}a_{k+1}^{-\gamma} \right) - \left( b_k + \frac{c}{2}a_{k+1}^{-\gamma} \right) &= (a_{k+1} - b_k) - \frac{c}{2}a_{k+1}^{-\gamma} - \frac{c}{2}a_k^{-\gamma}, \\ &\geq cb_k^{-d} - \frac{c}{2} \left( a_{k+1}^{-\gamma} - a_k^{-\gamma} \right), \\ &\geq cb_k^{-d} - ca_k^{-\gamma} \\ &> 0 \quad \text{lorsque } k \text{ est suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Ainsi pour  $k$  suffisamment grand, les intervalles  $I_k$  sont disjoints.

Or la fonction  $\mu_{m,s}^2$  est continue par rapport à  $s \in J_m$ . Donc sa valeur ne peut pas changer d'intervalles  $I_k$  lorsque  $s$  varie et que  $m$ , et donc  $k$ , est suffisamment grand. Mais alors  $k(s, m)$  ne dépend plus de  $s$  pour  $m$  suffisamment grand.

Nous avons montré que pour tout  $m \in \mathcal{M}$  suffisamment grand, il existe  $k = k(m)$  un entier positif tel que  $\mu_{m,s}^2 \in I_k = \left[ a_k - \frac{c}{2}a_k^{-\gamma}, b_k + \frac{c}{2}a_k^{-\gamma} \right]$  pour tout  $s \in J_m$ .

De plus  $k(m)$  tend vers l'infini lorsque  $|m|$  tend vers l'infini. Ainsi

$$\mu_{m,s}^2 \geq a_{k(m)} - \frac{c}{2}a_{k(m)}^{-\gamma} \geq \frac{1}{4}a_{k(m)}.$$

pour  $m$  suffisamment grand.

Ainsi, pour  $m$  suffisamment grand

$$\begin{aligned}
|\mu_{m,s} - \mu_{m,t}| &= \frac{|\mu_{m,s}^2 - \mu_{m,t}^2|}{|\mu_{m,s} + \mu_{m,t}|}, \\
&< \frac{|\mu_{m,s}^2 - \mu_{m,t}^2|}{\mu_{m,t}}, \\
&< \frac{2}{\sqrt{a_{k(m)}}} |\mu_{m,s}^2 - \mu_{m,t}^2|, \\
&< \frac{2}{\sqrt{a_{k(m)}}} \left( b_k + \frac{c}{2} a_k^{-\gamma} - \left( a_k - \frac{c}{2} a_k^{-\gamma} \right) \right), \\
&< \frac{2}{\sqrt{a_{k(m)}}} \left( (b_k - a_k) - c a_k^{-\gamma} \right).
\end{aligned}$$

Or d'après  $(H_1)$ ,  $\frac{b_{k(m)} - a_{k(m)}}{\sqrt{a_{k(m)}}}$  tend vers 0 lorsque  $|m|$  tend vers l'infini.

$$\text{Ainsi } \lim_{|m| \rightarrow +\infty} \left( \sup_{s \in J_m} |\mu_{m,t} - \mu_{m,s}| \right) = 0,$$

Pour le deuxième point du lemme, on utilise l'encadrement  $\frac{|m|}{C_s} \leq \mu_{m,s} \leq C_s |m|$ .  
En reprenant le calcul précédent on obtient alors :

$$\frac{|\mu_{m,s} - \mu_{m,t}|}{\mu_{m,t}} < \frac{2C_s}{|m|\sqrt{a_{k(m)}}} \left( (b_k - a_k) - c a_k^{-\gamma} \right).$$

On conclut alors de la même façon que  $\lim_{|m| \rightarrow +\infty} \left( |m| \sup_{s \in J_m} \left| \frac{\mu_{m,t} - \mu_{m,s}}{\mu_{m,t}} \right| \right) = 0$ . □

Avant d'aboutir aux résultats de rigidité spectrale, nous montrons d'abord que les quantités  $I_t(\omega)$  et  $K_t(I_t(\omega))$  sont étroitement liées :

**Lemme 5.0.4.** *La fonction  $\Phi_t(\omega) = \langle \omega; I_t(\omega) \rangle - K_t(I_t(\omega))$  vérifie :*

$$\Phi_t(\omega) = \Phi_0(\omega), \quad \forall s \in [0, \delta(\kappa)], \quad \omega \in \Omega_\kappa^0.$$

*Démonstration.* On étudie

$$\dot{\Phi}_t(\omega) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial t}(\omega) = \langle \omega, \dot{I}_t(\omega) \rangle - \left( \dot{K}_t(I_t(\omega)) + \langle \nabla K_t(I_t(\omega)), \dot{I}_t(\omega) \rangle \right).$$

Soit  $t \in [0, \delta(\kappa)[$  et  $\omega \in \Xi_\kappa^t$ . On considère des quasi-modes  $(\mu_{m,s}^2, u_{m,s})$  d'ordre  $M > 2d + 2$  par le théorème (5.0.2).



Par construction des quasi-modes (Théorème 5.0.2, (vi)) et le lemme (5.0.3) :

$$\begin{aligned}
 I_s(\omega) &= \frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,s}} + o\left(\frac{1}{|m|}\right), \\
 &= \frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,t}(1 + o(\frac{1}{|m|}))} + o\left(\frac{1}{|m|}\right), \\
 &= \frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,t}} + o\left(\frac{1}{|m|}\right), \\
 &= I_t(\omega) + o\left(\frac{1}{|m|}\right),
 \end{aligned}$$

pour  $|m|$  tendant vers l'infini.

D'autre part  $K_s\left(\frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,s}}\right) = \frac{1}{\mu_{m,s}^2} K_s(m + \vartheta_0/4) = 1$ . On pose alors  $\eta = \frac{1}{|m|}$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
 K_{s+\eta}(I_s(\omega)) &= K_{s+\eta}\left(I_{s+\eta}(\omega) + o\left(\frac{1}{|m|}\right)\right), \\
 &= K_{s+\eta}\left(\frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,s+\eta}} + o\left(\frac{1}{|m|}\right)\right), \\
 &= K_{s+\eta}\left(\frac{m + \vartheta_0/4}{\mu_{m,s+\eta}}\right) + o\left(\frac{1}{|m|}\right) \\
 &= \frac{1}{\mu_{m,s+\eta}^2} K_{s+\eta}(m + \vartheta_0/4) + o\left(\frac{1}{|m|}\right) \\
 &= 1 + o\left(\frac{1}{|m|}\right), \\
 &= \frac{1}{\mu_{m,s}^2} K_s(m + \vartheta_0/4) + o\left(\frac{1}{|m|}\right), \\
 &= K_s(I_s(\omega)) + o\left(\frac{1}{|m|}\right).
 \end{aligned}$$

d'où

$$K_{s+\eta}(I_s(\omega)) - K_s(I_s(\omega)) = o(\eta), \quad \eta = \frac{1}{|m|}.$$

Or  $K_s$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $s$ , et donc

$$\dot{K}_s(I_s(\omega)) = 0.$$

Ainsi, par densité de  $\Xi_\kappa^t$  dans  $\Omega_\kappa^0$ ,  $\dot{K}_t(I_t(\omega)) = 0$  pour tout  $t \in [0, \delta(\kappa)[$  et  $\omega \in \Omega_\kappa^0$ .

De plus,  $\nabla K_t(I_t(\omega)) = \omega$ . Ainsi  $\dot{\Phi}_t(\omega) = 0$  pour tout  $t \in [0, \delta(\kappa)[$  et  $\omega \in \Omega_\kappa^0$ .

□

D'autre part, les quantités  $\beta_t(\omega)$  et  $I_t(\omega)$  sont elles aussi fortement dépendantes l'une de l'autre :

**Lemme 5.0.5.** *On a l'égalité*

$$\beta_t(\omega) = \langle I_t(\omega), \omega \rangle,$$

pour tout  $t \in [0, \delta]$  et  $\omega \in \Omega_\kappa^0$ .

*Démonstration.* On rappelle que l'action moyenne  $\beta_t(\omega)$  est donnée par la formule suivante :

$$\beta_t(\omega) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_t(\rho, s)} \xi dx,$$

où  $\gamma_t(\rho, s) = \{\Phi_t^r(\rho), r \in [-s, s]\}$  est la courbe intégrale associée au flot hamiltonien de  $H_t$  issue de  $\rho \in \Lambda_t(\omega)$  parcourue sur l'intervalle de temps  $[-s, s]$  et  $\xi dx$  est la 1-forme de Liouville sur  $T^*M$ .

On reprend la famille de symplectomorphismes exacts  $\chi_t$  introduit dans le théorème 3.0.1. Cette famille vérifie  $\chi_t^*(\xi dx) = Id\varphi + d\psi_t$ , où  $Id\varphi$  est la 1-forme de Liouville sur  $T^*\mathbb{T}^n$  et  $\psi_t$  est une fonction lisse sur le tore. De plus on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi, I_t) \mapsto (\varphi + \omega s, I_t) & \\ \mathbb{T}^n \times \{I_t\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{T}^n \times \{I_t\} \\ \chi_t \downarrow & & \downarrow \chi_t \\ \Lambda_t(\omega) & \xrightarrow{\quad \Phi_t^s \quad} & \Lambda_t(\omega) \end{array}$$

avec  $\Phi_t^s$  le flot associé à  $H_t$  au temps  $s$ .

Par changement de variable puis en paramétrant  $\chi_t^{-1}(\gamma_t(\rho, s))$  par  $\{(\varphi_0 + r\omega, I_t), r \in [-s, s]\}$ , où  $\varphi_0$  est  $\chi_t^{-1}(\rho)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_t(\rho, s)} \xi dx &= \frac{1}{2s} \int_{\chi_t^{-1}(\gamma_t(\rho, s))} Id\varphi + d\psi_t, \\ &= \frac{1}{2s} \int_{-s}^s \langle I_t(\omega), \omega \rangle dr + \frac{1}{2s} \int_{\chi_t^{-1}(\gamma_t(\rho, s))} d\psi_t, \\ &= \langle I_t(\omega), \omega \rangle + \frac{\psi_t(\varphi_0 + s\omega) - \psi_t(\varphi_0 - s\omega)}{2s}. \end{aligned}$$

On obtient donc la relation  $\beta_t(\omega) = \langle I_t(\omega), \omega \rangle$  par passage à la limite en utilisant le fait que  $\psi_t$  est bornée sur  $\mathbb{T}^n$ . □

A partir de ces lemmes on peut démontrer le théorème principal de la thèse

**Théorème 5.0.6.** *Soit  $P_t, t \in [0, 1]$  une famille d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre deux auto-adjoints et elliptiques, de symboles principaux  $H_t$  et de symboles sous-principaux nuls. Sous les hypothèses du théorème 3.0.1 et si la famille  $P_t, t \in [0; 1]$  est faiblement isospectrale, alors les fonctions :*

- $t \mapsto I_t(\omega)$ ,
- $t \mapsto \beta_t(\omega)$ ,
- $t \mapsto K_t(I_t(\omega))$ ,

sont constantes pour  $t \in [0, \delta(\kappa)]$  et  $\omega \in \Xi$ , où  $\Xi = \bigcup_{0 \leq \kappa \leq \kappa_1} \Omega_\kappa$ .

*Démonstration.* En effet, on sait désormais que pour tout  $t \in [0, \delta(\kappa)[$  et  $\omega \in \Omega_\kappa^0$ ,

$$\langle \omega, I_t(\omega) \rangle - K_t(I_t(\omega)) = \Phi_t(\omega) = \Phi_0(\omega) = \langle \omega, I_0(\omega) \rangle - K_0(I_0(\omega)).$$

En calculant la différentielle par rapport à  $\omega$  des expressions de  $\Phi_t(\omega)$  et  $\Phi_0(\omega)$  on obtient l'égalité suivante pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$  :

$$\langle \omega, D_\omega I_t(h) \rangle + \langle h, I_t(\omega) \rangle - \langle \omega, D_\omega I_t(h) \rangle = \langle \omega, D_\omega I_0(h) \rangle + \langle h, I_0(\omega) \rangle - \langle \omega, D_\omega I_0(h) \rangle.$$

Ainsi  $\langle h, I_t(\omega) \rangle = \langle h, I_0(\omega) \rangle$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ . Et donc  $I_t(\omega)$  est un invariant.

---

Par suite, l'égalité  $\beta_t(\omega) = \langle \omega, I_t(\omega) \rangle$  justifie que  $\beta_t(\omega)$  est aussi un invariant.

Pour le troisième invariant  $K_t(I_t(\omega))$ , on reprend l'expression  $\Phi_t(\omega) = \langle \omega; I_t(\omega) \rangle - K_t(I_t(\omega))$ . Les invariances de  $\beta_t(\omega)$  et  $I_t(\omega)$  permettent alors de conclure directement que  $K_t(I_t(\omega))$  est invariant.

□



# TRANSFORMÉE DE RADON

Nous donnons ici une application du théorème 5.0.6 de rigidité spectrale. Le théorème qui suit donne une condition nécessaire sur le symbole principal pour que la famille d'opérateurs  $P_t$  soit iso-spectrale. Elle concerne la transformée de Radon d'une fonction liée aux symboles principaux des opérateurs  $P_t$ . Cette condition nécessaire sera ensuite utilisée pour démontrer un résultat de rigidité spectrale sur les surfaces de révolution.

**Théorème 6.0.1.** *On se place dans les hypothèses du théorème 5.0.6. On considère  $\Lambda_t(\omega)$  une famille lisse de tores de Kronecker pour la famille lisse d'hamiltoniens  $H_t$  pour  $t \in [0; \delta(\kappa)[$  introduit par le théorème 3.0.1 vérifiant  $\Lambda_t(\omega) \subset \{H_t = 1\}$ . On note  $\dot{H} = \frac{d}{dt}|_{t=0} H_t$ .*

Alors

$$\int_{\Lambda_0} \dot{H} d\lambda = 0,$$

où  $d\lambda$  est la forme de Leray sur  $\Lambda_0(\omega)$ .

*Démonstration.* Considérons la famille lisse d'application  $\chi_t$  du théorème 3.0.1. Notons  $\rho_t = \chi_t(0_{\mathbb{T}^n}, I_0)$  Et introduisons :

$$\begin{aligned} \gamma_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \Lambda_t(\omega) \\ \tau &\longmapsto \Phi_{X_{H_t}}^\tau(\rho_t). \end{aligned}$$

où  $\Phi_{H_t}^\tau$  est le flot associé au champ de vecteur  $X_{H_t}$  au temps  $\tau$ .

Soit  $s > 0$  un paramètre réel et  $t_1 = \delta(\kappa)/2$ . On considère dans  $\mathbb{R} \times T^*M$  la sous-variété différentielle de dimension 2 à bord  $B^s$  défini par :

$$B^s = \{(t, \gamma_t(\tau)) | (t, \tau) \in [0, t_1] \times [-s, s]\}.$$

Elle est munie de la paramétrisation globale  $\phi(t, \tau) = (t, \gamma_t(\tau))$  pour  $(t, \tau) \in [0, t_1] \times [-s, s]$ . La paramétrisation induit deux champs de vecteurs  $\phi_* \frac{\partial}{\partial t}$  et  $\phi_* \frac{\partial}{\partial \tau}$  sur

$B^s$ . On note  $dt_*$  et  $d\tau_*$  les 1-formes duales associées.  $B^s$  est alors munie de la 2-forme d'orientation  $dt_* \wedge d\tau_*$ .

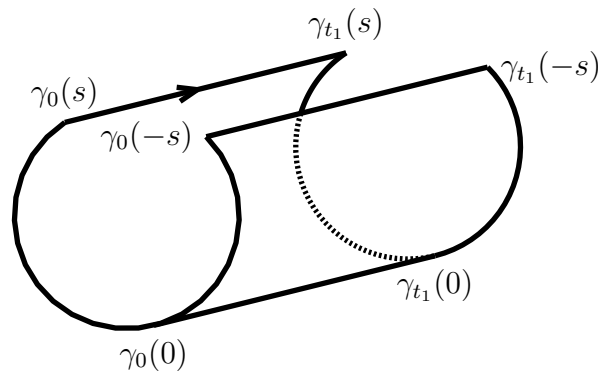


FIGURE 6.1 – La variété  $B^s$

Le bord de  $B^s$  est  $\partial B^s = \gamma_0([-s; s]) \cup \{\gamma_t(s), t \in [0, t_1]\} \cup \gamma_{t_1}([-s; s]) \cup \{\gamma_t(-s), t \in [0, t_1]\}$  orienté comme sur le schéma 6.1.

On peut faire le lien entre la variété  $B^s \subset \mathbb{R} \times T^*M$  et la famille de tore  $\Lambda_t(\omega) \subset T^*M$  via l'application de projection :

$$\begin{aligned} \iota : B^s &\longrightarrow T^*M \\ (t, \gamma_t(\tau)) &\longmapsto \gamma_t(\tau). \end{aligned}$$

À l'aide de  $\iota$  on transporte la 1-forme  $\alpha$  et la 2-forme  $\omega$  de Liouville de  $T^*M$  sur  $B^s$ . On obtient alors la 1-forme  $\iota^*\alpha$  et la 2-forme  $\iota^*\omega$ . Par commutativité de la dérivée extérieure et du pull-back on a toujours  $d(\iota^*\alpha) = \iota^*\omega$ .

Nous allons calculer de deux façons l'intégrale de  $\iota^*\omega$  sur  $B^s$  et étudier l'asymptotique de cette intégrale lorsque le paramètre  $s$  tend vers l'infini. Plus précisément nous nous intéresserons à  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{B^s} \iota^*\omega$ .

- Calculons d'abord  $\int_{B^s} \iota^* \omega$  par la formule de Stokes. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{B^s} \iota^* \omega &= \int_{B^s} d(\iota^* \alpha) \\ &= \int_{\partial B^s} \iota^* \alpha \\ &= \int_{\gamma_0([-s,s])} \iota^* \alpha + \int_{\gamma_{[0,t_1]}(s)} \iota^* \alpha + \int_{\gamma_{t_1}([-s,s])} \iota^* \alpha + \int_{\gamma_{[0,t_1]}(-s)} \iota^* \alpha. \end{aligned}$$

On remarque que les deux intégrales  $\int_{\gamma_0([-s,s])} \iota^* \alpha$  et  $\int_{\gamma_{t_1}([-s,s])} \iota^* \alpha$  sont celles utilisées pour la définition de l'action moyenne  $\beta$  sur les tores de Kronecker. Ainsi  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_0([-s,s])} \iota^* \alpha = \beta_0(\omega)$  et du fait de l'orientation et du théorème 5.0.6 on en déduit que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_{t_1}([-s,s])} \iota^* \alpha = -\beta_0(\omega)$ .

Pour les deux intégrales restantes on montre que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_{[0,t_1]}(s)} \iota^* \alpha = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} \int_{\gamma_{[0,t_1]}(-s)} \iota^* \alpha = 0.$$

En effet, la famille d'applications canoniques  $\chi_t$  fournit une paramétrisation locale d'un voisinage des tores  $\Lambda_t(\omega)$ . En notant  $(\phi_t, I_t)$  les coordonnées fournies par  $\chi_t$  on a alors  $\alpha = I_t d\phi_t$ . Par le théorème 5.0.6,  $I_t = I_0$  pour  $t \in [0, t_1]$ . Ainsi on peut écrire  $\alpha = I_0 \dot{\phi}_t dt$  pour tout  $t \in [0, t_1]$ . La première des deux intégrales se réécrit alors sous la forme :

$$\frac{1}{2s} \int_{\gamma_{[0,t_1]}(s)} \iota^* \alpha = \frac{1}{2s} \int_0^{t_1} I_0 \dot{\phi}_t(s) dt.$$

On peut majorer uniformément en  $t$  la quantité  $\dot{\phi}_t(s)$ , les coordonnées de  $\phi_t$  étant toutes périodiques. L'intégrale étant alors majorée par une quantité indépendante de  $s$ , la limite de celle ci divisée par  $2s$  tend vers 0. On traite de la même manière l'autre intégrale.

Finalement on a le résultat suivant :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} \int_{B^s} \iota^* \omega = 0. \quad (6.1)$$

- On peut aussi calculer cette intégrale de la manière suivante. On considère un paramètre  $0 < T < t_1$ . On part de la formule de Taylor pour  $H_T$

$$H_T = H_0 + T\dot{H} + T^2 \varepsilon_T, \quad (6.2)$$



où  $\varepsilon_T$  est une famille de fonctions sur  $T^*M$  vérifiant  $\|\varepsilon_T\|_\infty$  et  $\|d\varepsilon_T\|_\infty$  tendent uniformément vers 0 sur tout compact lorsque  $T$  tend vers 0.

Ceci nous donne une famille de fonctions sur  $T^*M$ . En prenant la dérivée extérieure de chacune de ces fonctions nous définissons une famille de 1–formes sur  $T^*M$ . En prenant le pull-back de ces 1–formes par  $\iota$  nous allons définir une 1–forme sur la variété  $B^s$ .

Plus précisément en prenant la dérivée extérieure pour chacun des termes de l'égalité (6.2) vues comme fonctions sur  $T^*M$  on obtient la relation :

$$dH_T = dH_0 + Td\dot{H} + T^2d\varepsilon_T.$$

La définition du champ de vecteur  $X_{H_T}$  permet de réécrire le terme de gauche de l'égalité sous la forme  $-\iota_{X_{H_T}}\omega$ . Enfin, en ramenant cette fonction sur  $B^s$  par pull-back via  $\iota$  on obtient :

$$-\iota_{\iota^*X_{H_T}}\iota^*\omega = d(\iota^*H_0) + Td(\iota^*\dot{H}) + T^2d(\iota^*\varepsilon_T). \quad (6.3)$$

On obtient ainsi une famille  $\alpha^T$  de 1–formes sur  $B^s$  pour  $T \in [0, t_1]$ . On construit alors une 1–forme  $\beta$  sur  $B^s$  en posant  $\beta_{(t, \gamma_t(\tau))} = \alpha_{(t, \gamma_t(\tau))}^t$  pour  $t \in [0, t_1]$ . Ceci donne bien une 1–forme sur  $B^s$  puisque chacun des termes de (6.3) dépend de façon  $\mathcal{C}^1$  de  $T$ .

Finalement, en remarquant que  $d(\iota^*\dot{H}) = \iota^*\dot{H}dt + t d\iota^*\dot{H}$  dans  $B^s$  on peut réécrire la dernière relation sous la forme

$$-\iota_{\iota^*X_{H_t}}\iota^*\omega = d(\iota^*H_0) + d(\iota^*\dot{H}) - \iota^*\dot{H}dt + t^2d(\iota^*\varepsilon_t). \quad (6.4)$$

D'autre part, l'égalité (6.2) évaluée en  $\gamma_T$  donne d'après les hypothèses  $H_T(\gamma_T) = 1 = H_0(\gamma_T) + T\dot{H}(\gamma_T) + T^2\varepsilon_T(\gamma_T)$ . En ramenant cette égalité sur  $B^s$  via  $\iota$  on obtient une famille de fonctions sur  $B^s$  vérifiant

$$1 = \iota^*H_0 + T\dot{H} + T^2\varepsilon_T.$$

On peut ici aussi se ramener à une fonction sur  $B^s$  à partir de cette famille de fonctions. Puis en prenant la dérivée extérieure sur  $B^s$  on obtient

$$0 = d(\iota^*H_0) + d(\iota^*\dot{H}) + 2t\iota^*\varepsilon_t dt + t^2d(\iota^*\varepsilon_t). \quad (6.5)$$

La combinaison des égalités (6.4) et (6.5) fournit finalement sur  $B^s$  la relation

$$\iota_{\iota^* X_{H_t}} \iota^* \omega = (\iota^* \dot{H} + 2t \iota^* \varepsilon_t) dt \quad (6.6)$$

On peut maintenant recalculer l'intégrale de  $\iota^* \omega$  sur  $B^s$ .

$$\begin{aligned} \int_{B^s} \iota^* \omega &= \int_{[0, t_1] \times [-s, s]} \phi^* \iota^* \omega, \\ &= \int_0^{t_1} \int_{-s}^s (\phi^* \iota^* \omega)_{(t, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau} \right) d\tau dt, \\ &= \int_0^{t_1} \int_{-s}^s \iota^* \omega_{(t, \gamma_t(\tau))} \left( \phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \phi_* \frac{\partial}{\partial \tau} \right) d\tau dt, \end{aligned}$$

Or  $\phi_* \frac{\partial}{\partial \tau} = \iota^* X_{H_t}$ . Ainsi  $\iota^* \omega_{(t, \gamma_t(\tau))} \left( \phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \phi_* \frac{\partial}{\partial \tau} \right) = -\iota_{\iota^* X_{H_t}} \iota^* \omega_{(t, \gamma_t(\tau))} \left( \phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right)$ .

De plus,  $dt \left( \phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right) = 1$ . Finalement,

$$\begin{aligned} \int_{B^s} \iota^* \omega &= - \int_0^{t_1} \int_{-s}^s (\iota^* \dot{H} + 2t \iota^* \varepsilon_t) dt \left( \phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right) d\tau dt, \\ &= - \int_0^{t_1} \int_{-s}^s \iota^* \dot{H} d\tau dt - \int_0^{t_1} \int_{-s}^s 2t \iota^* \varepsilon_t d\tau dt, \\ &= - \int_0^{t_1} \left( \int_{\gamma_t([-s, s])} \dot{H}(\gamma_t(\tau)) d\tau \right) dt - \int_0^{t_1} \left( \int_{\gamma_t([-s, s])} 2t \varepsilon_t(\gamma_t(\tau)) d\tau \right) dt \end{aligned}$$

En divisant chacun des termes de cette égalité par  $2s$  puis en faisant tendre  $s$  vers l'infini, par (6.1) et en utilisant les propriétés d'ergodicité du flot  $\gamma_t$  on obtient

$$\int_0^{t_1} \left( \int_{\Lambda_t} \dot{H}(\gamma_t(\tau)) d\lambda_t \right) dt = - \int_0^{t_1} \left( \int_{\Lambda_t} 2t \varepsilon_t(\gamma_t(\tau)) d\lambda_t \right) dt, \quad (6.7)$$

où  $\lambda_t$  est la forme de Leray sur  $\Lambda_t$ . Remarquons que cette égalité est aussi vérifiée en remplaçant  $t_1$  par une autre valeur positive inférieure.

En dérivant par rapport à  $t_1$  puis en prenant  $t_1 = 0$  on conclut finalement à l'égalité voulue :

$$\int_{\Lambda_0} \dot{H} d\lambda_0 = 0.$$

□

# TRANSFORMÉE DE RADON POUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION ET RIGIDITÉ SPECTRALE.

---

## 7.1 Transformée de Radon pour les surfaces de révolution.

Nous nous plaçons dans le cas de la sphère  $S^2$  muni d'une métrique riemannienne linéairement intégrable, c'est à dire une métrique telle que le flot géodésique admette une intégrale première linéaire en les moments. D'après [3, Th 12.8], on peut alors se ramener au cas d'une métrique pour laquelle ils existent des coordonnées globales  $(\theta, t) \in ]-\pi, \pi[ \times ]-L, L[$ ,  $L > 0$ , sur la sphère telles que la métrique s'écrive :

$$dg^2 = dt^2 + a^2(t)d\theta^2, \quad (7.1)$$

où

$$a \in \mathcal{C}^\infty(]-L; L[), a > 0 \text{ sur } ]-L, L[ \text{ et } a^{(2j)}(\pm L) = 0 \forall j \in \mathbb{N}. \quad (7.2)$$

où  $f^{(j)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j f(t)$ . Rappelons que les surfaces de révolutions sont des exemples de telles variétés mais que la condition d'être linéairement intégrable est plus générale.

On considère alors une famille lisse de métriques linéairement intégrables de la forme :

$$dg_s^2 = dt^2 + a_s^2(t)d\theta^2.$$

où  $t \in ]-L; L[$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  sont des coordonnées sur la sphère et  $s \in [-1, 1]$  est un

paramètre pour la famille de métriques.

On suppose que  $a_s(t) = a(s, t)$ ,  $a \in \mathcal{C}^\infty([-1; 1] \times [-L; L])$ , et que  $a_s$  est une fonction de Morse, c'est à dire sans point critique dégénéré, et vérifiant (7.2) pour tout  $s \in [-1, 1]$ .

On rappelle que le fibré cotangent  $T^*S^2$  de  $S^2$  est muni de la forme symplectique  $\omega = dp_t \wedge dt + dp_\theta \wedge d\theta$ .

L'hamiltonien  $H_s$  sur le fibré cotangent à  $S^2$  associé à cette métrique via la structure symplectique canonique par la transformée de Legendre est :

$$H_s(t, \theta, p_t, p_\theta) = p_t^2 + \frac{p_\theta^2}{a^2(s, t)},$$

où  $p_t$  et  $p_\theta$  sont les coordonnées canoniquement associées aux coordonnées  $t$  et  $\theta$  sur le fibré cotangent.

Sous cette forme, une intégrale première linéaire au système indépendante de  $H_s$  est  $I(t, \theta, p_t, p_\theta) = p_\theta$ .

**Théorème 7.1.1.** *On suppose que pour tout  $s \in [-1; 1]$  et pour tout tore invariant  $\Lambda$  associé à l'hamiltonien  $H_s$  on a :*

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial H_s}{\partial s} d\lambda = 0, \quad (7.3)$$

où  $d\lambda$  est la forme de Leray sur  $\Lambda$ .

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que  $H_s$  soit constante par rapport à  $s$  est la suivante :

Pour tout  $I > 0$ , pour tout  $s \in [-1, 1]$  et pour tout réels  $-1 < x_1 < x_2 < 1$  tel que  $[x_1, x_2]$  soit une composante connexe de  $a_s^{-1}([I, \max(a_s)])$  on a :

$$\partial_s a(s, x_1) \partial_t a(s, x_2) = -\partial_s a(s, x_2) \partial_t a(s, x_1)$$

*Démonstration.* Premièrement nous avons besoin d'une paramétrisation des tores invariants. Pour le moment on travaille à un temps  $s$  fixé et l'on privilégie la notation  $a_s(t)$  pour la fonction  $a(s, t)$ . On se place dans le cas où  $H_s = 1$  et  $I = p_\theta$  est constant. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} H_s = p_t^2 + \frac{p_\theta^2}{a_s^2(t)} = 1 \\ I = p_\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_t = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{a_s(t)}\right)^2} \\ p_\theta = I \end{cases}$$

Ce système a des solutions si et seulement si  $1 - \frac{I^2}{a_s^2(t)} \geq 0$ , i.e  $a_s(t) \geq |I|$ . La fonction  $a_s$  étant une fonction de Morse nous avons les cas suivants :

- Si  $I = \max a_s$ , l'ensemble solution du système est une union disjointe de copies de  $S^1$ . En fait l'ensemble solution dans les coordonnées cotangentes est :

$$\bigcup_{\{t|a_s(t)=I\}} \{(t, \theta, 0, I), \theta \in S^1\}.$$

- Si  $0 < I < \max a_s$ ,  $a_s^{-1}([I, \max a_s])$  est une union disjointe d'intervalles fermés et éventuellement de copies de  $S^1$  de la forme  $\prod_{i \in E, \text{ fini}} [b_{I,i}, c_{I,i}]$ . Dans la suite on ne considère que les éléments de  $E$  qui correspondent à des intervalles non réduits à des points, i.e.  $b_{I,i} < c_{I,i}$ . Soit  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$  l'un de ces intervalles alors il y a un tore invariant  $\Lambda_{I,i}$  associé qui est paramétré par les applications :

$$\begin{aligned} T_{I,i}^{\pm} : [b_{I,i}, c_{I,i}] \times S^1 &\longrightarrow T^*S^2 \\ (t, \theta) &\longmapsto \left( t, \theta, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{a_s(t)}\right)^2}, I \right). \end{aligned}$$

Tous les tores invariants ne sont pas donnés par de telles paramétrisations. Néanmoins toute valeur de  $I \in ]0, \max a_s[$  permet de définir de tels tores. Dans la suite nous n'utiliserons que ceux définis comme précédemment. Remarquons tout de suite que les  $b_{I,i}$  et  $c_{I,i}$  vérifient  $a_s(b_{I,i}) = a_s(c_{I,i}) = I$  et que l'union des intervalles est décroissante par rapport à  $I$  et tend vers l'intervalle  $[-L, L]$  lorsque  $I$  tend vers 0.

Soit  $\Lambda := \Lambda_{I,i}$  l'un de ces tores invariants, calculons  $\lambda$  la 2-forme de Leray sur ce tore. Si l'on note  $\omega$  la forme symplectique canonique sur  $T^*S^2$ ,  $\lambda$  est définie par la relation :

$$\omega \wedge \omega = \alpha \wedge dH_s \wedge dI,$$

et  $\lambda = \alpha|_{\Lambda}$ .

Or d'une part

$$\omega \wedge \omega = 2(dp_t \wedge dt \wedge dp_{\theta} \wedge d\theta)$$

et d'autre part sur  $\Lambda$  on a les relations  $p_t = \pm \sqrt{H_s - \left(\frac{I}{a_s(t)}\right)^2}$  et donc

$$dp_t = \pm \frac{a_s(t)}{2\sqrt{H_s a_s^2(t) - I^2}} dH + X dt + Y dI,$$

où  $X$  et  $Y$  sont des fonctions qui ne joueront pas de rôle ensuite.

De plus,  $p_\theta = I$  et donc  $dp_\theta = dI$ . Ainsi :

$$\omega \wedge \omega = \pm \frac{a_s(t)}{2\sqrt{H_s a_s^2(t) - I^2}} dt \wedge d\theta \wedge dH \wedge dI,$$

et  $\alpha = \pm \frac{a_s(t)}{2\sqrt{H_s a_s^2(t) - I^2}} dt \wedge d\theta$ . Finalement si l'on restreint  $\alpha$  à  $\Lambda \subset \{H = 1\}$  on obtient comme forme de Leray :

$$\lambda = \pm \frac{a_s(t)}{2\sqrt{a_s^2(t) - I^2}} dt \wedge d\theta.$$

Nous pouvons désormais calculer explicitement l'intégrale (7.3) qui est dans les hypothèses du théorème. On réécrit  $\partial_s H_s$  sous la forme  $p_\theta^2 f_s(t)$  où  $f_s(t) = -\frac{2\partial_s a_s(t)}{a_s^3(t)}$ .

Par hypothèse nous avons donc que  $\int_\Lambda \frac{\partial H_s}{\partial s} d\lambda = 0$ .

À l'aide de la paramétrisation trouvée précédemment on en déduit que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Lambda \frac{\partial H_s}{\partial s} d\lambda, \\ 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{b_{I,i}}^{c_{I,i}} \left( \partial_s H_s(t, \theta, \frac{\sqrt{a_s^2(t) - I^2}}{a_s(t)}, I) + \partial_s H_s(t, \theta, -\frac{\sqrt{a_s^2(t) - I^2}}{a_s(t)}, I) \right) \frac{a_s(t)}{\sqrt{(a_s^2(t) - I^2)}} dt d\theta, \\ 0 &= 4\pi \int_{b_{I,i}}^{c_{I,i}} \frac{a_s(t)}{\sqrt{a_s^2(t) - I^2}} f_s(t) dt. \end{aligned} \quad (7.4)$$

L'égalité étant vraie pour tout les tores invariants, elle est vrai pour tout  $I \in ]0, \max a_s[$  et  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$  associé à un tore  $\Lambda_{I,i}$ .

Remarquons que  $H_s$  est constante par rapport à  $s$  si et seulement si  $f_s$  est nulle. Le but est donc de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (7.4) implique que  $f_s$  soit nulle.

Soit  $0 < I < \max a_s$  et  $\Lambda_{I,i}$  l'un des tores associés. On suppose dans un premier

temps que  $\Lambda_{I,i}$  est un tore invariant tel que  $a_s$  ne possèdent qu'un unique point critique sur l'intervalle  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$ . Ce point critique est nécessairement un maximum local. Plus précisément, supposons qu'il existe un unique point  $d \in [b_{I,i}, c_{I,i}]$  tel que  $a_s$  est strictement croissante sur  $[b_{I,i}, d]$  et strictement décroissante sur  $[d, c_{I,i}]$ .

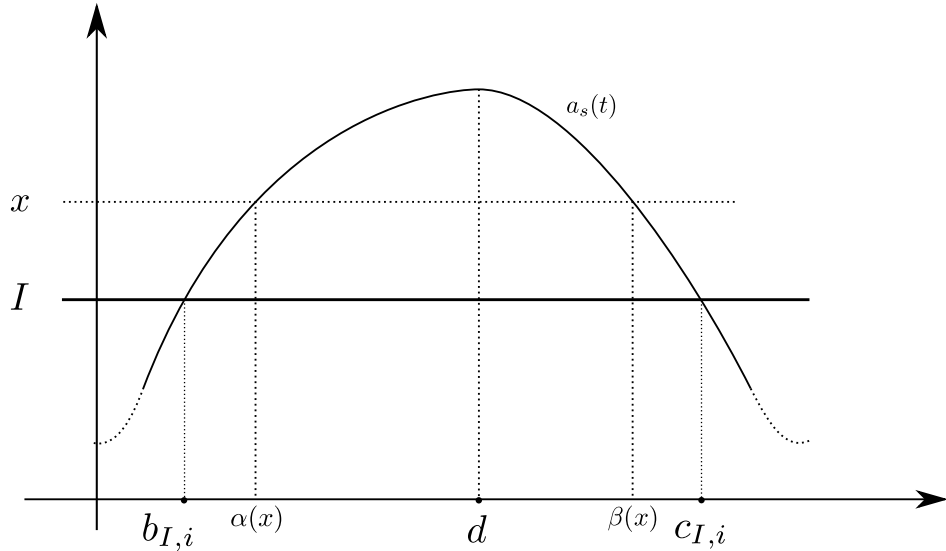


FIGURE 7.1 – Étude de l'intégrale autour d'un unique maximum local.

Notons  $\alpha : [I, a_s(d)] \rightarrow [b_{I,i}, d]$  et  $\beta : [I, a_s(d)] \rightarrow [d, c_{I,i}]$  les inverses respectifs de  $a_s$  sur ces deux intervalles. On peut alors séparer l'intégrale en deux puis faire les changement de variables  $t = \alpha(u)$  et  $t = \beta(u)$  pour obtenir :

$$\int_I^{a_s(d)} \frac{u}{\sqrt{u^2 - I^2}} (f_s(\alpha(u))\alpha'(u) - f_s(\beta(u))\beta'(u)) du = 0.$$

L'égalité étant en fait encore vraie en remplaçant  $I$  par  $\tilde{I} \in [I, a_s(d)]$  par la propriété de décroissance de l'union des intervalles des tores paramétrés.

Notons  $F(u) = f_s(\alpha(u))\alpha'(u) - f_s(\beta(u))\beta'(u)$  et  $G(u, I) = \frac{u}{\sqrt{u^2 - I^2}}$ . Ces deux fonctions sont lisses et  $G(x, x) \neq 0$  pour tout  $x$  dans  $[I, a_s(d)]$ .

Finalement nous avons une équation intégrale d'Abel :

$$\forall \tilde{I} \in [I, a_s(d)], \int_{\tilde{I}}^{a_s(d)} \frac{G(u, \tilde{I})}{(u - \tilde{I})^{1/2}} F(u) du = 0.$$



Montrons qu'alors  $F = 0$  sur l'intervalle  $[I, a_s(d)]$ . Nous nous inspirerons de [29] pour une méthode de résolution des équations intégrales d'Abel généralisées.

Premièrement on multiplie l'intégrale par  $\frac{1}{(I-x)^{1/2}}$  où  $x \in [I, a_s(d)]$  et l'on intègre par rapport à  $I$  de  $x$  à  $a_s(d)$  i.e. :

$$\forall x \in [I, a_s(d)], \int_x^{a_s(d)} \frac{1}{(I-x)^{1/2}} \left( \int_I^{a(s,c)} \frac{G(u, I)}{(u-I)^{1/2}} F(u) du \right) dI = 0.$$

À l'aide du théorème de Fubini nous pouvons intervertir les ordres d'intégrations. Puis reparamétriser le triangle d'intégration afin d'obtenir une équation intégrale de Volterra de première espèce :

$$\forall x \in [I, a_s(d)], \int_x^{a_s(d)} F(u) \psi(u, x) du = 0,$$

avec

$$\psi(u, x) = \int_x^u \frac{G(u, I)}{(I-x)^{1/2}(u-I)^{1/2}} dI = \int_0^1 \frac{G(u, x+r(u-x))}{r^{1/2}(1-r)^{1/2}} dr.$$

$\psi$  est une fonction lisse telle que  $\psi(x, x) \neq 0$ .

Ensuite, en dérivant l'expression par rapport à  $x$  puis en divisant par  $\psi(x, x)$  on obtient l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :

$$\forall x \in [I, a_s(d)], F(x) = \int_x^{a_s(d)} F(u) \varphi(u, x) du, \quad (7.5)$$

où  $\varphi(u, x) := \frac{\partial_x \psi(u, x)}{\psi(x, x)}$  est une fonction lisse.

Pour conclure que  $F = 0$  sur l'intervalle  $[I, a_s(d)]$ , notons  $M$  la norme infinie de  $F$  sur cet intervalle, i.e.  $M = \sup_{x \in [I, a_s(d)]} |F|$  et montrons que  $M = 0$ . On pose  $N = \|\varphi\|_\infty$ .

Les quantités  $M$  et  $N$  existent puisque  $F$  et  $\varphi$  sont des fonctions lisses sur des compacts.

Dans un premier temps, (7.5) permet d'affirmer directement que pour tout  $x \in [I, a_s(d)]$ ,

$$|F(x)| \leq (a_s(d) - x)MN.$$

Mais en remplaçant cette inégalité dans (7.5) on en déduit que

$$|F(x)| \leq \frac{(a_s(d) - x)^2}{2} MN^2.$$

Puis par récurrence on démontre que pour tout  $x \in [I, a_s(d)$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$|F(x)| \leq M \frac{(a_s(d) - x)^k N^k}{k!}.$$

En passant à la limite pour  $k$  on en déduit que  $F = 0$  sur l'intervalle  $[I, a_s(d)]$ .

En revenant à la définition de  $F$ , on a ainsi montré que pour tout  $u \in [I, a_s(d)]$ ,

$$f_s(\alpha(u))\alpha'(u) = f_s(\beta(u))\beta'(u).$$

Étant donnée cette dernière relation et le fait que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement monotones, une condition nécessaire et suffisante pour que  $f_s$  soit nulle sur l'intervalle  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$  est d'imposer que pour tout  $u \in [I, a_s(d)]$  :

$$f_s(\alpha(u))\alpha'(u) = -f_s(\beta(u))\beta'(u).$$

En reprenant l'expression de  $f_s(t) = -2 \frac{\partial_s a_s(t)}{a_s^3(t)}$  et en utilisant les relations entre les dérivées de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $a_s(t)$  on a

$$\frac{\partial_s a_s(\alpha(u))}{\partial_t a_s(\alpha(u))} = \frac{\partial_s a_s(\beta(u))}{\partial_t a_s(\beta(u))}.$$

Et finalement en notant  $x_1 = \alpha(u)$  et  $x_2 = \beta(u)$  on obtient la condition donnée par le théorème.

On a donc prouvé le théorème pour les intervalles  $[x_1, x_2]$  de l'énoncé contenant un, et un seul, point critique en lequel  $a_s$  atteint un maximum local.

Pour le cas général, décrivons la situation si l'intervalle  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$  contient exactement deux maximums locaux. Rappelons que  $[b_{I,i}, c_{I,i}]$  est une composante connexe non réduite à un point de  $a_s^{-1}([I, \max a_s])$  Supposons que ces maximums soit atteint en les points  $d_1$  et  $d_2$  vérifiant  $b_{I,i} < d_1 < d_2 < c_{I,i}$ . La fonction  $a_s$  aura aussi un unique minimum local en un point  $d_1 < m < d_2$ . Ainsi la fonction  $a_s$  est croissante sur  $[b_{I,i}, d_1] \cup [m, d_2]$  et décroissante sur  $[d_1, m] \cup [d_2, c_{I,i}]$ . Et enfin ils existent deux points uniques  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $a_s(m_1) = a_s(m_2) = a_s(m)$  et

$$b_{I,i} < m_1 < d_1 < m < d_2 < m_2 < c_{I,i}.$$

La situation précédente permet déjà d'avoir  $f_s = 0$  sur les intervalles  $]m_1, m[ \cup ]m, m_2[$  sous les conditions déjà donnée dans le cas d'un unique maximum. Ainsi l'équation

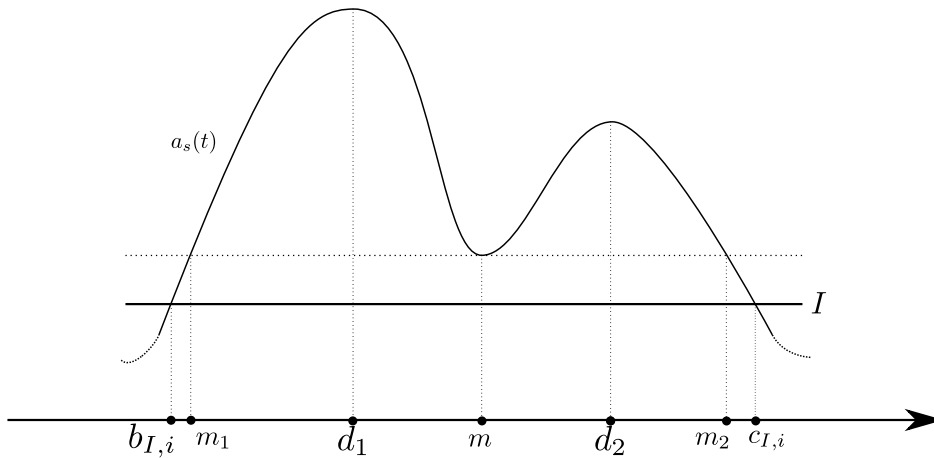


FIGURE 7.2 – Étude de l'intégrale dans le cas général.

(7.4) devient

$$0 = \int_{b_{I,i}}^{m_1} \frac{a_s(t)}{\sqrt{a_s^2(t) - I^2}} f_s(t) dt + \int_{m_2}^{c_{I,i}} \frac{a_s(t)}{\sqrt{a_s^2(t) - I^2}} f_s(t) dt.$$

Ici encore, la fonction  $a_s$  a même image sur chacun des intervalles d'intégration et est inversible sur chacun de ces intervalles. On peut alors reproduire des arguments similaires au cas précédent.  $\square$

La condition donnée par le théorème 7.1.1 ressemble à une condition autour d'une certaine forme de parité de la fonction  $a_s(t)$ . On peut en déduire un corollaire presque immédiat de cas de rigidité concernant les surfaces de révolution ayant la symétrie de l'ellipsoïde.

On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des fonctions

$$\mathcal{B} := \left\{ a \in C^\infty([-L, L]) \mid \forall t \in [-L, 0[, a(t) = a(-t), a'(t) > 0 \text{ et } a^{(2j)}(\pm L) = 0 \forall j \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Théorème 7.1.2.** *On se place sous les hypothèses du théorème 7.1.1.*

*Si la famille  $a_s, s \in [-1, 1]$  est une famille de fonctions appartenant à  $\mathcal{B}$  alors*

$$\forall s \in [-1, 1], \quad g_s = g_0.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des théorèmes 7.1.1, la condition étant directement vérifiée pour cette famille de fonctions.  $\square$

## 7.2 Rigidité spectrale pour les surfaces de révolution.

Le problème inverse pour des surfaces de révolution a été étudié par Bérard, Gurarie, Brüning/Heintze et Zelditch.

Bérard [2] et Gurarie [14] montrent que le spectre joint de  $\Delta_g$  et  $\partial/\partial\theta$  détermine de manière unique la métrique modulo une isométrie pour  $a$  générique. Brüning et Heintze montrent que le spectre de  $\Delta_g$  détermine la métrique dans la classe des surfaces de révolution possédant une symétrie miroir. Zelditch montre qu'une surface de révolution analytique et vérifiant certaines conditions génériques (simplicité du spectre des longueurs) est déterminé par le spectre de  $\Delta_g$ .

On va étudier la rigidité spectrale des surfaces de révolution vérifiant une condition de non-dégénérescence isoénergétique. Soit  $g_s := dt^2 + a_s(t)^2 d\theta^2$  une famille  $\mathcal{C}^1$  de métriques de révolution sur  $[-L, L] \times [-\pi, \pi]$  vérifiant (7.2) et  $H_s(t, \theta, p_t, p_\theta) = p_t^2 + \frac{p_\theta^2}{a^2(s, t)}$  la famille des hamiltoniens correspondante. Les hamiltoniens  $H_s$  sont complètement intégrables, les cartes de Liouville-Arnold sont limitées par des géodésiques fermées correspondants aux points critiques de  $a_s$ . Pour  $s$  fixé, on choisit les variables d'action sur un tore invariant  $\Lambda_s(\omega) \subset \{H_s = 1\}$  comme suit. On se donne une section globale de Poincaré  $\Sigma_s := \{H_s = 1, \theta = 0\}$  et étant donné un tore invariant régulier  $\Lambda_s(\omega)$ , on note  $\Lambda_s^0(\omega) := \Lambda_s(\omega) \cap \Sigma_s$ . Puis on note  $I_1(\omega)$  l'action sur le cercle  $\Lambda_s^0(\omega)$  orienté positivement. On définit  $I_2(\omega)$  comme l'action sur un cycle de  $\Lambda_s(\omega)$  homotope à  $\theta \mapsto \gamma_s^1(\theta) := (\theta, t_s, a_s(t_s), 0)$  où  $t_s$  est un point critique de  $a_s$ . Si les points critiques de  $a_s$  sont nondégénérés, on peut supposer que les fonctions  $s \mapsto t_s$  sont  $\mathcal{C}^1$ . Les géodésiques fermées  $\gamma_s^1$  sont des tores invariants dégénérés, les autres tores invariants sont réguliers.

Pour simplifier la présentation, on suppose que  $a_0$  admet un seul point critique  $t = t_0$ . Dans ce cas et pour  $|s| \leq s_0$  assez petit, le hamiltonien  $H_s$  admet des coordonnées action-angle  $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^2 \times D_s$  globales où  $D_s$  est ouvert conique de  $\mathbb{R}^2$  de bord  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $s$  [31]. Dans ces coordonnées, l'hamiltonien  $H_s$  devient  $(\varphi, I) \mapsto K_s(I)$ , où  $s \mapsto K_s$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  (localement) de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  homogènes d'ordre deux. De plus, la courbe  $K_s(I_1, I_2) = 1$  peut être paramétrée par la variable  $I_1$  ([31], formule (1.3.1)) : il existe une famille  $\mathcal{C}^1$  de fonctions  $[-1, 1] \ni I_1 \mapsto I_2(s, I_1)$ , telle que  $[-1, 1] \ni (I_1, I_2(s, I_1)) \in \{H_s = 1\}$  est un difféomorphisme.

Soit  $\omega(s, I_1) = (\omega_1(s, I_1), \omega_2(s, I_2)) = (\nabla_I K_s)(I_1, I_2(s, I_1))$ ,  $I_1 \in [-1, 1]$ . Notons que  $\omega_2(s, I_1) \neq 0$ . Pour tout  $|s| \leq s_0$  on impose la condition de non-dégénérescence

iso-énergétique :

$$\frac{d}{dI_1} \left( \frac{\omega_1(s, I_1)}{\omega_2(s, I_1)} \right) \neq 0 \quad \text{presque pour tout } I_1 \in [-1, 1]. \quad (7.6)$$

Cette condition est plus faible que la condition de Zelditch (1.1.6), [31]. Le flot hamiltonien de  $K_t$  sur  $\{K_s = 1\}$  est donné par  $t \mapsto (\varphi + \omega(s, I_1), I_1, I_2(I_1))$  et le temps du premier retour associé avec la section  $\{\varphi_2 = 0\}$  est  $T_s(I_1) = 2\pi/\omega_2(s, I_1)$ . L'application de Poincaré a donc la forme  $(\varphi_1, I_1) \mapsto (\varphi_1 + \omega(s, I_1), I_1)$ , où

$$\omega(s, I_1) := 2\pi \frac{\omega_1(s, I_1)}{\omega_2(s, I_1)}.$$

La non-dégénérescence iso-énergétique (7.6) signifie donc que pour tout  $|s| \leq s_0$  l'application de Poincaré est "twist" pour presque tout tore invariant. On a

**Lemme 7.2.1.** *La condition (7.6) est satisfaite si les fonctions  $a_s$  sont analytiques,  $a_s \in \mathcal{B}$  et la métrique n'est pas Zoll.*

En effet, dans ce cas le nombre de rotation  $\omega(s, I_1)$  est analytique en  $I_1$  et si sa dérivée par rapport à  $I_1$  est nulle dans un ensemble de mesure positive, alors c'est une constante. Puis, un argument de Douady ([7], Remarque VI.5.2) montre que si de plus  $a_s \in \mathcal{B}$ , alors la métrique est de Zoll.

**Théorème 7.2.2.** *Soit*

$$g_s := dt^2 + a_s(t)^2 d\theta^2$$

*une famille  $\mathcal{C}^1$  de métriques de révolution dans  $[-L, L] \times [-\pi, \pi]$  vérifiant (7.2). On suppose que  $a_s$  a un seul point critique et que la condition (7.6) est satisfaite. Si la famille des opérateurs de Laplace-Beltrami vérifie la condition d'isospectralité faible  $(H_1)$ - $(H_3)$ , alors  $K_s(I) = K_0(I)$  pour tout  $s$ . De plus si  $a_s \in \mathcal{B}$  pour tout  $s$  et si le point critique de  $a_0$  est non-dégénéré, alors  $a_s = a_0$ .*

Pour démontrer la première partie du théorème on suit la démonstration du théorème 5.0.6. On utilise la même construction des quasi-modes pour des fréquences  $\omega$  diophantiennes. La seule différence est la condition de non-dégénérescence. Au lieu de la condition de Kolmogorov on applique la condition de non-dégénérescence iso-énergétique 7.6. On voit facilement que la conclusion du lemme 5.0.1 est vraie sous la condition 7.6. La deuxième partie est un corollaire des théorèmes 6.0.1 et 7.1.2.

# DENSITÉS

On définit ici la notion de densité sur un espace vectoriel puis sur une variété différentielle.

## Le cas d'un espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On note  $\mathcal{B}(E)$  l'ensemble des bases de  $E$ . Le groupe  $\text{Aut}(E)$  agit naturellement sur  $\mathcal{B}(E)$  par :

$$L \cdot e = L \cdot (e_1, \dots, e_n) := (Le_1, \dots, Le_n).$$

Cette action est simplement transitive. C'est à dire qu'étant données deux bases  $e$  et  $f$  de  $E$ , il existe un unique élément de  $L \in \text{Aut}(E)$  tel que  $L \cdot e = f$ .

**Définition A.0.1** ( $\alpha$ -densité). Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On définit l'ensemble des  $\alpha$ -densités sur  $E$ , noté  $|E|^\alpha$ , l'ensemble des applications  $\sigma : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant pour tout  $e \in \mathcal{B}(E)$  et pour tout  $L \in \text{Aut}(E)$  :

$$\sigma(L \cdot e) = |\det L|^\alpha \sigma(e). \tag{A.1}$$

$|E|^\alpha$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

La simple transitivité de l'action de  $\text{Aut}(E)$  assure qu'un élément de  $|E|^\alpha$  est entièrement défini par sa valeur sur un élément de  $\mathcal{B}(E)$ . On en déduit donc la proposition suivante :

**Proposition A.0.2.**  $|E|^\alpha$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1.

La relation (A.1) a aussi du sens si  $L$  est simplement un endomorphisme de  $E$  en posant  $\sigma(L \cdot e) = 0$  si  $L$  n'est pas bijectif. Finalement, toute famille de  $n$  vecteurs de  $E$  pouvant s'obtenir comme image d'une base quelconque de  $E$  par un endomorphisme,

on prolonge les  $\alpha$ -densité à  $E^n$ . Les  $\alpha$ -densités sont donc désormais des applications de  $E^n$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant (A.1). C'est toujours un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1.

**Opérations sur les densités :**

- Le produit d'une  $\alpha$ -densité et d'une  $\beta$ -densité est une  $(\alpha + \beta)$ -densité.
- Soit  $L$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .  
Le pull-back  $L^*\sigma \in |E|^\alpha$  d'un élément  $\sigma \in |F|^\alpha$  par  $L$  est défini par

$$L^*\sigma(e) = \sigma(L(e)), \text{ pour tout } e \in E^n.$$

Le push-forward  $L_*\rho \in |F|^\alpha$  d'un élément  $\rho \in |E|^\alpha$  par  $L$  est défini par

$$L_*\rho(f) = \rho(L^{-1}(f)), \text{ pour tout } f \in F^n.$$

## Le cas d'une variété différentielle

On se place sur une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on considère le fibré en droite complexe

$$|TM|^\alpha \xrightarrow{\pi} M, \tag{A.2}$$

dont la fibre au dessus de  $x \in M$  est  $|T_x M|^\alpha$ . Ce fibré est noté  $|\Omega(M)|^\alpha$ .

**Définition A.0.3.** On appelle  $\alpha$ -densité toute section lisse du fibré  $|\Omega(M)|^\alpha$ , i.e. toute application lisse  $\sigma : M \mapsto |TM|$  vérifiant  $\pi \circ \sigma = Id_M$ .

**Exemples :**

- Sur  $\mathbb{R}^n$ , on considère les coordonnées canoniques  $x_1, \dots, x_n$  et les champs de vecteurs associées  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ . On définit alors  $|dx|^\alpha$  comme étant l' $\alpha$ -densité vérifiant pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$  :

$$|dx|^\alpha \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right) = 1.$$

- Soit  $M$  une variété lisse orientable de dimension  $n$  et  $\omega$  une forme volume sur  $M$ . On associe alors canoniquement une  $\alpha$ -densité  $|\omega|^\alpha$  définie pour tout  $p \in M$  et toute famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs de  $T_p M$  par :

---

$$|\omega|^\alpha(e_1, \dots, e_n) = |\omega(e_1, \dots, e_n)|^\alpha.$$

Comme dans le cas des espaces-vectoriels on peut faire le produit d'une  $\alpha$ -densité et d'une  $\beta$ -densité pour donner une  $(\alpha + \beta)$ -densité.

**Remarque importante :** Si l'on se donne une variété  $M$  et  $\sigma$  une  $\alpha$ -densité sur  $M$  partout non nulle, alors tout autre élément  $\rho$  de  $|M|^\alpha$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\rho = f\sigma$$

où  $f$  est une fonction dans  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . En ce sens, les  $\alpha$ -densités peuvent être identifiées aux fonctions  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .



# INTÉGRALES OSCILLANTES

---

## Construction des intégrales oscillantes

On définit ici la notion d'intégrales oscillantes primordiale pour la construction des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs intégraux de Fourier. On donne ici une construction proposée par Hörmander dans [hormander1971fourier]. On cherche à donner du sens à une expression de la forme :

$$I_{\Phi}(au) = \iint e^{i\Phi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta, \quad (\text{B.1})$$

où  $\theta \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \in X$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$ . Ce type d'expression est appelé intégrale oscillante.

Pour donner du sens à ces expressions on va considérer des fonctions  $a$  et  $\Phi$  dans des classes particulières de fonctions.

**Définition B.0.1** (Symboles d'ordre  $m$ ). *Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On appelle classe des symboles d'ordre  $m$ , noté  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , l'ensemble des fonctions  $a \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$  telles que pour tout multi-indices  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^n$  et pour tout compact  $K \subset X$ , il existe une constante réelle  $C_{\alpha,\beta,K}$  telle que pour tout  $(x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N$*

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta,K} \langle \theta \rangle^{m-|\alpha|},$$

De plus, on note  $S^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$

Exemples :

- Les fonctions  $\mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$  qui sont des polynômes de degré  $m$  en  $\theta$  sont des éléments de  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$ .
- La fonction définie par  $a(x,\theta) = e^{-|\theta|^2}$  est d'ordre  $-\infty$ .

Remarquons que le produit d'une fonction dans  $S^{m_1}(X \times \mathbb{R}^N)$  et d'une fonction dans  $S^{m_2}(X \times \mathbb{R}^N)$  est alors une fonction de  $S^{m_1+m_2}(X \times \mathbb{R}^N)$ .

**Définition B.0.2** (Fonction de phase). *On appelle fonction de phase toute fonction réelle  $\Phi \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$  vérifiant les hypothèses suivantes :*

- $\Phi$  est positivement homogène de degré 1 en la seconde variable, i.e.  $\Phi(x, t\theta) = t\Phi(x, \theta)$  pour tout  $t > 0, x \in X$  et  $\theta \in \mathbb{R}^N$ ,
- $\Phi$  n'a pas de point de critique, i.e.  $\nabla\Phi(x, \theta) \neq 0$  pour tout  $x \in X$  et  $\theta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

Exemples :

- Si  $n = 2N$ , alors la fonction définie par  $\Phi(x, \theta) = \langle x_1 - x_2, \theta \rangle$  avec  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  est une fonction de phase sur  $X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

On énonce maintenant un lemme technique qui permettra de faire de l'intégration par partie pour définir les expressions de la forme B.1

**Lemme B.0.3.** *Soit  $\Phi$  une fonction phase sur  $X \times \mathbb{R}^N$ .*

*Il existe un opérateur différentiel  $L$  sur  $C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$  de la forme*

$$L = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c,$$

*avec  $a_j \in S^0(X \times \mathbb{R}^N)$  et  $b_k, c \in S^{-1}(X \times \mathbb{R}^N)$  vérifiant*

$${}^t L e^{i\Phi} = e^{i\Phi},$$

*où  ${}^t L$  est l'adjoint formel de  $L$  défini par*

$${}^t L u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_j} (a_j u) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (b_k u) + c u.$$

*Démonstration.* On remarque que  $\frac{\partial}{\partial \theta_j} e^{i\Phi} = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} e^{i\Phi}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_k} e^{i\Phi} = i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} e^{i\Phi}$ . Mais alors,

$$\left( \sum_{j=1}^N -i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n -i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) e^{i\Phi} = \left( \sum_{j=1}^N |\theta|^2 \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} \right|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right|^2 \right) e^{i\Phi} = \frac{1}{\psi} e^{i\Phi}.$$

où  $\psi \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$  est bien définie car  $\Phi$  n'a pas de point critique. De plus  $\psi(x, \theta)$  est positivement homogène de degré  $-2$  en  $\theta$  puisque  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}$  est homogène de degré 0 en  $\theta$  pour tout  $1 \leq j \leq N$ .

Ainsi

$$-i\psi \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) e^{i\Phi} = e^{i\Phi}.$$

On souhaite maintenant étendre les coefficients de cet opérateur sur tout  $X \times \mathbb{R}^N$ . On introduit une fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  vérifiant  $\chi(\theta) = 1$  si  $|\theta| < 1$  et  $\chi(\theta) = 0$  si  $|\theta| > 2$ .

En posant

$$M = \sum_{j=1}^N \left( -i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \sum_{k=1}^n \left( -i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \chi,$$

on a construit un opérateur  $M$  vérifiant  $Me^{i\Phi} = e^{i\Phi}$ . On prend alors  $L = {}^t M$ . Les coefficients de  $L$  sont alors :

$$\begin{cases} a_j(x, \theta) &= i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2, \\ b_k(x, \theta) &= i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \\ c(x, \theta) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( -i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -i(1 - \chi)\psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) + \chi. \end{cases}$$

Ces coefficients appartiennent bien aux classes de symboles demandées. □

Nous pouvons maintenant donner un sens à l'expression B.1. Ceci se fait de la façon suivante : supposons que l'intégrale soit absolument convergente (par exemple si  $m < -N$ ) alors dans ce cas on remplace  $e^{i\Phi}$  par  $({}^t L)^k e^{i\Phi}$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ . Par propriété de l'adjoint, l'expression devient :

$$I_\Phi(au) = \iint e^{i\Phi(x, \theta)} L^k(a(x, \theta)u(x)) \partial x d\theta. \quad (\text{B.2})$$

Or, ici  $L^k(au)$  est une fonction dans  $S^{m-k}(X \times \mathbb{R}^N)$ . Ainsi, quitte à prendre  $k$  suffi-

samment grand ( $k > m + N$ ) l'intégrale (B.2) est absolument convergente. La valeur de l'intégrale ne dépendant pas du  $k$  suffisamment grand choisi.

**Théorème B.0.4.** *Soit  $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N)$  et  $\Phi$  une fonction de phase sur  $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ . Alors l'expression (B.1) définit une distribution sur  $X$  via la formule (B.2).*

## Régularité des distributions définies par des intégrales oscillantes

Soit  $\Phi$  une fonction de phase sur  $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ . Dans la suite on note  $\Phi'_\theta$  le gradient de  $\Phi$  par rapport à la variable  $\theta$ . On introduit l'ensemble conique, appelé ensemble critique de  $\Phi$ ,  $C_\Phi$  comme étant

$$C_\Phi := \{(x, \theta) \in (X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})) \mid \Phi'_\theta(x, \theta) = 0\}.$$

De plus on note  $S_\Phi = \pi C_\Phi$  où  $\pi$  est la projection naturelle de  $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  sur  $X$ .

L'une des principales propriétés de ces ensembles est donnée par :

**Proposition B.0.5.** *Soit  $a$  un symbole dans  $S^m(X \times \mathbb{R}^N)$  et  $A$  la distribution définie pour tout  $u \in C_0^\infty(X)$  par l'intégrale oscillante  $I_\Phi(au)$ , c'est à dire*

$$\langle A, u \rangle = I_\Phi(au).$$

*Alors le support singulier de  $A$  est inclus dans  $S_\Phi$ . Autrement dit pour tout  $V$  ouvert dans  $X \setminus S_\Phi$ , il existe  $A_V$  une fonction dans  $C^\infty(V)$  telle que pour tout  $u \in C_0^\infty(V)$*

$$\langle A, u \rangle = \int A_V(x)u(x)dx$$

Un cas important ici sera celui où  $C_\Phi$  est une sous variété de dimension  $n$  de  $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ . Pour s'assurer de cette propriété on va légèrement restreindre notre classe de fonction phase.

**Définition B.0.6** (Fonction Phase non dégénérée). *Une fonction phase  $\Phi$  est dite non dégénérée si la matrice*

$$(\Phi''_{\theta\theta}\Phi''_{\theta x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\partial\theta_N} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_1\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\partial\theta_N} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_N\partial x_n} \end{pmatrix}$$

est de rang  $N$ .

Dans le cas d'une fonction phase  $\Phi$  non dégénérée, le théorème des fonctions implicites assure immédiatement que  $C_\Phi$  est une sous variété de  $X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  de dimension  $n$ .

# FAMILLES $\mathcal{C}^1$ D'OPÉRATEURS

## Familles $\mathcal{C}^1$ d'opérateurs pseudo-différentiels

On commence par définir les familles d'opérateurs agissant sur les demi-densité sur  $\mathbb{R}^d$  puis on étendra la définition au variété par coordonnées locales. Le caractère  $\mathcal{C}^1$  des opérateurs est lié à leurs symboles. On se donne d'abord un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ . On définit la classe de symboles étudié ici de la façon suivante :

**Définition C.0.1** (Classe de symbole  $\mathcal{C}^1$ ). *On dit que l'application  $t \mapsto a_t$ , pour  $t \in J$ , est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole d'ordre  $m \in \mathbb{R}$  si pour tout  $t \in J$ ,*

- $a_t$  est une fonction dans  $\mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$  positivement homogène, i.e.  $a_t(x, \lambda\xi) = \lambda a_t(x, \xi)$  pour  $\lambda > 0$  et  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$  ;
- L'application  $t \mapsto a_t$  est  $\mathcal{C}^1$  ;
- Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$  et  $\delta \in \{0, 1\}$  il existe une constante  $C_{\alpha, \beta} > 0$  telle que pour tout  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$

$$|\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_t(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}.$$

Dans ce cas, on dit que  $a_t$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole dans  $S^m(T^*\mathbb{R}^d)$  par rapport à  $t$ .

**Définition C.0.2** (Famille  $\mathcal{C}^1$  de symboles formels). *On appelle famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole formel d'ordre  $m \in \mathbb{Z}$ , une série formelle de la forme*

$$J \ni t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{t, m-k},$$

où pour tout  $k$ ,  $t \mapsto a_{t, m-k}$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole dans  $S^{m-k}(T^*\mathbb{R}^d)$  par rapport à  $t$ .

**Proposition C.0.3** (Lemme de Borel pour les familles de symbole  $\mathcal{C}^1$ ). *Toute famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole formel d'ordre  $m \in \mathbb{Z}$  admet une réalisation au sens où il existe  $a_t$ , une*

famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole d'ordre  $m$ , vérifiant que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$  et pour tout  $\delta \in \{0, 1\}$  il existe  $C_{N,\alpha,\beta} > 0$  une constante uniforme sur tout compact de  $J$  telle que pour tout  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$  :

$$\left| \partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( a_t(x, \xi) - \sum_{k=0}^N a_{t,m-k}(x, \xi) \right) \right| \leq C_{N,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-N-1-|\beta|}.$$

Autrement dit  $a_t - \sum_{k=0}^N a_{t,m-k}$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole d'ordre  $m - N - 1$  par rapport à  $t$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* On adapte ici la démonstration issue de [26] en rajoutant le paramètre  $t$ . On construit  $a_t$  sous la forme d'une somme de fonction  $b_{t,m-k}$  où chaque  $b_{t,m-k}$  est une approximation de  $a_{t,m-k}$ .

On se donne une fonction  $\chi$  dans  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi(\xi) = 1$  si  $|\xi| \leq 1$  et  $\chi(\xi) = 0$  si  $|\xi| \geq 2$ . De plus on considère une suite de réels  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 et vérifiant  $0 < \varepsilon_k < 1$  pour tout  $k$ . On définit  $b_{t,m-k}(x, \xi) = (1 - \chi(\varepsilon_k \xi)) a_{t,m-k}(x, \xi)$  et l'on pose  $a_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{t,m-k}$ .

La fonction  $a_t$  est bien définie sur  $T^*\mathbb{R}^d$ , en effet pour  $\xi$  fixé la somme est en fait finie puisque  $\chi$  est à support compact et que la suite  $(\varepsilon_k)$  tend vers 0. Ainsi  $a_t$  dépend de façon  $\mathcal{C}^1$  de  $t$  et il est immédiat de vérifier que  $a_t$  est positivement homogène par rapport à  $\xi$ . Il ne reste qu'à vérifier que  $a_t$  vérifie les bonnes estimations sur ses dérivées. Remarquons d'abord que  $b_{t,m-k}$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symboles d'ordre  $m - k$  puisque pour tout  $k$ ,  $a_{t,m-k} - b_{t,m-k}$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symboles dans  $S^{-\infty}$ .

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $\delta \in \{0, 1\}$  et  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$ . On souhaite estimer  $\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)$ .

- Si  $|\xi| \leq \frac{2}{\varepsilon_k}$ , on remarque que  $\varepsilon_k \langle \xi \rangle = (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k^2 |\xi|^2)^{1/2} \leq \sqrt{5}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)| &= |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta ((1 - \chi(\varepsilon_k \xi)) a_{t,m-k}(x, \xi))|, \\ &= |\partial_\xi^\beta ((1 - \chi(\varepsilon_k \xi)) \partial_t^\delta \partial_x^\alpha a_{t,m-k}(x, \xi))|, \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_\gamma \varepsilon_k^{|\gamma|} |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_{t,m-k}|, \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_\gamma \varepsilon_k^{|\gamma|} C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{m-k-|\beta|+|\gamma|}, \\ &\leq C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{m-k-|\beta|}. \end{aligned}$$

- Si  $|\xi| \geq \frac{2}{\varepsilon_k}$  alors  $\chi(\varepsilon_k \xi) = 0$ . On obtient alors la même estimation par :

$$\begin{aligned} |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)| &= |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta ((1 - \chi(\varepsilon_k \xi)) a_{t,m-k}(x, \xi))|, \\ &= |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{t,m-k}(x, \xi)|, \\ &\leq C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{m-k-|\beta|}. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que pour  $(x, \xi) \in \text{supp } b_{t,m-k} \subset \text{supp } (1 - \chi)$ , nous avons l'inégalité  $1 \leq \varepsilon_k |\xi|$ . Mais alors pour tout  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$  nous pouvons écrire

$$|\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)| \leq \varepsilon_k |\xi| |\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)|$$

et donc

$$|\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)| \leq \varepsilon_k C_{\alpha,\beta,k} \langle \xi \rangle^{m+1-k-|\beta|}.$$

On choisit alors les  $\varepsilon_k$  tels que  $\varepsilon_k \leq \min_{|\alpha+\beta| \leq k} \frac{1}{C_{\alpha,\beta,k}}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ceci n'est pas incompatible avec les conditions précédentes sur la suite  $(\varepsilon_k)$ .

Finalement, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $\delta \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq |\alpha + \beta|$  et  $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$

$$\frac{|\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}(x, \xi)|}{\langle \xi \rangle^{m-|\beta|}} \leq \langle \xi \rangle^{1-k}.$$

Vérifions maintenant que  $a_t - \sum_{k=0}^N a_{t,m-k}$  est bien dans  $S^{m-N-1}(T^*\mathbb{R}^d)$  pour  $N \in \mathbb{N}$ . On pose alors  $\tilde{N} := \max(|\alpha + \beta|, k + 1)$  et l'on écrit

$$a_t - \sum_{k=0}^N a_{t,m-k} = \sum_{k=0}^N (b_{t,m-k} - a_{t,m-k}) + \sum_{k=N+1}^{\tilde{N}} b_{t,m-k} + \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} b_{t,m-k}.$$

La première somme est en fait une fonction dans  $S^{-\infty}$  puisque c'est une fonction à support compact en  $\xi$ . La deuxième somme est une fonction dans  $S^{m-N-1}$  en tant que somme de fonctions dans cet espace. Montrons maintenant que la troisième somme est effectivement dans  $S^{m-N-1}$ .

On a

$$\frac{1}{\langle \xi \rangle^{m-N-1-|\beta|}} \partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} b_{t,m-k} \right) \leq \frac{1}{\langle \xi \rangle^{-N-1}} \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} \frac{\partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{t,m-k}}{\langle \xi \rangle^{m-|\beta|}}$$



Par choix de  $\tilde{N}$ ,  $|\alpha + \beta| \leq k$  dans toute la somme. On peut donc appliquer les inégalités trouvées précédemment,

$$\frac{1}{\langle \xi \rangle^{m-N-1-|\beta|}} \partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} b_{t,m-k} \right) \leq \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{N+2-k} \leq \frac{\langle \xi \rangle^{1+N-\tilde{N}}}{1 - \langle \xi \rangle^{-1}}.$$

Remarquons enfin que sur le support de  $b_{t,m-k}$ ,  $\langle \xi \rangle \geq \sqrt{2}$  et que  $1 + N - \tilde{N} \leq 0$ , on en déduit donc que

$$\frac{1}{\langle \xi \rangle^{m-N-1-|\beta|}} \partial_t^\delta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left( \sum_{k=\tilde{N}+1}^{+\infty} b_{t,m-k} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Finalement  $a_t - \sum_{k=0}^N a_{t,m-k}$  est bien une famille  $\mathcal{C}^1$  de symboles d'ordres  $m - N - 1$  par rapport à  $t$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Définition C.0.4** (Famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels). *On dit qu'une famille d'opérateurs  $P_t$  agissant sur les demi-densités sur  $\mathbb{R}^d$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$  si ils sont donnés par un noyau de Schwartz  $K_{P_t}$  de la forme*

$$K_{P_t}(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a_t(x, \xi) d\xi |dx|^{\frac{1}{2}} |dy|^{\frac{1}{2}},$$

où  $a_t$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole dans  $S^m(T^*\mathbb{R}^d)$ .

Autrement dit pour toute demi-densité  $u |dx|^{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathbb{R}^d$  on a

$$P_t(u |dx|^{\frac{1}{2}}) = \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a_t(x, \xi) u(y) d\xi dy \right) |dx|^{\frac{1}{2}}$$

**Définition C.0.5** (Famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels sur une variété). *On dit qu'une famille d'opérateurs  $P_t$  agissant sur  $|\Omega(M)|^{\frac{1}{2}}$ , où  $M$  est une variété, est une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$  si, pour toute carte  $\kappa : \mathcal{U} \mapsto \tilde{\mathcal{U}}$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  vers un ouvert de  $M$ , l'opérateur  $\tilde{P}_{t,\kappa}$  défini par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{U}|^{\frac{1}{2}} & \xrightarrow{P_t} & |\mathcal{U}|^{\frac{1}{2}} \\ \kappa \uparrow & & \uparrow \kappa \\ |\tilde{\mathcal{U}}|^{\frac{1}{2}} & \xrightarrow{\tilde{P}_{t,\kappa}} & |\tilde{\mathcal{U}}|^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

est de la forme de la définition C.0.4

## Familles $\mathcal{C}^1$ d'opérateurs intégraux de Fourier

On considère d'abord une famille  $\mathcal{C}^1$  d'immersions Lagrangiennes exactes

$$\iota_t : \Lambda \rightarrow T^*M, t \in J.$$

C'est à dire que l'application  $J \ni t \mapsto \iota_t \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda, T^*M)$  est  $\mathcal{C}^1$ ,  $\iota_t$  est une immersion et le pull back de la 1-forme de Liouville sur  $T^*M$ ,  $\iota^*(\xi dx)$ , est exact pour tout  $t \in J$ . Il existe alors une famille de fonction  $f_t \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda)$ ,  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$ , telle que

$$\iota^*(\xi dx) = df_t.$$

On considère une famille  $\mathcal{C}^1$  de fonction de phase non-dégénérées  $\Phi_t$  qui génèrent localement  $\Lambda_t$ .

Etant donnée une famille  $\mathcal{C}^1$  de symbole  $a_t$ ,  $t \in J$ , dans  $S^{m+(d-2N)/4}(V)$ , on peut définir une famille  $\mathcal{C}^1$  de demi-densités oscillantes d'ordre  $m$  par :

$$I_{\Phi_t, a_t}(x)|dx|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(d+2N)/4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\Phi_t(x, \theta)} a_t(x, \theta) d\theta\right) |dx|^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.1})$$

Ces demi-densités oscillantes sont des distributions sur les demi-densités dont l'action sur une demi-densité test  $\psi(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$  est donnée par :

$$\langle I_{\Phi_t, a_t}(x)|dx|^{\frac{1}{2}}, \psi(x)|dx|^{\frac{1}{2}} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(d+2N)/4} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\Phi_t(x, \theta)} a_t(x, \theta) \psi(x) d\theta dx.$$

**Définition C.0.6** (Famille globale de demi-densités oscillantes). *On appelle famille globale  $\mathcal{C}^1$  de demi-densités oscillante d'ordre  $m$  associées à  $\Lambda_t$  toute distribution  $u_t$  sur les demi-densités ayant pour expression locale :*

$$u_t(x) = \sum_j I_{\Phi_t^j, a_t^j}(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$$

où

- La somme sur  $j$  est finie ;
- Les fonctions phase  $\Phi_t^j$  sont définies sur  $V_j \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N_j}$  et telles que  $\Lambda_{\Phi_t^j} \subset \Lambda_t$
- Les symboles  $a_t^j$  sont dans  $S^{m+(d-2N)/4}(V_j)$ .

L'ensemble de ces éléments est noté  $I^m(M, \Lambda_t; \Omega^{\frac{1}{2}}(M))$ .

On peut associer un symbole principal à chaque expression de la forme (C.1). Le symbole principal d'un élément de  $I^m(M, \Lambda_t; \Omega^{\frac{1}{2}}(M))$  étant alors la somme des symboles principaux des demi-densités oscillantes qui le composent.

On considère donc  $I_{\Phi_t, a_t}$  une telle expression. Le symbole principal de  $I_{\Phi_t, a_t}$  sera une expression de la forme :

$$\sigma_t = \sigma_{1,t} \otimes \sigma_{2,t}$$

où  $\sigma_{1,t}$  est une famille  $C^1$  de section du fibré  $|\Omega(\Lambda_t)|^{1/2}$  et  $\sigma_{2,t}$  est une section du fibré de Keller-Maslov  $M(\Lambda_t)$ . Plus précisément :

- $\sigma_{1,t}$  est obtenue à partir de  $a_{m+(d-2N)/4,t}$ , le terme principal de  $a_t$ , et  $\Phi_t$  par la construction suivante :

On construit d'abord une forme de Leray  $d_{C_{\Phi_t}}$  sur  $C_{\Phi_t}$ , c'est à dire une  $n$ -forme vérifiant

$$d_{C_{\Phi_t}} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial \theta_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial \theta_N} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_N$$

Cette forme de Leray peut s'obtenir en se donnant, pour tout  $t$ , un système de coordonnées  $\lambda_t = (\lambda_{1,t}, \dots, \lambda_{d,t})$  sur  $C_{\Phi_t}$  prolongées en des coordonnées sur un voisinage de  $C_{\Phi_t}$ . On a alors  $d_{C_{\Phi_t}} = b_t d\lambda_t$  où :

$$\begin{aligned} b_t &= \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_N}{d\lambda_{1,t} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{d,t} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial \theta_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial \theta_N}}, \\ &= \left( \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_t}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x \partial \theta} & \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} \right)^{-1} \end{aligned}$$

On transporte alors la demi-densité  $\sqrt{d_{C_{\Phi_t}}}$  sur  $\Lambda$  par  $\iota_t$  et  $\iota_{\Phi_t}$  pour obtenir :

$$\sigma_{1,t} = (\iota_t^{-1} \circ \iota_{\Phi_t})_* \left( a_{t, m+(d-2N)/4} \sqrt{d_{C_{\Phi_t}}} \right).$$

Remarquons que  $\sigma_{1,t}$  est alors homogène de degré  $m + \frac{d}{4}$  puisque  $a_{t, m+(d-2N)/4}$  est homogène de degré  $m + (d-2N)/4$  tandis que  $d_{C_{\Phi_t}}$  est homogène de degré  $N$  puisque  $b_t$  est homogène de degré  $N - d$  et  $d\lambda_t$  est homogène de degré  $d$ .

- $\sigma_{2,t}$  est une section du fibré de Keller-Maslov  $M(\Lambda)$ . Ce fibré est un fibré en droite complexe au dessus de  $\Lambda$  avec pour fonction de transition  $e^{i\frac{\pi}{4}(\text{sgn}\varphi_{\theta\theta} - \text{sgn}\psi_{\bar{\theta}\bar{\theta}})}$  sur  $\Lambda_\varphi \cap \Lambda_\psi \subset \Lambda$ .

Finalement le symbole principal d'un élément  $I_{\Phi_t, a_t} \in I^m(M, \Lambda_t; |\Omega(M)|^{\frac{1}{2}})$  est un élément de l'ensemble  $S^{m+d/4}(\Lambda, |\Omega(\Lambda)|^{\frac{1}{2}} \otimes M(\Lambda))$ .

On peut étendre la notion de demi-densité oscillante à des fibrés vectoriels. Si l'on se donne  $E$  un fibré vectoriel au dessus de  $M$ , alors on note  $I^m(M, \Lambda_t; |\Omega(M)|^{\frac{1}{2}} \otimes E)$  l'ensemble des demi-densités oscillantes d'ordre  $m$  à valeurs dans les sections de  $E$ . Autrement dit un élément  $I$  de cet ensemble est donné dans une trivialisaton  $\mathcal{U}$  de  $E$  par un vecteur de densités  $(I_1, \dots, I_n)$  où  $n$  est la dimension des fibres de  $E$ . Si l'on considère  $u$  une section du fibré  $|\Omega(M)|^{\frac{1}{2}} \otimes E$ , donnée par un vecteur  $(u_1, \dots, u_n)$  dans  $\mathcal{U}$ , alors l'action de  $I$  sur  $u$  est donnée par le vecteur

$$\langle I, u \rangle = (I_1 u_1, \dots, I_n u_n).$$

Le symbole d'un tel élément appartenant alors à l'ensemble  $S^{m+d/4}(\Lambda_t, |\Omega(\Lambda_t)|^{\frac{1}{2}} \otimes M(\Lambda_t) \otimes E_t)$  où  $E_t$  est le relèvement du fibré  $E$  sur  $\Lambda_t$ .

Soient deux variétés  $M_1$  et  $M_2$ . On munit leurs fibrés cotangents de leurs structures symplectiques canoniques respectives. On note  $\omega_j$  la forme symplectique canonique sur  $T^*(M_j)$ . On considère la variété symplectique  $T^*(M_2) \times T^*(M_1)$  munie de la forme  $\omega_2 - \omega_1$ . On appelle famille  $\mathcal{C}^1$  de relations exactes canoniques  $C_t, t \in [0, \delta]$  de  $T^*(M_1)$  sur  $T^*(M_2)$  une famille  $\mathcal{C}^1$  d'immersions lagrangiennes exactes  $\iota_t : C \rightarrow T^*(M_2) \times T^*(M_1)$ . Pour toute famille  $\mathcal{C}^1$  de relations canoniques exactes  $C_t$ , on associe une famille  $\mathcal{C}^1$  de sous variétés Lagrangiennes exactes  $C'_t$  de  $T^*(M_2 \times M_1)$  définie par la famille d'immersions Lagrangiennes  $\iota'_t : C_t \rightarrow T^*(M_2 \times M_1)$  où  $\iota'_t = j \circ \iota_t$  et

$$\begin{aligned} j : T^*(M_2 \times M_1) &\longrightarrow T^*(M_2) \times T^*(M_2) \\ (x_2, x_1, \xi_2, \xi_1) &\longmapsto (x_2, \xi_2, x_1, -\xi_1) \end{aligned}$$

**Définition C.0.7** (Famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier). *On appelle famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier d'ordre  $m$  associés à  $C_t$  toute famille d'opérateurs  $A_t$*

$$A_t : \mathcal{C}_0^\infty(M_1, |\Omega(M_1)|^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M_2, |\Omega(M_2)|^{\frac{1}{2}})$$

dont les noyaux de Schwartz  $K_{A_t}$  forment une famille  $\mathcal{C}^1$  de demi-densités oscillantes d'ordre  $m$  associés à  $C'_t$  i.e.  $K_{A_t} \in I^m(M_2 \times M_1, C'_t; |\Omega(M_2 \times M_1)|^{\frac{1}{2}})$ .

Le symbole principal d'une famille d'opérateurs intégraux de Fourier est le symbole principal de la famille de noyaux de Schwartz associés. Si l'on note  $d_i$  la dimension de  $M_i$ , le symbole principal d'un élément de  $I^m(M_2 \times M_1, C'_t; |\Omega(M_2 \times M_1)|^{\frac{1}{2}})$  appartiendra à l'ensemble  $S^{m+(d_1+d_2)/4}(C'_t, |\Omega(C'_t)|^{\frac{1}{2}} \otimes M(C'_t))$ .

On peut ici aussi, de façon plus générale, se placer dans le cas de fibrés sur  $M_1$  et  $M_2$  et regarder des familles d'opérateurs intégraux de Fourier agissant sur les sections de ces fibrés. Si l'on se donne  $E_1$  et  $E_2$  des fibrés vectoriels sur  $M_1$  et  $M_2$  respectivement, on définit des familles  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier  $A_t$  :

$$A_t : \mathcal{C}_0^\infty(M_1, |\Omega(M_1)|^{\frac{1}{2}} \otimes E_1) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M_2, |\Omega(M_2)|^{\frac{1}{2}} \otimes E_2).$$

Le noyau de ceux ci étant alors un élément  $K_{A_t}$  de  $I^m(M_2 \times M_1, C_t; |\Omega(M_2 \times M_1)| \otimes \text{Hom}(E_1, E_2))$ . Le fibré  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  est défini comme le fibré au dessus de  $M_2 \times M_1$  dont la fibre en  $(y, x)$  consiste en les applications linéaires  $(E_1)_x \rightarrow (E_2)_y$ .

Le symbole principal  $\sigma(K_{A_t})$  d'un tel élément appartenant à l'ensemble

$$S^{m+(d_1+d_2)/4}(C_t, |\Omega(C_t)|^{\frac{1}{2}} \otimes M(C_t) \otimes \widehat{\text{Hom}(E_1, E_2)})$$

où  $\widehat{\text{Hom}(E_1, E_2)}$  est le relevé du fibré  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  sur  $C_t$ .

Nous nous intéresserons principalement à des familles d'opérateurs intégraux de Fourier dont la relation canonique est le graphe d'une famille de symplectomorphismes. Étant donné  $\chi_t : X \rightarrow Y$  une famille  $\mathcal{C}^1$  de symplectomorphismes, le graphe de  $\chi_t$

$$C_{\chi_t} := \{\chi_t(x), x\} \subset T^*Y \times T^*X$$

est une famille  $\mathcal{C}^1$  de sous variétés lagrangiennes de  $T^*Y \times T^*X$  munie de la forme symplectique  $\omega_Y - \omega_X$ .

On peut donc considérer la classe de famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier associés à  $C'_{\chi_t}$ .

En général la composition d'opérateurs intégraux de Fourier n'est pas un opérateur intégral de Fourier. Il existe néanmoins des conditions nécessaires pour assurer que la composition soit encore un opérateur intégral de Fourier [16]. Dans le cas

des opérateurs dont la relation canonique est le graphe d'un symplectomorphisme la composée est toujours un opérateur intégral de Fourier.

Si l'on considère trois variétés  $X, Y$  et  $Z$  compactes et deux familles  $\mathcal{C}^1$  de symplectomorphismes

$$\chi_t : T^*X \rightarrow T^*Y, \quad \psi_t : T^*Y \rightarrow T^*Z$$

alors la composée de deux familles  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier  $A_t$  d'ordre  $m_A$  et  $B_t$  d'ordre  $m_B$  associés respectivement à  $C'_{\chi_t}$  et  $C'_{\psi_t}$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier d'ordre  $m_A + m_B$  associés à la relation canonique  $C'_{\psi_t \circ \chi_t}$ .

Enfin un dernier résultat traitant du cas de la composition d'une famille d'opérateurs intégraux de Fourier avec une famille d'opérateur pseudo-différentiels dont la famille de symboles principaux s'annulent sur la famille de relations canoniques associés aux FIO inspiré de [24].

**Théorème C.0.8.** *Soit  $P_t$  une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $k$  agissant sur les demi-densités de  $M_2$  de symboles principaux  $p_{t,m}$  et sous-principaux  $p_{t,m-1}$ . Soit  $C_t$  une famille  $\mathcal{C}^1$  de relations canoniques exactes de  $T^*M_1$  sur  $T^*M_2$ . Soit  $A_t$  une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier de noyaux de Schwartz  $K_{A_t} \in I^{k'}(M_2 \times M_1, C'_t, |\Omega(M_1 \times M_2)|^{\frac{1}{2}})$  et de symboles principaux  $\sigma_t \in S^{k'+(m_1+m_2)/4}(C_t, |\Omega(C_t)|^{\frac{1}{2}} \otimes M(C_t))$ .*

*On suppose que  $p_{t,m}$  est nul sur la projection de  $C_t$  sur  $M_2$ . Alors  $P_t A_t$  est une famille  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs intégraux de Fourier d'ordre  $k + k' - 1$  de noyaux de Schwartz  $K_{P_t A_t}$  dans  $I^{k+k'-1}(M_2 \times M_1, C'_t, |\Omega(M_2 \times M_1)|^{\frac{1}{2}})$  et de symboles principaux*

$$\frac{1}{i} \mathcal{L}_{H_{p_{t,m}}} \sigma_t + p_{t,m-1} \sigma_t,$$

*où  $H_{p_{t,m}}$  est le champ hamiltonien associé à  $p_{t,m}$  puis relevé sur  $T^*M_2 \times T^*M_1$  par la projection sur le premier facteur.*

On trouvera une idée de démonstration dans [8].



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] V. ARNOLD, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, 1976.
- [2] P. BÉRARD, « Quelques remarques sur les surfaces de révolution dans  $\mathbb{R}^3$  », in : *CR Acad. Sci. Paris* 282 (1976), p. 159–161.
- [3] A.V. BOLSINOV et A.T. FOMENKO, *Integrable Hamiltonian Systems*, Taylor & Francis, 2004.
- [4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, « Quasi-modes sur les variétés Riemanniennes. », in : *Inventiones mathematicae* 43 (1977), p. 15–52.
- [5] Y. COLIN DE VERDIÈRE, « Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I,II », in : *Compos. Math* 27.1 (1973).
- [6] C.B. CROKE et V.A. SHARAFUTDINOV, « Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold », in : *Topology* 37.6 (1998), p. 1265–1273.
- [7] R. DOUADY, « Applications du théorème des tores invariants », thèse de doct., Université Paris 7, 1982.
- [8] J.J. DUISTERMAAT, *Fourier Integral Operators*, Birkhauser, 1996.
- [9] J.J. DUISTERMAAT et V.W. GUILLEMIN, « The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics », in : *Inventiones mathematicae* 29.1 (1975), p. 39–79.
- [10] J.-P. FRANCOISE et V. GUILLEMIN, « On the period spectrum of a symplectic mapping », in : *Journal of functional analysis* 100.2 (1991), p. 317–358.
- [11] C. GORDON, D. WEBB et S. WOLPERT, « One cannot hear the shape of a drum », in : *Bulletin of the American Mathematical Society* 27.1 (1992), p. 134–138.
- [12] V. GUILLEMIN, « Wave trace invariants », in : *Partial Differential Equations and Mathematical Physics : The Danish-Swedish Analysis Seminar, 1995*, t. 19, Birkhäuser, 1996, p. 371.



- 
- [13] V. GUILLEMIN et D. KAZHDAN, « Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds », in : *Topology* 19.3 (1980), p. 301–312.
- [14] D. GURARIE, « Semiclassical eigenvalues and shape problems on surfaces of revolution », in : *Journal of Mathematical Physics* 36.4 (1995), p. 1934–1944.
- [15] H. HEZARI et S. ZELDITCH, «  $C^\infty$  spectral rigidity of the ellipse », in : *Anal. PDE* 5.5 (2012), p. 1105–1132.
- [16] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators. I-IV*, Classics in Mathematics, Fourier integral operators, Reprint of the 1994 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2009, p. viii+352, ISBN : 978-3-642-00117-8.
- [17] A. IANTCHENKO et J. SJÖSTRAND, « Birkhoff normal forms for Fourier integral operators II », in : *American Journal of Mathematics* 124.4 (2002), p. 817–850.
- [18] M. KAC, « Can one hear the shape of a drum ? », in : *The american mathematical monthly* 73.4 (1966), p. 1–23.
- [19] V.F. LAZUTKIN, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, t. 24, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Springer-Verlag, Berlin, 1993, p. x+387, ISBN : 3-540-53389-3.
- [20] D. MCDUFF et D. SALAMON, *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press, 2017.
- [21] J. MILNOR, « Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds », in : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 51.4 (1964), p. 542–542.
- [22] G.P. PATERNAIN, M. SALO et G. UHLMANN, « Spectral rigidity and invariant distributions on Anosov surfaces », in : *arXiv preprint arXiv :1208.4943* (2012).
- [23] G. POPOV et P. TOPALOV, « From KAM Tori to Isospectral Invariants and Spectral Rigidity of Billiard Tables », in : *arXiv preprint arXiv :1602.03155* (2016).
- [24] G. POPOV et P. TOPALOV, « Invariants of isospectral deformations and spectral rigidity », in : *Comm. Partial Differential Equations* 37.3 (2012), p. 369–446.
- [25] G. POPOV et P. TOPALOV, « On the integral geometry of Liouville billiard tables », in : *Communications in mathematical physics* 303.3 (2011), p. 721–759.

- 
- [26] X. SAINT-RAYMOND, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, Studies in Advanced Mathematics, Taylor & Francis, 1991, ISBN : 9780849371585.
- [27] M.A. SHUBIN, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Pseudodifferential Operators and Spectral Theory, Springer Berlin Heidelberg, 2001, ISBN : 9783540411956.
- [28] A. WEINSTEIN, « Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds », in : *Advances in Mathematics* 6.3 (1971), p. 329–346.
- [29] K. YOSIDA, *Équations différentielles et intégrales*, Traduit de l'anglais par S. Colombo, Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 38, Dunod, Paris, 1971, p. xv+230.
- [30] S. ZELDITCH, « Inverse spectral problem for analytic domains I : Balian-Bloch trace formula », in : *Communications in mathematical physics* 248.2 (2004), p. 357–407.
- [31] S. ZELDITCH, « Inverse Spectral Problem for Analytic Domains, II :  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -Symmetric Domains », in : *Annals of mathematics* (2009), p. 205–269.
- [32] S. ZELDITCH, « Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains », in : *Geometric & Functional Analysis GAFA* 10.3 (2000), p. 628–677.
- [33] S. ZELDITCH, « Wave invariants at elliptic closed geodesics », in : *Geometric and functional analysis* 7.1 (1997), p. 145–213.
- [34] M. ZWORSKI, *Semiclassical analysis*, t. 138, American Mathematical Soc., 2012.



## Titre : Invariants iso-spectraux et théorèmes KAM

**Mot clés :** Rigidité spectrale, Théorie KAM, Quasi-modes, Forme normale de Birkhoff

**Resumé :** L'objectif de ce travail est d'établir des résultats de rigidité spectrale pour des familles  $\mathcal{C}^1$  d'opérateurs (pseudo-)différentiels elliptiques auto-adjoints  $P_t$ ,  $t \in [0, \delta]$ , sur une variété lisse compacte  $M$  sans bord de dimension  $n \geq 2$ . Dans les deux premiers chapitres, on étudie des hamiltoniens proches d'un hamiltonien intégrable qui est non dégénéré au sens de Kolmogorov (Système KAM). On y construit une forme normale de Birkhoff au voisinage de chaque tore KAM ayant une fréquence diophantienne. Dans les chapitres 3 et 4 on établit une forme normale de Birkhoff quantique afin de construire des familles  $\mathcal{C}^1$  de quasi-modes. Ces dernières permettent de relier les propriétés spectrales de  $P_t$  aux propriétés dynamiques des tores KAM. Les deux derniers chapitres proposent des applications en lien avec la transformée de Radon ainsi qu'une étude sur les surfaces de rotation.

## Title : Isospectral invariants and KAM theorems

**Keywords :** Spectral rigidity, KAM theory, Quasi-modes, Birkhoff normal form

**Abstract :** The aim of this work is to obtain spectral rigidity results for  $\mathcal{C}^1$  families of elliptic self-adjoint (pseudo-)differential operators  $P_t$ ,  $t \in [0, \delta]$ , on a smooth closed manifold  $M$  of dimension  $n \geq 2$ . In the first two chapters, we investigate Hamiltonians close to a given integrable Hamiltonian which is non-degenerate in the sense of Kolmogorov (KAM system). This allows us to obtain a Birkhoff normal form in a neighborhood of any KAM tori with a Diophantine frequency. In the third and fourth chapters, we construct a quantum Birkhoff normal form and obtain  $\mathcal{C}^1$  families of quasi-modes. Using the quasi-modes, we establish a connection between the spectral properties of  $P_t$  and the dynamical properties of the KAM tori. The last two chapters provide applications of these results to the Radon transform and the surfaces of revolution.