



**HAL**  
open science

# Phénomène de Newhouse et bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables

Sébastien Biebler

► **To cite this version:**

Sébastien Biebler. Phénomène de Newhouse et bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1066 . tel-01940348

**HAL Id: tel-01940348**

**<https://theses.hal.science/tel-01940348>**

Submitted on 30 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS EST

Spécialité : Mathématiques

Ecole doctorale MSTIC

Présentée par Sébastien Biebler

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS EST

---

**Phénomène de Newhouse et Bifurcations  
en Dynamique holomorphe à plusieurs variables**

---

Soutenue le 13 juillet 2018 devant le jury composé de :

|                         |                         |                    |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| M. Pierre Berger        | Université Paris 13     | Examineur          |
| M. Christian Bonatti    | Université de Bourgogne | Examineur          |
| Mme. Laura DeMarco      | Northwestern University | Rapporteur         |
| M. Henry de Thélin      | Université Paris 13     | Examineur          |
| M. Romain Dujardin      | Sorbonne Université     | Directeur de thèse |
| M. Christophe Dupont    | Université de Rennes    | Rapporteur         |
| Mme. Florence Merlevede | Université Paris-Est    | Examineur          |

Thèse effectuée au  
Laboratoire LAMA CNRS UMR 8050  
5 Boulevard Descartes, Champs-sur-Marne  
77454 Marne-La-Vallée, France

---

## Remerciements

---

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à Romain Dujardin pour avoir dirigé ma Thèse. Je me souviendrai toujours de notre première rencontre à l'UMLV un matin brumeux d'hiver, où il m'a présenté son domaine de recherche qui allait vite devenir aussi le mien. Ce jour est désormais lointain, mais j'ai toujours pu compter sur lui pour me transmettre sa passion de la recherche en mathématiques. Il m'a poussé à travailler sur des problèmes à la fois intéressants et féconds. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant du temps et de l'énergie qu'il m'a consacrés sans compter. Sa grande disponibilité, sa générosité et sa bienveillance constante ont énormément compté pour moi. Un très grand Merci !

C'est un grand honneur pour moi que me font Christophe Dupont et Laura DeMarco d'avoir accepté de rapporter ma Thèse. Durant ces quatre ans, j'ai beaucoup appris en lisant leurs travaux. Aujourd'hui je tiens à leur exprimer ma gratitude pour leur relecture attentive de mon manuscrit et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je suis très touché d'avoir le privilège de pouvoir présenter ma Thèse devant des mathématiciens comme Pierre Berger, Christian Bonatti, Henry de Thélin et Florence Merlevede. Leurs travaux m'ont beaucoup inspiré, je suis heureux d'avoir la chance de leur exposer les miens.

La tradition exige que je remercie à présent toutes les personnes qui ont compté à un moment ou un autre dans ma vie ou mes études. C'est un passage obligé, un brin narcissique, auquel je souscris volontiers. Puisqu'il faut bien commencer quelque part, commençons par le début. Je tiens à exprimer ma gratitude aux professeurs qui ont le plus compté pour moi en Alsace, soit dans l'ordre chronologique : Mme Grawey, Mme Kurz, Mr Beyer, Mr Thomas, Mr Gensbittel, Mr Couderc, Mr Lichtlé, Mr Roech.

Je n'oublie pas que ma formation scientifique a commencé avec mes années Maths Sup/Maths Spé. Merci à Mr Colin, dont les cours précis et rigoureux ont marqué des générations d'élèves. Merci à Mme Nessi, dont les cakes au chocolat étaient encore meilleurs que ses cours d'optique. Merci aussi à Mr Basterra pour ses cours passionnants sur Lorenzaccio ou Michel Leiris. Merci à Mr de Pazzis pour ses cours de haut vol. Merci à Mr Vecchiato pour ses fascinants cours de physique. Merci enfin à Mme Vandecasteele pour son humour (dont je fus si souvent la victime). J'ai également un souvenir ému pour mes camarades de cette époque. Pour n'en citer que quelques uns : Christophe, Florian, Nicolas, Simon, Christopher, Caroline, Pierre, Maxime, Nicolas, Maximilien, et bien d'autres...

Je tiens à exprimer ma gratitude aux différents professeurs dont j'ai suivi les passionnants cours à l'École Normale supérieure. Dans l'ordre chronologique : Zhan Shi, Jean-Marc Delort, Olivier Biquard, Tony Ly, Pierre Bertin, François Beguin, Laure Saint-Raymond, Wendelin Werner, Guillaume Carlier, Olivier

Debarre, Daniel Han-Kwan, Josselin Garnier. Je tiens également à remercier mes anciens condisciples pour de nombreux très bons moments à Ulm ou Montrouge : Florian, Jean-Luc, Caroline, Maxime, Thibault, Guillaume, Joël, Diego, Cagri, Sébastien, et bien d'autres...

C'est avec plaisir que je remercie mes collègues dynamiciens : Bac, Rita, Zhuchao, Fabrizio, Matteo, Viet, Matthieu... Un grand merci aussi à Sandrine qui a parfaitement joué son rôle de grande soeur. Ces remerciements ne seraient pas complets sans citer mes compagnons de bureau successifs à Marne : Xavier, Kirushna, Pierre, Ali, Antoine.

C'est aussi la bonne occasion pour exprimer ma gratitude à Charles Favre pour de nombreuses discussions intéressantes, et plus particulièrement pour m'avoir invité et guidé à Rio (mention spéciale pour les soirées avec Luis Gustavo Mendes...). Je tiens également à remercier Bertrand Deroin et Sylvain Crovisier pour leurs cours et leurs conseils durant mon année de master. Un grand merci à Johan Taffin pour m'avoir invité à Dijon. Merci à Thomas Gauthier et Gabriel Vigny pour leurs invitations à Amiens. Enfin, je tiens également à remercier François Berteloot, Arnaud Chéritat, Lingmin Liao, Nicolae Mihalache et bien d'autres...

Je remercie également les professeurs du LAMA avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner. Citons en particulier Luc Delaëval, Francis Ribaud, Frédéric Praslon, Claudine Degand, Luc Le Cor, Laurent Hauswirth, Magdalena Kobilanski, et bien d'autres... Merci aussi à Jean-Michel Mallard et Sébastien Combescot pour d'intéressants cours non-mathématiques.

Un grand merci à Audrey Patout, Christiane Lafargue et Sylvie Cach pour leur aide indispensable. Toutes les trois ont su à de maintes reprises répondre avec efficacité et bienveillance à mes (sans doute beaucoup trop nombreuses) questions.

Un grand merci à Christophe pour une longue et précieuse amitié. Les voyages à trois avec Florian en Italie, en Bavière et en Ecosse font sans aucun doute partie des beaux moments de cette thèse.

Je tiens spécialement à remercier M. Un grand merci également à mes amis parisiens : Kevin, Alexandre pour ne citer qu'eux. Je profite de l'occasion pour saluer chaleureusement mon voisin Wilson. Enfin, je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude à Isabel et Gérard pour leur hospitalité et leur amitié.

Je remercie également mes grand-parents. J'ai en particulier une pensée pour ma grand-mère qui a 80 ans le jour de cette soutenance.

Finalement, les derniers mots seront pour mes parents pour m'avoir soutenu tout au long de ces années. Cette thèse leur est dédiée.



---

## Résumé

---

Cette thèse est consacrée à l'étude du phénomène de Newhouse et des bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Elle comporte trois Théorèmes principaux.

Le premier de ces trois résultats est un Gap Lemma complexe. En dynamique réelle, le Gap Lemma de Newhouse donne un critère sur le produit des épaisseurs de deux ensembles de Cantor dynamiques pour prouver que leur intersection est non vide. On en donne une généralisation partielle au cas des ensembles de Cantor dynamiques dans  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, on introduit une notion d'épaisseur pour un ensemble de Cantor dynamique planaire et on fournit un critère sur le produit de deux épaisseurs afin d'obtenir une intersection entre deux ensembles de Cantor dynamiques. On montre également que l'épaisseur est une quantité qui varie continûment, ce qui permet d'obtenir des intersections persistantes d'ensembles de Cantor dynamiques.

Le second Théorème de cette thèse démontre l'existence du phénomène de Newhouse dans l'espace des automorphismes polynomiaux de degré  $d$  pour n'importe quel degré  $d \geq 2$  dans  $\mathbb{C}^3$ . Au contraire de la situation dans  $\mathbb{C}^2$ , le degré est ici connu et optimal. Le point clef de la preuve est l'introduction dans le domaine complexe d'un outil issu de la dynamique réelle : le blender de Bonatti et Diaz. On formalise le concept de blender complexe et on donne un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^3$  de degré 2 possédant un blender. Puis, on l'utilise afin de construire successivement des tangences persistantes et des sous-ensembles résiduels d'automorphismes ayant une infinité de puits.

Enfin, le dernier résultat porte sur les bifurcations d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  très particuliers, appelés exemples de Lattès, semi-conjugués à une application affine sur un tore. Dujardin a conjecturé que ces derniers étaient accumulés par des ouverts de bifurcations. On montre que tout exemple de Lattès de degré suffisamment élevé est accumulé par de telles bifurcations robustes. Ceci implique en particulier que tout exemple de Lattès possède un itéré dans l'adhérence de l'intérieur du lieu de bifurcation. La démonstration est basée sur l'obtention d'intersections persistantes entre l'ensemble postcritique et un ensemble hyperbolique répulsif contenu dans l'ensemble de Julia. La preuve est divisée en deux parties : on donne tout d'abord un toy-model qui permet d'obtenir des intersections persistantes entre l'ensemble limite d'un certain type d'IFS, appelé IFS correcteur, et une courbe. Ensuite, dans un second temps, on perturbe l'exemple de Lattès pour créer simultanément un IFS correcteur dans l'ensemble de Julia et une courbe bien orientée dans l'ensemble postcritique.

Mots clef : phénomène de Newhouse, bifurcations, stabilité, intersections persistantes, tangences persistantes, ensemble de Cantor dynamique, blender, mélangeur, Gap Lemma, épaisseur, automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^k$ , endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ , exemple de Lattès

---

## Abstract

---

In this PhD thesis, we study Newhouse's phenomenon and bifurcations in the context of dynamics in several complex variables. We prove three main Theorems.

The first one is a complex Gap Lemma. In real dynamics, Newhouse's Gap Lemma gives a criterion on the product of the thicknesses of two dynamical Cantor sets  $K$  and  $L$  to show that  $K \cap L$  is not empty. We show a partial generalization of this result for dynamical Cantor sets in  $\mathbb{C}$ . A relevant notion of thickness in this case is defined and we give some criterion on the product of two thicknesses to show that two dynamical Cantor sets in  $\mathbb{C}$  must intersect. We also show that the thickness varies continuously, which generates persistent intersections of dynamical Cantor sets.

In the second Theorem, we show that there exists a polynomial automorphism  $f$  of  $\mathbb{C}^3$  of degree 2 such that for every automorphism  $g$  sufficiently close to  $f$ ,  $g$  admits a tangency between the stable and unstable laminations of some hyperbolic set. As a consequence, for each  $d \geq 2$ , there exists an open set of polynomial automorphisms of degree at most  $d$  in which the automorphisms having infinitely many sinks are dense. In contrary to the case of  $\mathbb{C}^2$ , the degree is known. To prove these results, we give a complex analogue to the notion of blender introduced by Bonatti and Diaz. In particular, we use a blender to produce robust tangencies.

In the third and last result, we study the phenomenon of robust bifurcations in the space of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . We prove that any Lattès example of sufficiently high degree belongs to the closure of the interior of the bifurcation locus. This gives a partial answer to a conjecture of Dujardin. In particular, every Lattès map has an iterate with this property. To show this, we design a method creating robust intersections between the limit set of a particular type of iterated functions system in  $\mathbb{C}^2$  with a well-oriented complex curve. Then we show that any Lattès map of sufficiently high degree can be perturbed so that the perturbed map exhibits this geometry.

Keywords : Newhouse's phenomenon, bifurcations, stability, robust intersections, robust tangencies, dynamical Cantor set, blender, Gap Lemma, thickness, polynomial automorphism of  $\mathbb{C}^k$ , holomorphic endomorphism of  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ , Lattès examples



# *Sommaire*

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>v</b> |
| 1.1      | Contexte historique . . . . .  | v        |
| 1.1.1    | Phénomène de Newhouse . . . . .  | v        |
| 1.1.2    | Stabilité et bifurcations en dynamique holomorphe . . . . .  | viii     |
| 1.2      | Résultats . . . . .  | xi       |
| 1.2.1    | Gap Lemma complexe . . . . .   | xi       |
| 1.2.2    | Phénomène de Newhouse pour les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$ . . . . .                | xii      |
| 1.2.3    | Bifurcations des exemples de Lattès . . . . .  | xiv      |
| <b>2</b> | <b>Phénomène de Newhouse en dimension 2</b>  | <b>1</b> |
| 2.1      | Hyperbolicité uniforme . . . . .   | 1        |
| 2.1.1    | Généralités . . . . .  | 1        |
| 2.1.2    | Densité de l'hyperbolicité en dimension 1 . . . . .  | 2        |
| 2.1.3    | Non-densité de l'hyperbolicité en dimension supérieure . . . . .                                     | 3        |
| 2.2      | Phénomène de Newhouse : la démonstration originelle pour les difféomorphismes des surfaces . . . . . | 6        |
| 2.2.1    | Le Théorème initial et sa preuve . . . . .   | 6        |
| 2.2.2    | Le Théorème amélioré . . . . .   | 9        |
| 2.2.3    | Compléments sur les ensembles de Cantor dynamiques et raffinement du Théorème de Newhouse . . . . .  | 10       |
| 2.3      | Phénomène de Newhouse : extension à la dynamique holomorphe . . . . .                                | 11       |
| 2.3.1    | Toy-model linéaire . . . . .   | 11       |
| 2.3.2    | Perturbations non linéaires du toy-model . . . . .   | 16       |
| 2.3.3    | Implémentation dans le cas des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ . . . . .                | 16       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Une généralisation de la notion d'épaisseur</b>   | <b>20</b> |
| 3.1      | Définitions . . . . .  | 20        |
| 3.2      | Théorème . . . . .   | 24        |
| 3.3      | Exemple . . . . .  | 25        |
| 3.4      | Preuve du Théorème A . . . . .   | 25        |
| 3.5      | Continuité de l'épaisseur . . . . .  | 29        |
| <b>4</b> | <b>Phénomène de Newhouse en dimension 3</b>  | <b>33</b> |
| 4.1      | Phénomène de Newhouse en dimension 3 : la méthode<br>de Palis et Viana . . . . .                     | 33        |
| 4.2      | Phénomène de Newhouse en dimension 3 : le blender  | 34        |
| 4.2.1    | La construction de Bonatti et Diaz . . . . .   | 34        |
| 4.2.2    | Première application : transitivité robuste via<br>des cycles hétérodimensionnels robustes . . . . . | 39        |
| 4.2.3    | Tangences persistantes . . . . .   | 39        |
| 4.2.4    | Autres applications des blenders . . . . .   | 40        |
| <b>5</b> | <b>Newhouse phenomenon for polynomial automorphisms<br/>of <math>\mathbb{C}^3</math></b>             | <b>42</b> |
| 5.1      | Results and outline . . . . .  | 42        |
| 5.2      | Preliminaries . . . . .  | 43        |
| 5.2.1    | Choice of a quadratic polynomial . . . . .   | 43        |
| 5.2.2    | Choice of an IFS . . . . .   | 45        |
| 5.2.3    | Choice of the parameters $\lambda$ and $\nu$ . . . . .   | 46        |
| 5.2.4    | Choice of the parameter $\mu$ . . . . .  | 48        |
| 5.3      | Construction of a blender . . . . .  | 49        |
| 5.3.1    | Three complex dimensions : the map $f_0$ . . . . .   | 49        |
| 5.3.2    | Blender property . . . . .   | 51        |
| 5.4      | Mechanism to get persistent tangencies . . . . .   | 54        |
| 5.4.1    | Some definitions . . . . .   | 54        |
| 5.4.2    | Preparatory lemmas . . . . .   | 55        |
| 5.4.3    | Main result . . . . .  | 56        |
| 5.5      | Initial heteroclinic tangency . . . . .  | 58        |
| 5.5.1    | Initial tangency . . . . .   | 58        |
| 5.5.2    | A transversality result . . . . .  | 61        |
| 5.5.3    | Orientation of the fold of $W^s(\alpha_f)$ . . . . .   | 63        |
| 5.6      | Proof of the main results . . . . .  | 67        |
| 5.7      | From homoclinic tangencies to sinks . . . . .  | 68        |
| <b>6</b> | <b>Stabilité et Bifurcations en dynamique holomorphe</b>   | <b>74</b> |
| 6.1      | Stabilité et bifurcations en dimension 1 . . . . .   | 74        |
| 6.2      | Bifurcations des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$  | 76        |
| 6.2.1    | Stabilité . . . . .  | 76        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.2.2    | Bifurcations . . . . .  | 76         |
| 6.3      | Stabilité pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . . . . .                   | 78         |
| 6.4      | Ouverts de bifurcations d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . . . . .            | 80         |
| 6.4.1    | Principe général . . . . .  | 80         |
| 6.4.2    | Première méthode : par des méthodes topologiques . . . . .  | 81         |
| 6.4.3    | Seconde méthode : Blenders . . . . .  | 82         |
| 6.4.4    | Blenders et produits . . . . .  | 85         |
| <b>7</b> | <b>Généralités sur les exemples de Lattès</b>   | <b>88</b>  |
| 7.1      | Exemples de Lattès en dimension 1 . . . . .   | 88         |
| 7.1.1    | Introduction, définitions et premières propriétés   | 88         |
| 7.1.2    | Classification . . . . .  | 90         |
| 7.1.3    | Bifurcations . . . . .  | 90         |
| 7.1.4    | Compléments . . . . .   | 91         |
| 7.2      | Exemples de Lattès en dimension 2 . . . . .   | 91         |
| 7.2.1    | Définition et classification . . . . .  | 91         |
| 7.2.2    | Compléments . . . . .   | 94         |
| 7.2.3    | Bifurcations . . . . .  | 95         |
| <b>8</b> | <b>Bifurcations of Lattès maps</b>  | <b>97</b>  |
| 8.1      | Main result and outline of proof . . . . .  | 97         |
| 8.2      | Intersecting a curve and the limit set of an IFS . . . . .  | 99         |
| 8.2.1    | Linear model . . . . .  | 99         |
| 8.2.2    | Quasi-linear model . . . . .  | 103        |
| 8.2.3    | Intersecting a curve and the limit set of an IFS in $\mathbb{C}^2$ . . . . .                            | 104        |
| 8.3      | Preliminaries on Lattès maps . . . . .  | 108        |
| 8.3.1    | Definitions . . . . .   | 108        |
| 8.3.2    | An algebraic property of Lattès maps . . . . .  | 112        |
| 8.3.3    | A periodic orbit in the postcritical set . . . . .  | 114        |
| 8.4      | Perturbations of Lattès maps . . . . .  | 116        |
| 8.4.1    | Some useful lemmas . . . . .  | 116        |
| 8.4.2    | Fixing the constants relative to the torus $\mathbb{T}$ and the matrix of the linear part $A$ . . . . . | 117        |
| 8.4.3    | Fixing the constants relative to the Lattès map   | 119        |
| 8.4.4    | Creating a correcting IFS . . . . .   | 120        |
| 8.4.5    | Well oriented postcritical set . . . . .  | 123        |
| 8.5      | Proof of the main result . . . . .  | 129        |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>132</b> |

Cette thèse est consacrée à l'étude du phénomène de Newhouse et des bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Elle comporte huit chapitres.

Le premier chapitre est composé d'une introduction historique et d'une présentation des principaux résultats obtenus.

Dans le deuxième chapitre, on fait des rappels sur le phénomène de Newhouse en dimension 2 (en dynamique réelle et complexe) : on présente tout d'abord le résultat originel de Newhouse et on décrit sa preuve. On expose également en détail l'extension au domaine complexe du Théorème de Newhouse par Buzzard et sa méthode.

Dans le troisième chapitre, on prouve un Gap Lemma complexe. Plus précisément, on introduit une notion d'épaisseur pour un ensemble de Cantor dynamique planaire et on fournit un critère sur le produit de deux épaisseurs afin d'obtenir une intersection entre deux ensembles de Cantor dynamiques.

Dans le chapitre 4, on rappelle des résultats sur le phénomène de Newhouse dans  $\mathbb{R}^3$ , principalement par le biais de deux méthodes, celle de Palis-Viana, et celle de Bonatti-Diaz. La seconde utilise un outil important pour la suite, le blender, dont on présente les principales idées.

Le chapitre 5 est consacré à un second résultat. Celui-ci démontre l'existence du phénomène de Newhouse dans l'espace des automorphismes polynomiaux de degré  $d$  pour n'importe quel degré  $d \geq 2$  dans  $\mathbb{C}^3$ . La notion centrale de la preuve est un blender complexe. Ce chapitre est essentiellement une reproduction de l'article [10].

Dans le chapitre 6, on fait des rappels sur les notions de stabilité et de bifurcations en dimension 1. Puis, on décrit deux extensions en dimension 2. La première est due à Dujardin et Lyubich et concerne les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$ . La seconde est la Théorie de Berteloot-Bianchi-Dupont sur les notions de stabilité et de bifurcations pour des endomorphismes holomorphes. On expose comment des travaux en ont déduit dans différents contextes l'existence de bifurcations robustes.

Dans le chapitre 7, on fait des rappels sur les exemples de Lattès, en dimension 1 et 2, qui seront utiles dans le dernier chapitre.

Le chapitre 8 contient un troisième résultat qui montre l'existence d'ouverts de bifurcations qui s'accumulent près de chaque exemple de Lattès de degré suffisamment élevé. En particulier, tout exemple de Lattès possède un itéré accumulé par des bifurcations robustes. Ce chapitre provient de l'article [9].

# 1

## Introduction

### 1.1 Contexte historique

Cette thèse est consacrée à l'étude du phénomène de Newhouse et plus généralement des bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables. D'un point de vue général, en dynamique, une dichotomie fondamentale apparaît entre des paramètres de stabilité, où la dynamique reste qualitativement la même après perturbation, et des paramètres de bifurcation, où des changements drastiques ont lieu. L'objectif de cette thèse est de prouver l'existence dans différents contextes d'ouverts de paramètres de bifurcation.

#### 1.1.1 Phénomène de Newhouse

Un  $C^1$ -difféomorphisme  $f$  d'une variété lisse  $M$  est  $C^1$ -structurellement stable si pour tout difféomorphisme  $f'$  suffisamment proche de  $f$  en topologie  $C^1$ , il existe un homéomorphisme  $h$  de  $M$  tel que  $f \circ h = h \circ f'$ . Si  $f$  est structurellement stable, la dynamique reste la même après perturbation. Une importante classe d'applications est la suivante, introduite par Smale dans les années 1960 :

**Définition.** Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  satisfait l'Axiome A de Smale si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  de  $f$  est un ensemble hyperbolique pour  $f$
2. Les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $\Omega(f)$

On peut montrer que sous une hypothèse supplémentaire (la condition de transversalité forte), les applications satisfaisant l'Axiome A vérifient la propriété de stabilité structurelle (on peut se référer à [11] ou au chapitre 2 pour plus de précisions). De plus, elles possèdent la propriété remarquable que leur dynamique est bien comprise, tout en étant le plus souvent chaotique. Dans les premières années de la Théorie, l'opinion courante était que cette propriété était dense dans de très larges classes de systèmes dynamiques. L'idée était alors séduisante : la dynamique serait ainsi comprise pour des sous-ensembles denses d'applications.

Malheureusement (ou heureusement selon le point de vue !), cette conjecture a vite été réfutée. Dans le cadre  $C^1$ , un article d'Abraham et Smale ([1]) l'a montré pour des variétés réelles de dimension 4 (on peut se référer au chapitre 2). Il a été par ailleurs généralisé par Simon en dimension 3 ([62]).

Restait le cas des difféomorphismes d'une surface réelle. C'est dans les années 1970 que la densité de l'Axiome A a été aussi réfutée avec les travaux de Newhouse. Dans ceux-ci, la configuration dynamique suivante joue un rôle crucial :

**Définition.** Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  a une tangence hétérocline si  $f$  possède deux points périodiques  $p$  et  $q$  tels qu'il existe un point d'intersection non transverse entre  $W^s(p)$  et  $W^u(q)$ . On dit que  $f$  a une tangence homocline si  $f$  possède un point périodique  $p$  tel qu'il existe un point d'intersection non transverse entre  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$ .

Newhouse construit de telles tangences qui ont la propriété d'être robustes. Ces tangences sont associées non pas à un seul point périodique mais à un certain ensemble hyperbolique. Il s'avère que ceci implique également l'existence d'ensembles résiduels d'applications ayant une infinité de points périodiques attractifs (puits). Depuis lors, on appelle phénomène de Newhouse la concomitance de ces deux phénomènes dynamiques.

**Théorème (Newhouse [49, 50]).** Soit  $M$  une surface réelle compacte. Il existe un ensemble ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de  $C^2$ -difféomorphismes qui ont des tangences homoclines persistantes dans le sens suivant : tout difféomorphisme  $f$  dans  $\mathcal{U}$  possède une tangence hétérocline entre les laminations stable et instable d'un certain ensemble hyperbolique, et il existe un sous-ensemble dense de  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes ayant une tangence homocline associée à un point périodique. De plus, il existe un sous-ensemble résiduel de  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes ayant une infinité de puits.

Pour prouver ce résultat majeur, on considère un difféomorphisme qui a un certain ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$ . Celui-ci possède une lamination stable  $\mathcal{F}_s$  et une lamination instable  $\mathcal{F}_u$ . Toutes les deux peuvent être étendues en un feuilletage et il existe une courbe de tangence où les deux feuilletages s'intersectent non transversalement. Les deux laminations intersectent cette courbe en deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$ . Un point d'intersection entre les deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$  correspond donc à une tangence entre les deux laminations. S'il est possible de choisir  $K$  et  $L$  de telle sorte que l'intersection persiste pour un ouvert de difféomorphismes, on obtient donc des tangences hétéroclines persistantes.

Pour obtenir de telles intersections persistantes, on utilise le résultat suivant, appelé Gap Lemma. Celui-ci fait intervenir la notion d'épaisseur. C'est un quotient de deux quantités. Le numérateur mesure la taille des intervalles qui définissent l'ensemble de Cantor dynamique à une certaine étape. Le dénominateur mesure la longueur de l'espace entre ces intervalles.

**Définition.** Pour un ensemble de Cantor dynamique  $K \subset \mathbb{R}$  un trou de  $K$  est une composante connexe de  $\mathbb{R} - K$ . Etant donné un trou  $I$ , on note  $t(I) = \frac{\ell(U)}{\ell(I)}$  où  $U$  est le plus petit intervalle qui relie  $I$  à un trou égal ou plus grand que  $I$ . On note :  $t(K) = \inf t(I)$  l'épaisseur de l'ensemble de Cantor dynamique  $K$ , où l'infimum est pris sur l'ensemble des trous  $I$  de  $K$ .

La bonne quantité à considérer est alors le produit des deux épaisseurs :

**Théorème (Newhouse Gap Lemma [49]).** *Si  $K$  et  $L$  sont deux ensembles de Cantor dynamiques tels que  $t(K)t(L) > 1$ , alors ou bien  $K$  est inclus dans un trou de  $L$  ou bien  $L$  est inclus dans un trou de  $K$  ou bien  $K \cap L$  est non vide.*

L'étude des intersections robustes d'ensembles fractals joue donc un rôle majeur dans cette preuve, et est resté depuis un sujet d'étude fécond en dynamique. Dans un autre travail ([51]), Newhouse parvient à montrer que de telles tangences persistantes existent en fait dès qu'il y a une seule tangence homocline, sans autre hypothèse sur la présence ou non d'ensembles hyperboliques particuliers.

Les travaux de Newhouse ont été généralisés par Palis et Viana en dimension réelle égale à 3. Il faut juste prêter attention au fait que le point périodique associé aux tangences homoclines doit vérifier l'hypothèse de dissipation suivante.

**Définition.** *Un point périodique  $q$  de type selle de multiplieurs  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1 < |\lambda_3|$  est dit sectionnellement dissipatif si le produit de deux quelconques de ses valeurs propres est inférieur à 1 en module :  $|\lambda_1\lambda_3| < 1$  et  $|\lambda_2\lambda_3| < 1$*

**Théorème (Palis, Viana [54]).** *Tout  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant une tangence homocline associée à un point selle sectionnellement dissipatif est accumulé par des ouverts de difféomorphismes ayant des tangences hétéroclines persistantes et où les difféomorphismes ayant une infinité de puits sont denses.*

Il est naturel de se demander si des ouverts de Newhouse peuvent être construits en dynamique complexe. En dynamique holomorphe en deux variables, deux types d'applications sont au centre des recherches sur ce sujet depuis les années 1990 : les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  et les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Les premiers ont une dynamique dominante de type selle et les seconds une dynamique dominante de type répulsif. Il est donc plus naturel de s'intéresser aux premiers pour construire des tangences persistantes. Au début des années 1990, Buzzard est parvenu à construire un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  avec des tangences homoclines robustes.

**Théorème (Buzzard [18]).** *Il existe  $d > 0$  tel que si  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^2)$  est l'espace des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  de degré majoré par  $d$ , alors il existe  $G \in \text{Aut}_d(\mathbb{C}^2)$  et un voisinage  $\mathcal{N} \subset \text{Aut}_d(\mathbb{C}^2)$  de  $G$  tel que  $\mathcal{N}$  a des tangences hétéroclines persistantes. En particulier, il existe un sous-ensemble résiduel de  $\mathcal{N}$  d'automorphismes polynomiaux ayant une infinité de puits.*

Le principe pour montrer ce résultat est identique à celui utilisé par Newhouse. Buzzard produit un fer à cheval qui a des laminations stable et instable, les deux sont tangentes sur un certain disque de tangence. La principale différence réside dans le fait que cette fois il faut intersecter deux ensembles de Cantor dynamiques planaires et non pas unidimensionnels. Le Gap Lemma n'étant pas utilisable, Buzzard met en place une construction élégante permettant d'obtenir des intersections robustes entre deux ensembles de Cantor dynamiques planaires bien choisis (on peut se référer au chapitre 2 pour plus de détails). Il est à noter que le degré  $d$  est ici inconnu et supposé très grand. L'existence du phénomène de Newhouse pour les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  reste toujours un problème ouvert en degré 2. Sa résolution requiert d'obtenir des intersections persistantes entre deux ensembles de Cantor dynamiques planaires difficilement contrôlables. Ceci met d'ailleurs une nouvelle

fois en avant l'intérêt de la question des intersections persistantes d'ensembles de Cantor, dans le plan cette fois.

Toujours dans les années 1990, l'émergence d'un nouvel outil dû à Bonatti et Diaz dans l'article [14], le blender ou mélangeur, permet également d'obtenir en dynamique réelle des tangences persistantes et donc par la suite du phénomène de Newhouse :

**Théorème (Bonatti, Diaz [13]).** *Pour tout  $r \geq 1$ , pour toute variété réelle lisse  $M$  telle que  $\dim(M) = 3$ , il existe un sous-ensemble générique d'un ouvert de  $C^r$ -difféomorphismes de  $M$  qui possèdent une infinité de puits.*

Le phénomène de Newhouse est toujours un important sujet de recherche aujourd'hui. Par exemple, des travaux récents de Berger ont montré l'existence de familles d'applications ayant toutes une infinité de puits, en utilisant des parablenders, qui sont une variante de la notion de blender :

**Théorème (Berger [4]).** *Pour toute surface compacte  $M$ , pour tout  $\infty \geq r > d \geq 0$  ou pour  $r = d \geq 2$ , pour tout  $k \geq 0$ , il existe un ouvert  $\tilde{U}$  de  $C^d(\mathbb{R}^k, C^r(M, M))$  et un sous ensemble générique  $\mathcal{R}$  de  $\tilde{U}$  tel que pour toute famille  $(f_a)_a \in \mathcal{R}$ , pour tout  $|a| \leq 1$ ,  $f_a$  a une infinité de puits.*

Les résultats de Berger sont aussi valables en dimension supérieure à 2. Le fait que l'on a une infinité de puits pour tous les paramètres et plus seulement un sous-ensemble résiduel était inattendu dans ce cadre.

L'existence du phénomène de Newhouse a forcé les dynamiciens à envisager une classification plus sophistiquée pour les systèmes dynamiques. Dans ce sens, on a la conjecture suivante due à Palis :

**Conjecture (Palis [52]).** *Tout  $C^r$ -difféomorphisme peut être  $C^r$ -approximé par un difféomorphisme qui est ou bien hyperbolique ou bien possède un cycle hétérodimensionnel ou une tangence homocline.*

Cette conjecture, prouvée dans certains cas, met en évidence l'importance des deux phénomènes que sont les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels dans l'apparition de bifurcations. Par exemple, Crovisier et Pujals ont récemment montré cette conjecture dans le cadre  $C^1$  pour une notion plus faible d'hyperbolicité ([19]). En dynamique holomorphe, les travaux de Dujardin et Lyubich ([28]) décrits plus loin vont également dans ce sens.

### 1.1.2 Stabilité et bifurcations en dynamique holomorphe

Quittons un moment la dynamique réelle et faisons un bond dans le passé pour revenir aux sources de la dynamique holomorphe. Au début du vingtième siècle, les travaux de Fatou et Julia ont donné naissance à la théorie de l'itération des fractions rationnelles en une variable complexe. Une première dichotomie a lieu dans l'espace des phases d'une fraction rationnelle donnée  $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  se partitionne entre d'un côté, l'ensemble de Fatou de  $f$  qui est constitué des points au voisinage desquels la dynamique est normale, et de l'autre, l'ensemble de Julia de  $f$ , où la dynamique dépend de manière sensible du point considéré. Pendant un long moment, la dynamique holomorphe est restée en phase de sommeil. Il faut attendre les développements de l'informatique et les premières

visualisations de l'ensemble de Mandelbrot à la fin des années 70 pour que le sujet redevienne un foyer actif de recherche.

C'est ici que la dynamique holomorphe rencontre le cheminement de la dynamique réelle que nous avons décrit précédemment. Les espoirs de voir l'hyperbolicité être une propriété dense une fois douchés, des travaux ont été menés en dynamique holomorphe afin d'obtenir une condition de stabilité moins contraignante. La condition suivante de stabilité est issue des travaux de Mañé, Sad et Sullivan et de manière indépendante de ceux de Lyubich, dans les années 1980. Elle est basée sur l'idée qu'une famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est stable si l'ensemble de ses points périodiques varie avec une régularité suffisante. Cette notion s'avère satisfaisante en raison des nombreuses équivalences listées ci-dessous :

**Théorème (Mañé, Sad, Sullivan [43] et Lyubich [39, 40]).** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$  et soit  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $(J(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  se déplace selon un mouvement holomorphe
2. il n'y a pas de point périodique répulsif qui change de nature dans la famille
3. il existe une famille d'applications quasi-conformes  $i_\lambda : J_{\lambda_0} \rightarrow J_\lambda$  qui conjuguent la dynamique de  $f_\lambda$  sur  $J_\lambda$  à celle de  $f_{\lambda_0}$  sur  $J_{\lambda_0}$

C'est ici qu'apparaît une nouvelle dichotomie fondamentale, cette fois-ci non pas dans l'espace dynamique mais dans l'espace des paramètres.

**Définition.** *Si les conditions précédentes sont satisfaites, on dira que  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J$ -stable. L'ensemble des paramètres  $\lambda$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J$ -stable est un ouvert de  $\Lambda$ , appelé lieu de stabilité et noté  $\text{Stab}$ . L'ensemble des paramètres  $\lambda$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  n'est pas  $J$ -stable est appelé lieu de bifurcation et noté  $\text{Bif}$ .*

En dynamique en une variable complexe, on dispose remarquablement de la densité du lieu de stabilité pour cette notion de stabilité :

**Théorème (Mañé, Sad, Sullivan [43] et Lyubich [39, 40]).** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Alors  $\text{Stab}$  est dense dans  $\Lambda$ .*

Le lieu de bifurcation  $\text{Bif}$  est alors un fermé d'intérieur vide. En particulier, ce résultat contraste avec la non-densité de l'Axiome A que nous avons vue précédemment.

Dans la famille quadratique  $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ , le lieu de bifurcation  $\text{Bif}$  est égal à la frontière  $\partial M$  de l'ensemble de Mandelbrot  $M$ . Shishikura a montré que sa dimension de Hausdorff était maximale :

**Théorème (Shishikura [61]).** *La dimension de Hausdorff de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot est maximale :*

$$\dim_H(\partial M) = 2$$

Tan Lei a généralisé ce Théorème dans [38] en montrant que le lieu de bifurcation est de dimension maximale dès qu'il est non vide dans toute famille de fractions rationnelles. McMullen a également généralisé ce résultat dans [44].

Il a fallu attendre les années 2010 pour voir des généralisations des notions de  $J$ -stabilité et de bifurcations en dynamique holomorphe en plusieurs variables. Entre temps, la dynamique individuelle d'un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  ou d'un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  avait été étudiée depuis les travaux de Bedford, Fornæss, Hubbard, Lyubich, Sibony, Smillie...

Les questions de stabilité/bifurcation ont finalement été étudiées dans le cas des automorphismes et des endomorphismes. Dans le cas des automorphismes polynomiaux, la Théorie a été mise en place par Dujardin et Lyubich. Ils ont déterminé une notion satisfaisante de stabilité, appelée  $J^*$ -stabilité faible et ont montré que les paramètres correspondants à une tangence homocline sont denses dans le lieu de bifurcation. Ce résultat va dans le sens de la conjecture de Palis. Le cas des endomorphismes holomorphes nous intéresse plus dans cette thèse et a été étudié encore plus récemment par les travaux de Berteloot, Bianchi et Dupont. Une notion satisfaisante de stabilité a été introduite, qui vérifie des équivalences similaires au cas de la dimension 1. Les notions apparaissant dans le résultat suivant seront définies plus loin.

**Théorème (Berteloot, Bianchi, Dupont [7]).** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *les  $J^*$ -cycles varient holomorphiquement sur  $\Lambda$*
2. *la fonction  $L$  est pluriharmonique sur  $\Lambda$*
3.  *$f$  a un web d'équilibre ou une lamination d'équilibre*
4. *il n'y a pas de bifurcation de Misiurewicz dans  $\Lambda$*

Ces travaux donnent en particulier un critère pour obtenir des ouverts dans le lieu de bifurcation. En effet, grâce à la dernière équivalence, il est suffisant de créer des intersections persistantes entre l'ensemble postcritique et un ensemble répulsif hyperbolique contenu dans le support  $J^*$  de la mesure d'équilibre pour obtenir des bifurcations robustes. Des travaux récents ont été obtenus dans ce sens. Citons en particulier le résultat suivant dû à Dujardin :

**Théorème (Dujardin [27]).** *Le lieu de bifurcation  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$  dans la famille  $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  des endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$  est d'intérieur non vide pour tout  $d \geq 2$ .*

On peut également se référer à [65] ou [66]. Cette situation contraste fortement avec le cas de la dimension 1 : la stabilité y était dense. De plus, ce résultat suggère la question cruciale de la compréhension de l'intérieur du lieu de bifurcation. Est-il possible de donner un critère permettant de détecter la présence d'ouverts de bifurcations ? Dujardin a par exemple conjecturé la présence d'ouverts de bifurcations près de deux types d'applications : les produits et les exemples de Lattès. Le cas des produits a été traité par Taflin dans [65]. Dans cette thèse, on s'intéresse à celui des exemples de Lattès.

## 1.2 Résultats

Les résultats de cette thèse portent sur l'étude du phénomène de Newhouse et des bifurcations en dynamique holomorphe à plusieurs variables. Le premier résultat est en quelque sorte un Gap Lemma complexe, qui introduit une notion d'épaisseur pour un ensemble de Cantor dynamique planaire et fournit un critère sur le produit de deux épaisseurs afin d'obtenir une intersection entre deux ensembles de Cantor dynamiques. Le second résultat montre l'existence du phénomène de Newhouse dans l'espace des automorphismes polynomiaux de degré  $d$  pour n'importe quel degré  $d \geq 2$  dans  $\mathbb{C}^3$ . La dynamique réelle est d'une grande inspiration pour la preuve, la notion centrale en est le blender. Enfin, le troisième résultat montre l'existence d'ouverts de bifurcations qui s'accumulent près de chaque exemple de Lattès de degré suffisamment élevé. En particulier, tout exemple de Lattès possède un itéré accumulé par des bifurcations robustes.

### 1.2.1 Gap Lemma complexe

On a vu que l'un des arguments clef dans la preuve de Newhouse est le Gap Lemma, basé sur la notion d'épaisseur. On va définir une épaisseur pour les ensembles de Cantor dynamiques complexes et prouver un résultat de type Gap Lemma. Comme dans le cas unidimensionnel, on définit un numérateur qui mesure la taille des pièces et un dénominateur qui mesure l'espace entre les pièces. Pour ce résultat, on considère la norme  $|\cdot|_\infty$  sur  $\mathbb{C}$  : ce point est à retenir, puisque une boule est alors géométriquement un carré. Dans la suite, tous les carrés auront leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées et sont donc des boules pour la norme  $|\cdot|_\infty$ . On appelle  $C(z, r)$  le carré de centre  $z$  et de longueur (de côté)  $r$ , c'est une boule de rayon  $\frac{r}{2}$  pour la norme  $|\cdot|_\infty$ . On travaille avec des carrés pour obtenir des épaisseurs arbitrairement grandes avec des IFS linéaires (signalons au passage que Buzzard avait aussi travaillé avec des carrés pour obtenir des intersections persistantes).

**Définition.** On considère un IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$  où chaque  $f_i$  est une contraction holomorphe définie sur un ouvert  $U$ . On définit  $U_i = f_i(U)$  pour tout  $1 \leq i \leq p$  et on suppose que l'on a  $U_i \cap U_j = \emptyset$  pour tous  $1 \leq i \neq j \leq p$ . On définit alors l'ensemble de Cantor dynamique  $K$  comme l'ensemble limite de l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ .

Pour des raisons techniques, on suppose l'existence d'un ouvert  $U'$  tel que  $U \Subset U'$  et tel chaque contraction  $f_i$  possède un prolongement en une contraction définie sur  $U'$  avec  $f_i(U') \Subset U$ .

**Définition.** Pour l'ensemble de Cantor dynamique  $K$  de domaine initial  $U$  et associé à l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ , on définit le rapport de réduction maximal de  $K$  :

$$\lambda_K^0 = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

où  $r(U_i)$  (resp.  $r(U)$ ) est la longueur du plus grand carré inclus dans  $U_i$  (resp.  $U$ ). On note  $\rho(U) = 2 \max_{z \in U} \text{dist}_\infty(z, K)$  la longueur (de côté) du plus grand carré inclus dans  $U$  dont l'intérieur ne contient pas de point de  $K$ . On définit l'espace intersticiel :

$$\sigma_K^0 = \frac{\rho(U)}{r(U)}$$

**Définition 1.2.1.1.** Soit  $f$  une application univalente définie sur  $U'$  telle que  $f(U') \Subset U$ . On appelle distorsion de  $f$  (sur  $U$ ), noté  $\delta_f$ , le nombre suivant :

$$\delta_f = \max_{(z,z') \in \bar{U}^2} \frac{|f'(z)|}{|f'(z')|}$$

On a :  $1 \leq \delta_f < +\infty$  d'après le Théorème de Koebe (puisque  $U \Subset U'$ ). Pour un ensemble de Cantor dynamique  $K$  donné par un IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ , on appelle la distorsion de  $K$  la quantité suivante :

$$\delta_K = \sup_I \delta_{f_I} = \sup_I \left( \max_{(z,z') \in \bar{U}^2} \frac{|f'_I(z)|}{|f'_I(z')|} \right)$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des suites finies d'indices  $I = (i_1, \dots, i_n)$  dans  $\{1, \dots, p\}$  et où  $f_I = f_{i_n} \circ \dots \circ f_{i_1}$ . On a toujours  $1 \leq \delta_K < +\infty$  d'après le Théorème de Koebe.

**Définition.** Soit  $K$  un ensemble de Cantor dynamique. On note  $\text{Ep}(K)$  l'épaisseur de  $K$  :

$$\text{Ep}(K) = \frac{\lambda_K^0}{\delta_K^5 \sqrt{\sigma_K^0}}$$

Notre premier résultat principal est le suivant. C'est en quelque sorte un analogue du Gap Lemma pour les ensembles de Cantor dynamiques complexes avec la notion d'épaisseur précédemment définie. Ici, un ensemble de Cantor dynamique équilibré désigne un ensemble de Cantor dynamique avec une certaine régularité. Cette notion est définie précisément plus loin : grosso-modo, elle signifie que les ouverts  $U_1, \dots, U_p$  ne sont pas trop grands et sont suffisamment bien répartis dans  $U$ .

**Théorème A.** Soient  $K$  et  $L$  deux ensembles de Cantor dynamiques équilibrés définis sur un carré. On suppose que :

$$\text{Ep}(K)\text{Ep}(L) > 30$$

Alors  $K$  et  $L$  s'intersectent.

## 1.2.2 Phénomène de Newhouse pour les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^3$

Dans le Théorème suivant ([10]), on prouve l'existence d'ouverts de Newhouse pour des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$ . Le degré est ici connu, égal à 2 et donc optimal, contrairement à la situation dans  $\mathbb{C}^2$  (cf l'article de Buzzard) où le degré des automorphismes était inconnu. On note  $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$  l'ensemble des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$  et  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^3)$  celui des automorphismes polynomiaux de degré au plus  $d$ .

**Théorème B.** Il existe un automorphisme polynomial  $f$  de degré 2 de  $\mathbb{C}^3$  tel que pour tout  $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$  suffisamment proche de  $f$ ,  $g$  possède une tangence entre les laminations stable et instable d'un certain ensemble hyperbolique.

**Corollaire.** Pour tout  $d \geq 2$ , il existe un ouvert de  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^3)$  où les automorphismes ayant une tangence homocline sont denses.

**Corollaire.** *Pour tout  $d \geq 2$ , il existe un ouvert  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^3)$  où les automorphismes ayant une infinité de puits sont denses.*

Pour démontrer ce résultat, on considère l'application suivante, qui est un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^3$  :

$$f_0 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (p_c(z_1) + bz_2 + \sigma z_3(z_1 - \alpha), z_1, \lambda z_1 + \mu z_3 + \nu)$$

Ici,  $p_c$  est un polynôme quadratique et les coefficients  $b, \lambda, \mu, \nu, \alpha$  sont des nombres complexes bien choisis. Nous prouvons que  $f_0$  possède un fer à cheval  $\mathcal{H}_{f_0}$  d'indice  $(2, 1)$ . Plus précisément, la première direction est fortement dilatée, la seconde est fortement contractée et la troisième est modérément contractée par  $f_0$ . La troisième projection restreinte à  $\mathcal{H}_{f_0}$  vérifie en quelque sorte une propriété de "recouvrement ouvert". On introduit la définition de blender complexe suivante qui est un analogue complexe du cs-blender au sens de Bonatti et Diaz et on vérifie que l'ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}_{f_0}$  est un blender complexe.

**Définition.** *Soit  $f$  un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^3$ ,  $D$  un tridisque de  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathcal{H}_f = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(D)$  un fer à cheval d'indice  $(2, 1)$ . On suppose qu'il existe  $k > 10$  et trois champs de cônes  $C^u, C^{ss}, C^{cs}$  tels que dans  $D$  :*

1.  $C^u$  est  $f$ -invariant
2.  $C^{ss}$  est  $f^{-1}$ -invariant
3. tout vecteur de  $C^u$  est dilaté par un facteur plus grand que  $k$  par  $f$
4. tout vecteur de  $C^{ss}$  est dilaté par un facteur plus grand que  $k$  par  $f^{-1}$
5. tout vecteur de  $C^{cs}$  est dilaté par un facteur plus grand que 1 par  $f^{-1}$

*On dira que  $\mathcal{H}_f$  est un blender (ou mélangeur) s'il existe un ouvert  $D' \Subset D$  non vide tel que toute courbe tangente à  $C^{ss}$  qui intersecte  $D'$  intersecte l'ensemble instable  $W^u(\mathcal{H}_f)$  de  $\mathcal{H}_f$ .*

Une fois le blender construit, construire des tangences persistantes n'est pas évident. On introduit des variétés avec une géométrie spéciale, que l'on appelle des variétés pliées. On prouve que toute variété pliée qui est en "bonne position" par rapport au blender possède une tangence avec la variété instable d'un point du fer à cheval  $\mathcal{H}_{f_0}$ . On choisit ensuite les paramètres  $c, b$  et  $\sigma$  de telle sorte à créer une tangence initiale entre la variété instable d'un point de  $\mathcal{H}_{f_0}$  et la variété stable d'un autre point de  $\mathcal{H}_{f_0}$ . De cette tangence initiale, par un procédé itératif, on construit une tangence entre une variété instable et une variété pliée. Cette variété pliée est en bonne position et est incluse dans la variété stable d'un autre point de  $\mathcal{H}_{f_0}$ . D'où l'obtention de tangences persistantes entre les laminations stable et instable de  $\mathcal{H}_{f_0}$ .

Par un procédé classique, ceci nous permet de créer des tangences homoclines persistantes entre la variété stable et la variété instable d'un point périodique sectionnellement dissipatif. Un argument qui remonte à Newhouse fournit alors un sous-ensemble dense d'automorphismes polynomiaux de degré 2 où les automorphismes ayant une infinité de puits sont denses. On donne dans la dernière section du chapitre une preuve de ce résultat dans le cas de  $\mathbb{C}^3$ .

### 1.2.3 Bifurcations des exemples de Lattès

Le troisième Théorème de cette thèse ([9]) concerne les bifurcations des applications suivantes, bien connues en dynamique holomorphe :

**Définition.** *Un exemple de Lattès est un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui est semi-conjugué à une application affine sur un tore. Pour un exemple de Lattès, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{T} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{L} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{array}$$

où  $\mathbb{T}$  est un tore complexe de dimension 2,  $\Pi$  est un revêtement ramifié de l'espace projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  par le tore  $\mathbb{T}$  et  $\mathcal{L}$  est une application affine.

Dans le Théorème suivant, on montre l'existence d'ouverts de bifurcations près de tout exemple de Lattès de degré suffisamment élevé. Il est à noter que le degré en question dépend du tore sur lequel est définie l'application affine associée à l'exemple de Lattès.

**Théorème C.** *Pour tout tore complexe  $\mathbb{T}$  de dimension 2, il existe un entier  $d$  (qui dépend du tore  $\mathbb{T}$ ) tel que tout exemple de Lattès défini sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d' > d$  induit par une application affine sur  $\mathbb{T}$  est dans l'adhérence de l'intérieur du lieu de bifurcation dans  $\text{Hol}_{d'}$ .*

**Corollaire.** *Pour tout exemple de Lattès  $L$  de degré  $d_L$ , il existe un entier  $n(L)$  tel que pour tout  $n \geq n(L)$ , l'itérée  $L^n$  est dans l'adhérence de l'intérieur du lieu de bifurcation dans  $\text{Hol}_{d_L^n}$ .*

La démonstration de ce résultat est fondée sur la création d'intersections persistantes entre l'ensemble postcritique et un ensemble hyperbolique répusif contenu dans l'ensemble de Julia. La preuve comporte deux parties : on donne tout d'abord un toy-model qui permet d'obtenir des intersections persistantes entre l'ensemble limite d'un certain type d'IFS, appelé IFS correcteur, et une courbe qui a la propriété d'être "bien orientée". Ensuite, dans un second temps, on perturbe l'exemple de Lattès pour créer simultanément un IFS correcteur dans l'ensemble de Julia et une courbe bien orientée dans l'ensemble postcritique. En quelque sorte, la seconde partie a pour but d'implémenter la première dans le cas des exemples de Lattès.

Dans la première partie, on développe un principe d'intersection. Une grille de boules  $G$  dans  $\mathbb{C}^2$  est l'union d'un nombre fini de boules placées de manière régulière en  $N^4$  sommets d'un réseau défini par une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{C}^2$ . Si on considère une droite  $\mathcal{C}$ , le principe des tiroirs assure que si  $\mathcal{C}$  est bien orientée et si  $G$  possède un nombre suffisant de boules  $N = N(r)$  (où  $r$  est la taille relative d'une boule comparée à la taille d'une maille du réseau) alors  $\mathcal{C}$  intersecte une boule de  $G$ . Pour les IFS que nous considérons, chaque branche inverse est proche d'une homothétie. Si on itère ces branches inverses, l'itérée peut devenir de moins en moins conforme. On donne une classe d'IFS particulière (appelé IFS correcteur) qui possèdent la propriété de corriger ce problème. A chaque étape

## INTRODUCTION

---

de la construction de l'ensemble limite, ces IFS présentent la forme d'une grille de boules. Ces IFS nous intéressent puisque toute courbe bien orientée  $\mathcal{C}$  intersecte l'ensemble limite d'un IFS correcteur par l'utilisation de notre principe d'intersection. Comme la propriété d'être un IFS correcteur est ouverte, cette intersection est persistante.

Dans la seconde partie, on perturbe successivement un exemple de Lattès  $L$  en  $L'$  puis  $L''$  puis  $L'''$  de sorte que  $L'''$  a des bifurcations robustes. Les perturbations ont la forme suivante :

$$[P_1 : P_2 : P_3] \rightarrow [P_1 + R_1 P_3 : P_2 + R_2 P_3 : P_3]$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont des applications rationnelles, ce qui permet de s'assurer que l'on travaille en degré constant. La première perturbation  $L'$  a pour but de créer un IFS correcteur dans une boule  $\mathfrak{B}$  de  $\mathbb{C}^2$ . La seconde perturbation  $L''$  assure que l'ensemble postcritique en  $p_c$  n'est pas singulier. Une troisième et dernière perturbation  $L'''$  permet de contrôler la différentielle en  $p_c$ . Ceci nous permet de fixer l'orientation de l'ensemble postcritique en  $p_c$  pour ensuite la propager jusqu'à  $\mathfrak{B}$  en utilisant la dynamique de l'exemple de Lattès. De plus, comme l'ensemble des applications holomorphes est ouvert dans l'ensemble des applications rationnelles, les perturbations successives sont toutes holomorphes. L'implémentation est alors complète.

## INTRODUCTION

---

# Phénomène de Newhouse en dimension 2

# 2

## 2.1 Hyperbolicité uniforme

### 2.1.1 Généralités

La notion suivante est fondamentale en dynamique et constitue une classe d'applications aux propriétés remarquables. On peut en trouver dans [36] une étude exhaustive.

**Définition 2.1.1.1.** *Un ensemble hyperbolique pour un difféomorphisme  $f$  d'une variété réelle  $M$  est un ensemble  $\mathcal{H}$  qui est compact,  $f$ -invariant et dont le fibré tangent admet une décomposition en une somme directe  $TM|_{\mathcal{H}} = E_s \oplus E_u$  telle que :*

1.  $E_s$  et  $E_u$  sont invariants :

$$\forall x \in \mathcal{H}, (Df)_x(E_s(x)) = E_s(f(x))$$

$$\forall x \in \mathcal{H}, (Df)_x(E_u(x)) = E_u(f(x))$$

2.  $E_s$  est uniformément contracté et  $E_u$  est uniformément dilaté, c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $C > 0$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  telles que pour tous  $x \in \mathcal{H}, u \in E_s(x) - \{0\}, v \in E_u(x) - \{0\}, n \geq 0$ , on ait :

$$\|(Df^n)_x(u)\| \leq C\lambda^n \|u\|$$

$$\|(Df^{-n})_x(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

$E_s$  et  $E_u$  sont appelés respectivement l'espace stable et instable de  $\mathcal{H}$ .

La classe suivante de difféomorphismes va nous intéresser particulièrement :

**Définition 2.1.1.2.** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  satisfait l'Axiome A de Smale (ou est uniformément hyperbolique) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. L'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  de  $f$  est un ensemble hyperbolique pour  $f$
2. Les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $\Omega(f)$

La raison pour laquelle cette classe de difféomorphismes est si intéressante est que l'on comprend particulièrement bien leur dynamique, à la fois du point de vue topologique et ergodique. On peut se référer à [11]. On a notamment le Théorème de décomposition suivant dû à Smale :

**Théorème (Smale [64]) 2.1.1.3.** *Pour tout  $C^1$ -difféomorphisme  $f$  d'une variété lisse  $M$  satisfaisant l'Axiome A, l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  admet une décomposition :*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$$

*où chaque  $\Omega_i$  est un ensemble basique pour  $f$ , c'est-à-dire un ensemble compact, invariant, hyperbolique et transitif. De plus, les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite de toute orbite sous l'action de  $f$  sont contenus dans un des ensembles  $\Omega_i$ .*

Dans la suite, on aura besoin de la condition suivante :

**Définition 2.1.1.4.** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  vérifie la condition de transversalité forte si les intersections entre toutes les variétés stables et instables de points de  $\Omega(f)$  sont toutes transverses.*

Sous cette condition, les difféomorphismes satisfaisant l'Axiome A vérifient la stabilité structurelle :

**Théorème (Robbin [58], Robinson [59]) 2.1.1.5.** *Soit  $M$  une variété lisse et soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $M$  satisfaisant l'Axiome A et la condition de transversalité forte. Alors  $f$  est structurellement stable, i.e. pour tout difféomorphisme  $f'$  suffisamment proche de  $f$  en topologie  $C^1$ , il existe un homéomorphisme  $h$  de  $M$  tel que  $f \circ h = h \circ f'$ .*

Cette dernière propriété rend les difféomorphismes satisfaisant l'Axiome A encore plus intéressants : elle met en évidence le fait que ces difféomorphismes peuvent posséder une dynamique chaotique mais tout de même robuste par perturbation. Les liens entre Axiome A et stabilité structurelle ont été définitivement précisés par Mañé :

**Théorème (Mañé [42]) 2.1.1.6.** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . Alors  $f$  est structurellement stable si et seulement si  $f$  satisfait l'Axiome A et la condition de transversalité forte.*

**Notation 2.1.1.7.** *Soit  $M$  une variété réelle lisse et  $r$  un entier positif. On note  $\text{Diff}^r(M)$  l'ensemble des  $C^r$ -difféomorphismes de  $M$ .*

Dans les années 60, dans un premier temps, Smale ([63]) a posé la question de savoir si cette classe de difféomorphismes était dense dans l'espace de tous les difféomorphismes d'une variété : étant donné  $M$  une variété réelle lisse, l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^r$  satisfaisant l'Axiome A est-il un ouvert dense dans  $\text{Diff}^r(M)$ ? En particulier, comme il est possible de montrer que l'Axiome A implique de ne posséder qu'un nombre fini de puits, si cette conjecture était vraie, il y aurait un ouvert dense dans  $\text{Diff}^r(M)$  de difféomorphismes ayant un nombre fini de puits.

## 2.1.2 Densité de l'hyperbolicité en dimension 1

En dynamique réelle unidimensionnelle, on dispose de la définition suivante d'hyperbolicité très proche de celle que nous avons introduite pour des difféomorphismes en dimension supérieure.

**Définition 2.1.2.1.** Soit  $f$  une application  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est hyperbolique si tous les attracteurs périodiques de  $f$  sont des points périodiques de type attractif et si  $f$  est hyperbolique sur le complémentaire  $\Sigma(f)$  de leurs bassins d'attraction : il existe  $C > 0$  et  $\lambda > 1$  tel que  $|(f^n)'(x)| > C\lambda^n$  pour tout  $x \in \Sigma(f)$  et  $n \geq 1$ .

Après un long cheminement qui s'est poursuivi jusqu'aux années 90, les travaux de Graczyk, Swiatek ([32]) et Lyubich ([41]) ont finalement montré que l'hyperbolicité était dense dans la famille quadratique. On peut une nouvelle fois se référer à [36] pour plus de détails.

**Théorème (Graczyk, Swiatek [32], Lyubich [41]) 2.1.2.2.** L'ensemble des paramètres  $a$  pour lesquels  $q_a(x) = ax(1-x)$  est hyperbolique est dense dans  $]0, 4[$ .

Signalons qu'en dynamique complexe en une variable, le problème analogue, connu sous le nom de conjecture de Fatou, est toujours ouvert.

### 2.1.3 Non-densité de l'hyperbolicité en dimension supérieure

On commence par rappeler une définition de base pour les difféomorphismes des variétés de dimension supérieure ou égale à 2. On peut trouver de nombreux détails dans [36].

**Définition 2.1.3.1.** Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$  de dimension  $\dim(M) \geq 2$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble hyperbolique pour  $f$  et soit  $p \in \mathcal{H}$ . On note :

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), f^n(p)) = 0\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(f^n(x), f^n(p)) = 0\}$$

Les ensembles  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  sont respectivement appelés variété stable et variété instable de  $p$ . On note aussi :

$$W^s(\mathcal{H}) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), \mathcal{H}) = 0\}$$

$$W^u(\mathcal{H}) = \{x \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(f^n(x), \mathcal{H}) = 0\}$$

Les ensembles  $W^s(\mathcal{H})$  et  $W^u(\mathcal{H})$  sont respectivement appelés ensemble stable et ensemble instable de  $\mathcal{H}$ .

On dispose du résultat suivant. C'est le Théorème de la variété stable, il montre que la variété stable d'un point d'un ensemble hyperbolique est effectivement une variété.

**Théorème 2.1.3.2.** Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$  de dimension  $\dim(M) \geq 2$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble hyperbolique pour  $f$  et soit  $p \in \mathcal{H}$ . Alors l'ensemble  $W^s(p)$  est une variété immergée de classe  $C^1$ .

On dispose d'un énoncé similaire pour les variétés instables, c'est le Théorème de la variété instable. Le résultat précédent est en particulier vrai si  $\mathcal{H}$  est réduit à un point périodique de type selle. Un autre cas particulier qui nous

intéresse beaucoup dans cette thèse est celui où  $\mathcal{H}$  est un fer à cheval de Smale dans  $\mathbb{C}^2$  : dans ce cas  $W^s(\mathcal{H})$  et  $W^u(\mathcal{H})$  ont tous les deux une structure de lamination sur un ensemble de Cantor dynamique dans  $\mathbb{C}$ . Enfin, notons également le résultat suivant :

**Théorème 2.1.3.3.** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$  de dimension  $\dim(M) \geq 2$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble hyperbolique pour  $f$  qui est localement maximal. Alors on a :  $W^s(\mathcal{H}) = \bigcup_{p \in \mathcal{H}} W^s(p)$  et  $W^u(\mathcal{H}) = \bigcup_{p \in \mathcal{H}} W^u(p)$ .*

La densité des applications hyperboliques s'est révélée beaucoup plus rapidement fautive en dimension supérieure à 2. La première réfutation de la question posée par Smale a eu lieu dans le cadre  $C^1$  pour des variétés réelles de dimension 4 dans un article d'Abraham et Smale ([1]). La notion suivante apparaît dans leur article :

**Définition 2.1.3.4.** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  a un cycle hétérodimensionnel si  $f$  possède deux points périodiques  $p$  et  $q$  d'indices distincts tels que il existe des points d'intersection entre  $W^s(p)$  et  $W^u(q)$  d'une part, entre  $W^u(p)$  et  $W^s(q)$  d'autre part.*

Par définition, il est immédiat qu'un difféomorphisme d'une variété  $M$  ne peut avoir un cycle hétérodimensionnel que si  $\dim(M) > 2$ . La création de cycles hétérodimensionnels robustes est au coeur de la preuve de leur résultat :

**Théorème (Abraham, Smale [1]).** *Il existe une variété réelle  $M$  de dimension 4, un ouvert  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que tout  $f \in \mathcal{U}$  a un cycle hétérodimensionnel et ne vérifie pas l'Axiome A.*

Rappelons brièvement les idées de la preuve de ce résultat. Abraham et Smale considèrent l'automorphisme linéaire  $g$  suivant :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sur le tore usuel  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . L'origine 0 est un point fixe d'indice (1, 1) pour  $g$ . Ils considèrent ensuite un difféomorphisme  $h$  sur la sphère  $S^2$  possédant un fer à cheval. En particulier, on a deux points fixes  $q_1$  et  $q_2$  d'indice (1, 1). Finalement, on considère  $f = (g, h)$ . Les ensembles  $\mathcal{H}_1 = T^2 \times \{q_1\}$  et  $\mathcal{H}_2 = \{(0, q_2)\}$  sont deux ensembles hyperboliques d'indices (2, 2) pour  $f$ . De plus,  $W^s(\mathcal{H}_1)$  et  $W^u(\mathcal{H}_2)$  s'intersectent, tout comme  $W^s(\mathcal{H}_2)$  et  $W^u(\mathcal{H}_1)$ . Il est alors possible de faire une perturbation  $C^1$  de telle sorte que  $\mathcal{H}_2 = \{(0, q_2)\}$  devienne d'indice (1, 3) tout en préservant ces intersections hétéroclines. On obtient ainsi un cycle hétérodimensionnel. Celui-ci persiste pour des raisons de dimension : chaque point de  $\mathcal{H}_1$  est d'indice (2, 2) et le seul point de  $\mathcal{H}_2$  est d'indice (1, 3). Comme  $2 + 1 < 4$  et  $2 + 3 > 4$ , il est clair qu'au moins une des deux intersections persiste. L'autre persiste également, mais pour le voir, il faut tenir compte du fait que  $\mathcal{H}_1$  n'est ni un point, ni même un ensemble fractal, puisque c'est la continuation de  $T^2 \times \{q_1\}$ . En quelque sorte, les ensembles stable et instable de  $\mathcal{H}_1$  ont une dimension plus grande que l'ensemble stable et instable d'un point de  $\mathcal{H}_1$  pris individuellement (il s'agit d'une construction ayant de forts points communs avec les blenders décrits plus loin). Le résultat est ainsi prouvé. Il a été par ailleurs été généralisé par Simon en dimension 3 ([62]).

Ainsi, la conjecture de Smale était réfutée pour les difféomorphismes des variétés de grande dimension. Mais la question restait ouverte en particulier pour les difféomorphismes de surfaces réelles, où les cycles hétérodimensionnels ne peuvent intervenir. Les travaux de Newhouse, que nous présentons dans la sous-section suivante répondent à ce problème en introduisant des ouverts de difféomorphismes ayant des tangences homoclines persistantes. Voici la définition d'une tangence homocline :

**Définition 2.1.3.5.** Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme d'une variété lisse  $M$ . On dit que  $f$  a une tangence hétérocline si  $f$  possède deux points périodiques de type selle  $p$  et  $q$  tels qu'il existe un point d'intersection non transverse entre  $W^s(p)$  et  $W^u(q)$ . On dit que  $f$  a une tangence homocline si  $f$  possède un point périodique de type selle  $p$  tel qu'il existe un point d'intersection non transverse entre  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$ .

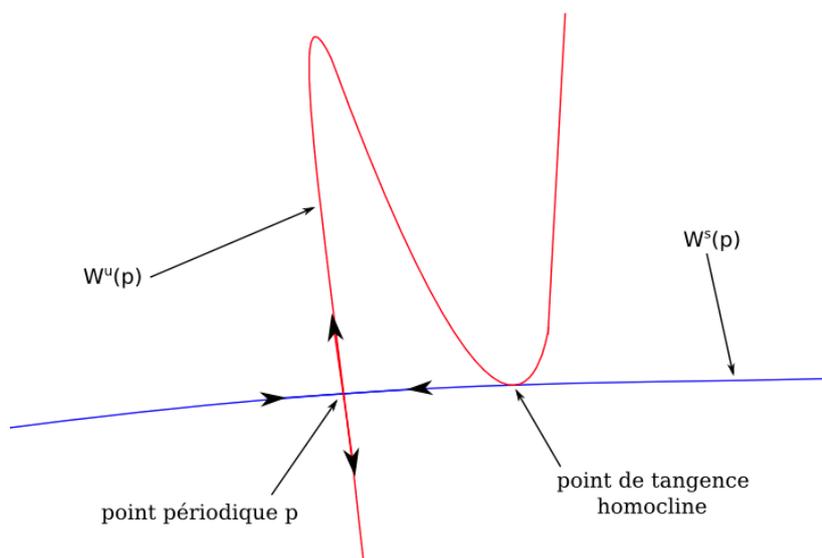


Figure 1 : Tangence homocline

Dans les années 1980, Palis émit la conjecture que les deux phénomènes que nous venons de présenter, cycles hétérodimensionnels et tangences homoclines, sont les obstructions principales à l'hyperbolicité :

**Conjecture (Palis [52]) 2.1.3.6.** *Tout  $C^r$ -difféomorphisme peut être  $C^r$ -approximé par un difféomorphisme qui est ou bien hyperbolique ou bien possède un cycle hétérodimensionnel ou une tangence homocline.*

Crovisier et Pujals ont prouvé la conjecture de Palis dans le cadre  $C^1$  pour une notion plus faible d'hyperbolicité que l'Axiome A :

**Définition 2.1.3.7.** *Un difféomorphisme  $f$  d'une variété  $M$  est essentiellement hyperbolique s'il possède un nombre fini d'attracteurs hyperboliques transitifs et si l'union des bassins de ces attracteurs est ouvert et dense.*

**Théorème (Crovisier, Pujals [19]) 2.1.3.8.** *Tout difféomorphisme  $f$  d'une variété compacte peut être  $C^1$ -approximé par un difféomorphisme qui est ou bien essentiellement hyperbolique ou bien possède un cycle hétérodimensionnel ou une tangence homocline.*

Dans  $\mathbb{C}^2$ , on a aussi des résultats dans ce sens comme on le verra plus loin avec les travaux de Dujardin et Lyubich ([28]).

## 2.2 Phénomène de Newhouse : la démonstration originelle pour les difféomorphismes des surfaces

### 2.2.1 Le Théorème initial et sa preuve

C'est pour le cas des difféomorphismes des surfaces que la conjecture de Smale s'est révélée être la plus difficile à réfuter. En effet, le contre-exemple d'Abraham et Smale que nous venons de présenter ne se généralise pas à ce cadre et il a finalement fallu attendre les années 1970 et les travaux de Sheldon Newhouse pour avoir une réponse (négative) à ce problème :

**Théorème (Newhouse [49, 50]) 2.2.1.1.** *Soit  $M$  une surface réelle compacte. Il existe un ensemble ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de  $C^2$ -difféomorphismes qui ont des tangences homoclines persistantes dans le sens suivant : tout difféomorphisme  $f$  dans  $\mathcal{U}$  possède une tangence hétérocline entre les laminations stable et instable d'un certain ensemble hyperbolique, et il existe un sous-ensemble dense de  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes ayant une tangence homocline associée à un point périodique. De plus, il existe un sous-ensemble résiduel de  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes ayant une infinité de puits.*

Ce résultat utilise comme principal outil technique des intersections persistantes d'ensembles de Cantor dynamiques pour résoudre un problème dynamique. Rappelons en les principales idées de preuve. Le principe général sur lequel repose la preuve est le suivant : on considère un difféomorphisme  $f$  et un certain ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$  pour  $f$ . Celui-ci possède un ensemble stable et un ensemble instable. Comme  $\mathcal{H}$  est localement maximal, il existe un voisinage de  $\mathcal{H}$  dans lequel ces ensemble stable et instable sont respectivement une lamination stable  $\mathcal{F}_s$  et une lamination instable  $\mathcal{F}_u$ . Toutes les deux possèdent une structure de lamination sur un ensemble de Cantor dynamique. De plus, cette structure de lamination peut être étendue en itérant un nombre fini de fois  $f$  ou  $f^{-1}$ .

C'est entre ces deux laminations que l'on va chercher à obtenir des tangences persistantes et non pas entre les variétés stable et instable d'un unique point selle, ce qui serait bien trop peu. Nous pouvons étendre chacune des laminations  $\mathcal{F}_s$  et  $\mathcal{F}_u$  en un feuilletage. Si on dispose d'une tangence homocline initiale (ce qui est facile à réaliser), il est possible de trouver une courbe de tangence où les deux feuilletages s'intersectent non transversalement (avec un point de tangence). Les deux laminations intersectent cette courbe en deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$ . Un point d'intersection entre les deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$  correspond donc à une tangence hétérocline

entre les deux laminations. S'il est possible de choisir  $K$  et  $L$  de telle sorte que l'intersection persiste pour un ouvert de difféomorphismes, on obtient donc des tangences hétéroclines persistantes.

Rappelons brièvement la définition d'un ensemble de Cantor dynamique dans la droite réelle  $\mathbb{R}$  :

**Définition 2.2.1.2.** Soit  $V \subset \mathbb{R}$  un intervalle et soit  $U \Subset V$ . Un répulseur de Cantor est une fonction  $C^\infty$  de  $U$  dans  $V$  telle que :

1.  $U$  est la réunion de  $m$  intervalles  $U_1, \dots, U_m$  dont les adhérences sont deux à deux disjointes
2.  $f$  est dilatante sur  $U$  :  $|f'| > 1$  sur  $U$
3.  $f$  induit un difféomorphisme de  $U_i$  dans  $V$  pour  $1 \leq i \leq m$

On obtient un IFS en considérant les différentes branches inverses de  $f$  de  $V$  dans  $U_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ . L'ensemble limite  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V)$  d'un tel IFS est appelé un ensemble de Cantor dynamique (unidimensionnel).

Cette définition admet une extension immédiate à un ensemble de Cantor dynamique inclus dans une courbe quelconque

**Définition 2.2.1.3.** Pour un ensemble de Cantor dynamique  $K \subset \mathbb{R}$  un trou de  $K$  est une composante connexe de  $\mathbb{R} - K$ .

**Définition 2.2.1.4.** Etant donné un trou  $I$ , on note  $t(I) = \frac{\ell(U)}{\ell(I)}$  où  $U$  est le plus petit intervalle qui relie  $I$  à un trou de longueur égale ou plus grande que la longueur de  $I$ .

**Définition 2.2.1.5.** On note :  $t(K) = \inf t(I)$  l'épaisseur de l'ensemble de Cantor dynamique  $K$ , où l'infimum est pris sur l'ensemble des trous  $I$  de  $K$  de longueur bornée.

On peut trouver dans [53] des détails sur la notion d'épaisseur. Le résultat suivant est la clef pour obtenir des intersections persistantes entre deux ensembles de Cantor dynamiques.

**Théorème (Newhouse Gap Lemma [49]) 2.2.1.6.** Si  $K$  et  $L$  sont deux ensembles de Cantor dynamiques tels que :  $t(K)t(L) > 1$ , alors ou  $K$  est inclus dans un trou de  $L$  ou  $L$  est inclus dans un trou de  $K$  ou  $K \cap L$  est non vide.

*Démonstration.* Nous allons raisonner par contradiction, en supposant que  $K$  et  $L$  sont disjoints et que aucun de ces deux ensembles de Cantor dynamiques n'est inclus dans un trou de l'autre. Si  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  sont tels que  $a < c < b$  ou  $c < a < d$ , on dit que deux intervalles d'extrémités respectives  $a, b$  et  $c, d$  sont liés. Comme  $K$  n'est pas inclus dans un trou de  $L$  et  $L$  n'est pas inclus dans un trou de  $K$ , il existe une paire  $(U_1, U_2)$  où  $U_1$  est un trou de  $K$ ,  $U_2$  est un trou de  $L$ , et  $U_1$  et  $U_2$  sont liés. On appellera une telle configuration une paire liée. Etant donnée une paire liée  $(U_1, U_2)$ , on construit :

1. ou bien un point de  $K \cap L$
2. ou bien une nouvelle paire liée  $(U'_1, U_2)$  telle que  $\ell(U'_1) < \ell(U_1)$
3. ou bien une nouvelle paire liée  $(U_1, U'_2)$  telle que  $\ell(U'_2) < \ell(U_2)$

Ceci implique une contradiction : si on ne parvient pas à trouver un point dans  $K \cap L$  après un nombre fini d'itérations, on obtient une suite de paires liées  $(U_1^i, U_2^i)$  telle que l'une (au moins) des deux suites  $(\ell(U_1^i))_{i \geq 0}$  et  $(\ell(U_2^i))_{i \geq 0}$  est décroissante. Or, pour un ensemble de Cantor dynamique, la somme des longueurs de tous les trous est finie. On en déduit que cette suite tend vers 0. On peut supposer que  $\ell(U_1^i)$  tend vers 0. On prend  $x_i \in U_1^i$ . La suite  $(x_i)_{i \geq 0}$  est bornée, et tout point d'accumulation de cette suite est un point de  $K \cap L$ .

Nous allons conclure la preuve du théorème en prouvant la construction précédente. On suppose que les extrémités  $a, b$  de  $U_1$  et  $c, d$  de  $U_2$  vérifient  $a < c < b$ . On note  $V_1^g$  et  $V_1^d$  les deux intervalles adjacents à  $U_1$ . De même, on note  $V_2^g$  et  $V_2^d$  les deux intervalles adjacents à  $U_2$ . Comme  $t(K)t(L) > 1$ , on a :

$$\frac{\ell(V_1^d) \ell(V_2^g)}{\ell(U_1) \ell(U_2)} > 1$$

On en déduit que  $\ell(V_1^d) > \ell(U_2)$  ou  $\ell(V_2^g) > \ell(U_1)$  ou bien les deux. En particulier, on a que l'extrémité de droite de  $U_2$  est dans  $V_1^d$  ou bien que l'extrémité de gauche de  $U_1$  est dans  $V_2^g$  ou bien les deux. Supposons que l'extrémité de droite de  $U_2$ , notée  $x$ , est dans  $V_1^d$ . Si  $x \in K$ , alors  $x \in K \cap L$  et la première alternative est vérifiée. Si ce n'est pas le cas,  $x$  est dans un trou  $U_1'$  de  $K$  tel que  $\ell(U_1') < \ell(U_1)$  et la seconde alternative est vérifiée avec la paire de trous  $(U_1', U_2)$ . Si l'extrémité de gauche de  $U_1$  est dans  $V_2^g$ , alors on trouverait cette fois ou bien la première ou bien la troisième alternative. La preuve est finie.  $\square$

Revenons maintenant à la démonstration du résultat principal. Newhouse considère un difféomorphisme  $f$  d'une surface réelle qui a un certain ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$ . Celui-ci possède une lamination stable  $\mathcal{F}_s$  et une lamination instable  $\mathcal{F}_u$ . On suppose que  $f$  possède également une tangence homocline initiale. Comme chacune des deux laminations est de codimension 1, il est possible de les prolonger en feuilletages. On a alors une courbe de tangence entre les deux feuilletages stable et instable. Chacune des deux laminations l'intersecte en un ensemble de Cantor dynamique :  $K$  pour  $\mathcal{F}_s$  et  $L$  pour  $\mathcal{F}_u$ . On peut construire  $f$  de telle sorte que  $K$  est suffisamment "épais" transversalement pour que  $K$  et  $L$  vérifient la condition  $t(K)t(L) > 1$ . L'application du Gap Lemma permet de conclure à des intersections persistantes et donc des tangences hétéroclines persistantes.

Une perturbation supplémentaire crée une tangence homocline grâce au lemme d'inclinaison près d'une tangence hétérocline. Ceci montre que les difféomorphismes ayant une tangence homocline sont denses dans un certain ouvert de difféomorphismes. Or, on peut montrer qu'il est toujours possible de créer un puits en perturbant une tangence homocline associée à un point périodique dissipatif (c'est-à-dire que le produit des deux valeurs propres est plus petit que 1 en module, on peut construire  $f$  de telle sorte à ce que cette hypothèse de dissipativité soit vérifiée). Une preuve de ce fait dans le cas de la dimension 3 dans  $\mathbb{C}$  est donné à la fin du chapitre 5. Alors un argument de type Baire permet de conclure à l'existence de sous-ensembles résiduels de difféomorphismes ayant une infinité de puits. Ceci achève la démonstration de ce résultat majeur.

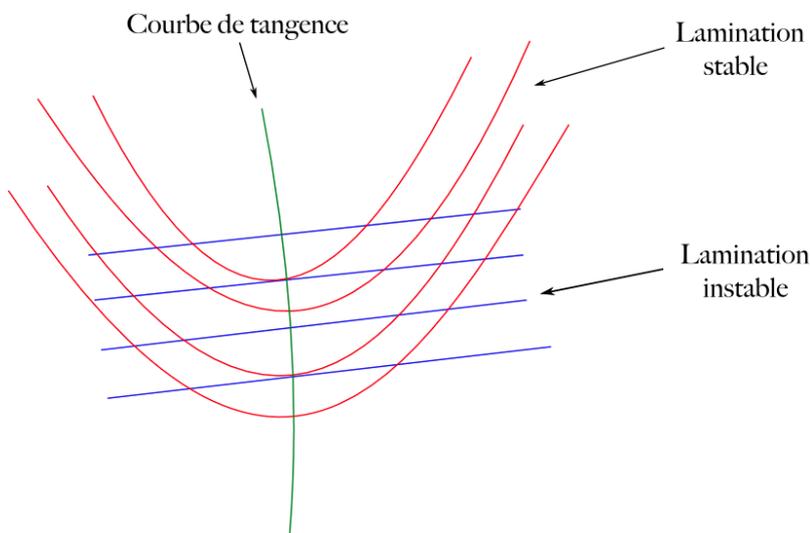


Figure 2 : Obtenir des tangences

### 2.2.2 Le Théorème amélioré

Dans un second travail ([51]), Newhouse parvient à montrer que de telles tangences persistantes sont présentes en fait dès qu'il y a une tangence homocline, sans autre hypothèse sur la présence ou non d'ensembles hyperboliques particuliers.

**Théorème (Newhouse [51]) 2.2.2.1.** *Soit  $M$  une surface réelle compacte et  $f$  un  $C^2$ -difféomorphisme qui a une tangence homocline associée à un point périodique de type selle dissipatif. Alors  $f$  est accumulé par des ouverts non vides de  $C^2$ -difféomorphismes qui ont des tangences hétéroclines persistantes et où les difféomorphismes ayant une infinité de puits sont denses.*

Ce résultat est basé sur un principe identique : on intersecte toujours deux ensembles de Cantor dynamiques dans une courbe de tangence, correspondant à des laminations stable et instable d'ensembles hyperboliques (pas nécessairement le même ensemble hyperbolique d'ailleurs). Mais voici l'argument clef. On considère un difféomorphisme  $f$  d'une surface réelle. On suppose que  $f$  possède une tangence homocline associée à un point de type selle appartenant à un ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}_1$ . Il est alors possible d'approcher  $f$  par des difféomorphismes  $g$  ayant un ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}_2$  tel que, transversalement, la lamination stable de  $\mathcal{H}_2$  est un ensemble de Cantor dynamique arbitrairement épais. Un tel ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}_2$  peut être construit via une procédure de renormalisation. L'ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}_1$  persiste et sa lamination instable est transversalement un ensemble de Cantor dynamique dont l'épaisseur reste minorée. Ensuite, toujours en utilisant le Gap Lemma, la même méthode que précédemment permet de conclure à l'existence d'ouverts non vides de difféomorphismes ayant des tangences persistantes, et ces ouverts de difféomorphismes s'accumulent en  $f$ . Le Théorème est ainsi prouvé.

### 2.2.3 Compléments sur les ensembles de Cantor dynamiques et raffinement du Théorème de Newhouse

Nous venons de voir que l'intersection des ensembles de Cantor dynamiques est au coeur de la preuve du Théorème de Newhouse. Nous donnons maintenant un résultat complémentaire à ce sujet qui conduit à un raffinement des résultats de Newhouse. Un problème très proche de l'intersection est celui de l'étude de la différence arithmétique de deux ensembles de Cantor dynamiques :

**Définition 2.2.3.1.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}$  et  $L \subset \mathbb{R}$  deux ensembles de Cantor dynamiques. La différence arithmétique  $K - L$  est :*

$$K - L = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in K, z \in L, x = y - z\}$$

L'espace des ensembles de Cantor dynamiques hérite d'une topologie  $C^\infty$  naturelle déduite de la topologie  $C^\infty$  sur les applications qui définissent dynamiquement les espaces de Cantor. On en déduit une topologie  $C^\infty$  sur l'espace des couples d'ensembles de Cantor dynamiques  $(K, L)$ . Palis a émis la conjecture suivante à ce sujet (on peut se référer à [11]) :

**Conjecture (Palis) 2.2.3.2.** *La différence arithmétique  $K - L$  de deux ensembles de Cantor dynamiques génériques  $K$  et  $L$  :*

1. *ou bien possède une mesure de Lebesgue nulle*
2. *ou bien contient un intervalle*

**Définition 2.2.3.3.** *Soit  $K$  et  $L$  deux ensembles de Cantor dynamiques. On dit que  $K$  et  $L$  s'intersectent stablement si toute paire  $(K', L')$  suffisamment proche de  $(K, L)$  est telle que :*

$$K' \cap L' \neq \emptyset$$

Le résultat suivant répond à la conjecture ci-dessus : Moreira et Yoccoz ont prouvé que pour un ouvert dense de couples d'ensembles de Cantor dynamiques, si la somme de leurs dimensions de Hausdorff est supérieure à 1, alors ils s'intersectent stablement après une translation éventuelle :

**Théorème (Moreira, Yoccoz [47]) 2.2.3.4.** *Soit  $\Omega$  l'ensemble des couples d'ensembles de Cantor dynamiques  $(K, L)$  tels que l'on a :*

$$\dim_H(K) + \dim_H(L) > 1$$

*Alors il existe un sous-ensemble ouvert dense  $\Omega'$  de  $\Omega$  tel que pour tout  $(K, L) \in \Omega'$  l'ensemble :*

$$S(K, L) = \{t \in \mathbb{R} : K \text{ et } L + t \text{ s'intersectent stablement}\}$$

*est ouvert et dense dans  $K - L$ . Son complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle.*

Outre le fait d'être intéressant en soi, le Théorème précédent possède un rôle très important dans la preuve du résultat suivant. On s'intéresse à une famille  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $C^\infty$ -difféomorphismes telle que  $f = f_0$  a une tangence homocline associée à un certain ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$ . On suppose que la tangence est génériquement déliée, c'est-à-dire avec une vitesse positive (on peut consulter

[53] pour une définition précise). En utilisant le résultat précédent, Moreira et Yoccoz montrent que toute tangence homocline est accumulée par des paramètres correspondant à des tangences persistantes et que ces paramètres ont une mesure non négligeable si la dimension de Hausdorff de  $\mathcal{H}$  est suffisamment grande. C'est un raffinement des résultats de Newhouse puisqu'on obtient une indication sur la mesure de la prévalence du phénomène de Newhouse.

**Théorème (Moreira, Yoccoz [47]) 2.2.3.5.** *Supposons que  $\dim_H(\mathcal{H}) > 1$ . On note  $H$  l'ensemble des paramètres  $t$  tels que  $f_t$  est uniformément hyperbolique. Alors il existe un ouvert  $N$  dans l'espace des paramètres tel que pour tout  $t \in N$ ,  $f_t$  possède une tangence persistante et tel que :*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(N \cap [0, \epsilon])}{\epsilon} > 0 \text{ et } \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m((N \cup H) \cap [0, \epsilon])}{\epsilon} = 1$$

## 2.3 Phénomène de Newhouse : extension à la dynamique holomorphe

En 1991, Gregory Buzzard a réussi à étendre les travaux de Newhouse au cas complexe :

**Théorème (Buzzard [18]) 2.3.0.6.** *Il existe  $d > 0$  tel que si  $\mathcal{X}$  est soit :*

- (a) l'espace  $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$
- (b) l'espace  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^2)$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  de degré majoré par  $d$

*Alors il existe  $G \in \mathcal{X}$  et un voisinage  $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$  de  $G$  tel que  $\mathcal{N}$  a des tangences hétéroclines persistantes. En particulier, il existe un sous-ensemble résiduel de  $\mathcal{N}$  d'automorphismes polynomiaux ayant une infinité de puits.*

Le principe pour montrer ce résultat est identique à celui utilisé par Newhouse. Buzzard exhibe un fer à cheval qui a des laminations stable et instable, les deux sont tangentes sur un certain disque de tangence. La principale différence réside dans le fait que cette fois il faut intersecter deux ensembles de Cantor dynamiques planaires et non pas unidimensionnels. Remarquons qu'il y a également une grande différence avec la dynamique des polynômes complexes en une variable et en particulier avec le Théorème suivant dû à Fatou :

**Théorème (Fatou) 2.3.0.7.** *Soit  $p$  un polynôme de degré  $\geq 2$ . L'ensemble des points périodiques attractifs ou paraboliques de  $p$  est fini.*

En effet, dans tout bassin d'un point attractif ou parabolique se trouve un point critique de  $p$ . Mais  $p$  ne possède qu'un nombre fini de points critiques. Il ne peut donc n'y avoir qu'un nombre fini de points attractifs ou paraboliques. En dimension 2, ce n'est plus du tout le cas comme le montre le résultat de Buzzard : non seulement, on peut trouver un automorphisme polynomial avec une infinité de puits mais en plus on peut trouver un sous-ensemble résiduel de tels automorphismes.

### 2.3.1 Toy-model linéaire

Nous présentons ici le toy-model linéaire introduit par Buzzard ([17]) pour intersecter stablement deux ensembles de Cantor dynamiques. Les ensembles de

Cantor dynamiques obtenus ultérieurement par coupe transversale des feuilletages stable et instable dans  $\mathbb{C}^2$  seront suffisamment proches des deux ensembles de Cantor dynamiques linéaires du toy-model pour que le même principe puisse s'appliquer. On commence par rappeler la définition d'un ensemble de Cantor dynamique dans  $\mathbb{C}$  :

**Définition 2.3.1.1.** Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$ . Un répulseur de Cantor est une fonction holomorphe  $f$  de  $U$  dans  $V$  telle que :

1.  $U$  est la réunion de  $m$  domaines de Jordan  $U_1, \dots, U_m$  disjoints deux à deux
2.  $V$  est un domaine de Jordan
3. pour tout  $1 \leq i \leq m$  la restriction de  $f$  à  $U_i$  est univalente de  $U_i$  dans  $V$
4.  $U \Subset V$
5.  $f$  est dilatante sur  $U$  :  $|f'| > 1$  sur  $U$

On obtient un IFS en considérant les différentes branches inverses de  $f$  de  $V$  dans  $U_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ . L'ensemble limite  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V)$  d'un tel IFS est appelé un ensemble de Cantor dynamique.

A titre d'exemple, l'ensemble de Julia de  $z^2 + c$  pour  $|c| > 10$  est un exemple d'ensemble de Cantor dynamique.

On va chercher à intersecter de manière persistante deux ensembles de Cantor dynamiques. Chacun d'entre eux aura une géométrie particulière. Le premier ensemble de Cantor dynamique, noté  $K$ , est défini par un IFS  $\{f_1, f_2\}$  constitué de deux applications affines  $f_1$  et  $f_2$  définies sur un ouvert  $U$  :

$$f_1 : z \mapsto a_1z + b_1 \text{ et } f_2 : z \mapsto a_2z + b_2$$

On impose les conditions suivantes :

$$f_1(U) \Subset U, f_2(U) \Subset U \text{ et } \text{Arg}(a_1) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$$

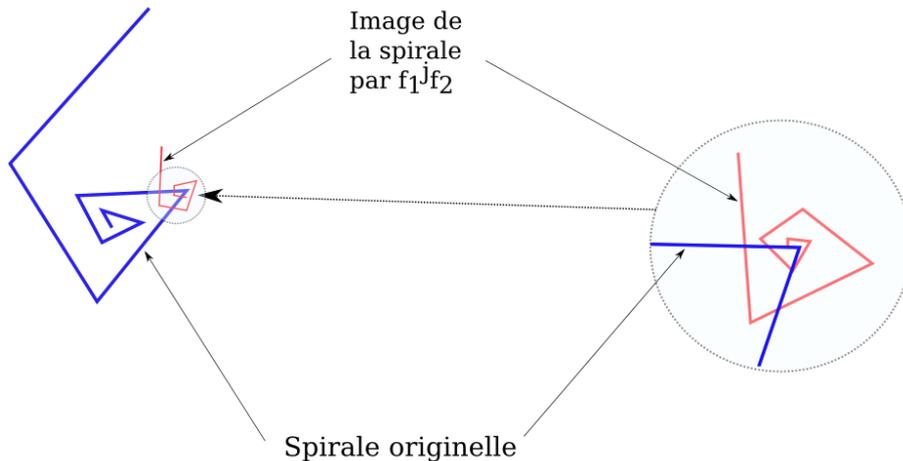


Figure 3 : Le premier ensemble de Cantor dynamique

Le second ensemble de Cantor est l'ensemble limite d'un IFS  $\{g_1, \dots, g_{N^2}\}$  où toutes les applications  $g_k$  ( $1 \leq k \leq N^2$ ) sont affines et définies sur un carré  $K'_0$ . L'ensemble  $K'_1 = \bigcup_{1 \leq k \leq N^2} g_k(K'_0)$  est la réunion de  $N^2$  sous-carrés placés de manière régulière à l'intérieur de  $K'_0$ , de taille relative  $0 \leq \delta \leq 1$  et donc chacun de ces sous-carrés est de longueur  $\frac{\delta}{N}$ . On définit par itération des ensembles successifs  $K'_n$  de  $N^{2n}$  carrés :

$$K'_n = \bigcup_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq N^2} g_{k_n} \circ \dots \circ g_{k_1}(K'_0)$$

L'ensemble limite de cet IFS est le second ensemble de Cantor dynamique  $K'$  :

$$K' = \bigcap_{0 \leq n} K'_n$$

Evidemment, pour chacun de ces deux ensembles de Cantor dynamiques, il est possible de faire varier les différents paramètres les définissant. On cherche à bien les choisir de telle sorte que même en faisant varier ces paramètres,  $K$  et  $K'$  s'intersectent de manière persistante. Toute la méthode pour parvenir à ces intersections persistantes repose sur le principe suivant : à l'étape  $n$ , on a un carré et son quadrillage de petits sous-carrés. Pour tout point du carré de grande taille, on arrive à trouver une portion de couronne d'ouverture angulaire d'angle  $\pi/8$  centrée en ce point et incluse dans un petit sous-carré. On peut notamment construire une portion de couronne en un point  $\alpha$  de  $K \cap K'_n$  préalablement construit à l'étape  $n - 1$ . On a aussi une spirale d'éléments de  $K$  qui tourne autour du point  $\alpha$ . L'idée est de bien choisir les paramètres géométriques pour que la spirale possède au moins un de ses points dans cette portion de couronne, d'où l'obtention d'un point appartenant à  $K \cap K'_{n+1}$ . On pourra ainsi réitérer, et on obtiendra  $K \cap K'_n \neq \emptyset$  pour tout  $n$ . Comme  $K'$  est l'intersection des ensembles  $K'_n$ , on obtiendra alors  $K \cap K' \neq \emptyset$ .

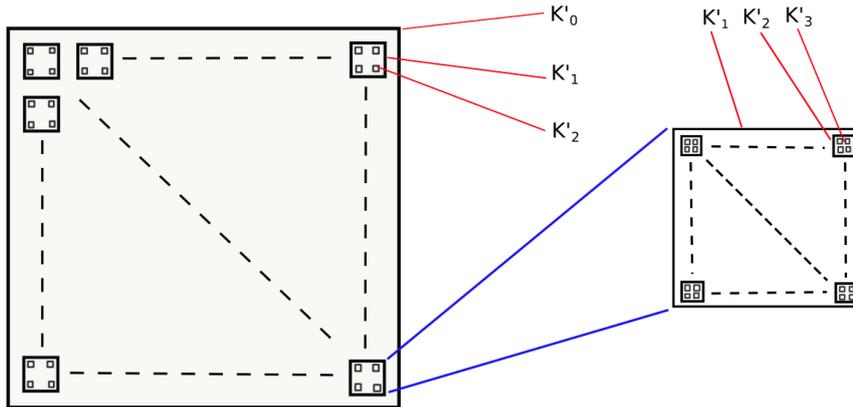


Figure 4 : Le second ensemble de Cantor dynamique

Soyons plus précis... On commence par s'intéresser au premier ensemble de Cantor dynamique  $K$ . On note  $\alpha_0$  le point fixe de  $f_1$  qui vérifie  $\{\alpha_0\} = \bigcap_{n \geq 0} f_1^n(U)$ . On considère l'ensemble des points  $\{f_1^n(f_2(\alpha_0)) : n \in \mathbb{N}\}$  : il s'agit d'une spirale de points qui sont tous dans  $K$  et qui convergent vers le point

fixe  $\alpha_0$  avec un facteur  $a_1$  pour passer d'un point au suivant. On a vu qu'on avait choisi le paramètre  $a_1$  d'argument irrationnel. Il est donc toujours possible de trouver un nombre  $k$  tel que parmi  $k$  points successifs dans la spirale  $\{f_1^n(f_2(\alpha_0)) : n \in \mathbb{N}\}$ , il y en a au moins un dans n'importe quel secteur angulaire d'ouverture angulaire  $\pi/8$ . Définissons la dimension d'une spirale comme la distance entre le centre de la spirale et le premier point de celle-ci. On fixe un tel  $k$ , et si on note  $r_0 > 0$  la dimension de la spirale, on a :

**Propriété 1 de  $K$ .**

$$\forall \theta \in ]0, 2\pi[, \forall 0 < r < r_0, \exists j \geq 0, \alpha_1 = f_1^j f_2(\alpha_0) \in W_\theta(\alpha_0, r|a_1|^k, r, \pi/8)$$

où  $W_\theta(\alpha_0, r|a_1|^k, r, \pi/8)$  est la portion de couronne de rayon intérieur  $r|a_1|^k$ , de rayon extérieur  $r$ , d'ouverture angulaire  $\pi/8$  centrée en la direction  $\theta$  à partir de  $\alpha_0$ .

Une autre remarque importante à faire ici est que autour de chacun de ces points  $\{f_1^j f_2(\alpha_0) : 0 \leq j\}$ , on trouve une nouvelle spirale de points de  $K$  qui est l'image de la spirale  $\{f_1^n(f_2(\alpha_0)) : n \in \mathbb{N}\}$  par  $f_1^j f_2$  pour un certain  $j \geq 0$ . En particulier, la dimension de la spirale image qui tourne autour du point  $f_1^j f_2(\alpha_0)$  est proportionnelle à la distance  $|\alpha_0 - f_1^j f_2(\alpha_0)|$  du point  $f_1^j f_2(\alpha_0)$  au centre de la spirale  $\alpha_0$ . Plus précisément, la dimension de cette nouvelle spirale est :  $|a_1|^j |a_2| |\alpha_0 - f_2(\alpha_0)| = |a_2| |\alpha_0 - f_1^j f_2(\alpha_0)|$ .

**Propriété 2 de  $K$ .** Chaque point  $f_1^j f_2(\alpha_0)$  où  $0 \leq j \leq k$  est le centre d'une nouvelle spirale de points de  $K$  de dimension  $|a_2| |\alpha_0 - f_1^j f_2(\alpha_0)|$ .

Un dernier point à souligner est que ces deux propriétés se reproduisent à la génération suivante de spirales : parmi les  $k$  points consécutifs de la spirale image, il est possible d'en trouver un dans n'importe quel secteur angulaire d'ouverture angulaire  $\pi/8$  et de rapport  $|a_1|^k$  et autour de ce point, on trouve une nouvelle spirale de taille proportionnelle à la distance entre le centre de l'ancienne spirale et celui de la nouvelle. On peut ainsi construire des suites de spirales de points de  $K$  qui vérifient toutes ces deux conditions.

On s'intéresse cette fois-ci au second ensemble de Cantor dynamique  $K'$ . On dispose de deux paramètres variables : le nombre  $N^2$  de carrés et leur taille relative  $\delta$ . En prenant  $\delta$  assez grand, le taux de remplissage des sous-carrés devient suffisamment grand et on obtient :

**Propriété 1 de  $K'$ .**

$$\forall z \in K'_0, \exists \theta \in ]0, 2\pi[, W_\theta(z, \frac{1}{10N}|a_1|^k, \frac{1}{10N}, \pi/8) \Subset K'_1$$

On choisit maintenant le paramètre  $N$  tel que :

**Propriété 2 de  $K'$ .**

$$\frac{1}{N} < |a_2| \frac{1}{10} |a_1|^k$$

On peut à présent montrer que sous ces quatre conditions sur  $K$  et  $K'$ , si ces deux ensembles de Cantor dynamiques sont initialement bien positionnés, on obtient une intersection entre  $K$  et  $K'$ . De plus, cette intersection persiste

même après perturbation des paramètres définissant  $K$  et  $K'$ . On suppose que  $\alpha_0 \in K'_0$  et que la distance  $|\alpha_0 - f_2(\alpha_0)|$  est plus grande que la longueur d'un côté de  $K'_0$ . D'après la propriété 1 de  $K'$ , on peut trouver un secteur angulaire  $W_\theta(\alpha_0, \frac{1}{10N}|\alpha_1|^k, \frac{1}{10N}, \pi/8)$  inclus dans un des sous-carrés de  $K'_1$ . D'après la propriété 1 de  $K$ , on trouve un point  $\alpha_1 \in K$  de la spirale initiale  $\{f_1^n(f_2(\alpha_0)) : n \in \mathbb{N}\}$  dans ce secteur angulaire, et donc dans un sous-carré de  $K'$ . D'après la propriété 2 de  $K$ ,  $\alpha_1$  est le centre d'une spirale image de points de  $K$  de dimension  $|a_2||\alpha_0 - \alpha_1|$ . Enfin, d'après la propriété 2 de  $K'$ , on a  $\frac{1}{N} < |a_2||\alpha_0 - \alpha_1|$  et donc la spirale image est plus grande que la longueur d'un côté du carré de  $K'_1$  auquel  $\alpha_1$  appartient.

A partir d'ici, on peut réutiliser exactement la même méthode en quatre étapes et on obtient ainsi une suite de points  $(\alpha_n)_n$  telle que pour tout  $n \geq 0$ , on trouve  $\alpha_n \in K \cap K'_n$ . On trouve donc que  $K$  intersecte chaque  $K'_n$ , d'où les deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $K'$  ont une intersection non vide. Toutes les conditions sur les coefficients des différentes applications affines  $f_1, f_2, g_1, \dots, g_{N^2}$  sont ouvertes, donc changer un peu ces coefficients ne changera pas la démonstration et donc l'intersection est stable. On finit par trouver le résultat suivant, où les  $f_j$  et les  $g_j$  sont respectivement définies sur l'ouvert  $U$  et le carré  $K'_0$  définis précédemment :

**Proposition 2.3.1.2.** *Dans l'espace  $\text{Aff} \simeq \mathbb{C}^{2(N^2+2)}$  des applications affines  $(f_1, f_2, g_1, \dots, g_{N^2})$ , il existe un ouvert  $\mathcal{A}$  tel que pour tout  $(f_1, f_2, g_1, \dots, g_{N^2}) \in \mathcal{A}$ , les ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $K'$  ont une intersection non vide.*

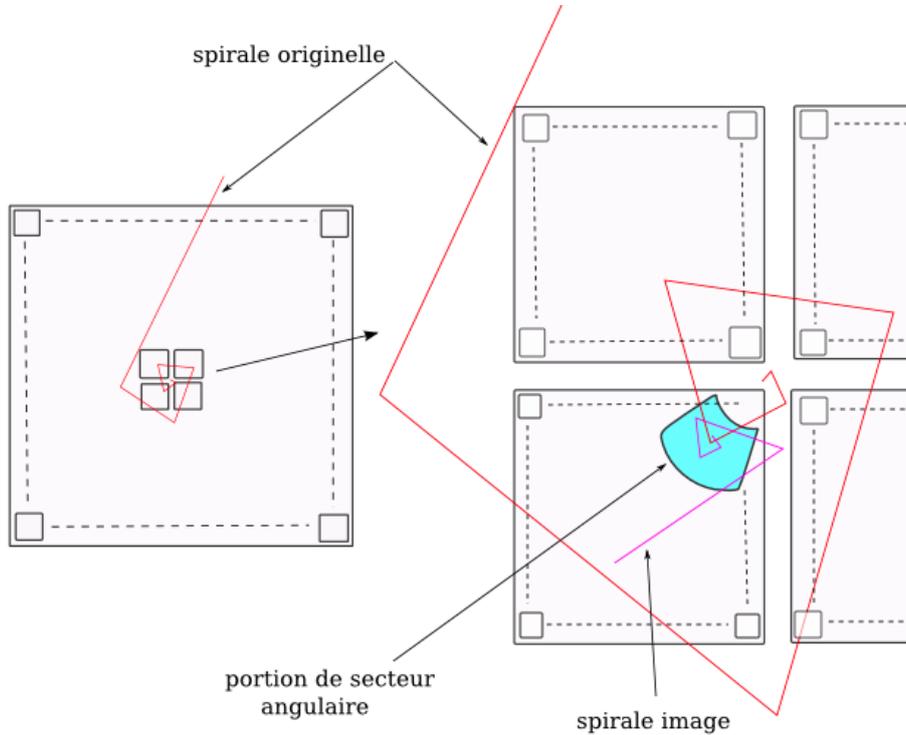


Figure 5 : Méthode d'intersection entre les deux ensembles de Cantor dynamiques

### 2.3.2 Perturbations non linéaires du toy-model

On peut même aller plus loin et se débarrasser du caractère affine des applications utilisées. Il est facile de vérifier que les quatre propriétés précédentes sont conservées en appliquant une application affine. Ce sont également des propriétés ouvertes : elles sont conservées après itération par une application dont la distorsion est proche de 1. Une définition précise de la distorsion est donnée en 3.1. De plus, en 3.5, on montre que la distorsion est une quantité qui dépend continûment des fonctions utilisées. En utilisant ceci, on parvient au résultat suivant :

**Théorème (Buzzard [17]) 2.3.2.1.** *Soit  $U \Subset \mathbb{C}$  un ensemble convexe et soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications biholomorphes définies sur un voisinage de  $\bar{U}$  avec  $f_1(\bar{U}) \Subset U$ ,  $f_2(\bar{U}) \Subset U$  et  $f_1(\bar{U}) \cap f_2(\bar{U}) = \emptyset$ . Supposons qu'il existe  $C < 1$  tel que  $|f_j(z) - f_j(w)| < C|z - w|$  pour tous  $z, w$  dans  $U$  et  $j \in \{1, 2\}$ . Soit  $\alpha_0$  le point fixe de  $f_1$  et supposons que  $\text{Arg}(f_1'(\alpha_0))$  est irrationnel. Il existe alors un carré  $K'_0 \subset \mathbb{C}$  et des applications biholomorphes  $g_j : K'_0 \rightarrow g_j(K'_0) \Subset K'_0$  d'images disjointes telles que toutes perturbations  $f'_j$  et  $g'_j$  suffisamment proches en topologie  $C^2$  des  $f_j$  et  $g_j$ , on a :*

$$K(f'_j) \cap K(g'_j) \neq \emptyset$$

### 2.3.3 Implémentation dans le cas des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$

Une fois le toy-model établi, Buzzard construit un exemple d'automorphisme polynomial  $F$  de  $\mathbb{C}^2$  satisfaisant grosso-modo les deux conditions :

1.  $F$  possède un fer à cheval  $\mathcal{H}$  avec des laminations stable et instable dont les coupes transversales sont des ensembles de Cantor dynamiques proches de ceux du toy-model linéaire
2.  $F$  possède une tangence homocline

On commence par définir  $F$  par morceaux sur l'ensemble  $Q^2$ , constitué de  $81 = 9 \times 9$  hypercubes de  $\mathbb{C}^2$ , où  $Q$  est une grille de 9 carrés disjoints définie par :

$$Q = \bigcup_{a \in A} C(a, \delta)$$

où :

$$A = \{j + ki \mid j, k \in \{-1, 0, 1\}\}$$

$$C(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |\text{Re}(w - z)|, |\text{Im}(w - z)| < r\}$$

Le paramètre  $\delta$  est à nouveau ici un facteur qui indique à quel point les carrés sont "serrés" les uns contre les autres. L'application  $F$  est une composition  $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$ . Informellement,  $F_1$  est affine par morceaux et décale les cubes "du haut" vers la droite, ne bouge pas les cubes "du milieu" et décale les cubes "du bas" vers la gauche. Toujours informellement,  $F_2$  est aussi affine par morceaux et décale les cubes "de droite" vers le bas, ne bouge pas les cubes "du milieu" et décale les cubes "de gauche" vers le haut. Finalement,  $F_3$  contracte la direction horizontale et dilate la direction verticale :  $F_3(z, w) = (kz, \frac{1}{k}w)$  où  $k > 1$  est une constante fixée. Sur la figure ci-dessus, il est possible d'observer

$Q^2$  et son image directe par  $F$ , il faut juste prêter attention au fait que comme la figure est réelle, un carré de  $\mathbb{C}$  est représenté par un intervalle réel et qu'il n'y en a que  $9 = 3 \times 3$  au lieu de 81.

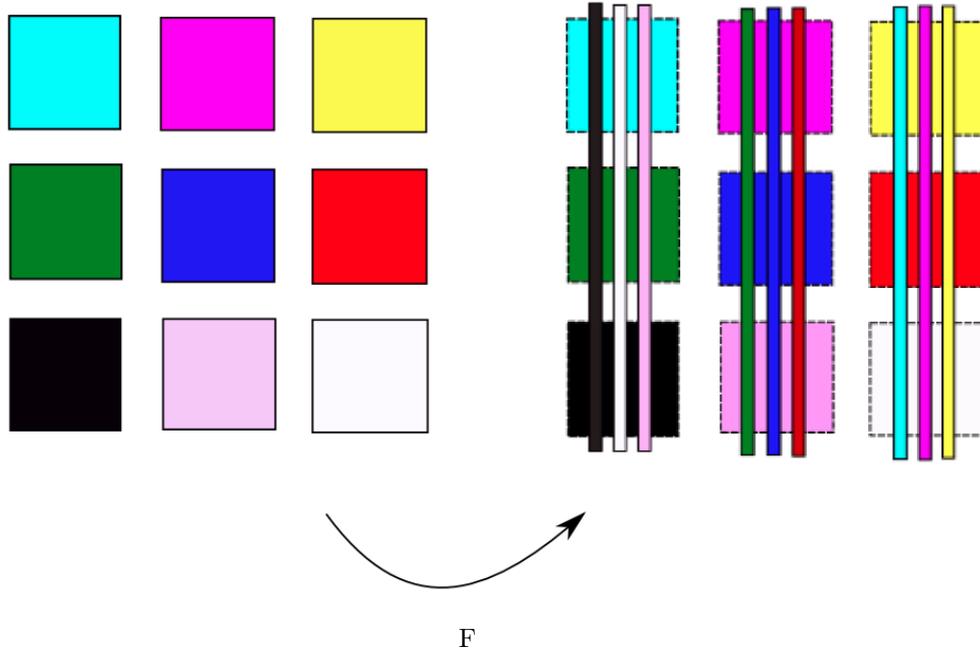


Figure 6 : Fer à cheval dans  $\mathbb{C}^2$

Par  $F$ , toute composante de  $Q^2$  est contractée dans la direction horizontale et dilatée dans la direction verticale. L'inverse est vrai pour  $F^{-1}$ . L'application  $F$  définit ainsi un ensemble maximal invariant  $\mathcal{H} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(Q^2)$  qui est un ensemble de Cantor dynamique bidimensionnel sur lequel la dynamique de  $F$  est conjuguée à un shift sur  $\{0, \dots, 8\}$ .

Il est possible de montrer que transversalement, les laminations stable et instable de ce fer à cheval  $\mathcal{H}$  sont des ensembles de Cantor dynamiques assez similaires à ceux obtenus dans le toy-model.

La figure ci-dessous représente une coupe verticale de  $F^{-1}(Q^2)$ . On y voit que le point bleu au milieu est dans  $W^s(\mathcal{H})$  et est entouré d'une grille de 8 points bleus de  $W^s(\mathcal{H})$ . De plus, si on réitère une fois de plus  $F^{-1}$ , on retrouverait autour de chacun de ces points une nouvelle grille de points de  $W^s(\mathcal{H})$  dont la dimension est uniquement fonction de la constante  $k$ , et ainsi de suite. En particulier, on peut montrer que l'ensemble de Cantor dynamique  $K$ , qui est l'intersection de  $W^s(\mathcal{H})$  et de cette coupe, vérifie les propriétés 1 et 2 énoncées précédemment.

Sur la coupe horizontale de  $F(Q^2)$ , on obtient une grille de 9 carrés. En réitérant, on obtient ensuite 9 sous-carrés dans chacun d'entre eux, et ainsi de suite. On obtient un IFS dont l'ensemble limite est un ensemble de Cantor dynamique  $K'$ . On voit que en faisant tendre  $\delta$  vers 1, il est possible de vérifier la propriété 1 pour  $K'$ . Quitte à remplacer  $F$  par un itéré  $F^n$ , on peut prendre les carrés initiaux aussi petits que l'on veut et vérifier ainsi la propriété 2.

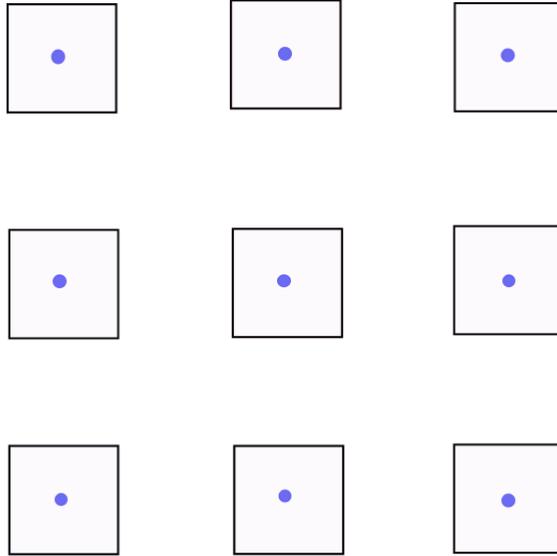


Figure 7 : Lamination stable en coupe

Tout ceci montre que les deux ensembles de Cantor dynamiques obtenus par coupe transversale des laminations stable et instable de  $\mathcal{H}$  vérifient les conditions énoncées précédemment pour obtenir des intersections stables.

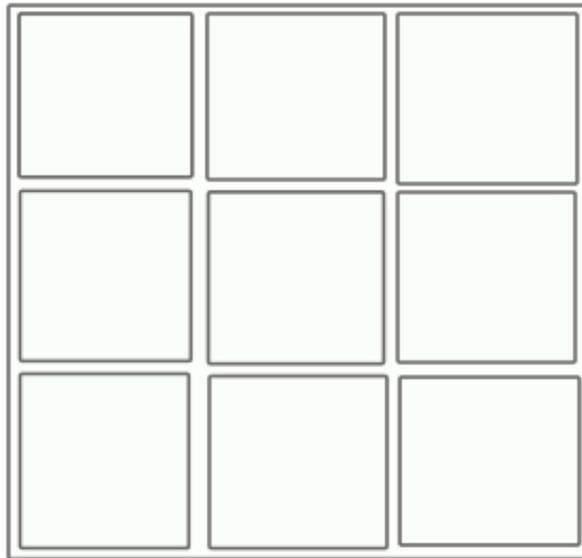


Figure 8 : Lamination instable en coupe

On prolonge ensuite  $F$  hors de  $Q^2$  en un automorphisme de  $\mathbb{C}^2$  qui possède une tangence homocline initiale. On étend les laminations stable et instable en feuilletages grâce à un résultat de Pixton ([55]). Il est alors possible de considérer un disque de tangence où ces deux feuilletages sont tangents. Les laminations stable et instable intersectent ce disque en deux ensembles de Cantor dynamiques. Ceux-ci s'intersectent de manière persistante en utilisant la méthode

que nous venons de développer. Ceci montre que les laminations stable et instable de l'ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$  s'intersectent de manière persistante sur le disque de tangence. Par perturbation, on trouve un ouvert d'automorphismes où les automorphismes ayant une tangence homocline sont denses. On utilise enfin un résultat de [31] (qui généralise une technique de Newhouse au cas complexe) pour produire un puits près d'une tangence homocline. Un argument de type Baire permet finalement de conclure.

# Une généralisation de la notion d'épaisseur

# 3

## 3.1 Définitions

On cherche à donner un critère permettant d'obtenir des intersections persistantes pour des ensembles de Cantor dynamiques planaires. Plus précisément, on donne une généralisation de la notion d'épaisseur pour des ensembles de Cantor dynamiques dans  $\mathbb{C}$  et un énoncé de type Gap Lemma associé à cette notion. On commence par une série de définitions visant à décrire la géométrie d'un ensemble de Cantor dynamique dans  $\mathbb{C}$ .

On utilise la norme  $|\cdot|_\infty$  sur  $\mathbb{C}$  dans tout ce chapitre : ce point est à retenir, puisque une boule est alors géométriquement un carré. Dans la suite, tous les carrés ont leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées, sont ouverts et sont donc des boules ouvertes pour la norme  $|\cdot|_\infty$ . On appelle longueur d'un carré la longueur d'un de ses côtés. Un carré de longueur  $r$  est alors une boule de rayon  $\frac{r}{2}$  pour  $|\cdot|_\infty$ .

**Definition 3.1.1.** *On considère un ensemble de Cantor dynamique  $K$  égal à l'ensemble limite de l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$  où chacune des contractions  $f_i$  est une contraction holomorphe définie sur un ouvert  $U$  telle que  $f_i(U) \Subset U$ . On définit :*

$$K_0 = U$$

$$K_n = \bigcup_{1 \leq i \leq p} f_i(K_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1$$

On a donc  $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$ . On appelle pièce de profondeur  $j$  toute composante connexe de  $K_j$ . Soit  $P$  une pièce de profondeur  $j$  et  $Q$  une pièce de profondeur  $k$ . On dit que :

1.  $P$  est le père de  $Q$  si  $k = j + 1$  et si  $Q \Subset P$ . On dit alors aussi que  $Q$  est un fils de  $P$
2. On définit alors par induction la notion de pièce descendant d'une autre pièce :  $Q$  est un descendant de  $P$  si  $Q$  est un fils de  $P$  ou un fils d'un descendant de  $P$
3. Pour une suite d'indices  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , on note :

$$K_I = f_I(K) = f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1}(K)$$

C'est un ensemble de Cantor dynamique égal à l'ensemble limite de l'IFS  $\{f_I \circ f_1 \circ f_1^{-1}, \dots, f_I \circ f_p \circ f_p^{-1}\}$  dont toutes les applications sont définies sur  $f_I(U)$ .

Dans la suite, pour des raisons techniques, on supposera toujours l'existence d'un ouvert  $U'$  tel que  $U \Subset U'$  et tel que chaque contraction  $f_i$  possède un prolongement en une contraction de  $U'$  avec  $f_i(U') \Subset U$ .

**Definition 3.1.2.** Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On appelle un carré inscrit de  $V$  un carré de longueur maximale inclus dans  $V$ . Il n'est pas nécessairement unique. On note  $r(V)$  sa longueur.

**Notation 3.1.3.** Pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , on note  $C(z, r)$  le carré de centre  $z$  et de longueur  $r$ .

**Definition 3.1.4.** Dans la suite, étant donné un ensemble de Cantor dynamique  $K$ , on fixera pour chaque pièce de  $K$  un carré inscrit, et on parlera du carré inscrit de cette pièce. Le carré inscrit moitié sera le carré de même centre et dont la longueur est multipliée par  $\frac{1}{2}$ .

Dans la suite, on va définir plusieurs quantités relatives à un IFS. Par souci de simplification, on fera l'abus de langage de les définir relativement à l'ensemble limite de l'IFS, qui sera toujours un ensemble de Cantor dynamique.

**Definition 3.1.5.** Soit  $f$  une application univalente définie sur  $U'$  telle que  $f(U') \Subset U$ . On appelle distorsion de  $f$  (sur  $U$ ), noté  $\delta_f$ , le nombre suivant :

$$\delta_f = \max_{(z, z') \in \overline{U}^2} \frac{|f'(z)|}{|f'(z')|}$$

On a :  $1 \leq \delta_f < +\infty$  d'après le Théorème de Koebe (puisque  $U \Subset U'$ ). Pour un ensemble de Cantor dynamique  $K$  donné par un IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ , on appelle la distorsion de  $K$  la quantité suivante :

$$\delta_K = \sup_I \delta_{f_I} = \sup_I \left( \max_{(z, z') \in \overline{U}^2} \frac{|f'_I(z)|}{|f'_I(z')|} \right)$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des suites finies d'indices dans  $\{1, \dots, p\}$ . On a toujours  $1 \leq \delta_K < +\infty$  d'après le Théorème de Koebe.

**Definition 3.1.6.** Pour l'ensemble de Cantor dynamique  $K$  de domaine initial  $U$  et associé à l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ , on définit  $U_i = f_i(U)$  et les rapport de réduction maximal et minimal de  $K$  :

$$\lambda_K^0 = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

$$\Lambda_K^0 = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

**Lemma 3.1.7.** Pour toute suite finie  $I$ , le diamètre de  $f_I(C(0, 1))$  est borné par  $\sqrt{2}\delta_K|f'_I(0)|$  et on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}\delta_K}|f'_I(0)| \leq r(f_I(C(0, 1))) \leq \sqrt{2}\delta_K|f'_I(0)|$$

*Démonstration.* C'est une conséquence facile de l'inégalité des accroissements finis. La preuve est laissée au lecteur.  $\square$

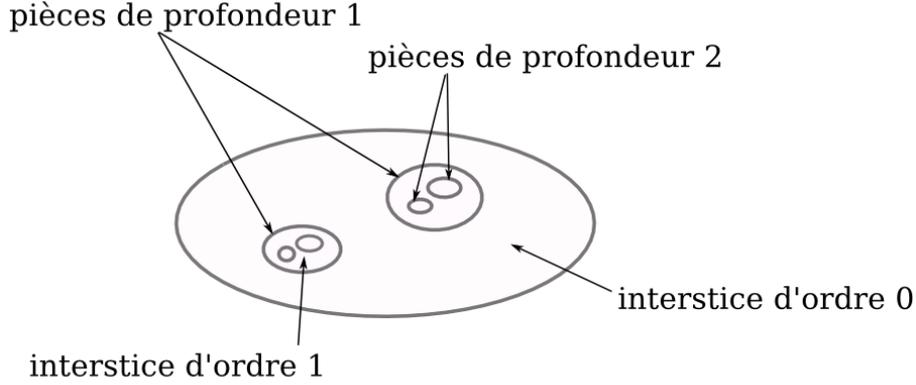


Figure 9 : Pièces et interstices

**Definition 3.1.8.** Pour l'ensemble de Cantor dynamique  $K$  de domaine initial  $U$  et associé à l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$  de distorsion  $\delta_K$ , on définit le rapport de réduction maximal à distorsion près :

$$\lambda_K = \frac{1}{2\delta_K^2} \cdot \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

Le Lemme 3.1.7 implique immédiatement que pour toute suite d'indices  $I$ , on a  $\lambda_{K_I}^0 \geq \lambda_K$ . Intuitivement, dans  $K$ , d'une étape à une autre, on ne multiplie pas la taille des pièces par moins que  $\lambda_K$  fois pour passer d'un père à un fils. En effet, on a :

$$r(f_I(U)) \leq \sqrt{2}|f'_I(0)|\delta_K r(U)$$

et pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ , on a :

$$r(f_{Ii}(U)) \geq \frac{|f'_I(0)|}{\sqrt{2}\delta_K} r(U_i)$$

donc :

$$\min_{1 \leq i \leq p} r(f_{Ii}(U)) \geq \frac{|f'_I(0)|}{\sqrt{2}\delta_K} \min_{1 \leq i \leq p} r(U_i)$$

Donc on a :

$$\lambda_{K_I}^0 = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(f_{Ii}(U))}{r(f_I(U))} \geq \frac{1}{2\delta_K^2} \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\lambda_{K_I}^0 \geq \lambda_K$$

On définit de même :

**Definition 3.1.9.**

$$\Lambda_K = 2\delta_K^2 \cdot \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \frac{r(U_i)}{r(U)}$$

Intuitivement, dans  $K$ , d'une étape à une autre, on ne multiplie pas la taille des pièces par plus que  $\Lambda_K$  fois pour passer d'un père à un fils.

Le résultat suivant est un lemme intermédiaire :

**Lemma 3.1.10.** *Soit  $z \neq z' \in C(0, 1)$ . On appelle  $\Gamma$  le disque de centre  $z$  tel que  $z' \in \partial\Gamma$ . Alors il existe un disque  $\Sigma$  de rayon  $\frac{1}{5}|z - z'|$  inclus dans  $\Gamma \cap C(0, 1)$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $|z - z'| \leq \frac{1}{2}$ . Il est facile de vérifier que  $C(0, 1) \cap \Gamma$  contient entièrement au moins un des quatre quadrants du disque  $\Gamma$ . Ce quadrant contient un triangle rectangle de côtés  $|z - z'|$ ,  $|z - z'|$  et  $\sqrt{2}|z - z'|$ . Le cercle inscrit  $\Gamma'$  de ce triangle a son diamètre égal à :

$$2 \frac{1 \times 1}{1 + 1 + \sqrt{2}} |z - z'| = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} |z - z'|$$

En général on a :  $|z - z'| \leq \sqrt{2}$  et alors  $\Gamma$  contient un disque  $\Gamma''$  de rayon  $\frac{1}{2\sqrt{2}}|z - z'| \leq \frac{1}{2}$  de centre  $z$ . Ce disque contient un disque  $\Gamma'$  inclus dans  $C(0, 1)$  de diamètre  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2}{2 + \sqrt{2}} |z - z'| = \frac{1}{2\sqrt{2} + 2} |z - z'| > \frac{1}{5} |z - z'|$ . Comme  $\Gamma'$  est inclus dans  $\Gamma \cap C(0, 1)$ , ceci achève la preuve de la démonstration du lemme.  $\square$

Nous utiliserons le résultat suivant dans la preuve du Théorème A :

**Lemma 3.1.11.** *Soit  $\Gamma_1$  un carré de longueur 1. On appelle  $\Gamma_2$  le carré de même centre que  $\Gamma_1$  et de longueur moitié. Soit  $I$  une suite finie de chiffres dans  $\{1, \dots, p\}$ . On suppose que  $f_I(C(0, 1))$  intersecte à la fois  $\Gamma_2$  et le complémentaire de  $\Gamma_1$ . Alors il existe un carré  $C$  de longueur plus grande que  $\frac{1}{20\sqrt{2}\delta_K^2}$  inclus dans  $\Gamma_1 \cap f_I(C(0, 1))$ .*

*Démonstration.* Soit  $z_1$  un point de  $\Gamma_2 \cap f_I(C(0, 1))$  et on prend  $z_2 = f_I^{-1}(z_1) \in C(0, 1)$ . On appelle  $\mathcal{C} = \partial\Gamma_1 \cap f_I(\overline{C(0, 1)})$  qui est compact en tant qu'intersection de deux compacts. L'ensemble  $\mathcal{C}' = f_I^{-1}(\mathcal{C})$  est alors un compact inclus dans  $\overline{C(0, 1)}$ . On appelle  $z_3$  un point de  $\mathcal{C}'$  tel que  $|z_3 - z_2| = \min_{z \in \mathcal{C}'} |z - z_2|$  (un tel point  $z_3$  existe par compacité). On appelle  $\Omega_1$  le disque de centre  $z_2$  passant par  $z_3$ . D'après le Lemme 3.1.10 (en prenant  $z_2$  pour  $z$ ,  $z_3$  pour  $z'$ ,  $\Omega_1$  pour  $\Gamma$  et  $\Omega_2$  pour  $\Gamma'$ ), il existe un disque  $\Omega_2$  de rayon  $\frac{1}{5}|z_2 - z_3|$  inclus dans  $\Omega_1 \cap C(0, 1)$ . Comme  $\Omega_2$  est inclus dans  $\Omega_1$ , pour tout  $z \in \Omega_2$ , on a  $f_I(z) \in \Gamma_1$ . On a que  $f_I(\Omega_2)$  contient un disque de diamètre plus grand que  $\frac{1}{\delta_K} |f_I'(0)| \cdot \frac{1}{5} |z_2 - z_3|$ . Mais on a aussi :  $\frac{1}{4} \leq |f_I(z_2) - f_I(z_3)| \leq \delta_K |f_I'(0)| |z_2 - z_3|$ . Finalement  $f_I(\Omega_2)$  contient un disque  $\Gamma_3$  de diamètre plus grand que  $\frac{1}{20\delta_K^2}$  inclus dans  $\Gamma_1 \cap f_I(C(0, 1))$  et ce dernier contient un carré de longueur supérieure à  $\frac{1}{20\sqrt{2}\delta_K^2}$ .  $\square$

Le Théorème que nous cherchons à montrer requiert une généralisation de la notion d'épaisseur. Comme dans le cas unidimensionnel, cela sera le quotient de deux quantités. Le numérateur mesure la taille des pièces, ce sera la quantité  $\lambda_K$  que nous venons de définir. Le dénominateur mesure l'espace entre les pièces, il sera donné par la quantité suivante.

**Definition 3.1.12.** Soit  $K$  un ensemble de Cantor dynamique de domaine initial  $U$ . On note  $\rho(U) = 2 \max_{z \in U} \text{dist}_\infty(z, K)$  la longueur du plus grand carré inclus dans  $U$  qui ne contient pas de point de  $K$ . On définit l'espace intersticiel de  $K$  :

$$\sigma_K^0 = \frac{\rho(U)}{r(U)}$$

Le Théorème de Koebe implique immédiatement que pour toute suite d'indices  $I$ , on a  $\sigma_{K_I}^0 \leq \delta_K^2 \sigma_K^0$ . On pose  $\sigma_K = \delta_K^2 \sigma_K^0$ .

En particulier, par définition, si on considère une pièce  $P$  de  $K$ , tout carré inclus dans  $P$  de longueur plus grande que  $\sigma_K r(P)$  contient un point de  $K \cap P$ .

**Definition 3.1.13.** Soit  $K$  un ensemble de Cantor dynamique. On définit l'épaisseur de  $K$  par :

$$\text{Ep}(K) = \frac{\lambda_K}{\delta_K^2 \sqrt{\sigma_K}} = \frac{\lambda_K^0}{\delta_K^5 \sqrt{\sigma_K^0}}$$

## 3.2 Théorème

Dans le Théorème qui suit, on donne un critère sur le produit des épaisseurs de deux ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$  qui fournit une intersection entre  $K$  et  $L$ . On rappelle que la norme utilisée est la norme infinie.

**Definition 3.2.1.** Deux ensembles de Cantor dynamique  $K$  et  $L$  définis sur un même carré initial sont équilibrés si :

1.  $\max(\Lambda_K, \Lambda_L) < \frac{1}{30}$
2. pour toute pièce  $P$  de  $K$ , tout carré de longueur plus grande que  $\frac{1}{30\delta_L^2} r(P)$  contient un fils de  $P$
3. pour toute pièce  $P$  de  $L$ , tout carré de longueur plus grande que  $\frac{1}{30\delta_K^2} r(P)$  contient un fils de  $P$

Cette double condition signifie d'une part que les pièces occupent tout l'espace dans le carré de départ, d'autre part qu'elles sont petites par rapport à la longueur du carré de départ.

**Théorème A.** Soient  $K$  et  $L$  deux ensembles de Cantor dynamiques équilibrés définis sur un carré. On suppose que :

$$\text{Ep}(K)\text{Ep}(L) > 30$$

Alors  $K$  et  $L$  s'intersectent.

En particulier, comme on montre plus loin que l'épaisseur varie de manière continue avec les fonctions utilisées pour définir les ensembles de Cantor dynamiques  $K$  et  $L$ , ce mécanisme permet de produire des intersections persistantes. Notons que l'on prend un carré comme ensemble de départ pour qu'il soit réalisable d'avoir des épaisseurs aussi grandes que l'on veut.

### 3.3 Exemple

Donnons un exemple : on reprend l'ensemble de Cantor  $K'$  vu dans la section 2.3.1. Rappelons que cet ensemble de Cantor  $K'$  est l'ensemble limite d'un IFS  $\{g_1, \dots, g_{N^2}\}$  où toutes les applications  $g_k$  ( $1 \leq k \leq N^2$ ) sont affines et définies sur un carré  $K'_0$  de longueur 1. L'ensemble  $K'_1 = \bigcup_{1 \leq k \leq N^2} g_k(K'_0)$  est la réunion de  $N^2$  sous-carrés placés de manière régulière à l'intérieur de  $K'_0$ , de taille relative  $0 \leq x \leq 1$ . Chacun de ces sous-carrés est donc de longueur  $\frac{x}{N}$ . L'ensemble limite de cet IFS est l'ensemble de Cantor dynamique  $K'$ . Comme toutes les applications  $g_k$  sont linéaires, on a tout de suite  $\delta_{K'} = 1$ . Comme tous les sous-carrés sont de longueur  $\frac{x}{N}$ , on a  $\lambda_{K'}^0 = \frac{x}{N}$ . On a :

$$\rho(K'_0) = 2 \max_{z \in K'_0} \text{dist}_\infty(z, K')$$

Tout point de  $K'_0$  est situé à une distance au plus  $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-x}{N}$  d'un des sous-carrés. A l'intérieur d'un de ces sous carrés de longueur  $\frac{x}{N}$ , tout point est à une distance au plus  $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-x}{N} \cdot \frac{x}{N}$  d'un sous-sous-carré et ainsi de suite.... On obtient donc :

$$\sigma_{K'}^0 = \frac{\rho(K'_0)}{1} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-x}{N} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-x}{N} \frac{x}{N} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-x}{N} \left(\frac{x}{N}\right)^2 + \dots \right) \leq 4 \frac{1-x}{N}$$

Finalement on a donc :

$$\text{Ep}(K') \geq \frac{x}{N\sqrt{4(1-x)/N}} = \frac{x}{2\sqrt{(1-x)N}}$$

Si on prend  $N = 100$  et  $x = \frac{99999}{100000}$ , il est facile de vérifier que  $K'$  et  $K'$  sont équilibré et que  $\text{Ep}(K') \geq 10$ . En particulier, on a  $\text{Ep}(K')^2 > 30$ . En utilisant la continuité de l'épaisseur prouvée en section 3.5, ceci montre que les deux ensembles de Cantor dynamiques  $K'$  et  $K'$  s'intersectent de manière robuste (évidemment,  $K'$  s'intersecte lui-même, mais l'intersection persiste même après perturbation des deux IFS  $\{g_1, \dots, g_{N^2}\}$  et  $\{g_1, \dots, g_{N^2}\}$  quand les deux ensembles de Cantor ne sont plus égaux).

### 3.4 Preuve du Théorème A

On suppose que le carré de départ est le carré  $C(0, 1)$  centré en 0 de longueur 1. En effet, comme l'épaisseur est définie à partir de quotients de longueurs, elle est donc invariante par rescaling et il est donc possible de supposer que le carré de départ est  $C(0, 1)$ . On suppose que  $\sigma_K \leq \sigma_L$ . On construit par induction une suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  de points de  $K$  telle que  $\alpha_n \in L_n$  pour tout  $n \geq 0$ , et plus précisément,  $\alpha_n$  appartient au carré inscrit moitié d'une pièce de  $L_n$ .

On commence par vérifier cette propriété pour  $n = 0$ . Par hypothèse,  $K$  et  $L$  sont équilibrés donc il existe un point de  $K$  dans le carré  $C(0, \frac{1}{30\delta_L^2}) \subset C(0, \frac{1}{2})$ . Or,  $C(0, \frac{1}{2})$  est précisément le carré inscrit moitié de  $C(0, 1)$ , qui est la seule pièce de  $L_0$ . La propriété est donc vérifiée pour  $n = 0$ .

Supposons la propriété vérifiée au rang  $n$  : il existe un point  $\alpha_n \in K$  dans le carré inscrit moitié d'une pièce de  $L_n$ . On note  $P$  cette pièce. On note  $\rho(P) = 2 \max_{z \in P} \text{dist}_\infty(z, L \cap P)$  la longueur du plus grand carré inclus dans  $P$  qui ne contient pas de point de  $L$ . Le point  $\alpha_n$  est dans l'intersection d'une suite de pièces de  $K$  dont la première est  $C(0, 1)$ . On note  $R_1, \dots, R_q$  les différents fils de  $P$ . On distingue deux cas.

Premier cas, grand interstice :  $\rho(P) > \max_{1 \leq j \leq q} r(R_j)$

Dans ce cas, informellement, les fils  $R_1, \dots, R_q$  de  $P$  sont suffisamment espacés entre eux à l'intérieur de  $P$  et non pas serrés les uns contre les autres. Le point  $\alpha_n$  est l'intersection d'une suite de pièces de  $K$  dont la première est  $C(0, 1)$ . On choisit dans cette suite de pièces la pièce  $Q$  définie comme suit :

1. si  $5\delta_L^2 \rho(P) \geq 1$ , on pose  $Q = C(0, 1)$
2. si  $5\delta_L^2 \rho(P) < 1$ , on prend comme pièce  $Q$  la dernière pièce de la suite qui contient un carré de longueur plus grande que  $5\delta_L^2 \rho(P)$

Montrons que  $Q$  contient un fils  $R$  de  $P$ . Si  $Q = C(0, 1)$ , c'est évident. Dans le deuxième cas,  $Q$  contient un carré  $\Delta$  de longueur plus grande que  $5\delta_L^2 \rho(P)$ . Comme on a  $\rho(P) > \max_{1 \leq j \leq q} r(R_j)$ , la longueur du carré inscrit de tout fils de  $P$  est inférieur à  $\rho(P)$ . D'après le Lemme 3.1.7, le diamètre de tout fils de  $P$  est alors inférieur à  $2\delta_L^2 \rho(P)$ . On a alors deux sous-cas, selon que  $\Delta$  est inclus dans  $P$  ou non. Si  $\Delta$  est inclus dans  $P$ , alors comme sa longueur est plus grande que  $5\delta_L^2 \rho(P) \geq \rho(P)$ , le carré de même centre que  $\Delta$  de longueur  $\rho(P)$  contient donc un point de  $L$  dans son adhérence. Ce point appartient à un fils  $R$  de  $P$  de diamètre majoré par  $2\delta_L^2 \rho(P)$ . Puis  $\Delta$  contient  $R$  et donc  $Q$  contient  $R$  aussi.

Si  $\Delta$  n'est pas entièrement inclus dans  $P$ , on a tout de même que  $\alpha_n$  est dans le carré inscrit moitié  $\Gamma_1$  de  $P$ . D'après le Lemme 3.1.11, il existe un carré  $\Delta'$  de longueur plus grande que  $\frac{1}{20\sqrt{2}\delta_K^2} r(P)$  inclus dans  $\Gamma_1 \cap Q$ . Par hypothèse,  $K$  et  $L$  sont équilibrés donc il existe un fils de  $P$  dans tout carré de longueur plus grande que  $\frac{1}{30\delta_L^2} r(P)$ , et donc en particulier dans  $\Delta'$ . Comme  $\Delta'$  est inclus dans  $Q$ , ceci implique que  $Q$  contient un des fils  $R_j$  de  $P$ , que l'on notera  $R$ .

Pour le fils  $S_l$  de  $Q$  qui contient  $\alpha_n$ , on a :

$$r(S_l) < 5\delta_L^2 \rho(P)$$

On note  $\rho(Q) = 2 \max_{z \in Q} \text{dist}_\infty(z, K \cap Q)$  la longueur du plus grand carré inclus dans  $Q$  qui ne contient pas de point de  $K$ . On a :

$$\frac{\min_{S \text{ fils de } Q} r(S)}{\rho(Q)} \frac{\min_{R_j \text{ fils de } P} r(R_j)}{\delta_L^2 \rho(P)} > \frac{\lambda_K}{\sigma_K} \frac{\lambda_L}{\delta_L^2 \sigma_L} > \frac{\lambda_K}{\delta_K^2 \sqrt{\sigma_K}} \frac{\lambda_L}{\delta_L^2 \sqrt{\sigma_L}}$$

où la dernière inégalité provient du fait que  $\delta_K \geq 1, \delta_L \geq 1, \sigma_K \leq 1, \sigma_L \leq 1$ . Finalement, on trouve :

$$\frac{\min_{S \text{ fils de } Q} r(S)}{\rho(Q)} \frac{\min_{R_j \text{ fils de } P} r(R_j)}{\delta_L^2 \rho(P)} > \text{Ep}(K)\text{Ep}(L) > 30$$

et comme  $r(S_l) < 5\delta_L^2 \rho(P)$  pour le fils  $S_l$  de  $Q$ , on en déduit que :

$$\rho(Q) < \frac{1}{2} \min_{R_j \text{ fils de } P} r(R_j) < \frac{1}{2} r(R)$$

Comme  $Q$  contient  $R$ , on en déduit qu'il existe un point  $\alpha_{n+1} \in K$  dans le carré inscrit moitié de la pièce  $R$  de  $L_{n+1}$ . La propriété est ainsi vraie au rang  $n + 1$ .

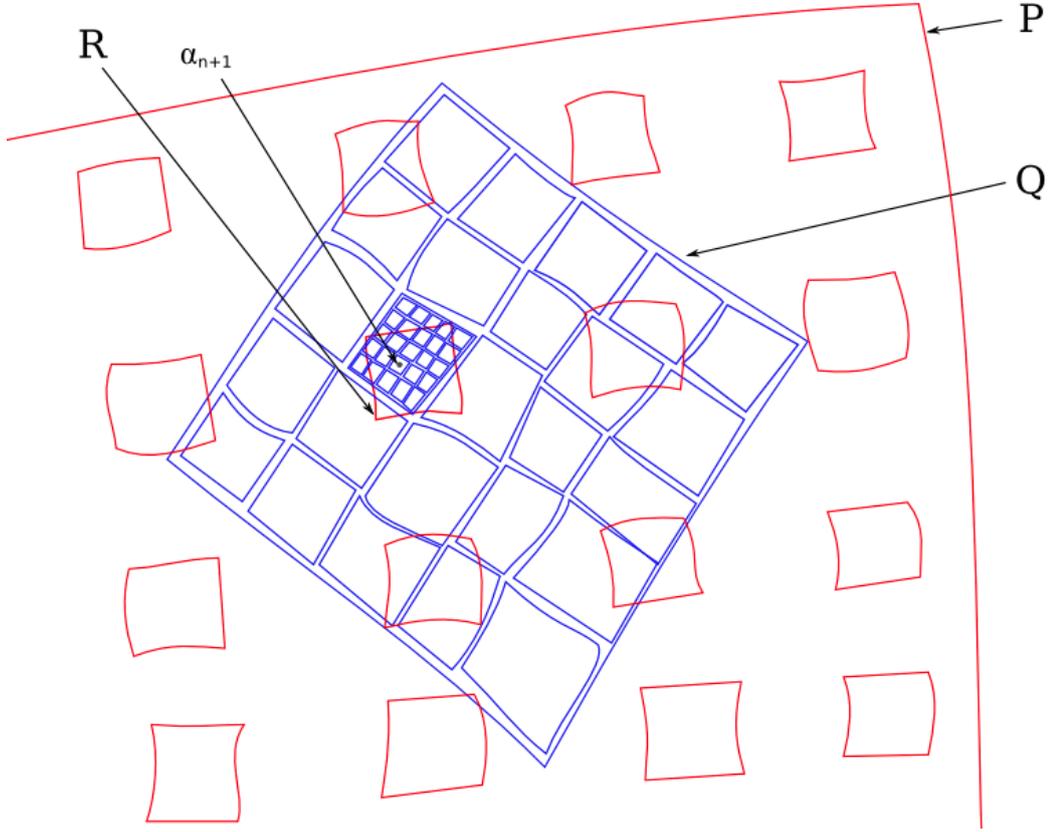


Figure 10 : Construire  $R$  et  $\alpha_{n+1}$  à partir de  $P$  et  $Q$  dans le cas 1

Deuxième cas, petit interstice dans  $P$  :  $\rho(P) \leq \max_{1 \leq j \leq q} r(R_j)$

Dans ce cas, informellement, les fils  $R_1, \dots, R_q$  de  $P$  sont serrés les uns contre les autres. Pour chaque fils  $R_j$  de  $P$ , on dénote par  $\Delta_j \in R_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ) le carré inscrit moitié de  $R_j$ . A partir de maintenant, le raisonnement va être semblable au Cas 1 en prenant  $(P, \Delta_1, \dots, \Delta_q)$  au lieu de  $(P, R_1, \dots, R_q)$ .

On note  $\tilde{\rho}(P) = 2 \max_{z \in P} \text{dist}_\infty(z, \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_q)$  la longueur du plus grand carré inclus dans  $P$  qui n'intersecte pas  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_q$ . D'après le Lemme 3.1.7, le diamètre de chaque  $R_j$  est borné par :

$$\text{diam}(R_j) \leq 2\delta_L^2 r(R_j) = 4\delta_L^2 r(\Delta_j) \leq 4\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$$

On va majorer  $\tilde{\rho}(P)$ . Soit  $z \in P$ . Si  $z$  est dans une des pièces  $R_j$ , la distance de  $z$  à  $\Delta_j$  est majorée par  $\text{diam}(R_j) \leq 4\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$ . Si  $z$  n'appartient pas

à une des pièces  $R_j$ ,  $z$  se trouve tout de même à une distance d'au plus  $\frac{1}{2}\rho(P) \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq q} r(R_j) \leq \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$  d'une pièce  $R_j$  et donc à distance au plus  $4\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j) + \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j) \leq 5\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$  de la boule  $\Delta_j$  correspondant. Dans tous les cas, on a :

$$\tilde{\rho}(P) \leq 2 \cdot 5\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j) = 10\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$$

On a alors :

$$\frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{10\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)} \leq \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{\tilde{\rho}(P)}$$

Comme :

$$r(\Delta_j) = \frac{1}{2}r(R_j)$$

et comme on a :

$$\frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(R_j)}{\max_{1 \leq j \leq q} r(R_j)} \geq \frac{\lambda_L}{\Lambda_L} \geq 30\lambda_L$$

puisque  $\Lambda_L < \frac{1}{30}$  ( $K$  et  $L$  sont équilibrés), on dispose de :

$$\frac{30\lambda_L}{10\delta_L^2} \leq \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(R_j)}{10\delta_L^2 \max_{1 \leq j \leq q} r(R_j)} \leq \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{\tilde{\rho}(P)}$$

Donc on obtient finalement :

$$3 \frac{\lambda_L}{\delta_L^2} \leq \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{\tilde{\rho}(P)}$$

La stratégie est ensuite la même que dans le premier cas. On choisit dans la suite de pièces de  $K$  contenant  $\alpha_n$  la pièce  $Q$  définie comme suit :

1. si  $5\tilde{\rho}(P) \geq 1$ , on pose  $Q = C(0, 1)$
2. si  $5\tilde{\rho}(P) < 1$ , on prend comme pièce  $Q$  la dernière pièce de la suite qui contient un carré de longueur plus grande que  $5\tilde{\rho}(P)$

Montrons que  $Q$  contient un des carrés  $\Delta_j$ . Si  $Q = C(0, 1)$ , c'est évident. Dans le deuxième cas,  $Q$  contient un carré  $\Delta$  de longueur plus grande que  $5\tilde{\rho}(P)$ . Pour tout  $1 \leq j \leq q$ , on a  $r(\Delta_j) \leq 2\tilde{\rho}(P)$  par construction (en effet, pour tout  $j$ , il y a un carré de longueur au moins  $\frac{1}{2}r(\Delta_j)$  inclus dans  $R_j$  et disjoint de  $\Delta_j$ ). On a alors deux sous-cas, selon que  $\Delta$  est inclus dans  $P$  ou non. Si  $\Delta$  est inclus dans  $P$ , alors comme sa longueur est plus grande que  $5\tilde{\rho}(P)$ , le carré de même centre que  $\Delta$  de longueur  $\tilde{\rho}(P)$  contient donc un point de  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_q$  dans son adhérence. Ce point appartient à un carré  $\Delta_j$  dont la longueur est majorée par  $2\tilde{\rho}(P)$ . Puis  $\Delta$  contient  $\Delta_j$  et donc  $Q$  contient  $\Delta_j$  aussi. Si  $\Delta$  n'est pas entièrement incluse dans  $P$ , on reprend la même méthode que dans le Cas 1. Dans tous les cas  $Q$  contient un des fils  $R_j$  de  $P$ , et donc  $Q$  contient aussi le carré  $\Delta_j$  inclus dans  $R_j$ .

Pour le fils  $S_l$  de  $Q$  qui contient  $\alpha_n$ , on a :

$$r(S_l) < 5\tilde{\rho}(P)$$

On note  $\rho(Q) = 2 \max_{z \in Q} \text{dist}_\infty(z, K \cap Q)$  la longueur du plus grand carré inclus dans  $Q$  qui ne contient pas de point de  $K$ . On a :

$$\frac{\min_{S \text{ fils de } Q} r(S)}{\rho(Q)} \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{\tilde{\rho}(P)} \geq \frac{\lambda_K}{\sigma_K} \frac{3\lambda_L}{\delta_L^2} \geq 3 \frac{\lambda_K}{\sqrt{\sigma_K}} \frac{\lambda_L}{\delta_L^2 \sqrt{\sigma_L}}$$

où la deuxième inégalité vient du fait que  $\sigma_K \leq \sigma_L$  (on avait fait cette hypothèse au début de la preuve). Puisque  $\delta_K \geq 1$ , on a donc :

$$\frac{\min_{S \text{ fils de } Q} r(S)}{\rho(Q)} \frac{\min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)}{\tilde{\rho}(P)} \geq 3 \frac{\lambda_K}{\delta_K^2 \sqrt{\sigma_K}} \frac{\lambda_L}{\delta_L^2 \sqrt{\sigma_L}} \geq 3\text{Ep}(K)\text{Ep}(L) > 3 \times 30 = 90$$

Comme  $r(S_i) < 5\tilde{\rho}(P)$  pour le fils  $S_i$  de  $Q$ , on en déduit que :

$$\rho(Q) < \min_{1 \leq j \leq q} r(\Delta_j)$$

Comme  $Q$  contient  $R$ , on en déduit qu'il existe un point  $\alpha_{n+1} \in K$  dans le carré inscrit moitié de la pièce  $R$  de  $L_{n+1}$  (ce carré est un des carrés  $\Delta_j$ ). La propriété est ainsi vraie au rang  $n+1$ . Par récurrence, elle est ainsi vraie pour tout  $n$ .

Dans les deux cas, on peut alors conclure que  $K \cap L_n \neq \emptyset$  pour toutes les entiers  $n$ . Ceci montre que  $K$  et  $L$  s'intersectent.

### 3.5 Continuité de l'épaisseur

Une fois définie l'épaisseur  $\text{Ep}(K)$  d'un ensemble de Cantor dynamique  $K$ , il est naturel de s'intéresser à l'éventuelle continuité de cette grandeur en fonction des contractions  $f_i$  qui définissent  $K$ . En effet, comme on l'a déjà vu, en utilisant le Théorème précédent, cette continuité permet d'obtenir des intersections persistantes d'ensembles de Cantor dynamiques planaires, en partant par exemple d'ensembles de Cantor linéaires. On montre le résultat suivant :

**Proposition 3.5.1.** *L'épaisseur  $\text{Ep}(K)$  est une fonction continue des contractions  $f_i$ .*

Pour prouver ce résultat, rappelons tout d'abord que l'on a par définition :

$$\text{Ep}(K) = \frac{\lambda_K^0}{\delta_K^5 \sqrt{\sigma_K^0}}$$

Par simplicité, on supposera de nouveau que l'ouvert de base de  $K$  est le carré  $C(0, 1)$ . Le point clef est le lemme suivant :

**Lemme 3.5.2.** *La distorsion  $\delta_K$  est une fonction continue des  $f_i$ .*

Pour prouver ceci, rappelons que :

$$\delta_K = \sup_I \left( \max_{(z, z') \in \bar{U}^2} \frac{|f_I'(z)|}{|f_I'(z')|} \right) = \sup_{n \geq 0} \left( \max_{|I|=n} \left( \max_{(z, z') \in \bar{U}^2} \frac{|f_I'(z)|}{|f_I'(z')|} \right) \right)$$

On notera dans la suite :

$$S_n(f_1, \dots, f_p) = \max_{|I|=n} \left( \max_{(z, z') \in \bar{U}^2} \frac{|f_I'(z)|}{|f_I'(z')|} \right)$$

On aura besoin du lemme suivant :

**Lemma 3.5.3.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $n_\epsilon \geq 0$  et un voisinage  $\mathcal{F}_\epsilon$  de  $(f_1, \dots, f_p)$  de la forme  $\mathcal{F}_\epsilon = \{(g_1, \dots, g_p) \text{ tels que } : |g_i - f_i| < \eta_\epsilon \text{ sur } U\}$  (pour une certaine constante  $\eta_\epsilon$ ) tels que : pour tout  $n \geq n_\epsilon$ , pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}_\epsilon$ , on a :*

$$S_n(g_1, \dots, g_p) \leq S_{n_\epsilon}(g_1, \dots, g_p) \cdot (1 + \epsilon)$$

*Démonstration.* Dans la suite, on commence par fixer une constante  $\eta_\epsilon > 0$ , le voisinage  $\mathcal{F}_\epsilon = \{(g_1, \dots, g_p) \text{ tels que } : |g_i - f_i| < \eta_\epsilon \text{ sur } U\}$  de  $(f_1, \dots, f_p)$  et une constante  $0 < a < 1$  tel que pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}_\epsilon$ , l'IFS  $\{g_1, \dots, g_p\}$  définit un ensemble de Cantor dynamique tel que d'une étape à une autre, le diamètre des pièces est multiplié par moins que  $a$ . Une telle constante  $a$  existe pour  $(g_1, \dots, g_p)$  au voisinage de  $(f_1, \dots, f_p)$  par contraction de la métrique de Poincaré, et il est facile de vérifier qu'elle peut être prise localement constante. On fixe également une autre constante : quitte à réduire  $\mathcal{F}_\epsilon$ , il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}_\epsilon$ , pour tout  $z \in g_1(C(0, 1)) \cup \dots \cup g_p(C(0, 1))$ , le carré  $C(z, R)$  est incluse dans  $C(0, 1)$ . Soit maintenant  $(z, z') \in \bar{U}^2$ . On a pour toute suite d'indices  $I = (i_1, \dots, i_n)$  :

$$\frac{|g'_I(z)|}{|g'_I(z')|} = \frac{|g'_{i_1}(z)|}{|g'_{i_1}(z')|} \cdot \frac{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z'))|} \cdots \frac{|g'_{i_n}(g_{i_{n-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_n}(g_{i_{n-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z'))|}$$

Or, pour tout  $1 \leq k \leq n - 1$ , on a :

$$g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1}(z) \in (g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1})(C(0, 1))$$

$$g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1}(z') \in (g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1})(C(0, 1))$$

et le diamètre de  $(g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1})(C(0, 1))$  est borné par  $a^k$ . On considère alors la restriction de  $g_{i_{k+1}}$  à la boule de centre  $g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1}(z)$  et de rayon  $R$  qui est incluse dans  $C(0, 1)$  par définition. Le Théorème de distorsion de Koebe donne alors l'inégalité suivante :

$$\frac{|g'_{i_{k+1}}(g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_{k+1}}(g_{i_k} \circ \dots \circ g_{i_1}(z'))|} \leq \frac{1 + a^k/R}{(1 - a^k/R)^3} \leq 1 + \frac{5}{R}a^k$$

si  $k$  est pris suffisamment grand. Or, la série  $\sum_k a^k$  est absolument convergente donc le produit infini  $\prod_k (1 + \frac{5}{R}a^k)$  est aussi absolument convergent. En particulier, quand  $n$  tend vers l'infini,  $\prod_{k \geq n} (1 + \frac{5}{R}a^k)$  tend vers 1. Il est alors possible de prendre un entier  $n_\epsilon$  tel que  $\prod_{k \geq n_\epsilon} (1 + \frac{5}{R}a^k) \leq 1 + \epsilon$ . On fixe cet entier et alors pour tout  $n \geq n_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{|g'_I(z)|}{|g'_I(z')|} &= \frac{|g'_{i_1}(z)|}{|g'_{i_1}(z')|} \cdot \frac{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z'))|} \cdots \frac{|g'_{i_n}(g_{i_{n-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_n}(g_{i_{n-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z'))|} \\ \frac{|g'_I(z)|}{|g'_I(z')|} &= \frac{|g'_{i_1}(z)|}{|g'_{i_1}(z')|} \cdot \frac{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_2}(g_{i_1}(z'))|} \cdots \frac{|g'_{i_{n_\epsilon}}(g_{i_{n_\epsilon-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z))|}{|g'_{i_{n_\epsilon}}(g_{i_{n_\epsilon-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}(z'))|} \cdot (1 + \epsilon) \\ \frac{|g'_I(z)|}{|g'_I(z')|} &\leq S_{n_\epsilon}(g_1, \dots, g_p) \cdot (1 + \epsilon) \end{aligned}$$

En prenant successivement le maximum sur  $(z, z') \in \overline{U}^2$  et sur  $|I| = n$ , on trouve :

$$S_n(g_1, \dots, g_p) \leq S_{n_\epsilon}(g_1, \dots, g_p) \cdot (1 + \epsilon)$$

d'où le résultat.  $\square$

*Preuve du lemme 3.5.2 : continuité de la distorsion.* Montrons que la distorsion  $\delta_K$  est une fonction continue des  $f_i$ . Soit  $\epsilon > 0$ . on commence par fixer l'entier  $n_\epsilon$  et le voisinage  $\mathcal{F}_\epsilon$  donnés par le lemme précédent. En particulier, pour tout  $n \geq n_\epsilon$ , pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}_\epsilon$ , on a  $S_n(g_1, \dots, g_p) \leq S_{n_\epsilon}(g_1, \dots, g_p) \cdot (1 + \epsilon)$ . De plus, il est clair que chacun des termes  $S_1, \dots, S_{n_\epsilon}$  est une fonction continue des  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}_\epsilon$ . On peut alors choisir un voisinage  $\mathcal{F}'_\epsilon \Subset \mathcal{F}_\epsilon$  tel que pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}'_\epsilon$ , on a :

$$\forall 1 \leq k \leq n_\epsilon, S_k(g_1, \dots, g_p) \leq \delta_K \cdot (1 + \epsilon)$$

où ici  $K$  désigne l'ensemble de Cantor dynamique donné par l'IFS  $\{f_1, \dots, f_p\}$ . Notons  $L$  l'ensemble de Cantor dynamique donné par l'IFS  $\{g_1, \dots, g_p\}$ . On a alors :

$$\delta_L \leq \delta_K \cdot (1 + \epsilon)^2$$

On choisit un indice  $q \geq 1$  tel que  $S_q(f_1, \dots, f_p) \geq \delta_K \cdot (1 - \epsilon)$ . On peut alors prendre un voisinage restreint  $\mathcal{F}''_\epsilon \Subset \mathcal{F}'_\epsilon$  tel que pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}''_\epsilon$ , on a :  $S_q(g_1, \dots, g_p) \geq \delta_K \cdot (1 - \epsilon)^2$  et donc :

$$\delta_L \geq \delta_K \cdot (1 - \epsilon)^2$$

En conclusion, pour tout  $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{F}''_\epsilon$ , si  $L$  désigne l'ensemble limite de  $(g_1, \dots, g_p)$ , on :

$$\delta_K \cdot (1 - \epsilon)^2 \leq \delta_L \leq \delta_K \cdot (1 + \epsilon)^2$$

D'où la continuité de la distorsion.  $\square$

*Preuve de la proposition 3.5.1 : continuité de l'épaisseur.* On sait que l'on a :

$$\text{Ep}(K) = \frac{\lambda_K^0}{\delta_K^5 \sqrt{\sigma_K^0}}$$

On a vu que la distorsion  $\delta_K$  est une fonction continue des  $f_i$ . Il est facile de vérifier que les grandeurs  $\lambda_K^0$  et  $\sigma_K^0$  dépendent de manière continue des  $f_i$ , la preuve est laissée au lecteur. Finalement, on obtient que l'épaisseur  $\text{Ep}(K)$  est une fonction continue des contractions  $f_i$ .  $\square$

### CHAPITRE 3. UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ÉPAISSEUR

# Phénomène de Newhouse en dimension 3

# 4

## 4.1 Phénomène de Newhouse en dimension 3 : la méthode de Palis et Viana

Rappelons tout d'abord la définition suivante pour les points périodiques des difféomorphismes en dimension supérieure à 2.

**Définition 4.1.0.1.** *Un point périodique  $q$  de type selle de multiplieurs  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1 < |\lambda_3|$  est dit sectionnellement dissipatif si le produit de deux quelconques de ses valeurs propres est inférieur à 1 en module :  $|\lambda_1\lambda_3| < 1$  et  $|\lambda_2\lambda_3| < 1$*

Dans [54], Palis et Viana ont généralisé de manière remarquable les travaux de Newhouse au cas de la dynamique réelle en dimension 3 :

**Théorème (Palis, Viana [54]) 4.1.0.2.** *Tout  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  ayant une tangence homocline associée à un point selle sectionnellement dissipatif est accumulé par des ouverts de difféomorphismes ayant des tangences hétéroclines persistantes et où les difféomorphismes ayant une infinité de puits sont denses.*

La principale difficulté pour étendre les Théorèmes de Newhouse en dimension supérieure réside dans le caractère non différentiable des feuilletages de codimension supérieure à 1. En effet, dans la preuve pour les difféomorphismes des surfaces réelles, une étape clef est l'extension des deux laminations stable/instable du fer à cheval en deux feuilletages stable/instable qui sont de classe  $C^1$ . Or, il n'est pas possible en général d'étendre un feuilletage de codimension supérieure à 1 avec suffisamment de régularité. De plus, même si c'était le cas, on aurait dans ce cas une surface de tangence et non plus une courbe de tangence, et le problème ne se ramènerait pas à l'intersection de deux ensembles de Cantor dynamiques réels unidimensionnels.

Voici comment ce problème est résolu. La transversale à la lamination de codimension 2 d'un ensemble hyperbolique est de dimension 2. Or, on peut distinguer dans cette transversale une direction, transverse à la direction de plus forte contraction. En projection sur cette direction, la lamination est un ensemble de Cantor unidimensionnel qui varie cette fois-ci avec une régularité suffisante pour définir une notion d'épaisseur de manière satisfaisante. Cette réduction permet de traiter ensuite le problème de manière identique : on dispose initialement d'un fer à cheval  $\mathcal{H}_1$  d'indice  $(2, 1)$  dont la lamination instable est

transversalement un ensemble de Cantor dynamique bidimensionnel. Comme on vient de le dire, on peut distinguer une direction particulière dans la transversale. En projection sur cette direction, la lamination instable de  $\mathcal{H}_1$  est un ensemble de Cantor unidimensionnel d'épaisseur  $\tau^u$ . En perturbant la tangence homocline, on peut produire un fer à cheval  $\mathcal{H}_2$  d'indice  $(2, 1)$  dont la lamination stable est transversalement le produit d'une courbe et d'un ensemble de Cantor dynamique unidimensionnel d'épaisseur  $\tau^s$ . Un procédé de renormalisation permet de s'assurer que  $\tau^s \tau^u > 1$ . Ensuite, on se ramène à détecter des tangences via des intersections d'ensembles de Cantor dynamiques unidimensionnels. L'application du Gap Lemma permet de conclure. Il faut juste prêter attention au fait de prendre un point selle sectionnellement dissipatif, sinon la perturbation risque de produire un point d'indice différent de celui d'un puits (on peut se référer à [60] pour cette difficulté).

Les résultats de Palis et Viana ont été améliorés par Moreira, Palis et Viana (voir [46]) : le Théorème suivant décrit la prévalence de l'hyperbolicité et du phénomène de Newhouse dans l'ensemble des paramètres pour un ensemble générique de familles de difféomorphismes ayant une tangence homocline.

On considère l'espace  $\mathcal{E}$  des familles  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $C^2$ -difféomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  ayant une tangence homocline génériquement déliée en  $t = 0$  associée à un point périodique  $p$  d'un certain ensemble hyperbolique  $\mathcal{H}$ . On munit l'ensemble  $\mathcal{E}$  d'une topologie.

**Théorème (Moreira, Palis, Viana [46]) 4.1.0.3.** *Il existe deux ouverts  $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$  et  $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$  tels que  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{E}$  et satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *Pour toute famille  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{U}$ , l'ensemble  $H$  des paramètres  $t$  pour lesquels  $f_t$  est uniformément hyperbolique possède une mesure de Lebesgue pleine en  $t = 0$  :*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(H \cap [0, \delta])}{\delta} = 1$$

2. *pour toute famille  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\mathcal{V}$ , si on note  $N$  l'ensemble des paramètres  $t$  pour lesquels  $f_t$  possède une tangence homocline qui persiste au voisinage de  $t$ , alors  $N$  possède une mesure de Lebesgue positive en  $t = 0$  et la réunion  $N \cup H$  a une mesure pleine en  $t = 0$  :*

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(N \cap [0, \delta])}{\delta} > 0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(N \cup H) \cap [0, \delta]}{\delta} = 1$$

## 4.2 Phénomène de Newhouse en dimension 3 : le blender

### 4.2.1 La construction de Bonatti et Diaz

Dans les années 1990, Bonatti et Diaz ont introduit un nouvel outil possédant des propriétés fractales très particulières : le blender, ou mélangeur. Initialement utilisé pour étudier des difféomorphismes transitifs de manière persistante ([14]), les blenders se sont révélés très utiles dans bien d'autres situations. Ce sont des ensembles hyperboliques dont la propriété fondamentale est : informellement,

l'une des deux laminations stable/instable de l'ensemble hyperbolique possède en quelque sorte une dimension plus grande que la dimension de la variété stable/instable correspondante d'un des points de l'ensemble prise individuellement. Une bonne introduction aux blenders peut par exemple être trouvée dans [12].

Donnons un toy-model de blender. On considère le carré  $[-1, 1]^2$  et les deux contractions affines (non holomorphes)  $l_1$  et  $l_2$  définies sur ce carré par :

$$l_1 : (x, y) \mapsto \left( \frac{9}{10}x - \frac{9}{100}, \frac{1}{10}y - \frac{1}{2} \right)$$

$$l_2 : (x, y) \mapsto \left( \frac{9}{10}x + \frac{9}{100}, \frac{1}{10}y + \frac{1}{2} \right)$$

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux images de  $[-1, 1]^2$  par  $l_1$  et  $l_2$  sont deux rectangles. Tous les deux sont fortement contractés dans la seconde direction. En revanche, ils sont peu contractés dans la première direction, et chacun des deux subit un décalage dans cette direction : vers la gauche pour celui du bas, vers la droite pour celui du haut. Les deux rectangles sont disjoints, et  $(l_1, l_2)$  définit donc un IFS dont l'ensemble limite est un ensemble de Cantor dynamique noté  $K$  (notons que les applications de l'IFS associé sont non holomorphes).

Prenons un segment  $\Delta$  vertical et inclus dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On va montrer que  $\Delta$  intersecte nécessairement  $K$ . Pour ce faire, il est déjà facile de vérifier que  $\Delta$  intersecte à la fois les deux rectangles  $l_1([-1, 1]^2)$  et  $l_2([-1, 1]^2)$ . Vérifions que cette figure se répète dans au moins un des deux rectangles. Notons  $\Delta = \{x_\Delta\} \times [-1, 1]$ . On vérifie que l'on a :

$$\frac{10}{9}(x_\Delta + \frac{9}{100}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ ou } \frac{10}{9}(x_\Delta - \frac{9}{100}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Pour montrer ceci, il suffit de constater que la réunion des deux images de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  par  $x \mapsto \frac{9}{10}x - \frac{9}{100}$  et  $x \mapsto \frac{9}{10}x + \frac{9}{100}$  contient le segment  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  lui-même. Et c'est bien le cas puisque :

$$\frac{9}{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{100} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{100} > \frac{1}{2}$$

et puisque les longueurs des deux intervalles images sont égales à  $\frac{9}{10}$ . Ceci montre que l'image de  $\Delta$  par au moins un des deux inverses de  $l_1$  et  $l_2$  est un segment  $\Delta$  vertical inclus dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On peut alors réitérer le même argument : ce segment intersecte un des deux sous-rectangles de  $[-1, 1]^2$  et donc  $\Delta$  intersecte un des quatre sous-rectangles obtenus à l'étape 2 de la construction de l'IFS. Par induction,  $\Delta$  intersecte à chaque étape  $n$  un rectangle obtenu en itérant  $n$  fois  $l_1$  ou  $l_2$ . D'où  $\Delta$  intersecte  $K$ . On a donc montré que n'importe quel segment  $\Delta$  vertical et inclus dans  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  intersecte  $K$ .

On ne l'a pas montré ici, mais cette intersection est en plus doublement robuste : on pourrait perturber un peu les contractions  $l_1$  et  $l_2$ , ou bien encore prendre une courbe de pente très forte à la place d'un segment, on obtiendrait

toujours l'intersection. Ceci est remarquable, puisque la dimension de l'ensemble de Cantor dynamique vaut 0, celle de la courbe 1, et :  $1 + 0 < 2$ . On comprend mieux maintenant l'intérêt de cette construction. Cet exemple est parfois qualifié de protoblender, puisque la dynamique n'est pas inversible et que l'on souhaite la plupart du temps étudier des difféomorphismes. On peut maintenant chercher à définir ce qu'est un blender, de la manière la plus générale possible.

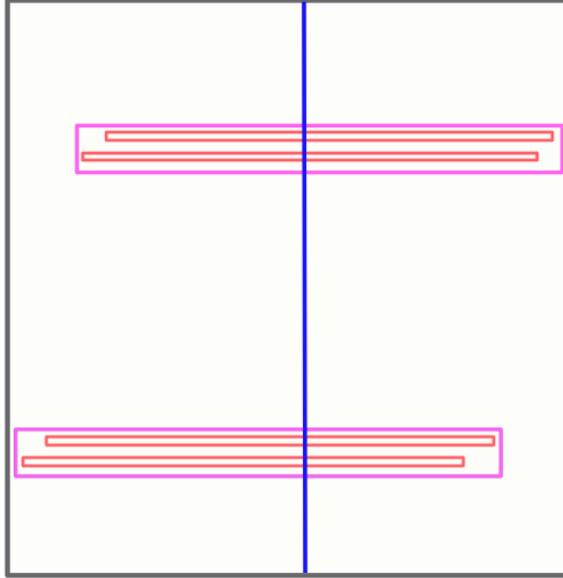


Figure 11 : Protoblender

La définition suivante d'un blender est totalement heuristique. De nombreuses variantes de blenders ont été définies mais toutes mettent en avant qu'il s'agit d'un ensemble hyperbolique dont l'ensemble instable est plus facile à intersecter que sa dimension ne le laisserait à priori supposer. Notons par ailleurs que le choix de l'ensemble instable plutôt que celui de l'ensemble stable est totalement arbitraire. C'est de là que vient le terme de blender.

**Définition 4.2.1.1.** *Un blender est un ensemble compact hyperbolique pour lequel la dimension de l'ensemble instable est strictement plus petite que l'évaluation que l'on en ferait en faisant intersecter cet ensemble instable avec des familles de sous-variétés.*

On va définir à présent une notion de blender pour des difféomorphismes réels en dimension 3. Quand nous définirons plus loin un blender complexe, celui-ci sera son exact analogue en dynamique complexe. Evidemment, la définition suivante est ad hoc et dépend en particulier du choix des cônes suivants :

**Définition 4.2.1.2.** *Dans  $\mathbb{R}^3$ , on introduit les champs de cônes (constants) :*

$$C^u = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \max(|v_2|, |v_3|) \leq 10^{-3} \cdot |v_1|\}$$

$$C^{ss} = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \max(|v_1|, |v_3|) \leq 10^{-3} \cdot |v_2|\}$$

$$C^{cs} = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \max(|v_1|, |v_2|) \leq 10^{-3} \cdot |v_3|\}$$

Voici à présent une définition formelle possible pour un blender d'indice  $(2, 1)$  dont les directions contractées et dilatée sont données. Celle-ci dépend des cônes précédents. Notons qu'évidemment, les directions et les ouvertures de ces cônes ont été fixées par simplicité, mais qu'il est évidemment possible de faire d'autres choix de cônes. La terminologie usuelle correspondante est celle de *cs-blender*. Le terme *cs* signifie "center stable" pour mettre en avant le fait que la direction intéressante est contractée (la troisième dans la définition suivante).

**Définition 4.2.1.3.** *Soit  $f$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $\mathcal{H}_f = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n([-1, 1]^n)$  est un fer à cheval qui dilate la première direction et contracte la seconde et la troisième. Plus précisément, on suppose que dans  $[-1, 1]^3$ , il existe une constante  $k > 10$  telle que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1.  $C^u$  est  $f$ -invariant
2.  $C^{ss}$  est  $f^{-1}$ -invariant
3. tout vecteur de  $C^u$  est dilaté par un facteur plus grand que  $k$  par  $f$
4. tout vecteur de  $C^{ss}$  est dilaté par un facteur plus grand que  $k$  par  $f^{-1}$
5. tout vecteur de  $C^{cs}$  est dilaté par un facteur plus grand que 1 par  $f^{-1}$

*On dira que  $\mathcal{H}_f$  est un cs-blender pour  $f$ , ou plus simplement un blender, s'il existe un ouvert  $D \subset [-1, 1]^3$  tel que toute courbe  $\mathcal{C} \subset [-1, 1]^3$  tangente à  $C^{ss}$  qui intersecte  $D$  intersecte l'ensemble instable  $W^u(\mathcal{H}_f)$  de  $\mathcal{H}_f$ .*

En quelque sorte, tout se passe comme si l'ensemble instable de  $\mathcal{H}_f$  était de dimension supérieure à 1 et se comportait en fait comme une variété topologique de dimension 2. Et ce, malgré le fait que la variété instable de tout point de  $\mathcal{H}_f$  est de dimension égale à 1.

Donnons l'exemple le plus simple de cs-blender en dimension 3. On considère un difféomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n([-1, 1]^2)$  est un fer à cheval de Smale. On peut supposer que :

1.  $C_{\mathbb{R}^2}^u = \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_2| \leq 10^{-3} \cdot |v_1|\}$  est  $g$ -invariant sur  $[-1, 1]^2$
2.  $C_{\mathbb{R}^2}^s = \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_1| \leq 10^{-3} \cdot |v_2|\}$  est  $g^{-1}$ -invariant sur  $[-1, 1]^2$

On appelle  $V_1$  et  $V_2$  les deux préimages de  $[-1, 1]^2$  par  $g$ . On note  $\tilde{\alpha}_g$  et  $\tilde{\alpha}_d$  les deux points fixes de  $g$  respectivement dans  $V_1$  et  $V_2$ . On définit partiellement  $f$  par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(g(x_1, x_2), \frac{9}{10}x_3 - \frac{9}{100}\right) \text{ sur } V_1 \times [-1, 1]$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(g(x_1, x_2), \frac{9}{10}x_3 + \frac{9}{100}\right) \text{ sur } V_2 \times [-1, 1]$$

On peut étendre  $f$  en un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Il est facile de vérifier que  $\mathcal{H}_f = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n([-1, 1]^3)$  est un fer à cheval avec 2 directions stable (la seconde et la troisième) et 1 direction instable (la première) et que  $\mathcal{H}_f = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n([-1, 1]^3)$  vérifie les 5 conditions de la définition. On note  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  les deux points fixes de  $f$  donnés par :

$$\alpha_g = \left(\tilde{\alpha}_g, -\frac{9}{10}\right)$$

$$\alpha_d = \left(\tilde{\alpha}_d, +\frac{9}{10}\right)$$

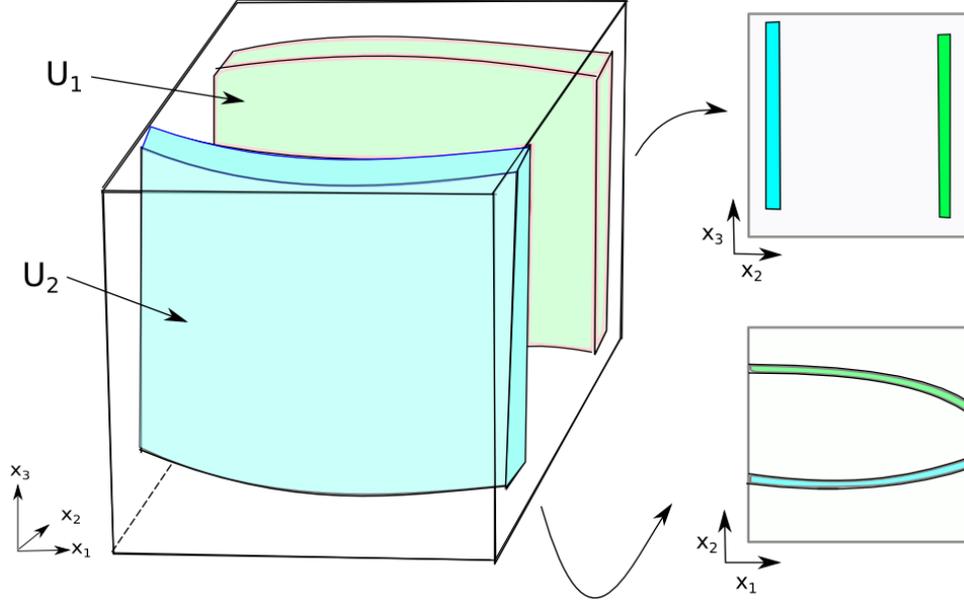


Figure 12 : cs-blender

Il reste à montrer l'existence d'un ouvert  $D \subset [-1, 1]^3$  tel que toute courbe tangente à  $C^{ss}$  qui intersecte  $D$  intersecte l'ensemble instable  $W^u(\mathcal{H}_f)$  de  $\mathcal{H}_f$ . On pose ici :

$$D = ] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[ \times ] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe incluse dans  $[-1, 1]^3$  dont tous les vecteurs tangents sont dans  $C^{ss}$  et qui intersecte  $D$ . On note  $U_1 = f(V_1 \times [-1, 1]) \cap [-1, 1]^3$  et  $U_2 = f(V_2 \times [-1, 1]) \cap [-1, 1]^3$ . Pour des raisons de continuité,  $\mathcal{C}$  intersecte à la fois  $U_1$  et  $U_2$ . Soit  $\gamma$  la troisième coordonnée d'un point quelconque de  $\mathcal{C} \cap D$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une courbe dont tous les vecteurs tangents sont dans  $C^{ss}$ , on dispose de  $\gamma \in [-\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1000}]$ . Il est facile de vérifier qu'on a alors :

$$\frac{10}{9}\gamma + \frac{9}{100} \in [-\frac{1}{2} + \frac{1}{100}, \frac{1}{2} - \frac{1}{100}] \text{ ou } \frac{10}{9}\gamma - \frac{9}{100} \in [-\frac{1}{2} + \frac{1}{100}, \frac{1}{2} - \frac{1}{100}]$$

Supposons par exemple que l'on a :  $\frac{10}{9}\gamma + \frac{9}{100} \in [-\frac{1}{2} + \frac{1}{100}, \frac{1}{2} - \frac{1}{100}]$ . On considère alors  $\mathcal{C}'_1 = f^{-1}(\mathcal{C}) \cap (V_1 \times [-1, 1])$ . Comme  $C^{ss}$  est invariant par  $f^{-1}$ ,  $\mathcal{C}'_1$  a tous ses vecteurs tangents dans  $C^{ss}$ . Comme  $\frac{10}{9}\gamma + \frac{9}{100} \in [-\frac{1}{2} + \frac{1}{100}, \frac{1}{2} - \frac{1}{100}]$ , ceci implique que  $\mathcal{C}'_1$  est inclus dans  $[-1, 1]^3$  et intersecte  $D$ . On peut poser  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}^1$ . Ensuite, en répétant ce procédé, on peut construire une suite  $(\mathcal{C}^n)_{n \geq 0}$  de courbes tangentes à  $C^{ss}$  qui intersectent  $D$  telles que  $\mathcal{C}^{n+1} \subset f^{-1}(\mathcal{C}^n)$ . On note ensuite  $\tilde{\mathcal{C}}^n = f^n(\mathcal{C}^n)$ . Clairement, la suite des  $\tilde{\mathcal{C}}^n$  est une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathcal{C}$  donc l'intersection des  $\tilde{\mathcal{C}}^n$  est non vide. Or, tout point dans cette intersection a toute son orbite dans  $[-1, 1]^3$ , donc est dans  $W^u(\mathcal{H}_f)$ . Ceci montre que la courbe  $\mathcal{C}$  intersecte  $W^u(\mathcal{H}_f)$ .

## 4.2.2 Première application : transitivité robuste via des cycles hétérodimensionnels robustes

C'est historiquement la première application des blenders. Voici l'énoncé originel de Bonatti et Diaz :

**Théorème (Bonatti, Diaz[14]) 4.2.2.1.** *Soit  $M$  une variété réelle telle que  $\dim(M) = 3$  et sans bord. On suppose que  $M$  supporte un champ de vecteurs d'Anosov. Alors il existe un ouvert non vide de  $C^1$ -difféomorphismes non hyperboliques, transitifs et isotopes à l'identité.*

Rappelons les idées principales de la preuve. Bonatti et Diaz ramènent la transitivité de l'application considérée à la présence d'un cycle hétérodimensionnel. Or, le blender permet de rendre robuste le cycle : en effet, si une variété stable de dimension 1 est en bonne position par rapport au blender, elle intersectera de manière persistante l'ensemble instable du blender en utilisant ce qui précède. Comme les deux variétés stable/instable de dimension 2 s'intersectent de manière robuste pour des raisons de dimension, on obtient des cycles hétérodimensionnels qui persistent.

## 4.2.3 Tangences persistantes

Les blenders permettent en particulier d'obtenir des tangences persistantes. Ceci est particulièrement utile puisque, comme on l'a déjà vu, en dimension 3, la méthode originelle de Newhouse ne s'applique pas. In fine, les tangences robustes permettent de redémontrer l'existence du phénomène de Newhouse en dimension 3. Remarquons que contrairement à la méthode de Palis et Viana, le blender est un outil robuste déjà en topologie  $C^1$ . Obtenir des tangences persistantes grâce aux blenders est toutefois plus difficile que les utiliser pour obtenir des cycles hétérodimensionnels robustes.

**Théorème (Bonatti, Diaz [13]) 4.2.3.1.** *Pour tout  $r \geq 1$ , pour toute variété réelle lisse  $M$  telle que  $\dim(M) = 3$ , il existe un sous-ensemble générique d'un ouvert de  $C^r$ -difféomorphismes de  $M$  qui possèdent une infinité de puits.*

On présente ici une méthode dans le cas de  $\mathbb{R}^3$  due à Bonatti et Diaz dans [15] pour obtenir des tangences persistantes. On reprend le difféomorphisme  $f$  de la section précédente par souci de simplification.

**Définition 4.2.3.2.** *Une courbe  $\mathcal{C}$  est une  $ss$ -courbe si  $\mathcal{C}$  est un graphe au-dessus de la seconde coordonnée  $x_2 \in [-1, 1]$ , horizontal par rapport à la seconde projection dans  $[-1, 1]^3$  et tangent à  $C^{ss}$ , i.e.,  $T_x\mathcal{C} \subset C^{ss}$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$ .*

On note  $W_{loc}^u(\alpha_g)$  la composante de  $W^u(\alpha_g) \cap [-1, 1]^3$  qui contient  $\alpha_g$  et on définit de même  $W_{loc}^u(\alpha_d)$ . Pour une  $ss$ -curve, il n'y a que 5 possibilités pour sa position :

1.  $\mathcal{C}$  est "à gauche" de  $W_{loc}^u(\alpha_g)$
2.  $\mathcal{C}$  intersecte  $W_{loc}^u(\alpha_g)$
3.  $\mathcal{C}$  est "entre"  $W_{loc}^u(\alpha_g)$  et  $W_{loc}^u(\alpha_d)$
4.  $\mathcal{C}$  intersecte  $W_{loc}^u(\alpha_d)$
5.  $\mathcal{C}$  est "à droite" de  $W_{loc}^u(\alpha_d)$

La définition suivante est un concept clef dans cette démonstration :

**Définition 4.2.3.3.** *Une sous-variété  $W \subset [-1, 1]^3$  de dimension 2 est une variété pliée s'il existe un feuilletage  $C^1$  de  $W$  par une famille  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  de  $ss$ -courbes telle que :*

1.  $W = \bigcup_{0 < t < 1} W_t$
2.  $W_0$  et  $W_1$  intersectent  $W_{loc}^u(\alpha_g)$
3. pour tout  $t \in ]0, 1[$ , la  $ss$ -courbe  $W_t$  est entre  $W_{loc}^u(\alpha_g)$  et  $W_{loc}^u(\alpha_d)$

Pour une  $ss$ -courbe  $\mathcal{C} = W_t$  donnée, on a que  $\mathcal{C}' = f^{-1}(\mathcal{C}) \cap [-1, 1]^3$  est la réunion de deux composantes  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$  qui sont toutes les deux des  $ss$ -courbes. Bonatti et Diaz donnent les différentes positions possibles pour  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$  en fonction de celle de  $\mathcal{C}$ . En particulier, si  $\mathcal{C}$  est entre  $W_{loc}^u(\alpha_g)$  et  $W_{loc}^u(\alpha_d)$ , alors au moins une des deux  $ss$ -courbes  $\mathcal{C}'_1$  et  $\mathcal{C}'_2$  est entre  $W_{loc}^u(\alpha_g)$  et  $W_{loc}^u(\alpha_d)$ . Comme une variété pliée est une réunion de  $ss$ -courbes, ils en déduisent des informations sur la géométrie de l'image d'une variété pliée par  $f^{-1}$ . En particulier, ils obtiennent le résultat suivant :

**Proposition 4.2.3.4.** *Soit  $W$  une variété pliée. Alors  $f^{-1}(W)$  contient une variété pliée.*

En utilisant ce résultat par induction, on peut alors prouver que  $W$  est tangente à la variété instable d'un des points du blender  $\mathcal{H}_f$ . En effet, on peut construire une suite  $(W_n)_{n \geq 0}$  de variétés pliées telles que  $W = W_0$  et  $W_{n+1} \subset f^{-1}(W_n)$ . On note ensuite  $\tilde{W}_n = f^n(W_n)$  et  $\tilde{W}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{W}_n$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $\beta_n \in W_n$  et un vecteur  $v_n \in T_{\beta_n} W_n$  tel que  $v_n \in C^u$ . On pose pour tout  $n \geq 1$ ,  $\tilde{\beta}_n = f^n(\beta_n) \in \tilde{W}_n \subset W$  et  $\tilde{v}_n$  un vecteur parallèle à  $D_{\beta_n} f^n(v_n)$ . On a :  $\tilde{v}_n \in T_{\tilde{\beta}_n} \tilde{W}_n$ . On peut supposer que  $\tilde{\beta}_n \rightarrow \tilde{\beta}_\infty \in \tilde{W}_\infty$  et que  $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_\infty$  pour un certain point  $\tilde{\beta}_\infty$  et un certain vecteur  $\tilde{v}_\infty$ . Clairement on a  $\tilde{\beta}_\infty \in W_0$ . Or, tout point dans l'intersection des  $\tilde{W}_n$  possède toute son orbite dans  $[-1, 1]^3$ , donc est dans  $W^u(\mathcal{H}_f)$ . On a aussi :

$$\tilde{v}_\infty \in \bigcap_{n \geq 0} D_{\beta_n} f^n(C^u) = T_{\tilde{\beta}_\infty} W_{loc}^u(\tilde{\beta}_\infty)$$

Le point  $\tilde{\beta}_\infty$  est donc un point de tangence de  $W$  et de  $W^u(\mathcal{H}_f)$ .

Pour conclure, il est possible de perturber  $f$  de telle sorte que  $W$  soit une partie d'une variété stable d'un point de  $\mathcal{H}_f$ . D'où l'obtention d'une tangence hétérocline. Comme toute cette démonstration s'applique toujours pour  $f'$  suffisamment proche de  $f$ , on obtient des tangences persistantes qui conduisent à l'existence d'un ouvert de difféomorphismes où ceux présentant une infinité de puits sont denses.

#### 4.2.4 Autres applications des blenders

L'utilisation des blenders est au coeur de la preuve de plusieurs résultats de recherche actuelle : citons (ou recitons plus exactement) par exemple les travaux de Berger ([4]), qui prouve l'existence de familles d'applications où toutes les applications (plus seulement un sous ensemble résiduel) ont une infinité de puits.

Les blenders ont été aussi utilisés par Avila, Crovisier et Wilkinson ([2]) pour obtenir une dichotomie pour un sous-ensemble  $C^1$ -générique, de difféomorphismes préservant le volume : ou bien tous les exposants de Lyapunov de presque tous les points s'annulent ou bien l'application est ergodique et non-uniformément Anosov (c'est-à-dire non uniformément hyperbolique et possédant une décomposition dominée).

# Newhouse phenomenon for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$

# 5

## 5.1 Results and outline

In this chapter, we generalize Buzzard's Theorem to dimension 3 and show that the degree can be controlled in this case. Here is our main result :

**Theorem B.** *There exists a polynomial automorphism  $f$  of degree 2 of  $\mathbb{C}^3$  such that for every  $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$  sufficiently close to  $f$ ,  $g$  admits a tangency between the stable and unstable laminations of some hyperbolic set.*

Notice that in the previous result,  $g$  is not assumed to be polynomial.

**Corollary 1.** *For each  $d \geq 2$ , there exists an open subset of  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^3)$  in which the automorphisms having a homoclinic tangency are dense.*

**Corollary 2.** *For each  $d \geq 2$ , there exists an open subset  $\text{Aut}_d(\mathbb{C}^3)$  in which the automorphisms having infinitely many sinks are dense.*

Let us present the main ideas of the proof of this result. We consider the following automorphism of  $\mathbb{C}^3$  :

$$f_0 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (p_c(z_1) + bz_2 + \sigma z_3(z_1 - \alpha), z_1, \lambda z_1 + \mu z_3 + \nu) \quad (5.1)$$

where  $p_c$  is a quadratic polynomial and the coefficients  $b, \lambda, \mu, \nu, \alpha$  are complex numbers. We prove that  $f_0$  has a horseshoe  $\mathcal{H}_{f_0}$  of index  $(2, 1)$  : the first direction is strongly expanded, the second one is strongly contracted and the third one is moderately contracted by  $f_0$ . Informally speaking, the third projection restricted to  $\mathcal{H}_{f_0}$  satisfies a special "open covering property" formalized in the following definition. This is an analogous in the complex setting of the notion of cs-blender in the sense of Bonatti and Diaz.

**Definition (Blender Property).** *Let  $f$  be a polynomial automorphism of  $\mathbb{C}^3$ ,  $D$  a tridisk of  $\mathbb{C}^3$  and  $\mathcal{H}_f = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(D)$  a horseshoe of index  $(2, 1)$ . We will suppose that there exist  $k > 10$  and three cone fields  $C^u, C^{ss}, C^{cs}$  such that in  $D$  we have :*

1.  $C^u$  is  $f$ -invariant
2.  $C^{ss}$  is  $f^{-1}$ -invariant
3. every vector in  $C^u$  is expanded by a factor larger than  $k$  under  $f$
4. every vector in  $C^{ss}$  is expanded by a factor larger than  $k$  under  $f^{-1}$

5. every vector in  $C^{cs}$  is expanded by a factor larger than 1 under  $f^{-1}$

We will say that  $\mathcal{H}_f$  is a blender if there exists a non empty open set  $D' \Subset D$  such that every curve tangent to  $C^{ss}$  which intersects  $D'$  intersects the unstable set  $W^u(\mathcal{H}_f)$  of  $\mathcal{H}_f$ .

Besides, we show that  $f_0$  has a periodic point which is sectionally dissipative. Once the blender is constructed, finding persistent tangencies is not trivial. We introduce manifolds with special geometry called folded manifolds. We prove that any folded manifold which is in good position has a tangency with the unstable manifold of a point of  $\mathcal{H}_{f_0}$ . We choose the parameters  $c, b$  and  $\sigma$  in order to create an initial heteroclinic tangency between the unstable manifold of a point of  $\mathcal{H}_{f_0}$  and a folded manifold. This folded manifold is in good position and included in the stable manifold of another point of  $\mathcal{H}_{f_0}$ . This enables us to produce persistent heteroclinic tangencies between stable and unstable manifolds of points of  $\mathcal{H}_{f_0}$ . This gives rise to homoclinic tangencies associated to the sectionally dissipative point. By a classical argument going back to Newhouse, this provides a subset of the set of automorphisms of degree 2 in which automorphisms with infinitely many sinks are dense.

The plan of the section is as follows. In section 5.2, we choose a family of quadratic polynomials and we fix complex coefficients  $\lambda, \mu, \nu$ . In section 5.3, we introduce the map  $f_0$  which depends on three parameters  $c, b, \sigma$  and the associated horseshoe and we show that it has the blender property. Then, in section 5.4, we introduce the formalism of folded manifolds and we give the mechanism which gives persistent tangencies. In section 5.5, we prove that it is possible to choose  $f_0$  in order to have a heteroclinic tangency. Finally, we prove the main Theorem in section 5.6. In section 5.7, we explain how to construct a sink from a sectionally dissipative tangency.

## 5.2 Preliminaries

### 5.2.1 Choice of a quadratic polynomial

In the following, we will consider the euclidean norm on  $\mathbb{C}^n$  for  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

**Notation 5.2.1.1.** We denote by  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  the unit disk, and by  $\mathbb{D}(0, r)$  the disk centered at 0 of radius  $r$  for any  $r > 0$ . In particular,  $\mathbb{D}(0, 1) = \mathbb{D}$ .

**Notation 5.2.1.2.** We will denote by  $\text{dist}$  the distance induced by the euclidean norm on  $\mathbb{C}^n$  for  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

**Notation 5.2.1.3.** For every  $z \in \mathbb{C}^3$  and  $i \in \{1, 2, 3\}$ , we denote by  $\text{pr}_i(z)$  the  $i^{\text{th}}$ -coordinate of  $z$ .

In the following proposition, we carefully choose a family of quadratic polynomials with special properties.

**Proposition 5.2.1.4.** For every integer  $q > 1$ , there exists a disk  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  of center  $c_0 \in \mathbb{C}$ , a holomorphic family  $(p_c)_{c \in \mathcal{C}}$  of quadratic polynomials, two integers  $m$  and  $r$ , a disk  $\mathbb{D}'$  with  $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}'$  such that we have :

1. for every  $c \in \mathcal{C}$ ,  $p_c^{-r}(\mathbb{D})$  (resp.  $p_c^{-r}(\mathbb{D}')$ ) admits two components  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$  (resp.  $\mathbb{D}'_1, \mathbb{D}'_2$ ) included in  $\mathbb{D}$  (resp.  $\mathbb{D}'$ ) such that  $p_c^r$  is univalent on both  $\mathbb{D}_1$  and  $\mathbb{D}_2$  (resp.  $\mathbb{D}'_1$  and  $\mathbb{D}'_2$ ). Denote by  $\alpha_c = \bigcap_{n \geq 0} (p_c^r)^{-n}(\mathbb{D}_1)$  and  $\gamma_c = \bigcap_{n \geq 0} (p_c^r)^{-n}(\mathbb{D}_2)$  which are two fixed points of  $p_c^r$ .
2. for every  $c \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha_c$  is a repulsive fixed point of  $p_c$ ,  $|p'_c(\alpha_c)| > 2$  and we have :

$$A := r\alpha_{c_0} \neq \gamma_{c_0} + p_{c_0}(\gamma_{c_0}) + \cdots + p_{c_0}^{r-1}(\gamma_{c_0}) := B \text{ and } |A - B| > 1$$

3. the critical point 0 is preperiodic for  $c = c_0$  :  $p_{c_0}^m(0) = \alpha_{c_0}$  and at  $c = c_0$ , we have :  $\frac{d}{dc}(p_c^m(0)) \neq 0$
4. there exists  $R > 0$  such that  $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}(0, R)$  and such that the Julia set of  $p_c$  is included in  $\mathbb{D}(0, R)$  for every  $c \in \mathcal{C}$
5. for every  $c \in \mathcal{C}$ ,  $p_c$  has a periodic point  $\delta_c$  of multiplier of modulus between 1 and  $(1 + 10^{-10})^{1/q^r}$ .

*Proof.* We begin by working with the family of quadratic polynomials  $p_c(z) = z^2 + c$ , we will rescale at the end of the proof. Let us fix an integer  $q > 1$ . We begin by taking the only real quadratic polynomial  $p_a(z) = z^2 + a$  with one parabolic cycle  $\delta_a$  of period 3. In particular,  $a < -1$ . Simple calculation show that  $z^2 + a$  has the fixed point  $\alpha_a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4a}) > 1$ . For any  $z \in \mathbb{C}$  such that  $|z| \geq 10$ , we have  $|p_a(z)| = |z^2 + a| > 10 \cdot |z| - |a|$  and then  $|p_a^n(z)| \rightarrow +\infty$ . This shows that the Julia set of  $p_a$  is included in  $\mathbb{D}(0, 10)$ . We take a ball  $\mathbb{B}' \subset \mathbb{D}(0, 10)$  around  $\alpha_a$  which is disjoint of the orbit of the critical point 0 of  $z^2 + a$  (this is possible since the critical orbit tends to the parabolic orbit of  $z^2 + a$ ). We denote by  $\mathbb{B}$  the ball of center  $\alpha_a$  and radius  $\text{rad}(\mathbb{B}) = \frac{1}{1000}\text{rad}(\mathbb{B}')$ .

We now choose a repulsive periodic point  $\gamma_a$  of period  $r_0$  inside  $\mathbb{B}'$  non equal to  $\alpha_a$  with special properties. Let us first point out that since  $\mathbb{B}$  intersects the Julia set of  $p_a$ , there exists an integer  $r_0$  such that  $p_a^{r_0}(\mathbb{B})$  contains the whole Julia set of  $p_a$ . In particular, all the periodic orbits of period  $r_0$  have a point in  $\mathbb{B}$ . It is possible to choose such a periodic point  $\gamma_a$  of period  $r_0$  inside  $\mathbb{B}$  non equal to  $\alpha_a$  such that  $\gamma_a + p_a(\gamma_a) + \cdots + p_a^{r_0-1}(\gamma_a) \neq r_0\alpha_a$ . Indeed, every periodic point of period  $r_0$  is a solution of  $p_a^{r_0}(z) = z$  whose coefficient of degree  $2^{r_0} - 1$  is equal both to 0 and to the sum  $z^1 + \cdots + z^{2^{r_0}}$  of all the solutions of  $p_a^{r_0}(z) = z$  (with multiplicity). If we had  $z^i + \cdots + p_a^{r_0}(z^i) = r_0\alpha_a$  for every  $z^i \neq \alpha_a$ , then we would find  $\alpha_a = 0$ , which is impossible. Then it is possible to find some periodic  $\gamma_a$  of period  $r_0$  inside  $\mathbb{B}$  non equal to  $\alpha_a$  satisfying this inequality. We fix this point  $\gamma_a$ . There exists a ball  $\tilde{\mathbb{B}}_1 \Subset \mathbb{B}$  (with  $\alpha_a \in \tilde{\mathbb{B}}_1$ ) and an integer  $r_1$  such that  $p_a^{r_1}(\tilde{\mathbb{B}}_1)$  contains  $\mathbb{B}'$ . Since  $\mathbb{B}'$  is disjoint of the orbit of the critical point 0 of  $p_a$ , it is possible to find a component of  $p_a^{-r_1}(\mathbb{B}') \Subset \mathbb{B} \Subset \mathbb{B}'$  where  $p_a^{r_1}$  is univalent. Similarly, we can find an integer  $r_2$  and a component of  $p_a^{-r_2}(\mathbb{B}') \Subset \mathbb{B} \Subset \mathbb{B}'$  where  $p_a^{r_2}$  is univalent. Taking a multiple  $r$  of  $r_0, r_1$  and  $r_2$  if necessary, we can suppose that we have two components  $\mathbb{B}'_1$  and  $\mathbb{B}'_2$  of  $p_a^{-r}(\mathbb{B}')$  where  $p_a^r$  is univalent, such that  $\alpha_a \in \mathbb{B}'_1, \gamma_a \in \mathbb{B}'_2$  and both  $\alpha_a$  and  $\gamma_a$  are fixed points of  $p_a^r$ . There are components  $\mathbb{B}_1 \Subset \mathbb{B}'_1$  and  $\mathbb{B}'_2 \Subset \mathbb{B}_2$  of  $p_a^{-r}(\mathbb{B})$  where  $p_a^r$  is univalent and with  $\alpha_a \in \mathbb{B}_1$  and  $\gamma_a \in \mathbb{B}_2$ . Since  $\gamma_a + p_a(\gamma_a) + \cdots + p_a^{r_0-1}(\gamma_a) \neq r_0\alpha_a$  and  $r$  is a multiple of  $r_0$ , we have  $r\alpha_a \neq \gamma_a + p_a(\gamma_a) + \cdots + p_a^{r-1}(\gamma_a)$ . Then, taking a multiple of  $r$  if necessary

(we will still denote it by  $r$ ), we have :  $|r\alpha_a - (\gamma_a + p_a(\gamma_a) + \dots + p_a^{r-1}(\gamma_a))| > 10$ .

Then it is possible to fix some neighborhood  $\mathcal{C}_a$  of  $a$  in  $\mathbb{C}$  such that for every  $c \in \mathcal{C}_a$  :

1. the continuation  $\alpha_c$  of  $\alpha_a$  is a repulsive fixed point in  $\mathbb{B}'$  such that  $|p_c'(\alpha_c)| > 1$
2. the Julia set of  $p_c$  is included in  $\mathbb{D}(0, 10)$
3. the continuation  $\delta_c$  of  $\delta_a$  is of multiplier of modulus between between  $(1 - 10^{-10})^{1/qr}$  and  $(1 + 10^{-10})^{1/qr}$
4.  $r\alpha_c \neq \gamma_c + p_c(\gamma_c) + \dots + p_c^{r-1}(\gamma_c)$  and  $|r\alpha_c - (\gamma_c + p_c(\gamma_c) + \dots + p_c^{r-1}(\gamma_c))| > 10$
5.  $p_c^{-r}(\mathbb{B})$  (resp.  $p_c^{-r}(\mathbb{B}')$ ) admits two components  $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$  (resp.  $\mathbb{B}'_1, \mathbb{B}'_2$ ) included in  $\mathbb{B}$  (resp.  $\mathbb{B}'$ ) such that  $p_c^r$  is univalent on both  $\mathbb{B}_1$  and  $\mathbb{B}_2$  (resp.  $\mathbb{B}'_1$  and  $\mathbb{B}'_2$ )

The parameter  $a$  belongs to the Mandelbrot set. Misiurewicz parameters are dense inside the Mandelbrot set so it is possible to find a parameter  $\tilde{c}$  inside  $\mathcal{C}_a$  such that the critical point 0 is preperiodic for  $p_{\tilde{c}}$ . The critical point 0 is sent after a finite number of iterations of  $p_{\tilde{c}}$  on a periodic orbit. This periodic orbit is accumulated by preimages of  $\alpha_{\tilde{c}}$  by iterates of  $p_{\tilde{c}}$ . Then by the Argument Principle it is possible to take a new Misiurewicz parameter  $c_0 \in \mathcal{C}_a$  such that 0 is still preperiodic but with associated orbit the fixed point  $\alpha_{c_0}$ . There exists an integer  $m$  such that  $p_{c_0}^m(0) = \alpha_{c_0}$ . The inequality  $\frac{d}{dc}(p_c^m(0)) \neq 0$  at  $c = c_0$  is a direct consequence of Lemma 1, Chapter 5 of [25]. For the parameter  $c_0$ ,  $\delta_{c_0}$  is of multiplier of modulus between between 1 and  $(1 + 10^{-10})^{1/qr}$ . We pick some ball  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_a$  of center  $c_0$  where this is still true.

For each  $c \in \mathcal{C}$ , we do a rescaling by an affine map so that after rescaling  $\mathbb{B}$  is sent on  $\mathbb{D}$ . Properties 1, 3 and 5 are still true. Property 4 is still true with a disk  $\mathbb{D}(0, R)$  with a fixed  $R > 0$  instead of  $\mathbb{D}(0, 10)$ . Since  $r\alpha_c \neq \gamma_c + p_c(\gamma_c) + \dots + p_c^{r-1}(\gamma_c)$  and  $|r\alpha_c - (\gamma_c + p_c(\gamma_c) + \dots + p_c^{r-1}(\gamma_c))| > 10$  before rescaling, we have  $A \neq B$  and  $|A - B| > 1$  after and then Property 2 is true. Then Properties 1, 2, 3, 4 and 5 are satisfied for every  $c \in \mathcal{C}$ . In the following, after rescaling, we will denote  $\mathbb{B}, \mathbb{B}', \mathbb{B}'', \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}'_1, \mathbb{B}'_2$  by  $\mathbb{D}, \mathbb{D}', \mathbb{D}'', \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}'_1, \mathbb{D}'_2$ . For simplicity, we will still denote by  $p_c$  the polynomial after rescaling.  $\square$

## 5.2.2 Choice of an IFS

**Notation 5.2.2.1.** For every  $c \in \mathcal{C}$ , we denote by  $h_1$  and  $h_2$  the two inverse branches of  $p_c^r$  on  $\mathbb{D}'$  given by Proposition 5.2.1.4 such that  $\alpha_c = \bigcap_{n \geq 0} h_1^n(\mathbb{D})$  and  $\gamma_c = \bigcap_{n \geq 0} h_2^n(\mathbb{D})$ .

**Notation 5.2.2.2.** We denote  $\mu_0 = (1 - 10^{-4})^{\frac{1}{qr}} \cdot e^{i \frac{\pi}{2qr}}$  which depends on the integer  $q$ . In particular, we have the following equality :  $\mu_0^{qr} = (1 - 10^{-4}) \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$ .

In the following result, we iterate  $q$  times the maps  $h_1$  and  $h_2$  with a specific choice of the integer  $q$ . Remind that  $A, B$  and  $R$  were defined in Proposition 5.2.1.4.

**Proposition 5.2.2.3.** Reducing  $\mathcal{C}$  if necessary, there exists an integer  $q$  such that for every  $c \in \mathcal{C}$  :

1.  $\frac{1}{C} < |(h_j^q)'| < \frac{2}{C}$  with  $C > 10^{10}$  on a neighborhood  $\mathbb{D}''$  of  $\mathbb{D}$  with  $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}'' \subset \mathbb{D}'$
2.  $\text{diam}((h_j^q(\mathbb{D}')) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(h_j^q(\mathbb{D}'), \partial\mathbb{D})$
3. for every  $z \in h_1^q(\mathbb{D}')$  and  $0 \leq n \leq qr(1 - 10^{-10}r^{-1}R^{-1} \min(1, |A - B|))$  :  

$$\mu_0^0 p_c^{n+r-1}(z) + \dots + \mu_0^{r-1} p_c^n(z) \in \mathbb{D}(A, 10^{-10} \cdot |A - B|)$$
4. for every  $z \in h_2^q(\mathbb{D}')$  and  $0 \leq n \leq qr(1 - 10^{-10}r^{-1}R^{-1} \min(1, |A - B|))$  :  

$$\mu_0^0 p_c^{n+r-1}(z) + \dots + \mu_0^{r-1} p_c^n(z) \in \mathbb{D}(B, 10^{-10} \cdot |A - B|)$$

*Proof.* We first show the result for  $c = c_0$ . According to the Schwarz Lemma, it is possible to find some ball  $\mathbb{D}''$  with  $\mathbb{D} \Subset \mathbb{D}'' \Subset \mathbb{D}'$  such that  $|h_j'| < e < 1$  on  $\mathbb{D}''$ . We reduce the radius of  $\mathbb{B}''$  so that  $\text{rad}(\mathbb{B}'') \leq \frac{1}{100} \text{rad}(\mathbb{B}')$ . Then, taking  $q$  such that  $e^q < 10^{-10}$ , we have  $|(h_j^q)'| < 10^{-11}$  on  $\mathbb{D}''$ . Since the radius of  $\mathbb{D}$  is smaller than 100 times the radius of  $\mathbb{D}'$  and since  $\frac{1}{2} < \frac{1-0.01}{(1+0.01)^3} < \frac{1+0.01}{(1-0.01)^3} < 2$ , it is a consequence of the Koebe Theorem that there exists  $C$  such that  $\frac{1}{C} < |(h_j^q)'| < \frac{2}{C}$  with  $C > 10^{10}$  on  $\mathbb{D}''$ . Since  $h_j$  is a contraction such that  $\bigcap_{n \geq 0} h_1^n(\mathbb{D}') = \{\alpha_c\}$  and  $\bigcap_{n \geq 0} h_2^n(\mathbb{D}') = \{\gamma_c\}$ , increasing the value of  $q$  if necessary, we have that  $\text{diam}((h_j^q(\mathbb{D}')) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(h_j^q(\mathbb{D}'), \partial\mathbb{D})$ . When  $q \rightarrow \infty$ , we have that  $\mu_0^k \rightarrow 1$  and  $p_{c_0}^{n+k}(z) \rightarrow \alpha_{c_0}$  for  $0 \leq k \leq r$ ,  $0 \leq n \leq qr(1 - 10^{-10}r^{-1}R^{-1} \min(1, |A - B|))$  and  $z \in h_1^q(\mathbb{D}')$ . Then, increasing the value of  $q$  if necessary, we have that  $\mu_0^0 p_{c_0}^{n+r-1}(z) + \dots + \mu_0^{r-1} p_{c_0}^n(z) \in \mathbb{D}(A, 10^{-10}|A - B|)$ . The proof of the last item is similar. Since all these conditions are open, reducing the ball  $\mathcal{C}$  of center  $c_0$  if necessary, they stay true for every  $c \in \mathcal{C}$ . □

**Notation 5.2.2.4.** From now on, we fix such a value of  $q$  and the associated value  $\mu_0$ .

### 5.2.3 Choice of the parameters $\lambda$ and $\nu$

**Notation 5.2.3.1.** We denote by  $A' = (\mu_0^{r-1}\alpha_{c_0} + \dots + \mu_0^0 p_{c_0}^{r-1}(\alpha_{c_0}))$  and  $B' = (\mu_0^{r-1}\gamma_{c_0} + \dots + \mu_0^0 p_{c_0}^{r-1}(\gamma_{c_0}))$ .

According to Proposition 5.2.2.3, we have  $A' \in \mathbb{D}(A, 10^{-10}|A - B|)$  and  $B' \in \mathbb{D}(B, 10^{-10}|A - B|)$ . According to item 2 of Proposition 5.2.1.4, this implies that  $|A' - B'| > \frac{1}{2}|A - B| > \frac{1}{2}$ .

**Proposition 5.2.3.2.** There exist two constants  $\lambda, \nu$  such that  $|\lambda| < 1$  and:

$$\lambda A'(1 + \mu_0^r + \dots + \mu_0^{qr-r}) + \nu(1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{qr-1}) = \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda B'(1 + \mu_0^r + \dots + \mu_0^{qr-r}) + \nu(1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{qr-1}) = -\frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$$

*Proof.* We have :  $1 + \mu_0^r + \dots + \mu_0^{qr-r} = (1 - \mu_0^{qr})/(1 - \mu_0^r) \neq 0$ . We also have  $1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{qr-1} = (1 - \mu_0^{qr})/(1 - \mu_0) \neq 0$ . Since  $A' \neq B'$ , it is possible to take two coefficients  $\lambda$  and  $\nu$  so that the images of these two complex numbers by  $z \mapsto \lambda(1 + \mu_0^r + \dots + \mu_0^{qr-r})z + \nu(1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{qr-1})$  are respectively  $\frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$  and  $-\frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$ .

**Lemma 5.2.3.3.** *We have :*

$$\frac{q}{2} \leq 1 + |\mu_0^r| + |\mu_0|^{2r} + \cdots + |\mu_0|^{qr-r} \leq 10 \cdot |1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \cdots + \mu_0^{qr-r}|$$

*Proof.* We have :  $\frac{1}{2} \leq 1, \frac{1}{2} \leq |\mu_0^r|, \dots, \frac{1}{2} \leq |\mu_0^{qr-r}|$  so the first inequality is trivial. Since every term  $\mu_0^{nr}$  ( $0 \leq n \leq q-1$ ) has a positive real part and this real part is larger than  $\frac{1}{2}$  for  $0 \leq n \leq \frac{q-1}{2}$ , we have  $\operatorname{Re}(1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \cdots + \mu_0^{qr-r}) \geq \frac{q-1}{2} \cdot \frac{1}{2}$  and then  $1 + |\mu_0^r| + |\mu_0|^{2r} + \cdots + |\mu_0|^{qr-r} \leq q \leq 10 \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq 10 \cdot |1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \cdots + \mu_0^{qr-r}|$ . The proof is complete.  $\square$

We have :  $|\lambda| |A' - B'| |1 + \mu_0^r + \cdots + \mu_0^{qr-r}| = 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$  with  $|A' - B'| > \frac{1}{2}$  and  $|1 + \mu_0^r + \cdots + \mu_0^{qr-r}| \geq 1$  according to the previous lemma. This implies that  $|\lambda| < 1$ .  $\square$

**Corollary 5.2.3.4.** *Reducing  $\mathcal{C}$  if necessary, there exists a neighborhood  $B_\mu$  of  $\mu_0$  such that for every  $c \in \mathcal{C}$  and  $\mu \in B_\mu$  we have :*

1. *for every  $z \in h_1^q(\mathbb{D}')$ , we have :*

$$\nu + \lambda p_c^{qr-1}(z) + \mu(\nu + \cdots + \mu(\nu + \lambda z)) \in \mathbb{D}(\frac{9}{10} \cdot 10^{-4}, 10^{-10})$$

2. *for every  $z \in h_2^q(\mathbb{D}')$ , we have :*

$$\nu + \lambda p_c^{qr-1}(z) + \mu(\nu + \cdots + \mu(\nu + \lambda z)) \in \mathbb{D}(-\frac{9}{10} \cdot 10^{-4}, 10^{-10})$$

*Proof.* We first prove the result for  $c = c_0$  and  $\mu = \mu_0$ . According to Proposition 5.2.3.2, we have :

$$\begin{aligned} & \nu + \lambda p_{c_0}^{qr-1}(z) + \mu_0(\nu + \cdots + \mu_0(\nu + \lambda z)) - \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} = \\ & \lambda \sum_{n=0}^{l-1} (p_{c_0}^{qr-1-n}(z) - \alpha_{c_0}) \mu_0^n + \lambda \sum_{n=l}^{qr-1} (p_{c_0}^{qr-1-n}(z) - \alpha_{c_0}) \mu_0^n \end{aligned}$$

where  $l$  is the largest integer such that  $l \leq 10^{-10} \frac{q}{R} \min(1, |A - B|)$  and which is a multiple of  $r$ . In particular,  $qr - l$  is a multiple of  $r$ . Using the third item of Proposition 5.2.2.3 :

$$|\lambda \sum_{n=l}^{qr-1} (p_{c_0}^{qr-1-n}(z) - \alpha_{c_0}) \mu_0^n| \leq |\lambda| \cdot 10^{-10} |A - B| \cdot (1 + |\mu_0|^r + |\mu_0|^{2r} + \cdots + |\mu_0|^{qr-r})$$

Since  $|\lambda| \cdot |A - B| \cdot |1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \cdots + \mu_0^{qr-r}| < |\lambda| \cdot 2 |A' - B'| |1 + \mu_0^r + \cdots + \mu_0^{qr-r}| = 2 \cdot 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}$  and since  $1 + |\mu_0^r| + |\mu_0|^{2r} + \cdots + |\mu_0|^{qr-r} \leq 10 \cdot |1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \cdots + \mu_0^{qr-r}|$  according to Lemma 5.2.3.3, we have :

$$|\lambda \cdot \sum_{n=l}^{qr-1} (p_{c_0}^{qr-1-n}(z) - \alpha_{c_0}) \mu_0^n| \leq 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \leq 10^{-11}$$

Then, because  $\mathbb{D}'$  and the Julia set of  $p_{c_0}$  is included inside  $\mathbb{D}(0, R)$  (see item 4 of Proposition 5.2.1.4), we have :

$$\begin{aligned} |\lambda \sum_{n=0}^{l-1} (p_{c_0}^{qr-1-n}(z) - \alpha_{c_0}) \mu_0^n| &\leq |\lambda| \cdot 2 \cdot R \cdot (1 + |\mu_0| + |\mu_0|^2 + \dots + |\mu_0|^{l-1}) \leq |\lambda| \cdot 2R \cdot l \\ &\leq |\lambda| \cdot 2R \cdot 10^{-10} \frac{q}{R} \cdot \min(1, |A-B|) \leq 10^{-9} \cdot |\lambda| \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{|A-B|}{2} \leq 10^{-9} \cdot |\lambda| \cdot \frac{q}{2} \cdot |A'-B'| \\ &\leq 10^{-9} \cdot |\lambda| \cdot |A'-B'| \cdot 10 \cdot |1 + \mu_0 + \mu_0^2 + \dots + \mu_0^{qr-r}| \leq 10^{-8} \cdot 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} \leq 3 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

since  $\frac{q}{2} \leq 10 \cdot |1 + \mu_0^r + \mu_0^{2r} + \dots + \mu_0^{qr-r}|$  according to Lemma 5.2.3.3. Then we just have to sum the two inequalities to get the result for  $c = c_0$  and  $\mu = \mu_0$ . Then by continuity, since the inequality is open, it stays true for every  $\mu$  in some ball  $\mathcal{B}_\mu$  of center  $\mu_0$  and  $c \in \mathcal{C}$  after reducing  $\mathcal{C}$  if necessary. Then item 1 is true and the proof of item 2 is similar. The result is proven.  $\square$

**Remark 5.2.3.5.** Since  $|\mu_0| = (1 - 10^{-4})^{\frac{1}{qr}}$ , we reduce  $\mathcal{B}_\mu$  if necessary so that  $|\mu| < (1 - 10^{-4} + 10^{-10})^{\frac{1}{qr}}$  for every  $\mu \in \mathcal{B}_\mu$ . If necessary, we reduce it another time so that for every  $\mu \in \mathcal{B}_\mu$ , we have  $|\mu|^{2qr} > 1 - 2 \cdot 10^{-4}$ .

#### 5.2.4 Choice of the parameter $\mu$

In this subsection, we slightly perturb the coefficient  $\mu_0$  into a new value  $\mu$  in order to satisfy some equality for a product of matrices. Notice that this choice has nothing to do with the next section and the blender property, it will be useful in Section 5.

**Notation 5.2.4.1.** We denote  $\beta_0 = 0, \dots, \beta_m = \alpha_{c_0}$ .

**Notation 5.2.4.2.** For every  $\mu \in \mathcal{B}_\mu$ , we define :  $w_0 = 0 + 1 \cdot (\beta_0 - \beta_m)$ ,  $w_1 = p'_{c_0}(\beta_1)w_0 + \mu(\beta_1 - \beta_m) \dots$  and  $w_{m-1} = p'_{c_0}(\beta_{m-1})w_{m-2} + \mu^m(\beta_{m-1} - \beta_m)$  where  $p'_{c_0}(\beta_0) = 0, p'_{c_0}(\beta_1), \dots, p'_{c_0}(\beta_{m-1}) \neq 0$ .

**Definition 5.2.4.3.** Since  $\beta_{m-1} - \beta_m \neq 0$ ,  $w_{m-1}$  is a polynomial of degree  $m$  in the variable  $\mu$  so we fix some  $\mu \in \mathcal{B}_\mu$  such that  $w_{m-1} = w_{m-1}(\mu) \neq 0$ .

**Notation 5.2.4.4.** We denote for every  $\sigma \in \mathbb{C}, 0 \leq n \leq m-1$ :

$$M_n^\sigma = \begin{pmatrix} p'_{c_0}(\beta_n) & 0 & \sigma(\beta_n - \beta_m) \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

**Proposition 5.2.4.5.** We have :  $M_{m-1}^\sigma \dots M_0^\sigma \cdot (0, 0, 1) = (\zeta_1(\sigma), \zeta_2(\sigma), \zeta_3(\sigma))$  where  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  are holomorphic such that  $\zeta_1(\sigma) = w_{m-1} \cdot \sigma + O(\sigma^2)$  and  $\zeta_3(\sigma) = \mu^m + O(\sigma)$ .

*Proof.* It is a straightforward consequence of Definition 5.2.4.3.  $\square$

Simple calculations yield the following corollary (the important fact is that  $p'_{c_0}(\beta_0) = 0$ ). The proof is left to the reader.

**Corollary 5.2.4.6.** *Let  $\epsilon_1^n, \epsilon_2^n, \epsilon_3^n$  be three holomorphic functions such that  $\epsilon_1^n(\sigma) = O(\sigma)$ ,  $\epsilon_2^n(\sigma) = O(\sigma^2)$  and  $\epsilon_3^n(\sigma) = O(\sigma)$  for  $0 \leq n \leq m-1$ . Let us denote for every  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq n \leq m-1$  :*

$$N_n^\sigma = \begin{pmatrix} p'_{c_0}(\beta_n) + \epsilon_1^n(\sigma) & \epsilon_2^n(\sigma) & \sigma(\beta_n + \epsilon_3^n(\sigma) - \beta_m) \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

For every holomorphic maps  $\xi_1, \xi_2$  such that  $\xi_1(\sigma) = O(\sigma)$  and  $\xi_2(\sigma) = O(\sigma)$ , we get :

$$N_{m-1}^\sigma \cdots N_0^\sigma \cdot (\xi_1(\sigma), \xi_2(\sigma), 1) = (\zeta_1(\sigma), \zeta_2(\sigma), \zeta_3(\sigma))$$

where  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  are holomorphic such that  $\zeta_1(\sigma) = w_{m-1} \cdot \sigma + O(\sigma^2)$  and  $\zeta_3(\sigma) = \mu^m + O(\sigma)$ .

## 5.3 Construction of a blender

In this section, we construct a polynomial automorphism  $f_0$  of  $\mathbb{C}^3$ . We show that  $f_0$  has a horseshoe  $\mathcal{H}_{f_0}$  and that  $\mathcal{H}_{f_0}$  is a blender.

### 5.3.1 Three complex dimensions : the map $f_0$

We consider now the 3 dimensional map  $f_0$  introduced in (5.1) given by  $f_0(z_1, z_2, z_3) = (p_c(z) + bz_2 + \sigma z_3(z_1 - \alpha_{c_0}), z_1, \lambda z_1 + \mu z_3 + \nu)$ . It is clear it is a polynomial automorphism for  $c \in \mathcal{C}$  and  $b \neq 0$ . In the following, we will see that the first direction is expanded by  $f_0$  and corresponds to the direction of the unstable manifolds of a hyperbolic set we are going to describe. The second and third directions are contracted by  $f_0$  and correspond to the directions of the stable manifolds of this hyperbolic set.

**Notation 5.3.1.1.**  $C^u = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 : \max(|v_2|, |v_3|) \leq 10^{-6} \cdot |v_1|\}$   
 $C^{ss} = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 : \max(|v_1|, |v_3|) \leq 10^{-6} \cdot |v_2|\}$  and  $C^{cs} = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 : \max(|v_1|, |v_2|) \leq 10^{-6} \cdot |v_3|\}$

We now give a non general definition of a horseshoe which is specific to our context.

**Definition 5.3.1.2.** *Given an automorphism  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , a tridisk  $D = D_1 \times D_2 \times D_3 \subset \mathbb{D}^3$  and an integer  $p \geq 1$ , we say that  $\mathcal{H}_F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\overline{D})$  is a  $p$ -branch horseshoe for  $F$  if :*

1.  $F(D) \cap D$  has  $p$  components  $D^{j,u}$  which do not intersect  $D_1 \times \partial(D_2 \times D_3)$
2.  $F^{-1}(D) \cap D$  has  $p$  components  $D^{j,s}$  which do not intersect  $\partial D_1 \times D_2 \times D_3$
3. the cone field  $C^u$  is  $F$ -invariant on  $\bigcup_{1 \leq j \leq p} D^{j,s}$  and the cone field  $C^{ss}$  is  $F^{-1}$ -invariant on  $\bigcup_{1 \leq j \leq p} D^{j,u}$
4. there exists  $C_F > 2$  such that at every point of  $\bigcup_{1 \leq j \leq p} D^{j,s}$ , for every  $v \in C^u$ , we have :  $\|DF(v)\| > C_F \|v\|$  and at every point of  $\bigcup_{1 \leq j \leq p} D^{j,u}$ , for every  $v \in C^{ss}$ , we have :  $\|D(F^{-1})(v)\| > C_F \|v\|$  and for every  $v \in C^{cs}$ , we have :  $2\|v\| > \|D(F^{-1})(v)\| > \|v\|$ .

**Proposition 5.3.1.3.** *If  $\mathcal{H}_F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\overline{D})$  is a  $p$ -branch horseshoe, then it is a horseshoe in the classical meaning of this term, that is a compact, invariant, transitive, hyperbolic set .*

*Proof.* The set  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\overline{D})$  is compact as an intersection of compact sets and  $F$ -invariant by definition. Moreover, one can take the (non necessarily) decomposition  $\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^6 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^4$  and the associated constant cone fields  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^u = \{(v_1, v_2, v_3) : \|v_1\| > \|(v_2, v_3)\|\}$  and  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^s = \{(v_1, v_2, v_3) : \|(v_2, v_3)\| > \|v_1\|\}$ . The definition above implies that both  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^u$  is  $F$ -invariant and  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^s$  is  $F^{-1}$ -invariant. Moreover, they are expanded by a factor larger than 1 respectively under  $F$  and  $F^{-1}$ . Besides, the sets  $D^{j,u}$  do not intersect  $D_1 \times \partial(D_2 \times D_3)$  and the sets  $D^{j,s}$  do not intersect  $\partial D_1 \times D_2 \times D_3$ . Then  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\overline{D})$  is a horseshoe in the sense of Definition 6.5.2 of [36]. According to the discussion following this definition,  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\overline{D})$  is hyperbolic (this is also a straightforward application of the cone field criterion, Corollary 6.4.8 in [36]) and is topologically conjugate to a shift. In particular, it is transitive. This ends the proof of the proposition.  $\square$

**Remark 5.3.1.4.** For our definition, a  $p$ -branch horseshoe has one unstable direction and two stable directions. It is also straightforward that if  $F$  has a  $p$ -branch horseshoe, then  $F^2$  has a  $p^2$ -branch horseshoe.

**Definition 5.3.1.5.** *We say that a saddle periodic point of multipliers  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1 < |\lambda_3|$  is sectionally dissipative if the product of any two of its eigenvalues is less than 1 in modulus, that is,  $|\lambda_1 \lambda_3| < 1$  and  $|\lambda_2 \lambda_3| < 1$  .*

In the next proposition, we prove that if  $b$  and  $\sigma$  are sufficiently small, then some iterate of  $f_0 = f_{c,b,\sigma}$  has a 2-branch horseshoe. Moreover, we introduce a neighborhood  $\mathcal{F}$  of  $f_0$  where this property persists. In section 5, we will make a particular choice of  $c$ ,  $b$  and  $\sigma$  so that the stable manifold of a periodic point of  $f_0$  will have special properties, which will persist in a new neighborhood  $\mathcal{F}' \Subset \mathcal{F}$  of  $f_0$  in  $\text{Aut}_2(\mathbb{C}^3)$ .

**Proposition 5.3.1.6.** *Let  $f_0 = f_{c,b,\sigma}$  be the polynomial automorphism of  $\mathbb{C}^3$  introduced in (5.1) with  $c \in \mathcal{C}$ . Then, there exists  $10^{-10} > b_0 > 0$  and  $10^{-10} > \sigma_0 > 0$  independent of  $c \in \mathcal{C}$  such that if  $0 < |b| < b_0$  and  $0 \leq |\sigma| < \sigma_0$ , then  $\mathcal{H}_{f_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (f_0^{qr})^n(\overline{\mathbb{D}^3})$  is a 2-branch horseshoe. Moreover,  $f_0$  has a fixed point  $\delta_{f_0}$  that is sectionally dissipative and belongs to the homoclinic class of the continuation  $\alpha_{f_0}$  of  $\alpha$ . These results remain true for any  $f$  in some neighborhood  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(c, b, \sigma)$  of  $f_0$  in  $\text{Aut}_2(\mathbb{C}^3)$ .*

*Proof.* The limit set of the IFS defined by the two local inverse  $h_1^q$  and  $h_2^q$  of  $p_c^{qr}$  is a basic repeller in  $\mathbb{C}$ . The map  $f_{c,0,0} : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (p_c(z_1), z_1, \lambda z_1 + \mu z_3 + \nu)$  is such that  $f_{c,0,0}^{qr}(\overline{\mathbb{D}^3})$  has 2 components which are 2 graphs over the coordinate  $z_1$ , which are included in  $\mathbb{D}^3$  and which do not intersect  $\mathbb{D} \times \partial(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ . For these two graphs, the coordinate  $z_2$  lies respectively in  $\mathbb{D}_1$  and  $\mathbb{D}_2$ . The third coordinate of  $f_{c,0,0}^{qr}$  is equal to  $\nu + \lambda p_c^{qr-1}(z_1) + \mu(\nu + \dots + \mu(\nu + \lambda z_1)) + \mu^{qr} z_3$ . According to Corollary 5.2.3.4,  $\nu + \lambda p_c^{qr-1}(z_1) + \mu(\nu + \dots + \mu(\nu + \lambda z_1)) \in \mathbb{D}(\pm \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}, 10^{-10})$  and we have that  $|\mu|^{qr} < 1 - 10^{-4} + 10^{-10}$  (see Remark 5.2.3.5), so the coordinate  $z_3$  lies in  $\mathbb{D}$  for these two graphs. Then, by continuity there exists  $10^{-10} > \sigma_0 > 0$  such that for every  $0 \leq |\sigma| < \sigma_0$ ,  $f_{c,0,\sigma}^{qr}(\overline{\mathbb{D}^3})$  has 2 components which are graphs over the coordinate  $z_1$  which are included in  $\mathbb{D}^3$ . For these two graphs, the

coordinate  $z_2$  lies respectively in  $\mathbb{D}_1''$  and  $\mathbb{D}_2''$  and the coordinate  $z_3$  in  $\mathbb{D}$ . The distance to  $\mathbb{D} \times \partial(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$  of each of these two graphs is strictly positive and bounded independently of  $0 \leq |\sigma| < \sigma_0$ . Then this implies that there exists  $10^{-10} > b_0 > 0$  such that for every  $0 < |b| < b_0$  and  $0 \leq |\sigma| < \sigma_0$ ,  $f_{c,b,\sigma}^{qr}(\overline{\mathbb{D}^3})$  has two connected components  $D^{1,u}$  and  $D^{2,u}$  which are two tridisks which do not intersect  $\mathbb{D} \times \partial(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ . This proves item 1 of Definition 5.3.1.2. The proof of item 2 is similar and gives two components  $D^{1,s}$  and  $D^{2,s}$  in  $f_{c,b,\sigma}^{-qr}(\overline{\mathbb{D}^3})$ . The cone field  $C^u$  is  $f_0^{qr}$ -invariant on  $D^{1,s} \cup D^{2,s}$  and dilated under  $f_0^{qr}$  by a factor at least  $10^9$  because  $|h'_j| < 10^{-9}$  on  $h_j^q(\mathbb{D}'')$  (see item 1 of Proposition 5.2.2.3). For the same reason, the cone field  $C^{ss}$  is  $f_0^{-qr}$ -invariant on  $D^{1,u} \cup D^{2,u}$  and dilated under  $f_0^{-qr}$  by a factor at least  $10^9$ . This shows both items 3 and 4 of Definition 5.3.1.2. Then  $\mathcal{H}_{f_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (f_0^{qr})^n(\overline{\mathbb{D}^3})$  is a 2-branch horseshoe.

The periodic point  $\delta_c$  is of multiplier of modulus between 1 and  $(1+10^{-10})^{1/qr}$ . Then by continuity the periodic point  $\delta_{f_0}$  continuation of the periodic point  $\delta_c$  of  $p_c$  is a saddle point of expanding eigenvalue between 1 and  $(1+2 \cdot 10^{-10})^{1/qr}$  after reducing  $b_0$  and  $\sigma_0$  if necessary. It has two contracting eigenvalues. When  $b = \sigma = 0$ , one is equal to 0 and the other one is a power of  $\mu$  with  $|\mu| < (1 - 10^{-4} + 10^{10})^{\frac{1}{qr}}$  (see Remark 5.2.3.5). Then, by continuity, reducing  $b_0$  and  $\sigma_0$  if necessary, the saddle point  $\delta_{f_0}$  is sectionally dissipative. We denote by  $W_{\text{loc}}^u(\alpha_{f_0})$  the component of  $W^u(\alpha_{f_0}) \cap \mathbb{D}^3$  which contains  $\alpha_{f_0}$ , and we use the same notation for stable manifolds and other periodic points. For sufficiently values of  $b$  and  $\sigma$ , both  $W_{\text{loc}}^u(\delta_{f_0})$  and  $W_{\text{loc}}^u(\alpha_{f_0})$  are graphs over  $z_1 \in \mathbb{D}$  and both  $W_{\text{loc}}^s(\delta_{f_0})$  and  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_0})$  are graphs over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$ . Then reducing  $b_0$  and  $\sigma_0$  if necessary,  $W_{\text{loc}}^u(\alpha_{f_0})$  and  $W_{\text{loc}}^s(\delta_{f_0})$  intersect and  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_0})$  and  $W_{\text{loc}}^u(\delta_{f_0})$  intersect.

Finally, since all the conditions of the proposition are open, these results stay true for any  $f$  in some neighborhood  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(c, b, \sigma)$  of  $f_0$  in  $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ . This concludes the proof of the proposition.  $\square$

### 5.3.2 Blender property

In this subsection, we show that the third coordinate of  $f \in \mathcal{F}$  has some kind of open-covering property. As we already said, since  $f^{qr} \in \mathcal{F}$  has a 2-branch horseshoe, then  $f^{2qr}$  has a 4-branch horseshoe. We are interested in the geometric properties of the third coordinate of  $f^{2qr}$ . Here, we use it to show that the 4-branch horseshoe associated to  $f^{2qr}$  is a blender. Remind that the maps  $h_1$  and  $h_2$  were defined in Notation 5.2.2.2.

**Definition 5.3.2.1.** For  $f \in \mathcal{F}$ , we denote  $f^{qr}[j]$  the restriction of  $f^{qr}$  on  $h_j^q(\mathbb{D}') \times \mathbb{D}' \times \mathbb{D}$ . Then, we define  $V_1 = f^{qr}[1](h_1^q(\mathbb{D}'') \times \mathbb{D}'' \times \mathbb{D}'') \cap \mathbb{D}^3$  and  $V_2 = f^{qr}[2](h_2^q(\mathbb{D}'') \times \mathbb{D}'' \times \mathbb{D}'') \cap \mathbb{D}^3$ . We define  $U_1 = f^{qr}[1](V_1) \cap V_1$ ,  $U_2 = f^{qr}[2](V_1) \cap V_2$ ,  $U_3 = f^{qr}[1](V_2) \cap V_1$  and  $U_4 = f^{qr}[2](V_2) \cap V_2$ . We define  $g_j = f_{|U_j}^{-2qr}$  for  $1 \leq j \leq 4$ .

**Lemma 5.3.2.2.** Reducing  $b_0$  and  $\sigma_0$  if necessary, for any  $f \in \mathcal{F}$  and  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , we have :  $\text{diam}(\text{pr}_2(U_j)) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(U_j, \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ .

*Proof.* Reducing  $b_0$  and  $\sigma_0$  if necessary, we have  $\text{pr}_2(V_1) \subset h_1^q(\mathbb{D}'')$  and  $\text{pr}_2(V_2) \subset h_2^q(\mathbb{D}'')$ . But we have  $\text{diam}((h_j^q(\mathbb{D}'')) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(h_j^q(\mathbb{D}''), \partial\mathbb{D})$  according to Proposition 5.2.2.3. Then we have :

$$\text{diam}(\text{pr}_2(U_j)) \leq \max(\text{diam}(\text{pr}_2(V_1), \text{diam}(\text{pr}_2(V_2))) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(U_j, \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D})$$

□

**Lemma 5.3.2.3.** *Reducing  $b_0$ ,  $\sigma_0$  and  $\mathcal{F}$  if necessary, we have :*

1.  $\forall z \in f^{-qr}(V_1), \text{pr}_3(f^{qr}(z)) \in \mathbb{D}(\mu^{qr}z_3 + \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}, 10^{-9})$
2.  $\forall z \in f^{-qr}(V_2), \text{pr}_3(f^{qr}(z)) \in \mathbb{D}(\mu^{qr}z_3 - \frac{9}{10} \cdot 10^{-4}, 10^{-9})$

*Proof.* For  $\sigma = b = 0$ , it is a simple consequence of Corollary 5.2.3.4. Then, by continuity we just have to take sufficiently small values of  $\sigma_0, b_0, \mathcal{F}$  to get the bound  $10^{-9}$ . □

**Notation 5.3.2.4.** *We denote  $c_1 = \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} \cdot (1+i), c_2 = \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} \cdot (-1+i), c_3 = \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} \cdot (1-i), c_4 = \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} \cdot (-1-i)$*

A double iteration of the previous proposition implies the following result :

**Corollary 5.3.2.5.** *For every  $z \in U_j$ , we have  $\text{pr}_3(g_j(z)) \in \mathbb{D}(\frac{1}{\mu^{2qr}}z_3 - c_j, 10^{-6})$ .*

We show an open covering property for the affine maps  $z \mapsto \frac{1}{\mu^{2qr}}z - c_j$ .

**Proposition 5.3.2.6.** *For every  $z \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ , there exists  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  with :*

$$\frac{1}{\mu^{2qr}}z - c_j \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$$

*Proof.* We check that the union of the images of  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$  under the four affine maps  $z \mapsto \mu^{2qr}z + c_j$  contains  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . It is enough to show that for every point  $z$  of the set  $\{z : |z| = \frac{1}{10} \text{ and } 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $z - c_1$  belongs to the disk  $\mathbb{D}(0, |\mu|^{2qr} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 - 10^{-4}))$ . Let us point out that  $|\mu|^{2qr} > 1 - 2 \cdot 10^{-4}$  (see Remark 5.2.3.5). We have  $|z - c_1|^2 = (x - \frac{9}{10} \cdot 10^{-4})^2 + (y - \frac{9}{10} \cdot 10^{-4})^2$ . Since  $x^2 + y^2 = (\frac{1}{10})^2$ , at least  $x$  or  $y$  is larger than  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10}$ . Then :

$$\begin{aligned} |z - c_1|^2 &< (\frac{1}{10})^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 10^{-4} + 2 \cdot (\frac{9}{10} \cdot 10^{-4})^2 \\ &< (\frac{1}{10})^2(1 - 10 \cdot 10^{-4}) < (\frac{1}{10})^2(1 - 4 \cdot 10^{-4})^2 < (|\mu|^{2qr} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 - 10^{-4}))^2 \end{aligned}$$

So for every point  $z$  of the set  $\{z : |z| = \frac{1}{10} \text{ and } 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$ , we have that  $z - c_1 \in \mathbb{D}(0, |\mu|^{2qr} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 - 10^{-4}))$ . We also have  $0 - c_1 \in \mathbb{D}(0, |\mu|^{2qr} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 - 10^{-4}))$ . Then by convexity, we have that the image of  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$  by the affine maps  $z \mapsto \mu^{2qr}z + c_j$  contains the first quadrant of  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . Then, this shows the result by symmetry. □

We are finally in position to prove the main result of this section.

**Proposition 5.3.2.7.** *Let  $\Gamma$  be any ss-curve intersecting  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . Then for every  $f \in \mathcal{F}$ ,  $\Gamma$  intersects the unstable manifold of a point of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$  : in other words,  $\mathcal{H}_f$  is a blender.*

*Proof.* Let  $\Gamma$  be any  $ss$ -curve intersecting  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  and  $f \in \mathcal{F}$ . We show that there exists  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  such that  $g_j(\Gamma)$  contains a  $ss$ -curve  $\Gamma^1$  intersecting  $\mathbb{D}^3$ . Let  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$  a point of  $\Gamma \cap (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(0, \frac{1}{10}))$ . According to the previous result, there exists  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  such that  $\frac{1}{\mu^{2qr}} Z_3 - c_j \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ . Since  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10}) \subset \text{pr}_3(U_j)$ , by continuity,  $\Gamma$  intersects  $U_j$ . The cone  $C^{ss}$  is  $g_j$ -invariant, then  $\Gamma^1 = g_j(\Gamma \cap U_j)$  is a  $ss$ -curve. Since  $\Gamma^1 = g_j(\Gamma \cap U_j)$  is a  $ss$ -curve, we have that  $\text{diam}(\text{pr}_3(\Gamma^1)) \leq 10^{-6}$ . Since  $|\text{pr}_3((g_j)(z)) - \frac{1}{\mu^{2qr}} z_3 + c_j| < 10^{-6}$ , we have that  $\text{pr}_3(\Gamma^1) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . Finally,  $\Gamma^1$  intersects  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . By iteration of this result, we can construct a sequence of  $ss$ -curve  $\Gamma^n \subset (g_{j_n} \circ \dots \circ g_{j_1})(\Gamma)$  intersecting  $\mathbb{D}^3$ . The set  $\bigcap_{n \geq 1} f^{n2qr}(\Gamma^n) \subset \Gamma$  is non empty as the intersection of a decreasing sequence of compact sets. But any point in  $\bigcap_{n \geq 1} f^{n2qr}(\Gamma^n)$  is a point of the unstable manifold of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$ . This ends the proof.  $\square$

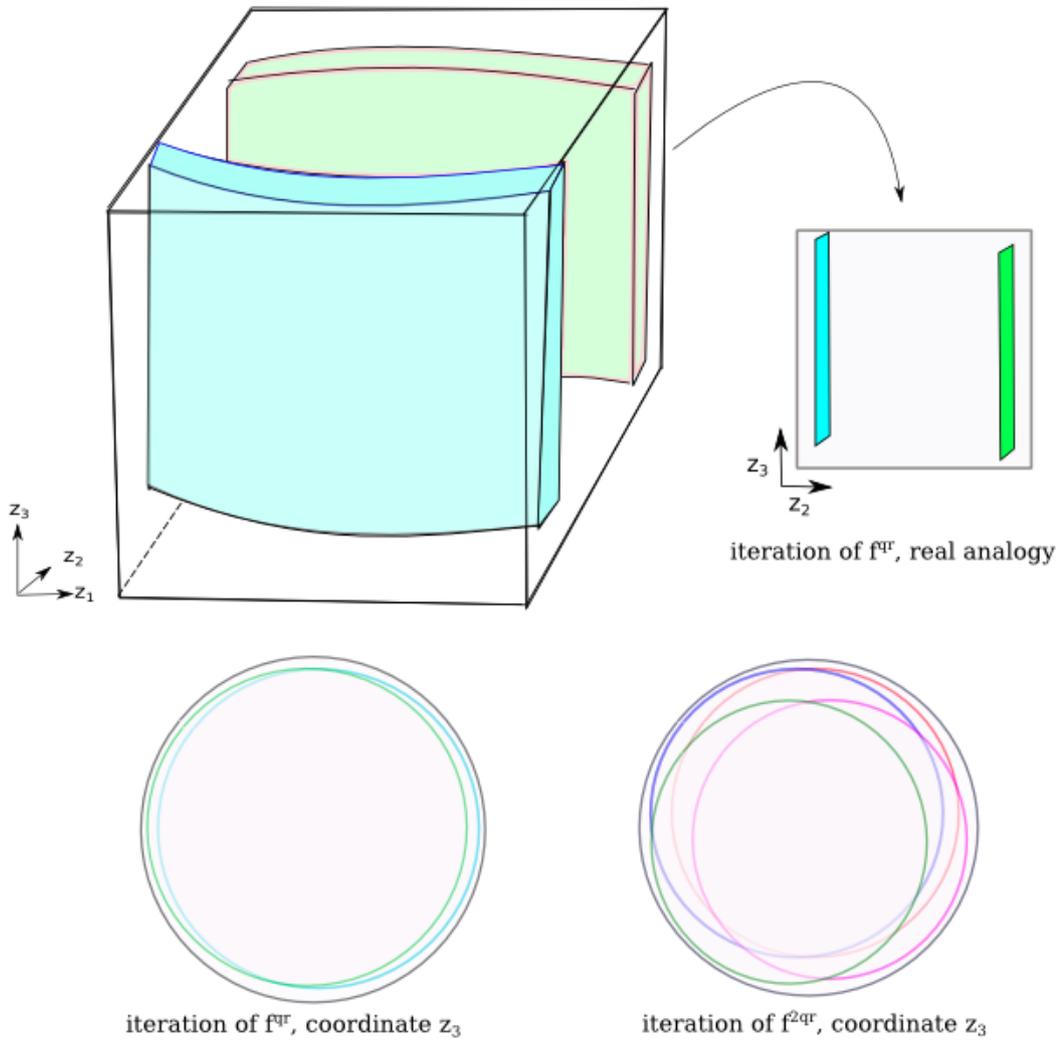


Figure 13 : Complex blender : the sets  $V_1$  and  $V_2$  are in green and blue

## 5.4 Mechanism to get persistent tangencies

In this section, we explain how the blender property obtained in the last section leads to persistent tangencies with certain "folded" surfaces.

### 5.4.1 Some definitions

**Definition 5.4.1.1.** *A submanifold (or an analytic set)  $W \subset \mathbb{D}^n$  is horizontal relatively to a decomposition  $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$  if  $W$  does not intersect  $\mathbb{D}^k \times \partial\mathbb{D}^{n-k}$ . We will also say it is horizontal relatively to the projection  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^k$ . If  $\dim(W) = k$ , then the natural projection on  $\mathbb{D}^k$  is a branched covering of degree  $d$ . We will say that  $W$  is of degree  $d$ . We similarly define vertical submanifolds in  $\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$  and their degree.*

The two following propositions are classical. For a proof, one can refer to [24]. One can also refer to [26].

**Proposition 5.4.1.2.** *Let  $W$  be a horizontal curve of degree  $d$  and  $W'$  be a vertical curve of degree  $d'$  in  $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ . Then  $W$  and  $W'$  intersect in  $dd'$  points with multiplicity.*

**Proposition 5.4.1.3.** *Let  $W$  be a horizontal curve (resp. surface) of degree  $d$  and  $W'$  be a vertical surface (resp. curve) of degree  $d'$  in  $\mathbb{D}^3 = \mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^2$  (resp.  $\mathbb{D}^3 = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1$ ). Then  $W$  and  $W'$  intersect in  $dd'$  points with multiplicity.*

**Remark 5.4.1.4.** In particular, in the two previous propositions, if all the intersections are transverse, there are exactly  $dd'$  distinct points of intersection. If it is not the case, there is at least one point of tangency.

We now introduce several definitions specific to our context.

**Notation 5.4.1.5.** *Let  $i, j$  be two distinct integers in  $\{1, 2, 3\}$ . We will denote by  $\pi_i$  the projection over the  $i^{\text{th}}$  coordinate and by  $(\pi_i, \pi_j)$  the projection over the  $i^{\text{th}}$  and the  $j^{\text{th}}$  coordinates.*

**Definition 5.4.1.6.** *Let  $i, j$  be two distinct integers in  $\{1, 2, 3\}$ . A  $(i, j)$ -surface  $S$  is a complex surface horizontal relatively to the projection  $(\pi_i, \pi_j)$ . A  $(2, 3)$ -surface will be called a  $s$ -surface.*

**Remark 5.4.1.7.** A  $(i, j)$ -surface  $S$  is a ramified covering of degree  $d$  over  $\mathbb{D}^2$ . In the rest of this article, we will only consider ramified coverings of degree 1 or 2.

In the next definition, it is convenient to fix once for all a numerical constant  $10^{-4}$ .

**Definition 5.4.1.8.** *Let  $i, j, k$  three integers such that  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . A  $(i, j)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$  is a holomorphic graph  $\{z_k = v(z_i, z_j)\}$  over  $\mathbb{D}^2$  such that there exists  $v^0$  with*

$$\forall (z_i, z_j) \in \mathbb{D}^2, |v^0 - v(z_i, z_j)| < 10^{-4}$$

**Definition 5.4.1.9.** *Let  $k \in \{2, 3\}$ . A  $k$ -folded curve is a holomorphic curve horizontal relatively to  $\pi_k$  which is a ramified 2-covering over  $z_k \in \mathbb{D}$  with exactly one point of ramification  $z_{k,ram}$ . We denote  $\text{fold}(\Gamma) = z_{k,ram}$  the fold of  $\Gamma$ .*

**Definition 5.4.1.10.** Let  $k \in \{2, 3\}$ . A  $k$ -folded  $(2, 3)$ -surface  $\mathcal{W}$  is a complex surface of degree 2 that is horizontal relatively to  $(\pi_2, \pi_3)$  and such that for every  $(1, k)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$ ,  $\Gamma = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$  is a  $k$ -folded curve. We denote :

$$\text{Fold}(\mathcal{W}) = \{\text{fold}(\Gamma) : \Gamma \text{ is a } k\text{-folded curve included in } \mathcal{W}\}$$

which is a subset of  $\mathbb{D}$ .  $\mathcal{W}$  is said to be concentrated if  $\text{diam}(\text{Fold}(\mathcal{W})) \leq 10^{-5}$ .

**Definition 5.4.1.11.** A  $u$ -curve (resp.  $ss$ -curve,  $cs$ -curve)  $\Gamma$  is a holomorphic graph over  $z_1$  (resp.  $z_2, z_3$ ) which has all its tangent vectors in  $C^u$  (resp.  $C^{ss}$ ,  $C^{cs}$ ) (recall that these cones were defined in Notation 5.3.1.1).

## 5.4.2 Preparatory lemmas

In this subsection we gather some simple technical results that will be useful in the following subsections.

**Lemma 5.4.2.1.** Let  $\Gamma = \gamma(\mathbb{D})$  be a  $k$ -folded curve (with  $k \in \{2, 3\}$ ) included inside  $(1, k)$ -quasi plane. Then there exists a disk  $\mathbb{D}_\Gamma \Subset \mathbb{D}$  such that : for every  $Z \in \mathbb{D}_\Gamma$  such that  $\text{pr}_k(\gamma(Z)) \in \mathbb{D}_\Gamma$  we have  $|\gamma'_1(Z)| < 10|\gamma'_k(Z)|$ . In particular,  $\Gamma$  is the union of two graphs upon the coordinate  $z_k \in \mathbb{D}_\Gamma$ . Moreover, if  $\text{diam}(\text{pr}_1(\Gamma)) \leq 10^{-8}$ , for every  $Z \in \mathbb{D}$  such that  $|\text{pr}_k(\gamma(Z)) - \text{fold}(\Gamma)| \geq 10^{-6}$  we have :  $|\gamma'_1(Z)| < |\gamma'_k(Z)|$ .

*Proof.* Let  $\mathbb{D}_\Gamma \Subset \mathbb{D}$  be a ball of radius  $\frac{1}{10}$  such that  $\text{fold}(\Gamma) \notin \mathbb{D}_\Gamma$ . We have that  $\Gamma$  is the union of two graphs over  $z_k \in \mathbb{D}_\Gamma$ . Let us denote  $z_1 = \xi(z_k)$  one of them. On  $\mathbb{D}_\Gamma$ , by the Cauchy inequality, we have  $|\xi'(z_k)| < 10 \cdot 1 = 10$ . This implies that  $|\gamma'_1| < 10|\gamma'_k|$  at  $Z$  and the result follows. The proof of the second inequality is the same, with this time  $|\zeta'(z_k)| < 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} < 1$ . □

Let us point out for convenience the following obvious consequences of Propositions 5.4.1.2 and 5.4.1.3.

**Lemma 5.4.2.2.** Let  $\Gamma$  be a graph over the  $k^{\text{th}}$ -coordinate (with  $k \in \{2, 3\}$ ) included in some  $(1, k)$ -quasi-plane, such that  $|\gamma'_1| < 10|\gamma'_k|$ . Let us denote  $k' = \{2, 3\} - k$ . Let  $\mathcal{V}$  be a  $(1, k')$ -quasi plane. Then  $\Gamma \cap \mathcal{V}$  is a singleton.

**Lemma 5.4.2.3.** Let  $\mathcal{V}$  be a  $(1, k)$ -quasi plane. Let  $\Gamma$  be a  $u$ -curve and  $\tilde{\Gamma}$  be a graph over  $z_k$  with  $|\tilde{\gamma}'_1| < 10|\tilde{\gamma}'_k|$ , both included in  $\mathcal{V}$ . Then  $\Gamma \cap \tilde{\Gamma}$  is a singleton.

**Lemma 5.4.2.4.** Let  $\mathcal{V}$  be a  $(1, k)$ -quasi plane foliated by  $u$ -curves  $\mathcal{V}$ . Let  $\Gamma$  be a  $k$ -folded curve included in  $\mathcal{V}$ . Then the map  $\mathcal{T} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  defined by  $\gamma(z) \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}(z)}$  is a 2-covering with exactly one point of ramification.

*Proof.* The map  $\mathcal{T}$  is holomorphic by the Implicit Function Theorem. Then it is a 2-covering with exactly one point of ramification by Proposition 5.4.1.2. □

**Proposition 5.4.2.5.** Let  $\mathcal{W}$  be a  $k$ -folded surface with  $k \in \{2, 3\}$ . Let  $\Gamma$  be a  $u$ -curve. Then  $\mathcal{W} \cap \Gamma$  has one or two points.

### 5.4.3 Main result

Here is the main result of this section : we show that any concentrated 3-folded (2,3)-surface with its fold in good position has a point of tangency with the unstable manifold of a point of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$ .

**Proposition 5.4.3.1.** *Let  $\mathcal{W}$  be a concentrated 3-folded (2,3)-surface such that  $\text{Fold}(\mathcal{W}) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  and  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W})) \leq 10^{-8}$ . Then there exists a point  $\kappa_f$  of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$  such that  $\mathcal{W}$  has a point of tangency with the unstable manifold of  $\kappa_f$ .*

We begin by a lemma showing that the image of a folded curve contains a folded curve. Remind that the sets  $U_j$  were defined in Definition 5.3.2.1.

**Lemma 5.4.3.2.** *Let  $\Gamma$  be a 3-folded curve included in a (1,3)-quasi plane  $\mathcal{V}$  and included in  $U_j$  for  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . We suppose  $\text{diam}(\text{pr}_1(\Gamma)) \leq 10^{-8}$  and that  $\mathcal{V}' = g_j(\mathcal{V}) \cap \mathbb{D}^3$  is a (1,3)-quasi plane. Then  $\Gamma' = g_j(\Gamma) \cap \mathbb{D}^3$  is a 3-folded curve and :*

$$\text{fold}(\Gamma') \in \mathbb{D}\left(\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j, 2 \cdot 10^{-6}\right)$$

*Proof.* According to Lemma 5.4.2.1, for every  $Z \in \mathbb{D}$  such that  $|\text{pr}_3(\gamma(Z)) - \text{fold}(\Gamma)| \geq 10^{-6}$  we have that  $|\gamma'_1(Z)| < |\gamma'_3(Z)|$  and  $\Gamma$  is locally the union of two graphs. We can foliate  $\mathcal{V}'$  by  $u$ -curves  $(\mathcal{V}'_t)_{t \in \mathbb{D}}$  where  $\mathcal{V}'_t = \mathcal{V}' \cap \{z_3 = t\}$ . For any  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{V}_t = f^{2qr}(\mathcal{V}'_t) \cap \mathbb{D}^3$  is a  $u$ -curve. For every  $t \in \mathbb{D}$  such that  $\mathcal{V}_t = f^{2qr}(\mathcal{V}'_t) \cap \mathbb{D}^3$  does not intersect  $(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(\text{fold}(\Gamma), 10^{-6}))$ ,  $\mathcal{V}_t$  intersects  $\Gamma$  in exactly two points by Lemma 5.4.2.3. It is clear there exists infinitely many  $t \in \mathbb{D}$  satisfying this property. This implies that  $\text{pr}_3(\Gamma')$  is a 2-covering. By the Riemann-Hürwitz formula,  $\text{pr}_3(\Gamma')$  is a 2-covering with only one point of ramification. Moreover this shows that  $\text{fold}(\Gamma') \in \text{pr}_3(g_j(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(\text{fold}(\Gamma), 10^{-6})))$ . According to Corollary 5.3.2.5, we have that  $\text{fold}(\Gamma') \in \mathbb{D}(\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j, 2 \cdot 10^{-6})$ . □

From now on, we prove lemmas that will show that the image under  $g_j$  of a 3-folded (2,3)-surface with its fold in  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  is concentrated and that it is possible to choose  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  so that the new fold is still in  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ .

**Lemma 5.4.3.3.** *Let  $\mathcal{V}^0$  and  $\mathcal{V}^1$  be two (1,3)-quasi planes included in  $U_j$  for some  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Then there exists some holomorphic family  $(\mathcal{V}_t)_{t \in \mathbb{D}(0, 10^6)}$  where  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}_1$ , and for every  $t \in \mathbb{D}(0, 10^6)$ ,  $\mathcal{V}_t$  is a (1,3)-quasi plane.*

*Proof.*  $\mathcal{V}^0$  is the graph of  $(z_1, z_3) \mapsto v_0(z_1, z_3)$  and  $\mathcal{V}^1$  is the graph of  $(z_1, z_3) \mapsto v_1(z_1, z_3)$ . Then let us denote for each  $t \in \mathbb{D}(0, 10^6)$  :  $v_t(z_1, z_3) = (1-t) \cdot v_0(z_1, z_3) + t \cdot v_1(z_1, z_3)$ . Let us call  $\mathcal{V}_t$  the graph of  $v_t$ . Then it is clear that  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_0$  and  $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}_1$ . According to Lemma 5.3.2.2, we have  $\text{diam}(\text{pr}_2(U_j)) \leq 10^{-11} \cdot \text{dist}(U_j, \mathbb{D} \times \partial \mathbb{D} \times \mathbb{D})$  and then  $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{D}^3$  for every  $t \in \mathbb{D}(0, 10^6)$ . Besides, for each  $t \in \mathbb{D}(0, 10^6)$ , for each  $(z_1, z_3) \in \mathbb{D}^2$ , for each  $(z'_1, z'_3) \in \mathbb{D}^2$ , we have :

$$|v_t(z_1, z_3) - v_t(z'_1, z'_3)| \leq |1-t| \cdot |v_0(z_1, z_3) - v_0(z'_1, z'_3)| + |t| \cdot |v_1(z_1, z_3) - v_1(z'_1, z'_3)|$$

Then  $|v_t(z_1, z_3) - v_t(z'_1, z'_3)| \leq 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-11} < 10^{-4}$  and  $\mathcal{V}_t$  is a (1,3)-quasi plane. □

**Lemma 5.4.3.4.** *Let  $\mathcal{V}^0$  and  $\mathcal{V}^1$  be two  $(1, 3)$ -quasi planes and a holomorphic family  $(\mathcal{V}_t)_{t \in \mathbb{D}(0, 10^6)}$  such that  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_0$ ,  $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_t$  is a  $(1, 3)$ -quasi plane for  $t \in \mathbb{D}(0, 10^6)$ . Let  $\mathcal{W}$  be a 3-folded  $(2, 3)$ -surface. Then  $|\text{fold}(\mathcal{V}^1 \cap \mathcal{W}) - \text{fold}(\mathcal{V}^0 \cap \mathcal{W})| < 10^{-6}$ .*

*Proof.* This is a consequence of the Cauchy inequality applied to the function  $t \mapsto \text{fold}(\mathcal{V}^t \cap \mathcal{W})$  defined on  $\mathbb{D}(0, 10^6)$ . It is holomorphic by the Implicit Function Theorem and its image has its diameter bounded by 1 because  $\text{Fold}(\mathcal{W}) \subset \mathbb{D}$ . Then by the Cauchy inequality its derivative is smaller than  $10^{-6}$ . Then we have that  $|\text{fold}(\mathcal{V}^1 \cap \mathcal{W}) - \text{fold}(\mathcal{V}^0 \cap \mathcal{W})| < 1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6}$ .  $\square$

The following proposition is important because it says that the image under  $g_j$  of a 3-folded  $(2, 3)$ -surface is a concentrated folded surface. We use it to prove Proposition 5.4.3.6 and we will also use it in Section 5.5.

**Proposition 5.4.3.5.** *Let  $1 \leq j \leq 4$ . Let  $\mathcal{W}$  be a 3-folded  $(2, 3)$  surface such that  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W})) \leq 10^{-8}$ . Then  $g_j(\mathcal{W} \cap U_j)$  is a concentrated 3-folded  $(2, 3)$  surface for any  $f \in \mathcal{F}$ .*

*Proof.* Let  $\mathcal{V}$  and  $\mathcal{V}'$  be two  $(1, 3)$ -quasi planes. Then the sets  $f^{2qr}(\mathcal{V} \cap g_j(\mathbb{D}^3))$  and  $f^{2qr}(\mathcal{V}' \cap g_j(\mathbb{D}^3))$  are  $(1, 3)$ -quasi planes included in  $U_j$ . The sets  $\Gamma = f^{2qr}(\mathcal{V} \cap g_j(\mathbb{D}^3)) \cap \mathcal{W}$  and  $\Gamma' = f^{2qr}(\mathcal{V}' \cap g_j(\mathbb{D}^3)) \cap \mathcal{W}$  are 3-folded curves. According to Lemmas 5.4.3.3 and 5.4.3.4,  $|\text{fold}(\Gamma') - \text{fold}(\Gamma)| < 10^{-6}$ . The result of Lemma 5.4.3.2 implies that we have  $\text{fold}(\mathcal{V} \cap g_j(\mathcal{W})) \in \mathbb{D}(\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j, 2 \cdot 10^{-6})$  and the analogous for  $\mathcal{V}'$ . This implies that  $\text{diam}(\text{Fold}(g_j(\mathcal{W}))) \leq 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$ . Then  $g_j(\mathcal{W})$  is a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface.  $\square$

**Corollary 5.4.3.6.** *Let  $\mathcal{W}$  be a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface such that such that  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W})) \leq 10^{-8}$  and  $\text{Fold}(\mathcal{W}) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . Then there exists  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  such that  $g_j(\mathcal{W} \cap U_j)$  is a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface (such that  $\text{diam}(\text{pr}_1(g_j(\mathcal{W} \cap U_j))) \leq 10^{-8}$ ) and  $\text{Fold}(g_j(\mathcal{W} \cap U_j)) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ .*

*Proof.* Let  $\Gamma$  be a 3-folded curve included in  $\mathcal{W}$ . According to Proposition 5.3.2.6, there exists  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  such that  $\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ . According to Lemma 5.4.3.2 we have  $\text{fold}(g_j(\Gamma)) \in \mathbb{D}(\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j, 2 \cdot 10^{-6})$ . According to Lemma 5.4.3.5,  $g_j(\mathcal{W})$  is concentrated. Then  $\text{Fold}(g_j(\mathcal{W} \cap U_j))$  is included in  $\mathbb{D}(\frac{1}{\mu^{2qr}} \text{fold}(\Gamma) - c_j, 2 \cdot 10^{-6} + 10^{-5}) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  for  $f \in \mathcal{F}$ . The proof is done.  $\square$

*Proof of Proposition 5.4.3.1.* By iteration of Corollary 5.4.3.6 there exists a sequence  $(j_n)_{n \geq 1}$  of digits in  $\{1, 2, 3, 4\}$  such that the sequence  $(\mathcal{W}_n)_{n \geq 0}$  defined by  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$  and  $\mathcal{W}_{n+1} = g_{j_n}(\mathcal{W}_n \cap U_{j_n})$  is a sequence of concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surfaces with  $\text{Fold}(\mathcal{W}_n) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10}) \subset \mathbb{D}$  and  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W}_n)) \leq 10^{-8}$  for every  $n \geq 1$ . We define for every  $n \geq 1$   $\tilde{\mathcal{W}}_n = f^n(\mathcal{W}_n) \subset \mathcal{W}_0$ . We have for every  $n \geq 1$  the inclusions  $\tilde{\mathcal{W}}_{n+1} \subset \tilde{\mathcal{W}}_n \subset \tilde{\mathcal{W}}_0$ . The sequence  $(\tilde{\mathcal{W}}_n)_{n \geq 1}$  is a decreasing sequence of compact sets.  $\tilde{\mathcal{W}}_\infty = \bigcap_{n \geq 1} \tilde{\mathcal{W}}_n$  is a connected compact set. Since  $\mathcal{W}_n$  is a 3-folded  $(2, 3)$ -surface for every  $n \geq 0$ , there exists  $z_n \in \mathcal{W}_n$  and a non zero vector  $v_n \in T_{z_n} \mathcal{W}_n$  such that  $v_n \in C^u$ . We denote for every  $n \geq 1$ ,  $\tilde{z}_n = f^n(z_n) \in \tilde{\mathcal{W}}_n \subset \tilde{\mathcal{W}}^0$  and  $\tilde{v}_n$  an unitary vector parallel to  $D_{z_n} f^n(v_n)$ . We have  $\tilde{v}_n \in T_{\tilde{z}_n} \tilde{\mathcal{W}}_n$ . Taking a subsequence if necessary we

can suppose  $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}_\infty \in \tilde{\mathcal{W}}_\infty$  and  $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}_\infty$  for some point  $\tilde{z}_\infty$  and some vector  $\tilde{v}_\infty$ . Clearly  $\tilde{z}_\infty \in \mathcal{W}$ . By construction the whole forward orbit of  $\tilde{\mathcal{W}}_\infty$  is in  $\mathbb{D}^3$ . Then, necessarily,  $\tilde{z}_\infty$  is included in some unstable manifold  $W^u(\kappa_f)$  for some point  $\kappa_f$  of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$ . By construction  $\tilde{v}_\infty \in T_{\tilde{z}_\infty} \mathcal{W}$  and  $\tilde{v}_\infty \in \bigcap_{n \geq 0} Df^n(C^u(z_n)) = T_{\tilde{z}_\infty} W_{\text{loc}}^u(\tilde{z}_\infty)$ . This proves that  $\mathcal{W}$  has a point of tangency with the unstable manifold of  $\kappa_f$ .  $\square$

## 5.5 Initial heteroclinic tangency

In this section, we show that :

1. for every sufficiently small values of  $b$  and  $\sigma$ , we can find  $c_1 = c_1(b, \sigma)$  such that  $f_1 = f_{c_1, b, \sigma}$  has a point of heteroclinic tangency  $\tau$  between  $W^s(\alpha_{f_1})$  and  $W^u(\phi_{f_1})$  (where  $\phi_{f_1}$  is a periodic point in  $\mathcal{H}_{f_1}$ )
2. we can take iterates of a neighborhood of  $\tau$  inside  $W^s(\alpha_{f_1})$  under  $f_1^{-1}$  in order to create a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface inside  $W^s(\alpha_{f_1})$

### 5.5.1 Initial tangency

Remind we defined the parameter disk  $\mathcal{C}$  and the integer  $m$  in Proposition 5.2.1.4.

**Proposition 5.5.1.1.** *Reducing  $\mathcal{C}$  if necessary, there exist  $0 < b_1 < b_0$ ,  $0 < \sigma_1 < \sigma_0$  and an integer  $s$  such that for every  $0 < |b| < b_1$  and  $0 \leq |\sigma| < \sigma_1$  :*

1. *for every  $u$ -curve  $\mathcal{U}$ ,  $f_0^{s+m}(\mathcal{U})$  is a degree 2 curve over the first coordinate*
2. *for every holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$ , there exists  $c_1 = c_1(b, \sigma)$  such that there exists a quadratic tangency  $\tau$  between  $W^s(\alpha_{f_1})$  and  $\mathcal{U}_{c_1}$  where  $f_1 = f_{c_1, b, \sigma}$  and  $\tau \in \mathcal{U}_{c_1}$ . Moreover every iterate of  $f_1^{s+m}(\tau)$  under  $f_1$  is in  $\mathbb{D}(\alpha_{c_0}, 10^{-10}|w_{m-1}|) \times \mathbb{C}^2$  (where the constant  $w_{m-1}$  was introduced in Definition 5.2.4.3) and the mapping  $(b, \sigma) \mapsto \tau$  is holomorphic.*

*Proof.* In the following, we are going to reduce several times the bounds  $\sigma_0$  and  $b_0$  into bounds  $\sigma_1$  and  $b_1$  to satisfy the two items. We begin by taking  $\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2}$  and  $b_1 = \frac{b_0}{2}$ . Let us take any  $u$ -curve  $\mathcal{U}$  or any holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$ . Since  $\mathbb{D}'$  intersects the Julia set of  $p_c$  for every  $c \in \mathcal{C}$ , it is possible to find an integer  $s$  and a holomorphic map  $\beta_{-s}$  defined on  $\mathcal{C}$  such that for every  $c \in \mathcal{C}$ , we have  $p_c^s(\beta_{-s}(c)) = 0$ . In particular, for the parameter  $c_0$ , we have  $p_{c_0}^{s+m}(\beta_{-s}(c_0)) = \alpha_{c_0}$  and the map defined on  $\mathcal{C}$  which sends  $c$  to  $p_c^{s+m}(\beta_{-s}(c)) - \alpha_{c_0}$  is an open set which contains 0 in its interior. Then reducing sufficiently the bounds  $0 \leq |\sigma| < \sigma_1$  and  $0 < |b| < b_1$  for  $\sigma$  and  $b$ , we have that for any  $c \in \mathcal{C}$ , there exists a neighborhood of the point of  $\mathcal{U}$  of first coordinate  $z_1 = \beta_{-s}(c_0)$  inside  $\mathcal{U}$  whose image under  $f_0^s$  is of the form  $\{(z_1, u^2(z_1), u^3(z_1)), z_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$ . Indeed,  $\beta_{-s}(c), p_c(\beta_{-s}(c)), \dots, p_c^{s-1}(\beta_{-s}(c))$  are not critical points of  $p_c$ . The image of the curve  $\{(z_1, u^2(z_1), u^3(z_1)), z_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$  under  $f_0$  is the curve  $\{(p_c(z_1) + bu^2(z_1) + \sigma u^3(z_1))(u^1(z_1) - \alpha_{c_0}), z_1, \lambda z_1 + \mu u^3(z_1) + \nu), z_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$ . Then it has a point of quadratic tangency with the foliation  $z_1 = C^{st}$  if  $b$  and  $\sigma$  are sufficiently small. Indeed, reducing  $b_1$  and  $\sigma_1$  if necessary, by continuity the derivative of the first coordinate  $p_c(z_1) + bu^2(z_1) + \sigma u^3(z_1)(u^1(z_1) - \alpha_{c_0})$  vanishes for some value  $\bar{z}_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)$ . We can iterate this curve  $(m-1)$  times

under  $f_0$ . Since  $p_c$  has no other critical point, this will still be a degree 2 curve under the first coordinate, reducing  $b_1$  and  $\sigma_1$  if necessary.

In the case of a holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$ , there exists a neighborhood of the point of  $\mathcal{U}_c$  of first coordinate  $z_1 = \beta_{-s}(c)$  inside  $\mathcal{U}_c$  which is sent under  $f_0^s$  on a  $u$ -curve  $\{(z_1, u_c^2(z_1), u_c^3(z_1)), z_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$  but by the Cauchy inequality  $(u_c^2)'$  and  $(u_c^3)'$  are uniformly (relatively to  $c$ ) bounded and the conclusion is the same. In particular, this proves the first item of the result.

We call  $\text{Tan}_{f_0}$  the first coordinate of the point of vertical tangency. The map defined on  $\mathcal{C}$  which sends  $c$  to  $p_c^{s+m}(\beta_{-s}(c)) - \alpha_c$  is an open set which contains 0 in its interior. Let us denote by  $2l$  the distance of 0 to the image of  $\partial\mathcal{C}$ . Reducing  $b_1$  and  $\sigma_1$  another time if necessary, by continuity this implies that  $\{\text{Tan}_{f_0} - \alpha_c, c \in \partial\mathcal{C}\}$  is a curve in the plane. We have that 0 is in a bounded connected component of its complement and at distance at least  $l$  from  $\{\text{Tan}_{f_0} - \alpha_c, c \in \partial\mathcal{C}\}$ .

**Notation 5.5.1.2.** Let  $\kappa_f \in \mathcal{H}_f$  for  $f \in \mathcal{F}$ . We denote by  $W_{loc}^s(\kappa_f)$  the component of  $W^s(\kappa_f) \cap \mathbb{D}^3$  which contains  $\kappa_f$  and by  $W_{loc}^u(\kappa_f)$  the component of  $W^u(\kappa_f) \cap \mathbb{D}^3$  which contains  $\kappa_f$ .

**Lemma 5.5.1.3.** Reducing  $b_1$  and  $\sigma_1$  if necessary,  $W_{loc}^s(\alpha_{f_0})$  is a graph over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$  included in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \min(10^{-11} \cdot |w_{m-1}|, 10^{-1} \cdot l)) \times \mathbb{D}^2$ .

*Proof.* For  $\sigma = 0$ ,  $W^s(\alpha_{f_0})$  is the product of  $W^s(\alpha_H)$  by the  $z_3$  axis where  $H$  is the Hénon map  $H : (z_1, z_2) \mapsto (p_c(z_1) + bz_2, z_1)$ . Moreover, for every  $\epsilon > 0$ , we can reduce  $b_1$  such that if  $|b| < b_1$ , then the cone  $C^{ss, \epsilon}$  centered at  $e_2$  of opening  $\frac{\epsilon}{2}$  is  $H^{-1}$ -invariant in  $\mathbb{D}^2$ . This implies that  $W_{loc}^s(\alpha_H)$  is a  $ss$ -curve included in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \epsilon) \times \mathbb{D}$  since all its tangent vectors lie in  $C^{ss, \epsilon}$ . Then for  $\sigma = 0$ , the skew-product structure implies that  $W_{loc}^s(\alpha_{f_0})$  is a  $(2, 3)$ -surface included in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \epsilon) \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$  which is the product of  $W_{loc}^s(\alpha_H)$  by the  $z_3$  axis. Then, by continuity, it is possible to reduce  $\sigma_1$  such that for every  $f_0$  with  $0 < |b| < b_1$  and  $0 \leq |\sigma| < \sigma_1$ ,  $W_{loc}^s(\alpha_{f_0})$  is a graph over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$  included in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \epsilon) \times \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ . We take  $\epsilon = \min(10^{-11} \cdot |w_{m-1}|, 10^{-1} \cdot l)$ .  $\square$

The set  $\{\text{Tan}_{f_0}, c \in \partial\mathcal{C}\}$  is such that  $\alpha_c$  is in a bounded connected component of its complement. In particular, there is a parameter  $\bar{c} \in \mathcal{C}$  such that  $\text{Tan}_{f_0}$  belongs to  $\mathbb{D}(\alpha_{\bar{c}}, \frac{l}{2})$  (for this parameter  $\bar{c}$ ,  $f_0^{s+m}(\mathcal{U}_{\bar{c}}) \cap (\mathbb{D}(\alpha_{\bar{c}}, \frac{l}{2}) \times \mathbb{D}^2)$  is not the union of two graphs upon  $z_1 \in \mathbb{D}(\alpha_{\bar{c}}, \frac{l}{2})$  and for  $c \in \partial\mathcal{C}$ ,  $f_0^{s+m}(\mathcal{U}_c)$  is the union of two graphs over  $z_1 \in \mathbb{D}(\alpha_c, \frac{l}{2})$ ). According to Lemma 5.5.1.3,  $W_{loc}^s(\alpha_{f_0})$  is a graph over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$  included in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \frac{l}{2}) \times \mathbb{D}^2$ . The following lemma is the analogous in dimension 3 of Proposition 8.1 of [28]. The proof is essentially the same and relies on the continuity of the intersection index of properly intersecting analytic sets of complementary dimensions.

**Lemma 5.5.1.4.** Let  $(\Gamma_c)_{c \in \mathcal{C}}$  be a holomorphic family of curves of degree 2 over the first coordinate. We assume that:

- (i) there exists a compact subset  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  such that if  $c \in \mathcal{C} - \mathcal{C}'$ ,  $\Gamma_c$  is the union of 2 graphs over  $z_1 \in \mathbb{D}(\alpha_c, \frac{l}{2})$
  - (ii) there exists  $\bar{c} \in \mathcal{C}$  such that  $\Gamma_{\bar{c}}$  is not the union of 2 graphs over  $z_1 \in \mathbb{D}(\alpha_{\bar{c}}, \frac{l}{2})$
- Then, if  $(\mathcal{V}_c)_{c \in \mathcal{C}}$  is any holomorphic family of graphs over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$  contained in  $\mathbb{D}(\alpha_c, \frac{l}{2}) \times \mathbb{D}^2$ , there exists  $c_1 \in \mathcal{C}$  such that  $\Gamma_{c_1}$  and  $\mathcal{V}_{c_1}$  admit a point of tangency.

We apply the previous lemma, taking the family  $(\Gamma_c)_{c \in \mathcal{C}} = (f_0^{s+m}(\mathcal{U}_c) \cap \mathbb{D}^3)_{c \in \mathcal{C}}$  as curves and the family of stable manifolds  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_0})$  as graphs over  $(z_2, z_3) \in \mathbb{D}^2$ . We can conclude that there is a parameter  $c_1$  such that there is a quadratic tangency  $f_1^{s+m}(\tau)$  between  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_1})$  and  $f_1^{s+m}(\mathcal{U}_{c_1})$  where  $\tau \in \mathcal{U}_{c_1}$  for  $f_1 = f_{c_1, b, \sigma}$ . Then  $\tau$  is a point of tangency between  $W^s(\alpha_{f_1})$  and  $\mathcal{U}_{c_1}$ . Since  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_1})$  is included in  $\mathbb{D}(\alpha_{c_1}, \min(10^{-10}|w_{m-1}|)) \times \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ , we have that all the iterates of  $f_1^{s+m}(\tau)$  under  $f_1$  are in  $\mathbb{D}(\alpha_{c_1}, 10^{-11} \cdot |w_{m-1}|) \times \mathbb{C}^2$ . Reducing  $\mathcal{C}$  if necessary, we have that  $\alpha_{c_1} \in \mathbb{D}(\alpha_{c_0}, 10^{-11}|w_{m-1}|)$  for every  $c \in \mathcal{C}$  and then all the iterates of  $f_1^{s+m}(\tau)$  under  $f_1$  are in  $\mathbb{D}(\alpha_{c_0}, 10^{-10}|w_{m-1}|) \times \mathbb{C}^2$ . The map  $(b, \sigma) \mapsto c_1$  is holomorphic according to the Implicit Function Theorem and then  $(b, \sigma) \mapsto \tau$  is holomorphic too. This shows item 2 and ends the proof of the proposition.  $\square$

In the next proposition, we show that the tangencies we created in the previous result are generically unfolded. Beware that in the next result, the map  $f_1$  is associated to a family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$  which can be distinct from the other family  $(\mathcal{U}'_f)_{f \in \mathcal{F}'}$ .

**Definition 5.5.1.5.** *Let  $(U_f)_{f \in \mathcal{F}}$  be a holomorphic family of  $u$ -curves and  $(S_f)_{f \in \mathcal{F}}$  be a holomorphic family of  $s$ -surfaces. We suppose that for  $f \in \mathcal{F}$ , there is a point of quadratic tangency between  $U_f$  and  $S_f$ . We say that this tangency is generically unfolded if there exists a one-dimensional holomorphic family  $(f^t)_{t \in \mathbb{D}}$  of polynomial automorphisms and a holomorphic family of local biholomorphisms  $(\Psi_t)_{t \in \mathbb{D}}$  with :*

1.  $f^0 = f$  and  $f^t \in \mathcal{F}$  for every  $t \in \mathbb{D}$
2.  $\Psi_t(S_{f^t})$  is a vertical plane  $\{z_1 = C^{st}\}$  where  $C^{st}$  does not depend on  $t \in \mathbb{D}$
3. if we denote by  $\tan_t$  the first coordinate of the point of tangency of  $\Psi_t(U_{f^t})$  with  $\{z_1 = C^{st}\}$  (there exists exactly one such point because the tangency is quadratic), then  $|\frac{d \tan_t}{dt}|$  is uniformly bounded from below by a strictly positive constant for  $t \in \mathbb{D}$

**Proposition 5.5.1.6.** *Reducing  $\mathcal{C}$ ,  $b_1$  and  $\sigma_1$  if necessary, for every  $0 < |b| < b_1$  and  $0 \leq |\sigma| < \sigma_1$ , for every holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$ , there exists a neighborhood  $\mathcal{F}' \Subset \mathcal{F}$  of the map  $f_1 = f_{c_1(b, \sigma), b, \sigma}$  defined in item 2 of Proposition 5.5.1.1 associated to  $(\mathcal{U}_c)_{c \in \mathcal{C}}$  such that : for every holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}'_f)_{f \in \mathcal{F}'}$ , if  $f \in \mathcal{F}'$  has a point of tangency  $\tau'$  between  $W^s(\alpha_f)$  and  $\mathcal{U}'_f$  such that  $f^{s+m}(\tau') \in W_{\text{loc}}^s(\alpha_f)$ , then the tangency  $\tau'$  is generically unfolded. In particular, the tangency  $\tau$  obtained in item 2 of Proposition 5.5.1.1 is generically unfolded.*

*Proof.* For every  $f \in \mathcal{F}$ , after a holomorphic change of coordinates  $\Psi_f$ , we have that  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_f)$  is the plane  $\{z_1 = \alpha_{c_0}\}$ . We first show the result for the map  $f_1$ . We work in the one-dimensional family  $(f_0)_{c \in \mathcal{C}} = (f_{c, b, \sigma})_{c \in \mathcal{C}}$  where  $b$  and  $\sigma$  are fixed and we take a holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}'_f)_{f \in \mathcal{F}'}$ . It is a consequence of Lemma 5.5.1.3 that  $\Psi_{f_0}$  tends to Id when  $b$  and  $\sigma$  tend to 0. When  $b$  and  $\sigma$  tend to 0, the curve  $\Psi_{f_0} \circ f_0^{s+m}(\mathcal{U}'_{f_0})$  tends to a curve of degree 2 over  $z_1$  of the form  $\{(p_c^{s+m}(z_1), z_1, v(z_1)) : z_1 \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$  where  $v$  is holomorphic. We call  $\tan_c$  the first coordinate of the point of vertical tangency of  $\Psi_{f_0} \circ f_0^{s+m}(\mathcal{U}'_{f_0})$ . We have  $p_{c_0}^m(0) = \alpha_{c_0}$ ,  $(p_{c_0}^m)'(0) = 0$ ,  $(p_{c_0}^m)''(0) \neq 0$  and at  $c = c_0$ , we have :  $\frac{d}{dc}(p_c^m(0)) \neq 0$  (see Proposition 5.2.1.4). Moreover,  $c_1$  tends to  $c_0$  when  $b$  and

$\sigma$  tend to 0. This implies that for sufficiently small fixed values of  $b$  and  $\sigma$ , the map  $c \mapsto \tan_c$  is such that  $\frac{d \tan_c}{dc} \neq 0$  for every  $c \in \mathcal{C}$  (reducing  $\mathcal{C}$  if necessary). Since the estimates on the derivatives of the  $u$ -curves  $(\mathcal{U}'_f)_{f \in \mathcal{F}}$  are uniform, we can reduce uniformly  $b_1$  and  $\sigma_1$  so that this inequality is true no matter the choice of  $(\mathcal{U}'_f)_{f \in \mathcal{F}}$ . Then, by continuity, there exists some new neighborhood  $\mathcal{F}' \Subset \mathcal{F}$  of  $f_1$  such that every  $f \in \mathcal{F}'$  belongs to a one-dimensional family  $(f^t)_{t \in \mathbb{D}}$  such that :  $f^0 = f$ ,  $f^t \in \mathcal{F}'$  and  $\frac{d \tan_c}{dt} \neq 0$  ( $t \in \mathbb{D}$ ). This implies in particular that if  $f \in \mathcal{F}'$  has a point of tangency  $\tau'$  between  $W^s(\alpha_f)$  and  $\mathcal{U}'_f$  such that  $f^{s+m}(\tau') \in W_{\text{loc}}^s(\alpha_f)$ , then the tangency  $f^{s+m}(\tau')$  is generically unfolded and then also  $\tau'$ . The proof is over.  $\square$

### 5.5.2 A transversality result

From now on, we are going to construct from this initial heteroclinic tangency a 3-folded  $(2, 3)$ -surface inside a stable manifold with its fold inside  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . In this subsection, we begin by proving that  $W^s(\alpha_{f_1})$  has some special geometry. We start by choosing a periodic point  $\phi_{f_1} \in \mathcal{H}_{f_1}$ . The main point is that its third coordinate is in  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ , which will be used later in the proof of Proposition 5.3.10.

**Lemma 5.5.2.1.** *For every  $c \in \mathcal{C}$ ,  $0 < |b| < b_1$ ,  $0 \leq |\sigma| < \sigma_1$ , there exists a periodic point  $\phi_{f_0}$  inside  $\mathcal{H}_{f_0}$  such that  $\text{pr}_3(\phi_{f_0}) \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ .*

*Proof.* According to Proposition 5.3.2.7, the  $ss$ -curve  $\{0\} \times \mathbb{D} \times \{0\}$  intersects the unstable set of the horseshoe  $\mathcal{H}_{f_0}$ . Then, there exists a  $u$ -curve  $\mathcal{L}$  which is a component of an unstable manifold of a point of  $\mathcal{H}_{f_0}$  which has a point of third coordinate 0. Since  $\mathcal{L}$  is a  $u$ -curve, it is included in  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ . It intersects  $W_{\text{loc}}^s(\alpha_{f_0})$  in a point of  $\mathcal{H}_{f_0}$  of third coordinate in  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ . Since  $\mathcal{H}_{f_0}$  is a horseshoe, its periodic points are dense and so there is a periodic point  $\phi_{f_0} \in \mathcal{H}_{f_0}$  with  $\text{pr}_3(\phi_{f_0}) \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ .  $\square$

**Notation 5.5.2.2.** *We fix a periodic point of the horseshoe  $\phi_{f_0}$  with  $\text{pr}_3(\phi_{f_0}) \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$ . Reducing  $\mathcal{F}$  if necessary, we have  $\text{pr}_3(\phi_f) \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$  for  $f \in \mathcal{F}$ .*

We now choose the parameter  $b$  in function of the parameter  $\sigma$  :

**Notation 5.5.2.3.** *In the following, we will take  $b = b(\sigma) = \sigma^2$ . For technical reasons, we reduce  $\sigma_1$  such that  $\sigma_1 < \sqrt{b_1}$ .*

In particular, we can use Proposition 5.5.1.1 : there exists a map  $\sigma \mapsto c_1(\sigma)$  such that there is a heteroclinic tangency  $\tau$  between the local unstable manifold  $\mathcal{U}_{f_1}$  of  $\phi_{f_1}$  and the stable manifold  $W^s(\alpha_{f_1})$  of  $\alpha_{f_1}$ . Moreover,  $\sigma \mapsto \tau$  is holomorphic. We have  $D(f_1^s)_\tau \cdot (0, 0, 1) = \mu^s(\xi_1(\sigma), \xi_2(\sigma), 1)$  with  $\xi_1(\sigma) = O(\sigma)$  and  $\xi_2(\sigma) = O(\sigma)$ . The maps  $\sigma \mapsto \text{pr}_1(f_1^s(\tau)) - \beta_0, \dots, \sigma \mapsto \text{pr}_1(f_1^{s+m-1}(\tau)) - \beta_{m-1}$  are holomorphic (remind that the constants  $\beta_i$  were defined in 5.2.4.1). Since they vanish when  $\sigma = 0$ , they are also  $O(\sigma)$ . The map  $\sigma \mapsto b(\sigma)$  is  $O(\sigma^2)$  because  $b(\sigma) = \sigma^2$ . Then the differentials at  $f_1^s(\tau), \dots, f_1^{s+m-1}(\tau)$  verify the conditions of Corollary 5.2.4.6 so from Corollary 5.2.4.6 we immediately get the following (remind that  $w_{m-1}$  was defined in Definition 5.2.4.3) :

**Lemma 5.5.2.4.** *We have :  $D(f_1^{s+m})_\tau \cdot (0, 0, 1) = (\zeta_1(\sigma), \zeta_2(\sigma), \zeta_3(\sigma))$  where  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  are holomorphic,  $\zeta_1(\sigma) = w_{m-1} \cdot \sigma + O(\sigma^2)$ ,  $\zeta_2(0) = 0 + O(\sigma)$  and  $\zeta_3(\sigma) = \mu^m + O(\sigma)$ .*

**Notation 5.5.2.5.** *We reduce  $\sigma_1$  so that  $|\zeta_2(\sigma)| < 1$ ,  $|\zeta_3(\sigma) - \mu^m| < \frac{1}{10}|\mu^m|$  and  $\sigma_1 < \frac{1}{10^{10}} \cdot |w_{m-1}|$ . From now on, we fix  $\sigma = \frac{\sigma_1}{2}$ ,  $b = b(\sigma) = \sigma^2$ ,  $c = c_1(\sigma)$ , the associated map  $f_1 = f_{c_1(\sigma), b(\sigma), \sigma}$ .*

**Lemma 5.5.2.6.** *For every vector  $v^0$  such that  $|v_1^0 - w_{m-1}\sigma| < \frac{1}{10}|w_{m-1}||\sigma|$ ,  $|v_2^0| < 1$  and  $|v_3^0 - \mu^m| < \frac{1}{10}|\mu^m|$ , at any point of  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1}) \cap \mathbb{D}^3$ ,  $v^0$  is transverse to  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1})$ .*

*Proof.* Let  $\psi^0$  be a point of  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1})$  and let us consider the sequence of points defined by  $\psi^n = f_1^n(\psi^0)$ . According to Lemma 5.5.1.3, for every  $n \geq 0$ ,  $\psi^n$  is in  $\mathbb{D}(\alpha_{c_0}, 10^{-10}|w_{m-1}|) \times \mathbb{C}^2$ . Then for every  $n \geq 1$ , the differential at  $\psi^n$  of  $f_1$  is of the form :

$$I_n = \begin{pmatrix} m_n & b(\sigma) & \sigma(z_1 - \alpha_{c_0}) \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

where  $b(\sigma) = \sigma^2$  and  $|m_n| > 2$  for every  $n \geq 1$ . Since  $\sigma_1 < \frac{1}{10^{10}}|w_{m-1}|$  we have  $|b| < 10^{-10}|w_{m-1}||\sigma|$ . We denote  $v^n = (I_n \cdot \dots \cdot I_1)(v^0)$  for every  $n \geq 1$ . Let us show that there exists an integer  $i$  such that  $|v_1^i| \geq |v_3^i|$ . Let us suppose this is false and we show by induction the following properties for  $n \geq 0$  :

1.  $1 \geq |v_1^{n+1}| > \frac{3}{2}|v_1^n| \geq \frac{1}{100}|w_{m-1}||\sigma|$
2.  $|v_2^n| \leq 1$
3.  $|v_3^{n+1}| \leq |v_3^n| \leq 1$

For  $n = 0$ , item 2 is satisfied,  $|v_3^n| \leq 1$  and  $|v_1^0| \geq \frac{1}{100}|w_{m-1}||\sigma|$ . Since  $v_1^1 = m_1 v_1^0 + b v_2^0 + \sigma(\xi_1^0 - \alpha_{c_0})$ ,  $|b v_2^0| < |b| < 10^{-10}|w_{m-1}||\sigma|$  and  $|\sigma(\psi_1^0 - \alpha_{c_0})| < 10^{-10}|w_{m-1}||\sigma|$ , we have  $|v_1^1| > \frac{3}{2}|v_1^0|$ . Moreover  $|v_1^n| < |v_3^n| < 1$  by hypothesis. Then item 1 is true. We have :  $|v_3^1| < |\lambda||v_1^0| + |\mu||v_3^0| < |\lambda||v_3^0| + |\mu||v_3^0| < |v_3^0|$ . Then item 3 is true and the induction procedure is true for  $n = 1$ .

Let us suppose it is true for some  $n$ . Then  $|v_2^{n+1}| = |v_2^n| \leq 1$ . Moreover  $|v_3^{n+1}| < |\lambda||v_1^n| + |\mu||v_3^n| < |\lambda||v_3^n| + |\mu||v_3^n| < |v_3^n|$ . We have  $v_1^{n+1} = m_n v_1^n + b v_2^n + \sigma(\psi_1^n - \alpha_{c_0})$ . Since  $|m_n| > 2$ ,  $|v_2^n| < |b| < 10^{-10}|w_{m-1}||\sigma|$  and  $|\sigma(\psi_1^n - \alpha_{c_0})| < 10^{-10}|w_{m-1}||\sigma|$ , we have  $|v_1^{n+1}| > \frac{3}{2}|v_1^n|$ . We still have  $|v_1^{n+1}| < |v_3^{n+1}| < 1$  by hypothesis. Then for every  $n$ , we have  $\frac{|v_1^{n+1}|}{|v_3^{n+1}|} \geq \frac{3}{2} \frac{|v_1^n|}{|v_3^n|}$ . This implies a contradiction : there must exist some integer  $i$  such that  $|v_1^i| \geq |v_3^i|$ . Then  $v^i$  is transverse to  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1})$  since  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1})$  is a  $(2, 3)$ -surface and this implies that  $v^0$  itself is transverse to  $W_{loc}^s(\alpha_{f_1})$ .  $\square$

We can now state the main result of this subsection :

**Proposition 5.5.2.7.** *The vector  $(0, 0, 1)$  is transverse to  $W^s(\alpha_{f_1})$  at  $\tau$ .*

*Proof.* From Lemmas 5.5.2.4 and 5.5.2.6, we know that the image under  $f_1^{s+m}$  of a neighborhood of  $\tau$  in  $W^s(\alpha_{f_1})$  is transverse to  $D(f_1^{s+m})_\tau \cdot (0, 0, 1)$ . Applying  $f_1^{-s-m}$ , this immediately implies the result.  $\square$

### 5.5.3 Orientation of the fold of $W^s(\alpha_f)$

In this subsection, we take iterates of the initial tangency  $\tau$  under  $f_1^{-1}$  in order to create a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface inside a stable manifold.

We have that  $W_{\text{loc}}^u(\phi_{f_1})$  is a graph  $\{(z_1, u^2(z_1), u^3(z_1)) : z_1 \in \mathbb{D}\}$  over  $z_1 \in \mathbb{D}$ . We consider the biholomorphism  $\Psi$  defined by  $\Psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2 - u^2(z_1), z_3 - u^3(z_1))$  which sends  $W_{\text{loc}}^u(\phi_{f_1})$  into the  $z_1$  axis. We denote  $\mathcal{W}_f$  the component of  $W^s(\alpha_f)$  which contains  $\tau$  for  $f \in \mathcal{F}'$ . We denote by  $\text{Tan}'$  the subset of  $\Psi(\mathcal{W}_f)$  where  $\Psi(\mathcal{W}_f)$  is tangent to some line  $\{z_2 = C^{st}, z_3 = C^{st}\}$  and by  $\text{Tan} = \Psi^{-1}(\text{Tan}')$ . When  $f = f_1$ , we denote them by  $\text{Tan}^0$  and  $(\text{Tan}')^0$ . We denote by  $e^u(\tau)$  a tangent vector of  $W_{\text{loc}}^u(\phi_{f_1})$  at  $\tau$ .

**Lemma 5.5.3.1.** *Tan<sup>0</sup> is a complex curve regular at  $\tau$  of tangent vector  $v_{\text{tan}}$  at  $\tau$  such that  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot (0, 0, 1)$  and  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot e^u(\tau)$ .*

*Proof.* We are working in the projectivized tangent bundle  $\mathbb{P}T\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  of  $\mathbb{C}^3$  which is of dimension 5. The lift  $\hat{\mathcal{W}}_{f_1}$  of  $\mathcal{W}_{f_1}$  to  $\mathbb{P}T\mathbb{C}^3$  is a complex submanifold of dimension 3. The lift of every complex curve  $C_{x,y} = \Psi^{-1}(\mathbb{D} \times \{(x, y)\})$  to  $\mathbb{P}T\mathbb{C}^3$  is a complex curve  $\hat{C}_{x,y}$ . Then  $\bigcup_{(x,y) \in \mathbb{D}^2} \hat{C}_{x,y}$  is a complex submanifold of dimension 3. Moreover, according to Proposition 5.5.1.1,  $\mathcal{W}_{f_1}$  has a point of quadratic tangency with  $C_{0,0}$  and then  $\hat{\mathcal{W}}_{f_1}$  is transverse to  $\bigcup_{(x,y) \in \mathbb{D}^2} \hat{C}_{x,y}$ . Then  $\hat{\text{Tan}}^0 = \hat{\mathcal{W}}_{f_1} \cap (\bigcup_{(x,y) \in \mathbb{D}^2} \hat{C}_{x,y})$  is a regular complex curve. Then its projection  $\text{Tan}^0$  is a regular complex curve of tangent vector  $v_{\text{tan}}$  at  $\tau$ . According to Lemma 5.5.2.7,  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot (0, 0, 1)$ . By construction,  $e^u(\tau)$  is a tangent vector of  $W_{\text{loc}}^u(\phi_{f_1})$  at  $\tau$  so  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot e^u(\tau)$ . The proof is done.  $\square$

**Notation 5.5.3.2.** *For every  $\epsilon > 0$ , we denote  $C^{v_{\text{tan}}, \epsilon} = \{u \in \mathbb{C}^3 : |\langle u, v_{\text{tan}} \rangle| < \epsilon \|u\|\}$ .*

**Corollary 5.5.3.3.** *For every  $\epsilon > 0$ , reducing the neighborhood  $\mathcal{F}'$  of  $f_1$  if necessary, there exists a real number  $\eta > 0$  such that : for every  $f \in \mathcal{F}'$ , for every holomorphic foliation  $(\mathcal{V}_{x,y})_{(x,y)}$  of a neighborhood of  $\tau$  such that every  $\mathcal{V}_{x,y}$  is  $\eta$ -close to  $W_{\text{loc}}^u(\phi_f)$ , the set  $\text{Tan}$  of points of  $\mathcal{W}_f$  where  $\mathcal{W}_f$  is tangent to some  $\mathcal{V}_{x,y}$  is a complex curve regular at  $\tau$  which has its tangent vectors in  $C^{v_{\text{tan}}, \epsilon}$ .*

*Proof.* The intersection  $\hat{\text{Tan}}^0 = \hat{\mathcal{W}}_{f_1} \cap (\bigcup_{(x,y) \in \mathbb{D}^2} \hat{C}_{x,y})$  persists as a regular complex curve since the intersection is transverse. Then it is still true for its projection  $\text{Tan}$ .  $\square$

The following result is a geometric technical lemma.

**Lemma 5.5.3.4.** *There exists constants  $\epsilon, \rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$  such that for every  $t > 0$ , we have the following property : for every regular complex curve  $\Gamma$  going through  $\tau + (\mathbb{D}(0, t\rho))^3$ , if  $\Gamma$  has all its tangent vectors in  $C^{v_{\text{tan}}, \epsilon}$ , then  $\Gamma$  is horizontal relatively to  $\pi_2$  in  $\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)$ .*

*Proof.* According to Lemma 5.5.3.1,  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot (0, 0, 1)$  and  $v_{\text{tan}} \notin \mathbb{C} \cdot e^u(\tau)$ .  $\square$

**Notation 5.5.3.5.** *We fix the value of  $\epsilon$  give by Lemma 5.5.3.4 and the associated value of  $\eta$  given by Lemma 5.5.3.3.*

**Lemma 5.5.3.6.** *There exists  $t_0 > 0$  such that for every  $t < t_0$ , there exists an integer  $j = j(t)$  such that :*

1.  $f_1^{-j} \left( \tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \partial\mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1) \right) \cap \mathbb{D}^3 = \emptyset$
2.  $f_1^{-j} \left( \tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1) \right) \cap \partial\mathbb{D}^3 \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$

Moreover,  $j(t)$  tends to  $\infty$  when  $t$  tends to 0. Reducing  $\mathcal{F}'$ , by continuity this remains true for any  $f \in \mathcal{F}'$  for a given  $t < t_0$ .

In other words,  $f^{-j}$  realizes a crossed mapping between  $\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \partial\mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)$  and  $\mathbb{D}^3$  (see [33] for this notion).

*Proof.* We foliate  $\mathbb{D}_{t, \rho_1, \rho_2, \rho_3} = \tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)$  by disks  $\mathcal{L}_{z_1, z_3}$  parallel to the  $z_2$  axis. Since  $C^{ss}$  is  $f_1^{-1}$ -invariant in  $\mathbb{D}^3$ , for every  $n \geq 0$ , the image of this tridisk under  $f_1^{-n}$  is foliated by the  $ss$ -curves  $f_1^{-n}(\mathcal{L}_{z_1, z_3}) \cap \mathbb{D}^3$ . We call the length of a  $ss$ -curve the radius of the maximal (for the inclusion) disk included in this  $ss$ -curve. For every  $n \geq 0$ , we denote by  $l_n$  the minimum of the lengths of all the  $s$ -curves  $f_1^{-n}(\mathcal{L}_{z_1, z_3})$ . For every  $n \geq 0$ , we denote by  $d_n$  the maximum of the diameters of the sets  $\mathcal{V} \cap f_1^{-n}(\mathbb{D}_{t, \rho_1, \rho_2, \rho_3})$  where  $\mathcal{V}$  varies in the set of  $(2, 3)$ -quasi planes. Since every vector in  $C^{ss}$  is dilated by a factor larger than  $C/(2|\sigma|^2)$  (see Proposition 5.2.2.3 for the definition of the constant  $C$ ) under  $f_1^{-1}$  with  $C > 10^{10}$ , we have that  $l_{n+1} \geq C/(2|\sigma|^2) \cdot l_n$ . Since  $C^{ss}$  is  $f_1^{-1}$ -invariant, for every  $(2, 3)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$ ,  $f_1(\mathcal{V}) \cap \mathbb{D}^3$  is a  $(1, 3)$ -quasi plane. Every tangent vector  $u$  to the  $(2, 3)$ -surface  $f_1(\mathcal{V}) \cap \mathbb{D}^3$  is of the form  $u = u^1 \cdot (1, 0, 0) + u^2 \cdot (0, 1, 0) + u^3 \cdot (0, 0, 1)$  with  $|u^2| \leq 10^{-4} \max(|u^1|, |u^3|)$ . Then the vector  $u$  is dilated under  $f_1^{-1}$  by no more than  $\max(1, 10^{-4}C/(|\sigma|^2), 2) \leq 10^{-4}C/(|\sigma|^2)$ . Then  $d_{n+1} \leq 10^{-4}C/(|\sigma|^2) \cdot d_n$ . This implies that if  $t$  is smaller than some value  $t_0$ , there exists an integer  $j = j(t)$  such that  $\frac{l_j}{d_j} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_2} \geq (\frac{10^4}{2})^j \cdot \frac{\rho_3}{\rho_2} \geq 10$ ,  $l_j \geq 10$  and  $d_j \leq \frac{1}{10}$ . Let us consider any  $(2, 3)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$  going through  $f_1^{-j}(\tau)$ . Then  $\mathcal{V}' = f_1^j(\mathcal{V}) \cap \mathbb{D}^3$  is a  $(2, 3)$ -quasi plane going through  $\tau$  which then intersects every disk  $\mathcal{L}_{z_1, z_3}$ . Then  $\mathcal{V}$  intersects all the  $ss$ -curves  $f_1^{-j}(\mathcal{L}_{z_1, z_3}) \cap \mathbb{D}^3$ . Since  $l_j \geq 10$ , this implies that for every  $(z_1, z_3)$ , we have  $\partial(f_1^{-j}(\mathcal{L}_{z_1, z_3})) \subset \mathbb{C}^3 - \mathbb{D}^3$ . Since  $d_j \leq \frac{1}{10}$ , this implies that  $f_1^{-j}(\mathbb{D}_{t, \rho_1, \rho_2, \rho_3}) \cap \partial\mathbb{D}^3 \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ . When  $t$  tends to 0, the lengths of the disks  $\mathcal{L}_{z_1, z_3}$  tends to 0 and then  $j = j(t)$  tends to  $\infty$ . Reducing  $\mathcal{F}'$ , by continuity this stays true for  $f \in \mathcal{F}'$  for a given  $t$ . The proof is done.  $\square$

**Lemma 5.5.3.7.** *Let  $\mathcal{V}$  be a  $(1, 3)$ -quasi plane foliated by  $u$ -curves  $(\mathcal{V}^x)_{x \in \mathbb{D}}$ . Let  $\vartheta$  be a point such that  $\vartheta \notin \mathcal{V}$  and let us take a vector  $u \in C^u$ . Then there exists a holomorphic foliation of a neighborhood of  $\vartheta$  by graphs  $\mathcal{V}_y$  over  $(z_1, z_3) \in \mathbb{D}^2$  such that each  $\mathcal{V}_y$  is foliated by graphs  $(\mathcal{V}_{x, y})_{(x, y) \in \mathbb{D}^2}$  over  $z_1 \in \mathbb{D}$  of slope bounded by  $10^{-1}$  with :*

1. for every  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{V}^x = \mathcal{V}_{x, 0}$
2. the leaf going through  $\vartheta$  has  $u$  as tangent vector

*Proof.* We consider two consecutive biholomorphisms. The first one  $\varphi_1$  sends the  $(1, 3)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$  to the plane  $\{z_2 = 0\}$  and each curve  $\mathcal{V}^x$  to the line  $\{z_2 = 0, z_3 = x\}$ . For a given  $z \in \mathbb{D}^3$ , we denote by  $\text{pr}(z)$  the projection (parallel to  $(0, 1, 0)$ ) of  $z$  on  $\mathcal{V}$ . We denote by  $(\varphi_1)_2(z)$  the complex number such that

$z - \text{pr}(z) = (\varphi_1)_2(z) \cdot (0, 1, 0)$ . We denote by  $(\varphi_1)_3(z)$  the complex number  $x$  such that  $\text{pr}(z) \in \mathcal{V}^x$ . We denote  $\varphi_1(z) = (z_1, (\varphi_1)_2(z), (\varphi_1)_3(z))$ . The restriction of  $(\varphi_1)_2$  to a line  $\{z_2 = C^{st}, z_3 = C^{st}\}$  is a holomorphic map defined on  $\mathbb{D}$  of image in a disk of radius  $10^{-4}$  since  $\mathcal{V}$  is a  $(1, 3)$ -quasi plane. By the Cauchy inequality, this implies that  $\|\frac{\partial(\varphi_1)_2}{\partial z_1}\| < 10^{-4}$ . The restriction of  $(\varphi_1)_3$  to a line  $\{z_2 = C^{st}, z_3 = C^{st}\}$  is a holomorphic map defined on  $\mathbb{D}$  of image in a disk of radius  $10^{-4}$  since every  $\mathcal{V}^x$  is a  $u$ -curve. Then :  $\|\frac{\partial(\varphi_1)_3}{\partial z_1}\| < 10^{-4}$ . Finally,  $\varphi_1$  is a holomorphic map from  $\mathbb{D}^3$  to  $\mathbb{D}^3$ . Then :  $\|D\varphi_1\| < 1$ .

We denote  $\varphi_1(\vartheta) = (\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \tilde{\vartheta}_3)$  (with  $\tilde{\vartheta}_2 \neq 0$ ) and  $D_{\varphi_1}u = (1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ . The previous estimates imply that  $|\epsilon_2| < 10^{-4}$  and  $|\epsilon_3| < 10^{-4}$ . We take a second biholomorphism :

$$\varphi_2 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, z_2 - \epsilon_2(z_1 - \tilde{\vartheta}_1)\frac{z_2}{\tilde{\vartheta}_2}, z_3 - \epsilon_3(z_1 - \tilde{\vartheta}_1)\frac{z_2}{\tilde{\vartheta}_2})$$

It is easy to show it is a biholomorphism on  $\mathbb{D} \times \mathbb{D}(0, 10\tilde{\vartheta}_2) \times \mathbb{D}$  since  $|\epsilon_2| < 10^{-4}$  and  $|\epsilon_3| < 10^{-4}$ . We have :  $D\varphi_2(D\varphi_1(u)) = (1, 0, 0)$ . We denote  $\mathcal{V}_{x,y} = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1}(\{z_3 = x, z_2 = y\})$ . Then  $(\mathcal{V}_{x,y})_{x,y}$  is a holomorphic foliation of a neighborhood of  $\vartheta$  such that for every  $x \in \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{V}^x = \mathcal{V}_{x,0}$  and the leaf going through  $\vartheta$  has  $u$  as tangent vector. We have  $\|\frac{\partial(\varphi_2)_2}{\partial z_1}\| < 10\epsilon_2$  and  $\|\frac{\partial(\varphi_2)_3}{\partial z_1}\| < 10\epsilon_3$  on  $z_1 \in \mathbb{D}, z_2 \in \mathbb{D}(0, 10\tilde{\vartheta}_2), z_3 \in \mathbb{D}$ , then we have that  $\|D\varphi_2 \cdot (1, 0, 0) - (1, 0, 0)\| < 2 \cdot 10^{-3}$ . We have  $\|\frac{\partial(\varphi_1)_2}{\partial z_1}\| < 10^{-4}$ ,  $\|\frac{\partial(\varphi_1)_3}{\partial z_1}\| < 10^{-4}$  and  $\|D\varphi_1\| < 10$ . Then  $\|D(\varphi_2 \circ \varphi_1) \cdot (1, 0, 0) - (1, 0, 0)\| < 10^{-1}$  on  $\mathbb{D} \times \mathbb{D}(0, 10\tilde{\vartheta}_2) \times \mathbb{D}$ . This implies that every  $(\mathcal{V}_{x,y})_{(x,y)}$  where  $x \in \mathbb{D}, y \in \mathbb{D}(0, 10\tilde{\vartheta}_2)$  is a graph over  $z_1 \in \mathbb{D}$  of slope bounded by  $10^{-1}$ . Every  $\mathcal{V}_y = \bigcup_{x \in \mathbb{D}} \mathcal{V}_{x,y}$  is a graph over  $(z_1, z_3) \in \mathbb{D}^2$ . The proof is done.  $\square$

The following is a simple consequence of the inclination Lemma.

**Lemma 5.5.3.8.** *There exists an integer  $k$  such that for every graph  $\mathcal{L}$  of slope bounded by  $10^{-1}$  over  $z_1 \in \mathbb{D}$ , for every  $f \in \mathcal{F}'$ ,  $f^k(\mathcal{L}) \cap \mathbb{D}^3$  has a component which is a graph over  $z_1 \in \mathbb{D}$  which is  $\eta$ -close to  $W_{loc}^u(\phi_f)$ .*

**Notation 5.5.3.9.** *We fix this integer  $k$  and we fix some  $t > 0$  such that  $j(t) = k$  (see Lemma 5.5.3.6). We reduce  $\mathcal{F}'$  so that for every  $f \in \mathcal{F}'$  : there is a point  $\vartheta \in W^s(\alpha_f)$  such that  $f^k(\vartheta) \in (\tau + (\mathbb{D}(0, t\rho))^3)$  and  $W^s(\alpha_f)$  has a tangent vector  $u \in C^u$  at  $\vartheta$  (it is possible by continuity since it is the case for  $f_1$ ).*

**Proposition 5.5.3.10.** *For every  $f \in \mathcal{F}'$ ,  $W^s(\alpha_f)$  contains a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface  $\mathcal{W}_f''$  such that  $\text{Fold}(\mathcal{W}_f'') \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  and  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W}_f'')) < 10^{-8}$ .*

*Proof.* Let  $f \in \mathcal{F}'$ . Let  $\mathcal{V}$  be a  $(1, 3)$ -quasi plane foliated by the  $u$ -curves  $\mathcal{V}^x = \mathcal{V} \cap \{z_3 = x\}$ . We take  $\vartheta \in W^s(\alpha_f)$  such that  $f^k(\vartheta) \in (\tau + (\mathbb{D}(0, t\rho))^3)$  such that  $W^s(\alpha_f)$  has a tangent vector  $u \in C^u$  at  $\vartheta$ . To find such a point, we just have to remark that  $W^s(\alpha_f)$  is not included in  $\mathcal{V}$ . In particular, if  $\tau \notin \mathcal{V}$ , we choose  $\vartheta = \tau$ .

According to Lemma 5.5.3.7 it is possible to find some holomorphic foliation

of a neighborhood of  $\vartheta$  by graphs  $\mathcal{V}_y$  over  $(z_1, z_3)$  foliated by graphs  $\mathcal{V}_{x,y}$  over  $z_1$  of slope bounded by  $10^{-1}$  such that  $\mathcal{V}^x = \mathcal{V}_{x,0}$  and the leaf going through  $\vartheta$  is tangent to  $u$  and then to  $W^s(\alpha_f)$ . Since  $\vartheta = \tau$  if  $\tau \notin \mathcal{V}$ , it is also a holomorphic foliation of a neighborhood of  $\tau$  in both cases. We apply  $f^k$  to all these curves  $\mathcal{V}_{x,y}$ . According to Lemma 5.5.3.8, the sets  $f^k(\mathcal{V}_{x,y})$  have components which are graphs over  $z_1 \in \mathbb{D}$   $\eta$ -close to  $W_{\text{loc}}^u(\phi_f)$ . Then according to Lemma 5.5.3.3, the set Tan of points of  $f^k(\mathcal{V}_{x,y})$  where  $f^k(\mathcal{V}_{x,y})$  is tangent to  $W^s(\alpha_f)$  is a regular complex curve which has all its tangent vectors in  $C^{u_{\text{tan}}, \epsilon}$  and goes through the point  $f^k(\vartheta) \in \tau + (\mathbb{D}(0, t\rho))^3$ . According to Lemma 5.5.3.4, Tan can intersect  $\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)$  only in  $\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \partial\mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)$ .

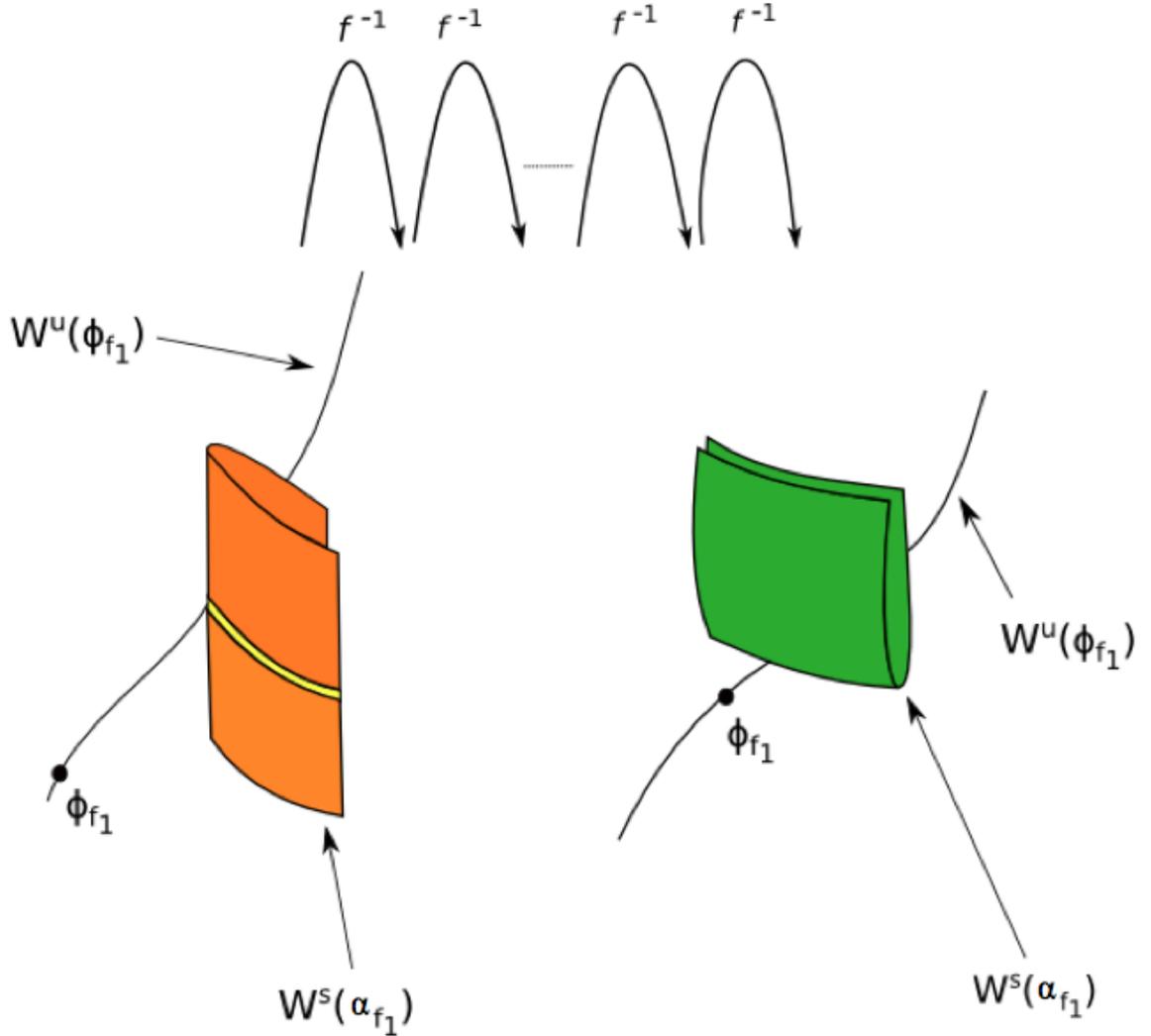


Figure 14 : Getting a tangency, the yellow set is sent to the green one

According to Lemma 5.5.3.6, we have both :

$$f^{-k}\left(\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \partial\mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)\right) \subset \mathbb{C}^3 - \mathbb{D}^3$$

and :

$$f^{-k}\left(\tau + \mathbb{D}(0, t\rho_1)e^u(\tau) + \mathbb{D}(0, t\rho_2)(0, 1, 0) + \mathbb{D}(0, t\rho_3)(0, 0, 1)\right) \cap \partial\mathbb{D}^3 \Subset \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \times \mathbb{D}$$

Then  $f^{-k}(\text{Tan})$  intersects every surface  $\mathcal{V}_y$  but in exactly one point which is not in  $\mathcal{V}_y \cap ((\partial\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}))$ . We denote by  $\mathcal{W}'_f$  the continuation of the component of  $W^s(\alpha_f)$  containing  $f_1^{-k}(\tau)$  for  $f \in \mathcal{F}'$ . Then  $\mathcal{W}'_f$  is tangent to at least one but not infinitely many  $u$ -curves  $\mathcal{V}^x$ . By the Riemann-Hürwitz formula,  $\mathcal{W}'_f$  is tangent to exactly one  $\mathcal{V}^x = \mathcal{V} \cap \{z_3 = x\}$ . This implies that  $\text{pr}_3$  restricted on  $\mathcal{W}'_f \cap \mathcal{V}$  is a two-covering with exactly one point of ramification. Since this is true for any  $(1, 3)$ -quasi plane  $\mathcal{V}$ , by definition,  $\mathcal{W}'_f$  is a 3-folded  $(2, 3)$ -surface for every  $f \in \mathcal{F}'$ . Then according to Proposition 5.4.3.5, we can iterate under  $f^{-1}$  to get a component  $\mathcal{W}''_f$  of  $W^s(\alpha_f)$  which is a concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface. Since  $\text{pr}_3(\phi_f) \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{10} - 10^{-4})$  we have that  $\text{Fold}(\mathcal{W}''_f) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ . Since the first direction is contracted under  $f$ , iterating, we can have the additional property that  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W}''_f)) < 10^{-8}$ . □

## 5.6 Proof of the main results

*Proof of Theorem B and Corollaries 1 and 2.* According to Proposition 5.5.3.10, for every  $f \in \mathcal{F}'$ ,  $W^s(\alpha_f)$  contains some concentrated 3-folded  $(2, 3)$ -surface  $\mathcal{W}^0$  with  $\text{Fold}(\mathcal{W}^0) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$  and moreover  $\text{diam}(\text{pr}_1(\mathcal{W}^0)) < 10^{-8}$ . This implies persistent heteroclinic tangencies. Indeed, by Proposition 5.4.3.1 there exists a point  $\kappa_f$  of the horseshoe  $\mathcal{H}_f$  such that there is a point of quadratic tangency  $\tau'$  between  $W^u(\kappa_f)$  and  $\mathcal{W}^0 \subset W^s(\alpha_f)$ . The proof of Theorem B is complete.

We now prove Corollary 1. We call  $\mathcal{U}'_f$  the component of  $W^u(\kappa_f) \cap \mathbb{D}^3$  containing the point of tangency  $\tau'$  and we consider the family  $(\mathcal{U}'_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  of holomorphic  $u$ -curves given by the continuation of  $\mathcal{U}'_f$ . According to Proposition 5.5.1.6, the tangency  $\tau'$  is generically unfolded. We apply a standard argument to obtain homoclinic tangencies. Let us take any neighborhood  $\mathcal{F}''$  of  $f$ . Since the tangency  $\tau'$  is generically unfolded, we can rely on the following well-know lemma :

**Lemma 5.6.0.11.** *There exists  $\epsilon'' > 0$  such that for every holomorphic family  $(\mathcal{U}'_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  of  $u$ -curves  $\epsilon''$ -close to  $(\mathcal{U}'_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  and every holomorphic family  $(\mathcal{W}''_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  of complex surfaces  $\epsilon''$ -close to  $(\mathcal{W}^0)_{f' \in \mathcal{F}'}$ , there exists a point of quadratic tangency between  $\mathcal{U}''_{f''}$  and  $\mathcal{W}''_{f''}$ , where  $f'' \in \mathcal{F}''$ .*

We claim that there exists a holomorphic family of  $u$ -curves  $(\mathcal{U}''_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$   $\epsilon''$ -close to  $(\mathcal{U}'_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  such that for every  $f' \in \mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{U}''_{f'}$  is a component of  $W^u(\delta_{f'}) \cap \mathbb{D}^3$  and a holomorphic family of complex surfaces  $(\mathcal{W}''_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$   $\epsilon''$ -close to  $((\mathcal{W}^0)_{f'})_{f' \in \mathcal{F}'}$  such that for every  $f' \in \mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{W}''_{f'}$  is a component of  $W^s(\delta_{f'})$ . We prove this fact for the case of  $u$ -curves, the proof is the same for complex surfaces. According to Proposition 5.3.1.6,  $\alpha_{f'}$ , and then  $\kappa_{f'}$ , is in the

homoclinic class of  $\delta_{f'}$ . This implies that there exists a transversal intersection between  $W^s(\kappa_{f'})$  and  $W^u(\delta_{f'})$  for every  $f' \in \mathcal{F}'$ . For a given  $f' \in \mathcal{F}'$ , by the inclination lemma, there exists an integer  $n_{f'}$  such that for every  $n \geq n_{f'}$ ,  $(f')^{n_{f'}}(W^u(\delta_{f'}))$  contains a  $u$ -curve  $\epsilon''$ -close to  $\mathcal{U}'_{f'}$ . By continuity,  $n_{f'}$  can be taken locally constant. By compactness, it is possible to take the maximal value  $n$  of  $n_{f'}$  on a finite open covering of  $\mathcal{F}' \Subset \mathcal{F}$ . Then we have that for every  $f' \in \mathcal{F}'$ , there is a  $u$ -curve  $\mathcal{U}''_{f'}$ ,  $\epsilon''$ -close to  $\mathcal{U}'_{f'}$ , which is a component of  $W^u(\delta_{f'})$  (inside  $(f')^n(W^u(\delta_{f'}))$ ). The proof of Corollary 1 is complete.

We now prove Corollary 2. This shows that there exists  $f'' \in \mathcal{F}''$  such that  $f''$  has a point of homoclinic tangency between  $W^s(\delta_{f''})$  and  $W^u(\delta_{f''})$ . In particular maps with homoclinic tangencies are dense in  $\mathcal{F}'$ . The point  $\delta_f$  has the property of being sectionally dissipative. Then, the Proposition in subsection 5.7 which gives the creation of sinks from homoclinic tangencies (the proof is given in subsection 5.7 for the convenience of the reader) with a classical Baire category argument already used in [18] allows us to conclude to the existence of a residual set of  $\text{Aut}_2(\mathbb{C}^3)$  of automorphisms displaying infinitely many sinks. The proof is complete.  $\square$

## 5.7 From homoclinic tangencies to sinks

To show Theorem B, we need the following result. It is known since the work of Newhouse how to get a sink from a homoclinic tangency. The adaptation to the case of  $\mathbb{C}^2$  was obtained by Gavosto in [31]. Here we adapt her proof to the case of  $\mathbb{C}^3$ . Remind that a generically unfolded tangency is a tangency which is unfolded with a positive speed.

**Proposition 5.7.1.** *Let  $(F_t)_{t \in \mathbb{D}}$  be a family of polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^3$ . We suppose that for the parameter  $t = 0$ , there is a sectionally dissipative periodic point  $P_0$  and a generically unfolded homoclinic quadratic tangency  $Q \in W^s(P_0) \cap W^u(P_0)$  between  $W^s(P_0)$  and  $W^u(P_0)$ . We also suppose that the three eigenvalues  $\lambda_0^{ss}$ ,  $\lambda_0^{cs}$  and  $\lambda_0^u$  at  $P_0$  satisfy  $|\lambda_0^{ss}| < |\lambda_0^{cs}| < 1 < |\lambda_0^u|$  (and  $|\lambda_0^{cs}| \cdot |\lambda_0^u| < 1$  by sectional dissipativity). Then for every neighborhood  $\mathcal{Q}$  of  $Q$  and every neighborhood  $\mathcal{T}$  of 0, there exists  $t \in \mathcal{T}$  such that  $F_t$  admits an attracting periodic point in  $\mathcal{Q}$ .*

*Proof.* Step 1 : Construction of cone fields

In the following, iterating if necessary, we will suppose that  $P_0$  is a fixed point of  $F_0$ . We fix a constant  $\eta > 0$  such that we have  $(|\lambda_0^{cs}| + \eta)(|\lambda_0^u| + \eta) < 1$  (the periodic point  $P_0$  is sectionally dissipative) and  $|\lambda_0^{ss}| + \eta < |\lambda_0^{cs}| - \eta < |\lambda_0^u| + \eta < 1$ . We can fix a neighborhood  $\mathcal{P}$  of  $P_0$ , a neighborhood  $\mathcal{T}_0$  of 0, cones  $C^u$ ,  $C^{ss}$  and  $C^{cs}$  centered at the three eigenvectors of  $DF_0(P_0)$  and an integer  $N_0$  with the following properties : for every  $n \geq N_0$ ,  $t \in \mathcal{T}_0$ , for every matrix  $M = M_n \cdot \dots \cdot M_1$  where  $M_i$  is the differential of  $F_t$  at a point in  $\mathcal{P}$ , we have :

1.  $C^u$  is invariant under  $M$  and there is exactly one eigenvector (up to multiplication) of  $M$  in  $C^u$  of eigenvalue  $(|\lambda_0^u| - \eta)^n < |\lambda_1| < (|\lambda_0^u| + \eta)^n$
2.  $C^{ss}$  is invariant under  $M^{-1}$  and there is exactly one eigenvector (up to multiplication) of  $M$  in  $C^{ss}$  of eigenvalue  $(|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n < |\lambda_2| < (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^n$
3. for every vector  $v$  which is not in  $C^u \cup C^{ss} \cup C^{cs}$ , we have :  $M \cdot v \in C^u$  or  $M^{-1} \cdot v \in C^{ss}$

$$4. (|\lambda_0^u| - \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| - \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n < |\det(M)| < (|\lambda_0^u| + \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| + \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^n$$

Reducing  $\eta$  and increasing  $N_0$  if necessary, we have for  $n \geq N_0$  :

$$\begin{aligned} (|\lambda_0^u| + \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^{2n} &< (|\lambda_0^u| - \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| - \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n \\ (|\lambda_0^u| + \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| + \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^n &< (|\lambda_0^u| - \eta)^{2n} (|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n \end{aligned}$$

This implies that  $M$  is diagonalizable. Indeed, if it was not the case,  $M$  would be triangularizable with a double eigenvalue and we would have :

$$(|\lambda_0^u| + \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^{2n} > |\det(M)| \text{ or } |\det(M)| > (|\lambda_0^u| - \eta)^{2n} (|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n$$

But we have :

$$(|\lambda_0^u| - \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| - \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| - \eta)^n < |\det(M)| < (|\lambda_0^u| + \eta)^n (|\lambda_0^{cs}| + \eta)^n (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^n$$

Then, there would be a contradiction with the previous inequalities. Moreover the third eigenvector has to be  $C^{cs}$  according to item 3 above.

Step 2 : Local coordinates

Iterating if necessary, we can suppose that  $Q \in \mathcal{P}$ . We are going to make several local changes of coordinates so that the stable and unstable manifolds of  $P_t$  have a simple form near the tangency. We will use this local change of coordinates in Steps 2 and 3. In Step 4, we will mainly use the coordinates in the canonical basis but we will need the local change of coordinates a last time at some point so we will denote it by  $\Psi_\tau$  in Step 4 to make the distinction between the two systems of coordinates. In the following, to construct the local coordinates, we will keep the notation  $z_1, z_2, z_3$  by simplification.

We first pick local coordinates such that  $Q = 0$  and in the neighborhood of  $Q$ , the stable manifold is  $\{z_1 = 0\}$ . Up to a linear invertible second change of coordinates, we can assure that the tangent vector of  $W^u(P_0)$  at  $Q$  is  $(0, 0, 1)$ . Then we have that locally near 0 the unstable manifold is given by a graph over  $z_3$  of the form  $\{(w_1(z_3), w_2(z_3), z_3) : z_3\}$ . Since the tangency is quadratic, for each  $t$  in a neighborhood of 0, there exists exactly one  $z_{3,t}$  such that  $\frac{\partial w_1}{\partial z_3}(z_{3,t}, t) = 0$ . We pick new coordinates a third time by changing the coordinate  $z_3$  into  $z_3 - z_{3,t}$ . The unstable manifold is :

$$w_1(z_3) = w_1(z_3, t) = w_1(0, t) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z_3^2}(0, t) z_3^2 + h(z_3, t) \text{ with } h(z_3, t) = o(z_3^2)$$

The stable manifold is still locally equal to  $\{z_1 = 0\}$ . Since there is a quadratic tangency for  $t = 0$  which is generically unfolded, we have  $w_1(0, 0) = 0$  and  $\frac{\partial w_1}{\partial t}(0, 0) \neq 0$ . Then we change coordinates a fourth time :  $z_1$  becomes  $\frac{t}{w_1(0, t)} z_1$  and  $z_2$  and  $z_3$  are unchanged. In these new coordinates, the unstable manifold is given by :

$$w_1(z_3) = t + z_3^2 \tilde{h}(z_3, t)$$

where  $\tilde{h}(z_3, t) \neq 0$  in a neighborhood of 0. The stable manifold is still locally equal to  $\{z_1 = 0\}$ . The fifth change of coordinates is given by  $z_3$  becoming  $z_3(\tilde{h}(z_3, t))^{1/2}$ , where  $(\tilde{h}(z_3, t))^{1/2}$  is a complex square root of  $\tilde{h}(z_3, t)$  (which

is well defined since  $\tilde{h}(z_3, t) \neq 0$  in a neighborhood of 0). We finally get that the unstable manifold is given by  $z_1 = z_3^2 + t$  and  $z_2 = w_2(z_3, t)$ . The stable manifold is still locally equal to  $\{z_1 = 0\}$  and the tangent vector of  $W^u(P_0)$  at  $Q$  is still  $(0, 0, 1)$ . The last change of coordinates is given by  $z_2 - w_2(z_3, t)$ . The unstable manifold is given by  $z_1 = z_3^2 + t$  and  $z_2 = 0$  and the stable manifold by  $z_1 = 0$ . The tangent vector of  $W^u(P_0)$  at  $Q$  is still  $(0, 0, 1)$ .

Step 3 : Construction of a periodic point

We take a tridisk  $B$  around  $Q$  in the coordinates that we just defined :  $B = \{(z_1, z_2, z_3) : |z_1| < \delta, |z_2| < \delta, |z_3| < \delta\}$  where  $0 < \delta < 1$ . Since the tangent vector of  $W^u(P_0)$  at  $Q$  is  $(0, 0, 1)$ , reducing  $\delta$  if necessary, there exists a neighborhood  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$  such that the component of  $W^u(P_t) \cap B$  containing  $Q$  (for  $t = 0$ ) or its continuation (for  $t \neq 0$ ) is horizontal in  $B$  relatively to the third projection and is included in  $\{(z_1, z_2, z_3) \in B : |z_2| < \frac{1}{10}\delta\}$ . Using the Inclination Lemma, there exists  $N_1 \geq N_0$  such that for  $t \in \mathcal{T}_1$  and  $n \geq N_1$ ,  $F_t^n(B)$  will intersect  $B$  and  $F_t^n(B) \cap B$  is horizontal relatively to the third projection.

In the following, we show that for every sufficiently high  $n$ , a periodic point for  $F_t$  (where  $t \in \mathcal{T}_1$ ) is created. Let us now denote  $\Delta_{z_2, z_3} = \{(z_1, z_2, z_3) : |z_1| < \delta\}$  which is a disk, for  $|z_2| < \delta, |z_3| < \delta$ . It is possible to increase  $N_2 \geq N_1$  such that for any  $|z_2| < \delta, |z_3| < \delta$ , for every  $n \geq N_2$ ,  $F_t^n(\Delta_{z_2, z_3}) \cap B$  is horizontal relatively to the third projection (of degree 1) and included in  $\{(z_1, z_2, z_3) \in B : |z_2| < \frac{1}{2}\delta\}$ . Since  $F_t^n(\Delta_{z_2, z_3}) \cap B$  is horizontal relatively to the third projection and of degree 1, it intersects exactly one disk  $\Delta_{z'_2, z_3}$  where  $z'_2 = z'_2(z_2)$  with  $z'_2 \in \mathbb{D}(0, \delta/2)$ . This defines for each fixed  $t \in \mathcal{T}_1$  a holomorphic map  $z_2 \mapsto z'_2$ . Then the map  $z_2 \mapsto z_2 - z'_2$  defined on  $\mathbb{D}(0, \delta)$  is holomorphic and the image of  $\partial\mathbb{D}(0, \delta)$  contains a loop around  $\mathbb{D}(0, \delta/2)$ . Then by the Argument principle there exists  $z_2(z_3)$  such that  $\Delta_{z_2(z_3), z_3}$  intersects  $F_t^n(\Delta_{z_2(z_3), z_3})$ .

We are going to choose  $z_3$  in order to create a periodic point in  $\Delta_{z_2(z_3), z_3}$ . There is a point  $R_{z_3} = (f_t(z_3), z_2(z_3), z_3) \in \Delta_{z_2(z_3), z_3}$  which is sent on  $S_{z_3} \in \Delta_{z_2(z_3), z_3}$  where  $S_{z_3} = (g_t(z_3), z_2(z_3), z_3)$ . We are going to choose  $z_3$  (in function of  $t$ ) such that  $R_{z_3} = S_{z_3}$ . When  $N$  goes to infinity,  $f_t(z_3)$  tends to 0 and  $g_t(z_3)$  tends to  $z_3^2 + t$ . Then  $g_t(z_3) - f_t(z_3)$  tends to  $z_3^2 + t$ . In particular, if  $N$  is sufficiently high, for every  $t \in \mathbb{D}$ , the graph of  $z_3 \mapsto g_t(z_3) - f_t(z_3)$  is a curve of degree 2 over  $z_3$  which has exactly one point of tangency with the horizontal foliation. We take a new bound  $N_3$  on  $n$  such that this is the case, we increase  $N_3$  in the rest of Step 3 in order to satisfy more assumptions. The second coordinate of this point of tangency is a holomorphic function of  $t$  which tends to  $t$  when increasing  $N_3$ . In particular, this implies that there exists exactly one value  $t_0$  of  $t$  for which the equation  $g_{t_0}(z_3) - f_{t_0}(z_3) = 0$  has one double solution, and for every other value of  $t \in \mathbb{D}$ , there are two distinct solutions. Then, for  $F_t$ , we have two periodic points which are equal when  $t = t_0$ . We do a reparametrization of the family of maps  $(F_t)_{t \in \mathbb{D}}$  by taking  $t = \tau^2$ . From now on, we are working with the family of maps  $\tilde{F}_\tau = F_{\tau^2}$ . By simplicity, we will simply denote it by  $F_\tau$ . For  $F_\tau$ , we have two periodic points which are equal when  $\tau = \tau_0$  where  $\tau_0^2 = t_0$ . We can increase  $N_3$  if necessary so that for each  $\tau \in \mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$ , the two solutions of  $g_{\tau^2}(z_3) - f_{\tau^2}(z_3) = 0$  are respectively  $\frac{1}{100}$ -close to  $\pm i\tau$ . For  $\tau \in \mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$ , we denote by  $R^\tau$  the periodic point

corresponding to the solution  $\frac{1}{100}$ -close to  $i\tau$ . It is clear that the map  $\tau \mapsto R^\tau$  restricted on  $\mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$  is continuous. For  $\tau = \tau_0$ , we denote by  $R^{\tau_0}$  the unique periodic point corresponding to the double solution of  $g_{\tau_0^2}(z_3) - f_{\tau_0^2}(z_3) = 0$ . Finally, for  $\tau \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$  not equal to  $\tau_0$ , there are two distinct periodic points in  $\Delta_{z_2(z_3), z_3}$ . We pick any path in  $\mathbb{C}$  from  $\tau$  to a point  $\tau_1$  in  $\mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$  which does not contain  $\tau_0$ . For  $\tau_1$ , the periodic point  $R^{\tau_1}$  is defined. Since the path does not contain  $\tau_0$ , there is exactly one of the two distinct periodic points in  $\Delta_{z_2(z_3), z_3}$  for  $\tau$  which is the continuation of  $R^{\tau_1}$ . We denote it by  $R^\tau$ . Since the map  $\tau \mapsto R^\tau$  restricted on  $\mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$  is continuous, this choice is independent of a particular choice of  $\tau_1$  in  $\mathbb{D} - \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$ . Then we have defined a map  $\tau \mapsto R^\tau$  on  $\mathbb{D}$ . It is clear that near any point of  $\mathbb{D} - \{\tau_0\}$ ,  $R^\tau$  is locally the continuation of the same periodic point of  $F_\tau$ , then it is holomorphic. The map  $\tau \mapsto R^\tau$  is holomorphic on  $\mathbb{D} - \{\tau_0\}$ . It is trivial that it is continuous at  $\tau_0$ . Then it is holomorphic on  $\mathbb{D}$ . As we already said, from now on, we go back to the coordinates in the canonical basis and we call  $\Psi_\tau$  the local coordinates we just used near the tangency point  $Q$ . We will use  $\Psi_\tau$  a last time at the end of Step 4.

Step 4 :  $R^\tau$  is a sink

We now show it is possible to pick  $\tau$  such that  $R^\tau$  is a sink. From now on, we fix a neighborhood  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$  of 0. Recall that  $Q$  belongs to the small neighborhood  $\mathcal{P}$  of  $P_0$  defined in Step 1. We denote by  $n = n_1 + n_2$  such that for  $k = 1, \dots, n_1$ ,  $F_\tau^k(R^\tau)$  is in  $\mathcal{P}$  and  $F_\tau^{n_1+1}(R^\tau) \notin \mathcal{P}$ . We express all matrices in the  $\tau$ -dependent basis given by the 3 eigenvectors  $e'_1, e'_2, e'_3$  of  $D(F_\tau^{n_1})(R^\tau)$  (the matrix  $DF_\tau^{n_1}(R^\tau)$  is diagonalizable according to Step 1). We have that  $e'_1 \in C^u$ ,  $e'_2 \in C^{ss}$  and  $e'_3 \in C^{cs}$ . Then, in this basis, the matrix  $DF_\tau^n(R^\tau)$  is of the form  $DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau) = DF_\tau^{n_2}(F_\tau^{n_1}(R^\tau)) \cdot DF_\tau^{n_1}(R^\tau)$ . The matrix  $DF_\tau^{n_1}(R^\tau)$  is of the form :

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

We have that  $(|\lambda_0^u| - \eta)^{n_1} < |\Lambda_1| < (|\lambda_0^u| + \eta)^{n_1}$ ,  $(|\lambda_0^{ss}| - \eta)^{n_1} < |\Lambda_2| < (|\lambda_0^{ss}| + \eta)^{n_1}$  and  $(|\lambda_0^{cs}| - \eta)^{n_1} < |\Lambda_3| < (|\lambda_0^{cs}| + \eta)^{n_1}$ . The matrix  $DF_\tau^{n_2}(F_\tau^{n_1}(R^\tau))$  is of the form :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

Since  $e'_1 \in C^u$ ,  $e'_2 \in C^{ss}$  and  $e'_3 \in C^{cs}$  and these cones are disjoint, the coefficients  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  are bounded in modulus by some constant  $K$  which is independant of  $\tau$ ,  $n$  and  $n_1$ . Then :

$$DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau) = \begin{pmatrix} A\Lambda_1 & B\Lambda_2 & C\Lambda_3 \\ D\Lambda_1 & E\Lambda_2 & F\Lambda_3 \\ G\Lambda_1 & H\Lambda_2 & I\Lambda_3 \end{pmatrix}$$

Let us suppose that  $A\Lambda_1 = 0$ . There exists  $\epsilon > 0$  such that if the characteristic polynomial of  $DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau)$  is  $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$  with  $|a_0| < \epsilon$ ,  $|a_1| < \epsilon$ ,  $|a_2| < \epsilon$ , then the 3 eigenvalues of  $DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau)$  are of modulus lower than 1 and then  $R^\tau$  is a sink. We are going to show that it is possible to get a lower

bound on  $n_1$  so that it is always the case. The coefficients of the characteristic polynomial of  $DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau)$  are :

$$\begin{aligned} a_2 &= -(A\Lambda_1 + E\Lambda_2 + I\Lambda_3) \\ a_1 &= (E\Lambda_2\Lambda_3 - F\Lambda_2\Lambda_3 + A\Lambda_1\Lambda_3 - C\Lambda_1\Lambda_3 + AEA_1\Lambda_2 - BD\Lambda_1\Lambda_2) \\ a_0 &= -\det(DF_\tau^{n_2}(F_\tau^{n_1}(R^\tau))) \end{aligned}$$

We have :  $|a_0| = |\det(DF_\tau^{n_2}(F_\tau^{n_1}(R^\tau)))| < K^3|\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3| < K^3((|\lambda_0^{cs}| + \eta)(|\lambda_0^u| + \eta))^{n_1}$  which tends to 0 when  $n_1 \rightarrow +\infty$  because  $(|\lambda_0^{cs}| + \eta)(|\lambda_0^u| + \eta) < 1$  (remind that  $P_0$  is a sectionally dissipative periodic point). We increase  $n_1$  such that  $|a_0| < \epsilon/2$ . We have that :

$$|a_1| < 6K^2 \max(|\Lambda_1\Lambda_2|, |\Lambda_1\Lambda_3|, |\Lambda_2\Lambda_3|) < 6K^2((|\lambda_0^{cs}| + \eta)(|\lambda_0^u| + \eta))^{n_1}$$

which tends to 0 when  $n_1 \rightarrow +\infty$  because  $(|\lambda_0^{cs}| + \eta)(|\lambda_0^u| + \eta) < 1$ . We increase  $n_1$  further such that  $|a_1| < \epsilon/2$ . Finally, in the term  $a_2$ , both  $E\Lambda_2$  and  $I\Lambda_3$  tend to 0 when  $n_1 \rightarrow +\infty$ . The term  $A\Lambda_1$  is equal to 0 by hypothesis. We increase  $n_1$  a last time such that  $|a_2| < \epsilon/2$ . Finally, we pick  $N_4 \geq N_3$  such that  $n_1$  is sufficiently high in order to satisfy the previous inequalities. Finally, the 3 eigenvalues of  $DF_\tau^{n_1+n_2}(R^\tau)$  are of modulus lower than 1 and  $R^\tau$  is a sink.

It remains us to show that for a given neighborhood  $t \in \mathcal{T}$  of 0 and the corresponding neighborhood of 0 for  $\tau$  (remind that  $t = \tau^2$ ), it is possible to pick a new bound  $N_6$  on  $n$ , such that for  $n \geq N_6$ , there is a parameter  $\tau = \tau(n)$  such that the differential  $DF_\tau^n(R^\tau)$  satisfies  $A\Lambda_1 = 0$ . To show this, we work again in the coordinates  $\Psi_\tau$  for the map  $F_\tau$ . We denote by  $\Pi$  the projection of the plane  $\Psi_\tau(W^s(P_{\tau^2})) = \{z_1 = 0\}$  into  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . The projection  $\Pi$  is a holomorphic curve. We denote by  $\Gamma$  the holomorphic curve in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  given by the tangent directions to the curve  $\Psi_\tau(W^u(P_0)) = \{z_1 = z_3^2, z_2 = 0\}$ . Since there is a generically unfolded quadratic tangency at  $\tau = 0$  between  $W^s(P_0)$  and  $W^u(P_0)$ , there is a transverse intersection between  $\Pi$  and  $\Gamma$ . Moreover,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  is of dimension 2. We take a small disk  $\Delta'$  going through  $\Psi_\tau(R^\tau)$  of direction  $D\Psi_\tau(R^\tau) \cdot e'_1$ . For a given  $n \geq N_4$ , we call  $\Gamma'_n$  the complex curve in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  given by the tangent directions to the curve  $\Psi_\tau(F_\tau^n(\Delta'))$  at the periodic point  $\Psi_\tau(R^\tau)$  when  $\tau$  varies. By the Inclination Lemma, we can increase the bound  $N_5 \geq N_4$  on  $n$  such that if  $n \geq N_5$ ,  $\text{pr}_3(\Psi_\tau(R^\tau))$  can be made as close to  $i\tau$  as wanted and  $\Psi_\tau(F_\tau^n(\Delta'))$  can be taken as close to  $\{z_1 = z_3^2 + t, z_2 = 0\}$  in the  $C^1$  topology. In particular, this shows that the graph  $\Gamma'_n$  can be taken as close to the graph  $\Gamma$  as wanted (in the  $C^1$ -topology) by increasing the bound  $N_5$ . In particular, we can pick  $N_5$  such that there is a transverse intersection between  $\Gamma'_n$  and  $\Pi$  if  $n \geq N_5$ . There is a last step to get  $A\Lambda_1 = 0$ . We denote by  $\Pi'$  the projection of the plane  $\text{Vect}(D\Psi_\tau(R^\tau) \cdot e'_2, D\Psi_\tau(R^\tau) \cdot e'_3)$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $\Pi'$  is a complex curve. Since  $e'_2$  and  $e'_3$  are the two stable eigenvectors of  $DF_\tau^{n_1}(R^\tau)$ , it is an easy consequence of the Inclination Lemma that if  $n$  and then  $n_1$  tend to infinity, then  $R^\tau$  tends to  $W^s(P_{\tau^2})$  and  $\Pi'$  tends to  $\Pi$  (locally as graphs in the  $C^1$ -topology). In particular, it is possible to pick a last bound  $N_6 \geq N_5$  on  $n$  such that if  $n \geq N_6$ , then  $\Gamma'_n$  and  $\Pi'$  have a transverse intersection. This implies that there exists  $\tau$  with  $t = \tau^2 \in \mathcal{T}$  such that  $DF_\tau^n(R^\tau) \cdot e'_1 \in \text{Vect}(e'_2, e'_3)$  which is equivalent to  $A\Lambda_1 = 0$ . For this parameter  $\tau$ , we saw that  $R^\tau$  is a sink.

CHAPTER 5. NEWHOUSE PHENOMENON FOR POLYNOMIAL  
AUTOMORPHISMS OF  $\mathbb{C}^3$

---

This is true for every neighborhood  $\mathcal{T}$  of 0 and it is clear that  $R^r$  tends to  $Q$  when reducing  $\mathcal{T}$ . The result is proven : for every neighborhood  $\mathcal{Q}$  of  $Q$  and every neighborhood  $\mathcal{T}$  of 0, we can create a sink in  $\mathcal{Q}$  for  $F_t$  with  $t \in \mathcal{T}$ .  $\square$

# Stabilité et Bifurcations en dynamique holomorphe

# 6

## 6.1 Stabilité et bifurcations en dimension 1

On commence par énoncer succinctement des résultats sur les notions de stabilité et de bifurcations en une variable complexe. Rappelons tout d'abord la définition d'un mouvement holomorphe en dimension 1 :

**Définition 6.1.0.1.** *Un mouvement holomorphe d'un ensemble  $A \subset \mathbb{C}$  sur une variété complexe  $\Lambda$  de point de base  $\lambda_0 \in \Lambda$  est une famille de graphes  $h_\lambda : A \mapsto \mathbb{C}$  telle que :*

1. *pour une valeur fixée  $a \in A$ ,  $h_{\lambda_0}(a) = a$*
2. *pour une valeur fixée  $a \in A$ ,  $\lambda \mapsto h_\lambda(a)$  est holomorphe*
3. *pour une valeur fixée  $\lambda \in \Lambda$ ,  $a \mapsto h_\lambda(a)$  est injective*

En dynamique complexe à une variable, on dispose de la condition suivante de stabilité, issue des travaux de Mañé, Sad et Sullivan ([43]) et de manière indépendante de ceux de Lyubich([40],[39]) :

**Théorème (Mañé, Sad, Sullivan [43] et Lyubich [39, 40]) 6.1.0.2.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$  et soit  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$(J(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  se déplace selon un mouvement holomorphe*
2. *il n'y a pas de point périodique répulsif qui change de nature dans la famille*
3. *il existe une famille d'applications quasi-conformes  $i_\lambda : J_{\lambda_0} \rightarrow J_\lambda$  qui conjuguent la dynamique de  $f_\lambda$  sur  $J_\lambda$  à celle de  $f_{\lambda_0}$  sur  $J_{\lambda_0}$*

En particulier, les conditions précédentes impliquent dans presque tous les cas la stabilité structurelle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**Définition 6.1.0.3.** *Si les conditions précédentes sont satisfaites, on dira que  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J$ -stable. L'ensemble des paramètres  $\lambda$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J$ -stable est un ouvert de  $\Lambda$ , appelé lieu de stabilité de la famille et noté  $\text{Stab}$ .*

**Définition 6.1.0.4.** *L'ensemble des paramètres  $\lambda$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  n'est pas  $J$ -stable est appelé lieu de bifurcation de la famille et noté  $\text{Bif}$ .*

On dispose également du résultat suivant qui relie la stabilité et les bifurcations au sein de la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  au comportement normal ou non des orbites des points critiques :

**Théorème (Mañé, Sad, Sullivan [43] et Lyubich [39, 40]) 6.1.0.5.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Supposons que l'on puisse suivre holomorphiquement les points critiques  $\lambda \mapsto c_1(\lambda), \dots, c_{2d-2}(\lambda)$  de  $f_\lambda$ . Alors le lieu de bifurcation  $\text{Bif}$  de  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est égal à l'adhérence de la réunion des lieux de non-normalité des familles d'applications  $(\lambda \mapsto f_\lambda^n(c_i(\lambda)))_{n \geq 0}$  pour  $i \in \{1, \dots, 2d-2\}$ .*

La finitude de l'ensemble critique implique alors le remarquable résultat suivant qui n'est pas du tout généralisable en dimension supérieure :

**Théorème (Mañé, Sad, Sullivan [43] et Lyubich [39, 40]) 6.1.0.6.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Alors  $\text{Stab}$  est dense dans  $\Lambda$ .*

La preuve de ces résultats nécessite de manière cruciale le  $\lambda$ -lemma et le Théorème de Montel. Le  $\lambda$ -lemma est un résultat qui permet de prolonger le mouvement holomorphe d'un ensemble  $A_\lambda$  à son adhérence  $\overline{A_\lambda}$ . Si les points périodiques répulsifs de  $f_\lambda$  varient selon un mouvement holomorphe, il permet de le prolonger en un mouvement holomorphe de l'ensemble de Julia tout entier et d'obtenir les conjugaisons  $i_\lambda$ . La démonstration du  $\lambda$ -lemma utilise elle-même le Théorème de Montel et le Théorème de Hürwitz. Le Théorème de Montel permet aussi de relier les bifurcations des points répulsifs au caractère non-normal des orbites postcritiques.

Or, aucun de ces résultats n'admet de généralisation satisfaisante en dimension supérieure et il n'est donc pas possible d'appliquer la même preuve pour obtenir une définition satisfaisante de la stabilité dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et encore moins sa densité. Dans les deux sections suivantes, on présente des généralisations récentes de la notion de stabilité pour les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  et les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . En revanche, on verra plus loin que la densité de la stabilité est même fautive en dimension 2 et qu'il existe des ouverts de bifurcations pour les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Signalons enfin une dernière caractérisation de la stabilité en terme d'exposants de Lyapunov qui est due à DeMarco :

**Théorème (DeMarco [21, 22] ) 6.1.0.7.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . On note :*

$$L(\lambda) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log |\text{Jac}(f_\lambda)| d\mu_\lambda$$

*l'exposant de Lyapunov de  $f_\lambda$  relatif à son unique mesure d'entropie maximale. La fonction  $L$  est plurisousharmonique sur  $\Lambda$ . De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J$ -stable
2.  $\lambda \mapsto L(\lambda)$  est pluriharmonique sur  $\Lambda$

## 6.2 Bifurcations des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$

### 6.2.1 Stabilité

On s'intéresse aux bifurcations des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$ , et plus précisément aux résultats obtenus par Dujardin et Lyubich ([28]). Une première étape consiste à déterminer une notion satisfaisante de stabilité, celle-ci est basée sur le mouvement holomorphe branché de l'ensemble de Julia  $J^*$ . Par "satisfaisante", on entend que la définition doit vérifier le même type d'équivalences que la définition de la stabilité pour les familles d'applications rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**Définition 6.2.1.1.** *Soit  $f$  un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$ . On note  $J^* = J^*(f)$  l'adhérence des points périodiques de type selle de  $f$ . C'est aussi le support de la mesure d'équilibre de  $f$ .*

La notion suivante est plus faible que celle de mouvement holomorphe dans  $\mathbb{C}$  vue précédemment :

**Définition 6.2.1.2.** *Un mouvement holomorphe branché sur  $\Lambda$  est une famille de graphes holomorphes au-dessus de la première coordonnée dans  $\Lambda \times \mathbb{C}^2$ .*

La notion suivante sera une bonne généralisation de la stabilité au cas des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  :

**Définition 6.2.1.3.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  de degré dynamique  $d \geq 2$ . On dit que  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est faiblement  $J^*$ -stable au paramètre  $\lambda_0 \in \Lambda$  si dans un voisinage de  $\lambda_0$ ,  $\lambda \mapsto J^*(f_\lambda)$  est un mouvement holomorphe branché. Si ce n'est pas le cas, on dit que  $\lambda_0$  est un paramètre de bifurcation. L'ensemble des paramètres de bifurcation est le lieu de bifurcation de la famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .*

Les équivalences suivantes montrent que cette définition est cohérente :

**Théorème (Dujardin, Lyubich [28]) 6.2.1.4.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'automorphismes polynomiaux dissipatifs de  $\mathbb{C}^2$  de degré dynamique  $d \geq 2$ . Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est faiblement  $J^*$ -stable.*
2. *Tout point périodique reste du même type (selle, puits, répulsif, indifférent) dans cette famille*
3.  *$\lambda \mapsto J_\lambda^*$  est continue pour la topologie de Hausdorff*  
*Les deux assertions suivantes sont aussi équivalentes et impliquent les trois précédentes :*
4. *Le nombre de puits est fini et localement constant*
5. *La période des puits est localement uniformément bornée*

### 6.2.2 Bifurcations

On se placera à partir de maintenant dans le cadre de l'hypothèse de dissipation plus forte qui suit :

**Définition 6.2.2.1.** Soit  $f$  un automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  de degré dynamique  $d \geq 2$ . On dit que  $f$  est modérément dissipatif si :

$$\text{Jac}(f) < \frac{1}{d^2}$$

Les résultats suivant expliquent le lien entre bifurcations et tangences homoclines pour les automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  :

**Théorème (Dujardin, Lyubich [28]) 6.2.2.2.** Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{C}^2$  une famille d'automorphismes polynomiaux modérément dissipatifs de  $\mathbb{C}^2$  de degré dynamique  $d \geq 2$ . Les paramètres correspondant à une tangence homocline sont denses dans le lieu de bifurcation.

**Théorème (Dujardin, Lyubich [28]) 6.2.2.3.** Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  modérément dissipatifs de degré dynamique  $d \geq 2$ . Alors la réunion des paramètres faiblement  $J^*$ -stables et de ceux présentant une tangence homocline forme un sous-ensemble dense de  $\Lambda$ . En particulier, ceci implique :

$$\{\text{paramètres faiblement } J^*\text{-stables}\} \cup \{\text{paramètres de Newhouse}\}$$

est dense dans  $\Lambda$ , où un paramètre de Newhouse est un paramètre  $\lambda_0$  pour lequel  $f_{\lambda_0}$  possède une infinité de puits.

Donnons les principales idées de la preuve de ces résultats. S'il y a une bifurcation, on peut trouver un paramètre  $\lambda_0$  pour lequel  $f_{\lambda_0}$  possède un point périodique  $p$  dont le multiplicateur est sur le cercle unité. En particulier, on montre qu'on peut trouver pour  $f_{\lambda_0}$  un bassin semi-parabolique  $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$  dont tous les points sont attirés par  $p$ . Il est possible de munir  $\mathcal{B}$  d'un feuilletage stable. Il y a ensuite deux étapes essentielles dans la preuve :

1. montrer que l'on peut toujours trouver un point critique dans le bassin semi-parabolique du point périodique. Pour cela, on considère un point périodique  $q$  de type selle. Sa variété instable est une variété immergée de dimension 1. En utilisant des résultats sur les fonctions entières, Dujardin et Lyubich parviennent à montrer l'existence d'un point critique, c'est-à-dire un point de tangence entre la variété instable de  $q$  et le feuilletage stable du bassin  $\mathcal{B}$ . Remarquons que c'est ici qu'intervient l'hypothèse de dissipation évoquée plus haut.
2. créer une tangence homocline. La preuve de ce résultat est basée sur le phénomène d'implosion parabolique, qui décrit les changements profonds que subit la dynamique lorsque le multiplicateur d'un point périodique  $p$  traverse le cercle unité. La preuve est en fait l'adaptation d'un résultat de dimension 1. Supposons qu'on dispose d'une famille d'automorphismes  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  et que  $f_{\lambda_0}$  possède un point périodique  $p$  semi-parabolique. En particulier, il existe un bassin semi-parabolique  $\mathcal{B}$  pour  $f_{\lambda_0}$ . D'après ce qui précède, il existe un point critique  $c$  dans  $\mathcal{B}$ . Un Théorème d'implosion semi-parabolique implique alors que l'on peut choisir convenablement une suite d'itérées  $f_{\lambda_n}^n$  tel que dans  $\mathcal{B}$  :

$$f_{\lambda_n}^n \rightarrow g$$

où  $g$  est une application limite. Il est possible d'adapter les paramètres de sorte que  $g(c) \in W^s(q)$ . Il découle que l'on peut prendre une suite  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  telle que  $W^s(q)$  et  $W^u(q)$  soient tangentes en un point pour  $\lambda = \lambda_n$ .

### 6.3 Stabilité pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Signalons tout d'abord que de nombreux résultats de cette section sur les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  admettent une généralisation en dimension supérieure. On s'intéresse désormais à la famille d'applications suivante :

**Définition 6.3.0.4.** *On note  $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  l'ensemble des endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de la forme  $[P_1 : P_2 : P_3]$  où  $P_1, P_2, P_3$  sont trois polynômes homogènes de degré  $d$  sans zéro commun.*

Rappelons en particulier le résultat classique suivant :

**Théorème (Briend, Duval [16]) 6.3.0.5.** *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de degré  $d$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Alors  $f$  admet une unique mesure invariante  $\mu$  d'entropie maximale  $\log(d^2)$ . Les points périodiques répulsifs de  $f$  sont denses dans le support de la mesure  $\mu$ .*

Il est important de remarquer que l'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie : il peut y avoir des points périodiques répulsifs qui ne sont pas dans le support de la mesure.

**Définition 6.3.0.6.** *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On note  $J^*(f)$  le support de la mesure  $\mu$ .*

On introduit maintenant un certain nombre de définitions provenant de [7]. Certaines notations peuvent légèrement différer. Dans la suite, on étudie une famille holomorphe  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On va chercher à définir des notions satisfaisantes de stabilité et de bifurcation dans une telle famille.

**Définition 6.3.0.7.** *On note :*

$$\mathcal{J}^* = \{\gamma : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : \gamma \text{ est holomorphe et } \gamma(\lambda) \in J_\lambda^* \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda\}$$

*On note  $\Gamma_\gamma$  le graphe d'un élément  $\gamma \in \mathcal{J}^*$ . On note  $\mathcal{F}$  l'application :*

$$\mathcal{F} : \mathcal{J}^* \rightarrow \mathcal{J}^* \text{ telle que } \mathcal{F} \cdot \gamma(\lambda) = f_\lambda(\gamma(\lambda))$$

*On munit  $\mathcal{J}^*$  de la topologie de la convergence uniforme locale.*

La définition suivante distingue les points répulsifs dans le support de la mesure. Notons qu'on parle ici de  $J^*$ -cycles puisque, contrairement au cas de la dimension 1, le support  $J^*(f)$  de la mesure n'est en général pas égal à l'ensemble de Julia classique  $J(f)$  défini comme le lieu de non-normalité de  $f$ .

**Définition 6.3.0.8.** *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , un  $J^*$ -cycle répulsif est un cycle répulsif contenu dans  $J_\lambda^*$ . On dit que ces cycles varient holomorphiquement si pour toute période  $n$ , il existe un sous-ensemble fini  $\{\rho_{n,j}, 1 \leq j \leq N_n\}$  de  $\mathcal{J}^*$  tel que  $\{\rho_{n,j}(\lambda), 1 \leq j \leq N_n\}$  est exactement l'ensemble des cycles répulsifs de période  $n$  de  $f_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .*

La définition suivante est plus faible qu'un mouvement holomorphe.

**Définition 6.3.0.9.** *Un web d'équilibre est une mesure de probabilité  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{J}^*$  tel que :*

1.  $\mathcal{M}$  est  $\mathcal{F}$ -invariant et son support est un sous-ensemble compact de  $\mathcal{J}^*$
2. pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la mesure de probabilité  $\mathcal{M}_\lambda = \int_{\mathcal{J}} \delta_{\gamma(\lambda)} d\mathcal{M}(\gamma)$  est égale à  $\mu_\lambda$

La notion qui suit est plus forte que la précédente :

**Définition 6.3.0.10.** *Une lamination d'équilibre est un sous-ensemble relativement compact  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{J}^*$  tel que :*

1. pour tous éléments  $\gamma \neq \gamma'$  de  $\mathcal{L}$ ,  $\Gamma_\gamma \cap \Gamma_{\gamma'} = \emptyset$
2.  $\mu_\lambda(\{\gamma(\lambda), \gamma \in \mathcal{L}\}) = 1$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$
3.  $\Gamma_\gamma$  n'intersecte pas la grande orbite de l'ensemble critique de  $f$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{L}$
4. l'application restriction de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{L}$  est de degré  $d^k$

Signalons que l'existence d'une lamination d'équilibre implique celle d'un web d'équilibre. La réciproque est plus difficile et nécessite une hypothèse d'ergodicité.

La notion suivante se révélera être une bonne notion de bifurcation pour les endomorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  :

**Définition 6.3.0.11.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes. Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on note  $C_{f_\lambda}$  l'ensemble critique de  $f_\lambda$ . Une bifurcation de Misiurewicz (classique) est un paramètre  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel qu'il existe un graphe  $\gamma : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  d'un point périodique répulsif de  $f_\lambda$  défini sur un voisinage  $\Lambda_0$  de  $\lambda_0$  et un entier  $n_0$  tels que  $\gamma(\lambda_0) \in f_{\lambda_0}^{n_0}(C_{f_{\lambda_0}})$  et tel que  $\gamma(\lambda_1) \notin f_{\lambda_1}^{n_0}(C_{f_{\lambda_1}})$  pour un certain  $\lambda_1 \in \Lambda_0$ .*

Enfin, la somme des exposants de Lyapunov jouera un rôle important :

**Définition 6.3.0.12.** *On note  $L(\lambda) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \log |\text{Jac}(f_\lambda)| d\mu_\lambda$  la somme des exposants de Lyapunov de  $f_\lambda$ . La fonction  $L$  est plurisousharmonique sur  $\Lambda$  et vérifie :*

$$L(\lambda) \geq \log(d)$$

Berteloot, Bianchi et Dupont ont introduit les conditions équivalentes suivantes ([7]) qui fournissent une généralisation remarquable de la notion de stabilité pour les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  :

**Théorème (Berteloot, Bianchi, Dupont [7]) 6.3.0.13.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Alors les conditions suivantes sont toutes équivalentes :*

1. les  $J^*$ -cycles varient holomorphiquement sur  $\Lambda$
2. la fonction  $L$  est pluriharmonique sur  $\Lambda$
3.  $f$  a un web d'équilibre
4.  $f$  a une lamination d'équilibre
5. il n'y a pas de bifurcation de Misiurewicz dans  $\Lambda$

On obtient ainsi une notion satisfaisante de stabilité dans ce cadre :

**Définition 6.3.0.14.** *Si les conditions précédentes sont satisfaites, on dira que  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J^*$ -stable (sur  $\Lambda$ ). L'ensemble des paramètres  $\lambda_0 \in \Lambda$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est  $J^*$ -stable sur un voisinage de  $\lambda_0$  est un ouvert de  $\Lambda$ , appelé lieu de stabilité et noté  $\text{Stab}$ . L'ensemble des paramètres  $\lambda_0$  où  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  n'est pas  $J^*$ -stable est appelé lieu de bifurcation et noté  $\text{Bif}$ .*

Enfin, on a la caractérisation suivante :

**Théorème (Berteloot, Bianchi, Dupont [7]) 6.3.0.15.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$ . Alors les paramètres de Misiurewicz sont denses dans le lieu de bifurcation de la famille.*

Comme nous l'avons précédemment rappelé, la preuve du résultat analogue en dimension 1 utilise le Théorème de Montel, le Théorème de Hürwitz et le  $\lambda$ -lemma et aucun de ces résultats n'admet de généralisation satisfaisante en dimension supérieure. Pour palier ce manque, la preuve de ce résultat utilise principalement deux outils principaux que nous présentons brièvement ici.

Le premier des deux outils est la formule suivante issue des travaux de Basanelli et Berteloot ([3]) :

$$dd_\lambda^c L = \pi_\Lambda * \left( (dd_{\lambda,z}^c g(\lambda, z) + \omega_{FS})^2 \wedge [C_f] \right)$$

où  $g$  est la fonction de Green associée à  $f$ . Cette formule permet de relier l'instabilité de la dynamique critique et les bifurcations. En quelque sorte, elle permet de remplacer le Théorème de Montel en dimension supérieure. En particulier, elle permet de montrer que le caractère pluriharmonique de  $L$  permet d'éviter l'apparition des paramètres de Misiurewicz.

Un second outil développé dans cet article cherche à palier l'absence de  $\lambda$ -lemma en dimension supérieure. L'introduction des webs d'équilibre est la bonne méthode, et permet en particulier de construire des mouvements holomorphes d'ensembles de Julia. En quelque sorte, on travaille plus sur les mesures  $\mu_\lambda$  elles-mêmes que sur leurs supports.

## 6.4 Ouverts de bifurcations d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

### 6.4.1 Principe général

D'après les travaux de Berteloot, Bianchi et Dupont, pour obtenir des ouverts dans l'ensemble de bifurcation, il est suffisant de créer des intersections persistantes entre l'ensemble postcritique et un ensemble répulsif hyperbolique contenu dans le support  $J^*$  de la mesure d'équilibre. Comme notre objectif final sera d'obtenir de tels ouverts de bifurcations au voisinage des exemples de Latès, nous passons en revue dans cette section un certain nombre de méthodes qui ont été utilisées pour obtenir de telles bifurcations robustes.

On commence par rappeler la définition d'un ensemble basique répulsif :

**Définition 6.4.1.1.** *Un ensemble basique répulsif pour un endomorphisme holomorphe  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est un ensemble hyperbolique  $E$  pour  $f$ , répulsif, localement maximal et transitif. Il est classique qu'un tel ensemble admette une continuation et que les points répulsifs de  $f$  sont denses dans  $E$ .*

On aura besoin plus tard du fait suivant (on peut se référer à [7] ou [27]) :

**Proposition 6.4.1.2.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$ . On suppose qu'il existe un ensemble basique répulsif  $E_{\lambda_0}$  pour  $f_{\lambda_0}$  inclus dans  $J^*(f_{\lambda_0})$  pour un certain  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Alors, il existe un voisinage  $\Omega \subset \Lambda$  de  $\lambda_0$  tel que pour tout  $\lambda \in \Omega$ , la continuation  $E_\lambda$  de  $E_{\lambda_0}$  est incluse dans  $J^*(f_\lambda)$ .*

La définition suivante est très proche de celle de paramètre de Misiurewicz classique que nous avons introduite précédemment.

**Définition 6.4.1.3.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$ . On suppose qu'il existe un ensemble basique répulsif  $E_{\lambda_0}$  pour  $f_{\lambda_0}$  (où  $\lambda_0 \in \Lambda$ ) inclus dans  $J^*(f_{\lambda_0})$ . On suppose qu'il existe un entier  $n$  tel que  $f_{\lambda_0}^n(C_{f_{\lambda_0}})$  intersecte  $E_{\lambda_0}$  en  $x_{\lambda_0}$  de telle sorte que la continuation de la composante de  $f_{\lambda_0}^n(C_{f_{\lambda_0}})$  intersectant  $E_{\lambda_0}$  n'intersecte pas de manière persistante la continuation  $x_\lambda$  de  $x_{\lambda_0}$ . On dit alors que  $f_{\lambda_0}^n(C_{f_{\lambda_0}})$  intersecte proprement  $E_{\lambda_0}$ .*

On dispose du critère suivant pour détecter les bifurcations (on peut une nouvelle fois se référer à [7] ou [27]) :

**Proposition 6.4.1.4.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$ . On suppose qu'il existe un ensemble basique répulsif  $E_{\lambda_0}$  pour  $f_{\lambda_0}$  inclus dans  $J^*(f_{\lambda_0})$ . On suppose qu'il existe un entier  $n$  tel que  $f_{\lambda_0}^n(C_{f_{\lambda_0}})$  intersecte proprement  $E_{\lambda_0}$ . Alors  $\lambda_0 \in \text{Bif}$ .*

Dans les faits, on utilisera plutôt la version suivante :

**Corollaire 6.4.1.5.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$ . On suppose qu'il existe un ensemble basique répulsif  $E_{\lambda_0}$  pour  $f_{\lambda_0}$  inclus dans  $J^*(f_{\lambda_0})$  qui admet une continuation  $E_\lambda \subset J^*(f_\lambda)$  pour  $\lambda$  dans un voisinage  $\Lambda_0$  de  $\lambda_0$ . On suppose que pour tout  $\lambda \in \Lambda_0$ , il existe un entier  $n_\lambda$  tel que  $f_\lambda^{n_\lambda}(C_{f_\lambda})$  intersecte proprement  $E_\lambda$ . Alors  $\lambda_0$  est dans l'intérieur du lieu de bifurcation.*

## 6.4.2 Première méthode : par des méthodes topologiques

Dujardin fournit dans [27] deux mécanismes capables de fournir de telles intersections persistantes. Le premier est basé sur des considérations topologiques, on construit une application polynomiale  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  telle qu'il existe une variété topologique contenue dans  $J^*(f)$  qui doit intersecter pour des raisons homologiques l'ensemble postcritique. Cette stratégie permet d'obtenir des bifurcations persistantes près des applications du type  $(z, w) \mapsto (p(z), w^d)$ .

**Définition 6.4.2.1.** *On note  $\mathcal{P}_d$  la famille des polynômes en une variable complexe de degré  $d$ .*

**Théorème (Dujardin [27]) 6.4.2.2.** *Soit  $p \in \mathcal{P}_d$  et soit  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par  $f(z, w) = (p(z), w^d)$ . Supposons que  $p$  vérifie les deux conditions :*

1. *il existe un ensemble hyperbolique répulsif  $E$  pour  $p$  qui disconnecte le plan*
2.  *$p \in \text{Bif}(\mathcal{P}_d)$*

*Alors  $f$  appartient à l'adhérence de l'intérieur de  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ . Plus précisément, il existe un polynôme  $q$  de degré  $\leq 2$  et une suite  $\epsilon_j \rightarrow 0$  telle que l'application  $f_\epsilon \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  définie par  $f_\epsilon(z, w) = (p(z) + \epsilon q(w), w^d)$  appartient à l'intérieur de  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$  pour  $\epsilon = \epsilon_j$ .*

Remarquons que les hypothèses sur le polynôme  $p$  nécessitent  $d \geq 3$ . En effet, en degré 2, il n'est pas possible de satisfaire les deux hypothèses simultanément, et pour  $\deg(p) = 3$ , il suffit de prendre  $p$  avec un point fixe attractif et un point critique prépériodique d'orbite associée un cycle répulsif.

L'application  $(z, w) \mapsto (p(z), w^d)$  de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}^2$  admet une extension à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On a  $J^*(f) = J_p \times S_1$  où  $J_p$  l'ensemble de Julia unidimensionnel de  $p$  et  $S_1$  le cercle unité. Si  $p$  est bien choisi, l'ensemble hyperbolique  $\mathcal{E} = E \times S_1$  persiste et reste connexe. Il délimite un extérieur défini comme la seule partie non bornée de  $\mathbb{C}^2 - \mathcal{E}$  et un intérieur défini comme la réunion des parties bornées de  $\mathbb{C}^2 - \mathcal{E}$ . Une première perturbation du polynôme  $p$  en un polynôme  $\tilde{p}$  permet de s'assurer de l'existence d'un point critique  $c$  tel que  $(\tilde{p})^k(c) \in E$  pour un certain entier  $k$ .

Supposons  $k = 1$ . On pose  $f_\epsilon(z, w) = (\tilde{p}(z) + \epsilon q(w), w^d)$ . La droite  $\{c\} \times \mathbb{C}$  est alors une composante critique de  $f_\epsilon$  et son image par  $f_\epsilon$  est l'ensemble  $f_\epsilon(\{c\} \times \mathbb{C}) = \{(\epsilon q(w), w^d) : w \in \mathbb{C}\}$ . Si  $q$  est bien choisi,  $f_\epsilon(\{c\} \times \mathbb{C})$  intersecte à la fois l'intérieur et l'extérieur de  $\mathcal{E}$  pour  $\epsilon = \epsilon_j \rightarrow 0$ . Cette propriété permet de s'assurer que  $f_{\epsilon_j}(\{c\} \times \mathbb{C})$  (qui est dans l'ensemble postcritique de  $f_{\epsilon_j}$ ) intersecte  $\mathcal{E} \subset J^*(f_{\epsilon_j})$  de manière persistante sur un voisinage de  $f_{\epsilon_j}$ . Quand  $k > 1$ , les calculs sont plus compliqués mais la conclusion reste la même. Dans les deux cas,  $f$  est accumulée par des ouverts de bifurcations.

Signalons également le corollaire suivant de ce résultat :

**Corollaire 6.4.2.3.** *Soit  $f(z, w) = (p(z), w^d)$  une application produit de degré  $\deg(p) = d \geq 3$ . Supposons que  $p$  vérifie les deux conditions suivantes :*

1.  *$p \in \text{Bif}(\mathcal{P}_d)$*
2.  *$(d - 2)$  points critiques de  $p$  sont attirés par des puits*

*Alors  $f$  appartient à l'adhérence de l'intérieur de  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ .*

### 6.4.3 Seconde méthode : Blenders

La première construction était basée sur des notions topologiques, la seconde est basée sur la notion plus fine de blender. Le blender construit par Dujardin est proche de la construction que nous avons donnée dans le cas des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$ , la différence est que l'application n'est pas bijective et qu'on cherche à créer des intersections persistantes entre une courbe et un IFS dans  $\mathbb{C}^2$ . Cette fois-ci, le but n'est pas de créer des tangences mais des intersections persistantes entre un ensemble hyperbolique répulsif et l'ensemble postcritique.

**Théorème (Dujardin [27]) 6.4.3.1.** *Soit  $d \geq 3$  et  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  une application produit de la forme*

$$f(z, w) = (p(z), q(w)) = (p(z), w^d + \kappa)$$

où  $\deg(p) = d$ . Supposons que  $p \in \text{Bif}(\mathcal{P}_d)$  et que  $p$  possède un point périodique répulsif  $z_0$  tel que :  $1 < |p'(z_0)| < 1.01$ . Alors il existe une constante  $\kappa_0 = \kappa_0(d)$  telle que si  $|\kappa| > \kappa_0$ , alors  $f$  est dans l'adhérence de l'intérieur de  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ .

Donnons les principales idées de la preuve de ce résultat. Rappelons tout d'abord la définition de la propriété de recouvrement ouvert, déjà rencontrée lors de l'étude des blenders associés aux automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$  :

**Définition 6.4.3.2.** *Soit  $\mathcal{L} = (l_j)_1^d$  une famille de fonctions holomorphes  $l_j : \mathbb{D} \rightarrow l_j(\mathbb{D}) \Subset \mathbb{D}$ . Comme elles sont contractantes, elles définissent un IFS dont l'ensemble limite est :*

$$E = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{|J|=n} l_J(\mathbb{D})$$

où  $l_J = l_{j_n} \circ \dots \circ l_{j_1}$ . On dit que  $\mathcal{L}$  satisfait la propriété de recouvrement ouvert si il existe un ouvert  $\Delta \Subset \mathbb{D}$  tel que  $\overline{\Delta} \subset \bigcup_{j=1}^d l_j(\Delta)$ . Alors en particulier  $\Delta \subset E$ . Il est immédiat que la propriété de recouvrement ouvert est ouverte.

Le lemme suivant donne un IFS simple qui possède la propriété de recouvrement ouvert. C'est en quelque sorte un toy-model unidimensionnel pour ce qui va se passer en deux dimensions.

**Lemme 6.4.3.3.** *Soit  $d \geq 3$  et  $\mathcal{L} = (l_j)_1^d$  l'IFS engendré par les applications affines :*

$$l_j : z \rightarrow mz + \alpha_j(1 - |m|)e^{\frac{2\pi i}{d}j}$$

où  $0.98 < |m| < 1$  et  $\alpha_j$  est tel que  $\frac{3}{5} < |\alpha_j| < 1$  et  $|\text{Arg}(\alpha_j)| < \frac{\pi}{20}$ . Alors  $\mathcal{L}$  satisfait la propriété de recouvrement ouvert pour  $\Delta = \mathbb{D}(0, \frac{1}{10})$ .

On peut donner maintenant une version bidimensionnelle du lemme précédent avec cette fois-ci un IFS en dimension 2. Dans un certain sens, cet IFS présente une direction pour laquelle il satisfait la propriété de recouvrement ouvert :

**Lemme 6.4.3.4.** *Soit  $d \geq 3$  et  $\mathcal{L} = (L_j)_1^d$  l'IFS engendré par des biholomorphismes  $L_j$  de la forme :*

$$L_j(z, w) = (l_j(z), \varphi_j(z, w))$$

On suppose que  $l_j$  est de la forme :

$$l_j : z \rightarrow mz + \alpha_j(1 - |m|)e^{\frac{2\pi i}{d}j}$$

où  $0.98 < |m| < 1$ ,  $0.7 < |\alpha_j| < 0.9$ ,  $|\text{Arg}(\alpha_j)| < \frac{\pi}{40}$  et  $\varphi_j$  est tel que :

$$\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right| < 1 \text{ et } \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial w} \right| < 1/2$$

En particulier, les biholomorphismes  $L_j$  sont des contractions qui définissent un IFS d'ensemble limite  $E$ . Alors tout graphe vertical de pente bornée par  $\frac{1}{100}(1 - |m|)$  et qui intersecte  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{10}) \times \mathbb{D}$  intersecte  $E$ .

Associons une définition à une telle situation. On obtient un ensemble hyperbolique qui présente une propriété assez similaire à celle vérifiée par les blenders associés aux automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$ . Comme l'ensemble hyperbolique n'est cette fois-ci pas de type selle, on parlera plutôt de blender de type répulsif.

**Définition 6.4.3.5.** Soit  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  un endomorphisme holomorphe. On suppose qu'il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel que :

1. il existe  $p$  ouverts  $U_1, \dots, U_p \Subset U$  tels que  $f$  induit un biholomorphisme de  $U_j$  sur  $U$  pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  et tel que  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$  est un ensemble de Cantor dynamique qui est un ensemble hyperbolique répulsif pour  $f$
2. il existe un ouvert de disques  $\Delta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui intersectent tous l'ensemble de Cantor dynamique  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$

On dira alors que  $f$  a un blender (de type répulsif), ou bien que  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$  est un blender (de type répulsif) pour  $f$ .

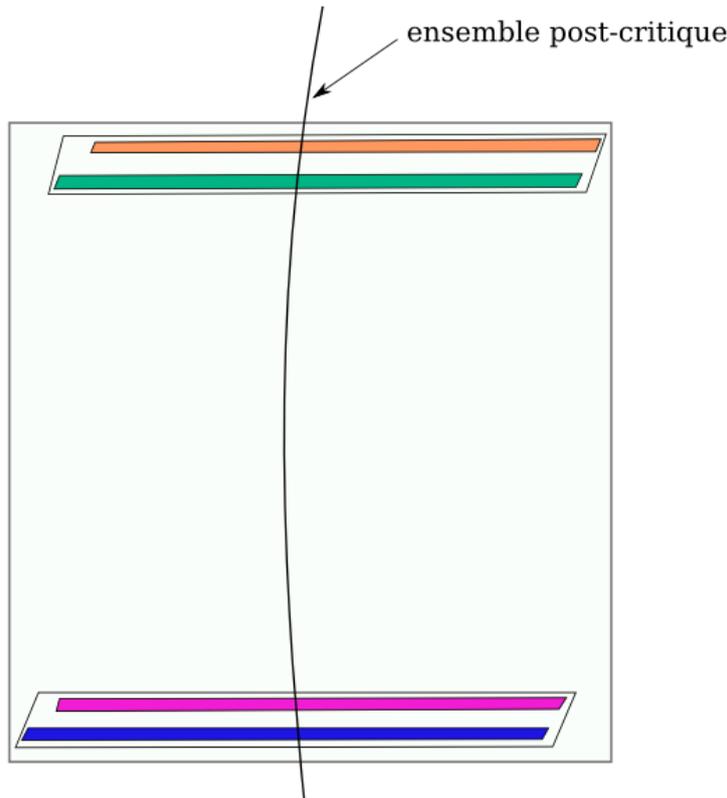


Figure 15 : Intersecter la courbe postcritique et le blender

Si  $p$  et  $q$  sont bien choisis, on peut créer dans  $J^*(f)$  l'ensemble limite d'un IFS. Cet IFS est donné par des branches inverses de  $f$  sur  $\mathbb{D}^2$  dont on peut vérifier qu'elles satisfont bien aux hypothèses du lemme précédent. En particulier, l'ensemble limite de l'IFS intersecte tout graphe vertical de pente suffisamment petite et bien positionné :  $f$  admet un blender. On peut enfin s'arranger pour avoir dans la courbe postcritique un graphe vertical convenable. Comme à la

fois le blender et l'orientation de la courbe sont robustes, on peut alors conclure à des intersections persistantes entre l'ensemble postcritique et l'ensemble limite de l'IFS, qui est un ensemble hyperbolique répulsif.

On obtient finalement le résultat suivant, qui contraste de manière flagrante avec la situation en dimension 1 :

**Théorème (Dujardin [27]) 6.4.3.6.** *Le lieu de bifurcation  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$  dans la famille  $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  des endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$  est d'intérieur non vide pour tout  $d \geq 2$ .*

Signalons aussi que des bifurcations robustes ont aussi été obtenues dans la famille de Desbosves par Bianchi et Taflin ([66]).

#### 6.4.4 Blenders et produits

Il est vraisemblable de penser que des blenders apparaissent dès qu'une bifurcation se produit. Les résultats de Dujardin ont été améliorés dans ce sens par Taflin dans [65]. Dans son article, Taflin parvient à créer un blender non pas seulement dans des cas particuliers mais pour toutes les applications produit dès lors qu'un des deux facteurs présente une bifurcation :

**Théorème (Taflin [65]) 6.4.4.1.** *Soit  $d \geq 2$ . Si  $p$  et  $q$  sont deux polynômes de  $\mathcal{P}_d$  tels que  $p \in \text{Bif}(\mathcal{P}_d)$ , alors l'application produit  $(p, q) \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  peut être approximée par des applications polynomiales semi-produits ayant un itéré qui a un blender.*

Une conséquence immédiate de ce résultat est le corollaire suivant :

**Corollaire 6.4.4.2.** *Le lieu de bifurcation de la famille  $\mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_d$  est contenu dans l'adhérence de l'intérieur de  $\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$  :*

$$\text{Bif}(\mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_d) \subset \overline{\text{Bif}(\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))}^{\circ}$$

Donnons de manière heuristique les principales idées de la preuve de ce résultat. Tout d'abord, il est possible de perturber l'application  $(z, w) \mapsto (z, q^l(w))$  pour créer un blender de type répulsif si  $l \geq 1$  est suffisamment grand. Pour montrer ceci, on commence par choisir un entier  $l$  de telle sorte que  $q^l$  possède trois branches inverses suffisamment "petites" : il existe trois ouverts  $V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{C}$  tels que  $q^l$  est univalente de  $V_i$  dans  $\mathbb{D}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Ensuite, on perturbe l'application  $(z, w) \mapsto (z, q^l(w))$  pour obtenir une application de la forme  $(z, w) \mapsto (h(z, w), q^l(w))$  où l'application  $h(z, w) = z + \tilde{h}(z, w)$  satisfait dans un certain sens la propriété de recouvrement ouvert. Plus précisément, à chacune des trois branches inverses  $V_1, V_2, V_3$  de  $\mathbb{D}$  pour  $q^l$  correspond une branche inverse  $U_i$  de  $\mathbb{D}^2$  pour  $(z, w) \mapsto (h(z, w), q^l(w))$ . On obtient ainsi un IFS à trois branches dans  $\mathbb{C}^2$  et on peut choisir les paramètres de telle sorte que cet IFS satisfait des conditions identiques à celles du Lemme 6.4.3.4. En particulier,  $(z, w) \mapsto (h(z, w), q^l(w))$  a un blender. Signalons que cette construction est ici possible pour deux raisons :

1. initialement, la première coordonnée est juste  $z = 1 \cdot z$ , on peut donc choisir une contraction selon  $z$  aussi faible que l'on veut pour construire le blender

2. le nombre d'itérations  $l$  est pris suffisamment élevé, de telle sorte que sur chaque  $U_i$  on aura une translation horizontale suffisamment précise dans une certaine direction, afin de vérifier la propriété de recouvrement ouvert. Enfin, il reste encore à montrer comment il est possible d'obtenir un itéré de la forme  $(z, w) \mapsto (h(z, w), q^l(w))$  en perturbant directement l'application de départ. Des calculs de développements limités montrent que ces perturbations peuvent en fait être réalisées avec l'itérée  $l^{\text{ème}}$  d'une perturbation de  $(z, w) \mapsto (p(z), q(w))$ .

Donnons un dernier exemple d'application de ce résultat. Taffin parvient à montrer que les bifurcations de certains endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  impliquent la présence d'ensembles attractifs avec une propriété particulière. On commence par rappeler la définition suivante :

**Définition 6.4.4.3.** *Un ensemble attractif  $A$  d'un endomorphisme holomorphe  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est un ensemble invariant compact muni d'un ouvert  $U$  (qu'on appellera une région piège) telle que  $f(U) \subset U$  et  $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$ . Un tel sous-ensemble de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est appelé propre si  $A \neq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .*

Taffin utilise des blenders de type selle pour produire des ensembles attractifs d'intérieur non vide :

**Théorème (Taffin [65]) 6.4.4.4.** *Le lieu de bifurcation de la famille  $\mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_d$  est contenu dans l'adhérence de l'intérieur des applications de  $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$  possédant un ensemble attractif propre d'intérieur non vide.*



# Généralités sur les exemples de Lattès

# 7

## 7.1 Exemples de Lattès en dimension 1

### 7.1.1 Introduction, définitions et premières propriétés

Les exemples de Lattès sont des exemples particulièrement intéressants de fractions rationnelles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  apparus dans un des derniers articles de Samuel Lattès paru peu avant son décès en 1918. Pour être plus précis, ils avaient déjà fait leur apparition près d'un demi-siècle plus tôt dans un article de Ernst Schröder. Dans son article [37], Lattès s'intéresse aux inverses des linéarisations de Koenigs autour des points périodiques d'une fraction rationnelle  $f$ . Pour une fraction rationnelle quelconque, elles dépendent fortement du point périodique considéré, mais Lattès observe que dans certains cas très particuliers, on peut choisir la même linéarisation pour tous les points périodiques. Ces rares exemples sont les quotients finis d'applications affines.

**Définition 7.1.1.1.** *Une fraction rationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est un quotient fini d'application affine si elle est semi-conjuguée à une application affine sur un quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau  $\Lambda$ . Il existe donc un réseau  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}$  tel que le diagramme commutatif suivant est satisfait :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{C}/\Lambda \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

où  $\Pi$  est un revêtement ramifié de l'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  par  $\mathbb{C}/\Lambda$  et  $\mathcal{L}$  est une application affine.

On peut distinguer deux cas selon que le réseau  $\Lambda$  est de rang 1 ou 2. Si le rang est égal à 1, il est possible de montrer que  $f$  est semi-conjuguée ou bien à une application puissance ou bien à un polynôme de Chebyshev. Dans le premier cas, l'ensemble de Julia est égal à un cercle et dans le second cas, c'est un intervalle.

C'est le cas d'un réseau de rang égal à 2 qui est le plus intéressant. Ici, le quotient  $\mathbb{C}/\Lambda$  est un tore. L'application quotient, dont des exemples ont été introduits par Lattès dans son article [37], est appelée un exemple de Lattès en son honneur :

**Définition 7.1.1.2.** *Un exemple de Lattès est un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$  qui est semi-conjugué à une application affine sur un tore. Pour un exemple de Lattès, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{T} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{L} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

où  $\mathbb{T}$  est un tore complexe de dimension 1,  $\Pi$  est un revêtement ramifié de l'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  par le tore  $\mathbb{T}$  et  $\mathcal{L}$  est une application affine.

Une bonne référence sur les exemples de Lattès en général est [45]. L'application affine à laquelle est conjugué un exemple de Lattès conserve un réseau  $\Lambda$ , et est nécessairement de la forme  $z \mapsto az + b$  où  $|a| \geq 1$ . On a donc immédiatement le résultat suivant :

**Théorème 7.1.1.3.** *Soit  $L$  un exemple de Lattès. Les points périodiques de  $L$  sont répulsifs et denses dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .*

Comme l'ensemble de Julia  $J(L)$  de  $L$  est l'adhérence des points périodiques répulsifs, on a également :

**Corollaire 7.1.1.4.** *L'ensemble de Julia  $J(L)$  est égal à  $J(L) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  pour tout exemple de Lattès  $L$ .*

On note dans la suite  $C_L$  l'ensemble critique de  $L$ ,  $V_L$  l'ensemble des valeurs critiques de  $L$  et  $V_\Theta$  l'ensemble des valeurs critiques de  $\Theta$ . On note  $P_L$  l'ensemble postcritique de  $L$  :

$$P_L = \bigcup_{n \geq 0} L^n(V_L)$$

Une propriété très importante des exemples de Lattès réside dans le fait que ce sont des applications postcritiquement finies :

**Proposition 7.1.1.5.** *Tout exemple de Lattès de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est postcritiquement fini et l'orbite de tout point critique de  $L$  est incluse dans l'ensemble des valeurs critiques  $V_\Theta$  de  $\Theta$ . Plus précisément, l'ensemble postcritique  $P_L = \bigcup_{n \geq 0} L^n(V_L)$  de  $L$  est égal à l'ensemble  $V_\Theta$  qui est fini.*

*Démonstration.* Soit  $d_L(z)$  le degré local de la fraction rationnelle  $L$  au point  $z$ . Alors on a  $1 \leq d_L(z)$  et  $d_L(z) > 1$  si et seulement si  $z$  est un point critique de  $L$ . Soit  $\tau_1 \in \mathbb{T}$ ,  $\tau_2 \in \mathbb{T}$  et  $z_1 = \Theta(\tau_1)$ ,  $z_2 = \Theta(\tau_2)$ . On suppose que l'on a  $\tau_2 = \mathcal{L}(\tau_1)$  et  $z_2 = L(z_1)$ . Comme l'application  $\mathcal{L}$  est de degré 1 partout et comme on a :

$$\Theta \circ \mathcal{L} = L \circ \Theta$$

on a alors :

$$d_\Theta(\tau_2) = d_\Theta(\tau_1) \cdot d_L(z_1)$$

Comme  $\mathcal{L}$  et  $\Theta$  sont surjectives, on en déduit que  $z_2$  est valeur critique de  $\Theta$  si et seulement si  $z_2$  est une valeur critique de  $L$  ou bien a une préimage  $z_1$  par  $L$  qui est une valeur critique de  $\Theta$  ou bien les deux. Ceci implique que  $V_\Theta = V_L \cup L(V_\Theta)$ . Une récurrence facile montre que l'on a  $L^n(V_L) \subset V_\Theta$  pour tout  $n \geq 1$  et donc  $P_L \subset V_\Theta$ . L'inclusion réciproque est claire.  $\square$

### 7.1.2 Classification

Il est possible de classifier les exemples de Lattès. Une première étape consiste à classifier les différents revêtements ramifiés possibles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  par un tore  $\mathbb{T}$  pour un exemple de Lattès. Ensuite il s'agit de déterminer les applications affines  $\mathcal{L}$  possibles. On peut tout d'abord montrer que le revêtement ramifié de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  par un tore  $\mathbb{T}$  permet d'identifier  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  à un quotient  $\mathbb{T}/G$  où  $G$  est un groupe fini de rotations.

**Proposition 7.1.2.1.** *Il existe un groupe cyclique fini  $G$  de rotations autour d'un point base du tore  $\mathbb{T}$  tel que  $\Theta(\tau') = \Theta(\tau)$  si et seulement si  $\tau' = g\tau$  pour un certain  $g \in G$ . En particulier,  $\Theta$  induit un homéomorphisme du quotient  $\mathbb{T}/G$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . L'ordre  $n$  du groupe cyclique des rotations du tore tel que  $\mathbb{T}/G_n \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est nécessairement 2, 3, 4 ou 6.*

Le revêtement ramifié  $\Theta : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}/G_n = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  peut être décrit grâce à des fonctions de la théorie des fonctions elliptiques. Dans le cas  $n = 2$ , il est possible d'identifier  $\Theta$  et la fonction de Weierstrass  $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \mapsto \mathbb{C}$  associée au réseau  $\Lambda$ . Pour  $n = 3$ , il est possible de prendre la dérivée  $\wp'$  de cette même fonction de Weierstrass. Enfin, pour  $n = 4$ , on prend  $\wp^2$  et pour  $n = 6$ , on prend  $(\wp')^2$ . Une fois classifiés les revêtements ramifiés possibles, on peut obtenir la classification suivante pour les exemples de Lattès :

**Théorème 7.1.2.2.** *Une fraction rationnelle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est un exemple de Lattès si et seulement si elle est holomorphiquement conjuguée à une application de la forme  $\mathcal{L}/G_n : \mathbb{T}/G_n \mapsto \mathbb{T}/G_n$  où :*

1.  $\mathbb{T}$  est un tore  $\mathbb{C}/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}$
2.  $G_n$  est le groupe des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité agissant sur  $\mathbb{T}$  par rotation autour d'un point base, avec  $n$  égal soit à 2, 3, 4 ou 6
3.  $\mathbb{T}/G_n$  est l'espace quotient muni de sa structure naturelle de surface de Riemann
4.  $\mathcal{L}$  est une application affine de  $\mathbb{T}$  dans lui-même qui commute avec un générateur de  $G_n$
5.  $\mathcal{L}/G_n$  est l'application holomorphe induite par  $\mathcal{L}$

### 7.1.3 Bifurcations

Rees a montré que le lieu de bifurcation a une mesure positive dans la famille des fractions rationnelles :

**Théorème (Rees [56]) 7.1.3.1.** *Le lieu de bifurcation  $\text{Bif}(\text{Rat}_d)$  dans la famille  $\text{Rat}_d$  des fractions rationnelles de degré  $d$  est de mesure de Lebesgue positive pour tout  $d \geq 2$ . En particulier, il est de mesure positive dans n'importe quel voisinage de toute fraction rationnelle dont tous les points critiques sont strictement préperiodiques, en particulier un exemple de Lattès.*

Ce résultat nous intéresse particulièrement puisqu'il constitue une forte motivation pour chercher des bifurcations robustes au voisinage des exemples de Lattès en dimension 2, comme on le verra dans le chapitre suivant.

### 7.1.4 Compléments

On peut signaler, à titre culturel, que les exemples de Lattès interviennent dans la détermination des endomorphismes holomorphes permutables de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . On les retrouve parmi les trois types d'applications qui sont des quotients finis d'applications affines.

**Théorème (Ritt [57]) 7.1.4.1.** *Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  qui commutent :  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ . On suppose que  $f_1^n \neq f_2^m$  pour tous entiers  $n, m$ . Alors, après conjugaison, le couple  $(f_1, f_2)$  est d'un des trois types suivants :*

1.  $(z_1^{\pm d_1}, \omega z_2^{\pm d_2})$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont des entiers et  $\omega$  une racine  $(d_1 - 1)^{\text{eme}}$  de l'unité
2.  $(\pm C_{d_1}, \pm C_{d_2})$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont des entiers,  $C_{d_1}$  et  $C_{d_2}$  sont des polynômes de Chebyshev et les signes  $\pm$  dépendent des parités de  $d_1$  et  $d_2$
3.  $(L_1, L_2)$  où  $L_1$  et  $L_2$  sont des exemples de Lattès semi-conjugués à des applications affines  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sur le même tore avec  $\mathbb{T}$  une projection  $\Pi$  identique

Signalons que ces résultats ont été généralisés en dimension supérieure par les travaux de Dinh et Sibony ([23]).

On peut distinguer aussi les exemples de Lattès en deux classes distinctes avec des comportements très différents : ceux qui persistent après déformation et les autres. On a donc des exemples de Lattès qui sont isolés ou non.

**Définition 7.1.4.2.** *Un exemple de Lattès  $L : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  est dit flexible si et seulement s'il est possible de faire varier  $\Lambda$  et  $L$  continûment afin d'obtenir d'autres exemples de Lattès qui ne lui sont pas conformément conjugués.*

On dispose des deux caractérisations suivantes. Pour la première, on reprend les notations du Théorème 7.1.2.2. On peut se référer à [45].

**Théorème 7.1.4.3.** *Soit  $L$  un exemple de Lattès. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $L$  est flexible
2. le groupe  $G_n$  tel que  $\mathbb{T}/G_n \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  vérifie  $n = 2$  et la dérivée de l'application affine  $\mathcal{L}$  induite sur  $\mathbb{T}$  est un entier
3. le multiplicateur de tout point périodique de l'application affine  $\mathcal{L}$  est un entier

## 7.2 Exemples de Lattès en dimension 2

### 7.2.1 Définition et classification

Les exemples de Lattès admettent une généralisation en dimension supérieure. Pour le voir, il suffit de prendre le produit de deux exemples de Lattès en dimension 1, ce qui donne une application produit sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et ensuite se ramener à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (voir la définition d'application de Ueda plus loin). Mais il se trouve qu'il existe des exemples de Lattès qui ne sont pas des produits. On peut se référer par exemple à [8], [29] ou [30] au sujet des exemples de Lattès en dimension supérieure.

**Définition 7.2.1.1.** *Un exemple de Lattès est un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d \geq 2$  qui est semi-conjugué à une application affine (nécessairement dilatante) sur un tore. Pour un exemple de Lattès, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{T} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{L} & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{array}$$

où  $\mathbb{T}$  est un tore complexe de dimension 2,  $\Pi$  est un revêtement ramifié de l'espace projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  par le tore  $\mathbb{T}$  et  $\mathcal{L}$  est une application affine.

Comme dans le cas de la dimension 1, on a toujours les résultats suivants :

**Théorème 7.2.1.2.** *Les points périodiques de  $L$  sont répulsifs et denses dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  pour tout exemple de Lattès  $L$ . L'ensemble de Julia  $J(L)$  de  $L$  est donc égal à  $J(L) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  pour tout exemple de Lattès  $L$ .*

Une propriété importante des exemples de Lattès, analogue au cas de la dimension 1, réside dans le fait qu'ils sont postcritiquement finis :

**Théorème 7.2.1.3.** *Soit  $L$  un exemple de Lattès induisant une application affine sur un tore  $\mathbb{T}$ . Alors l'ensemble des valeurs critiques de  $L$  est inclus dans l'ensemble des valeurs critiques du revêtement ramifié  $\Pi$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  par le tore  $\mathbb{T}$ .*

**Notation 7.2.1.4.** *Dans ce qui suit, pour tout  $\tau \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $\text{Im}(\tau) > 0$ , on appellera  $L(\tau)$  le réseau de  $\mathbb{C}$  suivant :  $L(\tau) = \mathbb{Z} + \tau \cdot \mathbb{Z}$  et par  $L^2(\tau)$  le réseau produit associé  $L^2(\tau) = L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On note aussi  $\xi = e^{i\frac{2\pi}{6}}$ .*

On aura besoin des groupes suivants dans la suite :

**Notation 7.2.1.5.** *Pour  $n, p \geq 1$ , on note  $G(n, p, 2)$  le sous-groupe de  $U(2)$  engendré par :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{2\pi i/n} \\ e^{-2\pi i/n} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} e^{p \cdot 2\pi i/n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En dimension 2, il est également possible de construire un homéomorphisme entre  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et le quotient de  $\mathbb{T}$  par un groupe  $G$ . Le résultat suivant permet tout d'abord de classifier les différents groupes  $G$  et les projections  $\Pi$  qui apparaissent associés aux exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On peut trouver cette classification dans [35].

**Proposition 7.2.1.6.** *Si une application affine  $\mathcal{L}$  du tore  $\mathbb{T}$  est induite par un exemple de Lattès  $L$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , alors le réseau  $\Lambda$  tel que  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^2/\Lambda$ , le groupe  $G$  tel que  $\mathbb{T}/G \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et la projection associée  $\Pi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  sont de l'une des six formes suivantes :*

Cas 1  $\Lambda = L^2(\tau)$ ,  $G = G_1 = G(2, 1, 2)$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [\wp(x) + \wp(y) : \wp(x)\wp(y) : 1]$

Cas 2  $\Lambda = L^2(\xi)$ ,  $G = G_2 = G(3, 1, 2)$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [\wp'(x) + \wp'(y) : \wp'(x)\wp'(y) : 1]$

- Cas 3*  $\Lambda = L^2(i)$ ,  $G = G_3 = G(4, 1, 2)$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [\wp^2(x) + \wp^2(y) : \wp^2(x)\wp^2(y) : 1]$
- Cas 4*  $\Lambda = L^2(\xi)$ ,  $G = G_4 = G(6, 1, 2)$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [(\wp')^2(x) + (\wp')^2(y) : (\wp')^2(x)(\wp')^2(y) : 1]$
- Cas 5*  $\Lambda = L^2(i)$ ,  $G = G_5 = G(4, 2, 2) \rtimes \mathbb{Z} \cdot \frac{1+i}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [(\wp(x)\wp(y) + e_1^2)^2 : (\wp(x) + \wp(y))^2 : (\wp(x)\wp(y) - e_1^2)^2]$
- Cas 6*  $\Lambda = L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi \end{pmatrix}$ ,  $G = G_6 = G(3, 3, 2)$ ,  
 $\Pi : (x, y) \mapsto [\wp'(x_1) - \wp'(y_1) : \wp(x_1) - \wp(y_1) : \wp'(x_1)\wp(y_1) - \wp(x_1)\wp'(y_1)]$

où  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $e_1 = \wp(\frac{1}{2})$  et  $(x_1, y_1)$  est fonction de  $(x, y)$  tel que :

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il est ensuite possible de classifier non seulement les différents tores  $\mathbb{T}$ , groupes  $G$  et projections  $\Pi$  possibles, mais aussi de trouver une classification des applications  $L$  selon qu'elles possèdent ou non une structure de produit. En effet, en dimension 2, certains exemples de Lattès sont des produits. On les appelle des applications de Ueda, qui les a introduites.

**Definition 7.2.1.7.** *Une application de Ueda est un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  tel qu'il existe un exemple de Lattès  $\tilde{L}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  avec :*

$$L \circ \eta = \eta \circ (\tilde{L}, \tilde{L})$$

où  $\eta$  est l'application de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  donnée par la projectivisation de  $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ , c'est-à-dire :

$$\eta : ([x : x'], [y : y']) \mapsto [xy' + x'y : xy : x'y']$$

En particulier,  $L$  est semi-conjuguée à une application affine sur le tore  $\mathbb{T}$  et est donc un exemple de Lattès.

La notion suivante concernera les exemples de Lattès qui n'ont pas une structure de produit (on peut se référer à [20]).

**Définition 7.2.1.8.** *Soit  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  le plan projectif dual, c'est-à-dire l'ensemble des droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Un tissu algébrique est la donnée d'une courbe réduite  $C' \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ . Le dual d'une courbe  $C$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est la courbe de  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  formée par l'ensemble des tangentes à  $C$ . On dit que le tissu est invariant par un endomorphisme holomorphe  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  si  $f$  envoie n'importe quelle droite du tissu sur une autre droite du tissu.*

La classification suivante montre une dichotomie : pour un exemple de Lattès  $L$ , quitte à itérer  $L$ , alors  $L$  est ou bien une application de Ueda ou bien préserve un tissu algébrique. Les six cas se réfèrent à la proposition 8.3.1.1.

**Théorème (Rong [30]) 7.2.1.9.** *Si  $L$  est un exemple de Lattès, alors une certaine itérée de  $L$  est ou bien une application de Ueda ou bien préserve le tissu algébrique associé à une courbe cubique lisse. Plus précisément :*

1. dans le Cas 1, ou bien  $L$  ou bien  $L^2$  est une application de Ueda
2. dans les Cas 2, 3 et 4,  $L$  est une application de Ueda
3. dans le Cas 5, ou bien  $L$  ou bien  $L^2$  ou bien  $L^3$  est semi-conjuguée à une application de Ueda
4. dans le Cas 6, ou bien  $L$  ou bien  $L^2$  ou bien  $L^3$  ou bien  $L^6$  préserve le tissu algébrique associé à une courbe cubique lisse

## 7.2.2 Compléments

On dispose de la caractérisation suivante qui est due à Berteloot et Loeb :

**Théorème (Berteloot, Loeb[5]) 7.2.2.1.** *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . On suppose que le courant de Green  $T$  de  $f$  est lisse et strictement positif sur un ouvert de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Alors  $f$  est un exemple de Lattès.*

Et également la suivante due à Berteloot et Dupont :

**Théorème (Berteloot, Dupont [8]) 7.2.2.2.** *Les seuls endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dont la mesure de Green est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\omega^2$  sont les exemples de Lattès.*

**Corollaire 7.2.2.3.** *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . On a équivalence entre :*

1. la dimension de la mesure de Green  $\mu$  de  $f$  est égale à 4
2. les exposants de Lyapunov de  $\mu$  sont minimaux égaux à  $\log \sqrt{d}$
3.  $f$  est un exemple de Lattès

Enfin, donnons des exemples explicites d'exemples de Lattès. Les trois endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui suivent sont des exemples de Lattès. Ils ont été introduits par Dupont dans [29].

**Théorème (Dupont [29]) 7.2.2.4.** *Les endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  suivants :*

$$L_1 : [x : y : z] \mapsto [(-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2 : (x + y - z)^2]$$

$$L_2 : [x : y : z] \mapsto [(x - y + z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x + y - z)^2]$$

$$L_3 : [x : y : z] \mapsto [(x + y - z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2]$$

sont des exemples de Lattès.

On a vu que les exemples de Lattès sont postcritiquement finis. La réciproque est fautive en général (c'était déjà le cas en dimension 1) :

**Théorème (Dupont [29]) 7.2.2.5.** *L'endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  suivant :*

$$g : [x : y : z] \mapsto [(x - 2y)^2 : (x - 2z)^2 : x^2]$$

est critiquement fini mais ce n'est pas un exemple de Lattès.

### 7.2.3 Bifurcations

Berteloot et Bianchi ont montré dans [6] que la dimension de Hausdorff du lieu de bifurcation près des exemples de Lattès est maximale. Ceci est une généralisation partielle du Théorème de Rees au cas de la dimension 2.

**Théorème (Berteloot, Bianchi [6]) 7.2.3.1.** *Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}}$  une famille holomorphe d'endomorphismes holomorphes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de degré  $d$  paramétrée par le disque unité  $\mathbb{D}$ . On suppose que  $f_0$  est un exemple de Lattès et que  $0$  est accumulé par des paramètres  $\lambda \in \mathbb{D}$  tels que  $f_\lambda$  n'est pas un exemple de Lattès. Alors, pour tout voisinage  $\Lambda_0 \subset \mathbb{D}$  de  $0$ , on a :*

$$\dim_H \text{Bif}((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}) = 2$$

Donnons les principales idées de la preuve de ce résultat. Il s'agit toujours de créer des intersections entre l'ensemble postcritique et un répulseur hyperbolique contenu dans l'ensemble de Julia pour obtenir des bifurcations. Pour  $\lambda$  proche de  $0$ , on construit une lamination  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbb{D} \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui est transversalement un ensemble de Cantor et qui est formée de graphes sur  $\lambda \in \mathbb{D}$ . Chacun de ces graphes décrit le mouvement d'un point dans  $J^*(f_\lambda)$ . D'après des travaux de Pesin, la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor obtenu par coupe transversale de  $\mathcal{G}$  dépend des exposants de Lyapunov de  $f_\lambda$ . Or, on a vu qu'une des caractérisations disponibles des exemples de Lattès est précisément la minimalité de ses exposants de Lyapunov. Ceci implique qu'au voisinage d'un exemple de Lattès, l'intersection de  $\mathcal{G}$  avec une hypersurface sera un ensemble de Cantor dont la dimension de Hausdorff pourra être prise arbitrairement proche de 2. On peut prendre comme hypersurface l'ensemble postcritique. Dans ce cas, chaque point d'intersection entre l'ensemble postcritique et  $\mathcal{G}$  (c'est-à-dire chaque point de l'ensemble de Cantor) est alors un paramètre de Misiurewicz. Comme ceux-ci sont denses dans le lieu de bifurcation, en rapprochant  $\lambda$  de  $0$ , on fait aussi tendre la dimension de Hausdorff du lieu de bifurcation vers 2.

Dans le chapitre suivant, nous allons montrer que quitte à itérer, on peut obtenir en fait des ouverts de bifurcations.



# 8

## Bifurcations of Lattès maps

### 8.1 Main result and outline of proof

We saw it was enough to create persistent intersections between the postcritical set and a hyperbolic repeller contained in the Julia set in order to construct robust bifurcations. Dujardin asked in [27] if it was possible to find such open sets of bifurcations near any Lattès map. In this chapter we give a partial answer to this question. Here is our main result :

**Theorem C.** *For every two-dimensional complex torus  $\mathbb{T}$ , there is an integer  $d$  (depending on the torus  $\mathbb{T}$ ) such that every Lattès map defined on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  of degree  $d' > d$  induced by an affine map on  $\mathbb{T}$  is in the closure of the interior of the bifurcation locus in  $\text{Hol}_{d'}$ .*

Let us remark that the degree  $d$  is unknown (the situation here is similar to Buzzard's article [18]). Moreover,  $d$  depends on the torus  $\mathbb{T}$ . This is due to the necessity of making only holomorphic perturbations. Let us also point out that it is always possible to find Lattès maps of arbitrarily high degree associated to a given torus  $\mathbb{T}$  (see the remark after Proposition 8.3.1.3). As an immediate consequence of the theorem we get :

**Corollary.** *For every Lattès map  $L$  of degree  $d_L$ , there is an integer  $n(L)$  such that for every  $n \geq n(L)$ , the iterate  $L^n$  is in the closure of the interior of the bifurcation locus in  $\text{Hol}_{d_L^n}$ .*

To prove this result, we create persistent intersections between the postcritical set and a hyperbolic repeller contained in the Julia set. Our proof has two main parts : first, we create a toy-model which allows to obtain intersections between the limit set of some particular type of IFS, called correcting IFS, and a curve that is "well-oriented". Then, in a second time, we perturb the Lattès map to create both the correcting IFS and the well-oriented curve inside the postcritical set. This construction exhibits properties somehow similar to the *blendings* of Bonatti-Diaz ([14]), with the difference that the covering property holds at the level of the tangent maps of the IFS (see also the notion of *parablenders* appeared in the work of Berger ([4])).

In a first part, we develop an intersection principle (see Proposition 8.2.1.6). A grid of balls  $G$  in  $\mathbb{C}^2$  is the union of a finite number of balls regularly located at  $N^4$  vertices of a lattice defined by a  $\mathbb{R}$ -basis of  $\mathbb{C}^2$ . If we consider a line  $\mathfrak{C}$ ,

a pigeonhole argument ensures that if  $\mathfrak{C}$  is well oriented and  $G$  has a sufficient number of balls  $N = N(r)$  (where  $r$  is the relative size of a ball compared to the mesh of the grid) then  $\mathfrak{C}$  intersects a ball of  $G$ . We consider a class of IFS such that each inverse branch is very close to a homothety. When we iterate them, a drift can appear : the iterates become less and less conformal. Our class of IFS (called correcting IFS) is designed so that they have the property of correcting themselves from the drift. A linear correction principle is given in Proposition 8.2.1.10. First, we treat the case of a curve close to a line and an IFS close to be linear. Our interest in such IFS is that any well-oriented quasi-line  $\mathfrak{C}$  intersects the limit set of a correcting IFS. To prove this result, which is Proposition 8.2.3.1, we ensure that at each step the quasi-line  $\mathfrak{C}$  intersects a grid of ball  $G^j$  which is dynamically defined with the inverse branches of the IFS. Then we use inductively the intersection and the correction principles to ensure that at the next step,  $\mathfrak{C}$  intersects a grid of balls  $G^{j+1}$  with bounded drift. The intersection of the grids  $G^j$  is in the limit set, so we produce an intersection between  $\mathfrak{C}$  and the limit set of the IFS. Since the property of being correcting is open, this intersection is persistent.

In the second part, we make three successive perturbations of a Lattès map  $L$ , denoted by  $L'$ ,  $L''$  and  $L'''$ , in such a way that  $L'''$  has a robust bifurcation. We work in homogenous coordinates and do explicit perturbations of the following form :

$$[P_1 : P_2 : P_3] \rightarrow [P_1 + R_1 P_3 : P_2 + R_2 P_3 : P_3]$$

where  $R_1$  and  $R_2$  are rational maps. An important technical point is that we can choose the coordinates so that  $P_3$  splits. Then if  $R_1$  and  $R_2$  are well chosen the degree does not change. The first perturbation  $L'$  (Propositions 8.4.4.4 and 8.4.4.5) is intended to create a correcting IFS in a ball  $\mathfrak{B}$  in  $\mathbb{C}^2$ . Another important technical point is that we can find some critical point  $c$  which is preperiodic, with associated periodic point  $p_c$  such that both the preperiod  $n_c$  and the period  $n_{p_c}$  of the preperiodic critical orbit are bounded independently of  $L$  (see Proposition 8.3.3.1). Then we want to create a well-oriented quasi-line inside the postcritical set which intersects  $\mathfrak{B}$ . The second perturbation  $L''$  in Lemma 8.4.5.10 ensures that the postcritical set at  $p_c$  is not singular. The third and last perturbation  $L'''$  is given in Lemma 8.4.5.11. It is intended to control the differential at  $p_c$ . This allows us to fix the orientation of the postcritical set at  $p_c$  and then we use the linear dynamics of the Lattès map  $L$  on the torus  $\mathbb{T}$  in order to propagate this geometric property up to  $\mathfrak{B}$  (see Proposition 8.4.5.3). Note that the periodic point need not lie in  $\mathfrak{B}$ . At this stage we have both a correcting IFS and a well-oriented quasi-line so we are in position to conclude in section 8.5.

In section 8.2, we develop the theory of intersection between a quasi-line and the limit set of a correcting IFS : the intersection principle and the correction principle are stated in subsection 8.2.1 and we prove the intersection result in subsection 8.2.3. In section 8.3, we prove a few properties about Lattès maps which will be useful later. Some complications arise from Lattès maps whose linear part is not the identity. In section 8.4, we develop the perturbative argument. After giving some preliminaries (subsection 8.4.1) and fixing many constants (subsections 8.4.2 and 8.4.3), we create a correcting IFS in subsection 8.4.4. In subsection 8.4.5, we create a well oriented curve inside the postcritical

set. Finally, we conclude in section 8.5 by applying the formalism of subsection 8.2.3 to the perturbed map  $L'''$ .

## 8.2 Intersecting a curve and the limit set of an IFS

### 8.2.1 Linear model

In this section, we will work with an IFS, whose maps are small perturbations of homotheties of the form  $\frac{1}{a} \cdot \text{Id}$  with  $a \in \mathbb{R}^*$  and  $|a| > 1$ . This IFS will be obtained by perturbing a Lattès map and its limit set will have persistent intersections with a curve.

**Definition 8.2.1.1.** *Given a  $\mathbb{R}$ -basis  $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in (\mathbb{C}^2)^4$ , a point  $o \in \mathbb{C}^2$ , an integer  $N$  and  $r \in (0, 1)$ , by a grid of balls we mean the union of the balls of radius  $r \cdot \min_{1 \leq i \leq 4} \|u_i\|$  centered at the points  $o + iu_1 + ju_2 + ku_3 + l u_4$  where  $-N \leq i, j, k, l \leq N$ . We will denote it by  $G = (u, o, N, r)$ . The middle part of  $G$  is the set  $\{o + xu_1 + yu_2 + zu_3 + wu_4, 0 \leq |x|, |y|, |z|, |w| \leq \frac{N}{2}\}$ . The hull of  $G$  is the set  $\{o + xu_1 + yu_2 + zu_3 + wu_4, 0 \leq |x|, |y|, |z|, |w| \leq N\}$ . The size of  $G$  is  $\text{size}(G) = 2N \cdot \max_{1 \leq i \leq 4} \|u_i\|$ .*

In the following, the parameter  $r$  will be bounded from below and we will let  $\max_{1 \leq i \leq 4} \|u_i\| \rightarrow 0$  so that the radius of the balls  $r \cdot \min_{1 \leq i \leq 4} \|u_i\|$  will tend to 0. The integer  $N$  will be taken sufficiently large to satisfy some conditions depending on the degree of the Lattès map. Herebelow the notions of "opening" and "slope" are relative to the standard euclidean structure of  $\mathbb{C}^2$ .

**Notation 8.2.1.2.** *For a non zero vector  $w \in \mathbb{C}^2$  and  $\theta > 0$ , we will denote  $C^{w, \theta}$  the cone of opening  $\theta$  centered at  $w$ .*

**Notation 8.2.1.3.** *For any quadruple of non zero vectors  $w_1, w_2, w_3, w_4$  in  $\mathbb{C}^2$ , we will denote  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  its projection onto  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$ . For any matrix  $U \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , we simply denote by  $U \cdot$  the induced action on  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$ .*

**Definition 8.2.1.4.** *The middle part of a ball (resp. the  $\frac{3}{4}$ -part) is the ball of same center and  $\frac{1}{2}$  times its radius (resp.  $\frac{3}{4}$  times its radius).*

**Definition 8.2.1.5.** *A holomorphic curve  $C$  is a  $(\varepsilon, w)$ -quasi-line if  $C$  is a graph upon a disk in  $\mathbb{C} \cdot w$  of slope bounded by  $\varepsilon$  relative to the projection onto  $w$ . A  $(\varepsilon, w)$ -quasi-diameter of a ball  $\mathbb{B}$  is a  $(\varepsilon, w)$ -quasi-line  $C$  intersecting the ball of same center as  $\mathbb{B}$  and of radius  $\frac{1}{10}$  times the radius of  $\mathbb{B}$ .*

Here is our "intersection principle" :

**Proposition 8.2.1.6.** *For every  $u \in (\mathbb{C}^2)^4$ ,  $r > 0$ ,  $\eta > 0$  and  $w_0 \in \mathbb{C}^2$ , there exists a neighborhood  $\mathcal{N}(u)$  of  $\bar{u}$  in  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$ , there exists  $\theta > 0$ ,  $N(r) > 0$  and a vector  $w \in \mathbb{C}^2$  with  $\|w - w_0\| < \eta$  such that the following property (P) holds :*

(P) *For every grid of balls  $G = (v, o, N, r)$  such that  $\bar{v} \in \mathcal{N}(u)$  and  $N > N(r)$ , for every  $(\theta, w)$ -quasi-line of direction in  $C^{w, 2\theta}$  intersecting the middle part of the grid of balls  $G$ , there is a non empty intersection between the line and the*

middle part of one of the balls of the grid.

Moreover, property (P) stays true for  $w'$  sufficiently close to  $w$ .

*Proof.* Let us first prove the result in the case of a line intersecting the grid of balls. After composition by a real linear isomorphism if necessary, we can suppose  $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (e_1, ie_1, e_2, ie_2)$  where  $e_1 = (1, 0)$  and  $e_2 = (0, 1)$  so that the centers of the balls of the grid have integer coordinates. Let us take  $w_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}e_1 + \frac{\alpha_2}{\beta}ie_1 + \frac{\alpha_3}{\beta}e_2 + \frac{\alpha_4}{\beta}ie_2$  such that  $\|w_1 - w_0\| < \eta$  with rational coordinates  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta \in \mathbb{Z}$ . We take  $m = \lfloor \frac{10}{r} \rfloor$ . Then, let us take the vector  $w = w_1 + \frac{1}{m\beta}e_1 + \frac{1}{m^2\beta}ie_1 + \frac{1}{m^3\beta}e_2 + \frac{1}{m^4\beta}ie_2$  and  $N > 10\beta m^5 = N(r)$ . We can increase  $m$  if necessary so that  $w$  satisfies  $\|w - w_0\| < \eta$ .

**Lemma 8.2.1.7.** *There is a non empty intersection between any line of direction in  $C^{w, 2\theta}$  intersecting the middle part of the grid of balls  $G$  and the middle part of one of the balls of the grid of balls if  $\theta$  is sufficiently small.*

*Proof.* We divide each mesh of the lattice into  $m^4$  hypercubes. To each of these hypercubes, we can assign the quadruple of integers given by the coordinates of a given corner. Taking new coordinates by making a translation if necessary, we can suppose that the union of the middle parts of the balls of the lattice contains the union of the hypercubes whose four coordinates are all equal to 0 modulo  $m$ . Let us take a point  $x_0$  of the line inside the middle part of the lattice, and for every  $k \in \mathbb{N}$ , we denote :  $x_k = x_0 + k \cdot w$ . Then, we have that :

$$\begin{aligned} \lfloor x_{k+\beta m, 1} \rfloor &\equiv \lfloor x_{k, 1} \rfloor + 1 \pmod{m} \text{ and } \lfloor x_{k+\beta m^2, 2} \rfloor \equiv \lfloor x_{k, 2} \rfloor + 1 \pmod{m} \\ \lfloor x_{k+\beta m^3, 3} \rfloor &\equiv \lfloor x_{k, 3} \rfloor + 1 \pmod{m} \text{ and } \lfloor x_{k+\beta m^4, 4} \rfloor \equiv \lfloor x_{k, 4} \rfloor + 1 \pmod{m} \end{aligned}$$

Since  $N > 10\beta m^5 = N(r)$ , the previous relations imply there exists some  $x_n$  which intersects some hypercube of integer coordinates congruent to  $(0, 0, 0, 0)$  inside the grid of balls. This implies that the line intersects the middle part of one of the balls of the grid. □

This intersection persists for any line of direction in  $C^{w, 2\theta}$  and for any  $\bar{v}$  in a small neighborhood  $\mathcal{N}(u)$  of  $\bar{u}$ . Then, the result stays true if we take  $(\theta, w)$ -quasi-lines for  $\theta$  sufficiently small since property in (P) is open for the  $C^1$  topology and  $w'$  sufficiently close to  $w$ . □

The following corollary gives the same conclusion as the previous result but this time with more than one possible direction for the quadruple of vectors of the lattice.

**Corollary 8.2.1.8.** *For every finite subgroup  $\mathcal{M} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ , for every  $u \in (\mathbb{C}^2)^4$ , there exists a neighborhood  $\mathcal{N}(u)$  of  $\bar{u}$  in  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$  such that for every  $r > 0$ , there exists  $\theta > 0$ ,  $N(r) > 0$  and a vector  $w \in \mathbb{C}^2$  such that the following property (P) holds :*

(P) *For every  $U \in \mathcal{M}$ , for every grid of balls  $G = (v, o, N, r)$  such that  $\bar{v} \in \mathcal{N}(u) \cup U \cdot \mathcal{N}(u) \cup \dots \cup U^{\text{ord}(U)-1} \cdot \mathcal{N}(u)$  and  $N > N(r)$ , for every  $(\theta, w)$ -quasi-line of direction in  $C^{w, 2\theta}$  intersecting the middle part of the grid of balls  $G$ ,*

there is a non empty intersection between the line and the middle part of one of the balls of the grid.

Moreover, this proposition remains true for  $w'$  sufficiently close to  $w$ .

*Proof.* We just have to apply  $\text{ord}(\mathcal{M})$  times Proposition 8.2.1.6.  $\square$

**Notation 8.2.1.9.** We will denote by  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$  the metric space of  $(2, 2)$  complex matrices with the distance induced by the norm  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,2}$ .

In the following,  $x$  will be a real positive parameter. We remind that in a first reading it is advised to assume that  $U = I_2$ . The following proposition is the "linear correction principle" we discussed in the introduction.

**Proposition 8.2.1.10.** For every finite subgroup  $\mathcal{M} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ , there exists an integer  $n > 0$ ,  $(n + 1)$  balls  $V^0, V^1, \dots, V^n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  such that for every  $0 < x < 1$ , there exists a neighborhood  $\mathcal{U}_x$  of  $I_2$  in  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ , two open sets  $\mathcal{U}'_x \subset \mathcal{U}''_x \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$  which are union of balls  $\mathcal{U}'_x = \bigcup_{1 \leq p \leq n} (\mathcal{U}'_x)^p$  and  $\mathcal{U}''_x = \bigcup_{1 \leq p \leq n} (\mathcal{U}''_x)^p$  such that :  $(\mathcal{U}'_x)^p \subset (\mathcal{U}''_x)^p$  for each  $1 \leq p \leq n$  with the following properties :

(i) If  $M \in \mathcal{U}_x$ ,  $U \in \mathcal{M}$  and  $j \in \mathbb{N}$ , then for every  $M_0 \in (x \cdot V^0)$  :

$$U^j M U (I_2 + M_0) \in U^{j+1} \cdot \mathcal{U}'_x$$

(ii) If  $M \in \mathcal{U}'_x$ ,  $U \in \mathcal{M}$  and  $j \in \mathbb{N}$ , then there exist two integers  $1 \leq p, p' \leq n$  such that  $M \in (\mathcal{U}'_x)^p$  with the property that for every  $M_0 \in (x \cdot V^0)$  and for every  $M_{p'} \in (x \cdot V^{p'})$ , we have :

$$U^j M U (I_2 + M_0) \in U^{j+1} \cdot (\mathcal{U}''_x)^p$$

$$U^j M U (I_2 + M_0) U (I_2 + M_{p'}) \in U^{j+2} \cdot \mathcal{U}_x$$

*Proof.* We consider the vector space  $\text{Mat}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^8$ . Let us consider a covering of the sphere of center 0 of radius  $r$  (which will be chosen later)  $S(0, r)$  by  $n$  balls  $B(X_i, \frac{1}{20}r)$  of radius  $\frac{1}{20}r$ . The following geometrical lemma is trivial :

**Lemma 8.2.1.11.** For every  $1 \leq p \leq n$ ,  $X \in B(X_i, \frac{1}{10}r)$ , we have :  $\|X - X_i\| < \frac{1}{2}r$

Now, let us call  $\mathcal{U}_1 = B(I_2, \frac{9}{10}r)$ ,  $(\mathcal{U}'_1)^p = B(I_2 + X_i, \frac{1}{20}r)$  and  $(\mathcal{U}''_1)^p = B(I_2 + X_i, \frac{1}{10}r)$  for each  $1 \leq p \leq n$ ,  $\mathcal{U}'_1 = \bigcup_{1 \leq p \leq n} (\mathcal{U}'_1)^p$  and  $\mathcal{U}''_1 = \bigcup_{1 \leq p \leq n} (\mathcal{U}''_1)^p$ . Increasing the number  $n$  of open sets  $(\mathcal{U}'_1)^p$  if necessary, we can suppose that for every  $U \in \mathcal{M}$  and for each  $p \leq n$ , there exists  $p' \leq n$  such that  $(\mathcal{U}'_1)^p \cdot U = U \cdot (\mathcal{U}'_1)^{p'}$  and  $(\mathcal{U}''_1)^p \cdot U = U \cdot (\mathcal{U}''_1)^{p'}$ .

**Lemma 8.2.1.12.** There exists  $r_0 > 0$  such that if  $r < r_0$ , for every  $Y \in (\mathcal{U}''_1)^p$  we have :  $Y(I_2 - X_i) \in B(I_2, \frac{1}{2}r)$ .

*Proof.* The Taylor formula gives us that at 0 at the first order in  $X$  :

$$(I_2 + X)(I_2 - X_i) = I_2 + X - X_i + O(r^2)$$

Then, if  $r$  is sufficiently small, Lemma 8.2.1.11 implies that for every  $X \in B(X_i, \frac{1}{10}r)$  :

$$(I_2 + X)(I_2 - X_i) \in B(I_2, \frac{1}{2}r)$$

This means that for every  $Y \in (\mathcal{U}_1'')^p : Y(I_2 - X_i) \in B(I_2, \frac{1}{2}r)$ . □

Now, it is clear it is possible to take a sufficiently small balls  $V^0, V^1, \dots, V^n$  centered at  $0, -X_1, \dots, -X_n$  such that :

- If  $M \in \mathcal{U}_1$ , then for every  $M_0 \in V^0$ , we have :  $M(I_2 + H_0) \in \mathcal{U}_1'$
- If  $M \in \mathcal{U}_1'$ , then there exists  $1 \leq p \leq n$  such that  $M \in (\mathcal{U}_1')^p$  and for every  $M_0 \in V^0$ , we have :  $M(I_2 + H_0) \in (\mathcal{U}_1'')^p$ .

The previous lemma implies that if  $M \in (\mathcal{U}_1')^p$  and  $M_0 \in V^0$  are such that  $M(I_2 + M_0) \in (\mathcal{U}_1'')^p$ , then for every  $M_p \in V^p$ , we have that :  $M(I_2 + M_0)(I_2 + M_p) \in \mathcal{U}_1$ . Then, properties (i) and (ii) are verified for  $x = 1$  and  $U = I_2$ . For each  $0 < x < 1$ , let us take the balls  $x \cdot V^0, x \cdot V^1, \dots, x \cdot V^n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  and let us apply the homothety of factor  $x$  of center  $I_2$  to the sets  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1', \mathcal{U}_1'', (\mathcal{U}_1')^p$  and  $(\mathcal{U}_1'')^p$  to get the sets  $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_x', \mathcal{U}_x'', (\mathcal{U}_x')^p$  and  $(\mathcal{U}_x'')^p$  such that properties (i) and (ii) are verified for  $x < 1$  and  $U = I_2$ .

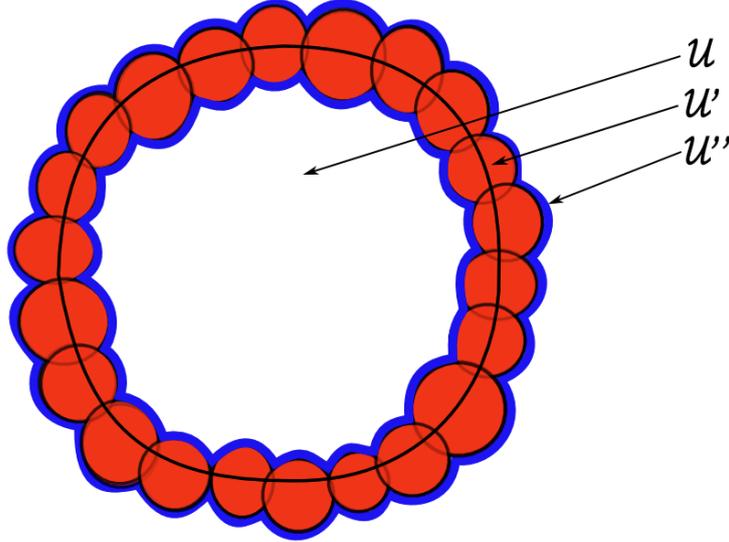


Figure 16 : The sets  $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$  and  $\mathcal{U}''$  for a fixed value of  $x$

Let us now suppose that  $U \neq I_2$ . The two inclusions  $U^j M U(I_2 + M_0) \in U^{j+1} \cdot \mathcal{U}_x'$  and  $U^j M U(I_2 + M_0) \in U^{j+1} \cdot (\mathcal{U}_x'')^p$  are still true by reducing  $V^0$  a finite number of times if necessary. Let us take  $p \leq n$  and  $p' \leq n$  such that  $(\mathcal{U}_1')^p \cdot U = U \cdot (\mathcal{U}_1')^{p'}$  and  $M_{p'} \in V^{p'}$ . Then :

$$\begin{aligned} U^j \cdot (\mathcal{U}_x'')^p \cdot U(I_2 + M_{p'}) &= U^j \cdot U \cdot (\mathcal{U}_x'')^{p'} \cdot (I_2 + M_{p'}) \\ &= U^{j+1} \cdot (\mathcal{U}_x'')^{p'} \cdot (I_2 + M_{p'}) \subset U^{j+1} \cdot \mathcal{U}_x \end{aligned}$$

This implies that for every  $M_0 \in (x \cdot V^0)$  and for every  $M_{p'} \in (x \cdot V^{p'})$ , we have  $U^j MU(I_2 + M_0) \in U^{j+1} \cdot (\mathcal{U}_x'')^p$  and  $U^j MU(I_2 + M_0)U(I_2 + M_{p'}) \in U^{j+2} \cdot \mathcal{U}_x$ , which concludes the proof of the result.  $\square$

Let us point out the following obvious result for later reference.

**Proposition 8.2.1.13.** *For every  $u \in (\mathbb{C}^2)^4$ , there exists a positive number  $x(u) > 0$  such that for every  $0 < x < x(u)$ , for every  $M \in \mathcal{U}_x''$ , then  $M \cdot \bar{u}$  belongs to  $\mathcal{N}(u)$ .*

## 8.2.2 Quasi-linear model

Here we slightly perturb the linear maps we used before but we show we can keep results on persistent intersections. Let us recall that the integer  $n$  was defined in Proposition 8.2.1.10. Let us remind that  $\mathcal{M} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  is a finite subgroup.

**Definition 8.2.2.1.** *Let  $f$  be a linear map defined on an open subset of  $\mathbb{C}^2$ . We say that  $f$  is of type  $(x, p)$  for any  $0 \leq p \leq n$  if  $f$  can be written  $f = \frac{1}{a_f}(A_f + h)$  with  $a_f \in \mathbb{C}^*$ ,  $A_f \in \mathcal{M}$  and  $h \in x \cdot V^p$  (where  $V^p$  was defined in Proposition 8.2.1.10). The modulus  $|a_f|$  is called the contraction factor of  $f$ .*

*Let  $f$  be a smooth map defined on an open subset of  $\mathbb{C}^2$ . We say that  $f$  is quasi-linear of type  $(x, p)$  if  $f = \tilde{f} + \frac{1}{a_f}\varepsilon_1$  with  $\tilde{f} = \frac{1}{a_f}(A_f + h)$  linear of type  $(x, p)$  and we have :*

$$\|\varepsilon_1\|_{C^2} < \frac{1}{1000} \cdot \|h\|$$

The following can be seen as a consequence of Proposition 8.2.1.10 in the quasi-linear setting. Remember that  $x(u) > 0$  was defined in Proposition 8.2.1.13.

**Proposition 8.2.2.2.** *Let  $\mathcal{M} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  be a finite subgroup of unitary matrices. Reducing  $x(u)$  if necessary, for every grid of balls  $G = (u, o, N, r)$ , for every quasi-linear map  $f$  of type  $(x, p)$  such that  $x < x(u)$  and  $2|a_f| \cdot \text{size}(G) \cdot \|f\|_{C^2} < \frac{r}{2}$ , there is a grid of balls  $G' = (u', o', N, r')$  included inside  $f(G)$  with  $\bar{u}' = (Df)_o \cdot \bar{u}$  and :*

$$r' = r - 2|a_f| \cdot \text{size}(G) \cdot \|f\|_{C^2}$$

*Proof.* We just have to take  $o' = f(o)$ ,  $\bar{u}' = (Df)_o \cdot \bar{u}$  with  $Df_o$  linear of type  $(x, p)$ . Remind that by definition, the size of  $G$  is  $\text{size}(G) = 2N \cdot \max_{1 \leq i \leq 4} \|u_i\|$ . When  $\|f\|_{C^2} = 0$ , the image of  $G$  under  $f$  is a grid of balls  $G'$  of same relative size  $r' = r$ , each ball of  $G'$  is the image of a ball of  $G$  under  $f = \frac{1}{a_f}(A_f + h)$ . Since  $A_f$  is unitary and  $h$  is of type  $(x, p)$ , reducing  $x(u) > 0$  (independently of  $f$ ) if necessary, we have that the radius of a ball of  $G'$  is between  $\frac{1}{2|a_f|}$  and  $\frac{2}{|a_f|}$  times the radius of a ball of  $G$ .

If  $\|f\|_{C^2} \neq 0$ , the image of each ball of  $G$  under  $f$  still contains a ball of

$G'$  but this time by the Taylor formula there is an additive term smaller than  $\text{size}(G) \cdot \|f\|_{C^2}$  in the differential of  $f$ . Then the relative size  $r'$  is such that :

$$r' \geq r - \frac{\text{size}(G) \cdot \|f\|_{C^2}}{\frac{1}{2|a_f|}} = r - 2|a_f| \cdot \text{size}(G) \cdot \|f\|_{C^2}$$

□

### 8.2.3 Intersecting a curve and the limit set of an IFS in $\mathbb{C}^2$

In this subsection, we give an abstract condition ensuring the existence of an intersection (robust by construction) between a holomorphic curve in  $\mathbb{C}^2$  and the limit set of an IFS. This will be the model for robust bifurcations near Lattès maps. Remind that  $n$  was defined in Proposition 8.2.1.10,  $N, w, \theta$  in Proposition 8.2.1.6. Remind that the middle part and the  $\frac{3}{4}$ -part of a ball were defined in Definition 8.2.1.4, the middle part and the hull of a grid of balls were defined in Definition 8.2.1.1. In the following, for a holomorphic map  $\mathcal{G}$  defined on a (closed) ball  $\mathfrak{B} \subset \mathbb{C}^2$ , we will denote  $\|\mathcal{G}\|_{C^2} = \max_{\mathfrak{B}} \|D^2\mathcal{G}\|$ .

**Proposition 8.2.3.1.** *Let  $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_q)$  be a IFS given by  $q$  maps defined on a ball  $\mathfrak{B} \subset \mathbb{C}^2$  of radius  $R > 0$  satisfying the following properties :*

1.  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B})$  contains a grid of balls  $G^1 = (u^1, o^1, n_G, r^1)$  with  $q = (2n_G + 1)^4$  such that each  $\mathcal{G}_j(\mathfrak{B})$  contains a ball of  $G^1$
2. the contraction factor of the IFS  $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_q)$  is  $|a| \geq 2$
3. there exist  $(n+1)$  balls  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$  of radius larger than  $\nu \cdot R$  ( $0 < \nu < 1$ ), such that the  $\frac{3}{4}$ -parts of  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$  are included in the hull of  $G^1$ , and satisfying the following property : for each  $1 \leq j \leq q$  such that  $\mathcal{G}_j(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_p$ ,  $\mathcal{G}_j$  is quasi-linear of type  $(x, p)$  with  $x < x(u^1)$  and :  $\mathcal{G}_j = \tilde{g}_j + \frac{1}{a}\varepsilon_j = \frac{1}{a}(A + h_j) + \frac{1}{a}\varepsilon_j$  with :  $\|\varepsilon_j\|_{C^2} < \frac{1}{1000} \cdot \|h_j\|$ . Moreover,  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B}_p)$  contains a grid of balls  $\Gamma_p^1 = (u^1, o_p^1, n_G, s^1)$  for each  $0 \leq p \leq n$  with  $s^1 \geq \nu \cdot r^1$
4.  $n_G > \frac{10}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \cdot r^1}{10})$
5.  $|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) < \frac{\nu \cdot r^1}{100}$

Let  $\mathfrak{C}$  be a  $(\theta, w)$ -quasi-line of direction in  $C^{w, 2\theta}$  such that  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of  $G^1$ .

Then  $\mathfrak{C}$  intersects the limit set of the IFS  $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_q)$ .

When the conditions 1 to 5 are satisfied, we summarize them by saying that  $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_q)$  is a correcting IFS. The proposition will be the immediate consequence of the following lemma :

**Lemma 8.2.3.2.** *There exist  $(n+2)$  sequences of grids  $(G^j)_{j \geq 1} = (u^j, o^j, n_G, r^j)_{j \geq 1}$  and  $(\Gamma_p^j)_{j \geq 1} = (u^j, o_p^j, n_G, s^j)_{j \geq 1}$  with  $0 \leq p \leq n$  such that we have the following properties :*

1. For every  $j > 1$ ,  $G^j$  is included inside a ball of  $G^{j-1}$  and for every  $j > 1$ , there are  $i_1, \dots, i_{j-1} \leq q$  such that :  $G^j \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})(G^1)$
2. For every  $j > 1$ ,  $0 \leq p \leq n$  :  $\Gamma_p^j \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})(\Gamma_p^1)$

3. For every  $j \geq 1$ ,  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})_{o^1} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{U}_x''$  and for  $j \geq 2$  :

$$r^j \geq r^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{|a|^l}$$

$$s^j \geq s^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{|a|^l}$$

4. For every  $j > 1$ , there exists  $1 \leq p_j \leq n$  such that the quasi-line  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of a ball of  $\Gamma_{p_j}^j$

*Proof.* The proof of this lemma is based on an induction procedure. We begin by an initialisation called Case 0 where we pick the grids of balls at the first level  $G^1$  and  $\Gamma_p^1$  for  $0 \leq p \leq n$ . We intersect for the first time the quasi-line  $\mathfrak{C}$  with a ball and we construct the grids at the second level. Case 0 is somewhat different from the rest of the demonstration because we do not control the initial position of  $\mathfrak{C}$ . Then, Case 1 has to be thought as the most frequent situation :  $\mathfrak{C}$  intersects a grid of balls whose geometry is good enough, and we can intersect  $\mathfrak{C}$  with a new grid whose geometry is very close to the previous one. Then, it may happen a time when the geometry of this grid is too deformed. Then we apply a "correction" (Cases 2 and 3), which leads back to Case 1.

Case 0 : initialization

By hypothesis,  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B})$  contains a grid of balls  $G^1 = (u^1, o^1, n_G, r^1)$  and similarly  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B}_p)$  contains a grid of balls  $\Gamma_p^1 = (u^1, o_p^1, n_G, s^1)$  for each  $0 \leq p \leq n$  with  $s^1 \geq \nu \cdot r^1$ . So, for the first step  $j = 1$ , the  $(n+2)$  grids of balls are already constructed.

By Corollary 8.2.1.8,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_0^1$  : indeed,  $\Gamma_0^1$  is a grid of balls such that  $\overline{u^1} \in A \cdot \mathcal{U}_x \subset A \cdot \mathcal{U}_x''$ , we have  $s^1 \geq \nu \cdot r^1 > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$  and  $n_G > \frac{10}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \cdot r^1}{10}) > N(\frac{\nu \cdot r^1}{10})$  (beware that the matrix  $A$  corresponds to the matrix denoted by  $U$  in Corollary 8.2.1.8). Then it intersects the middle of the ball  $\mathcal{G}_{i_1}(\mathfrak{B})$  of  $G^1$  which contains this ball of  $\Gamma_0^1$ . According to Proposition 8.2.2.2, there exists a grid of balls  $G^2 = (u^2, o^2, n_G, r^2)$  included in  $\mathcal{G}_{i_1}(G^1)$ . We have  $\overline{u^2} \in A \cdot \mathcal{N}(u^1)$  and :

$$r^2 \geq r^1 - 2|a| \cdot \text{size}(G^1) \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \geq r^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$$

Applying Proposition 8.2.2.2 to the grids of balls  $\Gamma_p^1$  ( $0 \leq p \leq n$ ), there exist  $(n+1)$  grids of balls  $\Gamma_p^2 = (u^2, o_p^2, n_G, s^2)$  included in  $\mathcal{G}_{i_1}(\Gamma_p^1)$  for  $0 \leq p \leq n$ . We have :  $\overline{u^2} \in A \cdot \mathcal{N}(u^1)$  and :

$$s^2 \geq s^1 - 2|a| \cdot \text{size}(\Gamma_p^1) \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \geq s^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$$

Let us now suppose by induction that the  $(n+2)$  sequences of grids of balls satisfying (1),(2),(3) and (4) are constructed up to step  $j$  with the additional

properties that  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_{p_{j-1}}^{j-1}$  and that the following property is verified :

(Q) For every  $i$  such that  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}} \circ \mathcal{G}_i)(G^1) \subset \Gamma_{p_{j-1}}^{j-1}$ , we have :

$$D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}} \circ \mathcal{G}_i)_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}_x''$$

Let us construct the grids of balls at the next step. The proof is inductive, at each step of the proof we are in one of the three cases we are going to discuss, which differ by two parameters. We have a quasi-line intersecting a grid of balls and we have to make a different choice to intersect a ball corresponding to one of the  $(n+1)$  types of differentials we introduced earlier. Note that after Case 0, we will necessarily be in Case 1.

Case 1 :  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})_{o^1} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{U}_x$  and  $p_{j-1} = 0$

By construction,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball  $B_0^{j-1}$  of the grid of balls  $\Gamma_0^{j-1}$ . Since  $\Gamma_0^j = (u^j, o_0^j, n_G, s^j)$  is a grid of balls such that :

$$\Gamma_0^j \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})(\Gamma_0^1) \text{ and } D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})_{o^1} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{U}_x$$

We have according to Proposition 8.2.1.13 that  $\overline{u^j} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{N}(u^1)$ . The relative size of  $\mathfrak{B}_0$  compared to  $\mathfrak{B}$  is equal to  $\nu$ , the  $\frac{3}{4}$ -part of  $\mathfrak{B}_0$  is included in the hull of  $G^1$  and  $n_G > \frac{10}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \cdot r^1}{10})$ . Then it is possible to take an union of balls of  $\Gamma_0^j$  included in  $B_0^{j-1}$  which form a grid of balls  $\Gamma'$  of basis  $u^j$ , relative size  $s^j$  and with  $(\frac{1}{10}\nu \cdot n_G)^4$  balls. By construction, we can take  $\Gamma'$  such that  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of  $\Gamma'$ . Since  $\overline{u^j} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{N}(u^1)$ ,  $s^j > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$  and  $\frac{1}{10}\nu \cdot n_G > N(\frac{\nu \cdot r^1}{10})$  we have according to Corollary 8.2.1.8 that  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_0^j$ . This ball is included inside  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(\mathfrak{B})$  with  $\mathcal{G}_{i_j}$  quasi-linear of type 0.

In particular,  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of a grid of balls  $G^{j+1} \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(G^1)$ . According to Propositions 8.2.1.10, 8.2.2.2 and Property (Q),  $G^{j+1}$  is a grid of balls  $G^{j+1} = (u^{j+1}, o^{j+1}, n_G, r^{j+1})$  with  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}_x'$  and :

$$r^{j+1} \geq r^j - 2|a| \cdot \text{size}(G^j) \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \geq r^j - 2|a| \cdot \frac{R}{|a|^{j-1}} \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2})$$

$$r^{j+1} \geq r^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \sum_{l=1}^{j-2} \frac{1}{|a|^l} > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$$

Still according to Propositions 8.2.1.10, 8.2.2.2 and Property (Q), there exist  $(n+1)$  grids of balls  $\Gamma_p^{j+1}$  (for  $0 \leq p \leq n$ ) included in  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(\Gamma_p^1)$  such that :

$$s^{j+1} \geq s^j - 2|a| \cdot \text{size}(\Gamma_p^j) \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \geq s^j - 2|a| \cdot \frac{R}{|a|^{j-1}} \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2})$$

$$s^{j+1} \geq s^1 - 2|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) \sum_{l=1}^{j-2} \frac{1}{|a|^l} > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$$

The grids of balls  $G^{j+1}$  and  $\Gamma_p^{j+1}$  (for  $0 \leq p \leq n$ ) satisfy (1),(2),(3),(4). In particular,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_0^j$ .

Since  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}'_x$  and  $p_j = 0$ , by Proposition 8.2.1.10, if  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ \mathcal{G}_i)(G^1) \subset \Gamma_{p_j}^j$  for some  $i$ , then  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ \mathcal{G}_i)(G^1)$  is a grid of balls  $(u^{j,i}, \sigma^{j,i}, n_G, r^{j,i})_j$  such that  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ \mathcal{G}_i)_{o^1} \in A^{j+1} \cdot \mathcal{U}''_x$ , this means that (Q) is verified.

Then, after Case 1 and according to Proposition 8.2.1.10, only two cases can occur. If  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}'_x$  and we can apply Case 1 once again. If  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot (\mathcal{U}'_x - (\mathcal{U}'_x \cap \mathcal{U}_x))$ , there exists  $1 \leq p \leq n$  such that  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot (\mathcal{U}')^p$ . In this case, we are going to "correct" the next grids in a procedure given by Cases 2 and 3.

Case 2:  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})_{o^1} \in A^{j-1} \cdot (\mathcal{U}'_x)^p$  and  $p_{j-1} = 0$

By construction,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of the grid of balls  $\Gamma_0^{j-1}$ . We have according to Proposition 8.2.1.13 that  $\overline{u^j} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{N}(u^1)$ . Then, using the same argument as in Case 1, we have according to Corollary 8.2.1.8 that  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_{p_j}^j$  included inside  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})(\mathfrak{B})$  where  $\mathcal{G}_{i_{j-1}}$  is quasi-linear of type 0 and  $p_j = p'$  is chosen according to Proposition 8.2.1.10. In particular,  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of a grid of balls  $G^{j+1} \subset (g_{i_1} \circ \dots \circ g_{i_j})(G^1)$ . According to Propositions 8.2.1.10 and 8.2.2.2,  $G^{j+1}$  is a grid of balls  $G^{j+1} = (u^{j+1}, \sigma^{j+1}, n_G, r^{j+1})$  with  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot (\mathcal{U}'_x)^p$ , there exist  $(n+1)$  grids of balls  $\Gamma_p^{j+1}$  (for  $0 \leq p \leq n$ ) included in  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(\Gamma_p^1)$  and  $r^{j+1}, s^{j+1}$  satisfy the inequalities of property 3. The grids of balls  $G^{j+1}$  and  $\Gamma_p^{j+1}$  (for  $0 \leq p \leq n$ ) satisfy (1),(2),(3),(4).

Since  $|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j\|_{C^2}) < \frac{\nu \cdot r^1}{100}$  we have for every  $0 \leq p \leq n$ , for every  $j \geq 1$  the following bounds :  $r^j, s_p^j > \frac{\nu \cdot r^1}{10}$ . Since  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot (\mathcal{U}'_x)^p$  and  $p_j = p'$  is chosen according to Proposition 8.2.1.10 (see Proposition 8.2.1.10 for the definition of  $p'$ ), we have for every  $i$  such that  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ g_i)(G^1) \subset \Gamma_{p_j}^j$  that  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ \mathcal{G}_i)(G^1)$  is a grid of balls  $(u^{j,i}, \sigma^{j,i}, n_G, r^{j,i})_j$  such that  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j} \circ \mathcal{G}_i)_{o^1} \in A^{j+1} \cdot \mathcal{U}_x$ , this means that (Q) is verified.

After Case 2, it follows from Proposition 8.2.1.10 that necessarily the two conditions of the following Case 3 are satisfied.

Case 3:  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})_{o^1} \in A^{j-1} \cdot (\mathcal{U}''_x)^p$  and  $p_{j-1} \neq 0$

Induction shows that  $p_{j-1}$  had been chosen to get special composition properties (see Case 2, beware that the number denoted here by  $p_{j-1}$  corresponds to the number denoted by "p<sub>j</sub>" in Case 2), let us pick  $p_j = 0$ . By construction,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of the grid of balls  $\Gamma_{p_{j-1}}^{j-1}$ . Once again :  $\overline{u^j} \in A^{j-1} \cdot \mathcal{N}(u^1)$  and we have according to Corollary 8.2.1.8 that  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part the ball of  $\Gamma_0^j$  included inside  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(\mathfrak{B})$  with  $\mathcal{G}_{i_j}$  quasi-linear of type  $p_{j-1}$ . In particular,  $\mathfrak{C}$  intersects the middle part of a grid of balls  $G^{j+1} \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(G^1)$ . Once again, we can construct grids of balls

$G^{j+1}$  and  $\Gamma_p^{j+1}$  (for  $0 \leq p \leq n$ ) which satisfy (1),(2),(3),(4) but this time with  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}_x$ . In particular,  $\mathfrak{C}$  intersects in its middle part a ball of  $\Gamma_{p_j}^j$ . Moreover, Proposition 8.2.1.10 still insures that (Q) is verified.

Since  $D(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})_{o^1} \in A^j \cdot \mathcal{U}_x$ , we are now in Case 1 once again.  $\square$

*Proof of Proposition 8.2.3.1.* According to the previous lemma, for each  $j \geq 1$ ,  $\mathfrak{C}$  intersects  $\Gamma_{p_j}^j \subset (\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_{j-1}})(\Gamma_{p_j}^1)$ . But  $\Gamma_{p_j}^1 \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B}_{p_j}) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j(\mathfrak{B})$ . This shows that for each  $j \geq 1$ , there exist  $q \geq i_1, \dots, i_j \geq 1$  such that  $\mathfrak{C}$  intersects  $(\mathcal{G}_{i_1} \circ \dots \circ \mathcal{G}_{i_j})(\mathfrak{B})$ . This implies that  $\mathfrak{C}$  intersects the limit set of the IFS  $(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_q)$ .  $\square$

The three following pages will be figures of Cases 1,2 and 3.

## 8.3 Preliminaries on Lattès maps

### 8.3.1 Definitions

For convenience, we remind that the following can be found in [35].

**Proposition 8.3.1.1.** *If an affine map on a torus  $\mathbb{T}$  induces a Lattès map  $L$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , then the torus  $\mathbb{T}$  is of the form  $\mathbb{C}^2/\Lambda$  where  $\Lambda$  is one of the six following lattices and the projection  $\Pi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  is given (in some affine chart for Cases 1,2,3,4) by the following formulas :*

- Case 1  $\Lambda = L^2(\tau), (x, y) \mapsto [\wp(x) + \wp(y) : \wp(x)\wp(y) : 1]$   
 Case 2  $\Lambda = L^2(\xi), (x, y) \mapsto [\wp'(x) + \wp'(y) : \wp'(x)\wp'(y) : 1]$   
 Case 3  $\Lambda = L^2(i), (x, y) \mapsto [\wp^2(x) + \wp^2(y) : \wp^2(x)\wp^2(y) : 1]$   
 Case 4  $\Lambda = L^2(\xi), (x, y) \mapsto [(\wp')^2(x) + (\wp')^2(y) : (\wp')^2(x)(\wp')^2(y) : 1]$   
 Case 5  $\Lambda = L^2(i), (x, y) \mapsto [(\wp(x)\wp(y) + e_1^2)^2 : (\wp(x) + \wp(y))^2 : (\wp(x)\wp(y) - e_1^2)^2]$   
 Case 6  $\Lambda = L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + L(\tau) \cdot \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi \end{pmatrix}, (x, y) \mapsto [\wp'(x_1) - \wp'(y_1) : \wp(x_1) - \wp(y_1) : \wp'(x_1)\wp(y_1) - \wp(x_1)\wp'(y_1)]$

where  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $e_1 = \wp(\frac{1}{2})$  and  $x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**Definition 8.3.1.2.** *A Ueda map is a holomorphic map on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  such that there exists a Lattès example  $\tilde{L}$  on  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  such that we have  $L \circ \eta = \eta \circ (\tilde{L}, \tilde{L})$  where  $\eta$  is the map between  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  and  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  which is just the projectivization of  $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ , given by :*

$$\eta : ([x : x'], [y : y']) \mapsto [xy' + x'y : xy : x'y']$$

Such a map  $L$  is semi-conjugate to an affine map on the complex torus  $\mathbb{T}$  and is a Lattès map.

Lattès maps corresponding to Cases 1,2,3 and 4 of Proposition 8.3.1.1 are Ueda maps.

Figure 17 : Proposition 8.2.3.1, Case 1

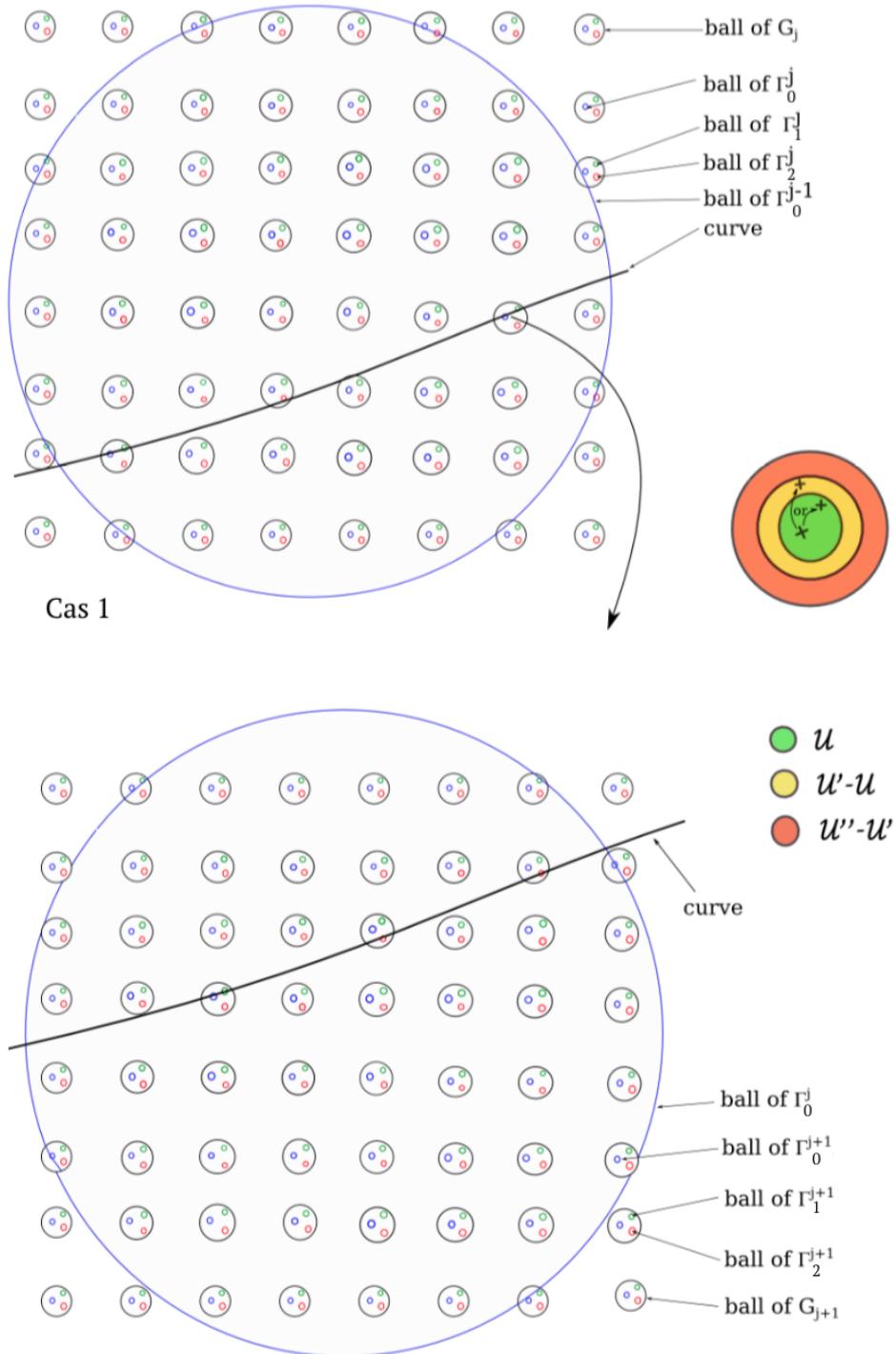


Figure 18 : Proposition 8.2.3.1, Case 2

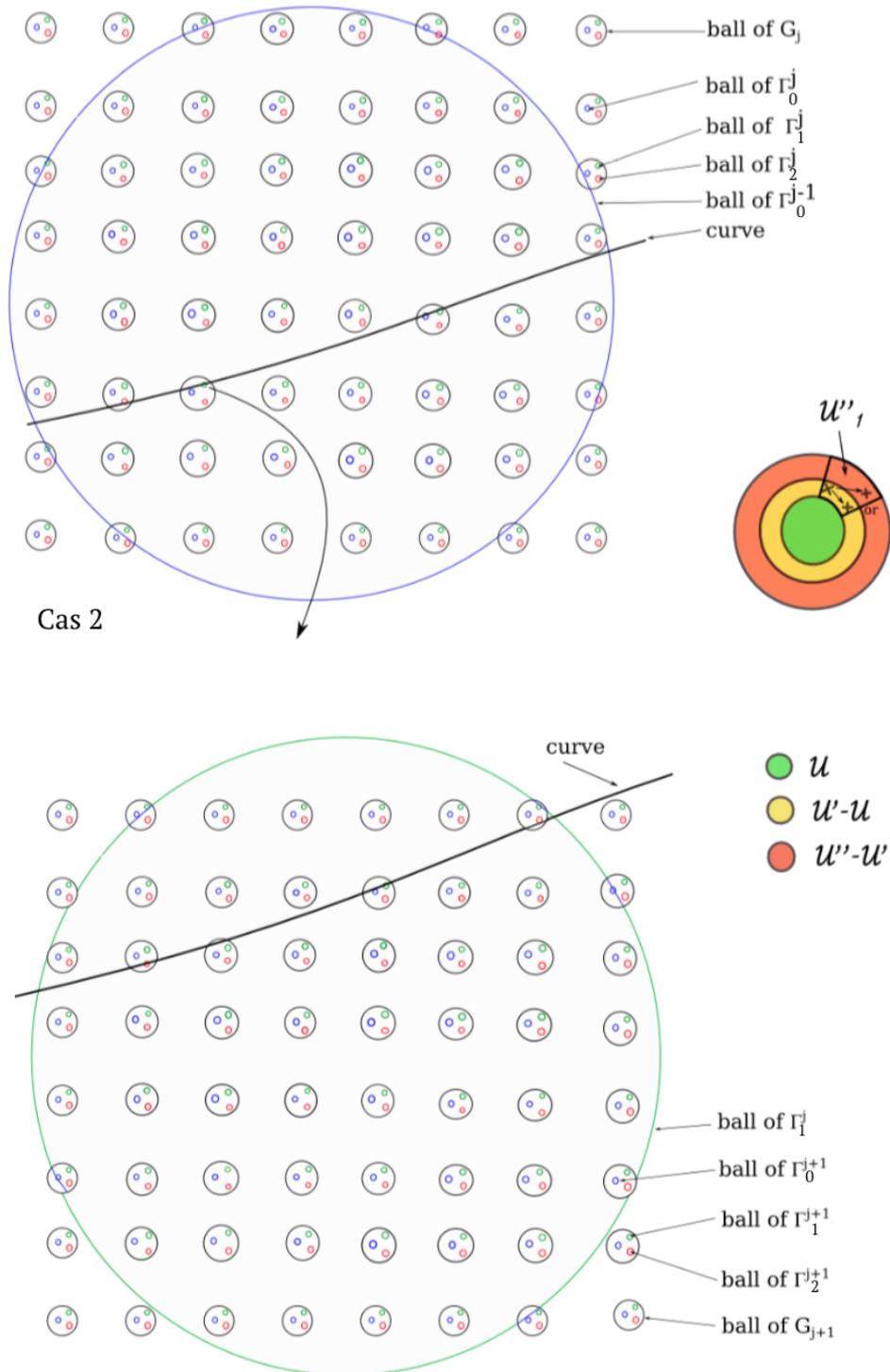
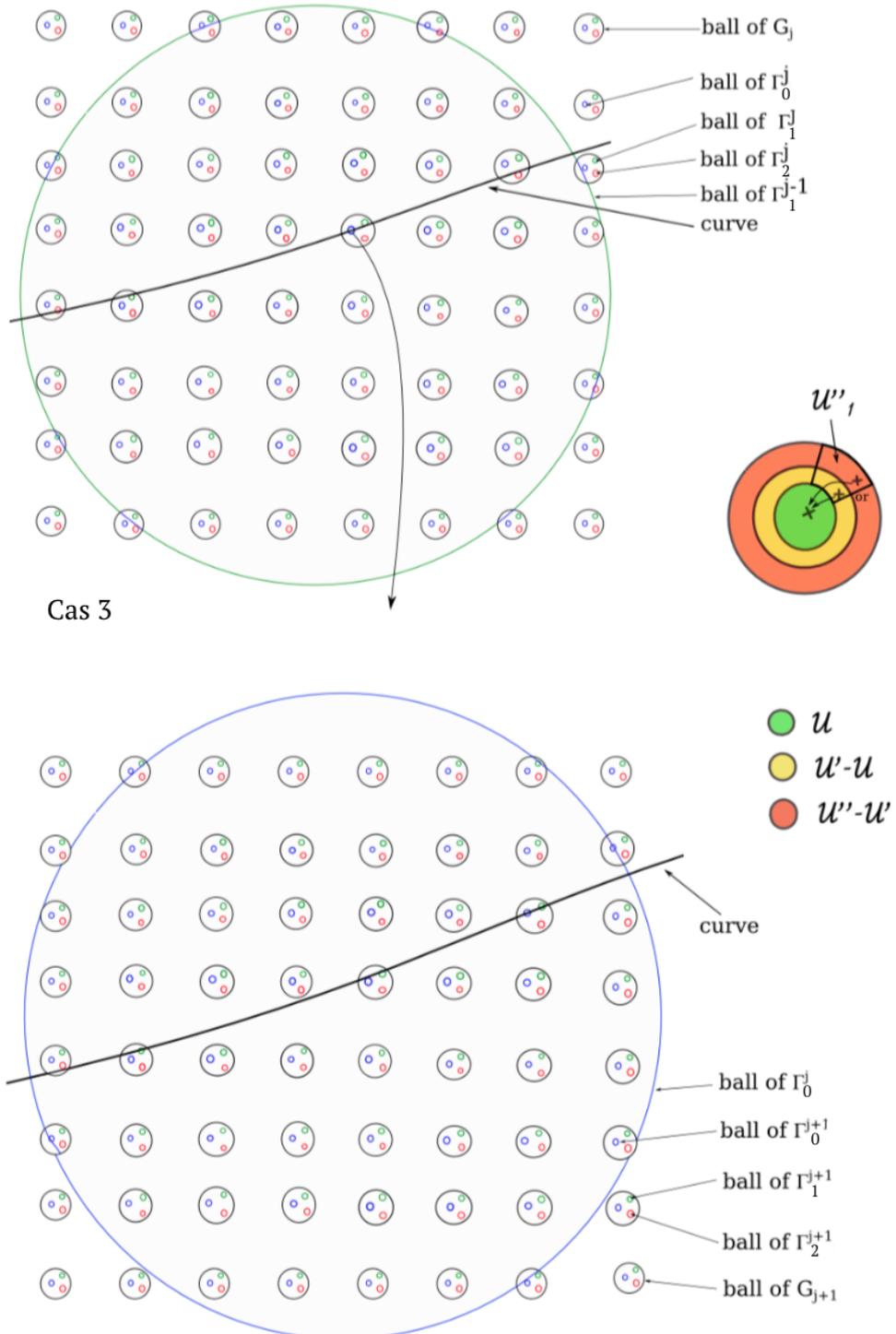


Figure 19 : Proposition 8.2.3.1 Case 3



In the following, we will denote  $\pi$  the projection from  $\mathbb{C}^2$  to  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}^2/\Lambda$ . The following is an easy consequence of Propositions 3.1 to 3.6 of [30].

**Proposition 8.3.1.3.** *Let  $\Lambda, \Pi$  be one of the lattices and associated coverings defined in Proposition 8.3.1.1. There exists a finite group of unitary matrices  $G_{\text{Lattès}} = G_{\text{Lattès}}(\Lambda, \Pi)$  of finite order such that every Lattès map has its linear part of the form  $aA$  where  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $|a| \geq 1$  and  $A \in G_{\text{Lattès}}$ .*

**Remark.** *Here, the scaling factor  $a$  takes discrete values. Moreover, arbitrarily large values of  $|a|$  can be obtained (it can be easily seen by taking the composition of a Lattès map with itself). The equality of the two topological degrees gives :  $(d')^2 = |a|^4 \cdot |\det(A)|^2$  where  $d'$  is the algebraic degree of  $L$ .*

Since according to the previous result, there are only finitely many possible linear parts  $A$  for a Lattès map (up to multiplication by the factor  $a$ ) which are all of finite order, we can define the following integer.

**Definition 8.3.1.4.** *We denote by  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  the product of all the orders of the possible linear parts  $A$  for a Lattès map.*

It can be found in [30] that  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  is equal to  $6^2 \cdot 8^2 \cdot 12 \cdot 24$ . In a first reading, we encourage the reader to consider only the case where the linear part of the Lattès map is equal to  $\text{Id}$ . In the other cases, the dynamical ideas are the same but with a few additional technicalities from algebra. In particular, it is sufficient in order to prove in some cases the corollary of the main result (see subsection 1.2).

### 8.3.2 An algebraic property of Lattès maps

The goal of this subsection is to prove the following result.

**Proposition 8.3.2.1.** *For every torus  $\mathbb{T}$ , there exists an integer  $i = i(\mathbb{T}^2)$  such that for any  $k > 0$ , there exists an integer  $d_k > 0$  such that for any Lattès map  $L$  of algebraic degree  $d > d_k$ , coming from an affine map on  $\mathbb{T}$ , there exists a homogenous change of coordinates  $\varphi$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  such that :  $\varphi^{-1} \circ L \circ \varphi$  is a holomorphic endomorphism of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  of the form  $[\bar{P}_1 : \bar{P}_2 : \bar{P}_3]$  where the polynomial  $\bar{P}_3$  is a product of irreducible factors  $\bar{P}_{3,j}$  such that at least  $k$  factors  $\bar{P}_{3,j}$  are of degree bounded by  $i$ .*

**Definition 8.3.2.2.** *Let  $v$  be a vector of  $\mathbb{C}^2$  which belongs to a lattice  $\Lambda$  and  $v_0 \in \mathbb{C}^2$ . We suppose that the action of  $\Lambda$  upon  $\mathbb{C} \cdot v$  by translation is cocompact. Let  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}^2/\Lambda$  and  $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  be the natural projection. Then, then we say that  $\pi(v_0 + \mathbb{C} \cdot v)$  is a compact line of the torus  $\mathbb{T}$  of direction  $v$ . It is compact and  $\pi(v_0 + \mathbb{C} \cdot v) \simeq \pi(v_0) + \mathbb{C}/\Lambda' \cdot v$  for some subgroup  $\Lambda' \subset \Lambda$ . The family of compact lines of the torus  $\mathbb{T}$  of direction  $v$  is the family of all the compact lines of the torus of direction  $v$  obtained by varying  $v_0$ .*

Let us point out the fact that  $v \in \Lambda$  is not sufficient to conclude that the action of  $\Lambda$  upon  $\mathbb{C} \cdot v$  by translation is cocompact.

**Proposition 8.3.2.3.** *Let  $\Lambda, \Pi$  be one of the lattices and associated coverings defined in Proposition 8.3.1.1. Let  $v$  be a vector of  $\mathbb{C}^2$  which belongs to  $\Lambda$  such that the action of  $\Lambda$  upon  $\mathbb{C} \cdot v$  by translation is cocompact. The family of images under  $\Pi$  of compact lines of direction  $v$  on the torus  $\mathbb{T}$  is a family of algebraic curves of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  of degree bounded by  $i = i(v, \mathbb{T}^2)$ .*

*Proof.* Let  $\mathcal{F}$  be the family of images of compact lines of direction  $v$  on the torus  $\mathbb{T}$  under  $\Pi$ . The family  $\mathcal{F}$  is a holomorphic compact family of compact curves so that by the GAGA principle it is an algebraic family of curves and in particular their degree is bounded by some  $i = i(v, \mathbb{T}^2)$   $\square$

**Proposition 8.3.2.4.** *Let  $\Lambda, \Pi$  be one of the lattices and associated coverings defined in Proposition 8.3.1.1. Then, there exists a line  $\delta$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  such that  $\Pi^{-1}(\delta)$  contains at least one compact line  $\mathcal{D}$  of  $\mathbb{T}$ .*

*Proof.* In each case, the following compact lines are convenient for  $\delta$  and we give the preimage compact lines  $\mathcal{D}$ . The first four cases cover the case of a Ueda map.

Case 1 :  $\delta = \{Y = 0\}$  Indeed,  $Y = 0$  if and only if  $\wp(x)\wp(y) = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{Y = 0\})$  is an union of compact lines of the torus of the form  $\{x_0\} \times \mathbb{T}^1$  and  $\mathbb{T}^1 \times \{y_0\}$  where the  $x_0, y_0$  are in  $\wp^{-1}(\{0\})$ .

Case 2:  $\delta = \{Y = 0\}$  Indeed,  $Y = 0$  if and only if  $\wp'(x)\wp'(y) = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{Y = 0\})$  is an union of compact lines of the torus of the form  $\{x'_0\} \times \mathbb{T}^1$  and  $\mathbb{T}^1 \times \{y'_0\}$  where the  $x'_0, y'_0$  are in  $(\wp')^{-1}(\{0\})$ .

Case 3:  $\delta = \{Y = 0\}$  Indeed,  $Y = 0$  if and only if  $\wp^2(x)\wp^2(y) = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{Y = 0\})$  is an union of compact lines of the torus of the form  $\{x_0\} \times \mathbb{T}^1$  and  $\mathbb{T}^1 \times \{y_0\}$  where the  $x_0, y_0$  are in  $\wp^{-1}(\{0\})$ .

Case 4:  $\delta = \{Y = 0\}$  Indeed,  $Y = 0$  if and only if  $(\wp'(x))^2(\wp'(y))^2 = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{Y = 0\})$  is an union of compact lines of the torus of the form  $\{x'_0\} \times \mathbb{T}^1$  and  $\mathbb{T}^1 \times \{y'_0\}$  where the  $x'_0, y'_0$  are in  $(\wp')^{-1}(\{0\})$ .

Case 5:  $\delta = \{X = Z\}$  Indeed,  $X = Z$  if and only if  $(\frac{\wp(x)\wp(y)+e_1^2}{\wp(x)\wp(y)-e_1^2})^2 = 1$ , this means if and only if  $4e_1^2\wp(x)\wp(y) = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{X = Z\})$  is an union of compact lines of the torus of the form  $\{x_0\} \times \mathbb{T}^1$  and  $\mathbb{T}^1 \times \{y_0\}$  where the  $x_0, y_0$  are in  $\wp^{-1}(\{0\})$ .

Case 6:  $\delta = \{Z = 0\}$  Indeed,  $Z = 0$  if and only if  $\wp'(x_1)\wp(y_1) - \wp(x_1)\wp'(y_1) = 0$ .  $\Pi^{-1}(\{Z = 0\})$  contains the compact line of the torus  $\{x_1 = y_1\}$  (in the coordinates  $x_1, y_1$ ).

In all the cases, the preimage of  $\delta$  by  $\Pi$  contains a compact line of the torus.  $\square$

**Proposition 8.3.2.5.** *If an affine map  $\mathcal{L}$  of linear part  $aA$  on a torus  $\mathbb{T}$  induces a Lattès map  $L$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  and  $\mathcal{D}$  is the preimage under  $\Pi$  of the compact line  $\delta$  given by Proposition 8.3.2.4, then the preimage of  $\mathcal{D}$  under  $\mathcal{L}$  is a finite union of compact lines of the torus. Moreover, the number of possible directions is finite. For each  $k > 0$ , there exists  $d_k > 0$  such that for every Lattès map  $L$  of algebraic degree greater than  $d_k$  induced by an affine map  $\mathcal{L}$  on  $\mathbb{T}$ , there exist at least  $k$  distinct irreducible components of degree bounded by  $i$  which are preimages of  $\delta$  by  $L$ .*

*Proof.* From Proposition 8.3.1.3, we know that the linear part of  $\mathcal{L}$  is of the form  $aA$  with  $A \in G_{\text{Lattès}}$ . Let  $v \in \Lambda$  be the direction of  $\mathcal{D}$ . We have

$a^{\text{ord}(A)}(aA)^{-1} \cdot \Lambda = a^{\text{ord}(A)-1} A^{\text{ord}(A)-1} \cdot \Lambda \subset \Lambda$  (because  $\mathcal{L}$  induces a Lattès map). This implies that the action of  $\Lambda$  on any line of direction  $(aA)^{-1}(v)$  is cocompact. In particular, any preimage of  $\mathcal{D}$  by  $\mathcal{L}$  is a compact line of the torus.  $G_{\text{Lattès}}$  is finite and so the possible number of directions is finite. Let  $\mathcal{D}'$  be a preimage of  $\mathcal{D}$  by  $\mathcal{L}$ .

We denote by  $\Omega$  a fundamental domain of the action of  $\Lambda$  on  $\mathbb{C} \cdot (aA)^{-1}(v)$ . Since the action is cocompact,  $\Omega$  is compact. We have the following straightforward property : for every lines  $\Delta_1, \Delta_2$  of direction  $(aA)^{-1}(v)$  in  $\mathbb{C}^2$ , if  $\pi(\Delta_1) = \pi(\Delta_2)$ , then every two points respectively in  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$  are joined by a vector which lies in  $\Omega + \Lambda$ . Let us take  $\lambda_1 \in \Lambda$  such that  $(aA)^{-1}\lambda_1$  is not  $\mathbb{C}$ -colinear to  $\mathcal{D}'$ . Then, there is some constant  $a_k > 0$  such that if  $|a| > a_k$ , then the  $100k$  vectors  $(aA)^{-1}(\lambda_1), 2(aA)^{-1}(\lambda_1), \dots, 100(aA)^{-1}(\lambda_1)$  do not belong to  $\Omega + \Lambda$  and in particular they are distinct modulo  $\Lambda$ . Then the  $100k$  images of  $\mathcal{D}'$  by translations of vectors  $(aA)^{-1}(\lambda_1), 2(aA)^{-1}(\lambda_1), \dots, 100(aA)^{-1}(\lambda_1)$  are  $100$  distinct preimages of  $\mathcal{D}$  under  $\mathcal{L}$  and they are compact lines of  $\mathbb{T}$  of direction  $(aA)^{-1}(v)$ .

Their images under  $\Pi$  are irreducible components of degree bounded by  $i$  by Proposition 8.3.2.3. If  $|a| > a_k$ , at least  $k$  (this term  $k$  is not optimal and we get it by projection of the previous  $100k$  lines) of them are distinct preimages of  $\delta$  by  $L$ . But  $|a| > a_k$  if  $\text{deg}(L)$  is superior to some value  $d_{k,\Lambda,A}$ . Then, it suffices to take for  $d_k$  the maximal value of  $d_{k,\Lambda,A}$  when varying  $\Lambda$  and  $A$  in the finite sets they belong (see Propositions 8.3.1.1 and 8.3.1.3).  $\square$

*Proof of Proposition 8.3.2.1.* Let  $\delta$  be a line in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  as in Proposition 8.3.2.4. The result is a consequence of Proposition 8.3.2.5 because after a suitable change of coordinates, we can take  $\delta = \{Z = 0\}$ . Then  $\{\bar{P}_3 = 0\}$  contains at least the  $k$  irreducible components of degree bounded by  $i$  which are preimages of  $\delta$  by  $L$ .  $\square$

### 8.3.3 A periodic orbit in the postcritical set

Remind that the integer  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  was defined in Definition 8.3.1.4. Beware that in the following, the period of a periodic point is the exact period.

**Proposition 8.3.3.1.** *There exists an integer  $K > 0$  such that for every Lattès map  $L$  defined on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , there exists a point  $c$  in the critical curve of  $L$  which is sent after  $n_c$  iterations on a periodic point  $p_c$  of period  $n_{p_c}$  such that :*

1.  $n_c + n_{p_c} \leq K$
2.  $n_{p_c}$  is a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$

*Proof.* Let us start with the case of one dimensional Lattès maps.

**Lemma 8.3.3.2.** *Let  $\tilde{L}$  be a one-dimensional Lattès map. There exists a critical point  $\tilde{c}$  of  $L$  which is sent after  $\tilde{n}_c \leq 12$  iterations on a periodic point  $\tilde{p}_c$  of period  $\tilde{n}_{p_c} \leq 12$ .*

*Proof.* The Lattes map  $\tilde{L}$ , according to Lemma 3.4 of [45], is such that the postcritical set  $P_{\tilde{L}}$  of  $\tilde{L}$  is entirely included inside the set of critical values of the covering  $\Theta$  of  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  by the complex torus  $\mathbb{T}^1$ . This implies that every

critical point of  $\tilde{L}$  is sent after one iteration inside the set of the critical values of  $\Theta$ . Moreover, let us bound from above the number of critical values. This number  $c_r$  is bounded from above by the number of critical points (counted with multiplicity). Still according to [45],  $\Theta$  can only be a covering of orders  $\text{ord}(\Theta) = 2, 3, 4$  or  $6$ . The Riemann-Hürwitz formula gives us that :  $\chi(\mathbb{T}^1) = \text{ord}(\Theta)\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) - c_r$  which implies  $c_r = 2 \cdot \text{ord}(\Theta)$ . In particular, this means that the image of every critical point  $\tilde{c}$  of  $\tilde{L}$  is sent after  $\tilde{n}_c \leq 12$  iterations on a periodic point  $\tilde{p}_c$  of period  $\tilde{n}_{pc} \leq 12$ .  $\square$

**Lemma 8.3.3.3.** *Let  $L$  be a Ueda map. There exists a point  $c$  in the critical curve of  $L$  which is sent after  $n_c \leq 12$  iterations on a periodic point  $p_c$  of period  $n_{pc} \leq 24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$  which is a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$ . In particular, we have :  $n_c + n_{pc} \leq 12 + 24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ .*

*Proof.* We take a critical point  $\tilde{c}$  of  $\tilde{L}$  given by the previous lemma. We take a periodic point  $\tilde{p}$  of  $\tilde{L}$  of period  $2 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$  (it can be found in [34] that such a point actually exists because any rational map on  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  of degree greater than 2 has a point of strict period  $2 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}} > 4$ ). Then the point  $c = \eta(\tilde{c}, \tilde{p})$  is a critical point of  $L$ . It is sent after  $n_c \leq 12$  iterations on a periodic point  $\eta(\tilde{p}_c, \tilde{L}^{n_c}(\tilde{p}))$ . The period of  $\tilde{p}_c$  is  $\tilde{n}_{pc} \leq 12$  and  $\tilde{p}$  is of period  $2 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ . This implies that in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , the periodic point  $(\tilde{p}_c, \tilde{L}^{n_c}(\tilde{p}))$  for  $(\tilde{L}, \tilde{L})$  is of period a multiple of  $2 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$  bounded by  $24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ . Since the map  $\eta$  is a two-covering, in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , the periodic point  $\eta(\tilde{p}_c, \tilde{L}^{n_c}(\tilde{p}))$  for  $L$  is of period  $n_{pc}$  which is a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  bounded by  $24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ . Then  $n_c + n_{pc} \leq 12 + 24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ .  $\square$

Let us now prove 8.3.3.1. It was shown in [30] (Theorems 4.2 and 4.4) that :

1. Either one map in  $\{L, L^2, L^3\}$  is a Ueda map. In this first case, the previous lemma shows that one of the maps in  $\{L, L^2, L^3\}$  has a point of its critical curve which is sent after at most 12 iterations onto a periodic point of period a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  bounded by  $24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ . This implies that there exists a critical point of  $L$  which is sent after  $n_c$  iterations onto a periodic point of period  $n_{pc}$  which is a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  with  $n_c + n_{pc} \leq 3 \cdot (12 + 24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}})$ .
2. One of the maps  $L^k$  in  $\{L, L^2, L^3, L^6\}$  is preserving an algebraic web associated to a smooth cubic (see [20] for this notion). This implies (see the remark after Theorem A in [20]) that the critical set of  $L^k$  is sent after one iteration into the set of critical values of  $\Pi$  which is a curve  $\mathcal{PC}$ . In this second case, we have that  $L^k(\mathcal{PC}) \subset \mathcal{PC}$  and  $L^k$  induces by restriction a map on  $\mathcal{PC}$ . Taking the normalization of  $\mathcal{PC}$  if necessary, we can suppose that  $\mathcal{PC}$  is regular. There are two possibilities. Either  $\mathcal{PC}$  is isomorphic to  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  and  $L^k$  induces a rational map so it has a periodic point of period  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  (again, it can be found in [34] that such a point actually exists). Either  $\mathcal{PC}$  is isomorphic to a complex torus and  $L^k$  induces a multiplication on this torus which also has a periodic point of period  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$ . In both cases, we see that  $L$  has a critical point which is sent after at most 6 iterations on a point of period a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$  bounded by  $6 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}$ .

Then, taking  $K = \max(3 \cdot (12 + 24 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}}), 6 + 6 \cdot \text{ord}_{\text{Lattès}})$ , the proof of the proposition is done.

□

## 8.4 Perturbations of Lattès maps

### 8.4.1 Some useful lemmas

In this subsection, we prove two lemmas about complex analysis. The constants which are involved in these lemmas will be fixed in the two next subsections.

**Lemma 8.4.1.1.** *For every  $m > 0$ , for every ball  $\tilde{\mathbb{B}}$ , for every  $1 > f_1 > 0$ ,  $1 > f_2 > 0$ , there exist constants  $\rho = \rho(m, \tilde{\mathbb{B}}) > 0$ ,  $\sigma = \sigma(m, \tilde{\mathbb{B}}) > 0$  such that for rational function  $h$  of degree equal to  $m$ , there exists a ball  $\mathbb{B} \subset \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$  of radius larger than  $\rho$  such that*

$$\forall z \in \mathbb{B}, \frac{\|Dh(z)\|}{|h(z)|} \leq \sigma \quad (8.1)$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{B}^2, \frac{|h(z)|}{|h(z')|} \leq 1 + f_1 \quad (8.2)$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{B}^2, \arg(h(z)) - \arg(h(z')) \leq f_2 \quad (8.3)$$

The lemma will be a consequence of the following lemma.

**Lemma 8.4.1.2.** *For every  $m > 0$ , for every ball  $\tilde{\mathbb{B}}$ , there exist constants  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(m, \tilde{\mathbb{B}}) > 0$ ,  $\tau = \tau(m, \tilde{\mathbb{B}}) > 0$  such that for every rational function  $h$  of degree  $m$ , there exists a ball  $\mathbb{B} \subset \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$  of radius larger than  $\bar{\rho}$  such that :*

$$\frac{\inf_{\mathbb{B}} |h|}{\sup_{\mathbb{B}} |h|} \geq \tau$$

*Proof.* Let us denote  $\mathcal{R}_{\text{norm}}$  the set of rational maps of degree  $m$  which can be written  $h = \frac{h_1}{h_2}$  where  $h_1$  and  $h_2$  are two polynomials whose coefficients  $(a_{ij})$  and  $(b_{ij})$  are such that :  $\max(a_{ij}) = \max(b_{ij}) = 1$ .  $\mathcal{R}_{\text{norm}}$  is a compact set. For a given  $h \in \mathcal{R}_{\text{norm}}$ , since  $h \neq 0$ , there exists  $\bar{\rho}_h > 0$ ,  $\tau_h > 0$ , a ball  $\bar{\mathbb{B}}_h \subset \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$  of radius  $\bar{\rho}_h$  such that :

$$\frac{\inf_{\bar{\mathbb{B}}_h} |h|}{\sup_{\bar{\mathbb{B}}_h} |h|} \geq \tau_h$$

The constants  $\bar{\rho}_h$  and  $\tau_h$  can be chosen locally constant for rational functions in  $\mathcal{R}_{\text{norm}}$  near  $h$ . Since  $\mathcal{R}_{\text{norm}}$  is compact, if we choose  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(n, \tilde{\mathbb{B}})$  the minimum of the  $\bar{\rho}_h$  and  $\tau = \tau(n, \tilde{\mathbb{B}})$  the minimum of the  $\tau_h$  for a finite covering of  $\mathcal{R}_{\text{norm}}$ , we have : for every rational map  $h \in \mathcal{R}_{\text{norm}}$  of degree  $m$ , there exists a ball  $\mathbb{B} \subset \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$  of radius larger than  $\bar{\rho}$  such that :

$$\frac{\inf_{\mathbb{B}} |h|}{\sup_{\mathbb{B}} |h|} \geq \tau$$

Since every rational map  $h$  of degree  $m$  can be written  $h = C^{ste} \cdot \tilde{h}$  with  $\tilde{h} \in \mathcal{R}_{\text{norm}}$ , the result is true for every rational map of degree  $m$ .

□

*Proof of Lemma 8.4.1.1.* We fix such a ball  $\overline{\mathbb{B}}$ . Up to multiplying  $h$  by a constant, which does not affect (8.1), we can suppose that  $|h|_\infty = 1$ . We denote  $\frac{1}{\tau} = \sigma$ . Then by the Cauchy inequality we have :  $\frac{\|Dh(z)\|}{|h(z)|} \leq \frac{1}{\tau} = \sigma$ , this is (8.1). Then (8.2) and (8.3) are simple consequences of (8.1). The proposition is proven.  $\square$

Let us point out for further the following interpolation result. Remind that the integer  $n$  was defined in Proposition 8.2.1.10.

**Lemma 8.4.1.3.** *Let us take  $n$  balls  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ . There exists an integer  $\tilde{d} = \tilde{d}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n)$  and two real numbers  $1 > f_1 > 0$  and  $1 > f_2 > 0$  such that for every  $\xi > 0$ , there exists a constant  $\nu = \nu(n, \xi) > 0$  such that : for every ball  $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^2$  of radius bounded by 1, for every  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , there exist a polynomial map  $H = H(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n, \mathbb{B}, \theta_0)$  of  $\mathbb{C}^2$  of degree  $\tilde{d}$  and  $(n + 1)$  balls  $\mathbb{B}_0, \dots, \mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}$  of radius greater than  $\nu \cdot \text{rad}(\mathbb{B})$  such that on each  $\mathbb{B}_j$  :*

$$\forall t \in (1 - f_1, 1 + f_1), \forall \theta \in (\theta_0 - f_2, \theta_0 + f_2) : -e^{i\theta} \cdot t \cdot DH \in \mathcal{V}_j \text{ and } 2 \cdot |H|_\infty < \xi$$

*Proof.* We call  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$  the centers of the balls  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ . Let us take the ball  $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0, 1)$ . For a given  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ , there exists  $H$  having its differentials at  $n$  points  $p_i \in \mathbb{B}(0, 1)$  satisfying  $H(p_i) = 0$  and  $DH_{p_i} = e^{-i\theta_0} \cdot \tilde{v}_j$  by interpolation. Taking sufficiently small balls  $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_n$  of radius  $\nu$  around the points  $p_i$ , this gives the result for a given  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$  and  $t = 1$ . Moreover, since the required condition are open,  $H$  can be taken uniform on a small interval of values of  $\theta$  and a small interval  $(1 - f_1, 1 + f_1)$  of values of  $t$ . Then  $\tilde{d}$ ,  $\nu$  and  $f_1$  can be taken locally constant in  $\theta$ . Since  $[0, 2\pi]$  is compact, we take the maximal value of  $\tilde{d}$  and the minimal values of  $\nu$  and  $f_1$  on a finite covering of  $[0, 2\pi]$  by intervals where  $\tilde{d}$ ,  $\nu$  and  $f_1$  can be taken constant on each interval of the covering. In particular, since this covering is finite, there exists  $f_2 > 0$  such that for each  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ , it is possible to find constant  $H, m, \nu, f_1$  for every  $\theta \in (\theta_0 - f_2, \theta_0 + f_2)$ . This gives us the result for the fixed ball  $\mathbb{B}(0, 1)$ . Then, the result follows for any ball  $\mathbb{B}(\gamma, r)$  with  $r \leq 1$  by taking the map  $\tilde{H} = (r \cdot \text{Id} + \gamma) \circ H \circ (\frac{1}{r} \cdot \text{Id} - \gamma)$ . It is easy to check that :  $-e^{i\theta_0} \cdot t \cdot D\tilde{H} = -e^{i\theta_0} \cdot t \cdot DH \in \mathcal{V}_j$  and  $2 \cdot |\tilde{H}|_\infty < 2 \cdot r \cdot |H|_\infty < \xi$ .  $\square$

## 8.4.2 Fixing the constants relative to the torus $\mathbb{T}$ and the matrix of the linear part $A$

In the two next subsections, we fix some notation and define a certain number of constants and objects in the following specified order. As a guide for the reader objects denoted in roman letters are relative to  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , and gothic letters are relative to the torus.

1. We fix a torus  $\mathbb{T}$  and euclidean coordinates  $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ . We fix the projection  $\Pi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  as in Proposition 8.3.1.1. We fix the group  $G_{\text{Lattès}} = G_{\text{Lattès}}(\mathbb{T}, \Pi)$  given by Proposition 8.3.1.3.
2. We fix a Fubini-Study metric  $\|\cdot\|_{FS}$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .
3. We fix the matrix of the linear part  $A$  with  $A \in G_{\text{Lattès}}$ . We fix a line  $\delta$  as in Proposition 8.3.2.5. We fix affine coordinates  $[z_1, z_2, z_3]$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  as in Proposition 8.3.2.1 in which  $\delta = \{z_3 = 0\}$ . In the following, we dehomogenize by working in the chart  $\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

4. We first need a proposition.

**Notation 8.4.2.1.** We will denote :  $V^j = v_j + r_j \cdot B(0, 1)$  (remind the balls  $V^j$  were defined in Proposition 8.2.1.10).  $\frac{1}{4} \cdot V^j$  will denote the ball of same center as  $V^j$  and with quarter of radius.

We fix  $\mathfrak{p}_0 \in \mathbb{T}$  such that  $\Pi(\mathfrak{p}_0) \in \{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$  and  $D\Pi_{\mathfrak{p}_0}$  is invertible. There exist invertible matrices  $M_1, \dots, M_n$  such that for every  $j$  :

$$(D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_0)} \cdot \left( D\Pi_{\mathfrak{p}_0} \cdot A \cdot (D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_0)} \right)^{-1} \cdot M_j \cdot \left( D\Pi_{\mathfrak{p}_0} \cdot A \cdot (D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_0)} \right)^{-1} \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}_0} = v_j$$

Then, by continuity we have :

**Lemma 8.4.2.2.** There exists a ball  $\tilde{\mathfrak{B}} = \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{T}, A) \subset \mathbb{T}$  (remind we have fixed euclidean coordinates on  $\mathbb{T}$ ) where  $\Pi$  is invertible such that  $\Pi(\tilde{\mathfrak{B}}) \in \{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$ , a constant  $\sigma' = \sigma'(\mathbb{T}, A) > 0$  and  $n$  balls  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  such that for every  $\mathfrak{p}_i \in \tilde{\mathfrak{B}}$  :

$$(D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_1)} \cdot \left( D\Pi_{\mathfrak{p}_2} \cdot A \cdot (D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_3)} \right)^{-1} \cdot \mathcal{V}_j \cdot \left( D\Pi_{\mathfrak{p}_4} \cdot A \cdot (D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_5)} \right)^{-1} \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}_6} \in \frac{1}{4} \cdot V^j$$

**Lemma 8.4.2.3.** Reducing  $\tilde{\mathfrak{B}}$  if necessary, there exists a constant  $\sigma' = \sigma'(\mathbb{T}, A) > 0$  such that for every  $w$  with  $\|w\| = 1$ , we have :

$$\inf_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|D(\Pi \circ A \circ \Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p})}(w)\| \geq \sigma' \cdot \left( \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|D\Pi_{\mathfrak{p}}\| \right) \cdot \|A\| \cdot \left( \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|(D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p})}\| \right)$$

*Proof.* We take :

$$\sigma' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\inf(\text{Sp}((D(\Pi \circ A \circ \Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p}_0)})))}{\left( \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|D\Pi_{\mathfrak{p}}\| \right) \cdot \|A\| \cdot \left( \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|(D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p})}\| \right)}$$

and the condition holds reducing the size of the ball  $\tilde{\mathfrak{B}}$  around  $\mathfrak{p}_0$  if necessary.  $\square$

We fix such a ball  $\tilde{\mathfrak{B}}$ , a constant  $\sigma' > 0$  and  $n$  balls  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  of centers  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ .

5. We will use the following notation :

**Notation 8.4.2.4.** In the following, we still denote  $\|M\|$  the norm  $\|\cdot\|_{2,2}$  of a fixed matrix. We will denote  $\|D\Pi\| = \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|D\Pi_{\mathfrak{p}}\|$  and  $\|D\Pi^{-1}\| = \sup_{\mathfrak{p} \in \tilde{\mathfrak{B}}} \|(D\Pi^{-1})_{\Pi(\mathfrak{p})}\|$ .

6. We fix  $\tilde{\mathbb{B}} = \tilde{\mathbb{B}}(\mathbb{T}, A, \tilde{\mathfrak{B}})$  a ball included in  $\Pi(\tilde{\mathfrak{B}})$ . There exists some constant  $\iota > 0$  such that for every ball  $\mathbb{B} \subset \tilde{\mathbb{B}}$  of radius  $r$ ,  $\Pi^{-1}(\mathbb{B}) \cap \tilde{\mathfrak{B}}$  contains a ball of radius  $\iota \cdot r$ . We fix such a constant  $\iota$ . We take the restriction of  $\|\cdot\|_{FS}$  on  $\tilde{\mathbb{B}}$ . Since  $\tilde{\mathbb{B}} \in \{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$ , this restriction is equivalent to the euclidean metric on  $\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$ .
7. We fix the integer  $m = \tilde{d}$  and the reals  $f_1, f_2 > 0$  given by Lemma 8.4.1.3 associated to the balls  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ .
8. We fix the constants  $\rho = \rho(m) \geq 0$ ,  $\sigma = \sigma(m) > 0$  given by Lemma 8.4.1.1 associated to the integer  $m = \tilde{d}$ , the ball  $\mathbb{B}$  and the two reals  $f_1, f_2$ .

9. We take a constant  $\xi = \xi(\mathbb{T}, \Pi, \mathcal{V}_i, A, \sigma, \sigma')$  satisfying the following inequality :

$$0 < \xi < \frac{1}{4} \cdot \min_{1 \leq j \leq n} r_j \cdot \min\left(\frac{\sigma' \cdot \|A\|^2}{2\|\Pi^{-1}\|_{C^2} \cdot \|D\Pi\|}, \frac{\|A\|^2}{2\sigma \cdot \|D\Pi\|^3 \cdot \|D\Pi^{-1}\|^3}\right)$$

10. From 8.4.2.7 and 8.4.2.8, Lemma 8.4.1.3 gives us a new constant  $\nu = \nu(m, \xi) > 0$ .
11. Corollary 8.2.1.8 gives us a constant  $N(\frac{\nu\rho}{10})$ .
12. We fix a constant  $d^1$  defined as follows. Let us point out that for any Lattès map  $L$  of algebraic degree  $d'$  coming from an affine map  $\mathcal{L}$  on  $\mathbb{T}$ , of linear part  $aA$ , the equality of the two topological degrees gives :  $(d')^2 = |a|^4 \cdot |\det(A)|^2$ . There are  $(d')^2 = |a|^4 \cdot |\det(A)|^2$  disjoint preimages of the torus  $\mathbb{T}$  by the affine map  $\mathcal{L}$  of volume  $\frac{\text{vol}(\mathbb{T})}{|a|^4 \cdot |\det(A)|^2}$ . Let us denote  $\text{vol}_r$  the volume of a ball of radius  $r$ . Let us take  $d^1$  such that both  $(d^1)^2 \cdot \frac{\text{vol}_r}{10 \cdot \text{vol}(\mathbb{T})} > (\frac{1}{\nu} \cdot N(\frac{\nu\rho}{10}))^4$  and  $(d^1)^2 \geq 100 \cdot \max_{A \in G_{\text{Lattès}}} |\det(A)|^2$ . In particular, this last condition implies that for any Lattès map of algebraic degree  $d' \geq d^1$ , we have  $|a| \geq 2$ .
13.  $i$  was defined in Proposition 8.3.2.1 and  $K$  in Proposition 8.3.3.1, we fix  $n_H = E(\frac{m+2K}{i}) + 1$ . We fix  $d^2 = d_{n_H+100}$  (this integer was also defined in Proposition 8.3.2.1). We fix  $d^3 = 2K$ .
14. We fix  $d = \max(d^1, d^2, d^3)$ .

### 8.4.3 Fixing the constants relative to the Lattès map

15. Let  $L$  be a Lattès map  $L = [\bar{P}_1 : \bar{P}_2 : \bar{P}_3]$  of degree  $d' > d$  associated to an affine map on  $\mathbb{T}$  of linear part  $aA$ .
16. According to Proposition 8.3.2.1, in the coordinates  $[z_1, z_2, z_3]$  which were fixed in 4.2.3. we have that :

$$\bar{P}_3(z_1, z_2, z_3) = \prod_{1 \leq j \leq J} \bar{P}_{3,j}(z_1, z_2, z_3)$$

with  $P_{3,j}$  irreducible and  $\deg(\bar{P}_{3,i}) \leq i = i(\mathbb{T}^2)$  for  $J \geq j \geq J - m - 2K + 1$  (remind that  $K$  was defined in Proposition 8.3.3.1). In plain words, the last factors of the product have degree bounded by a constant  $i$  depending only on the chosen torus  $\mathbb{T}$ . We will consider the restriction of  $L$  to  $\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\} \cap L^{-1}(\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\})$ . We have :

$$L(z_1, z_2) = \left( \frac{\bar{P}_1(z_1, z_2, 1)}{\bar{P}_3(z_1, z_2, 1)}, \frac{\bar{P}_2(z_1, z_2, 1)}{\bar{P}_3(z_1, z_2, 1)} \right)$$

We denote  $P_i(z_1, z_2) = \bar{P}_i(z_1, z_2, 1)$ .

17. There exists a periodic point  $p_c$  of period  $n_{pc}$  (which is a multiple of  $\text{ord}_{\text{Lattès}}$ ) which belongs to the postcritical set of  $L$ , according to Proposition 8.3.3.1, we fix it once for all. We call  $c$  the point of the critical curve such that  $p_c$  is in the orbit of  $c$  and we have  $n_c + n_{pc} \leq K$  according to Proposition 8.3.3.1, where  $K$  is independent of the choice of  $\mathbb{T}$  and  $L$ . Since  $p_c$  is repelling, we can suppose that  $c$  is the only critical point

in  $\{c, L(c), \dots, p_c, \dots, L^{n_{pc}-1}(p_c)\}$ . We choose homogenous polynomials of degree 1 denoted by  $Q_1, \dots, Q_{n_c+n_{pc}-1}$  such that :

$$Q_1(c) = Q_2(L(c)) = \dots = Q_{n_c}(p_c) = Q_{n_c+n_{pc}-1}(L^{n_{pc}-1}(p_c)) = 0 \quad (8.4)$$

It is possible to take these polynomials such that at least one of the coefficients of  $z_1$  and  $z_2$  is non equal to 0 so we take the polynomials with this property.

18. Putting

$$\tilde{P}_3(z_1, z_2) = \prod_{J-2(n_c+n_{pc})-m+1 \leq j \leq J} P_{3,j}(z_1, z_2),$$

let us denote by  $h$  the rational function defined by :

$$h(z_1, z_2) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n_c+n_{pc}-1} (Q_j(z_1, z_2, 1))^2}{\tilde{P}_3(z_1, z_2)}$$

19. We denote :  $h(\Pi(\mathbf{p}_0)) = |h(\Pi(\mathbf{p}_0))|e^{i\theta_1}$ .

20. We choose the ball  $\mathbb{B} \subset \tilde{\mathbb{B}}$  of radius larger than  $\rho$  according to Lemma 8.4.1.1 applied to the ball  $\tilde{\mathbb{B}}$  chosen in 8.4.2.6 and to the constants  $m, f_1, f_2$  chosen in 8.4.2.7. We pick a ball  $\mathfrak{B} \subset \Pi^{-1}(\mathbb{B}) \cap \tilde{\mathfrak{B}}$ . According to 8.4.2.6,  $\mathfrak{B}$  can be taken with its radius equal to  $\iota \cdot \rho$  and this bound on its radius (not the ball itself, but the bound on its radius) is independent of  $L$ . Since  $d' \geq d \geq d^1$  with  $(d^1)^2 \cdot \frac{\text{vol}_{\iota \cdot \rho}}{10 \cdot \text{vol}(\mathbb{T})} > (\frac{1}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \rho}{10}))^4$ , there are at least  $(\frac{1}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \rho}{10}))^4$  preimages of  $\mathfrak{B}$  by the affine map  $\mathcal{L}$  inside  $\tilde{\mathfrak{B}}$  which form a grid of balls.

21. We fix the polynomial map  $H = H(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n, \mathbb{B}, \theta_0)$  of  $\mathbb{C}^2$  of degree  $m = \tilde{d}$  and  $(n+1)$  balls  $\mathbb{B}_0, \dots, \mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}$  given by Lemma 8.4.1.3 and corresponding to this ball  $\mathbb{B}$  and the value  $\theta_0 = \theta_1 - 2 \arg(a)$  where  $\theta_1$  was defined in 4.3.19. Each of them has its radius larger than  $\nu$  times the radius of  $\mathbb{B}$ . We take  $(n+1)$  balls  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B} \cap \Pi^{-1}(\mathbb{B}_0), \dots, \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B} \cap \Pi^{-1}(\mathbb{B}_n)$  of radius  $\iota \cdot (\nu \cdot \text{rad}(\mathbb{B}))$ . Then the quotient  $\frac{\text{rad}(\mathfrak{B}_j)}{\text{rad}(\mathfrak{B})}$  is equal for each  $j \in \{1, \dots, n\}$  to  $\frac{\iota \cdot (\nu \cdot \text{rad}(\mathbb{B}))}{\text{rad}(\mathfrak{B})} = \frac{\iota \cdot (\nu \cdot \rho)}{\iota \cdot \rho} = \nu$ . Let us point out that this bound on the radius is still independent of  $L$ .

#### 8.4.4 Creating a correcting IFS

**Notation 8.4.4.1.** *In the following we construct three holomorphic families of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  which are successive perturbations of  $L$  :  $L' = L'_{\varepsilon_1}$ ,  $L'' = L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  and  $L''' = L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$  where  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{D}$ . We have  $L'_0 = L$ ,  $L''_{\varepsilon_1, 0} = L'_{\varepsilon_1}$  and  $L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0} = L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . We often forget the  $\varepsilon_i$  and just denote  $L', L'', L'''$  for simplicity when there is no risk of confusion.*

**Notation 8.4.4.2.** *We consider the  $q = q(d)$  preimages of  $\Pi(\mathfrak{B})$  under  $L$  included inside  $\Pi(\mathfrak{B})$  and the corresponding local inverses  $(g_j)_{1 \leq j \leq q}$  of  $L$ . We denote by  $(\mathcal{G}_j)_{1 \leq j \leq q}$  the corresponding maps on  $\mathfrak{B}$ . For further perturbations  $L', L'', L'''$  of  $L$ , we consider the analogous objects and we call them  $(g'_j)_{1 \leq j \leq q}$ ,  $(g''_j)_{1 \leq j \leq q}$ ,  $(g'''_j)_{1 \leq j \leq q}$  and  $(\mathcal{G}'_j)_{1 \leq j \leq q}$ ,  $(\mathcal{G}''_j)_{1 \leq j \leq q}$ ,  $(\mathcal{G}'''_j)_{1 \leq j \leq q}$ .*

**Notation 8.4.4.3.** In the following, we will consider the continuation  $p(L')$  (resp.  $p(L'')$ ,  $p(L''')$ ) of the periodic point  $p_c$ . This one is well defined according to the implicit function Theorem since  $p_c$  is repelling. In fact, for the successive perturbations that we will consider, we will always have  $p(L') = p(L'') = p(L''') = p_c$ .

**Proposition 8.4.4.4.** Let  $L$  be a Lattès map of degree  $d' > d$  coming from an affine map on  $\mathbb{T}$ , of linear part  $aA$ . Let  $L = (\frac{P_1}{P_3}, \frac{P_2}{P_3})$  be the expression of  $L$  in the chart  $\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$  defined in 4.2.3. Then the family of rational maps  $(L'_{\varepsilon_1})_{\varepsilon_1}$  where  $L' = L'_{\varepsilon_1} = (\frac{P'_1}{P_3}, \frac{P'_2}{P_3})$  defined by :

$$P'_1(z_1, z_2) = P_1(z_1, z_2) + \varepsilon_1 h(z_1, z_2) P_3(z_1, z_2) H_1(z_1, z_2) \quad (8.5)$$

$$P'_2(z_1, z_2) = P_2(z_1, z_2) + \varepsilon_1 h(z_1, z_2) P_3(z_1, z_2) H_2(z_1, z_2) \quad (8.6)$$

where  $h$  was defined in 8.4.3.18,  $H$  in 8.4.3.21 and  $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}$  is such that :

1. For every  $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}$ ,  $L' = L'_{\varepsilon_1}$  extends to a holomorphic map of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  of the same degree as  $L$  and  $(L'_{\varepsilon_1})_{\varepsilon_1}$  is a holomorphic family of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$
2.  $p(L') = p_c$  is periodic for  $L'$  and is in the forward orbit of  $c$  :  $p_c = (L'_{\varepsilon_1})^{n_c}(c)$  and  $(L'_{\varepsilon_1})^{n_{p_c}}(p_c) = p_c$ . Moreover we have  $D(L'_{\varepsilon_1})_c = D(L)_c, \dots, D(L'_{\varepsilon_1})_{(L'_{\varepsilon_1})^{n_{p_c}-1}(p_c)} = DL_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)}$  for every  $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}$

*Proof.* Let first remark that since  $P_3$  admits at least  $n_H = (E(\frac{m+2K}{i}) + 1)$  factors of degree bounded by  $i$ , the degrees of  $hP_3H_1$  and  $hP_3H_2$  are bounded by  $\deg(P_1) = \deg(P_2)$ . Since the property of being a holomorphic mapping is open,  $L'$  is a holomorphic mapping for sufficiently small values of  $\varepsilon_1$ . For simplicity we will suppose that this is true for  $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}$  after rescaling if necessary. Since  $\varepsilon_1$  is just a linear factor,  $(L'_{\varepsilon_1})_{\varepsilon_1}$  is a holomorphic family of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Thus item 1 is proven. Item 2 is a consequence of the quadratic terms  $Q_j^2$  in  $h$  (see 8.4.3.18). □

**Proposition 8.4.4.5.** Let a Lattès map  $L$  of degree  $d' > d$  coming from an affine map on  $\mathbb{T}$ , of linear part  $aA$ . We are working in the chart  $\{[z_1, z_2, z_3] : z_3 \neq 0\}$  defined in 4.2.3. In this chart,  $L = (\frac{P_1}{P_3}, \frac{P_2}{P_3})$ . Let  $L'$  as in Proposition 8.4.4.4. Then there exists  $t > 0$  such that for every  $0 \leq p \leq n$ , for every real  $0 < \varepsilon_1 < 1$ , there exists a ball  $\mathfrak{B}_p \subset \mathfrak{B} \subset \mathbb{C}^2$  of radius  $\text{rad}(\mathfrak{B}_p) \geq \nu \cdot \text{rad}(\mathfrak{B})$  and a neighborhood  $\mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  of  $L'$  in  $\text{Hol}_d$  such that for every  $L''' \in \mathcal{X}_{\varepsilon_1}$ , if  $j$  is such that  $\mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_p$  then  $\mathcal{G}_j'''$  is of type  $(t\varepsilon_1, p)$ .

*Proof.* In the following, we omit the index  $j$  on  $g_j, g'_j, \mathcal{G}_j$  and  $\mathcal{G}'_j$  and we take  $0 < \varepsilon_1 < 1$ . Let us remind we work in the chart :  $[z_1, z_2, z_3] \mapsto (\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3})$  on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . We first show the result for  $L'$ . We have for every  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B} \cap \mathcal{G}'(\mathfrak{B})$  :

$$\begin{aligned} D\mathcal{G}'_{\mathfrak{p}} - D\mathcal{G}_{\mathfrak{p}} &= D\Pi_{g'(\Pi(\mathfrak{p}))}^{-1} \cdot Dg'_{\Pi(\mathfrak{p})} \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}} - D\Pi_{g(\Pi(\mathfrak{p}))}^{-1} \cdot Dg_{\Pi(\mathfrak{p})} \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}} = \\ (D\Pi_{g'(\Pi(\mathfrak{p}))}^{-1} - D\Pi_{g(\Pi(\mathfrak{p}))}^{-1}) \cdot Dg'_{\Pi(\mathfrak{p})} \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}} &+ D\Pi_{g(\Pi(\mathfrak{p}))}^{-1} \cdot (Dg'_{\Pi(\mathfrak{p})} - Dg_{\Pi(\mathfrak{p})}) \cdot D\Pi_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

with :

$$Dg'_{\Pi(\mathfrak{p})} - Dg_{\Pi(\mathfrak{p})} = \left( I_2 + (DL_{g(\Pi(\mathfrak{p}))})^{-1} \cdot D(\varepsilon_1 \cdot h \cdot H)_{g(\Pi(\mathfrak{p}))} \right)^{-1} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathfrak{p}))})^{-1} - (DL_{g(\Pi(\mathfrak{p}))})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot \varepsilon_1 D(h.H)_{g(\Pi(\mathbf{p}))} (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} + o(\varepsilon_1) \\
 D(h.H)_{g(\Pi(\mathbf{p}))} &= h(g(\Pi(\mathbf{p}))) \cdot DH_{g(\Pi(\mathbf{p}))} + H(g(\Pi(\mathbf{p}))) \cdot Dh_{g(\Pi(\mathbf{p}))}
 \end{aligned}$$

Then we have :

$$Dg'_{\mathbf{p}} - Dg_{\mathbf{p}} = \eta_1 + \eta_2 - D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot \varepsilon_1 \cdot h(g(\Pi(\mathbf{p}))) \cdot DH_{g(\Pi(\mathbf{p}))} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot D\Pi_{\mathbf{p}} + o(\varepsilon_1)$$

where  $\eta_1 = (D\Pi_{g'(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} - D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1}) \cdot Dg'_{\Pi(\mathbf{p})} \cdot D\Pi_{\mathbf{p}}$  and :

$$\eta_2 = -D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot \varepsilon_1 \cdot H(g(\Pi(\mathbf{p}))) \cdot Dh_{g(\Pi(\mathbf{p}))} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot D\Pi_{\mathbf{p}}$$

**Lemma 8.4.4.6.** For any  $\mathbf{p} \in \mathfrak{B} \cap \mathcal{G}'(\mathfrak{B})$  we have :

$$-D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot \varepsilon_1 \cdot h(g(\Pi(\mathbf{p}))) \cdot DH_{g(\Pi(\mathbf{p}))} \cdot (DL_{g(\Pi(\mathbf{p}))})^{-1} \cdot D\Pi_{\mathbf{p}} \in \frac{1}{4|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot V^j$$

*Proof.* This is due to the fact that  $H$  has been taken so that  $-\frac{h(\Pi(\mathbf{p}))}{a^2} \cdot D(H)_{g(\Pi(\mathbf{p}))}$  belongs to  $\frac{|h(\Pi(\mathbf{p}_0))|}{|a|^2} \cdot \mathcal{V}_j$  and by the definition of  $\mathcal{V}_j$  (see Lemma 8.4.2.2).  $\square$

**Lemma 8.4.4.7.** We have :  $\|\eta_1\| < \frac{1}{4|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot \min_{1 \leq j \leq n} r_j$

*Proof.* Since  $2 \cdot |H|_{\infty} \leq \xi$  and by Lemma 8.4.2.3 for every  $\mathbf{p} \in \mathfrak{B} \cap \mathcal{G}'(\mathfrak{B})$  we have :

$$\begin{aligned}
 \|g'(\Pi(\mathbf{p})) - g(\Pi(\mathbf{p}))\| &\leq \frac{\varepsilon_1 \cdot |h(g(\Pi(\mathbf{p})))| \cdot \xi}{\inf_{\|w\|=1} \|D(\Pi \circ aA \circ \Pi^{-1})(w)\|} \\
 &< \frac{\varepsilon_1 \cdot |h(g(\Pi(\mathbf{p})))| \cdot \xi}{\sigma' \cdot |a| \cdot \|A\| \cdot \|D\Pi\| \cdot \|D\Pi^{-1}\|}
 \end{aligned}$$

Then we have :

$$\begin{aligned}
 \|\eta_1\| &= \|(D\Pi_{g'(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} - D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1}) \cdot Dg'_{\Pi(\mathbf{p})} \cdot D\Pi_{\mathbf{p}}\| \\
 &\leq \|D\Pi_{g'(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1} - D\Pi_{g(\Pi(\mathbf{p}))}^{-1}\| \cdot \|Dg'_{\Pi(\mathbf{p})}\| \cdot \|D\Pi_{\mathbf{p}}\| \\
 &< \frac{\varepsilon_1 \cdot |h(g(\Pi(\mathbf{p})))| \cdot \xi}{\sigma' \cdot |a| \cdot \|A\| \cdot \|D\Pi\| \cdot \|D\Pi^{-1}\|} \cdot \|\Pi^{-1}\|_{C^2} \cdot \|Dg'_{\Pi(\mathbf{p})}\| \cdot \|D\Pi_{\mathbf{p}}\| \\
 &< \frac{\varepsilon_1 \cdot 2|h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot \xi}{\sigma' \cdot |a| \cdot \|A\| \cdot \|D\Pi\| \cdot \|D\Pi^{-1}\|} \cdot \|\Pi^{-1}\|_{C^2} \cdot \left(\frac{1}{|a| \cdot \|A\|} \cdot \|D\Pi\| \cdot \|D\Pi^{-1}\|\right) \cdot \|D\Pi_{\mathbf{p}}\| \\
 &< \frac{1}{4|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot \min_{1 \leq j \leq n} r_j
 \end{aligned}$$

by the inequality on  $\xi$ .  $\square$

**Lemma 8.4.4.8.** We have :  $\|\eta_2\| < \frac{1}{4|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot \min_{1 \leq j \leq n} r_j$ ,

*Proof.*

$$\begin{aligned}
 \|\eta_2\| &\leq \|D\Pi^{-1}\| \cdot \|DL^{-1}\| \cdot \varepsilon_1 \cdot \|H\| \cdot \|Dh\| \cdot \|DL^{-1}\| \cdot \|D\Pi\| \\
 &\leq \|D\Pi^{-1}\| \cdot \left(\frac{1}{|a| \cdot \|A\|} \cdot \|D\Pi\| \cdot \|D\Pi^{-1}\|\right)^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \xi \cdot \|Dh\| \cdot \|D\Pi\| \\
 &= \frac{1}{|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \xi \cdot \frac{1}{\|A\|^2} \cdot \|D\Pi\|^3 \cdot \|D\Pi^{-1}\|^3 \cdot \|Dh\| \\
 &\leq \frac{1}{4|a|^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathbf{p}_0))| \cdot \min_{1 \leq j \leq n} r_j
 \end{aligned}$$

by the inequality on  $\xi$  and because :  $\forall z \in \mathfrak{B}, \|Dh(z)\| \leq \sigma \cdot |h(z)| \leq \sigma \cdot 2|h(\Pi(\mathfrak{p}_0))|$ .  $\square$

The three previous lemmas imply that on  $\mathfrak{B} \cap \mathcal{G}'(\mathfrak{B})$ ,  $D\mathcal{G}'_p - D\mathcal{G}_p$  belongs to  $t \cdot V^j$  with  $t = \frac{\varepsilon_1 \cdot |h(\Pi(\mathfrak{p}_0))|}{|a|^2}$ . Then by continuity, for a given  $\varepsilon_1$  (and then a given  $L'$ ), there exists a neighborhood  $\mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  of  $L'$  in  $\text{Hol}_{d'}$  such that for every sufficiently small perturbation  $L''' \in \mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  of  $L'$ , if  $j$  is such that  $\mathcal{G}'''_j(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_p$  then  $\mathcal{G}'''_j$  is of type  $(t\varepsilon_1, p)$ . This proves the first item of Proposition 8.4.4.5. The proof of Proposition 8.4.4.5 is complete.  $\square$

### 8.4.5 Well oriented postcritical set

**Notation 8.4.5.1.** We fix  $\mathfrak{pc}$  a point of  $\Pi^{-1}(p_c)$ .

**Notation 8.4.5.2.** We denote by  $\text{PCrit}(L)$  the postcritical set of  $L$ , this is the set  $\text{PCrit}(L) = \bigcup_{n \geq 0} (L)^n(\text{Crit}(L))$  where  $\text{Crit}(L)$  is the critical set of  $L$ . The notation will be the same for perturbations  $L', L'', L'''$ .

We pick a vector  $w_1$  and a value  $\theta$  given by Corollary 8.2.1.8 corresponding to the 4-tuple  $u$  of the four vectors of a basis of  $\Lambda$ . Still according to Corollary 8.2.1.8, there exists an open set of admissible values for  $w_1$  so we choose to take it in the following way. The map  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$  is an affine map on the torus  $\mathbb{T}$  of linear part  $a^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)} \cdot A^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)} = a^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)} \cdot I_2^{n_{pc}} = a^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)} \cdot I_2$  with  $|a| \geq 2$  (see 8.3.2.12). Points with dense forward orbit for  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$  are dense in  $\mathbb{T}$ . Moreover, since  $n_{pc}$  divides  $n_{pc} \cdot \text{ord}(A)$ ,  $\mathfrak{pc}$  is a fixed point of  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$ . We pick  $w_1$  such that  $\mathfrak{pc} + \pi(w_1)$  is a point of dense forward orbit for  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$ . Since the linear part of  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$  is  $a^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)} \cdot I_2$  and  $\mathfrak{pc}$  is a fixed point of  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$ , we have that the whole forward orbit of  $\mathfrak{pc} + \pi(w_1)$  by  $\mathcal{L}^{n_{pc} \cdot \text{ord}(A)}$  is contained in the line going through  $\mathfrak{pc}$  and  $\mathfrak{pc} + \pi(w_1)$ . In particular, this line is dense in the torus  $\mathbb{T}$ . We pick  $w_2$  such that  $(w_1, w_2)$  is a basis of  $\mathbb{C}^2$  and  $\pi(w_2)$  is not tangent to  $\Pi^{-1}(\text{PCrit}(L))$  at  $\mathfrak{pc}$ .

Here is the main result of this subsection :

**Proposition 8.4.5.3.** Let  $\mathfrak{B}$  be as in 8.4.3.20. There exists a neighborhood  $\mathcal{W}(L)$  of  $L$  in  $\text{Hol}_{d'}$  such that : every map  $L' = L'_{\varepsilon_1}$  as in Proposition 8.4.4.4 is accumulated by maps  $L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = L'''$  in  $\mathcal{W}(L)$  such that there exists a component  $\Gamma \subset \Pi^{-1}(\text{PCrit}(L'''))$  whose restriction to  $\mathfrak{B}$  is a  $(\theta, w_1)$ -quasi-diameter (remind that this notion was defined in Definition 8.2.1.5).

The following lemma is well known.

**Lemma 8.4.5.4.** Let  $\mathfrak{L}$  be a linear automorphism of  $\mathbb{C}^2$  and  $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$  a complex submanifold through 0 such that :

1. the eigenvalues  $\lambda, \mu$  of  $\mathfrak{L}$  are such that  $|\lambda| > |\mu| > 1$ . Let  $w_\lambda$  and  $w_\mu$  be the respective eigenvectors.
2.  $w_\mu$  is transverse to  $\Gamma$  at 0

Then,  $(\mathfrak{L}^k(\Gamma))_{k \geq 0}$  converges uniformly to the line  $\mathbb{C} \cdot w_\lambda$  in the  $C^1$ -topology.

*Proof.* We can take  $w_\lambda = e_1$  and  $w_\mu = e_2$ . The eigenvector  $w_\mu$  of  $\mu$  is transverse to  $\Gamma$  at 0. Then locally  $\Gamma$  is a graph  $\gamma$  over a small disk  $\mathbb{D}_\gamma \subset \mathbb{D} : \{(t, \gamma(t)) : t \in \mathbb{D}_\gamma\}$ . For every  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{L}^k(\{(t, \gamma(t)) : t \in \mathbb{D}_\gamma\}) = \{(\lambda^k \cdot t, \mu^k \cdot \gamma(t)) : t \in \mathbb{D}_\gamma\}$ . Since  $|\lambda| > 1$ , for large  $k$ , we have  $\mathbb{D} \subset \lambda^k \cdot \mathbb{D}_\gamma$ . Then  $\mathfrak{L}^k(\{(t, \gamma(t)) : t \in \mathbb{D}_\gamma\})$  contains  $\{(s, \mu^k \cdot \gamma(\frac{s}{\lambda^k})) : s \in \mathbb{D}\}$ . But there exists  $C_\gamma > 0$  such that  $|\gamma(t)| < C_\gamma \cdot t$  near 0. Then  $\mu^k \cdot \gamma(\frac{s}{\lambda^k}) < C_\gamma \cdot (\frac{\mu}{\lambda})^k$  converges uniformly to 0 on  $\mathbb{D}_\gamma$ . Then, for every  $\theta' > 0$ , there exists  $k$  such that  $\mathfrak{L}^k(\{(t, \gamma(t)) : t \in \mathbb{D}_\gamma\})$  contains  $\{(s, \tilde{\gamma}(s)) : s \in \mathbb{D}\} = \{(s, \mu^k \cdot \gamma(\frac{s}{\lambda^k})) : s \in \mathbb{D}\}$  with  $|\tilde{\gamma}(s)| \leq \theta'$ . Then by the Cauchy inequality this implies that  $|(\tilde{\gamma})'(s)| \leq \theta'$ .  $\square$

**Notation 8.4.5.5.** We denote for every  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2$  by  $\text{Diag}_{\lambda, \mu}$  the following map from  $\mathbb{C}^2$  to  $\mathbb{C}^2$  :

$$\text{Diag}_{\lambda, \mu} : (z_1, z_2) \mapsto (\lambda \cdot z_1, \mu \cdot z_2)$$

**Lemma 8.4.5.6.** The linear part  $A \in G_{\text{Lattès}}$  of  $L$  is diagonalizable.

*Proof.* Since  $G_{\text{Lattès}}$  is a finite group, we have that  $A$  is of finite order. In particular,  $A^{\text{ord}(G_{\text{Lattès}})} = I_2$ . Then  $R(A) = 0$  where  $R(X) = X^{\text{ord}(G_{\text{Lattès}})} - 1$  has simple roots. Then  $A$  is diagonalizable.  $\square$

**Lemma 8.4.5.7.** Let  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{D}^3}$  be a holomorphic family of holomorphic germs defined in a neighborhood  $\mathcal{U}$  of 0 such that for every  $\varepsilon \in \mathbb{D}^3$ ,  $D(f_\varepsilon)_0$  is diagonalizable and 0 is a repelling fixed point for  $f_\varepsilon$ . We denote by  $\lambda(\varepsilon)$ ,  $\mu(\varepsilon)$  the eigenvalues of  $D(f_\varepsilon)_0$  and by  $w_\lambda$ ,  $w_\mu$  the associated eigenvectors. We suppose that in the family  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{D}^3}$ ,  $w_\lambda = w_1$  and  $w_\mu = w_2$  are constant. We suppose that  $|\lambda(0)|^2 > |\mu(0)| \geq |\lambda(0)|$ . Then there exists a neighborhood  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  of 0 and a neighborhood  $\mathcal{V}$  of 0 in  $\mathbb{D}^3$  such that for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$ ,  $f_\varepsilon$  is holomorphically linearizable in  $\mathcal{U}'$  : there exists a holomorphic map  $\varphi_{f_\varepsilon}$  defined on  $\mathcal{U}'$  such that we have :

$$\text{Diag}_{\lambda(\varepsilon), \mu(\varepsilon)} \circ \varphi_{f_\varepsilon} = \varphi_{f_\varepsilon} \circ f_\varepsilon$$

Moreover,  $\varphi_{f_\varepsilon}$  varies continuously with  $\varepsilon$  in the  $C^0$  topology.

The proof will be based on the following well known result (see Theorem 6.2.3 in [48]).

**Proposition 8.4.5.8.** Let  $F$  be an invertible map with repulsive fixed point 0. Suppose that the eigenvalues  $\lambda, \mu$  of  $DF_0$  satisfy the condition  $|\lambda|^2 > |\mu| \geq |\lambda| > 1$ . Then  $F$  is holomorphically conjugate to  $\text{Diag}_{\lambda, \mu}$ .

For the resonant case we use the following lemma :

**Lemma 8.4.5.9.** Let  $F$  be an invertible map in a neighborhood of 0 with a repelling fixed point at 0. Let us denote the eigenvalues of  $DF_0$  by  $\lambda, \mu$ . Let us suppose that  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are two holomorphic maps conjugating  $F$  to  $\text{Diag}_{\lambda, \mu}$ . Then  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  is linear.

*Proof.* Let us write  $\chi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = (\chi^1, \chi^2)$  and  $\chi^j(z) = \sum_{k \geq 1} \chi_k^j \cdot z^k$  where  $z^k = z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2}$  and  $j \in \{1, 2\}$ . We have that  $\chi$  commutes with  $L_{\lambda, \mu}$ . Then :

$$\lambda \cdot \sum_{|k| \geq 1} \chi_k^1 \cdot z^k = \sum_{|k| \geq 1} \chi_k^1 \cdot (\text{Diag}_{\lambda, \mu}(z))^k \text{ and } \mu \cdot \sum_{|k| \geq 1} \chi_k^2 \cdot z^k = \sum_{|k| \geq 1} \chi_k^2 \cdot (\text{Diag}_{\lambda, \mu}(z))^k$$

In particular, since  $\lambda, \mu \neq 1$  this implies that  $\chi_k^1 = \chi_k^2 = 0$  for every  $|k| > 1$ .  $\square$

We now prove Lemma 8.4.5.7.

*Proof of Lemma 8.4.5.7.* We take a neighborhood  $\mathcal{V}$  of 0 in  $\mathbb{D}^3$  such that for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$  we have that  $|\lambda(\varepsilon)|^2 < |\mu(\varepsilon)|$  and  $|\mu(\varepsilon)|^2 < |\lambda(\varepsilon)|$ . It is a consequence of Theorem 6.2.3 of [48] (this result goes back to Poincaré) that for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$ ,  $f_\varepsilon$  is holomorphically linearizable at 0 in some neighborhood  $\mathcal{U}'_\varepsilon$  of 0. We show here that the linearizing map  $\varphi_{f_\varepsilon}$  varies continuously with  $\varepsilon$  in the  $C^0$  topology. This will imply in particular that the neighborhood  $\mathcal{U}'_\varepsilon$  can be taken uniform  $\mathcal{U}'$  in  $\varepsilon$ .

For this we follow the proof of Theorem 6.2.3 of [48] and its notations. The proof is divided into 3 steps.

The first step itself is divided into two steps. The first one is a linear change of coordinates that we will denote by  $\varphi_{lin}$ .  $\varphi_{lin}$  is not unique but it becomes unique if  $w_1$  is sent on  $e_1$  and  $w_2$  is sent on  $e_2$ . Thus this map  $\varphi_{lin} = \varphi_{lin}(f_\varepsilon)$  is uniquely defined and varies continuously in the  $C^0$  topology. The second one is a change of coordinates that we will denote  $\varphi_1(z) = (\varphi_1^1(z_1), z_2)$  such that  $\varphi_1^1(z_1) = z_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot A(f_\varepsilon^k(z_1))$ . There exists a constant  $K$  such that  $|A(z_1)| \leq K|z_1|^2$  for every map  $f_\varepsilon$  with  $\varepsilon \in \mathcal{V}$  (reducing  $\mathcal{V}$  if necessary). Since  $\varphi_1^1$  is the sum of a normally convergent series whose terms all vary continuously,  $\varphi_1^1$  and then  $\varphi_1 \circ \varphi_{lin}$  vary continuously in the  $C^0$  topology. After these two changes of coordinates,  $f_\varepsilon$  is reduced to the form  $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda \cdot z_1, g(z_1, z_2))$  with  $g$  varying continuously.

In the second step, one defines some infinite product  $\gamma(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + B(F^n(z)))$ . We have  $|B(z)| \leq K'|z|^2$  and reducing  $\mathcal{V}$  if necessary, we can suppose this estimate is true for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$ . Then  $\gamma$  is normally convergent and varies continuously. The map  $\psi$  such that  $\frac{\partial \psi}{\partial z_2}$  then still varies continuously, just as  $\varphi_2(z) = (z_1, \psi(z))$ . After this third change of coordinates,  $f_\varepsilon$  is reduced to the form  $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda \cdot z_1, \mu \cdot z_2 + h(z_1))$  with  $h$  varying continuously.

Finally, the last change of coordinates  $\varphi_3$  is of the form  $(z_1, \eta(z))$  with  $\eta(z) = z_2 + q(z_1)$  and  $q(z_1) = q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_1^2 + \dots$  with  $q_j = \frac{h_j}{\mu - \lambda^j}$  for each  $j \geq 2$ . Since  $h$  varies continuously, so do the coefficients  $q_j$  for  $j \geq 2$ . Since  $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_{lin}$  for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$ , we have that  $q_1$  is uniquely defined by Lemma 8.4.5.9 and varies continuously. Finally,  $q$  and then  $\eta$  and  $\varphi_3$  vary continuously. This implies that for every  $\varepsilon \in \mathcal{V}$ ,  $f_\varepsilon$  is holomorphically linearizable by  $\varphi_{f_\varepsilon} = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_{lin}$ . Moreover,  $\varphi_{f_\varepsilon}$  varies continuously in the  $C^0$  topology.  $\square$

Remind that  $c$  is a point of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  which was defined in 4.3.17 and that the notation  $p(L'')$  was introduced at the beginning of section 4.4. In the following lemma, we perturb  $L' = L'_{\varepsilon_1}$  into  $L'' = L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  to ensure that the critical point  $c$  is not singular.

**Lemma 8.4.5.10.** *There exists a holomorphic family of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  denoted by  $(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{D}^2}$  such that :*

1. for every  $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}$ ,  $L''_{\varepsilon_1, 0} = L'_{\varepsilon_1}$

2.  $p_c$  is in the postcritical set of  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  and the postcritical set is not singular at  $p_c$  for  $\varepsilon_2 \neq 0$
3.  $p(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = p_c$  is periodic for  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  and is in the forward orbit of  $c : p_c = (L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^{n_c}(c)$  and  $(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^{n_{pc}}(p_c) = p_c$
4.  $D((L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^{n_{pc}})_{p_c} = D(L^{n_{pc}})_{p_c}$

*Proof.* We first make an invertible linear change of coordinates so that in the new coordinates  $[x_1, x_2, x_3]$ , the point  $c$  is equal to  $[0, 0, 1]$  and the point  $L(c)$  is in the chart  $\{x_3 \neq 0\}$ . We choose homogenous polynomials of degree 1 in the variables  $x_1, x_2, x_3$  denoted by  $R_2, \dots, R_{n_c+n_{pc}-1}$  such that :

$$R_2(L(c)) = \dots = R_{n_c-1}(L^{n_c-1}(c)) = R_{n_c}(p_c) = \dots = R_{n_c+n_{pc}-1}(L^{n_{pc}-1}(p_c)) = 0 \quad (8.7)$$

$$R_2(c) \neq 0, \dots, R_{n_c-1}(c) \neq 0, R_{n_c}(c) \neq 0, \dots, R_{n_c+n_{pc}-1}(c) \neq 0 \quad (8.8)$$

This is possible since  $c, \dots, L^{n_{pc}-1}(p_c)$  are distinct. We denote :

$$\gamma_1(x_1, x_2) = \prod_{2 \leq k \leq n_c+n_{pc}-1} (R_k(x_1, x_2, 1))^2$$

In  $\{x_3 \neq 0\}$ , the critical set of  $L'$  is the set  $\{\text{Jac}(P') = 0\}$  where  $\text{Jac}(P')$  is equal to  $\frac{\partial P'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_1}$ . The critical set at  $c$  is not singular if the gradient of the map  $(x_1, x_2) \mapsto \frac{\partial P'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_1}$  is non zero at  $c$ , in particular if :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\text{Jac}(P'))(c) = \frac{\partial^2 P'_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 P'_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 P'_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 P'_2}{\partial x_1^2} \neq 0$$

If this is the case, there is nothing to do and we can take  $L'' = L'$ . Let us suppose this is not so. We distinguish two cases.

First case : we suppose that  $\frac{\partial P'_2}{\partial x_2} \neq 0$ . For every  $\varepsilon_2 \in \mathbb{C}$  we consider the following perturbation of  $L'$  defined by  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = L'' = (\frac{P''_1}{P''_3}, \frac{P''_2}{P''_3})$  with  $P''_2 = P'_2$ ,  $P''_3 = P'_3$  and :

$$P''_1(x_1, x_2) = P'_1(x_1, x_2) + \varepsilon_2 \cdot \gamma_1(x_1, x_2) \cdot x_1^2$$

Because of the choice of the degree  $d$  in 8.4.2.13 and 8.4.2.14, we have  $\deg(P''_1) \leq \deg(P'_1)$ . Since the property of being a holomorphic mapping is open,  $L''$  is a holomorphic mapping on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  for sufficiently small values of  $\varepsilon_2$ . Then, item 1 is obvious. Because of the quadratic terms  $R_k^2$  in the definition of  $\gamma_1$ ,  $c$  stays preperiodic (with the same periodic orbit  $p(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = p_c$ ) for  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ , this implies item 3. Still because of the quadratic terms  $R_k^2$  in  $\gamma_1$  we have  $D_{L(c)}(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = D_{L(c)}(L'_{\varepsilon_1}) = D_{L(c)}L, \dots, D_{(L)^{n_{pc}-1}(p_c)}(L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = D_{(L)^{n_{pc}-1}(p_c)}L$ , so we both have that  $p_c$  is in the postcritical set of  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  and that item 4 is true. Moreover we have  $D_c L'' = D_c L$  so  $c$  is still critical. The only second order partial derivative which depends on  $\varepsilon_2$  is :  $\frac{\partial^2 P''_1}{\partial x_1^2}(c) = \frac{\partial^2 P'_1}{\partial x_1^2}(c) + 2 \cdot \gamma_1(c) \cdot \varepsilon_2$  with  $\gamma_1(c) \neq 0$ . Then the map  $\varepsilon_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}(\text{Jac}(P''))(c)$  is an affine map in  $\varepsilon_2$  of non zero coefficient equal to  $2 \cdot \gamma_1(c) \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_2}$ . Then, it is non zero for  $\varepsilon_2 \in \mathbb{D}^*$ . This implies that the critical set is not singular at  $c$ . Then there is a component of the postcritical set

at  $c$  which is not singular. Since  $DL_c, \dots, DL_{L^{n_{pc}}(p_c)}$  are not singular, there is a component of the postcritical set at  $p_c$  which is not singular. Thus item 2 is true.

Second case : we suppose that  $\frac{\partial P'_2}{\partial x_2} = 0$ . For every  $\varepsilon_2 \in \mathbb{C}$  we consider the following perturbation of  $L'$  defined by  $L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = L'' = \left(\frac{P'_1}{P'_3}, \frac{P'_2}{P'_3}\right)$  with  $P'_3 = P'_3$  and :

$$\begin{aligned} P''_1(x_1, x_2) &= P'_1(x_1, x_2) + \varepsilon_2 \cdot \gamma_1(x_1, x_2) \cdot x_1 \\ P''_2(x_1, x_2) &= P'_2(x_1, x_2) + \varepsilon_2 \cdot \gamma_1(x_1, x_2) \cdot x_1 x_2 \end{aligned}$$

Because of the choice of the degree  $d$  in 4.2.13 and 4.2.14, we have  $\deg(P''_1) \leq \deg(P'_1)$  and  $\deg(P''_2) \leq \deg(P'_2)$ . Since the property of being a holomorphic mapping is open,  $L''$  is a holomorphic mapping for sufficiently small values of  $\varepsilon_2$ . Then, item 1 is obvious. As in the first case, items 3 and 4 are true and  $p_c$  stays postcritical. We have :

$$D_c L'' = D_c L' + \varepsilon_2 \cdot \gamma_1(c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Since at the point  $c$ , we have both  $\frac{\partial P'_2}{\partial x_2} = 0$  and  $\text{Jac}(P')(c) = \frac{\partial P'_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P'_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial P'_2}{\partial x_1} = 0$ , this implies that we still have  $\text{Jac}(P'')(c) = 0$  and the point  $c$  is still critical. The only second order partial derivative which depends on  $\varepsilon_2$  is :  $\frac{\partial^2 P''_2}{\partial x_1 \partial x_2}(c) = \frac{\partial^2 P'_2}{\partial x_1 \partial x_2}(c) + \gamma_1(c) \cdot \varepsilon_2$  with  $\gamma_1(c) \neq 0$ . Then the map  $\varepsilon_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial x_1}(\text{Jac}(P''))(c)$  is a polynomial of degree 2 in  $\varepsilon_2$  of non zero coefficient of degree 2 equal to  $(\gamma_1(c))^2$ . Then, rescaling if necessary, it is non zero for  $\varepsilon_2 \in \mathbb{D}^*$ . As in case 1, we conclude that item 2 is satisfied. This concludes the proof of the proposition.  $\square$

Remind that  $w_1$  and  $w_2$  were defined just at the beginning of this subsection. The notation  $p(L'')$  was introduced at the beginning of 8.4.4. In the following lemma, we perturb the periodic orbit  $p_c$  in such a way that we can choose the two eigenvalues at this periodic point .

**Lemma 8.4.5.11.** *There exists a holomorphic family of holomorphic maps of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  denoted by  $(L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3})_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{D}^3}$  such that :*

1. for every  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{D}$ ,  $L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0} = L''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$
2.  $p(L''') = p_c$  is periodic for  $L'''$  ( $(L''')^{n_{pc}}(p_c) = p_c$ ) and is in the postcritical set of  $L'''$  ( $p_c = (L''')^{n_c}(c)$ )
3. if  $\varepsilon_3 > 0$ , then the eigenvalues  $\lambda, \mu$  of the periodic point  $p_c$  are such that :  $|\mu|^2 > |\lambda| > |\mu|$
4. the eigenvector  $w_\mu$  associated to  $\mu$  at  $p_c$  is equal to  $D\Pi_{p_c}(w_2)$  and then transverse to the postcritical set at  $p_c$
5. the eigenvector  $w_\lambda$  associated to  $\lambda$  at  $p_c$  is equal to  $D\Pi_{p_c}(w_1)$

*Proof.* We first make an invertible linear change of coordinates so that in the new coordinates  $[y_1, y_2, y_3]$ , the point  $p_c$  is equal to  $[0, 0, 1]$  and the point  $L(p_c)$

is in the chart  $\{y_3 \neq 0\}$ . We choose homogenous polynomials of degree 1 in the variables  $y_1, y_2, y_3$  denoted by  $S_1, \dots, S_{n_c-1}, S_{n_c+1}, \dots, S_{n_c+n_{p_c}-1}$  such that :

$$S_1(c) = \dots = S_{n_c-1}(L^{n_c-1}(c)) = S_{n_c+1}(L(p_c)) = \dots = S_{n_c+n_{p_c}-1}(L^{n_{p_c}-1}(p_c)) = 0 \quad (8.9)$$

$$S_1(p_c) \neq 0, S_2(p_c) \neq 0, \dots, S_{n_c-1}(p_c) \neq 0, S_{n_c+1}(p_c) \neq 0, \dots, S_{n_c+n_{p_c}-1}(p_c) \neq 0 \quad (8.10)$$

This is possible since  $c, \dots, L^{n_{p_c}-1}(p_c)$  are distinct. We denote :

$$\gamma_2(y_1, y_2) = \prod_{j \neq n_c} (S_j(y_1, y_2, 1))^2$$

For every  $\varepsilon_3, \kappa_i \in \mathbb{C}$  we consider the following perturbation of  $L''$  defined by  $L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = L''' = \left( \frac{P_1'''}{P_3'''}, \frac{P_2'''}{P_3'''} \right)$  with  $P_3''' = P_3''$  and :

$$P_1'''(y_1, y_2) = P_1''(y_1, y_2) + \varepsilon_3 \cdot \gamma_2(y_1, y_2) \cdot (\kappa_1 y_1 + \kappa_2 y_2)$$

$$P_2'''(y_1, y_2) = P_2''(y_1, y_2) + \varepsilon_3 \cdot \gamma_2(y_1, y_2) \cdot (\kappa_3 y_1 + \kappa_4 y_2)$$

Because of the choice of the degree  $d$  in 8.4.2.13 and 8.4.2.14, we have  $\deg(P_1''') \leq \deg(P_1'')$  and  $\deg(P_2''') \leq \deg(P_2'')$ . Since the property of being a holomorphic mapping is open,  $L'''$  is a holomorphic mapping on  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  for sufficiently small values of  $\varepsilon_3$ . Then, item 1 is obvious. Then, because of the quadratic terms  $S_j^2$  in  $\gamma_2$ , it is clear that  $c$  stays preperiodic (with the same periodic orbit  $p_c$ ) for  $L'''$  and  $D_{L(p_c)} L''' = D_{L(p_c)} L, \dots, D_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)} L''' = D_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)} L$ . This shows item 2. In the chart  $\{y_3 \neq 0\}$ , we have :

$$D_{p_c} L''' = D_{p_c} L'' + \varepsilon_3 \cdot \gamma_2(p_c) \cdot \begin{pmatrix} \kappa'_1 & \kappa'_2 \\ \kappa'_3 & \kappa'_4 \end{pmatrix}$$

with  $\gamma_2(p_c) \neq 0$ . We have  $D_{L(p_c)} L''' = D_{L(p_c)} L, \dots, D_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)} L''' = D_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)} L$ . We also have the equality :  $D_{p_c} L \cdot \dots \cdot D_{L^{n_{p_c}-1}(p_c)} L = a^{n_{p_c}} \cdot I_2$  because the period  $n_{p_c}$  is a multiple of the order of  $A$  (see Proposition 8.3.3.1). Then we have :

$$D_{p_c} (L''')^{n_{p_c}} = a^{n_{p_c}} \cdot \left( I_2 + \varepsilon_3 \cdot \gamma_2(p_c) \cdot \begin{pmatrix} \kappa'_1 & \kappa'_2 \\ \kappa'_3 & \kappa'_4 \end{pmatrix} \cdot (D_{p_c} L)^{-1} \right)$$

Let us denote by  $M$  the matrix whose two columns are  $D\Pi_{p_c}(w_1)$  and  $D\Pi_{p_c}(w_2)$ . We choose :

$$\begin{pmatrix} \kappa'_1 & \kappa'_2 \\ \kappa'_3 & \kappa'_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_2(p_c)} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} \cdot (D_{p_c} L)$$

Then :

$$D_{p_c} (L''')^{n_{p_c}} = a^{n_{p_c}} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$$

This equality implies that items 3,4 and 5 are satisfied and this ends the proof of the proposition.  $\square$

We are now able to prove Proposition 8.4.5.3.

*Proof of Proposition 8.4.5.3.* We consider the holomorphic family of holomorphic maps  $(L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3})_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{D}^3}$ . According to Lemma 8.4.5.11, every  $L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$  is diagonalizable and admits  $w_1$  and  $w_2$  as eigenvectors. Then according to Lemma 8.4.5.7, we can take some uniform open set  $\mathbb{B}_{lin} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , some ball  $B_{lin}$ , such that there exists  $\varphi_{L'''}$  defined on  $\mathbb{B}_{lin}$  with values in  $B_{lin} \subset \mathbb{C}^2$  such that  $L'''$  is linearizable by  $\varphi_{L'''} : \mathbb{B}_{lin} \mapsto B_{lin}$ . Moreover  $\varphi_{L'''}$  varies continuously with  $L'''$ . We denote by  $\mathfrak{B}_{lin}$  some ball in  $\Pi^{-1}(\mathbb{B}_{lin}) \subset \mathbb{T}$ .

**Lemma 8.4.5.12.** *Let  $\Gamma'$  be the diameter of  $\mathfrak{B}_{lin}$  of direction  $w_1$ . Then there exists  $n_0$  such that  $\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} \mathcal{L}^n(\Gamma')$  contains a  $(0, w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$ .*

*Proof.*  $\bigcup_{1 \leq n \leq +\infty} \mathcal{L}^n(\Gamma')$  is dense in  $\mathbb{T}$  by the choice of  $w_1$ . Then there exists  $n_0$  such that  $\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} \mathcal{L}^n(\Gamma')$  contains a  $(0, w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$ .  $\square$

From Lemma 8.4.5.9, we know that  $\varphi_L \circ \Pi$  is linear. Rewriting this result in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  we have :

**Corollary 8.4.5.13.** *Let  $\Gamma''$  be the diameter of  $B_{lin}$  of direction  $(\varphi_L \circ \Pi)(w_1)$ . Then there exists  $n_0$  such that  $\Pi^{-1}(\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} L^n(\varphi_L^{-1}(\Gamma'')) \cap \mathbb{B})$  contains a  $(0, w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$ .*

By continuity of  $L''' \mapsto \varphi_{L'''}$  (see Lemma 8.4.5.7), we have the following perturbation result :

**Corollary 8.4.5.14.** *There exists  $\theta' > 0$ , some neighborhood  $\mathcal{W}_2(L)$  of  $L$  in  $Hol_d$  and an integer  $n_0$  such that for every  $(\theta', (\varphi_L \circ \Pi)(w_1))$ -quasi-diameter  $\Gamma''$  of  $B_{lin}$ , for every  $L''' \in \mathcal{W}_2(L)$ , we have that  $\Pi^{-1}(\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} (L''')^n(\varphi_{L'''}^{-1}(\Gamma'')) \cap \mathbb{B})$  contains a  $(\theta, w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$ .*

Remind that  $w_2$  is not tangent to  $\Pi^{-1}(\text{PCrit}(L))$  at  $\mathfrak{pc}$ . We can take a neighborhood  $\mathcal{W}_3(L)$  of  $L$  such that every map in  $\mathcal{W}_3(L)$  for which  $\mathfrak{pc}$  is in the postcritical set still satisfies this condition. We consider  $\mathcal{W}(L) = \mathcal{W}_1(L) \cap \mathcal{W}_2(L) \cap \mathcal{W}_3(L)$ . Since the conclusions 1,2,3 and 4 of Lemma 8.4.5.11 are satisfied, according to Lemma 8.4.5.4, there exists a disk  $\tilde{\Gamma}$  included in the postcritical set of  $L'''$  such that  $\Pi^{-1}(\tilde{\Gamma})$  contains a  $(\theta', w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}_{lin}$  (remind  $\theta'$  was defined in Lemma 8.4.5.14). According to Lemma 8.4.5.14,  $\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} (\mathcal{L}''')^n(\Pi^{-1}(\tilde{\Gamma}))$  contains a  $(\theta, w_1)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$  so the conclusion follows.  $\square$

## 8.5 Proof of the main result

We consider the perturbations  $L'''$  in  $\mathcal{W}(L)$  as in the previous subsection and such that  $L''' = L'''_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \in \mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  (the neighborhood  $\mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  of  $L_{\varepsilon_1}$  was introduced in Proposition 8.4.4.5, all maps in  $\mathcal{X}_{\varepsilon_1}$  have a correcting IFS). Let us consider the union of all the sets  $\mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$  for  $1 \leq j \leq q$ . Reducing  $\mathcal{W}(L)$  if necessary, by continuity it contains a grid of balls  $G^1 = (u^1, o^1, n_G, r^1)$  with  $r^1 \geq \frac{\iota}{2}$  (see 8.4.3.20).

**Proposition 8.5.0.15.** *There exists an integer  $d$  (depending only from  $\mathbb{T}$ ) such that for every Lattès map  $L$  inducing an affine map on  $\mathbb{T}$  of linear part  $aA$ , every map  $L'''$  as given in Proposition 8.4.5.3 is such that :*

1.  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B})$  contains a grid of balls  $G^1 = (u^1, o^1, n_G, r^1)$  with  $q = (2n_G + 1)^4$  such that each  $\mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B})$  contains a ball of  $G^1$
2. the contraction factor of the IFS  $(\mathcal{G}_1''', \dots, \mathcal{G}_q''')$  is  $|a| \geq 2$
3. there exist  $(n + 1)$  balls  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$  of relative size larger than  $\nu$ , such that the  $\frac{3}{4}$ -parts of  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$  are included in the hull of  $G^1$ , and satisfying the following property : for each  $1 \leq j \leq q$  such that  $\mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_p$ ,  $\mathcal{G}_j'''$  is quasi-linear of type  $(x, p)$  with  $x < x(u^1)$  and :  $\mathcal{G}_j''' = \tilde{g}_j + \frac{1}{a}\varepsilon_j = \frac{1}{a}(A + h_j) + \frac{1}{a}\varepsilon_j$  with  $\|\varepsilon_j\|_{C^2} < \frac{1}{1000} \cdot \|h_j\|$ . Moreover,  $\bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B}_p)$  contains a grid of balls  $\Gamma_p^1 = (u^1, o_p^1, n_G, s^1)$  for each  $0 \leq p \leq n$  with  $s^1 \geq \nu \cdot r^1$
4.  $n_G > \frac{10}{\nu} \cdot N(\frac{\nu \cdot r^1}{10})$
5.  $|a| \cdot R \cdot \max_{1 \leq j \leq q} (\|\mathcal{G}_j'''\|_{C^2}) < \frac{\nu \cdot r^1}{100}$
6. there exists a  $(\theta, w)$ -quasi-diameter of  $\mathfrak{B}$  inside  $\Pi^{-1}(PCrit(L'''))$

*Proof.* The first item was stated before the proposition. The second one comes from 8.4.2.12 and the fourth one from 8.4.3.20. The fifth one can be obtained from a reduction of  $\mathcal{W}(L)$  if necessary. The last one is a consequence of Proposition 8.4.5.3. We show the third item. The existence of the balls  $\mathfrak{B}_p$  of relative size  $\nu$  is a consequence of Proposition 8.4.4.5. The inclusions  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$  and the inequality on  $n_G$  ensure that there are sufficiently many  $\mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B})$  so that the  $\frac{3}{4}$ -parts of  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$  are included in the hull of  $G^1$ . Let us now consider the  $(n + 1)$  sets  $\bigcup_{j \leq q} \mathcal{G}_j'''(\mathfrak{B}_p) \subset \mathfrak{B}$  for  $0 \leq p \leq n$ . Reducing  $\mathcal{W}(L)$  a last time if necessary, by continuity each of them contains a grid of balls  $\Gamma_p^1 = (u^1, o_p^1, n_G, s^1)$  with  $s^1 \geq \frac{\nu \cdot r^1}{2}$ . The property stated in item 3 is also a consequence of Proposition 8.4.4.5.  $\square$

The intersection  $\bigcap_{j \geq 1} \mathcal{G}_j(\Pi(\mathfrak{B}))$  is in the Julia set of  $L$ . Since  $\bigcap_{j \geq 1} \mathcal{G}_j(\Pi(\mathfrak{B}))$  is a basic repeller, it is a consequence of Lemma 2.3 of [27] that  $\bigcap_{j \geq 1} \mathcal{G}_j'''(\Pi(\mathfrak{B}))$  is in the Julia set of  $L'''$  for sufficiently small perturbations  $L'''$  of  $L$ . According to Proposition 8.2.3.1 (beware that the maps  $\mathcal{G}_j'''$  in our case correspond to the maps  $\mathcal{G}_j$  of the proposition), we can conclude this gives us persistent intersections between the Julia set and the postcritical set. This is true for every  $L'''$  defined as before and we know that  $L$  is accumulated by such maps inside  $\text{Hol}_d$ . By [6] (see Proposition 2.5 of [27] for a result in our case), we know that persistent intersections between the postcritical set and a hyperbolic repeller inside the Julia set imply the presence of open sets inside the bifurcation locus. Since they are only finitely many  $A \in G_{\text{Lattès}}$  for a given torus  $\mathbb{T}$ ,  $d$  is well defined. This proves the final result.



## Bibliographie

- [1] Ralph Abraham and Stephen Smale. Nongenericity of  $\Omega$ -stability. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 5–8. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [2] Artur Avila, Sylvain Crovisier, and Amy Wilkinson. Diffeomorphisms with positive metric entropy. *Publ. Math. IHES*, 124 :319–347, 2014.
- [3] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on  $\mathbb{P}^k$ . *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 608 :201–235, 2007.
- [4] Pierre Berger. Generic family with robustly infinitely many sinks. *Invent. Math.*, 205(1) :121–172, 2016.
- [5] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^k$ . *Bull. Soc. Math. Fr.*, pages 175–188, 2001.
- [6] François Berteloot and Fabrizio Bianchi. Perturbations d'exemples de Lattès et dimension de Hausdorff du lieu de bifurcation. *to appear on the Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2016.
- [7] François Berteloot, Fabrizio Bianchi, and Christophe Dupont. Dynamical stability and Lyapunov exponents for holomorphic endomorphisms of  $\mathbb{P}^2$ . *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, pages 215–262, 2018.
- [8] François Berteloot and Christophe Dupont. Une caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure de Green. *Comment. Math. Helv.*, 80(3) :433–454, 2005.
- [9] Sebastien Biebler. Lattès maps and the interior of the bifurcation locus. *arXiv 1801.06339v2*.
- [10] Sebastien Biebler. Stability and bifurcations for polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^3$ . *arXiv 1611.02011v2*.

## REFERENCES

---

- [11] C. Bonatti, L. J. Díaz, and M. Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity : A Global Geometric and Probabilistic Perspective*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [12] Christian Bonatti, Sylvain Crovisier, Lorenzo Diaz, and Amy Wilkinson. What is a blender? *Notices of the AMS*, pages 33–36, 2016.
- [13] Christian Bonatti and Lorenzo Diaz. Connexions hétérocliniques et généricité d’une infinité de puits ou de sources. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, pages 135–150, 1999.
- [14] Christian Bonatti and Lorenzo J. Díaz. Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms. *Ann. of Math. (2)*, 143(2) :357–396, 1996.
- [15] Christian Bonatti and Lorenzo J. Díaz. Abundance of  $C^1$ -robust homoclinic tangencies. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(10) :5111–5148, 2012.
- [16] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Lyapunov et distribution des points périodiques de  $\mathbb{P}^k$ . *Acta Math.*, pages 143–157, 1999.
- [17] Gregory Buzzard. Stably intersecting Cantor sets. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 1013–1018, 1993.
- [18] Gregory T. Buzzard. Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. *Ann. of Math. (2)*, 145(2) :389–417, 1997.
- [19] Sylvain Crovisier and Enrique Pujals. Essential hyperbolicity and homoclinic bifurcations : a dichotomy phenomenon/mechanism for diffeomorphisms. *Invent. Math.*, pages 385–517, 2015.
- [20] Marius Dabija and Matthias Jonsson. Algebraic webs invariant under endomorphisms. *Publ. Math.*, pages 137–148, 2010.
- [21] Laura DeMarco. Dynamics of rational maps : a current on the bifurcation locus. *Mathematical Research Letters*, 8 (1-2) :57–66, 2001.
- [22] Laura DeMarco. Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations and capacity. *Mathematische Annalen*, 326 (1) :43–73, 2003.
- [23] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Sur les endomorphismes holomorphes permutables de  $\mathbb{P}^k$ . *Math. Annalen*, 324 :33–70.
- [24] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps. *Annales de l’institut Fourier*, 56(2) :423–457, 2006.

## REFERENCES

---

- [25] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Annales scientifiques de l'ENS*, 4,18 :287–343, 1985.
- [26] Romain Dujardin. Henon-like mappings in  $\mathbb{C}^2$ . *American Journal of Math.*, 126 :439–472, 2004.
- [27] Romain Dujardin. Non density of stability for holomorphic mappings on  $\mathbb{P}^k$ . *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 4 :813–843, 2017.
- [28] Romain Dujardin and Mikhail Lyubich. Stability and bifurcations for dissipative polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . *Invent. Math.*, 200(2) :439–511, 2015.
- [29] Christophe Dupont. Exemples de Lattes et domaines faiblement spheriques de. *Manuscripta Math.*, 111(3) :357–358, 2003.
- [30] Rong Feng. Lattes maps on  $\mathbf{P}^2$ . *J. Math.Pures Appl.*, pages 636–650, 2010.
- [31] Estela Ana Gavosto. Attracting basins in  $\mathbf{P}^2$ . *J. Geom. Anal.*, 8(3) :433–440, 1998.
- [32] J. Graczyk and Swiatek.G. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann. of Math.*, (146) :1–52, 1997.
- [33] J. H. Hubbard and R.W. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain II : Projective and inductive limits of polynomials. *Real and complex dynamical Systems*, 1995.
- [34] I.N.Baker. Fixpoints of polynomials and rational functions. *J. London Math. Soc.*, pages 615–622, 1964.
- [35] Jyoichi Kaneko, Syoshi Tokugana, and Masaaki Yoshida. Complex crystallographic groups II. *J. Math. Soc. Japan*, 34 :595–605, 1982.
- [36] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 54 :266–266, 1997.
- [37] Samuel Lattes. Sur l'iteration des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincare. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 166 :26–28, 1918.
- [38] Tan Lei. Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for families of rational maps (a generalization of Shishikura's result). *Nonlinearity*, 11(2) :233–246, 1998.
- [39] Mikhail Lyubich. Some typical properties of the dynamics of rational mappings. *Russian Math. Surveys*, 38 :154–155, 1983.

## REFERENCES

---

- [40] Mikhail Lyubich. An analysis of stability of the dynamics of rational functions. *Teoriya Funk., Funk. Anal. Prilozh.*, 42 :72–81, 1984.
- [41] Mikhail Lyubich. Dynamics of quadratic maps I-II. *Acta Math.*, (178) :185–247,248–297, 1997.
- [42] Ricardo Mañe. A proof of the  $C^1$  stability conjecture. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 66 :161–2101, 1988.
- [43] Ricardo Mañe, Paulo Sad, and Dennis Sullivan. On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 16 :193–217, 1983.
- [44] Curtis T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. In the Mandelbrot set, theme and variations, volume 274 of. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–17, 2000.
- [45] John Milnor. On Lattès maps, in : Dynamics on the Riemann sphere. *European Math. Soc.*, pages 9–43, 2006.
- [46] Carlos Gustavo Moreira, Jacob Palis, and Marcelo Viana. Homoclinic tangencies and fractal invariants in arbitrary dimension. *C.R.Acad.Sci.Paris*, (333) :475–480, 2001.
- [47] Carlos Gustavo Moreira and Jean-Christophe Yoccoz. Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions. *Ann. of Math.*, (154) :45–96, 2001.
- [48] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. *Holomorphic dynamics*, volume 66. Cambridge Studies in advanced mathematics, 2000.
- [49] Sheldon Newhouse. Non-density of axiom A(a) on  $S^2$ . *Global Analysis, Proc.Symp. in Pure Math.*, XIV :191–203, 1970.
- [50] Sheldon Newhouse. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*, 13 :9–18, 1974.
- [51] Sheldon Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Pub. Math. IHES*, 50, pages 102–151, 1979.
- [52] Jacob Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Asterisque volume in honor of Douady's 60th birthday Géométrie complexes et systèmes dynamiques*, 261 :335–348, 2000.
- [53] Jacob Palis and Floris Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge studies in advanced mathematics, 2013.

## REFERENCES

---

- [54] Jacob Palis and Marcelo Viana. High dimensional diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Ann. of Math.*, 140 :207–250, 1994.
- [55] D. Pixton. Markov neighborhoods for zero dimensional basic sets. *Trans.Amer.Math.Soc.*, (279) :431–462, 1983.
- [56] Mary Rees. Positive measure sets of ergodic rational maps. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 19(4) :383–407, 1986.
- [57] J.F. Ritt. Permutable rational functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 25 :399–448, 1923.
- [58] J.W. Robbin. A structural stability theorem. *Ann. of Math.*, pages 447–491, 1971.
- [59] C. Robinson. Structural stability of  $c^1$  diffeomorphisms. *J. Differential Equations*, pages 28–73, 1976.
- [60] Neptali Romero. Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(4) :735–757, 1995.
- [61] Mitsuhiro Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Annals of Mathematics*, 147(2) :225–267, 1998.
- [62] Carl Simon. A 3-dimensional Abraham-Smale example. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 34 :629–630, 1972.
- [63] Stephen Smale. Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. *Proc. Int.Congress Math. (Stockholm 1962)*, pages 490–496, 1963.
- [64] Stephen Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. *Bull.Am.Math.Soc.*, 73 :747–817, 1967.
- [65] Johan Taflin. Blenders near polynomial product maps of  $\mathbb{C}^2$ . *arxiv :1702.02115v2*, 2017.
- [66] Johan Taflin and Fabrizio Bianchi. Bifurcation in the elementary Desbosves family. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145 :4337–4443, 2017.