

# Atomes et vortex optiques: conversion de moments orbitaux de lumière en utilisant la transition à deux photons 5S-5D du rubidium

Aurélien Chopinaud

#### ► To cite this version:

Aurélien Chopinaud. Atomes et vortex optiques: conversion de moments orbitaux de lumière en utilisant la transition à deux photons 5S-5D du rubidium. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT: 2018SACLS155. tel-01941723

# HAL Id: tel-01941723 https://theses.hal.science/tel-01941723

Submitted on 2 Dec 2018  $\,$ 

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





# Atomes et vortex optiques : conversion de moments orbitaux de lumière en utilisant la transition à deux photons 5S-5D du rubidium

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay préparée à l'Université Paris-Sud

École doctorale n°572 Ondes et Matière (EDOM) Spécialité de doctorat : Milieux Dilués et Optique Fondamentale

Thèse présentée et soutenue à Orsay le 8 juin 2018, par

# M. Aurélien Chopinaud

Composition du Jury :

M. Guillaume Labeyrie Directeur de recherche, CNRS (InPhyNi)	Président
M <sup>me</sup> Agnès Maître Professeure, Université Pierre et Marie Curie (INSP)	Rapportrice
M. Etienne Brasselet Directeur de recherche, CNRS (LOMA)	Rapporteur
M. Cyril Drag Chargé de recherche, CNRS (LPP)	Examinateur
M. Luca Guidoni Chargé de recherche, CNRS (LMPQ)	Examinateur
M. Laurent Longchambon Maître de conférences, Université Paris 13 (LPL)	Examinateur
M <sup>me</sup> Laurence Pruvost Directrice de recherche, CNRS (LAC)	Directrice de thèse

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes deux rapporteurs, Agnès Maître et Etienne Brasselet, pour avoir accepté de juger mon travail. Je remercie également les autres membres du jury, le président Guillaume Labeyrie, Cyril Drag, Luca Guidoni et Laurent Longchambon, d'avoir pris le temps de lire et évaluer mon travail. Je les remercie tous pour leurs questions pertinentes et l'échange scientifique que nous avons pu avoir lors de la soutenance. Je remercie plus particulièrement Cyril, que j'ai pu côtoyer amicalement lorsqu'il était encore au LAC, pour l'aide qu'il m'a apportée sur le TiSa grâce à sa méthode peu conventionnelle!

Je remercie ma directrice de thèse, Laurence Pruvost, pour m'avoir fait confiance pour cette thèse. Merci de m'avoir fait découvrir ce sujet passionnant des vortex optiques et permis de réaliser cette belle expérience grâce à vos compétences scientifiques et pédagogiques. Je pense avoir beaucoup appris, sur le plan scientifique et humain. Enfin merci pour les discussions intéressantes (parfois un peu houleuses!) que nous avons eues.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux deux autres membres du groupe Twist. D'une part à Bruno Viaris pour l'aide, les conseils et la vivacité d'esprit dont il m'a fait bénéficier au cours de ma thèse, en particulier sur les manips. Merci aussi pour le soutien dans les moments plus difficiles. D'autre part à Marion Jacquey également pour son aide précieuse, ses conseils et son soutien. Merci aussi pour la bonne humeur et la gentillesse apportées tous les jours dans le bureau.

Je remercie Josselin, post doc au début de ma thèse, avec qui j'avais pu travailler sur l'expérience de guidage d'atomes froids.

Je remercie également tous les stagiaires qui ont travaillé sur l'expérience : Laurent, Baptiste et David ainsi que les autres stagiaires du groupe : Zacharie, Maxime et Jonas. Bonne chance pour la suite !

Je remercie tous les services du laboratoire Aimé Cotton qui ont contribué à cette thèse grâce à leurs compétences. Merci en particulier au GG de l'info, Jérôme, pour son aide et son humour bien à lui!

Je remercie tous les autres membres du laboratoire que j'ai pu côtoyer durant ces années et avec qui j'ai pu avoir des discussions passionnantes et aussi diverses que variées !

Je remercie tous les doctorants et les post-docs du LAC avec qui j'ai passé de supers moments (et des soirées arrosées), ils sont trop nombreux pour tous les citer. Merci pour cette ambiance qu'on a réussi à (re?)-créer dans cette vieille institution, j'espère que vous saurez l'emmener encore plus loin! J'espère aussi qu'on restera en contact! Merci en particulier aux plus anciens d'entre nous, les premières relations que j'ai nouées : Aliou, Anne, Mélanie et Tarek. Merci de m'avoir sorti de l'isolement et pour toutes les discussions/cafés qu'on a pu avoir ensemble.

Mention spéciale au groupe goûter de 17h : merci à Benjamiiiine pour tous ces bons moments passés depuis le Magistère, Clément pour toutes les discussions et fous rires qu'on a eus (un peu commères par moment faut l'avouer), Hen-riton pour les manifs et les bières, Kelly, ma complice de fin de thèse, pour le soutien, l'entraide et les rigolades qu'on a partagés notamment durant les phases critiques, Paul pour son humour énigmatique, Thibault pour sa fraicheur de p'tit jeune! Vous allez me manquer mais je suis sûr qu'on se reverra souvent!;)

Mention doublement spéciale au groupe du week-end en Creuse (ils se reconnaitront) dont je ne détaillerai pas les méfaits ici : ce qui se passe en Creuse reste en Creuse !

Je remercie bien sûr tous mes autres amis. D'abord mes vieux amis de Montluçon et de la Creuse : Lise, Gagou et J-E. Je suis content qu'on ait passé toutes ces années ensemble et j'espère (je suis sûr) que c'est pas fini! Aux âmes bien nées, la valeur n'attend point le nombre des années.

Ensuite mes amis d'Orsay : Nadia, Anaïs, Mauvais, Baur, Guigui, Gabi, Nicolas, que je côtoie tout le temps depuis maintenant plus de 6 ans. Votre rencontre m'a bien changé et il serait trop long de citer toutes vos qualités/défauts qui font que je vous aime !

Un grand merci aussi à mes amis-collocs : Nicolas, Séb, Guigui (encore) et Charlotte pour cette merveilleuse colloc (on oublie le ménage haha) qu'on a créée. Le soutien mutuel qu'on a eu et les nombreuses discussions tard le soir ont été essentiels pour mener à bien cette thèse !  $\heartsuit$ 

Merci à Cécile (et Nicolas aussi) de m'avoir incité à me remettre au violon et pour les cours perso généreusement donnés dans la bonne humeur! C'est l'heure du bignou!

Merci enfin à ma famille : mes parents, mes grands-parents, ma cousine Lise et les autres sans qui toute cette aventure n'aurait pas été possible. Merci pour tout ce que vous m'avez apporté et continuez à m'apporter.

# Table des matières

# Introduction

1	Vor	tex opt	ique et 3 <sup>e</sup> moment de la lumière	11
	1.1	Vorticit	é en physique	. 13
		1.1.1	Les vortex en mécanique des fluides	. 13
		1.1.2	Les vortex dans les supraconducteurs	. 14
	1.2	Vorticit	é en optique	. 15
		1.2.1	Singularités de phase de type vis et coin	. 15
		1.2.2	Moment orbital d'un vortex optique	. 18
		1.2.3	Bilan : les trois moments de la lumière	. 20
	1.3	Applica	tions du 3 <sup>e</sup> moment	. 21
		1.3.1	Télécommunications	. 22
		1.3.2	Information quantique	. 23
		1.3.3	Echange avec les atomes	. 23
	1.4	Le mod	e de Laguerre-Gauss : le vortex usuel	. 24
		1.4.1	Champ électrique	. 24
		1.4.2	Base des modes de Laguerre-Gauss	. 26
		1.4.3	Intensité	. 26
		1.4.4	$Cas \mathbf{p=0} \dots \dots$	. 27
	1.5	Généra	tion d'un mode de Laguerre-Gauss et mesure de son OAM	. 28
		1.5.1	Principales méthodes de génération	. 28
		1.5.2	Méthodes usuelles de mesure de l'OAM	. 33
		1.5.3	Méthodes utilisées dans ce manuscrit	. 35
	1.6	Conclus	sion	. 42
2	Gér lisar	néralités nt la tra	s sur la conversion de vortex optiques par mélange d'ondes ut ansition $5{ m S}_{1/2}-5{ m D}_{5/2}$ du rubidium	ti- 45
	2.1	Introdu		. 47
	2.2	Transit	Ion a deux photons $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ dans le rubidium	. 41
	2.3	Melang	e d'ondes - optique non lineaire	. 49
		2.3.1	Rappels sur l'optique non linéaire	. 49
		2.3.2	Le mélange à quatre ondes pour la conversion rouge-bleu	. 50
		2.3.3	Cas d'école du mélange à quatre ondes : les ondes planes	. 52
		2.3.4	Mélange à quatre ondes usuel : cas des ondes gaussiennes	. 54
	~ (	2.3.5	Critère de Boyd	. 56
	2.4	Mélang	e à quatre ondes pour des vortex optiques	. 56
		2.4.1	Modèle de gain faible	. 56
		2.4.2	Accords de phase pour des vortex optiques	. 58
	2.5	Conclus	sion	. 60

9

3	Réa	alisation expérimentale d'une conversion de vortex utilisant la transition	L
	$5S_1$	$_{/2} - 5 D_{5/2}$	61
	3.1	Introduction	63
	3.2	Montage expérimental pour la conversion d'un vortex optique	63
		3.2.1 Cellule de rubidium	63
		3.2.2 Façonnage du laser à 776 nm en un vortex	66
		3.2.3 Laser à 780 nm et mise en place de la conversion	68
		3.2.4 Détections du vortex bleu	69
	3.3	Conditions retenues pour l'expérience	70
		3.3.1 Température de la vapeur	70
		3.3.2 Puissance des lasers	71
		3.3.3 Fréquence des lasers : ajustement de la transition Raman	72
	3.4	Variantes du montage	76
		3.4.1 Vers de plus grandes valeurs d'OAM	76
		3.4.2 Conversion d'une paire de vortex optiques	77
	3.5	Conclusion	78
4	Cor	nversion d'un vortex optique de grande hélicité	81
	4.1	Introduction	83
	4.2	Conversion de vortex optique de grande hélicité par mélange à quatre ondes	83
		4.2.1 Forme et taille du vortex généré : lien avec le modèle de gain faible .	84
		4.2.2 Efficacité du mélange à quatre ondes en fonction de $\ell$	87
		4.2.3 Propagation et pureté du mode généré	91
		4.2.4 OAM du vortex généré	94
		4.2.5 Règles de sélection du transfert d'OAM	96
		4.2.6 Mode bleu le plus probable dans le cadre du critère de Boyd	100
		4.2.7 Au-delà du critère de Boyd	103
		4.2.8 Conclusion	105
	4.3	Augmentation de l'hélicité transférée	109
		4.3.1 Motivation	109
		4.3.2 Transfert de l'OAM	109
		4.3.3 Efficacité du processus en fonction de $\ell$	112
		4.3.4 Conclusion	114
	4.4	Variante : conversion utilisant la transition $5S_{1/2} - 5D_{3/2} \dots \dots \dots$	114
	4.5	Conclusion	116
5	Cor	nversion de multi-vortex coaxiaux	119
	5.1	Introduction	121
	5.2	Conversion d'une superposition de vortex	121
		5.2.1 Génération d'une superposition de vortex par modulation de la phase	
		azimutale	122
		5.2.2 Superposition de vortex coaxiaux	124
		5.2.3 Conversion rouge-bleu d'une superposition de vortex coaxiaux	125
		5.2.4 Conclusion $\ldots \ldots \ldots$	129
	5.3	Conversion d'une paire de vortex	130
		5.3.1 Conversion d'une paire d'OAM de même signe	131
		5.3.2 Conversion d'une paire d'OAM de signe contraire	133
		5.3.3 Bilan	135
	5.4	Interprétation dans le cadre du critère de Boyd	135
		5.4.1 Premier cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de même signe	137

5.4.2Deuxième cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de signe contraire5.5Conclusion	138 140
Conclusion et perspectives	143
Annexe A L'atome de rubidium	149
Annexe B Optimum de recouvrement des quatre champs du mélange	155
Annexe C Moment orbital angulaire d'une superposition de vortex	157

# Introduction

Depuis un peu plus de 25 ans maintenant le moment orbital angulaire de la lumière (généralement appelé par son acronyme anglais OAM) suscite l'intérêt et l'engouement de la communauté scientifique. Il est associé à des variations spatiales particulières de la phase des ondes lumineuses et prédit par la théorie de Maxwell. L'OAM est une propriété de la lumière quantifiée à l'échelle du photon unique. Plus précisément les ondes portant une phase azimutale  $e^{i\ell\theta}$ , où  $\ell$  est un entier relatif, portent un moment orbital angulaire de  $\ell\hbar$  par photon en plus du moment angulaire de spin  $\sigma\hbar$  associé à la polarisation. De telles ondes ont été dénommées vortex optiques, ondes twistées ou encore ondes structurées. C'est avec l'article fondateur de Allen et al. [6] montrant que des modes lasers usuels, les modes de Laguerre-Gauss, portaient un tel moment angulaire qu'une recherche accrue débuta. Depuis de nombreuses expériences ont sondé le rôle et l'impact de l'OAM dans les processus fondamentaux d'interaction entre la lumière et la matière [14], [9], [111]. Néanmoins l'utilisation de l'OAM comme variable de codage de l'information a apporté à celui-ci sa notoriété. En effet l'avantage majeur de cette nouvelle variable est d'avoir un grand nombre de valeurs accessibles, théoriquement infini, tout en restant discrète. Une telle potentialité a ainsi engendré une recherche importante sur l'utilisation de l'OAM comme variable de codage de l'information, aussi bien classique pour augmenter la capacité des canaux de transmission [130], que quantique pour augmenter la dimensionnalité de l'espace de Hilbert [78]. L'information quantique étant en plein essor c'est dans ce domaine que la recherche est aujourd'hui la plus abondante.

Dans mon cas je me suis intéressé plus particulièrement aux processus permettant de transférer et stocker l'OAM. Parmi ceux-ci les vapeurs atomiques, chaudes ou froides, sont des candidats de choix. La compréhension précise de l'interaction entre ces vapeurs et un ou des vortex optiques à grandes valeurs d'OAM est ainsi un point fondamental pour vérifier la fiabilité de tels systèmes. Même si de grandes avancées ont été réalisées ces dernières années [91], [88], [129], de nombreuses questions demeurent partiellement résolues ou sans réponse, on peut citer en particulier :

- comment est régi le transfert d'OAM entre deux ondes par des atomes?
- quelle est l'efficacité de tels processus d'échange?
- l'information (i.e. l'OAM) véhiculée est-elle identique à l'information initiale et peut-on transférer plusieurs informations simultanément ?
- y'a t-il une limite physique au transfert de grandes valeurs d'OAM?

Dans cette thèse je tenterai d'apporter des réponses à ces questions. Pour cela j'ai réalisé un mélange à quatre ondes dans une vapeur de rubidium à partir d'un, puis de plusieurs

#### Introduction

vortex optiques. Ce mélange est obtenu à partir de la transition à deux photons entre les niveaux  $5S_{1/2}$  et  $5D_{5/2}$  du rubidium via le niveau  $5P_{3/2}$ . Pour cela deux lasers, l'un à 780 nm et l'autre à 776 nm, façonnés en vortex optique, ont été utilisés. En se désexcitant via le niveau  $6P_{3/2}$  le système génère alors deux faisceaux directionnels, l'un infrarouge à 5230 nm et l'autre bleu à 420 nm. Ce processus permet la conversion de l'OAM total des vortex d'entrée associée à une conversion de leur fréquence. Cette dernière caractéristique apporte l'avantage d'une absence d'ambiguïté entre les faisceaux initiaux et les faisceaux générés.

Cette thèse a été effectuée au laboratoire Aimé Cotton sur le campus d'Orsay au sein de l'équipe "Rubidium froid et lumière twistée". Ce manuscrit en relate les différents résultats obtenus et leur analyse. Il est articulé en cinq chapitres.

Un premier chapitre introduit la notion de singularité de phase associée à celle de vortex optique et retrace l'origine du moment orbital angulaire. Il présente le mode de Laguerre-Gauss qui est le vortex optique usuellement utilisé, les façons de le générer et de mesurer son OAM ainsi que ses principales applications.

Un deuxième chapitre s'attache à la théorie physique de la conversion de vortex par mélange à quatre ondes, prérequis essentiel à la réalisation et la compréhension de celle-ci.

Un troisième chapitre détaille le montage expérimental conçu et réalisé au cours de cette thèse pour étudier le processus de conversion de vortex.

Le quatrième chapitre expose la conversion d'un vortex optique à partir d'un faisceau gaussien à 780 nm et d'un mode de Laguerre-Gauss d'OAM  $\ell$  à 776 nm.

Le dernier chapitre est articulé en deux parties. La première partie détaille la conversion d'une superposition de vortex obtenue en modulant la phase du mode de Laguerre-Gauss à 776 nm. Dans la seconde partie la conversion de deux vortex optiques coaxiaux et d'OAM différent,  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , est étudiée. Ceci est obtenu en remplaçant le faisceau gaussien à 780 nm par un deuxième mode de Laguerre-Gauss. Nous terminons ce manuscrit en donnant des perspectives à ce travail de thèse.

# Chapitre 1

# Vortex optique et 3<sup>e</sup> moment de la lumière

## Sommaire

1.1 Vo	rticité en physique	<b>13</b>
1.1.1	Les vortex en mécanique des fluides	13
1.1.2	Les vortex dans les supraconducteurs	14
1.2 Vo	rticité en optique	15
1.2.1	Singularités de phase de type vis et coin	15
1.2.2	Moment orbital d'un vortex optique	18
1.2.3	Bilan : les trois moments de la lumière	20
1.3 Ap	plications du 3 <sup>e</sup> moment	<b>21</b>
1.3.1	Télécommunications	22
1.3.2	Information quantique	23
1.3.3	Echange avec les atomes	23
1.4 Le	mode de Laguerre-Gauss : le vortex usuel	<b>24</b>
1.4.1	Champ électrique	24
1.4.2	Base des modes de Laguerre-Gauss	26
1.4.3	Intensité	26
1.4.4	$Cas p=0 \ldots \ldots$	27
1.5 Gé	nération d'un mode de Laguerre-Gauss et mesure de son OAM	28
1.5.1	Principales méthodes de génération	28
1.5.2	Méthodes usuelles de mesure de l'OAM	33
1.5.3	Méthodes utilisées dans ce manuscrit	35
1.6 Co	nclusion	42

Le but de ce chapitre est de se familiariser avec la notion de *vortex optique* et de comprendre ses propriétés. Pour cela nous commencerons par donner quelques notions sur la vorticité en physique avant d'étudier plus en détails la vorticité en optique. Nous nous attarderons sur la notion de *moment orbital angulaire* associée à l'*hélicité* des vortex optiques, laquelle sera le coeur de ce travail de thèse. Nous présenterons en particulier l'origine de ce moment et plusieurs de ses applications. Nous terminerons par présenter les méthodes que nous utilisons pour générer des vortex optiques et mesurer leur hélicité.

## 1.1 Vorticité en physique

Selon la définition du dictionnaire (Larousse) un vortex est un "tourbillon creux qui prend naissance, sous certaines conditions, dans un fluide en écoulement". C'est effectivement, en général, l'idée que l'on a des vortex. Même si ceux-ci sont présents dans de nombreux autres domaines de la physique la mécanique des fluides offre une approche intéressante à la notion de vortex optique car elle est associée à des phénomènes de la vie courante que chaque lecteur connait. C'est donc à travers cet exemple et celui des supraconducteurs que nous allons montrer que la vorticité peut être vue comme un concept général en physique qui ouvre la voie vers le vortex optique.

#### 1.1.1 Les vortex en mécanique des fluides

En mécanique des fluides, un tourbillon ou vortex, d'axe z, est en général défini par un champ de vitesse donné par [87][26] :

$$\vec{v} = v_{\theta}(r)\vec{e_{\theta}} = \frac{\kappa}{2\pi r}\vec{e_{\theta}} \quad \forall r > 0$$
(1.1)

où  $\kappa$  est la circulation du champ donnée par

$$\kappa = \oint \vec{v} \cdot \vec{dl} \tag{1.2}$$

On peut montrer que, pour un fluide parfait barotrope<sup>1</sup>,  $\kappa$  est constante au cours du temps (Théorème de Kelvin).

On définit la vorticité  $\vec{\omega}$  comme le rotationnel du champ de vitesse du fluide :  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ . Il décrit la rotation *locale* des particules fluides.

Ce champ de vitesse décrit par l'équation (1.1) possède une singularité en r = 0 où la vitesse est infinie et la vorticité non définie.

Les lignes de champ du vortex, appellées lignes de courant, sont tangeantes en tout point au champ de vitesse. Elles sont définies par  $dl \times \vec{v} = \vec{0}$  ce qui dans le cas du vortex correspond à  $\frac{\kappa}{2\pi} ln(r) = cste$  soit  $r = cste \forall \theta$ . Les lignes de courant sont donc des cercles centrés sur la singularité. Ceci signifie que les particules de fluides tournent autour de la singularité d'où l'appelation de vortex.

En dehors du centre du vortex on a  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , on peut donc définir un potentiel scalaire  $\Phi(\vec{r})$  tel que  $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$ .

Ce potentiel est donné par

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\kappa\theta}{2\pi} \tag{1.3}$$

On voit ainsi que la fonction  $\Phi$  augmente d'un incrément  $\kappa$  pour chaque tour effectué autour de l'axe du vortex. Cette relation permet de trouver les équipotentielles données par  $\Phi = cste$ 

<sup>1.</sup> C'est à dire que sa densité ne dépend que de la pression.

soit  $\theta = cste$ . Ce sont donc des droites passant par la singularité si bien qu'il n'est pas possible de définir un potentiel au niveau de la singularité en r=0.

#### 1.1.2 Les vortex dans les supraconducteurs

Il est bien connu que les supraconducteurs peuvent expulser un champ magnétique  $\vec{B}$  qui leur est appliqué : c'est l'effet Meissner. Cette expulsion est due à des courants de surface qui créent un champ magnétique annulant le champ appliqué. Si le champ magnétique appliqué est trop élevé la supraconduction disparait. On parle de supraconducteurs de type I. Les supraconducteurs de types II ont le même comportement mais à champ magnétique beaucoup plus élevé ils peuvent laisser pénétrer une partie du champ magnétique le long de tubes ou anneaux que l'on appelle *vortex*, voir figure (1.1).

Rappelons que la supraconductivité est liée à l'appariemment des électrons en paire de



**FIGURE 1.1** – Lorsqu'un champ magnétique (en noir) est appliqué à un semi-conducteur des courants supraconducteurs (en rouge) se développent à la surface afin d'écranter ce champ. Dans les supraconducteurs de type II d'autres courants se développent (en vert) et créent des vortex laissant traverser une partie du champ magnétique. Image tirée de [47]

Cooper à basse température. En écrivant la fonction d'onde de la paire de Cooper sous la forme  $\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\rho_0} \exp(i\varphi(\vec{r}))$ , avec  $\rho_0 = \Psi\Psi^*$  la densité de paire de Cooper et  $\varphi$  la phase de la fonction d'onde, on peut montrer (théorie de Ginzburg-Landau [103]) que la densité de super-courant s'écrit

$$\vec{j} = \frac{2e}{m}\rho_0[\hbar\vec{\nabla}\varphi - 2e\vec{A}] \tag{1.4}$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur du champ tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , *e* la charge d'un électron et *m* la masse de la paire.

Dans le supraconducteur B = 0 par effet Meissner donc  $\vec{j} = \vec{0}$ . Ceci a pour conséquence que

$$\oint_C \vec{j} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{1.5}$$

et donc

$$2e \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \hbar \oint_C \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{dl}$$
(1.6)

Par unicité de la phase de la fonction d'onde

$$\oint_C \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{dl} = 2n\pi \tag{1.7}$$

où n est en entier. Finalement en utilisant le théorème de Stokes le flux du champ magnétique  $\Phi$  à travers le vortex est donné par

$$\Phi = \iint_{S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \oint_{C} \vec{A} \cdot \vec{dl} = n \frac{h}{2e}$$
(1.8)

 $\Phi$  ne peut prendre que des valeurs particulières : multiples d'un quantum de flux  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ . Chaque vortex est donc associé à un quantum de flux.

On observe aussi un comportement similaire dans les superfluides [135] et les condensats de Bose-Einstein [83].

Ces deux exemples nous montrent que la vorticité est associée à un champ vectoriel qui possède une singularité où celui-ci n'est pas défini. Il en résulte que la circulation de champ autour de la singularité est une grandeur quantifiée. Nous allons voir maintenant que ceci s'applique également aux cas des vortex optiques.

## 1.2 Vorticité en optique

#### 1.2.1 Singularités de phase de type vis et coin

La notion de vortex optique est liée à celle de singularité de phase ("phase dislocation" en anglais, nommée ainsi d'après des analogies avec les cristaux). Une singularité de phase est un point (en 2D) ou une ligne (en 3D) d'un front d'onde où la phase n'est pas définie<sup>2</sup>. En décrivant l'onde (considérée ici monochromatique) par un champ scalaire complexe E de la forme

$$E(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})e^{i(\phi(\mathbf{r})-\omega t)} = A(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r},t)}$$
(1.9)

où  $A(\mathbf{r})$  est l'amplitude et  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  la phase de l'onde, on peut montrer [35] [92] que  $\varphi$  varie d'un multiple de  $2\pi$  le long d'un contour qui entoure la singularité et que A est nulle à cet endroit.

Formellement cela revient à écrire

$$\oint_C \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{dl} = 2n\pi \tag{1.10}$$

avec n un entier relatif.

L'équation (1.10) est valable quelque soit le contour C à condition qu'il entoure la singularité. Le nombre n (souvent nommé  $\ell$ ) est appelée l'ordre ou la charge topologique de la singularité. On retrouve ici les analogies avec les autres types de vorticité en physique définis précédemment.

Cette définition s'applique à tout type d'onde en particulier aux ondes optiques. M. Berry et J. Nye furent les premiers à étudier en profondeur ce phénomène [93] dans le cas des ondes sonores. A partir de la description scalaire (1.9) des ondes ils ont défini trois grands types de singularité que nous allons brièvement introduire ci-dessous en les adaptant au cas des ondes lumineuses. Pour cela on ne considèrera (par simplicité) que des ondes monochromatiques et se propageant dans la direction z.

<sup>2.</sup> Une analogie usuelle est de comparer cette singularité à celle de l'heure au niveau des pôles : aux pôles les fuseaux horaires se rejoignent rendant impossible d'en donner l'heure.

#### Singularité de type coin

Les singularités de type coin sont des singularités parallèles à l'axe Oy. Leur champ a la forme

$$E = A\{kx + iC(kz - \omega t)\}e^{i(kz - \omega t)}$$

$$(1.11)$$

où A désigne l'amplitude de l'onde, C un paramètre sans dimension caractérisant la vorticité et k le vecteur d'onde. A t=0 la phase est donnée par

$$\varphi = kz + \arctan(\frac{Cz}{x}) + 2n\pi \tag{1.12}$$

Les fronts d'onde sont représentés sur la figure (1.2) (les axes sont kx pour les abscisses et kz pour les ordonées). On voit que les lignes de phase se rejoignent au niveau de la singularité (située en x = 0 et z = 0), ainsi le gradient de la phase (direction des rayons lumineux) a la forme d'un *tourbillon* ou *vortex* emporté par l'onde. On retrouve l'analogie avec les vortex de fluides. En quelque sorte les rayons lumineux "tournent" autour de la singularité, on comprend ici l'origine du nom.

On peut rencontrer de telles dislocations par exemple lors de la diffraction d'une onde plane par un demi-plan conducteur. Les dislocations sont formées par l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie par le demi-plan. Décrire un tel phénomène est assez compliqué. En effet dans ce cas les théories habituelles de la diffraction (Huygens-Fresnel, Kirchhoff) ne permettent pas de le décrire correctement car elles considèrent que l'objet diffractant est totalement absorbant. Il faut donc revenir aux équations de Maxwell. Le calcul complet peut être trouvé dans [21].



**FIGURE 1.2** – Fronts d'onde (en pointillé) d'une singularité de type coin située à l'origine et gradient de phase correspondant (traits pleins). Image tirée de [93].

#### Singularité de type vis

Le champ le plus simple associé à une singularité de type vis a la forme

$$E = Ck(x \pm iy)^{\ell} e^{i(kz - \omega t)}$$
(1.13)

avec C une constante, k le vecteur d'onde et  $\ell \in \mathbb{N}$  la charge topologique de la singularité. La singularité est cette fois le long de la direction de propagation Oz. Il est utile d'écrire cette équation en coordonnées polaires :

$$E = (Ckr)^{\ell} e^{i(kz - \omega t \pm \ell\theta)} \tag{1.14}$$

La phase est alors directement donnée par

$$\varphi = kz - \omega t \pm \ell \theta \tag{1.15}$$



**FIGURE 1.3** – Fronts d'onde pour une sigularité de type vis pour  $\ell = 2$ 

Les surfaces équiphases vérifient :

$$kdz + \ell d\theta = 0 \tag{1.16}$$

Ce sont donc  $\ell$  hélices enlacées de pas  $\ell\lambda$  et d'axe z. Elles sont représentées figure (1.3) pour  $\ell=2$ .

De telles singularités apparaissent par exemple lors d'interférences à trois ondes ou plus, l'exemple le connu étant le speckle. Pour rappel le speckle s'observe lorsqu'on diffuse un faisceau laser sur une surface rugueuse. Dans ce cas chaque tavelure noire est un vortex optique de type *vis* avec la charge topologique +1 ou -1. En moyenne il y a autant de charge +1 que -1 [41] [134].

#### Singularité mixte

Les deux singularités précédentes sont en fait des exemples particuliers du cas général que l'on nomme *singularité mixte*. Dans ce cas la ligne de singularité est contenue dans le plan Oyz et fait un angle  $\delta$  avec l'axe y.

Le champ est donné par

$$E = C_1 \{ kx + iC_2((kz - \omega t)\cos\delta - ky\sin\delta) \} e^{i(kz - \omega t)}$$
(1.17)

avec  $C_1$  et  $C_2$  des constantes et k le vecteur d'onde.

Une singularité *coin* correspond donc à  $\delta = 0$  et une singularité *vis* à  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Cette fonction d'onde (1.17) a une charge topologique  $\ell = 1$ . On pourrait la généraliser dans le cas d'une charge topologique supérieure à 1. En effet des singularités *mixtes* ou *coin* avec  $|\ell| > 1$  existent aussi mais sont généralement moins stables : elles peuvent "éclater" en singularités  $\ell = 1$  sous certaines perturbations [7].

Sauf mention contraire les singularités mentionnées par la suite concerneront donc essentiellement les singularités de type *vis* car ce sont celles qui présentent le plus d'intérêt. Nous les nommerons par le terme générique de *vortex optiques*.

#### 1.2.2 Moment orbital d'un vortex optique

Une autre propriété particulièrement intéressante des vortex optiques est qu'ils portent un moment orbital angulaire donné par  $\ell\hbar$  pour un photon. L'origine de ce moment orbital provient du vecteur de Poynting. En effet le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  donne la densité de moment linéaire (impulsion)  $\vec{p}$  et la densité de moment angulaire  $\vec{j}$  du champ électromagnétique, via les relations [69]

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\Pi}$$
 (1.18)

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \ \vec{r} \times \left[ \vec{E} \times \vec{B} \right] = \frac{1}{c^2} \ \vec{r} \times \vec{\Pi}$$
 (1.19)

Pour le mettre facilement en évidence nous allons considérer le cas simple d'un champ monochromatique polarisé linéairement dans la direction x (cette direction est choisie arbitrairement). Nous nous placerons dans le cadre usuel de l'approximation paraxiale<sup>3</sup>. Un tel champ peut être entièrement décrit par un potentiel vecteur de la forme [65] :

$$\vec{A}(x,y,z,t) = u(x,y,z)e^{i(kz-\omega t)}\vec{e_x}$$
(1.20)

où u(x, y, z) est un champ scalaire complexe quelconque décrivant l'amplitude de l'onde et solution de l'équation paraxiale<sup>4</sup>. On se place en jauge de Lorentz<sup>5</sup>. L'introduction ici du potentiel vecteur, peu courante en optique, a pour but de simplifier les calculs [8][77].

On peut directement déduire les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à partir de  $\vec{A}$  et des équations de Maxwell

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.21}$$

$$\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{1.22}$$

En utilisant l'approximation paraxiale  $(|\frac{\partial u}{\partial z}| \ll k |u|)$  on trouve alors :

$$\vec{B} = ik(u\vec{e_y} + \frac{i}{k}\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e_z})e^{i(kz-\omega t)}$$
(1.23)

$$\vec{E} = i\omega(u\vec{e_x} + \frac{i}{k}\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e_z})e^{i(kz-\omega t)}$$
(1.24)

On peut ainsi calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting donnée par

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} Re(\vec{E} \times \vec{B}^*)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} (\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B})$$

$$(1.25)$$

En négligeant à nouveau les termes en  $\frac{\partial u}{\partial z}$  devant ku on trouve

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2 \omega}{4} (i(u \vec{\nabla} u^* - u^* \vec{\nabla} u) + 2k |u|^2 \vec{e_z})$$
(1.26)

3. Les variations du champ dans la direction z sont petites devant les variations transverses.

4.  $\Delta_{\perp} u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ 

5. 
$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$
 où  $V$  est le potentiel électrique

L'expression (1.26) est vraie également en coordonnées cylindriques, on peut donc l'appliquer à un champ u contenant un terme  $e^{i\ell\theta}$  associé à un vortex optique (cf. section (1.2.1)) :

$$u(r,\theta,z) = u_0(r,\theta,z)e^{i\psi(r,z)}e^{i\ell\theta}$$
(1.27)

où  $u_0$  est l'amplitude du vortex (réelle) et  $\psi$  une phase supplémentaire éventuelle. C'est notamment le champ obtenu lorsqu'un faisceau gaussien traverse une lame (non prismatique) sculptée en hélice, ceci est illustré sur la figure (1.4).



FIGURE 1.4 – Effet d'une lame de phase en spirale sur une onde plane, tirée de [82]

En remplaçant alors (1.27) dans (1.25) on détermine les composantes du vecteur de Poynting :

$$\begin{cases} \langle \Pi \rangle_r = \frac{\varepsilon_0 c^2 \omega}{2} \frac{\partial \psi}{\partial r} u_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \langle \Pi \rangle_z \\ \langle \Pi \rangle_\theta = \frac{\varepsilon_0 c^2 \omega \ell}{2r} u_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\ell}{r} \langle \Pi \rangle_z \\ \langle \Pi \rangle_z = \frac{\varepsilon_0 c \omega^2}{2} u_0^2 \end{cases}$$
(1.28)

et on voit qu'il tourne en spirale autour de la direction de propagation z. On retrouve ici le fait qu'il est perpendiculaire aux surfaces d'onde.

On peut alors déduire les densités (moyennées en temps) de moment linéaire et de moment angulaire le long de la direction de propagation z:

$$\langle \vec{p} \rangle_z = \frac{1}{c^2} \langle \vec{\Pi} \rangle_z = \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{2c} u_0^2 \tag{1.29}$$

$$\langle \vec{j} \rangle_z = \frac{1}{c^2} (\vec{r} \times \langle \vec{\Pi} \rangle)_z = \frac{\varepsilon_0 \omega \ell}{2} u_0^2$$
 (1.30)

D'autre part la densité d'énergie du champ s'écrit :

$$\epsilon = \frac{1}{c} \langle \vec{\Pi} \rangle_z = \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{2} u_0^2 \tag{1.31}$$

Finalement en intégrant les équations (1.29), (1.30) et (1.31) dans le plan xy on trouve :

$$\frac{P_z}{\mathcal{E}} = \frac{\iint \langle \vec{p} \rangle_z \ r dr d\theta}{\iint \epsilon \ r dr d\theta} = \frac{1}{c}$$
(1.32)

$$\frac{J_z}{\mathcal{E}} = \frac{\iint \langle \vec{j} \rangle_z \ r dr d\theta}{\iint \epsilon \ r dr d\theta} = \frac{\ell}{\omega}$$
(1.33)

Le premier rapport (1.32) montre l'existence d'un moment linéaire par unité de longueur dans

la direction de propagation du faisceau. Il est identique au rapport donné par la mécanique quantique pour un faisceau gaussien contenant N photons :

$$\frac{P_z}{\mathcal{E}} = \frac{N\hbar k}{N\hbar\omega} = \frac{1}{c} \tag{1.34}$$

Ce moment linéaire n'est donc pas spécifique aux vortex optiques.

Le deuxième rapport (1.33) montre quant à lui l'existence d'un moment angulaire par unité de longueur, également dans la direction de propagation du faisceau, qui dépend de la charge topologique  $\ell$ . Ce moment est donc lui spécifique aux vortex optiques. Par analogie avec l'expression (1.34) on peut écrire pour le moment angulaire :

$$\frac{J_z}{\mathcal{E}} = \frac{J_z}{N\hbar\omega} = \frac{\ell}{\omega} \tag{1.35}$$

d'où on déduit :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{z}} = \mathbf{N}\ell\hbar \tag{1.36}$$

Un vortex optique possède donc un moment angulaire de  $\ell\hbar$  par photon. Il est appelé moment angulaire *orbital*.

#### 1.2.3 Bilan : les trois moments de la lumière

Nous venons de démontrer qu'un vortex optique polarisé linéairement portait un moment orbital angulaire donné par sa charge topologique le long de sa direction de propagation en plus de son moment linéaire (ou impulsion). Il est légitime de se demander ce que devient ce résultat dans le cas d'une polarisation quelconque, en particulier circulaire, puisque dans ce cas il est bien connue que l'onde possède un moment angulaire de spin.

Pour cela on peut reprendre la démonstration précédente en considérant un potentiel vecteur correspondant à une polarisation quelconque :

$$\vec{A} = u(x, y, z)e^{i(kz - \omega t)}(\alpha \vec{e_x} + \beta \vec{e_y})$$
(1.37)

avec u toujours donnée par (1.27) et  $\alpha$ ,  $\beta$  deux coefficients complexes. Les calculs complets sont détaillés dans [8] et on trouve :

$$\frac{\langle \vec{j} \rangle_z}{\epsilon} = \frac{\ell}{\omega} - \sigma \frac{r}{2\omega} \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial u_0^2}{\partial r}$$
(1.38)

avec  $\sigma = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$ . Par intégration dans le dans le plan xy l'équation (1.38) devient alors

$$\frac{J_z}{\mathcal{E}} = \frac{\ell + \sigma}{\omega} \tag{1.39}$$

En réutilisant l'expression (1.35) on trouve cette fois que le moment angulaire d'un photon de l'onde est la somme de deux termes :

$$J_z = (\ell + \sigma)\hbar \tag{1.40}$$

En particulier lorsque l'onde est polarisée linéairement  $\sigma = 0$  et on retrouve le résultat de la section précédente :  $J_z = \ell \hbar$ . Lorsque qu'elle est polarisée circulaire droite  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\beta = \frac{-i}{\sqrt{2}}$  donc  $\sigma = -1$ . Enfin lorsqu'elle est polarisée circulaire gauche  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\beta = \frac{i}{\sqrt{2}}$  donc  $\sigma = +1$ .

Les deux valeurs  $\pm 1$  correspondent aux valeurs du spin d'un photon données par la mécanique quantique.

Finalement le moment angulaire total  $\vec{J}$  s'écrit sous la forme de deux termes :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{1.41}$$

 $\vec{L}$  est la composante orbitale du moment angulaire (appelée OAM pour Orbital Angular Momentum) et  $\vec{S}$  sa composante de spin (appelée SAM pour Spin Angular Momentum). Formellement on a [68] [34] [12] :

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \iiint \sum_i E_i \vec{r} \times \vec{\nabla} A_i \, dV \tag{1.42}$$

$$\vec{S} = \varepsilon_0 \iiint \vec{E} \times \vec{A} \, dV \tag{1.43}$$

Cette séparation n'est pas toujours évidente [13] mais dans le cadre de l'approximation paraxiale elle est justifiée [19].

L'expression (1.40) obtenue par l'électrodynamique peut être retrouvée par un traitement purement quantique [123] et a été démontrée expérimentalement [75].

Le SAM est un moment dit *intrinsèque* car il ne dépend pas du choix des axes. Au contraire l'OAM est en général *extrinsèque*. Plus précisément il est extrinsèque sauf si le moment linéaire transverse de l'onde est nul ( $P_x = 0$  et  $P_y = 0$ ), dans ce cas il est intrinsèque [97].

Le couplage et la conversion entre SAM et OAM ont été observés dans certains matériaux [81] [20] [128] [27].

Finalement nous pouvons résumer les trois moments associés à la lumière :

$$P_z = \hbar k$$
 moment linéaire (1.44)

$$S_z = \hbar \sigma$$
 moment de spin (1.45)

 $L_z = \hbar \ell$  moment orbital (1.46)

Il est également important de souligner que les résultats obtenus sur l'OAM sont valables pour toutes les ondes électomagnétiques pas seulement les ondes optiques. Les ondes acoustiques peuvent également porter un OAM [133]. On s'attend également à ce que les particules de matières possèdent un OAM et non seulement les photons. Une démonstration a notamment été réalisée pour des électrons [125].

# 1.3 Applications du 3<sup>e</sup> moment

De même que le moment de spin d'un faisceau lumineux peut faire tourner une particule sur elle même [54] il a été démontré que le moment orbital peut lui faire tourner une particule autour de l'axe du faisceau [66][55].

Cependant les applications les plus abondantes sont celles qui utilisent les vortex optiques comme base de codage de l'information. En effet pour deux vortex optiques d'OAM  $\ell_1$  et  $\ell_2$  on a la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int e^{-i\ell_1\theta} e^{i\ell_2\theta} \cdot d\theta = 2\pi \delta_{\ell_1\ell_2} \tag{1.47}$$

C'est pourquoi nous allons présenter essentiellement ce type d'applications, d'autant plus qu'elles rejoignent le travail réalisé dans cette thèse et présenté dans la suite de ce manuscrit. Cette liste est bien sûr non exhaustive, les applications étant trop nombreuses pour toutes les citer. Le lecteur pourra trouver d'autres exemples notamment dans les articles récents de M. Padgett [98] et de S. Franke-Arnold [52] ainsi que dans le numéro spécial de la Royal Society consacré à l'OAM [11]. Celles que nous avons choisies peuvent être assemblées sous trois catégories :

- 1. Télécommunications
- 2. Information quantique
- 3. Echange avec des atomes

#### 1.3.1 Télécommunications

Aujourd'hui notre société utilise des quantités de données toujours plus importantes, lesquelles ont besoin d'être transférées toujours plus vite. Ceci nécessite d'augmenter constamment la capacité des sytèmes de communication. Une technique largement répandue est de combiner plusieurs canaux de transmission : on parle de *multiplexaqe*. Ces canaux peuvent être notamment la fréquence et la polarisation. L'OAM présente donc un autre canal d'information possible pour le multiplexage. Une telle possibilité a été démontrée en 2004 par G. Gibson et al. [58] dans le domaine optique. En utilisant deux modulateurs spatiaux de lumière (SLM) ils réalisèrent le multiplexage de huit états d'OAM différents, leur transfert sur quelques mètres puis leur démultiplexage. Par la suite le transfert de deux états d'OAM a été réalisé dans le domaine radio par F. Tamburini et al. en 2012 [120] à l'aide d'antennes paraboliques hélicoidales. Néanmoins le multiplixage d'OAM est devenu réellement appréciable quand J. Wang et al. [130] réalisèrent une transmission (dans l'air) avec un débit de l'odre du térabit par seconde à 1.55 µm. Ils tirèrent partie du fait que le multiplexage de N états d'OAM combiné au multiplexage en polarisation (rendu possible car SAM et OAM sont découplés) augmente la capacité de transmission d'un facteur 2N. Le principe consiste à partir d'un faisceau gaussien de type 16-QAM (modulation d'amplitude en quadrature sur 4 bits) qui est divisé en quatre. Les quatre faisceaux gaussiens obtenus sont alors transformés pour porter les OAM  $\ell = -8, -4, +4, +8$  à l'aide de quatre SLM et multipléxés à l'aide de trois cubes séparateurs (NPBS). Le multiplexage en polarisation est effectué par deux cubes séparateurs de polarisation (PBS). Après propagation dans l'air le démultiplexage en polarisation est effectué par un polariseur et celui en OAM par un SLM appliquant la phase correspondant à  $-\ell$  combiné à un filtrage spatial à l'aide d'un diaphragme. Le signal ainsi démultiplexé est alors envoyé dans une fibre optique pour analyse.

Bien que très prometteuses ces techniques sont sensibles aux perturbations atmosphériques, notamment la turbulence, qui peuvent déformer le front d'onde [102] et induire de la diaphonie entre les modes [108]. Une solution serait d'associer un sytème d'optique adaptative pour compenser les aberations. Une autre solution est d'utiliser une transmission par fibre optique. Les fibres conventionnelles ne se couplent pas avec les faisceaux portants de l'OAM mais de nouvelles technologies de fibres émergent et permettent déjà de transporter de petites valeurs d'OAM (typiquement  $\ell = -1, 0, 1$ )[25]. Finalement il est raisonable d'envisager que l'OAM sera utilisé pour les transmissions commerciales même si d'autres contraintes existent comme le nombre de modes pouvant passer à travers un sytème optique d'ouverture donnée (ceci provient du fait que les modes utilisés divergent à peu près comme  $\sqrt{\ell}$ ) [100][98].

#### **1.3.2** Information quantique

De nombreux protocoles et algorithmes d'information quantique utilisent ou requièrent des états, en particulier intriqués, de dimension supérieure à 2. Traditionnellement l'intrication est réalisée entre deux particules en dimension 2 c'est à dire deux qubits. Pour les photons, principales particules utilisées pour l'information quantique, les états intriqués sont réalisés entre deux états de spin. La seule utilisation du spin empêche ainsi l'utilisation d'états intriqués plus compliqués par exemple entre plusieurs qutrits ou plus généralement entre plusieurs qunits. L'OAM se pose donc en candidat de choix. L'intrication de plusieurs états d'OAM a été démontrée pour la première fois en 2001 par A. Mair et al. [78] en utilisant une paire de photons créée par conversion paramétrique descendante spontanée (spontaneous parametric down-conversion ou SPDC en anglais) dans un cristal de BBO ( $\beta$  borate de barium). En variant l'OAM du faisceau pompe,  $\ell_p = 0$  ou  $\ell_p = \pm 1$ , ils ont montré que les photons générés étaient dans une superposition d'OAM  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2$ . La valeur de l'OAM des photons générés s'explique par la conservation de la phase azimutale  $\ell\theta$  entre le photon pompe et les photons signal et idler :

$$\ell_p = \ell_s + \ell_i \tag{1.48}$$

Par la suite des états intriqués d'OAM ont été générés pour des valeurs de  $\ell$  de quelques centaines [49] à plusieurs milliers [48].

Le stockage de tels états est également un challenge. Des qubits basés sur l'OAM ont récemment pu être stockés dans des atomes froids de césium en utilisant un protocole d'EIT [91]. Une paire de photon intriqués en OAM a pu être également stockée dans des atomes froids à l'aide d'une transition Raman [43].

#### **1.3.3** Echange avec les atomes

L'OAM étant l'autre moment angulaire de la lumière avec le spin il est logique de se demander s'il peut être transféré aux variables internes ou externes des atomes. Cette possibilité a longtemps été débatue et d'abord étudiée théoriquement [122]. En effet pour qu'un tel transfert soit possible il faut que l'extension spatiale de la fonction d'onde de l'atome soit de l'ordre de grandeur de la dimension caractéristique du faisceau qui porte l'OAM. Pour un faisceau gaussien focalisé cette dimension est de l'ordre du waist  $w_0$  du faisceau, c'est-à-dire typiquement quelques micromètres ce qui bien supérieur à l'extension de la fonction d'onde qui est de l'ordre du nanomètre à température ambiante. Ce n'est qu'avec le refroidissemment d'atomes à très basses températures que l'on a donc pu étudier expérimentalement ce transfert. En effet de tels systèmes, en particulier les condensats de Bose-Einstein, ont des extensions spatiales de l'ordre de quelques micromètres. En 2006 l'équipe de W. Phillips transféra un OAM de  $\hbar$  à des atomes dans un condensat de Bose-Einstein par transition Raman [9]. Récemment C. Schmiegelow et al. [111] ont démontré la modification des règles de sélection pour des transitions quadrupolaires (transitions qui sont possibles en présence d'un gradient de champ) sous l'effet de l'OAM. Pour cela ils ont éclairé un ion refroidi de  $Ca^+$  (piégé dans un piège de Paul) par un faiceau d'OAM  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2$  et accordé sur une transition quadrupolaire  $(4S_{1/2} \rightarrow 3D_{5/2})$ . Le faisceau laser est fortement focalisé, son waist valant 2,7 µm pour une extension spatiale de l'ion d'environ 60 nm. Un champ magnétique est appliqué afin de lever la dégénéres cence des sous-niveaux Zeeman  $m_J$  et ainsi scanner toutes les transitions. L'état final de l'ion est déterminé par observation de la fluorescence émise. Le schéma expérimental est donné figure (1.5a).

Ils ont démontré que toutes les transitions respectant la conservation du moment angulaire *total* étaient possibles : pour  $\Delta m_J = 0$  un OAM de  $\pm 1$  compense un spin de  $\pm 1$ , pour



**FIGURE 1.5** – Interaction entre un mode LG et un ion piégé. (a) Montage expérimental, (b) transitions atomiques possibles. Adapté de [111]

 $\Delta m_J = \pm 2$  les contributions de l'OAM et du spin s'ajoutent. Ceci est illustré figure (1.5b) dans le cas où le système est pompé initialement dans l'état  $|4S_{1/2}, m_J = -1/2\rangle$ .

En fait toutes ces applications ont été réalisées avec un type de vortex optique particulier : le mode de Laguerre-Gauss. Il s'agit du vortex optique usuel et celui que nous utiliserons dans ce manuscrit, nous le décrivons ci-dessous.

## 1.4 Le mode de Laguerre-Gauss : le vortex usuel

Nous avons vu dans la partie (1.2.1) que le champ le plus simple associé à un vortex optique de charge topologique  $\ell$  pouvait s'écrire

$$E \propto r^{\ell} e^{i(\pm\ell\theta)} e^{i(kz-\omega t)} \tag{1.49}$$

En fait ce champ bien que solution de l'équation d'onde ne correspond pas à la description d'une onde physique comme pour le cas des ondes planes. Pour contrer ce problème on peut combiner l'équation (1.49) avec un faisceau Gaussien par exemple. On peut alors montrer que plusieurs champs, appelés *modes*, satisfont ces conditions et l'équation paraxiale parmi lesquelles les modes de Bessel [84], les modes de Mathieu [62] et les modes de Laguerre-Gauss. Les modes de Laguerre-Gauss sont ceux qui furent étudiés historiquement [6] et permirent le dévellopement de nombreuses applications utilisant l'OAM notamment celles que nous avons décrites dans la section précédente. Nous allons également les utiliser dans la suite de ce manuscrit, c'est pourquoi nous passons en revue leurs propriétés et montrons comment on peut les générer.

#### 1.4.1 Champ électrique

Les modes de Laguerre-Gauss (que nous appellerons par la suite "modes LG") sont des solutions monochromatiques de l'équation d'onde paraxiale en coordonnées cylindriques. Leur champ électrique est donné par

$$E_p^{\ell}(r,\theta,z) = A_p^{\ell}(r,z) \times e^{i\frac{kr^2}{2\Re(z)}} \times e^{i\ell\theta} \times e^{-i\varphi_{G_p^{\ell}}(z)} \times e^{-i(kz-\omega t)}$$
(1.50)

où  $A_p^{\ell}(r, z)$  est l'amplitude du mode,  $\Re$  son rayon de courbure et  $\varphi_{G_p^{\ell}}$  sa phase de Gouy. Nous détaillerons ces termes par la suite. On reconnait le terme de phase azimutale  $e^{i\ell\theta}$  caractéristique des vortex optiques.

A l'instar des modes de Hermite-Gauss<sup>6</sup> (ou mode  $\text{TEM}_{mn}$ ), qui sont définies par deux indices m et n correspondant à leur ordre, les modes de Laguerre-Gauss sont également définis par deux indices  $\ell$  et p.

On a déjà vu que  $\ell$  correspondait à la charge topologique et était un entier naturel ou relatif.  $\ell$  est également appelé *hélicité* ou *indice azimutal* car il est porté par la phase azimutale. p est quant à lui appelé *indice radial* est peut être seulement un entier positif ou nul.

#### • Amplitude

Le terme d'amplitude  $A_p^\ell(r,z)$  est égal à :

$$A_{p}^{\ell}(r,z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}} \frac{\sqrt{P_{0}}}{w(z)} \times \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|\ell|} \times L_{p}^{|\ell|} \left[\frac{2r^{2}}{w^{2}(z)}\right] \times e^{\frac{-r^{2}}{w^{2}(z)}}$$
(1.51)

où  $P_0$  est la puissance, w est le rayon du faisceau où l'amplitude de l'enveloppe gaussienne est diminuée de  $\frac{1}{e}$  par rapport au maximum et

$$L_p^{|\ell|}[x] = \frac{x^{-\ell} e^x}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+\ell})$$
(1.52)

représente le polynôme de Laguerre généralisé d'ordres  $\ell$  et p.

La variation du rayon w, que l'on appelle le *waist*, varie avec la position z suivant la relation :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2}$$
(1.53)

où  $w_0$  est la valeur minimale de w(z) et  $z_0$  sa position (appelée col du faisceau). La quantité  $z_R$  est appelée *longueur de Rayleigh* et correspond à la distance sur laquelle la divergence du faisceau est négligeable (formellement  $w(\pm z_R) = w_0\sqrt{2}$ ). Elle est donnée par

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{1.54}$$

Les expressions (1.53) et (1.54) sont identiques à celles d'un faisceau gaussien.

#### • Phase de courbure

Cette phase est donnée par le terme  $e^{i\frac{kr^2}{2\Re(z)}}$  où  $\Re$  est le rayon de courbure des surfaces d'ondes pour  $\ell = p = 0$  et k le vecteur d'onde.  $\Re$  varie comme

$$\Re(z) = z \left( 1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right) \tag{1.55}$$

De même que pour un faisceau gaussien au col du faisceau le rayon de courbure tend vers l'infini et les fronts d'onde sont plans. En dehors de la zone de Rayleigh, les fronts d'onde deviennent sphériques.

<sup>6.</sup> Pour rappel ces modes découlent de l'équation paraxiale en coordonnées cartésiennes

#### • Phase de Gouy

La phase de Gouy est donnée par le terme

$$\varphi_{G_p^{\ell}}(z) = (2p + |\ell| + 1) \arctan \frac{z}{z_R}$$

$$(1.56)$$

et correspond au changement rapide de la phase longitudinale acquise lors du passage du faisceau par un point focal. A la différence du cas gaussien, où la phase de Gouy est donnée par  $\frac{z}{z_R}$ , un mode LG possède une phase de Gouy qui dépend des deux indices p et  $\ell$ .

#### 1.4.2 Base des modes de Laguerre-Gauss

Une propriété fondamentale des modes LG est qu'ils constituent une base de solutions de l'équation d'onde c'est-à-dire que l'on peut décrire n'importe quelle onde électromagnétique dans le vide (monochromatique et solution de l'équation paraxiale) comme superposition de modes LG. Ceci implique que ce sont des modes orthogonaux donc que le produit scalaire entre deux modes LG différents est nul :

$$\langle E_{p'}^{\ell'} | E_p^{\ell} \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_{p'}^{*\ell'}(r,\theta,z) E_p^{\ell}(r,\theta,z) r dr d\theta = \delta_{\ell\ell'} \delta_{pp'}$$
(1.57)

Ces propriétés sont analogues aux modes de Hermite-Gauss, on peut d'ailleurs facilement passer d'une base à l'autre comme nous le verrons dans la partie (1.5.1). Les modes LGsont particulièrement adaptés pour décrire des champs à symétrie cylindrique possédant des singularités de phase.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'intensité des modes LG.

#### 1.4.3 Intensité

L'intensité d'un mode LG, égale au module carré de l'amplitude (1.51), s'écrit

$$I_p^{\ell}(r,\theta,z) = \frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!} \frac{P_0}{w^2(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{2|\ell|} \left(L_p^{|\ell|} \left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$$
(1.58)

et on peut montrer qu'elle est normée c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty I_p^\ell(r,\theta,z) \ r dr d\theta = P_0 \quad \forall \ z \tag{1.59}$$

Ceci correspond à la conservation de l'énergie.

Comme elle ne dépend pas de  $\theta$  elle est à symétrie de révolution autour de Oz. La figure (1.6) montre la forme de l'intensité pour différentes valeurs des indices  $\ell$  et p. On observe que les modes avec  $\ell = 0$  sont les seuls à avoir de la lumière au centre. Le mode avec  $\ell = 0$  et p = 0 correspond au mode gaussien fondamental. Lorsque  $p \neq 0$  et  $\ell \neq 0$  le mode possède p + 1 anneaux concentriques. Enfin on voit que lorque  $\ell \geq 1$  et p = 0 le mode possède un seul anneau brillant. Ce sont ces derniers modes qui seront considérés dans ce manuscrit et qui le sont dans la plupart des expériences utilisant des modes LG. Nous allons donc nous attarder un peu plus sur eux.



**FIGURE 1.6** – Intensité des modes de Laguerre-Gauss pour différentes valeurs de  $\ell$  et de p

#### 1.4.4 Cas p=0

Le champ electrique d'un mode  $LG_0^\ell$  s'écrit

$$E_0^{\ell}(r,z) = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi |\ell|! \ w^2(z)}} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|\ell|} e^{\frac{-r^2}{w^2(z)}} e^{i\ell\theta} e^{-i\varphi_{G_0^{\ell}}(z)} e^{i\frac{kr^2}{2\Re(z)}} e^{-i(kz-\omega t)}$$
(1.60)

L'intensité correspondante est

$$I_{p=0}^{\ell}(r,\theta,z) = \frac{2}{\pi(|\ell|)!} \frac{P_0}{w^2(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{2|\ell|} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$$
(1.61)

Plusieurs profils d'intensité (suivant un angle  $\theta$  et à z donné) sont représentés sur la figure



**FIGURE 1.7** – Profils d'intensités de modes  $LG_0^{\ell}$  pour différents valeurs de  $\ell$ .

(1.7) pour différentes valeurs de  $\ell$  et pour des valeurs constantes de la puissance  $P_0$  et du waist  $w_0$ . On observe dans ce cas que le rayon R du mode, c'est-à-dire la distance entre les

deux maxima d'intensité, augmente avec  $\ell$ . On peut déterminer son expression en dérivant l'expression (1.61) par rapport à r:

$$R(z) = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w(z) = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2}$$
(1.62)

et montrer que à z constant R varie comme  $\sqrt{\ell}$ . L'intensité maximale du mode  $I_{max} = I(R)$  vaut donc

$$I_{max} = \frac{2}{\pi(|\ell|)!} \frac{P_0}{w^2} |\ell|^{|\ell|} e^{-|\ell|} \approx \frac{2P_0}{\pi w^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell}}$$
(1.63)

où l'approximation est obtenue à partir de la formule de Stirling<sup>7</sup>. En utilisant (1.62) et (1.63) on peut récrire l'intensité (1.61) sous la forme

$$I_{p=0}^{\ell}(r,\theta,z) = I_{max} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{\ell} e^{\ell(1-\frac{r^2}{R^2})}$$
(1.64)

Cette expression nous sera utile dans la suite de ce manuscrit.

Intéressons nous maintenant au moyen de générer ces modes LG.

# 1.5 Génération d'un mode de Laguerre-Gauss et mesure de son OAM

#### 1.5.1 Principales méthodes de génération

Nous présentons la méthode historique et les méthodes les plus utilisées pour générer des modes de Laguerre-Gauss optiques. Le lecteur pourra trouver une présentation des autres méthodes par exemple dans cet article récent [52].

#### a) Conversion de modes

La méthode historique [16] [6] consiste à convertir un mode de Hermite-Gauss (HG) en un mode de Laguerre-Gauss. Elle part du fait que l'on peut décomposer un mode  $LG_p^{\ell}$  sur la base des modes  $HG_{mn}$ , p étant donné par min(m, n) et  $\ell$  par m - n. Dans ce cas il y a un déphasage relatif de  $\pi/2$  entre chaque composante HG. De la même façon un mode HG orienté à 45° par rapport aux axes (x, y) peut également être décomposé sur la base des HG avec les mêmes coeficients mais cette fois les composantes successives sont en phase. Prenons un exemple pour illustrer : un mode  $LG_0^1$  s'écrit

$$LG_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{01} + \mathbf{i}HG_{10}) \tag{1.65}$$

et un mode  $HG_{01}$  orienté à 45° s'écrit

$$HG_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{01} + HG_{10}) \tag{1.66}$$

Il "suffit" donc de déphaser les composantes d'un mode HG orienté à 45° pour obtenir un mode LG. Ceci est obtenu en modifiant la phase de Gouy à l'aide d'une paire de lentilles cylindriques de focale f. En effet nous avons vu dans la partie (1.4) que la phase de Gouy

<sup>7.</sup>  $\ell\,!\approx\sqrt{2\pi\ell}~\ell^\ell e^{-\ell}$ vraie à mieux que 5% près dès que  $\ell\geq 2$ 

était la phase acquise par un faisceau gaussien par rapport à une onde plane lorsqu'il est focalisé. Une lentille cylindrique permet de focaliser un faisceau gaussien, donc de changer sa phase de Gouy, mais seulement suivant une direction transverse. Ainsi les modes  $HG_{01}$ et  $HG_{10}$  acquerront des phases de Gouy différentes. M. Beijersbergen et al. [16] ont montré qu'il est ainsi possible d'obtenir un déphasage de  $\pi/2$  si les lentilles sont séparées de  $\sqrt{2}f$ et que la longueur de Rayleigh du faisceau incident est ègale à  $z_{R_i} = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})f$  (une lentille mince est en général nécessaire pour que le faisceau incident ait la bonne  $z_{R_i}$ ). L'avantage de



**FIGURE 1.8** – (a) Décomposition de quelques modes LG et HG (tirée de [16]), (b) Principe de la conversion de mode HG en mode LG (tiré de [99])

cette méthode est de pouvoir créer des modes LG purs. Elle nécessite par contre de disposer d'un mode HG, mais il est possible d'en obtenir assez facilement en introduisant des pertes ciblées dans une cavité laser (typiquement des fils tendus).

#### b) Impression d'une phase hélicoïdale

Le principe général est d'imprimer sur une onde plane (typiquement un faisceau gaussien dans la zone de Rayleigh) la phase azimutale caractéristique  $\ell\theta$ . Cela signifie que, rapportée modulo  $2\pi$ , la phase comporte  $\ell$  secteurs égaux où elle varie linéairement de 0 à  $2\pi$ . Des exemples sont donnés figure (1.9). Pour ce faire rappellons d'abord qu'une onde lumineuse acquiert un déphasage  $\Delta\varphi$  à la traversée d'un milieu d'indice optique *n* donné par

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} ne \tag{1.67}$$

où e est l'épaisseur traversée et  $\lambda$  la longueur d'onde. Le principe consiste donc à faire en sorte que ce déphasage soit de la forme  $\ell\theta$  en jouant soit sur l'indice optique n soit l'épaisseur du milieu e. Les différents sytèmes utilisant cette méthode vont donc mettre à profit l'une ou l'autre de ces possibilités comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants. En particulier les lames de phases en spirale et les miroirs de phase vont jouer sur e et les modulateurs spatiaux de lumières vont jouer sur n.

Lame de phase en spirale Les lames de phase en spirale (ou SPP pour Spiral Phase Plate) sont, sous leur forme la plus simple, une lame d'indice n dont l'épaisseur varie en escalier à colimaçon sous la forme [95] :

$$h(r,\theta) = h_0 + h_s \frac{\theta}{2\pi} \tag{1.68}$$



**FIGURE 1.9** – Carte de phase (modulo  $2\pi$ ) pour  $\ell = 1, 2, 3, 4$  de gauche à droite



FIGURE 1.10 – Schéma d'une lame de phase en spirale. Tiré de [95]

où  $h_0$  est l'épaisseur du substrat et  $h_s$  est le pas de la lame comme illustrée sur la figure (1.10). Le déphasage acquis par une onde après traversée de la lame a une dépendence azimutale égale à :

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(n-n_0)h_s \theta}{2\pi} + nh_0 \right]$$
(1.69)

avec  $n_0$  l'indice optique du milieu extérieur. L'onde est ainsi transformée en vortex optique de charge topologique  $\ell = \frac{h_s(n-n_0)}{\lambda}$ . Une SPP fonctionne donc correctement pour une longueur d'onde précise.

La fabrication de telles lames est rendue difficile par le fait d'obtenir des pas inférieurs à la longueur d'onde, surtout vers le centre où la variation est rapide. Leur principal défaut est de permettre de générer une seule valeur de  $\ell$ . Par contre leur efficacité de conversion est très grande : on peut récupérer en sortie de lame jusqu'à plus de 90% de la puissance incidente.

**Modulateur spatial de lumière** Les modulateurs spatiaux de lumières (SLM pour Spatial Light Modulator) sont des dispositifs qui permettent, sous contrôlle d'un ordinateur, de moduler spatialement l'amplitude et/ou la phase d'un faisceau lumineux.

Plusieurs technologies existent : les matrices de micro-miroirs (DMD pour Digital Micromirrors Device, utilisés entre autres dans certains vidéoprojecteurs), les miroirs déformables (utilisés principalement en optique adaptative) et les systèmes à cristaux liquides (un exemple bien connu d'utilisation étant les pinces optiques). Nous nous intéressons ici essentiellement à ces derniers. Ils sont constitués d'une cellule de cristaux liquides entre des électrodes. Les cristaux liquides utilisés généralement sont de deux types : *nématique* ou *ferroélectrique* [46]. Les cristaux nématiques sont les plus répandus dans les sytèmes commerciaux.

Au sein d'une phase nématique les molécules sont réparties aléatoirement sans ordre particulier. Par contre les axes moléculaires ont en moyenne la même orientation. Les cristaux liquides nématiques constituent ainsi un milieu biréfringent c'est à dire qu'ils possèdent deux indices de réfraction  $n_0$  et  $n_e$ , l'indice ordinaire et l'indice extraordinaire. L'indice ordinaire est orienté selon l'axe de chaque molécule et l'indice extraordinaire dans le plan perpendiculaire à cet axe si la biréfringence est négative ( $\Delta n = n_e - n_0 < 0$ ) et inversement si la biréfringence est positive ( $\Delta n > 0$ ) [53]. L'indice de réfraction du milieu dépend donc de l'orientation des cristaux liquides, de la direction de propagation de la lumière et de sa polarisation.

L'orientation des cristaux est obtenue grâce aux électrodes comme représentée sur le schéma



FIGURE 1.11 – Principe d'un SLM à cristaux liquides

(1.11). Lorsque l'on applique une tension entre ces deux électrodes le dipôle induit par l'interaction entre le champ électrique et les molécules de cristal liquide créé un moment dipolaire centré sur les molécules et perpendiculaire à leur axe. Ce moment génère alors un couple qui change l'orientation des molécules. L'indice optique est ainsi modifié ce qui permet ainsi de contrôler électriquement le déphasage d'une onde incidente. Suivant les modèles les SLM fonctionnent en réflexion ou en transmission.

Pour obtenir une orientation locale des molécules et reconstruire tout type de masque de phase deux procédés ont été développés, que l'on nomme *adressage* :

- l'adressage électrique où l'électrode de la partie active du SLM est divisée en une grille de pixels possédant chacun une électrode.
- l'adressage optique. Dans ce cas la même tension est appliqué entre les electrodes et une couche de matériau photoconducteur est insérée entre les cristaux liquides et les électrodes. Un faisceau d'adressage (laser, LED), modulé spatiallement suivant la carte de phase souhaitée, est envoyé sur le photoconducteur. Il se crée alors une distibution spatiale d'électrons reproduisant celle du faisceau d'adressage. Les électrons produisent un champ électrique local qui oriente les cristaux liquides [86] [74].

Pour s'assurer que toutes les molécules aient une orientation bien définie en l'absence de champ électrique les faces de la cellule qui les contient sont striées ce qui permet l'ancrage des molécules de surface.

Les cartes de phase, appelées *hologrammes*, sont obtenues à partir d'images générées par ordinateur et codées sur 256 niveaux de gris, chaque niveau de gris correspondant à une valeur de la phase. La couleur blanche correspond à une phase de 0 et la couleur noire à  $2\pi$ . Dans notre cas les hologrammes qui nous intéressent sont ceux permettant d'obtenir une phase en hélice (cf.figure (1.9)).

Il est ainsi possible de modifier la carte de phase à candence vidéo, ce qui confère aux SLM un attrait important par rapport à d'autres sytèmes. Les SLM actuels permettent de générer des modes LG avec un indice azimutal  $\ell$  de l'ordre de quelques unités à plusieurs centaines. Un inconvénient important des SLM est qu'ils ne présentent pas une efficacité de de 100% c'est-à-dire qu'une partie de la lumière incidente n'est pas façonnée. Pour séparer la lumière façonnée il faut ajouter un *réseau blazé* (aussi nommé *réseau en échelette*) aux hologrammes. Un réseau blazé a un profil en dents de scie et fonctionne en réflexion ou transmission. Son principal atout par rapport à un réseau traditionnel est d'envoyer un maximum de lumière diffractée dans un ordre non nul en général l'ordre 1. Le terme de phase ajouté aux hologrammes est linéaire et s'écrit  $\varphi_{blaz} = \alpha y$  (ou  $\alpha x$  suivant le direction dans laquelle on souhaite envoyer la lumière,  $\alpha x + \beta y$  dans le cas général). La combinaison



**FIGURE 1.12** – (a) hologramme utilisé pour générer un mode  $LG_0^4$ , (b) hologramme d'un réseau blazé, (c) hologramme obtenu en combinant les deux précédents.

(modulo  $2\pi$ ) de ces deux phases donne un motif en fourchette dont le nombre de dents est égale à  $\ell + 1$ . Nous avons illustré le cas  $\ell = 4$  sur la figure (1.12). Il est intéressant de noter que cet hologramme combiné correspond aux fronts d'onde d'une singularité de type *coin* parallèle à Oy (cf. (1.2)).

Au final lorsque le SLM est éclairé par un faisceau gaussien on récupère un mode LG dans la direction de l'ordre 1.



**FIGURE 1.13** – Image d'un miroir de phase et faisceau obtenu pour  $\ell=1000$ . Les franges apparaissant sur le zoom proviennent de l'auto-inferférence du faisceau et mettent en évidence la présence d'OAM (cf. section (1.5.2)). Image tirée de [48].

Une autre méthode développée récemment repose sur l'utilisation Miroir de phase de miroirs gravés, on peut en voir une image sur la figure (1.13). Elle se rapproche de la lame de phase en spirale mais permet la génération d'OAM gigantesques. Pour que le faisceau réfléchi sur un miroir acquière une phase en hélice il faut que son épaisseur ait une dépendance azimuthale du type  $e(\theta) = \ell \theta \lambda / (4\pi)$  (le chemin otique ajouté étant égal à  $2e(\theta)$ . Une telle épaisseur est obtenue en gravant la surface du miroir à l'aide d'une pointe en diamant. Cependant pour de très grandes valeurs de  $\ell$  la technique de fabrication crée une discontinuité trop profonde pour  $\theta = 0$ . Ce problème peut être contré en divisant le miroir en n secteurs où n est un multiple de  $\ell$ . Dans ce cas il y a cette fois n discontinuités mais qui sont beaucoup plus petites. Par exemple pour  $\ell = 100$  le miroir est découpé en 25 secteurs contenant chacun une rampe de phase de  $8\pi$ . Cette méthode a été démontrée par G. Campbell et al. [32] jusqu'à  $\ell = 100$  puis elle a été par la suite étendue à  $\ell = 5050$ par Y. Shen et al. [115]. Récemment R. Fickler et al. [48] ont pu aller jusqu'à  $\ell = 10010$ . Le grand avantage de cette méthode, outre sa capacité à produire de très grandes valeurs de  $\ell$ , est sa très haute efficacité, typiquement de 90% à 532 nm, principalement donnée par la réflectivité de l'aluminium. Cette méthode pourrait aussi s'appliquer à des miroirs sphériques ce qui permettrait de focaliser directement le faisceau LG créé, très utile dans certaines applications.

#### c) Q-plates

Les Q-plates utilisent le couplage entre SAM et OAM dans un matériau inhomogène et anisotrope. Elle sont constituées de cristaux liquides contenus entre deux parois en verre, transparentes et très fines. Ces parois sont traitées de sorte à obtenir une orientation de l'axe optique  $\alpha$  de la forme [81] :

$$\alpha(r,\theta) = q\theta + \alpha_0 \tag{1.70}$$

où q et  $\alpha_0$  sont des constantes. En particulier q (un entier ou demi-entier) est appellée la charge topologique et a donné son nom du système. Après la traversée d'une Q-plate, une onde polarisée circulaire droite (respectivement gauche) devient polarisée circulaire gauche (respectivement droite) et acquiert un OAM de  $2q\hbar$  (respectivement  $-2q\hbar$ ). Ceci est illustré figure (1.14). La valeur de l'OAM acquis par l'onde est donc donnée par q et son signe par la polarisation initiale. La Q-plate a ainsi échangé un moment angulaire de  $\pm 2\hbar(q-1)$  avec chaque photon.



FIGURE 1.14 – Principe d'une Q-plate, tiré de [80]

Les Q-plates sont contrôlables électriquement et peuvent atteindre des efficacités très élevées (jusqu'à plus de 97%) [73] [80]. Elles se dinstinguent ainsi des SLM car elles permettent des applications utilisant peu de photons comme en information quantique. De plus comme le signe de l'OAM dépend de la polarisation elles permettent des changement très rapides de celui-ci (de l'odre du GHz) à l'aide de systèmes électro-optiques de modulation de la polarisation incidente.

#### 1.5.2 Méthodes usuelles de mesure de l'OAM

Il existe plusieurs méthodes de mesure de l'OAM d'un faisceau LG, essentiellement interférentielles. Nous présentons les plus utilisées ici.

#### a) Interférence avec une onde plane

Plusieurs méthodes de mesure de l'OAM  $\ell$  reposent sur le motif particulier créé lors de l'interférence entre un faisceau LG et une onde plane (typiquement un faisceau gaussien collimaté). En effet si le faisceau LG est collimaté la figure d'interférence est une hélice comportant  $\ell$  pales, s'il est focalisé la figure d'interférence est  $\ell$  spirales enlacées [64] et s'il

#### Chapitre 1

est collimaté mais orienté d'un angle avec le faiseau gaussien dans ce cas on obtient une fourchette avec  $\ell + 1$  dents. D'après le nombre de ces structures et leur orientation ou sens d'enroulement, on peut déduire  $\ell$  avec son signe. D'après le nombre de ces structures et leur orientation ou sens d'enroulement on peut déduire  $\ell$  avec son signe.

#### b) Transformation par une lentille inclinée

Cette méthode dévellopée par P. Vaity et al. [121] consiste à introduire dans la propagation du faisceau une lentille inclinée (on dit ausi tiltée) c'est-à-dire dont l'axe optique fait un angle avec l'axe de propagation du faisceau. Lorsque la lentille est tournée, le mode LG, initialement rond, devient de plus en plus ovale jusqu'à ce que les deux bords de l'anneau se recouvrent pour un angle particulier, produisant alors des franges d'interférences. Le nombre



**FIGURE 1.15** – Intensité (expérimentale) d'un mode  $LG_0^4$  pour différents angles de la lentille par rapport à l'axe du laser : (a) 0°, (b) 26° et (c) 36°. Image adaptée de [30].

de franges sombres (respectivement brillantes) est égal à la valeur de l'OAM  $\ell$  (respectivement  $\ell + 1$ ). Ceci est illustré figure (1.15) pour  $\ell = 4$ . Les figures d'interférences optimales sont obtenues lorsque le mode LG arrive collimaté sur la lentille et lorsque la caméra CCD est placée légèrement avant le point focal. Typiquement pour un mode LG ayant un diamètre de l'ordre de 0.5 cm une lentille de focale 50 cm est bien adaptée et on place la caméra à environ 40 cm après la lentille. Dans ce cas l'angle pour lequel les franges d'interférences se produisent est d'environ 30°. Si les modes LG sont obtenus par un SLM il n'y pas besoin de changer la position et l'orientation de la lentille ni celle de la caméra pour mesurer l'OAM de modes LG obtenus par deux hologrammes différents.

Avec cette méthode P. Vaity et al. ont mesuré des OAM pour  $\ell$  allant de -14 à 14 mais la méthode est aussi applicable pour de plus grandes valeurs de  $\ell$ . Le grand avantage de cette méthode, outre le fait d'être rapide à mettre en place, est d'être robuste et de ne pas nécessiter d'onde de référence. De plus elle donne le signe de l'OAM et non pas seulement sa valeur absolue. En effet pour une même valeur de  $\ell$  la figure a une orientation différente selon le signe de  $\ell$  (cf. figure (1.26)).

Remarque : Au sein de notre groupe, C. Cabrera a montré dans sa thèse [30] que cette méthode pouvait également déterminer la valeur de l'indice radial p d'un mode  $LG_{p\neq 0}^{\ell}$ . Dans ce cas la figure d'interférence est composée de  $(p + \ell + 1) \times (p + 1)$  points lumineux. Nous illustrons le cas d'un mode  $LG_2^4$  sur la figure (1.16).

#### c) Auto-interférence

Cette méthode se base sur l'interférence entre un faisceau portant un OAM  $\ell$  et un faisceau portant un OAM  $-\ell$ . En général le même faisceau est utilisé d'où le nom *d'auto-interférence*. Pour cela on divise le faisceau en deux et on fait subir une réflexion supplémentaire à un des deux faisceaux ce qui a pour effet de changer  $\ell$  en  $-\ell$ . Cette réflexion supplémentaire est souvent obtenue à l'aide d'un prisme de Dove. Un prisme de Dove est un



**FIGURE 1.16** – Transformation d'un mode  $LG_2^4$  par une lentille inclinée. Adaptée de [30].

prisme à angle droit (généralement tronqué) qui permet d'inverser une image sans changer la direction de propagation de la lumière. Pour un faisceau LG cela revient à changer  $\ell$  en  $-\ell$  à cause de la réflexion sur la base du prisme.

Le montage couramment utilisé est contitué d'un interféromètre de Mach-Zehnder traditionnel comprenant un prisme de Dove sur un des deux bras [76]. La figure d'interférence des



**FIGURE 1.17** – Montage utilisé pour mesurer l'OAM d'un faiceau à l'aide d'un prisme de Dove

deux faisceaux produit un anneau constitué de  $2\ell$  pétales ou lobes comme représenté sur la figure (1.18). Si l'interféromètre est parfaitement réglé la figure est identique quelque soit le signe de  $\ell$ . On peut néanmoins avoir accés au signe de  $\ell$  avec cette méthode si on désaligne légèrement l'interféromètre afin de créer une dissymétrie dans la figure. Dans ce cas la figure de diffraction est inversée si le signe de  $\ell$  est lui-même inversé (voir les cas (a) et (b) de la figure (1.18)). Dans la suite de ce manuscrit nous nommons cette méthode DMZ (pour Dove Mach-Zehnder).

#### 1.5.3 Méthodes utilisées dans ce manuscrit

Après avoir présenté les méthodes générales de génération d'un mode LG dans la section (1.5.1) nous présentons celles que nous avons utilisées au cours de cette thèse. Nous avons utilisé trois systèmes pour générer des modes de Laguerre-Gauss : une lame en spirale et deux SLM. Le principe de ces sytèmes ayant été décrit dans la section (1.5.1) nous présentons et comparons leurs principales caractéristiques techniques.

#### a) Lame de phase VPP-m1550

Nous utilisons une lame de phase en spirale de RPC-Photonics (VPP-m1550) conçue pour 1550 nm. Cette lame n'est pas exactement du type décrit auparavant : au-lieu d'être


**FIGURE 1.18** – Mesures de la valeur de  $\ell$  par la méthode du prisme de Dove. Images expérimentales (en haut) et théoriques (en bas).

entièrement en verre c'est un polymère déposé sur un substrat de verre. Néanmoins le principe est exactement le même. Cette lame est de forme circulaire avec un rayon de 100 mm pour 6,25 mm d'épaisseur et comporte plusieurs cartes de phase permettant de créer des modes LG d'indice azimutal  $\ell = 1$  à  $\ell = 8$ , chaque carte mesurant  $\approx 10$  mm de côté. Cette lame a une efficacité supérieure à 90%. Son spectre de transmission étant compris entre 350 et 2000 nm il est possible pour nous de l'utiliser à 780 nm pour des applications sur le rubidium. En effet du fait que  $1550 \approx 2 \times 780$  le déphasage acquis par l'onde sera le double de celui à 1550 nm et on imprimera une phase de  $2\ell\theta$  au lieu de  $\ell\theta$ . Ainsi nous pouvons générer des modes LG avec  $\ell$  variant de 2 à 16.

#### b) SLM Hamamatsu X867 et SLM Holoeye Pluto

Nous possédons deux modèles de SLM fonctionnant tous les deux en réflexion :

— un SLM Hamamatsu X8267

— un SLM Holoeye Pluto NIR-II

Le SLM Hamamatsu X8267 Le SLM Hamamatsu X8267 a une zone active de  $20 \times 20 \ mm$ . Il est adressé optiquement : une diode laser collimatée est envoyée sur un dispositif LCD adressé electriquement par ordinateur selon l'hologramme voulu. L'hologramme est alors projeté sur le photoconducteur à l'aide d'un lentille. Le principe de ce SLM est représenté figure (1.19). Du fait de son mode d'adressage ce SLM ne possède pas de pixels, ce qui a pour avantage d'éviter la lumière diffractée par la structure pixélisée. Néanmoins on peut diviser la surface active en 768 × 768 *pixels effectifs* de taille 26 µm qui correspondent aux pixels du LCD.

Il possède un traitement anti-reflet à l'avant et un traitement réfléchissant à l'arrière des cristaux liquides pour les longueurs d'onde situées entre 750 et 850 nm, celles qui nous inté-ressent pour les applications présentées dans la suite de ce manuscrit. Son efficacité dépend



**FIGURE 1.19** – *SLM X8267* : (a) Schéma de principe (*DL* : diode laser, *PC* : ordinateur) tiré de [33], (b) Image

de la fréquence spatiale des hologrammes, en moyenne elle est de 70%. Enfin il peut supporter une intensité allant jusqu'à  $0, 2 \text{ W cm}^{-2}$ .

Le SLM Holoeye Pluto NIR-II Ce SLM, représenté figure (1.20), a une zone active de 1920 × 1080 pixels avec une taille de pixel de 8 µm, ce qui correspond à une surface de 15, 36 × 8, 64 mm. Son adressage est électrique, la tension appliquée à la matrice de pixels est directement pilotée par ordinateur. On lui envoie une image codée en niveau gris, chaque niveau est associé à une valeur de tension laquelle est ensuite appliquée au pixel.

Il possède un traitement anti-reflet pour les longueurs d'onde situées entre 400 et 1100 nm. Son efficacité est d'environ 70% et il peut supporter une intensité allant jusqu'à 2 W cm<sup>-2</sup>.



FIGURE 1.20 – Photographie du SLM Pluto NIR-II

#### c) Montage expérimental utilisé

Le montage utilisé est représenté figure (1.21) dans le cas des SLM. Le montage pour une SPP est équivalent mais est moins complexe à mettre en place, c'est pourquoi nous présentons le cas des SLM ici.

Un faisceau laser est envoyé sur le SLM avec un angle d'incidence relativement faible (typiquement  $<7^{\circ}$ ) afin que le faisceau traverse les mêmes cristaux liquides à l'aller et au retour. On évite ainsi des erreurs dans la phase.

Le passage par une fibre monomode est essentiel si le mode gaussien utilisé est de mauvaise qualité. De plus le collimateur de la fibre permet de s'assurer que le faisceau arrive bien parallèle sur le SLM pour que chaque pixel voit le même front d'onde et d'adapter la taille du faisceau à la zone active du SLM. Si le faisceau est trop grand on observera des effets de diffraction par les bords et s'il est trop petit l'intensité sera trop importante et la résolution



FIGURE 1.21 – Schéma du montage utilisé pour créer un mode LG à partir d'un SLM

du SLM ne sera pas utilsée de façon optimale. Pour éviter cela nous utilisons typiquement des faisceaux dont le waist  $w_0$  est quatre fois plus petit que la zone active des SLM.

La polarisation du faisceau doit être linéaire et adaptée aux axes d'anisotropie du SLM. On utilise pour cela un cube séparateur de polarisation ou une lame  $\lambda/2$  si le faisceau est déjà polarisé linéairement.

Le point critique de l'alignement pour créer un mode LG homogène est le centrage sur la singularité de phase de l'hologramme. On installe donc avant le SLM deux miroirs pour pouvoir régler parfaitement l'orientation et l'alignement du faisceau.

Finalement nous observons le mode créé directement sur un écan ou sur une caméra CCD à l'aide d'une lentille.

#### d) Comparaisons des méthodes

Le tableau (1.1) compare les trois systèmes que nous utilisons pour créer des modes LG. Le principal avantage des SLM est de pouvoir changer en temps réel l'hologramme et de pouvoir faire de nombreuses valeurs de  $\ell$  sans changer l'alignement du montage, et ce sur une grand plage de longueur d'onde. Ils sont donc particulièrement adaptés pour des expériences qui étudient l'influence de la charge topologique  $\ell$  (ce sera l'objet d'une partie de ce manuscrit). Par contre l'encombrement du montage optique nécessaire, la perte importante de puissance lumineuse ainsi que leur coût élevé leur confèrent des inconvénients non négligeables pour certaines expériences.

La lame de phase en spirale se distingue quant à elle par son encombrement relativement faible sur un montage optique et sa très grande éfficacité de diffraction. Par contre seules quelques valeurs de  $\ell$  sont possibles et cela nécessite de changer sa position. Son côut est également beaucoup plus faible. Ainsi la lame se prête bien à des applications nécessitant une seule valeur de  $\ell$  à une longeur d'onde précise comme dans le cas du guidage d'atomes froids par un mode LG [33] [30].

Nous nous intéressons maintenant à la qualité des modes LG obtenus par ces deux méthodes.

#### e) Modes obtenus : qualités et imperfections

Jusqu'ici nous avons indiqué que moduler la phase d'un faisceau gaussien par un terme azimutal suffisait à produire un mode LG. Normalement d'après l'expression (1.51) il faudrait

Méthode	SLM Pluto NIR-II	SLM X8267	VPP-m1550
Zone active	$15,36 \times 8,64 \ mm$	$20 \times 20 \ mm$	$10 \times 10 \text{ mm}$
Efficacité	70%	70%	$>\!90\%$
Plage de	300 nm	100 nm	$\lambda_1 = 1550$ nm et
longueur d'onde			$\lambda_2 {=} 1550/2 {=} 775 \text{ nm}$
Utilisation	Par ordinateur. Modes	Par ordinateur. Modes	Manuel. Modes LG
	LG jusqu'à $ \ell  \approx 100$	LG jusqu'à $ \ell  \approx 60$	$\ell = 2 \rightarrow 16$ (pour
			775nm)
Cadence	Vidéo	Vidéo	
Côut financier	$\sim 14$ k€ (2012)	$30 \ \mathrm{k} \in (2005)$	\$1800

**Tableau 1.1** – Comparaison entre les différentes méthodes que nous utilisons pour fabriquer des modes LG

aussi moduler l'amplitude du champ. Nous allons voir que ceci a pour conséquence que les modes créés possèdent bien la phase en hélice  $e^{i\ell\theta}$  mais qu'ils ne sont pas des modes de Laguerre-Gauss purs dont le champ électrique est donné par l'expression (1.50)

Leur forme Commençons par analyser leur forme. Pour cela des images des modes obtenus ont été prises à la caméra CCD (cf. (1.22)). Nous présentons sur la figure (1.22) des images de différents modes LG obtenus avec le SLM pluto. Nous présentons aussi une coupe le long d'une direction transverse. On observe que les modes ont une forme d'anneau avec un pourtour bien homogène et un centre noir. En déplaçant la caméra le long de la propagation du faisceau on constate qu'il garde sa forme d'anneau et son centre noir. Ces observations indiquent qu me faisceau généé est proche d'un mode LG. Néanmoins on observe également



**FIGURE 1.22** – Haut : Quelques modes LG obtenus avec le SLM Pluto. Bas : Profils correspondants.

des anneaux secondaires autour de l'anneau principal. Ils sont la signature de modes LG ayant un indice radial p non nul (cf. figure (1.6)).

En fait les modes obtenus sont une superposition de modes  $LG_p^{\ell}$  ayant tous la même valeur de l'indice azimutal  $\ell$ , celle que l'on a imposée. Ce résultat se démontre en décomposant le

champ à la sortie du SLM  $E_{out}(r, \theta, z) = E_{Gauss}e^{i\ell\theta}$  sur la base des modes LG soit :

$$E_{out}(r,\theta,z) = \sum_{\ell'=-\infty}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{+\infty} c_{p'}^{\ell'} LG_{p'}^{\ell'}(r,\theta,z) \quad \text{avec} \quad c_{p'}^{\ell'} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} E_{out}^{*}(r,\theta,z) LG_{p'}^{\ell'}(r,\theta,z) \ rdrd\theta$$
(1.71)

qui se simplifie en

$$E_{out}(r,\theta,z) = \sum_{p'=0}^{+\infty} c_{p'}^{\ell} L G_{p'}^{\ell}(r,\theta,z) \qquad \text{car} \qquad \int e^{-i\ell'\theta} e^{i\ell\theta} = 2\pi \delta_{\ell\ell'} \tag{1.72}$$

Les coefficients  $c_{p'}^{\ell}$  peuvent être calculés par récurrence et on peut déduire la proportion de chaque mode p donnée par  $|c_{p'}^{\ell}|^2$ . Les coefficients vérifient  $\sum_{p'} |c_{p'}^2| = 1$ .

La décomposition n'est pas unique et dépend du rapport entre le waist du faisceau gaussien incident  $w_G$  et du waist des modes LG  $w_{LG}$  choisi pour la décomposition. Néanmoins on montre que dans tous les cas c'est le mode avec p = 0 qui domine majoritairement. Le coefficient  $c_0^{\ell}$  a été calculé analytiquement dans la thèse de F.Diry [44], il s'écrit

$$c_0^{\ell} = 2^{1+\frac{\ell}{2}} \frac{1}{\sqrt{\ell!}} \Gamma\left(1+\frac{\ell}{2}\right) \frac{w_{LG}/w_G}{\left[1+\left(\frac{w_{LG}}{w_G}\right)^2\right]^{1+\frac{\ell}{2}}}$$
(1.73)

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler.

La valeur maximale de  $|c_0^{\ell}|^2$  est obtenue pour  $\frac{w_{LG}}{w_G} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}}$ . Dans ce cas on a par exemple  $|c_0^2|^2 = 0,84, |c_0^{10}|^2 = 0,52$  et  $|c_0^{20}|^2 = 0,39$ . L'importance des modes  $p \neq 0$  augmente avec la valeur de  $\ell$ . On montre aussi que les modes avec p pairs sont les modes qui contribuent le plus.

Tout ceci a pour conséquence de modifier la propagation des modes. Nous avons vu dans la partie (1.4) que les modes  $LG_0^{\ell}$  purs ont une propagation hyperbolique donnée par l'expression (1.62), cette propriété n'est plus respectée si les modes créés sont une superposition de modes  $LG_p^{\ell}$ .

Nous avons vérifié ces résultats dans le cas du SLM Pluto NIR-II. Pour cela nous avons analysé la propagation de plusieurs modes LG créés en mesurant leur rayon pour différentes distances de propagation . Nous l'avons fait dans deux cas : en propagation libre et derrière une lentille convergente de focale 300 mm. Nous avons alors tracé la valeur du rayon en fonction de la position de la caméra.

Le rayon des anneaux est déterminé à l'aide d'un plug-in du logiciel ImageJ développé par l'équipe [30]. Il consiste à seuiller les images pour ne garder que l'anneau central puis à effectuer une opération de squelettisation pour réduire l'anneau à une ligne d'un pixel de large. La zone délimitée par la ligne est alors ajustée par un cercle et le rayon déduit.

Ces courbes sont données sur la figure (1.23a) pour le cas libre et sur la figure (1.23b) pour le cas focalisé. Le cas  $\ell = 0$  correspond au cas où une phase uniforme est appliquée au SLM. Le faisceau gaussien incident est donc seulement réfléchi et les mesures présentées correspondent à la valeur de son waist. Ce cas sert de comparaison. Dans les deux cas on observe bien que pour  $\ell \neq 0$  la propagation hyperbolique n'est pas respectée contrairement au cas gaussien. On observe également une dissymétrie de part et d'autre du col des faisceaux.

Si on simule la propagation du mode en l'exprimant comme une superposition de modes p donnée par (1.72) on retrouve une propagation "pointue" similaire. Cette simulation a été effectuée, figure (1.24) pour le cas de  $\ell = 5$  en prenant en compte les contributions des modes



**FIGURE 1.23** – Propagation des modes LG créés (a) libre, (b) focalisés par une lentille de focale f=300 mm

p = 0 à p = 10. Il n'est pas nécessaire d'aller au delà de p = 10 car  $\sum_{0}^{10} |c_p|^2 \approx 1$  à moins de 1% près.



**FIGURE 1.24** – Simulation de la propagation d'une superposition de modes  $LG_p^{\ell}$  pour p = 0 à p = 10.

Ce comportement différent entre modes LG créés et mode gaussien s'explique par le fait que que chaque mode  $LG_p^{\ell}$  se propage avec sa propre phase de Gouy donnée par (1.56). Elle vaut en particulier 0 pour z = 0 et  $(2p + |\ell| + 1)\frac{\pi}{2}$  lorsque z tend vers l'infini (c'est à dire loin du col). Cela a pour conséquence que la phase des coefficients  $c_p^{\ell}$  est modifée au cours de la propagation ainsi que la manière dont les différents modes interfèrent. Le profil d'intensité ne suit plus la variation hyperbolique de w(z).

Une autre conséquence du mode de fabrication des modes LG s'observe sur la variation de leur rayon avec  $\ell$ . Nous avons vu précédemment qu'elle était en  $\sqrt{|\ell|}$ , en particulier au



FIGURE 1.25 – Variation du rayon des modes LG créés avec  $\ell$ 

niveau du col  $R_{\ell} = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w_0$ . En mesurant le rayon de plusieurs modes au point focal d'une lentille de focale 500 mm nous avons observé que la variation du rayon avec  $\ell$  n'était pas de ce type mais linéaire :

$$R_{\ell} = R_0 (1 + \alpha |\ell|) \tag{1.74}$$

comme on peut le voir sur la figure (1.25). Ce comportement est connu et a été étudié par J. Curtis et D. Grier [39].

En déterminant les valeurs de  $R_0$  et  $\alpha$  par extrapolation linéaire on constate une légère différence entre les  $\ell$  positifs et négatifs que nous attribuons à une imperfection expérimentale pas encore bien identifiée :

$$\begin{cases} R_0 = 0,045 \pm 0,004 \text{ mm et } \alpha = 0,51 \pm 0,05 \text{ pour } \ell > 0 \\ R_0 = 0,049 \pm 0,002 \text{ mm et } \alpha = 0,45 \pm 0,02 \text{ pour } \ell < 0 \end{cases}$$
(1.75)

Leur moment orbital Pour analyser la phase des faisceaux que nous générons et mesurer leur OAM nous utilisons essentiellement la transformation par une lentille tiltée et la méthode utilisant un intéromètre de Mach-Zehnder contenant un prisme de Dove (DMZ). Dans chaque cas nous vérifions que l'OAM des faisceaux correspond bien à la valeur attendue. Deux exemples de figures de lentille tiltée sont présentés sur la figure (1.26) pour des hologrammes appliqués sur le SLM correspondant à  $\ell = -10$  et  $\ell = +10$ . Dans les deux cas on observe bien dix franges sombres avec une orientation différente de la figure.

Finalement les modes LG que nous crééons, même s'ils ne sont pas complètement purs, portent bien l'indice azimutal  $\ell$  souhaité. Ils sont suffisants pour les études portant essentiellement sur l'OAM comme c'est le cadre de cette thèse.

# 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord présenté la notion de singularité de phase et celle de vortex optique. Nous avons vu que le mode de Laguerre-Gauss (LG) est le vortex usuel. Ce mode possède une phase azimutale  $e^{i\ell\theta}$ , où  $\ell \in \mathbb{Z}$  est l'hélicité ou l'indice azimutal du mode, qui résulte en une intensité annulaire. Nous avons vu qu'une telle phase était également à l'origine d'un moment angulaire suppplémentaire porté par l'onde : le moment orbital angulaire (OAM), directement donné par l'hélicité  $\ell$ . Dans le cadre de l'approximation paraxiale (notre cadre d'étude) ce moment est indépendant du moment angulaire de spin (SAM). Il peut s'échanger avec la matière sous certaines conditions et présente de nombreuses



**FIGURE 1.26** – Mesure de l'OAM des modes LG créés avec la méthode de la lentille tiltée pour (a)  $\ell = -10$  et (b)  $\ell = 10$ 

applications en particulier dans le domaine de l'information quantique. Nous avons détaillé les principales méthodes pour générer expérimentalement des modes LG et mesurer leur OAM. Ces techniques sont de nos jours bien maitrisées en laboratoire et permettent d'envisager l'utilisation de l'OAM comme variable quantique de grande dimension. C'est dans ce cadre que nous avons mené une étude portant sur la conversion d'un puis de plusieurs modes LG de grande valeur d'OAM  $\ell$  en utilisant une transition à deux photons dans une vapeur de rubidium. Nous présentons cette étude par la suite.

# Chapitre 2

# Généralités sur la conversion de vortex optiques par mélange d'ondes utilisant la transition $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ du rubidium

### Sommaire

2.1 Int	roduction	<b>47</b>
2.2 Transition à deux photons $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ dans le rubidium		47
2.3 Mélange d'ondes - optique non linéaire		
2.3.1	Rappels sur l'optique non linéaire	49
2.3.2	Le mélange à quatre ondes pour la conversion rouge-bleu $\ldots$ .	50
2.3.3	Cas d'école du mélange à quatre ondes : les ondes planes	52
2.3.4	Mélange à quatre ondes usuel : cas des ondes gaussiennes $\ldots$ .	54
2.3.5	Critère de Boyd	56
2.4 Mé	lange à quatre ondes pour des vortex optiques	<b>56</b>
2.4.1	Modèle de gain faible	56
2.4.2	Accords de phase pour des vortex optiques	58
2.5 Cor	nclusion	60

# 2.1 Introduction

Les phénomènes non-linéaires sont des candidats de choix pour étudier l'interaction entre la matière et les vortex optiques car ils sont sensibles à la phase des ondes mises en jeu.

Le point de départ a été une expérience de doublage de fréquence réalisée avec un mode  $LG_0^{\ell}$  dans un cristal non linéaire par K. Dholakia et al. [42] en 1996. Pour des valeurs de  $\ell$  comprises en 0 et 7, cette expérience a montré que le faisceau doublé possédait une OAM égal à  $2\ell$ . Ceci est dû la conservation du moment orbital angulaire lors du processus de doublage de fréquence. Ce résultat a par la suite été étendu par la même équipe au cas de modes  $LG_p^{\ell}$ [36].

Peu de temps après la conservation de l'OAM a été montrée pour le processus de conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC) par A. Mair et al. [78] et D.P. Caetano et al. [31].

En 2003 S. Barreiro et J.W. Tabosa [14] ont montré la génération d'un faisceau cohérent portant un OAM à partir d'un mélange à quatre ondes dégénéré (c'est-à-dire que les ondes en jeu ont la même fréquence) réalisé dans un nuage d'atomes froids de césium.

Plus récemment, en 2012, G. Walker et al. [129] ont utilisé un mélange à quatre ondes non dégénéré pour transférer l'OAM de deux faisceaux d'entrée rouges sur un faisceau bleu.

Des modes LG ont pu être stockés dans une vapeur chaude de rubidium par R. Pugatch et al. en 2007 [107] par un protocole basé sur l'EIT (Electromagnetically Induced Transparency) puis le stockage au niveau du photon unique a été réalisé par L. Veissier et al. [124] dans un nuage de césium froid.

En 2014, à partir d'un faisceau portant un OAM  $\ell = 1$ , G. Gariepy et al. [56] ont pu générer des harmoniques d'ordre élevé (11, 13 et 15) dans un gaz et montré que l'OAM de chaque harmonique était égal à  $\ell$ . Ces résultats ont été étendus en 2016 par R. Géneaux et al. [57] dans le cas où le faisceau initial porte l'OAM  $\ell = 1$ , 2 ou 3, lesquels ont confirmé que l'OAM d'une harmonique est  $\ell$  fois son ordre. Pour  $\ell = 3$  ils ont ainsi obtenu une harmonique d'ordre 19 portant un OAM égal à 57. Cette propriété provient également de la conservation du moment orbital lors du processus non-linéaire.

Toutes ces expériences ont utilisé des modes LG d'entrée possédant de petites valeurs de  $\ell$ , quelques unités au plus. La valeur ajoutée de ce travail de thèse est d'étudier l'effet de grandes valeurs de  $\ell$  sur un phénomène non-linéaire. Pour cela nous allons utiliser une transition à deux photons dans une vapeur de rubidium et dans le cas où les faisceaux d'entrée sont des vortex optiques coaxiaux possédant une grande valeur de  $\ell$ . Nous nommons ce processus conversion de vortex.

Dans ce chapitre nous présentons dans un premier temps en détails la transition à deux photons utilisée pour réaliser une conversion de vortex dans le rubidium. Nous verrons que ce processus peut se décrire comme un mélange à quatre ondes c'est pourquoi dans un second temps nous présentons le formalisme d'optique non-linéaire permettant de décrire cette conversion. Nous commençons par des rappels généraux d'optique non-linéaire avant d'établir le cas du mélange à quatre ondes pour le cas d'ondes usuelles. Nous nous interrogeons alors sur d'éventuelles différences dans le cas des vortex optiques.

# 2.2 Transition à deux photons $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ dans le rubidium

La transition à deux photons que nous avons choisie correspond à la transition du rubidium entre le niveau fondamental  $5S_{1/2}$  et le niveau  $5D_{5/2}$  via le niveau intermédiaire  $5P_{3/2}$ . La transition est illustrée sur la figure (2.1). Pour exciter le niveau  $5D_{5/2}$  un laser à 780 nm et un laser à 776 nm sont utilisés. La voie de désexcitation qui nous intéresse est celle qui passe par le niveau  $6P_{3/2}$  et qui génère un photon bleu à 420 nm et un photon infrarouge à 5230 nm.

La transition  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  est un type de transition Raman stimulée dit *en échelle*. Lorsque les lasers sont sufisamment décalés en fréquence ( $\delta$  sur la figure (2.1), de l'ordre du GHz) par rapport au niveau  $5P_{3/2}$  le niveau  $5D_{5/2}$  est efficacement peuplé et une onde bleue cohérente est générée. Nous reviendrons plus en détails sur la transition Raman dans la partie (3.3.3). Nous avons choisi cette transition pour plusieurs raisons. Tout d'abord le groupe possède



**FIGURE 2.1** – Schéma des niveaux atomiques du rubidium choisis pour la conversion de vortex

une expertise sur l'atome de rubidium et possédait déjà la plupart des lasers et optiques nécessaires. Ensuite le fait que les ondes excitatrices rouges et les ondes générées aient une grande différence de longueur d'onde permet l'absence d'amiguité entre celles-ci. Un autre avantage est qu'il est possible de détecter l'onde bleue avec les mêmes méthodes que pour les ondes d'entrée rouges (oeil, camera CCD, photodiode ...). D'autre part cette transition est très intense, c'est l'une des plus intenses dans les atomes alcalins. En particulier elle est bien plus intense que la transition équivalente dans le césium [112].

Enfin cette transition est connue : elle a été explorée pour la première fois par F. Nez et al. [90] dans le cas non résonant (deux photons à 778 nm) puis par T. Grove et al. [61] dans le cas quasi-résonnant (notre cas). Par la suite la lumière bleue cohérente émise par émission stimulée a été étudiée en détails par A.S. Zibrov et al.[137], Scholten et al. [85], Akulshin et al. [2][4][1], Vernier et al. [127] et Sell et al. [114] pour le cas résonnant et par le groupe de Brekke dans le cas non résonnant [28] [29]. Nous disposons ainsi de nombreuses données permettant de définir les conditions générales d'obtention de la lumière bleue cohérente.

Dans la suite de ce manuscrit nous utiliserons cette transition pour étudier la conversion d'un ou plusieurs vortex optiques à partir de modes de Laguerre-Gauss à 780 nm et 776 nm. La génération des ondes bleue et infrarouge à partir de cette transition peut-être traitée comme un mélange à quatre ondes. Il s'agit néanmoins d'un type particulier de mélange à quatre ondes puisque dans ce cas seulement deux ondes sont issues de lasers, la troisième est obtenue par émission spontanée amplifiée (ASE) due à une inversion de population entre les niveaux  $5D_{5/2}$  et  $6P_{3/2}$  [137][5]. Nous décrivons ci-dessous le formalisme associé après avoir fait quelques rappels généraux sur l'optique non-linéaire.

# 2.3 Mélange d'ondes - optique non linéaire

#### 2.3.1 Rappels sur l'optique non linéaire

Considérons un milieu non-linéaire soumis à une champ électrique  $\vec{E}$ . La réponse d'un milieu diélectrique à un champ électrique extérieur  $\vec{E}$  est décrite par la polarisation  $\vec{P}$  correspondant à la densité de moment dipolaire :  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$  où  $\vec{p}$  est le moment dipolaire induit par  $\vec{E}$  sur les atomes ou les molécules constituant le milieu. Dans le cas des milieux dits linéaires cette polarisation est directement proportionnelle à  $\vec{E}$  par la relation :

$$\vec{P_L} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} \tag{2.1}$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide et  $\chi(\omega)$  la susceptibilité du milieu. Dans le cas des matériaux isotropes (respectivement anisotropes)  $\chi(\omega)$  est un scalaire complexe (respectivement un tenseur). La relation (2.1) décrit le cas de champs peu intenses et permet d'expliquer les phénomènes optiques usuels ayant lieu à la même fréquence que l'onde incidente comme la réfraction, la réflexion ou l'absorption<sup>1</sup>.

Pour des champs plus intenses la polarisation s'écrit comme une somme de puissances de  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \cdots \right) = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}$$
(2.2)

et les susceptibilités  $\chi^{(n)}$  sont maintenant des tenseurs de rang n + 1.  $\vec{P}$  contient le terme linéaire précédent et un terme non linéaire noté  $\vec{P_{NL}}$ .

A partir des équations de Maxwell on peut établir l'équation de propagation de l'onde dans le milieu non linéaire (non chargé et non conducteur), elle s'écrit [24] :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}$$
(2.3)

En utilisant (2.1) cette expression s'écrit alors :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}$$
(2.4)

où on a posé  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ ,  $\varepsilon(\omega)$  est la permitivité diélectrique relative du milieu.

L'équation (2.4) montre que la propagation de l'onde dans le milieu est modifiée par le terme de droite qui agit comme un terme source. Son amplitude, sa phase et ses fréquences caractéristiques vont déterminer le rayonnement produit. De nouvelles fréquences sont ainsi susceptibles d'apparaître dans le rayonnement.

A titre d'exemple considérons le doublage de fréquence dans lequel  $\vec{P}_{NL}^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}^2$ . Si l'onde est monochromatique de pulsation  $\omega$ , alors  $\vec{P}_{NL}^{(2)}$  contient un terme à la pulsation nulle (appelé rectification optique) qui ne produit pas de rayonnement et un terme à la pulsation  $2\omega$  qui génère une onde de fréquence double. Au niveau microscopique ceci correspond à l'absorption de deux photons d'énergie  $\hbar\omega$  et à l'émission simultanée d'un photon d'énergie  $2\hbar\omega$  comme représenté sur la figure (2.2). Ce phénomène est connu sous le nom de *doublage de fréquence* ou génération de deuxième harmonique (SHG). Sur la figure (2.2b) certains niveaux sont représentés en pointillés car ils peuvent être virtuels c'est à dire qu'ils ne correspondent pas à des états propres du système sans champ.

<sup>1.</sup> En effet on a les relations liant l'indice optique *n* et le coefficient d'absorption  $\alpha : n = \Re(\sqrt{1 + \chi(\omega)})$  et  $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\Im(\sqrt{1 + \chi(\omega)})$ 



**FIGURE 2.2** – Principe (a) et niveaux quantiques (b) du doublage de fréquence

Des processus faisant intervenir des niveaux d'énergie virtuels sont dits *paramétriques*, ils n'induisent pas de transfert de population significatifs sur ces niveaux. A l'inverse des processus qui font intervenir des niveaux réels du système atomique et induisent un transfert de population entre ces niveaux sont dits *non-paramétriques*. L'énergie des photons est ainsi toujours conservée pour des processus paramétriques alors que ce n'est pas nécessairement le cas pour des processus non-paramétriques où il peut y avoir des échanges d'énergie avec le milieu d'interaction [24].

Au niveau du matériau, chaque atome acquiert un moment dipolaire et émet un champ à la fréquence  $2\omega$ . Si les champs rayonnés par chaque dipôle atomique sont en phase ils vont interférer constructivement pour donner un faisceau cohérent.

#### 2.3.2 Le mélange à quatre ondes pour la conversion rouge-bleu

Le mélange à quatre ondes ou Four Wave Mixing (FWM) est un processus d'ordre trois qui génère une onde à partir de trois ondes. La polarisation associée est donnée par  $\vec{P}_{NL}^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) \vec{E}^3$  avec  $\chi^{(3)}(\omega)$  la susceptibilité d'ordre trois. Dans la suite nous considèrerons le cas d'un milieu homogène et isotrope (puisque notre milieu non linéaire sera un gaz de rubidium) donc  $\chi^{(3)}(\omega)$  sera un scalaire complexe.

Plusieurs schémas atomiques sont possibles, deux sont représentés sur la figure (2.3). Le premier (2.3b) correspond à la somme de trois fréquences pour générer la quatrième (si les trois fréquences sont identiques ceci correspond à la génération de troisième harmonique). Le deuxième (2.3c) correspond à la somme de deux fréquences et la soustraction de la troisième, il correspond au schéma atomique que nous avons choisi (cf. figure (2.1)) et est dénommé schéma en losange ou schéma en diamant [132]. La conservation de l'énergie impose alors :



**FIGURE 2.3** – Principe (a) et deux schémas quantiques possibles, (b) et (c), du mélange à quatre ondes

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \tag{2.5}$$

Nous faisons l'hypothèse où le champ electrique dans le milieu est la somme d'ondes monochromatiques de pulsation  $\omega_i$ , il s'écrit<sup>2</sup> :

$$\vec{E} = \vec{E_1}e^{-i\omega_1 t} + \vec{E_2}e^{-i\omega_2 t} + \vec{E_3}e^{-i\omega_3 t} + \vec{E_4}e^{-i\omega_4 t} + c.c.$$
(2.6)

"c.c." désigne le complexe conjugué.

Pour faire plus facilement le lien avec le schéma atomique que nous avons choisi nous considérons désormais que les champs  $\vec{E}_3$  et  $\vec{E}_4$  correspondent au champ infrarouge à 5230 nm et au champ bleu à 420 nm respectivement. Nous remplaçons ainsi les indices "3" et "4" par les indices "IR" et "b". Nous ne changeons pas les indices "1" et "2", ils correspondent aux ondes d'entrée à 780 nm et 776 nm.

Avec un champ de la forme (2.6) on peut montrer que  $\vec{P}_{NL}^{(3)}$  contient de nombreux termes de pulsations différentes :  $3\omega_1$ ,  $3\omega_2$ ,  $3\omega_{IR}$ ,  $3\omega_b$ ,  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_{IR}$ ,  $\omega_1 + \omega_2 - \omega_{IR}$ , ... Le membre de gauche de l'équation de propagation de l'onde dans le milieu, équation (2.4), s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \sum_{i=(1,2,IR,b)} \left( \Delta \vec{E_i} + \frac{\varepsilon(\omega_i)}{c^2} \omega_i^2 \frac{\partial^2 \vec{E_i}}{\partial t^2} \right) e^{-i\omega_i t} + c.c.$$
(2.7)

Il possède quatre termes aux pulsations  $\omega_i$  contrairement au membres de droite de (2.4) qui contient de nombreuses autres pulsations. Ainsi seuls quatre termes de  $\vec{P}_{NL}^{(3)}$ , de pulsations identiques aux pulsations du champ  $\vec{E}$ , contribueront au processus de mélange à quatre ondes. Ces quatre termes sont (nous omettons le complexe conjugué) :

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\omega_{1}) = 6\varepsilon_{0}\chi^{(3)}E_{IR}E_{b}\vec{E}_{2}^{*}e^{-i\omega_{1}t}$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\omega_{2}) = 6\varepsilon_{0}\chi^{(3)}E_{IR}E_{b}\vec{E}_{1}^{*}e^{-i\omega_{2}t}$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\omega_{IR}) = 6\varepsilon_{0}\chi^{(3)}E_{1}E_{2}\vec{E}_{b}^{*}e^{-i\omega_{IR}t}$$

$$\vec{P}_{NL}^{(3)}(\omega_{b}) = 6\varepsilon_{0}\chi^{(3)}E_{1}E_{2}\vec{E}_{IR}^{*}e^{-i\omega_{b}t}$$
(2.8)

En identifiant les termes de fréquence identique l'équation (2.4) devient un système de quatre équations non-linéaires couplées :

$$\Delta \vec{E}_{1} + \frac{\varepsilon}{c^{2}} \omega_{1}^{2} \vec{E}_{1} = \frac{-6\omega_{1}^{2}\chi^{(3)}}{c^{2}} E_{IR} E_{b} \vec{E}_{2}^{*}$$

$$\Delta \vec{E}_{2} + \frac{\varepsilon}{c^{2}} \omega_{2}^{2} \vec{E}_{2} = \frac{-6\omega_{2}^{2}\chi^{(3)}}{c^{2}} E_{IR} E_{b} \vec{E}_{1}^{*}$$

$$\Delta \vec{E}_{IR} + \frac{\varepsilon}{c^{2}} \omega_{IR}^{2} \vec{E}_{IR} = \frac{-6\omega_{IR}^{2}\chi^{(3)}}{c^{2}} E_{1} E_{2} \vec{E}_{b}^{*}$$

$$\Delta \vec{E}_{b} + \frac{\varepsilon}{c^{2}} \omega_{b}^{2} \vec{E}_{b} = \frac{-6\omega_{b}^{2}\chi^{(3)}}{c^{2}} E_{1} E_{2} \vec{E}_{IR}^{*}$$
(2.9)

On peut simplifier ces équations en considérant que toutes les ondes sont de même polarisation et travailler sur des champs scalaires. On considère également que toutes les ondes se propagent dans la direction +z, on écrit le champ électrique sous la forme :

$$E_i = \tilde{E}_i e^{ik_i z} (+c.c.) \tag{2.10}$$

<sup>2.</sup> Le facteur  $\frac{1}{2}$  est implicitement contenu dans les termes  $\vec{E_i}$ .

où  $\tilde{E}$  contient l'amplitude de l'onde et éventuellement d'autres termes de phase.

En développant le terme laplacien par rapport à z les membres de gauche du système (2.9)deviennent :

$$\Delta E_i + \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^2 E_i = \left( \Delta_\perp \tilde{E}_i + \frac{\partial^2 \tilde{E}_i}{\partial z^2} + 2ik_i \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial z} - k_i^2 \tilde{E}_i + \frac{\varepsilon}{c^2} \omega_i^2 \tilde{E}_i \right) e^{ik_i z}$$
(2.11)

où  $\Delta_{\perp}$  désigne le laplacien transverse agissant sur les variables (x, y).

Les termes (2.11) se simplifient dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable c'est-à-dire qu'on considère que l'enveloppe  $E_i$  de l'expression (2.10) a une variation faible avec z où tout du moins beaucoup moins rapide que celle du terme  $e^{ik_i z}$ . Cette approximation est jusifiée car nous travaillerons par la suite avec des ondes solutions de l'équation paraxiale (planes, gaussiennes puis LG) donc vérifiant cette approximation. Mathématiquement cela revient à négliger les termes  $\left|\frac{\partial^2 \tilde{E}_i}{\partial z^2}\right|$  devant  $|k_i \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial z}|$ . Dans ce cas et en utilisant le fait que  $k_i^2 = \frac{\epsilon^{(1)} \omega_i^2}{c^2}$  le système (2.9) s'écrit :

$$\begin{cases}
\Delta_{\perp}\tilde{E}_{1} + 2ik_{1}\frac{\partial\tilde{E}_{1}}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_{1}^{2}}{c^{2}}\tilde{E}_{IR}\tilde{E}_{b}\tilde{E}_{2}^{*}e^{i\Delta kz} \\
\Delta_{\perp}\tilde{E}_{2} + 2ik_{2}\frac{\partial\tilde{E}_{2}}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_{2}^{2}}{c^{2}}\tilde{E}_{IR}\tilde{E}_{b}\tilde{E}_{1}^{*}e^{i\Delta kz} \\
\Delta_{\perp}\tilde{E}_{IR} + 2ik_{IR}\frac{\partial\tilde{E}_{IR}}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_{IR}^{2}}{c^{2}}\tilde{E}_{1}\tilde{E}_{2}\tilde{E}_{b}^{*}e^{i\Delta kz} \\
\Delta_{\perp}\tilde{E}_{b} + 2ik_{b}\frac{\partial\tilde{E}_{b}}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_{b}^{2}}{c^{2}}\tilde{E}_{1}\tilde{E}_{2}\tilde{E}_{IR}^{*}e^{i\Delta kz}
\end{cases}$$
(2.12)

où  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_{IR} - k_b$ .

Finalement on considère que les ondes incidentes  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont suffisamment intenses (on dira ondes pompes) pour ne pas être déplétées par le processus de mélange à quatre ondes. On obtient ainsi seulement deux équations couplées pour les champs  $E_{IR}$  et  $E_b$ :

$$\begin{cases}
\Delta_{\perp}\tilde{E}_{IR} + 2ik_{IR}\frac{\partial\tilde{E}_{IR}}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_{IR}^2}{c^2}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_b^*e^{i\Delta kz} \\
\Delta_{\perp}\tilde{E}_b + 2ik_b\frac{\partial\tilde{E}_b}{\partial z} = \frac{-6\chi^{(3)}\omega_b^2}{c^2}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_{IR}^*e^{i\Delta kz}
\end{cases}$$
(2.13)

#### Accords de phase

Si les ondes générées par le mélange à quatre ondes maintiennent une relation de phase fixe avec les termes de polarisations non linéaires elles sont capables d'extraire suffisamment d'énergie aux ondes pompes pour être amplifiées. On parle d'accord de phase. En général dans le cas d'une phase quelconque  $\varphi(r, \theta, z)$ , cet accord se traduit par :

$$\sum_{i=(1,2,IR,b)} \eta_i \varphi_i(x,y,z) = 0$$
 (2.14)

où  $\eta_i = +1$  dans le cas où l'onde est créée et  $\eta_i = -1$  dans le cas où elle est incidente. Ainsi l'intensité des ondes générées sera maximale dans le cas où la condition (2.14) est satisfaite.

#### 2.3.3Cas d'école du mélange à quatre ondes : les ondes planes

Dans le cas des ondes planes les variations transverses sont nulles, le champ s'écrit :

$$E_i = A_i e^{ik_i z} (+c.c.) (2.15)$$

où  $A_i$  est l'amplitude du champ.

Le système (2.12) devient un système d'équations différentielles du premier ordre sur l'amplitude des ondes  $A_i$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{IR}}{\partial z} = ig_{IR}A_b^* e^{i\Delta kz} \\ \frac{\partial A_b}{\partial z} = ig_b A_{IR}^* e^{i\Delta kz} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_{IR} = \frac{3\chi^{(3)}\omega_{IR}}{n_{IR}c}A_1A_2 \\ g_b = \frac{3\chi^{(3)}\omega_b}{n_bc}A_1A_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Le terme  $\Delta kz = (k_1 + k_2 - k_{IR} - k_b)z$  correspond au désaccord de la phase de propagation des ondes. Le système peut se résoudre dans le cas d'un désaccord  $\Delta k$  quelconque mais comme vu précédemment les amplitudes générées seront maximales lorsque  $\Delta k = 0$ . Dans ce cas cela correspond à la conservation de l'impulsion des photons dans le losange de FWM :  $\sum_i \eta_i \hbar k_i = 0$ . Pour  $\Delta k = 0$  le système se résout en dérivant une seconde fois par rapport à z l'expression donnant  $A_b$  et en remplaçant  $\frac{\partial A_{IR}^*}{\partial z}$ . On trouve que l'amplitude bleue vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 A_b}{\partial z^2} - g_b g_{IR}^* A_b = 0 \tag{2.17}$$

ce qui, en considérant que le champ bleu est nul en z = 0 à l'entrée de la cellule, donne :

$$A_b(z) = A_0 \operatorname{sh}(gz) \tag{2.18}$$

avec  $A_0$  une constante. On définit le gain g comme  $g = \sqrt{g_b g_{IR}^*}$ . Le terme  $g_b g_{IR}^*$  est égal à  $\frac{9|\chi^{(3)}|^2 \omega_b \omega_{IR}}{n_b n_{IR} c^2} I_1 I_2$  donc le gain g est un nombre réel positif proportionnel à la racine des intensités pompes<sup>3</sup>.

On déduit l'expression de  $A_{IR}$  en réutilisant une des équation du système (2.16):

$$A_{IR}(z) = \left(\frac{1}{ig_b}\frac{\partial A_b}{\partial z}\right)^* = i\frac{g}{g_b^*}A_0^*\mathrm{ch}(gz)$$
(2.19)

Les intensités correspondantes sont égales à :

$$I_b = I_0 \mathrm{sh}^2(gz) \tag{2.20}$$

$$I_{IR} = I_0 \frac{g^2}{|g_b|^2} ch^2(gz)$$
 (2.21)

Ces expressions montrent que l'infrarouge n'est pas nul en z = 0 et qu'il faut trois ondes pour générer la quatrième. Ce résultat peut paraître contradictoire puisque le mélange à quatre ondes que nous étudions ne nécessite que deux lasers de pompes. Comme mentionné au début du chapitre l'interprétation qui est généralement faite est que la toisième onde est produite par émission spontanée amplifiée [5]. En effet la durée de vie du niveau  $5D_{5/2}$  est d'environ 240 ns et celui du niveau  $6P_{3/2}$  d'environ 120 ns (cf. annexe (A)). Le niveau  $6P_{3/2}$ se dépeuple donc deux fois plus vite que le niveau  $5D_{5/2}$  et il y a inversion de population entre ces deux niveaux. Des photons infrarouges émis par émission spontanée peuvent ainsi être amplifiés et un faisceau infrarouge est généré dans la direction de la plus grande longueur du milieu (par exemple pour une cellule de gaz cylindrique cela correspond à sa longueur)

<sup>3.</sup> Pour un gaz suffisamment dilué, on considère qu'il y a peu de dispersion si bien que  $\chi^{(3)}(\omega_b) \approx \chi^{(3)}(\omega_{IR})$ 

[104]. Ce phénomène n'est pas dans le modèle que nous venons de développer, il montre ici certaines limites.

Dans la réalisation expérimentale, décrite dans le chapitre 3, la lumière infrarouge à 5230 nm est absorbée par les parois en verre de la cellule de rubidium dans laquelle est réalisée la conversion. Nous ne pouvons donc pas détecter cette onde. C'est pourquoi dans la suite de ce manuscrit nous nous intéresserons principalement à l'onde bleue générée par le mélange à quatre ondes.

#### Onde bleue dans le régime de faible conversion

Dans le cas où le gain g est faible,  $gz \ll 1$ , on a  $A_b \approx A_0 gz$ : le champ bleu est linéairement amplifié avec la longueur d'interaction. L'intensité bleue  $I_b$  vaut alors:

$$I_b = \kappa I_1 I_2 z^2 \tag{2.22}$$

avec  $\kappa = I_0 \frac{9|\chi^{(3)}|^2 \omega_b \omega_{IR}}{n_b n_{IR} c^2}$ . En régime de gain faible l'intensité bleue dépend donc du carré de la longueur d'interaction avec le milieu et des intensités des champs pompes.

#### 2.3.4 Mélange à quatre ondes usuel : cas des ondes gaussiennes

Les ondes planes n'ayant pas de réalité physique, dans les expériences d'optique nonlinéaire on utilise des faisceaux gaussiens dans leur zone de Rayleigh, lesquels en constituent une bonne approximation. Dans ce cas l'intensité des faisceaux pompes ne dépend pas de z:

$$I_{i} = \frac{2\mathcal{P}_{i}}{\pi w_{i}^{2}} e^{\frac{-2r^{2}}{w_{i}^{2}}}$$
(2.23)

où  $w_i$  est le waist du faisceau i = (1, 2) et  $\mathcal{P}_i$  sa puissance.

#### Intensité du faisceau bleu

En négligeant les variations transverses l'intensité du faisceau bleu est donnée par l'expression (2.22) et s'écrit :

$$I_b = z^2 \frac{4\kappa}{\pi^2} \frac{\mathcal{P}_1}{w_1^2} \frac{\mathcal{P}_2}{w_2^2} e^{\frac{-2\pi^2}{w_{12}^2}}$$
(2.24)

avec

$$w = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \tag{2.25}$$

Les expressions (2.24) et (2.25) montrent qu'en régime de gain faible l'intensité bleue obtenue a une taille plus petite que l'intensité des faisceaux pompes.

#### Puissance du faisceau bleu

On déduit la variation de la puissance du faisceau bleu en intégrant l'expression (2.24) dans le plan transverse soit :

$$\mathcal{P}_{b} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} I_{b} \cdot r dr d\theta = \left[ \kappa \frac{2\mathcal{P}_{1}\mathcal{P}_{2}}{\pi} \frac{z^{2}}{(w_{1}^{2} + w_{2}^{2})} \right]$$
(2.26)

A waists  $w_1$  et  $w_2$  constants et pour  $\mathcal{P}_1$  (respectivement  $\mathcal{P}_2$ ) constante la puissance bleue varie linéairement avec  $\mathcal{P}_2$  (respectivement  $\mathcal{P}_1$ ). Ce comportement est bien connu en optique

non-linéaire notamment dans le cas de l'oscillation paramétrique [22].

Pour le mélange à quatre ondes qui nous intéresse la variation de la puissance bleue en fonction de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  a été étudiée expérimentalement dans plusieurs expériences en particulier par A. Vernier et al. [127] comme on peut le voir sur la figure (2.4). On observe que  $\mathcal{P}_b$  est



**FIGURE 2.4** – Puissance bleue obtenue par mélange à quatre ondes en fonction de la puissance d'un des lasers de pompe, la puissance de l'autre laser est fixée à son maximum. Tirée et adaptée de [127].

linéaire avec  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  mais seulement à partir d'un seuil (situé autour de 5 mW pour chaque faisceau) et seulement dans une gamme de puissances. Une saturation apparait provenant du fait que l'approximation de gain faible n'est plus valable au delà d'une certaine puissance. Le seuil n'a pas d'explication claire il est probablement dû au fait qu'il faut suffisamment d'ASE pour enclencher le processus de FWM.

#### Accords de phase

Les faisceaux gaussiens possèdent en plus de la phase de propagation une phase de Gouy  $\varphi_{Gouy}$  et une phase de courbure  $\varphi_{\mathscr{C}}$ . Dans le cas où  $z \ll z_{R_i}$  avec  $z_{R_i}$  la longueur de Rayleigh d'un faisceau, les deux dernières s'écrivent :

$$\varphi_{Gouy_i} = \operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_i}}) \tag{2.27}$$
$$\approx \frac{z}{z_{R_i}}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\varphi_{\mathscr{C}_i} = \frac{k_i r^2}{2\Re_i(z)}$$

$$\approx \frac{k_i r^2}{z_{R_i}^2} z = \frac{2r^2}{w_i^2} \times \varphi_{Gouy_i}$$
(2.28)

où  $\Re$  est le rayon de courbure du faisceau gaussien<sup>4</sup>.

Le mélange à quatre ondes est optimal lorsque l'accord de phase de propagation est réalisé mais aussi lorsque les accords de phase de Gouy et de courbure sont réalisés. Ces accords

<sup>4.</sup> Pour rappel  $\Re(z) = \overline{z(1 + (\frac{z_R}{z - z_0})^2)}$  avec  $z_0$  la position du col du faisceau. On prend ici  $z_0 = 0$ .

s'écrivent :

$$\begin{cases} \sum_{i} \eta_{i} k_{i} = 0 \\ \sum_{i} \eta_{i} \frac{1}{z_{R_{i}}} = 0 \\ \sum_{i} \eta_{i} \frac{k_{i}}{z_{R_{i}}^{2}} = 0 \end{cases}$$
(2.29)

#### 2.3.5 Critère de Boyd

En général les conditions (2.29) ne sont pas toutes réalisées simultanément sauf si les longueurs de Rayleigh des différents faisceaux sont identiques. Cette condition est nommée critère de Boyd. Il est bien connu en optique non-linéaire en particulier pour le processus de doublage de fréquence. Il a été établi par G. Boyd et D.A Kleinman en 1968 [23]. Dans le cas d'une seule onde pompe (comme pour le doublage de fréquence) il stipule que l'optimum de conversion non-linéaire est obtenu lorsque les paramètres confocaux des ondes  $b_i = 2z_{R_i}$ sont égaux et tels que  $L/b_i = 2, 84$  où L est la longueur optique du milieu non-linéaire. Pour le cas d'un mélange d'ondes il se généralise : les différentes ondes doivent avoir la même

longueur de Rayleigh et de l'ordre de grandeur de la longueur du milieu non-linéaire.

Il se justifie qualitativement par le fait que les faisceaux pompes doivent interagir avec le milieu non-linéaire sur une longueur suffisante pour générer de nouvelles ondes et par le fait que celles-ci doivent se superposer avec les pompes pour être amplifiées.

Dans ce cas la deuxième relation de (2.29), accord de phase de Gouy, est automatiquement remplie et la troisième, accord de phase de courbure, correspond alors à l'accord de phase de propagation (ou la conservation de l'impulsion). Le critère de Boyd permet ainsi de faire reposer le processus non linéaire essentiellement sur un recouvrement des faisceaux pompes et sur l'accord de phase de propagation. C'est pourquoi en général on essaiera de se placer dans le cas où les faisceaux pompes ont la même longueur de Rayleigh.

Sous ces conditions, dans le cas du mélange à quatre ondes que nous souhaitons réaliser, il existe une condition sur les waists des faisceaux bleu et infrarouge :

$$w_b = \sqrt{\frac{\lambda_b}{\lambda_{IR}}} w_{IR} \approx 0, 3w_{IR} \tag{2.30}$$

Du fait de la grande différence de longueur d'onde, le faisceau infrarouge est plus grand que le faisceau bleu.

### 2.4 Mélange à quatre ondes pour des vortex optiques

#### 2.4.1 Modèle de gain faible

Nous discutons ici le cas où les faisceaux pompes sont des vortex optiques, en l'occurence des modes de Laguerre-Gauss. Les variations transverses des ondes ne sont pas nulles. Les équations de propagation des ondes bleue et infrarouge (2.13) dépendent des coordonnées r,  $\theta$ , et z et n'ont pas de solutions simples.

On peut considérer en première hypothèse que les variations transverses des ondes sont faibles de façon à négliger le terme en laplacien dans les équations de propagation (2.13) comme nous l'avons fait pour les ondes gaussiennes. Dans ce cas, et en considérant que les champs pompes  $E_1$  et  $E_2$  ne sont pas affectés par le processus, le système décrivant l'évolution des champs bleu et infrarouge est équivalent à celui des ondes planes (2.16).

#### Intensité du faisceau bleu

Dans le régime de gain faible l'intensité bleue est donnée par l'expression (2.22). Pour des faisceaux LG les intensités  $I_1$  et  $I_2$  s'écrivent :

$$I_1 = \frac{2\mathcal{P}_1}{\pi w_1^2 |\ell_1|!} \left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right)^{|\ell_1|} e^{\frac{-2r^2}{w_1^2}}$$
(2.31)

 $\operatorname{et}$ 

$$I_2 = \frac{2\mathcal{P}_2}{\pi w_2^2 |\ell_2|!} \left(\frac{2r^2}{w_2^2}\right)^{|\ell_2|} e^{\frac{-2r^2}{w_2^2}}$$
(2.32)

avec  $w_1$ ,  $w_2$  les waists des faisceaux. Le produit  $I_1I_2$  correspond alors (à un facteur près) à l'intensité d'un mode de Laguerre-Gauss, de waist w, donnée par :

$$I_1 I_2 = \frac{2\mathcal{P}_1}{\pi w_1^2 |\ell_1|!} \frac{2\mathcal{P}_2}{\pi w_2^2 |\ell_2|!} \left(\frac{w^2}{w_1^2}\right)^{|\ell_1|} \left(\frac{w^2}{w_2^2}\right)^{|\ell_2|} \underbrace{\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)^{|\ell_1|+|\ell_2|}}_{\propto I_{LG_0^{(\ell_1+\ell_2)}}} e^{\frac{-2r^2}{w^2}}$$
(2.33)

avec

$$w = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \tag{2.34}$$

Le faisceau bleu créé aura donc globalement une forme d'anneau mais de taille plus petite que celle des faisceaux d'entrée. Comme nous le verrons dans la suite de ce manuscrit ce modèle constitue une bonne approximation pour expliquer la plupart des observations expérimentales portant sur l'intensité du faisceau bleu.

#### Puissance du faisceau bleu

Dans le cas où le milieu non-linéaire est beaucoup plus petit que les longueurs de Rayleigh des faisceaux pompes, nous pouvons (comme précédemment pour des ondes gaussiennes) exprimer la puissance bleue émise en intégrant l'expression (2.22) et remplaçant  $I_1I_2$  par l'expression (2.33) :

$$\mathcal{P}_{b} = \kappa z^{2} \frac{2\mathcal{P}_{1}}{\pi w_{1}^{2} |\ell_{1}|!} \frac{2\mathcal{P}_{2}}{\pi w_{2}^{2} |\ell_{2}|!} \left(\frac{w^{2}}{w_{1}^{2}}\right)^{|\ell_{1}|} \left(\frac{w^{2}}{w_{2}^{2}}\right)^{|\ell_{2}|} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{2r^{2}}{w^{2}}\right)^{|\ell_{1}|+|\ell_{2}|} e^{\frac{-2r^{2}}{w^{2}}} 2\pi r dr \qquad (2.35)$$

L'intégrale qui apparait dans l'expression (2.35) est souvent rencontrée dans ce manuscrit. Il est donc utile de connaitre son expression analytique :

$$\int_0^\infty \left(\frac{2r^2}{w^2}\right)^L e^{\frac{-2r^2}{w^2}} 2\pi r dr = \frac{\pi L!}{2} w^2$$
(2.36)

On en déduit alors la puissance bleue lorsque les faisceaux pompes sont deux modes LG :

$$\mathcal{P}_{b} = \kappa z^{2} \frac{2\mathcal{P}_{1}\mathcal{P}_{2}}{\pi |\ell_{1}|!|\ell_{2}|!} \frac{w_{2}^{2|\ell_{1}|} w_{1}^{2|\ell_{2}|}}{(w_{1}^{2} + w_{2}^{2})^{|\ell_{1}| + |\ell_{2}| + 1}} \left[ |\ell_{1}| + |\ell_{2}| \right]!$$
(2.37)

Comme le cas des ondes gaussiennes décrit en (2.26), à waist  $w_1$  et  $w_2$  constants  $\mathcal{P}_b$  varie linéairement avec  $\mathcal{P}_1$  ou  $\mathcal{P}_2$ . Lorsque  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = 0$  on retrouve bien l'expression (2.26).

On peut comparer l'efficacité de la conversion pour des faisceaux gaussiens et des modes LG (de même  $\ell$ ) en considérant le cas où  $w_1 = w_2 = w$ . Dans ce cas pour des faisceaux gaussiens on a :

$$\mathcal{P}_b = \kappa z^2 \frac{2}{\pi} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \frac{1}{2w^2} \tag{2.38}$$

et pour des modes LG :

$$\mathcal{P}_{b} = \kappa z^{2} \frac{2}{\pi} \mathcal{P}_{1} \mathcal{P}_{2} \frac{1}{2w^{2}} \frac{[2|\ell|]!}{|\ell|! |\ell|! 2^{2|\ell|}} \approx \kappa z^{2} \frac{2}{\pi} \mathcal{P}_{1} \mathcal{P}_{2} \frac{1}{2w^{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}$$
(2.39)

On s'attend ainsi que, à puissances  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  identiques et waists  $w_1, w_2$  équivalents, le cas où les deux faisceaux pompes sont des modes LG est moins efficace d'un facteur  $k = \frac{[2|\ell|]!}{|\ell|!^2 \times 2^{2|\ell|}}$ . En utilisant la formule de Stirling <sup>5</sup> k se simplifie :  $k \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}$ .

La variation linéaire de  $\mathcal{P}_b$  avec  $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$  a été observée par A. Akulshin et al. [3] pour le cas où  $\ell_1, \ell_2 = 1$  comme on peut le voir sur la figure (2.5). Comme dans le cas précédent de deux faisceaux gaussiens on observe l'existence d'un seuil. Leur expérience met aussi en évidence



**FIGURE 2.5** – Comparaison de l'efficacité de conversion dans le cas de deux faisceaux pompes gaussiens (rose) et de deux faisceaux pompes LG (bleu) avec  $\ell_{1,2}=1$ , tirée et adaptée de [3]

le fait que la conversion est moins efficace pour des faisceaux LG que pour des faisceaux gaussiens comme attendu dans le modèle. Cependant leur facteur k est plus petit ( $k \approx 0, 2$ ) que la valeur donnée par le modèle :  $k = \frac{1}{2}$ . Les auteurs ne donnent pas de considération théoriques pour expliquer cette observation mais à la lecture de l'article on peut supposer que cela provient du fait que les valeurs de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas identiques pour les cas gaussiens et LG. En effet la lame de phase utilisée pour créer les modes LG induit une perte de puissance à sa traversée.

#### 2.4.2 Accords de phase pour des vortex optiques

Le modèle de gain faible ne donne pas a priori d'information sur la phase des faisceaux créés en particulier leur phase azimutale (leur OAM) et leur phase de Gouy (qui dépend aussi de l'OAM). Quel va être l'impact et le rôle de ces deux phases ?

La phase des faisceaux générés est déterminée par différents accords de phase. En considérant que les faisceaux pompes sont des modes de Laguerre-Gauss  $LG_0^{\ell_1}$  et  $LG_0^{\ell_2}$  et que dans le cas général les champs bleu  $E_b$  et infrarouge  $E_{IR}$  se décomposent sur la base des modes  $LG_p^{\ell}$  on peut expliciter ces accords.

<sup>5.</sup>  $\ell\,!\approx \sqrt{2\pi\ell}\ \ell^\ell e^{-\ell}$ vraie à mieux que 5% près dès que  $\ell\geq 2$ 

#### Accord de phase de propagation

Cet accord provient de la phase de propagation. Dans le cas où les différentes ondes se propagent toutes suivant +z il s'écrit :

$$k_1 z + k_2 z = k_{IR} z + k_b z \tag{2.40}$$

et doit être vérifié quelque soit z. Il est identique au cas des ondes gaussiennes et correspond comme précédemment à la conservation de l'impulsion des photons dans le losange du mélange à quatre ondes.

On peut le réécrire sous la forme :

$$\frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_2} = \frac{n_{IR}}{\lambda_{IR}} + \frac{n_b}{\lambda_b} \tag{2.41}$$

Si on considère que la vapeur de rubidium est suffisament diluée et que l'on se place loin des résonnances atomiques pour obtenir une dispersion faible, on négligera la variation de l'indice optique n avec la longueur d'onde :  $n(\lambda_i) \approx n$ . Dans ce cas on obtient :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_{IR}} + \frac{1}{\lambda_b}$$
(2.42)

Il est alors équivalent à la conservation de l'énergie dans le losange du mélange à quatre ondes et automatiquement satisfait dans ce cas.

#### Accord de phase azimutale

Cet accord s'écrit :

$$\ell_1 \theta + \ell_2 \theta = \ell_{IR} \theta + \ell_b \theta \tag{2.43}$$

Il doit être valable quelque soit  $\theta$  et se simplifie sous la forme :

$$\ell_1 + \ell_2 = \ell_{IR} + \ell_b \tag{2.44}$$

Il correspond à la conservation de l'OAM total.

#### Accord de phase de Gouy

Compte tenu de l'expression (1.56) de la phase de Gouy d'un faisceau LG, la conservation de la phase de Gouy s'écrit :

$$(|\ell_1| + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_1}}) + (|\ell_2| + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_2}}) = (|\ell_{IR}| + 2p_{IR} + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_{IR}}}) + (|\ell_b| + 2p_b + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_b}})$$
(2.45)

Nous avons ici introduit  $p_{IR}$  et  $p_b$ , correspondant à l'indice radial du faisceau infrarouge et du faisceau bleu respectivement car a priori ils ne sont pas nuls.

L'expression (2.45) est valable pour tout z, on peut donc la dériver et l'évaluer en z = 0. L'accord devient ainsi :

$$\frac{|\ell_1|+1}{z_{R_1}} + \frac{|\ell_2|+1}{z_{R_2}} = \frac{|\ell_{IR}|+2p_{IR}+1}{z_{R_{IR}}} + \frac{|\ell_b|+2p_b+1}{z_{R_b}}$$
(2.46)

#### Accord de phase de courbure

La dernière phase à prendre en compte est la phase de courbure. D'après l'expression de celle-ci il s'écrit :

$$\frac{k_1 r^2}{2\Re_1(z)} + \frac{k_2 r^2}{2\Re_2(z)} = \frac{k_{IR} r^2}{2\Re_{IR}(z)} + \frac{k_b r^2}{2\Re_b(z)}$$
(2.47)

avec  $\Re_i$  le rayon de courbure de l'onde<sup>6</sup>. Il peut se simplifier sous la forme

$$\frac{k_1}{\Re_1(z)} + \frac{k_2}{\Re_2(z)} = \frac{k_{IR}}{\Re_{IR}(z)} + \frac{k_b}{\Re_b(z)}$$
(2.48)

puisque valable quelque soit r.

L'expression (2.48) est aussi valable quelque soit z, en la dérivant et l'évaluant en z = 0 elle devient :

$$\frac{k_1}{z_{R_1}^2} + \frac{k_2}{z_{R_2}^2} = \frac{k_{IR}}{z_{R_{IR}}^2} + \frac{k_b}{z_{R_b}^2}$$
(2.49)

Nous avons déjà vu cette expression, elle est identique à la condition d'accord de phase de courbure pour des faisceaux gaussiens dans la zone de Rayleigh, expression (2.29).

On observe donc qu'un mélange à quatre ondes réalisé avec des vortex optiques repose sur les accords de phase "traditionnels" de l'optique non-linéaire complétés des accords propres aux phases des modes de Laguerre-Gauss : la phase azimutale qui dépend uniquement de l'indice radial  $\ell$  et la phase de Gouy qui dépend dans ce cas des indices azimutal  $\ell$  et radial p.

# 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la transition à deux photons  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  du rubidium comme mécanisme possible d'interaction entre des vortex optiques et des atomes. L'avantage principal de cette transition est de générer des photons très éloignés en fréquence (bleu et infrarouge) des photons d'entrée (rouges). Nous avons nommé *conversion de vortex* le fait de réaliser cette transition avec des modes lasers en forme de mode de Laguerre-Gauss. Nous avons utilisé le formalisme de l'optique non-linéaire pour décrire la conversion de vortex par un mélange à quatre ondes à partir des équations d'évolution des quatres ondes impliquées dans le mélange. D'après ces équations et sous certaines hypothèses (en particulier ondes pompes intenses et variations transverses des ondes négligeables) la conversion de vortex repose essentiellement sur un accord de phase généralisé englobant la conservation des phases de propagation (correspondant dans le cas de deux ondes pompes co-propageantes à la conservation de l'énergie), azimutale, de courbure et de Gouy ainsi que sur un bon recouvrement des ondes du mélange.

Pour des faisceaux pompes LG et dans le cas d'une faible conversion le faisceau bleu a la forme d'un mode LG de plus petite taille. Sa phase (donc son OAM  $\ell_b$ ) est déterminé par les différents accords de phase.

Nous présentons maintenant la réalisation expérimentale du mélange à quatre ondes pour la conversion de vortex optiques.

<sup>6.</sup> Pour rappel  $\Re(z) = z(1 + (\frac{z_R}{z-z_0})^2)$  avec  $z_0$  la position du col du faisceau comme pour un faisceau gaussien. On prend  $z_0=0$ .

# Chapitre 3

# Réalisation expérimentale d'une conversion de vortex utilisant la transition $5{\rm S}_{1/2}-5{\rm D}_{5/2}$

# Sommaire

<b>3.1</b> Introduction		
3.2 Montage expérimental pour la conversion d'un vortex optique		
3.2.1	Cellule de rubidium	63
3.2.2	Façonnage du laser à 776 nm en un vortex	66
3.2.3	Laser à 780 nm et mise en place de la conversion	68
3.2.4	Détections du vortex bleu	69
3.3 Conditions retenues pour l'expérience		70
3.3.1	Température de la vapeur	70
3.3.2	Puissance des lasers	71
3.3.3	Fréquence des lasers : ajustement de la transition Raman	72
3.4 Variantes du montage		76
3.4.1	Vers de plus grandes valeurs d'OAM	76
3.4.2	Conversion d'une paire de vortex optiques	77
<b>3.5</b> Conclusion		

# 3.1 Introduction

La réalisation d'une conversion de vortex par mélange à quatre ondes repose sur plusieurs points. Comme nous utilisons la transition à deux photons  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  (décrite dans la section (2.2) du chapitre précédent) le premier est l'excitation efficace du niveau  $5D_{5/2}$  car la quantité de lumière bleue émise est proportionnelle à la population de celui-ci (cf. figure (2.1)). Ce peuplement dépend notamment des intensités et de la fréquence des faisceaux pompes. Le deuxième est un bon recouvrement des faisceaux pompes sur une longueur suffisamment grande pour permettre l'amplification de la lumière bleue (et infrarouge) par le mélange à quatre ondes et la génération d'une onde bleue directionnelle. Cela se traduit par des longueurs de Rayleigh des différents faisceaux de l'ordre de grandeur de la longueur du milieu. Il ne faut par contre pas que la longueur du milieu soit trop grande sinon les ondes générées seront réabsorbées. Le dernier point est l'obtention d'un accord de phase maximal.

Dans ce chapitre nous présentons le montage expérimental que nous avons développé et utilisé pour réaliser la conversion de vortex optiques dans une vapeur de rubidium. La conversion la plus simple à réaliser est celle où seulement un des deux faisceaux incidents est un vortex optique. Nous commencerons par un faisceau gaussien à 780 nm est un mode de Laguerre-Gauss d'hélicité  $\ell$  à 776 nm. En effet une telle configuration facilite le recouvrement des deux faisceaux incidents et ceci pour de grandes valeurs de  $\ell$ .

C'est pourquoi dans un premier temps nous présentons en détails le montage de la conversion d'un seul vortex optique qui constituera pour nous la base de toute conversion de vortex. Pour cela nous décrivons les éléments clefs du montage optique à savoir les lasers, la mise en forme du vortex optique, la cellule de rubidium et les méthodes de détection et d'analyse du faisceau bleu. Nous décrivons également les conditions physiques permettant d'obtenir une conversion optimale. Dans un deuxième temps nous introduisons des variantes à ce montage qui permettent sans modifications trop importantes de réaliser la conversion de plusieurs vortex optiques.

# 3.2 Montage expérimental pour la conversion d'un vortex optique

Le montage expérimental complet de la conversion d'un vortex optique est représenté sur la figure (3.1). Il peut être séparé en trois parties. La première partie comprend la cellule de rubidium permettant de réaliser la conversion de vortex. La deuxième permet la mise en forme des lasers en particulier la création du vortex optique. Enfin la troisème partie permet l'analyse complète du faisceau bleu émis. Nous détaillons chacune d'elle ci-dessous.

#### 3.2.1 Cellule de rubidium

La cellule de rubidium est une cellule en verre de longueur 10 cm et de diamètre 2,5 cm contenant les deux isotopes naturels du rubidium dans leur proportion respective : 72% de  ${}^{85}R_b$  et 28% de  ${}^{87}R_b$ . La cellule est chauffée pour augmenter le nombre d'atomes en phase gazeuse qui pourront participer au processus. Pour cela elle est entourée d'une armature métallique en inox et de forme parallélépipédique. Cette armature est chauffée par deux résistances chauffantes puis placée dans un bloc de béton cellulaire pour l'isoler de l'environnement extérieur et éviter les pertes thermiques. Une image est présentée sur la figure (3.2).



FIGURE 3.1 - Sch'ema du montage de la conversion d'un vortex optique

Un thermostat permet de choisir et asservir la température. La température maximale accessible est 150 °C. Deux trous creusés dans le béton de part et d'autre de la cellule permettent de laisser passer les faisceaux lasers. Deux ouvertures latérales permettent d'observer la fluorescence émise par les atomes dans la cellule. On peut voir ces ouvertures et la fluorescence bleue sur la figure (3.2). Le verre de la cellule absorbe le rayonnement infrarouge à 5230 nm nous ne pouvons pas l'observer.



**FIGURE 3.2** – Cellule de rubidium et son four entourés de béton cellulaire (la partie haute du bloc de béton a été ici retirée). La lumière bleue observée correspond à la fluorescence des atomes à 420 nm.

**Evaluation de la densité atomique** Nous évaluons la densité atomique dans la cellule en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P = nk_BT \tag{3.1}$$

où P est la pression du gaz, n la densité atomique,  $k_B$  la constante de Boltzmann et T la température. Dans la cellule le rubidium est à l'équilibre solide-vapeur donc sa pression est égale à la pression de vapeur saturante  $P_v$ .

 $P_v$  est obtenue par la relation tirée de [118] :

$$\log_{10}(P_v) = 7,193 - \frac{4040}{T} \tag{3.2}$$

avec  $P_v$  exprimée en Torr et T en Kelvin. Nous avons tracé la densité en fonction de la température sur la figure (3.3). A T=130 °C la densité atomique est ainsi de  $3.5 \times 10^{-13}$ 



FIGURE 3.3 – Densité de rubidium dans la cellule en fonction de la température

at/cm<sup>3</sup>. Nous ne dépassons la valeur de 140 °C car à partir de cette température se produisent

des réactions chimiques entre le verre et le rubidium qui endommagent la cellule. Dans la cellule la densité de distribution de vitesse des atomes  $\rho(v)$  suit la loi de Maxwell-Bolzmann :

$$\rho(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-mv^2}{2k_B T}}$$
(3.3)

où *m* est la masse d'un atome, *T* la température du gaz et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Cette distribution a une largeur de  $\Delta v = 2\sqrt{2ln2}\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$ . A T=130 °C,  $\Delta v \approx 467 \text{ m s}^{-1}$  qui se traduit par un élargissement Doppler des raies atomiques de  $\Delta \nu = \frac{\Delta v}{\lambda}$  de l'ordre de 600 MHz à 780 nm. On retrouvera cet élargissement sur le spectre d'émission du bleu que nous verrons dans la section (3.3.3).

#### 3.2.2 Façonnage du laser à 776 nm en un vortex

La première étape du montage expérimental est la création du vortex optique à 776 nm. Cette partie est représentée agrandie sur la figure (3.4). Nous transformons un faiseau gaussien en un faisceau Laguerre-Gauss à l'aide d'un SLM, Hamamatsu X8267 selon la méthode décrite dans la partie (1.5.1). Le laser utilisé est un laser TiSa (MBR-110) de Coherent pompé par un laser Millennia à 532 nm avec une puissance de 10 W. Ce laser est accordable entre 700 et 900 nm et délivre environ 1 W de puissance vers 776 nm avec une largeur de raie de 1 MHz. Sa fréquence est mesurée à l'aide d'un lambda-mètre Burleigh WA-1100 de résolution 30 MHz.

Le faisceau qui sort du MBR-110 est proche d'un faisceau gaussien (TEM<sub>00</sub>), avec un facteur de qualité M<sup>2</sup> proche de 1. La taille du faisceau de sortie, de l'ordre de 0,7 mm, est ensuite agrandie car elle est trop petite par rapport à la zone active du SLM (2 cm par 2 cm). Pour cela nous avons utilisé un télescope de grandissement 6 (composé d'une lentille de focale  $f_1$ =-50 mm et d'une lentille de focale  $f_2$ =300 mm). Au col son nouveau waist est ainsi de 4,2 mm.



**FIGURE 3.4** – Schéma du montage créant le vortex optique d'OAM  $\ell$ .

Un système de deux miroirs permet d'ajuster précisément le centrage du faisceau sur le SLM. Après réflexion sur le SLM une lame séparatrice  $L_2$  permet de préveler une partie du faisceau (4%) afin de contrôler sa forme et son homogénéité à l'aide d'une caméra CCD et d'une lentille de focale  $f_3=500$  mm. Quelques exemples sont montrés sur la figure (3.5a). Ce montage permet également de vérifier l'OAM du faisceau par la méthode de la lentille tiltée.

La taille du vortex est adaptée à l'aide d'une lentille de focale  $f_5$ =500 mm et celui-ci est alors envoyé dans la cellule de rubidium. Comme la lentille de visualisation  $f_3$  a une focale identique à la lentille de focalisation  $f_5$  nous pouvons directement mesurer le nouveau rayon  $R_{\ell}$  du faisceau au niveau de la cellule. On rappelle que le rayon du mode LG généré varie linéairement avec  $\ell : R_{\ell} = R_0(1 + \alpha |\ell|)$ . Dans la cellule nos mesures (présentées sur la figure (3.5b)) donnent :

$$\begin{cases} R_0 = 0,045 \pm 0,004 \text{ mm et } \alpha = 0,51 \pm 0,05 \text{ pour } \ell > 0 \\ R_0 = 0,049 \pm 0,002 \text{ mm et } \alpha = 0,45 \pm 0,02 \text{ pour } \ell < 0 \end{cases}$$
(3.4)

En particulier ce la donne  $R_{\ell=1} \approx 0,07$  mm et  $R_{\ell=30} \approx 0,7$  mm. Les zones de Rayleigh correspondantes s'expriment en fonction de  $R_{\ell}$  sous la forme :

$$z_{R_2} = \frac{2\pi}{|\ell|\lambda_2} R_\ell^2 \tag{3.5}$$

soit  $z_{R_{2,\ell=1}} \approx 4$  cm et  $z_{R_{2,\ell=30}} \approx 14$  cm.



**FIGURE 3.5** – (a) Quelques images du faisceau LG obtenu et (b) variation du rayon avec  $\ell$  dans la cellule

L'intensité du mode LG est :

$$I_2 = \frac{P_2}{\pi w_2^2 |\ell|!} \left(\frac{2r^2}{w_2^2}\right)^{|\ell|} e^{\frac{-2r^2}{w_2^2}} \approx I_{M_2} \left(\frac{r^2}{R_\ell^2}\right)^{|\ell|} e^{|\ell|(1-\frac{r^2}{R_\ell^2})}$$
(3.6)

avec l'intensité maximale  $I_{M_2} = \frac{P_2}{\pi R_{\ell}^2} \sqrt{\frac{|\ell|}{2\pi}}.$ 

#### 3.2.3 Laser à 780 nm et mise en place de la conversion

Le laser à 780 nm est un laser commercial (TAPro) de Toptica. Il s'agit d'une diode laser affinée en cavité puis amplifiée. Il délivre environ 1 W à 780 nm avec une largeur de raie de 1 MHz et son balayage couvre les quatres raies du rubidium (environ 10 GHz). Sa fréquence est mesurée à l'aide d'un montage d'absorption saturée (cf. annexe (A)) indiqué en pointillé sur la figure (3.1). Le faisceau de sortie ayant un mauvais facteur M<sup>2</sup> nous l'avons épuré dans une fibre monomode pour obtenir un faisceau gaussien. En sortie de fibre le faisceau est collimaté, son waist est de 1,2 mm. Sa taille est adaptée pour que sa longueur de Rayleigh soit supérieure à la longueur de la cellule et que son waist soit proche de la taille du rayon du mode LG pour  $\ell \approx 5$ . Pour cela nous utilisons une lentille de focale  $f_4=1000$  mm. Son nouveau waist dans la cellule est de  $w_1 = 0,17$  mm, ce qui correspond à une zone de Rayleigh  $z_{R_1}$  de 12 cm.

Son intensité s'écrit :

$$I_1 = \frac{2P_1}{\pi w_1^2} e^{\frac{-2r^2}{w_1^2}}$$
(3.7)

Pour réaliser le mélange à quatre ondes le faisceau à 780 nm est alors superposé au vortex optique de façon co-propageante à l'aide d'un cube séparateur de polarisation  $(PBS_1)$  et de deux lames demi-ondes. La superposition des faisceaux est effectuée à la caméra CCD avec une précision de l'odre de 2 mrad.

On place les cols des faisceaux à proximité de la sortie de la cellule (environ 2 cm) pour éviter que la lumière bleue émise ne soit trop réabsorbée par le rubidium.

Pour obtenir une transition  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  efficace les atomes doivent être éclairés par deux lasers de polarisation circulaire de même sens [2][127]. Pour réaliser cette configuration il faut déjà des faisceaux de même polarisation. Pour cela un autre cube séparateur de polarisation  $(PBS_2)$  et une lame  $\lambda/2$  à 45° sont ajoutés au montage. A la sortie de  $PBS_2$  les faisceaux lumineux ont la même polarisation linéaire. Cette polarisation est finalement transformée en polarisation circulaire droite  $\sigma^+$  par une lame  $\lambda/4$  placée à l'entrée de la cellule.

Un puissance-mètre (Thorlabs S121C) est installé sur l'autre voie du cube  $PBS_2$  pour



FIGURE 3.6 – Puissance du LG rouge mesurée à l'entrée de la cellule en fonction de  $\ell$ 

mesurer la puissance de chaque faisceau dans la cellule. Au final nous obtenons une puissance maximale d'environ  $200 \pm 6$  mW pour le faisceau gaussien et d'environ  $100 \pm 3$  mW pour le faisceau LG en entrée de la cellule. Comme l'efficacité du SLM diminue lorsque  $\ell$  augmente, nous avons mesuré la puissance du faisceau LG en fonction de  $\ell$  à l'entrée de la cellule. Ces

mesures sont données sur la figure (3.6) et montrent une diminution d'environ 20% entre  $\ell=1$  et  $\ell=30$  et un écart de 3% au maximum entre les valeurs positives et négatives de  $\ell$ . Nous pouvons évaluer la perte de puissance avec  $\ell$  en faisant une régression exponentielle du type  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_0 e^{-\ell/\bar{\ell}}$  où  $\bar{\ell}$  est la valeur de  $\ell$  pour laquelle  $\mathcal{P}_2 = \frac{\mathcal{P}_0}{e}$ . Dans les deux cas nous trouvons  $\bar{\ell} \approx 165$ , une perte de puissance de 50% est alors obtenue pour  $\ell = \ln(2)\bar{\ell} \approx 114$ . Cette valeur est bien plus grande que la plage de  $\ell$  sur laquelle nous allons travailler. Nous considérerons ainsi en première approximation que  $\mathcal{P}_2$  est constante avec  $\ell$ .

#### 3.2.4 Détections du vortex bleu

Pour caractériser précisément la conversion de vortex nous avons mis en place des outils de diagnostic pour connaitre toutes les propriétés du faisceau bleu émis dans l'axe de la cellule par le mélange à quatre ondes. Plus précisément, nous avons accès à sa puissance, son spectre en fonction de la fréquence des lasers incidents, sa forme, son OAM ainsi que sa propagation. Ces outils sont disposés en plusieurs branches de détection, ceci est illustré par la figure (3.7).



FIGURE 3.7 – Schéma des différentes branches de détection

**Puissance, efficacité de conversion** Une première branche, notée a) sur la figure (3.7) utilise un prisme à 60° pour séparer spatialement le faisceau bleu des faisceaux rouges incidents. Le faisceau bleu est détecté par une photodiode amplifiée (Thorlabs A36A-EC) placée derrière le prisme. Un filtre interférentiel (Thorlabs FESH 700) est ajouté devant la photodiode pour éliminer toute lumière autre que bleue. Sa transmission est de 96, 5% à 420 nm.

Cette branche permet ainsi de mesurer la puissance du faisceau bleu et d'avoir accès à son spectre lorsque la fréquence des lasers rouges est modifiée. Le spectre est obtenu en fixant la fréquence du laser à 776 nm et en balayant le laser à 780 nm sur les quatres raies d'aborption du rubidium conjointement à l'enregistrement de l'absorption saturée (cf. figure (3.7)). Le spectre est enregistré à chaque fois que l'on modifie la fréquence du laser à 776 nm. Ceci est

important pour connaître le maximum d'émission en fonction des fréquences relatives des deux lasers pompes.

**Forme** Une deuxième branche, notée b) sur la figure (3.7), récolte le faisceau bleu réfléchi sur la face d'entrée du prisme et analyse son intensité à l'aide d'une caméra CCD (Beamage). On peut ainsi enregistrer la forme du mode généré pour une analyse ultérieure.

**Phase** La voie c) permet l'analyse de la phase du faisceau bleu généré. Elle comporte une lentille de focale  $f_T$ =500 mm fixée sur un support tournant gradué et également une caméra CCD (Beamage). Elle permet de mesurer l'OAM du faisceau bleu par la méthode de la lentille tiltée décrite dans la section (1.5.2). Sur la caméra est placé un filtre interférentiel (Thorlabs FB420-10) dont la transmission est centrée à 420 nm pour une bande passante de 10 nm.

**Propagation** Enfin une quatrième branche d) envoie la faisceau réfléchi par le prisme sur un banc gradué muni d'une translation et sur laquelle est montée une caméra CCD. Un filtre (Thorlabs FB420-10) est également placé devant la caméra. Ceci permet d'avoir accés à la propagation du faisceau bleu en sortie de cellule. L'ajout d'une lentille de focale  $f_P=200$ mm permet d'avoir accès à la propagation de part et d'autre du point focal du faisceau et ainsi de reconstruire sa propagation<sup>1</sup>.

# 3.3 Conditions retenues pour l'expérience

Nous avons fait une étude pour déterminer les paramètres de l'expérience permettant d'obtenir le maximum de puissance bleue émise. Pour cela nous pouvons faire varier la température de la cellule de rubidium (c'est à dire la densité atomique), la puissance de chaque laser et leur fréquence.

#### 3.3.1 Température de la vapeur

Nous commençons par observer l'influence de la température. Pour cela nous avons mesuré la puissance du faisceau bleu  $\mathcal{P}_b$  à la photodiode pour  $\ell = 4$  à différentes températures. La fréquence du laser à 776 nm était à 1.5 GHz en deçà de la transition  $5P_{3/2} - 5D_{5/2}$ . Nous avons veillé à ne pas dépassé la température de 140 °C.

La courbe obtenue est représentée sur la figure (3.8). Comme attendu nous voyons que la puissance de bleu augmente avec la température. Elle est presque nulle en dessous de 100 °C. Pour expliquer ce comportement nous avons fait un ajustement sur les données du type  $\mathcal{P}_b = A \times n$ , avec n la densité donnée par les expressions (3.1) et (3.2). Il est représenté en rouge sur la figure (3.8). On trouve un bon accord avec les données expérimentales pour A de l'odre de  $1.10^{-18}$ , la puissance bleue est proportionnelle à la densité atomique n.

Le maximum de puissance de bleu est obtenu pour 140 °C néanmoins dans la suite des expériences nous nous plaçons à 130 °C par sécurité.

<sup>1.</sup> On rappelle qu'en cas de propagation hyperbolique, ce voisinage permet de déterminer le facteur de qualité du faisceau  $M^2$ .



**FIGURE 3.8** – Puissance du faisceau bleu émis pour différentes température de la cellule pour  $\ell = 4$  (points bleus) et ajustement du type  $\mathcal{P}_b = A \times n$  (ligne rouge)

#### 3.3.2 Puissance des lasers

Dans une deuxième série de mesures nous étudions l'influence de la puissance des deux lasers de pompes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . Pour cela nous fixons une des deux puissances à son maximum et faisons varier l'autre.

Le cas où la puissance du faisceau gaussien  $\mathcal{P}_1$  est fixée est représentée sur la figure (3.9a). On observe que la puissance bleue augmente linéairement avec  $\mathcal{P}_2$  (on a pris  $\ell = 4$  ici) à



**FIGURE 3.9** – Puissance bleue émise pour  $\ell = 4$  lorsqu'on fixe la puissance du faisceau gaussien et fait varier celle du LG (a) et inversement (b)

partir d'un seuil situé un peu avant 60 mW.

Le cas inverse est représenté sur la figure (3.9b). On observe également une variation linéaire de la puissance bleue avec la puissance du faisceau gaussien jusqu'à  $\mathcal{P}_1 \approx 150$  mW mais sans valeur seuil. Au delà une saturation apparait.

Le comportement linéaire s'explique dans le cas du modèle de gain faible. En effet nous avons vu dans la section (2.4) que dans le cas du régime de gain faible du mélange à quatre ondes
la puissance bleue est donnée par l'expression (2.37). Ici  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = 4$  soit :

$$\mathcal{P}_b = \kappa z^2 \frac{2\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2}{\pi w_1^2} \frac{1}{(1 + \frac{w_2^2}{w_1^2})^5}$$
(3.8)

A waists  $w_1$  et  $w_2$  constants et pour  $\mathcal{P}_1$  (respectivement  $\mathcal{P}_2$ ) constante elle est bien proportionnelle à  $\mathcal{P}_2$  (respectivement  $\mathcal{P}_1$ ). Cependant le modèle de gain faible ne permet pas d'expliquer le seuil observé sur la courbe (3.9a). Nous pouvons intuiter qu'il est dû au fait qu'il faut suffisamment d'ASE pour initier le mélange à quatre ondes.

Dans la suite des expériences nous nous placerons au maximum de puissance bleue tout en restant dans la partie linéaire de ces deux courbes afin d'éviter la saturation c'est-à-dire que  $\mathcal{P}_1 \approx 130 \text{ mW}$  et  $\mathcal{P}_2 \approx 100 \text{ mW}$ .

**Comparaison avec les autres expériences** Pour evaluer l'efficacité de notre conversion nous pouvons la comparer aux expériences antérieures. Deux publications en particulier permettent de faire cette comparaison, il s'agit de celle d' A. Vernier et al. [127] et de J. F. Sell et al. [114]. Dans les deux cas les auteurs ont mesuré l'efficacité  $\eta = \frac{\mathcal{P}_b}{\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2}$  pour une température proche de 130°C. Cependant leurs expériences utilisaient des faisceaux gaussiens. Dans ce cas la puissance bleue est donnée par l'expression (2.26) :

$$\mathcal{P}_{b} = \kappa z^{2} \frac{2}{\pi} \frac{\mathcal{P}_{1} \mathcal{P}_{2}}{(w_{1}^{2} + w_{2}^{2})}$$
(3.9)

Pour prendre en compte les différences de configuration, en particulier les tailles des faisceaux, il faut comparer les valeurs du paramètre  $\xi = \frac{\eta(w_1^2 + w_2^2)}{z^2}$  pour les cas où les faisceaux pompes sont gaussiens et  $\xi = \frac{\eta(w_1^2 + w_2^2)^5}{w_1^8 z^2}$  dans notre cas. On prendra z égal à la longueur de la cellule L. Si elle n'est pas indiquée dans l'article l'efficacité  $\eta$  est déterminée par régression linéaire sur les données. Nous présentons ces valeurs dans le tableau (3.1). On observe que

	Taille (mm)	$\mathcal{P}_{1,2} \ (\mathrm{mm})$	$\eta \ (\mathrm{mW^{-1}})$	L (cm)	ξ
Vernier et al.	$0,06 \times 0,1$	$\approx 20$	$2,8.10^{-3}$	$^{7,5}$	$6, 8.10^{-9}$
Sell et al.	$0, 1 \times 0, 1$	$300 \times 250$	$1,0.10^{-4}$	5	$8,0.10^{-10}$
Nous	$0,17 \times 0,1$	$90 \times 190$	$4, 6.10^{-6}$	10	$5, 8.10^{-11}$

**Tableau 3.1** – Comparaison de l'efficacité de conversion obtenue dans plusieurs expériences

dans les trois expériences  $\xi$  n'est pas du même ordre de grandeur. Les différences constatées peuvent être dues à la différence de température des expériences : 120 °C pour Vernier et al., 135 °C pour J. Sell et al. et 130 °C pour nous; ou aux conditions de peuplement du niveau 5D qui peuvent varier d'une expérience à l'autre (cf. section (3.3.3)). Ces conditions ne sont pas prises en compte dans ce modèle où on considère un peuplement identique du niveau 5D.

#### 3.3.3 Fréquence des lasers : ajustement de la transition Raman

Une troisième série de mesures a permis d'étudier l'influence de la fréquence relative des deux lasers pompes sur la puissance bleu émise c'est-à-dire l'influence des désaccords à la résonance. Pour cela nous avons utilisé la voie de détection a) présentée sur la figure (3.7). Nous avons enregistré le spectre du bleu en balayant la fréquence du laser à 780 nm de part

et d'autre de la résonance et pour plusieurs valeurs de la fréquence du laser à 776 nm. On note  $\delta_1$  le désaccord à la résonance du laser à 780 nm, défini comme l'écart en fréquence par rapport à la transition hyperfine <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 5P_{3/2}, F' = 4$ ). On note respectivement  $\delta_2$  celui du laser à 776 nm défini par rapport à la transition hyperfine <sup>85</sup>Rb ( $5P_{3/2}, F' = 4 \rightarrow 5D_{5/2}, F'' = 5$ ).

Nous avons d'abord fixé  $\delta_2$ , mesuré grâce au lambda-mètre. Ensuite nous avons fait varier  $\delta_1$  sur typiquement 6 GHz et nous avons enregistré simultanément le spectre d'absorption saturée et le spectre du faisceau bleu émis. La figure (3.10) montre de tels spectres obtenus pour  $\ell = 4$ .

Intéressons-nous d'abord au cas  $\delta_2 < 0$ , partie gauche de la figure (3.10). On observe que



**FIGURE 3.10** – Spectres du faisceau bleu pour différentes valeurs des désaccords  $\delta_1$  et  $\delta_2$  des lasers pour  $\ell = 4$ 

lorsque  $|\delta_2|$  augmente la résonance (à une ou deux composantes) se déplace vers  $\delta_1 > 0$ . L'optimum d'émision du bleu est obtenu à  $\delta_1 = 1,5$  GHz (courbe bleu foncé de la figure (3.10)). Cet optimum correspond à  $\delta_2 \approx -1,9$  GHz.

Dans une approche spectroscopique simple on s'attendrait à avoir  $\delta_1 = -\delta_2$ . Pour expliquer l'écart à cette condition nous pouvons évoquer les hypothèses suivantes :

(i) une mauvaise calibration du lambda-mètre

- (ii) un déplacement des résonances à cause du light-shift
- (iii) un effet de lentille Kerr comme évoqué dans [127]

Notre propos n'est pas d'interpréter en détails ces résonances, ce travail a déjà été fait en partie dans la thèse de A. Vernier [126] et par G. Morigi et al. [89], mais de retrouver expérimentalement les conditions qui optimisent l'émission de bleu dans le processus de mélange à quatre ondes. On retrouve en effet une condition similaire à celle trouvée par A. Vernier comme on peut le voir sur la figure (3.11). Désormais dans les expériences suivantes on retiendra le point de fonctionnement  $\delta_1 = 1,5$  GHz.

Nous nous sommes aussi intéressés au cas  $\delta_2 > 0$ . Les spectres obtenus sont présentés sur



FIGURE 3.11 – Spectre du faisceau bleu bleu tirés de Vernier et al. [127]

la partie droite de la figure (3.10). Les résonances observées correspondent à la transition <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}, F'$ ) pour laquelle il conviendrait de redéfinir le désaccord du laser à 780 nm, appelons-le  $\delta'_1$ . A cause de l'écart hyperfin entre les niveaux <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 2$ ) et <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 3$ ),  $\delta'_1 = \delta_1 - 3$  GHz. Comme cette transition <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}, F' \rightarrow 5D_{5/2}, F''$ ) est moins efficace que la transition <sup>85</sup>Rb ( $5S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 5P_{3/2}, F' \rightarrow 5D_{5/2}, F''$ ) nous avons choisi de faire les expériences sur cette dernière.

#### Transfert de population du niveau 5S vers le niveau 5D par processus Raman

Pour comprendre la valeur du désaccord à 1,5 GHz il faut considérer les conditions qui permettent un peuplement efficace du niveau  $5D_{5/2}$  puisque la quantité de lumière bleue en dépend.

Avec un tel désaccord (grand devant la largeur du niveau  $5P_{3/2}$ ,  $\Gamma_{5P_{3/2}} \approx 6$ MHz) on réalise en fait une transition à deux photons de type Raman : ce qui est illustré sur la figure (3.12) pour le cas de trois niveaux quelconques a, b et c. On a  $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{ab}$  et  $\delta_2 = \omega_1 - \omega_{bc}$ .

Nous rappelons, pour fixer les idées, les principaux résultats de la transition Raman. Dans le cas où  $\delta_1 = -\delta_2$  (par la suite on nomme ce désaccord  $\delta$ ), on peut montrer [72] que le système possède trois états habillés dont l'un correspond à l'état intermédiaire  $|b\rangle$ . Comme les detunings  $\delta_{1,2}$  sont grands il n'y a pas de résonances à un photon et l'état  $|b\rangle$  est peu peuplé. Dans ce cas l'état  $|b\rangle$  peut être "adiabatiquement" éliminé des équations de Bloch



FIGURE 3.12 – Principe de la transition Raman dite "en échelle"

et celles-ci décrivent alors un système à deux niveaux de pulsation de Rabi effective  $\Omega_{eff}$  valant :

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\delta} \tag{3.10}$$

où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont les pulsations de Rabi associées aux transitions 1 et 2. Les lasers réalisent une transition à deux photons qui fait passer les atomes entre les états  $|a\rangle$  et  $|c\rangle$  sans peupler l'état  $|b\rangle$  qui ne produit ainsi pas de pertes par émission spontanée. Une telle transition est plus efficace qu'une transition doublement résonnante. En effet le cas doublement résonant conduit à un partage des populations sur les trois niveaux, soit typiquement  $\frac{1}{3}$  (si les transitions sont équiprobables et saturées de la même façon) alors que l'on peut obtenir jusqu'à  $\frac{1}{2}$  dans le cas non résonnant. Ceci explique pourquoi on observe expérimentalement le maximum de bleu décalé de la résonnance atomique.

Pour déterminer la pulsation de Rabi effective commençons par déterminer les pulsations de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

On rappelle que dans la description de l'atome à deux niveaux soumis à un las er d'intensité  ${\cal I}$  , la pulsation de Rabi vaut

$$\Omega = \sqrt{\frac{I}{2I_{sat}}}\Gamma$$
(3.11)

où Γ est la durée de vie du niveau excité et  $I_{sat}$  l'intensité de saturation de la transition (Γ et  $I_{sat}$  sont données dans l'annexe (A) pour quelques transitions).

Pour le faisceau gaussien à 780 nm  $\Omega_1$  vaut :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_1}{\pi w_1^2 I_{sat_1}}} e^{\frac{-r^2}{w_1^2}} = 1,55e^{\frac{-r^2}{w_1^2}} \text{ GHz}$$
(3.12)

La population du niveau  $5P_{3/2}$  (dans l'état stationnaire) est égale à :

$$p_1 = \frac{(\Omega_1 / \Gamma_{5P_{3/2}})^2}{1 + 4(\delta_1 / \Gamma_{5P_{3/2}})^2 + 2(\Omega_1 / \Gamma_{5P_{3/2}})^2}$$
(3.13)

Avec  $\delta_1 = 1,5$  GHz, au centre du faisceau  $p_1$  est de l'ordre de 17% ce qui est non négligeable. En réalité ce n'est pas cette valeur qui est pertinente pour notre expérience : il faut considérer la valeur de  $\Omega_1$  là où le faisceau LG agit c'est-à-dire en  $r = R_{\ell}$  (rayon du maximum d'intensité).

Dans ce cas on a :

$$\Omega_1 = 1,55e^{\frac{-R_{\ell}^2}{w_1^2}} \text{ GHz}$$
(3.14)

soit une population  $p_1 = 2,5\%$  pour  $\ell = 5$  et  $p_1 = 0,07\%$  pour  $\ell = 10$ . Ces valeurs faibles nous permettent de conclure que nous sommes bien dans les conditions de la transition Raman au delà de  $\ell = 5$ .

La pulsation de Rabi  $\Omega_2$  associée au laser à 776 nm est égale à :

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{I_{M_2}}{2I_{sat_2}}} \left(\frac{r^2}{R_\ell^2}\right)^{\frac{|\ell|}{2}} e^{\frac{|\ell|}{2}(1-\frac{r^2}{R_\ell^2})}$$
(3.15)

avec  $I_{M_2} = \frac{\mathcal{P}_2}{\pi R_\ell^2} \sqrt{\frac{|\ell|}{2\pi}}$  l'intensité maximale. Dans ce cadre on obtient alors les valeurs de  $\Omega_{eff}$  pour  $\ell = 5$  et  $\ell = 10$  dans le tableau (3.2) en considérant la valeur maximale de  $\Omega_2$ . On peut comparer les valeurs de  $\Omega_{eff}$  à la durée de vie du niveau  $5D_{5/2}$  égale à 0,43 MHz.

Ces valeurs montrent que  $\frac{\Omega_{eff}}{\Gamma_{5D}} \gg 1$  ce qui donne une population  $p_2$  du niveau  $5D_{5/2}$  égale

l	$\Omega_1 (\text{GHz})$	$\Omega_2 (\text{GHz})$	$\Omega_{eff}$ (GHz)	$\Omega_{eff}/\Gamma_{5D}$
5	0,6	0,28	0,06	140
10	0,1	0,2	0,007	16

**Tableau 3.2** – Valeurs des pulsations de Rabi  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_{eff}$  pour  $\ell = 5$  et  $\ell = 10$ 

à :

$$p_2 = \frac{(\Omega_{eff} / \Gamma_{5D_{5/2}})^2}{1 + 2(\Omega_{eff} / \Gamma_{5D_{5/2}})^2} \approx \frac{1}{2}$$
(3.16)

On a donc les conditions de transfert  $5S_{1/2} \rightarrow 5D_{5/2}$  optimales.

En conséquence le signal bleu attendu, qui est proportionnel à la population du niveau 5D, sera proportionnel à  $I_1I_2$ . C'est en effet ce que nous avons observé sur la figure (3.9).

## 3.4 Variantes du montage

#### 3.4.1 Vers de plus grandes valeurs d'OAM

Une première variante a pour but d'améliorer le recouvrement du faisceau gaussien et du mode LG pour de très grandes valeurs de  $\ell$  (> 30). On rappelle que le rayon du mode LG augmente avec  $\ell$  donc pour  $\ell$  > 30 il devient bien plus grand que le faisceau gaussien. D'où l'idée naturelle d'agrandir la taille du faisceau gaussien. Pour cela la lentille  $f_4$  du montage (3.1) est remplacée par un télescope de grandissement 2. Ce télescope est constitué d'une lentille divergente de focale -50 mm et d'une lentille convergente de focale 100 mm espacées de 5 cm. Le waist du faisceau gaussien dans la cellule est alors de  $w'_1 = 1, 27 \pm 0, 12$  mm soit 7,5 fois plus grand que dans l' expérience précédente. La longueur de Rayleigh correspondante est de 6,5 m. Ce waist plus grand permet un meilleur recouvrement avec le faisceau LG pour les grandes valeurs de  $\ell$  comme illustré sur la figure (3.13b) pour le cas  $\ell = 10$ .

L'intensité du gaussien est 7,5<sup>2</sup> plus faible donc  $\Omega_1$  sera 7,5 fois plus faible. Il en résulte que  $\Omega_{eff}$  est également 7,5 fois plus faible. La population du niveau  $5D_{5/2}$ , expression (3.16), vaut donc 0,45 pour  $\ell = 10$  contre 0,5 auparavant ce qui est très proche. Globalement la transition Raman est toujours vérifiée et réalise le transfert d'environ 50% de population vers le niveau  $5D_{5/2}$ .



**FIGURE 3.13** – Recouvrement du faisceau gaussien et du  $LG_0^{10}$  (a) pour  $w_1=0,17$  mm et (b)  $w'_1=1,27$  mm

Pour faciliter l'analyse et la mesure des grandes valeurs d'OAM une autre voie de détection est également ajoutée. En effet la méthode de la lentille tiltée devenant moins pertinente pour de grandes valeurs de  $\ell$  (il devient difficile de mesurer le nombre de franges), on utilise alors la méthode de l'interféromètre de Mach-Zehnder avec un prisme de Dove (DMZ). Cette méthode a été décrite dans la section (1.5.2). Pour cela un miroir escamotable est installé en sortie du prisme pour récupérer le faisceau bleu principal et l'envoyer dans l'interféromètre DMZ. Cette voie est présentée sur le schéma (3.14) (entourée en pointillé), nous la nommons e) pour la suite.

Cette configuration est utilisée dans la deuxième partie du chapitre (4).



**FIGURE 3.14** – Détections du faisceau bleu pour de grandes valeurs de  $\ell$ 

#### 3.4.2 Conversion d'une paire de vortex optiques

Cette autre variante permet la conversion d'une paire de vortex optiques coaxiaux. Le montage correspondant est représenté sur la figure (3.16). Nous ajoutons au montage optique une lame de phase en spirale (SPP) sur le faisceau gaussien à 780 nm. Cette lame (VPP-m1550) a été décrite dans la section (1.5.3), elle permet de générer des faisceaux LG d'OAM de 2 à 16. Nous avons choisi la valeur égale à +4. Elle est placée en sortie de la fibre après

deux miroirs qui permettent d'ajuster précisément le centrage sur celle-ci. Le faisceau LG à 780 nm ainsi obtenu est alors superposé au faisceau LG à 776 nm qui reste inchangé. La superposition précise est obtenue à 2 mrad près. La taille du LG à 780 nm est modifiée à l'aide d'une lentille de focale 500 mm afin que son rayon  $R_1$  corresponde au rayon du LG à 776 nm,  $R_{\ell}$ , pour  $\ell_2 = \pm 6$  c'est-à-dire  $R_1 = R_{\ell=\pm 6} = 0, 18$  mm. Les images des faisceaux dans la cellule sont données sur la figure (3.15). A l'entrée de la cellule la puissance du faisceau à 780 nm est de 130 mW, son intensité  $I_1$  est égale à

$$I_1 = I_{M_1} \left(\frac{r^2}{R_1^2}\right)^{|\ell_1|} e^{|\ell_1|(1-\frac{r^2}{R_1^2})}$$
(3.17)

avec l'intensité maximale  $I_{M_1} = \frac{P_1}{\pi R_2^1} \sqrt{\frac{|\ell_1|}{2\pi}} \approx \! 1 \ {\rm W \, cm^{-2}}$ 



**FIGURE 3.15** – Images des faisceaux LG au point de superposition (fausses couleurs) : (a) 780 nm, (b) 776 nm  $\ell = 6$ , (c) superposition des deux

Le faisceau à 776 nm a une puissance d'environ 100 mW. Son intensité  $I_2$  s'écrit

$$I_2 = I_{M_2} \left(\frac{r^2}{R_\ell^2}\right)^{|\ell_2|} e^{|\ell_2|(1-\frac{r^2}{R_\ell^2})}$$
(3.18)

avec l'intensité maximale  $I_{M_2} = \frac{P_2}{\pi R_{\ell}^2} \sqrt{\frac{|\ell_2|}{2\pi}}$ . Elle vaut également environ 1 W cm<sup>-2</sup> pour  $\ell_2 = 6$ . Cette conversion est étudiée dans le chapitre (5).

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit le montage expérimental et deux variantes que nous avons utilisés pour réaliser la conversion d'un ou de plusieurs vortex optiques. Les points sensibles de ce montage sont : (i) la superposition des faisceaux, (ii) l'adaptation de leur taille pour obtenir un recouvrement optimal, (iii) un choix des longueurs de Rayleigh pour qu'elles soient compatibles entre elles et compatibles avec la longueur de la cellule (par compatible on entend du même ordre de grandeur).

Le montage comprend plusieurs points forts : il permet de tester en temps réel une grande gamme de valeurs d'OAM grâce au SLM et il permet d'analyser toutes les propriétés du faisceau bleu généré grâce à ses multiples voies de détection (cinq).

Une étude des différents paramètres expérimentaux (température, puissances, fréquences des lasers) nous a permis de choisir un point de fonctionnement efficace, soit :

$$-$$
 T=130 °C

$$-$$
 n=3.5 × 10<sup>13</sup> at/cm<sup>3</sup>



FIGURE 3.16 - Schéma du montage de la conversion d'une paire de vortex optiques

- $\delta$ =1.5 GHz
- $\mathcal{P}_1 = 130 \text{ mW}$
- $\mathcal{P}_2 = 100 \text{ mW}$

Dans les chapitres qui suivent on se placera à ce point de fonctionnement.

# Chapitre 4

# Conversion d'un vortex optique de grande hélicité

### Sommaire

4.1 In	troduction	3
4.2 C	onversion de vortex optique de grande hélicité par mélange à	
$\mathbf{quatre\ ondes}$		
4.2.	$1  {\rm Forme \ et \ taille \ du \ vortex \ généré : lien \ avec \ le \ modèle \ de \ gain \ faible } 8$	34
4.2.	2 Efficacité du mélange à quatre ondes en fonction de $\ell$ 8	57
4.2.	3 Propagation et pureté du mode généré	)1
4.2.	4 OAM du vortex généré	94
4.2.	5 Règles de sélection du transfert d'OAM	)6
4.2.	6 Mode bleu le plus probable dans le cadre du critère de Boyd 10	00
4.2.	7 Au-delà du critère de Boyd	)3
4.2.	8 Conclusion	)5
4.3 A	ugmentation de l'hélicité transférée	9
4.3.	1 Motivation	9
4.3.	2 Transfert de l'OAM 10	9
4.3.	3 Efficacité du processus en fonction de $\ell$	2
4.3.	4 Conclusion	4
4.4 Va	ariante : conversion utilisant la transition $5{ m S}_{1/2}-5{ m D}_{3/2}$ 11	4
4.5 C	$onclusion \ldots 11$	6

# 4.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse aux propriétés du faisceau bleu généré par le mélange à quatre ondes lorsqu'un des faisceaux pompes est un vortex à grand OAM  $\ell$ . Pour cela nous utilisons un faisceau gaussien à 780 nm et un mode de Laguerre-Gauss d'hélicité  $\ell$  à 776 nm. Le principe est représenté sur la figure (4.1b). On rappelle le schéma de niveaux en losange que nous utilisons sur la figure (4.1a).

Nous utilisons le montage décrit dans la section (3.2). Pour rappel ce montage permet d'analyser la forme, la puissance et la propagation du faisceau bleu. Nous analysons également la phase du faisceau bleu pour déterminer son OAM.

Avant notre expérience deux groupes ont déjà étudié ce processus de conversion de vortex basé sur la transition  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  [127], [3]. Ils ont montré que, pour de petites valeurs de  $\ell$  ( $\leq$  5), le faisceau bleu généré emportait l'OAM d'entrée et que le faisceau infrarouge était un faisceau gaussien (soit  $\ell_{IR} = 0$ ). L'objectif de nos expériences est de comprendre si ces observations s'étendent à de grandes valeurs de  $\ell$  et de caractériser la conversion. C'est pourquoi nous allons faire varier  $\ell$  sur une grande gamme, typiquement de -30 à +30.



**FIGURE 4.1** – (a) Schéma des niveaux atomiques choisis pour la conversion de vortex, (b) Principe de la conversion d'un vortex optique

Le chapitre est organisé comme suit : Dans une première partie, section (4.2), nous étudions la conversion du vortex à 776 nm de grande hélicité et nous proposons des modèles pour interpréter les résultats obtenus. Dans une deuxième partie, section (4.3), nous montrons comment, en changeant les conditions expérimentales, nous avons réussi à convertir des vortex jusqu'à  $|\ell| = 50$ . Enfin dans la dernière partie, section (4.4), nous nous intéressons à une autre transition du rubidium :  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{3/2}$ .

# 4.2 Conversion de vortex optique de grande hélicité par mélange à quatre ondes

Dans cette section toutes les expériences sont réalisées dans les conditions expérimentales suivantes :

 $-\ell_1 = 0, \, \ell_2 = \ell$ 

$$-w_1 = 0.17 \text{ mm}$$

 $-~\delta$  =1,5 GHz

L'analyse proposée ci-dessous reprend l'ordre de la section (2.4) donc nous commencerons par l'étude de la forme du faisceau bleu, puis de sa puissance et enfin de sa phase.

# 4.2.1 Forme et taille du vortex généré : lien avec le modèle de gain faible

Dans une première série d'expériences nous avons enregistré la forme du faisceau bleu avec la voie de détection b) pour différentes valeurs de  $\ell$ . Des images de l'intensité bleue sont présentées sur la figure (4.2) pour quelques valeurs de  $\ell$ .

Globalement nous observons que le faisceau bleu a une forme d'anneau avec un centre noir,



FIGURE 4.2 – Intensité du faisceau bleu pour différentes valeurs de  $\ell$ 

première preuve que le faisceau est un vortex optique. Pour  $|\ell| \leq 10$  les anneaux sont bien circulaires et homogènes. Pour  $|\ell| > 10$  l'anneau est parfois incomplet ou a un pourtour moins homogène.

Ensuite à partir de ces images nous avons mesuré le rayon des vortex bleus émis en fonction de  $\ell$  (uniquement pour des valeurs positives) et l'avons comparé à celui du vortex rouge incident. Ces mesures vont nous servir à valider le modèle de gain faible (cf. section (2.4.1). Dans ce modèle on s'attend à  $I_b \propto I_1 I_2$  et en conséquence à un rayon du vortex bleu lié à ce produit.

Il existe plusieurs approches pour mesurer le rayon. L'une d'elle consiste à déterminer la position du centre de l'anneau et ensuite ajuster les images par un cercle (fit 2D). Cette méthode, que nous avons testée, marche assez bien pour  $|\ell| < 10$  mais est plus délicate pour  $|\ell| > 10$  quand les anneaux sont incomplets. Nous avons préféré une méthode qui utilise les profils de l'anneau obtenus le long d'une ligne horizontale et verticale, nous la décrivons ci-dessous.

#### Procédure de mesure du rayon du faisceau bleu

Nous commençons par déterminer approximativement (à l'oeil) la position du centre de l'anneau. Au voisinage de ce centre on effectue des coupes et on obtient des profils d'intensité comme illustré sur la figure (4.3). Au lieu de considérer une ligne de pixels on considère une bande de pixels, on intègre ainsi le signal pour un meilleur rapport signal sur bruit. En pratique la largeur de la bande est choisie de l'ordre de 10% du rayon. On effectue cette opération sur trois bandes contiguës et situées au voisinage du centre. Chaque bande donne un profil à deux pics dont on extrait l'écart en déterminant leur position respective  $X^1$  et  $X^2$  à l'aide d'un logiciel (Origin), ceci est illustré sur lafigure (4.4).

Nous déterminons ainsi trois valeurs du diamètre du faisceau :

$$D_i = X^{2i} - X^{1i} \text{ avec } i = 1 \cdots 3 \tag{4.1}$$



FIGURE 4.3 – Extraction d'un profil d'intensité

et leur incertitude égale à :

$$\delta D_i = \delta X^{2i} + \delta X^{1i} \tag{4.2}$$

où  $\delta X$  est l'incertitude sur la position X donné par le logiciel.  $\delta X$  doit être égale au minimum à la taille d'un pixel de la caméra (5.5 µm, incertitude intrinsèque à la caméra) divisée par la racine du nombre de points N utilisés pour la régression sur un pic, c'est-à-dire formellement :

$$\delta X \ge \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ pix} = \delta X_{min}$$
(4.3)



FIGURE 4.4 – Zoom sur le profil d'intensité

Nous avons alors vérifié que les erreurs obtenues par régression étaient bien, au mieux, égales à cette valeur en mesurant le nombre de points par pic. Quand ce n'était pas le cas nous les avons arrondies à  $\delta X_{min}$ .

Dans la pratique l'incertitude sur le diamètre est identique pour les trois valeurs  $D_i$ , nous l'appellerons maintenant  $\delta D$ .

Nous avons alors considéré que le diamètre était la plus grande des trois valeurs  $D_i$ :

$$D = \max(D_i) \pm \delta D \tag{4.4}$$

Nous avons également ajouté comme incertitude le plus grand écart entre cette valeur  $D_i$  et les deux autres et l'incertitude correspondante (égale à  $2\delta D$ ). Finalement :

$$D = \max(D_i) \pm \max(\max(D_i) - D_{i \neq j}) \pm 3\delta D$$
(4.5)

et on déduit le rayon comme R = D/2.

Comme remarque signalons que pour les anneaux incomplets il nous est arrivé de changer l'axe de coupe en le prenant oblique.

#### Mesure des rayons des faisceaux bleu et rouge

La procédure que nous venons de décrire a été appliquée de la même manière au faisceau LG rouge et au faisceau bleu généré à la différence que les images rouges ont été prises au niveau de la cellule (cf. section (3.2.2)) et les images bleues à 40 cm de la cellule (cf. voie (b) sur la figure (3.7)).

Les mesures sont présentées pour  $\ell > 0$  sur la figure (4.5) par des points rouges pour le faisceau LG incident et des points bleus pour le faisceau bleu généré. On y retrouve la variation



**FIGURE 4.5** – Taille du rayon du vortex rouge (en rouge) et du vortex bleu (en bleu). Les régressions sont en trait plein.

linéaire du rayon du LG rouge avec  $\ell$  discutée à la section (3.2.2) :  $R_{\ell} = R_0(1 + \alpha \ell)$ . La ligne rouge indique l'ajustement par cette loi. On rappelle que pour  $\ell > 0$ ,  $R_0 = 0,045 \pm 0,004$  mm et  $\alpha = 0,51 \pm 0,05$  mm.

La variation du rayon du vortex bleu  $R_b$  quant à elle n'est pas linéaire avec  $\ell$ .

Pour expliquer cette variation revenons au modèle de gain faible.  $I_b$  est attendue proportionnelle à  $I_1I_2$ , avec les intensité définies en (3.6) et (3.7) on obtient :

$$I_b \propto \left(\frac{2r^2}{w_b^2}\right)^{|\ell|} e^{\frac{-2r^2}{w_b^2}} \tag{4.6}$$

c'est une fonction de r qui a un maximum en :

$$r = R_b = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w_b \tag{4.7}$$

avec

$$w_b = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \tag{4.8}$$

En remplaçant  $w_2$  dans l'expression de  $R_b$  par  $\sqrt{\frac{2}{|\ell|}}R_\ell$  on obtient :

$$R_b(\ell) = \frac{R_\ell}{\sqrt{1 + \frac{2R_\ell^2}{|\ell|w_1^2}}}$$
(4.9)

Cette expression montre que  $R_b$  n'est pas proportionnel à  $R_\ell$ . Elle montre aussi que  $R_b$  est inférieur à  $R_\ell$  et qu'il n'est pas linéaire avec  $\ell$ .

L'expression (4.9) est la valeur du rayon du vortex bleu à l'endroit où celui-ci est créé c'est-àdire dans la cellule. Comme nous mesurons le rayon à 40 cm de la cellule il faut tenir compte de la propagation du faisceau. Dans l'hypothèse où le faisceau bleu créé a une propagation de type LG (ce que nous allons vérifier dans la section (4.2.3)) son waist vérifie :

$$w_b(z) = w_b \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_{R_b}^2}} \tag{4.10}$$

où  $w_b$  est le waist au col et  $z_{R_b}$  la longueur de Rayleigh du faisceau. En injectant (4.10) dans (4.7) on en déduit le rayon bleu après une propagation d'une distance z:

$$R_b^{\text{détecté}}(z,\ell) = \frac{R_\ell}{\sqrt{1 + \frac{2R_\ell^2}{|\ell|w_1^2}}} \sqrt{1 + \frac{\lambda_b^2 z^2}{\pi^2} \frac{\left(1 + \frac{2R_\ell^2}{|\ell|w_1^2}\right)^2}{\frac{4R_\ell^4}{|\ell|^2}}}$$
(4.11)

et en ramplaçant  $R_{\ell}$  par son expression en fonction de  $\ell$  on obtient la variation de  $R_b$  avec  $\ell$ :

$$R_{b}^{\text{détecté}}(z,\ell) = \frac{R_{0}(1+\alpha|\ell|)}{\sqrt{1+\frac{2R_{0}^{2}}{|\ell|w_{1}^{2}}(1+\alpha|\ell|)^{2}}} \sqrt{1+\frac{\lambda_{b}^{2}z^{2}}{\pi^{2}} \frac{\left[1+\frac{2R_{0}^{2}}{|\ell|w_{1}^{2}}(1+\alpha|\ell|)^{2}\right]^{2}}{\left[\sqrt{\frac{2}{|\ell|}}R_{0}(1+\alpha|\ell|)\right]^{4}}}$$
(4.12)

Cette expression a été utilisée pour une comparaison avec les points expérimentaux et tracée sur la figure (4.5). On a fixé z = 400 mm et  $\alpha = 0, 51$  et on obtient un ajustement convenable pour  $w_1 = 0, 15 \pm 0, 02$  mm,  $R_0 = 0, 06 \pm 0, 01$  mm. Ces valeurs sont à comparer à  $w_1 =$  $0, 17 \pm 0, 01$  mm et  $R_0 = 0, 045 \pm 0, 004$  mm. Compte tenu des barres d'erreurs on peut déduire que l'accord est bon. Ceci confirme que le modèle de gain faible utilisé est une bonne approche.

#### 4.2.2 Efficacité du mélange à quatre ondes en fonction de $\ell$

L'efficacité du processus en fonction de  $\ell$  a été déterminée à partir de la puissance de bleu  $P_{b,mes}$  mesurée à la photodiode selon la branche (a). Le signal délivré par la photodiode est mesuré en volt à l'oscilloscope. Pour le convertir en puissance lumineuse nous avons besoin de connaître la sensibilité et le gain de celle-ci. Pour le calibre 50 dB que nous utilisions, le gain G de la photodiode est de 4,75.10<sup>5</sup> V A<sup>-1</sup>. Sa sensibilité  $\Re$  à 420 nm est de 0,08 A W<sup>-1</sup>. La puissance de bleu en watts est ainsi égale à :

$$P_{b,mes}(W) = \frac{P_{b,mes}(V)}{G \times \Re}$$
(4.13)

Nous avons mesuré cette puissance pour chaque valeur de  $\ell$  entre [-10, +10] puis par pas de 5 au delà jusqu'à avoir un signal nul sur la photodiode.

La mesure précise de la puissance de bleu émise dans la cellule par le processus nécessite de prendre en compte les pertes de tous les éléments situés entre la cellule et la photodiode. Il s'agit des pertes induites par la face de sortie de la cellule, par le prisme et les pertes dues à la transmission du filtre devant la photodiode.

Pour la cellule nous considérons une perte de  $R_{cel} = 4\%$  par face, valeur typique pour le verre proche de l'incidence normale. La transmission du filtre est de  $T_{filtre} = 96,5\%$  à 420 nm.

Une mesure précise est par contre nécessaire pour le prisme car nous sommes loin de l'incidence normale. Pour cela nous commençons par mesurer l'angle d'incidence sur la face d'entrée du prisme,  $i_e$ , et déduisons l'angle d'incidence sur la face de sortie,  $i_s$ , en utilisant les lois de Snell-Descartes. Le prisme provient de chez Ovio-Optics et est en verre Flint XD ZF3, l'indice optique de ce verre est de  $n_p=1,76$  à 420 nm [105]. Nous trouvons  $i_e \approx 62^\circ$  et  $i_s \approx 30^\circ$ . Nous pouvons ainsi calculer les coefficients de réflexion de Fresnel  $R_{p,i}$  pour la polarisation p et  $R_{s,i}$  pour la polarisation s à chaque interface. Comme notre faisceau est polarisé circulairement le coefficient de transmission total à chaque interface est donné par  $R_{pris,i} = \frac{1}{2}(R_{p,i} + R_{s,i})$ . Pour la première interface nous trouvons  $R_{pris,1}=0,14$  et pour la deuxième interface  $R_{pris,2}=0,16$ .

Finalement la puissance de bleu totale dans la cellule s'écrit :

$$P_{b,cell}(W) = \frac{P_{b,mes}(W)}{T_{filtre}(1 - R_{cel})^2(1 - R_{pris,1})(1 - R_{pris,2})}$$
(4.14)

A titre d'exemple nous obtenons  $P_{b,cell} \approx 80 \ \mu\text{W}$  pour  $\ell=1$  et  $P_{b,cell} \approx 120 \ n\text{W}$  pour  $\ell=30$ .

Ce qui nous intéresse c'est l'efficacité  $\eta_{\ell}$  de conversion rouge/bleu soit le rapport entre la puissance des faisceaux rouges d'entrée et la puissance du faisceau bleu généré :

$$\eta_{\ell} = \frac{P_{b,cell}}{P_{1,cell} \times P_{2,cell}} \tag{4.15}$$

avec  $P_{1,cell}$  la puissance du faisceau gaussien et  $P_{2,cell}$  la puissance du faisceau LG dans la cellule. Cette quantité a pour unité le W<sup>-1</sup>.

Il faut là aussi tenir compte de la perte due à la face de sortie de la cellule, on a alors :

$$\eta_{\ell} = \frac{P_{b,cell}}{(1 - R_{cel})^2 \times P_{1,mes} \times P_{2,mes}}$$
(4.16)

Avec les applications numériques données ci-dessus on obtient finalement :

$$\eta_{\ell} \approx 1,7 \times \frac{P_{b,mes}(W)}{P_{1,mes} \times P_{2,mes}}$$
(4.17)

Pour les valeurs de  $P_b$  précedentes nous obtenons une efficacité de  $\eta_1 = 6, 7.10^{-6} \text{ mW}^{-1}$  pour  $\ell = 1$  et  $\eta_{30} = 1, 0.10^{-8} \text{ mW}^{-1}$  pour  $\ell = 30$ .

Avec ces mesures nous traçons maintenant l'efficacité de conversion en fonction de  $\ell$ . La courbe (en échelles logarithmiques) est donnée sur la figure (4.6). Remarque : L'efficacité est normalisée par rapport à  $\ell = -5$  (respectivement  $\ell = +5$ ) pour les  $\ell$  négatifs (respectivement positifs). Nous avons choisi  $|\ell| = 5$  car nous avons vu en (3.3.3) qu'il s'agit de la valeur à partir de laquelle la population du niveau  $5P_{3/2}$  est négligeable et où on réalise une transtion Raman avec une population du niveau  $5D_{5/2}$  de  $\frac{1}{2}$ . Pour  $|\ell| \ge 5$  on a des conditions similaires de peuplement quelque soit  $\ell$ .

La courbe (4.6) montre un comportement similaire pour  $\ell > 0$  et  $\ell < 0$ . Elle montre aussi que  $\eta_{\ell}$  varie peu jusqu'à  $|\ell| = 5$  (on observe un plateau) puis chute de trois décades jusqu'à  $|\ell| = 30$  où on atteint alors notre seuil de détection. Nous observons un écart entre les valeurs de  $\eta_{\ell}$  et  $\eta_{-\ell}$  que nous expliquons par la légère différence entre la taille du LG et sa puissance selon que  $\ell$  est positif ou négatif.

Par analogie avec d'autres disciplines, notamment l'électronique, nous pouvons dire que ce système constitue un filtre passe-bas pour la conversion de vortex. De cette façon nous pouvons définir une coupure,  $\ell_c$ , qui correspond à la valeur de  $\ell$  pour laquelle la puissance de



**FIGURE 4.6** – Efficacité de la conversion de vortex en fonction de  $\ell$ . Les  $\ell$  positifs sont donnés en violet et les négatifs en vert. La ligne rouge représente le moment où la puissance est divisée par 2 par rapport à  $\ell = +1$  et définit la coupure  $\ell_c$ .

bleu est réduite de moitié. Nous avons représenté cette valeur par une ligne rouge sur la figure (4.6) en prenant  $\ell = +1$  comme valeur maximale. Dans ce cas  $\ell_c$  est compris entre 2 et 3.

La décroissance se comprend qualitativement par des considérations géométriques sur les faisceaux incidents. Considérons le produit  $I_1I_2$ . Comme le montre la figure (4.7) le produit  $I_1I_2$  diminue avec  $\ell$  et en particulier la valeur de son maximum. On rappelle que la puissance bleue vaut :

$$P_b = \iint I_b r dr d\theta = 2\pi \int I_b r dr \tag{4.18}$$

et  $I_b \propto I_1 I_2$  dans le régime de gain faible. On comprend donc que :

- (i) si  $R_{\ell} \ll w_1 P_b$  varie peu
- (ii) si  $R_{\ell} \approx w_1$  alors  $P_b$  commence à décroître
- (iii) si  $R_{\ell} \gg w_1$  alors  $P_b$  est voisin de zéro



**FIGURE 4.7** – Tracé de  $I_1$ ,  $I_2$  (rouge) et produit des deux (bleu) pour (a)  $\ell = 2$ , (b)  $\ell = 5$  et (c)  $\ell = 10$ . On a respecté les valeurs relatives de  $w_1$  et  $R_{\ell}$  pour chaque cas.

De façon quantitative nous pouvons expliciter l'efficacité attendue dans le cas du modèle de gain faible. Nous avons vu en (2.4.1) qu'elle s'exprime comme proportionnelle au recouvrement des intensités incidentes,  $P_b(\ell) = \beta K_\ell$  où  $\beta$  est un facteur de proportionnalité indépendant de  $\ell$  et

$$K_{\ell} = \int_{0}^{\infty} I_{1}(r) I_{2}(r) 2\pi r dr$$
(4.19)

On appelle  $K_{\ell}$  le recouvrement des intensités incidentes. D'après (2.37), pour  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = \ell$ on a :

$$K_{\ell} = \frac{2P_1 P_2}{\pi w_1^2} \frac{1}{(1 + \frac{w_2^2}{w_1^2})^{|\ell|+1}}$$
(4.20)

Cette expression met en évidence qu'à waists  $w_1$  et  $w_2$  constants le recouvrement décroît fortement avec  $\ell$ . En une décade ( $\ell = 1$  à  $\ell = 10$ ) il a diminué dun facteur  $(1 + \frac{w_2^2}{w_1^2})^9$ . Ce facteur vaut environ 40 si  $\frac{w_2^2}{w_1^2} = 0, 5$ .

Néanmoins l'expression (4.20) ne peut pas être appliqué à notre expérience car  $w_2$  n'est pas constant. Puisque  $w_2$  varie comme  $w_2(\ell) = \sqrt{\frac{2}{|\ell|}} R_\ell$  alors :

$$K_{\ell} = \frac{2P_1 P_2}{\pi w_1^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2R_0^2(1+\alpha|\ell|)^2}{|\ell|w_1^2}\right)^{|\ell|+1}}$$
(4.21)

On normalise  $K_{\ell}$  comme nous l'avons fait pour  $\eta_{\ell}$ , on obtient alors  $K_{\ell}^{norm} = \frac{K_{\ell}}{K_{\ell=5}}$  soit :

$$K_{\ell}^{norm} = \frac{\left[1 + \frac{2}{5}a^2(1+5\alpha)^2\right]^6}{\left[1 + \frac{2}{|\ell|}a^2(1+\alpha|\ell|)^2\right]^{|\ell|+1}}$$
(4.22)

Dans cette expression nous avons introduit le facteur géométrique sans dimension  $a = \frac{R_0}{w_1}$ : la taille typique d'un mode LG divisée par le waist du faisceau gaussien.

Nous avons tracé l'expression (4.22) avec les valeurs expérimentales a = 0, 26 et  $\alpha = 0, 51$ , on trouve la courbe en pointillé de la figure (4.8). L'allure de cette courbe est convenable mais l'accord avec les données n'est pas satisfaisant. Nous avons essayé de faire un ajustement sur les données avec l'expression (4.22) mais ce n'était pas évident compte tenu de la loi de puissance en  $\frac{1}{\ell^{\ell+1}}$ . C'est en effet la loi asymptotique de (4.22) lorsque  $\ell$  devient grand. Nous avons alors choisi de faire varier a à la main. On trouve un accord très satisfaisant pour a = 0, 15. On peut aussi faire un accord à la main en faisant varier  $\alpha$  mais dans ce cas on trouve  $\alpha \approx 0, 5$ .



**FIGURE 4.8** – Efficacité normalisée pour a = 0,26 en pointillés et a = 0,15 en trait plein

Revenons maintenant à la notion de coupure  $\ell_c$  présentée sur la figure (4.6). Avec la formule (4.20) nous pouvons calculer la valeur de  $\ell_c$ . Le calcul est aisé si on fait l'hypothèse

 $\frac{w_2}{w_1} \ll 1.$  En effet dans ce cas avec un développement limité du logarithme on obtient :

$$K_{\ell} = \frac{2P_1 P_2}{\pi w_1^2} e^{-(|\ell|+1)\ln(1+\frac{w_2^2}{w_1^2})}$$
$$\approx \frac{2P_1 P_2}{\pi w_1^2} e^{-\frac{(|\ell|+1)2R_{\ell}^2}{|\ell|w_1^2}}$$
(4.23)

En considérant que la valeur maximale de puissance bleue est obtenue pour  $\ell = 1$ , la coupure  $\ell_c$  doit vérifier  $K_{\ell_c} = \frac{K_1}{2}$ . Dans ce cas on montre que cette condition est égale à résoudre un polynôme de degré 3 de la forme

$$\alpha^{2}|\ell|^{3} + \alpha(\alpha+2)|\ell|^{2} + (1+2\alpha + \frac{w_{1}^{2}B}{2R_{0}^{2}})|\ell| + 1 = 0$$
(4.24)

avec  $B = -\ln(2) - \frac{4R_0^2(1+\alpha)^2}{w_1^2}$ . Pour  $w_1 = 0, 17$  mm,  $\alpha = 0, 51$  et  $R_0 = 0, 045$  on trouve (en prenant la partie entière de la solution positive)  $|\ell_c| = 3$  ce qui correspond à la valeur trouvée expérimentalement.

Finalement grâce à la grande plage de  $\ell$  ( $\ell \in [-30, +30]$ ) que nous avons explorée nous avons pu montrer la courbe de réponse du système et en définir une expression analytique qui reproduit fidèlement les mesures. Enfin ceci nous a permis de définir la notion d'OAM de coupure associée à cette configuration.

#### 4.2.3 Propagation et pureté du mode généré

Avec la branche de détection (d) nous avons analysé la propagation du faisceau bleu émis après focalisation par une lentille de focale 200 mm. Nous avons pris des images pour le cas  $\ell = 4$  et  $\ell = 8$ : plusieurs images sont présentées sur la figure (4.9). Nous observons que dans les deux cas le faisceau garde une forme d'anneau avec un centre noir tout au long de sa propagation.

A partir de ces images nous avons déduit les rayons horizontaux et verticaux de l'anneau



**FIGURE 4.9** – Images de la propagation du faisceau bleu pour  $\ell = 4$  (en bas) et  $\ell = 8$  (en haut)



**FIGURE 4.10** – Propagation derrière une lentille de 200 mm pour  $\ell = 4$  et  $\ell = 8$ , (a) rayon horizontal, (b) rayon vertical

(rayon du maximum d'intensité) et tracé leur variation avec la distance de propagation. Les courbes correspondantes sont sur la figure (4.10). La procédure utilisée pour la mesure des rayons est celle définie précédemment dans la section (4.2.1). On observe qu'à moins de 10% près les rayons verticaux et horizontaux sont identiques. Hors des minima (point focal) les rayons varient linéairement avec z. La loi sous-jacente est une hyperbole comme attendue dans le cas d'une propagation LG.

Nous avons vu au chapitre 1 (section (1.4)) que le rayon d'un mode de Laguerre-Gauss  $LG_0^{\ell_b}$  varie avec la distance de propagation comme :

$$R(z) = \sqrt{\frac{|\ell_b|}{2}} w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2}$$
(4.25)

avec  $w_0$  le waist du faisceau,  $z_0$  sa position et  $z_R$  la longueur de Rayleigh. Nous avons utilisé cette expression pour ajuster les courbes expérimentales avec les paramètres  $z_0$ ,  $w_0$  et  $z_R$ (lignes bleues sur la figure (4.10)). Du fait de la forme du faisceau bleu attendu dans le modèle de gain faible nous avons pris  $\ell_b = \ell$ . En utilisant la définition du facteur de qualité  $M^2$  d'un faisceau :

$$M^2 = \frac{\pi w_0^2 / \lambda_b}{z_R} \tag{4.26}$$

où  $\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  représente la valeur attendue de la longueur de Rayleigh pour un faisceau de waist  $w_0$ , nous avons déduit les paramètres  $M^2$  indiqués dans le tableau (4.1). Si le faisceau est

		$\ell = 4$	$\ell = 8$
	$M_V^2$	$1,03\pm0,38$	$1,00\pm0,30$
ſ	$M_H^2$	$1,09\pm0,53$	$1,19\pm0,32$

**Tableau 4.1** – Facteurs de qualités  $M^2$  (horizontal et vertical) du faisceau bleu pour  $\ell = 4$  et  $\ell = 8$ 

parfait alors  $M^2 = 1$  sinon  $M^2 > 1^1$ . L'écart à la valeur 1 mesure l'imperfection (on dit aussi l'impureté) du faisceau. Ici  $M^2 \approx 1$  ce qui laisse penser que le faisceau est un mode de Laguerre-Gauss très pur. Ce résultat est très intéressant car nous avons vu au chapitre 1

<sup>1.</sup> Typiquement  $M^2 \approx 10$  pour une diode laser (pointeur)

que le mode de Laguerre-Gauss que nous envoyons en entrée a un mauvais facteur  $M^2$  car c'est une superposition de modes  $\mathrm{LG}_p^\ell$ . Intuitivement ceci s'explique de deux façons : d'une part comme les anneaux secondaires du LG rouge ont une intensité maximum beaucoup plus faible (pour  $\ell = 4$  l'intensité du deuxième anneau vaut environ 40% de celle de l'anneau principal ) ils contribuent très peu au processus non linéaire, d'autre part comme leur rayon est plus grand ils ont un moins bon recouvrement avec le faisceau gaussien comme on peut le voir sur la figure (4.11) où on a simulé le recouvrement pour un mode  $LG_{p=1}^8$ .



**FIGURE 4.11** – Intensité du gaussien et d'un mode  $LG_{p=1}^{8}$  (en rouge) et produit des deux (en bleu)

Comme  $M^2$  est très proche de 1 nous pouvons remonter à la valeur du waist des faisceaux bleu dans la cellule à partir de la mesure des rayons. En effet, en considérant que le faisceau bleu a une propagation gaussienne, loin du col le rayon évolue linéairement avec la distance de propagation z (on pend ici  $z_0 = 0$ ) :

$$R_{b_4}(z) \approx \sqrt{2} \frac{\lambda_b}{\pi w_0^{\prime(4)}} z = a_4 z$$
 (4.27)

$$R_{b_8}(z) \approx 2 \frac{\lambda_b}{\pi w_0'^{(8)}} z = a_8 z$$
 (4.28)

avec  $w'_0$  le waist du faisceau après la lentille. Comme l'effet de la lentille sur le waist  $w_0^{(i)}$  est un facteur <sup>2</sup> indépendant de  $\ell$  le rapport des deux pentes  $a_i$  donne le rapport (à un facteur  $1/\sqrt{2}$  près) des waists  $w_0^{(i)}$  dans la cellule :

$$\frac{a_4}{a_8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{w_0^{(8)}}{w_0^{(4)}} \tag{4.29}$$

Par régression linéaire sur les données expérimentales de la figure (4.10) (seulement pour le rayon vertical) on trouve

$$\frac{a_4}{a_8} = 0,69 \pm 0,04 \tag{4.30}$$

d'où

$$\frac{w_0^{(8)}}{w_0^{(4)}}\bigg|_{exp} = 0,98 \pm 0,06 \tag{4.31}$$

Les valeurs attendues par le modèle de gain faible sont données par l'expression (4.8) et avec  $R_4 = 0, 14 \text{ mm}$  et  $R_8 = 0, 23 \text{ mm}$  (cf. figure (4.5)) on trouve :

$$\frac{w_0^{(8)}}{w_0^{(4)}}\bigg|_{th} = 1,13 \tag{4.32}$$

2.  $w_0 w'_0 \approx \frac{\lambda f}{\pi}$ 

soit un écart relatif d'environ 13% ce qui relativement faible et confirme également le modèle développé.

#### 4.2.4 OAM du vortex généré

Nous avons finalement analysé la phase du faisceau bleu en vérifiant la présence d'une phase azimutale et donc d'un OAM. Pour cela nous avons utilisé la méthode de la lentille tiltée à l'aide de la voie c) de détection. Dans une première série de mesures des petites valeurs de  $\ell$ , de 1 à 5, ont été analysées. La forme du faisceau bleu est donnée sur la figure (4.12)a) et la mesure de l'OAM sur la figure (4.12)b).



**FIGURE 4.12** – Intensité du faisceau bleu (a) et (b) transformation par une lentille tiltée (f = 250 mm) pour  $\ell = +1 \text{ à } +5$ 

Pour cette série d'images la focale de lentille tiltée était de  $f_T = 250$  mm et la caméra était placée à 240 mm. Avant son incidence sur cette lentille le faisceau bleu était rendu quasi-parallèle grâce à une lentille de grande focale (600 mm).

Chaque image de la figure (4.12) présente  $\ell$  franges sombres (et  $\ell + 1$  franges brillantes) donc nous pouvons conclure que le faisceau bleu que nous avons créé est un vortex optique d'OAM  $\ell_b = \ell$ . Cela signifie que l'OAM initial a été entièrement transféré au faisceau bleu. Selon l'accord de phase azimutale entre les faisceaux initiaux (cf. (4.42)) et le faisceau bleu on doit satifaire :

$$\ell_b + \ell_{IR} = \ell \tag{4.33}$$

Puisque nous observons  $\ell_b = \ell$  alors l'OAM du faisceau infrarouge  $\ell_{IR}$  est nul :  $\ell_{IR} = 0$ . Remarquons que cela présuppose qu'il n'a pas de processus capable de violer la conservation de la phase azimutale.

Cette conclusion (i.e.  $\ell_{IR} = 0$ ) a déjà été mentionnée dans la littérature même si les configurations étaient légèrement différentes : (i) dans les travaux de G. Walker et al. [129] les atomes sont soumis à deux vortex d'OAM  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  ( $\leq 5$ ) et le vortex bleu porte un OAM valant  $2\ell$ , l'infrarouge porte  $\ell_{IR} = 0$ , (ii) dans les travaux de A. Akulshin et al. [3] les atomes sont soumis à deux vortex d'OAM différent  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  ( $\leq 2$ ), le vortex bleu porte  $\ell_b = \ell_1 + \ell_2$  et  $\ell_{IR} = 0$ . Pour ces deux expériences les OAM impliqués étaient inférieurs ou égaux à 5.

A la fois dans [129] et [3] ainsi que dans l'expérience décrite dans ce manuscrit le faisceau infrarouge n'est pas détecté, on ne peut donc pas conclure de façon absolue que  $\ell_{IR} = 0$ . On s'appuie sur la conservation de la phase azimutale pour déterminer la valeur de  $\ell_{IR}$ .

#### Chapitre 4

Dans une deuxième série de mesures nous avons varié  $\ell$  de -30 à +30. Pour pouvoir compter plus facilement le nombre de franges nous avons utilisé une lentille tiltée de plus grande focale,  $f_T = 500$  mm. Les images du faisceau bleu en sortie de voie c) sont présentées sur la figure (4.13) pour  $\ell = -20, -15, -11, +5, +11$ . Nous y présentons également les images pour le faisceau rouge d'entrée.



**FIGURE 4.13** – Transformation par une tiltée (a) pour le faisceau rouge et (b) le faisceau bleu, pour différentes valeurs de  $\ell$ 

Les images présentent bien des franges d'interférence, signature d' un vortex optique. Le changement d'orientation de la figure d'interférence pour  $\ell > 0$  et  $\ell < 0$  indique qu'il n'y a pas de changement du signe de  $\ell$  par le mélange à quatre ondes. L'OAM du vortex dépend du signe de l'OAM du vortex rouge. La détermination de la valeur de l'OAM nécessite le dénombrement précis des franges noires. Nous voyons que contrairement au cas rouge ce dénombrement est parfois ambigu, par exemple pour  $\ell = +11$  nous avons une incertitude d'une frange.

Pour lever cette indétermination nous avons repris l'expérience pour chaque  $\ell$ , changé l'inclinaison de la lentille tiltée et optimisé la figure de franges (ce sont en fait les images montrées en (4.13)). Néanmoins l'indétermination persiste. Nous avons aussi extrait le profil d'intensité en faisant une coupe oblique des images (4.13) le long de l'orientation principale (y compris sur le faisceau rouge pour comparaison). Nous obtenons les profils en (4.14) pour  $\ell = -11$ .



**FIGURE 4.14** – Profil d'intensité des interférences obtenues à la lentille tiltée pour  $\ell = -11$  dans le cas (a) rouge et (b) bleu

Nous observons dans le cas bleu, outre une ambiguité sur le nombre de franges, un fond continu qui n'est pas présent sur les images expérimentales rouges et qui a pour effet de diminuer le contraste des franges d'interférences. Ceci peut se produire par exemple lorsque deux systèmes de franges très proches spatialement se superposent et serait ainsi la signature de la présence de plusieurs modes de  $\ell_b$  différents.

Pour valider cette hypothèse et déterminer précisément quels sont ces modes le modèle de gain faible que nous avons utilisé précédemment n'est pas suffisant. Il nous faut développer un modèle plus poussé et y ajouter en particulier les différents accords de phase que nous avons présentés dans la section (2.4.2).

#### 4.2.5 Règles de sélection du transfert d'OAM

Reprenons les équations (2.13) qui gouvernent les champs  $\tilde{E}_b$  et  $\tilde{E}_{IR}$  sous l'effet du terme non-linéaire et dans l'hypothèse de non déplétion de  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$ .

Si on néglige les variations transverses (soient  $\Delta_{\perp} E_b$  et  $\Delta_{\perp} E_{IR}$ ) alors on en déduit :

$$\left(\begin{array}{l}
\frac{\partial I_{IR}}{\partial z} = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_{IR}^2}{n_{IR}c}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_b^*\tilde{E}_{IR}^*e^{i\Delta kz} + c.c\\ \\
\frac{\partial I_b}{\partial z} = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_b^2}{n_bc}\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_{IR}^*\tilde{E}_b^*e^{i\Delta kz} + c.c\end{array}\right)$$
(4.34)

où  $I_b = \tilde{E}_b \tilde{E}_b^*$  et  $I_{IR} = \tilde{E}_{IR} \tilde{E}_{IR}^*$  sont respectivement les intensités bleu et infrarouge et  $\Delta k = \sum_i \eta_i k_i$ .

En intégrant selon z sur la longueur L de la cellule on a :

$$\begin{cases} I_{IR} = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_{IR}^2}{n_{IR}c} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_b^* \tilde{E}_{IR}^* e^{i\Delta kz} dz + c.c \\ I_b = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_b^2}{n_bc} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_{IR}^* \tilde{E}_b^* e^{i\Delta kz} dz + c.c \end{cases}$$
(4.35)

Finalement on peut déduire les puissances bleu et infrarouge en intégrant sur la surface des faisceaux :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{IR} = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_{IR}^2}{n_{IR}c} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_b^* \tilde{E}_{IR}^* e^{i\Delta kz} r dr d\theta dz + c.c \\ \mathcal{P}_b = \frac{3i\chi^{(3)}\omega_b^2}{n_bc} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_{IR}^* \tilde{E}_b^* e^{i\Delta kz} r dr d\theta dz + c.c \end{cases}$$
(4.36)

Les expressions (4.36) font apparaitre une intégrale triple qui est identique pour les champs bleu et infrarouge, nous la nommons J. En conséquence si  $\mathcal{P}_b$  est maximale,  $\mathcal{P}_{IR}$  l'est aussi. Cette intégrale décrit le recouvrement des quatres champs du mélange.

En séparant amplitude et phase pour chaque champ  $\tilde{E}_i$ , soit  $\tilde{E}_i = A_i e^{i\varphi_i}$  (avec  $A_i > 0$  et  $\varphi_i$  réelle), on peut réécrire l'intégrale comme :

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} A_1 A_2 A_{IR} A_b \times e^{i\Delta\varphi} e^{i\Delta kz} r dr d\theta dz$$
(4.37)

où  $\Delta \varphi = \sum_{i} \eta_i \varphi_i$ . Comme  $A_1 A_2 A_{IR} A_b > 0$  la valeur de J (nulle ou non nulle) est fortement couplée à la phase  $\psi = \Delta \varphi + \Delta kz$ .

Les champs  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  sont des modes de Laguerre-Gauss  $LG_0^{\ell_1}$  et  $LG_0^{\ell_2}$ . Pour le champ  $\tilde{E}_1$  on a alors :

$$\varphi_1 = \ell_1 \theta + (|\ell_1| + 1) \operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_1}}) + \frac{k_1 r^2}{2z(1 + \frac{z_{R_1}^2}{z^2})}$$
(4.38)

L'expression (4.38) est identique pour le champ  $\tilde{E}_2$  en changeant l'indice 1 en 2.

On reconnait la phase azimutale (premier terme), la phase de Gouy (deuxième terme) et la phase de courbure (dernier terme) comme défini en (1.4).

A priori on ne connait pas les modes de sortie  $E_b$  et  $E_{IR}$ . Dans le cas général ils se décomposent sur la base des modes  $LG_p^{\ell}$  de waist  $w_b$  (respectivement  $w_{IR}$ ). En faisant l'hypothèse que leur col est placé en z = 0, chaque composante aura une phase du type :

$$\varphi_b = \ell_b \theta + (|\ell_b| + 2p_b + 1) \operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_b}}) + \frac{k_b r^2}{2z(1 + \frac{z_{R_b}^2}{z^2})}$$
(4.39)

De même pour l'infrarouge.

L'expression (4.39) est identique à l'expression (4.38) au terme  $2p_b$  près. En injectant (4.38) et (4.39) dans l'expression de  $\psi$  on ontient :

$$\psi = \sum_{i} \eta_{i} \left( k_{i}z + \ell_{i}\theta + (|\ell_{i}| + 2p_{i} + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_{i}}}) + \frac{k_{i}r^{2}}{2z(1 + \frac{z_{R_{i}}^{2}}{z^{2}})} \right)$$
(4.40)

avec  $\eta_i = \pm 1$ .

Le terme azimutal de  $\psi$  donne une intégration triviale selon  $\theta$  dans J:

$$\int_{0}^{2\pi} e^{i(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{IR} - \ell_b)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{\ell_1 + \ell_2 - \ell_b - \ell_{IR}}$$
(4.41)

J est donc non nulle si et seulement si :

$$\ell_1 + \ell_2 = \ell_b + \ell_{IR}$$

$$(4.42)$$

Nous retrouvons l'accord de phase azimutale que nous avions introduit dans la section (2.4.2). Il indique que les modes de sortie possibles sont ceux assurant la conservation de l'OAM. C'est une condition stricte. Il est à noter que cette relation est vraie même si les modes créés comportent un indice radial p non nul.

Une fois la condition azimutale satisfaite, on a à calculer une intégrale dont l'intégrande est le produit d'une quantité positive (les amplitudes des champs) par une fonction oscillante. L'intégrale J est donc optimale si :

$$\sum_{i} \eta_{i} \left( k_{i}z + (|\ell_{i}| + 2p_{i} + 1)\operatorname{atan}(\frac{z}{z_{R_{i}}}) + \frac{k_{i}r^{2}}{2z(1 + \frac{z_{R_{i}}^{2}}{z^{2}})} \right) = 0$$
(4.43)

Cette condition doit être vraie quels que soient r et z. On peut la dériver par rapport à r ou z. La dérivée par rapport à r donne  $\sum_{i} \eta_i \frac{k_i}{z(1+\frac{z_{R_i}}{z^2})} = 0$ . En dérivant à nouveau par rapport à

z on a  $\sum_i \eta_i \frac{k_i(z^2-z_{R_i}^2)}{(z^2+z_{R_i}^2)^2}=0,$  ce qui en z=0 donne :

$$\sum_{i} \eta_{i} \frac{k_{i}}{z_{R_{i}}^{2}} = 0 \tag{4.44}$$

L'expression (4.44) exprime l'accord de phase de courbure, nous avions établi le même pour des faisceaux gaussiens dans la section (2.3.4).

Reprenons l'expression (4.43) pour r = 0, en la dérivant par rapport à z on obtient :  $\sum_{i} \eta_i (k_i + (|\ell_i| + 2p_i + 1) \frac{\frac{1}{z_{R_i}}}{1 + \frac{z^2}{z_{R_i}^2}}) = 0$ . Soit en z = 0 :

$$\sum_{i} \eta_i (k_i + \frac{|\ell_i| + 2p_i + 1}{z_{R_i}}) = 0$$
(4.45)

Le premier terme  $\sum_i \eta_i k_i$  est nul de part la conservation de l'énergie et de l'impulsion en configuration co-propageante. Il ne reste donc que le second terme :

$$\sum_{i} \eta_{i} \frac{|\ell_{i}| + 2p_{i} + 1}{z_{R_{i}}} = 0$$
(4.46)

Cette condition correspond à l'accord de phase de Gouy.

Au final l'intégrale de recouvrement J ser a optimale lorsque les quatre conditions suivantes seront vérifiées :

$$\begin{cases} \sum_{i} \eta_{i} k_{i} = 0 \\ \sum_{i} \eta_{i} \frac{k_{i}}{z_{R_{i}}^{2}} = 0 \\ \sum_{i} \eta_{i} \ell_{i} = 0 \\ \sum_{i} \eta_{i} \frac{|\ell_{i}| + 2p_{i} + 1}{z_{R_{i}}} = 0 \end{cases}$$
(4.47)

On retrouve là les résultats établis en (2.4.2). J s'exprime alors simplement comme l'intégrale de recouvrement des amplitudes des champs :

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} A_{1}A_{2}A_{IR}A_{b} \ r dr d\theta dz$$
(4.48)

Les deux premières relations de (4.47) ne dépendent pas de l'OAM, ce sont les conditions usuelles du mélange à quatre ondes pour des ondes gaussiennes ( $\ell_i = 0$ ). Les deux autres expressions dépendent de l'OAM, ce sont celles qui nous intéressent le plus dans notre problème.

Ces quatre relations établissent les règles de sélection du mélange à quatre ondes réalisé avec des vortex optiques (pas d'hypothèse ici sur  $\ell_1$  et  $\ell_2$ )). Elles relient les nombres azimutaux, radiaux et les zones de Rayleigh. Nous commençons par évaluer l'impact de ces différentes conditions dans le cas idéal et simplifié du critère de Boyd. **Cas du critère de Boyd** Comme première approche considérons le cas du critère de Boyd : toutes les zones de Rayleigh  $z_{R_i}$  sont identiques (cf. (2.3.5)). Les relations (4.47) se simplifient alors sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{i}^{i} \eta_{i} k_{i} = 0 \\ \sum_{i}^{i} \eta_{i} k_{i} = 0 \\ \sum_{i}^{i} \eta_{i} \ell_{i} = 0 \\ \sum_{i}^{i} \eta_{i} (|\ell_{i}| + 2p_{i} + 1) = 0 \end{cases}$$
(4.49)

Les deux premières égalités sont celles obtenues pour des faisceaux gaussiens dans le cas du crière de Boyd (cf. (2.3.5)).

La condition  $\sum_i \eta_i \ell_i$  est la conservation de l'OAM, la condition  $\sum \eta_i (|\ell_i| + 2p_i + 1) = 0$  traduit une conservation particulière car elle fait intervenir la valeur absolue de l'OAM et non sa valeur relative. De plus elle montre que même en appliquant des champs d'entrée  $E_1$  et  $E_2$  du type  $LG_0^{\ell_1}$  et  $LG_0^{\ell_2}$  on est susceptible de générer des ondes avec des nombres radiaux non nuls.

**Cas de Boyd pour**  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = \ell$  Examinons les solutions de (4.49) dans le cas où  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = \ell$ , cas similaire à l'expérience décrite précédemment dans ce manuscrit à ceci près que les zones de Rayleigh des champs d'entrée ne sont pas identiques.

Supposons  $\ell > 0$  (si  $\ell < 0$  on change simplement le sens de rotation de  $\theta$ ) alors :

$$\begin{cases} \ell_{IR} + \ell_b = \ell \\ |\ell_{IR}| + 2p_{IR} + |\ell_b| + 2p_b = \ell \end{cases}$$
(4.50)

On en déduit la valeur de  $q = p_{IR} + p_b$ , grandeur entière et positive :

$$q = \frac{\ell_{IR} + \ell_b - |\ell_{IR}| - |\ell_b|}{2} \tag{4.51}$$

Examinons cette équation suivant le signe de  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$  :

- (i) Si  $\ell_{IR} > 0$  et  $\ell_b > 0$  alors q = 0
- (ii) Si  $\ell_{IR} > 0$  et  $\ell_b < 0$  alors  $q = \ell_b < 0$  ce qui est impossible
- (iii) Si  $\ell_{IR} < 0$  et  $\ell_b < 0$  alors  $q = \ell_{IR} + \ell_b < 0$  ce qui est impossible
- (iv) Si  $\ell_{IR} < 0$  et  $\ell_b > 0$  alors  $q = \ell_{IR} < 0$  ce qui est aussi impossible

Nécessairement q est nul et  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$  sont de même signe. On a alors :

- si  $\ell > 0$  alors  $\ell_{IR} > 0$  et  $\ell_b > 0$  d'où  $0 \le \ell_b \le \ell$  et  $\ell_{IR} = \ell \ell_b$
- si  $\ell < 0$  alors  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b < 0$  d'où  $\ell \le \ell_b \le 0$  et  $\ell_{IR} = \ell \ell_b$

Il y a donc  $|\ell| + 1$  solutions de type  $LG_0^{\ell_b}$  pour le champ bleu. Ce sont des modes comportant un seul anneau sauf pour le cas où  $\ell_b = 0$ .

#### 4.2.6 Mode bleu le plus probable dans le cadre du critère de Boyd

La question qui se pose maintenant est de savoir quelles sont les solutions acceptables  $(\ell_b, \ell_{IR})$  parmi les  $|\ell| + 1$  couples possibles :  $(0, \ell), (1, \ell - 1) \dots (\ell, 0)$ .

Pour ce la nous allons comparer la valeur de  ${\cal J}$  pour chaque solution.

Dans le cas général, lorsque la cellule est plus courte que toutes les zones de Rayleigh, J se calcule aisément : les amplitudes des différents champs  $A_i$  ne dépendent pas de z (cf. (1.4)). J s'écrit alors :

$$J = 2\pi L \times \int_0^\infty \prod_i \sqrt{\frac{2P_i}{w_i^2 |\ell_i|!}} \left(\frac{2r^2}{w_i^2}\right)^{\frac{|\ell_i|}{2}} e^{\frac{-r^2}{w_i^2}} r dr \quad \text{avec} \quad i = \{1, 2, IR, b\}$$
(4.52)

La valeur analytique de J se calcule à l'aide de l'intégrale (2.36) et vaut :

$$J = L \times \sqrt{P_1 P_2 P_{IR} P_b} \frac{w_{tot}^{2\mathcal{L}+2}}{w_1^{|\ell_1|+1} w_b^{|\ell_b|+1} w_{IR}^{|\ell_{IR}|+1} w_2^{|\ell_2|+1}} \times \frac{2\Gamma(\mathcal{L}+1)}{\pi \sqrt{|\ell_1|!|\ell_2|!|\ell_{IR}|!|\ell_b|!}}$$
(4.53)

avec  $\frac{2}{w_{tot}^2} = \sum_i \frac{1}{w_i^2}, \mathcal{L} = \sum_i \frac{|\ell_i|}{2}$  et L la longueur de la cellule.  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler<sup>3</sup>. Dans l'expression (4.53)  $w_1, w_2, \ell_1$  et  $\ell_2$  sont fixés, pour un couple  $(\ell_b, \ell_{IR})$  J est donc une fonction des variables  $w_b$  et  $w_{IR}$ . J est alors maximale si :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w_b} = 0\\ \frac{\partial J}{\partial w_{IR}} = 0 \end{cases}$$
(4.54)

soit

$$\begin{cases} w_b^2(|\ell_b|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2\\ w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2 \end{cases}$$
(4.55)

avec w le "waist réduit" donné par

$$w = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \tag{4.56}$$

Nous avons détaillé le calcul pour obtenir les conditions (4.55) dans l'annexe (B).

#### Cas où $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = \ell$ avec critère de Boyd

Dans le cas où  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = \ell$  les équations (4.55) deviennent :

$$\begin{cases} w_b^2(|\ell_b|+1) = \ell w^2 \\ w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = \ell w^2 \end{cases}$$
(4.57)

Le rayon d'un mode LG étant donné par  $R = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w$  on observe que ces deux égalités correspondent à peu près à l'égalité des rayons bleus et du rayon "réduit"  $R = \sqrt{\frac{|\ell|}{2}} w$  défini par le produit des champs incidents :  $R_{b,IR} \approx R$ .

<sup>3.</sup> On rappelle que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ \forall x \text{ et pour } x = n \in \mathbb{N} \ \Gamma(n) = n!.$ 

Appliquons maintenant le critère de Boyd aux expressions (4.57), pour cela réécrivons-les en fonction des longueurs de Rayleigh :

$$z_{R_b}(|\ell_b|+1) = \frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} z_{R_{IR}}(|\ell_{IR}|+1)$$
(4.58)

soit 
$$|\ell_b| + 1 = \frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} (|\ell_{IR}| + 1)$$
 (4.59)

Avec  $|\ell_{IR}| + |\ell_b| = |\ell|$  on a :

$$|\ell_b^{Boyd}| = \frac{\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b}(|\ell|+1) - 1}{\left(\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} + 1\right)} \tag{4.60}$$

On remarque que comme  $\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} \gg 1$  le membre de droite est toujours positif et cette équation a toujours une solution. Nous pouvons analyser cette expression suivant le signe de  $\ell$ .

#### • Cas $\ell > 0$

Dans ce cas l'expression (4.60) s'écrit :

$$\ell_b^{Boyd} = \frac{\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b}(\ell+1) - 1}{\left(\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} + 1\right)} \tag{4.61}$$

Nous avons tracé cette expression en fonction de  $\ell$  sur la figure (4.15) (droite verte). Pour plus de visibilité nous avons tracé deux graphiques : d'une part le cas où  $\ell \leq 15$  sur la figure (4.15a) et d'autre part le cas où  $15 < \ell \leq 30$  sur la figure (4.15b). Les valeurs de  $\ell_b$  les plus probables sont les valeurs entières proches de cette droite et telles que  $0 \leq \ell_b \leq \ell$  : nous avons tracé la doite  $\ell_b = \ell$  en rouge et représenté les valeurs les plus probables de  $\ell_b$  par des points bleus sur la figure (4.15).

On observe  $\ell_b = \ell$  jusqu'à  $\ell = 18$  puis  $\ell_b = \ell - 1$ . Comme  $\ell_{IR} = \ell - \ell_b$  cela signifie que



**FIGURE 4.15** – Valeurs de  $\ell_b$  attendues dans le cas du critère de Boyd lorsque  $\ell > 0$ 

 $\ell_{IR} = 0$  pour  $0 \le \ell \le 18$  puis  $\ell_{IR} = +1$  pour  $18 < \ell \le 30$ . Ces résultats sont cohérents avec les résultats expérimentaux des figures (4.12) et (4.13) et confirment les conclusions des expériences précédentes [129] et [3]. Ils s'expliquent par la grande différence de longueur d'onde entre le faisceau infrarouge et le faisceau bleu :  $\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} \approx 12, 5.$ 

• Cas  $\ell < 0$ 

Dans ce cas l'expression (4.60) s'écrit :

$$\ell_b^{Boyd} = \frac{\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b}(-\ell+1) - 1}{\left(\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} + 1\right)} \tag{4.62}$$

Nous l'avons tracée en vert sur la figure (4.16b) pour  $-15 \le \ell \le 0$  et sur la figure (4.16a) pour  $-30 \le \ell < 0$ . Les valeurs de  $\ell_b$  les plus probables sont les valeurs entières proches de cette droite et telles que  $\ell \le \ell_b \le 0$ . Comme dans le cas  $\ell > 0$  nous avons tracé en rouge la droite  $\ell_b = \ell$  et représenté les valeurs les plus probables de  $\ell_b$  par des points bleus. On



FIGURE 4.16 – Valeurs de  $\ell_b$  attendues dans le cas du critère de Boyd lorsque  $\ell < 0$ 

observe que  $\ell_b = \ell$  ( $\ell_{IR} = 0$ ) pour  $-18 \le \ell \le 0$  et  $\ell_b = \ell + 1$  ( $\ell_{IR} = -1$ ) pour  $-30 \le \ell < -18$ . Ces résultats sont symétriques au cas  $\ell > 0$ .

La probabilité d'obtenir une autre valeur de  $\ell_b$  sur le faisceau bleu va être donnée par la valeur de l'intégrale de recouvrement dont nous connaissons ici l'expression analytique (cf. équation (4.53)). Nous l'avons tracée en fonction de  $\ell_{IR}$  sur la figure (4.17) dans les cas  $\ell = -20, -11$  et +5 en la normalisant par la valeur maximale. On obtient ainsi le poids de chaque mode dans le champ final. On observe que le poids relatif de chaque mode autre que le mode principal augmente avec la valeur de  $\ell$ .

Nous avons alors simulé la figure de lentille tiltée (pour une focale de la lentille identique à celle utilisée dans l'expérience) pour une somme de modes  $LG_0^{\ell}$ . Le calcul complet a été réalisé par P. Vaity et al. [121] pour le cas d'un seul mode  $LG_0^{\ell}$ . Le cas pour une somme de modes LG se généralise aisément. Nous avons représenté le cas  $\ell = -11$  sur la figure (4.18) en prenant en compte quatre modes :  $\ell_b = -11, -10, -9$  et -8 et leur poids  $c_i$  donnés par le recouvrement c'est-à-dire que le champ bleu s'écrit :

$$E_b = \frac{\sum_{i=0}^{3} c_i L G_0^{\ell = -11+i}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{3} c_i^2}}$$
(4.63)



**FIGURE 4.17** – Recouvrement J dans le cas du critère de Boyd pour différentes valeurs de  $\ell_{IR}$  pour  $\ell$ =-20, -11 et +5

On observe que la figure n'est plus symétrique de part et d'autre de l'image contrairement au cas où seul le mode  $\ell = -11$  est présent et que le contraste des franges est dégradé. Ceci est confirmé par le profil d'intensité associé représenté sur la figure (4.18b). Dans l'ensemble cette simulation reproduit assez bien la figure expérimentale (cf. figures (4.13) et (4.14b)). La simulation considère néanmoins que le faisceau incident sur la lentille est parallèle ce qui n'est pas exactement le cas dans l'expérience. Ceci peut expliquer en partie les différences entre la figure expérimentale et la figure simulée. Pour de grandes valeurs de  $\ell$  un brouillage





des franges d'interférence serait donc le signe de la présence non négligeable de modes LG de  $\ell_b$  différents dans le faisceau bleu.

#### 4.2.7 Au-delà du critère de Boyd

Le modèle que nous avons développé dans la section (4.2.6) a pour hypothèse le critère de Boyd. Nous avons donc considéré  $w_1 = w_2$  or dans notre expérience les waists des faisceaux d'entrée ne sont pas exactement égaux, la valeur de  $w_2$  change avec  $\ell$ . Dans le cas réel il faut donc reprendre les différents accords de phase (4.47) et le recouvrement des champs (4.48)en prenant en compte les valeurs de  $w_1$  et  $w_2$ .

Pour déterminer les modes bleus possibles nous avons tracé les accords de phase de Gouy

#### Chapitre 4

et de phase de courbure ainsi que la valeur du recouvrement J en fonction des waists du faisceau bleu  $w_b$  et du faisceau infrarouge  $w_{IR}$  et ce pour plusieurs valeurs de  $\ell_{IR}$ . A la vue des résultats expérimentaux (cf. (4.2.4)) nous avons gardé les hypothèses que les modes bleu et infrarouge générés étaient des modes d'indice radial nul,  $LG_0^{\ell_b}$  et  $LG_0^{\ell_{IR}}$ , et que la longueur de Rayleigh de chaque faisceau était supérieure à la longueur L de la cellule. Avec ces deux hypothèses la valeur de J est donnée par l'expression (4.53), c'est une grandeur positive.

Les valeurs possibles de  $\ell_{IR}$  sont telles que les accords de phase de Gouy et de courbure sont tous les deux satisfaits. Lorsque plusieurs valeurs de  $\ell_{IR}$  permettent de satisfaire ces accords la valeur de  $\ell_{IR}$  la plus probable est celle qui donne la valeur de J maximale.

Nous avons représenté sur les figures (4.19), (4.20) et (4.21) la valeur de J en dix courbes de niveau pour  $\ell = +2$ , +11 et -20. Les valeurs de  $\ell$  ont été choisies pour une comparaison avec les images expérimentales des figures (4.12) et (4.13). Pour chaque valeur de  $\ell$  nous avons considéré cinq valeurs différentes de  $\ell_{IR}$ : 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ . Ces cinq cas sont numérotés de a) à e) sur les courbes (4.19), (4.20) et (4.21).

Nous avons ajouté sur chaque graphe la courbe correspondant à l'accord de phase de courbure (courbe cyan), laquelle ne dépend pas de  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$ . Cette courbe est donc identique pour les graphes a) à e) pour une même valeur de  $\ell$ . Nous avons également ajouté la courbe correspondant à l'accord de phase de Gouy (courbe verte) qui dépend de  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$ , cette courbe est donc différente pour les cas a) à e). La condition d'accord de phase azimutale est implicitement contenue dans chaque graphe : on fixe  $\ell$  et  $\ell_{IR}$  donc  $\ell_b = \ell - \ell_{IR}$ . Pour déterminer les valeurs possibles de  $\ell_{IR}$  on cherche l'intersection des courbes d'accord de phase de Gouy et d'accord de phase de courbure : on appelle ce point A (A' lorsqu'il y en a deux). Enfin nous avons tracé sur chaque graphe une condition supplémentaire sur les faisceaux bleu et infrarouge. Nous avons considéré que les faisceaux bleu et infrarouge devaient avoir la même longueur de Rayleigh que le faisceau à 776 nm soit  $z_{R_b} = z_{R_2}$  et  $z_{R_{IR}} = z_{R_2}$ . Cette condition peut se réécrire en fonction des waists des faisceaux sous la forme :

$$\begin{cases} w_{IR} = \sqrt{\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_2}} w_2 \approx 2, 6 \times w_2 \\ w_b = \sqrt{\frac{\lambda_b}{\lambda_2}} w_2 \approx 0, 74 \times w_2 \end{cases}$$
(4.64)

On observe que cette condition ressemble à la condition du critère de Boyd mais appliquée de façon restrictive à trois faisceaux du mélange à quatre ondes. On ne peut pas appliquer le critère de Boyd aux quatre faisceaux du mélange puisque de façon inhérente au montage expérimental  $z_{R_1} \neq z_{R_2}$ . On peut parler d'un "pseudo" critère de Boyd.

Les conditions (4.64) s'expriment par deux droites horizontales et verticales (en bleu) sur les figures (4.19), (4.20) et (4.21). Nous notons B leur point d'intersection. L'emplacement de B ne dépend pas de  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$ .

On note alors que :

- Si le critère de Boyd s'appliquait alors A coïnciderait avec B
- Il existe des cas où les courbes d'accord de phase ne se croisent pas, ces cas sont donc exclus pour la génération de bleu (cf. par exemple le graphe d) sur la figure (4.20))
- Les cas les plus favorables sont ceux pour les quels le point A est au plus proche du maximum des courbes de niveau de J

Analysons maintenant les figures (4.19), (4.20) et (4.21).

**Cas**  $\ell = 2$  La figure (4.19) présente le cas  $\ell = 2$ . La valeur de  $\ell_{IR}$  la plus favorable est  $\ell_{IR} = 0$  présentée sur le graphe c). On observe deux points A dans les zones 2 et 5. Le point B est quant à lui en zone 3. Cela correspond donc à  $\ell_b = \ell$ , c'est ce que nous avons observé expérimentalement sur la figure (4.12). On observe également deux autres points A en zone 8 et 11 sur les graphes d) et e), beaucoup plus éloignés du maximum de J donc moins favorables.

**Cas**  $\ell = 11$  La figure (4.20) présente le cas  $\ell = 11$ . Le cas où A se situe au plus proche du maximum de J, entre les zones 1 et 2, est le cas  $\ell_{IR} = -1$  sur le graphe b). Dans ce cas cela correspond à  $\ell_b = \ell + 1$ . Ce résultat n'est pas en accord avec le modèle utilisant le critère de Boyd développé en section (4.2.6) où nous avions prévu  $\ell_b = \ell$ . Néanmoins il n'est pas invalidé par les images expérimentales de la figure (4.13) puisque nous avions une incertitude sur la valeur de  $\ell_b$  (incertitude d'une frange d'interférence).

**Cas**  $\ell = -20$  Enfin la figure (4.21) présente le cas  $\ell = -20$ . La valeur de  $\ell_{IR}$  la plus favorable est  $\ell_{IR} = +1$ , graphe d), où A est situé en zone 4. Cela correspond à  $\ell_b = \ell - 1$ . Le cas  $\ell_{IR} = +2$  sur le graphe e) possède également un point d'intersection A mais beaucoup plus éloigné du maximum de J, en zone 9 donc moins favorable.

De plus on observe que sur les graphes a), b) et c) les deux courbes d'accord de phase sont très proches l'une de l'autre et que la distance minimale entre les deux est située dans la zone du maximum de J. Le comportement de ces deux courbes étant très sensible aux valeurs de  $w_1$  et  $R_{\ell}$  utilisées dans le modèle, en prenant en compte les incertitudes sur  $w_1$  et  $R_{\ell}$  les courbes pourraient se croiser dans un ou plusieurs des cas a), b) et c). Ceci est conforté par les images expérimentales où les franges d'interférence à la lentille tiltée étaient brouillées du fait de la présence de plusieurs valeurs de  $\ell_b$  sur le faisceau bleu.

**Bilan** En conclusion nous venons de voir une approche semi-analytique permettant d'améliorer le modèle développé dans la section (4.2.6) et qui reposait sur la valeur optimale du recouvrement J associée au critère de Boyd. Nous avons utilisé un cadre beaucoup moins restrictif en relachant le critère de Boyd. Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux. Néanmoins cette approche peut encore être affinée en considérant une tolérance plus importante sur les conditions d'accord de phase (courbes vertes et cyans). En effet nous avons considéré jusqu'ici des conditions d'accord de phase strictes mais on pourrait définir une tolérance sur les équations (4.47) et considérer des bandes d'intersection plutôt qu'un seul point d'intersection.

#### 4.2.8 Conclusion

Dans cette première étude nous avons validé notre montage de conversion d'OAM entre  $\ell = -30$  et  $\ell = +30$  à partir d'un faisceau gaussien et d'un mode de Laguerre-Gauss. Nous avons montré que le processus était régi par les conditions habituelles d'un processus non-linéaire à savoir un bon recouvrement des faisceaux et différents accords de phase auquelles sont ajoutées des conditions propres aux modes LG. Nous avons en particulier mis en évidence la conservation de la phase azimutale et de la phase de Gouy au cours du processus.



**FIGURE 4.19** – Accord de phase de courbure (courbe cyan), accord de phase de Gouy (courbe verte) et valeur du recouvrement J (courbes de niveaux) en fonction de  $w_b$  et  $w_{IR}$ (en  $\mu$ m) pour différentes valeurs de  $\ell_{IR}$  dans le cas où  $\ell = 2$ . Les deux droites bleues qui se croisent représentent la condition du critère de Boyd.

106



**FIGURE 4.20** – Accord de phase de courbure (courbe cyan), accord de phase de Gouy (courbe verte) et valeur du recouvrement J (courbes de niveaux) en fonction de  $w_b$  et  $w_{IR}$ (en  $\mu$ m) pour différentes valeurs de  $\ell_{IR}$  dans le cas où  $\ell = 11$ . Les deux droites bleues qui se croisent représentent la condition du critère de Boyd.

 $\ell = +11$


FIGURE 4.21 – Accord de phase de courbure (courbe cyan), accord de phase de Gouy (courbe verte) et valeur du recouvrement J (courbes de niveaux) en fonction de  $w_b$  et  $w_{IR}$  (en  $\mu m$ ) pour différentes valeurs de  $\ell_{IR}$  dans le cas où  $\ell = -20$ . Les deux droites bleues qui se croisent représentent la condition du critère de Boyd.

Du fait de ces conditions le faisceau bleu n'acquiert pas systématiquement l'OAM d'entrée  $\ell$  contrairement aux expériences antérieures, sa valeur diminue lorsque  $\ell$  augmente. Nous avons également montré que l'efficacité de la conversion était principalement gouvernée par le produit des intensités des faisceaux d'entrée. Enfin nous avons montré que si le faisceau gaussien d'entrée a un waist bien inférieur au rayon du mode LG d'entrée le faisceau bleu généré se comporte comme un mode de Laguerre-Gauss de grande pureté.

Ce premier travail présente ainsi une avancée importante sur la conversion de vortex du fait des grandes valeurs de  $\ell$  transférées et sur la compréhension du processus de mélange à quatre ondes associé. De plus le fait que le faisceau créé ait une propagation gaussienne permet denvisager la transmission de l'OAM sur d'assez longues distances sans altération. Dans une autre perspective ce système présenterait également des avantages pour la réalisation de lasers dont le mode de sortie serait un mode de Laguerre-Gauss pur, de tels systèmes étant encore peu présents sur le marché en particulier dans le domaine spectral bleu.

Néanmoins peut-on espérer, à partir ce cette étude, convertir des valeurs de  $\ell$  encore plus grandes et augmenter le  $\ell$  de coupure? Nous analysons ces questions dans la section qui suit.

## 4.3 Augmentation de l'hélicité transférée

#### 4.3.1 Motivation

L'étude présentée ici a pour but d'investiguer s'il est possible de convertir de très grandes valeurs d'OAM sans changer totalement le montage optique précédent. L'idée est d'augmenter le recouvrement des deux faisceaux pompes pour de plus grandes valeurs de  $\ell$ . Nous avons vu précédemment que le paramètre relatif  $w_1/R_2$ , où  $w_1$  est le waist du faisceau gaussien et  $R_2$  le rayon du faisceau LG, était le paramètre clef du transfert. Pour augmenter le recouvrement nous pouvons ainsi augmenter la taille du faisceau gaussien ou diminuer celle du LG. Dans notre cas nous avons choisi d'augmenter la taille du gaussien. Nous avons étudié l'impact d'un tel changement non seulement sur le transfert de l'OAM mais aussi sur l'efficacité de ce transfert. Le montage est une variante du montage précédent, nous l'avons présenté dans la section (3.4.1). Le nouveau waist du gaussien étant de  $w'_1 \approx 1,3$  mm à partir de l'expression (4.24) pour le  $\ell$  de coupure développée précédemment nous nous attendons à  $|\ell_c| = 30$  dans cette configuration.

#### 4.3.2 Transfert de l'OAM

Nous avons commencé par observer la forme du faisceau bleu à l'aide de la branche de détection b). Nous nous plaçons au maximum de l'émission du bleu soit  $\delta = 1,5$  GHz (cf. section (3.3.3)). Des images sont présentées sur la figure (4.22).

Nous observons que, pour chaque valeur de  $\ell$ , le faisceau bleu a une forme d'anneau avec un pourtour plutôt homogène. Nous observons une forme d'anneau jusqu'à  $|\ell| = 50$ . Ceci est cohérent avec le fait que le faisceau gaussien recouvre mieux le faisceau LG au départ. L'anneau bleu est également plus fin pour de grandes valeurs de  $\ell$ , nous l'interprétons par le fait que la largeur du faisceau LG rouge diminue quand  $\ell$  augmente comme on peut le voir sur la figure (3.5).

Nous observons enfin la présence de plusieurs anneaux supplémentaires (on le voit très bien pour  $\ell = 20$  de la figure (4.22) dont nous donnons le profil sur la figure (4.23b)). Ces anneaux supplémentaires font penser de par leur intensité et leur écart à l'anneau principal aux anneaux supplémentaires également observables sur le LG rouge (cf. figure (3.5)). Nous avons



**FIGURE 4.22** – Intensité du faisceau bleu pour différentes valeurs de  $\ell$  obtenue dans la deuxième configuration

vu au chapitre 1 qu'ils étaient la signature de la présence de modes p dans le faisceau LG créé par le SLM. En mesurant à partir d'un profil d'intensité le ratio entre le maximum d'intensité pour l'anneau principal et le maximum d'intensité pour les anneaux supplémentaires, par exemple pour  $\ell = 20$ , nous trouvons pour le rouge : en moyenne 40% pour le deuxième anneau et 17% pour le troisième anneau. Pour le LG bleu nous trouvons en moyenne 35% pour le deuxième anneau et 14% pour le troisième anneau. Les profils sont donnés sur la figure (4.23). Dans les deux cas les ratios sont très proches ce qui laisse penser que l'origine des anneaux supplémentaires du faisceau bleu est un meilleur recouvrement du faisceau gaussien avec les anneaux supplémentaires du LG rouge.



**FIGURE 4.23** – Profil de l'intensité pour  $\ell = 20$  pour (a) le faisceau rouge et (b) le faisceau bleu

Nous avons ensuite analysé la valeur de l'OAM du faisceau bleu. Nous avons d'abord utilisé la méthode de la lentille tiltée mais celle-ci s'est avérée insatisfaisante : les franges d'interférence sont serrées et ne sont pas dénombrables correctement. Néanmoins elle montre quand même la présence d'un OAM de signe égal à celui de l'OAM du LG rouge : voir le cas  $\ell = 20$  sur l'image (4.24a).

Nous avons alors essayé la méthode basée sur un interféromètre de Mach-Zehnder (DMZ, cf. section (1.5.2)). Cette voie est dénommée e) sur le schéma (3.14). Rappelons que dans ce



cas la figure d'interférence est  $2|\ell|$  pétales disposées en cercle. Nous présentons des images figure (4.24b).

 $\ell = +2$ 

**FIGURE 4.24** – (a) Interférences par la lentille tiltée obtenue pour  $\ell = +20$ , (b) images obtenues en sortie de l'interféromètre de Mach-Zehnder (DMZ) pour différents  $\ell$  (les cas  $\ell = -2$  et  $\ell = +2$  ont été grossis de 10%)

(b)

 $\ell = +10$ 

 $\ell = +15$ 

 $\ell = +5$ 

Pour  $\ell = 2$  et  $\ell = -2$  on observe quatre lobes soient  $2\ell$  lobes. Pour de plus grandes valeurs de  $\ell$  il y a une indétermination sur le nombre de lobes (voir le cas  $\ell = -8$  et  $\ell = 5$ ) où l'on peut compter jusqu'à quatre lobes supplémentaires par rapport à la valeur attendue. De même qu'avec la lentille tiltée la figure d'interférence est brouillée pour de grandes valeurs de  $\ell$  avec seulement deux zones où l'on peut compter des franges.

D'après le modèle que nous avons développé dans la section (4.2.5),  $|\ell| + 1$  modes bleus peuvent être générés. Nous pouvons ainsi supposer que le brouillage des figures d'interférences est dû à la présence de plusieurs modes de  $\ell$  différents comme dans le cas de la lentille tiltée (cf. figure (4.18)).

Nous avons simulé sur la figure (4.25b) la figure d'interférence obtenue pour  $\ell = +15$  (dans le cas du critère de Boyd) lorsqu'on considère que le champ bleu de sortie est composé de cinq modes :  $\ell_b = 15$ , 14, 13, 12, 11 et 10. Le poids de chaque mode est donné par la valeur de l'intégrale de recouvrement J des quatre champs, expression (4.53). J est tracée normalisée sur la figure (4.25a). L'image expérimentale dans la même palette de couleur est



présentée sur la figure (4.25c) pour une meilleure comparaison. Si on compare les images

**FIGURE 4.25** – (a) Intégrale de recouvrement J (normalisée), (b) simulation de la figure d'interférence DMZ et (c) image expérimentale pour  $\ell = +15$ 

(4.25b) et (4.25c) on observe qu'elles ont une forme et une structure similaire : l'intensité de l'anneau est plus forte sur une moitié que sur l'autre, deux zones présentent des franges avec un contraste très faible voire nul et deux zones présentent un bon contraste des franges d'intérerférence. On compte  $2\ell$  franges sur la simulation mais sur l'image expérimentale on peut pas déterminer un nombre précis de franges. Cette différence peut s'expliquer par la prise en compte d'un nombre de modes insuffisant dans la simulation ou une erreur due à l'approximation du critère de Boyd que nous avons utilisée.

Nous pouvons conclure que dans l'ensemble la simulation reproduit assez bien la figure expérimentale et conforte le modèle que nous avons utilisé.

#### 4.3.3 Efficacité du processus en fonction de $\ell$

Nous avons mesuré à la photodiode la puissance bleue  $P_b$  en fonction de  $\ell$  avec les puissances des faisceaux pompes,  $P_1$  et  $P_2$ , constantes. Nous avons repris la procédure décrite dans la section (4.2.2). Néanmoins comme les anneaux bleus sont de plus en plus grands à mesure que  $\ell$  augmente pour s'assurer que toute la lumière arrivait bien sur la photodiode nous avons utilisé une lentille de focale 1000 mm pour focaliser le faisceau. Cette lentille n'induit pas de pertes car elle est traitée pour transmettre le bleu (réflexion R de 0.46% à 420 nm). En prenant en compte les pertes décrites dans la section (4.2.2) nous trouvons que la puissance bleue émise dans la cellule est de 4.4 µW pour  $\ell = 1$  et 30 nW pour  $\ell = 40$ . L'efficacité de la conversion  $\eta_{\ell}$  est définie comme dans la section (4.2.2) par la relation (4.15). Nous obtenons  $\eta_1 = 3, 7.10^{-7}$  mW<sup>-1</sup> pour  $\ell = 1$  et  $\eta_{40} = 2, 5.10^{-9}$  mW<sup>-1</sup> pour  $\ell = 40$ . La courbe de l'efficacité est présentée sur la figure (4.26). Pour la comparer avec la configuration précédente nous l'avons normalisée par rapport à la valeur de  $\ell = 5$  et remettons la figure (4.6) à la même échelle à côté.



**FIGURE 4.26** – Efficacité normalisée (au point  $\ell = 5$ ) pour (a)  $w_1 = 0.17$  mm et (b)  $w_1 = 1.3$  mm. La ligne rouge définit la valeur du  $\ell$  de coupure.

Nous observons un plateau jusqu'à  $\ell = 10$  puis une chute de l'efficacité au-delà contrairement au cas précédent où la chute débutait à  $\ell = 5$ . De plus la chute est moins abrupte que dans le cas précédent, deux décades au lieu de trois.

Ces deux résultats peuvent s'interpréter intuitivement de cette façon : en augmentant le waist du faisceau gaussien nous avons augmenté le recouvrement entre les deux faisceaux d'entrée donc le processus est efficace pour une plus grande plage de  $\ell$ . Néanmoins comme la puissance du faisceau gaussien est restée constante son intensité a diminué d'où une puissance de bleu moindre entre les deux configurations pour des  $\ell$  identiques. Ceci est illustré sur la figure (4.27) (nous avons cette fois normalisé le gaussien à 0,5). Comme précédemment nous



**FIGURE 4.27** – Schéma du recouvrement des intensités d'entrée pour (a)  $\ell = 2$ , (b)  $\ell = 5$  et (c)  $\ell = 10$ 

avons défini un  $\ell$  de coupure et l'avons représenté par une ligne rouge sur la figure (4.26). Dans le cas de la première configuration nous avions  $\ell_c = 2 - 3$ , dans cette deuxième configuration nous obtenons  $\ell_c = 10$ . Il y a donc un facteur 3 sur  $\ell_c$  entre les deux configurations. D'après l'expression (4.24) nous attendions  $\ell_c = 30$ , cette différence est probablement due à l'approximation (4.23) utilisée pour déterminer  $\ell_c$ .

Le comportement de l'efficacité s'explique comme dans la section (4.2.2) par le fait que la puissance de bleu émise est proportionnelle au recouvrement  $K_{\ell}$  des intensités incidentes donné par l'expression (4.21). Nous avons tracé le recouvrement normalisé, expression (4.22), en fonction du paramètre *a*. Ceci est représenté sur la figure (4.28). La valeur optimale de *a* est cette fois-ci 0,08 et retranscrit également très bien le comportement expérimental.



**FIGURE 4.28** – Recouvrement des intensités  $K_{\ell}$  pour la deuxième configuration avec  $a = \frac{R_0}{w_1}$ 

Comme précédemment la valeur de *a* correspondant aux valeurs de  $w_1$  et  $R_0$  déterminées expérimentalement ( $w_1 = 1, 27 \text{ mm}$  et  $R_0 = 0,045 \text{ mm}$ ) est tracée en pointillé.

#### 4.3.4 Conclusion

Nous pouvons conclure que l'augmentation de la taille du faisceau gaussien d'un facteur 8 a permis d'augmenter grandement la valeur de l'OAM transférée : de  $\ell = -50$  à +50. La conversion a une efficacité constante sur une plage de  $\ell$  trois fois plus grande. Ceci est intéressant en vue d'augmenter la base de codage de l'information. Néanmoins cela s'est fait au prix d'une perte de puissance bleue d'un facteur environ 4 (pour  $\ell = 30$ ). Une telle baisse n'est pas génante pour certaines applications notamment d'optique quantique, lesquelles requièrent très peu de puissance lumineuse. En continuant d'augmenter la taille des faisceaux d'entrée on pourrait espérer augmenter encore l'OAM transféré.

Pour augmenter la puissance bleu émise tout en gardant les mêmes valeurs de  $P_1$  et  $P_2$  on pourrait essayer d'utiliser une autre transition atomique. En effet il est possible d'obtenir de la lumière bleue à partir d'autres niveaux que le niveaux  $5D_{5/2}$ , par exemple en excitant le niveau  $5D_{3/2}$  ou le niveau  $7S_{1/2}$ . Nous étudions le cas du niveau  $5D_{3/2}$  dans la suite.

## 4.4 Variante : conversion utilisant la transition $5S_{1/2} - 5D_{3/2}$

Nous avons juqu'ici travaillé sur le rayonnement bleu obtenu à partir du peuplement du niveau  $5D_{5/2}$  du rubidium. Comme le niveau 5D possède deux sous-niveaux,  $5D_{5/2}$  et  $5D_{3/2}$ , il est également possible d'obtenir un rayonnement bleu à partir du niveau  $5D_{3/2}$ . En effet ce niveau peut également se désexciter sur le niveau  $6P_{3/2}$  avec un rapport de branchement de 0,06 mais aussi sur le niveau  $6P_{1/2}$  avec un rapport de branchement de 0,32 [67] (cf. figure (4.29)). Les transitions  $6P_{3/2} \rightarrow 5S_{1/2}$  et  $6P_{1/2} \rightarrow 5S_{1/2}$  sont séparées d'environ 1,4 nm, ce qui est bien inférieur à la bande passante des filtres que nous utilisons. Comme les transitons  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{3/2}$  et  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$  sont séparées de 0,18 nm le laser TiSa que nous utilisons permet également d'exciter le niveau  $5D_{3/2}$  et nous avons fait l'expérience. L'alignement et les optiques restent identiques. Nous nous plaçons également à 130°C et on a toujours une puissance  $P_1 \approx 130$  mW pour le laser à 780 nm et  $P_2 \approx 100$  mW pour le laser à 776 nm.



**FIGURE 4.29** – Quelques rapports de branchement associés à la génération de lumière bleue dans le rubidium

Nous mesurons une puissance de bleu maximale lorsque les deux lasers sont proches de la résonnance atomique c'est-à-dire  $\delta \approx 0$ . Nous mesurons une puissance de 25,5 nW pour  $\ell = 1$  soit environ 0,03% de la puissance mesurée pour  $\ell = 1$  dans le cas de la transition via le niveau  $5D_{5/2}$ . Des images de la forme du faisceau sont présentées sur la figure (4.30) pour de petites valeurs de  $\ell$ , au delà la caméra n'était pas assez sensible pour détecter le faisceau. On observe bien une forme d'anneau comme pour la transition via le niveau  $5D_{5/2}$ . Nous avons ensuite vérifié la valeur de l'OAM du faisceau. Nous retrouvons  $\ell_b = \ell$  pour les valeurs ayant pu être mesurées. En effet le peu de puissance détectée ne permet pas d'obtenir une bonne résolution des franges d'interférence. Le cas pour  $\ell = 4$  est présenté sur la figure (4.31).



**FIGURE 4.30** – Images du faisceau bleu pour différentes valeurs de  $\ell$  dans le cas de la transition via le niveau  $5D_{3/2}$ 

Si on prend en compte la transition vers le niveau  $6P_{3/2}$  les rapports de branchement (figure (4.29)) ne peuvent pas expliquer à eux seuls la différence d'efficacité observée, il faut considérer l'excitation des niveaux  $5D_{5/2}$  et  $5D_{3/2}$ . Le modèle que nous avons développé précédemment à partir de la pulsation de Rabbi effective  $\Omega_{eff}$ , donnée par l'expression (3.10), n'est pas valable lorsque le detuning  $\delta$  est nul. Nous ne pouvons donc pas l'appliquer ici, il faut adopter une approche différente par exemple en calculant les éléments de matrice  $\left< F_g, m_{F_a} | er_q | F_e, m_{F_e} \right>$  pour les deux transitions. Ceci pourra être fait ultérieurement.

Malgré le peu de puissance bleue générée ce résultat montre qu'il est possible de convertir des vortex à partir de la transition via le niveau  $5D_{3/2}$ . Ceci est particulièrement intéressant car le niveau  $5D_{3/2}$  peut également se désexciter vers le niveau  $5P_{1/2}$  en émettant un photon à 762 nm puis retomber dans le niveau fondamental en émettant un photon à 795 nm. Ceci n'est pas possible depuis le niveau  $5D_{5/2}$ . On pourrait ainsi réaliser un mélange à quatre ondes quasi non-dégénéré puisque toutes les longueurs d'onde impliquées sont très proches [131]. On s'attend ainsi à obtenir des valeurs différentes pour les OAM des ondes générées. En effet nous avons vu dans la section (4.2.6) que dans notre cas la valeur de l'OAM transférée au faisceau bleu dépendait de la grande différence de longueur d'onde entre le photon bleu et le photon infrarouge. Cet autre schéma d'excitation permettrait d'utiliser le modèle que nous avons développé dans une autre configuration afin de tester sa robustesse.



**FIGURE 4.31** – (a) Transformation du faisceau bleu par la lentille tiltée pour  $\ell = 4$ , (b) profil d'intensité associé

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé la conversion d'un vortex optique rouge d'OAM  $\ell$  en un vortex bleu pour des valeurs de  $\ell$  allant de -50 à +50. Ceci a été obtenu par mélange à quatre ondes réalisé dans une vapeur de rubidium via la transition  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  à l'aide d'un faisceau gaussien à 780 nm et d'un mode de Laguerre-Gauss à 776 nm. La troisième onde du mélange, à 5230 nm, est obtenue par émission spontanée amplifiée entre les niveaux  $5D_{5/2}$  et  $6P_{3/2}$ . Elle n'est pas détectée dans cette expérience. Dans le cas où les accords de phase sont respectés et où les différentes ondes du mélange ont un bon recouvrement une onde bleue à 420 nm est générée sous forme de vortex optique. Du fait de l'accord de phase azimutale l'OAM de ce vortex optique peut prendre différentes valeurs. Néanmoins la grande différence de longueur d'onde entre les ondes bleues et infrarouges et le recouvrement des différents faisceaux impliquent qu'une valeur de  $\ell$  est principalement créée. Pour des valeurs de l'OAM d'entrée  $\ell$  inférieures à 14 la valeur majoritaire est  $\ell_b = \ell$  ce qui assure un transfert de l'OAM initial. Dans ce cas l'OAM du faisceau infrarouge est nul. Au delà le fraisceau infrarouge acquiert un OAM non nul dont la valeur augmente progressivement.

L'efficacité du processus dépend principalement du produit des intensités des faisceaux d'entrée. Ainsi on peut espérer augmenter la valeur de l'OAM transférée en adaptant la taille des faisceaux d'entrée. Par la suite, avec cette technique, on peut espérer transférer des valeurs de  $\ell$  de quelques centaines à plusieurs milliers (en utilisant un miroir de phase par exemple). La compréhension complète du processus de conversion nécessiterait cependant de pouvoir vérifier expérimentalement les résulats que nous avons déduits pour la quatrième onde du mélange, le faisceau infrarouge, laquelle n'est pas observable actuellement. Cela requiert l'utilisation d'une cellule dans un matériau autre que le verre, par exemple le saphir. Une autre possibilité serait d'utiliser une autre configuration atomique afin que les quatre ondes soient dans le domaine visible par exemple via les niveaux  $5P_{1/2}$  et  $5D_{3/2}$ .

La levée d'ambiguité sur la valeur de l'OAM de l'onde bleue pourrait être obtenue en ajoutant un faisceau infrarouge comme troisième onde pompe afin de créer un "vrai" mélange à quatre ondes. En effet une telle situtation fixe automatiquement la valeur de l'OAM de sortie.

Ce travail présente un gain d'un facteur 10 sur la valeur de  $\ell$  transférée par rapport aux expériences antérieures. C'est un pas important vers le stockage de grandes valeurs d'OAM et l'utilisation de celles-ci comme variables de codage, en particulier quantiques. Il pourrait être adapté pour transférer des superpositions d'OAM ou réaliser un transfert à partir de deux vortex optiques distincts. Nous analysons ces deux dernières possibilités dans la suite de ce manuscrit.

# Chapitre 5

## Conversion de multi-vortex coaxiaux

### Sommaire

5.1	Intro	$\mathbf{r}$ oduction $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $121$			
<b>5.2</b>	Conversion d'une superposition de vortex				
	5.2.1	Génération d'une superposition de vortex par modulation de la			
		phase azimutale			
	5.2.2	Superposition de vortex coaxiaux			
	5.2.3	Conversion rouge-bleu d'une superposition de vortex coaxiaux 125			
	5.2.4	Conclusion			
5.3	Conversion d'une paire de vortex				
	5.3.1	Conversion d'une paire d'OAM de même signe			
	5.3.2	Conversion d'une paire d'OAM de signe contraire			
	5.3.3	Bilan			
5.4	Inte	rprétation dans le cadre du critère de Boyd 135			
	5.4.1	Premier cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de même signe $\ldots \ldots \ldots$			
	5.4.2	Deuxième cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de signe contraire $\ldots \ldots \ldots$			
<b>5.5</b>	Con	clusion			

## 5.1 Introduction

Nous avons réalisé dans le chapitre précédent un sytème qui, par l'intermédiaire d'un mélange à quatre ondes dans une vapeur de rubidium, permet de convertir un vortex optique rouge en un vortex optique bleu et ce pour de grandes valeurs d'OAM, typiquement de  $\ell = -50$  à  $\ell = +50$ . Nous pouvons dire que nous avons manipulé 101 états d'OAM différents si on compte l'état  $\ell = 0$ . Nous avons vu que la physique du processus était régie par des lois de conservation notamment la conservation de la phase azimutale. Ce travail est un pas important vers la réalisation de mémoire quantique à OAM et plus généralement vers l'utilisation de l'OAM comme variable dans les protocoles d'information quantique. Néanmoins comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 l'intérêt principal de l'OAM est qu'il offre la possibilité d'augmenter grandement la dimensionnalité de l'espace sur lequel peut être codée l'information quantique. Pour l'instant cette propriété n'a pas été mise à profit car notre information de départ était codée sur un seul vecteur de base. Une des façons d'y parvenir est d'utiliser des superpositions de vortex. Cependant des superpositions avec un nombre arbitraire et grand de vortex ne sont pas forcément simples à réaliser. Comme nous le verrons on peut y arriver en modulant sinusoïdalement la phase d'un mode LG, technique qui a été développée pour créer des potentiels lumineux à la carte [38][44]. Nous utiliserons alors cette technique pour générer une superposition de vortex puis analyserons la superposition de vortex dans le cas où un des faisceaux incidents porte cette superposition. D'autre part il est également intéressant de pouvoir réaliser des opérations avec l'OAM, nous verrons dans la seconde partie de ce chapitre qu'il est possible de réaliser des opérations arithmétiques de base avec notre montage sous certaines conditions.

## 5.2 Conversion d'une superposition de vortex

Dans cette partie nous nous intéressons à la conversion d'une superposition de vortex c'est-à-dire le cas où un des faisceaux d'entrée du mélange à quatre ondes porte une somme de vortex d'OAM  $\ell_i$ . Dans ce cas le champ électrique du faisceau peut s'écrire :

$$E_{sup} = \sum_{i} c_i |\ell_i\rangle \tag{5.1}$$

avec  $c_i$  des coefficients réels ou complexes tels que  $\sum_i |c_i|^2 = 1$ .

Il existe plusieurs façons de créer de telles superpositions. La plus simple est de générer deux (ou plusieurs) vortex optiques de façon indépendante, par exemple à l'aide de deux SLM ou deux SPP, puis de les combiner à l'aide d'une lame séparatrice. Cependant cette méthode n'offre pas une grande flexibilité et le nombre de modes superposés est petit.

Une méthode développée par S. Franke-Arnold et al. [51], repose sur l'interférence de deux modes LG d'OAM opposé ( $\ell$  et  $-\ell$ ) ou différent ( $\ell_1$  et  $\ell_2$ ). Dans le premier cas les modes LG sont réalisés à l'aide d'un SLM dont l'hologramme en hélice contient un réseau de diffraction. Deux faisceaux gaussiens dont l'incidence respective correspond aux ordre 1 et -1 viennent éclairer le SLM et se recombinent après réflexion sur celui-ci dans l'ordre 0 du réseau. On obtient alors la superposition d'un mode  $LG_0^{\ell}$  et d'un mode  $LG_0^{-\ell}$ . Dans le deuxième cas le SLM est divisé en deux parties comportant chacune un hologramme associé à une valeur de  $\ell$ . Un faisceau laser est envoyé sur chacune de ces parties. L'incidence des lasers permet leur recombinaison après réflexion. L'avantage d'une telle méthode est de pouvoir changer facilement les valeurs de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sans changer l'alignement. Par contre elle nécessite d'avoir deux faisceaux séparés spatialement qu'il faut recombiner par la suite et l'alignement est en général délicat. De plus même si cette méthode peut être adaptée pour générer une superposition contenant plus que deux modes, en pratique on atteint difficilement des superpositions au delà de quatre modes. Cette méthode a été utilisée par G. Walker et al. pour transférer une superposition de deux vortex de même  $\ell$  sur le faisceau bleu [129].

D'autres techniques se basent sur le fait qu' un OAM non entier correspond à une superposition de vortex <sup>1</sup>[60]. Des superpositions ont ainsi pu être obtenues en créant des faisceaux d'OAM non-entier à l'aide d'une lame de phase en spirale de pas fractionnaire [95]. Par exemple S. S. R. Oemrawsingh et al. [94] ont utilisé une telle lame dans une expérience de SPDC pour créer des états intriqués de grande dimensionnalité. Cependant pour créer des superpositions différentes l'utilisation d'une lame nécessite de changer son pas ou de tourner celle-ci. Un SLM pourrait donc être préféré.

Nous allons utiliser une autre méthode qui repose sur la modulation de la phase azimutale d'un mode LG. Elle a été étudiée en détails dans le cadre de la thèse de F. Diry [44] pour générer des potentiels lumineux à géométrie variée. Nous allons décrire cette méthode puis l'appliquerons pour générer des superpositions de vortex sur un faisceau rouge utilisé ensuite pour la conversion d'OAM.

### 5.2.1 Génération d'une superposition de vortex par modulation de la phase azimutale

Nous reprenons ici les principaux résulats de la thèse de F. Diry.

Une manière d'obtenir une superposition de vortex est de moduler la phase azimutale  $\ell\theta$  d'un mode LG, par exemple par une fonction sinusoïdale, soit :

$$\varphi(\theta) = \ell(\theta + a \times \sin(m(\theta - \theta_0))) \tag{5.2}$$

avec *m* un entier que l'on nomme facteur de bande latérale, a un réel positif que l'on nomme amplitude de modulation et  $\theta_0$  l'origine de la modulation que l'on prendra égale à 0 par la suite.

Il est connu que le terme de phase supplémentaire  $e^{ia\ell\sin(m\theta)}$  se décompose en série de Fourier sous la forme :

$$e^{ia\ell\sin(m\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a\ell)e^{in\times m\theta}$$
(5.3)

où  $J_n$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. Le champ électrique s'écrit alors :

$$E = A e^{i\ell\theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a\ell) e^{in \times m\theta}$$
  
=  $A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a\ell) e^{i(\ell+n \times m)\theta}$  (5.4)

avec A l'amplitude du champ initial à qui on impose  $\varphi(\theta)$ . L'expression (5.4) contient une somme de vortex optiques d'amplitude  $A \times J_n(a\ell)$  et d'OAM  $\ell + n \times m$ . On peut la réécrire pour regrouper les termes  $\ell \pm nm$ :

$$E = A \left( b_0 e^{i\ell\theta} + b_{-1} e^{i(\ell-m)\theta} + b_1 e^{i(\ell+m)\theta} + b_{-2} e^{i(\ell-2m)\theta} + b_2 e^{i(\ell+2m)\theta} + \cdots \right)$$
(5.5)

où  $b_n = J_n(a\ell)$ . On voit apparaitre des vortex d'OAM  $\ell - mn$  et  $\ell + mn$ . C'est l'analogue des bandes latérales de la modulation de fréquence, c'est pourquoi nous avons choisi d'appeler a facteur de bande latérale. Regardons maintenant l'amplitude des bandes latérales  $b_n$ :

<sup>1.</sup> Je renvoie le lecteur à l'annexe (C) pour la définition de l'OAM d'une superposition de vortex.

- tout d'abord  $b_n$  ne dépend pas de m. Cela permet de générer des modes qui se recouvrent ou pas
- lorsque n est pair les coefficients  $b_n$  sont de même signe, si n est impair ils sont de signe contraire :

$$b_{2n+1} = -b_{2(-n)+1} \tag{5.6}$$

$$b_{2n} = b_{2(-n)} \tag{5.7}$$

Cette propriété est inhérente à la méthode et on ne peut donc pas ajuster la phase relative des bandes latérales : si n est pair elles sont en phase et si n est impair elles sont en opposition de phase.

— à n donné  $b_n$  dépend du produit  $a\ell$ .



FIGURE 5.1 – Principe de la modulation en bandes latérales

Nous présentons les premiers coefficients  $b_n$  (pour  $n \ge 0$ ) aini que leur carré dans le cas où  $\ell = 8$  en fonction de a sur la figure (5.2). On observe que, du fait des propriétés des fonctions de Bessel, il est possible d'annuler certains coefficients seulement en modifiant la valeur de a. On peut ainsi créer des superpositions de deux, trois, ... modes. Par exemple le cas a = 0, 1 contient un mode principal ( $\ell = 8$ , on dit aussi fondamental) et deux bandes latérales ( $\ell = 8 - m$  et  $\ell = 8 + m$ ). Le cas a = 0, 3 permet d'annuler le fondamental et de ne conserver que deux paires de bandes latérales,  $\ell \pm m$  et  $\ell \pm 2m$ , en proportion identique. Ce cas permet de générer une superposition avec un nombre pair de modes.

Nous donnons les valeurs de ces coefficients au carré  $b_n^2$  pour différentes valeurs de *a* dans la table (5.1). Ce sont principalement ces valeurs que nous utiliserons par la suite. Du fait de la normalisation du champ *E* on doit avoir  $\sum_n b_n^2 = 1$ . Nous considérons qu'on mode est non

$\ell = 8$	a=0,1	$a{=}0,2$	$a{=}0,5$	$a{=}0,8$
$b_0^2$	0,7162	0,2074	$0,\!1577$	$0,\!0592$
$b_{\pm 1}^2$	0,1360	0,3248	0,0044	0,033
$b_{\pm 2}^2$	$0,\!0057$	0,0066	0,1326	0,09
$b_{\pm 3}^2$	$< 10^{-3}$	0,0053	0,1850	$3, 5.10^{-3}$
$b_{\pm 4}^2$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-3}$	$0,\!079$	0,0868
$b_{\pm 5}^2$	$< 10^{-8}$	$< 10^{-5}$	0,0174	0,1399
$\sum_{n=-5}^{+5} b_n^2$	0,9939	0,9996	$0,\!9945$	0,7656

**Tableau 5.1** – Premiers coefficients  $b_n^2$  de la décomposition en série de Fourier de la phase azimutale modulée, pour  $\ell = 8$  et différentes valeurs de a

négligeable si son poids est supérieur à 0,01. Le cas a = 0, 1 a été discuté précédemment. Le



FIGURE 5.2 – Premiers coefficients  $b_n$  et  $b_n^2$  de la décomposition en fonction de a lorsque  $\ell = 8$ 

cas a = 0, 2 contient les trois mêmes modes que le cas a = 0, 1 mais cette fois la proportion des bandes latérales est plus importante que celle du fondamental. Le cas a = 0, 5 contient le fondamental et quatre paires de bandes latérales dont les premières ont une proportion presque identique. Les deux premières bandes latérales  $\ell \pm m$  sont quasiment nulles. Enfin le cas a = 0, 8 est une superposition grandement multi-mode : elle contient au moins huit bandes latérales dont les bandes  $\ell \pm 5m$  ont la plus grande proportion mais aussi de nombreuses autres puisque  $\sum_{n=-5}^{+5} b_n^2 = 0, 77$ .

#### 5.2.2 Superposition de vortex coaxiaux

Une superposition de vortex par modulation sinusoïdale de la phase azimutale peut se réaliser avec un SLM. Il suffit d'afficher un masque de phase (hologramme) correspondant à la phase (5.2). Plusieurs hologrammes sont représentés sur la figure (5.2) dans le cas où  $\ell = 8$  et a = 0, 1 pour plusieurs valeurs de m. Le cas m = 0 est le mode  $LG_0^8$  habituel. Sur ces hologrammes on remarque que la modulation de la phase (lorsque  $m \neq 0$ ) se traduit par des secteurs angulaires de taille différente, cela est très visible pour le cas m = 5.

Dans la section précédente nous avions considéré que l'on appliquait la modulation de phase à un faisceau d'amplitude A constante. Dans la réalité pour réaliser une superposition de vortex nous allons appliquer l'hologramme modulé à un faisceau gaussien dont l'amplitude est de la forme  $e^{\frac{-r^2}{w^2}}$ . Que se passe-t-il dans ce cas là? Le champ après le SLM s'écrit :

$$E_{SLM} = e^{\frac{-r^2}{w^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n e^{i(\ell+n\times m)\theta}$$
(5.8)

Ce champ ne correspond pas à une somme de modes  $LG_0^{\ell+nm}$  du fait du terme d'amplitude car il manque le polynôme de Laguerre. Comme dans le cas où l'on souhaite créer un seul mode  $LG_0^{\ell}$  le champ obtenu se décompose donc sur la base des modes LG y compris ceux ayant un indice radial p non nul (cf. partie (1.5.3)). Comme nous l'avons vu le mode annulaire tel que p = 0 est le mode principal. Dans la suite de ce manuscrit nous considérerons donc



**FIGURE 5.3** – Hologramme (en haut) et intensité attendue en champ lointain (en bas) pour différentes valeurs de m lorsque  $\ell = 8$  et a = 0, 1. On retrouve huit secteurs  $\forall m$ , où la phase varie de 0 à  $2\pi$ , de largeur variable.

que les modes  $p \neq 0$  sont négligeables et que (sauf mention contraire) le champ électrique créé s'écrit :

$$E = c_0^{\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n L G_0^{\ell+nm}$$
(5.9)

et prendrons  $c_0^{\ell} \approx 1$ .

La figure (5.3) présente les figures de diffraction attendues en champ lointain pour différentes valeurs de l'ordre de la modulation m lorsque  $\ell = 8$  et a = 0, 1. On observe que pour m = 2l'intensité a une forme d'ellipse et que pour m > 2 l'intensité a une forme qui s'approche d'un pôlygône régulier de m côtés avec un centre noir. Son orientation est donnée par la valeur de  $\theta_0$ . Cela a été observé expérimentalement dans la thèse de F. Diry [44]. Dans cette même thèse il a été observé que si l'on augmente grandement la valeur de a (a > 1) le faisceau est constitué d'un ensemble de points lumineux.

En conclusion on remarque que cette méthode qui repose sur un seul hologramme et un seul faisceau incident génère une superposition de vortex parfaitement coaxiaux par nature.

Dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser cette méthode pour générer une superposition de vortex sur le faisceau rouge à 776 nm de la conversion de vortex. Nous analyserons alors le faisceau bleu obtenu en sortie.

#### 5.2.3 Conversion rouge-bleu d'une superposition de vortex coaxiaux

On s'intéresse à la conversion de vortex quand le faisceau à 776 nm est remplacé par une superposition de vortex coaxiaux. Pour cela le faisceau à 776 nm est façonné suivant la méthode décrite dans la section précédente puis envoyé dans la cellule de rubidium en utilisant le montage décrit dans la section (3.4.1). Le deuxième laser à 780 nm reste un faisceau gaussien de waist  $w_1 \approx 1,3$  mm. Le faisceau bleu généré est analysé avec les voies b) et c) décrite au paragraphe (3.2.4). Les conditions expérimentales sont :

- la température de la cellule est de 130 °C  $\,$
- la puissance de chaque faisceau est  $P_1 \approx 130$  mW pour le faisceau à 780 nm et  $P_2 \approx 100$  mW pour le faisceau à 776 nm
- le désaccord des lasers est de l'ordre de 1,5 GHz
- la valeur de  $\ell$  du fondamental est fixée à 8.

#### Réalisation de la superposition rouge

Nous reprenons le montage (1.21) et appliquons la modulation de phase azimutale en modifiant simplement les hologrammes appliqués sur le SLM. Pour a = 0, 1 ce sont les hologrammes de la figure (5.3). L'intensité du faisceau rouge après le SLM, observée au point focal d'une lentille ( $f_3$ ), est présentée sur la figure (5.4) (en haut). Les formes obtenues sont les mêmes polygônes que la simulation (5.3). On observe également des lignes périphériques d'intensité plus faible qui sont la signature des modes d'indice p non nul dont nous avons discuté dans la section (5.2.2).

#### Faisceau bleu obtenu

Les images de l'intensité du faisceau bleu sont présentées sur la figure (5.4) pour a = 0, 1. Les images sont toutes prises à la même position. On observe les mêmes formes que pour le faisceau rouge mais tournées. Les cas m = 2 et m = 4 sont tournés de quelques degrés alors que les cas m = 3 et m = 5 sont tournés d'une vingtaine de degrés. Cette dernière observation est probablement due à la phase de Gouy de chaque mode du champ, qui dépend de pet  $\ell$  et de la distance de propagation z. En effet de ce fait les polynômes peuvent tourner en se propageant [15]. On observe ensuite qu'il y a moins de lignes périphériques sur le faisceau



**FIGURE 5.4** – Superposition de vortex pour le faisceau rouge (en haut) et bleu (en bas) pour a = 0, 1 et différentes valeurs de m.

bleu : il y avait au moins trois lignes sur chaque faisceau rouge et il y en a seulement une sur le faisceau bleu. Ce dernier point est lié à la capacité de la conversion à filtrer certains modes p comme nous l'avons vu en section (4.2.3). Si on utilise seulement l'indice azimutal pour coder de l'information ce n'est pas problématique s'il y a une perte d'indice radial p.

Pour expliquer l'intensité bleue obtenue il faut repartir de l'équation de propagation du champ bleu dans le milieu non linéaire, expression (2.4) et des conditions d'obtention du mélange à quatre ondes. Dans le modèle de gain faible nous avons vu que l'intensité du faisceau bleu était proportionnelle au produit des intensités incidentes,  $I_b \propto I_1 I_2$  (cf. (2.4.1)). On utilise la formule (5.9) et dans l'hypothèse où tous les modes de la superposition ont le même waist  $w_2$  on obtient :

$$I_b \propto e^{\frac{-2r^2}{w_1^2}} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \times LG_0^{\ell+mn}(w_2) \right|^2$$
 (5.10)

En rentrant la gaussienne à l'intérieur de la somme on obtient alors :

$$I_b \propto \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \times e^{\frac{-r^2}{w_1^2}} \times LG_0^{\ell+mn}(w_2) \right|^2$$
(5.11)

$$\propto \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left( \frac{w}{w_2} \right)^{|\ell+nm+1|} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi w^2 |\ell+mn|!}} \left( \frac{2r^2}{w^2} \right)^{\frac{|\ell+nm|}{2}} e^{\frac{-r^2}{w^2}}}_{LG_0^{\ell+mn}(w)} \right|$$
(5.12)

Avec w tel que :

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \tag{5.13}$$

A l'intérieur de la norme de l'expression (5.12) on a une superposition des mêmes modes LG coaxiaux que pour le faisceau rouge, de waist w, mais de poids relatif différent :  $b_n \rightarrow b_n \times \left(\frac{w}{w_2}\right)^{|\ell+nm+1|}$ . La conversion change donc la superposition sauf quand  $\left(\frac{w}{w_2}\right)^{|\ell+nm+1|} \approx 1$ . Donnons un ordre de grandeur à ce rapport : on a  $w_1 = 1,27$  mm et  $w_2 = 0,11$  mm donc w = 0,11 mm et  $\frac{w}{w_2} = 1$ . Le poids de chaque vortex dans la superposition reste donc inchangé c'est pourquoi on observe la même forme d'intensité pour le faisceau bleu et le faisceau rouge.  $I_b$  est donc de la forme :

$$I_b \propto \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \times LG_0^{\ell-mn}(w) \right|^2$$
(5.14)

On trouve que  $I_b$  correspond alors à l'intensité d'une somme des mêmes modes LG que le champ  $E_2$  mais de waist plus petit donné par l'equation (5.13). Le champ bleu a bien les mêmes composantes que le faisceau pompe, on retrouve nos observations expérimentales. Nous présentons le cas où a = 0, 2 sur la figure (5.5). Nous observons également les mêmes formes pour le faisceau rouge et le faisceau bleu. Ceci se comprend également d'après l'expression (5.12) puisque le coefficient  $\left(\frac{w}{w_2}\right)^{|\ell+nm+1|}$  est toujours proche de 1.



**FIGURE 5.5** – Superposition de vortex pour le faisceau rouge (en haut) et bleu (en bas) pour a = 0, 2 et différentes valeurs de m.

#### Analyse de la phase

La phase du vortex bleue a été analysée à l'aide de la méthode de la lentille tiltée. Les figures d'interférence obtenues et les profils d'intensité associés ont été comparés avec ceux obtenus pour le faisceau rouge. Trois cas sont présentés sur la figure (5.6) pour une même valeur du facteur a et trois valeurs de m différentes. On observe que pour une faible valeur de m (m = 2) la figure a une structure similaire à celle obtenue pour un seul mode LG : elle présente huit franges sombres et neuf franges brillantes correspondant à la valeur du fondamental. Toutefois dans le cas du faisceau bleu le constraste des franges est dégradé. Pour m = 3 la structure se rapproche également du cas d'un unique mode LG : on compte neuf frange brillantes. De plus on observe un écart plus important entre l'intensité de chaque frange brillante. Ce comportement s'observe sur le faisceau rouge et le faisceau bleu mais sur ce dernier le contraste des franges est là-encore beaucoup plus faible. Pour m = 5 la structure de la figure d'interférence est plus compliquée : l'intensité des franges d'interférence est clairement modifiée et on compte 10 franges sombres avec une incertitude d'une frange. Comme dans la section (4.2.4) la figure du faisceau bleu présente des similarités avec celle du faisceau rouge mais avec un constraste diminué.

En l'état actuel cette analyse permet de dire qu'une partie de la phase du faisceau incident a été transférée sur le faisceau bleu et que celui-ci est une superposition de modes LG. Elle ne permet par contre pas de dire quels sont précisément ces modes et quelle est leur proportion. Du fait du constraste dégradé des franges d'interférences d'autres modes LG autres que ceux de la superposition d'entrée pourraient être présents. Ce point a été conforté dans l'étude de la conversion d'un seul mode LG dans la section (4.2.5).



**FIGURE 5.6** – Images des franges d'interférences obtenues avec la voie c) et profils d'intensité associés pour différentes valeurs de m (a est constant)

#### Influence du $\ell$ de coupure

Dans les deux sections précédentes nous avons utilisé des superpositions de vortex dont la valeur maximale de  $\ell$  ne dépassait pas la valeur de coupure  $\ell_c = 10$  que nous avons définie dans la section (4.3.3). Ceci permet de s'assurer que chaque composante de la superposition est convertie avec une efficacité semblable et d'éviter une perte d'information. Pour évaluer l'influence réelle du  $\ell$  de coupure nous avons généré des superpositions contenant des valeurs de  $\ell$  supérieures à  $\ell_c$  en augmentant fortement l'amplitude de modulation : a = 0, 8. Les faisceaux rouge et bleu correspondants sont présentés sur la figure (5.7) pour le cas où  $\ell = 8$  et m = 2. D'après la table (5.1) cette superposition contient principalement les modes  $\ell = 8 - 5 \times 2 = -2$  et  $\ell = 8 + 5 \times 2 = 18$  et de nombreux autres modes en proportion plus faible. Le mode tel que  $\ell = 18$  est donc bien au-delà de la valeur de coupure.

On observe que la figure rouge initiale n'a plus la forme d'un polygône comme dans les cas précédents. Elle comprend principalement deux demi-cercles. La figure bleue est très similaire à la figure rouge, on y retrouve les deux mêmes demi-cercles. Ceci laisse supposer que toutes les valeurs de la superposition initiale ont été converties y compris les valeurs telles que  $\ell > \ell_c$ . La valeur de coupure que nous avions définie auparavant telle que  $\mathcal{P}_b(\ell_c) = \frac{\mathcal{P}_b^{max}}{2}$ est probablement trop restrictive. D'après la courbe (4.28) de l'efficacité de conversion en fonction de  $\ell$ ,  $\mathcal{P}_b(\ell = 18) \approx \frac{\mathcal{P}_b^{max}}{10}$ . Il faudrait donc au moins choisir  $\ell_c$  tel que  $\mathcal{P}_b(\ell_c) = \frac{\mathcal{P}_b^{max}}{10}$ comme valeur de coupure.

Ceci montre que la conversion est efficace sur une plage d'OAM beaucoup plus grande que ce que celle que nous avions trouvé dans la section (4.3.3).



**FIGURE 5.7** – (a) Intensité du faisceau rouge et (b) du faisceau bleu dans le cas où  $\ell = 8, a = 0, 8$  et m = 2

#### 5.2.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons réussi à transférer une superposition de vortex sur le faisceau bleu généré par le mélange à quatre ondes. La superposition initiale est générée en modulant sinusoïdalement la phase azimutale du vortex à 776 nm avec un SLM, ce qui crée des bandes latérales dans le spectre en  $\ell$ . Cette méthode présente l'avantage de pouvoir générer des superpositions avec un nombre arbitrairement grand de modes LG. La valeur de l'OAM de ces modes peut être simplement contrôllée en changeant la valeur de l'amplitude de modulation. Par contre l'inconvénient de cette méthode est que les superpositions sont symétriques c'est-à-dire que la proportion de chaque bande latérale de part et d'autre du fondamental est identique. D'après l'étude de l'intensité du faisceau bleu la conversion crée une superposition de vortex qui contient les mêmes modes que la superposition d'entrée. L'analyse de la phase du faisceau bleu par la méthode de la lentille tiltée montre que d'autres modes peuvent être présents mais en quantité plus faible. La conversion n'est pas seulement efficace pour des valeurs de  $\ell$  inférieures à la valeur de coupure  $\ell_c$  mais également pour de plus grandes valeurs de  $\ell$ . Ceci montre que l'on peut l'utiliser pour transférer des OAM sur une large bande.

Ce processus revient à transférer une information codée sur la base des OAM  $|\ell\rangle$  c'est-à-dire une information codée sur un espace de grande dimension. Cette propriété est particulièrement intéressante pour des systèmes de technologie quantique qui utilisent des superpositions pour traiter un ensemble de données liées.

On peut aussi voir ce processus comme un multiplexage d'OAM et on pourrait récupérer chaque valeur de  $\ell_b$  individuellement en réalisant l'opération inverse (démultiplexage), par exemple à l'aide d'un trieur de modes [18]. L'avantage est donc d'utiliser un seul canal pour transférer un grand nombre d'informations.

## 5.3 Conversion d'une paire de vortex



FIGURE 5.8 – Principe de la conversion d'une somme de vortex.

Dans cette section nous nous intéressons à la conversion d'une paire de vortex optiques c'est-à-dire au mélange à quatre ondes lorsque les deux ondes d'entrée sont deux vortex optiques coaxiaux d'OAM  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Le principe est représenté sur la figure (5.8) et le montage optique sur la figure (3.16).

Dans ce cas l'accord de phase azimutale stipule que :

$$\ell_b = \ell_1 + \ell_2 - \ell_{IR} \tag{5.15}$$

donnant ainsi la possibilité d'effectuer l'opération élémentaire d'addition d'OAM.

Pour fixer les idées nous donnons quelques exemples d'études antérieures ayant étudié la conversion d'une paire de vortex dans une vapeur. Ces expériences ont pour point commun d'avoir été réalisées avec de petites valeurs des OAM d'entrée (quelques unités). En 2006, W. Jiang et al. [71] ont utilisé une configuration de mélange à quatre ondes à partir des transitions  $D_1$  et  $D_2$  du rubidium pour montrer la soustraction des deux OAM unitaires d'entrée sur le faisceau généré.

Plus récemment en 2015 A.J.F. de Almeida et al. [40] ont utilisé un mélange à quatre ondes dégénéré pour stocker des sommes d'OAM dans des atomes froids de césium par oscillation cohérente de population (CPO). Pour cela les deux faisceaux d'encodage étaient deux faisceaux LG portant chacun un OAM compris entre -2 et +2. Par contre ces deux faisceaux n'étaient pas exactement coaxiaux : les faisceaux incidents avaient entre eux un angle de 2°. Il a été montré que le faisceau restitué portait un OAM  $\ell$  égal à la différence  $\ell_2 - \ell_1$  des deux OAM d'entrée. Au maximum l'OAM restitué était donc égal à ±4.

Deux cas ont été étudié sur la transition  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  du rubidium que nous utilisons.

En 2012 G. Walker et al. [129] ont analysé le cas de deux vortex d'entrée coaxiaux issus du même SLM et portant le même OAM ( $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ ). Pour  $\ell = 0 - 5$  ils ont montré que l'OAM du faisceau bleu était la somme des OAM d'entrée :  $\ell_b = 2\ell$ . L'avantage d'une telle configuration est d'assurer un recouvrement optimal entre les deux vortex optiques. Néanmoins elle ne permet pas d'étudier tous les couples { $\ell_1, \ell_2$ } possibles.

En 2016 A. Akulshin et al. [3] ont réalisé la conversion d'une paire de vortex coaxiaux d'OAM différents et préparés indépendamment : $\{\ell_1 = +1, 2; \ell_2 = 0, \pm 1\}$ . Dans chaque cas ils ont également obtenu sur le faisceau bleu la somme algébrique des OAM d'entrée. Le cas où les OAM sont égaux mais de signe contraire produit un faisceau bleu en forme d'anneau et d'OAM nul.

Dans les cas mentionnés ci-dessus les résultats obtenus vérifient l'accord de phase azimutal. Pour ces expériences des sommes d'OAM ont été réalisées avec de petites valeurs d'OAM. De tels résultats seraient donc particulièrement intéressants s'ils pouvaient être étendus à de plus grandes valeurs de  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Pour analyser cette problématique nous avons réalisé la conversion d'une paire de vortex dans le cas où le faisceau à 780 nm porte l'OAM  $\ell_1 = 4$  et où le faisceau à 776 nm porte l'OAM  $\ell_2$ . Avec notre montage expérimental la valeur de  $\ell_2$ est variée de plusieurs dizaines.

Dans la section (5.3.1) nous étudierons d'abord le cas où les deux vortex optiques possèdent un OAM de même signe, pour cela nous considèrerons  $\ell_1 = 4$  positif. Comme le montre la figure (5.9) le mode LG à 780 nm produit par la lentille tiltée une figure de franges d'interférence inclinée vers la droite. Par convention ce sens définira les OAM positifs. Dans la section (5.3.2) nous étudierons ensuite le cas où les deux OAM sont de signe contraire. Nous proposerons alors un modèle pour interpréter les résulats expérimentaux.



**FIGURE 5.9** – Faisceau à 780 nm avec  $\ell_1 = 4$  après passage par une lentille tiltée, l'orientation vers la droite correspond à un OAM positif

#### 5.3.1 Conversion d'une paire d'OAM de même signe

Dans une première série de mesures nous avons effectué la conversion pour des valeurs de l'OAM  $\ell_2$  du même signe que l'OAM  $\ell_1$  c'est-à-dire des valeurs positives ( $\ell_1 = +4$ ). Nous observons deux comportements différents sur le faisceau bleu selon la valeur de  $\ell_2$ .

#### Premier cas : $1 \le \ell_2 \le 6$

Le premier comportement correspond à des valeurs de  $\ell_2$  inférieures à 6. Nous analysons d'abord la forme du faisceau bleu avec la voie b). Des images sont présentées sur la figure (5.10)(a) pour  $\ell_2 = +3$  à +6.

On observe que le faisceau bleu généré a une forme d'anneau avec un centre noir. Néanmoins son pourtour n'est pas complètement homogène comme on s'y serait attendu (cf. section (2.4.1)). On peut envisager que cela est du à l'alignement des faisceaux LG d'entrée. Les



**FIGURE 5.10** – Conversion d'une paire d'OAM pour  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2 = +3$  à +6. (a) Intensité du faisceau bleu généré, (b) Faisceau bleu après passage par la lentille tiltée et (c) profil obtenu lorsqu'on fait une coupe de la long de l'axe principal

deux faisceaux LG étant alignés avec une précision de 2 mrad, sur la longueur de la cellule (10 cm) la position du centre de ceux-ci peut varier de 0,2 mm. Ce déplacement est de l'ordre de grandeur du rayon des faiscaux LG ce qui n'est pas négligeable. Néanmoins dans ce cas on devrait obtenir un faisceau bleu encore moins en forme d'anneau ce qui laisse supposer que l'alignement des faisceaux est à mieux que 2 mrad. D'autre part on pourrait aussi envisager que la forme du faisceau bleu est due à la forme des faisceaux incidents qui ne sont pas non plus complètement homogènes comme on peut le voir sur la figure (3.15).

Nous avons ensuite mesuré la valeur de l'OAM du faisceau bleu par la méthode de la lentille tiltée. Les images pour  $\ell_2 = +3$  à +6 sont présentées sur la figure (5.10)(b) et leur profil d'intensité sur la figure (5.10)(c). Nous constatons que toutes les images présentent un nombre de franges d'interférence sombres égal à  $\ell_1 + \ell_2$  et que la figure est toujours orientée dans le même sens. Nous pouvons en conclure qu'il y a eu transfert de la phase azimutale totale sur le faisceau bleu donnant :

$$\ell_b = \ell_1 + \ell_2 \tag{5.16}$$

et si on considère qu'il y a eu conservation de la phase azimutale

$$\ell_b + \ell_{IR} = \ell_2 + \ell_1 \tag{5.17}$$

cela signifie que l'OAM du faisceau infrarouge est nul ( $\ell_{IR} = 0$ ). Dans ce cas il y a génération d'un vortex optique bleu dont l'OAM est égal à la somme  $\ell_1 + \ell_2$  des OAM des faisceaux

d'entrée.

#### Deuxième cas : $\ell_2 \geq 7$

Dans le deuxième cas  $\ell_2$  prend des valeurs supérieures ou égale à 7. Le faisceau bleu émis a toujours une forme d'anneau, les cas pour  $\ell_2 = +7$ , +9 et +15 sont montrés sur la figure (5.11)(a). Par contre sur les images obtenues avec la lentille tiltée il est difficile de déterminer un nombre de franges précis car le contraste de celles-ci est fortement réduit. Les images et leur profil sont présentées sur les figures (5.11)(b) et (5.11)(c). On détermine par exemple  $\ell_b = 12 \pm 1$  pour le cas  $\ell_2 = +7$ . Il semble qu'il y ait plus que  $\ell_1 + \ell_2$  franges pour la plupart des cas. En particulier on compte quatorze franges sombres au lieu de treize pour le cas  $\ell_2 = +9$ . Ceci laisse penser que dans ce cas l'OAM de l'infrarouge n'est plus nul et qu'il peut probablement prendre différentes valeurs comme nous avions vu dans la section (4.2.4) pour la conversion d'un unique vortex optique.



**FIGURE 5.11** – Conversion d'une paire d'OAM pour  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2 = +7, +9, +15$ . (a) Intensité du faisceau bleu généré, (b) Faisceau bleu après passage par la lentille tiltée et (c) profil obtenu lorsqu'on fait une coupe le long de l'axe principal

#### 5.3.2 Conversion d'une paire d'OAM de signe contraire

Dans une deuxième série de mesures nous avons appliqué des valeurs de  $\ell_2$  négatives et toujours pour  $\ell_1 = +4$ . On observe deux comportements :

#### Premier cas : $-7 \leq \ell_2 \leq -1$

Le premier cas correspond à des valeurs de  $\ell_2$  supérieures à -7. L'intensité du faisceau bleu émis et les interférences obtenues à la lentille tiltée sont présentées respectivement sur les figures (5.12)(a) et (5.12)(b) pour  $\ell_2 = -3$  à -7. Contrairement au cas précédent on observe que le faisceau n'a plus une forme d'anneau mais plutôt une forme de spot lumineux. Ceci



**FIGURE 5.12** – Conversion d'une paire d'OAM pour  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2 = -3, -4, -5, -6$  et -7. (a) Intensité du faisceau bleu généré, (b) Faisceau bleu après passage par la lentille tiltée

indique la présence de modes ayant  $\ell = 0$ . En effet on rappelle que ce sont les seuls modes qui présentent de la lumière en leur centre.

Les images (5.12)(b) semblent présenter deux sytèmes de franges différents ayant chacun un nombre de franges et une orientation différente. Pour les exploiter on extrait les profils dans les deux directions. On illustre le cas  $\ell_2 = -5$  sur la figure (5.13). On observe trois franges sombres voire quatre sur l'axe orienté vers la gauche ce qui correspondrait à  $\ell_b = -3$ ou  $\ell_b = -4$ . On observe deux franges sombres sur l'axe orienté vers la doite ce qui correspondrait à  $\ell_b = +2$ . Ces figures sont la signature de la présence de plusieurs valeurs de  $\ell_b$ dans le faisceau bleu émis.

Le cas  $\ell_2 = -4$  ne donne pas les mêmes résultats que ceux obtenus par A. Akulshin et al. [3]. En effet pour  $\ell_1 = -\ell_2$  ils avaient obtenu un faisceau bleu avec un OAM nul ( $\ell_b = 0$ ). Le passage de celui-ci par une lentille tiltée ne révélait auncune frange d'interférence. Dans notre cas le faisceau bleu n'a pas une forme d'anneau et la transformation par la lentille tiltée indique qu'il porte une ou plusieurs valeurs d'OAM.



**FIGURE 5.13** – Détails de la transformation par la lentille tiltée pour le cas  $\ell_2 = -5$ 

Finalement ces observations remettent en cause la loi  $\ell_b = \ell_1 + \ell_2$  vue dans le cas où  $\ell_2 > 0$ .

#### Deuxième cas : $\ell_2 \leq -7$

Nous allons maintenant examiner le cas  $\ell_2 < 0$  mais avec  $|\ell_2| > 7$ .

La forme du faisceau bleu et la mesure de son OAM sont présentées sur la figure (5.14) pour les cas  $\ell_2 = -8, -9, -10$  et -15. On observe que pour  $\ell_2 = -8$  et  $\ell_2 = -9$  le faisceau bleu a toujours une forme de spot lumineux. Pour  $\ell_2 = -10$  et  $\ell_2 = -15$  la forme du faisceau bleu redevient annulaire.

Dans chaque cas les interférences obtenues à la lentille tiltée comportent un seul système de franges incliné vers la gauche signature de  $\ell_b < 0$ . Le nombre de franges sombres semble plutôt correspondre à un OAM  $\ell_b = \ell_2$ .

#### 5.3.3 Bilan

Avant d'entrer dans des considérations théoriques faisons un bilan.

Selon le signe de  $\ell_2$  la conversion génère un faisceau bleu avec des propriétés différentes. Si  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de même signe (tous les deux positifs ici) alors le faisceau bleu a une forme annulaire et son OAM est égal à la somme  $\ell_1 + \ell_2$  (aux incertitudes de mesures près). Si  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de signe contraire (c'est-à-dire quand  $\ell_2$  est négatif) le faisceau bleu n'a pas toujours une forme d'anneau, sa structure est en général plus compliquée. La mesure de son OAM est difficile et il est rare que l'on observe un rayonnement bleu avec  $\ell_b = \ell_1 + \ell_2$ .

## 5.4 Interprétation dans le cadre du critère de Boyd

Pour comprendre les résultats que nous venons de présenter plusieurs approches sont possibles. La première est de considérer le modèle de gain faible que nous avons développé dans la section (2.4.1). Dans ce cas nous nous attendons à ce que l'intensité du faisceau bleu soit proche de celle d'un mode LG d'indice azimutal  $\ell_1 + \ell_2$ :

$$I_b \propto \left(\frac{2r^2}{w^2}\right)^{|\ell_1| + |\ell_2|} e^{\frac{-2r^2}{w^2}}$$
(5.18)

avec  $w = \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$  le waist réduit ( $w_1$  et  $w_2$  sont les waists des deux modes LG d'entrée). Cette expression est identique quelque soit le signe de  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Elle permet d'expliquer la



**FIGURE 5.14** – Conversion d'une paire d'OAM pour  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2 = -8, -9, -10$  et -15. (a) Intensité du faisceau bleu généré, (b) Faisceau bleu après passage par la lentille tiltée et (c) profil obtenu lorsqu'on fait une coupe le long de l'axe principal

forme d'anneau que nous observons lorsque  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de même signe mais elle n'explique pas la forme bleue obtenue lorsqu'ils sont de signe contraire. Le modèle de gain faible n'est donc pas suffisant.

La deuxième approche consiste donc à reprendre le modèle développé dans la section (4.2.5). Nous nous placerons également dans le cadre simplifié et idéal du critère de Boyd c'est-à-dire lorsque les longueurs de Rayleigh des faisceaux en jeu sont identiques.

Dans ce cas nous avons vu que les modes bleu et infrarouge possibles (c'est-à-dire les valeurs des indices azimutaux  $\ell_b$  et  $\ell_{IR}$  et des indices radiaux  $p_b$  et  $p_{IR}$ ) devaient respecter les accords de phase azimutale et de phase de Gouy qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \ell_{IR} + \ell_b = -\ell_1 + \ell_2 \\ |\ell_{IR}| + 2p_{IR} + |\ell_b| + 2p_b = -|\ell_1| + |\ell_2| \end{cases}$$
(5.19)

Par définition  $p_b \ge 0$  et  $p_{IR} \ge 0$ , on pose  $q = p_b + p_{IR}$  (cf. (4.2.5)) soit :

$$q = \frac{\ell_1 - \ell_2 - |\ell_b| - |\ell_{IR}|}{2} \tag{5.20}$$

Cette équation n'a des solutions que si q est positif ou nul, différentes selon le signe de  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Nous les étudions ci-dessous.

## 5.4.1 Premier cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de même signe

Supposons  $\ell_1 > 0$  et  $\ell_2 > 0$  et posons  $\ell_{in} = \ell_1 + \ell_2$  alors  $\ell_{in} \ge 0$ . Le système (5.19) devient alors :

$$\begin{cases} \ell_{IR} + \ell_b = \ell_{in} \\ |\ell_{IR}| + |\ell_b| + 2q = \ell_{in} \end{cases}$$
(5.21)

On remarque qu'il s'agit du même système que (4.50) de la section (4.2.5) en posant  $\ell = \ell_{in}$ . Nous pouvons donc directement reprendre les résultats de cette section et les modes possibles sont donnés par les "règles de sélection" suivantes :

$$p_{b} = p_{IR} = 0$$

$$0 \leq \ell_{IR} \leq \ell_{in}$$

$$0 \leq \ell_{b} \leq \ell_{in}$$

$$\ell_{b} + \ell_{IR} = \ell_{in}$$

$$(5.22)$$

Les solutions sont au nombre de  $(\ell_{in} + 1)$  couples de  $\{\ell_b, \ell_{IR}\}$  possibles. De plus tous les modes ont un indice radial p nul c'est-à-dire qu'ils ont une forme mono-annulaire. Même s'il y a plusieurs modes dans le faisceau bleu dans tous les cas on aura un zéro d'intensité au centre de celui-ci, ce qui est cohérent avec les observations expérimentales.

Parmi les  $(\ell_{in} + 1)$  solutions de (5.22) les modes qui seront principalement générés sont ceux qui maximisent l'intégrale de recouvrement des quatres champs. En reprenant l'expression de cette intégrale, J, donnée par l'expression (4.53) on montre qu'elle est maximale lorsque (cf. annexe (B)) :

$$\begin{cases} w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2 \\ w_b^2(|\ell_b|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2 \end{cases}$$
(5.23)

soit :

$$w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = w_b^2(|\ell_b|+1)$$
(5.24)

avec  $w^2 = \frac{w_1 w_2}{w_1^2 + w_2^2}$  le waist réduit. La condition (5.24) signifie que les rayons bleu et infrarouge sont proches du rayon R du produit des champs d'entrée, soient :

$$\begin{cases} R_{IR} \approx \sqrt{\frac{|\ell_1| + |\ell_2|}{2}} w^2 = R \\ R_b \approx \sqrt{\frac{|\ell_1| + |\ell_2|}{2}} w^2 = R \end{cases}$$

$$(5.25)$$

Pour appliquer le critère de Boyd on peut réécrire la condition (5.24) en fonction des longueurs de Rayleigh :

$$\lambda_{IR}(|\ell_{IR}|+1)z_{R_{IR}} = \lambda_b(|\ell_b|+1)z_{R_b}$$
(5.26)

En utilisant le fait que  $\ell_{IR}=\ell_{in}-\ell_b$  on trouve alors que la valeur de  $\ell_b$  optimale est :

$$\ell_b = \frac{\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b}(\ell_{in}+1) - 1}{\left(\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} + 1\right)} \tag{5.27}$$

On observe que cette expression donne des valeurs non entières pour  $\ell_b$  du fait que  $\frac{\lambda_{IR}}{\lambda_b} = 12, 5$ . Nous avons tracé ces valeurs (droite bleue) et les valeurs entières de  $\ell_b$  possibles (points bleus)



**FIGURE 5.15** – Valeurs de  $\ell_b$  possibles (en bleu) et valeur la plus probable (entourée en rouge) dans le cas du critère de Boyd

en fonction de  $\ell_2$  sur la figure (5.15). Les valeurs de  $\ell_b$  les plus probables sont donc les points bleus les plus proches de la droite bleue. Ils sont entourés d'un cercle rouge. On observe qu'ils correspondent à l'arrondi de l'expression (5.27). Dans ce cas la valeur de  $\ell_b$  majoritairement générée est  $\ell_b = \ell_{in}$  jusqu'à  $\ell_2 = 14$  puis  $\ell_b = \ell_{in} - 1$  au delà. Du fait de l'accord de phase azimutale le faisceau infrarouge porte donc un OAM  $\ell_{IR} = +1$  à partir de  $\ell_2 = 15$ . L'OAM du faisceau bleu est donc égal à la somme  $\ell_1$  et  $\ell_2$  des OAM d'entrée seulement lorsque  $\ell_2$ est inférieur à 14. Ce résultat est en accord avec nos résultats expérimentaux et avec ceux des travaux antérieurs [129] [3].

La possibilité d'obtenir d'autres valeurs de  $\ell_b$  et  $\ell_{IR}$  sera donnée comme dans la section (4.2.6) par la valeur de l'intégrale de recouvrement des quatres champs, expression (4.53). Nous l'avons tracée normalisée pour  $\ell_2 = +3$ , +7 et +15 sur la figure (5.16). On observe que plus  $\ell_2$  augmente plus le poids des autres modes autres que le mode principal augmente. Par exemple pour  $\ell_2 = 3$  le poids du deuxième mode ( $\ell_b = \ell_{in} - 1$ ,  $\ell_{IR} = +1$ ) est de environ 0,75 alors qu'il est de 0,85 pour  $\ell_2 = 15$ . Le nombre de modes dont le poids est non négligeable (on choisit > 0,5 arbitrairement) augmente également. Ceci explique le fait que les franges d'interférence obtenues à la lentille tiltée sont progressivement brouillées (cf. figure (4.18)) et que leur nombre est ambigu.

#### 5.4.2 Deuxième cas : $\ell_1$ et $\ell_2$ de signe contraire

Dans le cas où  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de signe contraire  $(\ell_1 > 0)$  les règles de sélection des modes possibles sont différentes. Ces règles sont obtenues à partir de la condition  $q \ge 0$ . Puisque nous avons  $\ell_2 \le 0 \le \ell_1$  examinons alors la valeur de q, expression (5.20), suivant le signe de  $\ell_{IR}$  et  $\ell_b$ :

- (i) Si  $\ell_{IR} > 0$  et  $\ell_b > 0$  alors  $q = -\ell_2$
- (ii) Si  $\ell_{IR} > 0$  et  $\ell_b < 0$  alors  $q = \ell_1 \ell_{IR}$  donc  $q \ge 0$  implique  $\ell_{IR} \le \ell_1$
- (iii) Si  $\ell_{IR} < 0$  et  $\ell_b < 0$  alors  $q = \ell_1$
- (iv) Si  $\ell_{IR} < 0$  et  $\ell_b > 0$  alors  $q = \ell_{IR} \ell_2$ , valeur positive de q impose que  $\ell_{IR} \ge \ell_2$

En conclusion il n'y a pas de restriction sur les signes de  $\ell_b$  et  $\ell_{IR}$ , les règles de sélection



**FIGURE 5.16** – Recouvrement J normalisé dans le cas du critère de Boyd en fonction de  $\ell_{IR}$  pour (a)  $\ell_2 = +3$ , (b)  $\ell_2 = +7$  et (c)  $\ell_2 = +15$ 

peuvent alors s'écrire :

$$q = p_{IR} + p_b$$

$$\ell_2 \le \ell_{IR} \le \ell_1$$

$$\ell_2 \le \ell_b \le \ell_1$$

$$\ell_b + \ell_{IR} = \ell_{in}$$
(5.28)

On peut tirer plusieurs résultats des conditions (5.28):

- $|\ell_1 \ell_2| + 1$  valeurs de  $\ell_b$  (et  $\ell_{IR}$ ) sont possibles
- le cas  $\ell_b = 0$  est solution ce qui explique la lumière au centre de certains profils d'intensité
- lorsque q = 0 le mode est alors composé d'un seul anneau
- dans le cas où  $q \neq 0$  il y a (q+1) modes possibles, la valeur de  $p_b$  (et de  $p_{IR}$ ) varie de 0 à q et chaque mode est composé de  $p_b + 1$  anneaux.

Nous avons illustré trois cas sur la figure (5.17) où nous avons tracé les valeurs de q et de  $\ell_{IR}$  possibles en fonction de  $\ell_b$ . Les lignes en pointillé délimitent les valeurs de  $\ell_b$  négatives. Pour le premier cas  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2 = -2$ , figure (5.17a), on a bien  $-2 \le \ell_b \le 4$  et  $q = \{0, 1, 2\}$  ce qui correspond à quinze solutions. Par exemple le cas  $\{q = 1, \ell_b = -1\}$  correspond à deux modes :  $\{q_b = 1, \ell_b = -1\}$  et  $\{q_b = 0, \ell_b = -1\}$ . Seuls les cas pour lesquels  $\ell_b = -2$  et  $\ell_b = +4$  ont forcément  $p_b = 0$ . On observe qu'il y a cinq valeurs de  $\ell_b$  positives et trois valeurs négatives possibles (si on compte le 0 à chaque fois).

Le deuxième cas que nous avons représenté, figure (5.17b), correspond à  $\ell_2 = -4$ . On observe qu'il y a autant de valeurs de  $\ell_b$  positives que négatives possibles (cinq à chaque fois).

Le dernier cas, (5.17c), correspond à  $\ell_2 = -8$  et possède cette fois une majorité de valeurs de  $\ell_b$  négatives (9 contre 5).

Ceci permet de donner une première interprétation aux figures d'interférence à la lentille tiltée. Pour  $\ell_2 \ge -4$  le modèle donne presque autant de valeurs de  $\ell_b$  positives que négatives



FIGURE 5.17 – Valeurs de q et  $\ell_{IR}$  possibles pour (a)  $\ell_2 = -2$ , (b)  $\ell_2 = -4$  et (c)  $\ell_2 = -8$ 

ce qui explique pourquoi la deuxième colonne de la figure (5.12) montre une figure d'interférences avec deux inclinaisons différentes. Pour  $\ell_2 \leq -8$  le modèle montre que le nombre de valeurs négatives de  $\ell_b$  est plus grand que le nombre de valeurs positives : ceci explique qu'on observe seulement des franges d'interférences inclinées vers la gauche sur la figure (5.14).

Les valeurs de  $\ell_b$  de  $p_b$  qui seront majoritaires dans le faisceau bleu vont dépendre de l'intégrale de recouvrement des quatre champs (4.48). Pour déterminer ces valeurs d'intégrales de recouvrement il nous faut dans ce cas recalculer J avec des modes  $LG_p^{\ell}$ . L'intégrale J ne possède donc pas d'expression analytique simple et il n'est pas possible de déterminer explicitement le mode qui va être majoritairement généré. On peut le faire avec un traitement numérique, ce que nous ne faisons pas ici.

<u>Remarque</u>: Lorsque la méthode de la lentille tiltée est appliquée à un mode  $LG_{p\neq0}^{\ell}$  la figure d'interférence est constituée de  $(p + \ell + 1) \times (p + 1)$  points lumineux comme il a été montré par C. Cabrera dans sa thèse [30] (cf. figure (1.16)). Cette propriété, couplée au modèle que nous venons de développer et aux observations expérimentales, conforte le fait que le faisceau bleu peut comporter des modes avec  $p_b$  non nul.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord vu que nous pouvions transférer une superposition de vortex optiques à partir de notre montage de conversion d'OAM. La superposition incidente a été obtenue en modulant sinusoïdalement la phase azimutale d'un mode LG à l'aide d'un SLM. Dans tous les cas étudiés expérimentalement le faisceau bleu obtenu a la même forme que le faisceau pompe laissant penser que l'information initiale a été entièrement transférée. Ce résultat est conforté par l'analyse de la phase du faisceau bleu par la méthode de la lentille tiltée. Néanmoins une telle affirmation nécessiterait une investigation plus poussée par exemple en réalisant une décomposition modale du faisceau bleu c'est-à-dire en déterminant les modes LG présents dans le champ bleu et leur poids respectif [113]. Ce résultat apporte une avancée importante pour le codage de l'information sur un espace de dimension supérieure à 2 en utilisant la base des modes LG.

Dans un second temps nous avons réalisé la conversion d'une paire de vortex optiques coaxiaux à partir de deux modes LG d'OAM  $\ell_1 = +4$  et  $\ell_2$  et d'indices radiaux  $p_1$  et  $p_2$  nuls. Nous nous sommes placés dans le cadre du critère de Boyd pour interpréter les résultats expérimentaux. Lorsque  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de même signe et pour  $\ell_2 \leq 14$  nous avons montré que le faisceau bleu obtenu est principalement un mode LG dont l'OAM est :  $\ell_b = \ell_1 + \ell_2$  et l'indice radial  $p_b$  est nul. Pour  $\ell_2 > 14$ ,  $\ell_b = \ell_1 + \ell_2 - 1$ . La présence d'autres valeurs de  $\ell_b$  ne peut être exclue mais à cause du recouvrement avec les faisceaux pompes celles-ci auront une prépondérance moindre. Ces valeurs ne sont pas infinies mais sont déterminées par des règles de sélection.

Lorsque  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de signes contraires le faisceau bleu a une structure plus compliquée : il s'agit d'une superposition de modes LG de p non nul. Comme précédemment dans le cas de la conversion d'un vortex optique, une valeur de  $\ell_b$  et  $p_b$  sera prépondérante du fait du recouvrement avec les faisceaux pompes. Dans l'état actuel de ce travail nous ne sommes pas en mesure de déterminer quelles sont ces valeurs, cela pourra se faire par la suite. Nous pouvons néanmoins restreindre le nombre des valeurs possibles comme dans le cas précédent à l'aide de règles de sélection.

Ce travail montre qu'il est préférable d'ajouter des vortex optiques plutôt que les soustraire si l'on veut transférer de grandes valeurs d'OAM. Il généralise les travaux précédents à de grandes valeurs d'OAM en montrant que la conversion d'une paire de vortex par mélange à quatre ondes permet de réaliser une opération d'addition sur l'OAM.

Des perspectives à ces deux travaux pourraient être de les combiner pour analyser s'il est possible d'additionner (ou soustraire) une valeur d'OAM à une superposition de vortex.

## Conclusion et perspectives

Ce manuscrit s'est focalisé sur la conversion de vortex optiques par mélange à quatre ondes dans une vapeur de rubidium en utilisant la transition à deux photons  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ . C'est une thématique récente dans le groupe au sein duquel cette thèse a été effectuée, elle a été initiée au cours de ma thèse. Il s'agit de la première thèse effectuée sur le sujet au laboratoire Aimé Cotton.

Dans un premier chapitre j'ai d'abord présenté ce que sont les vortex optiques. Nous avons vu qu'ils étaient liés à la notion de singularité de phase. Une singularité de phase est un point ou une ligne d'un front d'onde sur lequel la phase n'est pas définie c'est-à-dire qu'on ne peut pas en donner une valeur précise à un instant t donné. Plus précisément la phase varie de  $2\ell\pi$  le long d'un coutour entourant la singularité.  $\ell$  est un entier relatif appelé *charge* toplogique ou ordre de la singularité. Au niveau de la singularité l'amplitude de l'onde est nulle. Il existe deux grands types de singularité de phase : les singularités de type *coin* et de type vis. Les singularités de type vis présentent le plus d'intérêt et sont elles que j'ai utilisées dans ce manuscrit. Nous avons vu que leur phase contenait un terme azimutal de la forme  $e^{i\ell\theta}$ . De telles singularités ont donc des fronts d'ondes en forme d'hélice ou de vis, d'où leur nom. Dans ce cas  $\ell$  est souvent dénommée *hélicité* de l'onde. Cette phase particulière a pour conséquence que le vecteur de Poynting de l'onde possède une composante orthoradiale non nulle et proportionnelle à  $\ell$ . Il en résulte que l'onde possède un moment orbital dont la composante suivant Oz est également proportionnelle à  $\ell$ . Dans le cadre de l'approximation paraxiale ce moment est indépendant du moment angulaire de spin (SAM) et est dénommé moment orbital angulaire (OAM) de la lumière. Au niveau quantique chaque photon de l'onde possède un OAM égal à  $\ell\hbar$ . Avec le spin et l'impulsion l'OAM constitue le troisième moment de la lumière. Son grand avantage est son infinité de valeurs accessibles tout en restant discret. C'est un candidat de choix en technologie quantique pour des applications utilisant l'OAM comme variable de codage de l'information. C'est pour contribuer à cet objectif dans le domaine optique que ce travail de thèse a été réalisé.

Différents types de faisceaux lumineux, appelés *modes*, peuvent être utilisés comme support de l'OAM. Parmi ceux-ci les modes de Laguerre-Gauss (LG) sont très certainement les plus répandus. Ces modes sont solutions de l'équation d'onde paraxiale en coordonnées cylindriques. Ils sont caractérisés par deux indices : l'indice radial p et l'indice azimutal (ou hélicité)  $\ell$ . L'amplitude de leur champ électrique comprend une partie gaussienne modulée par un polynôme de Laguerre défini par p et  $\ell$ . Leur phase contient le terme azimutale  $\ell\theta$ caractéristiques des vortex optiques. Elle contient aussi un terme de phase de Gouy qui diffère du mode gaussien puisqu'il dépend des indices p et  $\ell$ . Pour  $p \neq 0$  l'intensité des modes comporte p + 1 anneaux de lumière concentriques alors que si p est nul les modes sont composés d'un seul anneau de lumière.

Différentes méthodes permettent de générer des modes LG. Pour le cas des modes avec p = 0 la méthode que j'ai mise à profit repose sur l'impression de la phase azimutale sur un faisceau gaussien. J'ai utilisé deux dispositifs utilisant cette méthode : une lame de phase en
spirale (SPP) et un modulateur spatial de lumière (SLM). Néanmoins, bien qu'imprimant la phase azimutale voulue, ces deux dispositifs ne génèrent pas des modes LG purs. En effet les modes obtenus sont une superposition de modes LG possédant tous la même valeur de  $\ell$  mais des valeurs de p différentes. Le mode majoritaire est cependant le mode pour lequel p = 0. En conséquence les modes créés possèdent des anneaux supplémentaires (d'intensité moindre toutefois) et ne se propagent pas de façon gaussienne comme des modes LG purs. Ceci peut être néfaste pour certaines applications mais dans mon cas ce n'est pas génant puisque c'est l'OAM  $\ell$  qu'ils portent qui m'a intéressé. Une autre propriété des modes créés est d'avoir une variation linéaire de leur rayon avec  $\ell$  contrairement aux modes purs qui ont une variation en  $\sqrt{\ell}$ .

La mesure de l'OAM d'un mode LG peut se faire à partir de plusieurs méthodes, principalement interférentielles. Dans ce manuscrit j'ai utilisé la méthode basée sur un interféromètre de Mach-Zehnder contenant un prisme de Dove et la méthode basée sur la transformation d'un mode LG par une lentille inclinée.

Comprendre l'interaction entre des vortex optiques à grandes valeurs d'OAM et la matière est essentiel pour espérer utiliser l'OAM comme information quantique. Pour cela les phénomènes non-linéaires sont particulièrement adaptés du fait qu'ils font intervenir la phase des ondes mises en jeu. Parmi les milieux non-linéaires possibles les vapeurs d'alcalins présentent l'avantage de posséder des structures atomiques simples puisque les atomes possèdent un unique électron de valence. Le groupe dans lequel cette thèse a été effectuée ayant une expertise sur le rubidium c'est sur cet atome que le choix s'est porté. Le processus non-linéaire le plus simple que l'on peut effectuer dans une vapeur atomique est une transition à deux photons. La transition choisie est la transition à deux photons  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  via le niveau  $5P_{3/2}$ . Elle génère un photon bleu à 420 nm et un photon infrarouge à 5230 nm à partir d'un photon rouge à 776 nm et d'un autre photon rouge à 780 nm. L'avantage de cette transition est de lever l'ambiguité entre les photons excitateurs et les photons créés. Sous certaines conditions deux faisceaux directionnels et cohérents, l'un bleu et l'autre infrarouge, peuvent être générés.

C'est cette transition que j'ai utilisée avec des vortex optiques et le processus a été dénommé *conversion de vortex*.

Dans le chapitre 2 de cette thèse j'ai décrit cette transition et montré que le processus global de génération d'un faisceau bleu pouvait être décrit par un mélange à quatre ondes, processus non-linéaire d'ordre 3. J'ai alors rappelé le formalisme associé et les équations décrivant l'évolution des différentes ondes du mélange pour des ondes gaussiennes usuelles. Ces équations reposent sur les équations de Maxwell auxquelles est ajouté un terme source dépendant de la polarisation non-linéaire. Nous avons vu que l'obtention d'un mélange à quatre ondes reposait sur l'accord des différentes phases des ondes. Le mélange optimal est obtenu dans le cas bien connu du *critère de Boyd*. Ce critère précise que les longueurs de Rayleigh des ondes mis en jeu dans le mélange doivent être égales. Il en découle que l'accord de phase se réduit à l'accord de phase de propagation. Nous pouvons définir un paramètre gappelé qain du processus qui traduit la capacité de celui-ci à convertir les ondes incidentes rouges en ondes bleue et infrarouge. Dans le cas où le gain est faible les intensités des ondes bleue et infrarouge sont proportionelles au produit des intensités des faisceaux pompes et au carré de la longueur d'interaction avec le milieu. J'ai par la suite appliqué ce modèle dans le cas où les deux ondes d'entrée sont des vortex optiques, en particulier des modes LG. L'utilisation de modes LG dans le mélange à quatre ondes modifient les accords de phase qui comprennent alors les accords de phase azimutale et de phase de Gouy. Ce processus va

donc au-delà d'un mélange à quatre ondes réalisé avec des faisceaux en forme d'anneau.

Dans le chapitre 3 j'ai exposé le montage optique conçu pour réaliser expérimentalement la conversion de vortex. Il comprend notamment une cellule chauffée contenant des atomes de rubidium 85 et 87 dans les proportions isotopiques naturelles, deux lasers incidents rouges et leur système de mise en forme ainsi qu'un système complet de détection. La cellule de rubidium étant en verre nous n'avons pas accès à la radiation à 5230 nm car elle est absorbée. La configuration choisie est telle que les faisceaux incidents sont co-propageants, cela ayant pour intérêt de remplir automatiquement l'accord de phase de propagation puisque celui-ci correspond alors à la conservation de l'énergie. Le montage présente plusieurs variantes permettant de convertir un seul ou une paire de vortex optiques. Un des vortex est obtenu à l'aide d'une SPP et l'autre à l'aide d'un SLM. Le système de détection permet d'avoir accès aux différentes propriétés du faisceau bleu : sa puissance, sa réponse en fréquence, sa forme, son OAM et sa propagation. Dans ce chapitre j'ai déterminé les conditions expérimentales optimales pour obtenir un faisceau bleu : la densité atomique, l'intensité des faisceaux incidents ainsi que la fréquence de chacun d'eux. Cette dernière étude a montré que, contrairement à l'intuition, la conversion est optimale pour une fréquence des lasers décalée de  $\delta \approx 1.5$  GHz par rapport au niveau  $5P_{3/2}$ .

Dans le chapitre 4 je me suis concentré sur la conversion d'un seul vortex optique d'OAM  $\ell$  à 776 nm. Dans un premier temps j'ai montré que le faisceau bleu généré avait une forme d'anneau dont le rayon est déterminé par le produit des champs incidents. Ceci s'explique dans le cas d'une conversion en régime de faible gain. Par conséquent, contrairement au faisceau rouge, le rayon du faisceau bleu ne varie pas linéairement avec  $\ell$ . L'efficacité du processus est principalement gouvernée par le recouvrement des intensités des faisceaux incidents. J'ai pu mesurer une puissance bleue pour des valeurs de  $\ell$  comprises entre -30 et +30 soient six fois supérieures à la valeur de  $\ell$  utilisée dans les expériences antérieures. L'analyse de la phase du faisceau par la méthode de la lentille inclinée a mis en évidence que le faisceau bleu était un vortex optique d'OAM  $\ell_b$  de même signe que  $\ell$ . Pour de faibles valeurs de  $\ell$ cette méthode indique que  $\ell_b = \ell$ , au-delà il y a une incertitude sur le nombre de franges donnant  $\ell_b = \ell \pm 1$ . Dans un modèle de mélange à quatre ondes la valeur de  $\ell_b$  est déterminée par les accords de phase azimutale et de phase de Gouy, elle doit assurer la conservation de l'OAM. Les deux accords de phase définissement les modes bleus possibles. Parmi ceux-ci les modes les plus probables sont déterminés par le recouvrement des quatre champs du mélange. Le critère de Boyd permet une approche simplifiée et permet de restreindre le nombre de modes possibles pour le faisceau bleu, en particulier seuls les modes de p nul sont permis. On parle de *règles de sélection*. En combinant ces règles à la condition de recouvrement des faisceaux le mode majoritairement généré est tel que  $\ell_b = \ell$  pour  $|\ell| \leq 18$  puis  $\ell_b = \ell - 1$ jusqu'à  $|\ell| = 30$ . Ces résultats sont en accord avec les obervations expérimentales. Enfin j'ai analysé la propagation du faisceau bleu et montré quelle était très proche de celle d'un faisceau gaussien, le facteur M<sup>2</sup> étant très proche de 1. Le processus non-linéaire a épuré le mode LG d'entrée.

Dans une seconde partie de ce chapitre j'ai augmenté la valeur de l'OAM transférée au faisceau bleu en modifiant la taille du faisceau gaussien afin que celui-ci ait un meilleur recouvrement avec le mode LG pour de plus grandes valeurs de  $\ell$ . Je suis ainsi parvenu à réaliser la conversion de vortex pour des valeurs de  $\ell$  comprises entre -50 et +50.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit j'ai étudié la conversion d'une superposition de vortex optiques (c'est-à-dire une somme de vortex) et la conversion de deux vortex indépendants coaxiaux. La superposition de vortex a été obtenue par modulation sinusoïdale de la phase azimutale du mode  $LG_0^{\ell}$  à 776 nm à l'aide d'un SLM. Cette méthode permet de générer des bandes latérales de part et d'autre de la valeur fondamentale de  $\ell$ . Plusieurs superpositions comportant un nombre différent de modes LG ont été utilisées. Dans chaque cas le faisceau bleu présente une forme d'intensité semblable à celle de la superposition initiale. L'analyse de la phase du vortex par la méthode de la lentille inclinée semble confirmer le transfert de la superposition mais se révèle insuffisante pour l'affirmer totalement.

La conversion d'une paire de vortex a été réalisée en utilisant deux modes LG coaxiaux comme faisceaux incidents : l'un ayant un OAM fixe  $\ell_1 = +4$  et le deuxième un OAM  $\ell_2$  variable. Deux cas ont été distingués : le cas où  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de même signe et le cas où ils sont de signe contraire. Dans le premier cas la valeur de  $\ell_b$  est toujours du signe de  $\ell$  et sa valeur est inférieure ou égale à la somme  $\ell_1 + \ell_2$ . Le mode bleu créé a un indice radial nul :  $p_b = 0$ . De plus j'ai montré que pour  $\ell_2 < 15$ , le faisceau bleu généré est principalement un vortex optique d'OAM égal à la somme  $\ell_1 + \ell_2$  des OAM d'entrée. Pour des valeurs de  $\ell_2$  supérieures à 15 l'OAM du faisceau bleu est égal à  $\ell_1 + \ell_2 - 1$  ce qui signifie, à cause de l'accord de phase azimutale, que le faisceau infrarouge porte l'OAM  $\ell_{IR} = +1$ . Pour  $\ell_1$  et  $\ell_2$  de signe opposé la structure du faisceau bleu obtenu est plus complexe. Le modèle proposé définit des règles de sélection sur les modes bleus possibles et montre que des modes d'indice radial  $p_b$  non nul peuvent être générés. La valeur de  $\ell_b$  est comprise entre les valeurs de  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Les modes les plus probables sont alors ceux qui maximisent le recouvrement des quatre champs. Cette analyse semble en accord avec les observations expérimentales.

Les travaux effectués dans cette thèse permettent de donner des réponses aux questions posées en introduction :

- Le transfert d'OAM par des atomes est régi par des règles de sélection. Ces règles déterminent la valeur de l'OAM transférée aux ondes de sortie.
- Il est possible de transférer de grandes valeurs d'OAM mais l'efficacité du transfert n'est pas constante avec la valeur de l'OAM d'entrée. L'efficacité peut être augmentée en modifiant la taille des faisceaux incidents.
- Il est possible de trouver des conditions pour les quelles le processus de conversion restitue fidèlement l'information initiale, à savoir l'OAM de départ ou une superposition d'OAM, sur l'onde de sortie. Né anmoins pour de grandes valeurs de  $\ell$  ce n'est pas le cas : l'information portée par l'onde de sortie est en général différente. De plus une perte sur l'indice radial p du mode LG d'entrée peut avoir lieu. Dans les cas étudiés ici cette perte présente un avantage plus qu'un inconvénient : elle permet que le mode LG de sortie soit plus pur que celui d'entrée, ce qui laisse envisager le transfert de l'OAM sur de longues distances.
- De grandes valeurs d'OAM peuvent aussi être transférées en sommant l'OAM de deux vortex d'entrée. Par contre utiliser une différence simplement en changeant le signe d'un des deux OAM n'est pas aussi simple.

Plusieurs perspectives sont possibles pour ce travail. La première serait de pouvoir séparer et déterminer expérimentalement les différents modes composant le champ bleu en particulier pour la conversion d'une superposition de vortex. En utilisant les élements actuels le montage pourrait être enrichi d'une cavité laquelle permettrait à la fois d'amplifier la lumière bleue mais aussi de pouvoir sélectionner un seul mode de sortie. Une telle réalisation a déjà été effectuée pour des faisceaux d'entrée gaussiens [96]. La cellule de rubidium pourrait être remplacée par une cellule dans un autre matériau que le verre, comme le saphir, pour pouvoir détecter le faisceau infrarouge et étudier ses propriétés en particulier son OAM. Avec une telle cellule on pourrait aussi réaliser un "vrai" mélange à quatre ondes en rajoutant un laser infrarouge en entrée. Dans un premier temps ce laser pourrait être un faisceau gaussien mais pourrait par la suite être façonné en mode LG. Dans ce cas la valeur de l'OAM du faisceau bleu est entièrement déterminée par l'accord de phase azimutale. Une autre façon de réaliser un mélange comportant trois ondes incidentes serait de mettre une autre cellule de rubidium (en saphir) à la suite du montage de façon à utiliser le faisceau bleu comme troisième onde du mélange. L'avantage est que les trois faisceaux pompes (les deux faisceaux rouges initiaux et le faisceau bleu) sont déjà accordés en phase.

D'autres transitions atomiques pourraient aussi être envisagées. J'ai déjà mentionné dans ce manuscrit la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{3/2}$  qui permet de générer un mélange à quatre ondes quasi-dégénéré. En effet dans ce cas les quatre ondes du mélange ont des longueurs d'onde proches : 780, 776, 762 et 795 nm. Des transitions vers des niveaux atomiques plus élevés seraient également dignes d'intérêt. On privilégiera les transitions utilisant un niveau intermédiaire pour une meilleure efficacité. Par exemple la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 7S_{1/2}$ à (780 nm + 741 nm) peut être réalisée avec le laser TiSa que nous utilisons. Pour des niveaux atomiques plus élévés il faudra changer de laser ou bien doubler le TiSa. Par exemple on pourrait réaliser la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 6D_{3/2}$  à (780 nm + 630 nm) ou réaliser des transitions vers les états de Rydberg comme  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 26D_{3/2}$  à (780 nm + 483 nm). L'intéret du changement de transition atomique est d'observer l'influence de la longueur d'onde sur les règles de sélection du mélange à quatre ondes, en particulier sur la valeur de l'OAM de l'onde de sortie. On s'attend en effet à ce que la condition d'accord de phase de Gouy change. On pourrait également étudier l'influence d'un champ magnétique.

A plus long terme ce travail pourrait être transposé sur des atomes froids de rubidium d'autant plus que nous avons déjà mis en place un piège magnéto-optique à trois dimensions (MOT 3D) dans un travail annexe au cours de cette thèse. Ceci afin d'utiliser les propriétés des atomes froids pour envisager le stockage des états d'OAM d'entrée avant leur restitution.

# Annexe A

#### L'atome de rubidium

Nous présentons ici les principales propriétés physiques de l'atome de rubidium.

L'atome de rubidium est un atome alcalin (première colonne du tableau périodique, il possède donc un électron de valence) de numéro atomique Z = 37 et qui possède 32 isotopes. Il a été découvert en 1861 par Kirchhoff et Bunsen qui le nomèrent ainsi d'après la couleur rouge caractéristique obtenue en brulant des sels de rubidium [110].

Les seuls isotopes stables dans la nature sont le  ${}^{85}Rb$  et le  ${}^{87}Rb$ . Leur proportion naturelle est respectivement 72% et 28%.

La configuration électronique fondamentale<sup>1</sup> est  $[Kr](5s)^1$ . Le spin nucléaire est de  $\frac{5}{2}$  pour le <sup>85</sup>Rb et  $\frac{3}{2}$  pour le <sup>87</sup>Rb.

Les états excités utilisés dans ce manuscript et leur énergie respective (exprimée en fréquence) sont donnés sur la figure (A.1) pour le <sup>85</sup>Rb et sur la figure (A.2) pour le <sup>87</sup>Rb. Le niveau fondamental est  $5S_{1/2}$ . Les structures fine et hyperfine sont représentées. Sur les figures (A.1) et (A.2) il est à noter nous n'utilisons pas la notation spectroscopique conventionnelle  $n^{2S+1}L_J$  mais plutôt la notation simplifiée habituellement utilisée dans la littérature de physique atomique. La correspondance entre les deux notations est donnée comme ceci

$$n \stackrel{2S+1}{\longrightarrow} L_J \leftrightarrow nL_J \tag{A.1}$$

Dans le tableau (4.1a) nous donnons les longueurs d'onde  $\lambda$  dans le vide et les intensités de saturation  $I_{sat}$  des transitions atomiques que nous utilisons. Nous donnons également pour chaque transition les durées de vie  $\tau$  et les largeurs  $\Gamma$  du niveau du haut. Nous avons la correspondance

Transition	$\lambda_{\text{vide}} (\text{nm})$	$I_{\rm sat}~({ m mW/cm^2})$	$\Gamma$ (MHz)	au (ns)
$5S_{1/2} - 5P_{3/2}[118]$	780,241	1,67	6,07	26,23
$5S_{1/2} - 6P_{3/2}$	420,297	3,9	1,32 1,42	120,7[59] $109[67]$
$5P_{3/2} - 5D_{3/2}$	$776,\!156$	0,3	$0,\!65$ $0,\!66$	246,3[116] $241[67]$
$5P_{3/2} - 5D_{5/2}$	775,978[127]	0,19	0,66[61] $0,43[127]$	238,5[116] $230[79]$

$$\tau(s) = \frac{1}{2\pi \times \Gamma(Hz)} \tag{A.2}$$

1.  $[Kr] = (1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^{10}(4p)^6$ 

L'intensité de saturation est celle pour une onde de polarisation  $\sigma^{\pm}$ , lorsqu'il n'y a pas de valeur tabulée nous l'avons calculé selon la formule suivante [118] :

$$I_{sat} = \frac{\hbar\omega^3\Gamma}{12\pi c^2} \tag{A.3}$$

#### Spectroscopie d'absorption saturée

La spectroscopie d'absorption saturée est une technique classique en physique atomique pour déterminer la fréquence absolue d'un laser. Elle est souvent utilisée pour asservir un laser en fréquence. Le lecteur pourra trouver le principe dans la littérature en particulier dans [70]. Nous nous contentons ici de présenter les spectres que nous avons obtenus expérimentalement pour le rubidium et les différentes raies d'absorption associées. La figure (A.3) présentent les quatre raies d'absorption Doppler et la figure (A.4) détaille les raies hyperfines quand elles sont identifiables (les autres raies observables correspondent aux différents cross-overs). La référence de fréquence est prise pour la transition ( ${}^{85}Rb, F = 3 \rightarrow F' = 4$ ).



**FIGURE A.1** – Principaux niveaux d'énergie utilisés et fréquences associées du <sup>85</sup>Rb. Les fréquences indiquées proviennent de [118], [90].



**FIGURE A.2** – Principaux niveaux d'énergie utilisés et fréquences associées du <sup>87</sup>Rb. Les fréquences indiquées proviennent de [119] et [90].



**FIGURE A.3** – Signal d'absorption saturée obtenu par le montage indiqué en pointillé sur la figure (3.1). Il montre les quatre raies d'absorption Doppler du rubidium.



**FIGURE A.4** – Détail du signal d'absorption saturée montrant les raies hyperfines pour les deux isotopes du rubidium (zoom de la figure (A.3)).

## Annexe B

# Optimum de recouvrement des quatre champs du mélange

Lorsque les quatre faisceaux du mélange à quatre ondes sont des modes  $LG_{p_i}^{\ell_i}$  et que la longueur de Rayleigh  $z_{R_i}$  de chacun est plus grande que la longueur de la cellule L l'intégrale de recouvrement des quatre champs, expression (4.48), s'écrit :

$$J = 2\pi L \times \int_0^\infty \prod_i \sqrt{\frac{2P_i}{w_i^2 |\ell_i|!}} \left(\frac{2r^2}{w_i^2}\right)^{\frac{|\ell_i|}{2}} e^{\frac{-r^2}{w_i^2}} r dr \quad \text{avec} \quad i = \{1, 2, IR, b\}$$
(B.1)

La valeur analytique de J se calcule à l'aide de l'intégrale (2.36) et vaut :

$$J = L \times \sqrt{P_1 P_2 P_{IR} P_b} \frac{w_{tot}^{2\mathcal{L}+2}}{w_1^{|\ell_1|+1} w_b^{|\ell_b|+1} w_{IR}^{|\ell_{IR}|+1} w_2^{|\ell_2|+1}} \times \frac{2\Gamma(\mathcal{L}+1)}{\pi \sqrt{|\ell_1|!|\ell_2|!|\ell_{IR}|!|\ell_b|!}}$$
(B.2)

avec

$$\frac{2}{w_{tot}^2} = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} + \frac{1}{w_{IR}^2} + \frac{1}{w_b^2}$$
(B.3)

 $\operatorname{et}$ 

$$\mathcal{L} = \frac{|\ell_1|}{2} + \frac{|\ell_2|}{2} + \frac{|\ell_{IR}|}{2} + \frac{|\ell_b|}{2}$$
(B.4)

Dans l'expression (B.2)  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont fixés, pour un couple ( $\ell_b$ ,  $\ell_{IR}$ ) J est donc une fonction des variables  $w_b$  et  $w_{IR}$ . J est alors maximale si :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial w_b} = 0\\ \frac{\partial J}{\partial w_{IR}} = 0 \end{cases}$$
(B.5)

On remarque que dans l'expression (B.2) les rôles de  $w_b$  et  $w_{IR}$  sont identiques, on peut donc seulement calculer une des deux expressions (B.5). La première expression de (B.5) donne :

$$\frac{(2\mathcal{L}+2)\frac{\partial w_{tot}}{\partial w_b}w_{tot}^{2\mathcal{L}+1}w_b^{|\ell_b|+1} - w_{tot}^{2\mathcal{L}+2}(|\ell_b|+1)w_b^{|\ell_b|}}{w_b^{2(|\ell_b|+1)}} = 0$$
(B.6)

$$\Rightarrow (2\mathcal{L}+2)\frac{\partial w_{tot}}{\partial w_b}w_b = w_{tot}(|\ell_b|+1) \tag{B.7}$$

Posons  $k = \frac{2}{w_{tot}^2}$ , on a alors :

$$\frac{\partial k}{\partial w_b} = \frac{\partial k}{\partial w_{tot}} \cdot \frac{\partial w_{tot}}{\partial w_b} \tag{B.8}$$

$$\Rightarrow \ \frac{-2}{w_b^3} = \frac{-4}{w_{tot}^3} \cdot \frac{\partial w_{tot}}{\partial w_b} \tag{B.9}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w_{tot}}{\partial w_b} = \frac{w_{tot}^3}{2w_b^3} \tag{B.10}$$

En remplaçant (B.10) dans (B.7) on obtient :

$$(2\mathcal{L}+2)\frac{w_{tot}^3}{2w_b^3}w_b = w_{tot}(|\ell_b|+1)$$
(B.11)

$$\Rightarrow (\mathcal{L}+1)w_{tot}^2 = w_b^2(|\ell_b|+1) \tag{B.12}$$

De même on trouve  $w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = (\mathcal{L}+1)w_{tot}^2$ .

On peut réécrire la condition (B.12) sous une autre forme en utilisant l'expression de  $w_{tot}$  donnée par (B.3) :

$$\frac{2}{w_{tot}^2} - \underbrace{\left(\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_1^2}\right)}_{\frac{1}{w^2}} = \frac{1}{w_{IR}^2} + \frac{1}{w_b^2}$$
(B.13)

$$\Rightarrow \frac{2}{w_{tot}^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{(|\ell_{IR}| + 1)}{w_{tot}^2(\mathcal{L} + 1)} + \frac{(|\ell_b| + 1)}{w_{tot}^2(\mathcal{L} + 1)}$$
(B.14)

$$\Rightarrow \frac{1}{w^2} = \frac{2(\mathcal{L}+1) - |\ell_{IR}| - |\ell_b| - 2}{w_{tot}^2(\mathcal{L}+1)}$$
(B.15)

$$\Rightarrow w_{tot}^2(\mathcal{L}+1) = w^2(|\ell_1| + |\ell_2|)$$
(B.16)

Finalement à l'optimum de recouvrement on a :

$$\begin{cases} w_b^2(|\ell_b|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2 \\ w_{IR}^2(|\ell_{IR}|+1) = (|\ell_1|+|\ell_2|)w^2 \end{cases}$$
(B.17)

# Annexe C

# Moment orbital angulaire d'une superposition de vortex

Dans cette section nous analysons le moment orbital angulaire d'un faisceau composé d'une somme de vortex optiques. Pour plus de simplicité nous ferons la démonstration dans le cas d'une superposition de deux vortex d'OAM  $\ell_1$  et  $\ell_2$  mais les résultats qui suivent sont généralisables pour *n* vortex d'OAM  $\ell_n$ .

Le potentiel vecteur d'un tel faisceau peut s'écrire

$$\vec{A} = u(r,\theta,z)e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_x \tag{C.1}$$

avec

$$u(r,\theta,z) = u_0(r,z)e^{i\psi(r,z)}(ae^{i\ell_1\theta} + be^{i\ell_2\theta})$$
(C.2)

où  $u_0$  est l'amplitude du champ,  $\psi$  une phase quelconque et a et b des coefficients que nous considèrerons réels mais vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ .

Pour déterminer l'OAM nous repartons des résultats du chapitre 1. Nous commençons par déterminer la valeur moyenne des composantantes du vecteur de Poynting  $\vec{\pi}$  suivant  $\vec{e_z}$  et  $\vec{e_{\theta}}$  pour déterminer la densité moyenne de moment angulaire  $j_z$  dans la direction z et la densité d'énergie  $\epsilon$ . Nous trouvons

$$\langle \Pi \rangle_{\theta} = \frac{\varepsilon_0 c^2 \omega}{2} \frac{u_0^2}{r} \left[ a^2 \ell_1 + b^2 \ell_2 + ab(\ell_2 + \ell_1) \cos((\ell_1 - \ell_2)\theta) \right]$$
(C.3)

 $\operatorname{et}$ 

$$\langle \Pi \rangle_z = \frac{\varepsilon_0 c \omega^2 u_0^2}{2} (1 + 2ab\cos(\ell_1 - \ell_2)\theta) \tag{C.4}$$

On obtient alors

$$j_z = \frac{\varepsilon_0 \omega u_0^2}{2} \left[ a^2 \ell_1 + b^2 \ell_2 + ab(\ell_2 + \ell_1) \cos((\ell_1 - \ell_2)\theta) \right]$$
(C.5)

$$\epsilon = \frac{\varepsilon_0 \omega^2 u_0^2}{2} \left[ 1 + 2ab \cos((\ell_1 - \ell_2)\theta) \right]$$
(C.6)

et par intégration dans le plan transverse au faisce au on en déduit que le rapport entre le moment angulaire dans la direction  $z, J_z$ , et l'énergie  $\mathcal{E}$  vaut

$$\frac{J_z}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\omega} (a^2 \ell_1 + b^2 \ell_2) \tag{C.7}$$

Finalement comme précédemment par analogie avec la mécanique quantique on déduit que dans ce cas l'OAM d'un photon du faisceau est égal à :

$$J_z = \hbar (a^2 \ell_1 + b^2 \ell_2) \tag{C.8}$$

Il s'agit de la moyenne pondérée par les coefficients  $a^2$  et  $b^2$  des OAM  $\ell_1$  et  $\ell_2$  des vortex "individuels" composants le faisceau. Dans ce cas on observe qu'il est possible d'obtenir des valeurs non entières de l'OAM.

Dans le cadre de cette thèse du fait des propriétés des fonctions de Bessel les superpositions de vortex utilisées avait un moment orbital entier. Nous avons néanmoins trouvé dans la littérature une suggestion pour utiliser des valeurs non entières de l'OAM : de telles valeurs ont été utilisées pour générer des états intriqués en OAM de très grande dimensionnalité [94].

### Bibliographie

- A. M. Akulshin, B. V. Hall, V. Ivannikov, A. A. Orel, and A. I. Sidorov. Doppler-free two-photon resonances for atom detection and sum frequency stabilization. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 44 :215401–08, 2011.
- [2] A. M. Akulshin, R. J. McLean, A. I. Sidorov, and P. Hannaford. Coherent and collimated blue light generated by four-wave mixing in Rb vapour. *Optics Express*, 17:22861– 22870, 2009.
- [3] A. M. Akulshin, I. Novikova, E. E. Mikhailov, S. A. Suslov, and R. J. McLean. Arithmetic with optical topological charges in stepwise-excited Rb vapor. *Optics Letters*, 41 :1146–1149, 2016.
- [4] A. M. Akulshin, A. A. Orel, and R. J. McLean. Collimated blue light enhancement in velocity-selective pumped Rb vapour. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45 :015401, 2012.
- [5] A. M. Akulshin, N. Rahaman, S. A. Suslov, and R. J. McLean. Amplified spontaneous emission at 5,23 μm in two-photon excited rubidium vapor. Journal of the Optical Society of America B, 34 :2478–2484, 2017.
- [6] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45 :8185–8189, 1992.
- [7] L. Allen and M. Padgett. The Orbital Angular Momentum of Light : An Introduction, pages 1–12. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2011.
- [8] L. Allen, M. J. Padgett, and M. Babiker. Chap. IV The orbital angular momentum of light. volume 39 of *Progress in Optics*, pages 291 – 372. Elsevier, 1999.
- [9] M. F. Andersen, C. Ryu, P. Cladé, V. Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Quantized rotation of atoms from photons with orbital angular momentum. *Physical Review Letters*, 97 :170406–10, 2006.
- [10] E. Arimondo, M. Inguscio, and P. Violino. Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali atoms. *Reviews of Modern Physics*, 49:31–75, 1977.
- [11] S. Barnett, M. Babiker, and M. Padgett. Optical orbital angular momentum. In *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, volume 375. February 2017.
- [12] S. M. Barnett. Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum. *Journal of Modern Optics*, 57 :1339–1343, 2010.
- [13] S. M. Barnett and L. Allen. Orbital angular momentum and non-paraxial light beams. Optics Communications, 110 :670 – 678, 1994.
- [14] S. Barreiro and J. W. R. Tabosa. Generation of light carrying orbital angular momentum via induced coherence grating in cold atoms. *Physical Review Letters*, 90 :133001– 05, 2003.

- [15] S. M. Baumann, D. M. Kalb, L. H. MacMillan, and E. J. Galvez. Propagation dynamics of optical vortices due to Gouy phase. *Optics Express*, 17 :9818–9827, 2009.
- [16] M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, and J.P. Woerdman. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*, 96 :123 – 132, 1993.
- [17] M.W. Beijersbergen, R.P.C. Coerwinkel, M. Kristensen, and J.P. Woerdman. Helicalwavefront laser beams produced with a spiral phaseplate. *Optics Communications*, 112:321 – 327, 1994.
- [18] G. C. G. Berkhout, M. P. J. Lavery, J. Courtial, M. W. Beijersbergen, and M. J. Padgett. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Physical Review Letters*, 105 :153601–05, 2010.
- [19] M. V. Berry. Paraxial beams of spinning light. In *Proceedings of SPIE*.
- [20] K. Y. Bliokh, F. J. Rodríguez-Fortuño, F. Nori, and A. V. Zayats. Spin–orbit interactions of light. *Nature Photonics*, 9 :796–808, 2015.
- [21] M. Born and E. Wolf. Chapter XI Rigorous Diffraction Theory. In Principles of Optics, pages 556 – 592. Pergamon, sixième edition, 1980.
- [22] G. D. Boyd and A. Ashkin. Theory of parametric oscillator threshold with singlemode optical masers and observation of amplification in LiNbO<sub>3</sub>. *Physical Review*, 146 :187–198, 1966.
- [23] G. D. Boyd and D. A. Kleinman. Parametric interaction of focused gaussian light beams. *Journal of Applied Physics*, 39:3597–3639, 1968.
- [24] R. W. Boyd. Nonlinear optics. Academic press, 2003.
- [25] N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. E. Willner, and S. Ramachandran. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science*, 340 :1545–1548, 2013.
- [26] E. H. Brandt, J. Vanacken, and V. V. Moshchalkov. Vortices in Physics. Physica C : Superconductivity, 369 :1 – 9, 2002.
- [27] E. Brasselet, Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. S. Desyatnikov, W. Krolikowski, and Y. S. Kivshar. Dynamics of optical spin-orbit coupling in uniaxial crystals. *Optics Letters*, 34 :1021–1023, 2009.
- [28] E. Brekke and L. Alderson. Parametric four-wave mixing using a single cw laser. Optics Letters, 38 :2147–2149, 2013.
- [29] E. Brekke and E. Herman. Frequency characteristics of far-detuned parametric fourwave mixing in Rb. Optics Letters, 40:5674–5677, 2015.
- [30] N. C. Cabrera Gutiérrez. Modes de Laguerre-Gauss et canalisation datomes froids. PhD thesis, Université Paris Sud, 2014.
- [31] D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Z. Khoury. Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion. *Physical Review A*, 66 :041801–05, 2002.
- [32] G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, and P. K. Lam. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors. *Applied Optics*, 51 :873–876, 2012.
- [33] V. Carrat. Correction dynamique d'un SLM pour une holographie de haute fidélité. Réalisation dun MOT-2D pour l'application de modes de Laguerre-Gauss. PhD thesis, Université Paris 11, 2012.

- [34] C. Cohen-Tannoudji. Mécanique quantique-Tome III. EDP Sciences, 2017.
- [35] P. Coullet, L. Gil, and F. Rocca. Optical vortices. Optics Communications, 73:403 408, 1989.
- [36] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett. Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes. *Physical Review A*, 56 :4193–4196, 1997.
- [37] J. Courtial and K. O'Holleran. Experiments with twisted light. The European Physical Journal Special Topics, 145 :35–47, 2007.
- [38] J. E. Curtis and D. G. Grier. Modulated optical vortices. Optics Letters, 28:872–874, 2003.
- [39] J. E. Curtis and D. G. Grier. Structure of optical vortices. *Physical Review Letters*, 90 :133901–05, 2003.
- [40] A. J. F. de Almeida, S. Barreiro, W. S. Martins, R. A. de Oliveira, D. Felinto, L. Pruvost, and J. W. R. Tabosa. Storage of orbital angular momenta of light via coherent population oscillation. *Optics Letters*, 40 :2545–2548, 2015.
- [41] M. R. Dennis, K. O'Holleran, and M. J. Padgett. Chapter 5 singular optics : Optical vortices and polarization singularities. volume 53 of *Progress in Optics*, pages 293 – 363. Elsevier, 2009.
- [42] K. Dholakia, N. B. Simpson, M. J. Padgett, and L. Allen. Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light. *Physical Review A*, 54 :R3742–R3745, 1996.
- [43] D-S. Ding, W. Zhang, Z-Y. Zhou, S. Shi, G-Y. Xiang, X-S. Wang, Y-K. Jiang, B-S. Shi, and G-C. Guo. Quantum storage of orbital angular momentum entanglement in an atomic ensemble. *Physical Review Letters*, 114 :050502–07, 2015.
- [44] F. Diry. Holographie dynamique pour les atomes froids : modes de Laguerre-Gauss et leurs variantes. PhD thesis, Université Paris 11, 2009.
- [45] Données du Nist. National Institute of Standards and Technology (USA). https: //www.nist.gov, 2017.
- [46] U. Efron. Spatial light modulator technology : materials, devices, and applications, volume 47. CRC press, 1994.
- [47] Ame en Science. Supraconductivité.fr. http://www.supraconductivite.fr, 2017.
- [48] R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P. K. Lam, and A. Zeilinger. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10,010. *Proceedings* of the National Academy of Sciences, 113 :13642–13647, 2016.
- [49] R. Fickler, R. Lapkiewicz, W. N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, and A. Zeilinger. Quantum entanglement of high angular momenta. *Science*, 338 :640–643, 2012.
- [50] S. Franke-Arnold, L. Allen, and M. Padgett. Advances in optical angular momentum. Laser and Photonics Reviews, 2 :299–313, 2008.
- [51] S. Franke-Arnold, J. Leach, M. J. Padgett, V. E. Lembessis, D. Ellinas, A. J. Wright, J. M. Girkin, P. Öhberg, and A. S. Arnold. Optical ferris wheel for ultracold atoms. *Optics Express*, 15 :8619–8625, 2007.
- [52] S. Franke-Arnold and N. Radwell. Light served with a twist. Optics and Photonics News, 28:28–35, 2017.

- [53] N. Fraval. Composants à cristaux liquides nématiques adressés par électrodes résistives en polymère conducteur et applications. PhD thesis, Université de Bretagne Sud (UBS), Université Européenne de Bretagne (UEB), 2010.
- [54] M. E. J. Friese, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Optical alignment and spinning of laser-trapped microscopic particles. *Nature*, 394 :348–352, 1998.
- [55] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, M. J. Padgett, W. Dultz, H. Schmitzer, and K. Dholakia. Observation of the transfer of the local angular momentum density of a multiringed light beam to an optically trapped particle. *Physical Review Letters*, 91 :093602–06, 2003.
- [56] G. Gariepy, J. Leach, K. T. Kim, T. J. Hammond, E. Frumker, R. W. Boyd, and P. B. Corkum. Creating high-harmonic beams with controlled orbital angular momentum. *Physical Review Letters*, 113 :153901–06, 2014.
- [57] R. Géneaux, A. Camper, T. Auguste, O. Gobert, J. Caillat, R. Taïeb, and T. Ruchon. Synthesis and characterization of attosecond light vortices in the extreme ultraviolet. *Nature Communications*, 7 :12583, 2016.
- [58] G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S. M. Barnett, and S. Franke-Arnold. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics Express*, 12 :5448–5456, 2004.
- [59] E. Gomez, S. Aubin, L. A. Orozco, and G. D. Sprouse. Lifetime and hyperfine splitting measurements on the 7s and 6p levels in rubidium. *Journal of the Optical Society of America B*, 21 :2058–2067, 2004.
- [60] J. B. Götte, K. O'Holleran, D. Preece, F. Flossmann, S. Franke-Arnold, S. M. Barnett, and M. J. Padgett. Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure. *Optics Express*, 16 :993–1006, 2008.
- [61] T. T. Grove, V. Sanchez-Villicana, B. C. Duncan, S. Maleki, and P. L. Gould. Two-photon two-color diode laser spectroscopy of the rb  $5D_{5/2}$  state. *Physica Scripta*, 52 :271, 1995.
- [62] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda. Alternative formulation for invariant optical fields : Mathieu beams. *Optics Letters*, 25 :1493–1495, 2000.
- [63] M. Harris, C. A. Hill, P. R. Tapster, and J. M. Vaughan. Laser modes with helical wave fronts. *Physical Review A*, 49:3119–3122, 1994.
- [64] M. Harris, C. A. Hill, and J. M. Vaughan. Optical helices and spiral interference fringes. Optics Communications, 106 :161 – 166, 1994.
- [65] H. Haus. Waves and Fields in Optoelectronics. Prentice-Hall, 1984.
- [66] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. *Physical Review Letters*, 75 :826–829, 1995.
- [67] O. S. Heavens. Radiative transition probabilities of the lower excited states of the alkali metals. *Journal of the Optical Society of America*, 51 :1058–1061, 1961.
- [68] J. Humblet. Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique. *Physica*, 10:585–603, 1943.
- [69] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 2012.

- [70] V. Jacques, B. Hingant, A. Allafort, M. Pigeard, and J. F. Roch. Nonlinear spectroscopy of rubidium : an undergraduate experiment. *European Journal of Physics*, 30 :921–934, 2009.
- [71] W. Jiang, Q.-F. Chen, Y.-S. Zhang, and G-C. Guo. Computation of topological charges of optical vortices via nondegenerate four-wave mixing. *Physical Review A*, 74 :043811, 2006.
- [72] M.P.A Jones. Atom-light interactions. http://community.dur.ac.uk/thomas. billam/PreviousNotes\_MPAJones.pdf, 2017.
- [73] E. Karimi, B. Piccirillo, E. Nagali, L. Marrucci, and E. Santamato. Efficient generation and sorting of orbital angular momentum eigenmodes of light by thermally tuned qplates. *Applied Physics Letters*, 94 :231124–28, 2009.
- [74] M. G. Kirzhner, M. Klebanov, V. Lyubin, N. Collings, and I. Abdulhalim. Liquid crystal high-resolution optically addressed spatial light modulator using a nanodimensional chalcogenide photosensor. *Optics Letters*, 39 :2048–2051, 2014.
- [75] J. Leach, J. Courtial, K. Skeldon, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, and M. J. Padgett. Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon. *Physical Review Letters*, 92 :013601–05, 2004.
- [76] J. Leach, M. J. Padgett, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, and J. Courtial. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. *Physical Review Letters*, 88:257901– 05, 2002.
- [77] I. A. Litvin, A. Dudley, and A. Forbes. Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of bessel beams. *Optics Express*, 19:16760–16771, 2011.
- [78] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412 :313, 2001.
- [79] J. Marek and P. Munster. Radiative lifetimes of excited states of rubidium up to quantum number n = 12. Journal of Physics B : Atomic and Molecular Physics, 13:1731–1741, 1980.
- [80] L. Marrucci. The q-plate and its future. Journal of Nanophotonics, 7:7, 2013.
- [81] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Physical Review Letters*, 96 :163905– 09, 2006.
- [82] M. Massari, G. Ruffato, M. Gintoli, F. Ricci, and F. Romanato. Fabrication and characterization of high-quality spiral phase plates for optical applications. *Applied Optics*, 54 :4077–4083, 2015.
- [83] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Vortices in a bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 83:2498–2501, 1999.
- [84] D. McGloin and K. Dholakia. Bessel beams : Diffraction in a new light. Contemporary Physics, 46 :15–28, 2005.
- [85] T. Meijer, J. D. White, B. Smeets, M. Jeppesen, and R. E. Scholten. Blue five-level frequency-upconversion system in rubidium. *Optics Letters*, 31 :1002–1004, 2006.
- [86] G. Moddel, K. M. Johnson, W. Li, R. A. Rice, L. A. Pagano-Stauffer, and M. A. Handschy. Highspeed binary optically addressed spatial light modulator. *Applied Physics Letters*, 55:537–539, 1989.
- [87] F. Moisy. Mécaniques des fluides (cours de M1), 2017.

- [88] D. Moretti, D. Felinto, and J. W. R. Tabosa. Collapses and revivals of stored orbital angular momentum of light in a cold-atom ensemble. *Physical Review A*, 79:023825–29, 2009.
- [89] G. Morigi, S. Franke-Arnold, and G-L. Oppo. Phase-dependent interaction in a fourlevel atomic configuration. *Physical Review A*, 66 :053409–18, 2002.
- [90] F. Nez, F. Biraben, R. Felder, and Y. Millerioux. Optical frequency determination of the hyperfine components of the  $5S_{1/2} \rightarrow 5D_{3/2}$  two-photon transitions in rubidium. *Optics Communications*, 102 :432 438, 1993.
- [91] A. Nicolas, L. Veissier, L. Giner, E. Giacobino, D. Maxein, and J. Laurat. A quantum memory for orbital angular momentum photonic qubits. *Nature Photonics*, 8 :234, 2014.
- [92] J. F. Nye. Natural Focusing and Fine Structure of Light : Caustics and Wave Dislocations. Taylor & Francis, 1999.
- [93] J. F. Nye and M. V. Berry. Dislocations in wave trains. Proceedings of the Royal Society A, 336 :165–190, 1974.
- [94] S. S. R. Oemrawsingh, X. Ma, D. Voigt, A. Aiello, E. R. Eliel, G. W. 't Hooft, and J. P. Woerdman. Experimental demonstration of fractional orbital angular momentum entanglement of two photons. *Physical Review Letters*, 95 :240501–05, 2005.
- [95] S. S. R. Oemrawsingh, J. A. W. van Houwelingen, E. R. Eliel, J. P. Woerdman, E. J. K. Verstegen, J. G. Kloosterboer, and G. W. 't Hooft. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths. *Applied Optics*, 43 :688–694, 2004.
- [96] R. F. Offer, J. W. C. Conway, E. Riis, S. Franke-Arnold, and A. S. Arnold. Cavityenhanced frequency up-conversion in rubidium vapor. *Optics Letters*, 41 :2177–2180, 2016.
- [97] A. T. O'Neil, I. MacVicar, L. Allen, and M. J. Padgett. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam. *Physical Review Letters*, 88:053601–05, 2002.
- [98] M. J. Padgett. Orbital angular momentum 25 years on. Optics Express, 25 :11265– 11274, 2017.
- [99] M. J. Padgett and L. Allen. The poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes. Optics Communications, 121 :36 – 40, 1995.
- [100] M. J. Padgett, F. M. Miatto, M. P. J. Lavery, A. Zeilinger, and R. W. Boyd. Divergence of an orbital-angular-momentum-carrying beam upon propagation. New Journal of Physics, 17 :023011, 2015.
- [101] M.J. Padgett, J. Arlt, N. Simpson, and L. Allen. An experiment to observe the intensity and phase structure of Laguerre-Gaussian laser modes. *American Journal of Physics*, 64 :77–82, 1996.
- [102] C. Paterson. Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication. *Physical Review Letters*, 94 :153901–05, 2005.
- [103] N. Pavloff. Phénomènes collectifs complexes (cours de M1), 2013.
- [104] G. I. Peters and L. Allen. Amplified spontaneous emission. Part I : The threshold condition. Journal of Physics A : General Physics, 4 :238–243, 1971.
- [105] M. Polyanskiy. Refractive index database. https://refractiveindex.info, 2017.

- [106] F. Ponciano-Ojeda, S. Hernández-Gómez, O. López-Hernández, C. Mojica-Casique, R. Colín-Rodríguez, F. Ramírez-Martínez, J. Flores-Mijangos, D. Sahagún, R. Jáuregui, and J. Jiménez-Mier. Observation of the  $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$  electric-dipole-forbidden transition in atomic rubidium using optical-optical double-resonance spectroscopy. *Physical Review A*, 92 :042511–17, 2015.
- [107] R. Pugatch, M. Shuker, O. Firstenberg, A. Ron, and N. Davidson. Topological stability of stored optical vortices. *Physical Review Letters*, 98 :203601–05, 2007.
- [108] B. Rodenburg, M. P. J. Lavery, M. Malik, M. N. O'Sullivan, M. Mirhosseini, D. J. Robertson, M. J. Padgett, and R. W. Boyd. Influence of atmospheric turbulence on states of light carrying orbital angular momentum. *Optics Letters*, 37:3735–3737, 2012.
- [109] H. Rubinsztein-Dunlop, A. Forbes, M. V. Berry, M. R. Dennis, D. L Andrews, M. Mansuripur, C. Denz, C. Alpmann, P. Banzer, T. Bauer, E. Karimi, L. Marrucci, M. Padgett, M. Ritsch-Marte, N. M. Litchinitser, N. P. Bigelow, C. Rosales-Guzmán, A. Belmonte, J. P. Torres, T. W. Neely, M. Baker, R. Gordon, A. B. Stilgoe, J. Romero, A. G. White, R. Fickler, A. E. Willner, G. Xie, B. McMorran, and A. M. Weiner. Roadmap on structured light. *Journal of Optics*, 19 :013001, 2017.
- [110] J. E. Sansonetti. Wavelengths, transition probabilities, and energy levels for the spectra of rubidium (RbI through RbXXXVII). Journal of Physical and Chemical Reference Data, 35:301–421, 2006.
- [111] C. T. Schmiegelow, J. Schulz, H. Kaufmann, T. Ruster, U. G. Poschinger, and F. Schmidt-Kaler. Transfer of optical orbital angular momentum to a bound electron. *Nature communications*, 7, 2016.
- [112] J. T. Schultz, S. Abend, D. Döring, J. E. Debs, P. A. Altin, J. D. White, N. P. Robins, and J. D. Close. Coherent 455 nm beam production in a cesium vapor. *Optics Letters*, 34 :2321–2323, 2009.
- [113] C. Schulze, A. Dudley, D. Flamm, M. Duparré, and A. Forbes. Measurement of the orbital angular momentum density of light by modal decomposition. *New Journal of Physics*, 15 :073025, 2013.
- [114] J. F. Sell, M. A. Gearba, B. D. DePaola, and R. J. Knize. Collimated blue and infrared beams generated by two-photon excitation in rb vapor. *Optics Letters*, 39 :528–531, 2014.
- [115] Y. Shen, G. T. Campbell, B. Hage, H. Zou, B. C. Buchler, and P. K. Lam. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices. *Journal of Optics*, 15:044005, 2013.
- [116] D. Sheng, A. Pérez Galván, and L. A. Orozco. Lifetime measurements of the 5d states of rubidium. *Physical Review A*, 78:062506–14, 2008.
- [117] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, M. V. Vasnetsov, J. T. Malos, and N. R. Heckenberg. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. *Physical Review A*, 56 :4064–4075, 1997.
- [118] D. A. Steck. Rubidium 85 D line data. available online at http://steck.us/alkalidata (revision 2.1.6, 20 September 2013).
- [119] D. A. Steck. Rubidium 87 D line data. available online at http://steck.us/alkalidata (revision 2.1.5, 13 January 2015).
- [120] F. Tamburini, E. Mari, A. Sponselli, B. Thidé, A. Bianchini, and F. Romanato. Encoding many channels on the same frequency through radio vorticity : first experimental test. New Journal of Physics, 14 :033001, 2012.

- [121] P. Vaity, J. Banerji, and R.P. Singh. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. *Physics Letters A*, 377 :1154 – 1156, 2013.
- [122] S. J. van Enk. Selection rules and centre-of-mass motion of ultracold atoms. Quantum Optics : Journal of the European Optical Society Part B, 6 :445–457, 1994.
- [123] S.J. van Enk and G. Nienhuis. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. Optics Communications, 94 :147 – 158, 1992.
- [124] L. Veissier, A. Nicolas, L. Giner, D. Maxein, A. S. Sheremet, E. Giacobino, and J. Laurat. Reversible optical memory for twisted photons. *Optics Letters*, 38:712–714, 2013.
- [125] J. Verbeeck, H. Tian, and P. Schattschneider. Production and application of electron vortex beams. *Nature*, 467 :301, 2010.
- [126] A. Vernier. *Phase dependent atom optics*. PhD thesis, University of Glasgow, 2011.
- [127] A. Vernier, S. Franke-Arnold, E. Riis, and A. S. Arnold. Enhanced frequency upconversion in Rb vapor. *Optics Express*, 18 :17020–17026, 2010.
- [128] D. L. P. Vitullo, C. C. Leary, P. Gregg, R. A. Smith, D. V. Reddy, S. Ramachandran, and M. G. Raymer. Observation of interaction of spin and intrinsic orbital angular momentum of light. *Physical Review Letters*, 118 :083601–07, 2017.
- [129] G. Walker, A. S. Arnold, and S. Franke-Arnold. Trans-spectral orbital angular momentum transfer via four-wave mixing in Rb vapor. *Physical Review Letters*, 108 :243601– 06, 2012.
- [130] J. Wang, J-Y. Yang, I. M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, and A. E. Willner. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nature Photonics*, 6 :488–496, 2012.
- [131] D. J. Whiting, R. S. Mathew, J. Keaveney, C. S. Adams, and I. G. Hughes. Fourwave mixing in a non-degenerate four-level diamond configuration in the hyperfine Paschen–Back regime. *Journal of Modern Optics*, 65:713–722, 2018.
- [132] R. T. Willis, F. E. Becerra, L. A. Orozco, and S. L. Rolston. Four-wave mixing in the diamond configuration in an atomic vapor. *Physical Review A*, 79:033814–20, 2009.
- [133] R. Wunenburger, J. I. V. Lozano, and E. Brasselet. Acoustic orbital angular momentum transfer to matter by chiral scattering. *New Journal of Physics*, 17 :103022, 2015.
- [134] A. M. Yao and M. J. Padgett. Orbital angular momentum : origins, behavior and applications. Advances in Optics and Photonics, 3:161–204, 2011.
- [135] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, and R. E. Packard. Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium. *Physical Review Letters*, 43 :214–217, 1979.
- [136] R. Zambrini and S. M. Barnett. Angular momentum of multimode and polarization patterns. Optics Express, 15 :15214–15227, 2007.
- [137] A. S. Zibrov, M. D. Lukin, L. Hollberg, and M. O. Scully. Efficient frequency upconversion in resonant coherent media. *Physical Review A*, 65:051801–05, 2002.



**Titre :** Atomes et vortex optiques : conversion de moments orbitaux de lumière en utilisant la transition à deux photons 5S-5D du rubidium

**Mots clés :** Vortex optique-Transition atomique à deux photons- Moment orbital angulaire- Mélange à quatre ondes- Topologie -Transition Raman stimulée

**Résumé** : Le moment orbital angulaire (OAM) de la lumière est une grandeur quantifiée associée à la phase d'un vortex optique et est actuellement une des variables explorées pour les technologies quantiques. Dans ce contexte, cette thèse étudie expérimentalement la conversion de vortex optiques par une vapeur de rubidium, via la transition Raman stimulée à deux photons  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$ . Quand les atomes sont soumis à deux lasers, respectivement à 780 *nm* et 776 *nm*, ils génèrent des rayonnements cohérents, infrarouge à 5,23  $\mu$ m et bleu à 420 *nm*. On examine le rayonnement bleu lorsque l'un des lasers ou les deux sont des vortex, en particulier des modes de Laguerre-Gauss.

Dans une première partie nous montrons que si l'OAM est porté par le laser à 776 *nm*, alors le rayonnement bleu émis porte un OAM qui respecte l'accord de phase azimutale et de phase de Gouy. Nous montrons aussi que la conversion est efficace sur une grande plage d'OAM allant de -50 à +50, que l'efficacité est gouvernée par le produit des intensités des lasers incidents et que le rayonnement bleu se comporte comme un mode de Laguerre-Gauss pur.

Dans une deuxième partie nous montrons qu'il est possible de convertir une superposition de vortex ou une paire de vortex coaxiaux et que l'OAM du rayonnement bleu émis obéit à la règle de somme des OAM incidents.

Pour les cas étudiés, nous proposons un modèle de mélange à quatre ondes qui établit les règles de sélection du processus de conversion d'OAM.

Ce travail ouvre la voie vers la conversion d'OAM utilisant des transitions vers des niveaux atomiques plus élevés.

**Title :** Atom-vortex interplay : conversion of orbital momenta of light through the 5S-5D two-photon transition of rubidium

**Keywords :** Optical vortices- Atomic two-photon transition- Orbital angular momentum- Four wave mixing- Topology- Stimulated Raman transition

**Abstract**: The orbital angular momentum of light (OAM) is a quantized quantity arising from the azimuthal phase carried by optical vortices and is well-known for quantum technology applications. Its set of values is theoretically infinite.

In this context this thesis experimentally study the conversion of optical vortices in a rubidium vapor through the  $5S_{1/2} - 5D_{5/2}$  stimulated Raman transition. When the atoms are illuminated with laser beams at 780 *nm* and 776 *nm* they generate two coherent light beams at 5,23  $\mu$ m and 420 *nm*. We investigate the blue light when one laser or both are optical vortices, in particular Laguerre-Gaussian modes.

In a first part we show that if the laser at 776 nm carries an OAM the blue light is an optical vortex with an OAM which respects azimuthal and Gouy phase matchings. We further show that the conversion is efficient on a large set of OAM from -50 to +50, that the efficiency is governed by the product of the input laser intensities and that the blue light behaves like a pure Laguerre-Gaussian mode.

In a second part we demonstrate the conversion of a vortex superposition or a pair of coaxial vortices and that the OAM of the emitted light obeys the conservation of the total OAM.

For each studied case we propose a four wave mixing model establishing selection rules for the conversion process.

This work opens possibilities towards OAM conversion using higher atomic levels.