



HAL
open science

Méthodes Analytique et Numérique dans l'Effet Hall Quantique Fractionnaire et Rôle du Spin des Électrons

Mohammed Ahmed Ammar

► **To cite this version:**

Mohammed Ahmed Ammar. Méthodes Analytique et Numérique dans l'Effet Hall Quantique Fractionnaire et Rôle du Spin des Électrons. Physique Quantique [quant-ph]. Université de Tlemcen, 2018. Français. NNT: . tel-01939713

HAL Id: tel-01939713

<https://theses.hal.science/tel-01939713v1>

Submitted on 29 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à

FACULTÉ DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Physique Théorique

Par

AHMED AMMAR Mohammed

Sur le thème

Méthodes Analytique et Numérique dans l'Effet Hall Quantique Fractionnaire et Rôle du Spin des Électrons

Soutenue publiquement, le samedi 30 juin 2018 à Tlemcen devant le jury composé de :

M ^f S. BEKHECHI	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M ^f Z. BENTALHA	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M ^f A. HOUARI	Professeur	C. Univ. Maghnia	Examineur
M ^f R. BOUAMRANE	Professeur	Univ.U.S.T.Oran	Examineur
M ^f A. MERAD	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur
M ^f M. MEBROUKI	MCA	ESSA. Tlemcen	Examineur

*Laboratoire Physique Théorique (LPT)
13000 Tlemcen - Algérie*

Remerciements

Ce travail a été effectué à l'université Aboubekr Belkaïd de Tlemcen, département de physique, mes premiers remerciements vont donc naturellement à cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont j'ai pu bénéficier.

Je voudrais remercier mon directeur de thèse le Pr *Z. BENTALHA* pour son encadrement et pour les nombreuses et fructueuses discussions.

Je souhaite vivement remercier tous les membres du jury, monsieur le Pr *S. BEKHECHI* pour avoir présidé mon jury de thèse, messieurs les professeurs *A. HOUARI*, *A. MERAD*, *R. BOUAMRANE* et *M. MEBROUKI* pour avoir accepté d'examiner mon manuscrit.

Mes plus grands remerciements vont à la Pr *F. OULD-KADDOUR* pour son soutien moral et logistique si précieux.

Je tiens à remercier : le Pr *B. THABTI*, le Pr *A. BENOSMAN* et le Dr *O. BELAIDI*, pour le soutien et leurs conseils qui m'ont permis de finaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Je tiens aussi à remercier les Docteurs *L. DEKAR* et *M. MEBROUKI* pour leurs relecture détaillée du manuscrit et pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur le thème de ma thèse.

Tous les membres de l'équipe de l'université de Médéa méritent également d'être remerciés pour leur attention et leurs conseils, mes pensées vont particulièrement au Dr *H. ZITOUNI*.

Au cours de mes années de thèse, j'ai aussi collaboré avec plusieurs chercheurs que je souhaite remercier : messieurs le Pr *R. SCHMIED* de l'université de Basel et le Dr *M. LADEGÅR MEYER* de l'université d'Oslo pour leurs conseils et aides à la programmation sous Mathematica; le Pr *Y. ZHANG* et le Dr *Y. WU* de l'université Pennsylvanie pour leurs commentaires et questionnements qui m'ont permis de mieux appréhender le thème de mon sujet de thèse.

Pour finir, je remercie du plus profond de mon cœur mes parents *A. Bounouar* et *M. Houria*, mon épouse *B.F. Zohra*, mon fils *A. Soheyb* et mes amis qui m'ont toujours soutenu.

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude des propriétés d'un gaz électronique bidimensionnel soumis à un champ magnétique très intense. Les effets des interactions entre les électrons du gaz bidimensionnel en présence d'un champ magnétique, ont été complètement étudiés dans l'état fondamental et l'état excité, ils sont à l'origine de l'effet Hall quantique fractionnaire (*EHQF*). Nous considérons deux approches différentes, la première est la méthode analytique et la seconde consiste en la diagonalisation numérique exacte (*DNE*) pour obtenir les énergies d'un système de plusieurs électrons à des facteurs de remplissages $1/3$, $1/5$, $1/7$ et $2/5$. L'énergie des états fondamental et excité de l'*EHQF* de N_e électrons dans la géométrie du disque ont été abordées par Laughlin et Jain. Ils ont montré que la forme de la fonction d'onde de ce système est exprimée en termes de déterminant de Slater. Les charges fractionnaires occupant le plus bas niveau de Landau (*PBNL*) interagissent via l'interaction de Coulomb, où ces énergies sont obtenues par la méthode analytique. Plus proche des conditions expérimentales, en utilisant la décomposition de l'interaction de Coulomb de courte portée sur les pseudopotentiels de Haldane, où elle décompose toute interaction de deux charges fractionnaires $V(r)$ en une somme de projections sur les secteurs de moments angulaires relatifs V_m , que l'on a déterminé dans le *PBNL* obtenu par diagonalisation numérique exacte. Enfin, nous avons étudié l'énergie d'interaction par particule de la fonction d'onde de Laughlin et celle des fermions composites (*FC*) excités de plusieurs systèmes à $\nu = 1/3$ et la correspondance entre l'*EHQF* et l'effet Hall quantique entier (*EHQE*). Puis, nous avons introduit la fonction d'onde "Pfaffien" de Moore-Read pour décrire l'état $5/2$ dans le second niveau de Landau (*SNL*).

Mots Clés : Méthode analytique, diagonalisation numérique exacte, modèle de la projection, pseudopotentiel de Haldane, interaction coulombienne, effet Hall quantique fractionnaire, gaz électronique bidimensionnel, géométrie du disque, fonction d'onde, système fortement corrélé, état Pfaffien de Moore-Read.

Table des matières

Introduction générale	1
1 La physique des effets Hall quantiques	4
1.1 Introduction	4
1.2 L'effet Hall classique	5
1.3 Effet Hall semi-classique : modèle de Drude	7
1.4 Effet Hall quantique entier	9
1.5 Effet Hall quantique fractionnaire	12
1.6 Conclusion	14
2 Électrons d'un gaz à 2D soumis à un champ magnétique	15
2.1 Introduction	15
2.2 Mouvement cyclotron	15
2.2.1 Électron dans un champ magnétique	15
2.2.2 Électron dans des champs magnétique et électrique	17
2.3 Niveaux de Landau	18
2.4 Invariance de jauge	21
2.5 Jauge de Landau	23
2.6 Jauge symétrique	23
2.7 Dégénérescence d'un NL	27
2.8 Fonction d'onde $\Phi_{PBNL}(z)$	30
2.9 Conclusion	33

3	Effet Hall quantique fractionnaire	34
3.1	Introduction	34
3.2	Le gaz d'électrons bidimensionnel	35
3.3	Rôle de l'interaction coulombienne	35
3.4	Rôle du spin des électrons dans l'EHQF	37
3.5	Fonction d'onde de Laughlin	37
3.6	Fonction d'onde de Jain	41
3.7	Excitations de l'état $1/3$ de Laughlin	44
3.8	Excitations de l'état $1/3$ de Jain	47
3.9	Conclusion	48
4	Méthodes analytiques dans l'EHQF	49
4.1	Introduction	49
4.2	Fonction d'onde à N électrons	50
4.3	Fonctions d'ondes analytiques	51
4.4	Modèle des FC en interactions	51
4.5	Énergie fondamentale de N_e électrons	53
4.6	Méthode analytique pour 4 électrons	54
4.6.1	Interaction électron–électron	54
4.6.2	Interaction électron– substrat	56
4.6.3	Interaction substrat – substrat V_{bb}	57
4.7	Résultats numériques	57
4.7.1	Résultats énergétiques pour $\nu = 1/3$	57
4.7.2	Résultats énergétiques pour $\nu = 1/5$	58
4.7.3	Résultats énergétiques pour $\nu = 1/7$	59
4.8	Conclusion	60
5	Excitations de charges fractionnaires	62
5.1	Introduction	62
5.2	Excitation d'une charge fractionnaire	63
5.2.1	Quasiparticule de Laughlin	63

5.2.2	Quasiparticule de Jain	64
5.3	Excitation de deux charges fractionnaires	67
5.3.1	Deux quasiparticules de Laughlin	67
5.3.2	Représentation d'occupation $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$ de FC	67
5.3.3	Représentation d'occupation $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}$ de FC	70
5.4	Conclusion	72
6	Calculs numériques de l'EHQF	74
6.1	Introduction	74
6.2	Méthode de Monte Carlo	75
6.3	Diagonalisation numérique exacte	79
6.3.1	Interaction électron–électron	80
6.3.2	Interaction substrat–substrat	82
6.3.3	Interaction électron–substrat	83
6.4	Résultats numériques pour $\nu = \frac{2}{5}$	83
6.5	Résultats numériques pour $\nu = \frac{5}{2}$	84
6.5.1	État Pfaffien de Moore et Read à $5/2$	84
6.5.2	Appariement triplet des fermions composites	85
6.5.3	État Pfaffien dans la géométrie du disque	86
6.5.4	Méthode de Moore-Read pour 4 électrons	88
6.5.5	Méthode de Moore-Read pour 6 électrons	89
6.6	Électrons sur la sphère et monopole magnétique	90
6.7	Approche entre le disque et la sphère	92
6.8	Correspondance entre EHQF-EHQE	95
6.9	Énergies de $N - 1$ quasiélectrons	96
6.9.1	Fonction d'onde de Laughlin pour $N - 1$ quasiélectrons	96
6.9.2	L'état compact $[1, 1, \dots, 1]$	96
6.10	Conclusion	98
	Conclusions et perspectives	101

Nomenclature	104
Appendices	107
A Méthode analytique pour le calcul de l'énergie de l'EHQF	107
B Potentiel de Coulomb projeté dans le PBNL	110
Bibliographie	113

Table des figures

1.1	Géométrie de l'effet Hall.	6
1.2	Résistance de Hall R_H en fonction de l'intensité du champ magnétique B.	7
1.3	Résistance longitudinale R_{xx} et de Hall R_H varie en fonction du champ magnétique B[6].	9
1.4	Mesure de l'EHQF[6].	12
2.1	Mouvement cyclotron d'un électron à la position \vec{r} autour du centre de guidage \vec{R} [18].	17
2.2	Mouvement de translation uniforme d'un orbite cyclotron.	18
2.3	Niveaux de Landau "n" représente les niveaux, et "m" est associé à la dégénérescence de chaque niveau. Cette figure représente le cas d'un remplissage $\nu=3$ [25].	21
2.4	Représentation du potentiel vecteur en jauge de Landau.	23
2.5	Représentation du potentiel vecteur en jauge symétrique.	24
3.1	a- Liquide de Fermi de fermions composite à $B=0$ (interaction faible), b- $EHQF$ des électrons (Électrons fortement corrélés), c- $EHQF$ des électrons avec l'énergie Zeeman.	36
3.2	Particule et quasiparticule de charge fractionnaire $e/3$ dans l'état fractionnaire $\nu=1/3$ [14].	38
3.3	Densité du fondamental du système de Hall à $\nu=1/3$ dans la jauge symétrique [15].	40

3.4	Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du $\nu = n$, (b) pour EHQF à $\nu = \frac{n}{2n+1}$.	41
3.5	Représentation du vortex.	43
3.6	Fermion composite (<i>FC</i>).	44
3.7	Les excitations dans un seul niveau sont interdites par le principe de Pauli dans l'EHQE.	44
3.8	Modèle d'électrons restreints à un seul NL.	45
3.9	Création d'un quasitrou de Laughlin à $\nu=1/3$ [14].	45
3.10	Créer un état de type quasitrou-quasiparticule.	47
4.1	Méthode analytique exacte pour le calcul de l'état fondamental à $\nu=1/3$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les rectangles colorés en bleu représentent les énergies obtenues par la méthode de MC.	58
4.2	Méthode analytique exacte de l'état fondamental à $\nu=1/5$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les anneaux colorés en bleu représentent les énergies obtenues par la méthode de MC.	59
4.3	Méthode analytique exacte de l'état fondamental à $\nu=1/7$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les rectangles colorés en bleu représentent les énergies obtenues par DNE.	60
5.1	Création d'une quasiparticule de FC à $\nu=1/3$. (a) état fondamental, (b) premier état excité.	64
5.2	Comparaison de la différence d'énergie, entre la fonction d'onde d'une seule quasiparticule de Laughlin et de Jain obtenues par un calcul analytique exacte (disques colorés en rouge) aux résultats obtenus par la méthode de MC(rectangles colorés en bleu).	66
5.3	Création d'un système contenant deux quasiparticules. (a) état fondamental, (b) seconds états excités de type d'occupation $[N-2,2]$ de FC à $\nu=1/3$.	68

5.4	Méthode analytique exacte du deuxième état excité d'occupation $[N-2,2]$ à $1/3$	69
5.5	Création d'un système contenant deux quasiparticules. (a) état fondamental. (b) deuxième états excités de type d'occupation $[N-2,1,1]$ de FC à $v=1/3$	70
5.6	Méthode analytique exacte à deux quasiparticules d'occupation $[N-2,1,1]$ à $v=1/3$	72
6.1	Schéma d'un état fondamental pour l'EHQF à $v = 5/2$ [99].	86
6.2	EHQF à la fraction $v = 5/2$ [91].	87
6.3	EHQF à la fraction $v = 11/2, 9/2, 7/2$ et $5/2$ [100].	88
6.4	Approche entre la géométrie du disque et la géométrie de la sphère à $v=1/3$	95
6.5	Énergies de $N-1$ quasiparticules $\mathbb{E}^{(N-1)qp}$ pour $N_e=2$ à 7 particules dans la géométrie du disque à $v=1/3$. Les disques colorés en jaune représentent les états de Laughlin Ψ_L^{Nqp} . Les rectangles en bleu représentent les états de Jain $\Psi_{CF}^{[1,1,\dots,1]}$. Les anneaux en pointillé représentent les états de l'EHQE[88].	97
6.6	Énergies de $N-1$ quasiparticules $\mathbb{E}^{(N-1)qp}$ pour $N_e=7$ particules dans la géométrie du disque à $v=1/3$. Les disques colorés en rouge représentent les états de Laughlin Ψ_L^{Nqp} . Les rectangles en bleu représentent les états de Jain $\Psi_{CF}^{[N-k,1,\dots]}$. L'anneau en pointillé représente l'état de l'EHQE.	98

Liste des tableaux

4.1	État fondamental à $\nu = 1/3$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	57
4.2	État fondamental à $\nu = 1/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	58
4.3	État fondamental à $\nu = 1/7$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	60
5.1	Énergies du premier état excité, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	66
5.2	Énergies du deuxième état excité $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	69
5.3	Énergies du deuxième état excité $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	72
6.1	Énergie par particule ε_{ee} de l'état fondamental et l'état excité à $\nu = 2/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$	84
6.2	État fondamental à $\nu = 1/3$ et à $\nu = 2/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$, dans la géométrie de la sphère.	94

Introduction générale

La découverte de l'effet Hall quantique entier a eu lieu en 1980 et le fractionnaire en 1982. Ces deux effets se produisent lorsqu'un gaz d'électrons, confiné à deux dimensions, contrairement à l'effet Hall classique, est soumis à un champ magnétique intense. À une température proche du zéro, et dans un champ magnétique très intense, la résistance transverse des échantillons présente en fonction de ce dernier des plateaux alors que la résistance longitudinale s'annule. Sur chaque plateau, la résistance de Hall a une valeur quantifiée donnée par un multiple entier ou une fraction du quantum de résistance.

La thèse présentée dans ce manuscrit est une contribution à l'étude analytique et numérique de l'influence du potentiel coulombien sur les états de l'effet Hall quantique fractionnaire, à travers deux approches, l'une de Laughlin[1] et l'autre de Jain[2]. Notre contribution repose sur ces deux méthodes complémentaires –analytique et numérique–. La première utilise des calculs analytiques qui permettent de déterminer l'énergie des états modèles tels que le calcul des intégrales grâce auxquelles on peut déterminer l'énergie d'interaction coulombienne. La seconde stratégie d'étude repose sur des calculs numériques exacts qui permettent de déterminer l'état fondamental du système pour un petit nombre d'électrons, afin d'en étudier les propriétés des états modèles tels que celui de Laughlin et de Jain.

L'outil numérique est un associé efficace pour l'étude de l'effet Hall quantique Fractionnaire. Il permet de déterminer les propriétés souvent difficilement calculables analytiquement. Après un bref rappel sur la physique des effets Hall quantiques dans le premier chapitre, nous décrirons dans le second chapitre les propriétés les plus remarquables d'un électron bidimensionnel soumis à un champ magnétique. Après avoir rappelé les caractéristiques du mouvement de cet électron obtenu en physique classique, nous passerons

au cas quantique, que nous traiterons de plusieurs manières correspondantes à différents choix de jauge. Nous étudierons en particulier la structure de l'hamiltonien en niveaux de Landau régulièrement espacés, nous verrons que ces niveaux ont une dégénérescence macroscopique, qui croît linéairement avec l'aire de l'échantillon. Nous nous intéresserons tout particulièrement au niveau fondamental de Landau ou plus bas niveau de Landau (*PBNL*) dénommé "Lowest Landau Level" (*LLL*), pour une base d'états propres. Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les deux théories les plus remarquables de l'effet Hall quantique fractionnaire, à savoir celles de Laughlin et de Jain les plus utilisées par les physiciens, ensuite, nous définirons la théorie des quasiparticules et excitations élémentaires dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Dans ce cas, le gap d'énergie doit apparaître comme une conséquence de l'interaction de Coulomb entre électrons. La théorie des fermions composites (*FC*) fait apparaître l'existence de quasiparticules de charges fractionnaires et des gaps d'énergie associés. Dans le chapitre quatre on a discuté la nature de l'état fondamental du système ainsi que la méthode analytique dans l'*EHQF*, cette dernière consiste à déterminer analytiquement l'hamiltonien pour un petit nombre $N_e = 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 électrons. Le chapitre cinq est consacré à l'étude de l'excitation de charges fractionnaires dans l'*EHQF*, ainsi que l'énergie de Coulomb entre les électrons pour une et deux quasiparticules de Laughlin et de Jain par la méthode analytique jusqu'à $N_e = 7$ électrons.

Enfin, dans le sixième chapitre on présente deux méthodes de calculs numériques de l'effet Hall quantique fractionnaire, dans la première, nous souhaitons présenter une recherche bibliographique de la méthode de calcul de Monte Carlo (*MC*) pour déterminer les énergies fondamentales par particule pour un système d'électrons dans les états de Laughlin $\nu = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$. Dans la deuxième, nous étudierons en détail la physique de l'*EHQF* en présence d'un pseudo-potentiel d'interaction dans le cas de la géométrie d'un disque et d'une sphère. Dans un premier temps, nous avons tenté de décrire l'état Pfaffien de Moore-Read de l'*EHQF* dans la géométrie du disque aux facteurs de remplissages $5/2$. Puis, nous présentons une approche de l'énergie d'interaction par particule pour l'état de Laughlin $\nu = 1/3$ entre la géométrie du disque et de la sphère. Nous avons ensuite décrit les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant $N - 1$ quasiparticules

en régime d'*EHQF*.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale, résumant l'ensemble des résultats obtenus plus des perspectives pour un travail futur pour l'effet Hall quantique.

Chapitre 1

La physique des effets Hall quantiques

1.1 Introduction

La physique des effets Hall a trait à trois phénomènes appelés effet Hall classique, quantique entier et quantique fractionnaire. L'effet Hall classique apparaît lorsqu'un ruban de métal plongé dans un champ magnétique perpendiculaire à la direction du courant électrique acquiert une résistance transverse proportionnelle à ce même champ. Contrairement à l'effet Hall classique, les effets Hall quantiques ne se produisent que lorsqu'un gaz d'électrons est confiné à deux dimensions et soumis à un champ magnétique intense et à basse température. Alors, à basse température et à champ magnétique intense, la résistance transverse présente, en fonction de l'intensité du champ magnétique, des plateaux sur lesquels elle est quantifiée tandis que la résistance longitudinale s'annule. Sur ces plateaux, le rapport entre la conductance transverse et le quantum de conductance peut être un nombre entier c'est l'effet Hall quantique entier ($EHQE$) ou une fraction, il s'agit alors de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$). Ces deux derniers phénomènes sont d'origine purement quantique.

1.2 L'effet Hall classique

L'effet Hall classique a été prédit par E. Hall en 1879, il apparaît lorsque l'on plonge un ruban de métal dans un champ magnétique perpendiculaire à la direction du courant électrique acquiert une résistance transverse proportionnelle au champ magnétique. Le ruban étant parcouru par un courant électrique $I = (I, 0, 0)$ selon sa longueur L , elle-même perpendiculaire au champ magnétique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ dirigé vers le haut (voir figure 1.1), il apparaît une tension électrique dans la direction transverse au champ magnétique et à la propagation du courant. Cette tension transverse V_H est dite tension de Hall. On s'intéresse au mouvement d'un électron qui se dirige dans le sens inverse de I à la vitesse \vec{V} , l'électron subit une force magnétique de Lorentz définie par \vec{F}_m

$$\vec{F}_m = q\vec{V} \times \vec{B}, \quad (1.1)$$

avec $q = -e < 0$, le sens de cette force \vec{F}_m est définie par la règle de la main droite.

Les électrons sont déviés par le champ \vec{B} vers le haut de la plaque figure 1.1 qui se charge négativement, alors que le bas de la plaque se charge donc positivement. Cette répartition de charges provoque l'apparition d'un champ électrique dirigé de la zone positive vers la zone négative \vec{E}_y et on appelle le champ électrique de Hall \vec{E}_H . La figure 1.1 représente la géométrie de l'effet Hall classique. Aussi les électrons qui circulent dans la plaque subissent une nouvelle force coulombienne cette fois-ci dirigée vers le bas \vec{F}_e

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_H. \quad (1.2)$$

Il apparaît alors une force électromotrice dans une direction perpendiculaire au courant et au champ magnétique, qui s'appelle force de Lorentz, qui agit sur un électron se déplaçant avec une vitesse \vec{V} en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique \vec{B} , elle est donnée par[4, 5]

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (1.3)$$

Les premiers électrons qui passent dans la plaque seront fortement déviés vers le haut par la force magnétique uniquement \vec{F}_m , ceux qui suivent seront un peu moins déviés, puisque une force de Coulomb viendra compenser en partie la force magnétique, mais

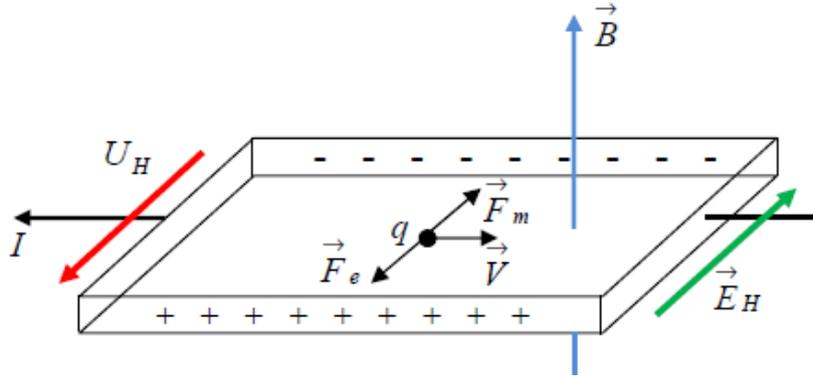


FIG. 1.1 – Géométrie de l'effet Hall.

ces électrons s'accumulent en haut de la plaque. Lorsque la force de Coulomb compense¹ exactement la force magnétique, l'équilibre est atteint $|\vec{F}_e| = |\vec{F}_m|$, on obtient l'effet Hall classique qui peut donc être expliqué de manière purement classique

$$q\vec{E}_H = q(\vec{V} \times \vec{B}). \quad (1.4)$$

Dans ce cas, les électrons qui arrivent dans la plaque subiront des forces qui se compensent, ils continueront leurs trajets rectilignes. Dans ces conditions une différence de potentielle U_H , appelée tension de hall, restera mesurable entre le haut et le bas de la plaque. On définit la relation entre la vitesse et la densité de courant par

$$V = \frac{J_x}{q \cdot n_e}. \quad (1.5)$$

On obtient

$$eE_H = \frac{1}{n_e} J_x B. \quad (1.6)$$

La charge de l'électron est ($q = -e$) et leur densité est n_e , U_x et U_H sont respectivement la tension longitudinale et la tension transverse. La densité de courant étant définie dans l'équation(1.5) par $\vec{J} = -e \cdot n_e \cdot \vec{V}$.

La résistance longitudinale et de Hall sont définies respectivement comme

$$R_x = \frac{U_x}{I_x}, \text{ et } R_H = \frac{U_H}{I_x}. \quad (1.7)$$

¹Les électrons se déplacent perpendiculairement au champ électrique, en suivant des courbes équipotentielles.

Soit L la longueur et W la largeur de la plaque. La densité de courant \vec{J} selon la longueur L de l'échantillon est uniforme, le champ électrique E_H suivant la largeur W est aussi uniforme. Ainsi cette approximation est souvent vérifiée pour un échantillon tel que $L \gg W$ [6]

$$E_H = \frac{U_H}{W}. \quad (1.8)$$

À deux dimensions on a une relation de proportionnalité entre la résistivité de Hall ρ_H ou la résistance de Hall R_H ($\rho_H \propto R_H$) avec l'intensité du champ magnétique

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{|E_H|}{|J_x|} \\ &= \frac{B}{en_e}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le schéma suivant figure 1.2 représente la variation de la résistance de Hall R_H en fonction de l'intensité du champ magnétique B .

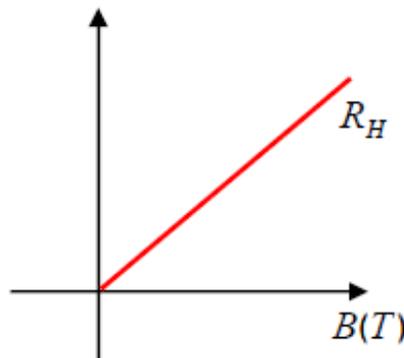


FIG. 1.2 – Résistance de Hall R_H en fonction de l'intensité du champ magnétique B .

Classiquement la résistance transverse, appelée résistance de Hall, varie linéairement avec B en première approximation.

1.3 Effet Hall semi-classique : modèle de Drude

Les électrons d'un gaz à 2D en mouvement peuvent entrer en collision. Drude introduit une force de frottement appliquée à chaque électron et proportionnelle à sa vitesse définie

par[7]

$$\vec{F}_V = -\frac{m}{\tau_0} \vec{V}, \quad (1.10)$$

avec \vec{V} est la vitesse de l'électron et τ_0 le temps moyen entre deux collisions de l'électron. L'utilisation de la relation fondamentale de la dynamique aboutit à la formule de Drude pour la conductivité de Hall, il s'agit donc d'une théorie semi-classique de l'effet Hall. Drude s'est intéressé à la force moyenne ressentie par un gaz d'électrons[8, 9], appelée aussi force de Lorentz, on écrit

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \vec{F}_V, \quad (1.11)$$

En régime stationnaire on a $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$, l'équation (1.11) devient

$$\begin{aligned} 0 &= q(E_x + V_y \cdot B) - \frac{V_x}{\tau_0} \\ 0 &= q(E_y + V_x \cdot B) - \frac{V_y}{\tau_0}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les électrons se déplacent avec une vitesse moyenne \vec{V} dans la même direction que le champ électrique \vec{E} . Dans ce cas, la densité de courant étant donnée par l'équation (1.5), où $\vec{J} = -e \cdot n_e \cdot \vec{V}$ est liée au champ électrique \vec{E} par le tenseur de résistivité

$$\vec{E} = \rho \vec{J}. \quad (1.13)$$

Le tenseur de résistivité est alors

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

où la matrice définit le tenseur de résistivité ρ_{xx} et ρ_{xy} , la résistivité longitudinale et transverse ou la résistivité de Hall, respectivement, dont les éléments diagonaux et non diagonaux sont :

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m}{n_e e^2 \tau_0}, \quad (1.15)$$

et,

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{n_e e}. \quad (1.16)$$

Les deux dernières équations (1.15) et (1.16) donnent les résistivités de Drude ρ_{xx} et ρ_{xy} . Tel que ρ_{xx} est indépendante de l'intensité du champ magnétique, ainsi que ρ_{xy} croît

linéairement avec le champ magnétique B . La résistivité longitudinale apparaît seulement dans le modèle de Drude qui suppose que les électrons subissent, en moyenne, une collision par intervalle de temps τ_0 [10].

1.4 Effet Hall quantique entier

L'effet Hall quantique découvert au début des années 80 par Klaus von Klitzing, est un thème de recherche très vaste de la physique de la matière condensée[11, 12]. Cette découverte des *EHQE* est intimement liée à l'amélioration de la fabrication des échantillons et des gaz d'électrons 2D. Il étudie le transport électrique d'un gaz d'électrons (Si-MOSFET) ou (Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor en silicium Si) bi-dimensionnel et les hétérostructures GaAs/Al_xGa_{1-x}As[13]. Les électrons de ce gaz ne se déplacent pas réellement dans un plan, mais sont piégés entre des semiconducteurs[6]. Dans cette expérience, Klitzing et ses collaborateurs ont mesuré la résistance longitudinale R_{xx} et la résistance de Hall $R_H = R_{xy}$ et ils ont découvert que pour de très basses températures entre 1- 4 (K), où $k_B T \ll \hbar\omega_c$ et un champ magnétique intense bien précis entre 3 -30 (T)[6], la résistance de Hall forme des plateaux (voir figure 1.3).

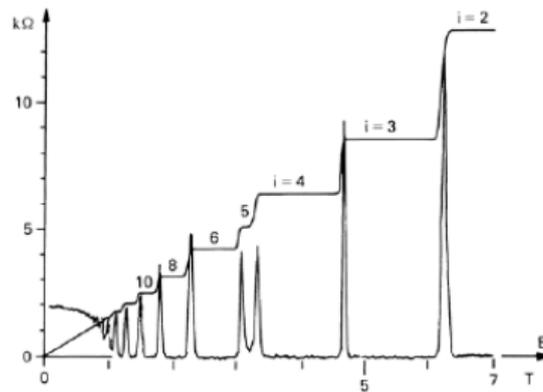


FIG. 1.3 – Résistance longitudinale R_{xx} et de Hall R_H varie en fonction du champ magnétique B [6]

La résistance longitudinale présente un pic et la conductivité de Hall passe d'un plateau à l'autre[16, 17]. Chaque palier dans la résistance de Hall R_H est accompagné d'une

résistance longitudinale R_{xx} nulle[18]. L'expression de la résistance de Hall est la même en mécanique quantique qu'en mécanique classique[19], la seule différence réside dans l'existence de valeurs privilégiées pour la résistance de Hall, qui apparaissent sur toute une plage de valeurs de l'intensité du champ magnétique. Pour de faibles valeurs de l'intensité du champ magnétique, la résistance de Hall varie linéairement avec le champ magnétique et on retrouve l'effet Hall classique. L'expérience de von Klitzing (primée par le Prix Nobel en 1985) a permis l'observation de l'*EHQE* [11]. La résistivité de Hall présente une succession de plateaux qui coïncident avec l'annulation de la résistivité longitudinale. Ces plateaux sont centrés autour de valeurs de l'intensité du champ magnétique qui correspondent à un facteur de remplissage ν , défini par

$$\nu = \frac{N_e}{N_B}, \quad (1.17)$$

avec N_e est nombre d'électron et N_B la dégénérescence des niveaux de Landau, appelé aussi le nombre de quanta de flux. Ou encore

$$\nu = \frac{n_e}{n_B}, \quad (1.18)$$

tels que, $n_e = \frac{N_e}{S}$ est la densité d'électrons, $n_B = \frac{N_B}{S}$ est la densité de flux, et S l'aire du système utilisé.

La résistance de Hall mesurée par Klaus von Klitzing, avait un comportement très différent de celui prédit par la théorie classique. La courbe n'est pas linéaire en fonction de l'intensité du champ magnétique, mais se présente sous forme de paliers d'un escalier. La résistance de Hall reste constante pour certaines valeurs de B , elle désigne généralement la quantification de la résistance de Hall[20]. Il s'avère qu'il y a réellement des processus qui causent la formation de ces plateaux. Dans ce cadre, Klitzing et ses collaborateurs ont expliqué que la création de ces plateaux pour l'*EHQE* est due à l'apparition d'un gap dès qu'un niveau de Landau est complètement occupé[21]. Ceci correspond au principe de Pauli : le gap est dû au fait que lorsqu'un niveau de Landau est complètement rempli, les électrons ne peuvent pas être diffusés dans un état de même (NL), car tous les états sont déjà occupés afin d'imposer le passage au niveau de Landau supérieur.

Ce gap exige une énergie $\hbar\omega_c$ pour créer une excitation. Il existe d'autre processus qui mènent à la formation de ces plateaux pour l'*EHQE*. Par exemple, quand l'intensité du

champ magnétique augmente, la dégénérescence de spin est levée mais sans effet Zeeman, le potentiel de désordre est plus intense, ainsi que l'interaction coulombienne,..., etc.

On observe qu'il est possible d'écrire la résistance de Hall

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{E_H}{J_x} \\ &= \frac{B}{n_e e}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

En remplaçant la densité d'électrons n_e par leur expression, on obtient

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{B}{e^2} \frac{S}{N} \frac{e}{h} \\ &= \frac{\phi}{\phi_0} \frac{1}{N} \frac{h}{e^2} \\ &= \frac{N_B}{N} \frac{h}{e^2} \\ &= \frac{h}{\nu e^2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Lorsque l'intensité du champ magnétique augmente, ω_c et la dégénérescence N_B des niveaux de Landau augmentent où $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la fréquence cyclotronique.

Un plateau indique que pour une certaine valeur de l'intensité du champ B le système devient incompressible puisque la densité d'électrons n_e reste dépendante à celle du quantum de flux n_B pour garder le rapport $\nu = \frac{n_e}{n_B} = p$ constant[21]. Simultanément, la résistivité longitudinale ρ_{xx} s'annule à basse température. C'est le phénomène d'effet Hall quantique entier.

Comme l'effet hall classique, la relation de proportionnalité entre la résistivité ρ_H et la résistance de Hall R_H reste valable, de telle sorte que la résistance de Hall prenne des valeurs quantifiées

$$\begin{aligned} \rho_H &= \rho_{xy} \\ &= \frac{E_y}{J_x} \\ &= \frac{B}{\nu e}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le facteur de remplissage ν prend des valeurs entières positives $\nu = 1, 2, 3, \dots, N$.

1.5 Effet Hall quantique fractionnaire

Deux ans après la découverte de l'*EHQE* (1982), D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C. Gossard[24] rapportèrent l'observation d'un plateau dans la résistance de Hall à une valeur $R_H = \frac{3h}{e^2}$ et, comme dans le cas de l'effet Hall quantique entier, la résistance transverse s'annule. Cette valeur de la résistance de Hall correspond à une fraction du facteur de remplissage, il s'agit de l'effet Hall quantique fractionnaire (*EHQF*). Le schéma représenté sur la figure 1.4 montre une observation de l'effet Hall quantique fractionnaire.

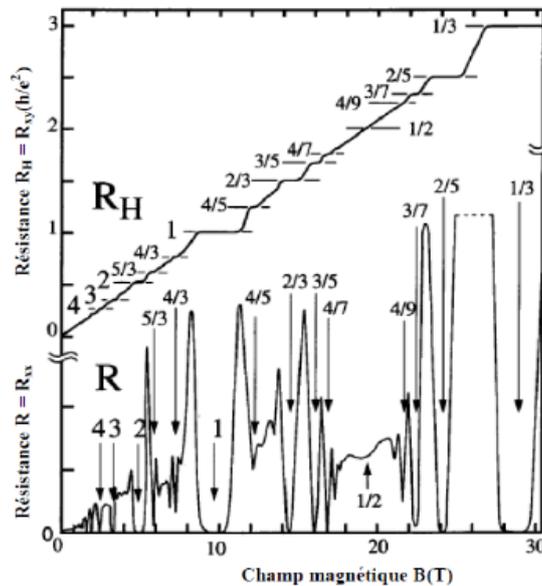


FIG. 1.4 – Mesure de l'EHQF[6].

Contrairement à l'effet Hall quantique entier, les fractions n'apparaissent que dans des échantillons de très haute mobilité²[21], essentiellement des hétérojonctions GaAs/AlGaAs ou des MOSFET en silicium Si. Ainsi l'effet Hall quantique fractionnaire est dû à des interactions coulombiennes fortes et à des corrélations entre électrons. Pour l'*EHQF*, la température est plus faible entre 20 -100 (mK) et l'intensité du champ magnétique doit être plus intense entre 15 - 30 (T)[6]. L'*EHQF* apparaît comme un problème d'électrons

²La mobilité est définie comme le rapport entre la vitesse de dérive et le champ Électrique $\mu = V_d/E$, la mobilité est d'autant plus grande qu'il y a moins d'impuretés dans les échantillons.

fortement corrélés dans un même niveau de Landau (NL) partiellement rempli ($\nu < 1$), où des excitations dans un seul NL sont permises, pour le modèle d'électrons restreints à un seul NL , enfin le gap en énergie ne peut être qu'une conséquence de l'interaction coulombienne entre électrons occupant le même NL . Cette excitation à pouvoir créer un quasi-trou qui correspond à l'ajout d'un quantum de flux dans la fonction d'onde collective des électrons. En effet, comme il y a m quanta de flux par électron, et l'ajout d'un quantum de flux revient à créer un état non occupé, et donc cette excitation correspond au retrait d'une charge fractionnaire $-e/m$ ce qui lui donne un accès libre de se déplacer d'un état vers l'autre[1, 14]. La projection à un seul NL fait que l'énergie cinétique globale reste inchangée et rend le problème indépendant de la structure de bandes électronique initiale.

On a vu précédemment selon l'équation (1.18) pour l' $EHQE$ que le facteur de remplissage ν étant le rapport entre la densité électronique n_e et la densité de flux magnétique n_B . Concernant l' $EHQF$, Laughlin a été le premier en 1983, à proposer une fonction d'essai pour décrire l'état fondamental de la fraction $1/3$ pour un liquide³ incompressible (liquide de Laughlin), mais cette fonction ne contient qu'un paramètre entier m , forcément impair et prend les valeurs $3, 5, 7, \dots$, de telle sorte que $\nu = 1/m$.

En 1989 Jainendra K. Jain a proposé une autre manière d'aborder la théorie d' $EHQF$, il introduisit la théorie des fermions composites (FC), qui a pu expliquer la plupart des valeurs du facteur de remplissage observées dans l' $EHQF$. Cette théorie permet d'appréhender l' $EHQF$ comme un $EHQE$, il a proposé un autre facteur de remplissage qui s'écrit

$$\nu = \frac{p}{2np + 1}. \quad (1.22)$$

La résistance de Hall dans l'équation (1.21) prend des valeurs quantifiées avec un facteur de remplissage ν qui prend des valeurs fractionnaires positives $\nu = 1/3, 1/5, 2/5, \dots$, etc.

Enfin, l'effet Hall fractionnaire apparaît lorsque les interactions entre les électrons

³L'état fondamental n'est plus décrit par un liquide de Laughlin pour $\nu \leq 7$, les électrons préfèrent s'organiser selon une structure cristalline triangulaire, appelée cristal de Wigner.

prédominants, ce fait sera présenté dans le chapitre 3, tandis que l'effet Hall entier apparaît lorsque le potentiel de désordre surpasse les interactions entre les électrons.

1.6 Conclusion

Les études théorique et expérimentale de l'effet Hall classique nécessite la prise en compte du mouvement d'un électron dans un champ magnétique. Ce traitement ne se comprend que par une étude quantique du mouvement électronique pour décrire ce phénomène. La résistance longitudinale R_{xx} est indépendante du champ magnétique, ainsi que la résistance de Hall $R_H(R_{xy})$ croît linéairement avec le champ magnétique.

L'étude de l'effet Hall quantique mérite un traitement du mouvement d'un électron dans un champ magnétique. Pour décrire ce phénomène, nous avons décrit brièvement l'apparition de l'effet Hall classique, quantique entier qui est une conséquence de la présence de désordre, puis quantique fractionnaire qui est une conséquence de la répulsion entre électrons, ainsi que le passage entre ces trois phénomènes. On aborde d'abord dans le chapitre suivant le problème d'un électron en présence d'un champ magnétique extérieur, c'est le problème appelé "niveaux de Landau".

Chapitre 2

Électrons d'un gaz à 2D soumis à un champ magnétique

2.1 Introduction

Pour étudier la physique des gaz d'électrons bidimensionnels, il serait utile d'étudier le problème d'un électron en présence d'un champ magnétique extérieur. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés des électrons itinérants en présence d'un champ magnétique. Un électron sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique \vec{B} possède un spectre très particulier, organisé en niveaux macroscopiquement dégénérés, c'est là le problème dit "des niveaux de Landau". Cette étude est essentiellement basée sur le traitement quantique d'un électron dans un champ magnétique.

2.2 Mouvement cyclotron

2.2.1 Électron dans un champ magnétique

On donne la résolution du mouvement classique d'un électron qui se déplace dans un plan (x-y) sous l'influence d'un champ magnétique qui lui est perpendiculaire. La force de Lorentz que subit par un électron se déplaçant avec une vitesse \vec{V} est donnée par l'équation (1.1).

L'équation du mouvement classique décrit en effet un mouvement circulaire de rayon $R_c = \frac{mV}{eB}$ appelé rayon cyclotron avec une pulsation de cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m}$.

Soit une particule de charge $q = -e$ soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = -e(\vec{V} \times \vec{B}), \quad (2.1)$$

avec $V_x = \dot{x}$ et $V_y = \dot{y}$ on obtient

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eB\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= eB\dot{x}, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans la direction z , c'est le mouvement d'une particule libre. Dans le plan perpendiculaire au champ \vec{B} , on a

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \omega_c \dot{x}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ces équations s'intègrent en

$$\begin{aligned} \dot{x} = -\omega_c(y - Y) \\ \dot{y} = \omega_c(x - X) \end{aligned} \implies \begin{aligned} x = X - r \sin(\omega_c t + \varphi) \\ y = Y + r \cos(\omega_c t + \varphi) \end{aligned}. \quad (2.4)$$

Le mouvement de la particule projeté dans le plan (x-y) est donc un cercle de centre (X, Y) , parcouru à la fréquence ω_c , comme schématisé sur la figure 2.1. Où \vec{r} représente la position de l'électron, $\vec{\eta}$ relie les deux vecteurs \vec{R} et \vec{r} .

Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique \vec{B} autour du centre de guidage $R(X, Y)$ est considéré comme une constante du mouvement, où \vec{R} est le centre de l'orbite cyclotron. L'équation (2.5) donne la relation entre \vec{R} , \vec{r} et $\vec{\eta}$

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_x, \eta_y) \\ &= r - R. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On pose $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$ le potentiel vecteur tel que

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = B\vec{z}. \quad (2.6)$$

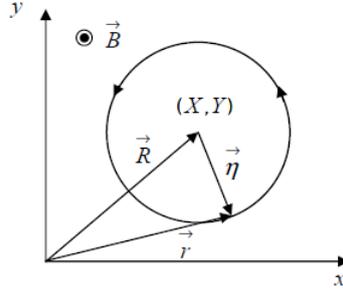


FIG. 2.1 – Mouvement cyclotron d'un électron à la position \vec{r} autour du centre de guidage \vec{R} [18].

En physique quantique, on utilise les échelles quantiques de longueur $\sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$, de vitesse $\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{m}}$ et d'énergie $\hbar\omega_c$. On utilise les opérateurs de position \hat{r} et d'impulsion \hat{p} . On en déduit l'impulsion \vec{p} dans le formalisme quantique

$$\vec{p} = m\vec{V} - e\vec{A}. \quad (2.7)$$

L'hamiltonien s'écrit alors

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m}. \quad (2.8)$$

2.2.2 Électron dans des champs magnétique et électrique

Nous rajoutons un champ électrique constant et uniforme \vec{E} à l'équation (1.1) dans la direction x . Le mouvement circulaire se compose avec un mouvement de translation uniforme de vitesse de dérive \vec{V}_d [15]perpendiculaire aux champs \vec{B} et \vec{E} . L'équation (2.9) donne la formule de la vitesse de dérive \vec{V}_d

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (2.9)$$

La figure 2.2 donne le déplacement d'un électron dans un plan (x-y), soumis à un champ magnétique \vec{B} homogène et perpendiculaire au plan (x-y) et à un champ électrique \vec{E} homogène suivant l'axe x.

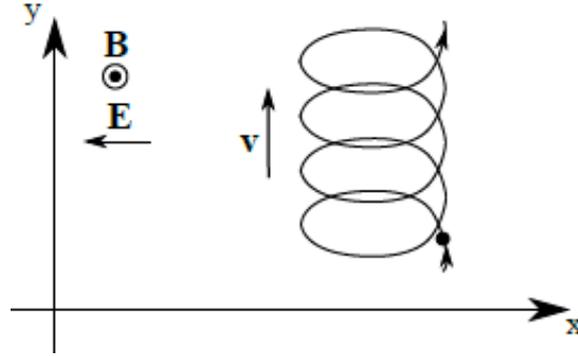


FIG. 2.2 – Mouvement de translation uniforme d'un orbite cyclotron.

En utilisant la densité de courant électrique microscopique

$$\begin{aligned}\vec{J} &= -ne\vec{V}_d \\ &= -ne\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2},\end{aligned}\quad (2.10)$$

tel que $\vec{E} \perp \vec{B}$ on obtient

$$\vec{J} = -ne\frac{E}{B}\vec{e}_x. \quad (2.11)$$

La résistivité de Hall ρ_H est définie par

$$\begin{aligned}\rho_H &= \rho_{xy} \\ &= \frac{|\vec{E}|}{|\vec{J}|} \\ &= \frac{|E_y|}{|J_x|} \\ &= \frac{B}{n_e \cdot e}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

La résistance de Hall R_H , proportionnelle à la résistivité ρ_H , varie linéairement avec B , sans plateaux pour l'effet Hall classique et avec plateaux pour l'effet quantique.

2.3 Niveaux de Landau

On s'intéresse aux propriétés des électrons d'un gaz dans un champ magnétique. L'origine de ces observations, bien différentes de ce que prédit la mécanique classique, doit être

cherchée du côté de la mécanique quantique. Ainsi, il s'agit de résoudre le problème du mouvement d'un électron non relativiste confiné à deux dimensions dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire au mouvement de l'électron. La discussion décrit le comportement des électrons dans un champ magnétique faible. Dans un champ suffisamment fort, les électrons effectuent un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, bien connu en mécanique classique, supposé polarisé en spin pour le moment $\vec{B} = B \hat{z}$.

Dans n'importe quel mouvement circulaire de rayon η et de vitesse \vec{V} , l'accélération vers le centre du mouvement est donné par $a = \frac{V^2}{\eta}$. Afin que la partie magnétique de la force de Lozentz définie par \vec{F}_m de l'équation du mouvement (2.1) soit équivalente à $m\vec{a}$ on obtient la relation entre \vec{V} et $\vec{\eta}$ par

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{eB}{m}\vec{\eta} \\ &= \omega_c \vec{\eta}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

L'opérateur quantité de mouvement $\vec{\Pi} = m\vec{V}$ de l'équation (2.7) s'écrit

$$\vec{\Pi} = \vec{p} + e\vec{A},\tag{2.14}$$

avec les relations de commutation

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}.\tag{2.15}$$

Le hamiltonien de l'équation (2.7) peut s'écrire

$$\begin{aligned}H &= \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} \\ &= \frac{(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)}{2m}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}[\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x, A_y] + [A_x, p_y]) \\ &= -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -i\hbar e(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= -ie\hbar B.\end{aligned}\tag{2.17}$$

En terme de longueur magnétique $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ l'équation (2.17) devient

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{\hbar^2}{l_B^2}. \quad (2.18)$$

Pour montrer plus explicitement la structure de l'oscillateur harmonique, on introduit les opérateurs de création et d'annihilation, (a, a^+)

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_x - i\Pi_y), \text{ et } a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\Pi_x + i\Pi_y), \quad (2.19)$$

avec la normalisation, on obtient

$$[a, a^+] = 1. \quad (2.20)$$

On peut écrire le hamiltonien de l'équation (2.16) sous la forme

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2}(aa^+ + a^+a) \\ &= \hbar\omega_c(aa^+ + \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec $\omega_c = \frac{e|\vec{B}|}{m}$ la pulsation cyclotron et « n » est la valeur propre de l'opérateur a^+a .

Dans les systèmes bidimensionnels d'électrons dans un champ magnétique, les états électroniques sont quantifiés en niveaux discrets équidistants et régulièrement espacés de la quantité $\hbar\omega_c$, appelés niveaux de Landau (NL). Notons de plus que formellement, on peut voir ce système comme un oscillateur harmonique et les énergies possibles de notre hamiltonien H et sont représentées sur la figure 2.3 qui donne les niveaux de Landau où n représente les niveaux, et m est associé au centre de guidage qui donne lieu à la dégénérescence de chaque niveau

$$H = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \quad (2.22)$$

Pour rechercher explicitement les états propres de H , il faut choisir une jauge pour exprimer le potentiel vecteur, ce que nous ferons par la suite.

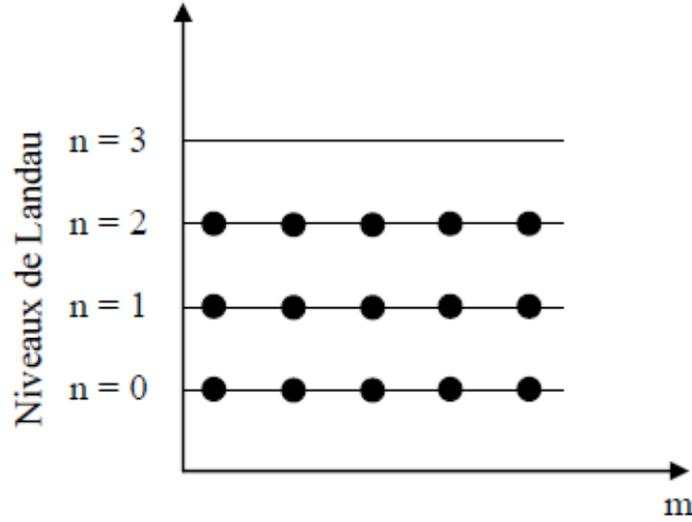


FIG. 2.3 – Niveaux de Landau "n" représente les niveaux, et "m" est associé à la dégénérescence de chaque niveau. Cette figure représente le cas d'un remplissage $\nu=3$ [25].

2.4 Invariance de jauge

Le problème correspond au système d'électrons en 2D loin des parois de confinement de l'échantillon qui bordent le gaz. Pour traiter un certain nombre de problèmes, il est utile de connaître les fonctions propres du système. Une façon commode pour construire des bases d'états propres de H_{xy} consiste à choisir une jauge. Deux choix sont particulièrement utiles : la jauge de Landau et la jauge symétrique. Elles sont particulièrement adaptées pour les problèmes invariants par translation selon la direction z . En mécanique classique le champ électromagnétique \vec{E} et \vec{B} peut s'écrire en fonction d'un potentiel scalaire $\phi(x)$ et d'un potentiel vecteur \vec{A} , tels que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \text{ et } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.23)$$

Nous considérons la transformation suivante, où χ est fonction arbitraire

$$\phi \mapsto \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \text{ et } \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \chi. \quad (2.24)$$

La transformation entre la jauge symétrie et la jauge de Landau est décrite par la

fonction $\chi = -\frac{B}{2}xy$, donc

$$\begin{aligned}\vec{A}_L &= \vec{A}_S + \vec{\nabla}\chi \\ &= \frac{\vec{B}}{2}(-y, x, 0) - \frac{\vec{B}}{2}(y, x, 0) \\ &= \vec{B}(-y, 0, 0).\end{aligned}\tag{2.25}$$

La transformation sur les champs \vec{A} et $\phi(x)$, appelée changement de jauge. Ce changement de jauge laisse les champs \vec{E} et \vec{B} invariants et donc la trajectoire classique inchangée. Le choix de jauge fait jouer des rôles symétriques aux variables x et y , ce qui satisfait la condition de la symétrie du problème.

Les quantités de mouvement invariantes de jauge[18]

$$\Pi_x = m\dot{x} = p_x + eA_x = -m\omega_c\eta_y, \text{ et } \Pi_y = m\dot{y} = p_y + eA_y = m\omega_c\eta_x.\tag{2.26}$$

En calculant le commutateur $[\eta_x, \eta_y]$, on obtient

$$\begin{aligned}[\eta_x, \eta_y] &= \frac{e}{m^2\omega_c^2}([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) \\ &= \frac{1}{eB^2}(\partial_x A_y[p_x, x] - \partial_y A_x[p_y, y]) \\ &= \frac{-i\hbar}{eB}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Le commutateur des opérateurs position X, Y des coordonnées du centre de rotation s'écrira

$$\begin{aligned}[X, Y] &= \left[x - \frac{\Pi_y}{eB}, y + \frac{\Pi_x}{eB}\right] \\ &= \frac{1}{eB}[x, p_x] - \frac{1}{eB}[p_y, y] - \frac{1}{(eB)^2}[\Pi_y, \Pi_x] \\ &= \frac{2i\hbar}{eB} - \frac{1}{(eB)^2} \frac{i\hbar^2}{l_B^2} \\ &= \frac{i\hbar}{eB} \\ &= il_B^2.\end{aligned}\tag{2.28}$$

En termes de longueur magnétique $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$, en utilisant les règles de commutation

$$[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2, \text{ et } [X, Y] = il_B^2.\tag{2.29}$$

Le résultat est bien évidemment un invariant de jauge.

2.5 Jauge de Landau

Dans la jauge de Landau, les directions x et y sont traitées de façon différente. Elle est utile lorsqu'on s'intéresse à un problème en géométrie rectangulaire. Cette jauge conserve la symétrie par translation selon le choix de direction choisie [27], comme le montre la figure 2.4.

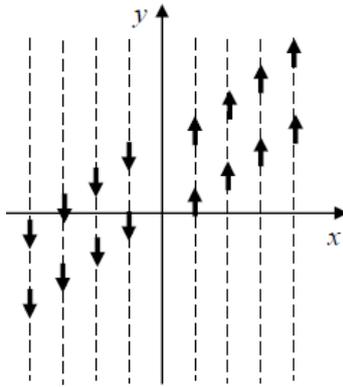


FIG. 2.4 – Représentation du potentiel vecteur en jauge de Landau.

Cette jauge brise les invariances par rotation et par translation selon x . La jauge de Landau définie par le champ vectoriel est donnée par

$$\vec{A}_L = \vec{B}(-y, 0, 0), \quad (2.30)$$

tel que

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_L = B \vec{z}. \quad (2.31)$$

On obtient

$$\vec{A}_L = -By \vec{x}. \quad (2.32)$$

Dans cette jauge le hamiltonien de l'équation (2.7) commute avec p_y [19], et s'écrit

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2). \quad (2.33)$$

2.6 Jauge symétrique

Pour représenter les états et les énergies propres d'un système quantique, il y a plusieurs manières correspondantes à différents choix de jauge. Pour notre cas d'étude on va

utiliser la jauge symétrique qui conserve la symétrie par rotation du système et qui brise l'invariance par translation (voir figure 2.5).

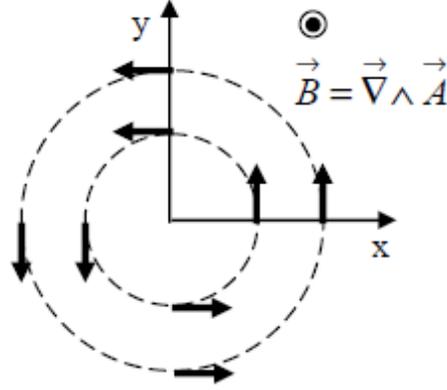


FIG. 2.5 – Représentation du potentiel vecteur en jauge symétrique.

Considérons tout d'abord des électrons libres, dans un champ $B = (0, 0, B)$ homogène

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2} \\ &= \frac{B}{2}(-y, x, 0).\end{aligned}\quad (2.34)$$

Cette jauge conduit à des fonctions d'onde qui se sont révélées capitales pour construire des fonctions d'onde variationnelles pour l'effet Hall quantique fractionnaire. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2} \left[(-il_B \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2l_B})^2 + (-il_B \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2l_B})^2 \right], \quad (2.35)$$

avec, $\hbar\omega_c = \hbar \frac{eB}{m}$ est l'énergie cyclotron.

En termes de constante de Planck \hbar . Le formalisme hamiltonien nous permet d'introduire la quantification canonique[30], où l'on impose la non commutativité d'une position avec son moment conjugué. Les opérateurs d'impulsion p_x, p_y s'écrivent en fonction des vitesses \dot{x} et \dot{y} par

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Cette dernière équation nous donne

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{m}(p_x - qA_x), \\ \dot{y} &= \frac{1}{m}(p_y - qA_y),\end{aligned}\tag{2.37}$$

et on peut écrire le hamiltonien H_{xy} sous la forme

$$\begin{aligned}H_{xy} &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L_{xy} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2m}[(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2].\end{aligned}\tag{2.38}$$

Finalemment

$$H = \frac{1}{2}m[(\vec{P} - q\vec{A})^2].\tag{2.39}$$

L'hamiltonien peut également s'écrire, en terme des variables (η_x, η_y)

$$H = \frac{1}{2}m\omega_c^2(\eta_x^2 + \eta_y^2).\tag{2.40}$$

Pour la quantification en niveaux de Landau, la description quantique du même système impose la non commutativité de la position avec son moment conjugué

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \text{ et } [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0.\tag{2.41}$$

La relation de commutation $[x, y] = 0$ nous donne

$$[\eta_x, \eta_y] = -[X, Y].\tag{2.42}$$

Alors la relation de commutation $[\eta_x, \Pi_x]$ prend la forme

$$[\eta_x, \Pi_x] = i\hbar.\tag{2.43}$$

Pour montrer plus explicitement la structure de l'oscillateur harmonique, on introduit des opérateurs d'annihilation et de création

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x - i\eta_y), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x + i\eta_y),\tag{2.44}$$

on obtient

$$\eta_x = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \quad \eta_y = \frac{l_B}{\sqrt{2}i}(a^+ - a). \quad (2.45)$$

Le même cas avec les opérateurs d'échelle (b, b^+)

$$X = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^+ + b), \quad Y = \frac{il_B}{\sqrt{2}}(b^+ - b), \quad (2.46)$$

avec les relations de commutations $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$ et $[a^+, b^+] = [a, b^+] = 0$.

L'hamiltonien peut être réécrit sous la forme

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}). \quad (2.47)$$

Le spectre d'énergie est donc donné par

$$H = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \quad (2.48)$$

Avec n est la valeur propre de l'opérateur a^+a .

L'invariance par rotation dans le plan (x-y) fait que le moment cinétique suivant z[19] dans la jauge symétrique s'écrit

$$L_z = xp_y - yp_x. \quad (2.49)$$

On réécrit L_z en utilisant les équations (2.5) et (2.14)

$$\vec{p} = \vec{\Pi} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{2l_B^2}(Y + \frac{\eta_x}{2}, X - \frac{\eta_y}{2}). \quad (2.50)$$

Le moment cinétique devient

$$\begin{aligned} L_z &= \frac{\hbar}{2l_B^2}(\eta^2 - R^2) \\ &= \frac{1}{\omega_c}[(\frac{\Pi_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}\eta_x^2) - (\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}X^2)] \\ &= \frac{1}{\omega_c}[\hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) - \hbar\omega_c(b^+b + \frac{1}{2})], \end{aligned} \quad (2.51)$$

où l'on a défini l'impulsion du centre-guide par $P = m\omega_c(Y, -X)$. On peut voir ce système comme deux oscillateurs harmoniques

$$L_z = \hbar(a^+a - b^+b). \quad (2.52)$$

Les états $|n, m\rangle$ sont des états propres de H et L_z du problème avec les valeurs propres respectivement $\hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$ et $\hbar(n - m)$.

Notons que le moment cinétique L_z et l'hamiltonien H sont des invariants de jauge[10], et on voit que l'hamiltonien commute avec l'opérateur L_z .

Le hamiltonien s'écrit alors

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) + \hbar\omega'(b^+b + \frac{1}{2}), \quad (2.53)$$

avec la fréquence du deuxième oscillateur est nulle, $\omega' = 0$. Le deuxième nombre quantique m est une valeur propre de b^+b .

Dans le cas où $n = 0$ ou $m = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} a|0, m\rangle &= 0, \\ b|n, 0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec les nombres négatifs sont exclus [18]

Nous pouvons écrire un état quelconque $|n, m\rangle$ à partir de l'état $|0, 0\rangle$ comme

$$|n, m\rangle = \frac{(a^+)^n (b^+)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle. \quad (2.55)$$

Jusque là, le raisonnement est indépendant de la jauge. Pour obtenir la forme explicite de ces états propres il faut faire un choix de jauge.

Les fonctions d'ondes dépendent de la jauge choisie pour le potentiel vecteur. Pour trouver les fonctions propres dans une jauge donnée, il suffit d'exprimer les opérateurs a , a^+ , b , b^+ à l'aide de $x, p(x), y, p(y)$ dans cette jauge, et de déterminer la fonction d'onde de l'état fondamental[18].

2.7 Dégénérescence d'un NL

On se contentera alors de la description du mouvement dans le plan (Ox,Oy)¹[31], en prenant un domaine en forme de disque de rayon R , avec $S = \pi R^2$ (voir figure 2.1), tel

¹Pour le champ magnétique à travers une surface, il faut passer du plan vers une sphère et prendre en considération les conditions aux limites.

que le système et de taille plus grande² par rapport à la longueur magnétique $S \gg l_B$. Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique \vec{B} autour du centre de guidage $R(X, Y)$ représenté par l'équation (2.5), et prenant comme origine $r = 0$ le centre du disque. Dans la jauge symétrique, les états dans le plus bas niveau de Landau (*PBNL*) représentés par $|n = 0, m\rangle$, n'importe quelle orbite de Landau de moment cinétique m est localisée autour d'un cercle de rayon R défini par

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2.56)$$

A l'aide des positions X et Y définies dans l'équation (2.46), on trouve

$$\begin{aligned} R &= l_B \sqrt{2b+b+1} \\ &= l_B \sqrt{2m+1}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

De la même manière, les états dans le *PBNL* représentés par $|n, m = 0\rangle$ sont localisés autour d'un cercle de rayon $\eta = l_B \sqrt{2a+a+1}$. Dans le cas du plan, chaque niveau de Landau est infiniment dégénéré[15]. Pour une géométrie du disque, le nombre d'états N_B dans le *PBNL* à l'intérieur du disque est égal à $M + 1$ états, avec un rayon maximal $R_{\max} = \sqrt{2M+1}l_B$. La surface maximale S_m occupée par ces états est égale à

$$\begin{aligned} S_m &= \pi R_{\max}^2 \\ &= \pi l_B^2 (2M + 1) \\ &\simeq 2\pi l_B^2 M. \end{aligned} \quad (2.58)$$

La particule se trouve à l'intérieur de la surface $S = \pi R^2$ du disque où sont présentes toutes les orbites telles que $S_m < S$.

En combinant les équations (2.13) et (2.14) avec la relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire de l'équation (2.13) $\eta = \frac{V}{\omega_c}$ on obtient $\vec{\eta} = \frac{\hbar}{eB} \vec{z}$.

L'énergie cinétique d'un électron, en dimension 2, dans un champ magnétique, est quantifiée en niveaux de Landau. Son spectre est celui d'un oscillateur harmonique (voir

²Pour augmenter les orbites cyclotrons

équation(2.22)). L'énergie de cette dernière équation ne dépend que d'un seul nombre quantique n , il y a dégénérescence des niveaux de Landau[21].

Chaque niveau d'énergie est infiniment dégénéré, le centre de l'orbite cyclotron R commute avec H et Π et constitue donc un degré de liberté différent de Π [15]

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \eta_x \\ y - \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{\Pi_y}{eB} \\ y - \frac{\Pi_x}{eB} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

La valeur non-nulle provenant de la relation de commutation de l'équation (2.28) s'écrit

$$\Delta X \Delta Y \succeq \frac{l_B^2}{2}. \quad (2.60)$$

Ces états sont dégénérés dans un niveau choisi et chaque état occupe une surface minimale donnée par l'incertitude de Heisenberg[18]

$$\Delta X \Delta Y = 2\pi l_B^2. \quad (2.61)$$

Dans la limite thermodynamique[18], le nombre maximal d'états $N_B = M$, alors

$$\begin{aligned} N_B &= \frac{S}{2\pi l_B^2} \\ &= \frac{BS}{Bh/(eB)}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$.

Le quantum de flux ϕ_0 est défini par

$$\phi_0 = \frac{h}{e}. \quad (2.63)$$

Le flux total du champ magnétique à travers l'échantillon est défini par

$$\phi = B.S_N. \quad (2.64)$$

La dégénérescence d'un niveau de Landau se définit par

$$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (2.65)$$

La dégénérescence d'un niveau dans le plus bas niveau de Landau augmente avec B . Comme les électrons avaient une statistique fermionique, chaque état quantique peut être occupé au maximum par une seule particule à cause du principe de Pauli.

Dans le cas où il y a plusieurs électrons dans le système, le remplissage ν des niveaux d'énergie est donc décrit par le rapport entre la densité surfacique d'électrons n_e et la densité de flux n_B , avec un rapport $\nu = \frac{n_e}{n_B}$ appelé facteur de remplissage .

2.8 Fonction d'onde $\Phi_{PBNL}(z)$

Dans la jauge symétrique, les fonctions d'onde à un corps dans le plus bas niveau de Landau étaient des polynômes en z multipliés par un facteur gaussien présent pour tous les niveaux de Landau. Pour trouver les fonctions d'onde $\Phi_{n,m}(x, y) = \langle x, y | n, m \rangle$ dans la jauge symétrique d'équation (2.34), il suffit de traduire les équations (2.54) et (2.55) en équations différentielles, à l'aide de $p_x = -i\hbar\partial_x$ et $p_y = -i\hbar\partial_y$.

À l'aide des équations (2.26), (2.44) et (2.45) on trouve la représentation des opérateurs d'échelle dans la jauge symétrique. Pour simplifier les expressions, on change les variables d'espace selon la position de l'électron $z = x - iy$, où $\bar{z} = x + iy$ est le complexe conjugué de z . Avec cette définition de z la dérivation dans le plan complexe est liée par

$$\begin{aligned}\partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y),\end{aligned}\tag{2.66}$$

tel que $\partial_z z = \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$ et $\partial_z \bar{z} = \partial_{\bar{z}} z = 0$.

Dans la représentation position complexe z , et avec l'opérateur a défini précédemment dans les équations (2.19), (2.44) et (2.45) l'expression de l'opérateur d'échelle a dans la jauge symétrique est donnée par

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}}\left(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c}\Pi_x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_c}}[p_y + eA_y + i(p_x + eA_x)] \\ &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}\left[\partial_x - i\partial_y + \frac{x - iy}{2l_B^2}\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{z}{4l_B} + l_B\partial_{\bar{z}}\right).\end{aligned}\tag{2.67}$$

De la même manière on trouve a^+ , b et b^+

$$a^+ = \sqrt{2}\left(\frac{\bar{z}}{4l_B^2} - l_B\partial_z\right), \quad b = \sqrt{2}\left(\frac{\bar{z}}{4l_B^2} + l_B\partial_z\right) \quad \text{et} \quad b^+ = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\bar{z}}\right).\tag{2.68}$$

Il y a plusieurs représentations possibles de H et L_z qui prennent donc la forme[32]

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2} \left(\frac{\bar{z}z}{4l_B^2} - 4l_B^2 \partial_z \partial_{\bar{z}} + \bar{z} \partial_{\bar{z}} - z \partial_z \right), \quad (2.69)$$

$$L_z = \hbar(\bar{z} \partial_{\bar{z}} - z \partial_z). \quad (2.70)$$

Un état dans le plus bas Niveau Landau (NL) est déterminé par l'équation différentielle pour $n = 0$

$$\begin{aligned} a \Phi_{n=0}(z, \bar{z}) &= 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} + l_B \partial_{\bar{z}} \right) \right) \Phi_{n=0}(z, \bar{z}) = 0, \\ &\Rightarrow (z + 4l_B^2 \partial_{\bar{z}}) \Phi_{n=0}(z, \bar{z}) = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre dont la solution générale est une gaussienne multipliée par une fonction analytique arbitraire $f(z)$, avec $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$

$$\Phi_{n=0}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.72)$$

De la même manière on trouve pour l'état avec $m = 0$

$$b \Phi_{m=0}(z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow (\bar{z} + 4l_B^2 \partial_z) \Phi_{m=0}(z, \bar{z}) = 0. \quad (2.73)$$

Dont la solution est donnée par

$$\Phi_{m=0}(z, \bar{z}) = g(\bar{z}) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.74)$$

La fonction $g(\bar{z})$ est anti-analytique ($\partial g(\bar{z}) = 0$). L'état $|n = 0, m = 0\rangle$ doit donc être représenté par l'équation $a|0, 0\rangle = b|0, 0\rangle = 0$. La solution de cette équation est de la forme[18, 41]

$$\begin{aligned} \Phi_{n=0, m=0}(z, \bar{z}) &= \langle z, \bar{z} | n = 0, m = 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Un état correspondant au nombre quantique n, m dans le plus bas NL s'obtient à l'aide des autres états par applications successives de a^+, b^+ à l'aide des équations (2.55)

et (2.69)

$$\begin{aligned}\Phi_{n=0,m}(z, \bar{z}) &= \frac{(\sqrt{2})^m}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \partial_{\bar{z}} \right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}} \left(\frac{z}{\sqrt{2}l_B} \right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}.\end{aligned}\quad (2.76)$$

La même chose pour les états correspondant à différentes valeurs de n pour $m = 0$

$$\begin{aligned}\Phi_{n,m=0}(z, \bar{z}) &= \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}} \left(\frac{\bar{z}}{4l_B} - l_B \partial \right)^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}} \left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}l_B} \right)^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}.\end{aligned}\quad (2.77)$$

Un état générique du plus bas niveau de Landau s'écrit donc

$$\Phi_{PBNL}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \quad (2.78)$$

avec f une fonction analytique de z . Cette fonction $\Phi_{PBNL}(z)$ peut paraître la base du raisonnement historique de Laughlin[1], et qui permet de deviner une fonction d'onde test pour l'état fondamental de l'effet Hall quantique fractionnaire (*EHQF*).

Pour un état centré à l'origine $m = 0$ dans le NL n . Un état arbitraire peut s'écrire

$$\Phi_{m,n}(z, \bar{z}) = \frac{\sqrt{2^m}}{\sqrt{2\pi l_B^2 m! n!}} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \partial_{\bar{z}} \right)^m \left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}l_B} \right)^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.79)$$

Les détails des calculs qui permettent de passer du *PBNL* aux niveaux de Landau supérieurs sont donnés dans la référence[36]

$$\Phi_{m,n}(z, \bar{z}) = N_{nm} z^{m-n} L_n^{m-1}(z, \bar{z}) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.80)$$

Les fonctions $L_n^m(x)$ sont des polynômes de Laguerre en x avec différentes formes pour différentes valeurs de n et m . On doit donc spécifier les deux nombres quantiques n et m . Pour un seul électron comme l'atome d'hydrogène, l'énergie ne dépend que du nombre quantique n tant que le potentiel reste en $1/r$. Dans le cas de plusieurs électrons, le potentiel vu par les électrons des couches externes est écranté par les électrons proches du noyau de sorte que le potentiel n'est plus en $1/r$. Dans ce cas, l'énergie dépend de n et

de m [30]. Les états propres de l'hamiltonien et du moment cinétique s'expriment par des polynômes de Laguerre associés L_n^m . On a donc finalement une formule plus condensée[38]

$$\Phi_{n,l}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{n!}{2^{l+1}\pi(n+l)!}} z^l L_n^l\left(\frac{z\bar{z}}{2l_B^2}\right) e^{-\frac{z\bar{z}}{4l_B^2}}, \quad (2.81)$$

tel que L_n^l désigne les polynômes de Laguerre associés, définis par

$$L_n^l(x) = \frac{x^{-l}}{n!} e^x \partial_x^n (x^{n+l} e^{-x}), \quad (2.82)$$

où $l = m - n$ et un nombre entier $l \geq -n$, n entier non négatif, ce qui donne[38]

$$L_0^l(x) = 1, \quad L_1^l(x) = -x + l + 1, \quad L_2^l(x) = \frac{x^2}{2} - (l+2)x + \frac{(l+2)(l+1)}{2}.$$

2.9 Conclusion

Nous avons présenté les principales propriétés des électrons d'un gaz à 2D soumis à un champ magnétique. Nous recherchons explicitement les états propres de l'hamiltonien H d'un oscillateur harmonique dans la jauge symétrique.

La transformation entre la jauge symétrie et la jauge de Landau de l'équation (2.25) pour une géométrie rectangulaire dans la jauge de Landau donne un résultat identique avec celle trouvée dans le cas de la géométrie du disque. Ainsi que les fonctions d'onde des équations (2.76) et (2.77) ont la même densité de probabilité, et la densité d'états électroniques reste $\frac{1}{2\pi l_B^2}$ dans tous les niveaux de Landau[39].

Chapitre 3

Effet Hall quantique fractionnaire

3.1 Introduction

En reproduisant l'expérience de Von Klitzing, Tsui et Stormer[24], ont découvert des plateaux de résistance correspondants non pas à des remplissages entiers, mais à des remplissages fractionnaires, il s'agit de l'effet Hall quantique fractionnaire. Ce phénomène apparaît comme un problème d'électrons fortement corrélés puisque le gap en énergie ne peut être qu'une conséquence de l'interaction coulombienne entre électrons occupant le même niveau de Landau. Ainsi, contrairement au cas de l'*EHQE*, le potentiel de désordre n'est pas prévu d'être le mécanisme d'entraînement derrière l'*EHQF*. Considérons de nouveau le cas d'un système sans désordre et n'étant soumis à aucun champ électrique. Il s'agit d'un problème extrêmement compliqué, qui ne possède pas de solution simple, même approchée. L'image qui donne *EHQF* est basée sur des fonctions d'onde variationnelles proposées par Laughlin en 1983. Ces fonctions d'onde variationnelles reposent de façon cruciale sur la solution du problème des niveaux de Landau dans la jauge symétrique. Commençons donc par revoir la solution de ce problème, où la position des particules est représentée par une variable complexe dans le plan $(x-y)$, ce qui permettra la généralisation au cas à N particules due à Laughlin, valable pour les fractions de la forme $1/m$ et la théorie de Jain des fermions composites (*FC*) qui a pu expliquer la plupart des fractions de la forme $p/(2np+1)$. D'autres généralisations de la fonction de Laughlin ont été proposées par Haldane et Halperin[36].

Dans la suite de cette section, on va s'intéresser à la structure des états excités de gaz de fermions en interaction. Ces excitations élémentaires correspondent à l'annihilation d'un état occupé ou à la création d'un état inoccupé, tel que le nombre total de fermions est fixé. On traitera le problème de la création de paire "électron-trou" dans le cas d'un gaz électronique. En physique des *EHQF*, l'excitation électron-trou est une modification de la fonction d'onde[37].

3.2 Le gaz d'électrons bidimensionnel

L'effet Hall quantique ne se produit que lorsqu'un gaz d'électrons est confiné à deux dimensions et soumis à un champ magnétique intense et à basse température.

La réalisation physique du gaz repose principalement sur des structures *MOSFET* à base de silicium, dans lesquels les électrons sont piégés pour former le gaz d'électrons bidimensionnel à l'interface silicium/isolant. Il existe d'autres matériaux réalisés dans des hétérojonctions GaAs et $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ de semi-conducteurs, dans lesquels on peut obtenir des gaz bidimensionnels. Cette structure proposée par Esaki et Tsu[40] consiste à améliorer progressivement la mobilité.

3.3 Rôle de l'interaction coulombienne

En physique de l'effet Hall quantique fractionnaire, le hamiltonien général du système d'un gaz d'électrons bidimensionnels en présence d'un champ magnétique extérieur s'écrit[36]

$$H = H_0 + H_{int} + E_Z, \quad (3.1)$$

avec H_0 est la partie cinétique (2.8), qui a la forme générale $\frac{1}{2m} \sum_j (\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_j + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_j))^2$, H_{int} décrit l'interaction de Coulomb entre les électrons, ainsi que les interactions possibles des électrons avec un fond chargé positivement et avec des impuretés[6], et prend la forme $\frac{e^2}{\epsilon} \sum_{j < k} \frac{1}{r_{jk}}$, et E_Z l'énergie de Zeeman. Pour éviter le cas de l'*EHQE*, on considère un système d'électrons sans désordre.

La figure 3.1 montre l'évolution des électrons dans un champ magnétique.

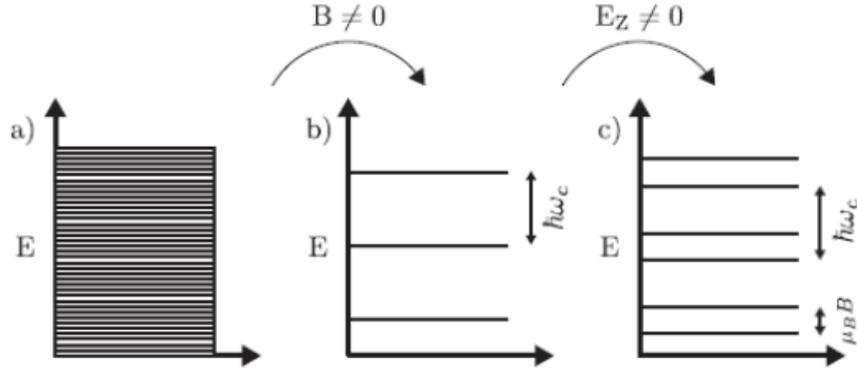


FIG. 3.1 – a- Liquide de Fermi de fermions composite à $B=0$ (interaction faible), b- *EHQF* des électrons (Électrons fortement corrélés), c- *EHQF* des électrons avec l'énergie Zeeman.

La figure 3.1.a représente le liquide de Fermi de fermions composites à $B = 0$ avec une interaction faible. On voit apparaître sur la figure 3.1 ($B \neq 0$) des niveaux d'énergie séparés par $\hbar\omega_c$.

Nous allons donc considérer un système bidimensionnel d'électrons. En présence d'un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire au plan électronique, il se forme des niveaux de Landau indicés par n et prenant des énergies $\hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$. Comme l'effet Hall quantique fractionnaire est dû à des interactions entre électrons $V = 1/(r_i - r_j)$, en général pris comme étant l'interaction coulombienne entre les particules i et j , l'énergie d'interaction est d'un ordre comparable à l'énergie cinétique[33]. On peut considérer l'hamiltonien à N -électrons

$$H = H_0 + H_{int}. \quad (3.2)$$

On a vu précédemment que H_{int} décrit l'interaction de Coulomb entre les électrons i et j , qui prend la forme

$$H_{int} = \sum_{i < j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon|r_i - r_j|}. \quad (3.3)$$

Pour un système à N électrons restreints au plus bas niveau de Landau, les énergies cinétiques et Zeeman étant constantes par la suite, l'interaction coulombienne est la seule qui joue le mécanisme d'entraînement de l'effet Hall quantique fractionnaire, contrairement à l'effet Hall quantique entier où le potentiel de désordre l'emporte sur les interactions. L'effet Hall quantique fractionnaire ne se produit que dans des échantillons

de haute qualité avec de faibles concentrations d'impuretés.

3.4 Rôle du spin des électrons dans l'EHQF

Le rôle du spin apparaît via l'énergie Zeeman[62] E_Z rajoutée aux énergies propres de H_0 l'équations (3.1), et qui prend la forme $g\mu_B B.S$, où μ_B est le magnéton de Bohr, et g le facteur gyromagnétique de Landé. Autrement dit, l'énergie Zeeman dépend des interactions coulombiennes entre les électrons et du champ magnétique appliqué. Ainsi, le facteur gyromagnétique g prend la valeur de -0.44 dans du GaAs.

Dans la troisième figure 3.1.c, il apparaît des plateaux paires de l'EHQF lorsque l'énergie Zeeman $g\mu_B B$ n'est plus négligeable. Pour avoir une idée de l'importance des différents termes de l'équations (3.1), nous considérons les hétérostructures GaAs-AlGaAs, sur lequel la plupart des expériences de l'EHQF ont été effectuées, l'énergie Zeeman est très faible -70 fois par rapport à toutes les autres échelles d'énergies[36].

Dans la limite de champs magnétiques forts $\vec{B} \rightarrow \infty$, les termes d'énergie cinétique et Zeeman sont constant. Dans ce cas, l'interaction coulombienne apparaît comme le terme principal pour séparer les électrons les uns des autres au maximum et que la fonction d'onde s'annulera lorsque les positions de deux électrons coïncident.

En physique de l'effet hall quantique fractionnaire, on néglige le rôle du spin de l'électron, parce que l'énergie de Zeeman E_Z est très faible par rapport à toutes les autres énergies et peut être négligée[19]. Comme nous le verrons par la suite (chapitre 6), les états de Haldane-Rezayi et Moore-Read sont polarisés en spin.

3.5 Fonction d'onde de Laughlin

Laughlin a été le premier à proposer une fonction d'onde d'essai pour décrire l'état fondamental de la fraction $\nu = 1/3$ [1], pour ensuite la généraliser pour $\nu = 1/m$, avec m entier impair, ce qui donne m quanta de flux par électron figure 3.2.

Il a aussi montré l'existence de quasiparticules de charges fractionnaires $e/3$ pour expliquer l'EHQF, où il y a un électron pour trois quanta de flux dans le fondamental.

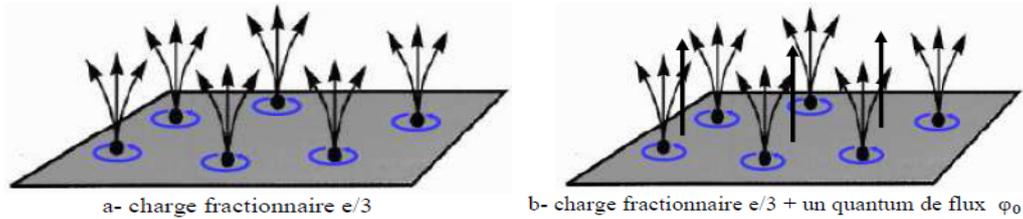


FIG. 3.2 – Particule et quasiparticule de charge fractionnaire $e/3$ dans l'état fractionnaire $\nu=1/3$ [14].

Alors les plateaux dans l'*EHQF* peuvent être compris comme une conséquence de la localisation de ces quasi-particules. Cette propriété la plus remarquable de l'*EHQF* proposée par Laughlin, où l'ajout de manière adiabatique d'un quantum de flux ϕ_0 a généré une excitation de charge $e/3$ sans changer le nombre des électrons. Dans la limite thermodynamique, l'insertion d'un quantum de flux correspond à l'insertion de ν trous à l'origine qui correspond à une translation de chaque électron dans l'orbite suivante[19]. Pour l'énergie d'une quasiparticule on considère une charge $e/3$ uniformément répartie sur un disque de rayon l_B [62]. Concernant les fonctions d'ondes, on utilise la théorie de Laughlin, pour décrire des fonctions d'onde d'essai incluant une quasiparticule ou un quasitrou[64].

Laughlin a proposé une fonction d'onde d'essai à N-corps pour un fondamental sur une géométrie d'un disque qui correspond à l'hamiltonien H de l'équation (3.2). Tout d'abord, le Hamiltonien H est invariant par translation du centre de masse, en présence de champ magnétique et d'interactions coulombiennes pour décrire ce système[1]. Ainsi, l'antisymétrie due à la statistique de Fermi qui doit être respectée. Cependant, nous allons donner une description détaillée de l'état fondamental obtenu par une méthode analytique dans le chapitre 4.

Dans l'*EHQF*, la résistance de Hall est quantifiée, ce qui indique que dans l'état fondamental, le liquide est incompressible[41, 1]. Dans le modèle de Laughlin, on déduit de la valeur du plateau $R_H = h/(3e^2)$ que la densité électronique est quantifiée à un électron pour trois quanta de flux.

Dans la jauge symétrique, on peut choisir la base des fonctions à un corps donnée par l'équation (2.76) pour les fonctions d'ondes dans le plus bas NL, avec $z = x - iy$

et m le moment angulaire. Considérons le cas sans interaction, où le niveau de Landau complètement rempli correspond à une fonction d'onde à N_e électrons de la forme

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_{N_e}) = F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e}) \exp\left(-\sum_{i=1}^{N_e} |z_i^2|/4l_B^2\right). \quad (3.4)$$

La fonction impaire $F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e})$ qui satisfait les conditions d'antisymétrie¹ est un déterminant de Slater construit à partir des polynômes $z_i^0, z_i^1, \dots, z_i^{N_e}$, et ne dépend pas des z_i^*

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \dots, z_N) &= \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdot & \cdot & z_N^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdot & \cdot & z_N^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdot & \cdot & z_N^{N-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i < j}^N f(z_i - z_j), \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec $F(z_1, z_2, \dots, z_{N_e})$ un polynôme à plusieurs variables z_1, z_2, \dots, z_{N_e} correspondant aux positions des électrons 1, 2, ..., N_e . La fonction d'onde (3.4) est unique[36] pour tout hamiltonien d'interaction qui ne mélange pas les niveaux de Landau. Pour une fonction propre du premier NL , le moment cinétique L_z est proportionnel à m . La seule forme qui satisfasse ces critères est

$$f(z) = z^m. \quad (3.6)$$

Le préfacteur $\prod_{i < j}^N f(z_i - z_j)$ doit donc être un polynôme de degré fixé, ce qui donne la forme suivante[37]

$$F(z_i - z_j) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m. \quad (3.7)$$

La fonction d'essai proposée par Laughlin ne contient qu'un paramètre entier m , forcément impair et prend les valeurs 3, 5, 7, ...etc

$$\Psi^L(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m \exp\left(-\sum_{i=1}^N |z_i^2|/4l_B^2\right). \quad (3.8)$$

Cette fonction d'essai proposée par Laughlin montre un très beau résultat de la fraction $1/m$ pour $m = 3$ avec les plasmas à $2D$ [1]. Le préfacteur $F(z_i - z_j)$ dans la fonction

¹ Antisymétrique ici correspond la partie orbitale, ainsi que la partie spin qui est totalement symétrique.

de Laughlin (3.8) est aussi appelé facteur de Jastrow. Le polynôme antisymétrique en z_i de cette fonction a un degré maximal $M = m(N_e - 1)$ pour tout i [13]. L'état de Laughlin $\Psi^L(r_1, \dots, r_N)$ est caractérisé par une distribution quasi-uniforme des N_e fermions confinés dans un disque de rayon $R = \sqrt{2(M+1)}l$, et contenant $(M+1)$ orbitales[15], où M est le moment angulaire maximal. Il faut donc considérer un échantillon de taille $S = \pi.R^2$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi l^2(M+1) \\ &= 2\pi l^2(m(N_e - 1) + 1) \\ &= 2\pi l^2 m N_e + O(1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La densité électronique de cette fonction d'onde (3.8) est donnée par

$$\frac{N_e}{2\pi l^2 m N_e} = \frac{1}{2\pi l^2 m}. \quad (3.10)$$

Ce qui donne

$$v = \frac{1}{m}. \quad (3.11)$$

Cette densité est représentée sur la figure 3.3 de centre O et de rayon $R = l\sqrt{2m}$.

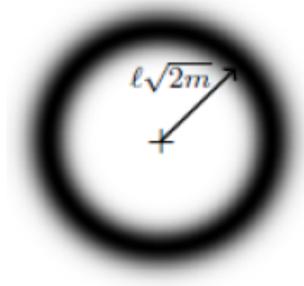


FIG. 3.3 – Densité du fondamental du système de Hall à $v=1/3$ dans la jauge symétrique [15].

La figure 3.3 représente la densité d'états de la fonction d'onde dans le plus bas NL de l'équation (2.76), qui est compatible avec la forme générale des fonctions d'onde d'essai $\Psi^L(r_1, \dots, r_N)$ dans le plus bas NL de l'équation (3.8) proposé par Laughlin.

3.6 Fonction d'onde de Jain

En 1989 Jainendra K. Jain propose une autre façon d'aborder la théorie de *EHQF*. Il introduisit une particule effective qui s'appelle le fermion composite[2], qui lui a permis d'expliquer la plupart des valeurs du facteur de remplissage observées dans l'*EHQF*. Cette théorie a également prédit des facteurs de remplissage qui ne rentrent pas dans la séquence de Laughlin, en se basant sur l'attachement d'un quantum de flux aux positions des électrons. Elle a considéré comme une généralisation de la fonction d'onde de Laughlin.

La fonction d'onde de Jain est une fonction d'onde d'un niveau de Landau (*NL*) rempli représenté par un déterminant de Slater défini par l'équation (2.77). Ces états correspondant à différentes valeurs de n pour $m = 0$. La fonction d'onde de Jain consiste en la construction des états de Laughlin en utilisant les niveaux de Landau supérieurs, et de projeter le résultat dans le plus bas niveau de Landau (*PBNL*). La théorie de Jain des *FC* nous permet de prendre l'*EHQF* comme un *EHQE* sur la figure 3.4. Le schéma ci-dessous 3.4 représente l'idée géniale de Jain.

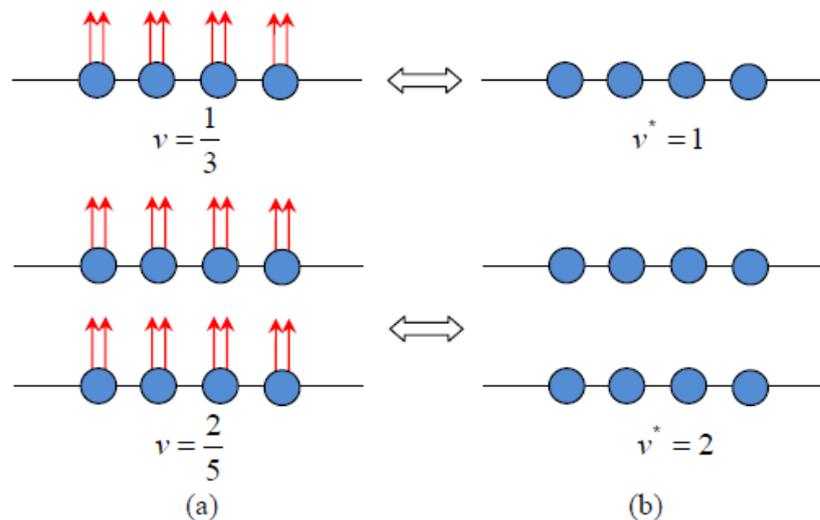


FIG. 3.4 – Schéma d'un état fondamental. (a) pour *EHQE* du $v = n$, (b) pour *EHQF* à $v = \frac{n}{2n+1}$.

Cette théorie consiste à interpréter les électrons fortement corrélés en termes de quasi-particules (*qp*) avec interactions négligeables, entre ces dernières. Dans cette théorie Jain

décrit l'état fondamental de Laughlin au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2s+1}$, tel que s est un entier différent de zéro, et propose une généralisation des états au facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{2ps+1}$, avec s et p entier, en termes de fermions composites (FC). À partir de l'état incompressible représenté par l'équation (3.8) du modèle de Laughlin, nous pouvons écrire la fonction Ψ_{2s+1} à l'aide de la fonction Ψ_1 correspondant au facteur $\nu^* = 1$

$$\begin{aligned}\Psi_{2s+1} &= \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j)^{2s+1} \exp\left(-\sum_{k=1}^{N_e} |z_k^2|/4l_B^2\right) \\ &= \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j)^{2s} \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j) \exp\left(-\sum_{k=1}^{N_e} |z_k^2|/4l_B^2\right) \\ &= \prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j)^{2s} \Psi_1,\end{aligned}\tag{3.12}$$

tel que Ψ_1 est une fonction d'onde à N_e particules de l'état fondamental de l'équation (3.8) à $\nu^* = 1$. Le facteur $\prod_{i<j}^{N_e} (z_i - z_j)^{2s}$ appelé facteur de Jastrow représente l'attachement de $2s$ quantum de flux ($2s\phi_0$) aux positions des particules z_i , ce qui correspond à l'ajout de $2sN_e$ quanta de flux. La fonction d'onde proposée par Jain consiste à remplacer Ψ_1 par un déterminant de Slater complètement rempli, où il projette la fonction d'onde dans le plus bas NL à l'aide de l'opérateur \mathcal{P}_{PBNL} , l'état fondamental de la fonction d'onde non normalisée des fermions composites pour $\nu^* = p$ prend la forme[34]

$$\Psi_{\nu}^{FC} = \mathcal{P}_{PBNL} \left[\prod_{j<k}^{N_e} (z_j - z_k)^{2s} \Psi_{\nu^*} \right],\tag{3.13}$$

tel que \mathcal{P}_{PBNL} est le projecteur sur le $PBNL$. Le nombre de quanta de flux $N_{B^*} = \frac{N_e}{\nu^*}$, et $N_B = \frac{N_e}{\nu}$, ainsi que le nombre d'états effectifs de la fonction Ψ^{FC} par niveau serait

$$N_{B^*} = N_B - 2sN_e.\tag{3.14}$$

Chaque particule est attachée par $2s$ quanta de flux ϕ_0 , ainsi que le flux total du champ magnétique à travers l'échantillon $\phi = BS$. La densité d'électrons $n_e = \frac{N_e}{S}$, ce qui donne le champ magnétique effectif B^* par

$$B^* = B - 2s\phi_0 n_e.\tag{3.15}$$

La fonction d'onde de l'équation (3.13) décrit un système à un facteur de remplissage[35]

$$\frac{1}{\nu^*} = \frac{1}{\nu} - 2s. \quad (3.16)$$

Ce qui donne la formule générale du facteur de remplissage réduit ν^*

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}. \quad (3.17)$$

Pour avoir une projection \mathcal{P}_{PBNL} sur le plus bas NL , alors que la fonction Ψ_1 contient des composantes dans un NL virtuel² différent du plus bas ($\nu^* \neq 1$), dont la présentation sera donnée par la suite.

Les états électroniques $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{2}{5}$ sont interprétés comme un $EHQE$ aux facteurs de remplissage entier $\nu^* = 1$ et $\nu^* = 2$ en termes de FC (voir figure 3.5), dont les vortex portent $2s$ quanta de flux chacun.

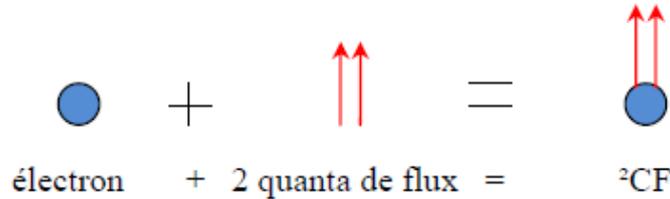


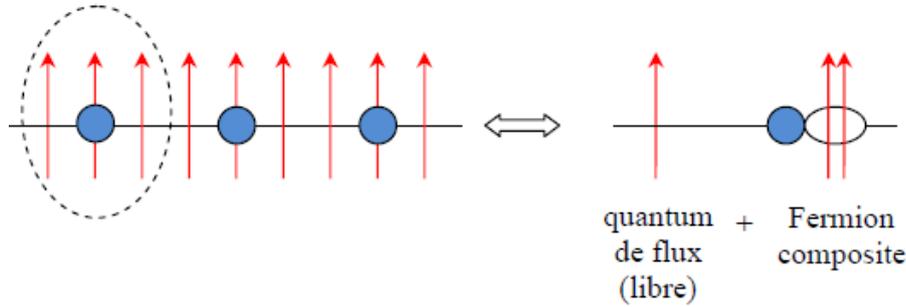
FIG. 3.5 – Représentation du vortex.

Les fermions composites sont représentés par un état lié d'un électron avec un nombre pair de vortex³, qui est égale à deux pour notre cas.

Pour la définition de l' $EHQF$ à $\nu = 1/3$ en terme de FC (voir figure 3.6), on prend pour chaque électron 3 quanta de flux dans le système, dont 2 sont portés par un vortex où ($s = 1$) et ce vortex est lié à un électron pour former le FC .

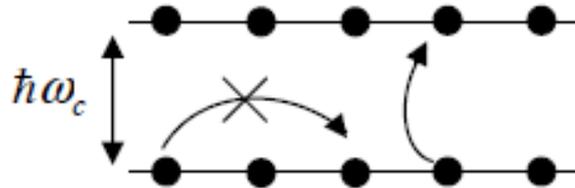
²Ces NL virtuels seront appelés niveaux Lamda ou pseudo NL niveaux de Landau pour ne pas confondre avec les niveaux de Landau électroniques.

³Un tourbillon du liquide quantique.

FIG. 3.6 – Fermion composite (*FC*).

3.7 Excitations de l'état $1/3$ de Laughlin

L'état fondamental de l'effet Hall quantique fractionnaire est un état liquide incompressible⁴[1] caractérisé par des corrélations fortes entre les électrons. Les seules excitations qui ne changent pas la densité du système, tel que le nombre total de fermions soit fixé, sont donc obtenues par création de paires quasi-électrons/trous. Pour l'*EHQE* à remplissage $\nu = n$, les excitations dans un seul niveau sont interdites par le principe de Pauli, comme le montre la figure ci-dessous 3.7.

FIG. 3.7 – Les excitations dans un seul niveau sont interdites par le principe de Pauli dans l'*EHQE*.

Tandis que les excitations inter-niveaux à remplissage partiel du NL $\nu \neq n$ dans un seul niveau sont permises, pour le modèle d'électrons restreints à un seul *NL* et qui définissent la physique de basse énergie (voir figure 3.8).

L'état fractionnaire à $\nu = \frac{1}{3}$ de la charge fractionnaire $\frac{1}{3}e$ est montré par Laughlin dans l'effet Hall quantique fractionnaire, qui est le mieux défini, et auquel nous allons nous

⁴Un liquide est incompressible lorsque son potentiel chimique est discontinu en fonction de la densité.

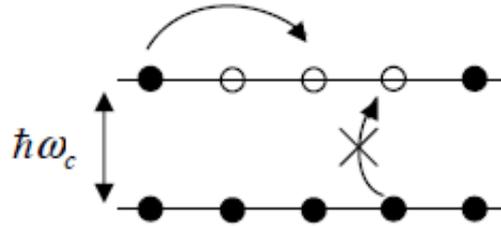
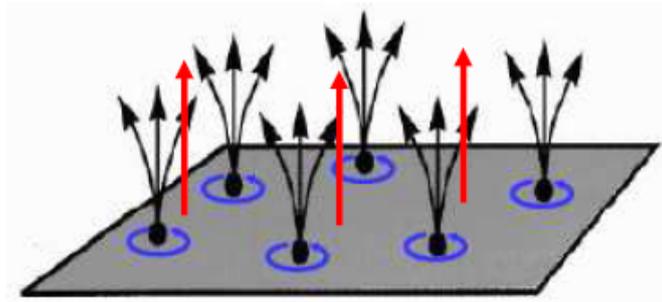


FIG. 3.8 – Modèle d'électrons restreints à un seul NL.

intéresser. Cette théorie a bien expliqué les propriétés essentielles de l'effet Hall quantique fractionnaire[1]. Elle fait apparaître l'existence d'états de charges fractionnaires $\pm \frac{e}{m}$, et des gaps d'énergie entre les niveaux de Landau (NL).

Les excitations de type quasitrou-quasiparticule, de plus basses énergies que $\hbar\omega_c$, où le quasitrou de Laughlin est obtenu en ajoutant de manière adiabatique un quantum de flux ϕ_0 au système. Cette excitation est représentée sur la figure 3.9, tandis que la quasiparticule est obtenue en enlevant un quantum de flux. On admet que seules les excitations inter-niveaux sont possibles.

FIG. 3.9 – Création d'un quasitrou de Laughlin à $v=1/3$ [14].

Pour un facteur de remplissage $v = \frac{1}{m}$, m impair, une quasi-particule de type trou correspond à vider un état quantique, laissant un trou de la taille d'un quantum de flux dans la fonction d'onde totale. Pour un électron, il y a m quantum de flux, alors l'apparition d'un trou laisse une charge fractionnaire $\frac{e}{m}$ non compensée. Cette excitation est composée de m excitations élémentaires, dans le cas où il s'agit de multiplier la fonction d'onde par le facteur $\prod_i z_i$. Finalement, la fonction d'onde totale Ψ_{qt} correspond à un état

où il y a un trou de charge $q = e$ appelé quasi-trou, et leurs analogues symétriques appelés quasi-électrons sont les excitations de charges fractionnaires prédites par Laughlin [21].

D'après la théorie remarquable du liquide de Laughlin, les quasi-particules sont des charges fractionnaires. On peut construire des quasi-particules ou des quasi-trous en un point donné. Cet état final est un état excité de l'hamiltonien original. L'interaction coulombienne donne un coût d'énergie fini pour les quasi-particules avec des charges fractionnaires. Toutes les particules sont déplacées de m_j vers $m_j + 1$, où l'insertion d'un quantum de flux en z_0 est obtenue par translation $z_k \mapsto z_k - z_0$. On considère la fonction d'onde associée à cette excitation, dite quasi-trou (qt), et à partir de l'équation (3.8), on obtient la fonction d'onde d'un quasi-trou

$$\Psi_{qt} = \prod_{k=1}^{N_e} (z_k - z_0) \Psi^L. \quad (3.18)$$

Cette fonction d'onde est dite " fonction d'onde de Laughlin d'un quasi-trou " à $\frac{1}{3}$ avec une particule en $z_0 = 0$ considérée comme position arbitraire. Alors on a une accumulation de charge dans une surface de taille l_0 autour de z_0 [6, 22]. La fonction d'onde Ψ_{qt} correspond donc à l'état

$$\Psi_{qt} = \prod_{k=1}^{N_e} z_k \Psi^L. \quad (3.19)$$

De la même façon, on trouve la fonction d'onde de Laughlin pour une excitation de type quasi-particule, mais avec un anti-vortex⁵ [23]. Nous avons dit précédemment que les fonctions d'onde dans le plus bas NL nous interdisent d'utiliser des variables \bar{z}_k . Pour cette condition, on va utiliser une autre approche qui consiste à dériver de la partie polynomiale de la fonction d'onde de Laughlin par rapport à z_k au lieu de la multiplication par \bar{z}_k . La fonction d'onde de Laughlin définie par l'équation (3.8), ainsi que la translation du quasi-électron (qe) en z_0 sont obtenues par substitution $\bar{z}_k \mapsto \bar{z}_k - \bar{z}_0$ et $\bar{z}_k \mapsto 2\partial_{z_k}$ [23]

$$\Psi_{qe} = \prod_{k=1}^{N_e} (2\partial_{z_k} - \bar{z}_0) \Psi^L. \quad (3.20)$$

Finalement, cette fonction reste donc dans le plus bas NL . Pour une fonction d'onde

⁵Vortex opposé.

du quasi-électron (qe) situé à l'origine, on peut écrire

$$\Psi_{qe} = \prod_{k=1}^{N_e} (2\partial_{z_k}) \Psi^L. \quad (3.21)$$

3.8 Excitations de l'état 1/3 de Jain

Nous présentons dans cette section la fonction d'onde d'une quasi-particule (qp) de Jain avec un facteur de remplissage 1/3. Une quasi-particule de charge $e/3$, est considérée comme un FC ajouté dans le NL supérieur définie par Jain[2] avec ($s = 1$). Le quasitrou de l'état 1/3 donné par Jain est obtenu en excitant un fermion composite dans le deuxième niveaux en laissant un quasitrou dans le niveau le plus bas. Cette excitation est représentée sur la figure 3.10.

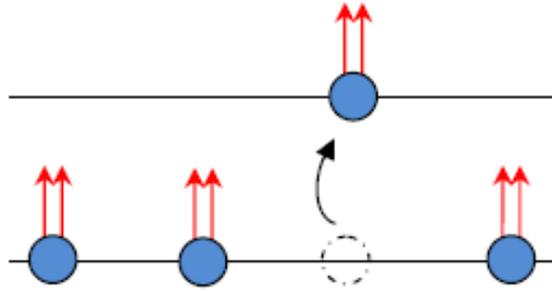


FIG. 3.10 – Créer un état de type quasitrou-quasiparticule.

$$\Psi_{FC}^{qp} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^{2s} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_N \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-2} & z_2^{N-2} & \cdot & \cdot & z_N^{N-2} \end{vmatrix} \exp\left(-\sum_j^N |z_j|^2/4\right). \quad (3.22)$$

Le quasi-électron de Jain situé à l'origine est décrit par la fonction d'onde de l'équation (3.22). Une étude détaillée sur le calcul d'énergie avec un et deux quasi-électrons est présentée dans le chapitre 5.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la fonction d'onde de Laughlin qui est une très bonne approximation pour les états propres exactes d'un oscillateur Harmonique pour les facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$. Ensuite, nous avons introduit les fonctions d'ondes de Jain représentées par les fermions composites pour les facteurs de remplissage $\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}$ à partir de l'état incompressible représenté par le modèle de Laughlin, le quantum de flux effectif $\phi_0^* = m\phi_0$, et la longueur magnétique $l_B^* = \sqrt{m}l_B$. La théorie a permis d'appréhender l'*EHQF* comme un *EHQE*. Après les travaux de Laughlin et Jain, beaucoup de chercheurs ont proposé des fonctions d'ondes. Parmi lesquelles on peut citer celles de Moore-Read et Read-Rezayi permettant d'expliquer d'autres facteurs de remplissage (chapitre 6).

Nous avons traité ensuite les excitations élémentaires en régime d'*EHQF*, et le problème de la création de paires "électron-trou" dans le cas d'un gaz électronique. La création d'un quasi-trou consiste à multiplier la fonction d'onde par $\prod_i z_i$, et que la création d'un quasi-électron consiste à multiplier la fonction d'onde par $\prod_i (2\partial_{z_i})$. Ensuite, on a déterminé deux théories différentes des quasi-particules de l'*EHQF*, l'une de Laughlin Ψ_L^{qp} et l'autre de Jain Ψ_{FC}^{qp} .

Chapitre 4

Méthodes analytiques dans l'EHQF

4.1 Introduction

Le fait de prendre en considération l'interaction coulombienne dans un problème à N_e électrons rend la compréhension de l'effet Hall quantique fractionnaire plus complexe. Nous présentons dans ce chapitre les fonctions d'onde de Laughlin qui sont de très bonnes approximations de l'état fondamental du hamiltonien lorsque le facteur de remplissage est égal $\nu = \frac{1}{m}$ avec m entier positif. Les fonctions d'onde des quasiparticules en termes de fermions composites (FC) seront présentées dans le chapitre 5.

Nous présentons dans ce chapitre une méthode analytique semblable à celle utilisée dans le cas de Laughlin(1983)[44] pour trois particules. Mentionnons cependant à ce propos un travail plus approfondi qui est présenté dans les références [49, 28], tandis que la référence [29] considère des systèmes contenant jusqu'à 6 électrons, et qui détermine les trois potentiels énergétiques de coulomb V_{ee} , V_{eb} et V_{bb} . Nous avons essayé d'optimiser cette méthode pour trouver le potentiel énergétique. Pourvu de cette méthode d'optimisation nous pouvons augmenter le nombre de particules pour aller jusqu'à des tailles de systèmes de plus de 6 particules et à différents facteurs de remplissage. Pour chaque nombre de particules, on obtient l'énergie de l'état fondamental, ainsi que le premier et le second état excité.

4.2 Fonction d'onde à N électrons

Depuis la découverte de l'EHQF[24] les descriptions théoriques de ce dernier ont prédit des phénomènes physiques nouveaux, dont certains attendent toujours une confirmation expérimentale. Il se produit à des fractions du facteur de remplissage, notamment dans le plus bas NL . Une conséquence de la formation d'orbites cyclotrons est la quantification de l'énergie cinétique en niveaux de Landau, qui est à l'origine de l'effet Hall quantique. Un remplissage partiel du premier niveau de Landau, lève alors la dégénérescence des états de N_e particules. C'est l'interaction de Coulomb, qui devient alors la seule échelle d'énergie, en levant la dégénérescence originale pour un système d'électrons fortement corrélés. Ce phénomène de l'EHQF a été bien expliqué par R. Laughlin[1], qui a proposé sa fameuse fonction d'onde (3.4) et s'écrit sous la forme

$$\Psi_{N_e}(z_1, \dots, z_{N_e}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2m+1} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l_B}\right). \quad (4.1)$$

Cette fonction d'onde variationnelle de Jastrow décrit généralement, les états d'EHQF étant invariants par translation et la nature de liquide incompressible de l'état à la densité de la fonction d'onde de Laughlin $\rho = \frac{v}{2\pi l_B^2}$, correspondant au plus bas niveau de Landau lorsque le facteur de remplissage est $\frac{1}{3}$. On revoit la solution de ce problème, en le formulant dans un langage où la position des électrons est représentée par les variables complexes $z_j = x_j + iy_j$ dans le plan. La fonction d'onde $\Psi_{N_e}(z_1, \dots, z_{N_e})$ pour l'état fondamental des fermions composites (FC) à $v = \frac{1}{3}$ a été écrit pour N_e électrons dans le plus bas niveau de Landau ($n = 0$). Dans la jauge symétrique $A = \frac{B}{2}(x, -y, 0)$, elle se décompose en somme de déterminants de Slater sur les orbitales équation (4.1). Il est commode d'introduire la longueur magnétique l_B définie par $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$. Ce phénomène est un état homogène avec un moment angulaire bien défini. Il consiste en une fonction d'onde à N_e particules qui décrit un liquide électronique incompressible de la densité uniforme $n_e = \frac{1}{2m+1} \left(\frac{eB}{h}\right)$, avec m entier. J. Jain proposa en 1989[2] une généralisation aux états trouvés à $v = \frac{p}{2sp+1}$, avec s et p entiers, en termes de fermions composites (FC). Morf et Halperin donnent une excellente description d'un calcul de l'énergie potentielle et d'autres quantités par la méthode de MC dans une géométrie du disque[42]. Nous utilisons une méthode de calcul

analytique pour déterminer l'énergie de l'état fondamental exact de la fonction d'onde de Laughlin pour les facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$, obtenu par une simulation numérique à l'aide du *Mathematica* dans une géométrie du disque. Les énergies sont en unités de $\frac{e^2}{l_0}$.

4.3 Fonctions d'ondes analytiques

Il a déjà été noté que le déterminant de Slater d'ordre N dans l'équation (4.1) est une expression de la fonction d'onde d'un système de N électrons identiques. La fonction $\Psi_L(z_1, \dots, z_{N_e})$ qui s'écrit simplement dans cette base et qui satisfait les conditions d'antisymétrie est un déterminant de Slater (3.5) construit à partir de polynômes homogènes de degré égal à $m(N_e - 1)$, et où le moment angulaire total bien défini du système, donné par $mN_e(N_e - 1)/2$ en z_i [43]. En effet, le déterminant de Slater, qui représente l'état non dégénéré est donné par

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_{N_e} \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdot & \cdot & z_{N_e}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N_e-1} & z_2^{N_e-1} & \cdot & \cdot & z_{N_e}^{N_e-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j}^{N_e} (z_i - z_j). \quad (4.2)$$

L'équation (4.1) représente l'état fondamental d'un gaz d'électrons. Laughlin montre que l'état fondamental exact $|\Psi_{Exact}(z_1, \dots, z_{N_e})\rangle$ de l'équation (2.76) avec un nombre des particules variant de 3, 4, 5, 6 et 7 électrons pour notre cas en interaction de Coulomb, dans la géométrie du disque, possède un très bon recouvrement avec la fonction d'onde d'essai $|\Psi_L(z_1, \dots, z_{N_e})\rangle$ [1].

4.4 Modèle des FC en interactions

On considère un ensemble d'électrons dans une géométrie du disque avec une densité de charges $n_e = \frac{N_e}{S_N}$, le flux total du champ magnétique à travers l'échantillon $\phi = BS_N$, la surface du disque $S_N = \pi R^2$ où R est son rayon, la dégénérescence d'un niveau $N_B = \frac{\phi}{\phi_0}$,

le quanta de flux $\phi_0 = \frac{h}{e}$. Ce modèle est valable lorsque la caractéristique de l'énergie d'interaction coulombienne $\frac{e^2}{l_0}$ est plus petite que $\hbar\omega$ [45].

Le cadre est l'effet Hall quantique fractionnaire, qui se compose d'un gaz d'électrons à deux dimensions traversés par un champ magnétique intense confinés dans le plus bas niveau de Landau (*PBNL*), où le moment angulaire total $L = mN_e(N_e - 1)/2$ [46], avec $m = 3$.

Ainsi, cet effet apparait comme un problème d'électrons fortement corrélés puisque l'énergie ne peut être qu'une conséquence de l'interaction coulombienne entre électrons occupant le même niveau de Landau[1]. L'hamiltonien de ce problème à N_e électrons, restreints au plus bas niveau de Landau ($n = 0$), est donné par la seule interaction coulombienne[46], à savoir

$$H = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla_i + e_0 A_i)^2 + V_{ee} + V_{eb} + V_{bb}, \quad (4.3)$$

avec,

$$V_{ee} = \sum_{i<j}^N \frac{e_0^2}{|r_i - r_j|}, \quad (4.4)$$

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^N \int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|r_i - r|}, \quad (4.5)$$

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_N} d^2r \int_{S_N} d^2r' \frac{e_0^2}{|r - r'|}. \quad (4.6)$$

L'énergie totale du système de N_e électrons est égale à la somme de tous les potentiels énergétiques électron-électron, électron-substrat et substrat-substrat. La densité électronique ρ d'après la formule de l'équation (3.10) vaut alors

$$\rho = \frac{1}{2\pi l^2 m}, \quad (4.7)$$

où, il y a exactement un électron pour m quanta de flux.

Dans le cadre de la construction des fermions composites (*FC*), nous aurons besoin d'états simples plus généraux de base de particules pour un niveau de Landau ($n = 0$) plein. Les fonctions d'onde uniques de particules de l'équation (2.76) dans la jauge

symétrique choisie ici, peuvent être exprimées comme

$$\varphi_{0,m} = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} \exp\left(-\frac{1}{4}z\bar{z}\right), \quad (4.8)$$

où m représente le moment cinétique, et $z_i \equiv (x_i + jy_i) \sqrt{\frac{qB}{\hbar c}}$ est une variable complexe (sans dimension) de coordonnées indiquant la position de la particule dans le plan.

Pour N électrons le polynôme $P_L = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2m+1}$ de Laughlin devient par la transformation de Jacobi

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2, \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\ &\dots\dots \\ Z_i &= \frac{z_1}{i} + \dots + \frac{z_i}{i} - z_{i+1}, \\ &\dots\dots \\ Z_{N_e} &= R = \frac{z_1}{N_e} + \dots + \frac{z_{N_e}}{N_e}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

R est le centre de masse des coordonnées de notre système.

On utilise la matrice inverse pour déterminer les z_i en fonction des Z_i puis en les remplace dans le polynôme P_L de Laughlin on obtient le polynôme de Jacobi que l'on a définit par la suite par P_J .

4.5 Énergie fondamentale de N_e électrons

L'énergie fondamentale du système est égale à la somme de tous les potentiels énergétiques de l'équation (4.3) en fonction de l'unité d'énergie $\frac{e^2}{l_0}$, où l'expression de l'interaction H_{int} devient

$$\langle \Psi | H_{int} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \widehat{V} | \Psi \rangle. \quad (4.10)$$

Nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques exacts avec l'interaction de Coulomb. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état $|\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})\rangle$

$$E(N_e) = \langle \widehat{V} \rangle = \frac{\langle \Psi | \widehat{V} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (4.11)$$

Nous avons effectué les dérivations mathématiques ainsi que le code Mathematica[47] pour calculer l'énergie d'interaction, en utilisant les fonctions d'onde des (*FC*) de ces électrons. Nous stockons les variables de la fonction d'onde de Laughlin dans le polynôme P_L . Soit on utilise les coordonnées de Jacobi pour faciliter le calcul exact des différentes quantités. Ces expressions impliquant des intégrales sur de nombreuses variables sont considérablement simplifiées avec l'aide des coordonnées de Jacobi qui nous permettent de calculer exactement des diverses quantités correspondantes aux systèmes à plusieurs électrons. Ensuite, nous utilisons le modèle des interactions de Coulomb, en agissant sur chaque variable du polynôme P_J , puis stocker la fonction d'onde résultant en *SumNomi*. Après changement de variable[46] $z_j = x_j - iy_j = r_j e^{-i\varphi_j}$, les fonctions d'onde non normalisées[48] sont données par

$$\langle \Psi(r_1, \dots, r_{N_e}) | \Psi(r_1, \dots, r_{N_e}) \rangle = \int_{S_{N_e}} \Psi^*(r_1, \dots, r_{N_e}) \Psi(r_1, \dots, r_{N_e}) d^2 r_1 \cdots d^2 r_{N_e}. \quad (4.12)$$

L'énergie potentielle totale du système de N_e électrons est égale à la somme de tous les potentiels énergétiques

$$\widehat{V} = \widehat{V}_{ee} + \widehat{V}_{eb} + \widehat{V}_{bb}. \quad (4.13)$$

Dans la méthode analytique exacte, on considère le calcul de la valeur moyenne des opérateurs énergétiques comme indiqué dans l'équation (4.3), où l'énergie d'interaction par particule

$$\varepsilon = \frac{\langle \widehat{V} \rangle}{N_e}. \quad (4.14)$$

4.6 Méthode analytique pour 4 électrons

4.6.1 Interaction électron-électron

Pour l'instant, on prend $N_e = 4$, où N_e est le nombre d'électrons. On introduit l'énergie d'interaction par particule ε_{ee} (électron-électron). Le polynôme vecteur P_L de

Laughlin s'écrit

$$\begin{aligned} P_L &= \prod_{\substack{i < j \\ i=1}}^{N_e=4} (z_i - z_j)^3 \\ &= (z_1 - z_2)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_4)^3 (z_2 - z_3)^3 (z_2 - z_4)^3 (z_3 - z_4)^3. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour une fonction d'onde $\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})$, l'interaction coulombienne est

$$V_{ee} = \frac{N_e(N_e - 1)}{2} \frac{\int d^2r_1 \cdots d^2r_{N_e} \frac{e_0^2}{|r_1 - r_2|} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}{\int d^2r_1 \cdots d^2r_{N_e} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}, \quad (4.16)$$

avec

$$z_j = r_j e^{-i\varphi_j}. \quad (4.17)$$

Tel que z_j vecteur position à 2D dans la représentation complexe, on obtient ε_{ee} par

$$\varepsilon_{ee} = \frac{(N_e - 1)}{2} \frac{\int d^2z_1 \cdots d^2z_{N_e} \frac{e_0^2}{|z_1 - z_2|} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2}{\int d^2z_1 \cdots d^2z_{N_e} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2}. \quad (4.18)$$

On obtient les coordonnées complexes de Jacobi Z_i

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2, \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\ Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4, \\ Z_4 &= \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'équation (4.15) est une matrice carrée avec les inconnues z_1, z_2, z_3, z_4 , en calculant la matrice inverse, on obtient[49]

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_2 &= \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_3 &= \frac{-2Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_4 &= \frac{-3Z_3}{4} + Z_4. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En incluant z_1, z_2, z_3, z_4 dans l'équation (4.15), le polynôme vecteur P_L devient P_J (polynôme vecteur de Jacobi)

$$P_J = Z_1^3 \left(\frac{-Z_1}{2} + Z_2 \right)^3 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)^3 \left(\frac{-2Z_2}{3} + Z_3 \right)^3 \left(\frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3 \right)^3 \left(\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3 \right)^3. \quad (4.21)$$

Et nous avons

$$\int \prod_{k=1}^{N_e} d^2 z_k = \int \prod_{k=1}^{N_e} d^2 Z_k, \text{ avec } N_e \geq 2. \quad (4.22)$$

Afin de satisfaire les coordonnées de Jacobi, on peut écrire la forme suivante[46]

$$\sum_{k=1}^{N_e} r_k^2 = N_e R_{N_e}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j+1} Z_j^2, \text{ avec } N_e \geq 2, \quad (4.23)$$

et

$$S_4(R, Z_1, Z_2, Z_3) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = \frac{Z_1^2}{2} + \frac{2Z_2^2}{3} + \frac{3Z_3^2}{4} + 4Z_4^2. \quad (4.24)$$

D'après le changement de coordonnées correspondant V_{ee} devient

$$\varepsilon_{ee} = \frac{3 \int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 \int d^2 Z_4 [P_J]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/8 + 2Z_4^2)/l_0^2} \frac{e_0^2}{Z_1}}{2 \int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 \int d^2 Z_4 [P_J]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/8 + 2Z_4^2)/l_0^2}}. \quad (4.25)$$

4.6.2 Interaction électron– substrat

L'énergie d'interaction par particule ε_{eb} (électron–substrat) selon l'équation (4.5) est définie par

$$V_{eb} = -\rho N_e \frac{\int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2 \int_{S_{N_e}} d^2 r \frac{e_0^2}{|r_1 - r|}}{\int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}, \quad (4.26)$$

avec

$$\int_{S_{N_e}} d^2 r \frac{e_0^2}{|r_i - r|} = 2 \frac{e_0^2 S_{N_e}}{R_{N_e}} \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1(q) J_0\left(\frac{qr_1}{R_{N_e}}\right). \quad (4.27)$$

On peut réécrire le potentiel V_{eb} comme suit

$$V_{eb} = \frac{-2e_0^2 \rho N_e S_{N_e} \int_0^\infty dq \frac{J_1(q)}{q} \int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2 J_0\left(\frac{qr_1}{R_{N_e}}\right)}{R_{N_e} \int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}. \quad (4.28)$$

D'après l'équation (4.17) le potentiel ε_{eb} devient

$$\varepsilon_{eb} = \frac{-2e_0^2 \rho S_{N_e} \int_0^\infty dq \frac{J_1(q)}{q} \int d^2 z_1 \dots d^2 z_{N_e} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2 J_0\left(\frac{q|z_1|}{R_{N_e}}\right)}{R \int d^2 z_1 \dots d^2 z_{N_e} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2}, \quad (4.29)$$

où $J_0(x)$ et $J_1(x)$ désignent les fonctions de Bessel d'ordre *zéro* et *un* respectivement.

4.6.3 Interaction substrat – substrat V_{bb}

L'énergie d'interaction par particule ε_{bb} (substrat-substrat) considérée comme une constante ne pose aucun problème, elle peut se calculer analytiquement comme suit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{bb} &= \frac{1}{N_e} \frac{\rho^2}{2} \int_{S_{N_e}} d^2r \int_{S_{N_e}} d^2r' \frac{e_0^2}{|r - r'|} \\ &= \frac{8}{3\pi} \frac{\sqrt{vN_e} e_0^2}{2 l_0}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

4.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons une comparaison des énergies obtenues par un calcul analytique exact aux résultats obtenus par la méthode numérique de MC[46]. Nous allons présenter les résultats d'un système $N = 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 particules. Pour un maximum de 7 particules, les valeurs numériques ont été réalisées par le package Mathematica avec une précision jusqu'à six chiffres après la virgule[50]. Les simulations numériques montrent que la fonction d'onde de Laughlin à $v = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ et $\frac{1}{7}$ pour $N_e \geq 2$ est une très bonne approximation de l'état fondamental exact pour une interaction de Coulomb[52].

4.7.1 Résultats énergétiques pour $v = 1/3$

Les énergies caractéristiques de cette fraction sont résumées dans le tableau 4.1

N_e	ε_{ee}	ε_{eb}	ε_{bb}	ε	ε_{MC}
2	0.138473	- 1.010575	0.490070	- 0.382032	- 0.382032
3	0.239772	- 1.226488	0.600211	- 0.386505	- 0.386505
4	0.327649	-1.409568	0.693064	- 0.388855	- 0.388855
5	0.406143	- 1.571267	0.774869	- 0.390255	-
6	0.477399	- 1.717742	0.848826	- 0.391517	-
7	0.543181	- 1.852642	0.916837	- 0.392624	-

TAB. 4.1 – État fondamental à $v = 1/3$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

La figure 4.1 représente un diagramme de l'énergie d'interaction par particule dans un domaine en forme de disque de rayon R_{N_e} à $v = \frac{1}{3}$, étant probablement le système le mieux assimilé.

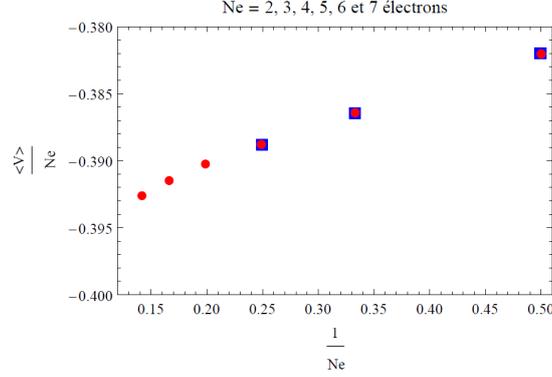


FIG. 4.1 – Méthode analytique exacte pour le calcul de l'état fondamental à $v=1/3$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les rectangles colorés en bleu représentent les énergies obtenues par la méthode de MC.

Dans la figure 4.1 nous présentons l'énergie d'interaction par particule, en unités de $\frac{e^2}{l}$, de notre résultat analytique exact à $v = \frac{1}{3}$ en tout en le comparant avec des résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo[46, 49, 63].

4.7.2 Résultats énergétiques pour $v = 1/5$

Les énergies caractéristiques de cette fraction sont résumées dans le tableau 4.2.

N_e	ε_{ee}	ε_{eb}	ε_{bb}	ε	ε_{MC}
2	0.109047	- 0.805591	0.320826	- 0.316937	- 0.316937
3	0.184915	- 0.970452	0.464921	- 0.320615	- 0.320616
4	0.252296	- 1.110725	0.536845	- 0.321584	- 0.321578
5	0.313323	- 1.234650	0.600211	- 0.321116	-
6	0.368213	- 1.347024	0.657498	- 0.321313	-

TAB. 4.2 – État fondamental à $v = 1/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

La figure 4.2 représente un diagramme de l'énergie d'interaction par particule dans un domaine en forme de disque de rayon R_{N_e} à $\nu = \frac{1}{5}$.

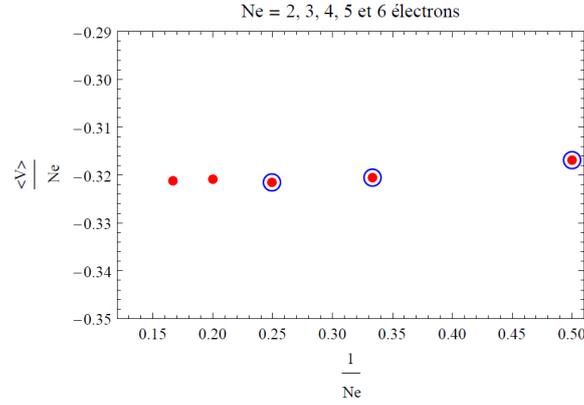


FIG. 4.2 – Méthode analytique exacte de l'état fondamental à $\nu=1/5$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les anneaux colorés en bleu représentent les énergies obtenues par la méthode de MC.

Dans la figure 4.2 nous présentons l'énergie d'interaction par particule, en unités de $\frac{e^2}{l}$, de notre résultat analytique exacte à $\nu = \frac{1}{5}$ en comparaison avec des résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo, par conséquent, notre résultat analytique est en accord avec les résultats obtenu par Ciftja[46, 49, 63].

4.7.3 Résultats énergétiques pour $\nu = 1/7$

La fraction $\nu = 1/7$ apparaît pour la première fois dans les échantillons de très haute mobilité[51]. Ces mesures ont été effectuées sur une hétérostructure GaAs/AlGaAs pour un champ magnétique de 14.7 T, et une température de 0,38 K.

Les énergies caractéristiques de cette fraction sont résumées dans le tableau 4.3.

La figure 4.3 représente un diagramme de l'énergie d'interaction par particule dans un domaine en forme de disque de rayon R_{N_e} à $\nu = \frac{1}{7}$, où la valeur de l'énergie coulombienne prend des valeurs plus petite que celles obtenus en $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$.

N_e	ε_{ee}	ε_{eb}	ε_{bb}	ε
2	0.092820	-0.688689	0.320826	- 0.275043
3	0.155636	- 0.827266	0.392930	- 0.278699
4	0.212046	- 0.945428	0.453717	- 0.279665
5	0.263948	- 1.049771	0.507271	- 0.278552

TAB. 4.3 – État fondamental à $\nu = 1/7$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

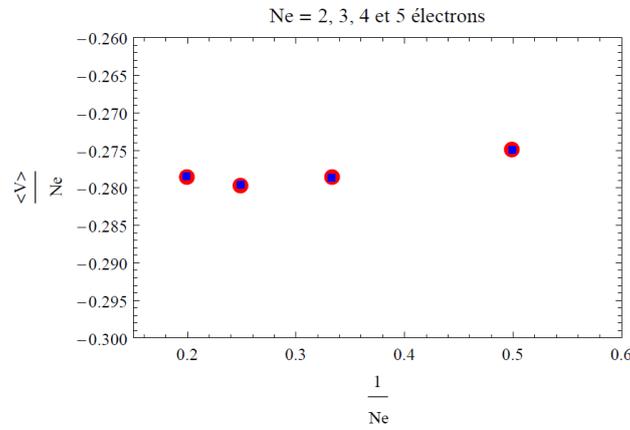


FIG. 4.3 – Méthode analytique exacte de l'état fondamental à $\nu=1/7$. Les disques colorés en rouge représentent les énergies obtenues par le calcul analytique exacte, les rectangles colorés en bleu représentent les énergies obtenues par DNE.

4.8 Conclusion

La réinterprétation de l'expansion des fonctions d'onde de Laughlin en fonction d'onde de Slater présenté au moyen d'un package Mathematica, se décompose analytiquement en des états de base de l'espace de Fock sur les orbitales $\varphi_{n,m}$, ou les déterminants de Slater sur ces orbitales. Cette base est couramment utilisée pour décrire les systèmes quantiques à 2D. Dans notre premier article[50], nous avons calculé l'énergie de l'état fondamental d'un système à N_e électron en interaction coulombienne pour des facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{5}$ et $\nu = \frac{1}{7}$. Les grandeurs de ces énergies sont résumées dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, où la valeur de l'énergie coulombienne prend la plus grande amplitude pour $\nu = \frac{1}{3}$, et prend la plus petite grandeur pour $\nu = \frac{1}{7}$. Par conséquent, notre résultat théorique est en

accord avec les résultats obtenu par les articles de Ciftja[46], Haldane[74] et Fano[52]. La méthode de calcul actuelle des énergies d'interaction coulombienne peut être appliquée à tous les facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$ avec m impairs, les premiers et seconds états excités seront présentés dans le chapitre 5. Plus généralement, nous irons déterminer les énergies d'interaction coulombienne pour les facteurs de remplissage $\nu = \frac{\nu^*}{2\nu^*s + 1}$ par la méthode de diagonalisation exacte dans le chapitre 6.

Chapitre 5

Excitations de charges fractionnaires

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les excitations élémentaires en régime d'*EHQF*. Cependant, on inclut les interactions dans la description du système. Nous nous limiterons ici à la description du plateau $\nu = \frac{1}{3}$, car il s'agit d'une très bonne approximation du vrai état fondamental de l'oscillateur harmonique correspondant. Un système de fermions en interaction à deux dimensions forme un fluide électronique collectif sous l'application d'un champ magnétique intense qui présente le phénomène de l'*EHQF*. La fonction d'onde d'essai proposée par Laughlin pour l'état fondamental avec le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$, (m est impair) fonctionne bien. La théorie des fermions composites proposée par J.K. Jain donne un avantage d'application plus large pour ce phénomène, tout en offrant une nouvelle interprétation de la physique de l'état du $\nu = \frac{1}{m}$, comme un état de fermions composites à un facteur de remplissage efficace de $\nu^* = 1$ [57, 59]. Cette propriété permet de calculer exactement les fonctions d'onde fermioniques ainsi que leurs excitations de type quasiparticules, ce qui donne l'occasion de tester la validité de la théorie des *FC* à $\nu = \frac{1}{m}$ et $\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}$.

Laughlin prédit la possibilité d'exciter des quasi-particules qui portent une charge fractionnaire $e^* = \nu e$. Cette prédiction sur la nature singulière du liquide de Laughlin a été confirmée par des mesures expérimentales en 1997[21].

Nous étudions l'excitation d'un état incompressible de l'*EHQF* que l'on appelle

d'après l'hypothèse fondamentale de la théorie de Landau des liquides de Fermi les quasiparticules[53, 54, 55]. Dans un sens plus large, un système de quasiparticules est équivalente à un gaz de fermions faiblement interagissant. Différentes théories de l'excitation de charges fractionnaires des états incompressibles de l'effet Hall quantique ont été étudiées où la quasiparticule était considérée comme un fermion composite excité, qui produit une fonction d'onde différente à celui de Laughlin.

Notre objectif dans ce chapitre est de comparer les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant plus d'une quasiparticule. Une différence qualitative entre les deux approches a été constatée au cours des dernières études microscopiques des états multi-quasiparticules dans le contexte des statistiques fractionnaires.

Nous étudions l'état $\nu = \frac{1}{3}$ de l'*EHQF* avec une et deux quasiparticules. Il est démontré que les excitations de charge fractionnaire sont mieux décrites comme fermions composites excités occupant des niveaux quasi-Landau supérieurs.

5.2 Excitation d'une charge fractionnaire

Nous constatons que l'existence de ces excitations est fondamentalement liée à la nature même de l'*EHQF*, dans lequel le liquide d'électrons est incompressible. Dans cette première étude nous décrirons les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant une quasiparticule.

5.2.1 Quasiparticule de Laughlin

Selon la théorie de Laughlin, une quasiparticule est considérée comme un "*vortex*", où cet état obtenu en enlevant un quantum de flux, sur la base de laquelle une fonction d'onde Ψ^L de l'équation (3.8) a été proposée[57], et on note Ψ_L^{1qp} la fonction d'onde d'une quasiparticule de Laughlin au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$

$$\Psi_L^{1qp}(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j^2|}{4}\right) \prod_l \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^3. \quad (5.1)$$

Pour l'état $\nu = \frac{1}{3}$, il y a un électron pour trois quanta de flux dans l'état fondamental, l'ajout d'un quantum de flux ϕ_0 a motivé la création d'une quasiparticule à l'origine de

charge $\frac{e}{3}$.

5.2.2 Quasiparticule de Jain

Dans sa théorie, Jain décrit l'état fondamental de Laughlin au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$, tel que m entier différent de zéro, et propose une généralisation de ces états au facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{2ps+1}$, avec s et p entier, en termes de fermions composites (*FC*). À partir de l'état incompressible représenté par l'équation (3.8) du modèle de Laughlin Ψ^L , nous pouvons écrire la fonction d'onde de Jain Ψ_{FC} à l'aide de la fonction Φ_1 de l'équation (3.12) correspondant au facteur $\nu^* = 1$. Le principe de cette excitation est représenté sur la figure 5.1.

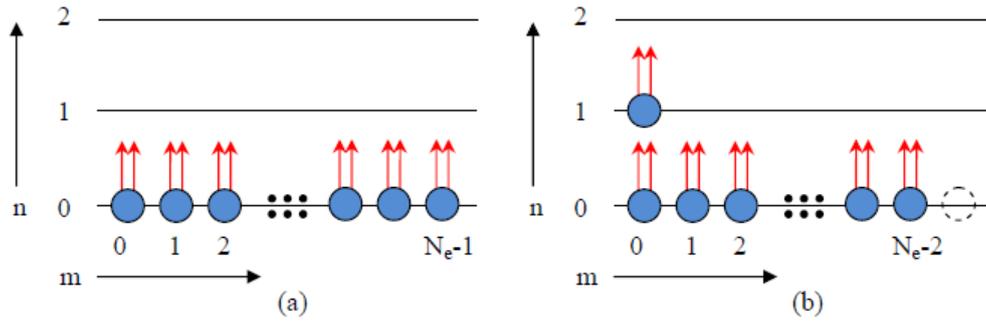


FIG. 5.1 – Création d'une quasiparticule de FC à $\nu=1/3$. (a) état fondamental, (b) premier état excité.

La figure 5.1.a représente les états fondamentaux d'un système à N_e particules, et la figure 5.1.b une seule quasiparticule à $\nu = 1/3$ en termes de *FC*. Tel que n représente le niveau quasi-Landau des *FC*, m et le moment cinétique des *FC*. L'état fondamental est décrit par la fonction d'onde de Jain à $\nu = 1/3$

$$\Psi^{GS}(z_1, \dots, z_{N_e}) = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^2 \Phi_1, \quad (5.2)$$

telle que Φ_1 représente la fonction d'onde de l'état fondamental incompressible de l'*EHQE* au facteur de remplissage $\nu = 1$ et qui prend la forme

$$\Phi_1 = \prod_{j < k} (z_j - z_k) \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2\right), \quad (5.3)$$

\mathcal{P}_{PBNL} est le projecteur sur le plus bas niveau de Landau. La fonction d'onde d'une quasiparticule de Jain (FC) au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ s'écrit

$$\Psi_{FC}^{1qp} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^2 \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_N \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-2} & z_2^{N-2} & \cdot & \cdot & z_N^{N-2} \end{vmatrix} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_j^N |z_j|^2\right). \quad (5.4)$$

Les dérivés n'agissant pas sur le facteur gaussien[61], on va dériver seulement la partie polynomiale de la fonction d'onde. Ceci produit

$$\begin{aligned} \Psi_{FC}^{1qp} &= \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2\right) \left[\sum_{i=1}^N \frac{2\partial/\partial z_i}{\prod_j' (z_j - z_i)} \right] \prod_{l < m}^N (z_l - z_m)^3 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{6 \sum_k' (z_i - z_k)^{-1}}{\prod_j' (z_j - z_i)} \Psi^{GS}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dans cette partie, on va déterminer l'énergie d'interaction V_{ee} (électron-électron) de l'équation (4.4) d'une seule quasiparticule d'un système à N_e électrons en fonction de l'unité d'énergie $\frac{e^2}{l_0}$.

Nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques exacts avec l'interaction de Coulomb. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état de Laughlin $\Psi_L^{1qp}(z_1, \dots, z_{N_e})$ à une seule quasiparticule, où l'expression de l'interaction devient

$$E_L^{1qp}(N_e) = \frac{\langle \Psi_L^{1qp} | V_{ee} | \Psi_L^{1qp} \rangle}{\langle \Psi_L^{1qp} | \Psi_L^{1qp} \rangle}. \quad (5.6)$$

Ensuite, nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état de Jain $\Psi_{FC}^{1qp}(z_1, \dots)$, où l'expression de l'interaction devient

$$E_{FC}^{1qp}(N_e) = \frac{\langle \Psi_{FC}^{1qp} | V_{ee} | \Psi_{FC}^{1qp} \rangle}{\langle \Psi_{FC}^{1qp} | \Psi_{FC}^{1qp} \rangle}. \quad (5.7)$$

Les dérivations mathématiques ainsi que le code Mathematica[47] utilisées pour calculer l'énergie d'interaction, en utilisant les fonctions d'ondes des quasiparticules de Laughlin, et de jain pour un petit nombre d'électrons. Après avoir déterminé l'énergie d'interaction, on détermine la différence d'énergie d'une seule quasiparticule entre la fonction

d'onde de Laughlin et de Jain

$$\Delta E^{1qp}(N_e) = E_L^{1qp} - E_{FC}^{1qp}. \quad (5.8)$$

L'équation (5.8) donne la différence d'énergie d'une seule quasiparticule de différents nombres des particules N_e entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain. Ces énergies sont données dans le tableau 5.1.

N_e	E_L^{1qp}	E_{FC}^{1qp}	$\Delta E^{1qp} = E_L^{1qp} - E_{FC}^{1qp}$
3	0.891203	0.891203	0.000000
4	1.501387	1.501719	- 0.000331
5	2.248741	2.249042	- 0.000301
6	3.113676	3.112197	0.001479
7	4.080094	4.076219	0.003876

TAB. 5.1 – Énergies du premier état excité, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

La figure 5.2 représente la différence d'énergie d'une seule quasiparticule entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain.

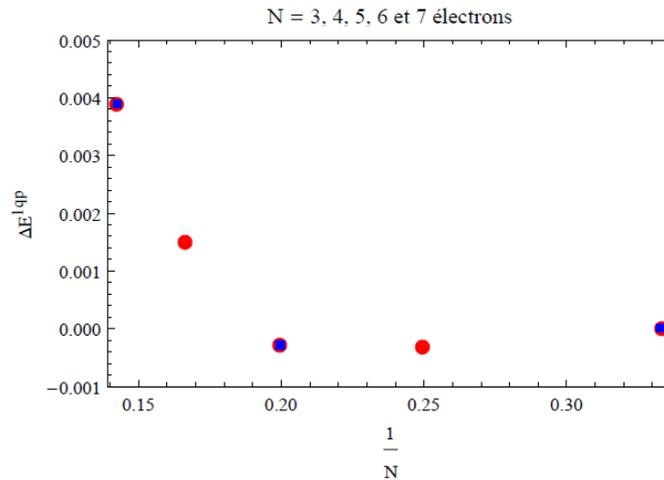


FIG. 5.2 – Comparaison de la différence d'énergie, entre la fonction d'onde d'une seule quasiparticule de Laughlin et de Jain obtenues par un calcul analytique exacte (disques colorés en rouge) aux résultats obtenus par la méthode de MC (rectangles colorés en bleu).

Dans la figure 5.2 nous présentons une comparaison de la différence d'énergie, en unités de $\frac{e^2}{l_0}$, entre la fonction d'onde d'une seule quasiparticule de Laughlin et de Jain à la position $z_0 = 0$ obtenues par un calcul analytique exacte aux résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo. Par conséquent, notre résultat analytique est en accord avec les résultats obtenu par G. S. Jeon[57].

La différence d'énergie est proche de zéro pour un système de petit nombre d'électrons ($N_e \leq 5$). En effet, cette différence augmente pour un nombre d'électrons ($N_e > 5$). En particulier, la fonction d'onde d'un fermion composite pour une seule quasiparticule donne une énergie de 15% inférieure à celle calculée par la fonction d'onde d'essai proposée par Laughlin.

5.3 Excitation de deux charges fractionnaires

Dans la deuxième partie, nous décrirons les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant deux quasiparticules en régime d'*EHQF*. Pour un système qui contient deux quasiparticules, il y a deux catégories d'occupation[57, 58] pour les *FC* : $[N - 2, 2]$ et $[N - 2, 1, 1]$.

5.3.1 Deux quasiparticules de Laughlin

Selon la théorie de Laughlin, une quasiparticule est considérée comme un "*vortex*"[57], et on note Ψ_L^{2qp} la fonction d'onde à deux quasiparticules de Laughlin au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$

$$\Psi_L^{2qp}(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4}\right) \prod_l \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^3. \quad (5.9)$$

Ceci peut se comprendre physiquement comme la production de deux quasiparticules situées à l'origine.

5.3.2 Représentation d'occupation $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$ de *FC*

Le principe de cette excitation est représenté sur la figure 5.3 d'état d'occupation $[N-2,2]$. La figure 5.3.a représente les états fondamentaux d'un système à N_e particules

définis par l'équation (5.2), et la figure 5.3.b correspond à deux quasiparticules à $\nu = 1/3$ en termes de FC d'état d'occupation $[N-2,2]$.

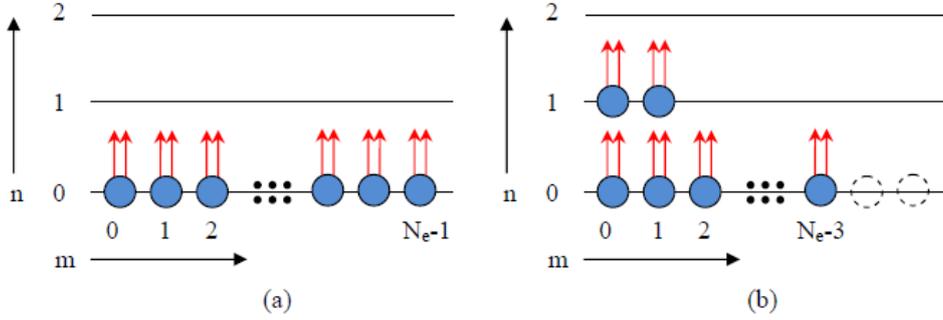


FIG. 5.3 – Création d'un système contenant deux quasiparticules. (a) état fondamental, (b) seconds états excités de type d'occupation $[N-2,2]$ de FC à $\nu=1/3$

La fonction d'onde à deux quasiparticules de Jain (FC) au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ d'état d'occupation $[N-2,2]$ s'écrit

$$\Psi_{FC}^{[N-2,2]} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^2 \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_N \\ \bar{z}_1 z_1 & \bar{z}_2 z_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_N z_N \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-3} & z_2^{N-3} & \cdot & \cdot & z_N^{N-3} \end{vmatrix} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_j^N |z_j|^2\right). \quad (5.10)$$

Dans cette partie, on détermine l'énergie d'interaction électron-électron (V_{ee}) de l'équation (4.4) à deux quasiparticules d'un système à N_e électrons en fonction de l'unité d'énergie $\frac{e^2}{t_0}$. Nous avons obtenu des résultats analytique et numériques exacts avec l'interaction de Coulomb. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état de Laughlin $\Psi_L^{2qp}(z_1, \dots, z_{N_e})$ à deux quasiparticules, où l'expression de l'interaction devient

$$E_L^{2qp}(N_e) = \frac{\langle \Psi_L^{2qp} | V_{ee} | \Psi_L^{2qp} \rangle}{\langle \Psi_L^{2qp} | \Psi_L^{2qp} \rangle}. \quad (5.11)$$

Ensuite, nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état de Jain $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$

à deux quasiparticules, où l'expression de l'interaction devient

$$E_{FC}^{[N-2,2]}(N_e) = \frac{\langle \Psi_{FC}^{[N-2,2]} | V_{ee} | \Psi_{FC}^{[N-2,2]} \rangle}{\langle \Psi_{FC}^{[N-2,2]} | \Psi_{FC}^{[N-2,2]} \rangle}. \quad (5.12)$$

On peut envisager le même cas que précédemment, mais avec deux quasiparticules ($2qp$). Après avoir déterminé l'énergie d'interaction, on détermine la différence d'énergie de $2qp$ entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain

$$\Delta E_1^{2qp}(N_e) = E_L^{2qp} - E_{FC}^{[N-2,2]}. \quad (5.13)$$

L'équation (5.13) donne la différence d'énergie de deux quasiparticules de différents nombres des particules N_e entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain d'état d'occupation $[N-2,2]$. Ces énergies sont données dans le tableau 5.2

N_e	E_L^{2qp}	E_{FC}^{2qp}	$\Delta E^{2qp} = E_L^{2qp} - E_{FC}^{2qp}$
3	1.204715	1.056073	0.148642
4	1.785982	1.685781	0.100201
5	2.538105	2.430359	0.107746
6	3.422158	3.291951	0.130206

TAB. 5.2 – Énergies du deuxième état excité $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

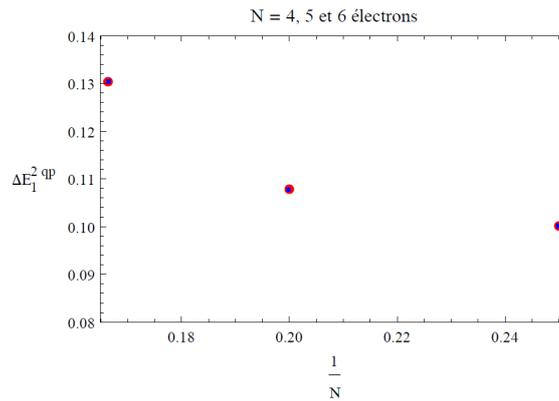


FIG. 5.4 – Méthode analytique exacte du deuxième état excité d'occupation $[N-2,2]$ à $1/3$.

La figure 5.4 représente la différence d'énergie à $2qp$ entre les fonctions d'ondes de Laughlin et de Jain d'état d'occupation $[N-2,2]$. Dans cette figure (5.4) nous présentons une

comparaison de la différence d'énergie à deux quasiparticules entre les fonctions d'onde de Laughlin et de Jain des énergies obtenues par un calcul analytique exact (disques colorés en rouge) aux résultats obtenus par la méthode de *MC* (rectangles colorés en bleu). Par conséquent, notre résultat analytique est en accord avec les résultats obtenu par G. S. Jeon[57].

5.3.3 Représentation d'occupation $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}$ de *FC*

Le principe de cette excitation est représenté sur la figure 5.5 d'état d'occupation $[N-2,1,1]$.

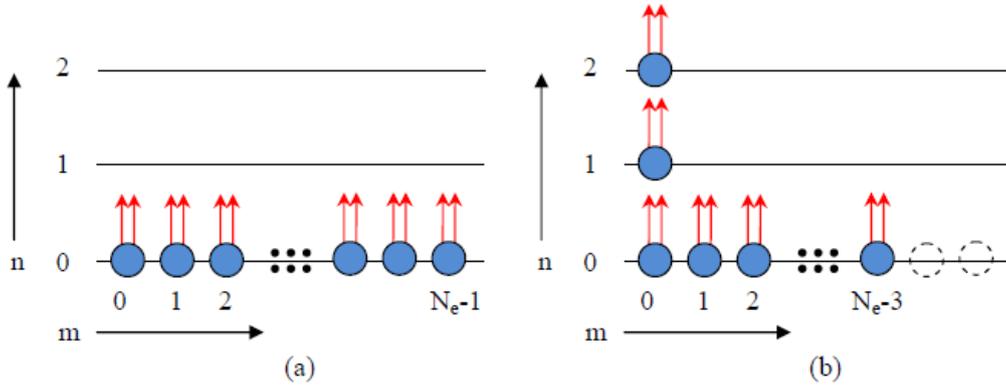


FIG. 5.5 – Création d'un système contenant deux quasiparticules. (a) état fondamental. (b) deuxième états excités de type d'occupation $[N-2,1,1]$ de *FC* à $\nu=1/3$.

La figure 5.5.a représente les états fondamentaux d'un système à N_e particules définis par l'équation (5.2), et la figure 5.5.b représente deux quasiparticules à $\nu = 1/3$ en termes de *FC* d'état d'occupation $[N-2,1,1]$.

La fonction d'onde à deux quasiparticules de Jain (*FC*) au facteur de remplissage

$v = \frac{1}{3}$ d'état d'occupation $[N-2,1,1]$ s'écrit

$$\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^2 \begin{vmatrix} (\bar{z}_1)^2 & (\bar{z}_2)^2 & \cdot & \cdot & (\bar{z}_N)^2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_N \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & z_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N-3} & z_2^{N-3} & \cdot & \cdot & z_N^{N-3} \end{vmatrix} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_j^N |z_j|^2\right). \quad (5.14)$$

Dans cette partie, on détermine l'énergie d'interaction V_{ee} (électron-électron) de l'équation (4.4) à deux quasiparticules d'un système à N_e électrons en fonction de l'unité d'énergie $\frac{e^2}{t_0}$. Nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques exacts avec l'interaction de Coulomb. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un état de Jain $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}(z_1, \dots, z_{N_e})$ à deux quasiparticules, où l'expression de l'interaction devient

$$E_{FC}^{[N-2,1,1]}(N_e) = \frac{\left\langle \Psi_{FC}^{[N-2,1,1]} | V_{ee} | \Psi_{FC}^{[N-2,1,1]} \right\rangle}{\left\langle \Psi_{FC}^{[N-2,1,1]} | \Psi_{FC}^{[N-2,1,1]} \right\rangle}. \quad (5.15)$$

Comme c'était le cas pour les fonctions d'ondes à deux quasiparticules d'état d'occupation $[N-2,2]$, on va déterminer la différence d'énergie de deux quasiparticules entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain d'état d'occupation $[N-2,1,1]$

$$\Delta E_2^{2qp}(N_e) = E_L^{2qp} - E_{FC}^{[N-2,1,1]}. \quad (5.16)$$

L'équation (5.16) donne la différence d'énergie de deux quasiparticules de différents nombres des particules N_e entre la fonction d'onde de Laughlin et de Jain d'état d'occupation $[N-2,1,1]$. Ces énergies sont données dans le tableau 5.3. La figure 5.6 représente la différence d'énergie à deux quasiparticules entre les fonctions d'ondes de Laughlin et de Jain d'état d'occupation $[N-2,1,1]$.

Dans la figure 5.6 nous présentons une comparaison de la différence d'énergie à deux quasiparticules entre les fonctions d'onde de Laughlin et de Jain des énergies obtenues par un calcul analytique exact (disques colorés en rouge) aux résultats obtenus par la méthode de *MC* (rectangles colorés en bleu)[57].

N_e	E_L^{2qp}	E_{FC}^{2qp}	$\Delta E^{2qp} = E_L^{2qp} - E_{FC}^{2qp}$
3	1.204715	1.204715	0.000000
4	1.785982	1.785126	0.000856
5	2.538105	2.537070	0.001035
6	3.422158	3.419129	0.003029

TAB. 5.3 – Énergies du deuxième état excité $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}$, en unités de $\frac{e_0^2}{t_0}$.

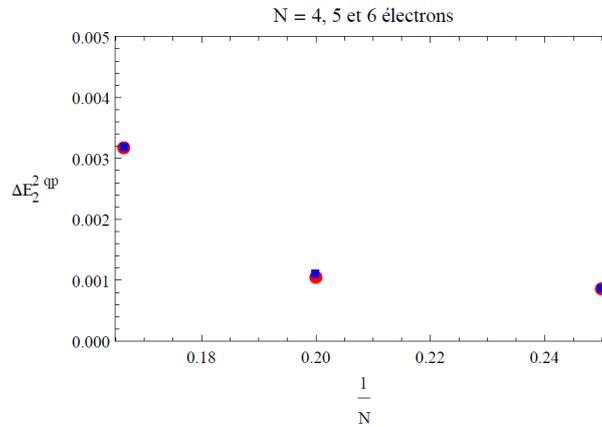


FIG. 5.6 – Méthode analytique exacte à deux quasiparticules d'occupation $[N-2,1,1]$ à $v=1/3$.

5.4 Conclusion

Nous avons donné dans cette partie une description de quasiparticules comme fermions composites et comme un "vortex". Cette étude apporte également des structures physiques différentes concentrées sur le facteur de remplissage $v = \frac{1}{3}$, où il convient de noter que la théorie des FC explique le phénomène général de l' $EHQF$, donnant des fonctions précises d'ondes pour les états fondamentaux, ainsi que les fonctions d'onde des quasiparticules. De nombreuses études ont comparé les deux fonctions d'onde, et quelle que soit la géométrie et le type d'interaction utilisés dans ces études, la fonction d'onde des FC a été jugée la meilleure[56, 57].

On remarque que l'énergie d'interaction d'un état d'occupation $[N-2, 1, 1]$ de Jain, représenté par la fonction d'onde $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}$ est plus grande que celle obtenue par l'état

d'occupation $[N - 2, 2]$, représenté par la fonction d'onde $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}$, et proche de la fonction d'onde à deux quasiparticules de Laughlin Ψ_L^{2qp} au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$.

Chapitre 6

Calculs numériques de l'EHQF

6.1 Introduction

Après avoir utilisé une méthode analytique dans l'EHQF dans l'étude des systèmes de fermions fortement corrélés, nous souhaitons utiliser d'autres méthodes de calculs pour déterminer les énergies possibles de notre hamiltonien H à N corps à savoir la diagonalisation numérique exacte et la méthode de Monte Carlo (MC) qui permettent de déterminer l'état fondamental et les états excités d'un système pour un petit nombre d'électrons. Pour la méthode de Monte Carlo, nous présentons une recherche bibliographique de cette méthode (MC) pour déterminer les énergies fondamentales par particule pour un système fini des électrons dans les états de Laughlin $m = \frac{1}{3}$ et $m = \frac{1}{5}$. La procédure de MC consiste à proposer un mouvement d'essai aléatoire de l'une des particules dans une nouvelle position, tout en gardant le gaz électronique bidimensionnel soumis à un champ magnétique très intense et à basse température. Pour les facteurs de remplissage de la forme $\nu = \frac{1}{m}$ (m impair), la fonction d'onde d'essai de Laughlin (3.8), cette fonction d'onde donne une excellente description de l'état fondamental des électrons pour $m = 3$ et 5 . Le hamiltonien $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$ de ce problème à N_e électrons, restreint au plus bas niveau de Landau ($n = 0$), est donné par la seule interaction coulombienne $V(r)$ [46], où \hat{K} est l'énergie cinétique considérée comme une constante. Les détails des calculs sont donnés dans le chapitre 4. Par conséquent, l'hamiltonien H est donc représenté par le seul terme de l'énergie potentielle.

En plus de la méthode de Monte Carlo, j'utiliserai la méthode de diagonalisation numérique exacte. Cette méthode consiste à diagonaliser l'hamiltonien de notre système numériquement. Dans les mesures numériques de l'EHQF, on utilise la représentation du hamiltonien dans une base, pour laquelle elle peut se réécrire en terme de déterminant de Slater. On utilise un algorithme de diagonalisation, généralement l'algorithme de Lanczos, pour obtenir l'énergie de l'état fondamental ainsi que les premiers et les seconds états excités des basses énergies. Les états de l'EHQF sont génériquement décrits par un polynôme en la position complexe z des différentes particules. Dans cette section, nous étudierons en détail la physique de l'EHQF en utilisant la décomposition de l'interaction de Coulomb de courte portée sur les pseudopotentiels de Haldane, où ils décomposent toute interaction à deux charges fractionnaires V_m en une somme de ses projections sur les secteurs de moments angulaires relatifs dans le $PBNL$ obtenus par diagonalisation numérique exacte (DNE) sur les géométries du disque et de la sphère. Comme il est déjà vu au chapitre 4, deux électrons interagissent via l'interaction coulombienne dans le vide. Cependant, dans un système solide, cette interaction est modifiée par plusieurs phénomènes (écrantage, effet du mélange des niveaux de Landau,...). Pour pouvoir étudier l'effet des interactions, il est utile d'introduire le pseudo-potential de Haldane[69].

6.2 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo (MC) tient une place spéciale en modélisation réaliste du potentiel dans l'EHQF. Cette modélisation a été utilisée pour réaliser la première simulation informatique d'un système bidimensionnel d'électrons. Elle génère de manière aléatoire un grand nombre d'échantillons d'un système bidimensionnel d'électrons afin de déterminer les énergies des états de Hall quantiques fractionnaires. Cependant une génération purement aléatoire de conformations ne permet pas de distinguer les conformations de hautes et basses énergies. Elles seront générées avec la même probabilité.

Dans la simulation de MC, on considère le calcul de la valeur d'énergie potentielle \hat{V} . Le potentiel d'interaction V_{bb} (substrat – substrat) prend une valeur précise, et sera

calculé de la manière suivante[46].

$$\frac{\langle \widehat{V}_{bb} \rangle}{N} = \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{vN}{2}} \frac{e_0^2}{l_0}. \quad (6.1)$$

Il nous reste cependant à déterminer les autres potentielles V_{ee} (électron-électron) et V_{eb} (électron – substrat). L'interaction entre les électrons d'un tel système V_{ee} , est alors donnée par la formule suivante

$$\frac{\langle \widehat{V}_{ee} \rangle}{N} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i<j}^N \frac{e_0^2}{|r_i - r_j|} \right\rangle. \quad (6.2)$$

L'énergie d'interaction \widehat{V}_{eb} (électron-substrat) définie par l'équation suivante

$$\widehat{V}_{eb} = \sum_{i=1}^N \widehat{v}_{eb}(\vec{r}_i), \quad (6.3)$$

où $\widehat{v}_{eb}(\vec{r}_i)$ est le potentiel d'interaction électron-substrat d'un seul électron en position \vec{r}_i avec le substrat dans la géométrie du disque, et suppose donc un potentiel d'interaction électron-substrat qui dépend du rapport $\frac{r_i}{R_N}$, où $r_i = |\vec{r}_i|$ est la distance entre le centre du disque et l'électron, où les N particules sont confinées dans un disque de rayon R_N exprimé comme[46]

$$\widehat{v}_{eb}(\vec{r}_i) = -\sqrt{2vN} F\left(\frac{r_i}{R_N}\right) \frac{e_0^2}{l_0}, \quad (6.4)$$

avec $F(x)$ est la fonction hypergéométrique[60, 46], dépendant de trois paramètres a, b, c , notée ${}_2F_1(a, b, c; z)$

$$F(x) = \int_0^\infty dy \frac{J_0(x, y) J_1(y)}{y} = \begin{cases} \frac{2E(x^2)}{\pi}, & x \leq 1 \\ \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{1}{x^2})}{2x}, & x \geq 1 \end{cases}. \quad (6.5)$$

Les fonctions $J_n(x)$ étant les fonctions de Bessel modifiées d'ordre n , $E(x)$ est l'intégrale elliptique complète. La fonction hypergéométrique ${}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; z)$ peut être définie pour tout $|z| < 1$, avec $F(0) = 1$ par la série, dite hypergéométrique et $F(1) = \frac{2}{\pi}$ et $F(x) \approx \frac{1}{2x}$ pour $x \gg 1$. Pour notre cas du disque ce dernier résultat n'est valable que pour un système infini. Avec la formule analytique de la fonction hypergéométrique

${}_2F_1(a, b, c; z)$, il suffit alors d'utiliser une simple méthode d'interpolation des z pour obtenir une estimation de MC des valeurs moyennes du potentiel.

Nous nous restreignons aux fonctions d'onde du niveau de Landau le plus bas, et pour $x = \frac{r_i}{R_N}$, la plupart des électrons sont situés dans la région $x \leq 1$. La valeur énergétique du potentiel d'interaction électron-substrat est calculée par la méthode de MC comme suit

$$\frac{\langle \widehat{V}_{eb} \rangle}{N} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \widehat{v}_{eb}(\vec{r}_i) \right\rangle. \quad (6.6)$$

Dans la méthode de MC , la densité de probabilité est le module au carré de la fonction d'onde représentant physiquement la densité de probabilité de trouver les N particules simultanément en un point $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ de l'espace[46]

$$\frac{|\Psi(r_1, \dots, r_i^{new} \dots z_N)|^2}{|\Psi(r_1, \dots, r_i^{old} \dots z_N)|^2} = \exp \left[m \sum_{j \neq i}^N (\ln |r_j - r_i^{new}|^2 - \ln |r_j - r_i^{old}|^2) \right] * \exp \left[-\frac{1}{2l_0^2} (|r_i^{new}|^2 - |r_i^{old}|^2) \right] \quad (6.7)$$

Dans le cas de l'EHQF, les corrélations entre électrons sont importantes. Pour cette raison il existe une paire d'électrons très fortement corrélée. On peut calculer numériquement et grâce à un algorithme de type Monte Carlo pour un nombre fini de particules, qui sont confinées dans une géométrie du disque, les énergies des états de Laughlin pour les fractions $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$.

L'énergie d'interaction coulombienne peut être exprimée par la fonction de corrélation de paire $g(r)$ comme suit[27]

$$U_m = \frac{1}{N} \frac{\langle \Psi_m | \widehat{V} | \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m | \Psi_m \rangle} = \frac{\rho_m}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e_0^2}{r} [g(r) - 1] d^2r, \quad (6.8)$$

La fonction de corrélation de paire $g(r)$ ne dépend que de la distance relative r entre

les deux particules définie par $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, et prend la forme

$$g(r) = \frac{N(N-1)}{\rho^2} \frac{\int d^2r_3 \dots d^2r_N |\Psi(r_1, \dots, z_N)|^2}{\int d^2r_1 \dots d^2r_N |\Psi(r_1, \dots, z_N)|^2}. \quad (6.9)$$

La fonction de corrélation d'un système polarisé à $\nu = 1$ est donnée par

$$g(z) = 1 - e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \quad (6.10)$$

Pour un état de Laughlin qui décrit un fluide, il n'y a pas de corrélation à longue portée dans les positions entre particules. La fonction $g(r)$ s'annule au voisinage de $r = 0$, et $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1$. On note que pour $\nu = 1/m$ et pour de petites distances

$$g(z) \simeq r^{2m}. \quad (6.11)$$

Nous avons présenté une méthode de *MC* pour calculer les énergies des états de Laughlin de l'EHQF à la limite thermodynamique qui est obtenue lorsque $N \rightarrow \infty$ et $L \rightarrow \infty$. L'énergie d'interaction $\frac{\langle \hat{V} \rangle}{N}$ de la fonction d'onde de Laughlin à $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$, est extrapolée à la limite thermodynamique en utilisant une interpolation par un polynôme à N variables, comme indiqué dans les références [42, 46]

$$\frac{\langle \hat{V} \rangle}{N} \Big|_{1/3} = (-0.4094 + \frac{0.0524}{\sqrt{N}} - \frac{0.0225}{N}) \frac{e_0^2}{l_0}, \quad (6.12)$$

et

$$\frac{\langle \hat{V} \rangle}{N} \Big|_{1/5} = (-0.3273 + \frac{0.0200}{\sqrt{N}} - \frac{0.0172}{N}) \frac{e_0^2}{l_0}. \quad (6.13)$$

La présente étude été présenté dans le chapitre 4, pour vérifier que l'état fondamental de la fonction d'onde de Laughlin pour les fractions $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$ appartenait à la même classe et possède les mêmes propriétés.

6.3 Diagonalisation numérique exacte

On utilise dans cette section un calcul de diagonalisation numérique exacte (*DNE*) qui permet de déterminer l'état fondamental du système pour un petit nombre d'électrons, afin d'étudier les propriétés universelles de l'*EHQF* et d'en déduire l'approche entre la géométrie du disque et de la sphère, et d'avoir une correspondance entre *EHQF* et *EHQE*. Cette méthode consiste à diagonaliser le hamiltonien de notre système, pour un petit nombre d'électrons, et à extraire l'état fondamental ainsi que les premiers états excités du spectre des phases de Hall à différents facteurs de remplissage. Pour réaliser cette diagonalisation numérique, il est nécessaire de trouver une base. Un système de taille $S = \pi R^2$ est représenté par une matrice de dimension finie $N \times N$, tel que N est le nombre d'électrons. L'hamiltonien du système s'écrit $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$, où \hat{K} est l'énergie cinétique et \hat{V} l'énergie d'interaction coulombienne (4.3)[36]. Dans le *PBNL*, on utilise les coordonnées complexes $z_j = x_j - iy_j$. La fonction d'onde utilisée $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ de l'équation(3.4) de N particules est donc un déterminant de Slater. Ce déterminant s'écrit sous une forme similaire à l'équation (4.2)

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_{N_e}) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_i(z_1) & \varphi_j(z_1) & \cdot & \cdot & \varphi_k(z_1) \\ \varphi_i(z_2) & \varphi_j(z_2) & \cdot & \cdot & \varphi_k(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_i(z_N) & \varphi_j(z_N) & \cdot & \cdot & \varphi_k(z_N) \end{vmatrix}. \quad (6.14)$$

Cette fonction d'onde tient compte des propriétés fondamentales d'un système d'électrons antisymétriques par échange des particules 1 et 2, $\Psi(z_1, z_2, \dots) = -\Psi(z_2, z_1, \dots)$.

C'est la représentation la plus simple du principe de Pauli, le déterminant s'annule si deux lignes sont identiques c-à-d si deux électrons sont décrits par le même spin orbital et jouent le même rôle. Ces fonctions d'onde modèles de Laughlin à $\nu = \frac{1}{m}$ et de Jain à $\nu = \frac{\nu^*}{2\nu^*s + 1}$ doivent alors être confrontées aux états fondamentaux de l'hamiltonien H réaliste qu'on peut obtenir par *DNE*. Les déterminants de Slater pour les fermions correspondants à les fonctions propres de \hat{H} s'expriment alors simplement sous la forme d'un produit $|\varphi_i(z_1)\varphi_j(z_2)\dots\varphi_k(z_N)|$.

Le produit de Slater introduit la corrélation entre les électrons de même spin. Alors que l'énergie propre E associée à Ψ est simplement la somme $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_k$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \widehat{H} | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \widehat{K} + \widehat{V} | \Psi \rangle \\ &= E_c + \langle \Psi | \widehat{V} | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (6.15)$$

où E_c est l'énergie cinétique considérée comme une constante. On a vu précédemment d'après l'équation(4.13) que \widehat{V} est la somme des trois potentiels.

Nous traiterons uniquement le cas des fermions, on va diagonaliser \widehat{V} numériquement et pour une formulation plus lisible, il est utile de réécrire le hamiltonien de l'équation(6.15) en seconde quantification dans la base de déterminant de Slater comprenant au moins un électron dans les niveaux de Landau supérieurs. Soit c_m et c_m^+ les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état de l'espace à un corps indicé par m , fermioniques selon le cas considéré.

6.3.1 Interaction électron–électron

On peut également écrire le potentiel d'interaction V_{ee} (électron–électron) dans le *PBNL* sous une forme similaire à l'équation(4.11), mais dans le formalisme de la seconde quantification

$$V_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=0}^M W_{m_1, m_2, m_3, m_4} C_{m_1}^+ C_{m_2}^+ C_{m_3} C_{m_4}. \quad (6.16)$$

On peut alors montrer que la matrice de dimension $m \times m$ obtenue après projection, où les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice sont représentés exactement. Cependant, les valeurs propres V_m d'une matrice V de dimension $m \times m$ obtenue après projection est équivalente à résoudre l'équation caractéristique $\text{Det}[V - V_m I_m]$, où I_m est la matrice identité de taille $m \times m$.

Dans cette représentation, l'interaction coulombienne V_{ee} qui dépend seulement de la

distance entre les particules peut être représentée sous la forme[66, 67, 68]

$$V_{ee} = \sum_{i < j=1}^N \sum_{m=0}^M V_m \hat{P}_{ij}^{(m)}, \quad (6.17)$$

$\hat{P}_{ij}^{(m)}$ est un projecteur sur tous les moments angulaires relatifs m défini par

$$\hat{P}_{ij}^{(m)} = |n, m \rangle_{ij} \langle n, m|_{ij}, \quad (6.18)$$

et les V_m sont les valeurs propres du système appelés les coefficients de pseudopotentiel [69]. Pour l'interaction coulombienne impliquant seulement deux particules à la fois, où les nombres m_1, m_2, m_4, m_3 sont des moments cinétiques, il est commode d'exprimer l'élément W_{m_1, m_2, m_3, m_4} de matrice sous la forme suivante[65, 57]

$$\begin{aligned} W_{m_1, m_2, m_3, m_4} &= \int d^2r \int d^2r' \Psi_{m_1}^*(r) \Psi_{m_2}^*(r') V(|r - r'|) \Psi_{m_3}(r') \Psi_{m_4}(r) \\ &\equiv \langle m_1, m_2 | V | m_3, m_4 \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Cette équation (6.19) satisfait à n'importe quel potentiel isotrope et aux interactions conservant le moment angulaire $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ [65].

La seule forme de la fonction d'onde pour N électrons dans le $PBNL$ qui satisfait les critères de la symétrie ou d'antisymétrie du Polynôme $F(z_1, \dots, z_N)$ est

$$\begin{aligned} \Psi_{0,m}(z, \bar{z}) &= N_{0,m} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi 2^m m!}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_0^2}}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Le calcul des pseudopotentiels V_m associés à l'interaction coulombienne dépend du $PBNL$ considéré

$$V(r) = \frac{1}{r} \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon}. \quad (6.21)$$

De manière standard, l'hamiltonien a été adimensionné en posant $\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon l_0} = 1$.

Le potentiel de Coulomb projeté dans les $PBNL$ s'obtient par intégration dans la représentation position complexe en utilisant les coordonnées du centre de masse $Z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

et relative $z = z_1 - z_2$, les détails des calculs qui permettent de déterminer ce potentiel sont donnés dans l'appendice (A2).

$$\begin{aligned}
\left\langle 0, m \left| \frac{1}{r} \right| 0, m \right\rangle &= \int_{\mathbb{C}} dz \Psi^*(z) \frac{1}{|z|} \Psi(z) \\
&= \frac{1}{2^{m+1} \pi m!} \int_{\mathbb{C}} dz |z|^{2m-1} e^{-|z|^2/2} \\
&= \frac{1}{2^m m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-r^2/2} \\
&= \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{2m!}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

L'interaction de Coulomb $V^0(r)$ projetée dans le *PBNL* s'obtient à partir des pseudopotentiels [70]

$$\begin{aligned}
V^{(0)}(r) &= \sum_m \int dZ |\Psi_{0,m}(z, Z)|^2 V_m \\
&= \sum_m V_m \frac{r^{2m}}{2\pi 2^m m! l_0} e^{-\frac{|z|^2}{2l_0^2}}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

En cas d'interaction coulombienne dans le *PBNL*, les coefficients de pseudopotentiel $V^0(r) \equiv V_{ee}$, alors que les énergies d'interaction V_{ee} sont données par

$$V_{ee} = \sum_{i < j=1}^{N_e} \sum_{m=0}^L \frac{(-1)^m \Gamma(m + \frac{1}{2})}{2^{m+1} (m!)^2} (z_i - z_j)^m \left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial}{\partial z_j} \right)^m \frac{e_0^2}{l_0}, \tag{6.24}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Pour nos calculs de diagonalisation exacte, nous utilisons d'abord l'interaction coulombienne V_{ee} de l'équation (6.24) dont l'état de Laughlin avec la base constituée par antisymétriques des fonctions d'onde correspondant à (3.4) ou de Jain avec la base constituée par l'équation (5.2), avec un nombre N_e donné des particules et du moment angulaire $L = 3N_e(N_e - 1)/2$ pour la géométrie du disque.

6.3.2 Interaction substrat–substrat

Le potentiel V_{bb} est une constante et n'affecte pas le résultat. L'énergie d'interaction V_{bb} (substrat–substrat) s'écrit sous la forme de l'équation(4.30) dans la géométrie du

disque. Ainsi, par ce raisonnement, le potentiel d'interaction V_{bb} dans la géométrie de sphère, peuvent se calculer analytiquement par la méthode de Jain[36], pour un grand nombre d'électrons

$$V_{bb} = \frac{N_e^2 e_0^2}{2\sqrt{S} l_0}, \quad (6.25)$$

où, S est le moment cinétique total égal à $\frac{1}{2}mN(N-1)$.

6.3.3 Interaction électron–substrat

L'énergie d'interaction V_{eb} (électron–substrat) s'écrit sous la forme de l'équation(4.5) comme suit

$$V_{eb} = \sum_m \langle m | v_{eb} | m \rangle C_m^+ C_m. \quad (6.26)$$

On peut décomposer le potentiel d'interaction V_{eb} dans le *PBNL* sur le secteur de moment cinétique relatif m

$$\langle m | v_{eb} | m \rangle = -\rho \int d^2 r_1 \int_{S_N} d^2 r \frac{|\Psi_m(r_1)|^2}{\sqrt{|r_i - r|^2 + d^2}}, \quad (6.27)$$

avec la densité d'états électroniques $\rho = \frac{1}{4\pi S l^2}$.

Il a été constaté que le changement de distance d peut provoquer une reconstruction de bord[71, 72]. Pour le besoin de notre étude, on considère $d = 0$. Alors, la plus grande dimension entre les secteurs de différents moments cinétiques S , où V_{eb} est approximativement égale à $-2V_{bb}$ dans la limite des grands N

$$V_{eb} = -\frac{N_e^2 e_0^2}{\sqrt{S} l_0}. \quad (6.28)$$

6.4 Résultats numériques pour $\nu = \frac{2}{5}$

Dans cette section, nous présentons les énergies obtenues par un calcul de *DNE* à $\nu = \frac{2}{5}$ d'un système $N = 4$ et 6 particules. Les valeurs numériques ont été réalisées par le

package Mathematica avec une précision jusqu'au six chiffres après la virgule. Les énergies caractéristiques de cette fraction sont résumées dans le tableau 6.1

N	État fondamental		État excité	
	<i>DNE</i>	<i>FC</i> [61, 58]	<i>DNE</i>	<i>FC</i> [61, 58]
4	0.421445	0.421628	0.446281	0.446344
6	0.579993	0.580328	0.594695	0.594707

TAB. 6.1 – Énergie par particule ε_{ee} de l'état fondamental et l'état excité à $\nu = 2/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{t_0}$.

L'énergie d'interaction par particule, en unités de $\frac{e^2}{l}$, de notre résultat obtenu par *DNE* est en accord avec les résultats obtenus par le modèle des fermions composites (*FC*).

6.5 Résultats numériques pour $\nu = \frac{5}{2}$

6.5.1 État Pfaffien de Moore et Read à 5/2

En 1987, Willett et ses collaborateurs ont montré l'observation d'un état de l'EHQF à $\nu = 5/2$ dans le second *NL* à une température de 100 mK[89]. Un travail théorique approfondi a indiqué que l'état $\nu = 5/2$ est probablement décrit par la fonction d'onde "Pfaffien" de Moore-Read (*MR*) dans le second niveau de Landau[3, 90]. Par une méthode semblable à celle utilisée dans le cas de Laughlin, nous obtenons l'état fondamental de l'interaction de Coulomb pour un système de $N = 4$ et 6 particules. Cette méthode basée sur le déterminant Pfaffien me permet alors de déterminer précisément l'état fondamental du système à 5/2. Par conséquent, le déterminant Pfaffien s'exprime de façon polynomiale à l'aide des coefficients d'une matrice antisymétrique de taille $N \times N$ avec N pair. Ce polynôme est nul si la matrice était de taille impaire. Le Pfaffien d'une matrice

antisymétrique A est noté $\mathbf{Pf}(A)$ et s'écrit

$$\mathbf{Pf}(A) = \mathbf{Pf} \begin{bmatrix} 0 & X_{12} & X_{13} & X_{14} & \cdot & \cdot & X_{1N} \\ X_{21} & 0 & X_{23} & X_{24} & \cdot & \cdot & X_{2N} \\ X_{31} & X_{32} & 0 & X_{34} & \cdot & \cdot & X_{3N} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & 0 & \cdot & \cdot & X_{4N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ X_{N1} & X_{N2} & X_{N3} & X_{N4} & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

6.5.2 Appariement triplet des fermions composites

En particulier, la fonction d'onde de Bardeen-Cooper-Schrieffer (*BCS*), qui est un produit anti-symétrique de paires d'électrons, a été récemment utilisée pour la description du gaz d'électrons dans les supraconducteurs classiques, ou d'un système de fermions en interaction faiblement attractive[92], ainsi que des liquides quantiques[93, 94]. On considère les particules $1, 2, \dots, N/2$ de spin up $|\uparrow\rangle$ et $N/2, \dots, N$ de spin down $|\downarrow\rangle$ dans un état singulet[3]. Les *FC* appariés sont décrits par la fonction d'onde

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \mathbf{Pf}[\varphi(z_i - z_j)] \prod_{i < j=1}^N (z_i - z_j)^{2p}. \quad (6.30)$$

La fonction d'onde de *BCS* décrivant des électrons complètement polarisés s'écrit

$$\Psi_{BCS} = [\phi(z_1 - z_2)\phi(z_3 - z_4)\dots\phi(z_{N-1} - z_N)]. \quad (6.31)$$

Une première fonction d'onde singulet de spin a été proposée par Haldane & Rezayi[96] basée sur la fonction d'onde de Laughlin (4.1), puis par Yoshioka, MacDonald et Girvin[95]. Ils ont considéré un état apparié dans le secteur singulet. On doit adjoindre le spin singulet $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_1$, la fonction d'onde s'écrit[97, 98, 19] sous la forme

$$\Psi_{HR}(z_1, \dots, z_N) = \mathbf{Pf} \left[\frac{|\uparrow\rangle_i |\downarrow\rangle_j - |\uparrow\rangle_j |\downarrow\rangle_i}{(z_i - z_j)^2} \right] \prod_{i < j=1}^N (z_i - z_j)^{2p}. \quad (6.32)$$

L'état apparié des électrons de l'effet Hall quantique fractionnaire qui fut introduit par Moore et Read s'écrit[3, 97, 19]

$$\Psi_{MR}(z_1, \dots, z_N) = \mathbf{Pf} \left[\frac{|\uparrow\rangle_i |\uparrow\rangle_j}{(z_i - z_j)} \right] \prod_{i < j=1}^N (z_i - z_j)^{2p}. \quad (6.33)$$

6.5.3 État Pfaffien dans la géométrie du disque

Dans cette section, nous reproduisons les calculs dans le second NL , lesquels sont remportés par l'état Pfaffien. Comme mentionné précédemment, dans les hétérojonctions GaAs/AlGaAs, les fractions ont été observées rien que dans le plus bas niveau de Landau et à des facteurs de remplissage dont le dénominateur est impair. Willett et al.[89], ont mesuré un effet Hall au remplissage $\nu = 5/2 = 2 + 1/2$ représenté sur la figure 6.1, où cette phase ne peut s'expliquer au moyen de la théorie des fermions composites. Alors cet état décrit par la fonction d'onde "Pfaffien" de Moore-Read.

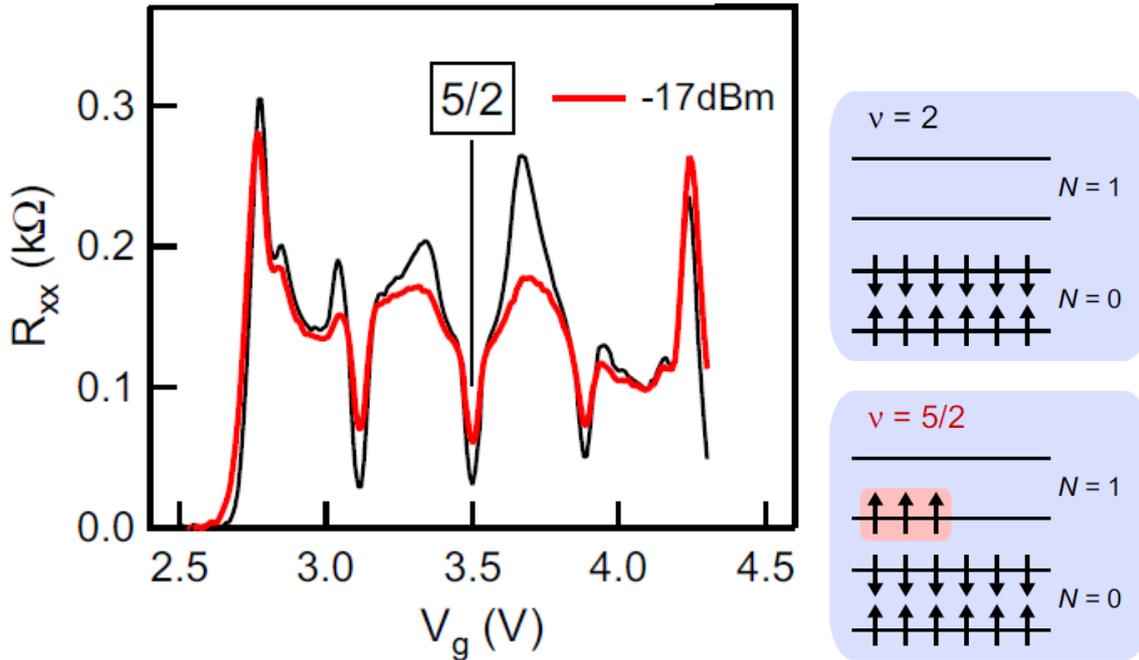


FIG. 6.1 – Schéma d'un état fondamental pour l'EHQF à $\nu = 5/2$ [99].

La fonction d'onde de l'état Pfaffien de Moore et Read est décrite par un état apparié

de fermions composites dans la géométrie du disque sous la forme

$$\Psi_{\mathbf{MR}}(z_1, \dots, z_N) = \mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \prod_{i < j=1}^N (z_i - z_j)^2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2\right). \quad (6.34)$$

Le facteur gaussien $\exp(-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2)$ peut être négligé par la méthode de diagonalisation dans les expressions de fonctions d'onde d'EHQF. Le facteur $\prod_{i < j=1}^N (z_i - z_j)^2$ représente l'attachement de 2 quantum de flux ($2\phi_0$) à chaque électron aux positions des particules z_i , et $\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)$ représente un appariement en ondes P d'électrons, défini par

$$\mathbf{Pf}(A) = \frac{1}{2^{N/2}(N/2)!} \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} A_{\sigma(1)\sigma(2)} A_{\sigma(3)\sigma(4)} \dots A_{\sigma(N-1)\sigma(N)}, \quad (6.35)$$

où la somme parcourt toutes les permutations σ des N électrons, ϵ_{σ} est la signature de σ permutation. Il est instructif de développer le Pfaffien $\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)$

$$\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \dots \frac{1}{z_{N-1} - z_N} + \epsilon_{\sigma}. \quad (6.36)$$

L'observation de l'EHQF à $\nu = 5/2$ est montrée sur la figure 6.2.

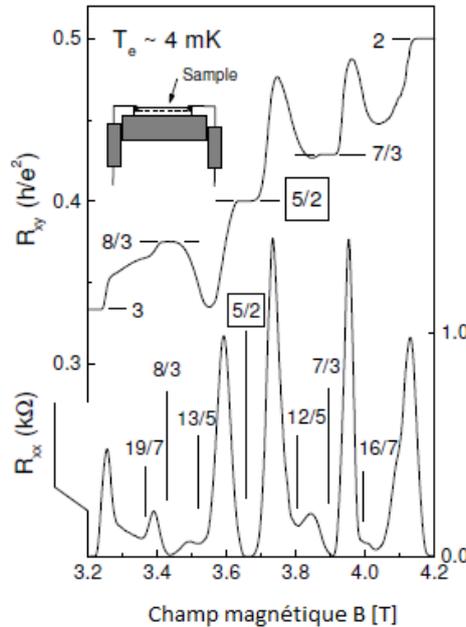


FIG. 6.2 – EHQF à la fraction $\nu = 5/2$ [91].

Pour un système d'électrons polarisés en spin, la fonction d'onde peut être interprétée comme un appariement en ondes P de fermions composites est formée comme un produit antisymétrisé d'orbitales de paires $X(i, j) = -X(j, i)$ [93]. Le carré du Pfaffien est lié au déterminant d'une matrice antisymétrique, défini par

$$\{\mathbf{Pf}[X(i, j)]\}^2 = \det[X(i, j)]. \quad (6.37)$$

Comme dans les cas de Laughlin et celle de Jain, plus de 50 fractions ont été observées rien que dans le plus bas niveau de Landau. Après Pfaffien, d'autres auteurs ont proposé d'autres fonctions d'onde permettant d'expliquer certains plateaux de conductance. Cependant, comme il fut noté par W. Pan et ses collaborateurs[100], de nombreux plateaux dans la résistance de Hall à d'autres remplissages ont été mesurés, comme les fractions $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{2}$ et $\frac{3}{2}$ [101] qui sont montrées sur la figure 6.3.

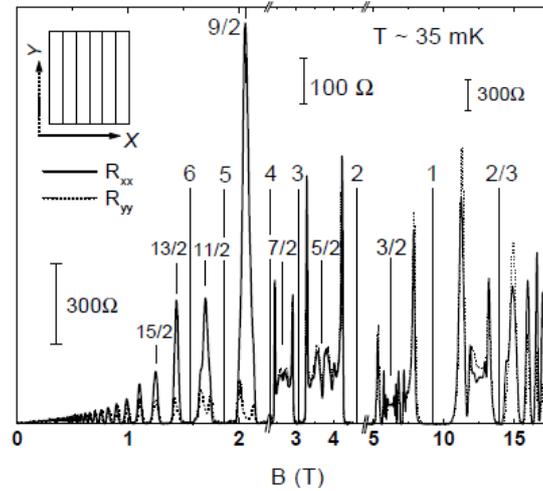


FIG. 6.3 – EHQF à la fraction $\nu = 11/2, 9/2, 7/2$ et $5/2$ [100].

6.5.4 Méthode de Moore-Read pour 4 électrons

On introduit pour l'instant l'énergie d'interaction par particule ε_{ee} (électron-électron) de celle de l'état fondamental de l'interaction de Coulomb à $\frac{5}{2}$, pour un système de $N_e = 4$ particules. La fonction d'onde de MR de l'équation 6.34, avec $z_j = r_j e^{-i\varphi_j}$ permet

de décrire la phase de Hall apparaissant dans le second niveau de Landau à $\frac{5}{2}$. Nous déterminons d'abord le facteur $\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)$ dans le cas de $N_e = 4$ particules.

$$\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \mathbf{Pf} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1 - z_2} & \frac{1}{z_1 - z_3} & \frac{1}{z_1 - z_4} \\ \frac{-1}{z_1 - z_2} & 0 & \frac{1}{z_2 - z_3} & \frac{1}{z_2 - z_4} \\ \frac{-1}{z_1 - z_3} & \frac{-1}{z_2 - z_3} & 0 & \frac{1}{z_3 - z_4} \\ \frac{-1}{z_1 - z_4} & \frac{-1}{z_2 - z_4} & \frac{-1}{z_3 - z_4} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

ce qui donne

$$\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} - \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_2 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_3}. \quad (6.39)$$

La fonction d'onde de MR peut être calculée explicitement comme

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{MR}}(z_1, \dots, z_4) &= \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} - \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_2 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_3} \right) \prod_{i < j=1}^4 (z_i - z_j)^2 * \\ &\exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |z_i|^2\right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Le potentiel de Coulomb projeté dans les $PBNL$ dans la géométrie du disque est donné par

$$\varepsilon_{ee} = \frac{(N_e - 1)}{2} \frac{\int d^2 r_1 \cdots d^2 r_{N_e} \frac{e_0^2}{|r_1 - r_2|} |\Psi_{MR}(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}{\int d^2 r_1 \cdots d^2 r_{N_e} |\Psi_{MR}(r_1, \dots, r_{N_e})|^2}, \quad (6.41)$$

L'énergie d'interaction par particule ε_{ee} de l'état Pfaffien de MR à $\nu = 5/2$ pour un système de $N_e = 4$ est égale à $0.453495 \frac{e_0^2}{l_0}$.

6.5.5 Méthode de Moore-Read pour 6 électrons

L'énergie d'interaction par particule ε_{ee} de l'état fondamental de l'interaction de Coulomb obtenu numériquement pour un système de $N_e = 6$ particules, s'écrit de la même manière que dans le cas de 4 particules. On utilise la même fonction d'onde de MR de l'équation 6.34. Nous déterminons d'abord le facteur $\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right)$ dans le cas de $N_e = 6$

particules.

$$\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \mathbf{Pf} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_1 - z_2} & \frac{1}{z_1 - z_3} & \frac{1}{z_1 - z_4} & \frac{1}{z_1 - z_5} & \frac{1}{z_1 - z_6} \\ \frac{-1}{z_1 - z_2} & 0 & \frac{1}{z_2 - z_3} & \frac{1}{z_2 - z_4} & \frac{1}{z_2 - z_5} & \frac{1}{z_2 - z_6} \\ \frac{-1}{z_1 - z_3} & \frac{-1}{z_2 - z_3} & 0 & \frac{1}{z_3 - z_4} & \frac{1}{z_3 - z_5} & \frac{1}{z_3 - z_6} \\ \frac{-1}{z_1 - z_4} & \frac{-1}{z_2 - z_4} & \frac{-1}{z_3 - z_4} & 0 & \frac{1}{z_4 - z_5} & \frac{1}{z_4 - z_6} \\ \frac{-1}{z_1 - z_5} & \frac{-1}{z_2 - z_5} & \frac{-1}{z_3 - z_5} & \frac{-1}{z_4 - z_5} & 0 & \frac{1}{z_5 - z_6} \\ \frac{-1}{z_1 - z_6} & \frac{-1}{z_2 - z_6} & \frac{-1}{z_3 - z_6} & \frac{-1}{z_4 - z_6} & \frac{-1}{z_5 - z_6} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

ce qui donne

$$\mathbf{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \frac{1}{z_5 - z_6} - \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_2 - z_4} \frac{1}{z_5 - z_6} + \dots - \frac{1}{z_3 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_6} \frac{1}{z_1 - z_5}. \quad (6.43)$$

La fonction d'onde de MR peut être calculée explicitement

$$\Psi_{\mathbf{MR}}(z_1, \dots, z_6) = \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} \frac{1}{z_5 - z_6} - \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_2 - z_4} \frac{1}{z_5 - z_6} + \dots - \frac{1}{z_3 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_6} \frac{1}{z_1 - z_5} \right) \prod_{i < j=1}^6 (z_i - z_j)^2 \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 |z_i|^2\right) \quad (6.44)$$

Le potentiel de Coulomb projeté dans les $PBNL$ dans la géométrie du disque est donné par l'équation 6.41. L'énergie d'interaction par particule ε_{ee} de l'état Pfaffien de MR à $\nu = 5/2$ pour un système de $N_e = 6$ est égale à $0.651591 \frac{e_0^2}{l_0}$.

6.6 Électrons sur la sphère et monopole magnétique

Dans la géométrie sphérique, les électrons se déplacent sur la surface d'une sphère soumise à un champ magnétique perpendiculaire \vec{B} . On considère donc un monopôle magnétique situé au centre d'une sphère de rayon R . Ce système est traversé de N_ϕ quanta de flux magnétique sur la sphère avec un nombre de quanta de flux N_ϕ

$$B = \frac{\hbar S}{eR^2}. \quad (6.45)$$

Le flux à travers la surface de la sphère est donné par $N_\phi \phi_0$, tel que N_ϕ est le nombre de quanta de flux et $\phi_0 = \frac{h}{e}$ le quantum de flux, produit par le potentiel vecteur le plus pratique \vec{A} dans cette géométrie est introduite par Haldane[69, 73]

$$\mathbf{A} = \frac{-\hbar S}{eR} \cot(\theta) \hat{\phi}, \quad (6.46)$$

avec S est un entier ou demi-entier.

Pour étudier l'effet Hall quantique on utilise la distance de corde à la place de la distance d'arc. La distance de corde est simplement reliée aux coordonnées spinorielles qui sont adaptées à la quantification de Landau sur la sphère. Dans cette étude on va établir l'expression de la distance de corde entre deux points en termes de leurs coordonnées spinorielles.

On va prendre une sphère de rayon R , les coordonnées sphériques s'écrivant

$$\mathbf{r} = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta). \quad (6.47)$$

Pour simplifier les calculs, on va prendre dans un premier temps le rayon de la sphère égal à $R = 1$.

Soient r_1 et r_2 deux points sur la sphère, on a

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = \|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_2\|^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2. \quad (6.48)$$

Donc

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos \theta_1 \cos \theta_2. \quad (6.49)$$

Alors

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = 2(1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos \theta_1 \cos \theta_2). \quad (6.50)$$

À partir de cette dernière équation(6.50), on peut obtenir l'identification suivante

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 = 4|u_1 v_2 - v_1 u_2|^2, \quad (6.51)$$

avec (u, v) sont les coordonnées spinorielles définies par Haldane[69]

$$u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad v = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}}. \quad (6.52)$$

En utilisant les expressions de u et v , on obtient

$$|u_1v_2 - v_1u_2| = \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right). \quad (6.53)$$

Les fonctions d'onde $\Psi_m(r)$ dans le *PBNL* sont les orbitales à un corps données par

$$\Psi_m(r) = \sqrt{\frac{(N_\phi + 1)!}{4\pi m!(N_\phi - m)!}} [\cos(\theta/2)e^{i\varphi/2}]^m [\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2}]^{N_\phi - m}. \quad (6.54)$$

La longueur magnétique sur la sphere $l_B = \frac{R}{\sqrt{S}}$.

Dans le cas fermionique, les facteurs de Jastrow omniprésents dans les fonctions d'essai de l'équation (6.54) du système de l'EHQF s'écrit seulement pour m impair[52, 69, 74].

L'état fondamental exact et unique de Laughlin sur la sphère s'écrit

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \equiv \prod_{i < j} (u_i v_j - v_i u_j)^m. \quad (6.55)$$

Cette fonction d'onde décrit un état au remplissage $\nu = \frac{1}{m}$. Pour une particule donnée, la puissance la plus élevée est $m(N - 1)$ et nous avons $S = \frac{1}{2}m(N - 1)$. Dans l'état de Laughlin, tous les électrons sont sur une sphère de rayon $R = \sqrt{S}l_B$. Le potentiel d'interaction V_{bb} (substrat-substrat) de l'équation(6.25) et V_{eb} (électron-substrat) de l'équation(6.28) dans la géométrie de sphère, peuvent se calculer analytiquement par la méthode de Jain[36]. Dans la limite des grands nombres des particules N , le système est suffisamment grand de sorte que la plupart des électrons doivent se retrouver à l'intérieur du disque, alors $V_{eb} = -2V_{bb}$. Avec la densité d'états électroniques $\rho = \frac{1}{4\pi S l^2}$.

6.7 Approche entre le disque et la sphère

La fonction d'onde de l'EHQF sur la sphère a été proposée[69, 36, 75, 76] dans le plus bas niveau de Landau, généralement cette fonction d'onde s'écrit pour un électron

sous la forme suivante

$$\Psi(\theta, \varphi) = u^{N_\phi+m} v^{N_\phi-m}. \quad (6.56)$$

Dans la géométrie sphérique, les différents moments angulaires dûs à la présence du monopole magnétique, leurs valeurs permises sont m, l , où $l = |S|, |S| + 1, \dots$ et $m = -l, -l + 1, \dots, l$ et $N_\phi = 2S$.

Les variables spinorielles de l'équation (6.52) ne sont pas indépendantes parce que

$$|u|^2 + |v|^2 = 1, \quad z = 2R \frac{u}{v}. \quad (6.57)$$

Les états propres d'une particule dans le $PBNL$, nommés harmoniques monopolaires[77] comme l'équation(6.56) sont une généralisation des harmoniques sphériques pour $S = 0$

$$\Psi(\theta, \varphi) = u^m v^{-m}. \quad (6.58)$$

À partir de l'équation (6.57) nous obtenons

$$|v|^2 \left(1 + \frac{|u|^2}{|v|^2}\right) = 1 \Rightarrow |v| = \frac{1}{\left(1 + \frac{|z|^2}{4R^2}\right)^{1/2}}. \quad (6.59)$$

En utilisant $v = |v| e^{-i\varphi/2}$ nous obtenons

$$v^{N_\phi} = \frac{e^{-i\varphi N_\phi/2}}{\left(1 + \frac{|z|^2}{4R^2}\right)^{N_\phi/2}}. \quad (6.60)$$

Pour le $PBNL$, la dégénérescence $S = N_\phi/2 + 1$ [36]. La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par[78, 79], et les détails des calculs sont donnés dans la référence[36]

$$\Psi(\theta, \varphi) = \frac{z^m}{\left(1 + \frac{|z|^2}{4R^2}\right)^{1+N_\phi/2}}. \quad (6.61)$$

Nous obtenons la fonction d'onde de Laughlin sur la sphère par[80, 78]

$$\Psi_m = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^m \prod_k \frac{1}{\left(1 + \frac{|z_k|^2}{4R^2}\right)^{1+N_\phi/2}}. \quad (6.62)$$

L'interaction coulombien entre les électrons a une expression simple en termes de distance $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ de corde

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{2R |uv' - vu'|}. \quad (6.63)$$

Plusieurs études numériques ont été abordées dans les références[1, 42, 46, 49, 50], en utilisant la géométrie du disque. Les énergies de l'interaction coulombienne dans le *PBNL* sont données sur le tableau 4.1 pour les différentes tailles en fonction de N_e .

Les dérivations mathématiques aussi bien que le calcul de l'énergie d'interaction par la méthode de diagonalisation exacte[47, 81] nous permettent de déterminer l'énergie de l'état fondamental et les états excités d'un système de $N_e = 7$ électrons.

Les pseudopotentiels de l'interaction coulombienne dans le *PBNL* s'obtiennent par *DNE* sur la géométrie de sphère par *Y.Wu* et *Y.Zhang*, et sont donnés dans le tableau 6.2. On utilise la méthode de diagonalisation exacte sur la géométrie de la sphère pour déterminer l'énergie des états fondamentaux dans l'état de Laughlin $\frac{1}{3}$ [36, 82]. Ces énergies sont données dans le tableau 6.2. Ainsi S est lié au nombre des particules N_e et au facteur de remplissage ν , pour l'état de Laughlin $\nu = 1/3$, et $S = 1.5 * (N_e - 1)$ on obtient

N	ε_{ee}	ε_{bb}	ε_{eb}	ε	$\varepsilon(2/5)$ [61]
4	0.468005	0.942809	-1.885618	-0.474804	-0.550079
5	0.561183	1.020621	-2.041241	-0.459438	-
6	0.645485	1.095445	-2.190890	-0.449960	-0.500339
7	0.723173	1.166667	-2.333333	-0.443494	-
8	0.795325	1.23443	-2.46885	-0.439102	-0.480216
9	0.863444	1.29904	-2.59808	-0.435594	-
10	0.927990	1.36083	-2.72166	-0.432838	-0.469342
11	0.989473	1.42009	-2.84019	-0.430621	-

TAB. 6.2 – État fondamental à $\nu = 1/3$ et à $\nu = 2/5$, en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$, dans la géométrie de la sphère.

Pour la géométrie sphérique, l'état fondamental exact est calculé numériquement pour une interaction des pseudopotentiels de Coulomb, où la longueur magnétique l_B

comme unité de longueur dans tout le calcul. Nous pouvons obtenir le rayon de la sphère $R = \sqrt{S}l_B$, où S est le moment cinétique total. Nous présentons les résultats numériques pour l'énergie par particules $\varepsilon = \frac{V}{N_e}$ pour la fonction d'onde (3.4) basés sur les deux différentes définitions de l'interaction de coulomb sur la géométrie de la sphère et du disque.

Le schéma de cette mesure est exposé dans la figure 6.4, nous avons présenté l'énergie d'interaction par particules $\varepsilon = \frac{V}{N_e}$ en fonction du N_e . Pour des systèmes jusqu' à $N_e = 144$ électrons, nous montrons que l'énergie d'interaction par particule pour l'état de Laughlin $\nu = 1/3$ entre la géométrie du disque et de la sphère se rapproche d'une valeur bien définie de R . Pour notre cas $R = 14.12 l_B$.

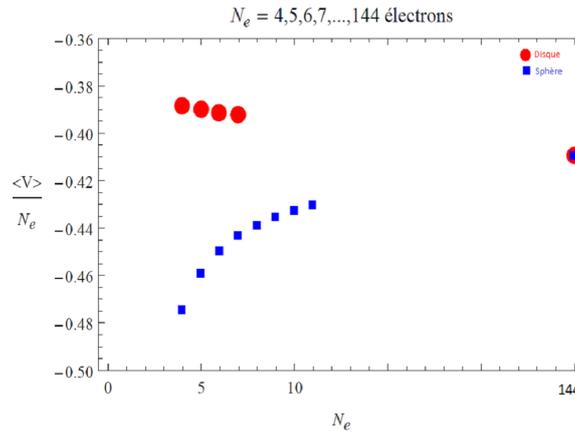


FIG. 6.4 – Approche entre la géométrie du disque et la géométrie de la sphère à $\nu=1/3$.

6.8 Correspondance entre EHQF-EHQE

Dans cette partie, nous étudions les propriétés d'un gaz électronique bidimensionnel soumis à un champ magnétique intense. Les effets des interactions entre les électrons du gaz bidimensionnel sont à l'origine de l'EHQF qui ont été complètement étudiés dans l'état fondamental et l'état excité. Contrairement au cas de l'EHQE, la compréhension de l'EHQF nécessite la prise en compte des interactions. Pour un problème à N particules interagissant au travers d'un potentiel de Coulomb projeté dans le plus bas niveau de Landau (*PBNL*) est obtenu à partir des potentiels d'interaction électron-électron. Nous

avons étudié l'énergie d'interaction par particule entre la fonction d'onde de Laughlin et les FC pour les états excités pour plusieurs systèmes à $\nu = \frac{1}{3}$ et la correspondance entre l'EHQF et l'EHQE.

6.9 Énergies de $N - 1$ quasiélectrons

Dans la cette section, nous décrivons les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant $N - 1$ quasiparticules en régime d'EHQF.

6.9.1 Fonction d'onde de Laughlin pour $N - 1$ quasiélectrons

La fonction d'onde $\Psi_L^{(N-1)qp}$ correspondant aux états de $N - 1$ quasiparticules de Laughlin au facteur remplissage $\nu = \frac{1}{3}$.

$$\Psi_L^{(N-1)qp}(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4}\right) \prod_l \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \dots \left(2\frac{\partial}{\partial z_l}\right) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^3. \quad (6.64)$$

Ceci peut être physiquement compris comme la création de $N - 1$ quasiparticules à l'origine.

6.9.2 L'état compact $[1, 1, \dots, 1]$

Dans cette sous-section nous présentons seulement une conséquence de la théorie de FC de Jain pour les quasiparticules dans l'état d'occupation $[1, 1, \dots, 1]$ s'écris[57, 83, 84]

$$\Psi_{FC}^{[1,1,\dots,1]} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^2 \begin{vmatrix} (\bar{z}_1)^{N_e-1} & (\bar{z}_2)^{N_e-1} & \cdot & \cdot & (\bar{z}_{N_e})^{N_e-1} \\ (\bar{z}_1)^{N_e-2} & (\bar{z}_2)^{N_e-2} & \cdot & \cdot & (\bar{z}_{N_e})^{N_e-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\bar{z}_1)^2 & (\bar{z}_2)^2 & \cdot & \cdot & (\bar{z}_{N_e})^2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdot & \cdot & \bar{z}_{N_e} \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}^* \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right). \quad (6.65)$$

Nous avons étudié les énergies par particule de Laughlin et de FC pour les états excités pour plusieurs systèmes à $\nu = 1/3$ et la correspondance entre le $EHQF$ et l' $EHQE$ (voir figure 6.5). Pour un système de $N_e = 7$ et qui contient l'énergie de $N - 1$ quasi-particules dans la géométrie du disque et au facteur de remplissage $\nu = 1/3$, les états de Laughlin correspondent au l'état d'occupation $[1, 1, \dots, 1]$ de Jain. Plusieurs études numériques [1, 42, 46, 49, 50, 81] ont utilisé la géométrie du disque. J'ai utilisé le logiciel Mathematica pour calculer les différentes dérivations mathématiques pour calculer l'énergie d'interaction coulombienne par l'intermédiaire de la diagonalisation numérique exacte (DNE).

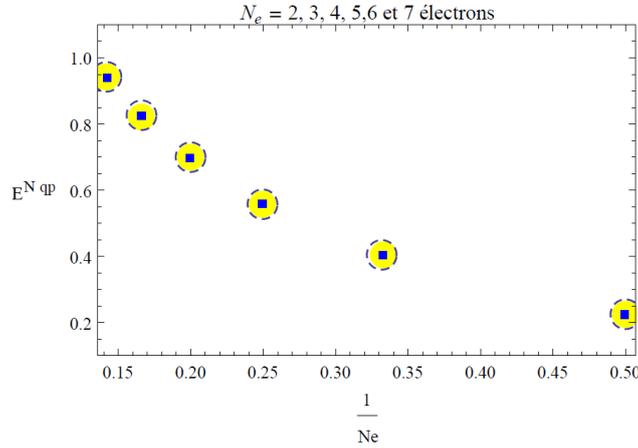


FIG. 6.5 – Énergies de $N-1$ quasiparticules $\mathbb{E}^{(N-1)qp}$ pour $N_e = 2$ à 7 particules dans la géométrie du disque à $\nu=1/3$. Les disques colorés en jaune représentent les états de Laughlin Ψ_L^{Nqp} . Les rectangles en bleu représentent les états de Jain $\Psi_{CF}^{[1,1,\dots,1]}$. Les anneaux en pointillé représentent les états de l'EHQE[88].

Les énergies caractéristiques de la fraction $1/3$ trouvées par la diagonalisation sont les mêmes avec celle trouvées par la méthode analytique présentée dans le tableau 4.1, ainsi que les énergies de la fraction $1/5$ du tableau 4.2. L'énergie correspondante aux états de $N - 1$ quasiparticules de Laughlin au facteur remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ (figure 6.5) par diagonalisation numérique exacte est identique à celle des états de Jain d'état d'occupation $[1, 1, \dots, 1]$. La figure 6.5 montre les énergies de $N - 1$ quasiparticules pour $N_e = 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 particules dans la géométrie du disque à $\nu = 1/3$ et nous voyons donc que l'énergie de

l'EHQF est égale à l'énergie de l'EHQE. Notons que cette correspondance nécessite un état d'occupation défini par $[N_0, N_1, \dots, N_6]$, où chaque FC occupe un niveau de Landau [83, 84].

La figure 6.6 montre les énergies de $N - 1$ quasiparticules pour $N_e = 7$ particules dans la géométrie du disque à $\nu = 1/3$. Cette énergie est augmentée progressivement de chaque extension d'excitation jusqu'à atteindre l'énergie d'interaction de l'EHQE qui est représentée par l'anneau en pointillé. Les expressions de la diagonalisation numérique exacte (DNE) pour l'énergie d'interaction de Coulomb de l'EHQF dans la géométrie du disque aux facteurs remplissages $1/3$ approchent à l'énergie d'interaction de l'EHQE. Dans ce cas, les énergies de $N - 1$ quasiparticules calculées sur la géométrie du disque de l'EHQF sont les analogues des énergies calculées de l'EHQE.

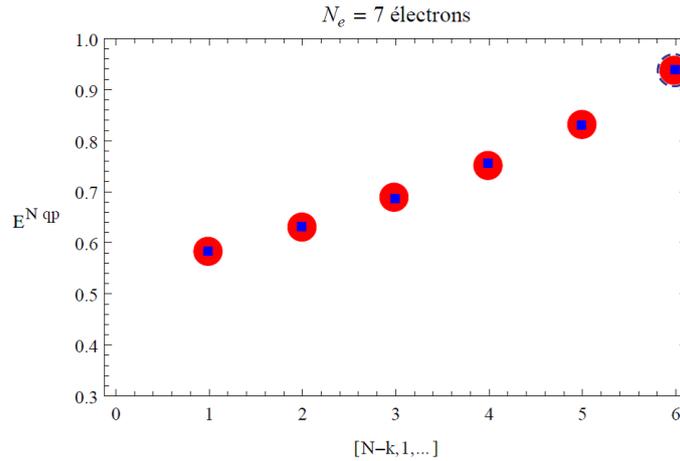


FIG. 6.6 – Énergies de $N-1$ quasiparticules $\mathbb{E}^{(N-1)qp}$ pour $N_e=7$ particules dans la géométrie du disque à $\nu=1/3$. Les disques colorés en rouge représentent les états de Laughlin Ψ_L^{Nqp} . Les rectangles en bleu représentent les états de Jain $\Psi_{CF}^{[N-k,1,\dots]}$. L'anneau en pointillé représente l'état de l'EHQE.

6.10 Conclusion

Dans un premier temps, nous avons présenté les propriétés des états de Laughlin correspondant aux facteurs de remplissages $\nu = \frac{1}{3}$ et $\nu = \frac{1}{5}$ en effectuant la simulation de

Monte Carlo[42, 46] en géométrie du disque pour des systèmes allant de $N_e = 4$ à $N_e = 400$ électrons. En effet, l'énergie à la limite thermodynamique au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ tend vers $-0.406\frac{e_0^2}{l_0}$ et $-0.326\frac{e_0^2}{l_0}$ pour $\nu = \frac{1}{5}$.

Dans la suite du chapitre, nous obtenons des expressions de la *DNE* pour l'énergie d'interaction de Coulomb de l'EHQF dans la géométrie du disque aux remplissages $1/3$ et $2/5$. Puis, nous avons donné une description de l'état Pfaffien de Moore-Read de l'EHQF dans la géométrie du disque aux facteurs de remplissages $5/2$. Cependant, et grâce au Pfaffien, de nombreux plateaux dans la résistance de Hall à d'autres remplissages ont été mesurés, comme les fractions $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{2}$ et $\frac{3}{8}$ [100, 102]. La fonction d'onde actuelle de l'état $\frac{5}{2}$ correspond donc à un remplissage du *PBNL* par $\nu = \frac{1}{2}$ [15]. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne considère pas le Pfaffien d'ordre impair de N . Pour cela, il faudra donc trouver d'autres fonctions d'onde permettant d'expliquer l'ordre impair.

Pour la géométrie de la sphère, Haldane a introduit l'EHQF sur cette géométrie, bien qu'en réalité ce problème soit plus éloigné de la réalité expérimentale. Dans les échantillons réels de gaz bidimensionnels, on considère les électrons sur une sphère de rayon R . Le champ magnétique perpendiculaire est produit par un monopole magnétique de force $Q = N_\phi/2$ placé au centre de la sphère. Les valeurs propres de L_z dans le *PBNL* sont des entiers positifs et prennent les valeurs m pour la géométrie du disque et $m - N_\phi/2$ comprises entre 0 et N_ϕ pour la géométrie de la sphère. L'approche utilisée entre la géométrie du disque et la géométrie de la sphère consiste à changer le rayon R et observer l'information contenue dans l'état fondamental d'un tel système pour $m < N_\phi$ tels que $\frac{N_\phi}{R}$ soit fixe. Dans ces conditions, la sphère devient efficacement plate et les états simples de particules se réduisent à ceux sur le disque $z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}}$. Pour un moment cinétique $S = \frac{m}{2}(N_e - 1)$, où m est un nombre entier impair, et dans la limite où $S \rightarrow \infty$, ou $R \rightarrow \infty$ [85], tous les éléments appropriés de la matrice d'interaction sur une sphère convergent vers ceux sur un disque. La fonction d'onde et les énergies calculées sur une sphère pour $R = \sqrt{S}l_B$ convergent vers ceux d'un disque [86]. L'énergie totale d'état de Laughlin pour $\nu = 1/3$, est augmentée en valeur absolue et approche environ $-0.409733\frac{e_0^2}{l_0}$ dans la géométrie du disque[42, 87, 46]. De plus, alors que l'énergie sur la géométrie de la sphère[42] est diminuée rapidement en valeur absolue et s'approche de $-0.409752\frac{e_0^2}{l_0}$, ce

qui est identique à l'énergie dans la géométrie du disque pour $R \rightarrow \infty$.

Nous avons ensuite décrit les deux théories de Laughlin et de Jain pour les systèmes contenant $N-1$ quasiparticules en régime d'*EHQF*. Ce résultat démontre que les fermions composites approchent à *EHQE* dans l'étude de *DNE* de l'*EHQF*. Dans ce cas, les énergies calculées sur les états compacts de la géométrie du disque sont les analogues des énergies calculées sur une géométrie de sphère[61].

Conclusions et perspectives

L'effet Hall, bien qu'étudié depuis plus d'un siècle, fait l'objet de nouvelles études théoriques et expérimentales qui sont motivées par la découverte de nouveaux matériaux et effets quantiques, tel que l'effet Hall quantique entier et fractionnaire. L'*EHQF* a été observé dans divers systèmes bidimensionnels. Il s'agit de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou semi-conducteurs comme des puits quantiques de silicium, des hétérostructures Si/SiGe et dans le graphène.

Mon travail de thèse m'a permis de décrire des aspects généraux et fondamentaux au moyen de modèles simplifiés de la physique de l'*EHQF* dans la géométrie du disque et de la sphère. L'étude de l'*EHQF* en interaction de Coulomb, dans la géométrie du disque, serait bien évidemment très intéressante. J'ai déterminé analytiquement et par diagonalisation numérique exacte l'énergie d'interaction coulombienne dans le premier et le second niveau de Landau aux différents facteurs de remplissage $1/3$, $1/5$, $1/7$, $2/5$ et $5/2$. En effet, dans les deux méthodes de l'*EHQF*, nous obtenons généralement l'état fondamental ainsi que certains états excités de plusieurs tailles.

Nous avons calculé analytiquement l'énergie de l'état fondamental du système à N_e électrons en interaction coulombienne à différents facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{5}$ et $\nu = \frac{1}{7}$. Ces résultats sont illustrés dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, respectivement. Cependant, la valeur de l'énergie d'interaction coulombienne peut prendre la plus grande amplitude pour $\nu = \frac{1}{3}$, et prendre la plus petite énergie pour $\nu = \frac{1}{7}$. Dans ce cas, et pour un facteur de remplissage $\nu \leq \frac{1}{7}$ on peut interpréter l'état fondamental d'électrons dans le *PBNL* partiellement rempli par le fait que celui-ci n'est plus décrit par un liquide de Laughlin, mais par un cristal de Wigner, où les électrons préfèrent s'organiser selon une structure cristalline triangulaire. En effet, nos résultats sont en accord avec les résultats

obtenus par *DNE* des références[52, 74], et par un calcul de Monte Carlo des énergies des états de Hall quantiques fractionnaires développé par Ciftja[46].

La méthode de calcul analytique des énergies d'interaction coulombienne peut être appliquée à tous les facteurs de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$, où le nombre m est impair, ainsi que les premiers et seconds états excités. Dans le cas général, nous irons déterminer les énergies d'interaction coulombienne pour les phases de fermions composites de Jain à $\nu = \frac{n}{2np+1}$.

Nous avons traité ensuite les excitations élémentaires en régime d'*EHQF*. Ce traitement apporte également des structures physiques différentes concentrées sur le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$, où il convient de noter que la théorie des *FC* explique le phénomène général de la *EHQF*, qui donne les fonctions d'ondes des états fondamentaux précises, ainsi que les fonctions d'ondes des quasiparticules. De nombreuses études ont comparé les deux fonctions d'ondes de Laughlin, et de Jain pour un petit nombre d'électrons, et quel que soit la géométrie et le type d'interaction utilisés dans ces cas. Cependant, la fonction d'onde des *FC* a été jugée la meilleure[56, 57].

On note que l'énergie d'interaction d'un état de Jain $\Psi_{FC}^{[N-2,1,1]}(z_1, \dots, z_{N_e})$ à deux quasiparticules est alors identique à celle des états de Laughlin $\Psi_L^{2qp}(z_1, \dots, z_N)$ à deux quasiparticules et bien plus grande que celle des fermions composites $\Psi_{FC}^{[N-2,2]}(z_1, \dots, z_{N_e})$, au facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{3}$.

Notre travail nous a permis d'obtenir des expressions de la *DNE* pour l'énergie d'interaction de Coulomb de l'*EHQF* dans la géométrie du disque et de la sphère aux facteurs remplissages $1/3$ et $2/5$. Nous avons étudié en parallèle les modèles de Laughlin et de Jain. À titre de comparaison, nous avons présenté dans le tableau 6.2, les caractéristiques des énergies correspondant à $\nu = \frac{1}{3}$ dans le plus bas niveau de Landau du petit nombre d'électrons sur la géométrie de la sphère, ce qui fait penser que le modèle de Jain est plus stable que le modèle de Laughlin. Puis, nous avons étudié les énergies de $N - 1$ quasiparticules représentées par les fermions composites (*FC*) au remplissage $\nu = \frac{1}{3}$ dans la géométrie du disque, ce qui permettra de comprendre l'*EHQF* d'électrons comme un *EHQE* de ces fermions composites. Ensuite, nous avons décrit l'*EHQF* dans le second niveau de Landau par l'état Pfaffien de Moore-Read, cette construction permet de faire apparaître de très nombreux plateaux dans la résistance de Hall à d'autres remplissages ont été mesurés

dans des échantillons de grande mobilité.

Enfin, nous offrons des perspectives pour un travail futur pour l'effet Hall quantique.

- Nous avons montré qu'il est très difficile d'augmenter la taille de notre système au-delà de 7 particules à cause du polynôme vecteur. Il faudra alors trouver d'autres méthodes.
- Un liquide quantique incompressible caractérisé par des corrélations fortes entre les électrons reste encore mal compris.
- La majorité des calculs de l' $EHQF$ est faite dans le plus bas niveau de Landau, ainsi que les conditions d'observation de l' $EHQF$ ne sont pas les mêmes dans le plus bas niveau de Landau et dans le second niveau de Landau.
- Les quasiparticules des liquides quantiques à basse énergie ressemblent aux quarks trouvés à de hautes énergies.
- On trouve l' $EHQE$ dans le cadre de la théorie quantique des champs, et notamment dans la théorie des cordes appliquée aux trous noirs et en cosmologie.
- La supraconductivité des métaux a également trouvé une explication dans le cadre de l' $EHQF$.

Nomenclature

Symbole	Signification
<i>Background</i>	Fond ou substrat
<i>BCS</i>	Bardeen-Cooper-Schrieffer
<i>DNE</i>	Diagonalisation numérique exacte
<i>EHQE</i>	Effet Hall quantique entier
<i>EHQF</i>	Effet Hall quantique fractionnaire
<i>FC</i>	Fermions composites
<i>HR</i>	Haldane-Rezayi
<i>LLL</i>	Lowest Landau level
<i>MC</i>	Monte Carlo
<i>MR</i>	Moore-Read
<i>NL</i>	Niveau de Landau
<i>PBNL</i>	Plus bas niveau de Landau
<i>qe</i>	Quasi-électron
<i>qt</i>	Quasi-trou
<i>SLL</i>	Second Landau level
<i>SNL</i>	Second niveau de Landau

Symbole	Signification	Symbole	Signification
\vec{A}	Potentiel vecteur	$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}$	Nombre de quanta de flux
\vec{A}_L	Vecteur de la jauge de Landau	N_e	Nombre d'électrons
\vec{A}_s	Vecteur de la jauge de symétrie	n	Niveau de Landau
a	Opérateur d'annihilation	$n_B = \frac{N_B}{S}$	Densité de flux
a^+	Opérateur de création	$n_e = \frac{N_e}{S}$	Densité électronique
$a_N = \frac{v^2}{\eta}$	Accélération (normale)	p	Quantité de mouvement
\vec{B}	Vecteur induction magnétique	P_L	Polynôme de Laughlin
b	Opérateur d'annihilation	P_J	Polynôme de Jacobi
b^+	Opérateur de création	$q \equiv -e$	Charge de l'électron
E	Champ électrique	R	Rayon du centre de l'orbite
\vec{E}_H	Vecteur champ de Hall	R_c	Rayon cyclotron
\vec{F}_e	Force électrique	R_H	Résistance de Hall
\vec{F}_L	Force de Lorentz	R_{N_e}	Rayon du disque
\vec{F}_m	Force magnétique	r	Position de l'électron
\vec{H}	Vecteur champ magnétique	S_N	Aire du système utilisé
H_0	Hamiltonien d'une particule libre	t	Temps
H_{int}	Hamiltonien d'interaction	U_H	Tension de Hall
\hbar	Constante de Planck	\hat{V}	Potentiel énergétique
I	Courant électrique	\vec{v}	Vecteur vitesse de l'électron
J	Densité du courant	W	Largueur de la plaque
L, S	Moment angulaire totale	Z_i	Coordonnées complexe de Jacobi
m	Masse réelle du système	z_i	Coordonnées complexes
$\phi = B.S$	Flux total du champ magnétique	z	Nombre complexe
$\phi_0 = \frac{h}{e}$	Quantum de flux	\bar{z}	Complexe conjugué

Symbole	Signification	Symbole	Signification
$\vec{\Pi}$	Opérateur quantité de mouvement	σ	Conductivité
$\vec{\nabla}$	Vecteur Nabla	σ_{xx}	Conductivité longitudinale
Φ	Fonction d'onde d'une particule	σ_{xy}	Conductivité transverse
γ	Accélération	τ	Temps de collision moyen
δ	Delta	ν	Facteur de remplissage
$\varepsilon = \frac{V}{N_e}$	Énergie d'interaction par particule	$\phi(x)$	Potentiel scalaire
ε_{ee}	Énergie d'interaction électron-électron	φ	La phase
ε_{eb}	Énergie d'interaction électron-substrat	χ	Fonction arbitraire
ε_{bb}	Énergie d'interaction substrat-substrat	Ψ	Fonction d'onde de N_e
η	Centre de l'orbite cyclotron	Ψ^{GS}	Fonction d'état fondamental
ρ	Résistivité	Ψ^{1qp}	Fonction d'une quasiparticule
ρ_{xy}	Résistivité longitudinale	Ψ^{2qp}	Fonction de deux quasiparticules
ρ_{xy}	Résistivité transverse	ω_c	Fréquence cyclotron

Annexe A

Méthode analytique pour le calcul de l'énergie de l'EHQF

Pour déterminer l'interaction coulombienne V_{ee} de 4 électrons, il faut suivre ces étapes

Transformation de Jacobi

(*=== Code 1 ===*)

n = 4;

H = n;

Print[$Z_H = \text{Sum}[\frac{z_i}{H}, \{i, 1, H\}]$]]

Do[Print[$Z_H = \text{Sum}[\frac{z_i}{H}, \{i, 1, H\}] - z_{H+1}$], {H, 1, n - 1}]

On obtient z_i en fonction de Z_H

$$z_1 = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$$

$$z_2 = \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$$

$$z_3 = \frac{-2Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4$$

$$z_4 = \frac{-3Z_3}{4} + Z_4$$

Le polynôme vecteur P_L de Laughlin s'écrit

$$P_L = (z_1 - z_2)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_4)^3 (z_2 - z_3)^3 (z_2 - z_4)^3 (z_3 - z_4)^3$$

On inclut z_1, z_2, z_3, z_4 dans le polynôme vecteur P_L , alors P_J de Jacobi s'écrit

$$P_J = Z_1^3 \left(\frac{-Z_1}{2} + Z_2\right)^3 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2\right)^3 \left(\frac{-2Z_2}{3} + Z_3\right)^3 \left(\frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3\right)^3 \left(\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3\right)^3$$

Méthode Analytique

Ce polynôme P_J contient des coefficients impairs $C_i = 3, 5, \dots$

```
(*=== Code 2 ===*)
Clear["Global `*"]
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Module[{coeffi, clist, inner, inlist, I1, I2, I3, I4, I5, I6, Ke, KeN},
coeffi = Coefficient[Expand[Z1^3(-Z1/2 + Z2)^3(Z1/2 + Z2)^3(-2Z2/3 + Z3)^3(-Z1/2 + Z2/3 + Z3)^3
(Z1/2 + Z2/3 + Z3)^3, Z1, Ci];
clist = coeffi /. Plus -> List;
inner =
Inner[Times, clist /. {Z2 -> 1, Z3 -> 1}, clist, Plus];
inlist = inner /. Plus -> List /. {Z2 -> r2^2, Z3 -> r3^2};
I1 = Integrate[inlist*r2*r3*Exp[-3/8*r3^2], {r3, 0, Infinity}, Assumptions -> (l0 > 0)];
I2 = Integrate[I1*Exp[-1/3*r2^2/l0^2], {r2, 0, Infinity}, Assumptions -> (l0 > 0)];
I3 = Integrate[I2*r4*Exp[-2/7*r4^2], {r4, 0, Infinity}, Assumptions -> (l0 > 0)];
I4 = Plus @@ I3;
I5 = Integrate[r1^2*Ci*Exp[-r1^2/4l0^2], {r1, 0, Infinity}, Assumptions -> (l0 > 0)];
I6 = Integrate[r1^2*Ci+1*Exp[-r1^2/4l0^2], {r1, 0, Infinity}, Assumptions -> (l0 > 0)];
Ke = Times[I4, I5];
KeN = Times[I4, I6];
Export["sortie0.nb", Ke, "List"];
Export["sortie0N.nb", KeN, "List"];
Print[Ke];
Print[KeN];]
```

Résultat de calcul

```
(*=== Code 3 ===*)
Clear["Global `*"]
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Module[{Ne, m, M, L1, L, S1, S1N, S2, S2N, S3, S3N, S4, S4N, S5, S5N,
S6, S6N, S7, S7N, Sumnomi, Sumdenomi, Sumglo, Prod},
S1 = Import["sortie0.nb"];
```

```
S1N = Import["sortie0N.nb"];
S2 = Import["sortie1.nb"];
S2N = Import["sortie1N.nb"];
S3 = Import["sortie2.nb"];
S3N = Import["sortie2N.nb"];
S4 = Import["sortie3.nb"];
S4N = Import["sortie3N.nb"];
S5 = Import["sortie4.nb"];
S5N = Import["sortie4N.nb"];
S6 = Import["sortie5.nb"];
S6N = Import["sortie5N.nb"];
S7 = Import["sortie6.nb"];
S7N = Import["sortie6N.nb"];
Sumnomi = Plus[S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7];
Sumdenomi = Plus[S1N, S2N, S3N, S4N, S5N, S6N, S7N];
Sunglo = Divide[Sumnomi, Sumdenomi];
Prod = Times[Sunglo,  $\frac{3}{2}e_0^2$ ];
N[Prod, 20]
0.32764883881184447813  $\frac{e_0^2}{l_0}$ .
```

Annexe B

Potentiel de Coulomb projeté dans le PBNL

Définition de la fonction Gamma Γ

$$\Gamma(z) = \int t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{B1})$$

et on a (pour $z = m + \frac{1}{2}$), $\Gamma(z)$ s'écrit

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{m-\frac{1}{2}} e^{-t} dt. \quad (\text{B2})$$

Pour

$$z = r e^{j\theta} \quad r \in [0, \infty] \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (\text{B3})$$

et pour les coordonnées polaires, on a

$$dz = r dr d\theta, \quad (\text{B4})$$

et

$$|z| = |r e^{j\theta}| = r. \quad (\text{B5})$$

Maintenant, on calcule l'intégrale suivant

$$\begin{aligned}
 \left\langle 0, m \left| \frac{1}{r} \right| 0, m \right\rangle &= \frac{1}{2^{m+1}\pi m!} \int_c dz |z|^{2m-1} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{2^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\theta r^{2m-1} e^{-\frac{r^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{2^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty r dr r^{2m-1} e^{-\frac{r^2}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{1}{2^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-\frac{r^2}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{1}{2^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-\frac{r^2}{2}} (2\pi) \\
 &= \frac{(2\pi)}{2^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-\frac{r^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{2^m m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-\frac{r^2}{2}}. \tag{B6}
 \end{aligned}$$

On suppose que

$$x = \frac{r^2}{2} \rightarrow dx = r dr \rightarrow dr = \frac{1}{r} dx, \tag{B7}$$

et

$$r = (2x)^{\frac{1}{2}}. \tag{B8}$$

On obtient

$$dr = (2x)^{-\frac{1}{2}} dx \tag{B9}$$

Insérant (B7), (B8) et (B9) dans (B6), on obtient

$$\begin{aligned}
 \left\langle 0, m \left| \frac{1}{r} \right| 0, m \right\rangle &= \frac{1}{2^m m!} \int_0^\infty dr r^{2m} e^{-\frac{r^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{2^m m!} \int_0^\infty (2x)^{-\frac{1}{2}} dx (2x)^m e^{-x} \\
 &= \frac{1}{2^m m!} \int_0^\infty (2)^{-\frac{1}{2}} 2^m x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\
 &= \frac{(2)^{-\frac{1}{2}} 2^m}{2^m m!} \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}} m!} \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2} m!} \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x} dx. \tag{B10}
 \end{aligned}$$

En vertu de (B2), on a

$$\begin{aligned} \left\langle 0, m \left| \frac{1}{r} \right| 0, m \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2m!}} \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2m!}}. \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

(*=== Code 4 ===*)

(* $H_{int} = \sum_{i < j=1}^{Ne} \sum_{m=0}^L V_m \hat{P}_{ij}^{(m)}$ *)

$B[z_ , m_ , pp_] := \text{Sum}\left[\frac{(-1)^m}{2^m (m!)} (z[[i]] - z[[j]])^m * \text{Sum}[\text{Binomial}[m, k] * (-1)^k\right.$
 $* \text{D}[pp, \{z[[i]], m - k\}, \{z[[j]], k\}, \{k, 0, m\}], \{i, 1, Ne - 1\}, \{j, i + 1, Ne\}];$

(* Potentiel de Coulomb projeté dans les PBNL *)

$v[m_] := \frac{1}{2} * \frac{\text{Gamma}[m+1/2]}{m!};$

$v\text{Psi}[z_ , pp_] := \text{Sum}[v[m] * (B[z, m, pp]), \{m, 0, L + 1\}];$

Bibliographie

- [1] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395, 1983.
- [2] J. K. Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect. Phys.Rev .Lett. 63, 199, 1989.
- [3] G. Moore and N. Read, Nucl. Phys. B360, 362, 1991.
- [4] C. Kittel, Introduction à la physique de l'état solide, Dunod, 1979.
- [5] A. Houari, Physics Education, Vol. 42, No. 6, p 603, 2007.
- [6] Frédéric Chandelier, Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matière condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états, Thèse de doctorat, Université Paris 11 – Orsay, 2003.
- [7] Drude, P. Zur elektronentheorie der metalle. Annalen der Physik 306, 566, 1900.
- [8] Abdellaoui Assia, Opérateur densité, magnétoconductance et effet Hall quantique : Approche de Landauer dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, Thèse de doctorat, Université Mentouri-Constantine, 2006.
- [9] Pierre Darancet, Théorie et simulation du transport quantique dans les nanostructures, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2008.
- [10] Antoine Sterdyniak, Etude de l'intrication dans l'effet Hall quantique fractionnaire, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2013.
- [11] K.Von Klitzing,G.Dorda et M.Pepper phys.Rev.Lett., 45, 494, 1980.
- [12] K. von Klitzing, The quantized Hall effect. Rev.Mod.Phys. 58, 519, 1986.
- [13] Manuel Aranzana, Étude des jonctions entre canaux de bord de l'effet hall quantique fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2005.

- [14] H. L. Störmer, Nobel lecture : The fractional quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* 71, 875, 1999.
- [15] Paul Soulé, Bords des Phases de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique, Thèse de doctorat, Université Paris 11 – Orsay, 2014.
- [16] Omar I. Stern Spin Phenomena in the Fractional Quantum Hall Effect : NMR and Magnetotransport Studies. Thèse de doctorat, Institut Max-Planck Für Festkörperforschung, Stuttgart, 2005.
- [17] M. Flöser, Transport quantique local et non-local : "Percolation in Quantum Hall Systems Cross-Correlations in Superconducting Hybrid Structures", Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012.
- [18] Mark Oliver Goerbig, Pascal Lederer, Électrons bidimensionnels sous champ magnétique fort : la physique des effets Hall quantiques, Notes de cours, Université Paris Sud, 2006.
- [19] Nicolas Thiébaud, Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2015.
- [20] R. B. Laughlin. Quantized hall conductivity in two dimensions. *Physical Review B*, 23(10), 5632, May 1981.
- [21] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, *Phys. Rev. Lett.* 79, 2526, 1997.
- [22] H. Kjønsberg and J. M. Leinaas, Charge and statistics of quantum Hall quasi-particles - a numerical study of mean values and fluctuations. *Nucl. Phys. B* 559, 705, 1999.
- [23] S. M. Girvin et T. Jach, *Phys. Rev. B* 29, 5617, 1984. S. M Girvin : The quantum Hall effect. Rapport technique, 1999.
- [24] Tsui, D. C., Gossard, A. C., and Stormer, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1559, 1982.
- [25] Mark Oliver GOERBIG, Étude théorique des phases de densité inhomogène dans les systèmes à effet Hall quantique, Thèse de doctorat, en cotutelle, Université de Fribourg (Suisse) et Université de Paris XI Orsay (France), 2004.

- [26] Christian J. S. Olsen, Quasi Particle Tunneling in the Fractional Quantum Hall Regime, Thèse de master, Université Copenhague, 2015.
- [27] S. M. Girvin, The Quantum Hall Effect : Novel Excitations and Broken Symmetries, Les Houches Lecture Notes, in : Topological Aspects of Low Dimensional Systems, Springer-Verlag, Berlin and Les Editions de Physique, Les Ulis, 1998.
- [28] Bentalha Z., Moumen L., Ouahrani T., Cent. Eur. J. Phys., 12, 511, 2014.
- [29] LARBI Abdelmoumen, Méthode de calculs analytiques dans un système d'électrons fortement liés : électrons de Hall quantique fractionnaire, Thèse de doctorat, Université de Tlemcen, 2016.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloe, Mécanique quantique, Hermann, Paris 1973.
- [31] Jean Dalibard, Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids, Cours, Collège de France, 2013-2014.
- [32] D. Yoshioka, The Quantum Hall Effect. Springer, New York, 2002.
- [33] I.A. Niesen, The Quantum Hall Effects : Casimir Operators and Anyonic Quasi-Particle Excitations, Thèse de master, Université de Amsterdam, 2014.
- [34] J. K. Jain, The Composite Fermion : A Quantum Particle And Its Quantum Fluids, Phys. Today 53, 39-45, 2000.
- [35] J.K. Jain, Phys. Rev. B 41, 7653, 1990.
- [36] J. K. Jain, Composite Fermions, Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [37] F. Mila, Notes de cours sur l'Effet Hall Quantique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2011-2012.
- [38] Eero Tölö, Quasiparticles in quantum Hall droplets, Thèse de master, Université de technologie de Helsinki, 2008.
- [39] J. Guignard, Étude de l'effet Hall quantique dans le graphène exfolié en vue d'une application en métrologie quantique, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud 11, 2011.
- [40] L. Esaki and R. Tsu, Internal Report RC 2418, IBM Research, March 26th, 1969

- [41] A. H. MacDonald, Introduction to the physics of the quantum Hall regime. cond-mat/9410047, 1994.
- [42] Morf, R., Halperin, B.I, Phys. Rev. B33, 2221, 1986.
- [43] Dunne G V, Int. J. Mod. Phys. B7 4783, 1993.
- [44] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B 27, 3383, 1983.
- [45] C. Yannouleas, Uzi Landman, Phys. Rev. B 68, 035326, 2003.
- [46] O. Ciftja, C. Wexler, Phys. Rev. B 67 075304, 2003.
- [47] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0, Champaign, Illinois, 1999.
- [48] G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [49] O. Ciftja, Physica B, 404, 227, 2009.
- [50] M.A. Ammar, Z. Bentalha, S. Bekhechi, Method of computation of energies in the fractional quantum Hall effect regime. Condensed Matter Physics, vol. 19, No. 3, 33702, 2016.
- [51] V. J. Goldman, M. Shayegan, and D. C. Tsui, Evidence for the fractional quantum Hall state at $\nu = 1/7$. Phys. Rev. Lett. 61, 881, 1988.
- [52] G. Fano, F. Ortolani, & E. Colombo, 'Configuration-interaction calculations on the fractional quantum hall effect', Phys. Rev. B 34(4), 2670–2680, 1986.
- [53] B. I. Halperin, Patrick A. Lee et Nicholas Read : Theory of the half-filled landau level. Phys. Rev. B, 47 :7312–7343, Mar 1993.
- [54] D. Laroche, Coulomb Drag in Vertically-Integrated One-Dimensional Quantum Wires, Thèse de doctorat, Université de McGill, Canada, 2013.
- [55] Bernard Giovannini, Cours de physique du solide avancée III et IV, Propriétés électroniques des matériaux, 2001-2002.
- [56] R.H. Morf, N. d'Ambrumenil and S. Das Sarma, Excitation gaps in fractional quantum Hall states : An exact diagonalization study, Phys. Rev. B 66, 075408, 2002.
- [57] G. S. Jeon, J.K.Jain, Phys. Rev. B68, 165346, 2003.

- [58] G. S. Jeon, C.-C. Chang and J. K. Jain, Semiconductor quantum dots in high magnetic fields : The composite fermion view. cond-mat/0611309, 2006.
- [59] J. K. Jain, C.-C. Chang, G. S. Jeon, and M. R. Peterson, Composite fermions in the neighborhood of $\nu = 1/3$. Solid State Commun. 127, 805, 2003.
- [60] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1980.
- [61] J.K. Jain and R.K. Kamilla, Int. J. Mod. Phys. B 11, 2621, 1997.
- [62] L. Saminadayar, Fluctuations temporelles quantiques du courant dans des nanostructures, Thèse de doctorat, Université Paris 11, 1997.
- [63] O. Ciftja, Exact results for systems of electrons in the fractional quantum Hall regime II, Physica B Condensed Matter 404, 2244–2246, 2009.
- [64] A. H. MacDonald and S. M. Girvin, Phys. Rev. B 33, 4414, 1986.
- [65] E.V. Tsiper, J. Math. Phys. 43, 1664, 2002.
- [66] S. A. Trugman and S. A. Kivelson, Phys. Rev. B 31, 5280, 1985.
- [67] V. L. Pokrovsky and A. L. Tapalov, Journ. Phys. C 18, L691, 1985.
- [68] M. Kasner and W. Apel, Ann. Phys. (Leipzig) 3, 433, 1994.
- [69] F. D. M. Haldane : Fractional quantization of the hall effect : A hierarchy of incompressible quantum fluid states. Phys. Rev. Lett., 51 :605–608, Aug 1983.
- [70] Nicolas Thiebaut, Effet Hall quantique fractionnaire dans la bicouche et le puits large, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2015.
- [71] X. Wan, Kun Yang, and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 97, 256804, 2006.
- [72] Yinghai Wu, Fractional quantum Hall states in continuum and lattice systems, Thèse de Doctorat, Université de Pennsylvania, 2014.
- [73] N. Read, E. Rezayi, Beyond paired quantum hall states : Parafermions and incompressible states in the first excited landau level, Phys. Rev. B 59, 8084–8092, 1999.
- [74] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 54, 237, 1985.
- [75] M. Greiter, Landau level quantization on the sphere. Phys. Rev. B 83, 115129, 2011.

- [76] Yuhe Zhang, A. Wójs, and J. K. Jain, Landau-Level Mixing and Particle-Hole Symmetry Breaking for Spin Transitions in the Fractional Quantum Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* 117, 116803, 2016.
- [77] Martin Greiter, Mapping of parent Hamiltonians : from Abelian and non-Abelian quantum Hall states to exact models of critical spin chains, volume 244. Springer Verlag, 2011.
- [78] T. H. Hansson, M. Hermanns, S. H. Simon, and S. F. Viefers, Quantum Hall hierarchies, thp institute for theoretical physics university of cologne, 2016.
- [79] S. Yang, Z.-C. Gu, K. Sun and S. Das Sarma, Topological flat band models with arbitrary chern numbers, *Phys. Rev. B*, 86, 241112, 2012.
- [80] N. Read and E. Rezayi. *Phys. Rev. B*, 54 :16864, 1996.
- [81] Marius Ladegård Meyer, Rotational Properties of Two-Component Bose Gases, University of Oslo, 2013.
- [82] Y.-H. Wu and J. K. Jain, *Phys. Rev. B* 87, 245123, 2013.
- [83] J. K. Jain and T. Kawamura, Composite fermions in quantum dots. *Europhys.Lett.* 29, 321, 1995.
- [84] G. Dev and J.K. Jain, *Phys. Rev. B* 45, 1223, 1992.
- [85] A. Wójs and J.J. Quinn, *Physica E (Amsterdam)* 3, 181, 1998.
- [86] J. J. Quinn and A. Wójs, Composite fermions in fractional quantum Hall systems. *J. Phys.Condens.Matter* 12, 265(R), 2000.
- [87] G. Fano, F. Ortolani, *Phys. Rev. B* 37, 8179, 1987.
- [88] Orion Ciftja, Exact results for finite quantum Hall systems of electrons at filling factor one : Disk geometry, *J. Math. Phys.* 52, 122105, 2011.
- [89] R. Willett et al., *Phys. Rev. Lett.* 59, 1776, 1987.
- [90] T. H. Hansson, M. Hermanns, S. H. Simon, and S. F. Viefers, Quantum Hall physics : Hierarchies and conformal field theory techniques, *Rev. Mod. Phys.* 89, 025005, 2017.
- [91] W. Pan et al., *PRL* 83, 3530, 1999.

-
- [92] Leticia Tarruell, Superfluidité dans un gaz de fermions ultrafroids, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2008.
- [93] J. Boronat et al., Recent Progress in Many-body Theories : Proceedings of the 14th International Conference, Barcelona, Spain, 16-20 July 2007. Volume 11 of Series on advances in quantum many-body theory, World Scientific, 2008.
- [94] S. L. Mayo, B. D. Olafson, and W. A. G. III, J. Phys. Chem. 94, 8897, 1990.
- [95] D. Yoshioka, A.H. MacDonald and S.M. Girvin, Phys. Rev. B38, 3636, 1988.
- [96] F. D. M. Haldane et E. H. Rezayi : Spin-singlet wave function for the half-integral quantum hall effect. Phys. Rev. Lett., 60 :956–959, Mar 1988.
- [97] E. H. Rezayi et F. D. M. Haldane : Incompressible paired hall state, stripe order, and the composite fermion liquid phase in half-filled landau levels. Phys. Rev. Lett., 84 :4685–4688, May 2000.
- [98] Ajit C. Balram et al., Fractionally charged skyrmions in fractional quantum Hall effect, Nature Communications 6, 8981, 2015.
- [99] L. Tiemann, G. Gamez, N. Kumada, et K. Muraki, Unraveling the spin polarization of the $\nu = 5/2$ fractional quantum Hall state, Science 335 (6070), 828-831, 2012.
- [100] W. Pan, R. R. Du, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. 83, 820, 1999.
- [101] Yang Liu et al., Spin polarization of composite fermions and particle-hole symmetry breaking, Phys. Rev. B 90, 085301, 2014.
- [102] Jimmy A. Hutasoit et al. The Enigma of the $\nu = 2 + 3/8$ Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev. B 95, 125302, 2017.

Method of computation of energies in the fractional quantum Hall effect regime

M.A. Ammar¹, Z. Bentalha², S. Bekhechi²

¹ Environment Department, University of Medea, 26000 Medea, Algeria

² Theoretical Physics Laboratory, University of Tlemcen, B.P. 230, 13000 Tlemcen, Algeria

Received March 12, 2016, in final form April 18, 2016

In a previous work, we reported exact results of energies of the ground state in the fractional quantum Hall effect (FQHE) regime for systems with up to $N_e = 6$ electrons at the filling factor $\nu = 1/3$ by using the method of complex polar coordinates. In this work, we display interesting computational details of the previous calculation and extend the calculation to $N_e = 7$ electrons at $\nu = 1/3$. Moreover, similar exact results are derived at the filling $\nu = 1/5$ for systems with up to $N_e = 6$ electrons. The results that we obtained by analytical calculation are in good agreement with their analogues ones derived by the method of Monte Carlo in a precedent work.

Key words: *quantum Hall effect, 2D electron gas, many-body wave function, strongly correlated system*

PACS: *73.43.-f, 73.43.Cd, 71.10.Ca, 02.70.Wz*

1. Introduction

The discovery of the fractional quantum Hall effect (FQHE) [1] was the beginning of a big revolution in the field of condensed matter. Since then, new concepts of matter state have been raised such as the incompressible quantum fluid [2], composite fermions [3–6], composite bosons [7] and anyons [8, 9], all emanating from elegant theories with sophisticated mathematics. Nowadays, there are two world wide accepted theories in the field of FQHE, the theory of Laughlin [2] and the theory of Jain [3–6]. The former describes the ground state as an incompressible quantum fluid which successfully clarified the nature of states at the filling factors $\nu = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$. The latter (theory) is built upon the concept of composite fermions that are topological entities caricaturing the idea of electrons embracing a number (even) of quantized vortices and gives satisfactory results regarding the $\nu = p/(2mp + 1)$ states, integer m and p . In Laughlin theory, the incompressible quantum fluid consists of strongly correlated electrons interacting with a strong magnetic field whereas in Jain theory it consists of weakly correlated composite fermions interacting with a reduced magnetic field. The aim of determining ground state energies for FQHE electron systems has been the object of many investigations with various computational methods such as exact diagonalization [10–14], density matrix renormalization group [15] or Monte Carlo simulations [16–18]. However, it is worth notifying that at the level of quasiparticle state, certain discrepancy is observed between the results of [19] using spherical geometry and the results of [20] using disk geometry, while the authors of [20] have found the reason of the discrepancy to be unclear. Also, all these methods are numerical and one may wonder whether it is possible to perform analytical methods that would serve as reliable comparison instruments even for small systems of electrons. The most pronounced analytical method in this line of research was given by the author of [21], where ordinary polar coordinates (including ordinary Jacobi coordinates) are employed but technical calculational difficulties arise for systems with $N_e > 4$ electrons, and one can see an explicit dependence of the integrands upon the angles of the particles (see equation (21) in [21]). This apparent difficulty can be overcome by using complex polar coordinates, being the main contribution of [22]. By the way, it should be notified that ordinary polar coordinates are also used in the original paper by Laughlin [2] within a Monte Carlo study. Regarding the

work [22], we developed an analytical method based on complex polar coordinates and explicitly calculated the energies of the ground state in the FQHE regime for systems with up to six electrons at the filling $\nu = 1/3$. The use of polar coordinates in a complex form has been the key tool which greatly simplifies the calculation of some complicated expressions involving integrals over many variables in [22]. The aim of this work is to show all the necessary computational steps and details underlying the analytical method of [22] so as to make its application possible in other areas of condensed matter physics, especially in 2D Coulomb systems such as 2D Dyson gas wherein expressions involving integrals over many variables are encountered such as the partition function or the mean energy. Thus, we obtain new exact analytical results concerning the energy of the ground state for systems with $N_e = 7$ electrons at the filling $\nu = 1/3$, and $N_e = 5, 6$ electrons at the filling $\nu = 1/5$.

The paper is organized as follows. In section 2, the theoretical background is presented. In section 3, the electron-electron interaction energy is calculated. In section 4, the method of computation of the electron-background interaction energy is shown. In section 5, we give the results of our calculus. Section 6 is devoted to the conclusion.

2. Theoretical background

We consider $N_e (> 2)$ electrons of charge $(-e_0)$ embedded in a uniform neutralizing background disk of positive charge $N_e e_0$ and area $S_{N_e} = \pi R_{N_e}^2$, R_{N_e} is the radius of the disk. We also assume that the disk is a part of the XY plane subjected to a strong uniform magnetic field, in the z direction, $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. The physics of the FQH fluid is then governed by a full interaction potential

$$V = V_{ee} + V_{eb} + V_{bb} \quad (2.1)$$

with V_{ee} , V_{eb} and V_{bb} denoting the electron-electron, electron-background and the background-background interaction potentials, respectively. Their corresponding expressions are given by

$$V_{ee} = \sum_{i < j}^N \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.2)$$

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^N \int_{S_N} d^2 r \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (2.3)$$

and

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_N} d^2 r \int_{S_N} d^2 r' \frac{e_0^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.4)$$

where \mathbf{r}_i (or \mathbf{r}_j) indicate the electron vector position while \mathbf{r} and \mathbf{r}' are background coordinates. $S_{N_e}(B)$ is the area of the disk and $\rho(B)$ is the density of the system (the number of electrons per unit area) that can also be defined by

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi l_0^2}, \quad (2.5)$$

where $l_0(B) = \sqrt{\hbar c / (e_0 B)}$ is the magnetic length, c is the speed of light, B is the magnetic field strength, and $\nu = 1/m$ is the filling factor, $m = 3, 5, \dots$. The background-background interaction potential can be classically calculated without using the wave function of the electron system. Its value is simply determined by calculating the elementary defined integral (2.4) and is given by [21]

$$V_{bb} = \frac{8e_0^2 N_e}{3\pi R_{N_e}} \quad (2.6)$$

with $R_{N_e} = \sqrt{2N_e m} l_0$. It remains to calculate the energies corresponding to the electron-electron and the electron-background potentials which depend on the nature of the wave function characterizing the system of electron.

For a given wave function $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_e})$, these energies are determined using the following formulae

$$\langle V_{ee} \rangle = \frac{\langle \Psi | V_{ee} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (2.7)$$

$$\langle V_{eb} \rangle = \frac{\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (2.8)$$

In an explicit manner, we have

$$\langle \Psi | V_{ee} | \Psi \rangle = \frac{N_e(N_e - 1)}{2} \int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e})|^2, \quad (2.9)$$

$$\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle = -\rho N_e \int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e})|^2 \int_{S_{N_e}} d^2 r \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}, \quad (2.10)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^2 r_1 \dots d^2 r_{N_e} |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_e})|^2 \quad (2.11)$$

with ([23, 24])

$$\int_{S_{N_e}} d^2 r \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} = 2\pi R_{N_e} \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1(q) J_0\left(\frac{q}{R_{N_e}} r_1\right), \quad (2.12)$$

where $J_n(x)$ are n -th order Bessel functions.

However, as shown in [22], the best way of making numerous simplifications in subsequent calculations amounts to replacing real polar coordinates by complex polar coordinates. Thus, let us apply the change $\mathbf{r}_k \rightarrow z_k = (x_k + iy_k = r_k e^{i\varphi_k})_{k=1, \dots, N}$ to localize the electrons.

3. The $\langle V_{ee} \rangle$ calculation

Now, for a demonstrative calculation, we will focus on the case of $N_e = 4$ electrons and $m = 3$. Let Ψ be the wave function of Laughlin for $N_e = 4$ electrons and $m = 3$

$$\Psi(4) = P(4) \exp\left(-\sum_k \frac{|z_k|^2}{4l_0^2}\right), \quad (3.1)$$

where $P(4)$ is the Jastrow part of the wave function that is given by

$$P(4) = (z_1 - z_2)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_4)^3 (z_2 - z_3)^3 (z_2 - z_4)^3 (z_3 - z_4)^3. \quad (3.2)$$

In complex coordinates, the expressions of equation (2.9) and equation (2.11) transform into

$$\langle \Psi | V_{ee} | \Psi \rangle = \frac{N_e(N_e - 1)}{2} \int d^2 z_1 \dots d^2 z_{N_e} \frac{e_0^2}{|z_1 - z_2|} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2, \quad (3.3)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^2 z_1 \dots d^2 z_{N_e} |\Psi(z_1, \dots, z_{N_e})|^2. \quad (3.4)$$

Now, we should perform a Jacobi transformation with complex coordinates instead of real coordinates [22] so as to get rid of the term $|z_1 - z_2|$ in the denominator of the integrand of the expression (3.3), which is done using the following:

$$Z_1 = z_1 - z_2, \quad (3.5)$$

$$Z_2 = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \quad (3.6)$$

$$Z_3 = \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4, \quad (3.7)$$

$$Z_4 = \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4}. \quad (3.8)$$

Then, the inter-particle coordinates ($z_i - z_j$) can be written in terms of Jacobi coordinates as follows:

$$z_1 - z_2 = Z_1, \quad (3.9)$$

$$z_1 - z_3 = Z_2 + \frac{Z_1}{2}, \quad (3.10)$$

$$z_1 - z_4 = Z_3 + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_1}{2}, \quad (3.11)$$

$$z_2 - z_3 = Z_2 - \frac{Z_1}{2}, \quad (3.12)$$

$$z_2 - z_4 = Z_3 + \frac{Z_2}{3} - \frac{Z_1}{2}, \quad (3.13)$$

$$z_3 - z_4 = Z_3 - 2\frac{Z_2}{3}. \quad (3.14)$$

Now, to write $P(4)$ in terms of the Z_i Jacobi coordinates, we just recast (3.14) into (3.2), then there holds the polynomial

$$P_J(4) = Z_1^3 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{2} \right)^3 \left(Z_3 + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_1}{2} \right)^3 \left(Z_3 + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_1}{2} \right)^3 \left(Z_2 - \frac{Z_1}{2} \right)^3 \left(Z_3 + \frac{Z_2}{3} - \frac{Z_1}{2} \right)^3 \left(Z_3 - 2\frac{Z_2}{3} \right)^3. \quad (3.15)$$

Similarly, the wave function becomes

$$\Psi_J = P_J(4) \exp \left(-\frac{|Z_1|^2}{8l_0^2} - \frac{|Z_2|^2}{6l_0^2} - \frac{3|Z_3|^2}{16l_0^2} - \frac{|Z_4|^2}{l_0^2} \right). \quad (3.16)$$

It is possible to develop (3.15) in terms of Z_1^n , where n belongs to the set $\{3, 5, \dots, 15\}$ for the case of $N_e = 4$ electrons, thus we have

$$P_J(4) = \sum_{n=3}^{15} \mathcal{C}_n(Z_2, Z_3) Z_1^n, \quad (3.17)$$

where \mathcal{C}_n are functions of the only variables Z_2 and Z_3 that can be extracted from (3.15) by the use of

$$\mathcal{C}_n(Z_2, Z_3) = \frac{1}{\pi \Gamma(1+n)} \sum_{m=3}^{15} \mathcal{C}_m(Z_2, Z_3) \int d^2 Z_1 Z_1^m \bar{Z}_1^n e^{-Z_1 \bar{Z}_1}, \quad (3.18)$$

wherein the integration is determined with the help of the key rule [25]

$$\int d^2 Z Z^m \bar{Z}^n e^{-Z \bar{Z}} = \pi \delta_{mn} \Gamma(1+n). \quad (3.19)$$

In computing $|\Psi(Z_1, \dots, Z_3)|^2$, we will encounter the expression $P_J(4)\bar{P}_J(4)$, where \bar{P}_J is the complex conjugate of P_J , by requiring to satisfy the rule (3.19), there only remain the terms with the same power in Z_i and \bar{Z}_i . Thus, the integrand of equation (3.3) has no dependence on the angles. This independence upon the angles is the key tool that greatly facilitates the exact calculation of complicated expressions involving integrals over many variables (see the work [22]). This is the most prominent advantage of the method of complex coordinates. For instance, the integral (3.3) can be reduced to a simple form

$$\langle \Psi | V_{ee} | \Psi \rangle = e_0^2 \frac{N_e(N_e - 1)}{2} \sum_{n=3}^{15} \mathcal{F}_n \int d^2 Z_1 (Z_1 \bar{Z}_1)^{n-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{|Z_1|^2}{4l_0^2} \right) \quad (3.20)$$

with the factor \mathcal{F}_n given by

$$\mathcal{F}_n = \int d^2 Z_2 d^2 Z_3 d^2 Z_4 \mathcal{C}_n \bar{\mathcal{C}}_n \exp \left(-\frac{|Z_2|^2}{3l_0^2} - \frac{3|Z_3|^2}{8l_0^2} - \frac{2|Z_4|^2}{l_0^2} \right). \quad (3.21)$$

Similarly, the norm $\langle \Psi | \Psi \rangle$ is of the form

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n=3}^{15} \mathcal{F}_n \int d^2 Z_1 (Z_1 \bar{Z}_1)^n \exp \left(-\frac{|Z_1|^2}{4l_0^2} \right). \quad (3.22)$$

Now, dividing (3.20) by (3.22), we get the (e-e) interaction energy for a system with $N_e = 4$ electrons,

$$E_{ee} = 1.310596(e_0^2/l_0),$$

which coincides with an analogous result in [21].

4. The $\langle V_{eb} \rangle$ calculation

In the case of $\langle V_{eb} \rangle$ calculation, there is no need to use Jacobi coordinates, it suffices to work with the polynomial $P(4)$ of equation (3.3) directly. So, let us expand $P(4)$ in powers of z_1 , that is

$$P(4) = \sum_{n=0}^9 \mathcal{C}_n(z_2, z_3, z_4) z_1^n, \quad (4.1)$$

where $n = 0$ ($n = 9$) denotes the minimum (maximum) power in z_1 , the wave function is, therefore, written as follows:

$$\Psi = P(4) \exp\left(-\frac{|z_1|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_2|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_3|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_4|^2}{2l_0^2}\right). \quad (4.2)$$

Furthermore, it is possible to write $\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle$ like

$$\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle = \frac{-2N_e^2}{R_e} \sum_{n=0}^9 \mathcal{G}(n) \int \mathcal{D}_p z \mathcal{C}_n \bar{\mathcal{C}}_n \exp\left(-\frac{|z_2|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_3|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_4|^2}{2l_0^2}\right) \quad (4.3)$$

with $\mathcal{D}_p z = d^2 z_2 d^2 z_3 d^2 z_4$,

$$\mathcal{G}(n) = \int dr_1 \int \frac{dq}{q} J_1(q) J_0\left(\frac{q}{R_{N_e}} r_1\right) r_1^{2n+1} \exp\left(-\frac{r_1^2}{2l_0^2}\right), \quad (4.4)$$

and $|z_i| = r_i$. One can verify that [26]

$$\mathcal{G}(n) = (2l_0^2)^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right) \text{MeijerG}\left[\{\{1\}, \{1\}\}, \{\{1/2, n+1\}, \{-1/2\}\}, N_e m\right]. \quad (4.5)$$

In the present demonstrative calculation, $N_e = 4$ and $m = 3$. MeijerG is the Meijer G function [26]. The expression of the Meijer G function in (4.5) can also be written as

$$\text{MeijerG}\left[\{\{1\}, \{1\}\}, \{\{1/2, n+1\}, \{-1/2\}\}, N_e m\right] = G_{23}^{21}\left(N_e m \left|_{\frac{1}{2}, n+1, -\frac{1}{2}}^{1,1}\right.\right).$$

As concerns the norm $\langle \Psi | \Psi \rangle$, in the z -coordinates, it will take the following form

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^9 \int \mathcal{D}_p z \mathcal{C}_n \bar{\mathcal{C}}_n \exp\left(-\frac{|z_2|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_3|^2}{2l_0^2} - \frac{|z_4|^2}{2l_0^2}\right) \int d^2 z_1 (z_1 \bar{z}_1)^n \exp\left(-\frac{|z_1|^2}{2l_0^2}\right). \quad (4.6)$$

As in the case of V_{ee} calculation, the electron-background interaction energy is determined using

$$E_{eb} = \frac{\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}, \quad (4.7)$$

which gives the value $E_{eb} = -5.638272(e_0^2/l_0)$ as in the work [21]. The dependence in angles is simplified when dividing the quantity $\langle \Psi | V_{eb} | \Psi \rangle$ by $\langle \Psi | \Psi \rangle$. This is because the result of the integration upon the angle variables is the same for both quantities and is equal to $(2\pi)^4$.

5. Results and discussion

In this paragraph, we present our results concerning the ground state energy for systems with up to $N_e = 7$ electrons at the filling $\nu = 1/3$ and $N_e = 6$ electrons at the filling $\nu = 1/5$. We also make a comparison with other works such as [17, 21, 27]. Our analysis is summarized in the tables blow. It should be notified that for $N_e = 4$ electrons, the authors in [17] and with Monte Carlo calculations, have derived for the energy of the ground state the value $-1.55536 e_0^2/l_0$ at the filling $\nu = 1/3$ and the value $-1.28636 e_0^2/l_0$ at the filling $\nu = 1/5$, which well agree with the values we derived by the exact analytical calculation, see table 1 and table 2. Table 3 allows us to compare our results concerning the (e-b) and (e-e) interaction energies with those derived in [27] at the filling $\nu = 1/5$.

In tables 1 and 2, our results regarding the energy of the ground state are given in the fifth column whereas in the sixth column there are given those of [21] and [27], respectively. At this point, it should be emphasized that in table 1, table 2 and table 3, the comparison is carried out between analytical methods depending on whether ordinary or complex polar coordinates are used. Moreover, this presentation of tables allows one to clearly show the advantage of using polar coordinates in the complex form.

Table 1. Ground-state energy $E = E_{ee} + E_{eb} + E_{bb}$ (in units of e_0^2/l_0) obtained in the Laughlin state at the filling $\nu = 1/3$ for systems with up to $N_e = 7$ electrons. The results E_A are the values of the ground state energy obtained also by an exact analytical calculation in [21] at the filling $\nu = 1/3$.

N_e	E_{bb}	E_{eb}	E_{ee}	E	E_A
2	0.98014	-2.02115	0.276946	-0.764064	-0.764064
3	1.800633	-3.679464	0.719316	-1.159515	-1.159515
4	2.772256	-5.638272	1.310596	-1.55542	-1.55542
5	3.874345	-7.856335	2.030715	-1.951275	————
6	5.092956	-10.306452	2.864394	-2.349102	————
7	6.417859	-12.968494	3.802267	-2.748368	————

Table 2. Ground-state energy $E = E_{ee} + E_{eb} + E_{bb}$ (in units of e_0^2/l_0) obtained in the Laughlin state at the filling $\nu = 1/5$ for systems with up to $N_e = 6$ electrons. The results E_A are the values of the ground state energy obtained also by an exact analytical calculation in [27] at the filling $\nu = 1/5$.

N_e	E_{bb}	E_{eb}	E_{ee}	E	E_A
3	1.394763	-2.911356	0.554745	-0.961848	-0.961848
4	2.14738	-4.4429	1.009184	-1.286336	-1.286312
5	3.001055	-6.17325	1.566615	-1.60558	————
6	3.944988	-8.082144	2.209278	-1.927878	————

Table 3. The electron-electron (e-e) and electron-background (e-b) interaction energies are given (in units of e_0^2/l_0) at the filling $\nu = 1/5$, namely E_{ee} and E_{eb} . Analogous results that we designate by E_{eeA} and E_{ebA} , are derived in [27] at the filling $\nu = 1/5$.

N_e	E_{eb}	E_{ebA}	E_{ee}	E_{eeA}
3	-2.911356	-2.911356	0.554745	0.554745
4	-4.4429	-4.442876	1.009184	1.009184
5	-6.17325	————	1.566615	————
6	-8.082144	————	2.209278	————

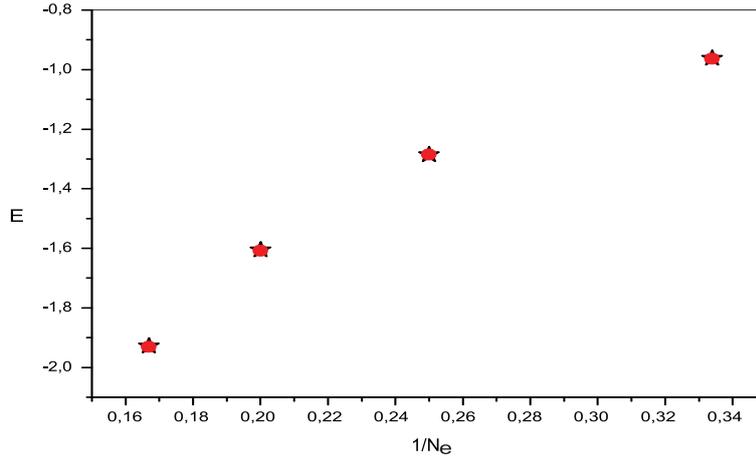


Figure 1. (Color online) Exact analytical results for the ground state energy E using the method of complex polar coordinates in disk geometry for the Laughlin state at $\nu = 1/5$. The ground state energy E is plotted as a function of $1/N_e$ for systems with $N_e = 3, 4, 5$ and 6 electrons. The stars represent our result, the disks are the results derived in [17] using the method of Monte Carlo. Energies are in units of e_0^2/l_0 .

In figure 1, we can see that the results derived by the present exact analytical calculation at the filling $\nu = 1/5$ compare well with the results of [17] obtained using the method of Monte Carlo.

6. Concluding remarks

In this work we have exposed all the necessary steps that permit to make an analytic computation of the energies of the ground state for FQHE systems of electrons at $\nu = 1/m$, m odd. The electron-electron and electron-background interaction energies are calculated separately. The results we derived are in perfect accordance with previous calculations such as the exact analytical calculation of [21, 27] or Monte Carlo simulations of [17]. In a broader view, the method of complex polar coordinates described in [22] may be useful and efficient in analytically calculating the ground state or excited state energies for various quantum Hall systems of electrons with filling factors other than $\nu = 1/m$, m odd, such as ($\nu = 2/5, 3/7, \dots$). We expect that the method of complex polar coordinates has some relevance to 2D Coulomb systems. For instance, it can be seen, for 2D Dyson gas, that the method of complex coordinates may be useful and practical in analytically evaluating, with many simplifications, the key quantities such as the partition function or the mean energy. The issue of finding links for the approach described in [22] with other areas of condensed matter physics remains to be extensively investigated. The calculation can be extended to larger systems with $N_e > 7$ electrons depending on the performance of the machine. This will make it possible to derive exact analytical bulk regime values for key quantities, such as various interaction energies. A part of the code [28] of the electron-electron interaction energy computation V_{ee} is given in the Appendix.

Appendix

```
* Part of the code of the Vee calculation in MATHEMATICA SOFTWARE (Ne=4 electrons)*

PartialVee=Block[{PolyJaco, CoefPoly, CoefPolyMin, PolyExpand, RePoly, CoefPolyList, Clist,
Inner1, Inlist, I1, I2, I3, Vee },
PolyJaco=Z[1]^3(-Z[1]/2 + Z[2])^3(Z[1]/2 + Z[2])^3(-2 Z[2]/3 + Z[3])^3
(-Z[1]/2 + Z[2]/2 + Z[3])^3(Z[1]/2 + Z[2]/2 + Z[3])^3;
CoefPoly=Exponent[PolyJaco, Z[1]];
CoefPolyMin=Exponent[PolyJaco, Z[1], Min];
PolyExpand=Expand[PolyJaco];
RePoly=Flatten[Table[Coefficient[PolyExpand, Z[1], i], {i, CoefPolyMin, CoefPoly, 2}]];
CoefPolyList=Plus@@RePoly;
Clist=CoefPolyList/.Plus->List;
Inner1=Inner[Times, Clist/.{Z[2]-> 1, Z[3]-> 1}, Clist, Plus];
Inlist=Inner1/.Plus->List/.{Z[2]-> r[2]^2, Z[3]-> r[3]^2};
I1 = Integrate[Inlist*r[2]*r[3]*Exp[-(3 r[3]^2/(8l[0]^2))],
{r[3], 0, Infinity}, Assumptions -> (l[0]>0)];
I2 = Integrate[I1*Exp[-(r[2]^2/(3l[0]^2))], {r[2], 0, Infinity},
Assumptions -> (l[0]>0)];
I3 = Integrate[I2*r[4]*Exp[-(2 r[4]^2/(l[0]^2))], {r[4], 0, Infinity},
Assumptions -> (l[0]>0)];
Vee = Reverse[Plus @@ I3 /. Plus -> List]]
PartialVee
{1688579923968000 l[0]^36, 3170189352960 l[0]^32,
3024980640 l[0]^28, 2095200 l[0]^24, 122715/128 l[0]^20,
189/1024 l[0]^16), 3/262144 l[0]^12}
II[i_] := Integrate[r[1]^(2i)*Exp[(-r[1]^2)/(4l[0]^2)], {r[1], 0,
Infinity}, Assumptions -> l[0] > 0];
JJ[i_] := Integrate[r[1]^(2i+1)*Exp[(-r[1]^2)/(4l[0]^2)], {r[1], 0,
Infinity}, Assumptions -> l[0] > 0];
list1 = Flatten[Table[II[i], {i, 3, 15, 2}]];
list2 = Flatten[Table[JJ[i], {i, 3, 15, 2}]];
num = Inner[Times, PartialVee, list1, Plus];
denom = Inner[Times, PartialVee, list2, Plus];
FullVee = Divide[num, denom];
Eee = N[Times[FullVee, (12/2) e[0]^2], 6];
Eee
1.310596 e[0]^2 / l[0]
```

References

1. Tsui D.C., Stormer H.L., Gossard A.C., Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1559; doi:10.1103/PhysRevLett.48.1559.
2. Laughlin R.B., Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 1395; doi:10.1103/PhysRevLett.50.1395.
3. Jain J.K., Phys. Rev. Lett., 1989, **63**, 199; doi:10.1103/PhysRevLett.63.199.
4. Jain J.K., Composite Fermions, Cambridge University Press, New York, 2007.
5. Jain J.K., Phys. Rev. B, 1990, **41**, 7653; doi:10.1103/PhysRevB.41.7653.
6. Jain J.K., Science, 1994, **266**, 1199; doi:10.1126/science.266.5188.1199.
7. Simon S.H., Rezayi E.H., Milovanovic M.V., Phys. Rev. Lett., 2003, **91**, 046803; doi:10.1103/PhysRevLett.91.046803.
8. Wilczek F., Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 957; doi:10.1103/PhysRevLett.49.957.
9. Arovas D.P., Schrieffer J.R., Wilczek F., Phys. Rev. Lett., 1984, **53**, 722; doi:10.1103/PhysRevLett.53.722.
10. Haldane F.D.M., Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 605; doi:10.1103/PhysRevLett.51.605.
11. Haldane F.D.M., Rezayi E.H., Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 237; doi:10.1103/PhysRevLett.54.237.
12. Fano G., Ortolani F., Colombo E., Phys. Rev. B, 1986, **34**, 2670; doi:10.1103/PhysRevB.34.2670.
13. D'Ambrumenil N., Morf R., Phys. Rev. B, 1989, **40**, 6108; doi:10.1103/PhysRevB.40.6108.
14. He S., Simon S.H., Halperin B.I., Phys. Rev. B, 1994, **50**, 1823; doi:10.1103/PhysRevB.50.1823.
15. Feiguin A.E., Rezayi E., Nayak C., Das Sarma S., Phys. Rev. Lett., 2008, **100**, 166803; doi:10.1103/PhysRevLett.100.166803.
16. Caillol J.M., Levesque D., Weis J.J., Hansen J.P., J. Stat. Phys., 1982, **28**, 325; doi:10.1007/BF01012609.
17. Ciftja O., Wexler C., Phys. Rev. B, 2003, **67**, 075304; doi:10.1103/PhysRevB.67.075304.
18. Morf R., Halperin B.I., Phys. Rev. B, 1986, **33**, 2221; doi:10.1103/PhysRevB.33.2221.
19. Melik-Alaverdian V., Bonesteel N.E., Phys. Rev. B, 1998, **58**, 1451; doi:10.1103/PhysRevB.58.1451.
20. Jeon G.S., Jain J.K., Phys. Rev. B, 2003, **68**, 165346; doi:10.1103/PhysRevB.68.165346.
21. Ciftja O., Physica B, 2009, **404**, 227; doi:10.1016/j.physb.2008.10.036.
22. Bentalha Z., Moumen L., Ouahrani T., Cent. Eur. J. Phys., 2014, **12**, 511; doi:10.2478/s11534-014-0476-5.
23. Ciftja O., Phys. Lett. A, 2010, **374**, 981; doi:10.1016/j.physleta.2009.12.017.
24. Ciftja O., J. Comput.-Aided Mater. Des., 2007, **14**, 37; doi:10.1007/s10820-006-9035-8.
25. Shakirov Sh., Phys. Lett. A, 2011, **375**, 984; doi:10.1016/j.physleta.2011.01.004.
26. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1980.
27. Ciftja O., Physica B, 2009, **404**, 2244; doi:10.1016/j.physb.2009.04.018.
28. Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0, Champaign, Illinois, 1999.

Метод розрахунку енергій у режимі дробового квантового ефекта Холла

М.А. Аммар¹, З. Бенталха², С. Бехечі²

¹ Відділення охорони довкілля, Університет м. Медеа, 26000 Медеа, Алжир

² Лабораторія теоретичної фізики, Університет м. Тлемсен, В.Р. 230, 13000 Тлемсен, Алжир

У попередній роботі ми отримали точні результати для енергій основного стану у режимі дробового квантового ефекта Холла (FQHE) для систем з $N_e = 6$ електронів включно при коефіцієнті заповнення $\nu = 1/3$, використавши метод комплексних полярних координат. В цій роботі ми представляємо цікаві обчислювальні деталі попередніх розрахунків і розширюємо наші обчислення до $N_e = 7$ електронів при $\nu = 1/3$. Крім того, отримано подібні точні результати при заповненні $\nu = 1/5$ для систем з $N_e = 6$ електронів включно. Отримані результати за допомогою аналітичних обчислень добре узгоджуються з їхніми аналогами, отриманими методом Монте Карло в даній роботі.

Ключові слова: квантовий ефект Холла, 2D електронний газ, багаточастинкова хвильова функція, сильно скорельована система

ملخص

هذه الأطروحة هي مساهمة في دراسة خصائص غاز إلكتروني في مجال ذو بعدين و بوجود حقل مغناطيسي عال. التفاعلات بين إلكترونات غاز في مجال ذو بعدين و بوجود حقل مغناطيسي قد تم دراستها بالكامل في الحالتين الأساسية والمثارة و التي تعتبر مصدر مفعول هول الكمي الكسري. لذلك سوف نستعمل طريقتين مختلفتين، الأولى وهي الطريقة التحليلية والثانية تتمثل في الطريقة القطرية الدقيقة لإيجاد طاقات نظام يحتوي على عدة إلكترونات وذلك في عوامل ملء $3/1$ ، $5/1$ ، $7/1$ و $5/2$. وقد تم تناول طاقة الحالات الأساسية والمثارة لنظام مفعول هول الكمي الكسري لعدد من الإلكترونات N_e في الشكل الهندسي لقرص كلا من لوفلين وجين. والتي منها أثبتنا أن شكل دالة موجة هذا النظام تتركز على محدد سلاتر. الشحنات الجزئية التي تشغل المستوى الأدنى للونديو تتفاعل وفق تفاعل كولومب، حيث يتم الحصول على هذه الطاقات بالطريقة التحليلية. أقرب إلى الظروف التجريبية، و باستخدام تحليل تفاعل كولومب قصير المدى على عوامل شبه كمن هالدين، والذي يعمل على تفكيك تفاعل كل شحنتين جزئيتين $V(r)$ إلى مجموع الإسقاطات على قطاعات الزخم الزاوي النسبي V_m ، و الذي تم الحصول عليه في المستوى الأدنى للونديو بالطريقة القطرية الدقيقة. في الأخير قمنا بدراسة الطاقة بالنسبة لعدد الإلكترونات لكل من لوفلين والفارميونات المركبة في حالاتها المثارة لعدة أنظمة في عامل ملء $3/1$ و التوافق الحاصل بين مفعول هول الكمي الكسري و مفعول هول الكمي الصحيح. ثم قدمنا موجة "بفافين" لمور-ريد لوصف الحالة $2/5$ في المستوى الثاني للونديو.

الكلمات المفتاحية: الطريقة التحليلية، الطريقة القطرية الدقيقة، نموذج الإسقاط، شبه كمن هالدين، تفاعل كولومب، مفعول هول الكمي الكسري، غاز إلكتروني في مجال ذو بعدين، الشكل الهندسي لقرص، دالة موجة الإلكترونات، نظام مترابط بشدة، حالة بفافين لمور-ريد.

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude des propriétés d'un gaz électronique bidimensionnel soumis à un champ magnétique très intense. Les effets des interactions entre les électrons du gaz bidimensionnel en présence d'un champ magnétique, ont été complètement étudiés dans l'état fondamental et l'état excité, ils sont à l'origine de l'effet Hall quantique fractionnaire (*EHQF*). Nous considérons deux approches différentes, la première est la méthode analytique et la seconde consiste en la diagonalisation numérique exacte pour obtenir les énergies d'un système de plusieurs électrons à des facteurs de remplissages $1/3$, $1/5$, $1/7$ et $2/5$. L'énergie des états fondamental et excité de l'*EHQF* de N_e électrons dans la géométrie du disque ont été abordées par Laughlin et Jain. Ils ont montré que la forme de la fonction d'onde de ce système est exprimée en termes de déterminant de Slater. Les charges fractionnaires occupant le plus bas niveau de Landau (*PBNL*) interagissent via l'interaction de Coulomb, où ces énergies sont obtenues par la méthode analytique. Plus proche des conditions expérimentales, en utilisant la décomposition de l'interaction de Coulomb de courte portée sur les pseudopotentiels de Haldane, où elle décompose toute interaction de deux charges fractionnaires $V(r)$ en une somme de projections sur les secteurs de moments angulaires relatifs V_m , que l'on a déterminé dans le *PBNL* obtenu par diagonalisation numérique exacte. Enfin, nous avons étudié l'énergie d'interaction par particule de la fonction d'onde de Laughlin et celle des fermions composites (*FC*) excités de plusieurs systèmes à $\nu = 1/3$ et la correspondance entre l'*EHQF* et l'effet Hall quantique entier (*EHQE*). Puis, nous avons introduit la fonction d'onde "Pfaffien" de Moore-Read pour décrire l'état $5/2$ dans le second niveau de Landau (*SNL*).

Mots Clés: Méthode analytique, diagonalisation numérique exacte, modèle de la projection, pseudopotentiel de Haldane, interaction coulombienne, effet Hall quantique fractionnaire, gaz électronique bidimensionnel, géométrie du disque, fonction d'onde, système fortement corrélé, état Pfaffien de Moore-Read.

Abstract

This thesis is a contribution to the study of the properties for two-dimensional electrons subjected to a strong magnetic field. The effects of the interactions between the electrons of two-dimensional gas were completely studied in the ground and excited states, they are at the origin of the fractional quantum Hall effect (*FQHE*). Let us consider, the first is the analytical method and the second consists of the exact numerical diagonalization to obtain the energies of the systems of several electrons with the fillings factors $1/3$, $1/5$, $1/7$ and $2/5$. The energy of the ground and excited states of the *FQHE* of N_e electrons in the disk geometry were resolved by Laughlin and Jain. They showed that the form of the wave function of this system expressed in terms of Slater determinants. The fractional charge in the lowest Landau level (*LLL*) interacting via the Coulomb interaction, where its energies are obtained by the analytical method. More near to the experimental conditions, by using the decomposition of the Coulomb interaction of the short-range on the Haldane pseudopotentials, where they decompose any interaction $V(r)$ with two fractional charge into a sum of its projections V_m on the sectors of relative angular momenta, which is to be solved in the *LLL* obtained by exact numerical diagonalization. Finally, we studied the interaction energy per particle of the Laughlin wave function and that of the excited composite fermions (*CF*) for several systems at $\nu = 1/3$ and the correspondence between the *FQHE* and the *IQHE*. Then we introduced the Moore-Read "Pfaffian" wave function to describe the $5/2$ state in the second Landau level (*SLL*).

Keywords: Analytical method, exact numerical diagonalization, projection model, Haldane pseudopotential, Coulomb interaction, fractional quantum Hall effect, two-dimensional electronic gas, disk geometry, wave function, strongly correlated system, Moore-Read Pfaffian state.