



HAL
open science

Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme : Co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact

Fatima-Ezzahra Fekak

► **To cite this version:**

Fatima-Ezzahra Fekak. Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme : Co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEI037 . tel-01941082

HAL Id: tel-01941082

<https://theses.hal.science/tel-01941082>

Submitted on 30 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme :

Co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Fatima-Ezzahra FEKAK

Ingénieur en mécanique

Thèse soutenue le 2 mai 2017 devant la Commission d'examen

Jury

NOELS LUDOVIC	Professeur Université de Liège	Rapporteur
GATUINGT FABRICE	Professeur LMT Cachan	Rapporteur
RIXEN DANIEL	Professeur Technische Universität München	Examineur
DJERAN-MAIGRE IRINI	Professeur INSA-Lyon	Examineur
TIE BING	Chargée de recherche Centrale Paris	Examineur
DEPALE BRUNO	Expert référent CETIM	Examineur
PIRON GÉRARD	Directeur technique REEL	Invité
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon, IUF	Directeur de thèse
BRUN MICHAEL	Maître de conférences (HDR) INSA-Lyon	Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<p>CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr</p> <p>Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3^e étage secretariat@edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON</p>	<p>M. Stéphane DANIELE Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Equipe CDFA 2 avenue Albert Einstein 69626 Villeurbanne cedex directeur@edchimie-lyon.fr</p>
E.E.A.	<p>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr</p> <p>Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr</p>	<p>M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</p>
E2M2	<p>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr</p> <p>Sec : Sylvie ROBERJOT Bât Atrium - UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</p>	<p>M. Fabrice CORDEY CNRS UMR 5276 Lab. de géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode 2 rue Raphaël Dubois 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 cordev@univ-lyon1.fr</p>
EDISS	<p>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE http://www.ediss-lyon.fr</p> <p>Sec : Sylvie ROBERJOT Bât Atrium - UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</p>	<p>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</p>
INFOMATHS	<p>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr</p> <p>Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal, 3^e étage Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax : 04.72.43.16.87 infomaths@univ-lyon1.fr</p>	<p>M. Luca ZAMBONI Bâtiment Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 26 23 45 52 zamboni@maths.univ-lyon1.fr</p>
Matériaux	<p>MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr</p> <p>Sec : Marion COMBE Tél: 04-72-43-71-70 -Fax : 87.12 Bat. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr</p>
MEGA	<p>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr</p> <p>Sec : Marion COMBE Tél: 04-72-43-71-70 -Fax : 87.12 Bat. Direction mega@insa-lyon.fr</p>	<p>M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr</p>
ScSo	<p>ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04 78 69 72 76 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</p>	<p>M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Christian.montes@univ-lyon2.fr</p>

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

Les ponts roulants sont des engins de levage situés en haut des bâtiments qu'ils équipent. Ils servent à manutentionner des charges très lourdes et parfois critiques. Pendant un séisme, un pont roulant est exposé à des chocs multiples. Ces impacts peuvent causer des dommages importants dans la structure pouvant conduire à une chute de la charge manutentionnée ou du pont roulant lui-même. Donc, la vérification de la tenue des ponts roulants au séisme est une question primordiale. Actuellement, cette vérification est basée sur des méthodes de calcul statiques. Ces méthodes font l'hypothèse d'un comportement purement linéaire des ponts roulants ce qui les rend très conservatives. Depuis quelques années les niveaux sismiques imposés par les autorités nationales augmentent chaque année, et les constructeurs de ponts roulants se trouvent dans l'incapacité de construire à partir des efforts sur-estimés fournis par les méthodes statiques. L'objectif de la thèse est l'étude de la réponse dynamique d'un pont roulant pendant un séisme en prenant en compte les non-linéarités géométriques et matériau. Afin de modéliser ces phénomènes, une analyse dynamique temporelle avec une approche multi-échelle en temps est adoptée. Pour prendre en compte l'aspect haute fréquence des chocs, un intégrateur temporel variationnel explicite, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange et dédié au contact/impact, est développé. Ensuite, un intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps), basé sur la méthode de couplage GC, est appliqué au problème du pont roulant. Cette stratégie multi-échelle en temps permet d'adapter le schéma d'intégration et le pas de temps au sous domaine considéré. Par conséquent, l'intégrateur explicite est adopté dans les zones de contact et un schéma implicite de type accélération moyenne, est adopté dans le reste de la structure. Finalement, un démonstrateur de co-simulation entre les logiciels Cast3M et Europlexus est mis en place pour montrer le gain très significatif en temps de calcul dans le cas d'un modèle élément finis tridimensionnel d'un pont roulant industriel.

MOTS CLÉS: Intégrateur temporel hétérogène asynchrone, intégrateur explicite, impact, contact, séisme, pont roulant, co-simulation.

Abstract

Bridge cranes are hoisting appliances located overhead in buildings. They are used to handle very heavy and sometimes critical loads. During an earthquake, a bridge crane may be subjected to multiple impacts between wheels and rails. These impacts can cause significant damage to the structure leading to a fall of the handled load or the bridge crane itself. Therefore, the qualification of such equipment, subjected to an earthquake, is very important. Currently, this qualification is based on static methods. These methods assume a purely linear behavior of the bridge cranes, which leads to a very conservative forces. Consequently, the bridge cranes manufacturers are sometimes unable to design the equipment from the over-estimated efforts provided by the static methods. The aim of this work is to study the dynamic response of a bridge crane during an earthquake by taking into account the geometric and material non-linearities. In order to model such phenomena, a time-history dynamic analysis with a multi-scale approach is performed. To take into account the high frequency aspect of the impacts between wheels and rails, a Lagrange explicit contact/impact time integrator is proposed. This work has also led to the development of an explicit-implicit HATI (Heterogeneous Asynchronous Time Integrator) for contact/impact dynamics. This method allows us to adopt an explicit contact/impact time integrator in the contact area and an implicit time integrator with a coarse mesh in the rest of the domain. Finally, a co-simulation demonstrator between Cast3M and Europlexus softwares is set up to show the very significant gain in computation time for a three-dimensional finite element model of an industrial bridge crane.

KEYWORDS: Heterogeneous asynchronous time integrator, Lagrange explicit time integrator, impact, contact, earthquake, bridge crane, co-simulation.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Problématique des ponts roulants sous séisme	5
1.1 Contexte industriel	6
1.1.1 Les ponts roulants dans l'industrie	6
1.1.2 Qualification des ponts roulants sous séisme	7
1.2 Modélisation des ponts roulants en dynamique transitoire	14
1.2.1 Modélisation de la liaison galet-rail	14
1.2.2 Méthodes d'application d'un chargement sismique temporel	14
1.3 Conclusion et orientation du travail	17
2 Modélisation du contact et de l'impact en dynamique	19
2.1 Problème de référence de la mécanique des milieux continus sans contact	20
2.1.1 Formulation forte	20
2.1.2 Formulation faible - Principe des puissances virtuelles	22
2.1.3 Discrétisation en espace	22
2.1.4 Discrétisation en temps	24
2.2 Cas d'un problème mécanique avec contact/impact	38
2.2.1 Formulation du contact en dynamique	38
2.2.2 Formulation forte	40
2.2.3 Formulation variationnelle espace-temps	40
2.2.4 Équation de la dynamique non-régulière	46
2.2.5 Discrétisation en temps - Schéma explicite de Newmark	48
2.3 Exemples numériques	58
2.3.1 Test de la balle rebondissante - Phénomène de ZENO	59
2.3.2 Exemple de deux barres déformables en contact	62
2.4 Conclusion	72

3	Intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact	73
3.1	Méthodes de décomposition en sous domaines	74
3.1.1	Méthodes avec recouvrement	75
3.1.2	Méthodes sans recouvrement	76
3.2	Méthodes multi-échelles en temps	79
3.2.1	Méthodes de sous-cyclage et mixtes en temps	79
3.2.2	Les intégrateurs HATI - les méthodes GC, MGC et BGC	81
3.3	Un intégrateur temporel implicite-explicite pour la dynamique du contact	88
3.3.1	Formulation variationnelle espace-temps	88
3.3.2	Discrétisation temporelle	92
3.3.3	Stratégie d'implémentation de l'intégrateur implicite-explicite . .	93
3.3.4	Équation discrétisée du bilan énergétique	97
3.3.5	Exemple numérique	98
3.4	Conclusion	105
4	Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant	107
4.1	Essais sismiques d'une maquette de pont roulant	108
4.1.1	État de l'art	108
4.1.2	Présentation de la maquette	109
4.1.3	Présentation des essais	111
4.2	Calcul tridimensionnel temporel implicite-explicite de la maquette	112
4.2.1	Modélisation tridimensionnelle de la maquette	113
4.2.2	Étude des modes propres du modèle de la maquette	116
4.2.3	Modélisation des contacts dans Europlexus	119
4.2.4	Stratégie de couplage entre Cast3M et Europlexus	123
4.2.5	Résultats numériques	125
4.3	Conclusion	126
	Bilan et perspectives	129
	Bibliographie	135

Table des figures

1	Pont roulant à l'intérieur d'un réacteur à Fukushima	1
1.1	Exemples de ponts roulants manipulant des charges	6
1.2	Exemple de pont roulant bi-poutre	7
1.3	Un oscillateur à un degré de liberté	9
1.4	Exemple de spectres de réponse pour différentes valeurs d'amortissement	9
1.5	Valeurs caractéristiques d'un spectre de réponse	12
1.6	Galet moteur et galet libre d'un pont roulant	15
1.7	Exemple d'un galet à joues de pont roulant	16
1.8	Exemple d'un galet de guidage d'un pont roulant	16
1.9	Configuration d'un changement de repère	17
2.1	Configuration d'un problème mécanique de référence	21
2.2	Configuration de deux corps déformables en contact	39
2.3	Loi de frottement de Coulomb	54
2.4	Configuration initiale du test de la balle rebondissante	60
2.5	Test de la balle rebondissante : (a) position analytique et numérique, (b) vitesse analytique et numérique de la balle	61
2.6	Test de la balle rebondissante : (a) force, (b) impulsion du premier contact entre les deux barres pour différents pas de temps	61
2.7	Test de la balle rebondissante : ordre de convergence en (a) coordonnées généralisées, (b) vitesse pendant la phase de vol libre de la balle (avant contact)	62
2.8	Test de la balle rebondissante : ordre de convergence en (a) coordonnées généralisées, (b) vitesse à l'arrêt de la balle (après tous les impacts)	63
2.9	Test des deux barres déformables en contact : (a) configuration initiale et géométrie, (b) discrétisation spatiale	64
2.10	Test des deux barres déformables en contact : déplacement, vitesse, force de contact et bilan énergétique de la barre gauche pour $e = 0$ (figures à gauche) et $e = 1$ (figures à droite)	65
2.11	Test des deux barres déformables en contact : (a) déplacement, (b) vitesse, (c) force de contact pour $\Delta t \approx 9.810^{-7}$ s	66
2.12	Test des deux barres déformables en contact : vitesse pour différentes tailles d'élément h et différents pas de temps Δt	67

Table des figures

2.13	Test des deux barres déformables en contact : (a) déplacement, (b) vitesse, (c) force de contact pour $\Delta t \approx 1.2210^{-8}$ s	68
2.14	Test des deux barres déformables en contact : (a) force de contact, (b) accélération pour différents pas de temps	69
2.15	Test des deux barres déformables en contact : l'impulsion d'impact pour différents pas de temps	69
2.16	Test des deux barres déformables en contact : ordre de convergence en temps après séparation des deux barres en (a) déplacement, (b) vitesse . .	70
2.17	Test des deux barres déformables en contact : bilan énergétique pour un (a) maillage uniforme, (b) maillage non uniforme fin dans la zone du contact	71
2.18	Test des deux barres déformables en contact : discrétisation spatiale fine dans la zone du contact	71
3.1	Décomposition en deux sous domaines avec recouvrement	75
3.2	Décomposition en deux sous domaines sans recouvrement	76
3.3	Couplage dual à l'interface	78
3.4	Décomposition en deux sous domaines	82
3.5	Implémentation de la méthode GC	86
3.6	Décomposition en deux sous domaines	89
3.7	Modèle poutre du pont roulant : géométrie, dimensions et masses	99
3.8	Modèle poutre du pont roulant : conditions limites et contacts	100
3.9	Modèle poutre du pont roulant : décomposition en sous domaines	100
3.10	Modèle poutre du pont roulant : signal sismique dans la direction z	101
3.11	Modèle poutre du pont roulant : déplacements (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite	102
3.12	Modèle poutre du pont roulant : vitesses (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite	102
3.13	Modèle poutre du pont roulant : bilan énergétique (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite ($m = 50$)	103
3.14	Modèle poutre du pont roulant : énergie dissipée (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite ($m = 50$)	103
3.15	Modèle poutre du pont roulant : bilan énergétique pour $m=1$	104
4.1	La maquette du pont roulant sur la table vibrante AZALEE	109
4.2	Masses et dimensions de la maquette	110
4.3	(a) Galet à simple joue, (b) emplacement des joues des galets du chariot par rapport aux rails	111
4.4	Configuration des galets de la maquette	112
4.5	Système d'attaches des supports des rails à la table vibrante	112
4.6	Accélérations temporelles dans les directions : (a) x , (b) y , (c) z , auxquelles la maquette est soumise pendant les essais	113
4.7	Maillage cube de la maquette	114
4.8	Aperçu du maillage du chariot	114

4.9	Aperçu du maillage du sommier et des poutres de charge	115
4.10	Nœuds d'encastrement aux extrémités des supports des rails	115
4.11	Décomposition en deux sous domaines explicite (en bleu) et implicite (en rouge)	116
4.12	Aperçus de la disposition des PINBALLs dans le modèle de la maquette .	117
4.13	Fréquences propres et masses effectives – Supports de rails de 2m	118
4.14	Fréquences propres et masses effectives – Supports de rails de 2.5 m . . .	119
4.15	Configurations de contacts indétectables par les algorithmes “maître/esclave”	120
4.16	Interpénétration entre deux PINBALLs	121
4.17	Inconvénients de la méthode PINBALL	122
4.18	Procédure de fragmentation des PINBALLs	123
4.19	Stratégie de couplage des logiciels Cast3M et Europlexus	124
4.20	Déplacements à différents nœuds de la maquette	126
4.21	Bilan énergétique de la simulation (a) entièrement explicite, (b) implicite-explicite	127
4.22	Les temps CPU pour un calcul entièrement explicite et une co-simulation implicite-explicite	128

Liste des tableaux

2.1	Propriétés de quelques schémas numériques de la famille de Newmark . .	32
4.1	Résultats expérimentaux des trois premiers modes propres de la maquette	117
4.2	Le nombre de degrés de liberté et les pas de temps dans chaque sous domaine	125

Introduction

Les ponts roulants sont des engins de levage utilisés dans beaucoup de secteurs de l'industrie (nucléaire, aéronautique, automobile, métallurgie...). Ils servent à manutentionner des charges lourdes et parfois très critiques, comme par exemple les ponts roulants qui manutentionnent des poches de métal en fusion dans l'industrie de la métallurgie (voir la Figure 1.1(a)), ou les ponts roulants, situés en haut dans les bâtiments des réacteurs, pour manipuler les différents composants des réacteurs (voir la Figure 1). La structure principale d'un pont roulant se constitue essentiellement de poutres principales, appelées poutres de charge, de sommiers, qui sont des traverses assurant la liaison entre les poutres de charge, et d'un chariot. Le pont roulant est régi par trois mouvements principaux : le mouvement de translation du chariot sur les poutres principales, la translation du pont roulant lui-même sur les rails du bâtiment et le mouvement de levage de la charge grâce au treuil embarqué sur le chariot.

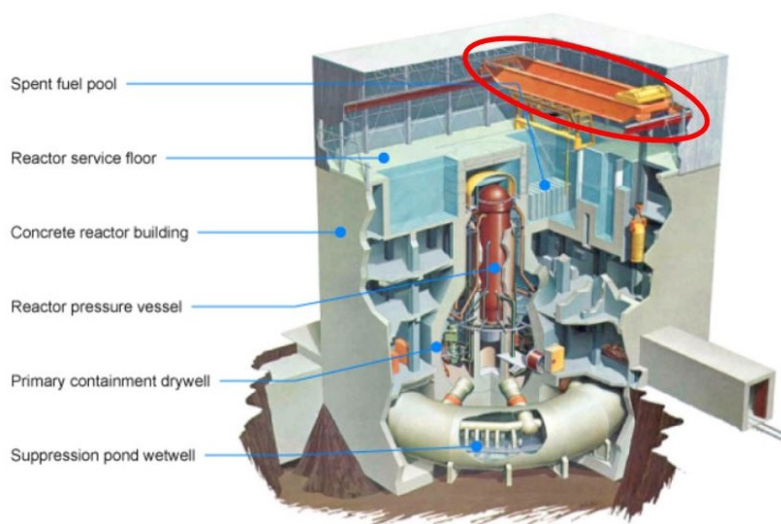


FIGURE 1 – Pont roulant à l'intérieur d'un réacteur à Fukushima

Les ponts roulants constituent donc des systèmes mobiles vibrants, de masses importantes et qui sont positionnés en hauteur dans les bâtiments qu'ils équipent. Le dimensionnement et la vérification des ponts roulants retiennent l'attention des constructeurs

qui s'appuient sur plusieurs normes françaises (les règles de la Fédération Française de Manutention), européennes (Eurocodes) ou internationales (ISO/TC 96) établissant les pratiques de conception qui garantissent le respect des exigences de sécurité essentielles. Toutefois, ces dernières années, en particulier après les catastrophes sismiques survenues au Japon comme à Kobe, en 1995 ou à Fukushima, en 2011, la question de la tenue des ponts roulants a été soulevée. En effet, lors d'un tremblement de terre, le pont roulant est exposé à des chocs multiples entre les galets et les rails. Ces impacts peuvent causer des dommages importants dans la structure ou même un déraillement du pont roulant pouvant conduire à une chute de la charge manutentionnée, du pont lui-même ou de certaines de ses parties constitutives. Donc, la vérification sismique des ponts roulants est primordiale.

Pendant longtemps, la vérification de la tenue des ponts roulants au séisme a été basée sur une méthode statique qui consiste à appliquer une accélération forfaitaire de façon statique sur toute la masse de l'équipement dans chaque direction. Cette méthode ne procurait pas une garantie suffisante. Elle a été remplacée par la méthode spectrale qui est actuellement la méthode la plus largement utilisée et également préconisée dans les normes comme le "Regulatory guide", le guide de l'Autorité de Sureté Nucléaire "ASN/GUIDE/2/01" ou plus récemment la norme "ISO 11031". La méthode spectrale s'appuie sur la représentation modale de la structure, associée à l'utilisation des spectres de réponse correspondant au séisme du site considéré. Elle consiste à calculer la réponse maximale des oscillateurs simples amortis à un degré de liberté, ayant les mêmes fréquences propres que celles de la structure étudiée, et soumis au spectre du bâtiment. Ces réponses maximales sont ensuite combinées selon une formulation permettant de représenter la réponse totale de la structure. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle fait l'hypothèse d'un comportement purement linéaire du pont roulant. Donc, les différents contacts entre les galets et les rails ainsi que les éventuelles jeux latéraux ne sont pas pris en compte, ce qui rend cette méthode très conservatrice. La méthode spectrale donne une réponse enveloppe de la structure à une excitation sismique. Depuis quelques années les niveaux sismiques imposés par les autorités nationales augmentent chaque année, et les constructeurs de ponts roulants se trouvent dans l'incapacité de construire à partir des efforts sur-estimés fournis par la méthode spectrale. Aujourd'hui, les industriels souhaitent aller vers des méthodes temporelles qui leur permettent de prendre en compte les non-linéarités géométriques et matériau pour déterminer la réponse des ponts roulants aux excitations sismiques et des efforts de dimensionnement plus réalistes.

L'analyse dynamique transitoire des ponts roulants sous séisme pose quelques difficultés aux constructeurs de ponts roulants. En effet, le recours à des approches de modélisations plus riches, conduit à l'introduction des chocs verticaux entre les différents galets du pont roulant et les rails, des chocs horizontaux dûs aux dispositifs de guidage, du frottement dans la direction parallèle aux rails et éventuellement de la non-linéarité du matériau. Tout cela nécessite des moyens de calculs renforcés et peut conduire à des calculs coûteux, en particulier si l'on considère des modèles tridimensionnels de ponts roulants. Donc, cette thèse a été initiée par les industriels français du levage, représentés dans ce projet par le CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques), pour établir un modèle de calcul de pont roulant réaliste avec un temps de calcul raisonnable.

Les objectifs principaux de la thèse définis initialement sont :

1. La caractérisation et l'étude de la réponse du système aux chocs pendant les décollements verticaux et horizontaux de rattrapage de jeux :
 - Comprendre et définir la stratégie numérique à adopter pour modéliser les contacts afin de reproduire ces chocs de façon réaliste,
 - Prendre en compte les taux de restitution à l'impact relatifs aux différents contacts et identifiés par des résultats de tests d'impact galet-rail déjà réalisés.
2. La détermination de l'amortissement physique qu'il convient de prendre en compte au sein des simulations. En effet, dans une démarche d'analyse dynamique non linéaire rigoureuse, il est nécessaire de s'orienter vers une modélisation plus fine des sources d'amortissement, notamment celles dues aux multiples contacts entre les galets et les rails pour limiter l'introduction d'une matrice visqueuse aux seuls phénomènes d'amortissement internes (viscosité interne des structures métalliques boulonnées ou soudées) en leur associant un taux d'amortissement global forfaitaire modéré.
3. La mise en place d'une stratégie multi-échelle en temps. En effet, un pont roulant pendant un séisme d'une durée allant de quelques secondes à quelques dizaines de secondes, se trouve exposé à des chocs multiples. Donc, plusieurs échelles de temps coexistent au sein de ce problème, ce qui peut notamment motiver une approche multi-échelle.
4. La réalisation d'un démonstrateur de co-simulation entre deux logiciels du commerce pour démontrer le gain significatif en temps de calcul.

Les travaux réalisés pendant la thèse sont présentés dans ce manuscrit qui se compose des quatre chapitres suivants :

- Le premier chapitre rappelle le contexte de l'étude. Il détaille la problématique des ponts roulants sous séisme, expose les limites des méthodes statiques de dimensionnement actuellement utilisées par les constructeurs de pont roulant et explique les phénomènes importants à prendre en compte pour une modélisation dynamique du pont roulant, notamment les spécificités de la liaison entre les galets et les rails.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la réponse dynamique d'un système déformable ou rigide à un impact. Il propose un intégrateur temporel explicite pour la dynamique de contact. L'intégrateur temporel est testé et validé sur deux exemples académiques. Une étude de l'influence du coefficient de restitution est également réalisée.
- Le troisième chapitre propose une stratégie de modélisation multi-échelle basée sur la méthode de décomposition en sous domaines proposée par Gravouil et Combescure [GRA 01, COM 02, GRA 03, COM 03, COM 01]. L'intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps) résultant est testé sur un modèle poutre d'un pont roulant industriel. Les résultats sont également comparés à un calcul mono-échelle.
- Le quatrième chapitre est dédié à la mise en place d'un démonstrateur de co-simulation utilisant les logiciels Cast3M et Europlexus. La stratégie de co-

simulation est validée sur un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant.

Chapitre 1

Problématique des ponts roulants sous séisme

La vérification de la tenue des ponts roulants au séisme est une question primordiale liée à la sécurité des personnes et des équipements critiques. Ce premier chapitre est une introduction à la problématique des ponts roulants sous séisme. On commencera tout d'abord par montrer la place et l'utilisation des ponts roulants dans l'industrie. Ensuite, on détaillera les problématiques que rencontrent actuellement les industriels du levage pour dimensionner leurs structures avec des méthodes statiques, et leur besoin d'acquérir des outils et des méthodes d'analyse temporelle pour étudier le comportement dynamique des ponts roulants sous séisme.

Sommaire

1.1	Contexte industriel	6
1.1.1	Les ponts roulants dans l'industrie	6
1.1.2	Qualification des ponts roulants sous séisme	7
1.2	Modélisation des ponts roulants en dynamique transitoire	14
1.2.1	Modélisation de la liaison galet-rail	14
1.2.2	Méthodes d'application d'un chargement sismique temporel	14
1.3	Conclusion et orientation du travail	17

1.1 Contexte industriel

1.1.1 Les ponts roulants dans l'industrie

Les ponts roulants sont des engins de manutention permettant de lever et déplacer des charges lourdes. Les ponts roulants sont situés en hauteur dans les bâtiments qu'ils équipent comme le montre la Figure 1.1. Ils peuvent manipuler des charges très lourdes, voire critiques comme on peut le voir sur les Figures 1.1(a) et 1.1(c) montrant un pont roulant soulevant une poche de métal en fusion et un avion en cours de montage.



FIGURE 1.1 – Exemples de ponts roulants manipulant des charges

Les ponts roulants sont principalement composés de poutres principales appelées également poutres de charge. Un pont roulant peut avoir une seule poutre principale, dans ce cas il est appelé pont roulant mono-poutre, et s'il contient deux poutres de charge, il est appelé pont roulant bi-poutre. Quand il est destiné à manutentionner des charges très lourdes, un pont roulant peut avoir plus que deux poutres principales, comme c'est le cas

dans la Figure 1.1(c) où on peut distinguer quatre poutres de charge. Les poutres principales sont reliées entre elles par une traverse appelée sommier. Le sommier abrite les galets qui permettent au pont roulant de se déplacer sur les rails du bâtiment. Le dernier composant important d'un pont roulant est le chariot. Installé sur les rails des poutres principales, le chariot permet de lever les charges grâce au treuil qu'il embarque. Le chariot peut également se déplacer le long des poutres de charge. Les composants principaux d'un pont roulant sont illustrés dans la Figure 1.2 représentant un pont roulant bi-poutre.

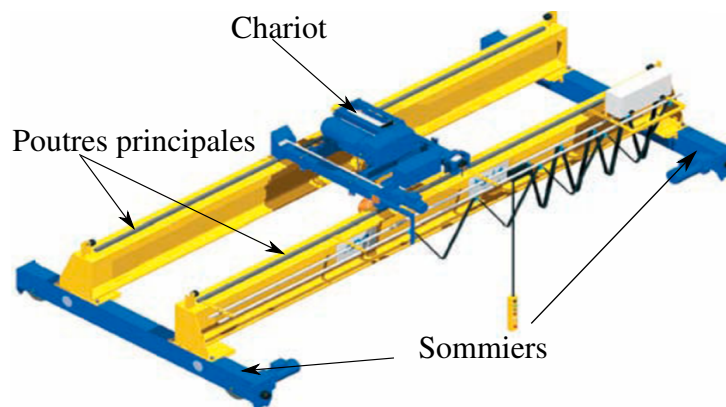


FIGURE 1.2 – Exemple de pont roulant bi-poutre

Les ponts roulants constituent donc des masses importantes, vibrantes et positionnées en hauteur dans des bâtiments qui sont parfois très critiques, comme par exemple les bâtiments abritant des réacteurs nucléaires (voir la Figure 1). Lors d'un tremblement de terre, le pont roulant est exposé à des chocs multiples entre les galets du chariot et les poutres de charge, et entre les galets du pont roulant et les rails du bâtiment. Ces impacts peuvent causer des dommages importants dans la structure du pont roulant, pouvant conduire à une chute de la charge manutentionnée, du pont lui-même ou de certaines de ses parties constitutives. De ce fait, la vérification sismique des ponts roulants est primordiale. Elle retient depuis longtemps l'attention des constructeurs français des ponts roulants, en particulier après l'accident de Fukushima.

1.1.2 Qualification des ponts roulants sous séisme

Jusqu'aux années 80, pour vérifier la tenue au séisme des engins de levage, les constructeurs réalisaient les calculs selon une méthode statique. Cette méthode consiste à appliquer dans chacune des directions horizontale et verticale (non combinées) une accélération forfaitaire agissant de façon statique sur toute la masse de l'équipement. Cette accélération est déduite des spectres au niveau du sol. Il est clair que cette méthode ne procurait pas une garantie suffisante, notamment pour l'effet des sollicitations horizontales. Ce n'était pas la méthode statique en elle-même qui était contestable, mais son application basée sur des accélérations très inférieures à ce qui était physiquement prévisible.

Progressivement, l'analyse statique a été remplacée par une analyse dynamique basée sur la méthode du spectre de réponse. En revanche, le spectre considéré ne prenait pas en compte les glissements des roues sur les rails. C'est ce qui a amené M. Betbeder-Matibet à imaginer un spectre, appelé spectre "réduit", qui prend en compte ce phénomène de limitation des efforts. Ce spectre a été utilisé seulement dans les directions horizontales parallèles aux rails. EDF a amélioré la méthode du spectre réduit, jugée excessivement conservatrice, et a proposé un spectre de "glissement". Cependant, une étude a montré que la méthode basée sur le spectre de "glissement" n'est pas conservatrice dans le calcul des contraintes pour certaines parties du pont roulant. Cette dernière méthode a donc été abandonnée.

Actuellement, la méthode largement utilisée pour les vérifications sismiques des ponts roulants est l'analyse dynamique par la méthode du spectre de réponse. Elle consiste à calculer la réponse maximale des oscillateurs simples amortis à un degré de liberté, ayant les mêmes fréquences propres que celles de la structure étudiée, et soumis au spectre du bâtiment. Ces réponses maximales sont ensuite combinées selon une formulation permettant de représenter la réponse totale de la structure. Cette méthode est présentée dans le paragraphe suivant.

1.1.2.1 Caractérisation d'un séisme : accélérogramme et spectre de réponse

Un séisme est une vibration du sol de forte amplitude, au caractère aléatoire et pouvant durer une dizaine de secondes. Le mouvement d'un point du sol est caractérisé par trois déplacements simultanés de translation dans les trois directions. Lors d'un séisme, on recueille, pour chacune des trois directions, l'accélération du sol en fonction du temps. Les courbes obtenues sont appelées "accélérogrammes". Les accélérogrammes représentent donc l'excitation dynamique due au séisme.

Le calcul de la réponse d'une structure à ces types d'accélérogramme s'effectue par des méthodes d'intégration temporelle directe. Cependant, ces méthodes sont jugées difficiles à maîtriser par la majorité des constructeurs de ponts roulants, et surtout coûteuses en calcul, notamment s'il s'agit de rechercher le comportement d'une structure vis-à-vis de familles d'accélérogrammes. C'est pourquoi la représentation temporelle que constitue l'accélérogramme est remplacée par une représentation du séisme dans le domaine fréquentiel en vue d'utiliser la méthode du spectre de réponse.

La représentation habituellement retenue est celle du spectre de réponse élastique. Elle est obtenue en calculant, pour une gamme complète d'oscillateurs simples amortis à un degré de liberté et de fréquences croissantes, la réponse maximale de chaque oscillateur lorsqu'il est excité à sa base par l'accélérogramme considéré. La configuration de l'oscillateur à un degré de liberté est illustrée dans la Figure 1.3. Chaque oscillateur est caractérisé par une masse m , une rigidité du ressort k et un coefficient d'amortissement visqueux c .

Le spectre de réponse est construit en reportant dans un repère les accélérations maximales calculées pour chaque oscillateur soumis au même accélérogramme. Le séisme est donc caractérisé par deux spectres horizontaux et un spectre vertical. Un exemple de

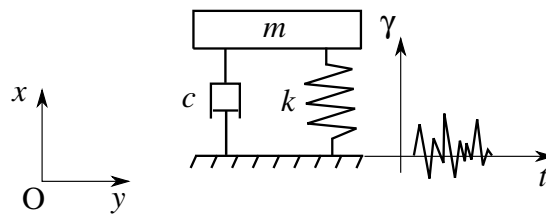


FIGURE 1.3 – Un oscillateur à un degré de liberté

spectre de réponse est représenté dans la Figure 1.4 pour différentes valeurs d'amortissement.

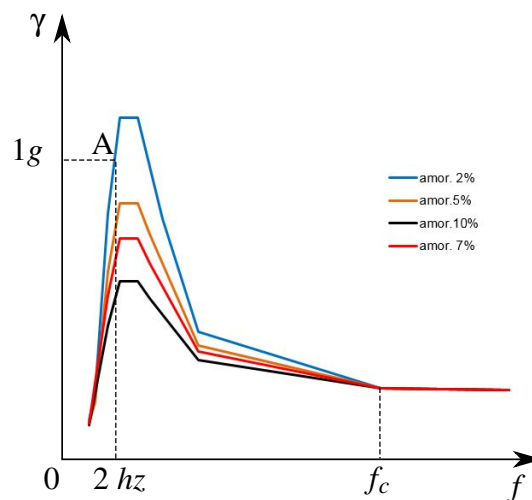


FIGURE 1.4 – Exemple de spectres de réponse pour différentes valeurs d'amortissement

Sur la Figure 1.4, le point A signifie que l'oscillateur caractérisé par une fréquence de 2 Hz et un taux d'amortissement de 2% a répondu sur une accélération maximale égale à une fois la valeur de la pesanteur $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ lorsqu'on l'a soumis à l'accélérogramme considéré. Donc, l'intérêt de cette représentation fréquentielle du séisme pour le praticien est qu'il pourra déduire, par simple lecture des diagrammes, la valeur de l'accélération maximale à laquelle sera soumis tel ou tel mode de vibration de sa structure dont il connaît les fréquences significatives.

Pour des fréquences très grandes, l'oscillateur devient rigide vis-à-vis du séisme, il n'oscille plus et suit rigoureusement les mouvements du sol. Ce comportement est représenté par l'asymptote des spectres (voir la Figure 1.4). On notera que cette asymptote est indépendante des taux d'amortissement. La fréquence caractéristique des modes rigides est appelée fréquence de coupure f_c . Cette fréquence est généralement voisine de 30 Hz.

Devant la difficulté qu'il y a à caractériser un séisme probable sur un site donné, il est devenu d'usage d'adopter une forme standard de spectre. Le spectre standard également appelé spectre unité est alors ajusté aux conditions du site en normant l'ensemble de

ses valeurs d'accélération sur la valeur maximale de l'accélération du sol. On amplifie ou on réduit l'ordonnée de chaque point du spectre proportionnellement à la valeur de $\gamma_{\max}^{\text{sol}} / \gamma_{\max}^{\text{spectre unité}}$. Le "regulatory guide 1.60" ou les règles parasismiques françaises "PS 84" définissent de tels spectres d'unité et leur applicabilité en fonction des spécificités du site. Par exemple, un sol rocheux à un pic de spectre vers les fréquences 2.5 Hz à 5 Hz alors que pour des sols plus souples les amplifications maximales se décalent vers des fréquences inférieures (1.2 Hz à 3 Hz).

Remarque : le séisme est caractérisé par deux spectres horizontaux et un spectre vertical. En revanche, les sources disponibles traitent pratiquement toujours des valeurs d'accélération horizontales et non des accélérations verticales. Il est donc généralement admis que l'accélération verticale du séisme est moins grande que les accélérations horizontales et que le spectre de la composante verticale est légèrement décalé vers les hautes fréquences. En l'absence de donnée, on pourra considérer que :

$$\gamma_{\max}^{\text{vertical}} = \frac{2}{3} \gamma_{\max}^{\text{horizontal}} \quad (1.1)$$

1.1.2.2 La méthode spectrale et ses limites

Avant de mener le calcul, le praticien doit d'abord choisir le spectre correspondant au séisme considéré pour dimensionner ou vérifier sa structure. Ce spectre dépend, en plus de la fréquence, d'un coefficient d'amortissement souvent exprimé en pourcentage.

Coefficient d'amortissement : pour définir l'amortissement on considère l'équation du mouvement de l'oscillateur libre amorti décrit dans la Figure 1.3 :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.2)$$

où m est la masse de l'oscillateur, c est le coefficient d'amortissement visqueux et k est la raideur du ressort.

L'équation (1.2) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.3)$$

où ξ est le taux d'amortissement et ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur tels que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (1.5)$$

L'amortissement d'une structure s'exprime souvent sous forme d'un pourcentage du taux d'amortissement critique ξ . L'amortissement provoque la décroissance des oscillations lorsque l'excitation a disparu. Pour les structures soudées ou boulonnées, l'amortissement est faible. Pour les ossatures métalliques des appareils de levage (pont roulant, grue, portique...), le "Regulatory guide" et le guide de l'Autorité de Sureté Nucléaire "ASN/GUIDE/2/01" préconisent d'adopter un taux d'amortissement maximum de 4% pour une ossature soudée et de 7% pour une ossature boulonnée. Physiquement, l'amortissement varie avec le niveau des contraintes de la structure considérée. Les valeurs du taux d'amortissement citées ci-dessus correspondent à la limite élastique σ_E . Pour un niveau de contraintes voisin de $\frac{\sigma_E}{2}$, il faudrait considérer 2% pour une ossature soudée et 4% pour une ossature boulonnée.

Pour déterminer la réponse d'une structure au séisme, le praticien doit déterminer, grâce au spectre de réponse du séisme, l'accélération maximale à laquelle la structure sera soumise. Pour cela, il doit avoir une idée du comportement dynamique et du contenu fréquentiel de la structure considérée. Par conséquent, une analyse modale est nécessaire pour déterminer les modes de la structure, en particulier les modes ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure et qui risquent donc d'être excités par le pic du spectre de réponse du séisme. Deux cas de figure se présentent :

- **Calcul statique pur** : si la première fréquence de la structure étudiée est supérieure à la fréquence de coupure. La structure est soumise, pour chacune des trois directions du séisme, à un effort statique $F = M \times \gamma(f_c)$, où M est la matrice de masse de la structure et $\gamma(f_c)$ est l'accélération du sol ou du plancher correspondant à l'asymptote du spectre de réponse du séisme considéré (voir la Figure 1.5). Nous verrons plus loin la règle de cumul des trois réponses statiques.
- **Calcul statique équivalent - Cas 1** : si la première fréquence propre de la structure n'est pas connue. Dans ce cas, on considère l'accélération du pic γ_{max} pondérée d'un coefficient appelé coefficient d'interaction modale souvent pris égal à 1.5. Ensuite, la structure est soumise, dans chacune des trois directions du séisme, à un effort statique $F = M \times 1.5\gamma_{max}$ et la réponse globale est obtenue en combinant les trois réponses statiques.
- **Calcul statique équivalent - Cas 2** : cette méthode est appliquée lorsque la structure est compliquée. Dans ce cas, une analyse modale est menée pour déterminer les modes propres et leurs valeurs de fréquences. Si le mode considéré a une fréquence propre f_0 inférieure à la fréquence du pic du spectre, soit $f_0 < f_{p1}$, on considère l'accélération du pic, et si cette fréquence est supérieure aux fréquences du pic, soit $f_0 > f_{p2}$, on considère l'accélération lue directement sur le spectre. Puis, dans les deux cas, l'accélération considérée est pondérée par un coefficient d'interaction modale souvent pris égal à 1.5. Ensuite, la structure est soumise aux accélérations déterminées pour chaque mode. Finalement, les différentes réponses modales sont combinées pour déterminer la réponse globale de la structure.

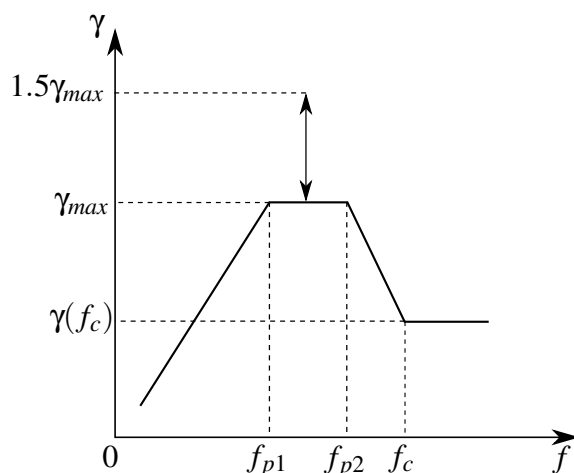


FIGURE 1.5 – Valeurs caractéristiques d’un spectre de réponse

La règle généralement admise est que la réponse la plus probable statistiquement est obtenue en prenant la racine carrée de la somme des carrés des réponses des modes propres (cumul quadratique), soit :

$$R = \sqrt{\sum_i R_i^2} \quad (1.6)$$

D’autres règles de cumul peuvent être retenues, en particulier si les modes propres de la structure ne sont pas suffisamment séparés les uns des autres. Dans ce cas, les modes proches peuvent être combinés arithmétiquement, et les groupes ainsi constitués sont ensuite cumulés quadratiquement.

Dans la pratique, dans le calcul des modes propres, on s’arrête bien sûr aux modes significatifs dits modes “souples”. Ces modes retenus ne représentent pas forcément la totalité de la masse de la structure étudiée. La masse correspondant aux modes non-retenus (modes rigides), définie par la différence entre la masse totale de la structure et la somme des masses modales des modes considérés, est à introduire dans la combinaison des réponses modales sous la forme d’un mode fictif rigide soumis à l’accélération du sol ou du plancher.

Le calcul est à effectuer pour chacune des trois directions du séisme. Ensuite, la réponse globale de la structure est obtenue en effectuant de nouveau un cumul quadratique :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.7)$$

où R_x , R_y et R_z sont, respectivement, les réponses de la structure dans les directions x , y et z .

En appliquant la méthode statique équivalent, on fait donc l’hypothèse d’un comportement purement élastique de la structure considérée, c’est-à-dire que les contacts galet-rail

et les différentes liaisons avec jeux ne sont pas pris en compte et que le matériau de la structure n'a pas un comportement plastique. Cette méthode est très conservative. Elle donne une réponse enveloppe de la structure à dimensionner ou à vérifier au séisme. En revanche, on a constaté qu'historiquement les niveaux sismiques, imposés par les autorités nationales ou par le propriétaire de l'équipement, ont augmenté régulièrement, en particulier après les accidents sismiques, comme à Fukushima par exemple. Les constructeurs de pont roulants se trouvent alors dans l'incapacité de construire s'ils se basent sur les efforts fournis par la méthode statique. Donc, ils ont fortement besoin de faire des analyses dynamiques transitoires permettant de prendre en compte les non-linéarités géométrique et matériau.

1.1.2.3 La législation

En France, les appareils de levage à charge suspendue tels que les ponts roulants, les grues, les portiques et les potences sont conçus, dimensionnés et vérifiés suivant les directives de normes françaises comme les règles de la F.E.M (Fédération Française de Manutention), de normes ISO (Organisation internationale de normalisation) comme les "ISO/TC 96" ou encore des Eurocodes qui sont des codes européens de conception et de calcul des ouvrages, se substituant aux codes nationaux et permettant aux entreprises ou bureaux d'études, d'accéder aux marchés des autres pays membres. Toutefois, les directives les plus anciennes et probablement les plus utilisées en France sont les règles de la F.E.M. La plupart des appareils de levage qui équipent encore les ports maritimes, les barrages et autres bâtiments en France, ont été conçus suivant ces règles et leurs vérifications, dans le cadre des maintenances périodiques, continuent à être réalisées suivant les mêmes règles. Toutes ces normes, quelles soient françaises, européennes ou internationales établissent, de manière détaillée et précise, les exigences et donnent des lignes directrices ainsi que des règles pour la conception des appareils de levage à charge suspendue. Les règles indiquées représentent des pratiques de conception correctes qui garantissent le respect des exigences de sécurité essentielles et une durée de vie des composants acceptable. En revanche, ces normes ne donnent pas de directives claires et spécifiques aux appareils de levage pour leur dimensionnement et leur vérification au séisme. Les Eurocodes 8 sont consacrés à la conception et dimensionnement des structures pour leur résistance aux séismes. Mais, les structures concernées par ces codes sont les éléments de génie civil (bâtiment, silos, réservoirs, canalisations...).

Pour dimensionner leurs appareils de levage au séisme, les constructeurs français suivent essentiellement les directives de leurs clients quand elles existent, ou les règles définies dans le guide "ASN/GUIDE/2/01" même si ce dernier a été établi pour les ouvrages de génie civil des installations nucléaires. Devant ce manque préjudiciable de norme établissant les principes pour une conception résistante des appareils de levage à la sismicité, une commission internationale a été désignée à la demande du Japon qui, après le séisme de Kobe, en 1995, a souligné la nécessité d'établir une norme pour garantir la résistance à la sismicité des appareils de levage à charge suspendue. Cette commission a élaboré la nouvelle norme "ISO 11031" qui définit les règles de conception sismique des

engins de levage. Cette norme détaille principalement deux méthodes statiques d'analyse de la réponse sismique utilisées pour la conception sismique des engins de levage. En revanche la méthode temporelle est indiquée en annexe informative. L'objectif à long terme est de réviser cette norme en y ajoutant une partie détaillée sur utilisation de la réponse temporelle pour le dimensionnement et la vérification des engins de levage au séisme.

1.2 Modélisation des ponts roulants en dynamique transitoire

1.2.1 Modélisation de la liaison galet-rail

Le chariot et les sommiers abritent des galets de roulement permettant au chariot de se translater sur les rails des poutres de charge et au pont roulant lui-même de se déplacer sur les rails du bâtiment. Il existe deux types de galets sur un pont roulant : les galets moteurs, qui sont entraînés par un moteur électrique auto-freinant, et les galets libres qui ne contiennent aucune motorisation. La Figure 1.6 montre un exemple de pont roulant bi-poutre dont chaque sommier abrite un galet moteur et un galet libre. Le chariot a également la même configuration de galet que les sommiers. À l'arrêt, tous les moteurs sont freinés. Donc, en cas de séisme, les galets moteurs peuvent glisser parallèlement aux rails. En revanche, les galets libres roulent. Cet aspect est à prendre en compte dans la modélisation numérique en considérant éventuellement un coefficient de frottement plus important pour les galets moteur.

Dans la direction perpendiculaire aux rails, des éléments de guidage, comme par exemple les joues des galets de roulement présentées dans la Figure 1.7 ou les galets de guidage horizontaux présentés dans la Figure 1.8, limitent le débattement du pont roulant ou du chariot à un ou deux centimètres au maximum. Ces éléments de guidage peuvent être assimilés à des butées fixes.

Finalement, la liaison galet-rail peut être modélisée par un contact frottant avec des coefficients de frottement différents pour les galets moteurs et les galets libres. Les éléments de guidage sont modélisés par des butées fixes empêchant le pont roulant et le chariot de dérailler perpendiculairement aux rails.

1.2.2 Méthodes d'application d'un chargement sismique temporel

Habituellement, le mouvement d'un corps est étudié par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_a et ce repère est souvent assimilé au sol fixe. L'équation de la dynamique d'un point matériel M s'écrit dans \mathcal{R}_a , à l'instant t , comme suit :

$$m \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.8)$$

où m est la masse du point matériel M , \mathbf{u} son vecteur de déplacement et \mathbf{F} le vecteur des efforts extérieurs.

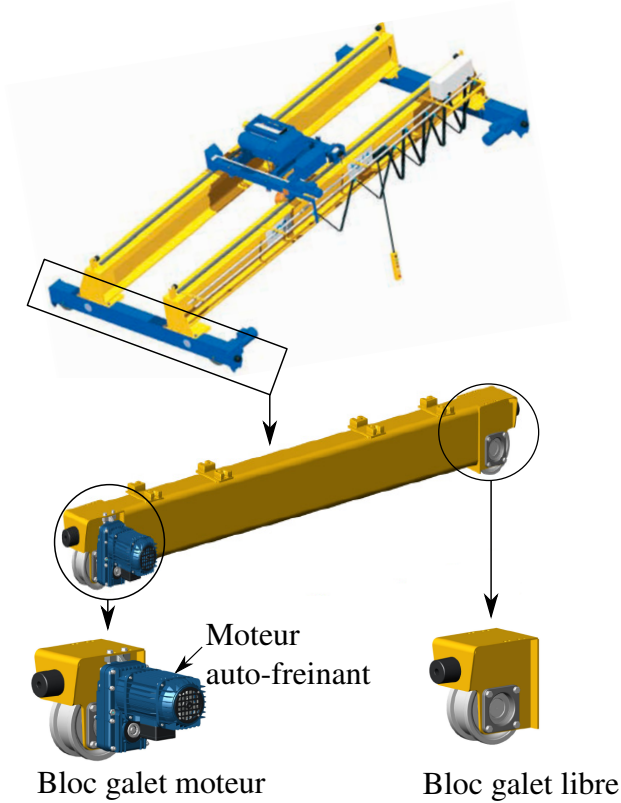


FIGURE 1.6 – Galet moteur et galet libre d'un pont roulant

Pendant le séisme, le sol est donc animé d'un mouvement de translation dans les directions x , y et z . Ce mouvement est représenté par une accélération temporelle $\mathbf{a}_s(t)$ par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_a . Soit \mathcal{R}_s le repère associé au sol (voir la Figure 1.9). L'accélération du point M dans le repère du sol \mathcal{R}_s s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{u}}(M)_{|\mathcal{R}_a} = \ddot{\mathbf{u}}(M)_{|\mathcal{R}_s} + \mathbf{a}_s + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}_s|\mathcal{R}_a} \times \dot{\mathbf{u}}(M)_{|\mathcal{R}_s} \quad (1.9)$$

Le séisme n'étant caractérisé que par un mouvement de translation dans les trois directions, on a :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}_s|\mathcal{R}_a} = 0 \quad (1.10)$$

Finalement, l'accélération du point M dans le repère galiléen \mathcal{R}_a est la somme de son accélération dans le repère non-galiléen \mathcal{R}_s associé au sol plus l'accélération du sol représentant le séisme :

$$\ddot{\mathbf{u}}(M)_{|\mathcal{R}_a} = \ddot{\mathbf{u}}(M)_{|\mathcal{R}_s} + \mathbf{a}_s \quad (1.11)$$

En remplaçant l'équation (1.11) dans l'équation (1.8), on obtient l'équation du mouvement du point M dans le repère du sol \mathcal{R}_s :

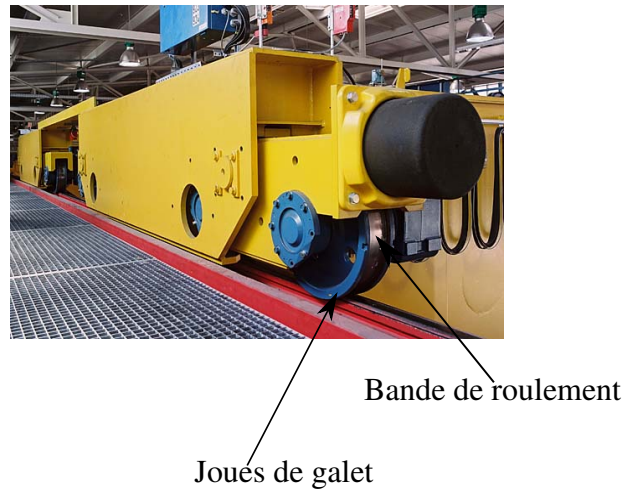


FIGURE 1.7 – Exemple d'un galet à joues de pont roulant

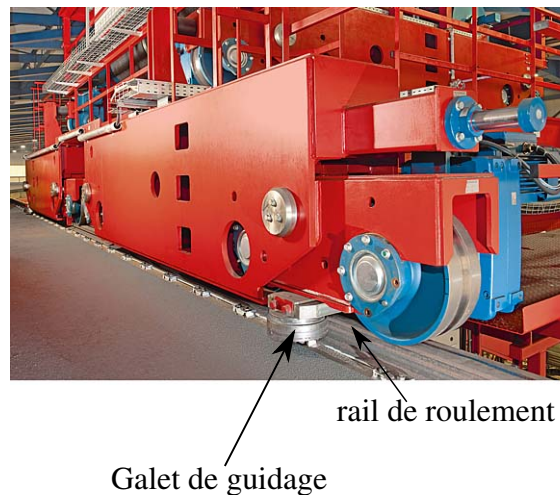


FIGURE 1.8 – Exemple d'un galet de guidage d'un pont roulant

$$m \ddot{\mathbf{u}}_{/\mathcal{R}_s}(t) = \mathbf{F}(t) - m\mathbf{a}_s \quad (1.12)$$

Finalement, on retrouve la contribution du séisme dans l'équation du mouvement (1.12) sous forme d'une force d'inertie $F_s = m\mathbf{a}_s$. En prenant en compte cette force d'inertie, on obtient bien le mouvement relatif de la structure par rapport au repère \mathcal{R}_s et non pas le mouvement absolu par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_a . C'est cette méthode qui est utilisée dans les calculs sismiques [CHO 95].

Le séisme est physiquement transmis à la structure aux niveaux des ancrages du bâtiment (élément structural). Dans le cas du pont roulant (élément non structural), l'excitation sismique arrive au niveau du plancher sur lequel les rails du pont roulant sont installés. Vu qu'il est rarement possible de faire une analyse globale de la structure avec les éléments structuraux et non-structuraux pour déterminer les efforts transmis aux

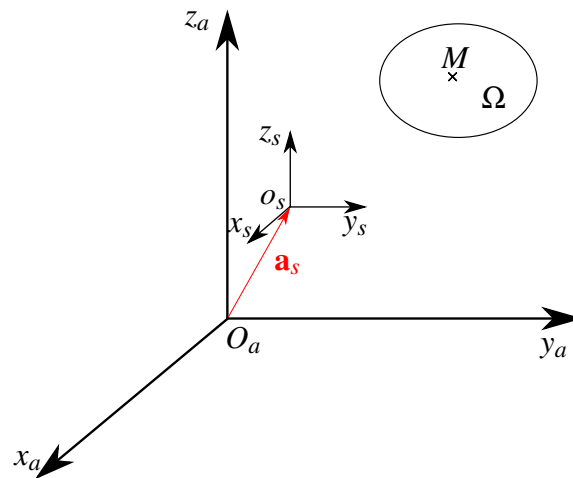


FIGURE 1.9 – Configuration d'un changement de repère

équipements (éléments non-structuraux), il existe des méthodes pour définir l'accélération ou le spectre dû à l'amplification entre le sol et l'étage où est fixé l'équipement. L'accélération ou le spectre de plancher permet de dimensionner toute structure secondaire fixée sur la structure primaire.

1.3 Conclusion et orientation du travail

La vérification de la tenue des ponts roulants aux séismes est une question primordiale liée à la sécurité des personnes et des équipements critiques. Aujourd'hui, les constructeurs de ponts roulants se voient demander plus de garanties sur les méthodes de calcul utilisées pour dimensionner leurs structures. De plus, la prise en compte des niveaux sismiques actuelles avec la méthode spectrale habituellement utilisée, donne des efforts surestimés mettant les industriels parfois, dans l'incapacité de construire. Pour toutes ces raisons, les professionnels du levage souhaitent utiliser des méthodes numériques non-linéaires temporelles pour analyser la réponse des ponts roulants aux séismes. Cette thèse s'inscrit donc dans le cadre de la modélisation et de l'étude de la réponse dynamique des ponts roulants sous séisme. Son objectif principal est d'aider les professionnels du levage à comprendre et à acquérir des outils et méthodes numériques d'analyse dynamique temporelle.

L'utilisation des techniques de calculs temporels non linéaires pour les ponts roulants sous séisme pose plusieurs difficultés, notamment, la modélisation des multiples impacts auxquels est exposé le pont roulant pendant le séisme. Pour étudier ces phénomènes, une grande partie de cette thèse sera d'abord consacré à l'étude de la réponse dynamique d'un corps déformable à un impact.

A cause de ces impacts, plusieurs échelles de temps coexistent au sein de ce problème. Dans ce cas, l'utilisation d'une stratégie multi-échelle en temps est adaptée. Cette méthode permet de traiter une partie de la structure avec des maillages fins et des pas

de temps adaptés, tandis que le reste de la structure peut être maillée de façon plus grossier avec des pas de temps moins contraignants. Par ailleurs, cette méthode permet de choisir le schéma temporel le mieux adapté à la physique du sous-domaine considéré.

Un autre inconvénient à l'utilisation des méthodes temporelles est le temps de calcul. En effet, en présence des phénomènes hautes fréquences qui imposent l'utilisation d'un pas de temps réduit, le temps de calcul d'un pont roulant soumis à une excitation sismique d'une dizaine de secondes, peut être très important. Là encore la stratégie multi-échelle offre un avantage. Elle permet également des gains significatifs en temps de calcul. Pour toutes les raisons évoquées ci-dessus, une stratégie multi-échelle en temps sera considérée et validée pour le problème du pont roulant sous-séisme. De plus, basé sur cette méthode, un démonstrateur de co-simulation entre des logiciels commerciaux sera également réalisé. Cet outil numérique est intéressant pour les industriels. Il va leur permettre des gains très significatif en temps de calcul, en particulier pour des problèmes tridimensionnels.

Au cours de la thèse, nous avons eu connaissance des essais sismiques réalisés par l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN) et le Commissariat à l'Énergie atomique et aux Énergies alternatives (CEA) sur une maquette à l'échelle 1/5 d'un pont roulant industriel. Une collaboration entre le CETIM, l'IRSN et le CEA a permis de récupérer les résultats de ces essais. Dans le but de valider les méthodes numériques considérées, un modèle numérique de la maquette sera également réalisé.

Chapitre 2

Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

Au vu des multiples impacts auxquels est exposé un pont roulant, ce premier chapitre est consacré à l'étude de la réponse d'un corps déformable à un impact. Tout d'abord, on rappelle les équations de la dynamique pour un problème mécanique sans contact. On détaille également les différentes méthodes de discrétisation temporelle de Newmark, en particulier le schéma de la différence centrée qui sera utilisé par la suite. La deuxième partie du chapitre est dédiée au développement d'un intégrateur temporel explicite pour la dynamique de contact. L'algorithme proposé sera testé et validé sur des cas tests académiques, et ses résultats numériques comparés aux résultats des schémas de Jean-Moreau.

Sommaire

2.1	Problème de référence de la mécanique des milieux continus sans contact	20
2.1.1	Formulation forte	20
2.1.2	Formulation faible - Principe des puissances virtuelles	22
2.1.3	Discrétisation en espace	22
2.1.4	Discrétisation en temps	24
2.2	Cas d'un problème mécanique avec contact/impact	38
2.2.1	Formulation du contact en dynamique	38
2.2.2	Formulation forte	40
2.2.3	Formulation variationnelle espace-temps	40
2.2.4	Équation de la dynamique non-régulière	46
2.2.5	Discrétisation en temps - Schéma explicite de Newmark	48
2.3	Exemples numériques	58
2.3.1	Test de la balle rebondissante - Phénomène de ZENO	59
2.3.2	Exemple de deux barres déformables en contact	62
2.4	Conclusion	72

2.1 Problème de référence de la mécanique des milieux continus sans contact

La plupart des phénomènes physiques (transfert de la chaleur, l'écoulement d'un fluide, l'analyse des contraintes...) sont décrits par des équations aux dérivées partielles qui gouvernent l'équilibre. Ces équations peuvent être du premier ou du second ordre, linéaires ou non-linéaires. En général, la résolution de ces équations par des méthodes analytiques classiques est presque impossible. On est donc naturellement conduit à utiliser des méthodes de résolution approchées (méthodes de Galerkin, méthodes des moindres carrés...). Le principe de ces méthodes est de subdiviser le système considéré en plusieurs éléments dont le comportement est compris. Ensuite, le système original est reconstruit à partir de ces éléments pour avoir son comportement global. Une démarche commune à toutes ces méthodes consiste à multiplier les équations aux dérivées partielles du problème par une fonction de pondération (ou fonction test), puis à l'intégrer sur le domaine considéré. Les fonctions de pondération appartiennent à un espace de solutions approchées de dimension finie et possédant des propriétés de régularité appropriées. Cette technique s'appelle la méthode des résidus pondérés. La diversité des méthodes réside dans le choix de l'espace des fonctions tests. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes variationnelles où la solution est obtenue en rendant une certaine fonctionnelle stationnaire (méthode de Rayleigh-Ritz, ...). Dans la suite, nous allons présenter brièvement la méthode des éléments finis qui peut-être considérée comme une généralisation de la méthode de Rayleigh-Ritz et qui constitue la méthode numérique la plus largement répondeuse pour résoudre les problèmes les plus complexes de la mécanique des milieux continus et d'autres domaines de la physique également. Plus de détails concernant la méthode des éléments finis peuvent être trouvés dans [FIS 07, ZIE 77, HUG 12, BEL 00, ZIE 00].

Ce paragraphe rappelle quelques concepts de la méthode des éléments finis (formulation forte, formulation faible, discrétisation spatiale). Les méthodes de discrétisation temporelle seront également discutées, notamment les schémas de Newmark. Dans la suite, nous faisons l'hypothèse des petites perturbations (HPP) : petites déformations, petits déplacements et petites rotations. Ainsi, les différentes configurations du domaine au cours du temps peuvent être confondues avec la configuration initiale.

2.1.1 Formulation forte

Considérons un corps élastique occupant le domaine Ω de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Ce corps est soumis à deux types de forces : une densité volumique d'effort \mathbf{f}_d s'exerçant dans chaque volume élémentaire $d\Omega$, et une densité surfacique d'effort \mathbf{F}_d s'exerçant sur une partie de la frontière Γ notée Γ_{F_d} . La configuration de ce problème mécanique est présentée dans la Figure 2.1. De plus, on impose un déplacement \mathbf{u}_d sur le bord noté Γ_u de Γ . Ainsi, la frontière Γ se décompose en une partie Γ_{F_d} où les efforts \mathbf{F}_d sont imposés

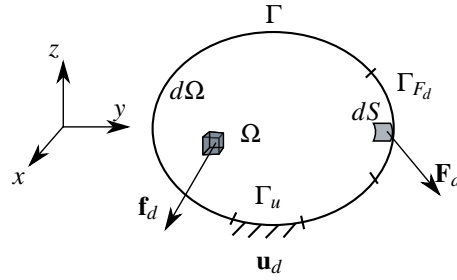


FIGURE 2.1 – Configuration d'un problème mécanique de référence

et une partie Γ_u où les déplacements \mathbf{u}_d sont imposés, telle que :

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{F_d} \quad \text{et} \quad \Gamma_u \cap \Gamma_{F_d} = \emptyset$$

Le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ ainsi que le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$, définis en tout point $X \in \Omega$ et à tout instant t appartenant à l'intervalle de temps $[0, T]$, doivent vérifier les équations locales de référence suivantes. Dans un souci de concision, nous omettrons de préciser par la suite la dépendance des fonctions scalaires, vectorielles et tensorielles aux variables d'espace et de temps (\mathbf{X}, t) :

– Les équations de conservation ou d'équilibre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \quad (2.1)$$

– L'équation décrivant le comportement matériau, en HPP et pour un matériau élastique linéaire on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2)$$

– La mesure de déformation, en HPP on a :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.3)$$

– Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d & \text{sur} & \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F}_d & \text{sur} & \Gamma_{F_d} \text{ (de normal } \mathbf{n} \text{)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

– Les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t_0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur de déformation, ρ est la masse volumique, \mathbf{A} est le tenseur de Hooke d'ordre 4 qui caractérise le matériau, \mathcal{U} et \mathcal{S} sont des espaces fonctionnels à énergie finie avec de bonnes conditions de régularité.

Le but général est de trouver la solution exacte $(\mathbf{u}_{ex}, \boldsymbol{\sigma}_{ex})$ en chaque point de Ω et à chaque instant t . Mais comme le problème mécanique décrit ci-dessus n'a pas de solution analytique dans le cas général, nous allons chercher une approximation du problème de référence en appliquant la méthode des éléments finis [ZIE 00].

2.1.2 Formulation faible - Principe des puissances virtuelles

Avant de mettre en place la méthode des éléments finis, on écrit d'abord le problème de référence, décrit par les équations (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5), sous une forme globale en utilisant le principe des puissances virtuelles. Cela consiste à multiplier l'équation d'équilibre (2.1) par une fonction test \mathbf{u}^* puis à l'intégrer sur tout le volume Ω . Après calcul, la formulation globale du problème de référence s'écrit :

$$\forall t \in [0, T]; \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (2.6)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_{F_d}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}^* dS$$

où \mathcal{U}^0 correspond à l'ensemble fonctions tests cinématiquement admissibles à zéro :

$$\mathcal{U}^0 = \left\{ \mathbf{u}^* \mid \mathbf{u}^* \text{ continu et régulier et } \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (2.7)$$

L'équation (2.6) correspond à la formulation faible du problème de la mécanique des milieux continus décrit ci-dessus dans le paragraphe 2.1.1.

2.1.3 Discrétisation en espace

Afin de trouver une solution approchée du problème de référence (2.6), nous allons appliquer maintenant la méthode des éléments finis. Elle consiste à subdiviser le domaine Ω en plusieurs sous domaines Ω_e de forme plus au moins simple que l'on appelle éléments finis ($\Omega = \sum_e \Omega_e$). Les sommets d'un élément fini sont appelés nœuds. En ce sens, les espaces de dimension infinie \mathcal{S} , \mathcal{U} et \mathcal{U}^0 sont remplacés par des espaces de dimension finie \mathcal{S}^n , \mathcal{U}^n et \mathcal{U}_0^n , dans lesquels nous allons chercher une solution approchée du problème de référence (2.6). Nous présentons ici une formulation en déplacements, discrétisée en espace par des éléments finis, pour laquelle on se donne une approximation du champ de déplacements de la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{approché}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{X}) \mathbf{u}_i(t) \quad (2.8)$$

où n est le nombre de nœuds du maillage correspondant aux nombre de degrés de libertés du problème et Φ_i est la fonction de forme globale associée au degré de liberté d'indice i . Les Φ_i constituent une base de fonctions vectorielles d'un espace de dimension n . En reportant l'expression discrétisée (2.8) dans la formulation globale du problème (2.6), on obtient la forme intégrale de l'équilibre suivante :

$$\forall t \in [0, T]; \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_*^n$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d^2 \mathbf{u}_j}{dt^2} \left[\int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_j d\Omega \right] \mathbf{u}_i^* &= - \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega} Tr[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}(\Phi_i)] d\Omega \right] \mathbf{u}_i^* \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega} \mathbf{f}_d \Phi_i d\Omega \right] \mathbf{u}_i^* + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Gamma_{F_d}} \mathbf{F}_d \cdot \Phi_i dS \right] \mathbf{u}_i^* \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'expression (2.9) peut être réécrite sous forme matricielle comme suit :

$$\forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{U}_0^n \quad \left(\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} \right) \mathbf{U}^* = 0 \quad (2.10)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des déplacements nodaux. La matrice de masse \mathbf{M} , le vecteur des efforts intérieurs généralisés \mathbf{F}_{int} et le vecteur des forces externes \mathbf{F}_{ext} sont construits par assemblage sur les éléments finis, tel que :

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho^e \Phi_i^e \Phi_j^e d\Omega_e \quad (2.11)$$

$$\mathbf{F}_{inti} = \sum_e \int_{\Omega_e} Tr[\boldsymbol{\sigma}^e \boldsymbol{\epsilon}^e(\Phi_i^e)] d\Omega_e \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_{exti} = \sum_e \int_{\Gamma_{F_d}^e} \mathbf{F}_d^e \cdot \Phi_i^e dS_e \quad (2.13)$$

L'indice e désigne une quantité définie sur un élément fini et la notation \sum_e indique que la somme est faite sur l'ensemble des éléments finis du domaine Ω . Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, le vecteur des efforts intérieurs généralisés \mathbf{F}_{int} peut s'écrire comme le produit matricielle du vecteur des déplacements nodaux \mathbf{U} et une matrice \mathbf{K} appelée la matrice de rigidité :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.14)$$

Finalement, la formulation faible discrétisée en espace par la méthode des éléments finis d'un problème de la mécanique des milieux continu s'écrit :

– L'équation d'équilibre :

$$\forall t \in [0, T]; \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (2.15)$$

– Les conditions aux limites (conditions de Dirichlet) :

$$\forall t \in [0, T]; \quad \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_d \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.16)$$

– Les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t_0) &= \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}(t_0) &= \dot{\mathbf{U}}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Remarques :

– La matrice de masse \mathbf{M} est symétrique définie positive, en revanche, en présence des mouvements de corps rigide, la matrice de rigidité \mathbf{K} est seulement positive et n'est plus définie.

- Les conditions aux limites peuvent être prises en compte dans l'équation d'équilibre de différentes manières parmi lesquelles on trouve la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode de la pénalité ou encore la méthode du Lagrangien augmenté.

L'équation (2.15) est également appelé la forme semi-discrétisée de l'équation d'équilibre car elle n'est discrétisée qu'en espace et pas encore en temps. Les méthodes de discrétisation temporelle sont présentées dans le paragraphe suivant.

2.1.4 Discrétisation en temps

2.1.4.1 État de l'art

En dynamique, la résolution d'un problème mécanique passe d'abord par une discrétisation spatiale du problème qui conduit à un système d'équations semi-discrétisées dont le temps est une variable indépendante (voir les équations (2.15), (2.16) et (2.17)). Pour résoudre en temps ce problème, il existe plusieurs méthodes d'intégration temporelle. Le principe de ces méthodes est de diviser l'intervalle de temps $[0, T]$ en un nombre fini de sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, tel que : $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < T$. Ensuite, la solution à chaque instant t_n est estimée en fonction de la solution à l'instant précédent (méthodes à un pas), ou en fonction des solutions aux instants précédents (méthodes multi-pas). En pratique, le choix d'une méthode d'intégration temporelle dépend de la stabilité, de la précision et des propriétés de dissipation numérique. En effet, d'après le théorème de Lax [LAX 56], la stabilité et la consistance (précision) sont des conditions nécessaires à la convergence du schéma d'intégration vers la solution exacte. Les méthodes d'intégration temporelle sont habituellement classées en deux catégories : les intégrateurs implicites [HOU 50, NEW 59, WIL 72, PAR 75, HIL 77, WOO 80, HUL 93, TAM 01, TAM 03, ZHO 04] qui sont inconditionnellement stables et permettent donc un large choix de pas de temps. En revanche, elles conduisent à des systèmes implicites nécessitant des techniques de résolution itératives coûteuses en calcul. Contrairement aux schémas implicites, les intégrateurs explicites ne nécessitent aucune résolution de système mais leur condition de stabilité impose une restriction sur le choix du pas de temps. Cette restriction est parfois très contraignante parce qu'elle conduit, dans certains cas, à des pas de temps très petits. C'est pour cette raison que les intégrateurs explicites sont principalement adaptés aux problèmes où les modes hautes fréquences contribuent de manière significative à la réponse globale, comme c'est le cas pour les problèmes d'impacts ou les problèmes de propagation d'onde.

L'intégration temporelle d'un problème mécanique semi-discrétisé peut générer des oscillations non-physiques qui sont essentiellement dues à des modes hautes fréquences introduits par la discrétisation spatiale. Afin d'éviter ce phénomène, de nombreux intégrateurs temporels implicites incluant de la dissipation numérique contrôlable, sont développés. Le but de la dissipation numérique est d'amortir ces oscillations artificielles. La principale difficulté pour concevoir ce genre d'algorithme est de pouvoir

introduire de la dissipation numérique pour éviter les oscillations hautes fréquences sans amortir les modes basse fréquence. Parmi les schémas implicites dissipatifs qui permettent d'amortir les modes hautes fréquences tout en gardant une précision du second ordre on trouve : la méthode Hilber–Hughes–Taylor (HHT- α) [HIL 77], la méthode Wood–Bossak–Zienkiewicz (WBZ- α) [WOO 80], la méthode Hoff-Pahl (HP- θ_1) [HOF 88a, HOF 88b, HOF 89] et la méthode Chung–Hulbert (CH- α) [HUL 93]. Les méthodes HHT- α , WBZ- α sont des cas particuliers des schémas CH- α connues sous le nom des méthodes α -généralisées [HUL 93].

La dissipation numérique est également très importante, voire même plus importante, lorsqu'on utilise des intégrateurs temporels explicites. Parmi les schémas explicites, on trouve le schéma de Katona et Zienkiewicz [KAT 85], le schéma de Hoff et Taylor [HOF 90] et le schéma du second ordre de la différence centrée qui est probablement le plus utilisée en calcul de structure. Cette méthode explicite de Newmark n'introduit aucune dissipation numérique. En effet, pour un maillage uniforme et un pas de temps égal au pas de temps critique de tous les éléments, le schéma donne un résultat optimal [HUL 96]. Ce comportement est mieux illustré dans le cas d'un impact entre deux barres élastiques uniformes où le schéma de la différence centrée donne la solution nodale exacte. Cependant, dans la pratique, il est très difficile de construire un maillage tel que le pas de temps critique est le même pour tous les éléments. Par conséquent, le schéma de la différence centrée produit des oscillations hautes fréquences dans la solution numérique. Pour éviter ces oscillations parasites, il existe des schémas explicites, basés également sur les méthodes α -généralisées, permettant d'introduire de la dissipation numérique pour amortir les oscillations hautes fréquences [MIR 89, HUL 96].

Une alternative aux méthodes d'intégration temporelle basées sur les différences finis est les schémas TDG (Time Discontinuous Galerkin). Ils sont basés sur des formulations de Galerkin, habituellement employées dans le domaine spatial, dans le domaine temporel. L'intervalle de temps est divisé en plusieurs sous-intervalles où la réponse temporelle est approchée par des fonctions tests [HUG 88, HUL 90, HUL 94, BOR 93, CAN 95, FUN 96]. Hughes et Hulbert [HUG 88, HUL 90] ont été les premiers à utiliser ce type d'approches en dynamique des structures. Les schémas TDG sont généralement implicites. En plus de présenter l'avantage d'être inconditionnellement stables et d'avoir des ordres de convergence élevés, ce type de méthodes permet de filtrer également les hautes fréquences non physiques du problème. Cependant, ces méthodes nécessitent la résolution d'un système matriciel plus important que les systèmes des schémas implicites standards. Pour réduire la taille du système à résoudre, Li et Wiberg [LI 96] ont proposé une nouvelle implémentation des méthodes TDG. L'algorithme obtenu nécessite la factorisation d'une matrice réduite et quelques itérations pour résoudre le système résultant. Les mêmes auteurs ont également proposé des méthodes TDG basés sur une intégration temporelle explicite [WIB 99]. Les schémas explicites résultants ont un ordre de convergence égal à trois. On peut également citer les travaux de Bonelli et al. [BON 01, BON 02] pour la proposition de nouveaux schémas TDG explicites basés sur la même stratégie d'implémentation proposée par Li et Wiberg [LI 96] et qui ont également un ordre de convergence égale à trois pour des problèmes linéaires et non linéaires avec une dissipation

numérique contrôlable.

En dynamique non-linéaire, les schémas implicites précédemment cités, peuvent perdre leur stabilité inconditionnelle. En effet, de nombreuses publications sont toujours consacrées à la clarification de questions spécifiques aux problèmes non-linéaires, telles que la précision, la stabilité, les propriétés énergétique et le comportement haute fréquence. A cet effet, des intégrateurs qui permettent la conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ou de l'énergie dans le cas général ont été proposés par Simo, Laursen, Romeo et d'autres [BET 01, SIM 92b, ARM 98]. Des intégrateurs variationnels ainsi que des méthodes- α variationnelles ont également été proposés. On peut citer les travaux de Armero et Romero [ARM 01a, ARM 01b] qui ont proposés d'introduire de la dissipation numérique tout en préservant la conservation des moments linéaires et angulaires contrairement aux méthodes α -généralisées qui ne conservent que le moment linéaire.

Dans la suite, nous présentons la famille des schémas de Newmark, notamment le schéma explicite de la différence centrée que nous utiliserons pour résoudre des problèmes de contact et d'impact.

2.1.4.2 Les schémas de Newmark

La famille des schémas de Newmark [NEW 59] est une des plus anciennes méthodes d'intégration temporelle directe et probablement la plus utilisée pour résoudre les équations d'équilibre dynamique semi-discrétisées. Afin d'illustrer les schémas de Newmark, on considère l'équation d'équilibre semi-discrétisée suivante :

$$\forall t \in [0, T] \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (2.18)$$

où les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} représentent, respectivement, la masse et la rigidité de la structure considérée. Pour un cas plus général, nous avons introduit dans l'équilibre une matrice d'amortissement \mathbf{C} . On considère ici que l'intervalle de temps $[0, T]$ est divisé en un nombre fini de pas temps : $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < T$, tel que le pas de temps Δt ($\Delta t = t_{n+1} - t_n$) est constant.

Les schémas de Newmark sont des méthodes d'intégration temporelle à un pas. Leur objectif est de calculer le vecteur d'état $(\mathbf{U}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1})$ à l'instant t_{n+1} en fonction du vecteur d'état $(\mathbf{U}_n, \dot{\mathbf{U}}_n)$ à l'instant t_n et des efforts extérieurs connus aux instants t_{n+1} et t_n . Pour cela, le déplacement \mathbf{U} et la vitesse $\dot{\mathbf{U}}$ sont exprimés en fonction de l'accélération $\ddot{\mathbf{U}}$ sous forme d'intégrale sur l'intervalle de temps $[t_{n+1}, t_n]$ comme suit [KRE 09, GÉR 14] :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.19)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.20)$$

Par intégration par partie, on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{U}}(t) dt = \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.21)$$

Ainsi le déplacement \mathbf{U}_{n+1} à l'instant t_{n+1} peut s'écrire en fonction de l'accélération comme suit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \quad (2.22)$$

A ce moment de l'écriture des relations (2.22) et (2.19), les accélérations ne sont pas connues sur tout l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, et leur intégrale doit être approximée à partir des valeurs des accélérations au bord de l'intervalle de temps. Les relations finales de Newmark sont obtenues donc en écrivant des pondérations de l'accélération de la façon suivante [KRE 09, GÉR 14] :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \approx (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.23)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \approx \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.24)$$

Les paramètres $0 \leq \gamma \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ déterminent le degré de pondération. En remplaçant les expressions (2.24) et (2.23), respectivement, dans les équations (2.22) et (2.19), on obtient les formules des schémas de Newmark permettant de calculer le déplacement et la vitesse à l'instant t_{n+1} :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.25)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.26)$$

L'accélération à l'instant t_{n+1} est obtenue à partir de l'équation d'équilibre (2.18) comme suit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{ext, n+1} \quad (2.27)$$

Il existe plusieurs méthodes pour implémenter les schémas de Newmark. Nous allons présenter ici une de ces méthodes qui est probablement la plus utilisée actuellement et pour laquelle les termes prédictors suivants sont définis :

$${}^P \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.28)$$

$${}^P \dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.29)$$

Les prédictors ne dépendent que des termes à l'instant t_n et peuvent être calculés à l'instant t_{n+1} avant l'équilibre. En utilisant les définitions (2.28) et (2.29), respectivement, dans les équations (2.25) et (2.26), on obtient les formules de Newmark suivantes :

$$\mathbf{U}_{n+1} = {}^P\mathbf{U}_{n+1} + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.31)$$

Ensuite, la relation permettant de calculer l'accélération à l'instant t_{n+1} s'obtient en remplaçant les relations (2.30) et (2.31) dans l'équation (2.27) :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{C} {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \mathbf{K} {}^P\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.32)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}$ est la matrice de masse modifiée telle que :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K} \quad (2.33)$$

Les équations (2.30), (2.31) et (2.32) sont donc les principales formules des schémas de Newmark où, pour chaque couple de paramètres (α, β) , on obtient un algorithme différent. En revanche, la consistance et la stabilité de l'algorithme considéré sont directement liées au choix de ces deux paramètres. L'implémentation des schémas de Newmark est résumée dans l'algorithme 1.

Algorithm 1 Algorithme de Newmark

Données $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0, \Delta t$

- 1: Initialiser $\ddot{\mathbf{U}}_0$ ▷ (2.27)
- 2: Calculer $\tilde{\mathbf{M}}$ ▷ (2.33)
- 3: $t \leftarrow 0$
- 4: **while** ($t \leq T$) **do**
- 5: $t \leftarrow t + \Delta t$
- 6: Calculer ${}^P\mathbf{U}_{n+1}, {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ ▷ (2.28), (2.29)
- 7: Calculer $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ ▷ (2.32)
- 8: Calculer $\mathbf{U}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ ▷ (2.25), (2.26)

Sorties $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}$

9: **end while**

Il est nécessaire de maîtriser les propriétés des schémas numériques temporels. Pour cela, il faut étudier leur stabilité ainsi que leur consistance qui sont des conditions nécessaires et suffisantes de convergence [LAX 56, HUG 12]. Dans la suite, on introduit $\mathbf{X}_n^T = [\mathbf{U}_n \quad \dot{\mathbf{U}}_n]$ le vecteur d'état du système à l'instant t_n .

Consistance [GÉR 14] : Un schéma d'intégration temporel est consistant si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}(t_n) \quad (2.34)$$

Dans le cas des schémas de Newmark, cette condition est complètement vérifiée. Parce qu'en utilisant les relations (2.25), (2.26) et (2.27) on a [GÉR 14] :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_n + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \dot{\mathbf{U}}_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Comme mentionné plus haut, la consistance est une condition nécessaire pour assurer la convergence du schéma numérique temporel vers la solution exacte quand Δt tend vers 0.

Bilan énergétique et stabilité : un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas d'intégration $\Delta t_0 > 0$ tel que $\forall \Delta t \in [0, \Delta t_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état à un instant ultérieur t_{n+j} .

Il existe plusieurs méthodes pour étudier la stabilité d'un schéma d'intégration temporelle directe. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode basée sur l'analyse spectrale qui étudie la matrice d'amplification du système considéré. Plus de détails concernant cette méthode peuvent être trouvés dans Hughes [HUG 12] et Géraudin et Rixen [GÉR 14]. La méthode que nous allons présenter ici est basée sur l'étude énergétique du système considéré [KRE 06, KRE 09].

L'équation du bilan énergétique associée à un système élastique linéaire s'obtient en multipliant son équation d'équilibre (2.18) par $\dot{\mathbf{U}}^T$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{ext} - \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} \quad (2.36)$$

Les termes quadratiques entre parenthèses représentent l'énergie mécanique, tandis que les deux termes à droite du signe égal sont le taux de travail de la force externe et de la dissipation d'énergie décrite par la matrice d'amortissement \mathbf{C} .

La forme discrétisée de l'équation du bilan énergétique (2.36) est obtenue en exprimant l'incrément de l'énergie mécanique sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} = \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] + \langle \mathbf{U}_n \rangle^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] \quad (2.37)$$

Les notations $[\cdot]$ et $\langle \cdot \rangle$ désignent l'incrément et la valeur moyenne. Ils sont définis comme suit :

$$[\mathbf{X}_n] = (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \quad (2.38)$$

$$\langle \mathbf{X}_n \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{n+1} + \mathbf{X}_n) \quad (2.39)$$

Pour les schémas de Newmark, en exprimant l'incrément et la valeur moyenne du déplacement et de la vitesse à partir des relations (2.25) et (2.26), on obtient les formules suivantes [KRE 06] :

$$[\dot{\mathbf{U}}_n] = \Delta t \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \Delta t [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.40a)$$

$$[\mathbf{U}_n] = \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.40b)$$

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

En multipliant les formules (2.40) par la matrice de masse \mathbf{M} , et en éliminant les termes contenant l'accélération grâce à l'équation (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\gamma - \frac{1}{2})\Delta t \mathbf{K} & \mathbf{M} + (\gamma - \frac{1}{2})\Delta t \mathbf{C} \\ \mathbf{M} + (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 \mathbf{K} & (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_n] \\ [\dot{\mathbf{U}}_n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ 0 & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta t \langle \mathbf{U}_n \rangle \\ \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \Delta t \langle \mathbf{F}_{ext,n} \rangle + (\gamma - \frac{1}{2})\Delta t [\mathbf{F}_{ext,n}] \\ (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 [\mathbf{F}_{ext,n}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

On remarque que l'incrément de l'énergie mécanique (2.37) peut s'obtenir à partir des termes diagonaux de la deuxième matrice de (2.41) multipliée par le vecteur $[[\mathbf{U}_n]^T, -[\dot{\mathbf{U}}_n]^T]$. L'objectif ici étant l'étude de stabilité, une réponse libre du système non amortie est suffisante. Dans la suite on considère donc que $\mathbf{C} = 0$ et $\mathbf{F}_{ext} = 0$. L'équation globale discrétisée du bilan énergétique du système linéaire amortie peut être trouvée dans [KRE 06]. Finalement, l'équation du bilan énergétique sans terme d'amortissement ni forces extérieures s'écrit :

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} = -(\gamma - \frac{1}{2})[\mathbf{U}_n]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] + (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t [\dot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] \quad (2.42)$$

En remplaçant l'incrément de vitesse dans le dernier terme de (2.42) à partir de la première équation de (2.41), l'équation discrétisée du bilan énergétique pour une réponse libre d'un système linéaire sans amortissement structural s'écrit :

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{eq} \mathbf{U} \right]_n^{n+1} = -(\gamma - \frac{1}{2})[\mathbf{U}_n]^T \mathbf{K}_{eq} [\mathbf{U}_n] \quad (2.43)$$

où \mathbf{K}_{eq} est une matrice de rigidité équivalente tel que :

$$\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{K} + (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (2.44)$$

Pour que le schéma considéré soit stable, il faut que le terme de gauche entre crochet soit défini positif et que le terme de droite soit nul ou introduit une dissipation négative. On constate immédiatement que le couple de paramètre $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ satisfait ces conditions et correspond à la définition de la conservation de l'énergie mécanique du système (2.36). Donc, pour des raisons de stabilité, le terme de droite doit être positif ou nul ce qui implique que $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Si $\gamma > \frac{1}{2}$, on introduit de la dissipation numérique. Il faut également que la matrice de rigidité équivalente \mathbf{K}_{eq} soit définie positive ce qui est garanti pour $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$. Finalement, les conditions pour lesquelles un schéma de Newmark est inconditionnellement stable sont :

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta \quad (2.45)$$

Si l'on veut relaxer la condition sur le paramètre β , on doit introduire une valeur maximum du pas de temps, appelée pas de temps critique et notée Δt_c , qui permet d'assurer que la matrice de rigidité équivalente est définie positive. Cette valeur maximum du pas de temps est fonction du comportement de la structure défini par les matrices de masse \mathbf{M} et de rigidité \mathbf{K} . Pour déterminer le pas de temps critique Δt_c , on exprime la solution du problème en fonction des modes propres de la structure $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_m$ comme suit :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \mathbf{U}_j \quad (2.46)$$

Les coordonnées modales $u_j(t)$ décrivent la dépendance au temps de la solution décrite par les modes propres \mathbf{U}_j qui représentent la réponse libre du système considéré et peuvent être mis sous la forme :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_j e^{i\omega_j t} \quad (2.47)$$

où i est le nombre complexe imaginaire tel que $i^2 = -1$ et ω_j est la pulsation propre associée au mode propre j . En remplaçant l'expression (2.47) dans l'équation du mouvement du système libre non amorti, on obtient l'équation des valeurs propres suivante :

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_j = 0 \quad (2.48)$$

Les modes propres sont linéairement indépendants et forment une base orthogonale pour les matrices de masse \mathbf{M} et de rigidité \mathbf{K} , tel que :

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{M} \mathbf{U}_k = \delta_{jk} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{U}_j^T \mathbf{K} \mathbf{U}_k = \omega_j^2 \delta_{jk} \quad (2.50)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. En substituant la solution modale (2.46) dans le bilan énergétique (2.43), on obtient une équation énergétique pour chaque mode j sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} u_j^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) (\omega_j \Delta t)^2 \right) \omega_j^2 u_j^2 \right]_n^{n+1} = \\ - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) (\omega_j^2 \Delta t)^2 \right) \omega_j^2 (\Delta u_j)^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

On remarque dans l'équation (2.51) que le terme de la rigidité modale ω_j^2 a été remplacé par une rigidité modale équivalente $\left(1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) (\omega_j^2 \Delta t)^2 \right)$ qui doit être positive pour tous les modes j , ce qui implique :

$$\left(1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) (\omega_j^2 \Delta t)^2 \right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t^2 \leq \frac{1}{\omega_j^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right)} \quad \forall j \quad (2.52)$$

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

Cette condition de stabilité doit être satisfaite pour tous les modes j . Par conséquent, la plus haute fréquence du système doit vérifier (2.52) pour que le schéma soit stable. Finalement, d'après (2.45) et (2.52), les conditions de stabilité des schémas de Newmark peuvent être résumées comme suit :

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta \quad \text{schéma inconditionnellement stable} \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \quad \text{et} \quad 2\beta \leq \gamma \quad \text{schéma stable si : } \Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{\omega_{max} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \quad (2.54)$$

où ω_{max} est la plus haute fréquence propre du système discrétisé.

D'après les développements précédents, notamment l'équation (2.43), nous avons montré que pour $\gamma < \frac{1}{2}$, les schémas de Newmark introduisent une dissipation négative. Il a été montré dans [HUG 12] que si $\gamma \neq \frac{1}{2}$, l'algorithme a une précision d'ordre 1, et si $\gamma = \frac{1}{2}$ (dissipation numérique nulle), alors l'algorithme a une précision du second ordre. Une étude plus détaillée des propriétés des schémas de Newmark peut être trouvée dans [HUG 12, GÉR 14]. Le tableau 2.1 suivant résume les propriétés de quelques schémas de Newmark connus et souvent utilisés [GÉR 14] :

Schéma	Type	γ	β	Cond. de stabilité ($\omega_{max}\Delta t_c$)	Ordre de précision
Purement explicite	Explicite	0	0	0	1
Différence centrée	Explicite	$\frac{1}{2}$	0	2	2
Fox-Goodwin	Implicite	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\sqrt{6}$	2
Accélération linéaire	Implicite	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$2\sqrt{3}$	2
Accélération moyenne	Implicite	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	2
Accélération moyenne modifiée	Implicite	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$	∞	1

TABLE 2.1 – Propriétés de quelques schémas numériques de la famille de Newmark

Remarques :

- Si on prend en compte un amortissement structural défini par la matrice \mathbf{C} , on peut mener la même étude de stabilité que précédemment, et on trouve l'équation suivante pour déterminer le pas de temps critique [HAR 12, GÉR 14, HUG 12] :

$$\Delta t_c = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2}}{(\frac{\gamma}{2} - \beta)\omega_{max}} \quad (2.55)$$

où ξ est le taux d'amortissement modal associé à la fréquence ω_{max} .

- Dans la pratique, pour des raisons de coûts de calcul, on détermine rarement la plus grande valeur propre de toute la structure. En effet, on utilise le fait que la plus grande valeur propre de la structure est majorée par le maximum des plus grandes valeurs propres de chaque élément [GRA 00]. Et on peut également montrer que le maximum des plus grandes valeurs propre de chaque élément correspond à la plus haute valeurs propre du plus petit élément de la structure, c'est à dire :

- En 1D c'est l'élément de plus petite longueur
- En 2D c'est l'élément de plus petit cercle inscrit
- En 3D c'est l'élément de plus petite sphère inscrite

Donc, dans la pratique, le pas de temps critique est déterminé à partir de la plus haute valeur propre du plus petit élément.

2.1.4.3 Bilan énergétique de la formulation discrétisée

En dynamique linéaire, et en particulier non-linéaire, le bilan énergétique du problème mécanique discrétisé en espace et en temps est un aspect très important d'un point de vue numérique. Nous présentons dans ce paragraphe l'équation discrétisée du bilan énergétique dans le cas des schémas de Newmark. Pour cela, on considère l'équation d'équilibre semi-discrétisée suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{amort} = \mathbf{F}_{ext} \quad (2.56)$$

où \mathbf{F}_{int} et \mathbf{F}_{ext} représentent respectivement les forces internes et externes, \mathbf{F}_{amort} est la contribution de la matrice d'amortissement structural \mathbf{C} tel que :

$$\mathbf{F}_{amort} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.57)$$

L'équation du bilan énergétique associée s'obtient en multipliant l'équation d'équilibre (2.56) par $\dot{\mathbf{U}}^T$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right) = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{ext} - \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{int} - \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{amort} = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} \quad (2.58)$$

Le terme quadratique entre parenthèses représente l'énergie cinétique, tandis que les termes à droite du signe égal sont le taux de travail de la force externe, de la force interne et de l'amortissement. Pour simplifier l'écriture des formules, on a introduit \mathbf{F} , tel que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{amort} \quad (2.59)$$

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

La forme discrétisée de l'équation du bilan énergétique (2.58) est obtenue en exprimant l'incrément de l'énergie cinétique sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} = \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.60)$$

Les notations $[\cdot]$ et $\langle \cdot \rangle$ désignent l'incrément et la valeur moyenne. Ils sont définis, respectivement, dans (2.38) et (2.39). En multipliant l'incrément de la vitesse (2.40a) par \mathbf{M} et en utilisant l'équation d'équilibre (2.56), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] &= \Delta t \mathbf{M} \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \Delta t \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \\ &= \Delta t \langle \mathbf{F}_n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \Delta t [\mathbf{F}_n] \end{aligned} \quad (2.61)$$

En remplaçant l'expression (2.61) dans l'équation (2.60) on obtient :

$$\langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] = \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T [\mathbf{F}_n] \quad (2.62)$$

Ensuite, d'après l'équation (2.40b), on a :

$$\Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle = [\mathbf{U}_n] - \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.63)$$

En remplaçant l'expression (2.63) dans l'équation (2.62), et en utilisant l'équilibre (2.56), on obtient l'équation du bilan énergétique sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] + \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle &= [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) [\mathbf{U}_n]^T [\mathbf{F}_n] \\ &\quad - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \end{aligned} \quad (2.64)$$

L'équation du bilan (2.64) peut être réécrite comme suit :

$$\Delta W_{cin,n+1} + \Delta W_{comp,n+1} + \Delta W_{int,n+1} + \Delta W_{amort,n+1} = \Delta W_{ext,n+1} + \Delta W_{diss,n+1} \quad (2.65)$$

Le terme $\Delta W_{cin,n+1}$ est l'incrément de l'énergie cinétique entre les instants t_n et t_{n+1} :

$$\Delta W_{cin,n+1} = \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M} [\dot{\mathbf{U}}_n] = \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} \quad (2.66)$$

Le terme $\Delta W_{comp,n+1}$ est l'incrément d'une énergie numérique, appelée ici énergie complémentaire, due au schéma d'intégration temporelle de Newmark :

$$\Delta W_{comp,n+1} = \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} \langle \ddot{\mathbf{U}}_n \rangle = \left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} \quad (2.67)$$

On remarque que, comme l'énergie cinétique, $\Delta W_{comp,n+1}$ est un terme conservatif. A noter que cette énergie complémentaire est nulle pour le schéma implicite de l'accélération

moyenne ($\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$), en revanche, il ne faut pas oublier de la prendre en compte pour le schéma explicite de la différence centrée ($\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$). Les termes $\Delta W_{int,n+1}$, $\Delta W_{amort,n+1}$ et $\Delta W_{ext,n+1}$ sont, respectivement, les incréments des travaux des forces internes, d'amortissement et externe :

$$\Delta W_{i,n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_{i,n} \rangle + (\gamma - \frac{1}{2}) [\mathbf{U}_n]^T [\mathbf{F}_{i,n}] \quad (2.68)$$

Le dernier terme $\Delta W_{diss,n+1}$ est une énergie dissipative due aux schémas Newmark :

$$\Delta W_{diss,n+1} = -(\gamma - \frac{1}{2})(\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 [\ddot{\mathbf{U}}_n]^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.69)$$

On remarque que pour $\gamma = \frac{1}{2}$ cette énergie est nulle, et le schéma est donc non dissipatif. C'est le cas du schéma implicite de l'accélération moyenne et du schéma explicite de la différence centrée.

Remarque : Pour un système linéaire non amortie, le bilan énergétique discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) + (\beta - \frac{1}{2}\gamma)\Delta t^2 \left(\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \right) \right]_n^{n+1} &= \Delta W_{ext,n+1} \\ &+ \Delta W_{diss,n+1} - (\gamma - \frac{1}{2}) [\mathbf{U}_n]^T \mathbf{K} [\mathbf{U}_n] \end{aligned} \quad (2.70)$$

D'après (2.70), pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ (schéma implicite de l'accélération moyenne), si $\mathbf{F}_{ext} = 0$ alors $\left[\left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) \right]_n^{n+1} = 0$. On retrouve ainsi le résultat classique de la conservation de l'énergie mécanique (cinétique + potentielle) du système discrétisé en temps par le schéma implicite de l'accélération moyenne.

2.1.4.4 Cas particulier du schéma de la différence centrée

Pour illustrer le schéma de la différence centrée, on considère le problème discrétisé en temps et en espace (2.27). Le schéma de la différence centrée est un schéma explicite de Newmark avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$. Donc, d'après (2.30), (2.31) et (2.32), les principales formules du schéma de la différence centrée peuvent être résumées ainsi :

$$\mathbf{U}_{n+1} = {}^P\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.71a)$$

$${}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.71b)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{C} {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.71c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = {}^P\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.71d)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}$ est la matrice de masse modifiée tel que :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{lump} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{C} \quad (2.72)$$

La matrice \mathbf{M}_{lump} est une matrice de masse diagonalisée dans le cadre des schémas explicites [BEL 00, GÉR 14, WU 06]. On remarque que les déplacements à l'instant t_{n+1} sont explicites. Ils ne dépendent que des termes à l'instant t_n et peuvent donc être calculés au début du pas de temps avant l'équilibre. Contrairement aux déplacements, les vitesses à l'instant t_{n+1} sont implicites car elles dépendent de l'équilibre à l'instant t_{n+1} et ne peuvent donc être déterminées qu'à la fin du pas de temps. Pour un problème linéaire non amorti ($\mathbf{C} = 0$), le caractère implicite des vitesses ne pose pas de problème parce que le terme de la vitesse n'intervient pas dans l'équilibre qui peut donc être résolu à l'instant t_{n+1} sans faire appel à des méthodes de résolution itératives. En revanche, pour un système amorti, la vitesse à l'instant t_{n+1} intervient dans l'équilibre (voir équation (2.27)), et le schéma de la différence centrée tel qu'il est écrit dans (2.71) n'est plus complètement explicite parce qu'il faut utiliser des méthodes de résolution itératives pour résoudre l'équation d'équilibre (2.71c). Afin d'éviter cela et garder donc l'intérêt de l'utilisation d'un schéma explicite, à savoir aucune résolution de système n'est requise, Belytschko [BEL 00] propose d'écrire la contribution de l'amortissement, ainsi que tout terme de l'équilibre dépendant de la vitesse, à l'instant $t_{n+\frac{1}{2}}$. L'équation d'équilibre discrétisée (2.27) est donc modifiée et réécrite sous la forme :

$$\mathbf{M}_{lump}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{ext,n+1} \quad (2.73)$$

où la vitesse à l'instant $t_{n+\frac{1}{2}}$ est défini ainsi [BEL 00, GÉR 14] :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta t} \quad (2.74)$$

Pour les besoins d'implémentation de cette nouvelle représentation du schéma de la différence centrée, il faut écrire les déplacements et les accélérations à l'instant t_{n+1} en fonction des nouvelles vitesses écrites au demi pas de temps. D'après la définition (2.74), on obtient la nouvelle formule pour calculer le déplacement à l'instant t_{n+1} en fonction de la vitesse à l'instant $t_{n+\frac{1}{2}}$:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.75)$$

D'après la formule de Newmark (2.71a) et la définition (2.74), on a :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.76a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \frac{\mathbf{U}_{n+2} - \mathbf{U}_{n+1}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.76b)$$

Ensuite, on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} - \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n) + \frac{1}{2}\Delta t(\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{U}}_n) \quad (2.77)$$

En utilisant la formule de Newmark (2.71d) pour remplacer le terme $(\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n)$ dans l'équation (2.77), on obtient finalement l'expression des accélérations à l'instant t_{n+1} en fonctions de vitesses définies aux instants $t_{n+\frac{1}{2}}$ et $t_{n+\frac{3}{2}}$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} - \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (2.78)$$

D'après les équations (2.75), (2.73) et (2.78), les principales formules du nouveau schéma de la différence centrée sont résumées comme suit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.79a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{M}_{lump}^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{K} \mathbf{U}_{n+1}) \quad (2.79b)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (2.79c)$$

On remarque, que la vitesse à l'instant t_{n+1} n'est pas nécessaire à l'implémentation de ce nouveau schéma de la différence centrée. En revanche, elle reste nécessaire pour le post-traitement, et notamment pour réaliser le bilan énergétique. En plus de la formule classique de Newmark, la vitesse à l'instant t_{n+1} peut être également calculée en fonction des vitesses au demi pas de temps. D'après les équations (2.76a) et (2.76b), on a :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} + \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} = (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n) + \frac{1}{2}\Delta t(\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_n) \quad (2.80)$$

En utilisant la formule de Newmark (2.71d) pour remplacer le terme $\frac{1}{2}\Delta t(\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_n)$ dans l'équation (2.80), on obtient :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} + \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (2.81)$$

Remarque :

- Ce nouvel algorithme nécessite une initialisation de la vitesse $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}$. D'après les équation (2.74) et (2.71a) on a :

$$\dot{\mathbf{U}}_{\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{2}\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (2.82)$$

- Belytschko a montré dans [BEL 00] que le retard en vitesse dû à l'introduction du terme $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}$ dans l'équation d'équilibre écrite à l'instant t_{n+1} diminue le pas de temps critique.

L'implémentation du nouveau schéma de la différence centrée est décrite dans l'algorithme 2.

Algorithm 2 Algorithme de la différence centrée

Données $M_{lump}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, U_0, \dot{U}_0, \Delta t$

- 1: Initialiser $\ddot{U}_{\frac{1}{2}}, \ddot{U}_0$ ▷ (2.82), (2.79b)
- 2: $t \leftarrow 0$
- 3: **while** ($t \leq T$) **do**
- 4: $t \leftarrow t + \Delta t$
- 5: Calculer U_{n+1} ▷ (2.75)
- 6: Calculer \ddot{U}_{n+1} ▷ (2.79b)
- 7: Calculer $\dot{U}_{n+\frac{3}{2}}$ ▷ (2.78)

Sorties $U_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}, \dot{U}_{n+\frac{3}{2}}$

- 8: **end while**
-

2.2 Cas d'un problème mécanique avec contact/impact

2.2.1 Formulation du contact en dynamique

La mécanique du contact est l'étude du mouvement relatif, de la force d'interaction ainsi que du comportement tribologique de deux corps, rigides ou déformables, en contact. En analogie avec la mécanique du solide, la mécanique du contact peut être décomposée en deux parties :

- Des conditions générales qui gouvernent le mouvement et la force d'interaction entre les deux corps en contact indépendamment du comportement des matériaux qui les constituent. Ces conditions se décomposent en trois branches :
 - La cinématique du contact qui étudie le mouvement des deux corps en contact, en utilisant souvent la fonction du gap ou l'expression des vitesses relatives,
 - La dynamique du contact qui étudie les forces ou les impulsions générées par le contact,
 - L'énergie du contact qui relie la cinématique et la dynamique du contact.
- Des lois tribologiques spécifiques qui représentent le comportement des matériaux qui composent les deux corps en contact. Ces lois d'interfaces peuvent concerner le comportement dans la direction normale ou tangentielle au contact. Des exemples de lois de comportements peuvent être trouvées dans [CUR 99].

Dans la suite, nous traiterons le problème d'un contact normal unilatéral sans frottement. Pour illustrer ce cas, nous considérons deux corps déformables B_1 et B_2 dont la configuration est décrite dans la Figure 2.2.

Dans la Figure 2.2, Ω_α ($\alpha = 1, 2$) est la configuration courante du corps déformable B_α et Γ_α est son bord. L'interface Γ_α est décomposée en trois régions distinctes : Γ_{u_α} , Γ_{F_α} et Γ_{C_α} qui représentent, respectivement, les bords où les conditions de Dirichlet, de Neumann et de contact sont imposées. L'interface Γ_{C_α} contient tous les nœuds potentiellement en contact et on note $\Gamma_C = \Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}$ l'interface commune aux deux corps au moment du contact. On adopte ici une description Lagrangienne du mouvement. En faisant l'hypothèse des petites perturbations et en définissant les composantes normales du contact

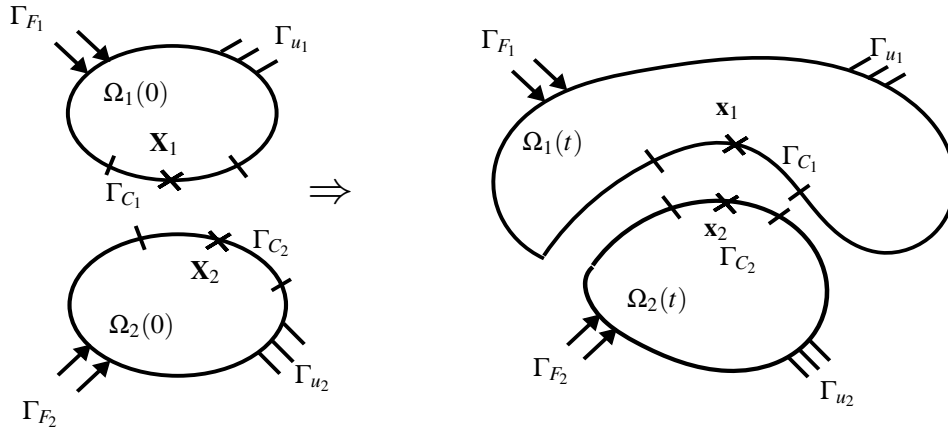


FIGURE 2.2 – Configuration de deux corps déformables en contact

par rapport à la normale sortante du corps B_1 , les conditions du contact normal unilatéral peuvent être résumées comme suit, $\forall \mathbf{X} \in \Gamma_{C_\alpha}$ et $\forall t \in [t_0, t_f]$:

$$g_N = [(\mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2) - (\mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1)] \cdot \mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (2.83a)$$

$$t_N = \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \leq 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.83b)$$

$$g_N \cdot t_N = 0 \quad (2.83c)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ est le tenseur des contraintes de Cauchy dans Ω_α , \mathbf{u}_α le champ de déplacement du point $X_\alpha \in \Gamma_{C_\alpha}$, et \mathbf{n}_α la normale sortante à Γ_{C_α} . L'inégalité (2.83a), appelée condition de non-pénétration, stipule que les deux corps peuvent être soit séparés ($g_N > 0$) soit en contact ($g_N = 0$). Autrement dit, les deux corps ne peuvent pas s'interpénétrer. Le terme g_N est appelé le gap. L'inégalité (2.83b), appelée condition de non-traction [CUR 99, BEL 00], indique que les deux corps sont soit inactifs l'un par rapport à l'autre ($t_N = 0$), soit ils exercent une pression l'un sur l'autre ($t_N < 0$), où t_N représente la pression du contact au point $X_\alpha \in \Gamma_{C_\alpha}$. Donc, aucune traction n'est possible entre les deux corps. L'équation (2.83c), appelée la condition de complémentarité, indique que la composante normale du travail des forces de contact est nulle. Elle exprime également le fait que les deux corps sont soit distants et inactifs ($g_N > 0, t_N = 0$) soit en contact et exercent donc une pression l'un sur l'autre ($g_N = 0, t_N < 0$).

Note historique [CUR 99] : Les deux conditions de non-pénétration et de non-traction ont été initialement introduites et discutées par Bernoulli J. (1710), Euler (1752) et Fourier (1796). Ensuite, la condition de non-pénétration a été premièrement formulée par Cournot (1827) et la condition de non-traction par Ostrogradsky (1834). Ces deux conditions ont été combinées par Hertz (1881) et Signorini (1933), auxquelles ils ont rajouté une alternative gap-contact : soit $g_N > 0$ et $t_N = 0$, soit $g_N = 0$ et $t_N < 0$. La condition de complémentarité, qui impose cette alternative, a été explicitement rajoutée par Moreau (1963). Par conséquent, bien que les trois conditions du contact unilatéral soient habituellement appelées les conditions de Signorini, il paraît plus juste de les

attribuer à Hertz, Signorini et Moreau. Nous allons donc appeler les trois conditions du contact normal unilatéral (2.83a), (2.83b) et (2.83c) les conditions HSM.

En dynamique, les conditions HSM peuvent être réécrites en terme de vitesse. Le lemme de viabilité introduit par Moreau dans [MOR 99] justifie une formulation vitesse-impulsion des conditions HSM sous forme d'un algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_N \geq 0 \\ t_N \leq 0 \\ g_N \cdot t_N = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } g_N > 0 & \text{alors } i_N = 0 \\ \text{si } g_N = 0 & \text{alors } \begin{cases} \dot{g}_N \geq 0 \\ i_N \leq 0 \\ \dot{g}_N \cdot i_N = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.84)$$

où i_N est l'impulsion de contact et \dot{g}_N est la composante normale de la vitesse relative des deux corps en contact :

$$\dot{g}_N = (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = v_N \quad (2.85)$$

En temps continu, le lemme de viabilité de Moreau garantit l'équivalence de la formulation en vitesse (2.84) et la formulation en déplacement (2.83). Dans la suite, nous utiliserons la formulation du contact en terme de vitesse.

2.2.2 Formulation forte

Le problème de contact unilatéral, décrit dans la paragraphe précédent 2.2.1, doit vérifier le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d & = & \rho \dot{\mathbf{v}} & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & = & \mathbf{F}_d & \text{sur } \Gamma_F = \Gamma_{F_1} \cup \Gamma_{F_2} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & = & \mathbf{t}_N & \text{sur } \Gamma_C \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\ \epsilon & = & \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & ; & \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 & \text{dans } \Omega \\ \text{contrainte-déformation} & & \text{(loi de comportement matériau)} & \text{dans } \Omega \\ \text{conditions HSM} & & \text{(loi de contact)} & \text{sur } \Gamma_C \end{array} \right. \quad (2.86)$$

où ρ est la masse volumique et \mathbf{f}_d est le vecteur des forces volumiques données dans Ω . Dans la suite, nous faisons l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique homogène isotrope. La loi d'interface peut être un contact normal unilatéral représenté ci-dessus par les conditions HSM, ou plus généralement des lois d'interface plus complexes basées par exemple sur un bi-potential comme dans [DES 98, FEN 05].

2.2.3 Formulation variationnelle espace-temps

2.2.3.1 État de l'art

En dynamique, la prise en compte des conditions HSM de contact peut engendrer des impacts dans le problème. Pour cela, il est très important de bien distinguer ces deux

comportements. Le premier est le contact qui est un comportement régulier sans aucune discontinuité en temps de la vitesse, de la force ou de l'accélération. Le second est l'impact qui est un comportement non-régulier introduisant des discontinuités en temps, notamment des sauts de vitesse. En dynamique transitoire, la modélisation numérique des problèmes mécaniques non-réguliers (présence d'impacts) est un domaine complexe où la recherche reste active. On trouve des applications dans de nombreux domaines tels que l'animation graphique [HAR 09, BAR 94], la dynamique des machines en particulier la robotique [ERI 03], la dynamique des structures sous un chargement transitoire (tremblement de terre, vent fort ...) [ACA 00] et la dynamique granulaire [MOR 03].

Les impacts introduisent donc des discontinuités temporelles (sauts de vitesse), et cette non-régularité nécessite le développement d'intégrateurs temporels spécifiques. Ces intégrateurs sont habituellement classés en deux catégories [RAO 99] (une autre classification, basée sur la méthode de prise en compte des conditions de contact dans l'équilibre, peut être également trouvée dans [RAO 99]) :

- Les intégrateurs temporels dits "Event-tracking" (event-driven) : ces méthodes permettent une résolution du problème de contact aux instants précis de transition (instant de contact ou d'impact). Puis, le problème sans contact (dynamique régulière) est résolu, entre ces instants de transition, en utilisant des intégrateurs temporels classiques. Les méthodes "Event-tracking" sont précises mais nécessitent l'utilisation de procédures de détection des instants de contact performantes [WU 86, WAN 99]. Ces procédures échouent si le nombre des instants de contact est très important ou infini (*phénomène de ZENO*) et ces schémas deviennent alors inconsistants. Les méthodes "Event-tracking" sont plus adaptées pour les problèmes où les instants de contact sont peu nombreux et séparés dans le temps. L'autre particularité de ces méthodes est qu'elles utilisent souvent une formulation force-accélération, ce qui permet à l'utilisateur d'obtenir une valeur de la force de contact utilisable pour le dimensionnement des structures. En revanche, en cas d'impact, il sera montré plus loin que la force n'est plus la bonne inconnue du problème car elle diverge. Plus d'informations sur les schémas "event-tracking" sont détaillées dans [ABA 00, ACA 08].
- Les intégrateurs temporels dits "Event-capturing" (time-stepping) : contrairement aux schémas "Event-tracking", ces méthodes considèrent une discrétisation temporelle de l'équation de la dynamique avec la contribution du contact ou de l'impact. Une seule équation est résolue à la fin de chaque pas de temps. Cette équation finale de la dynamique est appelée équation de la dynamique non-régulière. Les schémas "Time-capturing" sont adoptés quand un grand nombre de contacts et d'impacts est prévu, car ces méthodes ne requièrent pas une détection précise des instants de contact. Tous les contacts sont traités à la fin du pas de temps. Ces algorithmes sont souvent implicites et font donc appel à des méthodes itératives pour résoudre le problème de contact. Il existe deux principales méthodes "Time-capturing". La première est due à Paoli et Schatzman [PAO 02a, PAO 02b] qui considère une formulation du contact en terme de déplacements. Cette méthode ne sera pas détaillée ici, car nous faisons le choix d'utiliser une formulation du

contact en terme de vitesse. Plus de détails concernant cette méthode peuvent être trouvés dans [ACA 13]. La deuxième méthode "Time-capturing" est due à Moreau [MOR 99, MOR 88, JEA 99]. Elle est basée sur une formulation du contact en vitesse. De plus, elle permet d'introduire une loi d'impact en considérant un coefficient de restitution dans les conditions de contact exprimées en vitesse. Les schémas "Time-capturing" de Moreau utilisent souvent la méthode- θ pour la discrétisation temporelle. Ces schémas bénéficient de quelques résultats de convergence [STE 98, STE 97, ANI 99, JOU 98], en revanche, ils ont un faible ordre de convergence. Ils sont généralement d'ordre 1 sur les périodes régulières (sans impact) et non-régulières (avec impact). Récemment, des schémas ont été développés dans [ACA 12, SCH 14] pour améliorer le comportement des intégrateurs "Time-capturing" de Moreau pendant les phases régulières (sans impact).

Comme évoqué ci-dessus, les algorithmes de résolution du contact peuvent être également classés par rapport à la méthode utilisée pour prendre en compte les conditions HSM de contact. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de la pénalité, la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode du Lagrangien augmenté [SIM 92a, ALA 91, FEN 05]. La méthode de la pénalité est largement développée et utilisée avec la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes de contact [CHA 98, BEL 91]. Elle permet une interpénétration entre les corps en contact via l'introduction d'un paramètre numérique. Cette interpenetration peut être réduite par un bon choix de ce paramètre, mais le temps de calcul risque d'augmenter de façon importante parce que le pas de temps doit être sévèrement réduit pour des raisons de stabilité [BEL 91]. Ainsi, le principal inconvénient de cette méthode réside dans l'introduction de paramètres numériques supplémentaires pour lesquels l'utilisateur doit trouver une valeur appropriée. On trouve très souvent cette méthode dans les codes de calcul commerciaux. Une description plus détaillée de la méthode de pénalité peut être trouvée dans [BEL 00, LAU 02b, KIK 88, WRI 99].

Contrairement à la méthode de la pénalité, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'imposer de manière exacte les conditions de contact. Aucun paramètre numérique supplémentaire n'est introduit. Cependant, les algorithmes basés sur cette méthode nécessitent généralement la résolution d'un système implicite d'équations [CAR 91, TAY 93, ACA 12]. Plus de détails concernant ces techniques et d'autres algorithmes de contact peuvent être trouvés dans [BEL 00, LAU 02b].

Plus récemment, des intégrateurs temporels variationnels ou symplectiques (conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie) [HAR 12, LEW 04] ont été développés pour des problèmes de contact et d'impact [FET 03a, FET 03b]. Les algorithmes obtenus sont souvent implicites et nécessitent également une détection précise des instants de contact. Cirak and West ont proposé de relaxer cette condition et de traiter le contact à la fin du pas de temps [CIR 05]. Cependant, ils ont observé des gains ou des pertes d'énergie à chaque fois qu'un impact se produit, alors que le schéma est censé conserver l'énergie du système. Pour éviter cela, un pas de temps très petit doit être considéré. Au lieu d'adopter un petit pas de temps pour toute la structure, Rychman and Lew ont proposé un algorithme asynchrone permettant d'utiliser un petit

pas de temps dans les éléments concernés par le contact [RYC 12].

Dans la suite nous proposons une formulation variationnelle espace-temps du problème de contact basée sur les travaux de Cirak and West [CIR 05]. Les conditions de contact sont prises en compte dans l'équilibre en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la discrétisation temporelle est réalisée avec le schéma de la différence centrée décrit dans le paragraphe 2.1.4.4. On se placera dans le formalisme des schémas "time-stepping".

2.2.3.2 Formulation variationnelle espace-temps - Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Afin d'écrire la formulation variationnelle du problème de contact décrit ci-dessus dans le paragraphe 2.2.1, nous considérons le lagrangien L du problème, discrétisé en espace par la méthode des éléments finis, tel que :

$$L(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)) = T(\dot{\mathbf{U}}(t)) - V(\mathbf{U}(t)) \quad (2.87)$$

Le lagrangien L est la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V , telle que :

$$T(\dot{\mathbf{U}}(t)) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}(t)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}(t) \quad (2.88)$$

$$V(\mathbf{U}(t)) = \mathbf{V}_{int}(\mathbf{U}(t)) - \mathbf{V}_{ext}(\mathbf{U}(t)) \quad (2.89)$$

où \mathbf{M} la matrice de masse symétrique définie positive, $\mathbf{U}(t)$ est le vecteur de déplacement discrétisé en espace à l'instant t , \mathbf{V}_{int} et \mathbf{V}_{ext} sont, respectivement, les énergies potentielles interne et externe. Pour la clareté du raisonnement, nous considérons qu'un seul contact ou impact, appelé événement dans la suite, se produit sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$. La même approche peut être étendue à un cas multi-événements. Nous considérons la formulation variationnelle en temps basée sur l'intégrale d'action introduite dans Cirak et West [CIR 05] comme suit :

$$A(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), t_c) = \int_{t_0}^{t_c} L(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)) dt + \int_{t_c}^{t_f} L(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t)) dt \quad (2.90)$$

où t_c est l'instant inconnu de l'événement, t_{c-} et t_{c+} sont, respectivement, les instants juste avant et après l'événement. L'ensemble des points de Ω potentiellement en contact est noté C , tel que :

$$C(t) = \{ \mathbf{x} \in \partial\Omega \mid g_N^l(t) \geq 0; \forall l \in \{1, \dots, p\} \} \quad (2.91)$$

où p est le nombre de points potentiellement en contact. Le bord ∂C de C , donné par $g_N^l = 0$ ($l \in \{1, \dots, p\}$), correspond à l'ensemble des points où l'événement s'est produit. On note ici que la normal au bord ∂C est donnée par ∇g_N . Dans la suite, on considère que les maillages des deux corps sont compatibles à l'interface de contact. Donc les nœuds en contact sont coïncidents.

Pour prendre en compte la condition de contact $g_N^l(t_c) = 0$ ($l \in \{1, \dots, p\}$), nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour cela, nous considérons une nouvelle intégrale d'action \tilde{A} , tel que :

$$\tilde{A}(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), t_c) = A + \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \mathbf{g}_N(t_c) \quad (2.92)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange de dimension p sur ∂C , tel que :

$$\forall l \in \{1, \dots, p\}, \forall t \in [t_0, t_f] : \begin{cases} g_N^l(t) \geq 0 \\ \lambda^l(t) \geq 0 \\ \lambda^l(t) g_N^l(t) = 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

Les relations (2.93) sont souvent appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). On peut remarquer le lien fort entre les conditions KKT (2.93) et les conditions HSM (2.84). A l'équilibre, l'intégrale d'action \tilde{A} doit être stationnaire, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A} &= \delta A + \delta \left(\boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \mathbf{g}_N(t_c) \right) \\ &= \delta A + \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \delta \mathbf{g}_N(t_c) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \mathbf{g}_N(t_c) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

avec :

$$\forall l \in \{1, \dots, p\}, \forall t \in [t_0, t_f] : \begin{cases} g_N^l(t) \geq 0 \\ \delta \lambda^l(t) \geq 0 \\ \delta \lambda^l(t) g_N^l(t) = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

D'après [CIR 05], on a :

$$\delta A(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), t_c) = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} + \frac{\partial A}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \delta \dot{\mathbf{U}} + \frac{\partial A}{\partial t_c} \delta t_c \quad (2.96)$$

et :

$$\delta \mathbf{g}_N(t_c) = \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \delta \mathbf{U}(t_c) + \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \dot{\mathbf{U}}(t_c) \delta t_c \quad (2.97)$$

En remplaçant les relations (2.96) et (2.97) dans l'équation (2.94), et après quelques calculs, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A} &= \int_{t_0}^{t_c} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) \right) \delta \mathbf{U} dt + \int_{t_c}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) \right) \delta \mathbf{U} dt \\ &\quad - \left(\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \right) \delta \mathbf{U}(t_c) \\ &\quad - \left(\left[L \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \dot{\mathbf{U}}(t_c) \right) \delta t_c \\ &\quad + \delta \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \mathbf{g}_N(t_c) \\ &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathcal{U}^0, \delta t_c \in \mathcal{T}_c^0, \delta \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_c^0, \delta \mathbf{U}(t_c) \in \mathcal{U}_c^0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

où \mathcal{U}^0 , Λ_c^0 , \mathcal{T}_c^0 et \mathcal{U}_c^0 sont des espaces fonctionnels [TAY 93, BEL 00], tel que :

$$\mathcal{U}^0 = \{\delta\mathbf{U} \in H^1(\Omega \times [t_0, t_f]) \mid \delta\mathbf{U} = 0 \text{ sur } \Gamma_u, \delta\mathbf{U}(t_0) = 0, \delta\mathbf{U}(t_f) = 0 \text{ dans } \Omega\} \quad (2.99)$$

$$\Lambda_c^0 = \{\delta\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial C \times [t_0, t_f]) \mid \delta\lambda^l \geq 0; l \in \{1, \dots, p\}\} \quad (2.100)$$

$$\mathcal{T}_c^0 = [t_0, t_f] \quad (2.101)$$

$$\mathcal{U}_c^0 \equiv \mathcal{U}^0 \quad (2.102)$$

On déduit de (2.98) les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) = 0 & \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = \boldsymbol{\lambda}^T(t_c) \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \\ \left[L \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} \dot{\mathbf{U}}(t_c) = 0 \\ \mathbf{g}_N^l(t_c) = 0 & \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \quad (2.103)$$

En remplaçant le Lagrangien L par son expression (2.87) dans (2.103), on trouve les équations suivantes de la formulation faible espace-temps du problème de contact :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \quad (2.104a)$$

$$\left[\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = \nabla \mathbf{g}_N^T(t_c) \boldsymbol{\lambda}(t_c) = i_N \mathbf{n}_1 \quad (2.104b)$$

$$\left[(\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t))^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t)) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = 0 \quad (2.104c)$$

$$\mathbf{g}_N^l(t_c) = 0; \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \quad (2.104d)$$

où $\mathbf{F}_{int}(t)$ et $\mathbf{F}_{ext}(t)$ sont, respectivement, les forces internes et les forces externes à l'instant t . L'équation (2.104a) est l'équilibre représentant la dynamique régulière sans terme de contact/impact, (2.104b) et (2.104c) sont les équations de contact/impact représentant, respectivement, le saut de vitesse et la conservation de l'énergie cinétique durant le contact/impact. On obtient ici la signification physique des multiplicateurs de Lagrange, λ^l ($l \in \{1, \dots, p\}$) représentent l'impulsion d'impact i_N . On rajoute au système d'équations (2.104) les conditions KKT (2.93) qui sont équivalentes aux conditions HSM (2.84) (voir Moreau [MOR 99]). En utilisant la relation (2.104b), on peut réécrire les conditions HSM (2.84) comme suit : $\forall l \in \{1, \dots, p\}, \forall t \in [t_0, t_f]$

$$\text{si } \mathbf{g}_N^l(t) > 0 \text{ alors } \lambda^l(t) = 0 \quad (2.105a)$$

$$\text{si } \mathbf{g}_N^l(t) = 0 \text{ alors } \begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_N^l(t) \geq 0 \\ \lambda^l(t) \geq 0 \\ \lambda^l(t) \dot{\mathbf{g}}_N^l(t) = 0 \end{cases} \quad (2.105b)$$

D'après les conditions (2.105b), on note que le multiplicateur de Lagrange λ^l doit être positif ou nul. Le bon signe de l'impulsion $i_N \mathbf{n}_1$ est défini dans le terme \mathbf{g}_N^T .

Dans la suite, nous allons utiliser la théorie de la dynamique non régulière [MOR 88] qui permet d'écrire l'équation de dynamique régulière (2.104a) et l'équation d'impact (2.104b) en une seule équation d'équilibre, appelée équation de la dynamique non-régulière.

2.2.4 Équation de la dynamique non-régulière

Pour écrire l'équation de la dynamique non-régulière, on décompose la différentielle de la vitesse en une partie régulière et une partie non régulière. Cette technique a été utilisée dans [SCH 14, ACA 16, BRÛ 14a, CHE 13, CHE 12] :

$$d\dot{\mathbf{U}} = d\dot{\mathbf{U}}_s + d\dot{\mathbf{U}}_{ns} \quad (2.106)$$

où les indices s et ns désignent, respectivement, les termes réguliers et non réguliers. En dynamique régulière, la vitesse $\dot{\mathbf{U}}_s$ est au moins continue, donc $\ddot{\mathbf{U}}$ a une valeur finie. Par conséquent, on peut écrire :

$$d\dot{\mathbf{U}}_s = \ddot{\mathbf{U}} dt \quad (2.107)$$

où $\ddot{\mathbf{U}}$ est l'accélération définie dans le sens usuel. En revanche, pour la partie non-régulière (impact), l'accélération n'est pas définie à cause du saut de vitesse, cependant on a :

$$d\dot{\mathbf{U}}_{ns} = \dot{\mathbf{U}}(t_c^+) - \dot{\mathbf{U}}(t_c^-) \quad (2.108)$$

où le terme $(\dot{\mathbf{U}}(t_c^+) - \dot{\mathbf{U}}(t_c^-))$ est la différence entre les vitesses juste avant et après l'instant d'impact t_c . En remplaçant les expressions (2.107) et (2.108) dans l'équation (2.106), on peut écrire :

$$d\dot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}} dt + (\dot{\mathbf{U}}(t_c^+) - \dot{\mathbf{U}}(t_c^-)) \quad (2.109a)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} dt + \mathbf{M} (\dot{\mathbf{U}}(t_c^+) - \dot{\mathbf{U}}(t_c^-)) \quad (2.109b)$$

D'après l'équation de la dynamique régulière (2.104a), on a :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} dt = \mathbf{F}_{ext} dt - \mathbf{F}_{int} dt \quad (2.110)$$

Ensuite, d'après l'équation d'impact (2.104b), on a :

$$\mathbf{M} (\dot{\mathbf{U}}(t_c^+) - \dot{\mathbf{U}}(t_c^-)) = \nabla \mathbf{g}_N^T(t_c) \lambda(t_c) \quad (2.111)$$

En remplaçant les relations (2.110) et (2.111) dans l'équation (2.109b), on trouve :

$$\mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) dt = \mathbf{F}_{ext}(t) dt + d\mathbf{I}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.112)$$

où l'impulsion $d\mathbf{I}$ est définie comme suit :

$$d\mathbf{I}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \\ \nabla \mathbf{g}_N^T(t_c) \lambda(t_c) & \end{cases} \quad (2.113)$$

L'équation (2.112) correspond à l'équation de la dynamique non régulière introduite par Moreau [MOR 88, MOR 00]. En lui rajoutant les conditions HSM (2.105), on peut résumer les équations de la formulation faible, discrétisée en espace et basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, d'un problème de contact/impact, comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{int}dt = \mathbf{F}_{ext}dt + d\mathbf{I} \\ d\mathbf{I} = \mathbf{L}^T d\lambda \quad (\mathbf{L} = \nabla \mathbf{g}_N) \\ \mathbf{v} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{g}}_N \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g_N^l > 0 \text{ alors } \lambda^l = 0 \\ \text{si } g_N^l = 0 \text{ alors } \begin{cases} v^l \geq 0 \\ \lambda^l \geq 0 \\ v^l \lambda^l = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \quad (2.114)$$

où \mathbf{L} est un opérateur, booléen signé, de restriction de Ω vers Γ_C et \mathbf{L}^T est l'opérateur de prolongation de Γ_C vers Ω . Le vecteur \mathbf{v} contient les vitesses relatives des points en contact. Le système (2.114) correspond aux équations de la formulation faible de la dynamique non régulière d'un problème de contact unilatéral sans frottement entre deux corps déformables. Cette formulation reste valable pour les corps rigides. Mais, contrairement au cas déformable, les conditions HSM ne donnent pas assez d'information pour résoudre le problème, et une loi d'impact doit être rajoutée [JEA 99]. La loi d'impact peut être, par exemple, la loi de Newton : $\mathbf{v}_c(t_c^+) = -e\mathbf{v}_c(t_c^-)$, où e est le coefficient de restitution représentant une dissipation d'énergie durant l'impact. Le coefficient e est compris entre 0 et 1, tel que $e = 0$ correspond à une dissipation de toute l'énergie au moment de l'impact et $e = 1$ correspond à une restitution de toute l'énergie après l'impact. A noter que les conditions HSM (2.105) correspondent à un coefficient de restitution de $e = 0$ (voir [JEA 99]). En considérant une loi d'impact de type Newton, les équations de la dynamique non-régulière (2.114) s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{int}dt = \mathbf{F}_{ext}dt + d\mathbf{I} \\ d\mathbf{I} = \mathbf{L}^T d\lambda \\ \mathbf{v}^- = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}(t_c^-) \\ \mathbf{v}^+ = \mathbf{L}\dot{\mathbf{U}}(t_c^+) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g_N^l > 0 \text{ alors } \lambda^l = 0 \\ \text{si } g_N^l = 0 \text{ alors } \begin{cases} v_l^+ + ev_l^- \geq 0 \\ \lambda^l \geq 0 \\ (v_l^+ + ev_l^-)\lambda^l = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \quad (2.115)$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons proposer une discrétisation temporelle du problème (2.114), basée sur le schéma de la différence centrée présentée dans le paragraphe 2.1.4.4.

2.2.5 Discrétisation en temps - Schéma explicite de Newmark

Les algorithmes de Newmark, et de manière générale les méthodes α -généralisées, ont déjà été utilisées pour résoudre des problèmes de contact [CAR 91, BRÜ 14a, CHE 13, CHE 12]. Le schéma explicite de la différence centrée a été également proposée par Carpenter et al. [CAR 91]. En revanche, le contact a été formulé et résolu en terme de déplacement et non pas en terme de vitesse. Il sera montré plus loin que la bonne inconnue en dynamique du contact est la vitesse. Dans [BRÜ 14a, CHE 13, CHE 12], le problème du contact est formulé en vitesse, et la discrétisation temporelle est réalisée avec les schémas α -généralisés. Cependant, même avec un choix adéquat des paramètres (α, β, γ) , on n'obtient pas un algorithme explicite. Cela est dû au fait que le déplacement au pas de temps courant reste dépendant de la résolution du contact au même pas de temps. Dans la suite, nous proposons un intégrateur explicite, basé sur le schéma de la différence centrée, pour résoudre le problème du contact en dynamique.

2.2.5.1 Un schéma temporel explicite pour les problèmes de contact/impact

Pour procéder à la discrétisation temporelle, on considère ici l'équation de la dynamique non-régulière discrétisée en espace (2.112) dans laquelle on introduit la contribution d'une matrice d'amortissement \mathbf{C} pour un cas plus général, ce qui donne :

$$\mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{F}_{int} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}})dt = \mathbf{F}_{ext}dt + d\mathbf{I} \quad (2.116)$$

Afin de discrétiser en temps la nouvelle équation du mouvement (2.116), nous nous sommes inspirés du schéma de la différence centrée introduit dans [BEL 00, GÉR 14] et rappelé dans le paragraphe 2.1.4.4. Rappelons que pour un problème mécanique conservatif, le schéma de la différence centrée est symplectique. Par conséquent, il conserve l'énergie, la quantité de mouvement ainsi que le moment cinétique [KAN 00]. De plus, il a été démontré par Casadei dans [CAS 02] que la résolution du contact au demi pas de temps donne des résultats meilleurs qu'une résolution à la fin du pas de temps. Pour cette raison, nous choisissons l'intervalle d'intégration $[t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{3}{2}}]$ afin de faire apparaître des vitesses au demi pas de temps. En intégrant l'équation (2.116) sur l'intervalle $[t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{3}{2}}]$ de longueur Δt , on obtient :

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{F}_{int} dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} dt = \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \mathbf{F}_{ext} dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} d\mathbf{I} \quad (2.117)$$

D'après la formulation faible semi-discrétisée (2.117), on obtient l'équation suivante de la dynamique non-régulière discrétisée en temps et en espace :

$$\mathbf{M}_{lump}(\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} - \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{F}_{int,n+1}\Delta t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}\Delta t = \mathbf{F}_{ext,n+1}\Delta t + \mathbf{I}_{n+1} \quad (2.118)$$

où \mathbf{M}_{lump} est la matrice de masse diagonalisée dans le cadre de l'utilisation du schéma explicite de la différence centrée [BEL 00, GÉR 14, WU 06], $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}}$ et $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}$ sont, respectivement, les vitesses aux instants $t_{n+\frac{3}{2}}$ et $t_{n+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{F}_{ext,n+1}$ et $\mathbf{F}_{int,n+1}$ sont, respectivement,

les forces externes et internes à l'instant t_{n+1} , \mathbf{I}_{n+1} est l'impulsion de contact ou d'impact à l'instant t_{n+1} . On note ici que le terme d'amortissement dans l'équation (2.118) est écrit à l'instant $t_{n+\frac{1}{2}}$ pour garder l'aspect explicite du schéma. Cette technique a été utilisée par Belytschko dans [BEL 00] et rappelée dans le paragraphe 2.1.4.4. Pour l'implémentation numérique, l'équation (2.118) est réécrite de façon à ce que les termes connus soient placés à droite du signe égal, ce qui donne :

$$\mathbf{M}_{lump} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{M}_{lump} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{I}_{n+1} \quad (2.119)$$

Maintenant, nous allons introduire la définition de l'accélération régulière, de la vitesse non régulière associée au terme d'impulsion \mathbf{I} et de la quantité \mathbf{W} qui prend en compte les deux contributions précédentes. Ces quantités nous seront très utiles pour réécrire les formules classiques de Newmark ainsi que le bilan énergétique discrétisé dans le cas d'un impact :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{s,n+1} = \mathbf{M}_{lump}^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) \quad (2.120)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{I,n+1} = \mathbf{M}_{lump}^{-1} \mathbf{I}_{n+1} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{s,n+1} + \dot{\mathbf{U}}_{I,n+1} \quad (2.122)$$

En remplaçant les expressions (2.120), (2.121) et (2.122) dans l'équation d'équilibre (2.119), on obtient la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{s,n+1} + \dot{\mathbf{U}}_{I,n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (2.123)$$

Cette relation remplace la relation classique (2.79c) dans le cas d'un impact. Ensuite, la vitesse et le déplacement à l'instant t_{n+1} sont calculés avec les formules classiques de Newmark pour le schéma de la différence centrée (2.71a) et (2.71d), en distinguant la partie régulière sans le terme de contact/impact et la partie non-régulière associée à l'impulsion de contact/impact \mathbf{I} comme suit :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \left(\mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{s,n} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}_{I,n} \right) = \mathbf{U}_{s,n+1} + \mathbf{U}_{ns,n+1} \quad (2.124a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \left(\dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{U}}_{s,n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{s,n}) \right) + \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}_{I,n+1} + \dot{\mathbf{U}}_{I,n}) \right) = \dot{\mathbf{U}}_{s,n+1} + \dot{\mathbf{U}}_{ns,n+1} \quad (2.124b)$$

où $\mathbf{U}_{s,n+1}$ et $\mathbf{U}_{ns,n+1}$ sont, respectivement, les déplacements régulier et non-régulier tels que :

$$\mathbf{U}_{s,n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{s,n} \quad (2.125a)$$

$$\mathbf{U}_{ns,n+1} = \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}_{I,n} \quad (2.125b)$$

et $\dot{\mathbf{U}}_{s,n+1}$ et $\dot{\mathbf{U}}_{ns,n+1}$ sont, respectivement, les vitesses régulière et non-régulière telles que :

$$\dot{\mathbf{U}}_{s,n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{U}}_{s,n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{s,n}) \quad (2.126a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{ns,n+1} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}_{I,n+1} + \dot{\mathbf{U}}_{I,n}) \quad (2.126b)$$

Une manière similaire pour prendre en compte les quantités régulière et non-régulière dans le cadre des schémas de Newmark est proposée par Acary dans [ACA 16]. A noter que l'approche proposée ici est différente du cas $\beta = 0$ traité dans [ACA 16]. Finalement, En utilisant la définition de \mathbf{W} donnée dans (2.122), les équations (2.124) peuvent être réécrites ainsi :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_n \quad (2.127a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{W}_n) \quad (2.127b)$$

Les formules (2.127a) et (2.127b) sont très utiles pour établir l'équation discrétisée du bilan énergétique développée plus loin dans le paragraphe 2.2.5.2.

Remarque : Contrairement à l'impact, pour un contact régulier, on peut calculer la force de contact ainsi que l'accélération, telle que :

$$\mathbf{F}_{c,n+1} = \frac{\mathbf{I}_{n+1}}{\Delta t} \quad (2.128)$$

Et d'après les équations (2.78) et (2.123), on a :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} - \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{W}_{n+1}}{\Delta t} \quad (2.129)$$

Finalement, le nouvel intégrateur temporel explicite, basé sur une formulation variationnelle avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour un problème de contact/impact est résumé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_n \\ \mathbf{g}_{N,n+1} = \mathbf{L}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1} \\ \mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{M}_{lump}^{-1} [\Delta t (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{I}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{L}_{n+1} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} \\ \mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{3}{2}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g_{N,n+1}^l > 0 \text{ alors } \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \\ \text{si } g_{N,n+1}^l \leq 0 \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} v_{n+\frac{3}{2}}^l \geq 0 \\ \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l \geq 0 \\ v_{n+\frac{3}{2}}^l \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.130)$$

où le vecteur d'état du schéma est $(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{W}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}})$. Nous pouvons remarquer ici qu'en raison de la discrétisation temporelle, les conditions HSM (2.105b) ont été légèrement modifiées dans (2.130). En effet, pour construire un algorithme "time-capturing", on autorise une interpénétration ($g_{N,n+1}^l \leq 0$) dans le temps discret. Si on considère une loi d'impact de Newton, la forme discrétisée en espace et en temps du problème (2.115) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_n \\ \mathbf{g}_{N,n+1} = \mathbf{L}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1} \\ \mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{M}_{lump}^{-1} [\Delta t (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{I}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{W}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{L}_{n+1} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} \\ \mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{3}{2}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g_{N,n+1}^l > 0 \text{ alors } \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \\ \text{si } g_{N,n+1}^l \leq 0 \text{ alors} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{loi d'impact de Newton : } \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} = -e \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} \\ v_{n+\frac{3}{2}}^l + e v_{n+\frac{1}{2}}^l \geq 0 \\ \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l \geq 0 \\ (v_{n+\frac{3}{2}}^l + e v_{n+\frac{1}{2}}^l) \lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (2.131)$$

Ensuite, en multipliant l'équation de la dynamique non-régulière (2.119) par $\mathbf{L}_{n+1} \mathbf{M}_{lump}^{-1}$ on obtient l'équation local du contact/impact à résoudre comme suit :

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\lambda}_{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{b} \quad (2.132)$$

où :

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}_{n+1} \mathbf{M}_{lump}^{-1} \mathbf{L}_{n+1}^T \quad (2.133)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{L}_{n+1} (\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{M}_{lump}^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}})) \quad (2.134)$$

Il est important de noter que l'opérateur Steklov-Poincaré (ou Delassus) \mathbf{H} est diagonal. Cela est dû au fait que nous avons fait l'hypothèse d'un maillage compatible et que la matrice \mathbf{M}_{lump}^{-1} est diagonale. Si \mathbf{H} n'est pas diagonal, un solveur de système linéaire est requis. De plus, si $e = 0$, ce qui correspond aux conditions HSM classiques, la vitesse locale relative aux points de contact $\mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} = 0$. Sinon, $\mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} = -e \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}}$.

L'ensemble des équations (2.130) et (2.132) sont les équations fondamentales d'une formulation explicite avec des multiplicateurs de Lagrange pour la dynamique du contact. L'implémentation de cet intégrateur temporel est illustrée dans l'algorithme 3. On suppose que toutes les p paires de nœuds potentiellement en contact sont connues, donc aucune procédure de recherche des points de contact n'est utilisée. Par conséquent,

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

la matrice booléenne \mathbf{L} est déterminée au début du calcul. La matrice a p lignes et n colonnes où n est le nombre de ddl du problème considéré. Dans la suite, nous allons appeler cet algorithme l'intégrateur CD-Lagrange.

Algorithm 3 Intégrateur explicite pour la dynamique du contact sans frottement (CD-Lagrange)

Données $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0, \Delta t, e$

```

1: Initialiser  $\ddot{\mathbf{U}}_0, \dot{\mathbf{U}}_{\frac{1}{2}}$ 
2:  $t \leftarrow 0$ 
3: while ( $t \leq t_f$ ) do
4:    $t \leftarrow t + \Delta t$ 
5:   Calculer  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{g}_{N,n+1}$  ▷ (2.127a), (2.130b)
6:    $\lambda_{n+\frac{3}{2}} \leftarrow 0$ 
7:   for all ( $l \leq p$ ) do ▷ Boucle sur tous les points de contact
8:     if ( $g_N^l \leq 0$ ) then
9:        $v_{n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow -ev_{n+\frac{1}{2}}^l$ 
10:      Calculer  $\lambda_{n+\frac{3}{2}}^l$  ▷ (2.132)
11:      if ( $\lambda_{n+\frac{3}{2}}^l < 0$ ) then
12:         $\lambda_{n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow 0$ 
13:      end if
14:    end if
15:  end for
16:  Calculer  $\mathbf{I}_{n+1}, \mathbf{W}_{n+1}$  ▷ (2.130f), (2.130c)
17:  Calculer  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}}, \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}}$  ▷ (2.130d), (2.130e)
Sorties si impact :  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{I}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  ▷ (2.127b)
Sorties si contact :  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{I}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}, \mathbf{F}_{c,n+1}, \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$  ▷ (2.127b), (2.128), (2.129)
18: end while

```

Prise en compte du frottement : Ce paragraphe a été essentiellement dédié à la formulation en dynamique d'un problème de contact unilatéral sans frottement. Toutefois, l'introduction du frottement tangentiel dans l'intégrateur explicite décrit dans l'algorithme 3, est possible. Pour illustrer cela, on introduit la définition de l'effort tangentiel \mathbf{t}_T relatif au corps Ω_α (voir la Figure 2.2), et de la vitesse relative tangentielle \mathbf{v}_T comme suit :

$$\mathbf{t}_T = \mathbf{t}_\alpha - t_N \mathbf{n}_\alpha \quad (2.135)$$

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v} - v_N \mathbf{n}_1 \quad (2.136)$$

avec :

$$\mathbf{t}_\alpha = (\boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha) \quad (2.137)$$

$$\mathbf{v} = (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) \quad (2.138)$$

où t_N et v_N sont, respectivement, l'effort normal de contact et la vitesse relative normale au point $X_\alpha \in \Gamma_{C_\alpha}$ définis dans les équations (2.83b) et (2.85). Les lois qui gouvernent le comportement dans la direction tangentielle au contact sont communément appelées les lois de frottement. Il existe plusieurs types de modèle de frottement [BEL 00], mais la loi la plus utilisée en mécanique du solide est le frottement de Coulomb. Les premières tentatives de modélisation du frottement sont attribuées à Léonard de Vinci en 1508 dont les résultats montrent que la force de frottement est proportionnelle à l'effort maintenant les deux solides en contact. De plus, il établit que la force de frottement est indépendante de l'aire de la surface de contact. Ces travaux ont été complétés par Amontons en 1699 puis par Coulomb [SOO 14]. La loi de Coulomb définit la relation entre l'effort tangentiel \mathbf{t}_T et l'effort normal t_N en fonction de la vitesse relative tangentielle \mathbf{v}_T . En 2D, il y a une seule direction tangentielle de frottement dont le sens est déterminé par le signe de la vitesse relative tangentielle. En 3D, la direction n'est pas fixée a priori et le frottement tangentiel peut se situer sur un cercle ayant pour normale la direction du contact. Il est alors nécessaire de raisonner sur le vecteur \mathbf{t}_T et le vecteur de la vitesse tangentielle \mathbf{v}_T . La loi de Coulomb s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } \|\mathbf{t}_T\| < -\mu t_N, \text{ alors } \mathbf{v}_T = \mathbf{0} & \rightarrow \text{Adhérence} \\ \text{si } \mathbf{t}_T = \frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} \mu t_N, \text{ alors } \mathbf{v}_T \neq \mathbf{0} & \rightarrow \text{Glissement} \end{cases} \quad (2.139)$$

La constante μ désigne le coefficient de frottement. Les conditions HSM (2.84) imposent que $t_N \leq 0$, d'où le signe "-" à droite de l'inégalité de l'équation (2.139) pour que le terme $-\mu t_N$ soit positif. La loi de Coulomb est illustrée dans la Figure 2.3. La première condition de l'équation (2.139) est appelée la condition d'adhérence : si l'effort tangentiel est inférieure à la valeur critique, aucun mouvement tangentiel relatif n'est permis, les deux corps adhèrent et ils ont la même vitesse. La deuxième condition de l'équation (2.139) est la condition de glissement. On note que lorsqu'il y a glissement, l'effort tangentiel doit être dans la direction opposée au vecteur de la vitesse relative tangentielle. La loi de Coulomb est exprimée en vitesse, ce qui facilite son implémentation dans l'algorithme 3 où le contact unilatéral est résolu en vitesse également. En effet, une fois le problème de contact résolu sur la normale, une étape supplémentaire est nécessaire afin de prendre en compte le frottement. Pour cela, il suffit d'ajouter les termes tangentiels aux vecteurs vitesses \mathbf{v} et impulsion \mathbf{I} définis précédemment dans la cinquième et la sixième équations de (2.130) (l'indice T sera utilisé pour désigner les grandeurs tangentielles et l'indice N pour désigner les grandeurs dans la direction normal au contact) :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_N \\ \mathbf{v}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_N \\ \mathbf{L}_T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \quad (2.140)$$

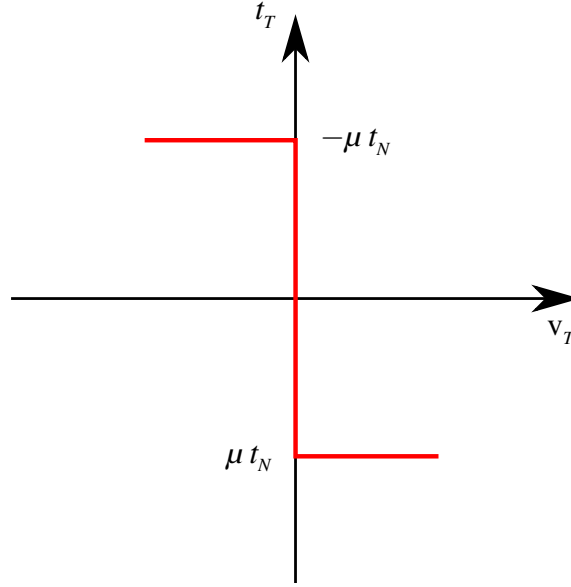


FIGURE 2.3 – Loi de frottement de Coulomb

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_N^T & \mathbf{L}_T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

D'après l'équation (2.132), les équations locales du problème normal et tangentiel s'écrivent de manière similaire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{N,n+\frac{3}{2}} \\ \lambda_{T,n+\frac{3}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_N \\ \mathbf{b}_T \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

D'après l'équation (2.134), le second membre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_N \\ \mathbf{b}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{N,n+\frac{3}{2}} \\ \mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_N \\ \mathbf{a}_T \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_N &= \mathbf{L}_N (\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{M}_{lump}^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}})) \\ \mathbf{a}_T &= \mathbf{L}_T (\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{M}_{lump}^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+1} - \mathbf{F}_{int,n+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}})) \end{aligned} \quad (2.144)$$

De la même manière que pour le contact normal, pour résoudre le problème tangentiel, on suppose que $\mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}} = 0$ pour calculer $\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}$, puis on vérifie à posteriori les conditions de la loi de Coulomb sur le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l$ pour chaque contact l ($1 \leq l \leq p$) comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } \|\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l\| \leq \mu \lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l, \text{ alors } \mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}}^l = 0 \\ \text{si } \|\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l\| > \mu \lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l, \text{ alors } \mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}}^l \neq 0 \text{ et on impose : } \lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l = -\frac{\mathbf{b}_T^l}{\|\mathbf{b}_T^l\|} \mu \lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l \end{cases} \quad (2.145)$$

L'indice l désignent les quantités relatives au contact l ($1 \leq l \leq p$). La première condition de (2.145) correspond à un état d'état d'adhérence dans la direction tangentielle entre les deux solides en contact, et la deuxième condition représente le glissement entre les deux solides. A noter que dans le cas du glissement, l'effort tangentiel doit être appliqué dans la direction opposée à la vitesse relative tangentielle à l'instant $t_{n+\frac{3}{2}}$, ce qui explique le signe "-" dans (2.145). A noter également que, puisqu'on ne connaît pas la vitesse relative tangentielle $\mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}}^l$, on prédit que sa direction est la même que le second membre \mathbf{b}_T^l de l'équation locale du problème tangentiel. Finalement, pour prendre en compte le frottement de Coulomb, il suffit de rajouter quelques étapes dans l'algorithme 3 comme illustré dans l'algorithme 4. Cet algorithme a été testé et validé, par Nicolas ADAM pendant son stage de master, pour un problème de contact frottant pneu/route.

Algorithm 4 Intégrateur explicite pour la dynamique du contact avec frottement

Données $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0, \Delta t, e, \mu$

```

1: Initialiser  $\ddot{\mathbf{U}}_0, \dot{\mathbf{U}}_{\frac{1}{2}}$ 
2:  $t \leftarrow 0$ 
3: while ( $t \leq t_f$ ) do
4:      $t \leftarrow t + \Delta t$ 
5:     Calculer  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{g}_{N,n+1}$  ▷ (2.127a), (2.130b)
6:      $\lambda_{N,n+\frac{3}{2}} \leftarrow 0, \lambda_{T,n+\frac{3}{2}} \leftarrow 0$ 
7:     for all ( $l \leq p$ ) do ▷ Boucle sur tous les points de contact
8:         if ( $g_N^l \leq 0$ ) then
9:              $\mathbf{v}_{N,n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow -e\mathbf{v}_{N,n+\frac{1}{2}}^l, \mathbf{v}_{T,n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow 0$ 
10:            Calculer  $\lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l, \lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l$  ▷ (2.142)
11:            if ( $\lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l < 0$ ) then ▷ Pas de contact
12:                 $\lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow 0, \lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow 0$ 
13:            else
14:                if  $\|\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l\| > \mu \lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l$  then
15:                     $\lambda_{T,n+\frac{3}{2}}^l \leftarrow -\frac{\mathbf{b}_T^l}{\|\mathbf{b}_T^l\|} \mu \lambda_{N,n+\frac{3}{2}}^l$ 
16:                end if
17:            end if
18:        end if
19:    end for
20:    Calculer  $\mathbf{I}_{n+1}, \mathbf{W}_{n+1}$  ▷ (2.141), (2.130c)
21:    Calculer  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}}, \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}}$  ▷ (2.130d), (2.140)
Sorties si impact :  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{I}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  ▷ (2.127b)
Sorties si contact :  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{I}_{n+1}, \dot{\mathbf{U}}_{n+1}, \mathbf{F}_{c,n+1}, \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$  ▷ (2.127b), (2.128), (2.129)
22: end while
    
```

Dans le paragraphe suivant nous allons présenter l'équation discrétisée du bilan

énergétique qui va nous permettre de vérifier le comportement énergétique de l'intégrateur CD-Lagrange.

2.2.5.2 Équation discrétisée du bilan énergétique

Afin de vérifier les propriétés énergétiques de l'intégrateur temporel CD-Lagrange, nous présentons ici l'équation discrétisée du bilan énergétique. Elle est obtenue en multipliant l'équation de la dynamique non-régulière (2.116) par $\dot{\mathbf{U}}^T$.

$$d\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}\right) = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}dt + \dot{\mathbf{U}}^T d\mathbf{I} \quad (2.146)$$

où \mathbf{F} est une force contenant la contribution des forces externe, interne et d'amortissement, telle que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.147)$$

En remplaçant par la relation $d\mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}}dt$ dans l'équation (2.146), on obtient l'équation du bilan énergétique suivante :

$$d\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}\right) = d\mathbf{U}^T \mathbf{F} + \dot{\mathbf{U}}^T d\mathbf{I} \quad (2.148)$$

où le terme entre parenthèses à gauche du signe égal représente l'énergie cinétique. Les deux termes à droite du signe égal sont le taux de travail des forces internes, externes et d'amortissement, et le travail de l'impulsion du contact/impact. Ensuite, la forme discrétisée de l'équation du bilan énergétique est obtenue en exprimant l'incrément de l'énergie cinétique sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}\right]_n^{n+1} = \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \mathbf{M}[\dot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.149)$$

Les notations $[\cdot]$ et $\langle \cdot \rangle$ désignent l'incrément et la valeur moyenne. Ils sont définis, respectivement, dans (2.38) et (2.39). Pour l'intégrateur CD-Lagrange, en utilisant les équations (2.127a) et (2.127b), l'incrément du déplacement et de la vitesse s'expriment comme suit :

$$[\dot{\mathbf{U}}_n] = \langle \mathbf{W}_n \rangle \quad (2.150a)$$

$$[\mathbf{U}_n] = \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{W}_n] \quad (2.150b)$$

Les relations (2.150) sont équivalentes aux relations (2.40) calculées dans le cas des schémas classiques de Newmark. En remplaçant l'incrément de vitesse (2.150a) dans l'équation (2.149) et en utilisant la relation (2.122), on obtient :

$$\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}\right]_n^{n+1} = \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle^T \langle \mathbf{I}_n \rangle \quad (2.151)$$

En utilisant la relation (2.150b) pour remplacer la valeur moyenne de la vitesse $\langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle$ dans l'équation du bilan (2.149), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} &= [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{W}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \frac{[\mathbf{U}_n]^T}{\Delta t} \langle \mathbf{I}_n \rangle + \frac{1}{4} [\mathbf{W}_n]^T \langle \mathbf{I}_n \rangle \\
 &= [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \frac{[\mathbf{U}_n]^T}{\Delta t} \langle \mathbf{I}_n \rangle + \frac{1}{4} [\mathbf{W}_n]^T \left(\Delta t \langle \mathbf{F}_n \rangle + \langle \mathbf{I}_n \rangle \right) \\
 &= [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \frac{[\mathbf{U}_n]^T}{\Delta t} \langle \mathbf{I}_n \rangle + \frac{1}{4} [\mathbf{W}_n]^T M \langle \mathbf{W}_n \rangle
 \end{aligned} \tag{2.152}$$

Finalement, l'équation discrétisée du bilan énergétique peut être écrite ainsi :

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{8} \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \right]_n^{n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_n \rangle + \frac{[\mathbf{U}_n]^T}{\Delta t} \langle \mathbf{I}_n \rangle \tag{2.153}$$

On peut noter que les quantités à gauche du signe égal sont des quantités indépendantes du chemin suivi (quantités conservatives) (voir [HUG 12]). L'équation (2.153) peut être également notée :

$$\Delta W_{cin,n+1} + \Delta W_{comp,n+1} + \Delta W_{int,n+1} + \Delta W_{amort,n+1} = \Delta W_{ext,n+1} + \Delta W_{IC,n+1} \tag{2.154}$$

où :

$$\Delta W_{cin,n+1} = \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \right]_n^{n+1} \tag{2.155}$$

$$\Delta W_{comp,n+1} = \left[-\frac{1}{8} \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \right]_n^{n+1} \tag{2.156}$$

$$\Delta W_{ext,n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_{ext,n} \rangle \tag{2.157}$$

$$\Delta W_{int,n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_{int,n} \rangle \tag{2.158}$$

$$\Delta W_{amort,n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \mathbf{C} \langle \dot{\mathbf{U}}_n \rangle \tag{2.159}$$

$$\Delta W_{IC,n+1} = \frac{[\mathbf{U}_n]^T}{\Delta t} \langle \mathbf{I}_n \rangle \tag{2.160}$$

les termes ΔW_{cin} , ΔW_{int} , ΔW_{amort} , ΔW_{comp} , ΔW_{ext} , ΔW_{IC} sont, respectivement, les incréments sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$, des énergies cinétique, interne, d'amortissement, complémentaire, externe et de contact/impact. L'équation du bilan énergétique proposée ici est une généralisation du bilan énergétique développé dans [KRE 06] et rappelé dans le paragraphe 2.1.4.3, dans le cadre des schémas de Newmark.

2.2.5.3 Schémas de Moreau-Jean pour les problème de contact et d'impact

Afin de comparer les résultats numériques de l'intégrateur CD-Lagrange aux résultats numériques des schémas de Moreau-Jean pour les problèmes de contact et d'impact [ACA 08, ACA 12, ACA 13], nous rappelons dans ce paragraphe les principales équations de ces schémas. Les algorithmes de Moreau-Jean sont basés sur le schéma d'intégration

temporelle de la méthode- θ ($\theta \in [0, 1]$). Sur un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ de longueur Δt , les équations discrétisées en temps et en espace des schémas de Moreau-Jean, se résument ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{free} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{I}_{n+1} \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t (\theta \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{U}}_n) \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \\ \mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g_N^l(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}) > 0 \text{ alors } \lambda_{n+1}^l = 0 \\ \text{si } g_N^l(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}) \leq 0 \text{ alors} \\ \left\{ \begin{array}{l} v_{n+1}^l \geq 0 \\ \lambda_{n+1}^l \geq 0 \\ v_{n+1}^l \lambda_{n+1}^l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (2.161)$$

Pour un problème élastique linéaire ($\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}\mathbf{U}$), on a :

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \Delta t \theta \mathbf{C} + \Delta t^2 \theta^2 \mathbf{K} \quad (2.162)$$

Le terme $\dot{\mathbf{U}}_{free}$ est une vitesse qui ne prend pas en compte la contribution du contact ou de l'impact, tel que :

$$\dot{\mathbf{U}}_{free} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \hat{\mathbf{M}}^{-1} \left(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{K}\mathbf{U}_n - \Delta t \theta \mathbf{K}\dot{\mathbf{U}}_n + (\theta \mathbf{F}_{ext,n+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}_{ext,n}) \right) \quad (2.163)$$

Pour $\theta \neq 0$, le schéma de Moreau-Jean est implicite, et les déplacements à l'instant t_{n+1} ne sont pas connus au début de pas de temps. Ainsi pour calculer le gap permettant de vérifier l'interpénétration entre les deux corps pour activer ou non le traitement du contact, il existe des prédicteurs de la position des noeuds à l'instant t_{n+1} . Plusieurs propositions de prédicteurs sont discutées par Acary dans [ACA 13]. Ici, on considère le prédicteur $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$, tel que :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{X}_0 + (\mathbf{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{U}}_n) \quad (2.164)$$

2.3 Exemples numériques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier deux exemples numériques correspondant à un cas de contact rigide-rigide et un cas de contact déformable-déformable. Les résultats numériques de l'intégrateur CD-Lagrange sont comparés aux résultats de deux schémas de Moreau-Jean. Le premier schéma, appelé ici Moreau-implicite, correspond à $\theta = 1$. Le deuxième schéma, appelé ici Moreau-explicite, correspond à $\theta = 0$. Les résultats numériques sont également comparés aux résultats analytiques. Le bilan énergétique et l'ordre global de convergence sont discutés. L'indicateur utilisé pour calculer l'erreur numérique temporelle est présenté ci-dessous.

Indicateur de l'erreur temporelle : En dynamique non régulière, Acary a montré

dans [ACA 12] que, à cause des discontinuités temporelles (sauts de vitesse), la convergence ne peut être observée en utilisant une norme uniforme. Pour cette raison, Moreau [MOR 78] a introduit une norme qui utilise la distance de Hausdorff pour mesurer l'erreur par rapport à une solution de référence. Il a été démontré dans [ACA 12], que la norme proposée par Moreau est équivalente à la norme- l_1 . Cette dernière donne le même ordre de convergence que la norme définie par Moreau [MOR 78]. En raison de sa simplicité d'implémentation, on considère un indicateur de l'erreur relative basé sur la norme- l_1 , comme suit :

$$e_f = \frac{\Delta t \sum_{i=1}^N |f_i - f(t_i)|}{\Delta t \sum_{i=1}^N |f(t_i)|} = \frac{\sum_{i=1}^N |f_i - f(t_i)|}{\sum_{i=1}^N |f(t_i)|} \quad (2.165)$$

où N est le nombre d'instantes de l'intervalle $[0, T]$, f_i et $f(t_i)$ sont, respectivement, la solution numérique et la solution de référence à l'instant t_i , f désigne les coordonnées généralisées, le déplacement ou la vitesse en un nœud de la structure.

2.3.1 Test de la balle rebondissante - Phénomène de ZENO

Le test de la balle rebondissante est un problème typique dans le domaine de la dynamique des contacts [BRO 02, ACA 08, ACA 12, ACA 13, SCH 14]. L'exemple consiste en une balle de masse m qui tombe sous son poids propre d'une hauteur z_0 . Ici, on considère que la vitesse initiale de la balle v_0 est nulle. La configuration initiale du test est représentée dans la Figure 2.4. Si l'impact de la balle avec le sol est plastique ($0 < e < 1$), la balle touche le sol puis rebondit et ainsi de suite jusqu'à ce que la balle s'arrête. Si l'impact est parfaitement élastique ($e = 1$) la balle ne s'arrête pas, elle rebondit à l'infini. Si l'impact entre la balle et le sol est parfaitement plastique ($e = 0$), la balle ne rebondit pas, elle s'arrête après son contact avec le sol. Le premier cas, correspondant à l'impact élastique ($0 < e < 1$), crée un comportement appelé le phénomène de ZENO : la balle rebondit une infinité de fois avant de s'arrêter en un temps fini.

Dans la Figure 2.4, la masse $m = 5$ t, la hauteur initiale $z_0 = 1$ m et l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m/s². Pour un coefficient de restitution $0 \leq e < 1$, la solution analytique du problème de la balle rebondissante, représentée dans la Figure 2.4, peut-être écrite comme suit :

– L'instant du $n^{\text{ème}}$ impact :

$$t_{\text{impact},n} = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \left(2 \frac{1 - e^n}{1 - e} - 1 \right), n \geq 1 \quad (2.166)$$

– Pour $t_{\text{impact},n} \leq t \leq t_{\text{impact},n+1}$, $n \geq 1$:

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + A_n t + B_n \quad (2.167)$$

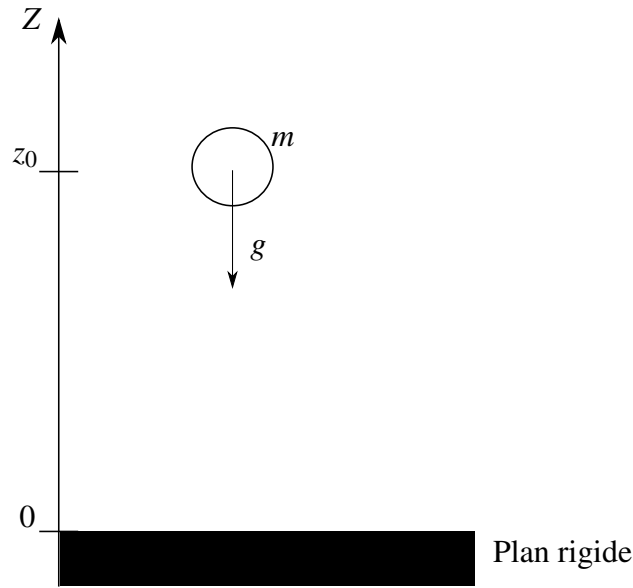


FIGURE 2.4 – Configuration initiale du test de la balle rebondissante

$$v(t) = -gt + A_n \quad (2.168)$$

où :

$$A_n = gt_{impact,n} - V_n \quad (2.169)$$

$$B_n = -\frac{gt_{impact,n}^2}{2} + V_n t_{impact,n} \quad (2.170)$$

$$V_n = -e^n \sqrt{2gz_0} \quad (2.171)$$

– L'instant de l'arrêt de la balle :

$$T = \frac{1+e}{1-e} t_{impact,1} \quad (2.172)$$

Dans la Figure 2.5, la position et la vitesse analytiques de la balle sont comparées à la solution numérique obtenue avec l'intégrateur temporel CD-Lagrange. La solution correspond à un coefficient de restitution égal à 0.8. La première remarque est que l'intégrateur explicite CD-Lagrange reproduit le phénomène de ZENO. La balle s'arrête bien et la solution numérique converge. On conclut donc, que le schéma CD-Lagrange appartient bien à la famille des schémas dits "time-stepping". On remarque également que les résultats numériques sont très précis par rapport à la solution exacte.

Dans la Figure 2.6, nous avons tracé, pour différents pas de temps, la force et l'impulsion du premier impact de la balle avec le sol. On constate que l'impulsion converge (la valeur de l'impulsion est indépendante du pas de temps choisi). En revanche, la force d'impact augmente avec un pas de temps décroissant, et donc elle diverge. De là, on conclut que la vraie inconnue du problème d'impact, présentant une convergence temporelle, est l'impulsion.

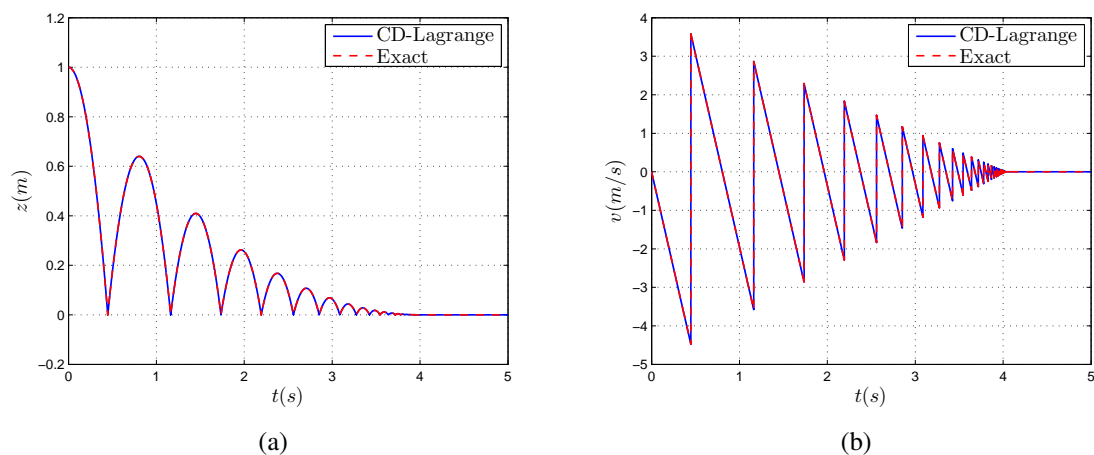


FIGURE 2.5 – Test de la balle rebondissante : (a) position analytique et numérique, (b) vitesse analytique et numérique de la balle

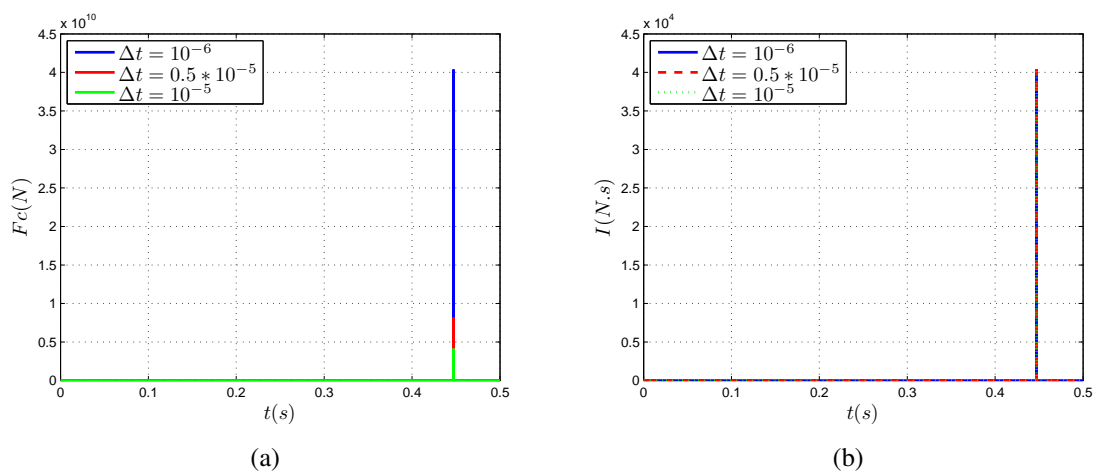


FIGURE 2.6 – Test de la balle rebondissante : (a) force, (b) impulsion du premier contact entre les deux barres pour différents pas de temps

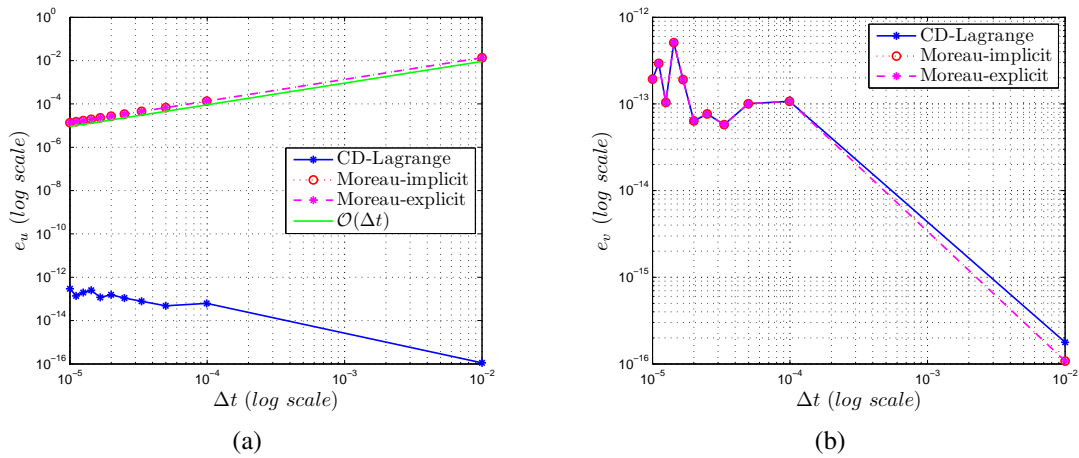


FIGURE 2.7 – Test de la balle rebondissante : ordre de convergence en (a) coordonnées généralisées, (b) vitesse pendant la phase de vol libre de la balle (avant contact)

La Figure 2.7 présente l'ordre global de convergence temporelle en coordonnées généralisées et en vitesse, pendant le vol libre de la balle avant son contact avec le sol. L'ordre de convergence temporelle est calculé pour l'intégrateur CD-Lagrange ainsi que pour le schéma Moreau-implicite. On constate que, durant la phase régulière (vol libre sans impact), les schémas de Moreau-Jean sont d'ordre 1 alors que le schéma CD-Lagrange est d'ordre 2. En revanche, à l'arrêt de la balle et donc après plusieurs impacts, l'ordre 1 est observé pour tous les schémas comme le montre la Figure 2.8.

2.3.2 Exemple de deux barres déformables en contact

Ce problème unidimensionnel de contact est largement examiné dans la littérature [HUG 76, HUG 12, ACA 13, CAR 91, BEL 91, CIR 05, TAY 93, LAU 02b, CAS 02, BRÜ 14a, CHE 13, CHE 12]. Le test consiste en deux barres déformables et identiques, se déplaçant à une vitesse constante v_0 dans les directions opposées. La configuration initiale de ce cas test est représentée dans la Figure 2.9, avec le module d'élasticité $E = 2.110^{11}$ Pa, la densité volumique $\rho = 7847$ kg/m³, la longueur des barres $L = 0.254$ m, la section des barres $A = 0.64510^{-3}$ m², le gap initial entre les deux barres $d = 0.210^{-3}$ m et la vitesse initiale $v_0 = 5$ ms⁻¹. Le déplacement, la vitesse et la force de contact analytiques de la barre gauche peuvent être résumés ainsi [CAR 91] :

– L'instant de contact :

$$t_{impact} = d/v_0 \quad (2.173)$$

– L'instant de séparation des 2 barres :

$$t_{separation} = d/v_0 + 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.174)$$

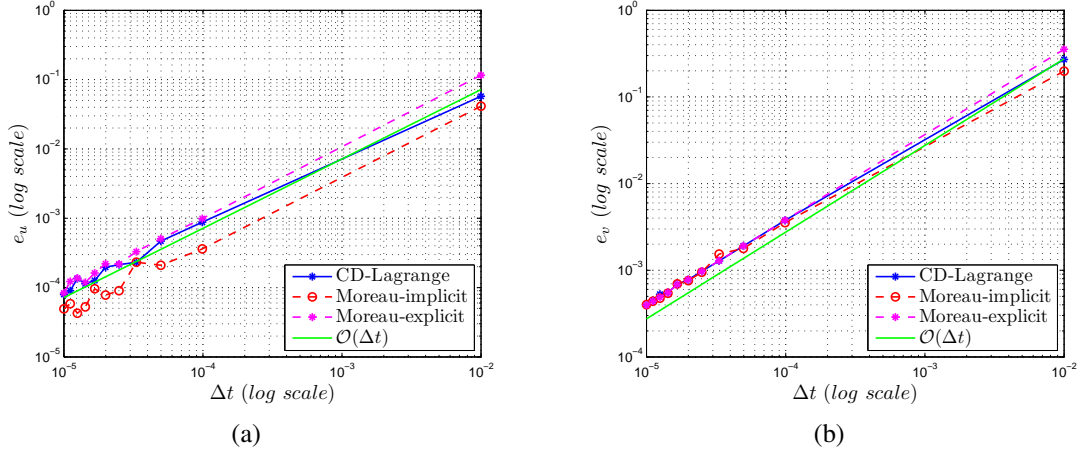


FIGURE 2.8 – Test de la balle rebondissante : ordre de convergence en (a) coordonnées généralisées, (b) vitesse à l'arrêt de la balle (après tous les impacts)

– Pour $t < t_{\text{impact}}$:

$$u(t) = v_0 t \quad (2.175)$$

$$v(t) = v_0 \quad (2.176)$$

$$F_c = 0 \quad (2.177)$$

– Pour $t_{\text{impact}} \leq t < t_{\text{separation}}$:

$$u(t) = d \quad (2.178)$$

$$v(t) = 0 \quad (2.179)$$

$$F_c = -A v_0 \sqrt{E \rho} \quad (2.180)$$

– Pour $t \geq t_{\text{separation}}$:

$$u(t) = 2v_0 \left(\frac{d}{v_0} + L \sqrt{\frac{\rho}{E}} - \frac{t}{2} \right) \quad (2.181)$$

$$v_{\text{contact}} = -v_0 \quad (2.182)$$

$$F_c = 0 \quad (2.183)$$

Pour réaliser le calcul éléments finis, les barres sont discrétisées en 40 éléments linéaires élastiques de longueur égale. Le pas de temps utilisé pour obtenir la solution numérique est $\Delta t = 0.8 \Delta t_{\text{critique}} \approx 9.810^{-7} s$, où $\Delta t_{\text{critique}} \approx 1.2210^{-6} s$ est le pas de temps critique obtenu avec la condition CFL [COU 28] exigée pour garantir la stabilité d'un intégrateur temporel explicite. Comme évoqué dans les paragraphes précédents, dans le cas déformable, la loi d'impact n'est pas nécessaire et le problème de contact unilatéral peut être résolu en utilisant des conditions HSM en vitesse (2.84) et qui, en réalité, correspondant à un coefficient de restitution $e = 0$ (voir [JEA 99] pour plus de détails). Toutefois, nous avons voulu étudier l'influence du coefficient de restitution sur les résultats

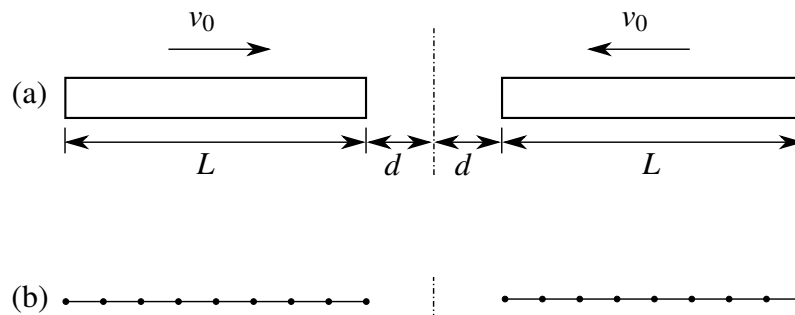


FIGURE 2.9 – Test des deux barres déformables en contact : (a) configuration initiale et géométrie, (b) discrétisation spatiale

numériques dans le cas déformable. Pour cela, on a réalisé deux simulations avec un coefficient $e = 0$ et un coefficient $e = 1$. Les résultats sont tracés en Figure 2.10.

On remarque que les deux simulations donnent, globalement, la même solution cinématique. En revanche, on observe des oscillations parasites quand $e = 1$. Ces oscillations sont dues aux sauts de vitesse. En effet, l'utilisation d'un coefficient de restitution $e = 1$ crée une succession de micros impacts alors que les deux barres sont supposées rester en contact continu. D'autre part, le bilan énergétique pour $e = 0$ montre qu'une petite quantité d'énergie est dissipée lorsque l'impact (premier contact entre les deux barres) se produit. Dans cet exemple, la quantité d'énergie dissipée représente 1.25% de l'énergie cinétique du problème. Il sera montré plus loin que cette énergie dissipée disparaît avec un raffinement du maillage dans la zone du contact. Après ce bref benchmark, on conclut que, à convergence (raffinement de la discrétisation espace-temps), les résultats sont indépendants de la valeur du coefficient de restitution. Dans la pratique, nous allons utiliser un coefficient de restitution $e = 0$ car cela permet d'amortir les oscillations artificielles dues à l'utilisation du schéma de la différence centrée avec un coefficient de restitution $e = 1$. L'utilisation d'un coefficient de restitution $e = 0$ a été également recommandée dans [COM 06].

La Figure 2.11 montre les résultats numériques et analytiques en déplacement, vitesse et force de contact du point de contact à l'extrémité de la barre gauche. On remarque que les résultats obtenus avec l'algorithme CD-Lagrange sont très précis par rapport à la solution exacte. Pendant la phase de contact, une très faible pénétration est observée pour les deux schémas CD-Lagrange et Moreau-implicite, mais cette pénétration diminue avec un pas de temps plus petit (voir la Figure 2.13). Pendant le contact, aucune oscillation n'apparaît contrairement à ce qui a été observé par exemple dans [CAR 91, ACA 13, DEU 08, DAB 14]. Après la séparation des deux barres, des oscillations locales en vitesse sont observées dans le cas du schéma CD-Lagrange. Cela est principalement dû à l'utilisation du schéma explicite de la différence centrée. Cependant, lorsqu'on procède à un raffinement de la discrétisation en espace et en temps, la solution numérique converge comme le montre la Figure 2.12. Les résultats numériques du schéma Moreau-explicite n'ont pas pu être tracés dans la Figure 2.11 pour être com-

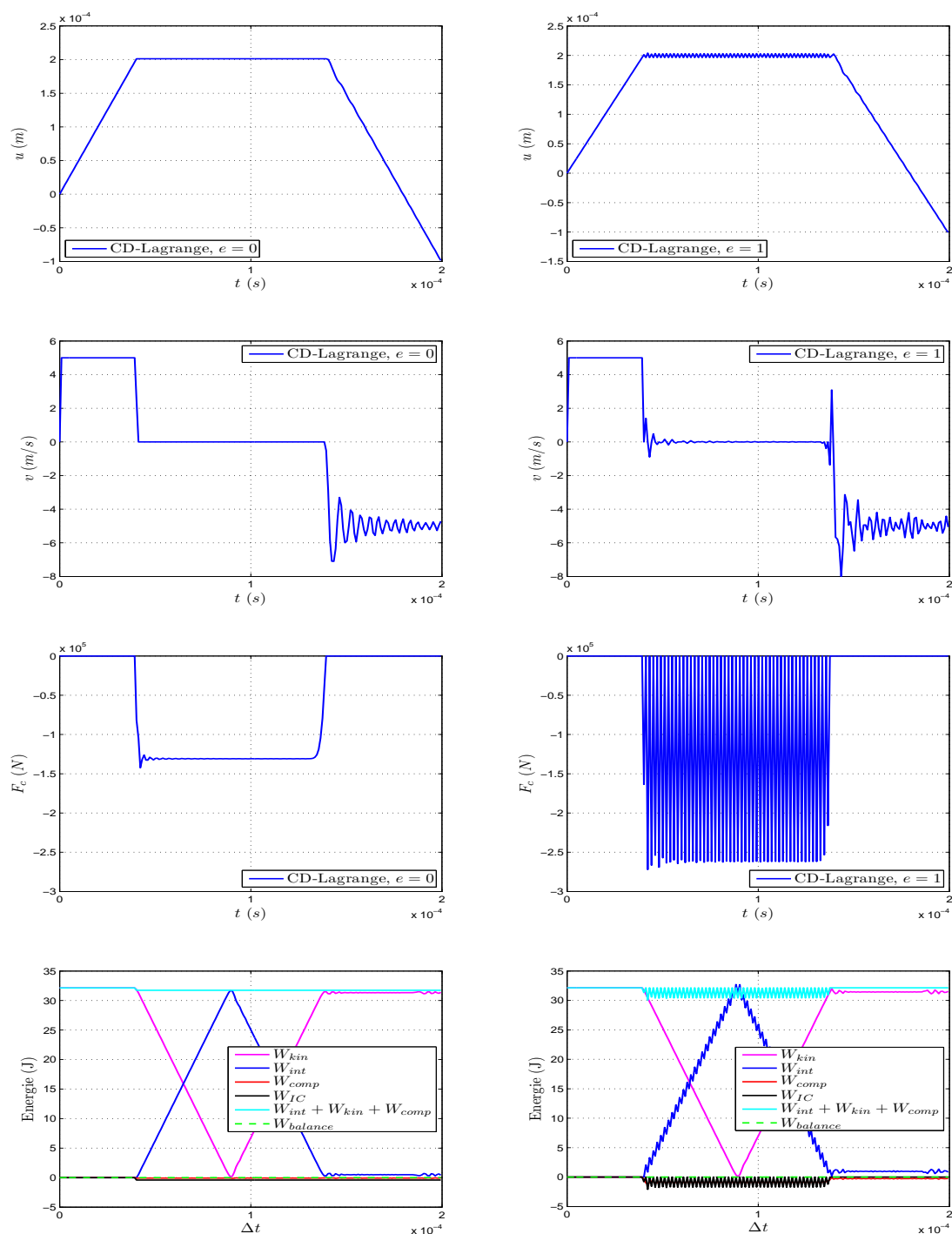


FIGURE 2.10 – Test des deux barres déformables en contact : déplacement, vitesse, force de contact et bilan énergétique de la barre gauche pour $e = 0$ (figures à gauche) et $e = 1$ (figures à droite)

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

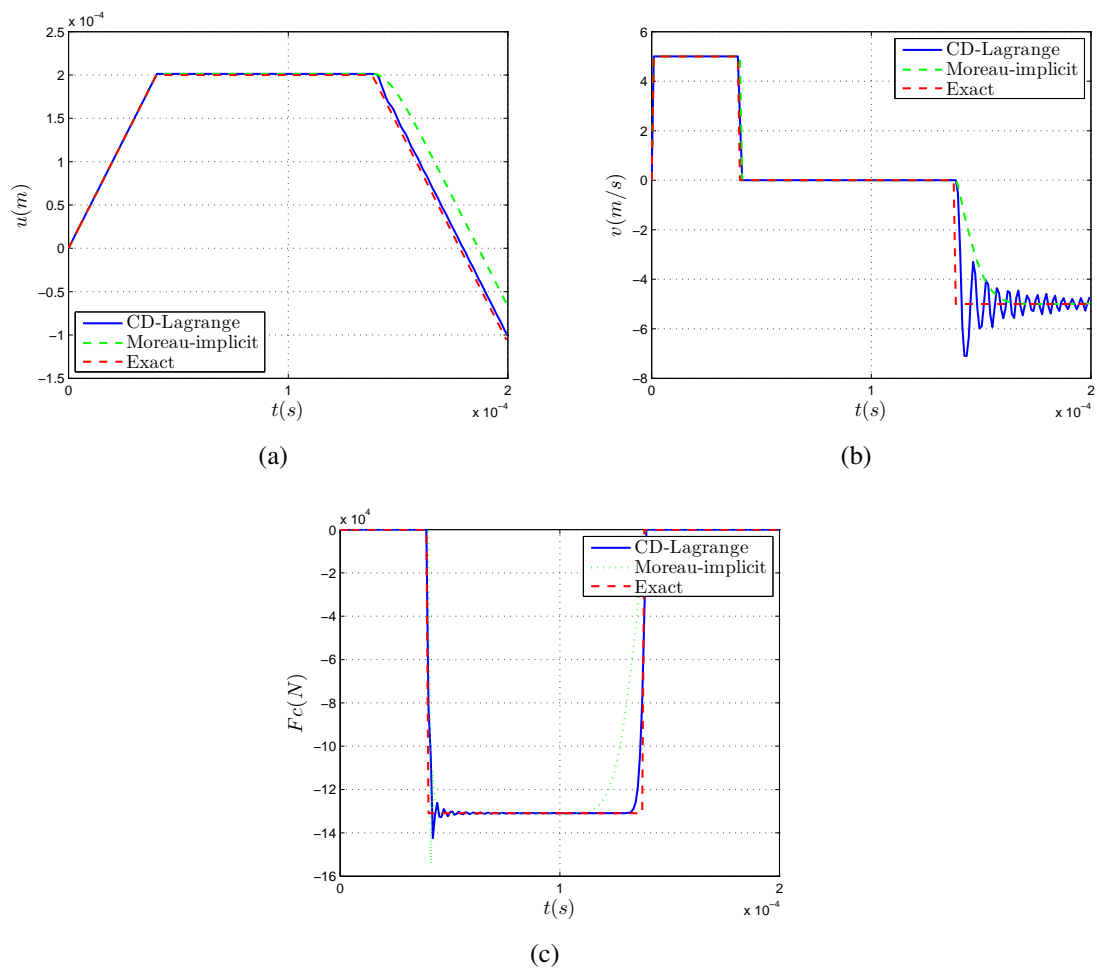


FIGURE 2.11 – Test des deux barres déformables en contact : (a) déplacement, (b) vitesse, (c) force de contact pour $\Delta t \approx 9.810^{-7}$ s

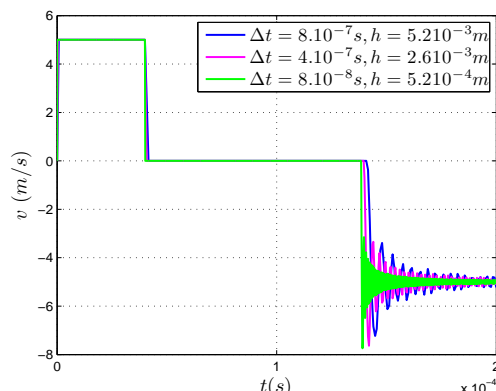


FIGURE 2.12 – Test des deux barres déformables en contact : vitesse pour différentes tailles d'élément h et différents pas de temps Δt

parés aux résultats des schémas CD-Lagrange et Moreau-implicite, parce que l'algorithme n'est pas stable si $\Delta t = 0.8\Delta t_{critique}$. En effet, il a fallu utiliser un pas de temps de $\Delta t = 0.01\Delta t_{critique} \approx 1.2210^{-8}$ s pour que le schéma Moreau-explicite soit stable. Les résultats sont tracés dans la Figure 2.13.

Comme prévu, la pénétration observée dans la Figure 2.11 a disparu dans la Figure 2.13(a) grâce à l'utilisation d'un pas de temps très petit. En revanche, les oscillations parasites en vitesse sont encore observées pour les trois schémas numériques. Cela est probablement dû à l'absence d'amortissement numérique. Dans la Figure 2.13(c), on remarque que la valeur de la force du premier contact entre les deux barres dépend du pas de temps. Pour comprendre cela, nous avons tracé dans la Figure 2.14(a) la force de contact pour différentes valeurs de pas de temps. On constate que la premier pic qui correspond au premier contact entre les deux barres, augmente lorsque le pas de temps diminue. Donc, deux comportements sont à distinguer dans ce cas test. Le premier comportement est un impact (dynamique non régulière) qui correspond au premier contact physique entre les deux barres. Le deuxième comportement est un contact continu (dynamique régulière) qui suit l'impact. Pendant la phase du contact continu, la force du contact est bien indépendante du pas de temps. Le même constat est également fait pour les accélérations tracées dans la Figure 2.14(b). En effet, l'accélération converge sauf la valeur correspondant à l'impact. Contrairement à la force de contact et à l'accélération, nous observons dans la Figure 2.15 que l'impulsion est indépendante du pas de temps.

Nous avons étudié la convergence espace-temps de l'intégrateur CD-Lagrange et du schéma Moreau-implicite. Pour calculer l'erreur, la taille h des éléments finis du maillage uniforme est recalculée pour chaque pas de temps Δt de sorte que $h = c * \Delta t$, où c est la célérité de l'onde élastique. La Figure 2.16 présente l'ordre global de convergence en temps après séparation des barres. Le schéma Moreau-explicite n'a pas pu être comparé aux schémas CD-Lagrange et Moreau-implicite à cause de son problème de stabilité expliqué plus haut. D'après la Figure 2.16(a) et 2.16(b), on constate que le schéma de

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

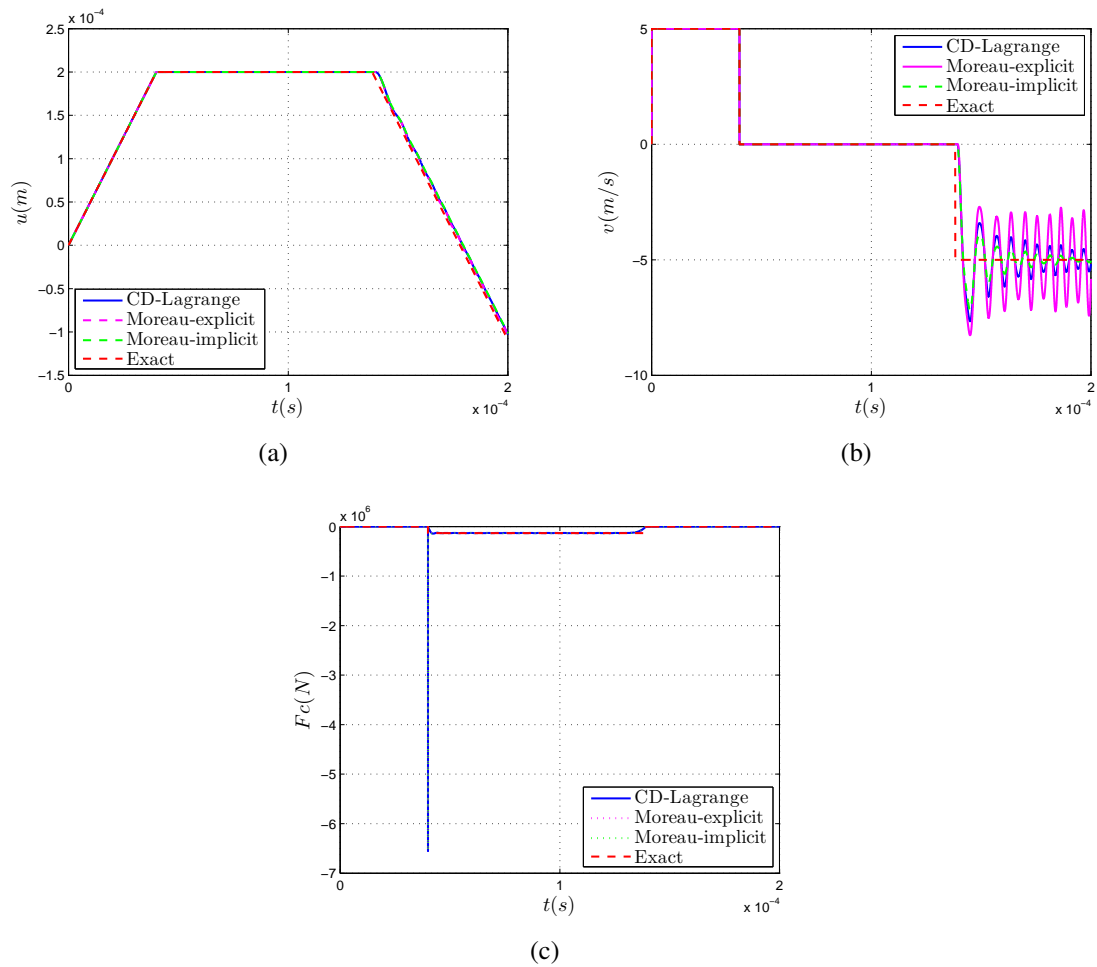


FIGURE 2.13 – Test des deux barres déformables en contact : (a) déplacement, (b) vitesse, (c) force de contact pour $\Delta t \approx 1.22 \cdot 10^{-8}$ s

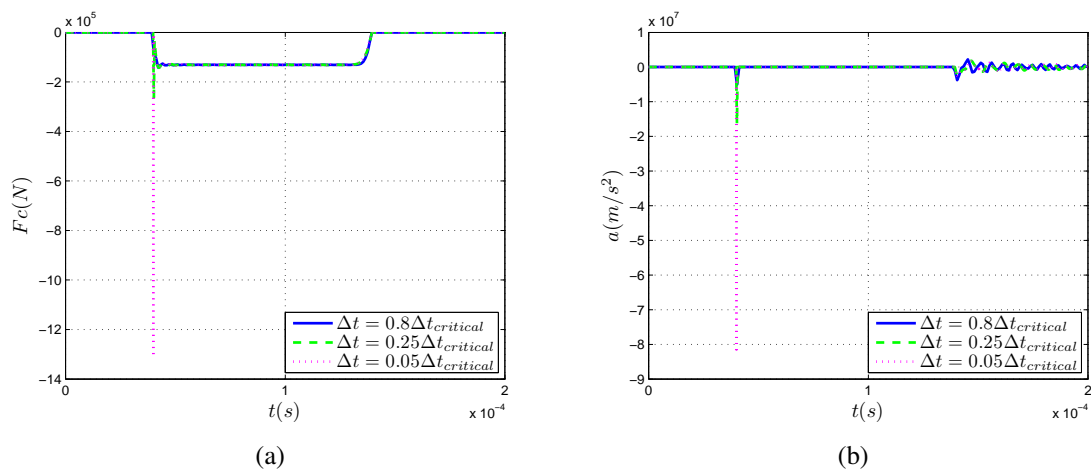


FIGURE 2.14 – Test des deux barres déformables en contact : (a) force de contact, (b) accélération pour différents pas de temps

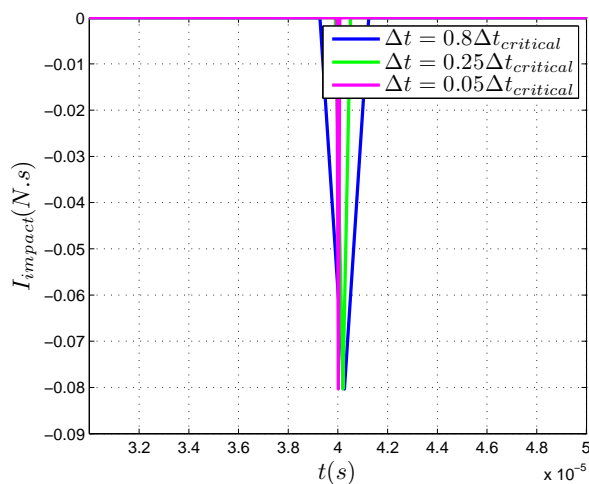


FIGURE 2.15 – Test des deux barres déformables en contact : l'impulsion d'impact pour différents pas de temps

2. Modélisation du contact et de l'impact en dynamique

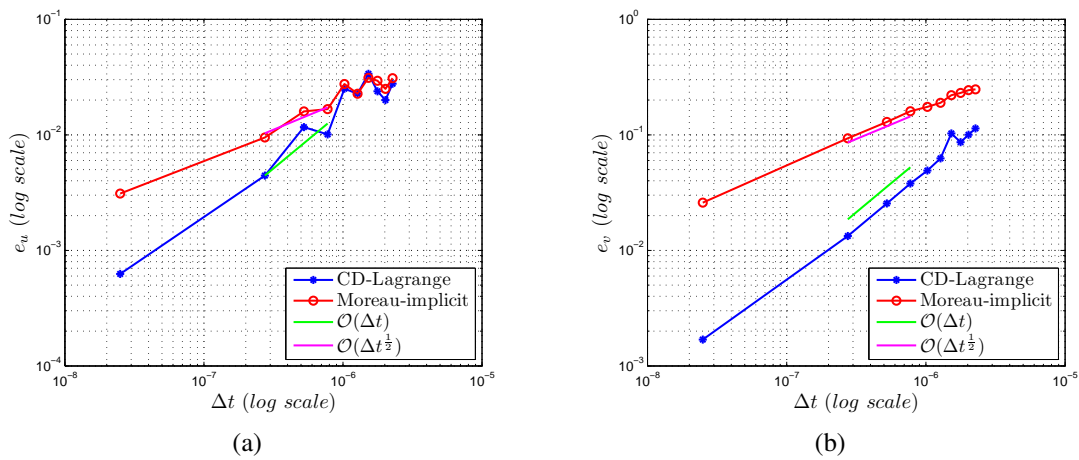


FIGURE 2.16 – Test des deux barres déformables en contact : ordre de convergence en temps après séparation des deux barres en (a) déplacement, (b) vitesse

Moreau-implicite est d'ordre $\frac{1}{2}$, alors que l'intégrateur temporel CD-Lagrange est d'ordre 1 en déplacement et en vitesse.

Le bilan énergétique tracé dans la Figure 2.17(a) montre que, durant la phase de contact, une partie de l'énergie cinétique est convertie en énergie interne. En revanche, on constate une perte de l'énergie cinétique au moment de l'impact. Cette perte d'énergie représente ici 1.25% de l'énergie cinétique. Elle est due au saut de vitesse à l'impact et également à l'utilisation d'un coefficient de restitution $e = 0$. La même perte d'énergie est observée pour les schémas de Moreau-Jean [BRÜ 14a, CHE 13, CHE 12]. Une technique permettant de conserver l'énergie en cas d'impact, est la méthode de redistribution de la masse [KHE 08, DAB 14]. Elle consiste à redistribuer la masse du système de manière équivalente telle qu'il n'y ait pas d'inertie aux noeuds du contact. En revanche, cette technique ne peut pas être utilisée avec un schéma temporel explicite, parce qu'avoir une masse nulle aux noeuds du contact rend la matrice de masse diagonalisée \mathbf{M}_{lump} non inversible. D'autres techniques, basées sur la méthode de pénalité, permettant de construire des schémas qui conservent l'énergie, sont proposées dans [LAU 97, LAU 02a]. Après l'impact, on n'observe plus de dissipation. Cela est dû au fait que dans le cas d'un contact unilatéral sans frottement, le travail des forces de contact est nul [ACA 16]. Cette énergie dissipée à l'impact disparaît avec un raffinement du maillage autour de la zone de contact (voir la Figure 2.18) comme le montre le bilan énergétique présenté dans la Figure 2.17(b).

Les résultats précédents montrent la convergence spatio-temporelle de l'intégrateur temporel explicite CD-Lagrange. Il a généralement un ordre de convergence plus élevé que celui de Moreau-Jean et un excellent comportement énergétique. Dans le prochain chapitre, nous proposons un intégrateur temporel Hétérogène Asynchrone pour les problèmes de contact et d'impact. Le schéma explicite CD-Lagrange proposé dans

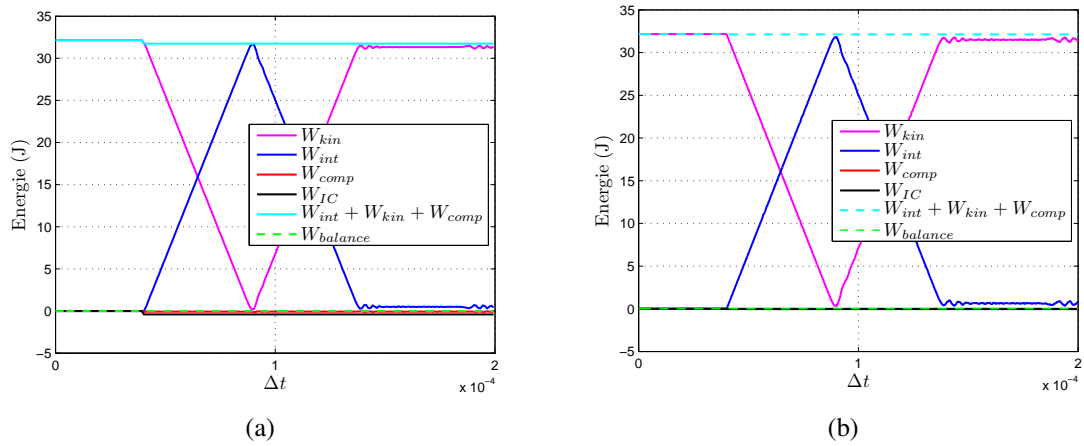


FIGURE 2.17 – Test des deux barres déformables en contact : bilan énergétique pour un (a) maillage uniforme, (b) maillage non uniforme fin dans la zone du contact

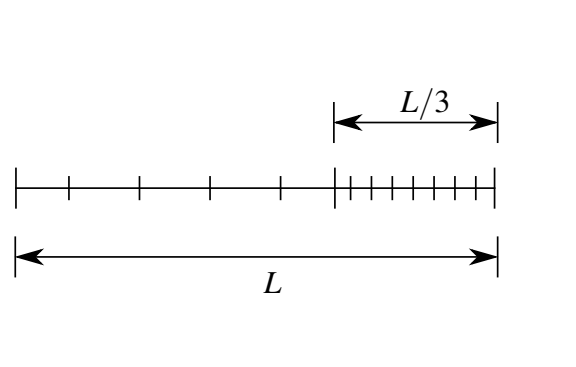


FIGURE 2.18 – Test des deux barres déformables en contact : discrétisation spatiale fine dans la zone du contact

ce chapitre, sera utilisé dans les sous domaines contenant du contact. Un schéma implicite de Newmark sera adopté dans le reste de la structure. Le couplage entre les deux schémas sera assuré par la méthode de couplage développé par Gravouil et Combescure [GRA 01, COM 02, GRA 03, COM 03, COM 01] et rappelée dans le chapitre suivant.

2.4 Conclusion

L'objectif de cette phase est d'étudier la réponse dynamique d'un corps déformable soumis à un impact. Ces premiers travaux ont permis le développement d'un intégrateur temporel explicite pour la dynamique du contact. L'intégrateur est basé sur une formulation variationnelle espace-temps avec des multiplicateurs de Lagrange. Dans l'algorithme final, aucune itération n'est nécessaire pour résoudre le problème de contact dont les conditions sont imposées de manière exacte grâce à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Aucun paramètre numérique n'est à choisir par l'utilisateur. L'intégrateur s'inscrit également dans le formalisme de Moreau qui considère une seule equation de la dynamique non-régulière écrite en terme de vitesse-impulsion. L'algorithme est testé et validé sur deux cas tests académiques. Les résultats numériques reproduisent bien le comportement cinématique dans le cas d'un impact rigide-rigide et déformable-déformable. À travers l'exemple numérique de la balle rebondissante, nous avons montré que le schéma passe le test de ZENO (le schéma converge en présence d'une infinité d'impacts). Il fait donc partie des schémas dit "time-stepping". Les résultats de l'intégrateur ont été également comparés aux résultats de deux schémas implicite et explicite de Jean-Moreau. Nous avons démontré que l'intégrateur explicite proposé dans ce chapitre a globalement un ordre de convergence supérieur à ces derniers. La formulation du contact en terme de vitesse a permis d'introduire facilement une loi d'impact de type Newton. Ceci a permis de démontrer que, dans le cas d'un contact déformable-déformable, à convergence (maillage et pas de temps petits), le coefficient de restitution e n'a pas d'influence sur le comportement cinématique de la structure. Ensuite, l'exemple numérique des deux barres déformables en contact a bien illustré la différence entre un contact régulier et un impact. Il a été démontré que pour un impact, la force et l'accélération divergent. En revanche, la vitesse et l'impulsion d'impact convergent.

Chapitre 3

Intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact

À cause des chocs multiples auxquels est exposé le pont roulant pendant le séisme, plusieurs échelles de temps coexistent au sein de ce problème. Afin de traiter efficacement les différentes échelles, une stratégie multi-échelle est adoptée. Le chapitre commence par un rappel des différentes méthodes de décomposition en sous-domaines ainsi que des méthodes multi-échelle en temps, notamment la méthode GC qui sera à la base de l'intégrateur hétérogène asynchrone développé ici. L'algorithme final est testé et validé sur un exemple numérique du pont roulant sous séisme.

Sommaire

3.1 Méthodes de décomposition en sous domaines	74
3.1.1 Méthodes avec recouvrement	75
3.1.2 Méthodes sans recouvrement	76
3.2 Méthodes multi-échelles en temps	79
3.2.1 Méthodes de sous-cyclage et mixtes en temps	79
3.2.2 Les intégrateurs HATI - les méthodes GC, MGC et BGC	81
3.3 Un intégrateur temporel implicite-explicite pour la dynamique du contact	88
3.3.1 Formulation variationnelle espace-temps	88
3.3.2 Discrétisation temporelle	92
3.3.3 Stratégie d'implémentation de l'intégrateur implicite-explicite	93
3.3.4 Équation discrétisée du bilan énergétique	97
3.3.5 Exemple numérique	98
3.4 Conclusion	105

3.1 Méthodes de décomposition en sous domaines

Pour de nombreuses applications en sciences de l'ingénieur, la discrétisation du problème continu engendre des systèmes linéaires ou non-linéaires de grande taille. La recherche d'une méthode de résolution robuste, efficace en temps de calcul et adaptée aux architectures des ordinateurs est donc cruciale. Les méthodes de résolutions directes sont des fois pénalisantes au niveau de l'emplacement mémoire nécessaire au large volume de données induit par la discrétisation du problème continu. Les méthodes de décomposition de domaine sont basées sur un découpage du domaine global en plusieurs sous domaines. La décomposition peut se faire au niveau continu ou au niveau discret. L'idée sous-jacente des méthodes de décomposition de domaine consiste à résoudre des sous-problèmes sur des domaines variés, tout en imposant des conditions de continuité entre les domaines adjacents, jusqu'à ce que les solutions locales convergent vers la véritable solution globale. Les principaux avantages sont le parallélisme par nature [LET 94, FAR 91, CHA 97] et la possibilité d'un traitement local de domaines complexes ou irréguliers. Les méthodes de décomposition de domaine ne sont pas seulement des stratégies utiles pour des calculs parallèles hautes performances, mais elles sont aussi à la base de nombreuses techniques de résolution d'équations aux dérivées partielles et de problèmes dynamiques.

Ces techniques de décomposition de domaine sont apparues il y a plus d'un siècle avec H. A. Schwarz. Elles sont souvent classées en deux catégories suivant le choix du raccordement des solutions aux interfaces entre les sous domaines : les méthodes avec recouvrement ou méthodes de Schwarz et les méthodes sans recouvrement également connues sous le nom des méthodes du complément de Schur. Enfin ces techniques sont à la base des méthodes de résolution multi-échelle en temps présentées dans le paragraphe 3.2. Pour illustrer ces méthodes de décomposition de domaine, on considère un problème discrétisé écrit sous la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (3.1)$$

où \mathbf{A} est une matrice définie positive. Pour un problème dynamique d'élasticité linéaire discrétisé en temps avec un schéma de type Newmark, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M} + \beta\Delta t^2\mathbf{K} \\ \mathbf{X} &= \ddot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{K}^P\mathbf{U} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont, respectivement, les matrices de masse et de rigidité, \mathbf{F}_{ext} le vecteur des forces extérieures, $\ddot{\mathbf{U}}$ le vecteur des accélérations nodales, β le paramètre d'intégration des schémas de Newmark et $\mathbf{K}^P\mathbf{U}$ le prédicteur de déplacement des schémas de Newmark défini dans l'équation (2.28). Le problème (3.1) est un problème global où toutes les inconnues sont reliées grâce à l'équation du mouvement. Comme nous l'avons déjà indiqué, la méthode de décomposition de domaine consiste à découper, en plusieurs sous domaines, la structure et également les équations associées. La cohérence du problème global est alors assurée par les interfaces entre les sous domaines. Ici, on

se limite à deux sous domaines. L'extension à plusieurs sous domaines reste toutefois évidente.

3.1.1 Méthodes avec recouvrement

Les méthodes avec recouvrement consistent à considérer un recouvrement partiel des sous domaines (voir la Figure 3.1). Autrement dit, les interfaces de couplage ont la même dimension physique que celle des sous domaines. La première méthode de décomposition de domaine est la méthode de Schwarz [SCH 70]. Elle a été développée pour résoudre le problème de Laplace. L'algorithme de Schwarz est itératif. Il consiste à résoudre séparément le problème sur chaque sous domaine, en utilisant à chaque itération une condition de Dirichlet à l'interface, déduite de la solution calculée sur le sous domaine voisin. Un résultat mathématique de convergence de la méthode Schwarz est énoncé dans [LIO 90]. Néanmoins, en mécanique de structure, la méthode de Schwarz reste beaucoup moins utilisée que les méthodes du complément de Schur qui sont présentées dans le paragraphe suivant.

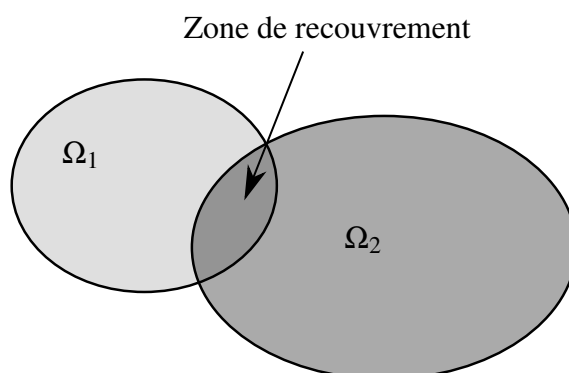


FIGURE 3.1 – Décomposition en deux sous domaines avec recouvrement

Parmi les méthodes avec recouvrement, on trouve une méthode assez récente appelée méthode Arlequin [DHI 05, GHA 13, MAQ 15]. L'intérêt principal de la méthode est de coupler des modèles pouvant être de diverses natures. Elle permet de coupler des modèles différents en dupliquant les états mécaniques dans la zone de recouvrement. Pour raccorder les deux modèles, l'idée est d'activer des forces fictives de couplage qui permettent de contrôler dans la zone de recouvrement l'écart entre les deux états mécaniques : déplacements, déformations, contraintes... Ce champ de force fictive peut suivre un modèle rigide (approche Lagrangienne), soit un modèle élastique (pénalisation) soit encore une combinaison des deux (pénalisation-dualité). Finalement, afin de ne pas compter deux fois l'énergie du système dans les zones de recouvrement, le travail virtuel associé à chaque modèle est pondéré par une fonction dite de pondération. Plus de détails concernant cette méthode peuvent être trouvés dans [DHI 05].

3.1.2 Méthodes sans recouvrement

Contrairement aux méthodes avec recouvrement, les méthodes du complément de Schur sont très utilisées en mécanique de structure (elles sont également connues sous le nom de méthodes de sous structuration). Elles consistent à décomposer le domaine global en plusieurs sous domaines disjoints. La configuration pour une décomposition en deux sous domaines est illustrée dans la Figure 3.2. Ensuite, la continuité des grandeurs cinématiques (3.3) ainsi que l'équilibre des efforts (3.4) sont vérifiés à l'interface Γ pour assurer le couplage entre les sous domaines :

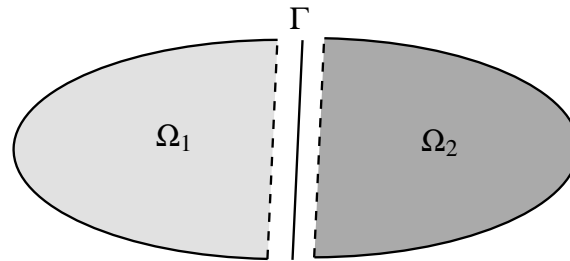


FIGURE 3.2 – Décomposition en deux sous domaines sans recouvrement

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.4)$$

3.1.2.1 Méthode de Schur primale

Dans cette approche, on impose implicitement la condition de continuité cinématique (3.3) à l'interface Γ . En revanche, l'équilibre des efforts (3.4) est vérifié à posteriori. Pour cela, on numérote les nœuds de chaque sous domaine en identifiant les numéros de nœuds qui sont à l'interface Γ . Le problème (3.1) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \mathbf{A}_{1\Gamma}^T & \mathbf{A}_{2\Gamma}^T & \mathbf{A}_\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

où \mathbf{X}_Γ sont les inconnues du problème (3.5), les opérateurs \mathbf{A}_i ($i = 1, 2$) correspondent aux nœuds internes des sous domaines Ω_i , \mathbf{A}_Γ est l'opérateur associé aux nœuds de l'interface Γ , les sous-blocs $\mathbf{A}_{i\Gamma}$ correspondent aux interactions entre les nœuds internes de Ω_i et l'interface Γ . Ensuite, on condense le problème sur les inconnues \mathbf{X}_Γ en éliminant les inconnues internes \mathbf{X}_i grâce aux deux premières lignes du système (3.5), et on obtient finalement :

$$\mathbf{H}\mathbf{X}_\Gamma = \mathbf{B}_\Gamma \quad (3.6)$$

où la matrice \mathbf{H} , appelée matrice du complément de Schur, est définie par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_\Gamma - \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_{i\Gamma}^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_{i\Gamma} \quad (3.7)$$

Le second membre \mathbf{B}_Γ est donné par :

$$\mathbf{B}_\Gamma = \mathbf{F}_\Gamma - \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_{i\Gamma}^T \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (3.8)$$

L'équation (3.6) traduit l'équilibre des noeuds à l'interface Γ . La résolution du système requiert donc l'inversion de la matrice \mathbf{H} qui est une matrice dense. L'inversion de la matrice \mathbf{H} par une méthode directe est très coûteuse. Pour cette raison, on privilégie plutôt des solveurs itératifs. Une revue des principales méthodes itératives pour la résolution de systèmes creux linéaires est disponible dans [SAA 03].

Remarque : l'approche de Schur primale présentée ici impose une liaison parfaite et des maillages compatibles pour que les nœuds d'interface soit communs aux deux sous domaines en vis-à-vis. Toutefois, l'utilisation de l'approche Schur primale pour le collage des maillages incompatibles est possible en dupliquant les nœuds d'interface et en introduisant explicitement dans la formulation les relations de continuité cinématique entre les nœuds.

3.1.2.2 Méthode de Schur duale

Dans cette approche, c'est l'équilibre des efforts (3.4) à l'interface qui est implicitement imposé, la continuité des quantités cinématiques est vérifiée à postériori. Pour cela, on considère la fonctionnelle quadratique associée au problème (3.1) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{F} \quad (3.9)$$

On écrit alors le problème comme une succession d'équilibres associés à chaque sous domaine auxquels s'ajoutent la condition de continuité. La condition de continuité est imposée en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange [LET 94], faisant donc apparaître un vecteur des multiplicateurs de Lagrange Λ au niveau de la formulation (3.9) :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i - (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2)^T \Lambda \quad (3.10)$$

Les multiplicateurs de Lagrange représentent les efforts au niveau de l'interface de couplage Γ (voir La Figure 3.3). Le terme \mathcal{L}_i est la fonctionnelle quadratique associée au sous domaine Ω_i , telle que :

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \mathbf{X}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_i^T \mathbf{F}_i \quad (3.11)$$

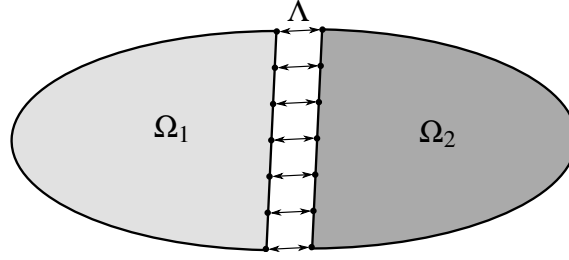


FIGURE 3.3 – Couplage dual à l'interface

où on distingue par l'indice i les termes associés aux nœuds du sous domaine Ω_i , les matrices \mathbf{C}_i ($i = 1, 2$) sont des matrices booléennes signées permettant d'extraire les degrés de liberté concernés par la liaison à l'interface Γ de manière à ce que la condition de continuité cinématique (3.3) puisse être réécrite comme suit :

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2 = 0 \quad (3.12)$$

A l'équilibre, on a :

$$\delta \tilde{\mathcal{L}} = 0 \quad (3.13)$$

En rendant stationnaire la fonctionnelle (3.13) relativement aux quantités \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 et Λ , on obtient le système d'équations suivant écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & -\mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{A}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

De la même manière que pour l'approche primale, on condense le problème sur les inconnues de l'interface Λ en éliminant les inconnues internes \mathbf{X}_i grâce aux deux premières lignes du système (3.14), on obtient finalement l'équation à résoudre à l'interface Γ :

$$\mathbf{H} \Lambda = \mathbf{B} \quad (3.15)$$

où l'opérateur \mathbf{H} appelé également opérateur de Steklov-Poincaré est défini par :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{C}_i^T \quad (3.16)$$

et le second membre est donné par :

$$\mathbf{B} = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (3.17)$$

Pour résoudre le problème matriciel (3.15), on fait souvent appel à une méthode itérative du gradient conjugué, appelé méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) et introduite par Farhat et Roux [FAR 91, FAR 94].

Remarque : dans le cas de la dynamique, et contrairement à l'approche primale, la formulation du Schur duale permet d'imposer à l'interface de couplage la continuité des déplacements, des vitesses ou des accélérations. On trouve une première étude de ce problème dans [FAR 93] afin d'étendre la méthode FETI aux problèmes de la dynamique. Dans l'objectif de coupler des schémas de Newmark aux propriétés différentes en fonction des sous domaines, les vitesses s'avèrent la grandeur la plus adaptée [GRA 01].

3.1.2.3 Méthodes Mixtes

Ces méthodes font intervenir au niveau du couplage aux interfaces, à la fois des variables cinématiques primales et des variables duales (efforts d'interface ou multiplicateurs de Lagrange). Elles découlent de l'utilisation de la méthode du Lagrangien augmenté pour prendre en compte les conditions cinématiques d'interface [GLO 89, FOR 00]. Pour obtenir la fonctionnelle associée aux méthodes mixtes, on ajoute à la fonctionnelle (3.10), définie dans le cadre de la méthode Schur duale, un terme de pénalité, telle que :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i - (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2)^T \Lambda + \frac{1}{2} (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2)^T \mathbf{k} (\mathbf{C}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{X}_2) \quad (3.18)$$

où \mathbf{k} est un opérateur symétrique défini positif appelé raideur d'interface. La minimisation de la fonctionnelle (3.18) conduit aux équations d'Euler suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{k} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1^T \mathbf{k} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{k} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{k} \mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Il existe d'autres approches pour construire la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{L}}$. On peut, par exemple, considérer un opérateur de raideur d'interface \mathbf{k}_i associé à chaque sous domaine Ω_i . Les détails de cette approche peuvent être trouvés dans [GRA 00]. Dans la suite, nous présentons les méthodes multi-échelles notamment la méthode GC. C'est une méthode de décomposition qui s'appuie sur la formulation Schur duale. Elle permet le couplage des schémas temporels de Newmark afin de tirer profit des méthodes explicites et implicites.

3.2 Méthodes multi-échelles en temps

3.2.1 Méthodes de sous-cyclage et mixtes en temps

En mécanique des structures, il est indispensable de connaître le niveau de résolution qui permet de décrire correctement le problème considéré. Au niveau du matériau, il existe des techniques de changement d'échelle qui permettent de passer d'une description grossière (par exemple macroscopique) à une description plus fine (par exemple microscopique). Quand cela est possible, ces méthodes décrivent le matériau à l'échelle

microscopique par des lois de comportement homogènes équivalentes (techniques d'homogénéisation). Des méthodes similaires de changement d'échelle sont appliquées pour la résolution numérique approchée, comme par exemple les méthodes multi-grilles qui consistent à résoudre les équations aux dérivées partielles de façon approchée, à différents niveaux de résolution. En plus du matériau et de la structure elle-même, il faut également prendre en compte les échelles liées à la réponse de la structure à une sollicitation donnée. Autrement dit, la résolution des maillages, que cela soit en temps ou en espace, permet de décrire les phénomènes physiques à différentes échelles.

En dynamique transitoire, notamment pour des problèmes d'impact, l'utilisation des schémas temporels explicites est très largement répandue. Avec un pas de temps adapté, ces schémas d'intégration temporelle permettent de décrire correctement le comportement haute fréquence du problème considéré. En revanche, si les maillages ont de grandes différences de tailles d'éléments, ce qui est le cas dans la pratique, c'est le plus petit élément qui impose le pas de temps pour l'ensemble de la structure. Cela peut être coûteux en temps de calcul, en particulier pour des simulations relativement longues comme dans le cas d'une sollicitation sismique qui dure une dizaine de secondes. Pour cela, des méthodes multi-échelles en temps ont été développées pour adapter le pas de temps et le schéma d'intégration au sous domaine considéré. Parmi ces méthodes, on trouve :

Méthodes multi-pas de temps (sous-cyclage) : ces méthodes multi-pas de temps considèrent différents pas de temps dans différentes parties du maillage. En revanche, un seul schéma d'intégration est utilisé pour toute la structure. Il existe deux grandes classes d'algorithmes. Une classe basée sur un partitionnement par nœuds à l'interface de couplage, et une classe basée sur un partitionnement par éléments. Dans certains cas, les schémas basés sur un partitionnement par éléments ne sont pas consistants et peuvent donner des solutions erronées. Pour cela, le partitionnement par nœuds est préféré. Plusieurs algorithmes basés sur la méthode de sous-cyclage et utilisant un partitionnement par nœuds ont été proposés [BEL 93a, BEL 93b]. Les méthodes multi-pas de temps ont surtout été utilisées avec des schémas d'intégration temporelle explicites. Une étude de stabilité a montré que les méthodes de sous-cyclage sont stables si la condition CFL est vérifiée sur chaque sous domaine individuellement [SMO 92]. D'autres améliorations de ces méthodes ont été proposées, comme par exemple l'utilisation des ratios non-entiers entre les échelles de temps [NEA 89, SMO 96] ou encore le couplage des schémas d'intégration temporelle implicites [SMO 98, WU 00].

Méthodes mixtes en temps : ces méthodes se distinguent des méthodes multi-pas de temps car elles considèrent différentes zones du maillage avec différentes techniques d'intégration temporelle. En revanche, un seul pas de temps est utilisé pour l'ensemble du maillage [BEL 76, BEL 78, LIU 82]. Il existe également deux classes d'algorithmes. Une classe considérant un partitionnement par nœuds et une deuxième classe basée sur un partitionnement par éléments. Le premier algorithme avec un partitionnement par nœuds a été proposé par Belytschko et Mullen dans [BEL 76] avec une étude de stabilité dans

[BEL 78]. Hughes et Liu [HUG 78a] ont proposé une méthode avec un partitionnement par éléments avec une étude de stabilité par la méthode énergétique [HUG 78b]. Une amélioration de la méthode mixte implicite-explicite a été proposée dans [MIR 89] afin de contrôler la dissipation numérique des hautes fréquences parasites en utilisant un schéma similaire aux schémas HHT [HIL 77].

Méthodes mixtes et multi-pas en temps : ces méthodes envisagent de coupler les deux approches “mixtes” et “sous-cyclage” [BEL 79, LIU 82]. Elles permettent donc de coupler différents schémas d’intégration avec des pas de temps différents. Les méthodes évoquées ci-dessus se basent sur une approche primale pour réaliser le couplage entre les sous domaines. Dans la suite, nous présentons des méthodes multi-échelles en temps, basées sur une approche duale, où chaque sous domaine a son propre pas de temps et son propre schéma d’intégration.

3.2.2 Les intégrateurs HATI - les méthodes GC, MGC et BGC

Comme mentionné dans le paragraphe 3.1.2.2, en dynamique, la méthode du Schur duale permet un couplage entre les sous domaines en imposant la continuité des déplacements, des vitesses ou des accélérations à l’interface de couplage. La méthode GC (Gravouil-Combescure) proposée par Gravouil et Combescure [GRA 01, COM 02, GRA 03, COM 03, COM 01], impose la continuité de la vitesse à l’interface de couplage sur le pas de temps le plus petit, appelé micro pas de temps. Cette méthode sera détaillée dans ce paragraphe. Les auteurs ont montré que tous les schémas de Newmark, chacun avec son propre pas de temps, peuvent être couplés avec la méthode GC. Une preuve de stabilité de la méthode GC, basée sur la méthode de la pseudo-énergie [HUG 12], a été fournie [GRA 01, COM 02]. Afin d’élargir la méthode GC à d’autres schémas d’intégration temporelle, Mahjoubi, Gravouil et Combescure ont développé la méthode MGC. En plus des schémas de Newmark, la méthode MGC permet de coupler les méthodes HHT- α et les méthodes de Simo et Krenk en dynamique linéaire [MAH 10b, MAH 10a, MAH 11]. La méthode MGC impose également la continuité des vitesses à l’interface de couplage, mais contrairement à la méthode GC, cette continuité est imposée sur le plus grand pas de temps, appelé macro pas de temps. Plus récemment, Brun, Gravouil et Combescure ont proposé deux nouvelles méthodes de couplage appelées BGC-macro et BGC-micro [BRU 15]. La méthode BGC-macro impose la continuité des vitesses sur le macro pas de temps comme la méthode MGC. De plus, la méthode BGC-macro garantit une pseudo-énergie nulle à l’interface de couplage et ceci pour l’ensemble des schémas dits G- α (HHT, WBZ et CH) en conservant un format de résolution sur un unique pas de temps, contrairement à la méthode MGC qui nécessite des quantités du pas de temps précédent. Comme la méthode GC, la méthode BGC-micro impose la continuité des vitesses à l’interface de couplage au micro pas de temps. En effet, la méthode BGC-micro correspond à la méthode GC mais généralisée au cas des schémas HHT- α . Finalement, dans le cas des schémas de Newmark, l’utilisation de la méthode GC revient à utiliser la méthode BGC-micro. Tous ces intégrateurs multi-échelles ont été

formulés de manière générale pour les méthodes α -généralisées et appelés intégrateurs HATI (Heterogeneous Asynchronous Time Integrators) [GRA 15].

Maintenant nous allons présenter dans le détail la méthode GC sur laquelle sera basé l'intégrateur implicite-explicite proposé dans ce chapitre pour résoudre des problèmes de contact et d'impact en dynamique. Comme évoqué plus haut, la méthode GC permet de coupler plusieurs sous domaines avec leur propre pas de temps et leur propre schéma d'intégration de Newmark. On se limitera à deux sous domaines pour faire la démonstration de la méthode. Le principe de la méthode est schématisé dans la Figure 3.4. Le domaine Ω est décomposé en deux sous domaines. Le premier sous domaine Ω_1 a

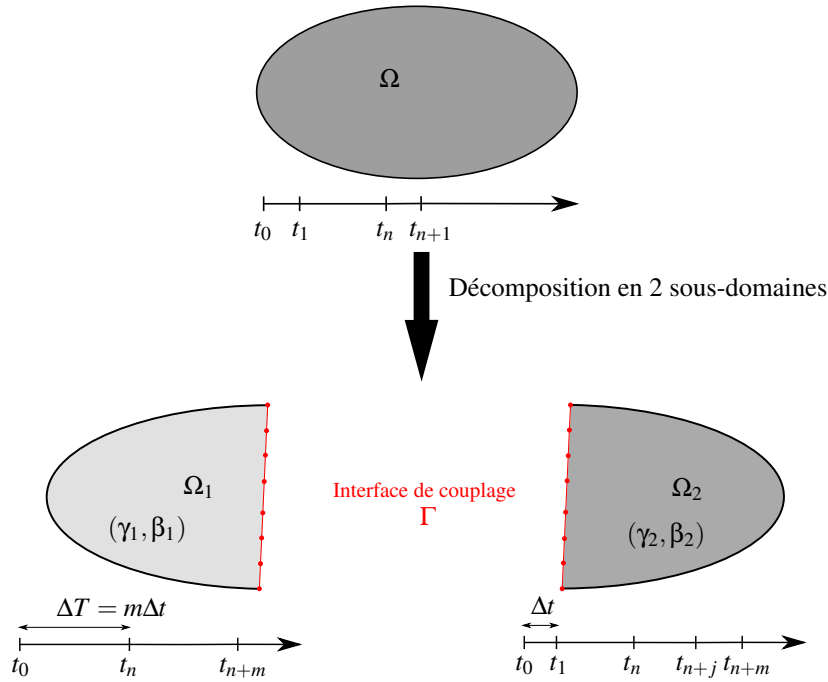


FIGURE 3.4 – Décomposition en deux sous domaines

son propre pas de temps ΔT (macro pas de temps) et son propre schéma d'intégration de Newmark (γ_1, β_1) . Le deuxième sous domaine Ω_2 a son propre pas de temps Δt (micro pas de temps) et son propre schéma d'intégration de Newmark (γ_2, β_2) . Le rapport entre les deux pas de temps est un entier non nul noté m , tel que : $\Delta T = m\Delta t$. Basée sur la méthode Schur duale, le point de départ de la formulation de la méthode GC est l'expression du lagrangien du problème décomposé, qui s'écrit comme suit :

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \mathcal{L}_i \quad (3.20)$$

avec \mathcal{L}_i le lagrangien semi-discrétisé, associé à chaque sous domaine Ω_i , tel que :

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{U}_i(t), \dot{\mathbf{U}}_i(t)) = \mathcal{T}_i(\dot{\mathbf{U}}_i(t)) - \mathcal{V}_i(\mathbf{U}_i(t)) \quad (3.21)$$

où \mathcal{T}_i et \mathcal{V}_i sont, respectivement, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du sous domaine Ω_i :

$$\mathcal{T}_i(\dot{\mathbf{U}}_i(t)) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}_i(t)^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{U}}_i(t) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i(\mathbf{U}_i(t)) &= \mathcal{V}_{int_i}(\mathbf{U}_i(t)) - \mathcal{V}_{ext_i}(\mathbf{U}_i(t)) \\ &= \mathbf{F}_{int_i}^T \mathbf{U}_i - \mathbf{F}_{ext_i}^T \mathbf{U}_i \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'indice i désigne les termes associés au sous domaine Ω_i , \mathbf{M}_i sont les matrices de masse symétriques définies positives, \mathcal{V}_{int_i} et \mathcal{V}_{ext_i} sont, respectivement, les énergies potentielles interne et externe, \mathbf{F}_{int_i} et \mathbf{F}_{ext_i} représentent, respectivement, les forces internes et externes. Dans la suite, on fait l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire : $\mathbf{F}_{int_i} = \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i$, où \mathbf{K}_i est la matrice de rigidité associée au sous domaine Ω_i . Afin de compléter le problème défini par l'équation (3.20), une condition de continuité à l'interface entre les sous domaines doit être ajoutée. Pour la méthode GC, Gravouil et Combescure ont montré que la quantité pertinente est la vitesse car elle permet d'assurer la stabilité de la méthode au sens de la méthode énergétique [GRA 00]

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1(t) + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.24)$$

Les termes \mathbf{L}_i ($i = 1, 2$) sont des opérateurs booléens signés permettant d'extraire les degrés de liberté des nœuds à l'interface de couplage Γ . Pour prendre en compte les conditions cinématiques (3.24), le lagrangien (3.20) est augmenté en rajoutant le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ comme suit :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^2 \mathcal{L}_k + (\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.25)$$

Pour obtenir la formulation variationnelle espace-temps du problème de couplage, on considère l'intégrale d'action suivante [GÉR 14] :

$$A = \int_0^T \tilde{\mathcal{L}} dt \quad (3.26)$$

Par minimisation de l'intégrale d'action A , on déduit la formulation variationnelle du problème sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_0^T \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{U}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\mathbf{U}}_i} \right) + (\mathbf{L}_i^T \boldsymbol{\lambda})^T \right) \delta \mathbf{U}_i dt \\ &+ \int_0^{t_m} \left(\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1(t) + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2(t) \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) doit être vérifiée pour tout $\delta \mathbf{U}_i$ et $\delta \boldsymbol{\lambda}$. En remplaçant les lagrangiens \mathcal{L}_i par leur expression (3.21) et $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ par $\boldsymbol{\Lambda}$, on déduit de (3.27) les équations semi-discretisées du problème décomposé en deux sous domaines :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{U}}_i(t) + \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i(t) = \mathbf{F}_{ext_i}(t) + \mathbf{F}_{link_i}(t) & \forall t \in [0, T] \\ \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_1(t) + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_2(t) = 0 & \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.28)$$

où $\mathbf{F}_{link_i} = \mathbf{L}_i^T \Lambda$ sont les efforts de couplage à l'interface Γ . En discrétisant en temps le problème (3.28), on obtient :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{1,n+m} + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{1,n+m} = \mathbf{F}_{ext1,n+m} + \mathbf{F}_{link1,n+m} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{2,n+j} + \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{2,n+j} = \mathbf{F}_{ext2,n+j} + \mathbf{F}_{link2,n+j} \quad \forall j \in [1, m] \quad (3.29b)$$

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_{1,n+j} + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_{2,n+j} = 0 \quad \forall j \in [1, m] \quad (3.29c)$$

Les indices $n+j$ et $n+m$ indiquent que les quantités sont considérées aux instants t_{n+j} et t_{n+m} respectivement (voir la Figure 3.4). On notera ici que la condition de continuité est bien imposée sur le micro pas de temps (voir l'équation (3.29c)). Pour l'implémentation de la méthode, le problème est découpé en utilisant une stratégie "sans liaison (free) / avec liaison (link)". Pour cela, chacune des quantités cinématiques peut être décomposée en deux parties sur chacun des sous domaines comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_i = \ddot{\mathbf{U}}_{free_i} + \ddot{\mathbf{U}}_{link_i} \\ \dot{\mathbf{U}}_i = \dot{\mathbf{U}}_{free_i} + \dot{\mathbf{U}}_{link_i} \\ \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{free_i} + \mathbf{U}_{link_i} \end{cases} \quad (3.30)$$

Les termes "free" correspondent au problème de chaque sous domaine sans couplage. Les termes "link" correspondent au problème de couplage. Les déplacements et les vitesses sont obtenus avec les relations classiques de Newmark (2.30) et (2.31), telles que :

– Dans le sous domaine Ω_1 :

$$\mathbf{U}_{free1,n+m} = {}^P\mathbf{U}_{1,n+m} + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{U}_{link1,n+m} = \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{U}}_{link1,n+m} \quad (3.31b)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} = {}^P\dot{\mathbf{U}}_{1,n+m} + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} \quad (3.31c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{link1,n+m} = \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{U}}_{link1,n+m} \quad (3.31d)$$

– Dans le sous domaine Ω_2 :

$$\mathbf{U}_{free2,n+j} = {}^P\mathbf{U}_{2,n+j} + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} \quad (3.32a)$$

$$\mathbf{U}_{link2,n+j} = \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{link2,n+j} \quad (3.32b)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} = {}^P\dot{\mathbf{U}}_{2,n+j} + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} \quad (3.32c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{link2,n+j} = \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{link2,n+j} \quad (3.32d)$$

où ${}^P\mathbf{U}_i$ et ${}^P\dot{\mathbf{U}}_i$ sont les prédicteurs des schémas de Newmark définis dans les équations (2.28) et (2.29). Les accélérations $\ddot{\mathbf{U}}_{free_i}$ et $\ddot{\mathbf{U}}_{link_i}$ sont obtenues en décomposant les équations d'équilibre de chaque sous domaine (3.29a) et (3.29b), de la même manière que les quantités cinématiques, en une partie "free" et une partie "link", telles que :

– Dans le sous domaine Ω_1 :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{free1,n+m} = \mathbf{F}_{ext1,n+m} \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{link1,n+m} + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{link1,n+m} = \mathbf{F}_{link1,n+m} \quad (3.33b)$$

– Dans le sous domaine Ω_2 :

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} + \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{free2,n+j} = \mathbf{F}_{ext2,n+j} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{link2,n+j} + \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{link2,n+j} = \mathbf{F}_{link2,n+j} \quad (3.34b)$$

En remplaçant les équations (3.31a) et (3.31b) dans (3.33), et les équations (3.32a) et (3.32b) dans (3.34), on obtient les équations nous permettant de calculer les accélérations “free” et “link” dans chaque sous domaine, comme suit :

– Dans le sous domaine Ω_1 :

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} = \mathbf{F}_{ext1,n+m} - \mathbf{K}_1^P \mathbf{U}_{1,n+m} \quad (3.35a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{link1,n+m} = \mathbf{F}_{link1,n+m} \quad (3.35b)$$

– Dans le sous domaine Ω_2 :

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} = \mathbf{F}_{ext2,n+j} - \mathbf{K}_2^P \mathbf{U}_{2,n+j} \quad (3.36a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{link2,n+j} = \mathbf{F}_{link2,n+j} \quad (3.36b)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}_1$ et $\tilde{\mathbf{M}}_2$ sont des matrices de masse modifiées, telles que :

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 + \beta_1 \Delta T^2 \mathbf{K}_1 \quad (3.37a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 + \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K}_2 \quad (3.37b)$$

Finalement, pour résoudre l'équation de couplage (3.29c), on remplace les vitesses par leur décomposition (3.30) comme suit :

$$\mathbf{L}_1 (\dot{\mathbf{U}}_{free1,n+j} + \dot{\mathbf{U}}_{link1,n+j}) + \mathbf{L}_2 (\dot{\mathbf{U}}_{free2,n+j} + \dot{\mathbf{U}}_{link2,n+j}) = 0 \quad (3.38)$$

En remplaçant les vitesses “free” et “link” par leurs expressions (3.31c), (3.31d), (3.32c) et (3.32d), on obtient l'équation de couplage suivante :

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{b} \quad (3.39)$$

où \mathbf{H} est l'opérateur de condensation sur l'interface Γ , tel que :

$$\mathbf{H} = (\gamma_1 \Delta T) \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{M}}_1 \mathbf{L}_1^T + (\gamma_2 \Delta t) \mathbf{L}_2 \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{L}_2^T \quad (3.40)$$

3. Intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact

Et :

$$\mathbf{b} = -\left(\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{U}}_{free1,n+j} + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{U}}_{free2,n+j}\right) \quad (3.41)$$

Dans le second membre \mathbf{b} , le terme de la vitesse $\dot{\mathbf{U}}_{free1,n+j}$, défini au micro pas de temps, est calculé par interpolation linéaire de la vitesse $\dot{\mathbf{U}}_{free1,n+m}$ obtenue au macro pas de temps comme suit :

$$\dot{\mathbf{U}}_{free1,n+j} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{U}}_{free1,n} + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{U}}_{free1,n+m} \quad (3.42)$$

L'implémentation de la méthode GC est illustrée dans la Figure 3.5.

Bilan énergétique de la formulation discrétisée : Afin de réaliser le bilan énergétique

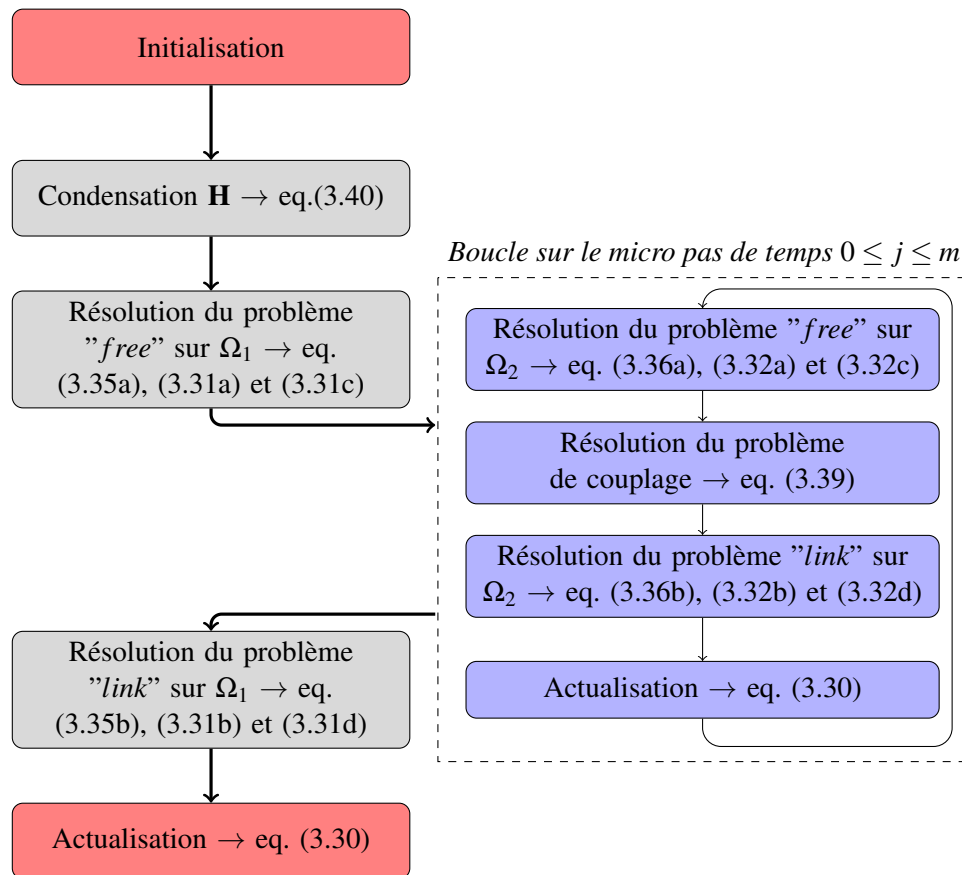


FIGURE 3.5 – Implémentation de la méthode GC

du problème dynamique décomposé en deux sous domaines et couplé avec la méthode GC, on commence par faire le bilan énergétique de chaque sous domaine, ensuite on fait la somme des énergies des deux sous domaines au macro pas de temps. Pour cela, on considère les équations d'équilibre (3.29a) et (3.29b) associées, respectivement, aux sous domaines Ω_1 et Ω_2 . La discrétisation temporelle étant réalisée par les schémas de

Newmark, on peut donc utiliser l'équation du bilan énergétique (2.65) présentée dans le chapitre précédent au paragraphe 2.1.4.3. D'après l'équation (2.65), l'équation du bilan énergétique associée au sous domaine Ω_1 s'écrit sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+m}]$ comme suit :

$$\Delta W_{cin1,n+m} + \Delta W_{comp1,n+m} + \Delta W_{int1,n+m} = \Delta W_{ext1,n+m} + \Delta W_{interface1,n+m} + \Delta W_{diss1,n+m} \quad (3.43)$$

Et toujours d'après l'équation (2.65), l'équation du bilan énergétique associée au sous domaine Ω_2 s'écrit sur l'intervalle de temps $[t_{n+j-1}, t_{n+j}]$ comme suit :

$$\Delta W_{cin2,n+j} + \Delta W_{comp2,n+j} + \Delta W_{int2,n+j} = \Delta W_{ext2,n+j} + \Delta W_{interface2,n+j} + \Delta W_{diss2,n+j} \quad (3.44)$$

Les incréments de l'énergie cinétique ΔW_{cin} , de l'énergie complémentaire ΔW_{comp} , de l'énergie interne ΔW_{int} , de l'énergie externe ΔW_{ext} et de l'énergie de dissipation numérique ΔW_{diss} sont définis, respectivement, dans les équations (2.66), (2.67), (2.68) et (2.69). L'incrément de l'énergie dû aux efforts de couplage $\mathbf{F}_{link_i} = \mathbf{L}_i^T \Lambda$ ($i = 1, 2$) s'écrivent ainsi :

$$\Delta W_{interface1,n+m} = [\mathbf{U}_{1,n}]^T \mathbf{L}_1^T \langle \Lambda_n \rangle + (\gamma_1 - \frac{1}{2}) [\mathbf{U}_{1,n}]^T \mathbf{L}_1^T [\Lambda_n] \quad (3.45)$$

$$\Delta W_{interface2,n+j} = [\mathbf{U}_{2,n+j-1}]^T \mathbf{L}_2^T \langle \Lambda_{n+j-1} \rangle + (\gamma_2 - \frac{1}{2}) [\mathbf{U}_{2,n+j-1}]^T \mathbf{L}_2^T [\Lambda_{n+j-1}] \quad (3.46)$$

Finalement, le bilan énergétique du problème global s'obtient en faisant la somme des énergies des deux sous domaines sur le macro pas de temps. Ainsi, l'équation du bilan énergétique du problème global s'écrit sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+m}]$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta W_{cin1,n+m} + \Delta W_{int1,n+m} + \Delta W_{comp1,n+m} + \sum_{j=1}^m (\Delta W_{cin2,n+j} + \Delta W_{int2,n+j} + \Delta W_{comp2,n+j}) \\ = \Delta W_{ext1,n+m} + \Delta W_{diss1,n+m} + \sum_{j=1}^m (\Delta W_{ext2,n+j} + \Delta W_{diss2,n+j}) + \Delta W_{interface} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Avec :

$$\Delta W_{interface} = \Delta W_{interface1,n+m} + \sum_{j=1}^m \Delta W_{interface2,n+j} \quad (3.48)$$

La quantité $\Delta W_{interface}$ est l'énergie qui va nous permettre d'estimer la dissipation éventuelle à l'interface de couplage.

La méthode de couplage GC est stable. Une preuve de stabilité utilisant la méthode de la pseudo-énergie proposée par Hughes dans [HUG 12], peut être trouvée dans [GRA 01]. Donc, si les sous domaines sont stables, la méthode GC est stable. Le ratio entre les différentes échelles de temps n'influe pas sur la stabilité globale du problème. En revanche, dans la pratique, le rapport m entre le macro pas de temps et le micro pas de temps permet de contrôler l'énergie potentiellement dissipée à l'interface de couplage entre les sous domaines. La méthode GC a été appliquée à plusieurs problèmes

d'ingénierie [GRA 01, COM 02, GRA 03, COM 03, MAH 10b, MAH 10a, MAH 11, CHA 14b, FAU 03, BRU 12a, BRU 12b, BRU 14b]. Elle a été utilisée pour réaliser des couplages entre des codes éléments finis. Le couplage entre codes éléments finis a permis des gains en temps CPU très significatifs [CHA 14b]. Faucher et Combescure [FAU 03, FAU 04a, FAU 04b] ont proposé une extension de la méthode GC avec réduction modale dans le cadre d'un problème à non-linéarité géométrique couplé avec des sous domaines explicites. Leurs méthodes sont introduites dans le code de dynamique rapide EUROPLEXUS. Bourel et al. [BOU 06b] ont récemment présenté un travail basé sur la méthode GC sur la gestion du contact dans les simulations de crashes automobiles. On peut également citer les travaux de Gavaille [GAV 09] qui s'est inspiré de la méthode GC dans le cadre de stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite. La méthode GC a été également mobilisée pour la propagation d'ondes dans un milieu infini, en couplant le domaine d'intérêt avec des couches absorbantes aux frontières du maillage, basées sur des formalismes d'amortissement de type Rayleigh [ZAF 15] et PML (Perfect Matched Layer) [BRU 16]. Dans la suite, nous allons présenter un intégrateur hétérogène asynchrone, basé sur la méthode GC, pour la dynamique du contact.

3.3 Un intégrateur temporel implicite-explicite pour la dynamique du contact

3.3.1 Formulation variationnelle espace-temps

Nous présentons dans ce paragraphe la formulation variationnelle espace-temps du nouvel intégrateur temporel explicite-implicite pour les problèmes de contact et d'impact en dynamique transitoire. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser la méthode de couplage GC développée par A. Gravouil et A. Combescure [GRA 01, GRA 03, COM 03, COM 01]. Cette approche va nous permettre de considérer différents sous domaines avec chacun son propre pas de temps (asynchrone) et son propre schéma d'intégration (hétérogène). La configuration de ce problème multi-échelles en temps est schématisée dans la Figure 3.6. On considère alors un premier sous domaine explicite Ω_E contenant la zone du contact. L'intégration temporelle dans le sous domaine Ω_E est réalisée avec le nouvel intégrateur explicite développé dans le chapitre précédent. Le deuxième sous domaine implicite Ω_I incluant le reste du domaine Ω , est résolu en temps par le schéma implicite de l'accélération moyenne.

Dans la Figure 3.6, les indices j et m représentent, respectivement, le micro pas de temps associé au schéma explicite et le macro pas de temps associé au schéma implicite. Les indices E et I représentent, respectivement, les valeurs liées aux sous domaines explicite Ω_E et implicite Ω_I . Γ_D^E et Γ_D^I représentent les bords où les conditions de Dirichlet sont imposées, Γ_C^E le bord contenant les points de contact et Γ_G l'interface de couplage entre les sous domaines. L'équation semi-discrétisée des conditions cinématiques à imposer pour réaliser le couplage à l'interface Γ_G est exprimée en terme de vitesse comme suit

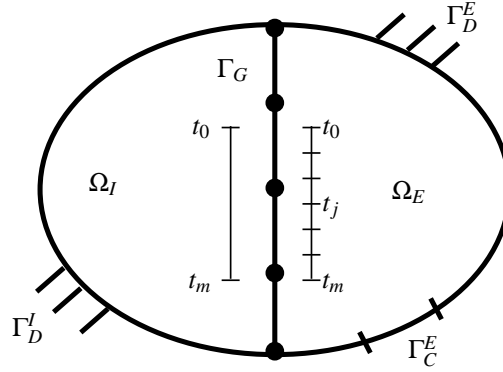


FIGURE 3.6 – Décomposition en deux sous domaines

[GRA 01, GRA 03, COM 03, COM 01] :

$$\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}^E(t) + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}^I(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_m] \quad (3.49)$$

où, \mathbf{L}_G^k ; $k = I, E$ sont des matrices booléennes signées, appelées également matrices de restriction, elles permettent d'extraire les degrés de liberté des nœuds concernés par les contraintes cinématiques à l'interface de couplage Γ_G . Afin d'obtenir la formulation faible espace-temps, on considère l'intégrale d'action suivante qui est le point clé pour construire l'intégrateur temporel HATI explicite-implicite (voir [GRA 15] pour plus de détails) :

$$\tilde{A}(\mathbf{U}^I, \dot{\mathbf{U}}^I, \mathbf{U}^E, \dot{\mathbf{U}}^E, t_c) = A^I(\mathbf{U}^I, \dot{\mathbf{U}}^I) + \tilde{A}^E(\mathbf{U}^E, \dot{\mathbf{U}}^E, t_c) + \int_{t_0}^{t_m} \left(\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}^E(t) + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}^I(t) \right)^T \boldsymbol{\lambda}_G dt \quad (3.50)$$

où $\boldsymbol{\lambda}_G$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes cinématiques (3.49) sur Γ_G . L'inconnue t_c représente l'instant de contact/impact, A^I est l'intégrale d'action associée au sous domaine implicite Ω_I , telle que :

$$A^I(\mathbf{U}^I, \dot{\mathbf{U}}^I) = \int_{t_0}^{t_m} \mathcal{L}^I(\mathbf{U}^I(t), \dot{\mathbf{U}}^I(t)) dt \quad (3.51)$$

Le terme \tilde{A}^E est l'intégrale d'action associée au sous domaine explicite Ω_E contenant la zone du contact. D'après les développements présentés dans le chapitre précédent (voir l'équation (2.92)), on a :

$$\tilde{A}^E(\mathbf{U}^E, \dot{\mathbf{U}}^E, t_c) = A^E(\mathbf{U}^E, \dot{\mathbf{U}}^E) + \boldsymbol{\lambda}_c^T(t_c) \mathbf{g}_N(t_c) \quad (3.52)$$

avec :

$$A^E(\mathbf{U}^E(t), \dot{\mathbf{U}}^E(t), t_c) = \int_{t_0}^{t_c} \mathcal{L}^E(\mathbf{U}^E(t), \dot{\mathbf{U}}^E(t)) dt + \int_{t_c}^{t_m} \mathcal{L}^E(\mathbf{U}^E(t), \dot{\mathbf{U}}^E(t)) dt \quad (3.53)$$

3. Intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact

où λ_c est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange de dimension p (nombre de nœuds potentiellement en contact), associé aux conditions de contact imposées à l'interface Γ_C^E , telles que :

$$\begin{cases} g_N^I(t) \geq 0 \\ \lambda_c^I(t) \geq 0 \\ \lambda_c^I(t)g_N^I(t) = 0 \end{cases} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\}, \forall t \in [t_0, t_m] \quad (3.54)$$

Les termes \mathcal{L}^I et \mathcal{L}^E sont les lagrangiens associés aux sous domaines implicite et explicite, respectivement. La définition du lagrangien est donnée dans l'équation (3.21).

À l'équilibre, l'intégrale d'action \tilde{A} doit être stationnaire. D'après les développements du chapitre précédent (voir l'équation (2.98)) et après quelques calculs variationnels [CIR 05, GRA 15], la formulation faible espace-temps de l'intégrateur temporel HATI explicite-implicite pour la dynamique du contact peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{A} &= \int_{t_0}^{t_m} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^I}{\partial \mathbf{U}^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^I}{\partial \dot{\mathbf{U}}^I} \right) + ((\mathbf{L}_G^I)^T \Lambda_G)^T \right) \delta \mathbf{U}^I dt \\ &+ \int_{[t_0, t_c] \cup [t_c, t_m]} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \mathbf{U}^E} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \dot{\mathbf{U}}^E} \right) + ((\mathbf{L}_G^E)^T \Lambda_G)^T \right) \delta \mathbf{U}^E dt \\ &- \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \dot{\mathbf{U}}^E} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \lambda_c^T(t_c) \nabla g_N(t_c) \right) \delta \mathbf{U}^E(t_c) \\ &- \left(\left[\mathcal{L}^E \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \lambda_c^T(t_c) \nabla g_N(t_c) \dot{\mathbf{U}}^E(t_c) \right) \delta t_c + \delta \lambda_c^T(t_c) g_N(t_c) \\ &+ \int_{t_0}^{t_m} \left(\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}^E(t) + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}^I(t) \right)^T \delta \lambda_G dt \\ &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{U}^k \in \mathcal{W}^0, \delta t_c \in \mathcal{T}_c^0, \delta \lambda_c \in \Lambda_c^0, \delta \lambda_G \in \Lambda_G^0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $(\mathbf{L}_G^k)^T \Lambda_G$ ($k = I, E$) représentent les forces de couplage à l'interface Γ_G , avec $\Lambda_G = -\dot{\lambda}_G$ [GRA 15]. Les termes t_c^- et t_c^+ sont, respectivement, les instants avant et après contact/impact. Les espaces fonctionnels des fonctions test \mathcal{W}^0 , \mathcal{T}_c^0 , Λ_c^0 , et Λ_G^0 sont définis ainsi [TAY 93, GRA 15] :

$$\mathcal{W}^0 = \{ \delta \mathbf{U}^k \in H^1(\Omega_k \times [t_0, t_m]) \mid \delta \mathbf{U}^k = 0 \text{ on } \Gamma_{u^k}, \delta \mathbf{U}^k(t_0) = 0, \delta \mathbf{U}^k(t_m) = 0 \text{ in } \Omega_k \} \quad (3.56)$$

$$\Lambda_c^0 = \{ \delta \lambda_c \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial C \times [t_0, t_m]) \mid \delta \lambda_c^l \geq 0; l \in \{1, \dots, p\} \} \quad (3.57)$$

$$\Lambda_G^0 = \{ \delta \lambda_G \in H^1(\Gamma_G \times [t_0, t_m]) \} \quad (3.58)$$

$$\mathcal{T}_c^0 = [t_0, t_m] \quad (3.59)$$

À partir de la formulation (3.55), on obtient les équations suivantes :

– Dans le sous domaine implicite Ω_I :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^I}{\partial \mathbf{U}^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^I}{\partial \dot{\mathbf{U}}^I} \right) + ((\mathbf{L}_G^I)^T \Lambda_G)^T = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_m] \quad (3.60)$$

– Dans le sous domaine explicite Ω_E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \mathbf{U}^E} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \dot{\mathbf{U}}^E} \right) + ((\mathbf{L}_G^E)^T \Lambda_G)^T = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_m] \\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \dot{\mathbf{U}}^E} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = \boldsymbol{\lambda}_c^T(t_c) \nabla \mathbf{g}_N(t_c) \\ \left[\mathcal{L}^E \right]_{t_c^-}^{t_c^+} - \left[\frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \dot{\mathbf{U}}^E} \right]_{t_c^-}^{t_c^+} \dot{\mathbf{U}}^E(t_c) = 0 \\ g_N^l(t_c) = 0; \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (3.61)$$

– A l'interface de couplage Γ_G :

$$\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}^E(t) + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}^I(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_m] \quad (3.62)$$

En remplaçant les Lagrangiens \mathcal{L}^k par leurs expressions données dans (3.21), (3.22) et (3.23), on obtient les équations d'équilibre semi-discrétisées de chaque sous domaine :

– Dans le sous domaine implicite Ω_I :

$$\mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{U}}^I(t) + \mathbf{F}_{int}^I(t) = \mathbf{F}_{ext}^I(t) + \mathbf{F}_{link}^I(t) \quad \forall t \in [t_0, t_m] \quad (3.63)$$

– Dans le sous domaine explicite Ω_E :

$$\mathbf{M}^E \ddot{\mathbf{U}}^E(t) + \mathbf{F}_{int}^E(t) = \mathbf{F}_{ext}^E(t) + \mathbf{F}_{link}^E(t) \quad \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \quad (3.64a)$$

$$\left[\mathbf{M}^E \dot{\mathbf{U}}^E(t) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = \nabla \mathbf{g}_N^T(t_c) \boldsymbol{\lambda}_c(t_c) = i_N \mathbf{n}_1 \quad (3.64b)$$

$$\left[(\mathbf{M}^E \dot{\mathbf{U}}^E(t))^T (\mathbf{M}^E)^{-1} (\mathbf{M}^E \dot{\mathbf{U}}^E(t)) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = 0 \quad (3.64c)$$

$$g_N^l(t_c) = 0; \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \quad (3.64d)$$

où $\mathbf{F}_{link}^k = (\mathbf{L}_G^k)^T \Lambda_G$ sont les forces de couplage à l'interface Γ_G , (3.63) représente l'équation classique d'équilibre incluant les forces de couplage \mathbf{F}_{link}^I qui vont permettre de coller les sous domaines entre eux, (3.64a) est l'équation de la dynamique régulière (sans le terme d'impact), (3.64b) est l'équation d'impact représentant le saut de vitesse durant l'impact, (3.64c) est l'équation de conservation de l'énergie cinétique pendant l'impact. On rajoute à l'ensemble d'équations (3.64), les conditions KKT (3.54) qui sont équivalentes aux conditions HSM (2.84) (voir Moreau [MOR 99]). En utilisant la relation (3.64b), on peut donc réécrire les conditions HSM comme suit, $\forall t \in [t_0, t_m]$, $\forall l \in \{1, \dots, p\}$:

$$\text{if } g_N^l(t) > 0 \text{ then } \lambda_c^l(t) = 0 \quad (3.65a)$$

$$\text{if } g_N^l(t) = 0 \text{ then } \left\{ \begin{array}{l} \dot{g}_N^l(t) \geq 0 \\ \lambda_c^l(t) \geq 0 \\ \lambda_c^l(t) \dot{g}_N^l(t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.65b)$$

Afin d'utiliser l'intégrateur temporel CD-Lagrange, développé dans le chapitre précédent, nous devons écrire l'équation de la dynamique non-régulière du sous domaine explicite Ω_E . En suivant le même raisonnement détaillé dans le paragraphe 2.2.4 du chapitre précédent, on peut écrire la formulation semi-discrétisée de la dynamique non-régulière dans Ω_E comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^E d\dot{\mathbf{U}}^E + \mathbf{F}_{int}^E dt = \mathbf{F}_{ext}^E dt + \mathbf{F}_{link}^E dt + d\mathbf{I} \\ d\mathbf{I} = \mathbf{L}_c^T d\lambda_c \quad (\mathbf{L}_c = \nabla g_N) \\ \mathbf{v}_c = \mathbf{L}_c \dot{\mathbf{U}}^E = \dot{g}_N \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{if } g_N^l > 0 \text{ then } \lambda_c^l = 0 \\ \text{if } g_N^l = 0 \text{ then } \left\{ \begin{array}{l} v_c^l \geq 0 \\ \lambda_c^l \geq 0 \\ v_c^l \lambda_c^l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

3.3.2 Discrétisation temporelle

Dans ce paragraphe, on présente la discrétisation temporelle du problème de couplage représenté par les équations semi-discrétisées (3.62), (3.63) et (3.66). Pour cela, on considère ΔT le macro pas de temps associé au sous domaine implicite Ω_I , et Δt le micro pas de temps, qui satisfait la condition CFL, associé au sous domaine explicite Ω_E contenant la zone de contact. Les deux pas de temps sont reliés par la relation : $\Delta T = m\Delta t$ (voir la Figure 3.6). On rappelle que les indices j et m désignent, respectivement, l'échelle de temps micro de l'intégrateur temporel explicite et l'échelle de temps macro du schéma implicite (voir la Figure 3.6). D'après les équations (3.62), (3.63) et (3.66), on obtient les équations discrétisées en espace et en temps du problème multi-échelle en temps comme suit :

- Les équations d'équilibre de chaque sous domaine :

$$\mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{U}}_{n+m}^I + \mathbf{C}^I \dot{\mathbf{U}}_{n+m}^I + \mathbf{F}_{int,n+m}^I = \mathbf{F}_{ext,n+m}^I + \mathbf{F}_{D,n+m}^I + \mathbf{F}_{link,n+m}^I \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{lump}^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j+\frac{1}{2}}^E &= \mathbf{M}_{lump}^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j-\frac{1}{2}}^E - \Delta t (\mathbf{F}_{int,n+j}^E + \mathbf{C}^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j-\frac{1}{2}}^E) \\ &\quad + \Delta t (\mathbf{F}_{ext,n+j}^E + \mathbf{F}_{D,n+j}^E + \mathbf{F}_{link,n+j}^E) + \mathbf{I}_{n+j} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Pour un cas plus général, nous avons introduit dans les équations d'équilibre (3.67) et (3.68) les matrices d'amortissement \mathbf{C}^k et les forces \mathbf{F}_D^k dues aux conditions de Dirichlet. $\mathbf{F}_D^k = (\mathbf{L}_D^k)^T \boldsymbol{\Lambda}_D^k$ où \mathbf{L}_D^k et $\boldsymbol{\Lambda}_D^k$ ($k = I, E$) sont, respectivement, des matrices booléennes signées et les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes cinématiques de Dirichlet (3.70) et (3.71) à l'interface Γ_D^k .

- Les conditions HSM exprimées au micro pas de temps à l'interface Γ_C^E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{c,n+j+\frac{1}{2}} = \mathbf{L}_{c,n+j} \dot{\mathbf{U}}_{n+j+\frac{1}{2}}^E \\ \mathbf{I}_{n+j} = \mathbf{L}_{c,n+j}^T \boldsymbol{\lambda}_{c,n+j+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{g}_{N,n+j} = \mathbf{L}_{c,n+j} \mathbf{U}_{n+j}^E \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{if } g_{N,n+j}^l > 0 \text{ then } \lambda_{c,n+j+\frac{1}{2}}^l = 0 \\ \text{if } g_{N,n+j}^l \leq 0 \text{ then} \\ \left\{ \begin{array}{l} v_{c,n+j+\frac{1}{2}}^l \geq 0 \\ \lambda_{c,n+j+\frac{1}{2}}^l \geq 0 \\ v_{c,n+j+\frac{1}{2}}^l \lambda_{c,n+j+\frac{1}{2}}^l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

– Les conditions de Dirichlet dans chaque sous domaine :

$$L_D^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j}^E = 0 \quad (3.70)$$

$$L_D^I \dot{\mathbf{U}}_{n+m}^I = 0 \quad (3.71)$$

– La condition de couplage exprimant la continuité des vitesses à l'interface Γ_G à l'échelle de temps fine t_{n+j} [GRA 01] :

$$\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j}^E + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}_{n+j}^I = 0 \quad (3.72)$$

où $\dot{\mathbf{U}}_{n+j}^I$ est l'interpolation linéaire de $\dot{\mathbf{U}}_{n+m}^I$ à l'instant t_{n+j} (voir l'équation (3.89)). Dans le paragraphe suivant, nous présentons la stratégie d'implémentation de l'intégrateur implicite-explicite ainsi que l'équation discrétisée à résoudre pour réaliser le couplage entre les sous domaines explicite Ω_E et implicite Ω_I .

3.3.3 Stratégie d'implémentation de l'intégrateur implicite-explicite

Afin d'implémenter l'intégrateur implicite-explicite décrit par les équations (3.67), (3.68), (3.69), (3.70), (3.71) et (3.72), on suit la même stratégie d'implémentation de la méthode GC présentée dans le paragraphe 3.2.2. Elle consiste à décomposer le problème global en un problème "sans liaison (free)" et un problème "avec liaison (link)". Pour cela, les quantités cinématiques sont décomposées comme suit :

$$\dot{\mathbf{U}}^k = \dot{\mathbf{U}}_{free}^k + \dot{\mathbf{U}}_{link}^k \quad (3.73a)$$

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}_{free}^k + \mathbf{U}_{link}^k \quad (3.73b)$$

où $k = I$ ou E , l'indice "free" désigne les termes associés au problème sans les conditions de couplage et l'indice "link" désigne les termes associés aux efforts de couplage \mathbf{F}_{link}^k .

Dans le sous domaine Ω_I , les déplacements et les vitesses sont obtenus à l'aide des équations principales de Newmark (2.30) et (2.31). A l'instant t_{n+m} , on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+m}^I = \left({}^P \dot{\mathbf{U}}_n^I + \Delta T \gamma_I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I \right) + \left(\Delta T \gamma_I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I \right) \quad (3.74a)$$

$$\mathbf{U}_{n+m}^k = \left({}^P \mathbf{U}_n^I + \Delta T^2 \beta_I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^k \right) + \left(\Delta T^2 \beta_I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I \right) \quad (3.74b)$$

D'après les équations (3.74a) et (3.74b), on distingue donc les déplacements et les vitesses "free" et "link" comme suit :

$$\dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I = {}^P\dot{\mathbf{U}}_n^I + \Delta T \gamma_I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I \quad (3.75a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I = \Delta T \gamma_I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I \quad (3.75b)$$

et :

$$\mathbf{U}_{free,n+m}^I = {}^P\mathbf{U}_n^I + \Delta T^2 \beta_I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I \quad (3.76a)$$

$$\mathbf{U}_{link,n+m}^I = \Delta T^2 \beta_I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I \quad (3.76b)$$

où les termes prédictifs ${}^P\dot{\mathbf{U}}_n^I$ et ${}^P\mathbf{U}_n^I$ du schéma implicite de Newmark sont donnés, respectivement, dans les équations (2.29) et (2.28). Pour calculer les accélérations $\ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I$ et $\ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I$, l'équation d'équilibre (3.67) est également décomposée en une partie "free" et une partie "link". Dans la suite, on fait l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire dans le sous domaine implicite ($\mathbf{F}_{int}^I = \mathbf{K}^I \mathbf{U}^I$ où \mathbf{K}^I est la matrice de rigidité dans Ω_I). En remplaçant (3.73a) et (3.73b) dans (3.67), on obtient les deux équations suivantes :

$$\mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I + \mathbf{C}^I \dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I + \mathbf{K}^I \mathbf{U}_{free,n+m}^I = \mathbf{F}_{ext,n+m}^I + \mathbf{F}_{D,n+m}^I \quad (3.77a)$$

$$\mathbf{M}^I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I + \mathbf{C}^I \dot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I + \mathbf{K}^I \mathbf{U}_{link,n+m}^I = \mathbf{F}_{link,n+m}^I \quad (3.77b)$$

En remplaçant les déplacements et les vitesses par leurs expressions (3.75a), (3.75b), (3.76a) et (3.76b), on obtient les équations suivantes qui permettent de calculer les accélérations $\ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I$ et $\ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{M}}^I \ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I = \mathbf{F}_{ext,n+m}^I + \mathbf{F}_{D,n+m}^I - \mathbf{C}^I {}^P\dot{\mathbf{U}}_n^I - \mathbf{K}^I {}^P\mathbf{U}_n^I \quad (3.78a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^I \ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I = \mathbf{F}_{link,n+m}^I \quad (3.78b)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}^I$ est la matrice de masse modifiée, telle que :

$$\tilde{\mathbf{M}}^I = \mathbf{M}^I + \Delta T \gamma_I \mathbf{C}^I + \Delta T^2 \beta_I \mathbf{K}^I \quad (3.79)$$

où γ_I et β_I sont les paramètres de Newmark. Ici, on va utiliser le schéma de l'accélération moyenne, donc : $\gamma_I = \frac{1}{2}$ et $\beta_I = \frac{1}{4}$.

De la même façon que pour le domaine implicite Ω_I , la vitesse et le déplacement dans le sous domaine explicite Ω_E sont également décomposés en une partie "free" et une partie "link". En utilisant les formules principales (2.127a) et (2.127b) de l'intégrateur

CD-Lagrange développé dans le chapitre précédent, la vitesse et le déplacement à l'instant t_{n+j} peuvent s'écrire :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+j}^E = \left(\dot{\mathbf{U}}_{n+j-1}^E + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{n+j-1}^E + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{free,n+j}^E \right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{W}_{link,n+j}^E \right) \quad (3.80a)$$

$$\mathbf{U}_{n+j}^E = \left(\mathbf{U}_{n+j-1}^E + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n+j-1}^E + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_{n+j-1}^E \right) \quad (3.80b)$$

D'après les équations (3.80a) et (3.80b), on distingue donc les déplacements et les vitesses "free" et "link" comme suit :

$$\dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E = \dot{\mathbf{U}}_{n+j-1}^E + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{n+j-1}^E + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{free,n+j}^E \quad (3.81a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{link,n+j}^E = \frac{1}{2} \mathbf{W}_{link,n+j}^E \quad (3.81b)$$

et :

$$\mathbf{U}_{free,n+j}^E = \mathbf{U}_{n+j-1}^E + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{n+j-1}^E + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}_{n+j-1}^E \quad (3.82a)$$

$$\mathbf{U}_{link,n+j}^E = 0 \quad (3.82b)$$

On note ici que la partie "link" du déplacement associée au problème de couplage est nulle parce que, dans un schéma explicite comme c'est le cas de l'intégrateur CD-Lagrange, la configuration au début du pas de temps est connue. Le déplacement \mathbf{U}_{n+j}^E ne dépend donc pas de la résolution du problème de couplage à l'instant t_{n+j} . D'après les équations (2.120), (2.121) et (2.122) on obtient les termes $\mathbf{W}_{free,n+j}^E$ et $\mathbf{W}_{link,n+j}^E$ comme suit :

$$\mathbf{W}_{free,n+j}^E = (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} \left(\Delta t (\mathbf{F}_{ext,n+j}^E + \mathbf{F}_{D,n+j}^E - \mathbf{F}_{int,n+j}^E - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+j-\frac{1}{2}}^E) + \mathbf{I}_{n+j} \right) \quad (3.83a)$$

$$\mathbf{W}_{link,n+j}^E = \Delta t (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} \mathbf{F}_{link,n+j}^E \quad (3.83b)$$

Équation de couplage discrétisée : l'équation de couplage s'obtient en remplaçant la décomposition de la vitesse (3.73a) et du déplacement (3.73b) dans l'équation (3.72) comme suit :

$$\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}_{link,n+j}^E + \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}_{link,n+j}^I = -\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E - \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^I \quad (3.84)$$

En remplaçant les vitesses par leurs expressions (3.75b), (3.78b), (3.81b) et (3.83b) dans (3.84) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_G^E (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} \mathbf{F}_{link,n+j}^E + \Delta T \gamma \mathbf{L}_G^I (\tilde{\mathbf{M}}^I)^{-1} \mathbf{F}_{link,n+j}^I = \\ -\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E - \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^I \end{aligned} \quad (3.85)$$

En utilisant la relation $\mathbf{F}_{link}^k = (\mathbf{L}_G^k)^T \boldsymbol{\Lambda}_G$, l'équation d'interface à résoudre pour réaliser le couplage entre les deux sous domaines implicite Ω_I et explicite Ω_E s'écrit :

$$(\mathbf{H}^E + \mathbf{H}^I) \boldsymbol{\Lambda}_{G,n+j} = -\mathbf{L}_G^E \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E - \mathbf{L}_G^I \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^I \quad (3.86)$$

où :

$$\mathbf{H}^E = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_G^E (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} (\mathbf{L}_G^E)^T \quad (3.87)$$

$$\mathbf{H}^I = \Delta T \gamma_I \mathbf{L}_G^I (\tilde{\mathbf{M}}^I)^{-1} (\mathbf{L}_G^I)^T \quad (3.88)$$

et le déplacement $\dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^I$ est l'interpolation linéaire du déplacement $\dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I$ à l'instant t_{n+j} , tel que :

$$\dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^I = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{U}}_{free,n}^I + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I \quad (3.89)$$

Remarque : il est important de noter que les forces \mathbf{F}_D^I et \mathbf{F}_D^E dues aux conditions de Dirichlet ainsi que l'impulsion de contact/impact \mathbf{I} ne sont pas prises en compte pour résoudre l'équation de couplage (3.86) parce que $\Gamma_G \cap \Gamma_D^I = \emptyset$, $\Gamma_G \cap \Gamma_D^E = \emptyset$ et $\Gamma_G \cap \Gamma_C^E = \emptyset$.

Équation de contact discrétisée : l'équation locale de contact permettant de calculer les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_c$, s'obtient en multipliant l'équation d'équilibre (3.68) par le terme $\mathbf{L}_{c,n+j} (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1}$ comme suit :

$$\mathbf{H}_c \boldsymbol{\lambda}_{c,n+j+\frac{1}{2}} = \mathbf{b}_c \quad (3.90)$$

où :

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{L}_{c,n+j} (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} \mathbf{L}_{c,n+j}^T \quad (3.91)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{v}_{c,n+j+\frac{1}{2}} - \mathbf{L}_{c,n+j} \left(\dot{\mathbf{U}}_{n+j-\frac{1}{2}} + \Delta t (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+j} - \mathbf{F}_{int,n+j} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}}) \right) \quad (3.92)$$

Remarque : les forces \mathbf{F}_D^E dues aux conditions de Dirichlet ainsi que les forces de couplage \mathbf{F}_{link}^E ne sont pas prises en compte pour résoudre le problème de contact (3.90) car $\Gamma_C^E \cap \Gamma_D^E = \emptyset$ et $\Gamma_C^E \cap \Gamma_G = \emptyset$.

Équations de Dirichlet : pour établir les équations permettant de calculer les efforts \mathbf{F}_D^k dus aux conditions de Dirichlet, on remplace les vitesses par leurs décompositions (3.73a) dans les équations discrétisées (3.70) et (3.71) :

$$L_D^E \dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E + L_D^E \dot{\mathbf{U}}_{link,n+j}^E = 0 \quad (3.93)$$

$$L_D^I \dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I + L_D^I \dot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I = 0 \quad (3.94)$$

Or, on a $\Gamma_G \cap \Gamma_D^I = \emptyset$ et $\Gamma_G \cap \Gamma_D^E = \emptyset$, donc :

$$L_D^E \dot{\mathbf{U}}_{link,n+j}^E = 0 \quad (3.95)$$

$$\mathbf{L}_D^I \dot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I = 0 \quad (3.96)$$

En remplaçant les vitesses "free" par leurs expressions (3.81a) et (3.75a), respectivement, dans les équations (3.95) et (3.96), on obtient les équations suivantes, permettant de calculer les multiplicateurs de Lagrange, associées aux conditions de Dirichlet dans chaque sous domaine comme suit :

$$\mathbf{H}_D^E \Lambda_{D,n+j}^E = \mathbf{b}_D^E \quad (3.97)$$

$$\mathbf{H}_D^I \Lambda_{D,n+m}^I = \mathbf{b}_D^I \quad (3.98)$$

Avec :

$$\mathbf{H}_D^E = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_D^E (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} (\mathbf{L}_D^E)^T \quad (3.99)$$

$$\mathbf{b}_D^E = - \left(\mathbf{L}_D^E (\dot{\mathbf{U}}_{n+j-1}^E + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{n+j-1}^E) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_D^E (\mathbf{M}_{lump}^E)^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+m}^E - \mathbf{F}_{int,n+m}^E - \mathbf{C}^E \dot{\mathbf{U}}_{n+j-\frac{1}{2}}^E) \right) \quad (3.100)$$

Et :

$$\mathbf{H}_D^I = (\Delta T \gamma_I) \mathbf{L}_D^I (\tilde{\mathbf{M}}^I)^{-1} (\mathbf{L}_D^I)^T \quad (3.101)$$

$$\mathbf{b}_D^I = - \left(\mathbf{L}_D^I \mathbf{P} \dot{\mathbf{U}}_n^I + (\Delta T \gamma_I) \mathbf{L}_D^I (\tilde{\mathbf{M}}^I)^{-1} (\mathbf{F}_{ext,n+m}^I - \mathbf{C}^{IP} \dot{\mathbf{U}}_n^I - \mathbf{K}^{IP} \mathbf{U}_n^I) \right) \quad (3.102)$$

L'implémentation de cet intégrateur hétérogène asynchrone implicite-explicite pour la dynamique du contact, est décrite dans le pseudo-algorithme 5.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'équation discrétisée du bilan énergétique du problème multi-échelle en temps avec contact/impact décrit ci-dessus.

3.3.4 Équation discrétisée du bilan énergétique

Afin de vérifier le comportement énergétique de l'intégrateur implicite-explicite développé ci-dessus, on présente ici son équation discrétisée du bilan énergétique. D'après l'équation du bilan énergétique (2.154), établie dans le cadre de l'intégrateur CD-Lagrange, et l'équation du bilan énergétique (3.47), rappelée dans le cadre de la méthode GC, l'équation du bilan énergétique de l'intégrateur implicite-explicite s'écrit sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+m}]$ comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta W_{cin,n+m}^I + \Delta W_{int,n+m}^I + \sum_{j=1}^m (\Delta W_{cin,n+j}^E + \Delta W_{int,n+j}^E + \Delta W_{comp,n+j}^E) &= \Delta W_{ext,n+m}^I \\ + \Delta W_{D,n+m}^I + \sum_{j=1}^m (\Delta W_{ext,n+j}^E + \Delta W_{IC,n+j}^E + \Delta W_{D,n+j}^E) &+ \Delta W_{interface} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Les incréments de l'énergie cinétique ΔW_{cin} , de l'énergie interne ΔW_{int} , de l'énergie complémentaire ΔW_{comp} , de l'énergie externe ΔW_{ext} , de l'énergie de contact/impact ΔW_{IC} et de l'énergie d'interface $\Delta W_{interface}$ sont donnés, respectivement, dans les équations (2.155), (2.158), (2.156), (2.157), (2.160) et (3.48). L'incrément de l'énergie dû aux efforts de Dirichlet s'écrit ainsi :

Algorithm 5 Algorithme implicite-explicite pour la dynamique du contact

1. Initialisation
 2. Boucle sur le macro pas de temps
 - (a) Résolution du problème "free" (3.78a) \Rightarrow Calcul des accélérations "free" $\ddot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I$
 - (b) Calcul des quantités cinématiques "free" $\dot{\mathbf{U}}_{free,n+m}^I$ (3.75a) et $\mathbf{U}_{free,n+m}^I$ (3.76a)
 - (c) Boucle sur les micro pas de temps ($0 \leq j \leq m$)
 - i. Résolution de l'équation de Dirichlet (3.97) \Rightarrow Calcul des efforts $\mathbf{F}_{D,n+j}^E$
 - i. Résolution du problème de contact (3.90) \Rightarrow Calcul de l'impulsion \mathbf{I}_{n+j} (voir l'algorithme 3)
 - ii. Résolution du problème "free" (3.83a) \Rightarrow Calcul de la quantité $\mathbf{W}_{free,n+j}^E$
 - iii. Calcul de la vitesse "free" $\dot{\mathbf{U}}_{free,n+j}^E$ (3.81a)
 - iv. Résolution de l'équation de couplage (3.86) \Rightarrow Calcul des multiplicateurs de Lagrange $\Lambda_{G,n+j}$
 - v. Résolution du problème "link" (3.83b) \Rightarrow Calcul de la quantité cinématique $\mathbf{W}_{link,n+j}^E$
 - vi. Calcul des quantités cinématiques finales $\dot{\mathbf{U}}_{n+j}^E$ (3.80a) et \mathbf{U}_{n+j}^E (3.80b)
 - (d) Fin de la boucle sur les micro pas de temps
 - (e) Résolution de l'équation de Dirichlet (3.98) \Rightarrow Calcul des efforts $\mathbf{F}_{D,n+m}^I$
 - (f) Résolution du problème "link" (3.78b) \Rightarrow Calcul de l'accélération "link" $\ddot{\mathbf{U}}_{link,n+m}^I$
 - (g) Calcul des quantités cinématiques finales $\dot{\mathbf{U}}_{n+m}^I$ (3.74a) et \mathbf{U}_{n+m}^I (3.74b)
 3. Fin de la boucle sur le macro pas de temps
-

$$\Delta W_{D,e}^k = [\mathbf{U}_e^k]^T \langle \mathbf{F}_{D,e}^k \rangle \quad (3.104)$$

Comme évoqué ci-dessus, dans la pratique, l'énergie éventuellement dissipée à l'interface de couplage est contrôlée grâce au choix du rapport m entre le micro pas de temps et le macro pas de temps.

3.3.5 Exemple numérique

Dans ce paragraphe, un modèle numérique d'un pont roulant industriel est simulé à l'aide de l'algorithme hétérogène asynchrone implicite-explicite décrit dans l'algo-

rithme 5. Les résultats numériques de la simulation implicite-explicite sont comparés aux résultats d'une simulation entièrement explicite. La simulation entièrement explicite est réalisée avec l'algorithme CD-Lagrange développé dans le chapitre 2.

L'exemple numérique consiste en un pont roulant soumis à une accélération temporelle représentative d'un signal sismique dans la direction verticale z . Le pont roulant est modélisé par des éléments finis élastiques linéaires de type poutre. Le module d'élasticité est $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa. Dans cette simulation, seuls les contacts entre les galets du chariot et les poutres de charge sont considérés. Les quatre galets du pont roulant sont encastrés. Ces conditions limites sont illustrées dans la Figure 3.8. La géométrie ainsi que les différentes masses de ce modèle sont données dans la Figure 3.7. L'ensemble du pont roulant est modélisé par des éléments finis poutre de la même longueur $h = 50$ mm. Dans le but de réaliser une simulation hétérogène asynchrone implicite-explicite, le modèle est découpé en deux sous domaines. Un sous domaine explicite contenant les zones de contact avec un pas de temps fin $\Delta t \approx 3.57 \cdot 10^{-7}$ s. Un sous domaine implicite contenant le reste du maillage avec un pas de temps grossier $\Delta T = 50\Delta t$. La décomposition des sous domaines pour la simulation implicite-explicite est donnée dans la Figure 3.9. L'ensemble du pont roulant est soumis à une force de gravité constante $g = 10$ m/s² ainsi qu'à une accélération temporelle $a_s(t)$ dans la direction verticale z . Le signal sismique $a_s(t)$ est représenté dans la Figure 3.10.

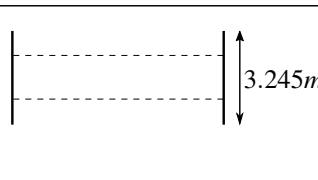
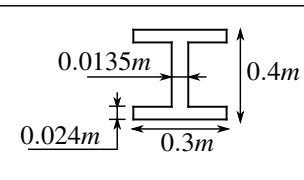
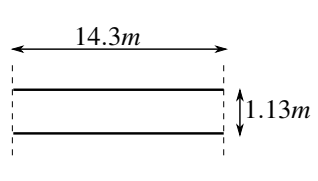
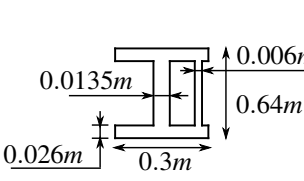
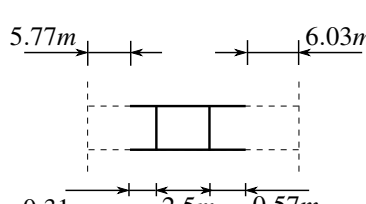
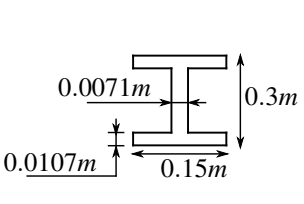
	Dimensions	Section	Masse
End-carriages			3003 kg
Girders			10844 kg
Trolley			5150 kg

FIGURE 3.7 – Modèle poutre du pont roulant : géométrie, dimensions et masses

Tous les résultats numériques sont tracés pour les deux nœuds du contact N°1 (voir la Figure 3.8). La même analyse numérique peut être faite pour les paires de nœuds des

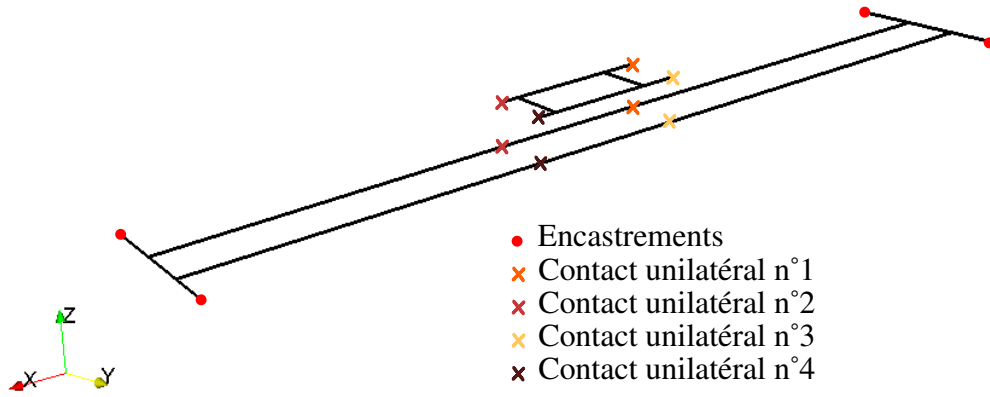


FIGURE 3.8 – Modèle poutre du pont roulant : conditions limites et contacts

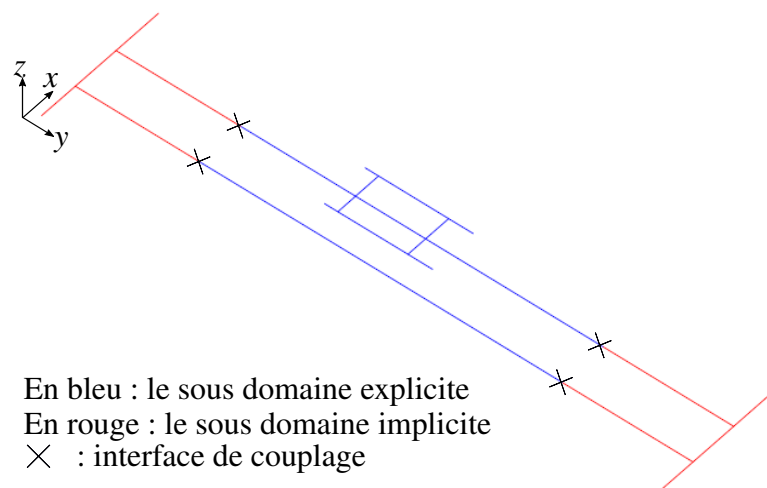


FIGURE 3.9 – Modèle poutre du pont roulant : décomposition en sous domaines

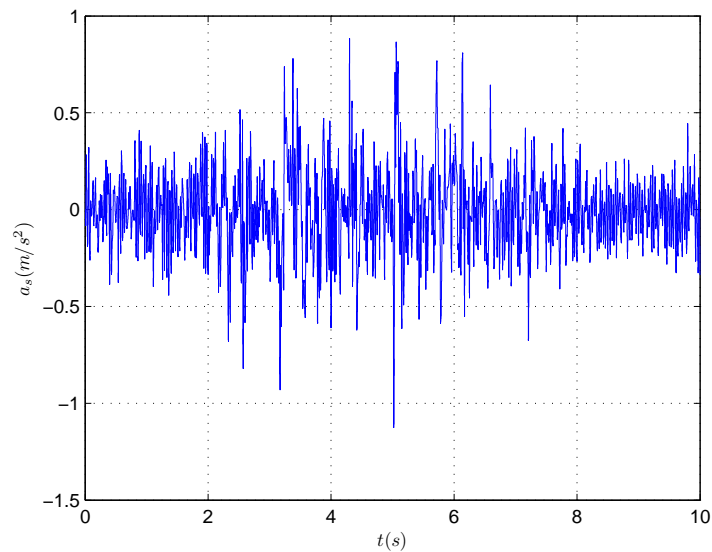


FIGURE 3.10 – Modèle poutre du pont roulant : signal sismique dans la direction z

autres contacts. Les Figures 3.11 et 3.12 montrent, respectivement, les déplacements et les vitesses des nœuds du contact N°1. Les Figures 3.11(a) et 3.12(a) sont les résultats de la simulation explicite, et les Figures 3.11(b) et 3.12(b) sont ceux de la simulation implicite-explicite.

D'après les Figures 3.11 et 3.12, on constate qu'au début de l'excitation sismique (jusqu'à environ 4s), le chariot se décolle de la poutre, et son atterrissage crée des impacts importants et donc des sauts de vitesse importants. Ensuite, les mouvements du chariot et des poutres de charge sont synchronisés. Le chariot se décolle moins et les vitesses sont plus régulières. La simulation entièrement explicite et la simulation implicite-explicite donnent quasiment les mêmes résultats cinématiques. Les déplacements et les vitesses sont globalement du même ordre de grandeur entre les deux simulations. Néanmoins, les résultats de la simulation implicite-explicite sont très légèrement amortis (les pics de vitesse et de déplacement de la simulation explicite sont légèrement plus grands que ceux de la simulation implicite-explicite). Pour analyser cela, on trace les bilans énergétiques des deux simulations dans la Figure 3.13. On trace également le pourcentage de l'énergie totale dissipée dans chaque simulation par rapport à l'énergie maximale du problème dans la Figure (3.14). D'après la Figure 3.12, on observe des oscillations parasites dans les vitesses. Ces oscillations sont dues aux sauts de vitesse (présence d'impacts) et au schéma explicite de la différence centrée.

D'après la Figure 3.13, on note que le bilan énergétique est bien vérifié pour les deux simulations. C'est-à-dire que la somme de toutes les énergies dans chaque problème est égale à zéro. On remarque également que l'énergie du contact W_{IC} est plus faible dans le cas d'un calcul implicite-explicite. Ceci est dû au couplage à l'interface entre les deux

3. Intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact

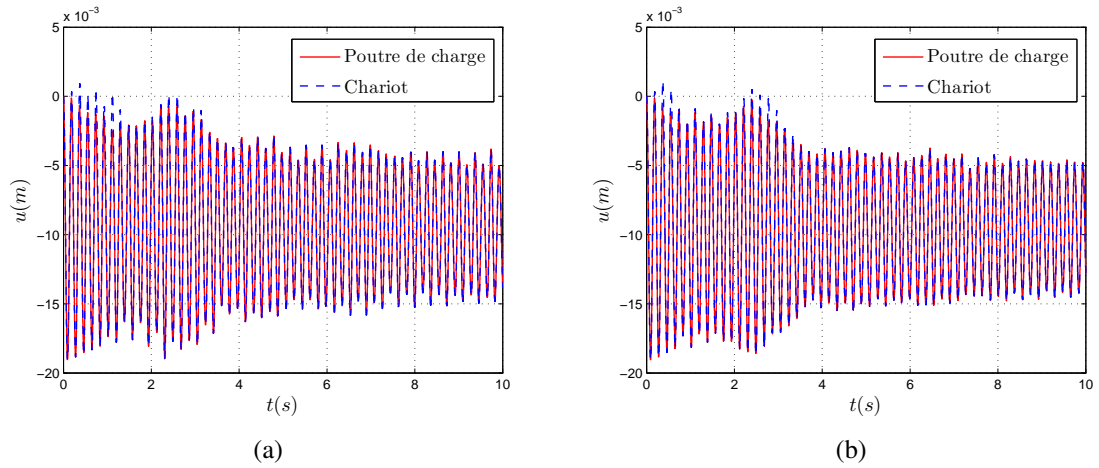


FIGURE 3.11 – Modèle poutre du pont roulant : déplacements (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite

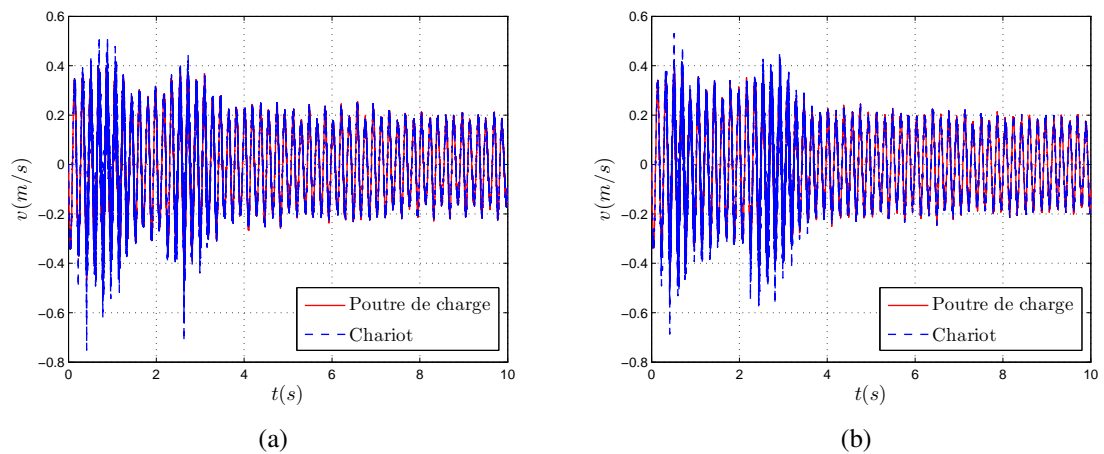


FIGURE 3.12 – Modèle poutre du pont roulant : vitesses (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite

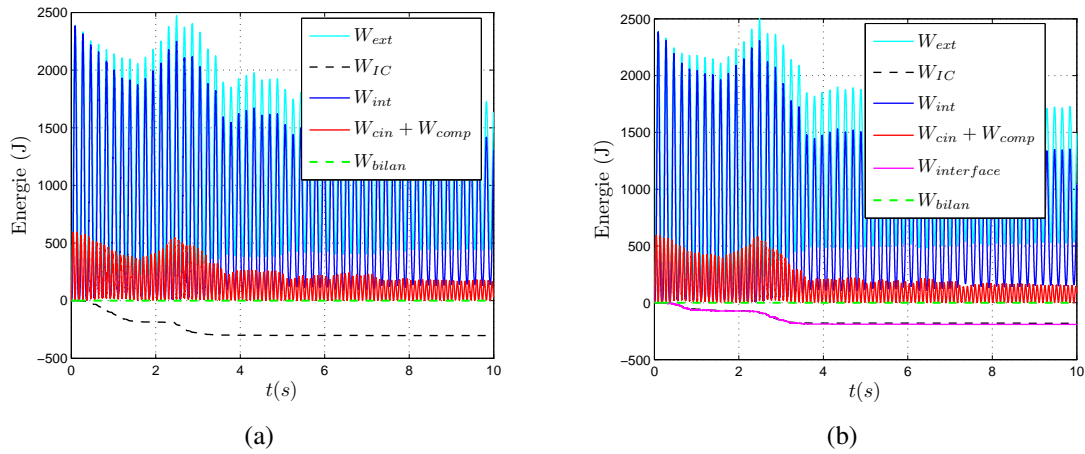


FIGURE 3.13 – Modèle poutre du pont roulant : bilan énergétique (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite ($m = 50$)

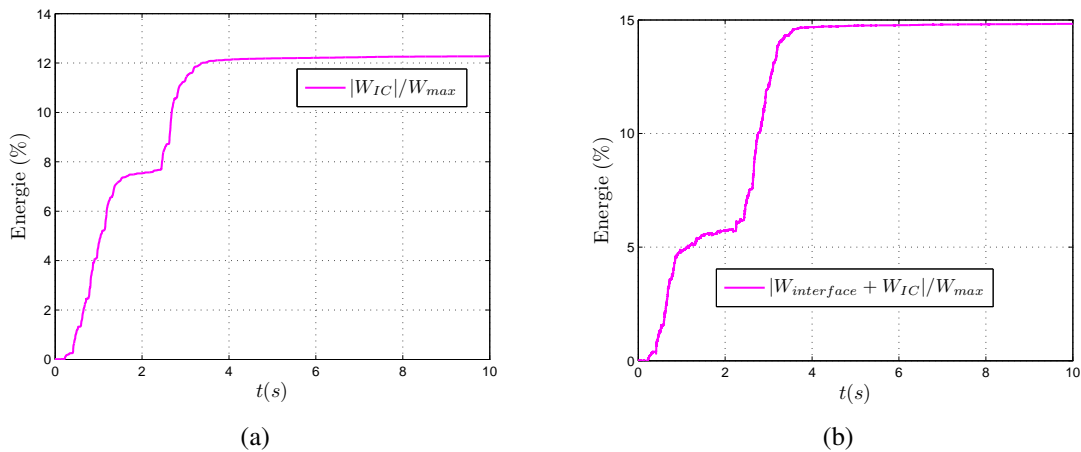


FIGURE 3.14 – Modèle poutre du pont roulant : énergie dissipée (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite ($m = 50$)

sous domaines. En effet, l'énergie dissipée à l'interface de couplage $W_{interface}$ influe essentiellement sur l'énergie due aux impacts W_{IC} . Par conséquent, l'énergie totale dissipée dans le calcul implicite-explicite ($W_{interface} + W_{IC}$) est équivalente à l'énergie dissipée dans le calcul explicite (W_{IC}). Néanmoins, d'après la Figure (voir la Figure 3.14), l'énergie totale dissipée dans le calcul implicite-explicite est légèrement supérieure à l'énergie dissipée dans le calcul explicite, ce qui explique le faible amortissement observé sur les résultats de la simulation implicite-explicite. Pour un calcul implicite-explicite avec un rapport de pas de temps $m = 1$, l'énergie d'interface est nulle et toute l'énergie dissipée est due aux impacts (voir la Figure 3.15). On retrouve d'ailleurs la même valeur que l'énergie due aux impacts du calcul explicite.

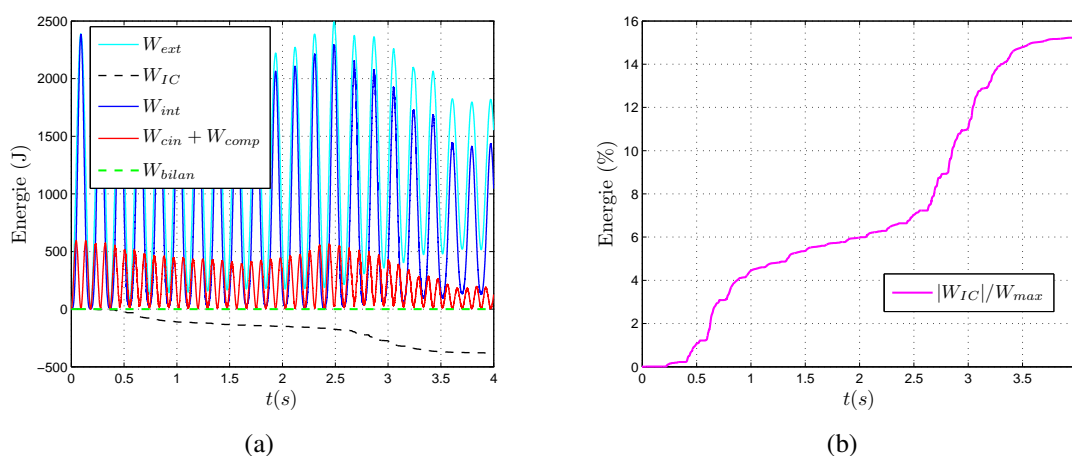


FIGURE 3.15 – Modèle poutre du pont roulant : bilan énergétique pour $m=1$

A travers cet exemple de pont roulant, nous avons démontré que l'intégrateur temporel hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact, proposé dans ce chapitre, donne des résultats similaires à un calcul entièrement explicite avec l'intégrateur CD-Lagrange développé et validé dans le chapitre 2. En revanche, la méthode de couplage de l'intégrateur temporel implicite-explicite dissipe de l'énergie à l'interface de couplage, mais nous avons démontré que cette dissipation impacte essentiellement l'énergie due aux impacts. Donc, l'énergie de couplage n'amortit que très peu la solution cinématique. De plus, cette dissipation peut-être contrôlée par le choix du rapport m entre le micro pas de temps et le macro pas de temps. En raison du découpage grossier des sous domaines implicite et explicite (voir la Figure 3.9), le gain en temps CPU pour cet exemple n'est pas très significatif. Pour une simulation numérique du modèle décrit ci-dessus sur 10 s d'excitation sismique, le temps CPU est de 52 h pour un calcul entièrement explicite, est de 50 h pour une simulation implicite-explicite avec $m = 50$. En effet, l'objectif de cet exemple était de valider les résultats de l'intégrateur hétérogène asynchrone pour la dynamique du contact par rapport à un calcul entièrement explicite. Un découpage plus fin avec un sous domaine explicite très réduit, améliorerait le gain en temps CPU par rapport

à une simulation entièrement explicite. Dans le prochain chapitre nous allons démontrer, pour un modèle numérique tridimensionnel, que la méthode de décomposition en sous domaines permet un gain très significatif en temps de calcul.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps), basé sur la méthode de couplage GC, est proposé. La stratégie multi-échelle en temps a permis d'adapter le schéma d'intégration et le pas de temps à la problématique du sous domaine considéré. Nous avons démontré à travers l'exemple numérique du pont roulant sous séisme, que le couplage ne dégrade pas la solution numérique même en présence de non-linéarités (impacts) dans un des sous domaines de la structure. De plus, la dissipation de l'énergie au niveau de l'interface de couplage est entièrement contrôlée. Dans le chapitre suivant, la méthode de couplage GC va être utilisée pour réaliser un démonstrateur de co-simulation entre les deux logiciels Cast3M et Europlexus.

Chapitre 4

Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

Ce dernier chapitre est consacré à la mise en place d'un démonstrateur de co-simulation entre les logiciels Cast3M et Europlexus. Pour valider les résultats de la co-simulation implicite-explicite, un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant est considéré. La maquette est un modèle à l'échelle 1/5 d'un pont roulant industriel. Elle a été testée sur la table vibrante "AZALEE" du CEA à Saclay. Les détails de ces essais ainsi qu'un état de l'art sur les différents tests dans ce domaine sont présentés dans la première partie de ce chapitre. La stratégie de co-simulation ainsi que les résultats numériques sont détaillés dans la deuxième partie.

Sommaire

4.1	Essais sismiques d'une maquette de pont roulant	108
4.1.1	État de l'art	108
4.1.2	Présentation de la maquette	109
4.1.3	Présentation des essais	111
4.2	Calcul tridimensionnel temporel implicite-explicite de la maquette . . .	112
4.2.1	Modélisation tridimensionnelle de la maquette	113
4.2.2	Étude des modes propres du modèle de la maquette	116
4.2.3	Modélisation des contacts dans Europlexus	119
4.2.4	Stratégie de couplage entre Cast3M et Europlexus	123
4.2.5	Résultats numériques	125
4.3	Conclusion	126

4.1 Essais sismiques d'une maquette de pont roulant

4.1.1 État de l'art

Comme déjà mentionné dans le premier chapitre, la vérification au séisme des ponts roulants est un sujet très important car relatif à la sécurité des installations industrielles critiques, notamment les centrales nucléaires. En revanche, dans la littérature, il y a très peu d'essais expérimentaux et de travaux de recherche relatifs à la réponse sismique des ponts roulants sont publiés dans la littérature. Néanmoins, au vu de l'activité sismique dans leur pays, les Japonais sont actifs dans ce domaine. Komori et al. [KOM 89a, KOM 89b] ont conduit des essais d'un modèle de pont roulant à l'échelle 1/10 pour étudier essentiellement le glissement des galets sur les rails sous une excitation sismique horizontale. Otani et al. [OTA 02] ont également mené des essais sismiques sur une maquette de pont roulant à l'échelle 1/8 afin d'étudier le comportement du pont roulant dans la direction verticale, à savoir les rebonds et les impacts du pont roulant entier sur les rails du bâtiment. Le chariot était alors fixé sur les poutres principales. Otani et al. [OTA 02] proposent deux modèles numériques, un linéaire et un non-linéaire. Ils montrent que les réactions aux galets peuvent être estimées par le modèle linéaire malgré la présence d'impacts. Plus récemment, l'organisation japonaise JNES (Japan Nuclear Energy Safety) a mené une campagne d'essais sismiques [SUZ 10]. Il y a eu deux séries d'essais. La première série consiste en des essais sismiques sur trois modèles élémentaires. Le premier modèle élémentaire est une maquette de pont roulant à l'échelle 1/10 dont les poutres principales sont fixées sur les rails du bâtiment. L'objectif de ce modèle est d'étudier l'influence de la position du chariot sur son comportement dynamique. Les différents tests ont montré que le chariot rebondit plus haut lorsqu'il est placé au milieu des poutres principales. La hauteur de rebond est plus importante pour une excitation sismique verticale par rapport à une excitation sismique dans les trois directions. Ensuite, le deuxième essai élémentaire concerne également la maquette à l'échelle 1/10 à laquelle on a rajouté une charge suspendue au chariot. L'objectif de l'essai est d'étudier l'influence de la charge et notamment l'influence de la longueur de câble de suspension sur la réponse du pont roulant. Il a été démontré que la charge suspendue diminue globalement le déplacement vertical du pont roulant, et les réactions aux galets sont donc également moins importantes. Le dernier test élémentaire consiste à lâcher un galet de plusieurs hauteurs sur un rail. Ce test a permis de déterminer un coefficient de restitution d'environ 0.64. Un essai similaire au dernier test élémentaire a été conduit par Romain Duval au CETIM. Les résultats des essais ont permis de déterminer un coefficient de restitution de 0.5. Après ces tests élémentaires, le JNES a mené des essais sismiques sur une maquette de pont roulant à l'échelle 1/2.5. Dans cet objectif, d'après [SUZ 10], la plus grande table vibrante au monde a été utilisée. Les résultats de cet essai n'ont pas été publiés dans [SUZ 10].

En France, l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) et le Commissariat à l'Énergie atomique et aux Énergies alternatives (CEA) ont mené récemment des essais sur une maquette de pont roulant à l'échelle 1/5 [FEA 15]. Ces essais sont réalisés sur la table vibrante "AZALEE" du CEA à Saclay. Dans les paragraphes qui suivent, nous

décrivons les conditions des essais ainsi que la maquette du pont roulant pour laquelle un modèle numérique tridimensionnel est proposé dans le paragraphe 4.2.

4.1.2 Présentation de la maquette

La maquette testée au CEA est un modèle à l'échelle 1/5 d'un pont roulant industriel de 22.5 m de longueur et ayant un poids total de 100 t (poids sans charge de levage). Les dimensions de la maquette ont été calculées en utilisant une loi de similitude particulière développée par Feau et al. [FEA 15] et qui a permis de construire une maquette sans masses additionnelles pour atteindre le poids du modèle réduit. La Figure 4.1 présente les différents composants de la maquette.

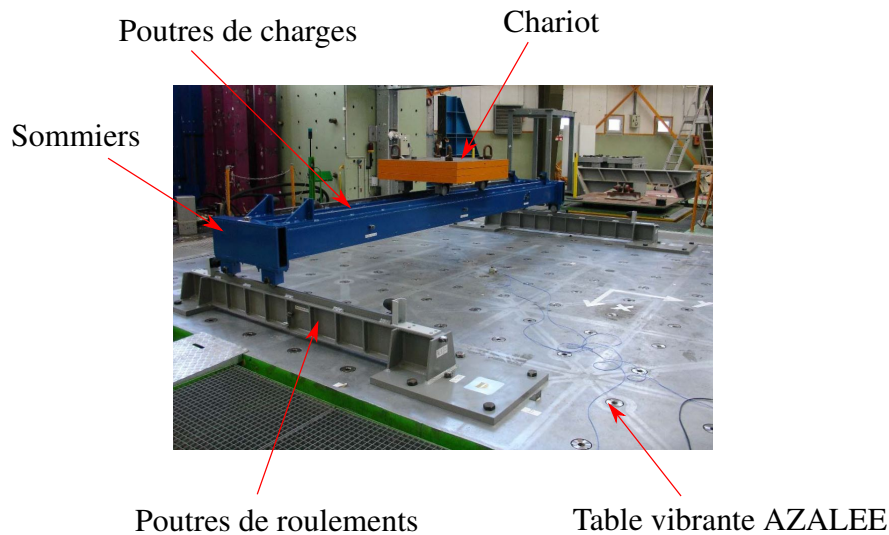


FIGURE 4.1 – La maquette du pont roulant sur la table vibrante AZALEE


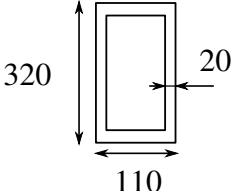
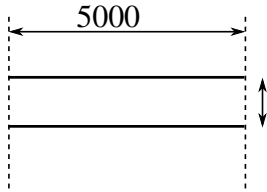
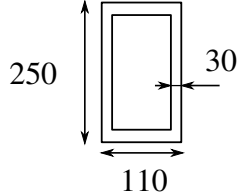

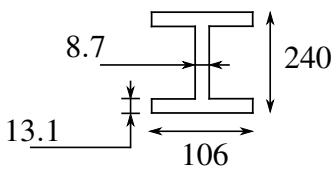
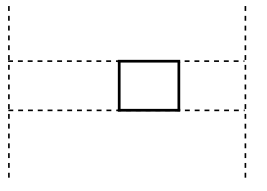
Les poutres de charge et les sommiers sont des poutres caisson, tandis que les poutres de roulement, appelées également poutres support des rails, sont des IPN. La structure du chariot n'est pas reproduite. Le chariot est juste représenté par un empilement de grandes masses carrées sur lesquelles les galets de roulements sont montés. Les dimensions des sections ainsi que les différentes masses sont résumées dans la Figure 4.2.

La masse totale théorique du pont roulant, incluant la masse des poutres de roulement ainsi que tout autre support ou matériel, est de 4.75 t. La masse théorique correspond à la masse définie par l'étude. Après construction de la maquette, la masse du chariot ainsi que la masse de l'ensemble "poutre de charges + sommiers" ont été mesurées :

- Masse du chariot : 1.88 t
- Masse poutre de charges + sommiers : 1.82 t

Donc la masse totale mesurée est de 4.15 t. Le chariot et les sommiers sont équipés de galets de roulement à simple joue de diamètre 105 mm et de largeur 35 mm (voir la Figure 4.3(a) et le chapitre 1). Sur le chariot, les joues des galets sont placées à l'intérieur, soit en regard de la face intérieure des rails comme le montre la Figure 4.3(b). En revanche,

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

	Dimensions*	Section*	Masse* théorique
Sommiers			0.3
Poutres de charge			2
Poutres de roulement			0.15
Chariot		—	2

* Les masses sont en tonne, les dimensions et les sections sont en mm

FIGURE 4.2 – Masses et dimensions de la maquette

sur les sommiers, les joues des galets sont placées en regard de la face extérieure des rails. Comme c'est le cas pour les ponts roulants industriels, la maquette contient des galets moteurs et des galets libres (voir le chapitre 1), leur emplacement est illustré dans la Figure 4.4 extraite de l'article de Feau et al. [FEA 15]. La maquette est fixée sur la table vibrante par l'intermédiaire de quatre grandes plaques soudées sur la partie de la face intérieure des poutres de roulement et boulonnées sur la table vibrante comme le montre la Figure 4.5. Des accéléromètres ont été placés sur les quatre plaques de fixation afin de vérifier le bon transfert de signal entre le plateau de la table vibrante et la base des poutres de roulement.

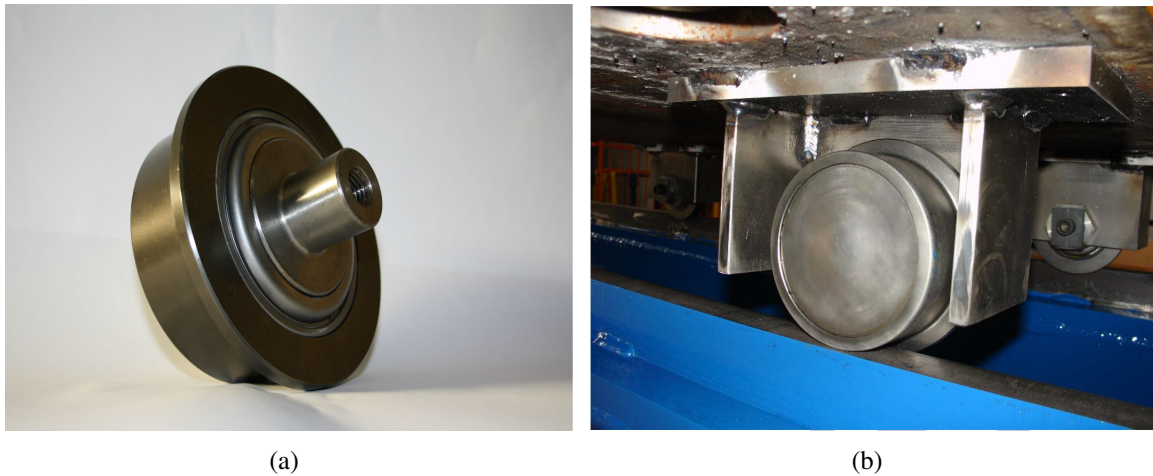


FIGURE 4.3 – (a) Galet à simple joue, (b) emplacement des joues des galets du chariot par rapport aux rails

4.1.3 Présentation des essais

Dans un premier temps, une analyse modale de la maquette a été réalisée. Pour cela, un signal de très faible intensité a été appliqué à la table vibrante. L'objectif de ce test est d'identifier les caractéristiques de la maquette lorsque sa réponse est très proche de la réponse linéaire (les contacts galet-rail sont considérés collés sous un signal de très faible intensité). Cet essai a permis de déterminer les trois premiers modes propres de la maquette. Les valeurs expérimentales des modes propres principaux sont très importants pour recalibrer les modèles numériques de la maquette (voir le paragraphe 4.2.2 et [FEA 15]). Ensuite, des essais sous excitations sismiques ont été menés. Les signaux temporels considérés correspondent aux accélérations du sol. Comme mentionné dans le chapitre 1, un pont roulant est réellement soumis à l'accélération du sol filtrée par le bâtiment abritant le pont roulant. Mais, en raison des incertitudes liées au calcul d'un signal de plancher, l'accélération du sol a été directement appliquée à la table vibrante sur laquelle la maquette est fixée. Toutefois, les résultats de ces essais restent très importants pour valider les modèles et méthodes numériques. En effet, Feau et al. [FEA 15] propose un modèle poutre de la maquette qui a été recalé sur les résultats expérimentaux de ces essais. Deux essais principaux ont été réalisés. Un essai bi-axial avec une excitation en x et en y , et un essai tri-axial. Les accélérations temporelles dans les trois directions x , y et z , notées a_{s_x} , a_{s_y} , a_{s_z} respectivement, sont représentées dans la Figure 4.6. Ces signaux ont été générés artificiellement à partir du spectre de réponse représentatif du site de la centrale nucléaire de Marcoule, dans le sud de la France. Pour les deux essais, le chariot est positionné au milieu des poutres de charge, et le pont lui-même est positionné au milieu des supports des rails.

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

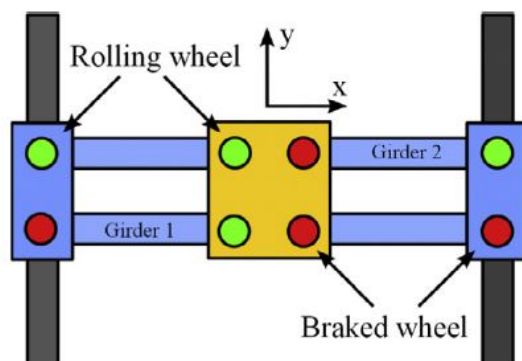


FIGURE 4.4 – Configuration des galets de la maquette

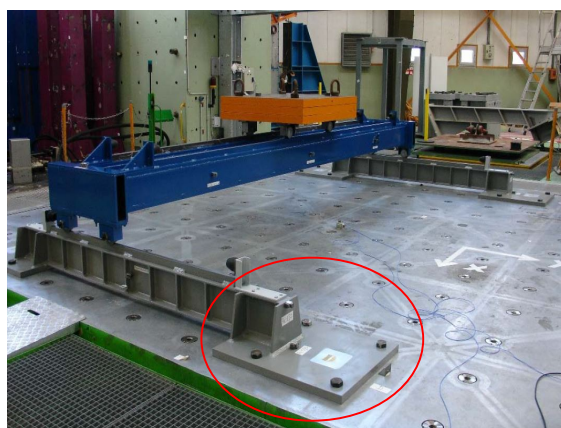


FIGURE 4.5 – Système d'attaches des supports des rails à la table vibrante

4.2 Calcul tridimensionnel temporel implicite-explicite de la maquette

Dans ce paragraphe, nous allons présenter un modèle tridimensionnel et un calcul implicite-explicite de la maquette du pont roulant présentée dans le paragraphe 4.1.2. L'objectif de ce travail est de réaliser un démonstrateur logiciel de co-simulation entre deux codes industriels qui sont Cast3M et Europlexus. Pour cela, le modèle tridimensionnel de la maquette est décomposé en deux sous domaines. Un sous domaine explicite contenant les zones de contact, qui sera simulé avec le logiciel explicite Europlexus, et un sous domaine implicite calculé avec le logiciel Cast3M en utilisant le schéma implicite de l'accélération moyenne. En plus de pouvoir choisir le logiciel adapté aux problématiques spécifiques à chaque sous domaine, la co-simulation, en particulier pour un modèle tridimensionnel, va permettre un gain très significatif en temps de calcul comme il sera démontré pour cet exemple.

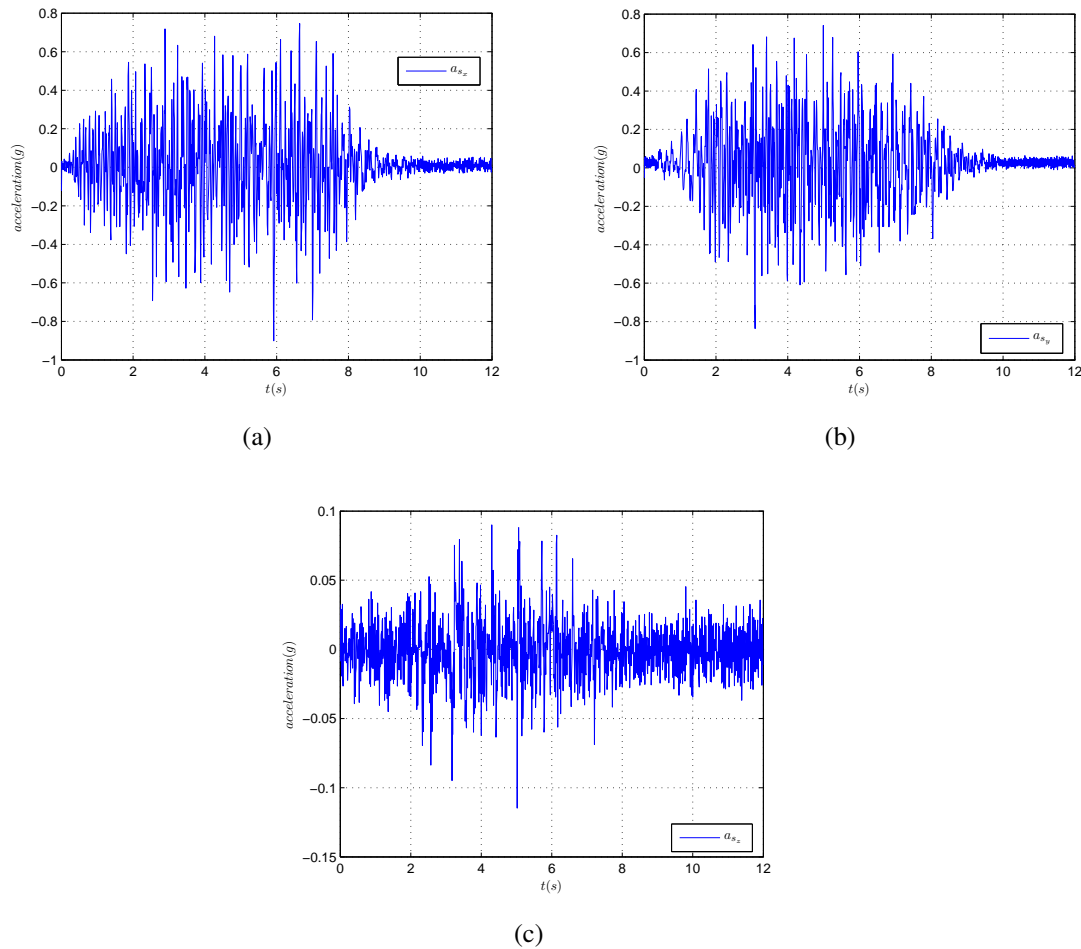


FIGURE 4.6 – Accélérations temporelles dans les directions : (a) x, (b) y, (c) z, auxquelles la maquette est soumise pendant les essais

4.2.1 Modélisation tridimensionnelle de la maquette

Le maillage de la maquette est réalisé avec le logiciel Gmsh, et afin d’avoir une précision de calcul avec un nombre d’éléments moins coûteux en terme de temps de calcul [BON 98], nous avons réalisé un maillage structuré avec des éléments cubes. La Figure 4.7 est un aperçu du maillage de la maquette.

Les galets sont modélisés par des demi-cylindres de la même épaisseur et du même diamètre que les galets réels de la maquette. En revanche, la liaison des galets par rapport à la structure n’est pas modélisée. C’est-à-dire que, dans le modèle éléments finis, les demi-cylindres ont toujours le même déplacement que le chariot et ne peuvent pas tourner sur eux-même (voir les Figures 4.8 et 4.9). Le choix de simplifier la modélisation des galets est basé sur le fait que la vérification au séisme est faite pour le pont roulant à l’arrêt avec les galets moteurs freinés (voir le chapitre 1). Donc, dans ces conditions, les

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

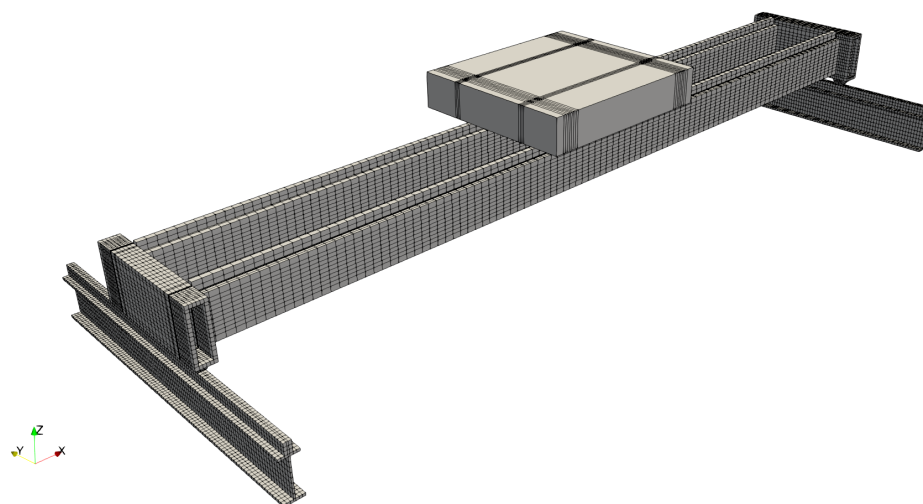


FIGURE 4.7 – Maillage cube de la maquette

galets moteurs ne peuvent que frotter ou glisser sur les rails. En revanche, les galets libres peuvent rouler mais la prise en compte de ce roulement dans le modèle numérique se fait par l'attribution d'un coefficient de frottement très faible voire nul au niveau de ces galets libres.

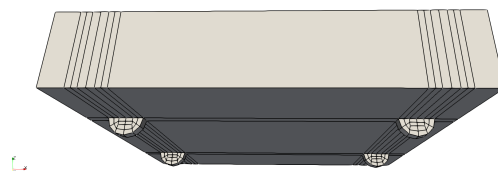


FIGURE 4.8 – Aperçu du maillage du chariot

Dans la Figure 4.9, on peut voir qu'il y a des éléments du sommier de taille beaucoup plus petite que l'ensemble des éléments. Leur taille est en réalité imposée par des contraintes de la géométrie, notamment les intersections entre les différentes sections du pont roulant. À part ces galets, le chariot a été volontairement maillé grossièrement, car sa structure n'est pas étudiée. Il représente juste la masse totale du chariot du pont roulant. La fixation des supports des rails sur la table vibrante est représentée dans le modèle éléments finis par un encastrement des extrémités des supports des rails sur toute la section (voir la Figure 4.10).

Pour un calcul implicite-explicite, le modèle est donc décomposé en deux sous domaines : un sous domaine implicite qui sera calculé avec le logiciel Cast3M avec un schéma de l'accélération moyenne, et un sous domaine explicite, contenant les zones de



FIGURE 4.9 – Aperçu du maillage du sommier et des poutres de charge

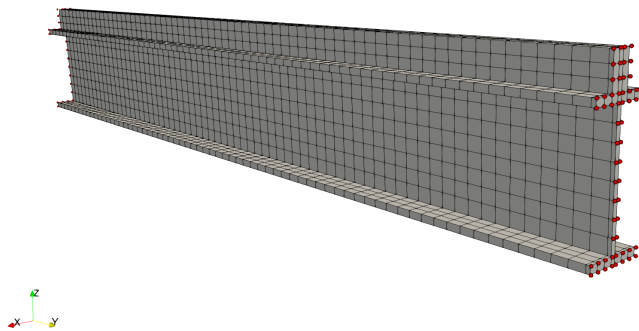


FIGURE 4.10 – Nœuds d'encastrement aux extrémités des supports des rails

contact, qui sera calculé avec le logiciel explicite Europlexus. Le couplage est ensuite réalisé à l'interface entre les deux sous domaine grâce à un coupleur écrit dans le langage C. Les détails de la stratégie de calcul sont présentés dans le paragraphe 4.2.4. La Figure 4.11 montre la décomposition choisie pour réaliser le calcul implicite-explicite.

Les contacts galets-rails sont modélisés dans Europlexus en utilisant la méthode PIN-BALL, décrite dans le paragraphe 4.2.3, qui consiste à insérer des sphères à l'intérieur des éléments finis pour détecter le contact. Afin d'optimiser le temps de calcul, les PIN-BALLs n'ont été associés qu'aux éléments concernés par le contact, comme le montre la Figure 4.12.

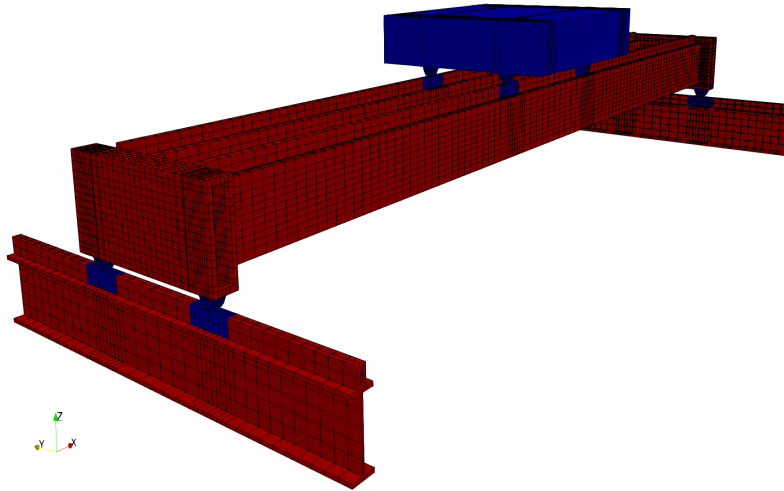


FIGURE 4.11 – Décomposition en deux sous domaines explicite (en bleu) et implicite (en rouge)

4.2.2 Étude des modes propres du modèle de la maquette

Avant de lancer les calculs temporels, une analyse modale est réalisée afin de valider le modèle éléments finis, et en particulier le choix des conditions limites (encastrement des supports de rails). Pour cela, on s'est basé sur les fréquences propres et les masses modales effectives des trois premiers modes propres de la maquette trouvés expérimentalement [FEA 15].

Pour faire l'analyse modale du modèle numérique de la maquette présentée dans le paragraphe 4.1.2, les contacts entre les galets et les rails ne sont pas considérés et les maillages du chariot, du pont roulant et des supports des rails sont fusionnés. Ensuite, le calcul modal est réalisé avec le logiciel Cast3M grâce à l'opérateur "VIBRATION". Cet opérateur permet de calculer les valeurs propres ω et les modes propres \mathbf{X} d'un système physique représenté par sa matrice de rigidité \mathbf{K} , sa matrice de masse \mathbf{M} . Autrement dit, l'opérateur "VIBRATION" résout l'équation suivante :

$$\left(\mathbf{K} - (2\pi\omega)^2\mathbf{M}\right)\mathbf{X} = 0 \quad (4.1)$$

Le résultat du calcul nous donne, pour chaque mode i , la fréquence propre f_i , la déformée modale (ou le vecteur propre) Φ_i , la masse généralisée m_i et les déplacements généralisés L_{ji} ($j = x, y, z$) dans chaque direction, tels que :

$$L_{ji} = \mathbf{I}_j^T \mathbf{M} \Phi_i \quad (4.2)$$

$$m_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \quad (4.3)$$

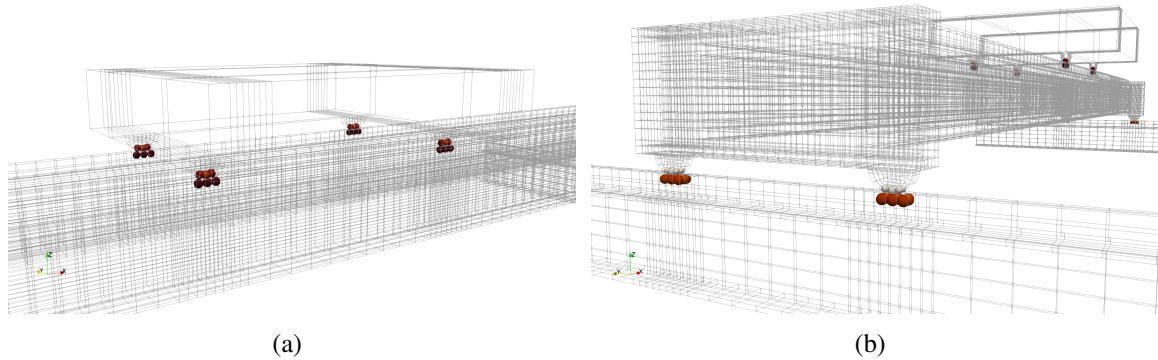


FIGURE 4.12 – Aperçus de la disposition des PINBALLS dans le modèle de la maquette

où \mathbf{I}_j est un vecteur ayant la valeur 1 aux degrés de liberté correspondant à la direction j . Ensuite, on calcule la masse modale effective m_{ji} dans chaque direction j ($j = x, y, z$) :

$$m_{ji} = \frac{L_{ji}^2}{m_i} \quad (4.4)$$

La masse modale est souvent exprimée en pourcentage par rapport à la masse totale m_{tj} dans la direction j , telle que :

$$m_{tj} = \mathbf{I}_j^T \mathbf{M} \mathbf{I}_j \quad (4.5)$$

Donc c'est la valeur du rapport $\frac{m_{ji}}{m_{tj}}$ exprimée en pourcentage, et la valeur de la fréquence propre qui sont comparées aux résultats expérimentaux des trois premiers modes principaux de la maquette [FEA 15]. Les résultats expérimentaux sont résumés dans le tableau 4.1 suivant :

Mode	Direction	Fréquence propre (Hz)	Masse modale effective (%)
1	x	9.5	98
2	y	9.5	73
3	z	13	86

TABLE 4.1 – Résultats expérimentaux des trois premiers modes propres de la maquette

Pour une masse totale de 4750 kg (masse théorique), les trois premiers modes du modèle éléments finis de la maquette sont représentés dans la Figure 4.13.

On constate que la fréquence propre du mode principal dans la direction x (12.7 Hz) est plus élevée que sa valeur expérimentale (9.5 Hz). Ceci est dû aux conditions limites

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

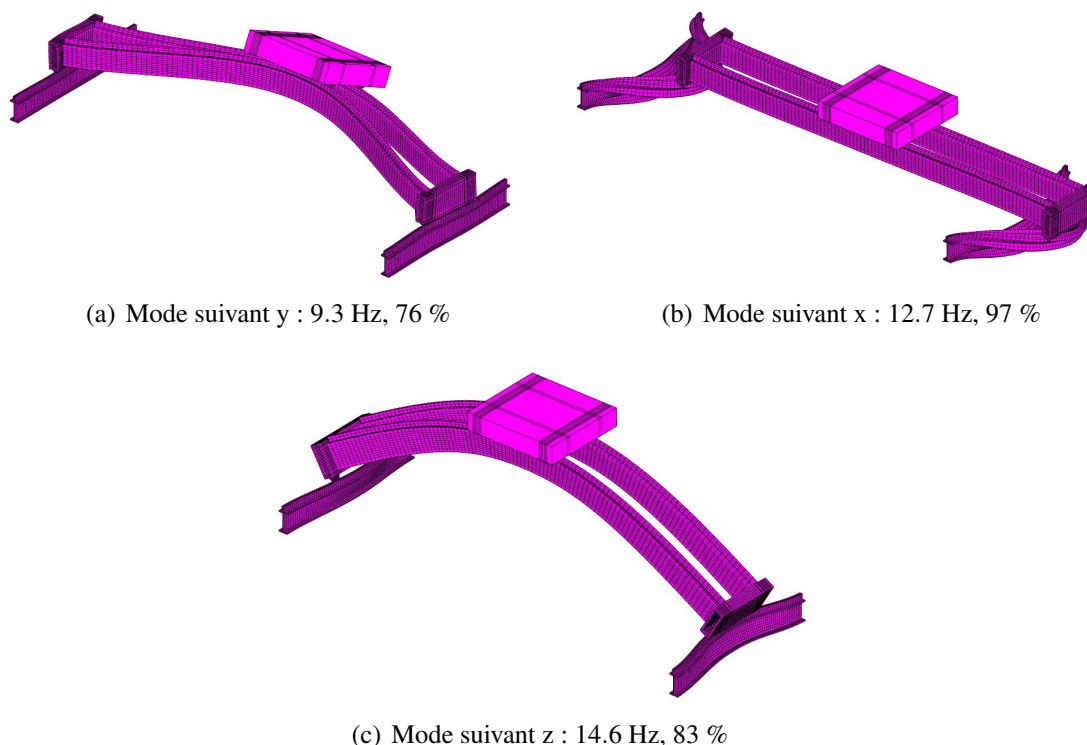


FIGURE 4.13 – Fréquences propres et masses effectives – Supports de rails de 2m

d'encastrement des supports des rails dans le modèle éléments finis. En effet, dans la réalité les supports des rails ne sont pas encastres sur toute la section de la poutre comme le montre la Figure 4.5 (photo extraite de l'article [FEA 15]). Donc, le fait d'encastrer sur toute la hauteur de la section de la poutre des supports des rails a rigidifié la structure dans la direction x . Le but ici n'étant pas de modéliser finement les attaches des supports des rails à la table vibrante, nous avons décidé de rallonger les supports des rails afin d'assouplir la structure dans la direction x et trouver une fréquence propre plus faible qui se rapproche de la valeur expérimentale.

Nous avons donc rallongé, dans le modèle éléments finis, les supports de rails de 0.5 m. Les premiers modes du nouveau modèle éléments finis de la maquette sont représentés dans la Figure 4.14.

On remarque que la fréquence propre du mode suivant x a effectivement baissé et les valeurs des trois premiers modes principaux du nouveau modèle éléments finis sont maintenant très proches des valeurs expérimentales. Nous considérons donc que le nouveau modèle avec des supports de rails de 2.5 m est représentatif de la maquette. C'est donc ce modèle qui est pris en compte pour les calculs numériques.

Remarques :

- La longueur finale des supports des rails du modèle numérique recalé, soit 2.5 m,

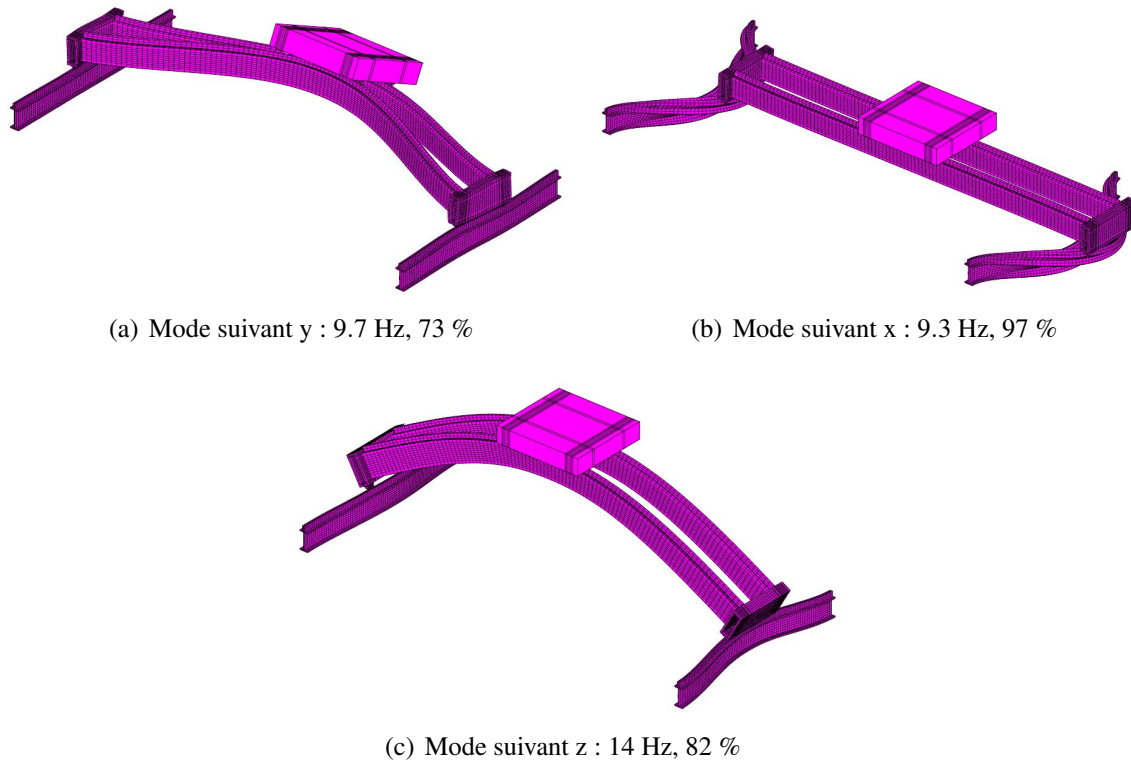


FIGURE 4.14 – Fréquences propres et masses effectives – Supports de rails de 2.5 m

corresponds à la longueur réelle des supports des rails plus les systèmes d’attache (voir la Figure 4.5)

- Une deuxième analyse modale de la maquette a été réalisée en prenant en compte la masse mesurée et non pas la masse théorique. Mais, les valeurs propres trouvées étaient bien supérieures par rapport aux valeurs expérimentales. Nous avons donc choisi de prendre en compte la masse théorique afin que le modèle numérique soit représentatif des modes propres expérimentaux de la maquette.

4.2.3 Modélisation des contacts dans Europlexus

Pour simuler le sous domaine explicite de la maquette, nous avons choisi le logiciel Europlexus. C’est un code de la dynamique explicite basé sur la méthode des éléments finis, mais contenant également les méthodes des volumes finis et des éléments spectraux. Le logiciel permet de simuler de grands systèmes complexes (fluide, structure ou fluide/structure). Il est notamment dédié à la dynamique rapide (impact, explosion, crashes...) et propose deux principales méthodes pour modéliser le contact :

- **La méthode du contact glissant** (sliding lines (2D) ou sliding surfaces (3D)) : accessible via l’opérateur “GLISS”, cette méthode est basée sur les anciennes tech-

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

niques de détection de contact “Maître/Esclave”. L’interpénétration est détectée en vérifiant chaque nœud “esclave” par rapport à la surface autour du nœud “maître” le plus proche. Les pionniers dans ce domaine sont Hallquist et al. [HAL 85] et Benson et Hallquist [BEN 90]. En cas d’interpénétration, les forces de contact sont généralement calculées en utilisant la méthode de la pénalité. En revanche, Europlexus offre la possibilité de calculer les efforts de contact avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Tandis que ces méthodes sont très utilisées dans les codes de calcul numérique, dans [BEL 93c], Belytschko et Yeh ont identifié plusieurs inconvénients à leur utilisation :

- La détection du contact nécessite des calculs géométriques complexes.
- Parce que seulement le gap entre les nœuds “esclaves” et les surfaces “maîtres” est vérifié, il existe des configurations de contact surface-surface ou ligne-surface qui ne sont pas détectées (voir la Figure 4.15). D’autres situations de contact pour lesquelles ces algorithmes échouent à détecter le contact sont répertoriées dans [BEL 93c, CAS 02]

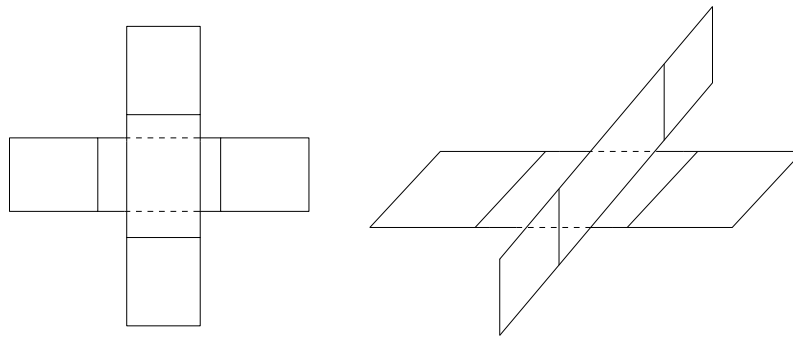


FIGURE 4.15 – Configurations de contacts indétectables par les algorithmes “maître/esclave”

Pour éviter les configurations ambiguës de contact, les surfaces “maîtres” doivent être soigneusement définies, c’est-à-dire qu’il faut connaître au préalable les éléments “maîtres” qui sont susceptibles d’être pénétrés par les nœuds “esclaves”. Donc, les algorithmes basés sur la technique “maître/esclave” pour détecter les interpénétrations sont seulement applicables pour des configurations géométriques relativement simples. En plus de la difficulté à détecter les interpénétrations, la notion même d’entités “maîtres” et “esclaves” est dictée par l’algorithme choisi plutôt que par la physique. Il n’y a pas de maître et d’esclave en réalité, et leur création artificielle introduit une dissymétrie indésirable dans la formulation. En effet, les résultats numériques sont susceptibles de dépendre du choix du corps “maître” et du corps “esclave”. En outre, la nécessité de distinguer les “autocontacts” des contacts entre deux corps différents vient de cette distinction entre “maître” et “esclave”.

Pour notre application, l’utilisation de la méthode du contact glissant nécessiterait un maillage très fin dans les zones de contact, ce qui risque de faire chuter considérablement le pas de temps critique. Un test a été réalisé pour déterminer la

finesse de maillage nécessaire pour détecter correctement les différents contacts galet-rail. Le pas de temps critique correspondant au maillage final était de l'ordre de 10^{-7} . Donc, une simulation numérique avec une excitation sismique de 10 s nécessiterait 100.000.000 de pas de temps dans les zones d'intérêt. Pour cette raison, nous n'avons pas choisi la méthode du contact glissant pour modéliser les contacts galet-rail de la maquette. C'est la méthode PINBALL, présentée ci-dessous, qui sera utilisée pour modéliser les contacts dans Europlexus.

- **La méthode PINBALL** : initialement développée par Belytschko et Neal [BEL 91], l'intérêt premier de la méthode PINBALL, par rapport aux algorithmes du contact glissant, est de simplifier la détection des interpénétrations. L'idée sous-jacente à l'algorithme PINBALL est d'insérer une sphère (pinball) dans chaque élément fini. Ensuite, le contact entre les éléments finis est représenté par le contact entre les sphères. L'interpénétration entre les sphères est détectée par une simple vérification des distances entre les centres des sphères (voir la Figure 4.16). On dit qu'il y a interpénétration entre deux sphères si la distance entre leurs centres est inférieure à la somme des rayons des sphères ($d_{12} < R_1 + R_2$).

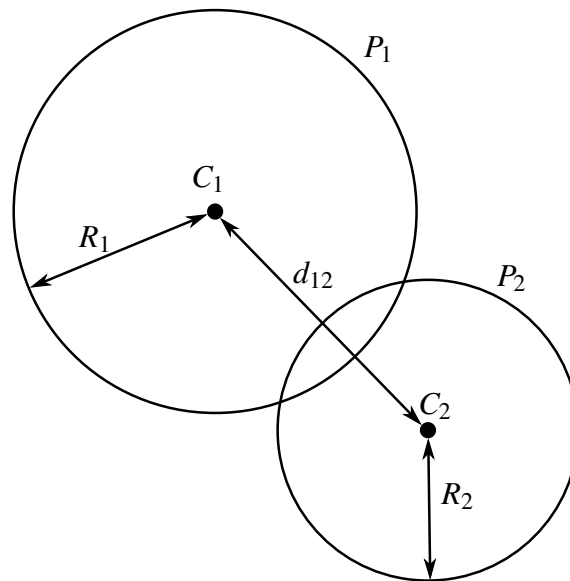


FIGURE 4.16 – Interpénétration entre deux PINBALLs

Europlexus propose deux options pour définir la taille des sphères. La première méthode consiste à calculer le rayon de la sphère de manière à ce que cette dernière englobe l'ensemble des nœuds de l'élément fini. Avec cette technique, le contact est détecté plus tôt que le contact réel. La deuxième méthode consiste à calculer le rayon de la sphère de manière à ce que le volume de cette dernière soit équivalent à celui de l'élément fini, le contact est alors mieux détecté. Lorsqu'une interpénétration est détectée, les conditions de contact sont ensuite imposées en terme de vitesse en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la

méthode de la pénalité (Europlexus permet les deux choix). Il existe aussi plusieurs possibilités de calcul de la direction normale de contact entre deux PINBALLs qui définit le vecteur force de contact. Généralement, cette normale est la direction définie entre les deux centres des Pinballs. Plus de détails concernant l'algorithme PINBALL implémenté dans Europlexus sont présentés par Casadei dans [CAS 02]. Bien que la méthode PINBALL simplifie énormément la détection du contact par rapport aux algorithmes plus conventionnels et évite les situations pathologiques décrites précédemment, la résolution spatiale de la méthode est discutable dans certains cas comme pour les éléments irréguliers et distordus ou les éléments poutres, plaques ou barres avec une épaisseur très petite voire égale à zéro (voir la Figure 4.17).

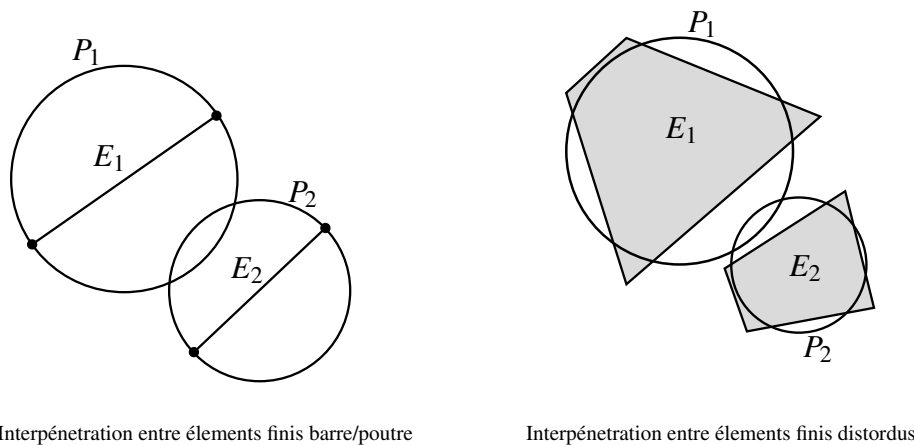


FIGURE 4.17 – Inconvénients de la méthode PINBALL

Pour pallier ce problème, Belytschko et al. [BEL 93c] proposent un nouvel algorithme basé sur une procédure de fragmentation des PINBALLs. Pour améliorer la précision de la détection spatiale, lorsqu'une interpénétration est détectée, le PINBALL initial, appelé PINBALL parent (niveau 0), est subdivisé en deux PINBALLs, appelé PINBALLs descendants (niveau 1) et de taille plus petite (voir la Figure 4.18). Cette opération est répétée jusqu'à qu'il n'y ait plus d'interpénétration détectée entre les "descendants". Il faut faire un choix judicieux du niveau de fragmentation des PINBALLs de manière à améliorer la précision de la détection spatiale, en veillant à ne pas trop réduire le pas de temps [CAS 02].

C'est la méthode PINBALL que nous avons choisie pour modéliser les contacts galet-rail de la maquette du pont roulant. Ce choix est dû, en plus des avantages de l'algorithme pour la détection des interpénétrations, à la résolution du contact en terme de vitesse avec des multiplicateurs de Lagrange ce qui se rapproche de l'intégrateur temporel développé dans le chapitre 2. Pour la précision de la détection spatiale, on s'est limité au niveau 1 de fragmentation afin de ne pas réduire le pas de temps fixé par l'utilisateur dans la procédure de couplage entre Cast3M et Europlexus présentée dans paragraphe suivant.

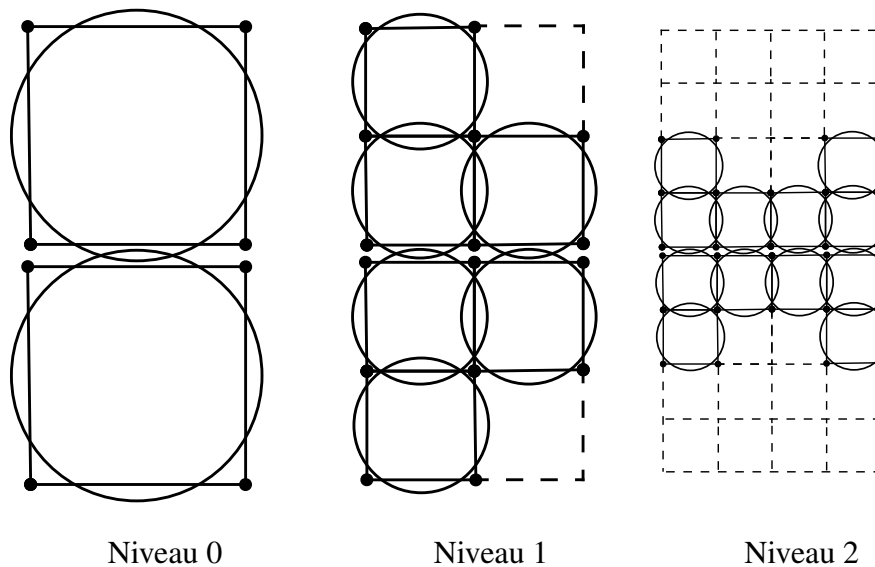


FIGURE 4.18 – Procédure de fragmentation des PINBALLS

4.2.4 Stratégie de couplage entre Cast3M et Europlexus

Afin de réaliser le calcul implicite-explicite du modèle tridimensionnel de la maquette décrit en co-simulation, nous avons choisi le logiciel Europlexus pour simuler le sous domaine explicite, et le logiciel Cast3M pour simuler le sous domaine implicite. Le couplage entre les deux logiciels est réalisé par un troisième programme, appelé coupleur dans la suite, codé en langage C et permettant la communication entre les deux logiciels Europlexus et Cast3M. Le choix du logiciel Europlexus est motivé par le fait que ce dernier utilise le schéma explicite de la différence centrée pour réaliser l'intégration temporelle. De plus, le contact y est formulé en terme de vitesse et résolu par des multiplicateurs de Lagrange [CAS 02]. Donc, le traitement du contact dans Europlexus est similaire à notre approche présentée dans le chapitre 2. Pour la partie implicite, nous avons choisi le logiciel Cast3M. C'est un code éléments finis développé au Département de Modélisation des Systèmes et Structures (DM2S) de la Direction de l'Énergie Nucléaire du CEA. Cast3M propose non seulement des processus de résolution (solveur) mais également des fonctions de construction du modèle (pré-processueur) et d'exploitation des résultats (post-traitement). C'est est un logiciel "boîte à outils" qui permet à l'utilisateur de développer des fonctions répondant à ses propres besoins. Cela est possible grâce à son pseudo-langage, appelé "GIBIANE", qui permet par exemple d'écrire des procédures de calcul adaptées à la problématique de l'utilisateur. Nous avons donc utilisé Cast3M pour écrire la procédure nous permettant de résoudre le sous domaine implicite de la maquette avec le schéma implicite de l'accélération moyenne. La stratégie de couplage des logiciels Cast3M et Europlexus est illustrée dans la Figure 4.19.

D'après la Figure 4.19, on note que l'inversion de la matrice de condensation \mathbf{H} est réalisée une fois au début du calcul. Ensuite, la matrice \mathbf{H}^{-1} est stockée pour être uti-

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

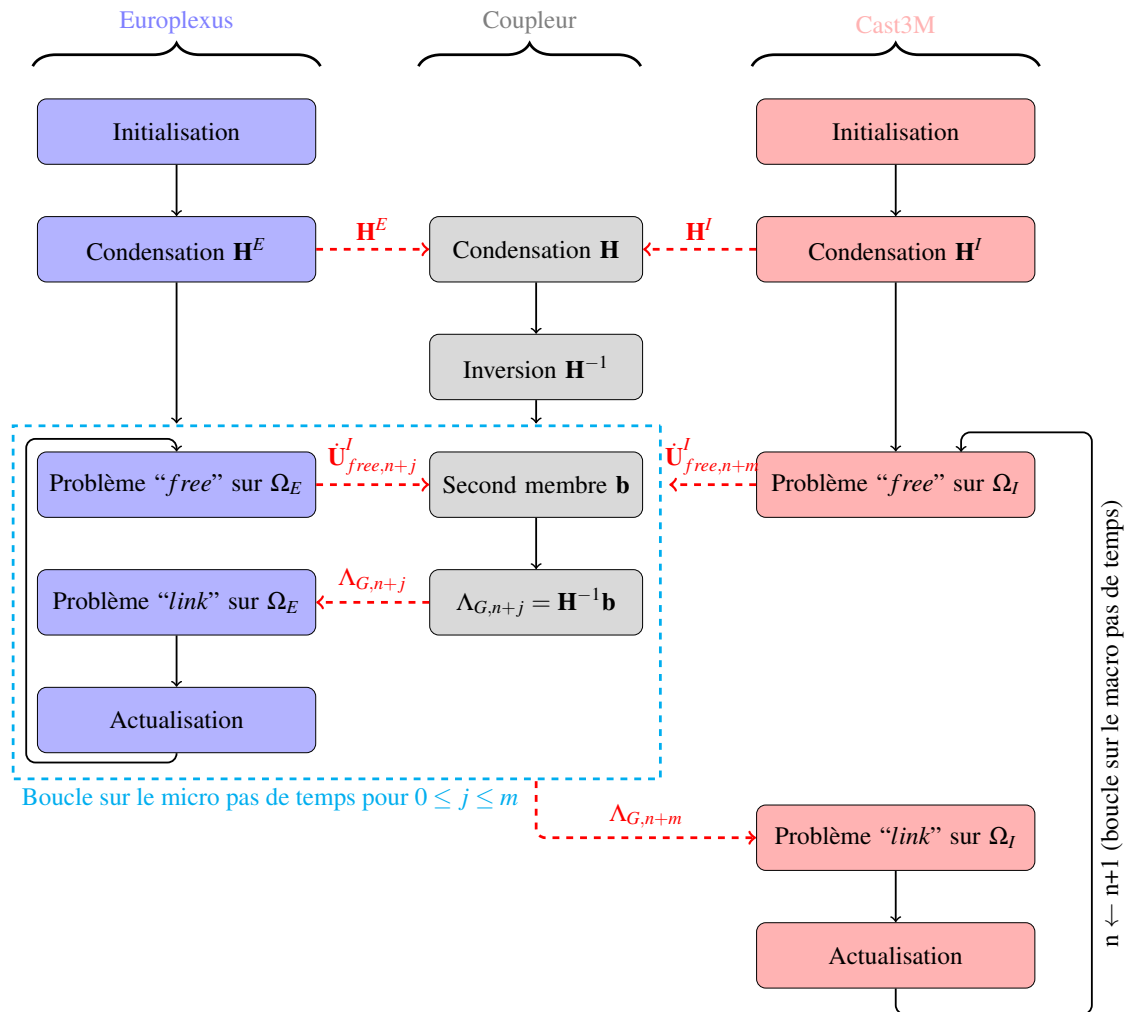


FIGURE 4.19 – Stratégie de couplage des logiciels Cast3M et Europlexus

lisée dans la boucle sur les micro pas de temps. Donc, les multiplicateurs de Lagrange $\Lambda_{G,n+j}$ sont obtenus à chaque micro pas de temps, par une simple multiplication de la matrice \mathbf{H}^{-1} par le second membre \mathbf{b} . La communication entre les différents processus, désignée par les flèches rouges dans la Figure 4.19, est réalisée par la méthode des tuyaux (en anglais "pipe"). Ce mécanisme, très utilisé sous UNIX pour faire communiquer différents processus entre eux, permet d'envoyer les données directement en mémoire sans être stockées temporairement sur disque, ce qui est donc très rapide. Les "pipes" que nous utilisons ici sont sous forme de fichiers spéciaux, de taille nulle, qui une fois ouverts se comportent comme des tuyaux de communications classiques. L'utilisation du système de fichiers permet uniquement de pouvoir accéder au tuyau par l'intermédiaire de son nom, ce qui rend possible la communication entre différents processus indépendants. Plus de détails concernant cette technique de communication peuvent être trouvés dans

[BOU 06a].

4.2.5 Résultats numériques

Le modèle implicite-explicite de la maquette, décrit dans la Figure 4.11, est calculé en utilisant la stratégie de co-simulation décrite dans le paragraphe 4.2.4. Le sous domaine implicite est simulé avec le logiciel Cast3M en utilisant le schéma de l'accélération moyenne. Le sous domaine explicite est calculé avec le logiciel explicite Europlexus. On choisit pour tout le modèle une loi de comportement élastique linéaire avec un module d'élasticité $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa. Les masses volumiques sont recalées de façon à obtenir la masse totale de la maquette. Le nombre de degrés de liberté et les pas de temps de chaque sous domaine sont résumés dans le tableau 4.2. L'ensemble de la maquette est soumis à son poids propre et à l'excitation sismique dans la direction z décrite dans la Figure 4.6(c).

	SD explicite	SD implicite	Interface
ddl	5088	70344	1296
Pas de temps	10^{-6} s	$100 \cdot 10^{-6}$ s	–

TABLE 4.2 – Le nombre de degrés de liberté et les pas de temps dans chaque sous domaine

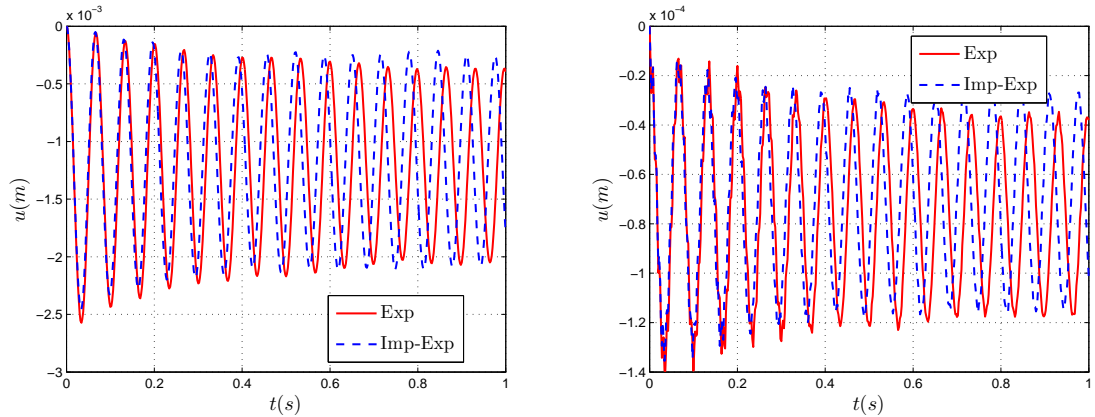
Afin de valider les résultats de la co-simulation implicite-explicite, un calcul de référence est réalisé. Le calcul de référence correspond à un calcul entièrement explicite de toute la maquette avec le logiciel Europlexus. Les déplacements à différents nœuds de la structure sont tracés dans les Figures 4.20.

On remarque que la co-simulation donne globalement les mêmes déplacements qu'une simulation entièrement explicite. Toutefois, un léger retard de la solution implicite-explicite par rapport à la solution entièrement explicite est observé. Les amplitudes des oscillations sont en revanche quasiment les mêmes. Le couplage n'amortit pas la solution. Ceci est permis grâce au faible taux d'énergie dissipée à l'interface de couplage comme on peut le voir sur la Figure 4.21(b).

La stratégie de co-simulation permet un gain en temps de calcul très significatif. En effet, pour une simulation du modèle de la maquette soumise à une excitation sismique de 10s, on divise par trois le temps CPU (voir la Figure 4.22). D'après la Figure 4.22, on note que dans le calcul implicite-explicite, la majorité du temps de calcul est consommée par le sous domaine explicite. Donc l'effort numérique est concentré sur ce sous domaine sans dégrader la qualité des résultats. La stratégie de co-simulation implicite-explicite proposée permet ainsi une accélération du temps de résolution sur ce cas d'application. Elle permet effectivement de réduire le coût du calcul tout en assurant un calcul fin dans les zones d'intérêts (zones de contact).

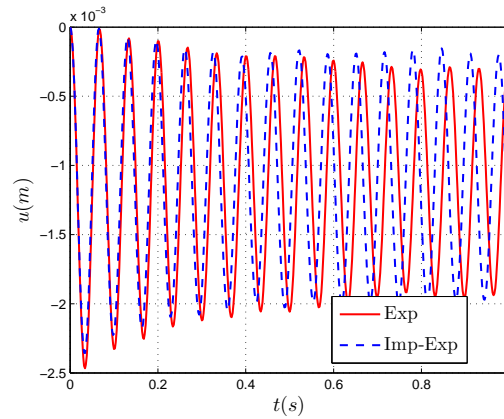
A ce stade de l'étude, un calcul avec une excitation sismique dans les directions x et y n'a pas pu être réalisé. La version actuelle d'Europlexus disponible ne permet pas de considérer le frottement tangentielle avec la méthode des PINBALLs. Par conséquent, Les résultats des essais n'ont pas encore pu être exploités. Les calculs réalisés avec une

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant



(a) Déplacements du milieu d'une poutre de charge

(b) Déplacements du milieu d'un support de rail



(c) Déplacements d'un nœud du chariot

FIGURE 4.20 – Déplacements à différents nœuds de la maquette

excitation sismique verticale ne peuvent pas être comparés aux résultats expérimentaux correspondant à un essai bi-axial dans les direction x et y et un essai tri-axial.

4.3 Conclusion

Cette dernière phase des travaux est consacrée à la mise en place d'un démonstrateur de co-simulation. La stratégie de couplage entre les logiciels Cast3M et Europlexus est peu intrusive. Elle peut donc être envisageable pour coupler d'autres logiciels commerciaux. Pour valider les résultats de la co-simulation implicite-explicite, un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant est considéré. A travers ce modèle, nous avons montré que la co-simulation a permis un gain très significatif en temps de calcul. Les résultats expérimentaux des essais sismiques de cette maquette n'ont pas encore été exploités à cause de la non disponibilité du frottement avec la méthode PINBALL dans

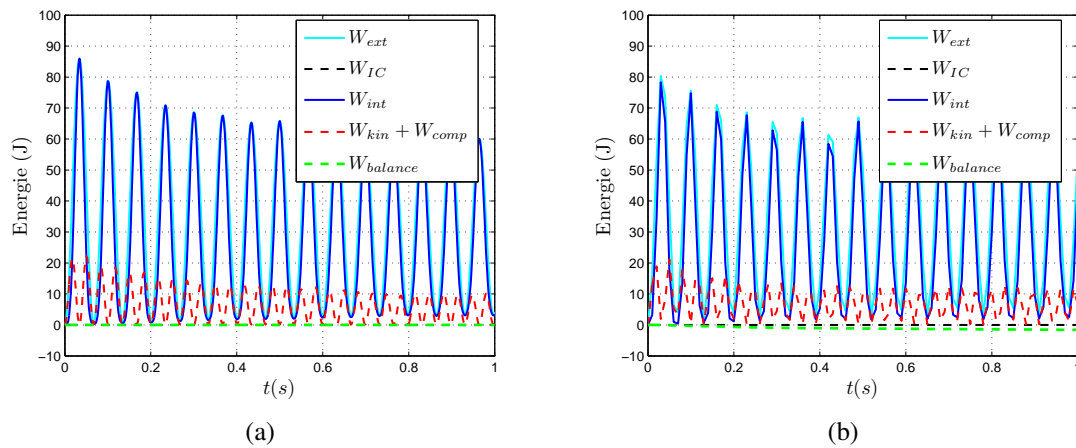


FIGURE 4.21 – Bilan énergétique de la simulation (a) entièrement explicite, (b) implicite-explicite

la version d'Europlexus utilisée avec le démonstrateur. Toutefois, la nouvelle version du logiciel Europlexus permet maintenant de considérer du frottement avec les PINBALLS. Des travaux sont en cours pour mettre à jour le code Europlexus et le démonstrateur de co-simulation. Une fois la mise à jour terminée, le modèle tridimensionnel sera enrichi en rajoutant du frottement et également de l'amortissement structural. Ensuite, les résultats du modèle enrichi pourront être comparés et recalés par rapport aux résultats expérimentaux.

4. Co-simulation implicite-explicite d'un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant

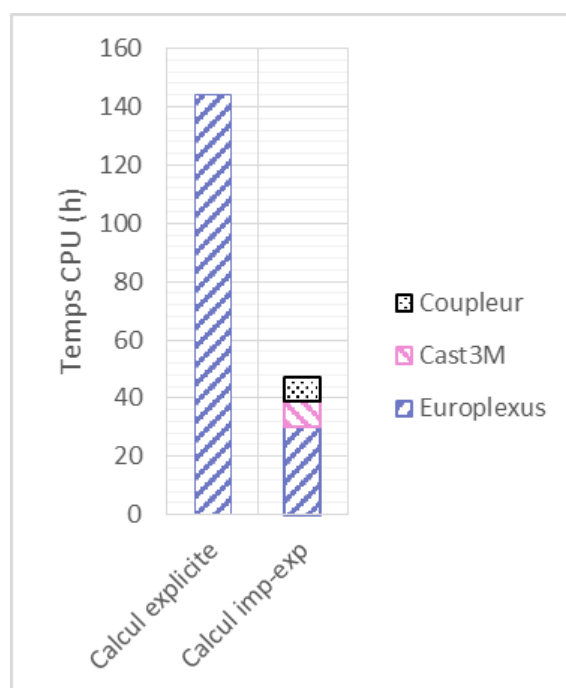


FIGURE 4.22 – Les temps CPU pour un calcul entièrement explicite et une co-simulation implicite-explicite

Bilan et perspectives

Bilan

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la modélisation et de l'étude de la réponse dynamique des ponts roulants sous séisme. Son objectif principal est d'aider les professionnels du levage à comprendre et à acquérir des outils et méthodes numériques d'analyse dynamique temporelle.

Pendant le séisme, un pont roulant est soumis à des impacts multiples entre les galets et les rails. Afin d'analyser cela, la première phase des travaux est consacrée à l'étude de la réponse dynamique d'un corps déformable à un impact. Ces travaux ont permis le développement d'un intégrateur temporel explicite pour la dynamique du contact. Basé sur une formulation variationnelle espace-temps avec des multiplicateurs de Lagrange, les principaux avantages de ce schéma sont : pas de nécessité de détection précise de l'instant de contact, pas d'itération pour résoudre l'équation d'équilibre et aucun paramètre numérique supplémentaire. L'intégrateur s'inscrit également dans le formalisme de Moreau qui considère une seule équation de la dynamique non-régulière écrite en terme de vitesse-impulsion. L'algorithme est testé et validé sur deux cas tests académiques. Les résultats numériques reproduisent bien le comportement cinématique dans le cas d'un impact rigide-rigide et déformable-déformable. À travers le cas test rigide-rigide, nous avons montré que le schéma passe le test de ZENO (le schéma converge en présence d'une infinité d'impacts). Il fait donc partie des schémas dit "time-stepping". La formulation du contact en terme de vitesse a permis d'introduire facilement une loi d'impact de type Newton. Nous avons démontré que, dans le cas d'un contact déformable-déformable, à convergence (maillage et pas de temps petits), le coefficient de restitution e n'a pas d'influence sur le comportement cinématique de la structure. Nous avons également illustré à travers un exemple numérique, que pour un impact, la force et l'accélération divergent. En revanche, l'impulsion d'impact et la vitesse convergent.

Ensuite, une stratégie multi-échelle est adoptée. En effet, à cause des chocs multiples auxquels est exposé le pont roulant pendant le séisme, plusieurs échelles de temps coexistent au sein de ce problème. Le développement d'un intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps) a permis de considérer l'intégrateur explicite, développé pendant la première phase des travaux, avec un pas petit pas de temps dans les zones de contact, et un schéma implicite avec un pas de temps plus grand dans le reste de la structure. Les différents sous domaines sont couplés en utilisant

la méthode GC. Nous avons démontré à travers un exemple numérique de pont roulant sous séisme, que le couplage ne dégrade pas la solution numérique même en présence de non-linéarités (impacts) dans un sous domaine de la structure. De plus, la dissipation de l'énergie au niveau de l'interface de couplage est entièrement contrôlée.

Basé sur la méthode de couplage GC, un démonstrateur de co-simulation entre les logiciels Cast3M et Europlexus est mis en place. La stratégie de couplage de ces deux logiciels est peu intrusive et peut donc être envisageable pour coupler d'autres logiciels commerciaux. Pour valider les résultats de la co-simulation implicite-explicite, un modèle tridimensionnel d'une maquette de pont roulant est considéré. A travers ce modèle, nous avons montré que la co-simulation a permis un gain très significatif en temps de calcul sans dégrader la qualité des résultats numériques. Les résultats expérimentaux de cette maquette de pont roulant, testée au CEA à Saclay, ont pu être récupérés mais n'ont pas encore été exploités de manière quantitative. A ce stade de l'étude, un calcul avec une excitation sismique dans les directions x et y n'a pas pu être réalisé. La version actuelle d'Europlexus disponible ne permet pas de considérer le frottement tangentiel avec la méthode des PINBALLS. Par conséquent, les calculs réalisés avec une excitation sismique verticale ne peuvent pas être comparés aux résultats expérimentaux correspondant à un essai bi-axial dans les direction x et y et un essai tri-axial. Toutefois, la nouvelle version du logiciel Europlexus permet maintenant de considérer du frottement avec les PINBALLS. Des travaux sont en cours pour mettre à jour le code Europlexus et le démonstrateur de co-simulation. Une fois la mise à jour terminée, le modèle tridimensionnel sera enrichi en rajoutant du frottement et également de l'amortissement structural. Ensuite, les résultats du modèle enrichi pourront être comparés et recalés par rapport aux résultats expérimentaux.

Perspectives

Les résultats et les méthodes numériques développés durant ces travaux ouvrent plusieurs perspectives relatives à l'application numérique et également au développement des méthodes numériques.

Applications numériques :

– Modèle tridimensionnel de la maquette :

1. Prise en compte du frottement tangentiel dans les contacts galet-rail du modèle tridimensionnel de la maquette. Il existe deux types de galets sur un pont roulant : les galets moteurs, qui sont entraînés par un moteur électrique auto-freinant, et les galets libres qui ne contiennent aucune motorisation. Donc, en cas de séisme, les galets moteurs peuvent glisser parallèlement aux rails. En revanche, les galets libres roulent. Cet aspect est à prendre en compte dans la modélisation numérique en considérant éventuellement un coefficient de

frottement plus important pour les galets moteur,

2. Choix de l'amortissement physique qu'il convient de prendre au sein des simulations. Dans une démarche classique de dimensionnement sous séisme s'appuyant sur une description modale de la structure, un amortissement modal est considéré. Cet amortissement modal est indépendant de la fréquence et des essais ont été réalisés afin de définir une unique valeur d'amortissement forfaitaire. Lors de calculs temporels, l'amortissement modal n'est pas disponible dans les codes de calculs du commerce. Le calculateur est contraint d'utiliser une matrice d'amortissement visqueuse, généralement de type Rayleigh. Cet amortissement de Rayleigh est dépendant de la fréquence, il est alors difficile d'en choisir les coefficients représentatifs de la réalité. Un mauvais choix de ces paramètres peut conduire à un comportement non-physique. Dans une démarche d'analyse dynamique non linéaire rigoureuse qui vise à estimer la tenue au séisme du pont roulant, il est nécessaire de s'orienter vers une modélisation plus fine des sources d'amortissement pour limiter l'introduction d'un taux d'amortissement global à une valeur forfaitaire modéré,
3. Recalage des résultats numériques du modèle enrichi de la maquette par rapport aux résultats expérimentaux.

– Modèle filaire de la maquette :

Afin de proposer aux industriels du levage une modélisation simple et moins coûteuse en temps de calcul, un modèle filaire de la maquette, utilisant des éléments finis poutres, a été réalisé. Le modèle a été également recalé pour reproduire les trois premiers modes propres expérimentaux de la maquette. Afin de valider ce modèle simplifié, des travaux sont en cours pour comparer et recalibrer les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Développements numériques :

– Contrôle de la dissipation numérique due aux impacts :

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons constaté une perte de l'énergie cinétique quand un impact se produit. Cette dissipation d'énergie diminue lorsqu'on réduit le pas de temps mais cette technique peut être coûteuse en temps de calcul. Il existe des techniques de régularisation permettant de construire des algorithmes de contact qui conservent l'énergie. Par exemple, Armero et Petocz proposent de conserver la dissipation de l'énergie associée à un nouvel événement (impact) puis de la réinjecter au système à la fin de l'événement. Laursen et Love [LAU 02a] introduisent un terme de correction de la vitesse de contact comme un moyen d'équilibrer le système. Il peut être intéressant d'appliquer une technique de

régularisation du contact à l'algorithme proposé dans le chapitre 2 afin d'obtenir un intégrateur explicite pour la dynamique du contact qui conserve l'énergie totale du système.

– Utilisation de la méthode du lagrangien augmenté pour résoudre le contact :

Il s'avère qu'en combinant les caractéristiques de la pénalité et l'approche des multiplicateurs de Lagrange, on réduit les inconvénients des deux méthodes [BER 14]. En effet, l'idée sous-jacente aux méthodes de pénalité est d'éliminer une partie des contraintes en ajoutant au problème un terme de pénalité. Donc, ces méthodes sont incapables d'appliquer la contrainte exacte à moins que le paramètre de pénalité soit très grand, ce qui nécessite un coût de calcul très élevé et pose beaucoup de difficultés de convergence de ces méthodes. La méthode du lagrangien augmenté permet d'obtenir une application exacte des contraintes, tout en maintenant une partie de la commodité de la méthode de pénalité. La convergence de la méthode du lagrangien augmenté est atteinte sans qu'il soit nécessaire d'augmenter le paramètre de pénalité à l'infini. Il est donc très intéressant de considérer la méthode du lagrangien augmenté pour imposer les conditions de contact [LAU 02b].

– Utilisation d'autres schémas temporels explicites :

L'intégrateur temporel pour la dynamique du contact proposé dans le chapitre 2, est basé sur le schéma de la différence centrée. Cette méthode explicite du second ordre n'introduit aucune dissipation numérique. Par conséquent, des oscillations hautes fréquences dues à la discrétisation en éléments finis peuvent apparaître dans la solution numérique, notamment en présence d'impact. Nsiampa et al [NSI 08] ont fait une étude comparative du schéma non dissipatif de la différence centrée avec les schémas dissipatifs de Hulbert-Chung et de Tchamwa-Wielgosz. Ils ont montré que, pour des problèmes d'impact, le schéma dissipatif de Tchamwa-Wielgosz est plus efficace que le schéma de Hulbert-Chung pour filtrer les oscillations hautes fréquences, en revanche, son taux de convergence n'est que du premier ordre.

Pour introduire de la dissipation numérique tout en gardant le caractère explicite, les schémas TDG explicites semblent être un choix pertinent. Ce type de méthodes permet de filtrer les hautes fréquences non physiques du problème. Les schémas TDG explicites ont également un ordre de convergence égal à trois pour des problème linéaire et non linéaire avec une dissipation numérique contrôlable [LI 96]. Il existe également le schéma explicite du second ordre, proposé par Noh et Bathe [NOH 13], qui permet d'introduire de l'amortissement numérique pour éliminer ces oscillations hautes fréquences indésirables. Toujours dans le but de supprimer les oscillations parasites, on trouve le schéma explicite, développé par Kolman et al. [KOL 15] qui proposent d'intégrer séparément les ondes

longitudinales et les ondes de cisaillement en prenant en compte leurs différentes vitesses. Ensuite, les vecteurs d'état (déplacements, vitesses et accélérations) des composantes longitudinale et de cisaillement sont combinés à la fin de chaque pas de temps.

– Mise en place d'un mécanisme de bascule implicite/explicite :

Afin d'obtenir une accélération supplémentaire du temps CPU, une extension de la stratégie de couplage, développée dans le dernier chapitre, consiste à faire évoluer la taille de la zone explicite au cours du calcul. Pour cela, un mécanisme de bascule doit être mis en place. Son principe de fonctionnement est détaillé par Chantrait dans [CHA 14a]. La stratégie de bascule a déjà été utilisée pour des problèmes d'impact [NOE 04].

Bibliographie

- [ABA 00] ABADIE M.
Dynamic simulation of rigid bodies : Modelling of frictional contact. *Impacts in Mechanical Systems*, p. 61–144 Springer, 2000.
- [ACA 00] ACARY V., JEAN M.
Numerical modeling of three dimensional divided structures by the non smooth contact dynamics method : Application to masonry structures. *The Fifth International Conference on Computational Structures Technology*, 2000, p. 211–221.
- [ACA 08] ACARY V., BROGLIATO B.
Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics, vol. 35. Springer Science & Business Media, 2008.
- [ACA 12] ACARY V.
Higher order event capturing time-stepping schemes for nonsmooth multibody systems with unilateral constraints and impacts. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 62, n° 10, 2012, p. 1259–1275, Elsevier.
- [ACA 13] ACARY V.
Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb’s friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 256, 2013, p. 224–250, Elsevier.
- [ACA 16] ACARY V.
Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for nonsmooth elastodynamics with contact. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 96, 2016, p. 585–603.
- [ALA 91] ALART P., CURNIER A.
A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, n° 3, 1991, p. 353–375, Elsevier.
- [ANI 99] ANITESCU M., POTRA F. A., STEWART D. E.
Time-stepping for three-dimensional rigid body dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, n° 3, 1999, p. 183–197, Elsevier.
- [ARM 98] ARMERO F., PETŐCZ E.
Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic

- contact/impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 158, n° 3, 1998, p. 269–300, Elsevier.
- [ARM 01a] ARMERO F., ROMERO I.
On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I : low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 20, 2001, p. 2603–2649, Elsevier.
- [ARM 01b] ARMERO F., ROMERO I.
On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II : second-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 51, 2001, p. 6783–6824, Elsevier.
- [BAR 94] BARAFF D.
Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. *Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, New York, USA, 1994 ACM, p. 23–34.
- [BEL 76] BELYTSCHKO T., MULLEN R.
Mesh partitions of explicit-implicit time integration. *Formulations and computational algorithms in finite element analysis*, , 1976, p. 673–690, MIT Press, Cambridge, Mass.
- [BEL 78] BELYTSCHKO T., MULLEN R.
Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, n° 10, 1978, p. 1575–1586, Wiley Online Library.
- [BEL 79] BELYTSCHKO T., YEN H.-J., MULLEN R.
Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, 1979, p. 259–275, Elsevier.
- [BEL 91] BELYTSCHKO T., NEAL M.
Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, 1991, p. 547-572.
- [BEL 93a] BELYTSCHKO T., LU Y.
Explicit multi-time step integration for first and second order finite element semidiscretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 108, n° 3-4, 1993, p. 353–383, Elsevier.
- [BEL 93b] BELYTSCHKO T., LU Y.
Explicit multi-time step integration for first and second order finite element semidiscretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 108, n° 3-4, 1993, p. 353–383, Elsevier.
- [BEL 93c] BELYTSCHKO T., YEH I.
The splitting pinball method for contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 105, n° 3, 1993, p. 375–393, Elsevier.

- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W., MORAN B.
Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley and Sons, 2000.
- [BEN 90] BENSON D. J., HALLQUIST J. O.
A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 78, n° 2, 1990, p. 141–163, Elsevier.
- [BER 14] BERTSEKAS D. P.
Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. Academic press, 2014.
- [BET 01] BETSCH P., STEINMANN P.
Conservation properties of a time FE method-part II : Time-stepping schemes for non-linear elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 8, 2001, p. 1931–1955, Wiley Online Library.
- [BON 98] BONET J., BURTON A.
A simple average nodal pressure tetrahedral element for incompressible and nearly incompressible dynamic explicit applications. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol. 14, n° 5, 1998, p. 437–449, Wiley Online Library.
- [BON 01] BONELLI A., BURSI O., MANCUSO M.
Explicit predictor–multicorrector time discontinuous Galerkin methods for linear dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, n° 4, 2001, p. 625–652, Elsevier.
- [BON 02] BONELLI A., BURSI O., MANCUSO M.
Explicit predictor–multicorrector time discontinuous Galerkin methods for non-linear dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 256, n° 4, 2002, p. 695–724, Elsevier.
- [BOR 93] BORRI M., BOTTASSO C.
A general framework for interpreting time finite element formulations. *Computational Mechanics*, vol. 13, n° 3, 1993, p. 133–142, Springer.
- [BOU 06a] BOUREL B.
Calcul multi-domaines et approches multi-échelles pour la simulation numérique de crashes automobiles. Thèse de doctorat, Villeurbanne, INSA, 2006.
- [BOU 06b] BOUREL B., COMBESURE A., DI VALENTIN L.
Handling contact in multi-domain simulation of automobile crashes. *Finite elements in analysis and design*, vol. 42, n° 8, 2006, p. 766–779, Elsevier.
- [BRO 02] BROGLIATO B., TEN DAM A., PAOLI L., GENOT F., ABADIE M.
Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55, n° 2, 2002, p. 107–150, American Society of Mechanical Engineers.
- [BRU 12a] BRUN M., BATTI A., LIMAM A., COMBESURE A.
Implicit/explicit multi-time step co-computations for predicting reinforced concrete structure response under earthquake loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 33, n° 1, 2012, p. 19–37, Elsevier.

- [BRU 12b] BRUN M., BATTI A., LIMAM A., GRAVOUIL A.
Explicit/implicit multi-time step co-computations for blast analyses on a reinforced concrete frame structure. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 52, 2012, p. 41–59, Elsevier.
- [BRÜ 14a] BRÜLS O., ACARY V., CARDONA A.
Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized- α scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 281, 2014, p. 131–161, Elsevier.
- [BRU 14b] BRUN M., BATTI A., COMBESURE A., GRAVOUIL A.
External coupling software based on macro-and micro-time scales for explicit/implicit multi-time-step co-computations in structural dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 86, 2014, p. 101–119, Elsevier.
- [BRU 15] BRUN M., GRAVOUIL A., COMBESURE A., LIMAM A.
Two FETI-based heterogeneous time step coupling methods for Newmark and α -schemes derived from the energy method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, 2015, p. 130–176, Elsevier.
- [BRU 16] BRUN M., ZAFATI E., DJERAN-MAIGRE I., PRUNIER F.
Hybrid Asynchronous Perfectly Matched Layer for seismic wave propagation in unbounded domains. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 122, 2016, p. 1–15, Elsevier.
- [CAN 95] CANNAROZZI M., MANCUSO M.
Formulation and analysis of variational methods for time integration of linear elastodynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 127, n° 1-4, 1995, p. 241–257, Elsevier.
- [CAR 91] CARPENTER N. J., TAYLOR R. L., KATONA M. G.
Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 1, 1991, p. 103–128, Wiley Online Library.
- [CAS 02] CASADEI F.
A hierarchic pinball method for contact-impact in fast transient dynamics. *VI Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale (SI-MAI 2002)*, Chia (Cagliari), Italy, 2002, p. 27–31.
- [CHA 97] CHAMPANEY L., COGNARD J.-Y., DUREISSEIX D., LADEVÈZE P.
Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, vol. 19, n° 4, 1997, p. 253–263, Springer.
- [CHA 98] CHABRAND P., DUBOIS F., RAOUS M.
Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 28, n° 4, 1998, p. 97–108, Elsevier.
- [CHA 14a] CHANTRAIT T.
Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements

dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie. Thèse de doctorat, Lyon, INSA, 2014.

- [CHA 14b] CHANTRAIT T., RANNOU J., GRAVOUIL A.
Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 86, 2014, p. 23–33, Elsevier.
- [CHE 12] CHEN Q. Z., ACARY V., VIRLEZ G., BRÜLS O.
A Newmark-type integrator for flexible systems considering nonsmooth unilateral constraints. EBERHARD P., Ed., *IMSD 2012 - 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, Stuttgart, Germany, 2012.
- [CHE 13] CHEN Q. Z., ACARY V., VIRLEZ G., BRÜLS O.
A nonsmooth generalized- α scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 96, n° 8, 2013, p. 487–511, Wiley Online Library.
- [CHO 95] CHOPRA A. K. et al.
Dynamics of structures, vol. 3. Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [CIR 05] CIRAK F., WEST M.
Decomposition contact response (DCR) for explicit finite element dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n° 8, 2005, p. 1078–1110, John Wiley & Sons, Ltd., Baffins Lane Chichester W. Sussex PO 19 1 UD UK,.
- [COM 01] COMBESCURE A., GRAVOUIL A.
A time-space multi-scale algorithm for transient structural nonlinear problems. *Mécanique & Industries*, vol. 2, n° 1, 2001, p. 43–55, Elsevier.
- [COM 02] COMBESCURE A., GRAVOUIL A.
A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, n° 11, 2002, p. 1129–1157, Elsevier.
- [COM 03] COMBESCURE A., GRAVOUIL A., HERRY B.
An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers & Structures*, vol. 81, n° 12, 2003, p. 1211–1222, Elsevier.
- [COM 06] COMBESCURE D.
Eléments de dynamique des structures ; Illustrations à l’aide de CAST3M. *support de cours, www-cast3m.cea.fr*, , 2006.
- [COU 28] COURANT R., FRIEDRICHS K., LEWY H.
Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, vol. 100, n° 1, 1928, p. 32–74, Springer.
- [CUR 99] CURNIER A.
Unilateral contact. *New Developments in Contact Problems*, p. 1–54 Springer Wien, 1999.

- [DAB 14] DABAGHI F., PETROV A., POUSIN J., RENARD Y.
Convergence of mass redistribution method for the one-dimensional wave equation with a unilateral constraint at the boundary. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 48, n° 4, 2014, p. 1147–1169, EDP Sciences.
- [DES 98] DE SAXCÉ G., FENG Z.-Q.
The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 28, n° 4, 1998, p. 225–245, Elsevier.
- [DEU 08] DEUFLHARD P., KRAUSE R., ERTEL S.
A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, n° 9, 2008, p. 1274–1290, Wiley Online Library.
- [DHI 05] DHIA H. B., RATEAU G.
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 62, n° 11, 2005, p. 1442–1462, Wiley Online Library.
- [ERI 03] ERICKSON D., WEBER M., SHARF I.
Contact stiffness and damping estimation for robotic systems. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 22, n° 1, 2003, p. 41–57, SAGE Publications.
- [FAR 91] FARHAT C., ROUX F.-X.
A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 6, 1991, p. 1205–1227, Wiley Online Library.
- [FAR 93] FARHAT C., CRIVELLI L., GERADIN M.
THE SPECTRAL STABILITY OF TIME INTEGRATION ALGORITHMS FOR A CLASS OF CONSTRAINED DYNAMICS PROBLEMS. *34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1993, page 1306.
- [FAR 94] FARHAT C., MANDEL J., ROUX F. X.
Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 115, n° 3-4, 1994, p. 365–385, Elsevier.
- [FAU 03] FAUCHER V., COMBESURE A.
A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, n° 5, 2003, p. 509–533, Elsevier.
- [FAU 04a] FAUCHER V., COMBESURE A.
Local modal reduction in explicit dynamics with domain decomposition. Part 1 : extension to subdomains undergoing finite rigid rotations. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 60, n° 15, 2004, p. 2531–2560, Wiley Online Library.

- [FAU 04b] FAUCHER V., COMBESURE A.
Local modal reduction in explicit dynamics with domain decomposition. Part 2 : specific interface treatment when modal subdomains are involved. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 1, 2004, p. 69–95, Wiley Online Library.
- [FEA 15] FEAU C., POLITOPOULOS I., KAMARIS G. S., MATHEY C., CHAUDAT T., NAHAS G.
Experimental and numerical investigation of the earthquake response of crane bridges. *Engineering Structures*, vol. 84, 2015, p. 89–101, Elsevier.
- [FEN 05] FENG Z.-Q., JOLI P., CROS J.-M., MAGNAIN B.
The bi-potential method applied to the modeling of dynamic problems with friction. *Computational Mechanics*, vol. 36, n° 5, 2005, p. 375–383, Springer.
- [FET 03a] FETECAU R. C., MARSDEN J. E., ORTIZ M., WEST M.
Nonsmooth Lagrangian mechanics and variational collision integrators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 2, n° 3, 2003, p. 381–416, SIAM.
- [FET 03b] FETECAU R., MARSDEN J. E., WEST M.
Variational multisymplectic formulations of nonsmooth continuum mechanics. *Perspectives and Problems in Nonlinear Science*, p. 229–261 Springer, 2003.
- [FIS 07] FISH J., BELYTSCHKO T.
A first course in finite elements. John Wiley & Sons New York, 2007.
- [FOR 00] FORTIN M., GLOWINSKI R.
Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems, vol. 15. Elsevier, 2000.
- [FUN 96] FUNG T., LEUNG A.
On the accuracy of discontinuous Galerkin methods in the time domain. *Journal of Vibration and Control*, vol. 2, n° 2, 1996, p. 193–217, Sage Publications.
- [GAV 09] GAVOILLE S.
Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009.
- [GÉR 14] GÉRADIN M., RIXEN D. J.
Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics. John Wiley & Sons, 2014.
- [GHA 13] GHANEM A., TORKHANI M., MAHJOUBI N., BARANGER T., COMBESURE A.
Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 254, 2013, p. 292–308, Elsevier.
- [GLO 89] GLOWINSKI R., LE TALLEC P.
Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. SIAM, 1989.

- [GRA 00] GRAVOUIL A.
Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures. Thèse de doctorat, 2000.
- [GRA 01] GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 1, 2001, p. 199–225, Wiley Online Library.
- [GRA 03] GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, n° 10, 2003, p. 1545–1569, Wiley Online Library.
- [GRA 15] GRAVOUIL A., COMBESURE A., BRUN M.
Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n° 3-4, 2015, p. 202–232, Wiley Online Library.
- [HAL 85] HALLQUIST J., GOUDREAU G., BENSON D.
Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 51, n° 1-3, 1985, p. 107–137, Elsevier.
- [HAR 09] HARMON D., VOUGA E., SMITH B., TAMSTORF R., GRINSPUN E.
Asynchronous contact mechanics. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 28, n° 3, 2009, p. 87 :1–87 :12.
- [HAR 12] HAR J., TAMMA K.
Advances in Computational Dynamics of Particles, Materials and Structures. John Wiley & Sons, 2012.
- [HIL 77] HILBER H. M., HUGHES T. J., TAYLOR R. L.
Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 5, n° 3, 1977, p. 283–292, Wiley Online Library.
- [HOF 88a] HOFF C., PAHL P.
Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 67, n° 3, 1988, p. 367–385, Elsevier.
- [HOF 88b] HOFF C., PAHL P.
Practical performance of the θ -method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 67, n° 1, 1988, p. 87–110, Elsevier.
- [HOF 89] HOFF C., HUGHES T., HULBERT G., PAHL P.
Extended comparison of the Hilber-Hughes-Taylor α -method and the θ -method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 76, n° 1, 1989, p. 87–93, Elsevier.

-
- [HOF 90] HOFF C., TAYLOR R.
Higher derivative explicit one step methods for non-linear dynamic problems. Part I : Design and theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, n° 2, 1990, p. 275–290, Wiley Online Library.
- [HOU 50] HOUBOLT J. C.
A recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft in gusts. *NACA TN*, vol. 2060, 1950.
- [HUG 76] HUGHES T. J., TAYLOR R. L., SACKMAN J. L., CURNIER A., KANOKNULCHAI W.
A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 8, n° 3, 1976, p. 249–276, Elsevier.
- [HUG 78a] HUGHES T. J., LIU W.
Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis : Implementation and Numerical Examples. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 375–378.
- [HUG 78b] HUGHES T. J., LIU W.
Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis : Stability Theory theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 371–374.
- [HUG 88] HUGHES T. J., HULBERT G. M.
Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 66, n° 3, 1988, p. 339–363, Elsevier.
- [HUG 12] HUGHES T. J.
The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis. Courier Corporation, 2012.
- [HUL 90] HULBERT G. M., HUGHES T. J.
Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 84, n° 3, 1990, p. 327–348, Elsevier.
- [HUL 93] HULBERT G.
A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation : The Generalized- α Method. *Ann Arbor*, vol. 1050, 1993, p. 48109–2125.
- [HUL 94] HULBERT G. M.
A unified set of single-step asymptotic annihilation algorithms for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 113, n° 1-2, 1994, p. 1–9, Elsevier.
- [HUL 96] HULBERT G. M., CHUNG J.
Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, n° 2, 1996, p. 175–188, Elsevier.
-

- [JEA 99] JEAN M.
The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 177, n° 3, 1999, p. 235–257, Elsevier.
- [JOU 98] JOURDAN F., ALART P., JEAN M.
A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, n° 1, 1998, p. 31–47, Elsevier.
- [KAN 00] KANE C., MARSDEN J., ORTIZ M., WEST M.
Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, 2000, p. 1295–1325.
- [KAT 85] KATONA M. C., ZIENKIEWICZ O.
A unified set of single step algorithms part 3 : The beta-m method, a generalization of the Newmark scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n° 7, 1985, p. 1345–1359, Wiley Online Library.
- [KHE 08] KHENOUS H. B., LABORDE P., RENARD Y.
Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 27, n° 5, 2008, p. 918–932, Elsevier.
- [KIK 88] KIKUCHI N., ODEN J. T.
Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods. siam, 1988.
- [KOL 15] KOLMAN R., CHO S., PARK K.
Efficient implementation of an explicit partitioned shear and longitudinal wave propagation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2015, Wiley Online Library.
- [KOM 89a] KOMORI A., FUKUDA T., VEKI T., KIRATA M., HOSHII T., KASHIWAZAKI A.
Study on earthquake responses of overhead traveling cranes. *Transactions of the 10th international conference on structural mechanics in reactor technology*, 1989.
- [KOM 89b] KOMORI A., UEKI T., HIRATA M., HOSHII T., KASHIWAZAKI A.
Seismic behavior with sliding of overhead travelling crane. *Karyoku Genshiryoku Hatsuden*, vol. 40, n° 6, 1989, p. 673–680.
- [KRE 06] KRENK S.
Energy conservation in Newmark based time integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44, 2006, p. 6110–6124, Elsevier.
- [KRE 09] KRENK S.
Non-linear modeling and analysis of solids and structures. Cambridge University Press, 2009.
- [LAU 97] LAURSEN T., CHAWLA V.
Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems.

- International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 5, 1997, p. 863–886, Wiley Online Library.
- [LAU 02a] LAURSEN T., LOVE G.
Improved implicit integrators for transient impact problems-geometric admissibility within the conserving framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, n° 2, 2002, p. 245–274, Wiley Online Library.
- [LAU 02b] LAURSEN T. A.
Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis. Springer Science & Business Media, 2002.
- [LAX 56] LAX P. D., RICHTMYER R. D.
Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 9, n° 2, 1956, p. 267–293, Wiley Online Library.
- [LET 94] LE TALLEC P.
Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational mechanics advances*, vol. 1, n° 2, 1994, p. 121–220, Elsevier.
- [LEW 04] LEW A., MARSDEN J., ORTIZ M., WEST M.
Variational time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, n° 1, 2004, p. 153–212, John Wiley & Sons, Baffins Lane Chichester W. Sussex PO 19 1 UD UK,.
- [LI 96] LI X. D., WIBERG N.-E.
STRUCTURAL DYNAMIC ANALYSIS BY A TIME-DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 12, 1996, p. 2131–2152, Wiley Online Library.
- [LIO 90] LIONS P.-L.
On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains. *Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, vol. 6 SIAM Philadelphia, PA, 1990, p. 202–223.
- [LIU 82] LIU W., BELYTSCHKO T.
Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis. *Computers & Structures*, vol. 15, n° 4, 1982, p. 445–450, Elsevier.
- [MAH 10a] MAHJOUBI N.
Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multiéchelle en temps en dynamique des structures. Thèse de doctorat, PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.
- [MAH 10b] MAHJOUBI N., KRENK S.
Multi-time-step domain coupling method with energy control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, n° 13, 2010, p. 1700–1718, Wiley Online Library.
- [MAH 11] MAHJOUBI N., GRAVOUIL A., COMBESCURE A., GREFFET N.
A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with

- incompatible time steps in structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n° 9, 2011, p. 1069–1086, Elsevier.
- [MAQ 15] MAQUART T., BAGUET S., BARANGER T.
Méthode Arlequin multi-schéma pour la dynamique non linéaire des structures. *CSMA 2015-12e Colloque National en Calcul des Structures*, 2015.
- [MIR 89] MIRANDA I., FERENCZ R. M., HUGHES T. J.
An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics. *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 18, n° 5, 1989, p. 643–653, Wiley Online Library.
- [MOR 78] MOREAU J. J.
Approximation en graphe d’une évolution discontinue. *RAIRO-Analyse Numérique*, vol. 12, n° 1, 1978, p. 75–84.
- [MOR 88] MOREAU J. J.
Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *Nonsmooth Mechanics and Applications*, p. 1-82 Springer Wien, 1988.
- [MOR 99] MOREAU J. J.
Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 177, n° 3, 1999, p. 329–349, Elsevier.
- [MOR 00] MOREAU J. J.
Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides. *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 9, n° 1-3, 2000, p. 9–28, Taylor & Francis.
- [MOR 03] MOREAU J. J.
Modélisation et simulation de matériaux granulaires. *Actes du 35eme Congres National d’Analyse Numérique*, 2003.
- [NEA 89] NEAL M. O., BELYTSCHKO T.
Explicit-explicit subcycling with non-integer time step ratios for structural dynamic systems. *Computers & Structures*, vol. 31, n° 6, 1989, p. 871–880, Elsevier.
- [NEW 59] NEWMARK N. M.
A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 85, n° 3, 1959, p. 67–94, ASCE.
- [NOE 04] NOELS L., STAINIER L., PONTHOT J.-P.
Combined implicit/explicit algorithms for crashworthiness analysis. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 30, n° 8, 2004, p. 1161–1177, Elsevier.
- [NOH 13] NOH G., BATHE K.-J.
An explicit time integration scheme for the analysis of wave propagations. *Computers & structures*, vol. 129, 2013, p. 178–193, Elsevier.
- [NSI 08] NSIAMPA N., PONTHOT J.-P., NOELS L.
Comparative study of numerical explicit schemes for impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 35, n° 12, 2008, p. 1688–1694, Elsevier.

- [OTA 02] OTANI A., NAGASHIMA K., SUZUKI J.
Vertical seismic response of overhead crane. *Nuclear engineering and design*, vol. 212, n° 1, 2002, p. 211–220, Elsevier.
- [PAO 02a] PAOLI L., SCHATZMAN M.
A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 40, n° 2, 2002, p. 702–733, SIAM.
- [PAO 02b] PAOLI L., SCHATZMAN M.
A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 40, n° 2, 2002, p. 734–768, SIAM.
- [PAR 75] PARK K.
An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, n° 2, 1975, p. 464–470, American Society of Mechanical Engineers.
- [RAO 99] RAOUS M.
Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion. *New Developments in Contact Problems*, p. 101–178 Springer Wien, 1999.
- [RYC 12] RYCKMAN R. A., LEW A. J.
An explicit asynchronous contact algorithm for elastic body–rigid wall interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, n° 7, 2012, p. 869–896, Wiley Online Library.
- [SAA 03] SAAD Y.
Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.
- [SCH 70] SCHWARZ H. A.
Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. Zürcher u. Furrer, 1870.
- [SCH 14] SCHINDLER T., ACARY V.
Timestepping schemes for nonsmooth dynamics based on discontinuous Galerkin methods : definition and outlook. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 95, 2014, p. 180–199, Elsevier.
- [SIM 92a] SIMO J. C., LAURSEN T.
An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, vol. 42, n° 1, 1992, p. 97–116, Elsevier.
- [SIM 92b] SIMO J., TARNOW N.
The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 43, n° 5, 1992, p. 757–792, Springer.
- [SMO 92] SMOLINSKI P.
Stability analysis of a multi-time step explicit integration method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 95, n° 3, 1992, p. 291–300, Elsevier.
- [SMO 96] SMOLINSKI P.
Subcycling integration with non-integer time steps for structural dynamics problems. *Computers & structures*, vol. 59, n° 2, 1996, p. 273–281, Elsevier.

- [SMO 98] SMOLINSKI P., WU Y.-S.
An implicit multi-time step integration method for structural dynamics problems. *Computational Mechanics*, vol. 22, n° 4, 1998, p. 337–343, Springer.
- [SOO 14] SOOBBARAYEN K.
Dynamique non linéaire et rayonnement acoustique de structures comportant des interfaces frottantes. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2014.
- [STE 97] STEWART D. E.
Existence of solutions to rigid body dynamics and the Painlevé paradoxes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, vol. 325, n° 6, 1997, p. 689–693, Elsevier.
- [STE 98] STEWART D. E.
Convergence of a Time-Stepping Scheme for Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painlevé's Problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 145, n° 3, 1998, p. 215–260, Springer.
- [SUZ 10] SUZUKI K., INAGAKI M., IJIMA T.
Seismic capacity test of overhead crane under horizontal and vertical excitation. *Journal of Disaster Research*, vol. 5, n° 4, 2010, p. 369–377.
- [TAM 01] TAMMA K. K., ZHOU X., SHA D.
A theory of development and design of generalized integration operators for computational structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 7, 2001, p. 1619–1664, Wiley Online Library.
- [TAM 03] TAMMA K., SHA D., ZHOU X.
Time discretized operators. Part 1 : towards the theoretical design of a new generation of a generalized family of unconditionally stable implicit and explicit representations of arbitrary order for computational dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n° 3, 2003, p. 257–290, Elsevier.
- [TAY 93] TAYLOR R. L., PAPADOPOULOS P.
On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, n° 12, 1993, p. 2123–2140, Wiley Online Library.
- [WAN 99] WANG D., CONTI C., BEALE D.
Interference impact analysis of multibody systems. *Journal of Mechanical Design*, vol. 121, n° 1, 1999, p. 128–135, American Society of Mechanical Engineers.
- [WIB 99] WIBERG N.-E., LI X.
Adaptive finite element procedures for linear and non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 10, 1999, p. 1781–1802, Wiley Online Library.
- [WIL 72] WILSON E., FARHOOMAND I., BATHE K.
Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 1, n° 3, 1972, p. 241–252, Wiley Online Library.

- [WOO 80] WOOD W., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.
An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n° 10, 1980, p. 1562–1566, Wiley Online Library.
- [WRI 99] WRIGGERS P.
Finite elements for thermomechanical contact and adaptive finite element analysis of contact problems. *New Developments in Contact Problems*, p. 179–246 Springer Wien, 1999.
- [WU 86] WU S. C., YANG S. M., HAUG E. J.
Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, impact and constraint addition-deletion—II Planar systems. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 21, n° 5, 1986, p. 407–416, Elsevier.
- [WU 00] WU Y., SMOLINSKI P.
A multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 187, n° 3-4, 2000, p. 641–660, Elsevier.
- [WU 06] WU S. R.
Lumped mass matrix in explicit finite element method for transient dynamics of elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44, 2006, p. 5983–5994, Elsevier.
- [ZAF 15] ZAFATI E., BRUN M., DJERAN-MAIGRE I., PRUNIER F.
Design of an efficient multi-directional explicit/implicit Rayleigh absorbing layer for seismic wave propagation in unbounded domain using a strong form formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2015, Wiley Online Library.
- [ZHO 04] ZHOU X., TAMMA K.
Design, analysis, and synthesis of generalized single step single solve and optimal algorithms for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n° 5, 2004, p. 597–668, Wiley Online Library.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., TAYLOR R. L.
The finite element method, vol. 3. McGraw-hill London, 1977.
- [ZIE 00] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L.
The finite element method : solid mechanics, vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000.

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : Fekak

DATE de SOUTENANCE : 2/05/2017

Prénoms : Fatima-Ezzahra

TITRE : Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2017LYSEI037

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Les ponts roulants sont des engins de levage situés en haut des bâtiments qu'ils équipent. Ils servent à manutentionner des charges très lourdes et parfois critiques. Pendant un séisme, un pont roulant est exposé à des chocs multiples. Ces impacts peuvent causer des dommages importants dans la structure pouvant conduire à une chute de la charge manutentionnée ou du pont roulant lui-même. Donc, la vérification de la tenue des ponts roulants au séisme est une question primordiale. Actuellement, cette vérification est basée sur des méthodes de calcul statiques. Ces méthodes font l'hypothèse d'un comportement purement linéaire des ponts roulants ce qui les rend très conservatives. Depuis quelques années les niveaux sismiques imposés par les autorités nationales augmentent chaque année, et les constructeurs de ponts roulants se trouvent dans l'incapacité de construire à partir des efforts sur-estimés fournis par les méthodes statiques. L'objectif de la thèse est l'étude de la réponse dynamique d'un pont roulant pendant un séisme en prenant en compte les non-linéarités géométriques et matériau. Afin de modéliser ces phénomènes, une analyse dynamique temporelle avec une approche multi-échelle en temps est adoptée. Pour prendre en compte l'aspect haute fréquence des chocs, un intégrateur temporel variationnel explicite, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange et dédié au contact/impact, est développé. Ensuite, un intégrateur hétérogène (différents schémas d'intégration) asynchrone (différents pas de temps), basé sur la méthode de couplage GC, est appliqué au problème du pont roulant. Cette stratégie multi-échelle en temps permet d'adapter le schéma d'intégration et le pas de temps au sous domaine considéré. Par conséquent, l'intégrateur explicite est adopté dans les zones de contact et un schéma implicite de type accélération moyenne, est adopté dans le reste de la structure. Finalement, un démonstrateur de co-simulation entre les logiciels Cast3M et Europlexus est mis en place pour montrer le gain très significatif en temps de calcul dans le cas d'un modèle élément finis tridimensionnel d'un pont roulant industriel.

MOTS-CLÉS : Intégrateur temporel hétérogène asynchrone, impact, contact, séisme, pont roulant, co-simulation

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur Anthony Gravoil

Co-directeur de thèse : Monsieur Michael Brun

Président du jury : le président

Composition du jury :	NOELS LUDOVIC	Professeur Université de Liège	Rapporteur
	GATUINGT FABRICE	Professeur LMT Cachan	Rapporteur
	RIXEN DANIEL	Professeur Technische Universität München	Examineur
	DJERAN-MAIGRE IRINI	Professeur INSA-Lyon	Examineur
	TIE BING	Chargée de recherche Centrale Paris	Examineur
	DEPALE BRUNO	Expert référent CETIM	Examineur
	PIRON GÉRARD	Directeur technique REEL	Invité
	GRAVOUIL ANTHONY	Professeur INSA-Lyon, IUF	Directeur de thèse
BRUN MICHAEL	Maître de conférences (HDR) INSA-Lyon	Directeur de thèse	

