



HAL
open science

Sur l'estimation de probabilités de queues multivariées

Mohamed Néjib Dalhoumi

► **To cite this version:**

Mohamed Néjib Dalhoumi. Sur l'estimation de probabilités de queues multivariées. Théorie [stat.TH]. Université Montpellier, 2017. Français. NNT : 2017MONT061 . tel-01943752

HAL Id: tel-01943752

<https://theses.hal.science/tel-01943752>

Submitted on 4 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par l'Université de Montpellier

Préparée au sein de l'école doctorale **I2S**
Et de l'unité de recherche **IMAG**

Spécialité: **Biostatistique**

Présentée par **Mohamed Néjib Dalhoumi**

Sur l'estimation de
probabilités de queues
multivariées

Soutenue le 25 Septembre 2017 devant le jury composé de

Mme Armelle GUILLOU	PR	Univ. Strasbourg	Rapporteure
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS	PR	Univ. Lyon 1	Rapporteure
M Jean-Noël BACRO	PR	Univ. Montpellier	Directeur
M Jonathan EL METHNI	MC	Univ. Paris Descartes	Examineur
M Ali GANNOUN	PR	Univ. Montpellier	Examineur
M Stéphane GIRARD	DR	INRIA Grenoble	Examineur
Mme Gwladys TOULEMONDE	MC	Univ. Montpellier	Co-encadrante



**Collège
Doctoral**
Languedoc-Roussillon

Table des Matières

Remerciements	7
Introduction générale	9
1 Résumé de la thèse	9
2 Organisation des différents chapitres	10
1 Préambule	11
1.1 Distributions de même type / loi stable	11
1.2 Variation régulière	13
1.2.1 Variation lente	14
1.2.2 Représentation de Karamata	14
1.2.3 Propriétés des fonctions à variations lente	15
1.3 Variation régulière	15
1.3.1 Variation régulière univariée des queues de distributions	17
1.3.2 Propriétés des fonctions à variation régulière	19
1.4 Variation régulière multivariée	20
1.4.1 Notation vectorielle	20
1.4.2 Coordonnées pseudo-polaires et mesure spectrale	21
1.5 Processus ponctuels	23
1.5.1 Processus ponctuel	23
2 Théorie des extrêmes	27
2.1 Introduction	27
2.2 Approche univariée	27
2.2.1 Approche des maxima par bloc faisant intervenir le modèle GEV	28
2.2.2 Caractérisation des extrêmes univariés par un processus ponctuel	32
2.2.3 Lois max-stables	33
2.2.4 Modèles de dépassements GPD	34
2.3 Lien entre les modélisations GEV et GPD	35
2.3.1 Du modèle GEV au modèle GPD	36
2.3.2 Du modèle GPD au modèle GEV	36
2.4 Approche multivariée	37

2.4.1	Caractérisation des extrêmes multivariés par des processus ponctuels	37
2.4.2	Distribution des extrêmes multivariée	39
2.4.3	Ajustement des modèles multivariés	44
2.5	Insuffisance du cadre max-stable	46
3	Au delà du max-stable	47
3.1	Introduction	47
3.2	Caractérisation de l'(in)dépendance asymptotique par les mesures χ et $\bar{\chi}$	47
3.3	Modèles de Ledford et Tawn (1996-1997)	49
3.4	Relation entre η et \mathcal{L} et les mesures de dépendances χ et $\bar{\chi}$	51
3.5	Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique	52
3.5.1	Variation régulière cachée : Resnick (2002)	52
3.5.2	Dépendance résiduelle extrême : De Haan et Zhou (2011)	54
3.5.3	Modèle paramétrique de Ramos et Ledford (2009)	57
3.5.4	Modèle de maxima de Ramos et Ledford (2011)	58
3.6	Modèle de Wadsworth et Tawn (2013)	60
4	Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées	63
4.1	Introduction	63
4.1.1	Exemples pour lesquels la condition de Wadsworth et Tawn n'est pas valide	64
4.1.2	Modification de la condition de Wadsworth et Tawn (2013)	65
4.2	Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées	68
4.2.1	Exemples	68
4.3	Nouvelle mesure exponent	72
4.4	Inférence statistique	73
4.4.1	Estimation de la fonction κ	73
4.4.2	Estimation de la fonction $g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}$	74
4.4.3	Une nouvelle stratégie d'extrapolation	75
4.5	Simulations	75
4.5.1	Existence d'une direction d'extrapolation meilleure que celle de WT	76
4.5.2	Choix pratique pour les rayons d'extrapolation	81
4.6	Conclusion	85
5	Vers une représentation paramétrique des queues de distributions multivariées	89
5.1	Introduction	89
5.2	Approche semi-paramétrique	89
5.3	Modèles de dépendance pour les extrêmes multivariés	94
5.3.1	Distribution des maxima : cas bivarié	94

TABLE DES MATIÈRES

5.3.2	Extension au cas multivarié	97
5.4	Modèles paramétriques pour $H_{\kappa(\alpha)}$	99
5.4.1	Construction de $H_{\kappa(\alpha)}$ à partir d'une mesure positive quelconque	99
5.4.2	Exemples	101
5.5	Inférence et simulation	105
5.5.1	Simulation de (S_β, T_γ) satisfaisant (5.27).	105
5.5.2	Vraisemblance	109
5.6	Conclusion	114
6	Conclusion et perspectives	115

Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue qu'une thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « l'apprenti chercheur ». En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs de thèse, GWLADYS TOULEMONDE et JEAN-NOËL BACRO, pour la confiance qu'il m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour leurs multiples conseils et pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également leur dire à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité et leur respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je leur ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. Mes vifs remerciements vont également à Mme ARMELLE GUILLOU et Mme VÉRONIQUE MAUME-DESCHAMPS pour avoir accepté de rapporter mon travail de thèse, et encore merci à eux ainsi qu' à M STÉPHANE GIRARD, M JONATHAN EL METHNI et M ALI GANNOUN d'avoir pu se libérer pour être présents et participer à ce jury de thèse.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont permis de mieux travailler, ou de travailler dans une meilleure atmosphère.

Je ne peux pas ne pas penser maintenant 'a tous ceux qui comptent énormément pour moi, une fois que je quitte l'université Je vais essayer de faire bref pour cette partie dont la longueur sera inversement proportionnelle à son importance. Merci 'a mes parents, pour tout ce qu'ils ont fait pour mes frères et moi depuis que nous sommes petits.

Merci à toute ma famille, ma femme Ilhem mes enfants , Youssef, Ahmed et Ismail.

Merci à tous mes ami-e-s. Celles et ceux que je connais depuis longtemps.

Introduction générale

1 Résumé de la thèse

Cette thèse présente des contributions à la modélisation multivariée des queues de distribution. Nous introduisons une nouvelle modélisation des probabilités de queue jointes d'une distribution multivariée avec des marges Pareto. Ce modèle est inspiré de celui de Wadsworth et Tawn (2013). Une nouvelle variation régulière multivariée non-standard de coefficient une fonction à deux variables est introduite, permettant de généraliser deux approches de modélisation respectivement proposées par Ramos et Ledford (2009) et Wadsworth et Tawn (2013). En nous appuyant sur cette modélisation nous proposons une nouvelle classe de modèles semi-paramétriques pour l'extrapolation multivariée selon des trajectoires couvrant tout le premier quadrant positif. Nous considérons aussi des modèles paramétriques construits grâce à une mesure non-négative satisfaisant une contrainte qui généralise celle de Ramos et Ledford (2009). Ces nouveaux modèles sont flexibles et conviennent tant pour les situations de dépendance que d'indépendance asymptotique.

Mots-clés. Extrêmes multivariés, (in)dépendance asymptotique, modélisation de queue de distributions, extrapolations, mesure pseudo-radiale.

Abstract. This PhD thesis presents contributions to the modelling of multivariate extreme values. We introduce a new tail model for multivariate distribution with Pareto margins. This model is inspired from the Wadsworth and Tawn (2013) one. A new non-standard multivariate regular variation with index equals to a function of two variables is thus introduced to generalize both modeling approaches proposed by Ramos and Ledford (2009) and Wadsworth and Tawn (2013), respectively. Building on this new approach we propose a new class of non-parametric models allowing multivariate extrapolation along trajectories covering the entire first positive quadrant. Similarly we consider parametric models built with a non-negative measure satisfying a constraint that generalizes the Ramos and Ledford (2009) one. These new models are flexible and valid in both situations of dependence or asymptotic independence.

Keywords. Multivariate extremes, asymptotic (in)dependence, joint tail modelling, extrapolations, pseudo-radial measure.

2 Organisation des différents chapitres

Le premier chapitre de la thèse est constitué d'un préambule avec une présentation de quelques définitions et théorèmes utiles pour le développement des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre intitulé "*Théorie des extrêmes*" est un résumé de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre max-stable. En particulier nous commençons par les résultats classiques de la théorie des valeurs extrêmes unidimensionnelle pour ensuite passer à leur généralisation en dimension plus grande. Nous nous concentrons sur le problème bidimensionnel où nous mettons l'accent sur la caractérisation des extrêmes par des processus ponctuels. Un intérêt particulier est donné à l'insuffisance du cadre max-stable pour gérer les problèmes liés à l'indépendance asymptotique.

Le troisième chapitre de la thèse intitulé "*Au delà du max-stable*" est consacré aux principaux résultats de la littérature sur les modèles de queue pour distributions multivariées. Nous analysons l'apport de ces modèles par rapport aux modèles max-stables en terme de capacité à capturer les informations de la dépendance entre les composantes d'une distribution multivariée, dans les cas de dépendance asymptotique et d'indépendance asymptotique.

Le quatrième chapitre de la thèse intitulé "*Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées*" repose essentiellement sur un article, coécrit avec J.N. Bacro et G. Toulemonde, s'intitulant "*A general model for bivariate tail probabilities*" actuellement soumis pour publication. Il concerne une extension aux distributions ray-dépendantes de la modélisation de queue d'une distribution bivariée avec des marges Pareto proposée par Wadsworth et Tawn (2013). Grâce à cette nouvelle modélisation, de nouvelles stratégies d'extrapolation dans le premier quadrant positif sont explorées. Nous illustrons le bien-fondé de notre modélisation sur plusieurs familles paramétriques de copules couvrant un large spectre de dépendance. Nous présentons également, au travers d'une étude par simulation, une comparaison avec les résultats de Wadsworth et Tawn (2013).

Enfin, dans le cinquième chapitre, intitulé "*Vers une représentation paramétrique des queues de distributions multivariées*", nous utilisons notre modèle de queue développé dans le chapitre précédent pour généraliser une approche semi-paramétrique de la modélisation d'une fonction de survie multivariée proposée par Ramos et Ledford (2009). De nouveaux modèles semi-paramétriques d'une mesure spectrale liée à l'approche sont proposés avec des applications sur données simulées. Ce chapitre fait à son tour l'objet d'un article en préparation, coécrit avec J.N. Bacro et G. Toulemonde, s'intitulant "*A parametric approach for estimating multivariate tail probabilities*".

Chapitre 1

Préambule

Ce chapitre est consacré à quelques définitions et résultats existant déjà dans la littérature et qui définissent un cadre théorique probabiliste offrant des outils essentiels pour le développement des chapitres suivants.

1.1 Distributions de même type / loi stable

Dans l'objectif d'avoir les outils nécessaires pour l'étude, dans le second chapitre (théorie des extrêmes), de l'analogie qui existe entre la convergence des maxima normalisés vers les uniques lois limites appelées lois max-stables et la convergence de la somme normalisée de n variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) vers les uniques lois limites appelées lois stables, il convient d'abord de rappeler les résultats qui suivent.

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{R} et de même loi F .

Beaucoup de résultats de convergence en probabilité sont basés sur l'existence de suites normalisantes adéquatement choisies $\{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de nombres réels strictement positifs et $\{b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de nombres réels tels que $\{a_n^{-1}(X_n - b_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée Y de fonction de répartition G . La convergence en loi de $\{a_n^{-1}(X_n - b_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ vers Y veut dire que pour tout x où G est continue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \mathbb{P}(Y \leq x), \quad \text{ce qui est équivalent à dire que} \quad (1.1)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n) = G(x).$$

Exemple 1.1.1. Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) admettant une moyenne μ et une variance $\sigma^2 > 0$ finies, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans \mathbb{R} . Soit $\{S_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ définie

par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

D'après le théorème central limite on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Cela veut dire que la suite des sommes partielles normalisée $\left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right\}$ converge en loi vers la loi de probabilité normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Deux questions se posent :

- i) Les constantes de normalisation $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $b_n \in \mathbb{R}$ sont-elles uniques ?
- ii) Pour des suites normalisantes différentes, aurons nous des lois limites différentes et quel serait le lien entre ces lois limites ?

Les réponses à ces questions sont dans le théorème 1.1.1 ci dessous.

Définition 1.1.1. (Resnick, 1987)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de fonctions de distribution respectives F et G . On dit que F et G sont de même type si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists b \in \mathbb{R} \quad \text{tels que } G(x) = F(ax + b)$$

ou ce qui est équivalent, X et Y sont de même type si:

$$\exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists b \in \mathbb{R} \quad \text{telle que } X \stackrel{d}{=} aY + b.$$

Autrement dit: Les variables aléatoires de même type sont celles qui ont la même distribution à un facteur de localisation et un facteur d'échelle près.

Remarque 1.1.1. On vérifie facilement que la propriété être de même type est une relation d'équivalence dans l'espace des fonctions de distributions où chaque classe d'équivalence forme un type de distribution.

Dans l'exemple ci-dessous, on vérifie que toutes les distributions normales forment un seul type de distributions dit *type normal*.

Exemple 1.1.2. Si X et Y sont deux variables aléatoires de même distribution normale, de moyennes respectives μ_1 et μ_2 et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ alors

$$Y \stackrel{d}{=} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X + \frac{\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\sigma_1}.$$

1.2 Variation régulière

Théorème 1.1.1. (*Embrechts et al., 1997*)

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires réelles de fonction de répartition F_n et Y, Z deux variables aléatoires réelles ayant respectivement les fonctions de répartition non dégénérées G et H . Soient les suites de nombres réels, $\{a_n > 0, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{\alpha_n > 0, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\beta_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Supposons que

$$\forall x \in \mathcal{C}(G) = \{x \in \mathbb{R}, G \text{ est continue en } x\}, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n x + b_n) = G(x). \quad (1.2)$$

Alors

1) On a

$$\forall x \in \mathcal{C}(H) = \{x \in \mathbb{R}, H \text{ est continue en } x\}, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = H(x) \quad (1.3)$$

si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\alpha_n} = a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - \beta_n}{\alpha_n} = b \in \mathbb{R}.$$

2) Si (1.3) est vérifiée alors

$$Z \stackrel{d}{=} aY + b \quad (1.4)$$

et a et b sont les seuls réels qui vérifient (1.4).

3) Supposons que (1.3) est vérifiée alors Y est non dégénérée si et seulement si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et dans ce cas Y et Z sont de même type.

Définition 1.1.2. (*Shirayev, 1984*)

Une variable aléatoire réelle X , ou la loi de probabilité de X , est dite stable si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists a_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exists b_n > 0 \quad \text{telles que} \quad \frac{S_n - a_n}{b_n} \stackrel{d}{=} X$$

où S_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

1.2 Variation régulière

Dans cette section, nous commençons par le rappel de quelques définitions et propriétés générales sur les fonctions à variation lente et les fonctions à variation régulière dans le cas général, puis nous nous intéressons à la partie la plus intéressante pour les chapitres suivants et qui concerne la variation régulière des queues de distributions, surtout dans le cas multivarié. Très souvent des définitions intermédiaires sont nécessaires pour la compréhension de la suite.

C'est à Jovan Karamata que l'on doit le développement de la théorie de variation

régulière depuis la publication de son papier sur un mode de croissance régulière des fonctions en 1930. La théorie de la variation régulière est reconnue comme un outil indispensable dans la théorie des probabilités et ses applications. Un nouvel élan au sujet a été fourni en 1970, par Laurens De Haan dans sa thèse. Une généralisation substantielle de la théorie de variation régulière a ainsi été introduite.

1.2.1 Variation lente

Définition 1.2.1. (*Bingham et al., 1987*)

Une fonction mesurable $L : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($a \geq 0$) est dite à variation lente à l'infini si

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

1.2.2 Représentation de Karamata

Beaucoup de résultats concernant les fonctions à variation lente sont dus à Jovan Karamata et l'un des résultats les plus importants est le théorème de représentation suivant (Bingham et al., 1987) :

Théorème 1.2.1. (*théorème de représentation*)

Une fonction L est dite à variation lente à l'infini si et seulement si elle peut être représentée de la façon suivante :

$$\forall x \geq b > a, \quad L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_b^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\} \quad (1.5)$$

où c et δ sont des fonctions définies mesurables sur (a, ∞) ($a \geq 0$) telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$.

L'expression (1.5) est appelée *représentation de Karamata* de la fonction à variation lente L .

Exemple 1.2.1. Soit $L : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par :

$$\forall x \in (1, \infty), \quad L(x) = (1 + x^{-1}) \ln x.$$

Alors L est une fonction à variation lente à l'infini.

Vérification

1) En utilisant la définition :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[1 + (tx)^{-1}] \ln(tx)}{(1 + t^{-1}) \ln(t)} = 1.$$

2) En utilisant (1.5) :

$$\forall x \geq e > 1, \quad L(x) = (1 + x^{-1}) \exp \left\{ \int_e^x \frac{\ln(u)^{-1}}{u} du \right\}.$$

1.3 Variation régulière

1.2.3 Propriétés des fonctions à variations lente

La proposition qui suit nous donne quelques propriétés élémentaires des fonctions à variations lente.

Proposition 1.2.1. (Bingham et al., 1987)

Soient L, L_1, L_2, \dots, L_n des fonctions définies mesurables et positives sur un voisinage de l'infini. On a :

1. Si L est à variation lente au voisinage de l'infini alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln L(x)}{\ln x} = 0.$$

2. Si L est à variation lente à l'infini et $\alpha > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha L(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} L(x) = 0.$$

3. Si L est à variation lente à l'infini alors $L^\alpha : x \mapsto [L(x)]^\alpha$ est une fonction à variation lente pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Si L_1 et L_2 sont à variation lente à l'infini alors $L_1 + L_2 : x \mapsto L_1(x) + L_2(x)$ et $L_1.L_2 : x \mapsto L_1(x).L_2(x)$ sont à variation lente à l'infini et si de plus $\lim_{x \rightarrow \infty} L_2(x) = +\infty$ alors $L_1 \circ L_2 : x \mapsto L_1[L_2(x)]$ est aussi une fonction à variation lente à l'infini.

5. Si L_1, L_2, \dots, L_n sont à variation lente à l'infini et R une fraction rationnelle définie sur \mathbb{R}_+^n à coefficients positifs alors $R(L_1, L_2, \dots, L_n) : x \mapsto R[L_1(x), L_2(x), \dots, L_n(x)]$ est une fonction à variation lente à l'infini.

1.3 Variation régulière

Définition 1.3.1. (Bingham et al., 1987)

Une fonction mesurable $h : (a + \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($a \geq 0$) est dite à variation régulière à l'infini d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho.$$

Notation : $h \in RV_\rho$.

Remarque 1.3.1. Si $h \in RV_0$ alors h est une fonction à variation lente à l'infini. Une fonction à variation lente à l'infini est donc une fonction à variation régulière à l'infini d'ordre $\rho = 0$.

La notion de variation régulière peut aussi se définir à l'origine.

Définition 1.3.2. (Maric, 2000)

Une fonction mesurable $h : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($a > 0$) est dite à variation régulière à l'origine (à droite de l'origine) d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ et on note $h \in RV_\rho^0$, si :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho.$$

Remarque 1.3.2. Dire que $h \in RV_\rho^0$ est équivalent à dire que la fonction $x \mapsto h(1/x)$ est à variation régulière à l'infini d'indice $-\rho$.

Théorème 1.3.1. (Théorème de caractérisation) (Bingham et al., 1987)

Soit $h : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($a > 0$) une fonction mesurable et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $h \in RV_\rho$.
2. Il existe $L \in RV_0$ telle que

$$\forall x > 0, \quad h(x) = x^\rho L(x). \tag{1.6}$$

3. Il existe une fonction g positive telle que

$$\forall y > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(ty)}{h(t)} = g(y)$$

et dans ce cas $g(y) = y^\rho$.

Proposition 1.3.1. (Maric, 2000)

Soit f et g deux fonctions définies mesurables et positives sur un voisinage de l'infini et soit $\rho \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(g \in RV_\rho \text{ et } f \sim g \text{ à l'infini}) \implies f \in RV_\rho.$$

Représentation de Karamata

Comme dans le cas de la notion de variation lente à l'infini, grâce à (1.5) et (1.6), on donnera une représentation des fonctions qui varient régulièrement à l'infini.

Théorème 1.3.2. (Théorème de représentation) (de Haan and Ferreira, 2006)

Une fonction h est à variation régulière à l'infini d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle peut être représentée de la façon suivante:

$$\forall x \geq b > a, \quad h(x) = c(x) \exp \left\{ \int_b^x \frac{\delta(u)}{u} du \right\} \tag{1.7}$$

où c et δ sont des fonctions définies mesurables sur (a, ∞) ($a \geq 0$) telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = \rho$.

1.3 Variation régulière

L'expression (1.7) est appelée représentation de Karamata de la fonction $h \in RV_\rho$.

Exemple 1.3.1.

On peut vérifier aisément à l'aide de la définition d'une fonction à variation régulière que pour tout ρ et $\gamma \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto x^\rho$, $x \mapsto x^\rho \ln(1+x)$, $x \mapsto [x \ln(1+x)]^\rho$ et $x \mapsto x^\rho \ln(x)^\gamma$ sont à variation lente à l'infini d'indice ρ .

1.3.1 Variation régulière univariée des queues de distributions

Soit $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ un espace localement compact avec une base dénombrable. On désigne par :

$$M_+(\mathbb{E}) = \{\text{toutes les mesures de Radon sur } \mathbb{E}\}$$

c'est-à-dire pour toute mesure $\mu \in M_+(\mathbb{E})$, μ est une mesure sur \mathcal{E} et $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \in \mathcal{E}$. Désignons par :

$$C_K^+ : \{f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+, f \text{ est continue à support compact}\}.$$

Définition 1.3.3. (convergence vague)

Soit $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de mesures définies dans $M_+(\mathbb{E})$ et soit $\mu \in M_+(\mathbb{E})$. On dit que μ_n converge vaguement vers μ , et on note $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, si pour tout $f \in C_K^+(\mathbb{E})$,

$$\mu_n(f) := \int_{\mathbb{E}} f d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{E}} f d\mu.$$

Définition 1.3.4. (Fonction quantile)

Soit X une variable aléatoire univariée et F sa fonction de répartition, la fonction quantile associée à F est définie par

$$F^{\leftarrow}(q) = \inf \{x : F(x) > q\}$$

pour toute valeur de $q \in [0, 1]$.

Si F est une fonction strictement croissante et continue alors F^{\leftarrow} est l'unique valeur de x telle que $F(x) = q$ et la fonction quantile est la fonction inverse de la fonction de répartition.

Proposition 1.3.2. (Variation régulière de queue de distribution univariée) (Resnick, 2006)

Soit X une variable aléatoire avec une distribution F et soit $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

ii) Il existe une suite $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant $b_n \rightarrow \infty$ telle que

$$n\bar{F}(b_n x) \longrightarrow x^{-\alpha} \quad x > 0.$$

iii) Il existe une suite $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant $b_n \rightarrow \infty$ telle que

$$\mu_n(\cdot) = n\mathbb{P}\left(\frac{X}{b_n} \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \nu_\alpha(\cdot)$$

dans $M_+(0, +\infty]$, où $\nu_\alpha \in M_+(0, +\infty]$ vérifie $\nu_\alpha(x, \infty] = x^{-\alpha}$, $x > 0$.

Remarque 1.3.3. On peut toujours choisir :

$$b(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

puis on définit $b_n = b(n)$.

Définition 1.3.5. (Distribution à queue lourde)

Une loi de probabilité de fonction de répartition F est dite à queue lourde ou épaisse si sa fonction de survie \overline{F} est à variation régulière.

Une loi à queue lourde peut être définie autrement :

Définition 1.3.6. Une loi de probabilité est dite à queue lourde si sa fonction de répartition vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} F(x) dx = \infty \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

autrement dit les distributions à queue lourde sont des distributions de probabilité dont les queues ne sont pas exponentiellement bornées. Dans le cas contraire la loi est dite à queue légère ou finie.

Exemple 1.3.2.

- **Loi de Paréto**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} qui suit une loi de Paréto de fonction de répartition F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$. Alors $\forall x \geq 1, \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha}$. Donc $(1 - F) \in RV_{-\alpha}$ et la loi de probabilité est une loi à queue lourde.

- **Loi de Fréchet**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} qui suit une loi Fréchet, de fonction de répartition Φ_α ($\alpha > 0$) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \leq x) = \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors $\forall x > 0, \mathbb{P}(X > x) = 1 - \Phi_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha})$.

Or $1 - \exp(-x^{-\alpha}) \sim x^{-\alpha}$ quand $x \rightarrow \infty$ donc $1 - \Phi_\alpha \in RV_{-\alpha}$ et la loi de probabilité de valeurs extrêmes de type Fréchet est une loi à queue lourde.

1.3.2 Propriétés des fonctions à variation régulière

Dans la proposition suivante, on résumera quelques propriétés élémentaires des fonctions à variation régulière.

Proposition 1.3.3. (de Haan and Ferreira, 2006; Bingham et al., 1987)

Soient h, h_1, h_2, \dots, h_n des fonctions définies, mesurables et positives sur un voisinage de l'infini et soient $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ des réels. On a :

1. Si $h \in RV_\rho$ alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(h(x))}{\ln(x)} = \rho.$$

2. Si $h \in RV_\rho$ et $\rho \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 0 \\ +\infty & \text{si } \rho > 0. \end{cases}$$

3. Si $h \in RV_\rho$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $h^\alpha : x \mapsto [h(x)]^\alpha \in RV_{\alpha\rho}$.

4. Si $h_1 \in RV_{\rho_1}$ et $h_2 \in RV_{\rho_2}$ alors $h_1 + h_2 : x \mapsto h_1(x) + h_2(x) \in RV_{\max(\rho_1, \rho_2)}$ et si de plus $\lim_{x \rightarrow \infty} h_2(x) = +\infty$ alors $h_1 \circ h_2 : x \mapsto h_1[h_2(x)] \in RV_{\rho_1\rho_2}$.

5. Si $h_i \in RV_{\rho_i}$, ($i = 1, \dots, n$) et R une fraction rationnelle définie sur \mathbb{R}_+^n à coefficients positifs alors $R(h_1, h_2, \dots, h_n) : x \mapsto R[h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)] \in RV_\sigma$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.3.3. (Théorème de Karamata) (Bingham et al., 1987)

Soit h une fonction définie, mesurable et positive sur un voisinage de l'infini (a, ∞) ($a \geq 0$) et soit $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2$. Alors $h \in RV_\rho$ si et seulement si :

- Pour $\sigma \geq -(\rho + 1) \exists b$ tel que

$$\forall x \geq b, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho+1}h(x)}{\int_b^x t^\sigma h(t)dt} = \sigma + \rho + 1.$$

- Pour $\sigma < -(\rho + 1)$ (ou $\sigma = -(\rho + 1)$ et $\int_x^{+\infty} t^\sigma h(t)dt$)

$$\forall x > a, \int_x^{+\infty} t^\sigma h(t)dt < \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho+1}h(x)}{\int_b^x t^\sigma h(t)dt} = -(\sigma + \rho + 1).$$

Corollaire 1.3.1. (Draisma et al., 2004)

Soit h une fonction définie sur (a, ∞) ($a \geq 0$) et $\rho \in \mathbb{R}$. Si $h \in RV_\rho$ et $\rho < -1$ ou $\rho = -1$ et $\int_x^{+\infty} h(t)dt < \infty$ alors

$$\forall x > a, \int_x^{+\infty} h(t)dt < \infty \text{ et } x \mapsto \int_x^{+\infty} h(t)dt \in RV_{\rho+1}.$$

Exemple 1.3.3. Considérons la densité standard de Cauchy $F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Quand $x \rightarrow \infty$, $F'(x) \sim \frac{1}{\pi}x^{-2}$ et d'après le corollaire ci-dessus $\bar{F}(x) := 1 - F(x) \sim \frac{1}{\pi}x^{-1}$, ($x \rightarrow \infty$). Par suite $\bar{F} \in RV_{-1}$.

Corollaire 1.3.2. (Von Mises) (Resnick, 2006)

Soit H une fonction définie positive et dérivable (de dérivée h) sur le voisinage (a, ∞) ($a \geq 0$) i.e. $\forall x > a \quad H'(x) = h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xh(x)}{H(x)} = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$ alors $H \in RV_\rho$.

Proposition 1.3.4. (Embrechts et al., 1997)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} de fonction de répartition F et de fonction de survie $\bar{F} = 1 - F$

1. On suppose que X admet une densité f . Alors $f \in RV_{-\rho-1}$ ($\rho > 0$) si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \rho.$$

2. Si X a une densité f telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \rho, \quad \rho \in \mathbb{R},$$

alors $\bar{F} \in RV_{-\rho}$.

3. Si X a une densité décroissante sur (b, ∞) ($b \in \mathbb{R}$) et $\bar{F} \in RV_\rho$, $\rho \geq 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \rho. \text{ Si de plus } \rho \neq 0, f \in RV_{-\rho-1}.$$

1.4 Variation régulière multivariée

1.4.1 Notation vectorielle

Les notations suivantes sont utilisées dans le chapitre 4 et 5.

Les vecteurs sont désignés par des lettres en gras. Par exemple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. En particulier on notera : $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\boldsymbol{\infty} = (\infty, \dots, \infty)$.

Les opérations sont interprétées composante par composante de sorte que pour deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{z} &\Leftrightarrow x_i = z_i, i = 1, \dots, d; & \mathbf{z}\mathbf{x} &= (z_1x_1, \dots, z_dx_d); \\ \mathbf{x} \vee \mathbf{z} &= (x^1 \vee z_1, \dots, x_d \vee z_d); & \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{z}} &= \left(\frac{x_1}{z_1}, \dots, \frac{x_d}{z_d} \right); \\ \mathbf{x} < \mathbf{z} &\Leftrightarrow x_i < z_i, i = 1, \dots, d; & c\mathbf{x} &= (cx_1, \dots, cx_d). \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{z} &\Leftrightarrow x_i \leq z_i, i = 1, \dots, d; \end{aligned}$$

De plus, pour

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \text{on écrit } \mathbf{x}_\alpha = ((x_1)^{\alpha_1}, \dots, (x_d)^{\alpha_d}).$$

1.4 Variation régulière multivariée

Les intervalles de dimensions supérieures sont définis par :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

On désigne par $\mathbb{E} = [\mathbf{0}, \infty] \setminus \{\mathbf{0}\}$. On définit le complémentaire de $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ ($\mathbf{x} > \mathbf{0}$) dans \mathbb{E} par

$$[\mathbf{0}, \mathbf{x}]^c = \mathbb{E} \setminus [\mathbf{0}, \mathbf{x}] = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{E} : \bigvee_{i=1}^d \frac{y^i}{x^i} > 1 \right\}.$$

Définition 1.4.1. (*Cône convexe*) (Resnick, 2006)

On appelle cône convexe toute partie mesurable \mathcal{C} de $\overline{\mathbb{R}^d}$, $d \geq 1$ vérifiant : $\mathcal{C} \cap (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}) \neq \emptyset$, et $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \Rightarrow t\mathbf{x} \in \mathcal{C} \quad \forall t > 0$.

Définition 1.4.2. (*Variation régulière multivariée*) (Resnick, 2006)

Soit \mathcal{C} un cône convexe de $\overline{\mathbb{R}^d}$ ($d \geq 1$). On suppose que $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$. Une fonction $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite à variation régulière d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ au voisinage de l'infini (∞), s'il existe une fonction limite $\lambda(\mathbf{x}) > 0$, telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})} = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}$$

et $\forall c > 0 \quad \lambda(c\mathbf{x}) = c^\rho \lambda(\mathbf{x})$.

Dans le cas où $\rho = 0$, h est dite à variation lente.

1.4.2 Coordonnées pseudo-polaires et mesure spectrale

Les représentations en coordonnées pseudo-polaires s'interprètent au mieux en rapport avec la variation régulière multivariée, offrant un système de coordonnées adapté au traitement de l'agrégation de risques multivariés. En effet d'un point de vue mathématique, l'indépendance entre la composante pseudo-radiale r et la composante angulaire $\boldsymbol{\omega}$ des coordonnées pseudo-polaires, permet de mieux expliciter les formes de dépendances.

Soit $\|\cdot\|$ une norme de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. La sphère unitaire par rapport à $\|\cdot\|$ est définie par $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$. L'intersection d'une sphère unitaire avec un cône convexe \mathcal{C} sera notée $\mathbb{S}_{\mathcal{C}} = \mathbb{S} \cap \mathcal{C}$.

Définition 1.4.3. (*Transformation pseudo-polaire*)

Une transformation :

$$T : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow]0, \infty) \times \mathbb{S}$$

définie par

$$T(\mathbf{x}) = \left(\|\mathbf{x}\|, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) := (r, \boldsymbol{\omega})$$

est dite transformation pseudo-polaire. Les coordonnées pseudo-polaires $(r, \boldsymbol{\omega})$ sont composées du rayon $r > 0$ et de l'angle $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}$.

La transformation T est un homéomorphisme avec $T^{-1}(r, \boldsymbol{\omega}) = r \|\boldsymbol{\omega}\|^{-1} \boldsymbol{\omega}$. Soit ν une mesure homogène d'indice $\alpha > 0$ définie sur un cône convexe $\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour tout borélien B de \mathcal{C} , la propriété de l'homogénéité s'écrit $\nu(tB) = t^{-\alpha}\nu(B)$. Cette propriété est représentée en coordonnées pseudo-polaires par :

$$\nu \circ T^{-1}(d(r, \boldsymbol{\omega})) = \alpha r^{-(\alpha+1)} dr S(d\boldsymbol{\omega})$$

dans $M_+((0, \infty] \times S)$ où S est une mesure de Radon définie sur $\mathbb{S}_{\mathcal{C}}$, dite *mesure angulaire* ou très souvent *mesure spectrale*.

Variation régulière multivariée des queues des distributions

La variation régulière multivariée à l'infini est un outil puissant et souple pour caractériser la convergence des extrêmes d'un vecteur aléatoire en terme de convergence vague de mesures (cf. la section 3.4 de Resnick (1987)). On caractérise la variation régulière multivariée des queues de distributions dans le cône convexe $\mathcal{C} = [\mathbf{0}, \infty] \setminus \{\mathbf{0}\}$. Soit $\mathbf{Z} \geq 0$ un vecteur aléatoire avec une distribution F définie sur $[\mathbf{0}, \infty)$.

Théorème 1.4.1. (*Resnick, 2006*)

Les assertions suivantes sont équivalentes mais le sens des symboles $(\nu, b(\cdot), b_n)$ peut différer légèrement dans chaque cas.

1) *Il existe une mesure de Radon ν sur \mathcal{C} telle que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t\mathbf{x})}{1 - F(t\mathbf{1})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(t^{-1}\mathbf{Z} \in [\mathbf{0}, \mathbf{x}]^c)}{\mathbb{P}(t^{-1}\mathbf{Z} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^c)} = \nu([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^c),$$

pour tous les $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \infty) \setminus \{\mathbf{0}\}$ qui sont des points de continuité de la limite $\nu([\mathbf{0}, \cdot]^c)$.

2) *Il existe $b(t) \rightarrow \infty$ et une mesure de Radon ν sur \mathcal{C} tels que*

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}/b(t) \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{dans } M_+(\mathcal{C}),$$

où \xrightarrow{v} désigne la convergence vague.

3) *Il existe $b_n \rightarrow \infty$ et une mesure de Radon ν sur \mathcal{C} tels que dans $M_+(\mathcal{C})$:*

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}/b_n \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot), \quad n \rightarrow \infty.$$

4) *Il existe une mesure de probabilité $S(\cdot)$ dans les boréliens de $\mathbb{S}_{\mathcal{C}}$, dite mesure angulaire, une constante $c > 0$ et une fonction $b(t) \rightarrow \infty$ telles que avec*

$$(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \left(\|\mathbf{Z}\|, \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|} \right)$$

on ait

$$t\mathbb{P} \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{b(t)}, \boldsymbol{\omega} \right) \in \cdot \right] \xrightarrow{v} c\nu_\alpha(\cdot) \times S$$

dans $M_+((0, \infty] \times S)$ ou d'une façon équivalente,

$$n\mathbb{P} \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{b_n}, \boldsymbol{\omega} \right) \in \cdot \right] \xrightarrow{v} c\nu_\alpha(\cdot) \times S.$$

1.5 Processus ponctuels

Plusieurs résultats des chapitres suivants sont étroitement liés à la convergence de certains processus ponctuels vers des processus de Poisson non homogènes. Ci-dessous nous rappelons quelques résultats nécessaires pour faciliter la lecture de la suite.

Les processus ponctuels (distributions aléatoires de points) sont le fondement de la géométrie stochastique. Des exemples de l'utilisation de ces processus stochastiques peuvent être observés dans des domaines aussi variés que la biologie, la mécanique, la physique des particules, l'ingénierie au sens large, etc. Les processus ponctuels de Poisson forment une classe très importante des processus ponctuels. Ils jouent un rôle similaire à celui que jouent les lois de probabilité normales pour les lois de probabilité, car ils sont les limites naturelles de beaucoup de sommes de processus ponctuels. C'est pour cette raison que de tels processus sont largement utilisés. Décrire ces processus dans leur globalité est une tâche qui dépasse largement le cadre de cette thèse.

1.5.1 Processus ponctuel

Définition 1.5.1. Soit $\{X_i, i \in I \subset \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) . Un processus ponctuel à espace d'état E est une application mesurable N définie sur $\Omega \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall A \in \mathcal{E} \quad N(\omega, A) = \sum_{i \in I} \delta_{X_i}(\omega)(A)$$

Remarque 1.5.1.

- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, N est une mesure ponctuelle définie sur (E, \mathcal{E}) .
- Pour $A \in \mathcal{E}$ fixé, N est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

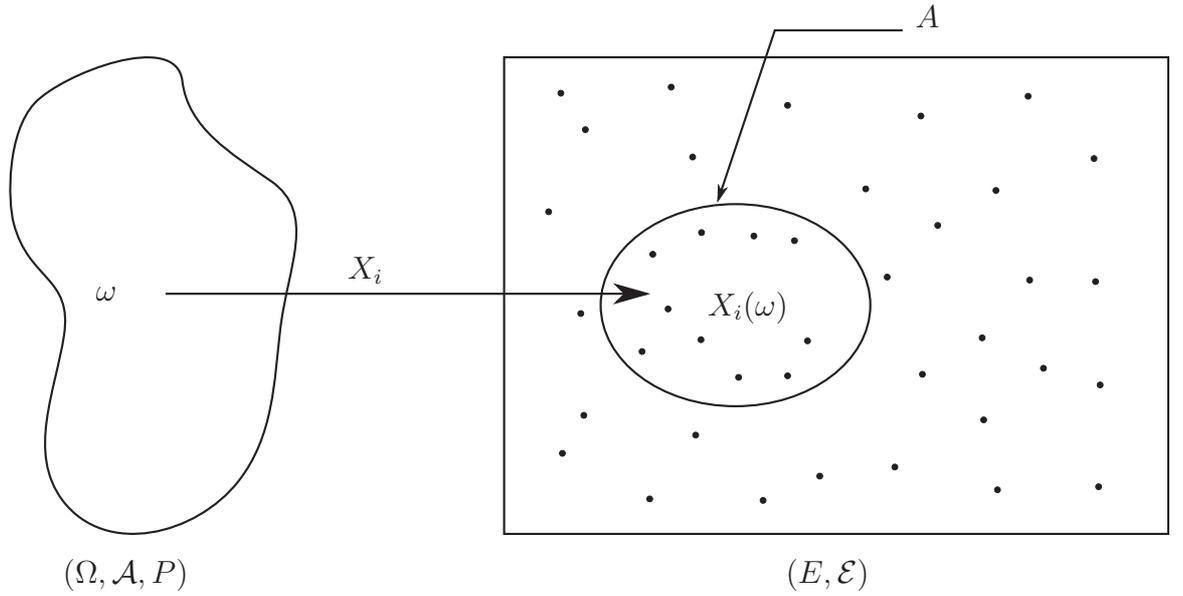


Fig 1.1: Ensemble de points aléatoires $\{X_i(\omega), i \in \mathbb{N}^*\}$ dans (E, \mathcal{E}) pour $\omega \in \Omega$. Le nombre de ces points appartenant au borélien A de \mathcal{E} est $N(A)$. Ici $N(A) = 10$.

- Dans le cadre de la définition précédente et par abus de notation, on supprime souvent la dépendance du processus ponctuel N de ω et on écrit

$$N_A = \sum_{i \in A} \delta_{X_i}(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

Exemple 1.5.1. (Embrechts et al., 1997)

L'un des processus ponctuels important dans la théorie des valeurs extrêmes est le processus ponctuel des excès qui compte le nombre d'excès d'une suite finie de variables aléatoires au-delà d'un seuil fixé.

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $u \in \mathbb{R}$ un seuil fixé. Le processus ponctuel des excès N_n de l'échantillon des variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ au delà du seuil u est le processus ponctuel à espace d'état $E = (0, 1]$ défini par :

$$N_n(A) = \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}(A) \mathbf{1}_{(u, +\infty)}(X_i), \quad A \subset (0, 1] \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $A = (0, 1]$, alors $N((0, 1])$ est le nombre de variables aléatoires de tout l'échantillon $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ dépassant u , car

$$N_n((0, 1]) = \text{card} \left\{ i, 0 < \frac{i}{n} \leq 1 \text{ et } X_i > u \right\} = \text{card} \{ i \leq n, X_i > u \}$$

1.5 Processus ponctuels

Définition 1.5.2. Soit N un processus à espace d'état E . On appelle mesure d'intensité du processus N la mesure μ définie sur l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) dans $[0, +\infty]$ par

$$\forall A \in \mathcal{E}, \mu(A) = \mathbb{E}(N(A)).$$

Définition 1.5.3. (Resnick, 1987)

Soit N un processus ponctuel à espace d'état E . On dit que N est un processus de Poisson de mesure d'intensité μ , et on note $PPP(\mu)$, s'il vérifie les assertions suivantes :

$$1) \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \text{ et } A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}(N(A) = k) = \begin{cases} \frac{(\mu(A))^k}{k!} e^{-\mu(A)} & \text{si } \mu(A) < \infty \\ 0 & \text{si } \mu(A) = \infty \end{cases}$$

avec

$$\mu(A) = \infty \implies \mathbb{P}(N(A) = \infty) = 1.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si A_1, A_2, \dots, A_n sont des boréliens de \mathcal{E} deux à deux disjoints, alors $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Le processus de Poisson est dit homogène si la mesure d'intensité $\mu(\cdot)$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $\Lambda(\cdot)$. Dans ce cas il existe une constante λ telle que

$$\mu(A) = \int_A \lambda dx = \lambda \Lambda(A).$$

Il faut noter qu'il existe des processus non homogènes, où il est nécessaire de définir une fonction d'intensité $\lambda(\cdot) > 0$. Selon le théorème de Radon-Nikodym, l'intensité du processus devient :

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) \Lambda(x) dx$$

où $\lambda(\cdot)$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $\mu(\cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue du processus.

Remarque 1.5.2. Pour tout borélien A de \mathcal{E} , le nombre $N(A)$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de moyenne $\mu(A)$. Or une loi de Poisson est complètement déterminée par sa moyenne donc la loi d'un processus de Poisson est caractérisée par sa mesure d'intensité.

Théorème 1.5.1. (Kallenberg) (Embrechts et al., 1997)

Soit (N_n) une suite de processus et N un processus définis sur $E = (a, b] \subset \mathbb{R}$. Si

- 1.) $\mathbb{E}(N_n(A)) \longrightarrow \mathbb{E}(N(A))$ pour tout $A = (c, d]$ avec $a < c < d \leq b$
- 2.) $\mathbb{P}(N_n(B) = 0) \longrightarrow \mathbb{P}(N(B) = 0)$ pour tout $B = \cup_{i=1}^k (c_i, d_i]$ avec $a < c_1 < d_1 < \dots < c_k < d_k \leq b \forall k \geq 1$.

Alors

N_n converge faiblement vers N dans l'ensemble des mesures ponctuelles $M_p(E)$.

Un résultat dans le même esprit peut également être formulé pour les processus ponctuels aux espaces d'états $E \subset \mathbb{R}^d$.

Chapitre 2

Théorie des extrêmes

2.1 Introduction

En théorie des valeurs extrêmes on s'intéresse aux grandes valeurs d'un échantillon de variables aléatoires. Cette pratique vient en complément de la statistique classique où il est généralement question d'étudier le comportement de variables aléatoires autour de leur espérance. Une théorie dédiée à l'étude de ces valeurs particulières a été développée depuis quelques décennies et suscite l'intérêt de nombreux statisticiens, ingénieurs et scientifiques tant le champ d'applications qu'elle touche est vaste. Il s'agit de caractériser le comportement des queues de distribution à l'aide de modèles spécifiques permettant un bon ajustement au delà du maximum de l'échantillon. On s'intéresse alors à des événements dont les probabilités d'occurrence sont très faibles, on parle d'événements rares. La théorie des extrêmes offre une classe d'outils permettant une extrapolation dans les queues de distribution, à partir des valeurs maximales observées, afin de prédire l'apparition de valeurs non observées. Cette théorie est fondée sur un théorème équivalent au théorème central limite mais pour les queues de distribution. En effet l'analyse des valeurs extrêmes repose principalement sur les distributions limites des maxima et les domaines d'attraction des maxima. Ces distributions apparaissent comme les seules distributions limites possibles du maximum d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous allons, sans pour autant se vouloir exhaustif, rappeler quelques éléments essentiels de cette théorie en univarié et en multivarié.

2.2 Approche univariée

En pratique, les valeurs extrêmes des réalisations d'une variable aléatoire sont généralement étudiées de deux façons différentes. La première considère le maximum d'observations régulièrement espacées sur une période fixe ou bloc (ex. le maximum annuel d'observations journalières). Si la taille du bloc est assez grande, alors on considère

le maximum sur chaque bloc et l'ensemble de ces maxima peuvent être considérés comme des tirages indépendants selon une loi généralisée des valeurs extrêmes (ou modèle GEV pour Generalized Extreme Value). La seconde approche considère que les dépassements d'un seuil fixe suffisamment haut possèdent une distribution de Pareto généralisée (GPD) : c'est le modèle POT (Peaks Over Threshold). L'avantage du modèle POT est de travailler avec un plus grand nombre de données et donc de réduire l'incertitude dans les estimations des quantiles extrêmes.

2.2.1 Approche des maxima par bloc faisant intervenir le modèle GEV

Considérons un ensemble de variables aléatoires i.i.d., X_1, \dots, X_n ayant comme fonction de répartition F et considérons le maximum¹ $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Dans les applications, les X_i sont typiquement enregistrés à intervalles de temps réguliers : par exemple le volume de pluie de la journée ou le débit journalier maximal d'une rivière. Il est aisé de vérifier que la fonction de répartition de M_n est F^n . En pratique, F est inconnue et donc on ne peut pas utiliser directement la fonction de répartition de M_n . Même dans le cas où F est connue, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$ n'a pas d'intérêt, car la loi limite obtenue est dégénérée. En effet, notant par $\tau_F = \sup\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$, le point terminal à droite de la distribution F , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \tau_F \\ 0 & \text{si } x < \tau_F. \end{cases}$$

Pour éviter cette difficulté, on renormalise M_n avec deux suites $b_n \in \mathbb{R}$ (translation) et $a_n > 0$ (échelle) en $Y_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$. La question devient : existe-t-il de telles suites de réels qui permettent de stabiliser la répartition de Y_n quand n tend vers l'infini vers une fonction de répartition \mathcal{H} non dégénérée ? Les premiers résultats sur la caractérisation du comportement asymptotique des maxima normalisés ont été obtenus en 1928 par Fisher et Tippett (Fisher and Tippett, 1928). Le théorème ci-dessous explicite ces résultats.

Théorème 2.2.1. (Fisher and Tippett, 1928; Gnedenko, 1943).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F et soit $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. S'il existe deux suites normalisantes réelles ($a_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$) et ($b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$) et une loi non dégénérée \mathcal{H} telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \mathcal{H}(x),$$

alors \mathcal{H} est de même type qu'une des trois lois suivantes :

$$\phi_\alpha(x) = \exp(-(x)^{-\alpha}) \mathbb{1}_{(x \geq 0)}, \quad \alpha > 0, \quad (\text{Loi de type Fréchet}),$$

¹En utilisant la correspondance suivante $\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$ tous les résultats que nous allons présenter pour les maxima peuvent être transposés pour les minima.

2.2 Approche univariée

$\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)),$ *(Loi de type Gumbel),*
 $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha) \mathbb{1}_{(x < 0)} + \mathbb{1}_{(x \geq 0)}, \alpha > 0,$ *(Loi de type Weibull),*
 où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A . On dira que F est dans le domaine d'attraction de \mathcal{H} et on note $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

Une démonstration détaillée de ce théorème est donnée dans Resnick (1987).

La loi des extrêmes généralisée

A des fins statistiques, il est préférable d'avoir une écriture paramétrique unifiée pour les trois types de distributions explicitées dans le théorème ci-dessus. Von Mises en 1954 (Von Mises, 1936) et Jenkinson en 1955 (Jenkinson, 1955) ont obtenu indépendamment une telle paramétrisation de la loi limite \mathcal{H} . On définit la famille de loi GEV pour $\gamma \in \mathbb{R}$ par :

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left\{- (1 + \gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}}\right\} & \text{pour tout } x \text{ tel que } 1 + \gamma x \geq 0, \text{ si } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ si } \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le comportement de la queue de distribution d'une suite de variables aléatoires sera complètement caractérisé par le paramètre γ appelé *indice des valeurs extrêmes*. Le signe de γ a une forte influence sur la distribution des extrêmes, et on distingue trois cas de domaines d'attraction D_{G_γ} :

- i) **Domaine d'attraction de Gumbel** D_{G_0} : lorsque $\gamma = 0$, la distribution G_0 est appelée distribution de Gumbel et souvent notée Λ . Dans ce cas le point terminal $\tau_F = \sup\{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$ peut être fini ou non et les queues de distribution sont légères et décroissent de manière exponentielle.

Exemple 2.2.1. (*Domaine d'attraction de la loi exponentielle*)
 Supposons que X_1 suit la loi exponentielle standard $\mathcal{E}(1)$ i.e :

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Si on pose $a_n = 1$ et $b_n = \ln(n)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) &= \begin{cases} [1 - e^{-\{x + \ln(n)\}}]^n & \text{si } x + \ln(n) > 0 \\ 0 & \text{si } x + \ln(n) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[1 + \frac{(-e^{-x})}{n}\right]^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leq -\ln(n). \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \exp(-\exp(-x)) = \Lambda(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

On déduit que la loi $\mathcal{E}(1)$ est dans le domaine d'attraction de Gumbel.

- ii) **Domaine d'attraction de Fréchet** $D_{\{G_\gamma, \gamma > 0\}}$: lorsque $\gamma > 0$, G_γ est noté Φ avec $\Phi(x) := \exp(-x^{-1/\gamma})\mathbb{1}_{x>0}$. De telles distributions possèdent des queues lourdes. Dans ce cas $\tau_F = \infty$ et F est de type Pareto, en d'autres termes, $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}}\ell_F(x)$ où ℓ_F est une fonction à variation lente à l'infini.

Exemple 2.2.2. (Domaine d'attraction de la loi de Cauchy)

On suppose que X_1 suit la loi de Cauchy standard. La densité de la loi est $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Comme le support de la densité est \mathbb{R} (non borné), il est clair que la suite $(M_n, n \geq 1)$ diverge. En normalisant par $a_n = \frac{n}{\pi}$ et $b_n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) &= \mathbb{P} \left(M_n \leq \frac{nx}{\pi} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(X_1 \leq \frac{nx}{\pi} \right)^n \\ &= \left(1 - \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy \right)^n. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy &= \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi y^2} dy + \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi(1+y^2)} - \frac{1}{\pi y^2} \right) dy \\ &= \frac{1}{nx} + O((nx)^{-3}). \end{aligned}$$

Par suite, $\mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \left(\frac{1}{nx} + O((nx)^{-3}) \right)^n$. On en déduit alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \exp(-\frac{1}{x})$. Ainsi la suite $(nM_n/\pi, n \geq 1)$ converge en loi vers W de fonction de répartition $G(x) = \exp(-\frac{1}{x}) = \Phi_1(x)$. On conclut que la loi de Cauchy est dans le domaine d'attraction de Fréchet.

- iii) **Domaine d'attraction de Weibull** $D_{\{G_\gamma, \gamma < 0\}}$: lorsque $\gamma < 0$, on pose $\alpha = -1/\gamma$. Souvent G_γ est notée Ψ_α avec $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha)$ si x est négatif, et 1 sinon. La queue de cette distribution est très mince. En effet $\tau_F < \infty$ et $1 - F(x) = (\tau_F - x)^{-\frac{1}{\gamma}}\ell_F((\tau_F - x)^{-1})$ où ℓ_F est une fonction à variation lente.

Exemple 2.2.3. (Domaine d'attraction de la loi uniforme)

Supposons que X_1 suit la loi uniforme standard $\mathcal{U}[0, 1]$ i.e :

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2.2 Approche univariée

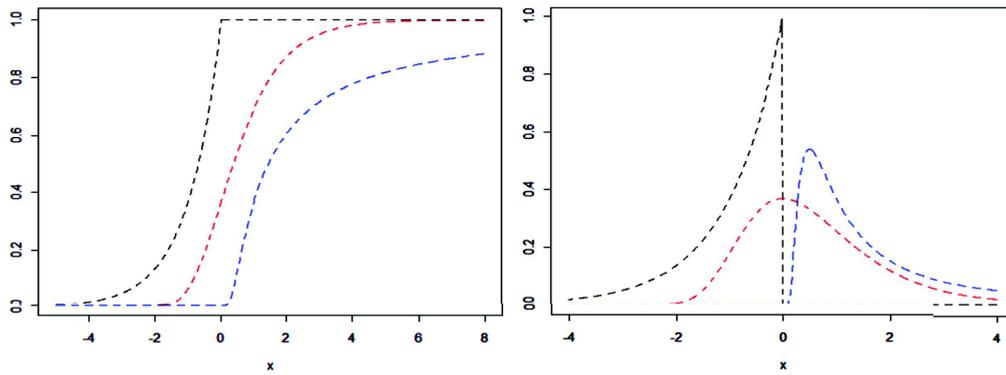


Fig 2.1: À gauche les graphes des distributions des valeurs extrêmes et à droite les graphes de leurs densités pour $\alpha = 1$. Le bleu pour le type Fréchet, le rouge pour le type Gumbel et le noir pour le type Weibull

Si l'on pose $a_n = n^{-1}$ et $b_n = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 + \frac{x}{n} < 0 \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq 1 + \frac{x}{n} \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -n \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } -n \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par suite $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \Psi_1(x)$. On déduit que la loi $\mathcal{U}[0, 1]$ est dans le domaine d'attraction de la loi de type Weibull.

La figure (2.1) donne les distributions et les densités des trois lois détaillées ci-dessus.

Remarque 2.2.1.

-Le théorème de Fisher et Tippett ne précise pas, pour une distribution donnée F , lequel des trois types est obtenu et réciproquement il ne permet pas de déterminer quelles distributions sont dans le domaine d'attraction d'une distribution de valeurs extrêmes donnée. Cependant, il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour répondre à ces questions (voir par exemple Galambos (1987)).

- La fonction de réparation G_γ donnée dans (2.1) peut être exprimée sous une forme plus générale en introduisant un paramètre de position $\mu \in \mathbb{R}$ et un paramètre d'échelle $\sigma > 0$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \gamma \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \quad G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left\{1 + \gamma \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{\frac{-1}{\gamma}}\right] & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)\right\} & \text{si } \gamma = 0. \end{cases}$$

2.2.2 Caractérisation des extrêmes univariés par un processus ponctuel

En nous inspirons de la démonstration du théorème (5.3.2) de Embrechts et al. (1997), nous démontrons ci-dessous la convergence du processus ponctuel des excès $N_n(\cdot)$ défini ci-dessous vers un processus de Poisson $N(\cdot)$ dont on précisera l'intensité. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F et soit $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On suppose F est dans le domaine d'attraction d'une loi GEV, G_γ d'indice des valeurs extrêmes $\gamma \in \mathbb{R}$. Par suite il existe deux suites normalisantes réelles $(a_n > 0, n \in \mathbb{N}^*)$ et $(b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G_\gamma(x).$$

Pour $x > 0$, considérons le processus ponctuel des excès N_n de l'échantillon des variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ au delà du seuil $u_n = a_n x + b_n$ défini par :

$$N_n(A) = \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}(A) \mathbf{1}_{(u_n, +\infty)}(X_i), \quad A \subset (0, 1] \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons que N_n converge faiblement vers un processus de Poisson N d'intensité $\tau = \{1 + \gamma x\}_+^{-1/\gamma} + O(1)$, où $\{x\}_+ = \max(x, 0)$.

Démonstration. Pour $A = (a, b] \subset (0, 1]$

$$\begin{aligned} N_n(A) &= \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-1}i}(A) \mathbf{1}_{\left\{\frac{X_i - b_n}{a_n} > x\right\}} \\ &= \sum_{a < (n)^{-1}i \leq b} \mathbf{1}_{\{X_i > u_n\}} \\ &= \sum_{i=[na]+1}^{[nb]} \mathbf{1}_{\{X_i > u_n\}}, \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière. Pour chaque $A = (a, b] \subset (0, 1]$, $N_n(A)$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $([nb] - [na], \bar{F}(u_n))$.

Puisque $\ln(1 - x) \sim -x$ pour $x \rightarrow 0$ ceci implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n) = \tau. \tag{2.2}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_n(A)) &= ([nb] - [na]) \bar{F}(u_n) \\ &\sim (n(b - a))(n^{-1}\tau) \\ &= \tau(b - a) \\ &= \mathbb{E}(P(A)). \end{aligned}$$

2.2 Approche univariée

Ceci prouve que la première condition du théorème de 1.5.1 est remplie. Dans la suite nous vérifions la deuxième condition de ce théorème. Comme $N_n(A)$ suit une loi binomiale par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n(A) = 0) &= F(a_n x + b_n)^{[(n+1)b] - [(n+1)a]} \\ &= \exp \left\{ \left([(n+1)b] - [(n+1)a] \right) \ln \left(1 - \bar{F}(a_n x + b_n) \right) \right\} \\ &\rightarrow \exp \left\{ -\tau(b-a) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Soit $B = \cup_{i=1}^k (c_i, d_i]$ avec $a < c_1 < d_1 < \dots < c_k < d_k \leq b \forall k \geq 1$. En tenant compte de l'indépendance des X_i et en utilisant (2.3), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n(B) = 0) &= \mathbb{P}(P_n(c_i, d_i] = 0, \quad i = 1, \dots, k) \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{[(n+1)c_i] < j \leq [(n+1)d_i]} X_j \leq u_n, \quad i = 1, \dots, k \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left\{ \max_{[(n+1)c_i] < j \leq [(n+1)d_i]} X_j \leq u_n \right\} \\ &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(N_n(c_i, d_i] = 0) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^k \exp \left\{ -\tau(d_i - c_i) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\tau \sum_{i=1}^k (d_i - c_i) \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, par la propriété de Poisson de N ,

$$\mathbb{P}(N(B) = 0) = \exp \left\{ -\tau \mid B \right\} = \exp \left\{ -\tau \sum_{i=1}^k (d_i - c_i) \right\}.$$

Le résultat est donc prouvé en vertu du théorème 1.5.1. \square

En considérant l'approximation $\mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) \approx G_\gamma(x)$, pour des seuils élevés, le processus ponctuel N_n peut réaliser l'approximation d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t_1, t_2, x) = (t_2 - t_1) \{1 + \gamma x\}_+^{\frac{1}{\gamma}}$.

2.2.3 Lois max-stables

Dans la théorie classique des probabilités, c'est-à-dire lorsque l'on s'intéresse aux "ventres" des distributions, on montre que les lois stables (définition 1.1.2 du chapitre 1) sont les seules lois limites de la somme normalisée de n variables aléatoires i.i.d. De même, on montre que les lois max-stables sont les seules lois limites des maxima normalisés et par suite la classe des lois max-stables caractérise les distributions des extrêmes.

Définition 2.2.1. (*Max-stabilité*)

Une distribution non dégénérée F est dite *max-stable* si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F^n est de même type que F (voir définition 1.1 du chapitre 1), c'est-à-dire : s'il existe deux constantes $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :

$$F^n(a_n x + b_n) = F(x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.4. Soit X une variable aléatoire de loi Fréchet standard i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Pour $a_n = n$ et $b_n = 0$ on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F^n(a_n x + b_n) &= F^n(nx) \\ &= \begin{cases} [\exp\{(-nx)^{-1}\}]^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Donc la loi de Fréchet est une loi max-stable. Le résultat de l'exemple peut être étendu à toutes les lois extrêmes et réciproquement toute loi max-stable est une loi extrême.

Théorème 2.2.2. (*Embrechts et al., 1997*)

La classe des lois max-stables coïncide avec la classe des lois extrêmes.

2.2.4 Modèles de dépassements GPD

Bien que le modèle GEV soit très utilisé en pratique, cette approche des extrêmes est très controversée dans la littérature dans la mesure où elle ne tient compte que d'une seule observation par bloc, la plus grande. Pour résoudre ce problème une approche alternative plus pratique a été proposée par Balkema and de Haan (1974) ainsi que Pickands (1975). Il s'agit de regarder la loi des excès au-delà d'un seuil fixe. Plus précisément, considérons un ensemble de variables aléatoires i.i.d. X_1, X_2, \dots, X_n de fonction de répartition F . Appelons u un seuil suffisamment élevé. On définit les excès au-delà du seuil u comme l'ensemble des variables aléatoires conditionnelles $\{Y_j\} = \{X_j - u \mid X_j > u\}$, $1 \leq j \leq d$. On note que

$$\overline{F}_u(y) = \mathbb{P}(Y_1 > y) = \mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}. \quad (2.4)$$

Théorème de Pickands

Le théorème de Pickands (1975) stipule que la distribution des excès au delà d'un certain seuil peut être uniformément approchée par une loi de Pareto généralisée GPD (Generalized Pareto Distribution).

Théorème 2.2.3. (Pickands, 1975)

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires i.i.d. ayant comme distribution F et soit γ un réel. F appartient à un domaine d'attraction $D_{(G_\gamma)}$ si et seulement si il existe une fonction positive $\sigma(\cdot)$ et un réel γ tels que

$$\lim_{u \rightarrow \tau_F} \sup_{x \in [0, \tau_F[} \{ |F_u(x) - H_{\sigma(u), \gamma}(x)| \} = 0$$

où $\tau_F = \sup \{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$ et $H_{\sigma, \gamma}$ est la distribution définie par :

$$H_{\sigma, \gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0, \frac{1 + \gamma x}{\sigma} > 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0, x \geq 0 \end{cases}$$

$H_{\sigma, \gamma}$ est distribution de Pareto généralisée (GPD) de paramètres γ et σ .

Remarque 2.2.2. En pratique le seuil u au-dessus duquel les valeurs sont modélisées par une loi GPD doit être suffisamment élevé pour satisfaire le caractère asymptotique du modèle, mais aussi pas trop élevé pour garder un nombre suffisant de dépassements afin de pouvoir faire l'estimation des paramètres du modèle. En général, la méthode utilisée pour le choix de u repose sur le fait que si la loi GPD est valide pour un seuil u_0 alors elle l'est encore pour tout dépassement $u > u_0$ à un changement d'échelle près. Si $X - u_0$ suit une GPD de paramètres γ et σ_{u_0} on a $\mathbb{E}(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\sigma_{u_0}}{1 - \gamma}$ et pour $u > u_0$ on a :

$$\mathbb{E}(X - u | X > u) = \frac{\gamma}{1 - \gamma}u + \frac{\sigma_{u_0} - \gamma u_0}{1 - \gamma}.$$

La fonction $u \mapsto \mathbb{E}(X - u | X > u)$ appelée en anglais *Mean Excess Function (MEF)* est linéaire à partir du seuil u où la GPD apparait. Elle est estimée simplement par la moyenne empirique des dépassements de u . La recherche du seuil u_0 , à partir duquel est justifiée la modélisation par une loi GPD peut donc être réalisée graphiquement par la recherche d'une linéarité dans la fonction MEF estimée.

2.3 Lien entre les modélisations GEV et GPD

Dans cette section on rappelle l'équivalence entre les deux modélisations GEV et GPD pour un seuil suffisamment grand. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F . On désigne par $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2.3.1 Du modèle GEV au modèle GPD

La distribution de M_n tend asymptotiquement vers une distribution GEV, que l'on notera G . Pour u fixé, il existe donc pour n suffisamment grand, deux constantes a_n et b_n , telles que la loi du maximum de n variables aléatoires i.i.d de loi F réalise l'approximation :

$$\mathbb{P}(M_n \leq u) \simeq G\left(\frac{u - b_n}{a_n}\right).$$

Comme $\mathbb{P}(M_n \leq u) = F^n(u)$ on en déduit

$$-n \log(F(u)) \approx \left\{1 + \gamma \left(\frac{u - b_n}{a_n}\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Ainsi en utilisant l'approximation $-\log(F(u)) = -\log(1 - (1 - F(u))) \approx 1 - F(u)$, pour u assez élevé on obtient

$$1 - F(u) \simeq \frac{1}{n} \left\{1 + \gamma \left(\frac{u - b_n}{a_n}\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Si cette relation tient pour un seuil u , elle tiendra aussi pour tout niveau qui le dépasse, par exemple le niveau $y + u$. Dès lors, en substituant dans (2.4), on trouve que la distribution de Pareto généralisée est candidate à la loi des dépassements quand u est suffisamment élevé puisque :

$$\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) \simeq \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

où $\sigma_u = a_n + \gamma(u - b_n)$. On retrouve donc une loi GPD de paramètres γ et σ_u .

2.3.2 Du modèle GPD au modèle GEV

Pour un seuil u (grand), $M_n - u$ se comporte asymptotiquement comme le maximum de K variables aléatoires $\{Y_i, i \in \{1, \dots, K\}\}$ où les variables $Y_i, i \geq 1$ sont indépendantes, de loi de Pareto généralisée de paramètres $(\sigma(u), \gamma)$ et indépendantes de K de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On a donc $\mathbb{P}(M_n - u \leq y) \approx \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq K} Y_i \leq y)$ et par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq K} Y_i \leq y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq K} Y_i \leq y \mid K = k\right) \mathbb{P}(K = k) \\ &= \exp\left[-\lambda \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma(u)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de la loi de Poisson et de la loi GPD de paramètres γ et $\sigma(u)$. Il vient donc :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \exp\left[-\lambda \left(1 + \gamma \frac{x - u}{\sigma(u)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right].$$

On vérifie facilement que cette distribution limite est une GEV de paramètres γ , $\frac{\sigma(u)}{\gamma} (\lambda^\gamma - 1)$ et $\sigma(u)\lambda^\gamma$ (Coles, 2001).

2.4 Approche multivariée

Contrairement au cas univarié où les concepts tels que statistique d'ordre, maximum et excès ont des définitions standards, dans le cas multivarié, plusieurs définitions sont raisonnables et possibles.

Afin d'étendre facilement les résultats du cas univarié, l'approche la plus adaptée consiste à considérer les maxima composante par composante.

Soient $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}^*$ des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d , ($d \geq 2$) de distribution jointe commune $F(\mathbf{x})$. On désigne par F_1, F_2, \dots, F_d les distributions marginales et soit \mathbf{M}_n le vecteur des maxima *i.e.* $\mathbf{M}_n = (\mathbf{M}_n^1, \dots, \mathbf{M}_n^d)$ où $\mathbf{M}_n^j = \max(X_1^j, \dots, X_n^j)$ pour $j = 1, \dots, d$ et X_i^j représente la j ième composante de \mathbf{X}_i . Comme dans le cas univarié, l'objectif est de caractériser la loi limite de \mathbf{M}_n , ou plus précisément la distribution multivariée G qui peut apparaître comme la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans

$$\mathbb{P} \{ (\mathbf{M}_n^j - b_n^j) / a_n^j \leq x_j; j = 1, \dots, d \} = F^n(u_n^1, \dots, u_n^d) \rightarrow G(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

où $u_n^j = a_n^j x_j + b_n^j$ avec $a_n^j > 0$ et $b_n^j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq d$, $n \geq 1$.

L'équation (2.5) peut être exprimée de façon plus simple :

$$\mathbb{P} \{ (\mathbf{M}_n - \mathbf{b}_n) / \mathbf{a}_n \leq \mathbf{x} \} = F^n(\mathbf{a}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n) \rightarrow G(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

où $\mathbf{a}_n = (a_n^1, \dots, a_n^d)$ et $\mathbf{b}_n = (b_n^1, \dots, b_n^d)$.

Il faut noter que chaque distribution marginale G_j de la loi limite G est de type extrême. Toute distribution multivariée F vérifiant (2.6) est dite dans le domaine d'attraction de la loi limite G . Pour plus de détails voir par exemple Resnick (1987). La convergence dans la loi limite de l'équation (2.6) peut être divisée en deux aspects indépendants : le premier est la convergence de chaque distribution marginale de F^n vers la distribution marginale appropriée de G . Pour ceci on fait appel à la théorie des extrêmes univariée (modèle GEV). Le deuxième aspect est la structure de dépendance de G et la convergence de la structure de dépendance de F^n vers celle de G . Pour la simplicité des notations et la clarté de la présentation des résultats, il est courant de considérer des distributions marginales standardisées. Sans perte de généralité, il est classique de supposer que les lois marginales F_1, \dots, F_d sont Fréchet unitaire, *i.e.* $F_1(t) = \dots = F_d(t) = \exp(-1/t), t > 0$. En effet on peut toujours s'y ramener moyennant une transformation des marges, en posant $Z_j = -\frac{1}{\log(F_j(Y_j))}$, $j = 1, \dots, d$.

2.4.1 Caractérisation des extrêmes multivariés par des processus ponctuels

Dans cette section on présentera les résultats classiques de de Haan (de Haan, 1984) sur les processus ponctuels qui caractérisent de façon pertinente les distributions des

extrêmes.

En gardant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}^*$, désignent des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d , ($d \geq 2$), de marges Fréchet unitaire et de distribution commune F dans le domaine d'attraction d'une distribution multivariée G . Le processus ponctuel \mathcal{P}_n considéré par de Haan (1984) est défini par

$$\mathcal{P}_n = \{n^{-1}\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Le terme n^{-1} correspond à la suite de normalisation nécessaire pour stabiliser les maxima quand les marges sont Fréchet unitaire.

En utilisant une version généralisée du théorème 1.5.1, on montre que le processus ponctuel \mathcal{P}_n converge faiblement vers un processus non homogène de Poisson sur $[\mathbf{0}, \infty) \setminus \{\mathbf{0}\}$ quand $n \rightarrow \infty$. L'origine est exclue du domaine de la convergence vers \mathcal{P} parce que toutes les observations non-extrêmes s'écrasent en $\mathbf{0}$ et par suite un nombre infini de points se concentrent à l'origine.

Afin d'obtenir une expression plus simple de l'intensité de \mathcal{P} il est pratique d'utiliser les coordonnées pseudo-polaires $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ de composantes (voir la définition 1.4.3).

$$r_i = \sum_{j=1}^d \mathbf{X}_i^j / n \quad \omega_i^j = \mathbf{X}_i^j / nr_i \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, d.$$

Ainsi l'intensité de \mathcal{P} s'écrit

$$\mu(d\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{r}^{-2} dr dH(\boldsymbol{\omega}) \quad (2.7)$$

où H est une mesure positive définie sur le simplexe :

$$S_d = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d); \sum_{j=1}^d \omega_j = 1, \omega_j \geq 0, j = 1, \dots, d. \right\}$$

vérifiant

$$\int_{S_d} \omega_j dH(\boldsymbol{\omega}) = 1 \quad \text{pour chaque } \omega_j, \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.8)$$

Remarque 2.4.1.

- La mesure H , dite mesure spectrale, n'est pas une mesure de probabilité sur S_d alors que H/d l'est.
- La mesure H n'est pas forcément régulière, i.e. absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si c'est le cas alors on a par hypothèse $dH(\boldsymbol{\omega}) = h(\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}$.

2.4.2 Distribution des extrêmes multivariée

La fonction de dépendance

De l'équation (2.7) on déduit que l'intensité du processus ponctuel \mathcal{P} se factorise en une composante radiale \mathbf{r} et une mesure angulaire H qui gère la structure de dépendance entre les variables. Les composantes \mathbf{r} et $\boldsymbol{\omega}$ sont indépendantes.

Soient $A = \mathbb{R}_+^d \setminus \{(0, x_1) \times \dots \times (0, x_d)\}$. Puisque $\mathcal{P}_n \xrightarrow{\text{faiblement}} \mathcal{P}$ on a :

$$\mathbb{P}(n^{-1}\mathbf{X}_i \notin A, i = 1, \dots, n) \longrightarrow \exp\{-\mu(A)\},$$

où

$$\mu(A) = \int_A r^{-2} dr dH(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S_d} \int_{\min_{1 \leq j \leq d}(\frac{x_j}{\omega_j})}^{\infty} r^{-2} dr dH(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\omega_j}{x_j} \right) dH(\boldsymbol{\omega}). \quad (2.9)$$

En utilisant l'égalité $\mathbb{P}(n^{-1}\mathbf{X}_i \notin A, i = 1, \dots, n) = \mathbb{P}(n^{-1}M_n^j \leq x_j, j = 1, \dots, d)$ et les équations (2.6) et (2.7) nous déduisons que toute distribution de maxima normalisée avec des marges Fréchet unitaire s'écrit sous la forme

$$G(\mathbf{x}) = \exp\{-V(\mathbf{x})\}, \quad (2.10)$$

où

$$V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} (\omega_j/x_j) dH(\boldsymbol{\omega}). \quad (2.11)$$

Cette représentation des extrêmes multivariés est due à Pickands (1981) dans le cas où les marges sont Fréchet unitaire.

La fonction V définie dans (2.11) est dite *fonction de dépendance*.

Puisque V est entièrement déterminée par la mesure H et que les contraintes imposées à la mesure spectrale H ne sont pas fortes, il n'existe pas de forme paramétrique exhaustive comparable à celle des distributions des valeurs extrêmes univariées. D'un point de vue statistique, il est intéressant de développer des modèles paramétriques, sans pour autant sacrifier la flexibilité et l'importante variabilité possible pour les fonctions de dépendance.

De l'équation (2.11) on vérifie facilement les deux propriétés de la dépendance:

- i) La fonction V est homogène d'ordre -1 i.e.

$$V(t\mathbf{x}) = t^{-1}V(\mathbf{x}), \text{ pour tout } t > 0.$$

- ii) Pour tout $x > 0$, $V(\infty, \dots, x, \infty, \dots, \infty) = x^{-1}$.

Les deux propriétés ci dessus caractérisent la fonction de dépendance V c'est-à-dire réciproquement toute fonction définie sur $(0, \infty)^d$ vérifiant ces deux propriétés est valide pour définir une fonction de dépendance d'une loi extrême. Coles et Tawn

(Coles and Tawn, 1991) ont relié la fonction de dépendance V et la densité de mesure h si elle existe de la façon suivante :

$$\frac{\partial^d V}{\partial x_1 \dots \partial x_d} = - \left(\sum_{i=1}^d x_i \right)^{-(d+1)} h \left(\frac{x_1}{\sum x_i}, \dots, \frac{x_d}{\sum x_i} \right). \quad (2.12)$$

Exemples

Comme il n'existe pas de paramétrisation générale des lois extrêmes, on fournit quelques exemples de distributions en se focalisant sur le cas bivarié. Dans un souci de clarté on se placera toujours, sauf mention contraire, dans le cas de marges Fréchet unitaire. Par suite les distributions sont entièrement déterminées par les structures de dépendances *i.e.* par la mesure spectrale H définie dans l'équation (2.7) ou d'une façon équivalente la fonction de dépendance V définie dans l'équation (2.11).

Dans le cadre bivarié, pour une mesure H donnée satisfaisant la condition de normalisation (2.8), la fonction de dépendance correspondante V est donnée par

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int_0^1 \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) dH(\omega) \\ &= \frac{1}{y} \int_0^{\frac{x}{x+y}} (1-\omega) dH(\omega) + \frac{1}{x} \int_{\frac{x}{x+y}}^1 \omega dH(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi chaque choix de mesure H définit un modèle paramétrique. Ci-dessous quelques exemples usuels :

1. *Le modèle d'indépendance stricte*

Posons $V(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $(x, y) \in (0, \infty)^2$. Cette fonction est bien homogène d'ordre -1 et satisfait pour $x > 0$, $V(x, \infty) = V(\infty, x) = x^{-1}$. Elle induit donc la distribution multivariée des valeurs extrêmes

$$G(x, y) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right\} = \exp \left(-\frac{1}{x} \right) \exp \left(-\frac{1}{y} \right).$$

Cette fonction de répartition se factorise en x et y et correspond donc au cas où les extrêmes sont indépendants. La mesure spectrale H associée est $H(\cdot) = \delta_0(\cdot) + \delta_1(\cdot)$. En effet

$$\int_0^1 \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) dH(\omega) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

2. *Le modèle de dépendance parfaite*

A l'extrême opposé de l'indépendance stricte, nous pourrions considérer la dépendance parfaite en posant $V(x, y) = \max(x^{-1}, y^{-1})$, $(x, y) \in (0, \infty)^2$.

2.4 Approche multivariée

Là encore la fonction V remplit les conditions pour définir une fonction de dépendance valide. La fonction de répartition associée est

$$G(x, y) = \exp \left\{ - \max \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \right\},$$

et correspond à des variables aléatoires X et Y vérifiant $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. La mesure spectrale correspondante est $H(\cdot) = 2\delta_{0.5}(\cdot)$. En effet

$$\int_0^1 \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) dH(\omega) = 2 \max \left(\frac{1}{2x}, \frac{1}{2y} \right) = \max \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right).$$

3. Le modèle logistique (Gumbel, 1960)

Sa fonction de dépendance est définie par

$$V(x, y) = (x^{-1/\alpha} + y^{-1/\alpha})^\alpha$$

et la densité de la mesure H est donnée par

$$h(\omega) = (\alpha^{-1} - 1) \{ \omega^{-1/\alpha} + (1-\omega)^{-1/\alpha} \}^{\alpha-2} \{ \omega(1-\omega) \}^{-(1+1/\alpha)},$$

pour $\omega \in (0, 1)$, où le paramètre de dépendance $\alpha \in (0, 1]$. Les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow 0$ correspondent respectivement à l'indépendance exacte et la dépendance complète. En raison de sa forme simple et maniable, le modèle logistique est largement utilisé dans les modélisations statistiques bivariées.

4. Le modèle mixte (Tawn, 1991)

Sa mesure H est définie par

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{si } \omega = 0 \\ 1 - \theta + 2\theta\omega & \text{si } 0 < \omega < 1 \\ 2 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$$

où $\theta \in (0, 1]$. Sa fonction de dépendance est donnée par

$$V(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{\theta}{x+y},$$

où $0 \leq \theta \leq 1$. L'indépendance correspond à $\theta = 0$ mais la dépendance complète ne peut pas être représentée.

5. Le modèle logistique asymétrique (Tawn, 1991)

La fonction de dépendance de ce modèle est définie par :

$$V(x, y) = \left\{ \left(\frac{x}{\beta_2} \right)^{-1/\alpha} + \left(\frac{y}{\beta_1} \right)^{-1/\alpha} \right\}^\alpha + \frac{1 - \beta_2}{x} + \frac{1 - \beta_1}{y}.$$

La densité de sa mesure spectrale est définie par :

$$h(\omega) = \frac{1-\alpha}{\alpha\beta_1\beta_2} \left\{ \left(\frac{\omega}{\beta_2} \right)^{-1/\alpha} + \left(\frac{1-\omega}{\beta_1} \right)^{-1/\alpha} \right\}^{\alpha-2} \left\{ \frac{\omega}{\beta_2} \left(\frac{1-\omega}{\beta_1} \right) \right\}^{-(1+1/\alpha)},$$

pour $0 < \omega < 1$, avec $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ et $\alpha \in (0, 1]$ et h charge les valeurs $1 - \beta_1$ et $1 - \beta_2$ respectivement en $\omega = 0$ et $\omega = 1$.

6. *Le modèle de Dirichlet* (Tawn, 1991)

Sa fonction de dépendance est définie par :

$$V(x, y) = \frac{1}{x} \{1 - Be(\alpha_1 + 1, \alpha_2, x)\} + \frac{1}{y} \{1 - Be(\alpha_1, \alpha_2 + 1, x)\}$$

où $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $Be(\alpha_1, \alpha_2, x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x \omega^{\alpha_1} (1 - \omega)^{1 - \alpha_2} d\omega$ et la fonction Γ est définie par : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0$.

La densité de sa mesure spectrale est $h(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \omega^{\alpha_1 - 1} (1 - \omega)^{\alpha_2 - 1} d\omega$.

L'indépendance totale et la dépendance complète sont atteintes respectivement lorsque $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \mathbf{0}$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \infty$.

La fonction de Pickands

Dans le cas bivarié, une fonction importante pour représenter la structure de dépendance extrême entre deux composantes d'un vecteur bivarié introduite par Pickands (Pickands, 1981), notée A , est définie sur $[0, 1]$ par :

$$A(t) = \begin{cases} V\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right) & \text{si } t \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } t \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- La fonction A est une fonction convexe de $[0, 1]$ dans $[1/2, 1]$;
- $\forall t \in (0, 1), \max(t, 1 - t) \leq A(t) \leq 1$.

Le graphique de gauche de la figure (2.2) montre les différentes formes que peut prendre la fonction de dépendance de Pickands pour le modèle logistique, i.e.,

$$A(\omega) = \{\omega^{-1/\alpha} + (1 - \omega)^{-1/\alpha}\}^\alpha, \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

Lorsque $\alpha \uparrow 1$, $A \equiv 1$ c'est le cas de l'indépendance entre les deux variables alors que lorsque $\alpha \downarrow 1$, $A(\omega) = \max(\omega, 1 - \omega)$ c'est-à-dire la dépendance parfaite. Le graphique de droite de la figure (2.2) montre que la fonction de dépendance de Pickands n'est pas forcément symétrique par rapport à la droite $\omega = 0.5$. C'est par exemple le cas avec le modèle logistique asymétrique lorsque $\beta_1 \neq \beta_2$ puisque la fonction de Pickands pour ce modèle est donnée par :

$$A(\omega) = (1 - \omega)(1 - \beta_1) + (1 - \beta_2)\omega + \left[\{(1 - \omega)\beta_1\}^{1/\alpha} + (\omega\beta_2)^{1/\alpha} \right]^\alpha, \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

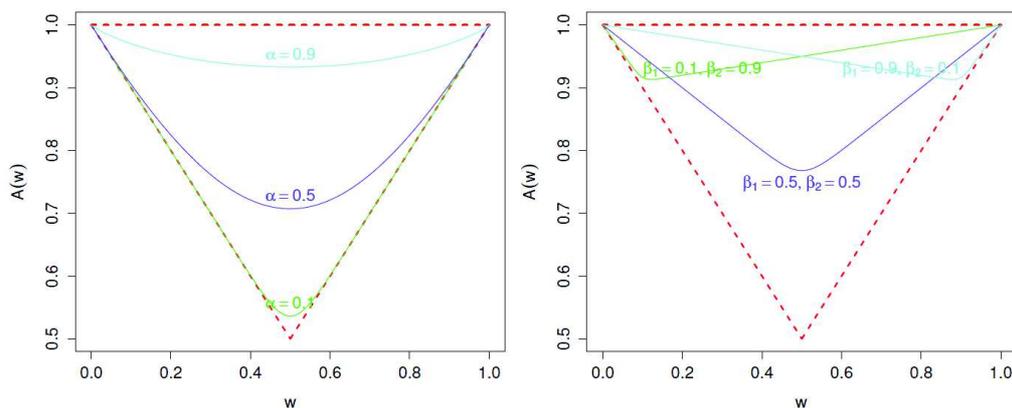


Fig 2.2: (Ribatet, 2013) ; Fonctions de dépendance de Pickands pour le modèle logistique (à gauche) et asymétrique logistique (à droite) pour différentes valeurs de α , β_1 et β_2 . Les droites en pointillés indiquent la dépendance parfaite et l'indépendance.

Mesure de la dépendance extrême : le coefficient extrême

Définition 2.4.1. (Coefficient extrême) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire bivarié de marges Fréchet unitaire et de fonction de dépendance V . On appelle coefficient extrême la quantité $\theta = V(1, 1)$.

Le coefficient extrême vérifie les propriétés suivantes (que l'on peut trouver dans Coles (2001))

- $\theta \in [1/2, 1]$;
- les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si $\theta = 2$;
- les variables X et Y sont parfaitement dépendantes si et seulement si $\theta = 1$.

Soit (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq n$, n réalisations indépendantes de (X, Y) . L'estimation du coefficient extrême peut se faire essentiellement grâce à deux approches. On vérifie aisément que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est :

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \max(X_i, Y_i)^{-1}}$$

(Voir Beirlant et al. (2004)). L'autre approche utilise la relation entre le coefficient extrême θ et la quantité $\nu_F(X, Y) = \mathbb{E} \{ |F(X) - F(Y)| \}$ appelée F -madogramme, où F désigne la distribution commune de X et Y . En effet on vérifie facilement que $2\nu_F(X, Y) = \frac{\theta-1}{\theta+1}$ (Cooley et al., 2006). On peut donc utiliser ce résultat afin d'estimer le coefficient extrême en estimant tout d'abord $\nu_F(X, Y)$ par la moyenne empirique et F par la fonction de répartition empirique. Soit (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq n$, n copies indépendantes du vecteur (X, Y) on a : $\hat{\nu}_F(X, Y) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n | \hat{F}(X_i) - \hat{F}(Y_i) |$

où \widehat{F} désigne la fonction de répartition empirique.

Par suite :

$$\widehat{\theta} = \frac{1 + 2\widehat{\nu}_F(X, Y)}{1 - 2\widehat{\nu}_F(X, Y)}.$$

2.4.3 Ajustement des modèles multivariés

Il y a deux méthodologies principales dans la modélisation statistique des extrêmes multivariés: paramétrique et non-paramétrique. Le principal avantage de la modélisation paramétrique est que les techniques de vraisemblance standard permettent l'ajustement simultané des modèles marginaux et de la structure de dépendance offrant ainsi une meilleure estimation des paramètres. En revanche, les approches non paramétriques exigent que chaque marge soit modélisée séparément et ensuite le modèle de la dépendance sera estimé. Cette approche ne permet ni l'échange d'informations entre les marges ni la possibilité de tenir compte de l'incertitude de l'estimation marginale lorsque la structure de dépendance est estimée.

Vraisemblance multivariée

Pour illustrer cette méthode on se place dans le cadre bivarié.

Soit $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ une suite d'observations indépendantes d'un vecteur aléatoire bivarié (X, Y) . On suppose que la distribution de (X, Y) est connue et qu'elle est de la forme $F_{\theta}(x, y)$, où θ est un vecteur de paramètres inconnus, pour les observations dépassant deux seuils élevés (u_1, u_2) .

Pour des seuils marginaux élevés on partitionne \mathbb{R}^2 à l'aide des quatre quadrants suivants

$$\begin{aligned} & \{R_{kl}; k = \mathbf{1}_{\{X > u_1\}}, l = \mathbf{1}_{\{Y > u_2\}}\} . \\ R_{00} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq u_1; y \leq u_2\} \\ ; \\ R_{01} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq u_1; y > u_2\} \\ ; \\ R_{11} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > u_1; y > u_2\} \\ ; \\ R_{10} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > u_1; y \leq u_2\} . \end{aligned}$$

Ainsi, pour une observation marginale qui ne dépasse pas un seuil, la seule information pertinente fournie est qu'elle se situe en dessous du seuil (RL. Smith and

2.4 Approche multivariée

(Coles, 1997). Selon la valeur de k et l , la contribution à la vraisemblance L_{kl} dans la région R_{kl} en un point (x_i, y_i) est donnée par :

$$L_{00}(x_i, y_i) = F_{\theta}(u_1, u_2), \quad L_{01}(x_i, y_i) = \frac{\partial F_{\theta}(u_1, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i},$$

$$L_{10}(x_i, y_i) = \frac{\partial F_{\theta}(x, u_2)}{\partial x} \Big|_{x=x_i}, \quad L_{11}(x_i, y_i) = \frac{\partial^2 F_{\theta}(x, y)}{\partial y \partial x} \Big|_{(x,y)=(x_i,y_i)}.$$

La vraisemblance pour n points indépendants est donc :

$$\mathbf{L}_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[\sum_{k,l \in \{0,1\}} L_{kl}(x_i, y_i) \mathbb{1}_{\{(x_i, y_i) \in R_{kl}\}} \right].$$

Cette méthode peut être étendue facilement aux dimensions supérieures $d \geq 2$. La contribution à la vraisemblance pour une observation (y_1, \dots, y_d) pour laquelle seulement les composantes j_1, \dots, j_m dépassent leurs seuils est donnée par

$$\frac{\partial^m F_{\theta}(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_{j_1}, \dots, \partial x_{j_d}} \Big|_{\{x_j = \max(u_j, y_j); j=1, \dots, d\}}.$$

Le coefficient extrême comme valeur particulière de la fonction V est également une valeur particulière de la fonction A . En effet $\theta = V(1, 1) = 2A(0.5)$.

Approche non paramétrique

Soit X et Y deux variables aléatoires de marges Fréchet unitaire telles que leur distribution F soit dans le domaine d'attraction d'une distribution extrême bivariée G . Pour des grandes valeurs de x et y ,

$$F(x, y) \approx G(x, y) = \exp \{-V(x, y)\} \approx 1 - V(x, y)$$

et comme V est homogène d'ordre -1 , alors

$$1 - F(tx, ty) \approx V(tx, ty) = t^{-1}V(x, y) \approx t^{-1} \{1 - F(x, y)\}.$$

Il en résulte immédiatement que si $A \subseteq B$, où $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x) \times (0, y)\}$ alors

$$\mathbb{P} \{(X, Y) \in tA\} \approx t^{-1} \mathbb{P} \{(X, Y) \in A\} \quad \forall t \geq 1. \quad (2.13)$$

Dans les applications, l'équation (2.13) est utilisée pour des grandes valeurs de x et y et des valeurs appropriées de t . La propriété d'homogénéité fournit un moyen de relier la probabilité d'événements les plus extrêmes avec des probabilités évaluées sur les données observées. En effet le principe de cette méthode consiste à utiliser l'estimation de la probabilité d'être dans une région A contenant des données pour estimer la probabilité de la région tA qui ne contient pas des données.

Pour plus détails voir Draisma et al. (2004).

2.5 Insuffisance du cadre max-stable

Dans cette section on se place dans un cadre bivarié, suffisant pour montrer que les approches classiques max-stables sont inopérantes dans le cas de l'indépendance asymptotique (définie ci-dessous).

Soit F la distribution jointe d'un vecteur aléatoire (Y_1, Y_2) de marges Fréchet unité. On suppose que F est dans le domaine d'attraction d'une loi max-stable G . Soient $(Y_1^1, Y_2^1), \dots, (Y_1^n, Y_2^n)$ n copies indépendantes de (Y_1, Y_2) et $M_1^n = \max_{i=1, \dots, n} Y_1^i$, $M_2^n = \max_{i=1, \dots, n} Y_2^i$ pour $n \geq 1$. On a alors :

$$\mathbb{P} \left(\frac{M_1^n}{n} \leq x, \frac{M_2^n}{n} \leq y \right) = F^n(nx, ny) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} G(x, y). \quad (2.14)$$

Il existe une mesure finie μ sur le cône convexe $[0, \infty)^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ telle que :

$$G(x, y) = \exp[-V(x, y)] \quad \text{où} \quad V(x, y) = \mu \{(u, v) : u > x \text{ ou } v > y\}.$$

Comme développée dans la section précédente, la décomposition de la mesure μ en une composante radiale et une angulaire permet d'écrire :

$$V(x, y) = \int_0^1 \left(\max \frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) dH(\omega),$$

avec $H(\cdot)$ une mesure positive finie sur $[0, 1]$. Un cas particulier se produit lorsque H charge seulement les valeurs 0 et 1. Dans ce cas on a :

$$\mu \{(u, v) : u > x \text{ ou } v > y\} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \mu \{(u, v) : u > x\} + \mu \{(u, v) : v > y\}.$$

Cette propriété additive se transforme en une propriété multiplicative en passant à l'exponentielle donc la distribution limite G s'écrit comme produit des distributions marginales limites :

$$G(x, y) = G(x, \infty)G(\infty, y) \quad \text{pour tout } x, y > 0.$$

On dit alors que les variables Y_1 et Y_2 sont *asymptotiquement indépendantes*.

Dans le cas contraire Y_1 et Y_2 sont *asymptotiquement dépendantes*. Si on s'intéresse à l'estimation de la probabilité que Y_1 et Y_2 excèdent simultanément un seuil élevé dans le cas de l'indépendance asymptotique, la convergence (2.14) est sans intérêt. En effet, en passant au logarithme on montre aisément que :

$$n \mathbb{P} \left(\frac{Y_1}{n} \geq x, \frac{Y_2}{n} \geq y \right) = \ln G(x, y) - \ln G(x, \infty) - \ln G(\infty, y).$$

Dans le cas de l'indépendance asymptotique cette quantité est nulle et l'extrapolation est impossible.

Dans le chapitre suivant on détaillera des alternatives possibles au travers de modèles qui se focalisent directement sur la variation régulière des queues de distributions, permettant ainsi d'avoir une meilleure représentation de la décroissance des queues.

Chapitre 3

Au delà du max-stable

3.1 Introduction

L'absence d'un cadre paramétrique exhaustif pour les extrêmes multivariés constitue un obstacle majeur pour l'étude de la dépendance des extrêmes. En effet sous l'hypothèse de max-stabilité, les questions liées à la dépendance asymptotique sont relativement bien résolues aux travers des modèles max-stables mais ces derniers sont assez restrictifs en ce qui concerne les aspects d'indépendance asymptotique des réalisations les plus extrêmes puisqu'ils se limitent à la seule notion usuelle d'indépendance stricte. Ceci n'offre pas la flexibilité souhaitée pour modéliser des données asymptotiquement indépendantes. Plusieurs travaux proposent d'autres classes de modèles plus générales, qui décrivent le comportement des queues de distributions tout en englobant les modèles existants. Dans la suite, en se basant sur les travaux de Ledford et Tawn (1996, 1997), Resnick (2002), Ramos et Ledford (2009, 2011), Wadsworth et Tawn (2013) et de Haan et Zhou (2011), on se propose d'explorer et analyser ces nouveaux modèles plus flexibles et appropriés aux cas de l'indépendance asymptotique.

3.2 Caractérisation de l'(in)dépendance asymptotique par les mesures χ et $\bar{\chi}$

Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi marginale F . Soit la mesure

$$\chi = \lim_{z \rightarrow \tau_F} \mathbb{P}(Y > z | X > z), \quad (3.1)$$

où τ_F est le point terminal de la distribution marginale commune. Cette mesure a été considérée par Sibuya (1960) et de Oliveira (1962).

Lorsque $\chi = 0$ les maxima des copies indépendantes du vecteur (X, Y) sont asymptotiquement indépendantes. En d'autres termes, l'indépendance asymptotique exprime le fait que la probabilité que deux composantes soient simultanément grandes

est négligeable par rapport à la probabilité qu'une seule le soit. La dépendance asymptotique correspond au cas $\chi > 0$, bien sûr lorsque la limite (3.1) existe. Par abus de langage on se permet souvent de dire que les variables marginales sont asymptotiquement indépendantes, respectivement asymptotiquement dépendantes, dans ces cas.

Cette mesure a été généralisée dans Coles et al. (1999) dans le cas où les marges sont différentes, et ceci en utilisant une transformation en marges uniformes (U_1, U_2) . Pour mesurer la dépendance sans les effets des marges ils ont utilisé les fonctions copules. Désignons par F_1 et F_2 les distributions marginales respectives. La copule $C(.,.)$ associée à F est telle que

$$F(x, y) = C \{F_1(x), F_2(y)\},$$

avec comme domaine $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Par conséquent C est la distribution jointe après transformation aux marges uniformes sur $[0, 1]$ et ceci en considérant $(U_1, U_2) = \{F_1(X), F_2(Y)\}$, (pour plus de détails voir Nelsen (1999)).

La mesure χ peut alors s'écrire

$$\chi = \lim_{t \rightarrow 1} \mathbb{P}(U_2 > t \mid U_1 > t),$$

ou, d'une façon équivalente

$$\begin{aligned} \chi &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ 2 - \frac{1 - \mathbb{P}(U_1 < t, U_2 < t)}{1 - \mathbb{P}(U_1 < t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ 2 - \frac{\log \mathbb{P}(U_1 < t, U_2 < t)}{\log \mathbb{P}(U_1 < t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \chi(t). \end{aligned}$$

Dans le cas de la dépendance parfaite $\chi(t) = 1$, pour tout $t \in (0, 1)$, et dans le cas de indépendance exacte $\chi(t) = 0$.

La quantité $\chi(t)$ définit une mesure de dépendance basée sur les quantiles (associée à la probabilité de non dépassement de t). Ainsi le signe $\chi(t)$ définit si les variables X et Y sont négativement ou positivement associées pour le niveau de dépassement t . La mesure $\chi(t)$ s'estime facilement à l'aide de la fonction de répartition empirique \widehat{F} , pour $t \in (0, 1)$

$$\widehat{\chi}(t) = \frac{2 - \log \widehat{F}(t)}{\log t}.$$

Si un vecteur aléatoire suit une loi bivariée extrême de fonction de dépendance V avec des marges Fréchet unitaire alors

$$\chi(t) = 2 - V(1, 1) = 2 - \theta, \quad \forall t \in (0, 1), \quad (3.2)$$

où θ est le coefficient extrémal défini dans le chapitre précédent. Dans l'équation (3.2), on remarque que $\chi(t)$ est indépendant de t . Ceci est intéressant d'un point

3.3 Modèles de Ledford et Tawn (1996-1997)

de vue statistique puisque si l'on dispose d'un estimateur de $\chi(t)$ et s'il est stable indépendamment des valeurs de t , cela pourrait justifier l'utilisation d'une loi des valeurs extrêmes.

Les mesures χ et $\chi(t)$ sont d'intérêt uniquement pour des variables asymptotiquement dépendantes. Leurs interprétations doivent cependant être faite avec prudence. En effet, Coles et al. (1999) ont montré qu'en utilisant un graphique de $\chi(t)$ estimé empiriquement, il est possible de conclure à tort que des extrêmes sont asymptotiquement dépendants. C'est par exemple le cas des vecteurs gaussiens de corrélation $\rho \in (0, 1)$. Pour cette raison, ils ont introduit une autre mesure pour mesurer le degré de dépendance pour des variables asymptotiquement indépendantes, à savoir

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{2 \log \mathbb{P}(U_1 > t)}{\log \mathbb{P}(U_1 > t, U_2 > t)} - 1 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{2 \log(1-t)}{\log \bar{C}(t, t)} - 1 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \bar{\chi}(t),\end{aligned}$$

où \bar{C} est tel que $\bar{C}\{F_1(x), F_2(y)\} = \bar{F}(x, y)$.

La mesure $\bar{\chi}$ varie dans l'intervalle $[-1, 1]$. L'intervalle $[-1, 1)$ correspond à l'indépendance asymptotique et la valeur 1 correspond à la dépendance asymptotique. Pour gérer les deux types de dépendance d'extrêmes il est plus commode d'utiliser le couple $(\chi, \bar{\chi})$. Le cas $(\chi > 0, \bar{\chi} = 1)$ représente le cas de dépendance asymptotique où la mesure χ mesure le degré de dépendance et le cas $(\chi = 0, \bar{\chi} < 1)$ représente le cas de l'indépendance asymptotique où les valeurs de $\bar{\chi}$ déterminent le degré de dépendance dans cette classe.

Exemple 3.2.1. *Distribution bivariée normale avec coefficient de corrélation $0 \leq \rho < 1$.*

La fonction de survie jointe de cette distribution avec des marges Fréchet unitaire satisfait :

$$\mathbb{P}(X > r, Y > r) \sim c_\rho \log(r)^{-\rho/(1+\rho)} r^{-2/(1+\rho)}, \quad r \rightarrow \infty,$$

où $c_\rho = (1 + \rho)^{3/2} (1 - \rho)^{-1/2} (4\pi)^{-\rho/(1+\rho)}$ (Reiss, 1984).

Dans ce cas $(\chi, \bar{\chi}) = (0, \rho)$ et les cas de l'association positive, de l'indépendance et de l'association négative correspondent respectivement à $\rho > 0$, $\rho = 0$ et $\rho < 0$.

3.3 Modèles de Ledford et Tawn (1996-1997)

Les modèles de Ledford et Tawn (1996, 1997) constituent la base de la majorité des résultats présentés dans la suite. D'une façon intuitive, Ledford et Tawn (1996) ont compris que le problème de l'incapacité de détecter les résidus de dépendance dans le cas de l'indépendance asymptotique (IA), c'est-à-dire une dépendance qui

peut s'exprimer à taille d'échantillon finie, est lié à la vitesse de convergence dans la relation (2.14). Une nouvelle modélisation de la queue de distribution est donc nécessaire pour alléger un peu cette vitesse. Plutôt que de travailler sur des lois de maxima, Ledford et Tawn (1996) ont introduit un modèle pour le comportement de queue d'une distribution bivariée permettant de gérer la décroissance des probabilités de survie. Ce modèle se focalise directement sur la variation régulière de la fonction de survie au voisinage de l'infini plutôt que d'utiliser celle de $1 - F$ où F désigne la distribution jointe. Soit (Z_1, Z_2) un vecteur bivarié avec marges Fréchet unitaire. En se basant sur plusieurs exemples de distributions, Ledford et Tawn (1996) proposent l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}(Z_1 > r, Z_2 > r) \sim \mathcal{L}(r)r^{-\frac{1}{\eta}}.$$

où \mathcal{L} est une fonction Univariée à Variation Lente (UVL) (Ledford and Tawn, 1996).

Le paramètre η est une constante qui détermine la vitesse de décroissance de la fonction de survie jointe pour de grandes valeurs de r . Il fournit une mesure de la dépendance entre les queues des marginales et on l'appelle le coefficient de dépendance de queue. Le modèle de Ledford and Tawn (1997) généralise celui de 1996 en donnant un développement d'ordre supérieur de la fonction de survie jointe d'un vecteur aléatoire de marges Fréchet unitaire. Pour des valeurs élevées de z_1 et z_2 , la fonction de survie jointe de (Z_1, Z_2) est alors modélisée par :

$$\begin{aligned} \bar{F}(z_1, z_2) &= \mathbb{P}(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2) \\ &= \mathcal{L}_1(z_1, z_2)z_1^{-c_1}z_2^{-c_2} + \mathcal{L}_2(z_1, z_2)z_1^{-(c_1+d_1)}z_2^{-(c_2+d_2)} + o\left(z_1^{-(c_1+d_1)}z_2^{-(c_2+d_2)}\right) \end{aligned}$$

où $c_1 + c_2 = \frac{1}{\eta}$, $d_j \geq 0$ et $\mathcal{L}_j(z_1, z_2) \neq 0$ $j = 1, 2$ est une fonction Bivariée à Variation Lente (BVL). On a les résultats suivants :

- (i) si $\eta = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t) \neq 0$, les variables marginales sont asymptotiquement dépendantes (AD) ;
- (ii) si $0 < \eta < \frac{1}{2}$, les variables marginales sont AI, avec une association négative ;
- (iii) si $\eta = \frac{1}{2}$, et $\mathcal{L} \sim 1$, les variables marginales sont strictement indépendantes ;
- (iv) si $\frac{1}{2} < \eta < 1$, les variables marginales sont AI, avec une association positive.

Soit Z un vecteur de distribution F avec des marges Fréchet unitaire, le vecteur \mathbf{Z} est dans le domaine d'attraction d'une distribution des extrêmes multivariée si il existe une mesure de Radon μ telle que pour tout borélien compact $B \subset [0, \infty]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{Z}}{n} \in B\right) = \mu(B),$$

existe, est non dégénérée et vérifie $\mu(\partial B) = 0$, ou d'une façon équivalente le processus ponctuel de de Haan (de Haan, 1984) $\left\{\frac{Z_1^i}{n}, \dots, \frac{Z_d^i}{n}, i = 1, \dots, n\right\}$ converge faible-

ment vers un processus poissonien d'intensité μ (Resnick, 1987, chapitre 5). La mesure μ est nécessairement homogène d'ordre -1 et sa masse est concentrée dans le sous-cône $(0, \infty]^d \subset [0, \infty]^d \setminus \{0\}$ dans le cas de la dépendance asymptotique. Lorsque \mathbf{Z} est AI, μ n'a pas de masse dans $(0, \infty)^d$ et cela pose un problème dans les applications statistiques car alors $\mu((0, \infty)^d) = 0$. Par suite on ne peut pas extrapoler en utilisant les probabilités des événements plus centraux.

En utilisant leur nouvelle modélisation, Ledford and Tawn (1997) ont défini un nouveau processus ponctuel :

$$\left\{ \left(\frac{Z_1^i}{b_n}, \dots, \frac{Z_d^i}{b_n} : i = 1, \dots, n \right) \right\},$$

où b_n vérifie $n\bar{F}(b_n, \dots, b_n) \sim 1$. Ce processus converge faiblement vers un processus poissonien dont l'intensité est définie par une nouvelle mesure μ_0 sur le nouveau cône convexe $(0, \infty)^d$, ce qui permet de considérer une nouvelle structure de convergence dans $(0, \infty]^d$ ouvrant la voie à plusieurs approches de modélisation de la fonction de survie.

3.4 Relation entre η et \mathcal{L} et les mesures de dépendances χ et $\bar{\chi}$

Dans cette section on se propose d'exprimer les mesures de dépendance χ et $\bar{\chi}$ en fonction du coefficient de dépendance de queue η et de la fonction \mathcal{L} .

En utilisant la définition de \bar{C} et le modèle de Ledford and Tawn (1996), on a :

$$\bar{C}(1-t, 1-t) \sim \mathcal{L}\{(1-t)^{-1}\} (1-t)^{1/\eta} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= \lim_{t \rightarrow 1} \bar{\chi}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{2 \log(1-t)}{\log \bar{C}(1-t, 1-t)} - 1 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{2 \log(1-t)}{\log \mathcal{L}\{(1-t)^{-1}\} + \frac{1}{\eta} \log(1-t)} - 1 \right\} \\ &= 2\eta - 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Par suite la relation entre ces deux mesures de dépendance et η et \mathcal{L} est

$$\bar{\chi} = \lim_{t \rightarrow 1} \bar{\chi}(t) = 2\eta - 1.$$

Par conséquent, si $\eta = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t) = c$ ($0 < c \leq 1$), alors $\bar{\chi} = 1$ et les variables sont asymptotiquement dépendantes de degré $\chi = c$.

Si $0 < \eta < 1$ ou $\eta = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t) = 0$, alors $\chi = 0$ et les variables sont asymptotiquement indépendantes de degré $\bar{\chi} = 2\eta - 1$ (Beirlant et al., 2004).

3.5 Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique

Durant la dernière décennie, plusieurs travaux ont essayé de combler les lacunes de la théorie des valeurs extrêmes dans le cas de l'indépendance asymptotique. Dans la suite on parcourra brièvement les principaux travaux qui ont suivi ceux de Ledford et Tawn (1996, 1997).

3.5.1 Variation régulière cachée : Resnick (2002)

En se basant sur les travaux de Ledford et Tawn (1996, 1997), un raffinement de la classe des distributions multivariées variant régulièrement dans le cas de l'IA est introduit par Resnick (Resnick, 2002) sous le nom de *variation régulière cachée*. La notion de variation régulière cachée désigne une sous-famille semi-paramétrique de la famille complète des distributions possédant une variation régulière multivariée dans le cas de l'IA. L'idée est de mettre en avant des outils permettant de capturer les résidus de dépendance négligés par la mesure μ de la variation régulière relative à la théorie des valeurs extrêmes. En quelque sorte, par le biais d'une nouvelle mesure plus précise, on va zoomer sur la région $(0, \infty]^d$ dans le cas d'une indépendance asymptotique. Bien sûr on n'aura pas besoin de le faire dans le cas de la dépendance asymptotique.

Définition 3.5.1. (Resnick, 2002) Soit \mathbf{Z} un vecteur aléatoire à variation régulière sur le cône $\mathbb{C} = [0, \infty)^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $d \geq 2$, i.e. il existe $b(t) \rightarrow \infty$ et une mesure de Radon ν sur \mathbb{C} telles que

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}/b(t) \in \cdot) \xrightarrow{v} \nu(\cdot), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{dans } M_+(\mathbb{C}). \quad (3.4)$$

\mathbf{Z} est dit à variation régulière cachée sur le sous-cône $\mathbb{C}_0 = (\mathbf{0}, \infty)^d$ si $\nu(\mathbb{C}_0) = 0$ et s'il existe une fonction $b_0(t) \rightarrow \infty$ vérifiant $\frac{b_0(t)}{b(t)} \rightarrow 0$ et une mesure ν_0 définie sur $M_+(\mathbb{C}_0)$ telles que :

$$t\mathbb{P}\left[\frac{\mathbf{Z}}{b_0(t)} \in \cdot\right] \xrightarrow{v} \nu_0(\cdot), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Ci-dessous quelques conséquences de la définition précédente (Resnick, 2002) :

- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $t > 0$ $\nu(tA) = t^{-\alpha}\nu(A)$ pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{C}_0$;
- Il existe $\alpha_0 > \alpha$ tel que pour $t > 0$ $\nu_0(tA) = t^{-\alpha_0}\nu_0(A)$ pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{C}_0$;

3.5 Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique

- $b \in RV_{\frac{1}{\alpha}}$ et $b_0 \in RV_{\frac{1}{\alpha_0}}$;
- D'une façon équivalente à (3.5) :

$$t\mathbb{P} \left(\frac{\mathbf{R}}{b_0(t)} > r, \mathbf{W} \in B \right) \xrightarrow{v} r^{-\alpha_0} H_0(B)$$

pour tout borélien B de $\mathcal{N}_0 = \mathbb{C}_0 \cap \mathcal{N}$ où \mathcal{N} et H_0 désignent respectivement la sphère unité et la mesure angulaire correspondante à ν_0 sur \mathcal{N}_0 . La mesure H_0 est dite **mesure angulaire cachée**.

Remarque 3.5.1.

Lorsque $\mathbb{C} = [\mathbf{0}, \infty)^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbb{C}_0 = (\mathbf{0}, \infty)^d$, alors la variation régulière cachée implique l'IA (Resnick, 2002). Dans ce cas, l'appellation variation régulière cachée est justifiée par le fait que la normalisation relativement brute nécessaire à la convergence vers les axes est trop forte et cache la structure à l'intérieur du cône. Une normalisation de moindre ordre est nécessaire sur un plus petit cône. En d'autres termes, dans certains cas, la mesure limite ν en (3.4) sur le cône \mathbb{C} est dégénérée car concentrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_0$. Restreindre la convergence (3.4) au sous cône \mathbb{C}_0 peut alors faire apparaître une structure plus fine en ayant recours à une normalisation qui tend vers l'infini moins vite.

Exemple 3.5.1. Distribution normale de coefficient de corrélation $0 < \rho < 1$.

On suppose que \mathbf{Z} est un vecteur bivarié dont la structure de dépendance est donnée par une copule gaussienne avec des marges Fréchet unitaire. Dans le cadre max-stable la mesure ν est concentrée sur les axes. En utilisant le modèle de Ledford and Tawn (1997)

$$\bar{F}(z_1, z_2) = \mathbb{P}(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2) \sim \mathcal{L}_1(z_1, z_2) (z_1 z_2)^{-1/2\eta},$$

avec $\eta = \frac{1+\rho}{2}$ et \mathcal{L}_1 une BVL. Le vecteur \mathbf{Z} est à variation régulière cachée d'ordre $\alpha_0 = \frac{2}{1+\rho}$ et la mesure cachée ν_0 se factorise de la façon suivante :

$$\nu_0(dr \times d\omega) = \frac{1}{\eta} r^{-(1+1/\eta)} \times \underbrace{\frac{1}{4\eta} \{\omega(1-\omega)\}^{-1/2\eta-1}}_{H_0(d\omega)} d\omega.$$

La figure (3.1) illustre l'apport d'un point de vue statistique (extrapolation) de la mesure cachée ν_0 . En effet, grâce à cette mesure, plus d'informations sur les événements centraux sont disponibles, ce qui offre la possibilité d'appliquer les méthodes non paramétriques d'extrapolations.

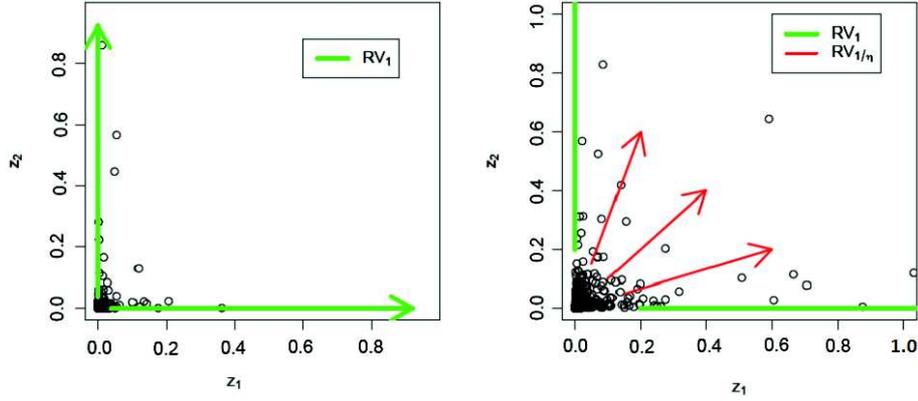


Fig 3.1: Nuage de points correspondant à $n = 10^3$ observations de la loi normale en marges Fréchet unitaire avec une corrélation $\rho = 0.7$. A gauche normalisée par n ce qui correspond à $\eta = 1$ donc une variation régulière d'ordre 1 (RV_1) et à droite normalisée par n^η ce qui correspond à une variation régulière d'ordre $1/\eta$ (RV_1/η).

3.5.2 Dépendance résiduelle extrême : De Haan et Zhou (2011)

Si Resnick en 2002 (Resnick, 2002) a défini la variation régulière cachée en se basant sur le modèle de Ledford et Tawn (Ledford and Tawn, 1997), en 2011 de Haan et Zhou (de Haan and Zhou, 2011) ont travaillé directement sur une deuxième condition de convergence vers une loi extrême détaillée ci-dessous. Ils ont ainsi défini une variation régulière de queue d'une distribution bivariable très similaire à celle présentée dans Ledford and Tawn (1997). Ceci leur a permis d'introduire une mesure définie sur le cône $(0, \infty]^d$ opérante dans le cas de l'indépendance asymptotique. Ci-dessous nous résumons leur approche.

Soit (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq n$, des copies indépendantes d'un vecteur aléatoire (X, Y) de fonction de répartition F . On suppose que F est dans le domaine d'attraction d'une loi extrême G donc il existe des suites normalisantes, $\{b_{n,1} > 0\}$, $\{b_{n,2} > 0\}$, et $\{a_{n,1}\}$, $\{a_{n,2}\}$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P} \left(\frac{X - a_{n,1}}{b_{n,1}} \geq x \text{ ou } \frac{Y - a_{n,2}}{b_{n,2}} \geq y \right) = -\ln G(x, y).$$

Cette condition peut être remplacée par l'existence d'une mesure ν définie sur $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vérifiant pour tout $x > 0$ et $y > 0$;

$$-\ln G(x, y) = \nu \{(u, v); u > x \text{ ou } v > y\}.$$

Pour tout borélien A vérifiant $\inf_{(x,y) \in A} x \vee y > 0$ et pour des marges Pareto on a :

$$\nu(tA) = t^{-1}\nu(A).$$

3.5 Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique

La condition du second ordre introduite par de Haan et Resnick en 1997 (de Haan and Resnick, 1977) est liée à la vitesse de convergence vers une loi extrême. Cette condition est vérifiée s'il existe une fonction $\psi(x, y)$ et une fonction $A(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ telles que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\mathbb{P}\left(\frac{X-b_1(t)}{a_1(t)} > x \quad \text{ou} \quad \frac{Y-b_2(t)}{a_2(t)} > y\right) + \ln(G(x, y))}{A(t)} = \psi(x, y) < \infty.$$

Soit $\tilde{X} = 1/(1 - F_X(X))$ et $\tilde{Y} = 1/(1 - F_Y(Y))$ où F_X et F_Y sont les distributions marginales du vecteur (X, Y) . Les distributions marginales de (\tilde{X}, \tilde{Y}) sont de type Pareto standard, *i.e.* $\mathbb{P}(\tilde{X} > x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 1$.

En conséquence l'égalité précédente devient, en fonction de la mesure ν :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\mathbb{P}(\tilde{X} > tx, \tilde{Y} > ty) - \nu\{(u, v), u > x, v > y\}}{A(t)} \quad \text{existe,}$$

et dans le cas de l'IA on a $\nu\{(u, v); u > x, v > y\} = 0$. La condition du second ordre s'écrit alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\tilde{X} > tx, \tilde{Y} > ty)}{Q(t)} \quad \text{existe} \quad (3.6)$$

avec $Q(t) = \frac{A(t)}{t}$.

La fonction A est à variation régulière d'indice $r \leq 0$ donc Q est à variation régulière d'indice $r - 1 \leq -1$. En posant $r - 1 = \frac{-1}{\eta}$ on retrouve la modélisation de Ledford et Tawn (Ledford and Tawn, 1997).

Définition 3.5.2. (*Dépendance résiduelle extrême*)

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire bivarié à variation régulière dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. On dit que ce vecteur présente une dépendance résiduelle extrême si ses composantes sont asymptotiquement indépendantes et s'il vérifie la condition (3.6).

L'appellation dépendance résiduelle extrême reflète la dépendance dans les parties résiduelles avant d'atteindre l'indépendance stricte à l'infini.

de Haan et Zhou n'ont considéré que les cas d'indépendance asymptotique avec association positive, c'est-à-dire les cas où $\frac{1}{2} < \eta < 1$. Ils considèrent que cela correspond au cas le plus intéressant dans la modélisation des données réelles. Par exemple dans le cas d'une distribution normale avec un coefficient de corrélation ρ , $\eta = \frac{1 + \rho}{2}$ donc $\eta < \frac{1}{2}$ correspond à une corrélation $\rho < 0$.

Puisque la fonction $Q(t)$ est à variation régulière d'ordre $\frac{-1}{\eta}$, la fonction $Q(t^\eta)$ est à variation régulière d'ordre -1 et par suite la condition (3.6) est équivalente à :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}\left(\tilde{X}^{1/\eta} > tx, \tilde{Y}^{1/\eta} > ty\right)}{Q(t^\eta)} = \nu^* \{(u, v) : u > x, v > y\}$$

où ν^* est une mesure définie sur $(0, \infty)^2$ vérifiant

$$\nu^*(tB) = t^{-1}\nu^*(B) \quad t > 0$$

pour tout borélien B vérifiant $\inf_{(x,y) \in B} x \wedge y > 0$.

de Haan et Zhou ont décomposé ν^* en composantes radiale et angulaire pour définir une nouvelle mesure spectrale H^* finie sur $(0, 1)$ qui caractérise la dépendance entre les marginales. Le théorème suivant résume leur principal résultat :

Théorème 3.5.1. *de Haan et Zhou [2011]*

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire bivarié appartenant au domaine d'attraction d'une loi extrême. On suppose que (X, Y) présente une dépendance résiduelle extrême avec un coefficient $\frac{1}{2} < \eta < 1$. Alors il existe une mesure finie H^ sur $(0, 1)$ telle que :*

$$\nu^* \{(u, v) : u > x, v > y\} = \int_0^1 \frac{1}{x\omega} \wedge \frac{1}{y(1-\omega)} H^*(d\omega)$$

pour $x, y > 0$.

Inversement, pour toute mesure finie H^ sur $(0, 1)$, la partie intégrale de l'égalité précédente est finie. De plus, il existe un vecteur aléatoire (X, Y) appartenant au domaine d'attraction d'une loi extrême et présentant une dépendance résiduelle extrême.*

Exemple 3.5.2.

$$H^*(d\omega) = H_{(\alpha, \beta, c)}(d\omega) = c\omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}$$

où $0 < \alpha, \beta \leq +\infty$ et c une constante strictement positive.

- si $\alpha \neq \beta$ alors H^* est asymétrique ;
- les valeurs de α et β déterminent le degré de concentration de H^* à l'intérieur de $(0, 1)$;
- pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$ on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{x\omega} \wedge \frac{1}{y(1-\omega)} H_{(1/2, 1/2, 1/2)}(d\omega) = \frac{1}{\sqrt{xy}},$$

3.5 Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique

ce qui correspond à la dépendance résiduelle extrême d'une distribution bivariée normale.

Les apports de cette approche par rapport à la variation régulière cachée est d'une part la donnée d'une condition mathématique explicite justifiant l'ordre de la variation régulière que doit avoir la fonction de survie bivariée pour identifier les cas où l'on est capable de capturer les résidus de dépendance lorsque la loi limite des maxima normalisés basée sur la première condition de convergence est dégénérée. D'autre part d'un point de vue statistique, la réciproque du théorème 3.5.1 constitue un outil important pour le développement de modèles paramétriques pour les queues de distributions au travers des estimations des paramètres associés à la mesure H^* (c , α et β dans le cas de l'exemple ci-dessus). D'ailleurs dans la même optique nous généralisons dans le quatrième chapitre un théorème de Ramos et Ledford (Ramos and Ledford, 2009).

3.5.3 Modèle paramétrique de Ramos et Ledford (2009)

Modèle de queue

Partant d'une reformulation de la fonction de survie jointe définie dans le modèle de Ledford and Tawn (1997), Ramos and Ledford (2009) introduisent un modèle paramétrique pour les queues de distributions. Ce nouveau modèle permet de gérer les cas de dépendance et d'indépendance asymptotiques. Soit (Z_1, Z_2) un vecteur aléatoire de marges Fréchet unitaire et de fonction de survie jointe :

$$\bar{F}(x, y) = \mathbb{P}(Z_1 > x, Z_2 > y) = \mathcal{L}(x, y)(xy)^{-\frac{1}{2\eta}}, \quad \eta \in (0, 1],$$

où \mathcal{L} est une fonction bivariée à variation lente. En introduisant un vecteur bivarié (S, T) défini par $(S, T) = \lim_{u \rightarrow \infty} \{(Z_1/u, Z_2/u) \mid (Z_1 > u, Z_2 > u)\}$, Ramos et Ledford factorisent la mesure μ_{WR} (Resnick, 2002) associée au vecteur (R, W) , où $R = S + T$ et $W = S/R$, de la façon suivante : $(dr, dw) = r^{-(1+1/\eta)} dr dH_\eta(\omega)$ où H_η est une mesure définie sur $(0, 1)$. Pour un seuil élevé u et pour tout $(s, t) \in [1, \infty)^2$,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{S,T}(s, t) &= P(S > s, T > t) \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_1 > us, Z_2 > ut \mid Z_1 > u, Z_2 > u) = \frac{g_*(s/(s+t))}{(st)^{1/2\eta}}. \end{aligned}$$

En transformant en coordonnées pseudo-polaires, l'équation précédente donne pour $\omega \in (0, 1)$:

$$\eta^{-1} g_*(\omega) = \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right)^{1/2\eta} \int_0^\omega z^{1/\eta} dH_\eta(z) + \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right)^{1/2\eta} \int_\omega^1 (1-z)^{1/\eta} dH_\eta(z).$$

Comme $\bar{F}_{S,T}(1, 1) = g_*(\frac{1}{2}) = 1$, H_η doit satisfaire la condition de normalisation suivante :

$$\eta^{-1} = \int_0^{1/2} z^{1/\eta} dH_\eta(z) + \int_{1/2}^1 (1-z)^{1/\eta} dH_\eta(z). \quad (3.7)$$

La mesure H_η est analogue à la mesure classique de la théorie des extrêmes multivariée H . Les deux mesures H_η et H sont liées : si (Z_1, Z_2) est max-stable, $\eta = 1$ et $dH(\omega) = \left(2 - \int_0^1 \max(\omega, 1 - \omega)\right) dH_1(\omega) = \theta dH_1(\omega)$, où θ désigne le coefficient extrémal de (Z_1, Z_2) .

En utilisant la modélisation suivante

$$\bar{F}_{Z_1, Z_2}(x, y) = pu^{\frac{1}{\eta}} g_*(x/(x+y))(xy)^{-\frac{1}{2\eta}}, \quad (x, y) \in (u, \infty)^2, \quad (3.8)$$

où $p = \mathbb{P}(Z_1 > u, Z_2 > u)$, Ramos et Ledford (2009) ont défini des modèles semi-paramétriques à travers H_η pour la fonction de survie. Chaque choix d'une fonction g_* dans (3.8) fournit un modèle paramétrique de la fonction de survie. En se basant sur une modification du modèle logistique, Ramos and Ledford (2009) ont défini le modèle η -asymétrique logistique.

Pour un seuil élevé u et pour tout $(x, y) \in [u, \infty)^2$, la fonction de survie de ce modèle est définie par:

$$\bar{F}_{X,Y}(x, y) = \frac{pu^{1/\eta}}{N_\rho} \left[(\rho x)^{-1/\eta} + \left(\frac{y}{\rho}\right)^{-1/\eta} - \left\{ (\rho x)^{-1/\delta} + \left(\frac{y}{\rho}\right)^{-1/\delta} \right\}^{\delta/\eta} \right] \quad (3.9)$$

avec $\rho > 0$, $\delta > 0$ tels que $\delta \neq 1$ et $N_\rho = \rho^{-1/\eta} + \rho^{1/\eta} - (\rho^{-1/\delta} + \rho^{1/\delta})^{\delta/\eta}$.

Partant d'une nouvelle représentation de la fonction de survie, nous généralisons au chapitre 5, la modélisation (3.9) où le coefficient de décroissance de queue η sera remplacé par une fonction bivariée introduite par Wadsworth and Tawn (2013).

3.5.4 Modèle de maxima de Ramos et Ledford (2011)

Ramos and Ledford (2011) ont considéré le même processus ponctuel que celui introduit par Ledford and Tawn (1997). Cela leur a permis de retrouver leurs résultats de 2009 sur la mesure H_η puis, grâce à cette nouvelle mesure, de définir une loi de maxima sur le cône $(0, \infty)^2$ en suivant l'approche de de Haan (1984). Leur démarche est la suivante :

Soit $R_\varepsilon = \{(x, y) / x > \varepsilon, y > \varepsilon\}$ et $R_\varepsilon(x, y) = R_\varepsilon \setminus \{(\varepsilon, x) \times (\varepsilon, y)\}$. Soit (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq n$, des copies i.i.d d'un vecteur aléatoire (X, Y) avec des marges Fréchet unitaire et de fonction de répartition F . On désigne par $M_{X,n,\varepsilon}$ et $M_{Y,n,\varepsilon}$ les composantes de maxima des points $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ dans la région du plan R_ε .

3.5 Quelques modèles pour l'indépendance asymptotique

Ainsi pour tout $x > \varepsilon$, $y > \varepsilon$ et b_n vérifiant $n\bar{F}(b_n, b_n) = 1$ on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\frac{M_{X,n,\varepsilon b_n}}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n,\varepsilon b_n}}{b_n} \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\{\text{aucun } (X_i, Y_i) \text{ ne soit dans } R_{\varepsilon b_n}(xb_n, yb_n)\} \\
&= \mathbb{P}\{\text{tout } (X_i, Y_i) \text{ soit à l'extérieur de } R_{\varepsilon b_n}(xb_n, yb_n)\} \\
&= \{1 - \bar{F}(xb_n, \varepsilon b_n) - \bar{F}(\varepsilon b_n, yb_n) + \bar{F}(xb_n, yb_n)\}^n \\
&= \left[1 - \frac{1}{n} \left\{ \frac{\bar{F}(xb_n, \varepsilon b_n)}{\bar{F}(b_n, b_n)} + \frac{\bar{F}(\varepsilon b_n, yb_n)}{\bar{F}(b_n, b_n)} - \frac{\bar{F}(xb_n, yb_n)}{\bar{F}(b_n, b_n)} \right\}\right]^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{X,n,\varepsilon b_n}}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n,\varepsilon b_n}}{b_n} \leq y\right) = G_\eta(x, y)$$

avec

$$G_\eta(x, y) = \exp(-V_\eta(x, y))$$

où

$$V_\eta(x, y) = \eta \int_0^1 \max\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right)^{1/\eta} dH_\eta(\omega).$$

F-madogramme lié au modèle de Ramos et Ledford

Le F-madogramme, présenté en section (2.4.2), est utilisé pour estimer le coefficient extrémal. Récemment Guillou et al. (2012) ont adapté cette notion au modèle de Ramos and Ledford (2009). Ce F-madogramme est une distance qui permet de mesurer la dépendance entre les extrêmes dans une situation proche de l'indépendance asymptotique. Désignons par (M_X^*, M_Y^*) le vecteur bivarié lié à la distribution $G_\eta(x, y)$ i.e. $\mathbb{P}(M_X^* \leq x, M_Y^* \leq y) = \exp(-V_\eta(x, y))$ avec les distributions marginales $F_X^*(x) := \mathbb{P}(M_X^* \leq x) = \exp(-\sigma_X x^{\frac{-1}{\eta}})$ et $F_Y^*(y) := \mathbb{P}(M_Y^* \leq y) = \exp(-\sigma_Y y^{\frac{-1}{\eta}})$ avec $\sigma_X = V_\eta(1, \infty)$ et $\sigma_Y = V_\eta(\infty, 1)$.

Le F-madogramme de (M_X^*, M_Y^*) est défini par

$$\nu_\eta = \frac{1}{2} \mathbb{E} | F_X^*(M_X^*) - F_Y^*(M_Y^*) |.$$

Le F-madogramme est lié à $\theta_\eta = V_\eta(\sigma_X^\eta, \sigma_Y^\eta)$: l'analogue du coefficient extrémal classique par la relation suivante

$$\theta_\eta = \frac{1 + 2\nu_\eta}{1 - 2\nu_\eta}.$$

Par conséquent quand la distance ν_η croît, le coefficient θ_η croît aussi et si $\nu_\eta = 0$ alors $\theta_\eta = 1$.

Si M_X^* et M_Y^* sont indépendants alors $F_X^*(M_X^*)$ et $F_Y^*(M_Y^*)$ sont deux variables indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$. Par conséquent $\nu_\eta = \frac{1}{6}$ et $\theta_\eta = 2$.

3.6 Modèle de Wadsworth et Tawn (2013)

Dans toute cette section (X_P, Y_P) désigne un vecteur bivarié de marge Paréto, i.e. $\mathbb{P}(X_P > x) = \mathbb{P}(Y_P > x) = \frac{1}{x}$, $x > 1$, et $(X_E, Y_E) = (\log(X_P), \log(Y_P))$ le vecteur bivarié obtenu par passage au marge exponentielle. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(X_P > x, Y_P > y) = \mathbb{P}(X_E > \log x, Y_E > \log y), \quad (x, y) \in [1, \infty)^2.$$

Wadsworth et Tawn (2013) ont introduit le modèle de queue de distribution suivant : pour (X_P, Y_P) un vecteur bivarié avec des marginales Pareto standard

$$\mathbb{P}(X_P > n^\beta, Y_P > n^\gamma) = n^{-\kappa(\beta, \gamma)} L(n; \beta, \gamma) \quad (3.10)$$

où L est une fonction UVL de variable n , et $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La fonction strictement positive $\kappa(\beta, \gamma)$ détermine la vitesse de décroissance de la fonction de survie et permet de contrôler la dépendance entre les queues des marginales. Les fonctions κ et L vérifient certaines propriétés (voir Wadsworth and Tawn (2013) pour plus de détails). En particulier κ est homogène d'ordre 1 ; $\kappa(\beta, \gamma) = (\beta + \gamma)\kappa(\alpha, 1 - \alpha)$ avec $\alpha = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$ et il suffit donc de considérer le modèle avec la restriction $\kappa(\alpha, 1 - \alpha)$. En posant $\alpha = 1/2$, $\kappa(1, 1) = 2\kappa(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\eta}$ on retrouve le coefficient η du modèle de Ledford and Tawn (1996).

Proposition (Wadsworth and Tawn, 2013)

Soit (X_P, Y_P) un vecteur bivarié asymptotiquement dépendant, i.e. $\chi > 0$ avec $\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_P > n \mid Y_P > n)$. Alors $\kappa(\beta, \gamma) = \max(\beta, \gamma)$.

Une conséquence immédiate découle de la contraposée de la proposition ci-dessus : Si $\kappa(\beta, \gamma) \neq \max(\beta, \gamma)$ alors (X_P, Y_P) est vecteur bivarié asymptotiquement indépendant.

Ce résultat peut être très utile dans la pratique, lorsqu'on s'intéresse à des données réelles sous le modèle (3.10). En effet, il peut constituer la base d'un outil de détection des cas de l'indépendance asymptotique par simple comparaison de l'estimateur de κ à $\max(\beta, \gamma)$ (ce résultat sera d'intérêt pour l'identification de quelques distributions usuelles à un nouveau modèle de queue introduit au chapitre 4).

En supposons que κ est différentiable et la fonction L vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n; \alpha + \log x / \log n, 1 - \alpha + \log y / \log n)}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)} = 1 \quad (3.11)$$

et

$$L(n^h; \beta, \gamma) = L(n; h\beta, h\gamma) \quad h > 0. \quad (3.12)$$

Wadsworth et Tawn introduisent le modèle suivant pour $x, y \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y) = n^{-\lambda(\alpha)} x^{-\kappa_1(\alpha)} y^{-\kappa_2(\alpha)} L\left(n; \alpha + \frac{\log x}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y}{\log n}\right) \quad (3.13)$$

où $\{\kappa_1(\alpha), \kappa_2(\alpha)\} = \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \gamma}, \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \right\} |_{(\alpha, 1-\alpha)}$.

En particulier, en utilisant (3.12) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_P > nx, Y_P > ny) &= \mathbb{P}(X_P > (n^2)^{1/2}x, Y_P > (n^2)^{1/2}y) \\ &= (n^2)^{-\kappa(1/2, 1/2)} x^{-\kappa_1(1/2)} y^{-\kappa_2(1/2)} L\left(n^2; \frac{1}{2} + \frac{\log x}{2 \log n}, \frac{1}{2} + \frac{\log y}{2 \log n}\right) \\ &= n^{-1/\eta} x^{-\kappa_1(1/2)} y^{-\kappa_2(1/2)} L\left(n; 1 + \frac{\log x}{\log n}, 1 + \frac{\log y}{\log n}\right). \end{aligned}$$

En posant $c_1 = \kappa_1(1/2)$, $c_2 = \kappa_2(1/2)$ et $\mathcal{L}(nx, ny) \sim L(n; 1 + \log x / \log n, 1 + \log y / \log n)$, $n \rightarrow \infty$ on retrouve le modèle de Ledford and Tawn (1997).

L'approche inférentielle considérée par Wadsworth et Tawn se base sur le modèle (3.13). Cette approche consiste tout d'abord à estimer $\lambda(\alpha)$. En effet, en considérant la variation régulière de la variable univariée $Z_\alpha = \min\left(\frac{X_E}{\alpha}, \frac{Y_E}{1-\alpha}\right)$, Wadsworth and Tawn (2013) ont utilisé l'estimateur de Hill (Hill, 1975) pour estimer $\lambda(\alpha)$. D'après (3.11) et (3.13) on a :

$$\mathbb{P}(Z_\alpha > \log n + \log t \mid Z_\alpha > u_n) = \frac{L(n, \alpha + \frac{\log t}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log t}{\log n})}{L(n, \alpha, 1 - \alpha)} t^{-\lambda(\alpha)} \rightarrow t^{-\lambda(\alpha)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Ainsi $\hat{\lambda}(\alpha) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k+1} (\log z_{(i)} - \log z_{(k+1)})\right)^{-1}$ où $z_{(1)}, \dots, z_{(k+1)}$ sont les $k+1$ statistiques d'ordre supérieur de Z_α .

L'estimation de $\lambda(\alpha)$ ainsi que les équations (3.13) et (3.14) permettent de déduire

$$\mathbb{P}\left\{X_E > \overbrace{\alpha(u_n + v)}^x, Y_E > \overbrace{(1-\alpha)(u_n + v)}^y}\right\} \approx e^{(-\hat{\lambda}(\alpha)/v)\hat{\mathbb{P}}}\{X_E > \alpha u_n, Y_E > (1-\alpha)u_n\}. \quad (3.15)$$

où $u_n = \log n$ et $\lambda(\alpha) = \kappa(\alpha, 1-\alpha)$ avec $y = \frac{\alpha}{1-\alpha}x$. Lorsque α décrit l'intervalle $(0, 1)$, le coefficient directeur $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ décrit $(0, \infty)$, donc l'équation (3.15) offre la possibilité d'extrapoler selon toute direction du premier quadrant positif suivant des rayons émanant de l'origine (voir figure 3.2). Cette méthode est plus avantageuse que les méthodes d'extrapolations classiques associées aux modèles de queue de Ledford et Tawn (Ledford and Tawn, 1997) où l'extrapolation ne se fait que suivant des rayons parallèles à la diagonale (voir figure 3.2). La question qui se pose est alors la suivante : peut-on améliorer la méthode d'extrapolation introduite par Wadsworth and Tawn (2013) ? En d'autres termes, existe-t-il d'autres directions ou de conditions moins restrictives à explorer ? Nous donnerons une première réponse à cette question dans le chapitre suivant.

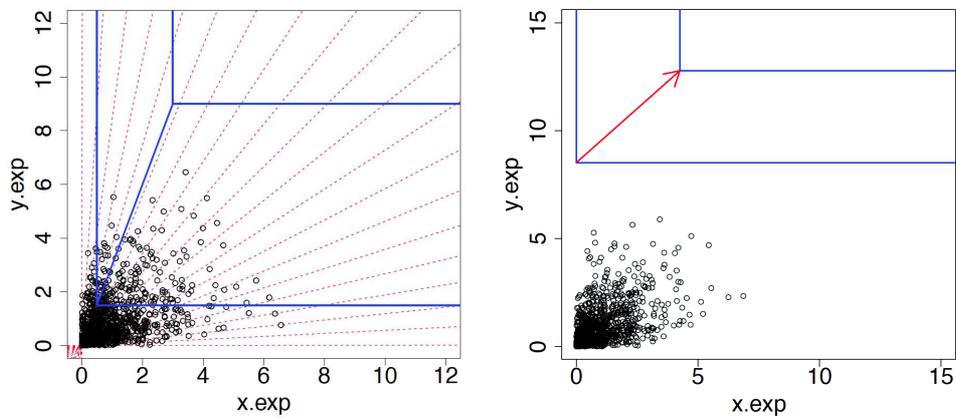


Fig 3.2: À gauche : directions d'extrapolation considérées par Wadsworth et Tawn (2013) ; à droite : illustration de la méthode d'extrapolation de Ledford et Tawn (1997), suivant des directions parallèles à la diagonale.

Chapitre 4

Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées

4.1 Introduction

Les méthodes d'extrapolation classiques appliquées dans le cadre max-stable et même dans les nouveaux modèles qui se focalisent directement sur les queues de distributions comme celui de Ledford et Tawn (1997) se font suivant des rayons parallèles à la diagonale. En effet pour $(X_E, Y_E) = (\log X_P, \log Y_P)$ un vecteur aléatoire avec des marges exponentielles, la méthode d'inférence statistique classique est basée sur les deux représentations équivalentes suivantes quand $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{P}\{(X_P, Y_P) \in tnB\} \sim t^{-1/\eta} \mathbb{P}\{(X_P, Y_P) \in nB\}$$

$$\mathbb{P}\{(X_E, Y_E) \in t + n + A\} \sim \exp(-t/\eta) \mathbb{P}\{(X_E, Y_E) \in A\}$$

pour les boréliens $B \subset (1, \infty]^2$, $A \subset (-\infty, \infty]^2$ et $t \geq 1$. Le paramètre de décroissance de queue η peut être estimé suivant plusieurs méthodes (Voir Beirlant et al. 2004, Chapter 9). Les travaux de Wadsworth and Tawn (2013) montrent d'une part que cette stratégie d'extrapolation est peu opérante quand on veut s'intéresser aux régions décalées vers l'un des deux axes du premier quadrant positif, et apportent d'autre part une solution partielle à cette défaillance. En effet comme cela a été précisé dans le dernier paragraphe du chapitre précédent, la condition (3.11) imposée sur la fonction à variation lente univariée L , est une condition similaire à la ray-indépendance définie par Ledford et Tawn (1997). En conséquence, le modèle de queue de distributions bivariées (3.13) émanant de (3.11) limite l'étude aux distributions ray-indépendantes seulement.

Dans ce chapitre, nous étendons le modèle de Wadsworth et Tawn (3.13) aux distributions ray-dépendantes.

Notre approche exploite une légère modification de (3.13) qui nous permettra par la suite de remplacer (3.11) par une hypothèse moins restrictive. Grâce à cette nouvelle modélisation nous fournissons des stratégies d'extrapolation non classiques pour un spectre plus large de distributions.

4.1.1 Exemples pour lesquels la condition de Wadsworth et Tawn n'est pas valide

Dans cette section on présente deux exemples de distributions pour lesquelles la condition de Wadsworth et Tawn (3.11) n'est pas satisfaite. Pour chaque distribution on identifiera le développement asymptotique de la fonction de survie jointe avec le modèle initial de Wadsworth et Tawn (2013) pour trouver l'expression de $L(n, \beta, \gamma)$ et par suite celle de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n; \beta + \frac{\log x}{\log n}, \gamma + \frac{\log y}{\log n})}{L(n; \beta, \gamma)}$.

Exemple 4.1.1. *Loi de queue inférieure de Clayton (Clayton, 1978).*

La distribution de la loi inférieure de Clayton en marges exponentielles s'écrit :

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + (e^{x/m} + e^{y/m} - 1)^{-m}, \quad m > 0. \quad (4.1)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\beta = \max(\beta, \gamma)$. En utilisant (3.10) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_P > n^\beta, X_P > n^\gamma) &= \mathbb{P}(X_E > \beta \log n, X_E > \gamma \log n) \\ &= \left(e^{\frac{\beta \log n}{m}} + e^{\frac{\gamma \log n}{m}} - 1 \right)^{-m} \\ &= n^{-\beta} \left(1 + n^{\frac{\gamma-\beta}{m}} - n^{\frac{-\beta}{m}} \right)^{-m} \\ &= L(n; \beta; \gamma) n^{-\kappa(\beta, \gamma)}, \end{aligned}$$

avec

$$L(n; \beta, \gamma) = \left(1 + n^{\frac{\gamma-\beta}{m}} - n^{\frac{-\beta}{m}} \right)^{-m}.$$

D'une façon plus générale, on obtient

$$L(n; \beta, \gamma) = \left(n^{\frac{\beta - \max(\beta, \gamma)}{m}} + n^{\frac{\gamma - \max(\beta, \gamma)}{m}} - n^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{m}} \right)^{-m}.$$

Par suite, en notant $\beta_x = \beta + \frac{\log x}{\log n}$ et $\gamma_y = \gamma + \frac{\log y}{\log n}$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L\left(n; \beta + \frac{\log x}{\log n}, \gamma + \frac{\log y}{\log n}\right)}{L(n; \beta, \gamma)} = \begin{cases} \left(\frac{1+(yx^{-1})^{1/m}}{2} \right)^{-m} \mathbf{1}_{\{x \geq y\}} + \left(\frac{1+(xy^{-1})^{1/m}}{2} \right)^{-m} \mathbf{1}_{\{x < y\}} & \text{si } \beta = \gamma, \\ 1 & \text{si } (\beta - \gamma)(\beta_x - \gamma_y) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Le deuxième exemple que nous considérons est la loi de queue d'une distribution bivariée extrême et plus précisément celle du modèle mixte (Tawn, 1988) définie par la fonction de dépendance $V(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{\theta}{x+y}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

4.1 Introduction

Exemple 4.1.2. *Loi de queue supérieure d'une distribution bivariée extrême du modèle mixte.*

La distribution correspondante en marges exponentielles s'écrit

$$F(x, y) = \exp \left\{ -V \left[\frac{-1}{\log(1 - e^{-x})}, \frac{-1}{\log(1 - e^{-y})} \right] \right\}. \quad (4.3)$$

En excluant le cas de l'indépendance exacte, la dépendance asymptotique de la distribution permet de conclure que $\kappa(\beta, \gamma) = \max(\beta, \gamma)$. Par conséquent un développement asymptotique de la fonction de survie jointe donne :

$$L(n; \beta, \gamma) = n^{-\beta + \max(\beta, \gamma)} + n^{-\gamma + \max(\beta, \gamma)} - n^{\max(\beta, \gamma)} \left(1 - \exp \left\{ -V \left[\frac{-1}{\log(1 - n^{-\beta})}, \frac{-1}{\log(1 - n^{-\gamma})} \right] \right\} \right).$$

En utilisant les approximations $\log(1 + x) \simeq x$, $\exp(x) \simeq 1 + x$ au voisinage de 0, l'homogénéité d'ordre -1 de la fonction de dépendance V et la propriété $V(\infty, 1) = V(1, \infty) = 1$, on en déduit que :

$$L(n; \beta, \gamma) \sim n^{-\beta + \max(\beta, \gamma)} + n^{-\gamma + \max(\beta, \gamma)} - V \{ n^{\beta - \max(\beta, \gamma)}, n^{\gamma - \max(\beta, \gamma)} \}$$

où la notation $h_1 \sim h_2$ signifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_1(n)}{h_2(n)} = 1$.

D'où

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L \left(n; \beta + \frac{\log x}{\log n}, \gamma + \frac{\log y}{\log n} \right)}{L(n; \beta, \gamma)} \\ &= \begin{cases} \frac{1 + xy^{-1} - xV(x, y)}{2 - V(1, 1)} \mathbf{1}_{\{x > y\}} + \frac{1 + x^{-1}y - yV(x, y)}{2 - V(1, 1)} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} & \text{si } \beta = \gamma, \\ 1 & \text{si } (\beta - \gamma)(\beta_x - \gamma_y) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ainsi les deux distributions présentées dans les deux exemples ci-dessus sont ray-dépendantes et sont donc des exemples pour lesquels la condition (3.11) n'est pas valide.

4.1.2 Modification de la condition de Wadsworth et Tawn (2013)

Dans ce paragraphe, nous commençons par la reprise plus détaillée d'un raisonnement de la section 3 du papier de Wadsworth et Tawn (Wadsworth and Tawn, 2013) permettant d'introduire un modèle de queue de distribution bivariée à partir de leur modèle de base. Pour $\alpha \in (0, 1)$ et $(x, y) \in [1, \infty)^2$, notons

$$\mathbb{P}^* = \mathbb{P} (X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y \mid X_P > n^\alpha, Y_P > n^{1-\alpha})$$

En utilisant le modèle de départ (3.10) de Wasworth et Tawn (2013) on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^* &= \frac{\mathbb{P}\left(X_P > n^{\alpha + \frac{\log x}{\log n}}, Y_P > n^{1-\alpha + \frac{\log y}{\log n}}\right)}{\mathbb{P}(X_P > n^\alpha, Y_P > n^{1-\alpha})} \\
 &= \frac{L\left(n; \alpha + \frac{\log x}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y}{\log n}\right)}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)} n^{\kappa(\alpha, 1-\alpha) - \kappa\left(\alpha + \frac{\log x}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y}{\log n}\right)} \\
 &= \frac{L\left(n; \alpha + \frac{\log x}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y}{\log n}\right)}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)} \exp\left[(\log n) \left\{ \kappa(\alpha, 1 - \alpha) - \kappa\left(\alpha + \frac{\log x}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y}{\log n}\right) \right\}\right]
 \end{aligned}$$

Soit h_1 et h_2 deux réels positifs proches de 0. En supposant que κ est différentiable en $(\alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$, le développement de Taylor de premier ordre de la fonction κ au point $(\alpha, 1 - \alpha)$ s'écrit :

$$\kappa(\alpha + h_1, 1 - \alpha + h_2) - \kappa(\alpha, 1 - \alpha) = \nabla\kappa(\alpha, 1 - \alpha)(h_1, h_2)^T + o\langle h_1, h_2 \rangle \quad (4.5)$$

où $\nabla\kappa(x, y) = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\kappa}{\partial x} \\ \frac{\partial\kappa}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2 . En utilisant (4.5) pour $(h_1, h_2) = \left(\frac{\log x}{\log n}, \frac{\log y}{\log n}\right)$ et (3.11) on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^* = x^{-\kappa_1} y^{-\kappa_2}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y)}{\mathbb{P}(X_P > n^\alpha, Y_P > n^{1-\alpha})} = x^{-\kappa_1(\alpha)} y^{-\kappa_2(\alpha)}.$$

D'autre part de (3.11) on peut déduire que pour tout $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n; \alpha + \log x^{\frac{1}{\alpha}} / \log n, 1 - \alpha + \log y^{\frac{1}{1-\alpha}} / \log n)}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)} = 1 \quad (4.6)$$

par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y)}{\mathbb{P}(X_P > n^\alpha, Y_P > n^{1-\alpha})} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n; \alpha + \frac{\log x^{\frac{1}{\alpha}}}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\log n})}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)}}_1 x^{-\kappa_1(\alpha)} y^{-\kappa_2(\alpha)}.$$

Par conséquent on peut déduire le modèle de queue de distribution bivariable suivant :

$$\mathbb{P}(X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y) = n^{-\lambda(\alpha)} x^{-\kappa_1(\alpha)} y^{-\kappa_2(\alpha)} L\left(n; \alpha + \frac{\log x^{\frac{1}{\alpha}}}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\log n}\right) \quad (4.7)$$

où $\lambda(\alpha) = \kappa(\alpha, 1 - \alpha)$ et $\{\kappa_1(\alpha), \kappa_2(\alpha)\} = \left\{ \frac{\partial\kappa}{\partial\gamma}, \frac{\partial\kappa}{\partial\beta} \right\} \Big|_{(\alpha, 1-\alpha)} = (\lambda(\alpha) + (1 - \alpha)\lambda'(\alpha), \lambda(\alpha) - \alpha\lambda'(\alpha))$.
Ce modèle apparaît comme une légère modification du modèle (3.13) qui permettra

4.1 Introduction

par la suite une extension de ce modèle sous une condition moins restrictive que (3.11).

On vérifie aisément que pour $\alpha \in (0, 1)$

$$\frac{\kappa_1(\alpha)}{1-\alpha} + \frac{\kappa_2(\alpha)}{\alpha} = \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_P > n^\alpha x, Y_P > n^{1-\alpha} y) \\ &= n^{-\lambda(\alpha)} L(n; \alpha + \frac{\log x \frac{1}{\alpha}}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y \frac{1}{1-\alpha}}{\log n}) x^{-(1-\alpha) \left\{ \frac{\kappa_1(\alpha)}{2(1-\alpha)} + \frac{\kappa_2(\alpha)}{2\alpha} + \frac{\kappa_1(\alpha)}{2(1-\alpha)} - \frac{\kappa_2(\alpha)}{2\alpha} \right\}} y^{-\alpha \left\{ \frac{\kappa_2(\alpha)}{2\alpha} + \frac{\kappa_1(\alpha)}{2(1-\alpha)} + \frac{\kappa_2(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\kappa_1(\alpha)}{2(1-\alpha)} \right\}} \\ &= \mathcal{L}(n^\alpha x, n^{1-\alpha} y) n^{-\lambda(\alpha)} x^{-\frac{\lambda(\alpha)}{2\alpha}} y^{\frac{-\lambda(\alpha)}{2(1-\alpha)}} \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}(n^\alpha x, n^{1-\alpha} y) = L \left(n; \alpha + \frac{\log x \frac{1}{\alpha}}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y \frac{1}{1-\alpha}}{\log n} \right) x^{\frac{(1-\alpha)\kappa_2(\alpha) - \alpha\kappa_1(\alpha)}{2\alpha}} y^{\frac{\alpha\kappa_1(\alpha) - (1-\alpha)\kappa_2(\alpha)}{2(1-\alpha)}}. \quad (4.8)$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(n^\alpha x, n^{1-\alpha} y)}{\mathcal{L}(n^\alpha, n^{1-\alpha})} = x^{\frac{(1-\alpha)\kappa_2(\alpha) - \alpha\kappa_1(\alpha)}{2\alpha}} y^{\frac{\alpha\kappa_1(\alpha) - (1-\alpha)\kappa_2(\alpha)}{2(1-\alpha)}} r_{(\alpha, 1-\alpha)}(x, y) \equiv g_{(\alpha, 1-\alpha)}(x, y)$$

$$\text{avec } r_{(\alpha, 1-\alpha)}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n; \alpha + \frac{\log x \frac{1}{\alpha}}{\log n}, 1 - \alpha + \frac{\log y \frac{1}{1-\alpha}}{\log n})}{L(n; \alpha, 1 - \alpha)}.$$

La condition (4.6) correspond à $r_{(\alpha, 1-\alpha)}(x, y) = 1$. Pour les deux exemples considérés dans le paragraphe précédent la fonction $g_{\alpha, 1-\alpha}$ vérifie

$$g_{(\alpha, 1-\alpha)}(c^\alpha x, c^{1-\alpha} y) = g_{(\alpha, 1-\alpha)}(x, y) \quad (4.9)$$

pour $\alpha \in (0, 1)$ et $c > 0$. Si l'on considère le modèle (4.7), sans la condition (4.6) alors $g_{(\alpha, 1-\alpha)}$ vérifie (4.9) si et seulement si $r_{(\alpha, 1-\alpha)}$ le satisfait aussi. Cette dernière condition est moins restrictive que (3.11). En effet la distribution de la loi de queue inférieure de Clayton et la loi de queue du modèle mixte sont deux exemples pour les quels (4.9) est satisfaite alors que (3.11) n'est vérifiée que pour $\alpha = 1/2$. En conséquence la condition (4.9) est plus générale que (4.6). En se basant sur la condition (4.9), nous introduisons dans le paragraphe suivant une nouvelle modélisation de la fonction de survie bivariée généralisant celle de Wadsworth and Tawn (2013).

4.2 Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées

Soit (X_P, Y_P) un vecteur bivarié avec des distributions marginales Pareto standard. On suppose que pour $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $(x, y) \in [1, \infty)^2$:

$$\mathbb{P}(X_P > n^\beta x, Y_P > n^\gamma y) = \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} \quad (4.10)$$

où κ est la fonction définie dans le modèle de Wadsworth-Tawn (2013) et \mathcal{L} est une fonction bivariée vérifiant

$$\lim_{\min(n^\beta, n^\gamma) \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y)}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y)}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)} = g_{(\beta, \gamma)}(x, y). \quad (4.11)$$

On suppose de plus que la fonction g vérifie la propriété d'homogénéité d'ordre zéro non standard suivante : pour tout $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$g_{(\beta, \gamma)}(c^\beta x, c^\gamma y) = g_{(\beta, \gamma)}(x, y). \quad (4.12)$$

Par conséquent :

$$g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, x^\gamma) = g_{(\beta, \gamma)}(1, 1) = 1, \quad \text{pour } 1 \leq x < \infty.$$

En utilisant l'approximation suivante $\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma) \cong L(n; \beta, \gamma)$, où L est la fonction à variation lente univariée définie dans le modèle de Wadsworth and Tawn (2013) et en posant $x = y = 1$ dans (4.10), on retrouve le modèle de Wadsworth et Tawn (3.10). De plus, pour $(\beta, \gamma) = (1, 1)$, puisque $\kappa(1, 1) = \frac{1}{\eta}$ on reconnaît aussi le modèle de Ramos et Ledford (3.8) avec $\hat{\mathcal{L}}(x, y) = n^{-1/\eta} \mathcal{L}(nx, ny)$.

Pour tout couple $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ fixé, (4.10) définit une nouvelle représentation de queue de distribution qui sera notre point de départ pour développer une estimation non-paramétrique de la fonction de survie. Soit (X_E, Y_E) un vecteur avec des marges exponentielles, (4.10) peut être utilisé pour estimer les probabilités que (X_E, Y_E) existe dans les intervalles de la forme $(\beta(\log n + \log x), \infty) \times (\gamma(\log n + \log y), \infty)$ avec $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ et $(x, y) \in (1, \infty)^2$. Pour justifier la légitimité de notre modèle nous montrons qu'il correspond à différentes distributions bien connues, certaines étant ray-dépendantes et d'autres ray-indépendantes.

4.2.1 Exemples

Dans ce paragraphe nous illustrons (4.10) pour certaines distributions classiques. Pour chaque distribution on explicite sa copule associée puis nous utilisons l'égalité $\mathbb{P}(X_P > n^\beta x, Y_P > n^\gamma y) = \mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y)$.

Par identification du développement asymptotique de la fonction de survie jointe avec la partie droite de (4.10) nous obtenons les expressions de $\kappa(\beta, \gamma)$ et $\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y)$.

4.2 Nouvelle représentation de queue de distributions bivariées

Exemple 4.2.1. *Distribution de Morgenstern (Morgenstern, 1956).*

La copule correspondante à cette distribution est :

$$C(u, v) = uv \{1 + m(1 - u)(1 - v)\}, \quad m \in [-1, 1].$$

La copule de survie associée à C est définie par :

$$\bar{C}(u, v) = \mathbb{P}(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

La fonction de survie avec des marges exponentielles s'écrit

$$\mathbb{P}(X_E > x, Y_E > y) = \bar{C}(1 - e^{-x}, 1 - e^{-y}) \quad x, y > 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) \\ &= n^{-\beta} x^{-1} + n^{-\gamma} y^{-1} - 1 + (1 - n^{-\beta} x^{-1})(1 - n^{-\gamma} y^{-1}) \{1 + mn^{-(\beta+\gamma)} x^{-1} y^{-1}\} \\ &= (1 + m)n^{-(\beta+\gamma)} x^{-1} y^{-1} - mn^{-(2\beta+\gamma)} x^{-2} y^{-1} - mn^{-(\beta+2\gamma)} x^{-1} y^{-2} + mn^{-2(\beta+\gamma)} x^{-2} y^{-2} \\ &\equiv n^{-(\beta+\gamma)} x^{-\frac{\beta+\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{\beta+\gamma}{2\gamma}} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) &= (1 + m)x^{\frac{\gamma-\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}} - mn^{-\beta} x^{\frac{\gamma-3\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}} - mn^{-\beta} x^{\frac{\gamma-\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-3\gamma}{2\gamma}} + mn^{-\beta} x^{\frac{\gamma-3\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-3\gamma}{2\gamma}} \\ &= (1 + m)x^{\frac{\gamma-\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}} - mn^{-\beta} x^{\frac{\gamma-\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}} \{x^{-1} + y^{-1} - x^{-1} y^{-1}\}. \end{aligned}$$

Par suite $g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = x^{\frac{\gamma-\beta}{2\beta}} y^{\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}}$, ce qui permet de vérifier (4.12) facilement.

Exemple 4.2.2. *Distribution bivariée extrême.*

La copule correspondante est donnée par :

$$C(u, v) = \exp[-V \{-1/\log u, -1/\log v\}],$$

où V est la fonction de dépendance de la distribution bivariée extrême considérée.

Un calcul direct conduit à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) &= n^{-\beta} x^{-1} + n^{-\gamma} y^{-1} - 1 \\ &+ \exp[-V \{-1/\log(1 - n^{-\beta - \log x / \log n}), -1/\log(1 - n^{-\gamma - \log y / \log n})\}]. \end{aligned}$$

Comme la distribution est asymptotiquement dépendante, $\kappa(\beta, \gamma) = \max(\beta, \gamma)$ et par suite,

$$\mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) = n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) &= n^{\kappa(\beta, \gamma) - \beta} x^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta} - 1} y^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} + n^{\kappa(\beta, \gamma) - \gamma} x^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma} - 1} \\ &+ \frac{-1 + \exp[-V \{-1/\log(1 - n^{-\beta - \frac{\log x}{\log n}}), -1/\log(1 - n^{-\gamma - \frac{\log y}{\log n}})\}]}{n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) &\sim n^{\kappa(\beta, \gamma) - \beta} x^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta} - 1} y^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} \\ &+ n^{\kappa(\beta, \gamma) - \gamma} \left\{ x^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma} - 1} - V(n^{\beta - \gamma}, x^{-1}y) x^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta} - 1} y^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \{1 - V(1, x^{-1}y)\} + x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \beta = \gamma, \\ x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} & \text{si } \beta > \gamma, \\ x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \beta < \gamma. \end{cases} \quad (4.13)$$

Par conséquent la condition (4.12) est vérifiée.

Exemple 4.2.3. Distribution bivariée inversée.

La copule associée est

$$C(u, v) = u + v - 1 + \exp \left[-V \left\{ \frac{-1}{\log(1-u)}, \frac{-1}{\log(1-v)} \right\} \right],$$

où V est la fonction de dépendance de la distribution bivariée considérée. On définit $V_1(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$ et $V_2(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) &= \\ &= \exp \left[-V \left\{ \frac{1}{(\log n)(\beta + \frac{\log x}{\log n})}, \frac{1}{(\log n)(\gamma + \frac{\log y}{\log n})} \right\} \right] \sim n^{-V(\frac{1}{\beta} - \frac{\log x}{\beta^2 \log n}, \frac{1}{\gamma} - \frac{\log y}{\gamma^2 \log n})} \\ &\sim n^{-V(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) + \frac{\log x}{\beta^2 \log n} V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) + \frac{\log y}{\gamma^2 \log n} V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} \sim n^{-V(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} x^{\frac{V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\beta^2}} y^{\frac{V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\gamma^2}} \\ &\sim n^{-V(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})} x^{-\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\beta}} y^{-\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\gamma}} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) = x^{\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\beta} + \frac{V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\beta^2}} y^{\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\gamma} + \frac{V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\gamma^2}}.$$

Par conséquent,

$$g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = x^{\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\beta} + \frac{V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\beta^2}} y^{\frac{v(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\gamma} + \frac{V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\gamma^2}}.$$

La fonction de dépendance s'écrit $V(x, y) = \int_0^{\frac{x}{x+y}} (1-s)y^{-1}dH(s) + \int_{\frac{x}{x+y}}^1 sx^{-1}dH(s)$

où H est la mesure pseudo-radiale associée à V . On vérifie aisément que $V_1(x, y) = \frac{-1}{x^2} \int_{\frac{x}{x+y}}^1 sdH(s)$ et $V_2(x, y) = \frac{-1}{y^2} \int_0^{\frac{x}{x+y}} (1-s)dH(s)$.

Par suite $- \{xV_1(x, y) + yV_2(x, y)\} = \frac{1}{y} \int_0^{\frac{x}{x+y}} (1-s)dH(s) + \frac{1}{x} \int_{\frac{x}{x+y}}^1 sdH(s) = V(x, y)$.

Par conséquent, $V\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) = - \left\{ \frac{V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\beta} + \frac{V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{\gamma} \right\}$. D'où

$$g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = x^{\frac{\gamma V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) - \beta V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\beta^2 \gamma}} y^{\frac{\beta V_2(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) - \gamma V_1(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})}{2\beta \gamma^2}}.$$

et la vérification de la condition (4.12) est immédiate.

Exemple 4.2.4. *Distribution bivariée normale.*

$$C(u, v) = \Phi_2(\Phi_1(u), \Phi_1(v); \rho), \quad \rho \in [-1, 1],$$

avec Φ_1 la distribution normale standard et Φ_2 la distribution jointe associée avec coefficient de corrélation ρ . En suivant Wadsworth et Tawn (Wadsworth and Tawn, 2013), nous considérons un développement asymptotique de la fonction de survie pour obtenir la fonction κ et le terme du premier ordre de \mathcal{L} .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) = \\ & \mathbb{P}\left\{X_N > \Phi_1^{-1}\left(1 - n^{-(\beta + \frac{\log x}{\log n})}\right), Y_N > \Phi_1^{-1}\left(1 - n^{-(\gamma + \frac{\log y}{\log n})}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Comme n tend vers l'infini, le rapport de première dimension de Mills (Feller, 1968) donne $\Phi_1^{-1}(1 - n^{-(\beta + \frac{\log x}{\log n})}) \sim (2\beta \log n + 2 \log x)^{1/2}$ et $\Phi_1^{-1}(1 - n^{-(\gamma + \frac{\log y}{\log n})}) \sim (2\gamma \log n + 2 \log y)^{1/2}$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) \sim \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}}.$$

En posant $\beta_1 = \beta + \frac{\log x}{\log n}$ et $\gamma_1 = \gamma + \frac{\log y}{\log n}$ on a :

$$\kappa(\beta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\beta + \gamma - 2\rho(\beta\gamma)^{1/2}}{1 - \rho^2} & \text{si } \rho^2 < \min\left\{\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\beta}\right\} \text{ ou } \{\rho < 0 \text{ et } \min\{\beta, \gamma\} > 0\} \\ \max\{\beta, \gamma\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) = \begin{cases} x^{\frac{\gamma - \beta}{2(1 - \rho^2)\beta}} y^{\frac{\beta - \gamma}{2(1 - \rho^2)\gamma}} n^{\frac{2\rho(\sqrt{\beta x \gamma y} - \sqrt{\beta\gamma})}{(1 - \rho^2)}} f(n, \beta_x, \gamma_y) & \text{si } \rho^2 < \min\left\{\frac{\beta_x}{\gamma_y}, \frac{\gamma_y}{\beta_x}\right\} \\ & \text{ou } \{\rho < 0 \text{ et } \min\{\beta_x, \gamma_y\} > 0\} \\ x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} \mathbf{1}_{\{\beta_x > \gamma_y\}} + x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{\beta_x < \gamma_y\}} & \text{si } \rho^2 > \frac{\gamma_y}{\beta_x} \text{ ou } \rho^2 > \frac{\beta_x}{\gamma_y} \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} \mathbf{1}_{\{\beta_x > \gamma_y\}} + \frac{1}{2} x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{\beta_x < \gamma_y\}} & \text{si } \rho^2 = \gamma_y/\beta_x \text{ ou } \rho^2 = \beta_x/\gamma_y \end{cases}$$

où $\beta_x = \beta + \frac{\log x}{\log n}$, $\gamma_y = \gamma + \frac{\log y}{\log n}$ et

$$f(n, \beta, \gamma) = (4\pi \log n) \frac{2\rho^2 - \rho\{(\beta/\gamma)^{1/2} + (\gamma/\beta)^{1/2}\}}{2(1 - \rho^2)} \frac{\beta^{\frac{1 - \rho(\gamma/\beta)^{1/2}}{2(1 - \rho^2)}} \gamma^{\frac{1 - \rho(\beta/\gamma)^{1/2}}{2(1 - \rho^2)}} (1 - \rho^2)^{3/2}}{(\beta^{1/2} - \rho\gamma^{1/2})(\gamma^{1/2} - \rho\beta^{1/2})}.$$

On en déduit donc l'expression de la fonction de dépendance

$$g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = \begin{cases} x^{\frac{\gamma - \beta}{2(1 - \rho^2)\beta}} y^{\frac{\beta - \gamma}{2(1 - \rho^2)\gamma}} & \text{si } \rho^2 < \min\left\{\frac{\beta_x}{\gamma_y}, \frac{\gamma_y}{\beta_x}\right\} \text{ ou } \{\rho < 0 \text{ et } \min\{\beta_x, \gamma_y\} > 0\} \\ x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} \mathbf{1}_{\{\beta_x > \gamma_y\}} + x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{\beta_x < \gamma_y\}} & \text{si } \rho^2 > \frac{\gamma_y}{\beta_x} \text{ ou } \rho^2 > \frac{\beta_x}{\gamma_y} \\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} \mathbf{1}_{\{\beta_x > \gamma_y\}} + \frac{1}{2} x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{\beta_x < \gamma_y\}} & \text{si } \rho^2 = \gamma_y/\beta_x \text{ ou } \rho^2 = \beta_x/\gamma_y. \end{cases}$$

La première partie de l'expression de κ correspond à l'indépendance asymptotique et la deuxième à la dépendance asymptotique. Dans chaque cas la condition (4.12) est satisfaite.

Exemple 4.2.5. *Loi de queue inférieure de la distribution de Clayton (Clayton, 1978).*

$$C(u, v) = u + v - 1 + \{(1 - u)^{-1/m} + (1 - v)^{-1/m} - 1\}^{-m}, \quad m > 0.$$

Le développement en marges exponentielles donne

$$\mathbb{P}(X_E > \beta \log n + \log x, Y_E > \gamma \log n + \log y) = n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}} \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y)$$

avec $\kappa(\beta, \gamma) = \max(\beta, \gamma)$ et $\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) = (A+B+C)^{-m}$ où $A = n^{\frac{\beta - \max(\beta, \gamma)}{m}} x^{\frac{2\beta - \max(\beta, \gamma)}{2m\beta}} y^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{2m\gamma}}$, $B = n^{\frac{\gamma - \max(\beta, \gamma)}{m}} y^{\frac{2\gamma - \max(\beta, \gamma)}{2m\gamma}} x^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{2m\beta}}$, $C = -n^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{m}} x^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{2m\beta}} y^{\frac{-\max(\beta, \gamma)}{2m\gamma}}$. Par suite

$$g_{(\beta, \gamma)}(x, y) = \begin{cases} \left(x^{\frac{-1}{2m}} y^{\frac{1}{2m}} + x^{\frac{1}{2m}} y^{\frac{-1}{2m}} \right)^{-m} & \text{si } \beta = \gamma, \\ x^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{\beta}{2\gamma}} \mathbf{1}_{\{\beta > \gamma\}} + x^{\frac{\gamma}{2\beta}} y^{\frac{-1}{2}} \mathbf{1}_{\{\beta < \gamma\}} & \text{si } \beta \neq \gamma. \end{cases}$$

La fonction $g_{(\beta, \gamma)}$ vérifie donc la condition (4.12).

4.3 Nouvelle mesure exponent

Partant du modèle bivarié (4.10) on se propose de définir une mesure exponent analogue à celle des distributions max-stables. Notre point de départ vient de la simple propriété suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_P > (nx)^\beta, Y_P > (ny)^\gamma)}{\mathbb{P}(X_P > n^\beta, Y_P > n^\gamma)} = g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} \quad (4.14)$$

avec $x, y \in [1, \infty)$, où $g_{(\beta, \gamma)}^1$ est définie par $g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) = g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, y^\gamma)$.

En utilisant (4.9), on vérifie que la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^1$ est homogène d'ordre 0. En effet, pour $c > 0$

$$\begin{aligned} g_{(\beta, \gamma)}^1(cx, cy) &= g_{(\beta, \gamma)}(c^\beta x^\beta, c^\gamma y^\gamma) \\ &= g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, y^\gamma) \\ &= g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y). \end{aligned}$$

Par suite

$$g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) = g_{(\beta, \gamma)}^{1,*} \left(\frac{x}{x+y} \right) \equiv g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}(\omega), \quad \omega = \frac{x}{x+y} \in (0, 1).$$

Pour tout $0 < t < \infty$, on définit la mesure $\Lambda_{(t, \kappa(\beta, \gamma))}(\cdot)$ sur $(0, \infty)^2$ par

$$\Lambda_{(t, \kappa(\beta, \gamma))}(B) = \frac{\mathbb{P} \left[(t^{-1}(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma}) \in B \right]}{\mathbb{P} \left[X_P^{1/\beta} > t, Y_P^{1/\gamma} > t \right]}$$

4.4 Inférence statistique

où B est un Borélien de $(1, \infty)^2$.

Pour $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$, la limite (4.14) prouve la convergence de $\Lambda_{(n, \kappa(\beta, \gamma))} \{(x, \infty) \times (y, \infty)\}$ quand $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire l'existence d'une mesure positive $\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)}$ sur $(0, \infty)^2$ telle que

$$\Lambda_{(t, \kappa(\beta, \gamma))} \xrightarrow{v} \Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \text{ dans } (0, \infty)^2 \quad (4.15)$$

où ' \xrightarrow{v} ' désigne la convergence vague. Cette mesure $\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)}$ est définie par

$$\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \{(x, \infty) \times (y, \infty)\} = g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) x^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} y^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} = g_{(\beta, \gamma)}^{1,*} \left(\frac{x}{x+y} \right) (xy)^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} \quad (4.16)$$

pour $(x, y) \in [1, \infty)^2$. Pour tout $0 < t < \infty$ suffisamment grand et pour tout borélien B de $(1, \infty)^2$, grâce à (4.15) on peut considérer l'approximation suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma}) \in tB \right] &\approx \mathbb{P} \left[(X_P^{1/\beta} > t, Y_P^{1/\gamma} > t) \right] \Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)}(B) \\ &\approx \mathbb{P} \left[(X_P^{1/\beta} > t, Y_P^{1/\gamma} > t) \right] g_{(\beta, \gamma)}^{1,*} \left(\frac{x}{x+y} \right) (xy)^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cette approximation forme la base des inférences statistiques appliquées dans le paragraphe suivant sur la queue du vecteur bivarié (X_E, Y_E) .

4.4 Inférence statistique

L'estimation de la fonction de survie du vecteur bivarié $(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma})$ sous le modèle (4.10) passe par l'estimation de la fonction κ et de la fonction $g_{\beta, \gamma}^{1,*}$. Dans la suite nous proposons une méthode d'estimation pour chacune des deux fonctions.

4.4.1 Estimation de la fonction κ

Pour estimer la fonction κ nous suivons la procédure de Wadsworth et Tawn (2013). Pour tout couple $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$, on définit la variable aléatoire univariée $T_{(\beta, \gamma)}$ par :

$$T_{(\beta, \gamma)} = \min \left(\frac{X_E}{\beta}, \frac{Y_E}{\gamma} \right).$$

À partir de (4.10), pour tout $(x, y) \in (1, \infty)^2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ X_P > (nx)^\beta, Y_P > (nx)^\gamma \} &= \mathbb{P} \{ T_{(\beta, \gamma)} > \log n + \log x \} \\ &= \mathcal{L} (n^\beta x^\beta, n^\gamma x^\gamma) (nx)^{-\kappa(\beta, \gamma)}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \{ T_{(\beta, \gamma)} > \log n + \log x \mid T_{(\beta, \gamma)} > \log n \} \\ &= \frac{\mathcal{L}(n^\beta x^\beta, n^\gamma x^\gamma)}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)} x^{-\kappa(\beta, \gamma)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, x^\gamma) x^{-\kappa(\beta, \gamma)} = x^{-\kappa(\beta, \gamma)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

D'après (4.18), la queue de la variable aléatoire $T_{(\beta,\gamma)}$ est une fonction à variation régulière d'indice $-\kappa(\beta, \gamma)$. Par conséquent la fonction κ peut être estimée comme l'indice de queue de $T_{(\beta,\gamma)}$ en utilisant l'estimateur de Hill (Hill, 1975). Plus précisément : $\hat{\kappa}(\beta, \gamma) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k+1} (t_{(i)} - t_{(k+1)}) \right)^{-1}$ où $t_{(1)}, \dots, t_{(k+1)}$ sont les $k+1$ statistiques d'ordre supérieur de $T_{(\beta,\gamma)}$.

4.4.2 Estimation de la fonction $g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}$

L'estimation de $g_{\beta,\gamma}^{1,*}$ permettra d'affiner l'estimation de la fonction à variation lente bivariée surtout dans les cas de ray-dépendance. Ci dessous nous suivons une méthode de Ledford et Tawn (Ledford and Tawn, 1997) pour estimer empiriquement la fonction $g_{\beta,\gamma}^{1,*}$.

On désigne par \bar{F} la fonction de survie du vecteur bivarié $(X_P^{\frac{1}{\beta}}, Y_P^{\frac{1}{\gamma}})$. Soit $\omega \in (0, 1/2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1-\omega}{\omega}n > n$ et on a :

$$\begin{aligned} \bar{F}(n, (1-\omega)n/\omega) &= \mathbb{P}(X_P > n^\beta, Y_P > (\frac{1-\omega}{\omega}n)^\gamma) \\ &\sim g_{\beta,\gamma}^1(1, \frac{1-\omega}{\omega}) (\frac{1-\omega}{\omega})^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \bar{F}(n, n) \\ &= g_{\beta,\gamma}^{1,*}(\omega) (\frac{1-\omega}{\omega})^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \bar{F}(n, n). \end{aligned}$$

donc pour n suffisamment grand $g_{\beta,\gamma}^{1,*}(\omega) \simeq \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \frac{\bar{F}(n, (1-\omega)n/\omega)}{\bar{F}(n, n)}$.

Un raisonnement analogue pour $\omega \in (1/2, 1)$ permet d'avoir une estimation de la fonction $g_{\beta,\gamma}^{1,*}$ pour tout $\omega \in (0, 1)$:

$$\widehat{g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}}(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^{\frac{\widehat{\kappa}(\beta,\gamma)}{2}} \frac{\widehat{F}(n, (1-\omega)n/\omega)}{\widehat{F}(n, n)} & \text{si } \omega \in (0, 1/2), \\ \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{\frac{\widehat{\kappa}(\beta,\gamma)}{2}} \frac{\widehat{F}(n\omega/(1-\omega), n)}{\widehat{F}(n, n)} & \text{si } \omega \in (1/2, 1) \end{cases}$$

où \widehat{F} est la fonction de survie empirique de $(X_P^{\frac{1}{\beta}}, Y_P^{\frac{1}{\gamma}})$. En conséquence, pour tout $(x, y) \in (1, \infty)^2$, l'estimation de la probabilité suivante

$$\mathbb{P}\{X_P > (nx)^\beta, Y_P > (ny)^\gamma\} = \mathbb{P}\{X_E > \beta(\log n + \log x), Y_E > \gamma(\log n + \log y)\}$$

est construite de la façon suivante :

$$\widehat{\mathbb{P}}\{X_E > \beta(u_n + v_1), Y_E > \gamma(u_n + v_2)\} = \widehat{g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}}(\omega) e^{-\frac{\widehat{\kappa}(\beta,\gamma)(v_1+v_2)}{2}} \widetilde{\mathbb{P}}\{X_E > \beta u_n, Y_E > \gamma u_n\} \quad (4.19)$$

où $u_n = \log n$, $v_1 = \log x$ et $v_2 = \log y$. La quantité $\widetilde{\mathbb{P}}$ représente la probabilité des dépassements empirique et $\widehat{\kappa}$ désigne la valeur estimée de $\kappa(\beta, \gamma)$. Si l'on pose $(\beta, \gamma) = (\alpha, 1 - \alpha)$ et $v_1 = v_2$ sous la supposition $g_{(\beta,\gamma)}^{1,*} \equiv 1$ on retrouve l'approche de Wadsworth and Tawn (2013).

4.5 Simulations

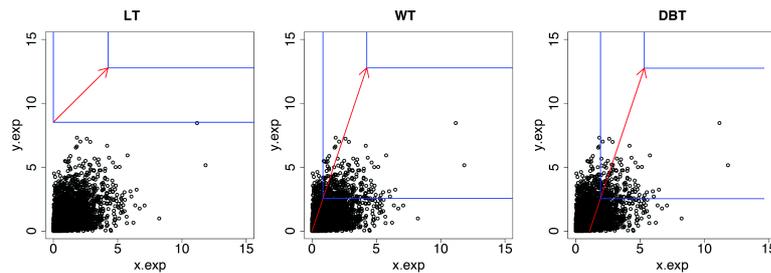


Fig 4.1: Illustration des trois stratégies d'extrapolation : LT (Ledford et Tawn, 1997), WT (Wadsworth et Tawn, 2013) et DBT (méthode en cours).

4.4.3 Une nouvelle stratégie d'extrapolation

En utilisant l'homogénéité d'ordre 1 de la fonction κ , on se contente de considérer dans (4.10), $(\beta, \gamma) = (\alpha_1, 1 - \alpha_1)$, $\alpha_1 \in (0, 1)$. En posant $z = (1 - \alpha_1)(u_n + v_2)$ et $a = v_1 - v_2$, l'équation (4.19) devient

$$\widehat{\mathbb{P}} \left\{ X_E > \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} z + \alpha_1 a, Y_E > z \right\} = g_{(\alpha_1, 1 - \alpha_1)}^{1,*}(\omega) e^{\frac{-\widehat{\kappa}(\alpha_1, 1 - \alpha_1)(v_1 + v_2)}{2}} \widetilde{\mathbb{P}} \{ X_E > \alpha_1 u_n, Y_E > (1 - \alpha_1) u_n \}. \quad (4.20)$$

Cette nouvelle équation permet d'estimer les probabilités que (X_E, Y_E) existe dans les intervalles de la forme $\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} z + \alpha_1 a, \infty \right) \times (z, \infty)$. D'un point de vue statistique, cette procédure définit une stratégie d'extrapolation qui permet d'estimer la probabilité de n'importe quel événement du premier quadrant positif en utilisant des événements plus centraux. Dans le cas où $a = 0$ on retrouve la méthode appliquée par Wadsworth and Tawn (2013). La figure (4.1) illustre trois stratégies différentes d'extrapolation. La première, notée LT pour Ledford and Tawn (1997), se fait suivant des directions parallèles à la diagonale. La seconde, notée WT pour Wadsworth and Tawn (2013), se fait suivant des directions linéaires de coefficients directeurs $1 - \alpha/\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. La troisième concerne la méthode en cours, notée DBT dans la suite. Les lignes d'extrapolation de cette dernière approche se font suivant des droites affines de coefficients directeurs $1 - \alpha_1/\alpha_1$, $\alpha_1 \in (0, 1)$. L'avantage de la stratégie WT par rapport à LT est montré dans Wadsworth and Tawn (2013) ; par conséquent on se contente dans la section suivante de comparer les deux stratégies WT et DBT au travers de quelques distributions classiques couvrant les cas de dépendance et d'indépendance asymptotiques, avec ray-dépendance ou ray-indépendance.

4.5 Simulations

Pour illustrer la performance et la flexibilité du modèle (4.10), on se propose dans un premier temps de montrer par simulations, l'existence de couples (α_1, a) qui donnent des directions d'extrapolation améliorant les résultats de Wadsworth et Tawn (2013) en terme d'erreur quadratique moyenne (en anglais Root Mean Squared Error- RMSE) et en terme de proportions des valeurs estimées dépassant la vraie valeur (en anglais Proportion of Estimates Exceeding the True Values-PEETV). Puis nous proposons, dans un second temps,

des méthodes empiriques exploitant les données afin de trouver des couples (α_1, a) permettant d'avoir des directions d'extrapolation améliorant les résultats de Wadsworth et Tawn. Plusieurs distributions couvrant un large spectre de dépendance, sont successivement considérées.

4.5.1 Existence d'une direction d'extrapolation meilleure que celle de WT

Dans ce paragraphe on détaille la méthode de simulation permettant de trouver des couples (α_1, a) donnant une direction d'extrapolation meilleure que celle de Wadsworth et Tawn (2013). Les données simulées englobent un large spectre de dépendance extrême.

Les distributions bivariées considérées sont les suivantes :

(a) la distribution bivariée normale avec une corrélation $\rho = 0.5$; (b) la distribution bivariée inverse max-stable avec une structure de dépendance logistique; (c) la loi de queue inférieure de Clayton avec paramètre $m = 1.4$; (d) la distribution bivariée normale avec une corrélation $\rho = -0.3$.

Pour permettre de comparer au mieux notre approche avec celle de Wadsworth et Tawn (2013), les paramètres des distributions (a) et (b) sont choisis d'une telle façon que $\eta = 0.75$, ce qui correspond à des cas d'indépendance asymptotique avec des fonctions à variation lente ray-indépendantes.

La distribution (c) correspond à la dépendance asymptotique ($\eta = 1$) avec une fonction à variation lente ray-dépendante. La dernière distribution (d) correspond à l'indépendance asymptotique ($\eta = 0.35$), avec une association négative.

Nous nous plaçons dans le même contexte que celui utilisé par Wadsworth et Tawn : pour chaque distribution considérée, nous avons généré 5000 points avec des marges exponentielles et nous avons gardé 10% des données à des fins d'estimation. Ce processus a été répété 500 fois.

On rappelle que pour évaluer la performance de leur procédure d'estimation dans le premier quadrant positif tout entier, Wadsworth et Tawn ont considéré des intervalles de la forme $y(\alpha/(1-\alpha), \infty) \times (y, \infty)$, en fixant $y = 1.5 \log 5000$ et en multipliant y par $\alpha/(1-\alpha)$ pour obtenir la valeur de l'abscisse x et ceci pour la séquence des valeurs du pseudo angle $\alpha = 0.5, 0.45, \dots, 0.05$. En particulier $\alpha = 1/2$ correspond à la stratégie d'extrapolation classique suivant des lignes parallèles à la diagonale (Ledford et Tawn (1997)).

Pour estimer les probabilités des intervalles considérés par Wadsworth et Tawn, on a utilisé (4.20).

Pour chaque valeur fixe de α , nous cherchons les paires possibles (α_1, a) correspondant à l'identification des intervalles issus de notre modèle avec ceux considérés par Wadsworth et Tawn. Cette identification permet d'obtenir l'égalité suivante :

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}y + \alpha_1 a = \frac{\alpha}{1-\alpha}y. \quad (4.21)$$

Pour chaque valeur $\alpha_1 \in \{0.5, 0.49, \dots, 0.06, 0.05\}$, nous déterminons la valeur correspondante de a à partir de (4.21). Le couple (α_1, a) retenu est celui correspondant à la valeur de α_1 qui minimise les RMSE. La figure (4.2) donne une illustration des différents rayons d'extrapolation dans le premier quadrant positif considérés dans les simulations. Nos ré-

4.5 Simulations

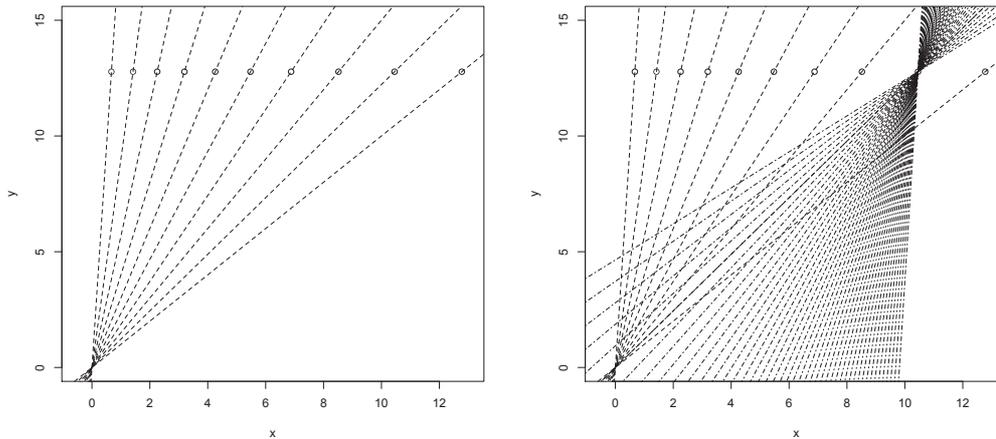


Fig 4.2: À gauche: les rayons d'extrapolation considérés par Wadsworth et Tawn lorsque $\alpha \in \{0.5, 0.45, \dots, 0.1, 0.05\}$; À droite : superposés à la figure de gauche sont présentés pour la valeur particulière de $\alpha = 0.45$, les nouveaux rayons d'extrapolation correspondant aux paires (α_1, a) , pour $\alpha_1 \in \{0.5, 0.49, \dots, 0.06, 0.05\}$.

sultats sont présentés dans les figures (4.3) et (4.4). Chaque figure présente deux courbes, celles des RMSE et des PEETV, toutes les deux en fonction des valeurs de α .

Les performances des deux approches dépendent étroitement de la qualité de l'estimation de κ . Dans les deux approches la fonction κ est estimée via l'estimateur de Hill. La vitesse de convergence vers 1 de $\frac{L(tn, \alpha, 1-\alpha)}{L(n, \alpha, 1-\alpha)}$ et de $\frac{\mathcal{L}((nt)^\beta, (nt)^\gamma)}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)}$ joue un rôle clé dans le biais de l'estimation. A titre d'exemple, comme déjà montré dans Wadsworth and Tawn (2013), le taux de convergence pour (3.11) est de l'ordre $O(1/\log(n))$ pour la distribution bivariée normale et ce biais est d'autant plus prononcé que les valeurs de α sont proches de 0.5.

Pour l'estimation des probabilités $\mathbb{P}(X_E > \frac{\alpha}{1-\alpha} 1.5 \log n, Y_E > 1.5 \log n)$, les courbes de PEEV montrent que le biais paraît plus petit sous notre modèle pour les différentes distributions. On note également que la fonction de RMSE présente une plus grande stabilité. En effet pour les quatre distributions, les valeurs de RMSE correspondant à notre approche sont toujours les plus petites et au pire égales. De plus, pour certaines distributions et certaines valeurs de α , la différence entre les deux valeurs de RMSE peut devenir très marquée.

Étant donné que la fonction κ est estimée de la même manière dans les deux modèles (3.13) et (4.10), notre approche profite de l'estimation de la fonction $g_{\beta, \gamma}^{1,*}$. En fait, sous (3.13), cette fonction est toujours considérée comme égale à 1, et cela peut augmenter le biais de l'estimation.

La figure 4.3 (a) présente les deux critères pour la distribution normale avec une corrélation de 0.5. Les résultats de notre modèle sont meilleurs, surtout pour $\alpha > 0.2$.

Pour la distribution bivariée inverse max-stable (b), la fonction à variation lente est exactement égale à 1. Dans ce cas les sources de biais sont réduites et comme le montre la

figure 4.3 (b), les deux approches donnent des résultats très similaires.

La loi de queue inférieure de Clayton (c) est une distribution ray-dépendante et par suite la condition (3.11) n'est pas vérifiée. A partir de la figure 4.4 (c) on remarque que le biais augmente remarquablement sous le modèle (3.13) surtout lorsque α se rapproche de 0.5. Cette augmentation peut être expliquée par la non-différentiabilité de la fonction κ en 0.5.

Pour la distribution bivariée normale avec une association négative (d), à l'exception du cas où $\alpha = 0.5$, notre approche est toujours meilleure (voir figure 4.4 (d)). Ces résultats viennent du fait que sous notre modèle, on peut extrapoler suivant des rayons non issus de l'origine.

Pour résumer, l'étude de simulation montre l'existence de couples (α_1, a) pour lesquels notre approche conduit à de meilleures estimations des queues de probabilité que celle de Wadsworth and Tawn (2013). En particulier, contrairement à l'approche de Wadsworth and Tawn (2013), les valeurs de RMSE attachées à notre approche varient légèrement autour de la valeur 0.5 lorsque α augmente et donc pour les différentes régions de l'extrapolation couvrant le premier quadrant positif. Néanmoins, la principale restriction de cette approche de simulation réside dans l'impossibilité de son application sur des données réelles vu qu'elle est basée sur une minimisation des RMSE. C'est pourquoi, nous proposons également une approche basée sur une méthode de régression linéaire. Cette dernière permet de mettre en évidence une seconde relation entre α_1 et a fondée sur les données, ce qui offre la possibilité de caractériser empiriquement une direction d'extrapolation possible.

4.5 Simulations

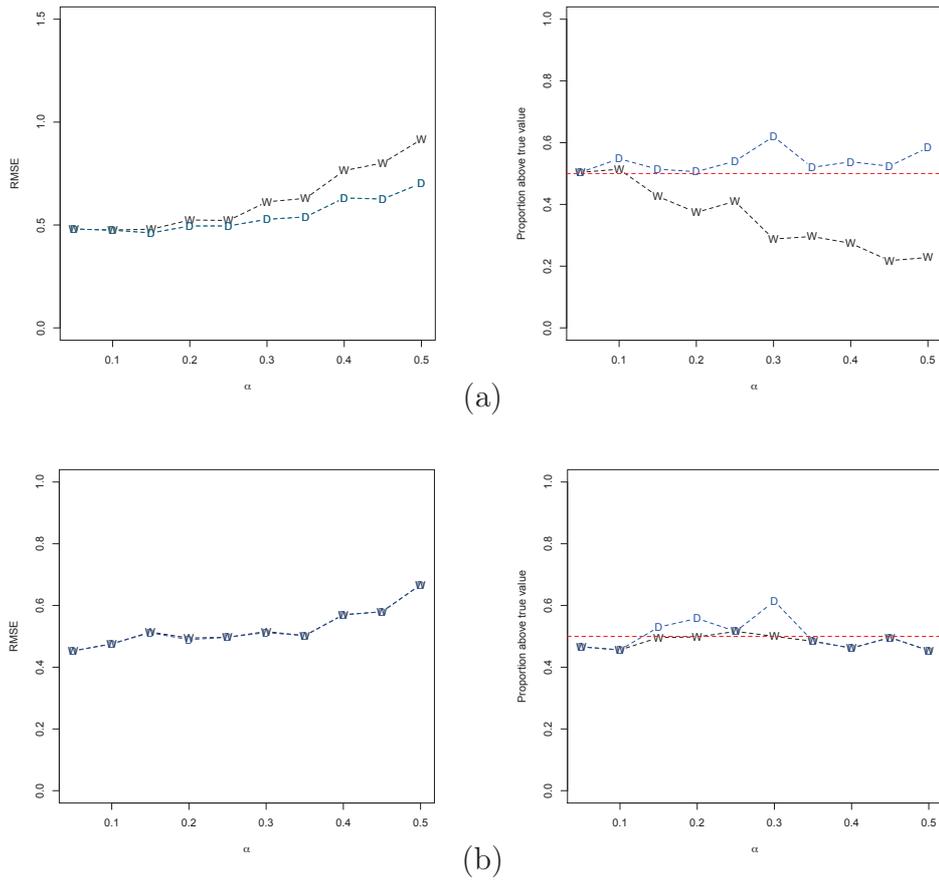


Fig 4.3: À gauche: RMSE ; À droite: PEETV ; (a): distribution bivariée normale avec une corrélation $\rho = 0.5$; (b): distribution inverse max-stable avec structure de dépendance logistique. Le caractère 'W' correspond au modèle de Wadsworth et Tawn et 'D' au nôtre.

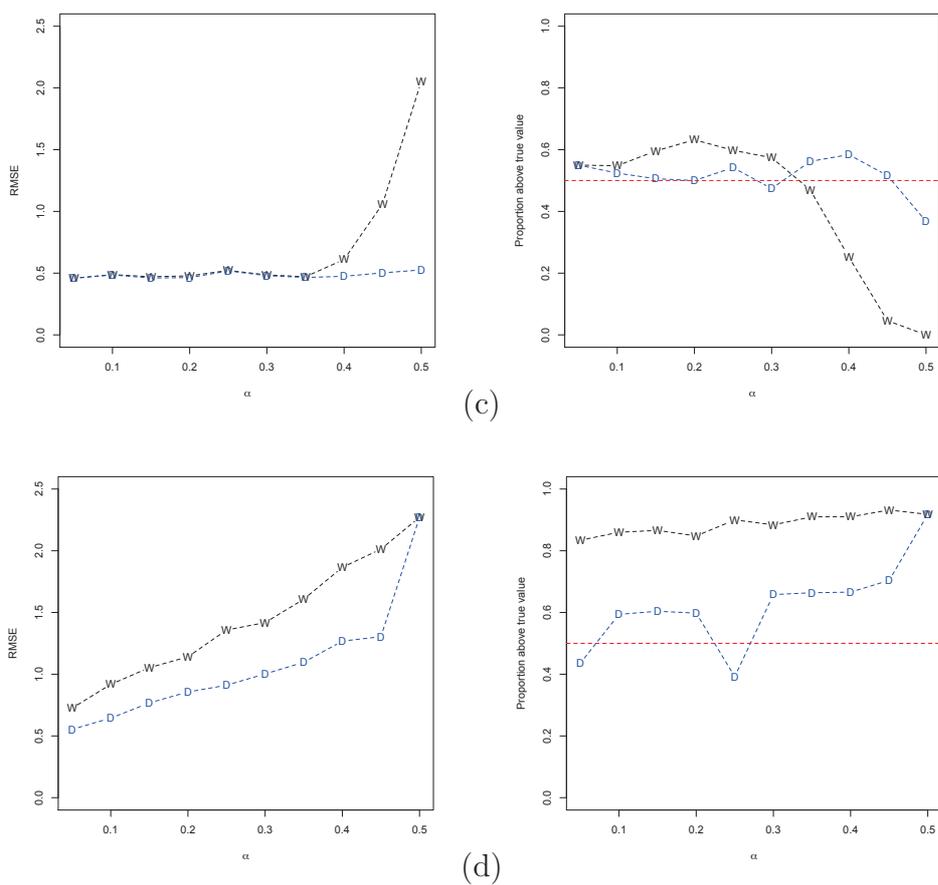


Fig 4.4: À gauche: RMSE ; À droite: PEETV ; (c) loi de queue inférieure de Clayton avec paramètre $m = 1.4$; (d) : distribution bivariée normale avec une corrélation $\rho = -0.3$. Le caractère 'W' correspond à la modélisation de Wadsworth et Tawn et 'D' à la nôtre.

4.5.2 Choix pratique pour les rayons d'extrapolation

Dans le paragraphe précédent on a identifié les intervalles de la forme $\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}z + \alpha_1 a, \infty\right) \times (z, \infty)$ issus de (4.10) avec les intervalles de la forme $(x = \frac{1-\alpha}{\alpha}y, \infty) \times (y = 1.5 \cdot \log(n), \infty)$ où $\alpha \in \{0.05, \dots, 0.5\}$ considérés par Wadsworth and Tawn (2013). On a obtenu ainsi l'équation (4.21) et donc une première relation entre α_1 et l'ordonnée à l'origine $b = -(1 - \alpha_1)a$. Une deuxième relation entre a et α_1 , indépendante de celle de (4.21) s'avère nécessaire pour caractériser la direction d'extrapolation déduite de (4.10).

L'idée de base de notre méthode consiste à identifier pour chaque α fixé, la droite d'équation $y = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}x - (1 - \alpha_1)a$ représentant la direction de l'extrapolation issue de notre approche à la droite des moindres carrés d'un sous-échantillon convenablement choisi à partir de l'échantillon de départ de taille n et qui passe par le point de coordonnées $(x = \frac{1-\alpha}{\alpha}y, y = 1.5 \cdot \log(n))$ où l'on veut extrapoler. Dans la suite nous fournissons deux méthodes permettant de choisir ce sous-échantillon.

Une première approche

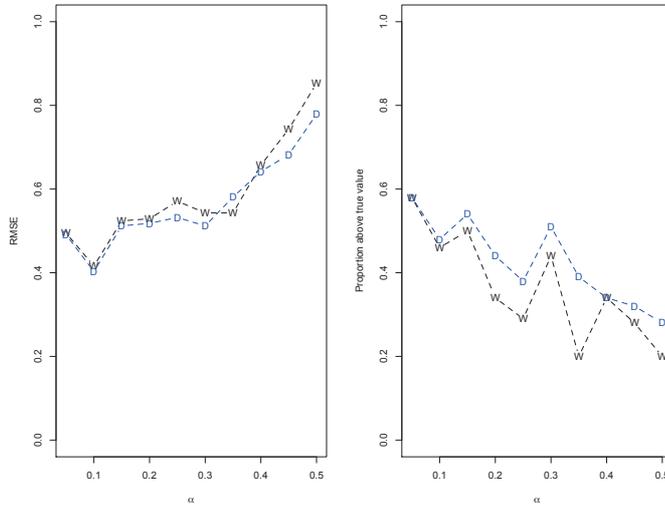
Au premier abord, on considère un échantillon dit de départ de taille n d'une distribution donnée et on désigne par E_0 la partie de cet échantillon contenue dans la région $\{(z_1, z_2) \in (0, \infty)^2; z_1 \leq x \text{ et } z_2 \leq y\}$. Puis on désigne par $A(x_{\alpha,p}, y_{\alpha,p})$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = (\frac{1-\alpha}{\alpha})x$ avec la courbe empirique des quantiles bivariés \mathcal{C}_p d'ordre p où $p \in (0, 1)$. En considérant le sous échantillon $E_p = \{(z_1, z_2) \in E_0; z_1 \leq x_{\alpha,p} \text{ et } z_2 \leq y_{\alpha,p}\}$, l'identification du coefficient directeur de la droite des moindres carrés issue de E_p avec le coefficient directeur $\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}$ de la droite d'extrapolation de notre approche permet de trouver

$$\alpha_1 = \frac{\text{Var}(X_{E_p}) + \bar{X}_{E_p}(\bar{Y}_{E_p} - y)}{\text{cov}(X_{E_p}, Y_{E_p}) + \bar{X}_{E_p}(\bar{X}_{E_p} + \bar{Y}_{E_p} - x - y)}$$

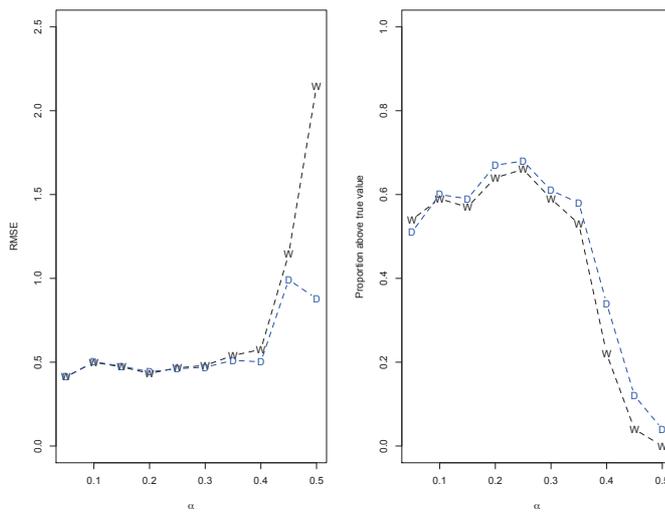
où X_{E_p} et Y_{E_p} sont respectivement la séquence des abscisses et la séquence des ordonnées des points du nuage correspondant à E_p . Par suite en utilisant (4.21) on en déduit que $a = \left\{ \frac{1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha}{\alpha_1(1-\alpha)} \right\} y$ avec $y = 1.5 \log n$. En conséquence la droite d'extrapolation est déterminée.

Afin d'examiner la performance de cette approche, nous avons utilisé les mêmes critères RMSE et PEETV que précédemment pour comparer cette approche avec celle de Wadsworth et Tawn. Pour chaque distribution considérée, nous avons généré 5000 points avec des marges exponentielles et nous avons gardé 10% des données à des fins d'estimation. Ce processus a été répété 500 fois. La figure (4.5) donne les résultats respectifs des RMSE et les PEETV pour la distribution normale avec une corrélation de 0.5 et la loi de queue inférieure de Clayton avec paramètre $m = 1.4$ avec le choix $p = 0.25$.

Les résultats de la figure (4.5) (a), correspondant à la loi normale, montrent que pour les deux critères la méthode en cours est meilleure que celle de WT. Pour la loi de queue inférieure de Clayton, les RMSE de WT sont légèrement meilleurs pour les valeurs de $\alpha \in \{0.1, 0.15, 0.2\}$ et notre méthode est meilleure pour les autres valeurs de α , avec des écarts qui se creusent lorsque α tend vers 0.5 (voir figure 4.5 (b)). D'autre part, on a pu remarquer au travers d'autres simulations que les deux critères montrent que nos résultats



(a)



(b)

Fig 4.5: À gauche : RMSE ; À droite : PEETV ; (a) : distribution bivariée normale avec une corrélation $\rho = 0.5$; (b) : loi de queue inférieure de Clayton de paramètre $m = 1.4$.

restent meilleurs que ceux de WT pour d'autres distributions normales avec des corrélations positives, et ne varient pas trop même pour les choix de $p = 0.15$ et $p = 0.2$. Néanmoins les résultats de notre approche se détériorent nettement dans le cas de la loi normale avec une corrélation négative. Ceci s'explique par le fait que, dans le cas d'une association négative, le nuage de points du sous-échantillon E_p est plus décalé vers les axes et la méthode de choix de la direction d'extrapolation de l'approche 1 devient non efficace. Pour surmonter cette déficience nous proposons une deuxième approche.

Une deuxième approche

Une deuxième approche consiste à diviser E_0 en deux sous échantillons $E_{(1,k)}$ et $E_{(2,k)}$ qui sont entièrement déterminés par le point d'intersection $A(x_k, y_k)$ de la droite d'équation $y = kx$ avec la courbe empirique des quantiles bivariés \mathcal{C}_{p_1} d'ordre une proportion p_1 fixée de l'échantillon E_0 .

$$E_{(1,k)} = \{(z_1, z_2) \in E_0; z_1 \leq x_k \text{ et } z_2 \leq y_k\}$$

$$E_{(2,k)} = \{(z_1, z_2) \in E_0; z_1 \leq x_k \text{ et } z_2 \geq y_k\}$$

Le réel k est initialisé à 1 (valeur qui correspond à $\alpha = 0.5$) puis incrémenté de 0.01 tant que $\frac{|E_{(2,k)}|}{|E_0|} > p_2$ où p_2 est une proportion fixée d'avance et $|E_{(2,k)}|$ désigne l'effectif de $E_{(2,k)}$. On expliquera par la suite le choix judicieux de chacune des valeurs k , p_1 et p_2 . Une fois $E_{(1,k)}$ fixé, un calcul simple donne

$$\alpha_1 = \frac{\text{Var}(X_{E_{(1,k)}}) + \bar{X}_{E_{(1,k)}} (\bar{Y}_{E_{(1,k)}} - y)}{\text{cov}(X_{E_{(1,k)}}, Y_{E_{(1,k)}}) + \bar{X}_{E_{(1,k)}} (\bar{X}_{E_{(1,k)}} + \bar{Y}_{E_{(1,k)}} - x - y)}$$

où $X_{E_{(1,k)}}$ et $Y_{E_{(1,k)}}$ sont respectivement la séquence des abscisses et la séquence des ordonnées des points du nuage correspondant à $E_{(1,k)}$. Par suite, en utilisant (4.21), on en déduit que $a = \left\{ \frac{1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha}{\alpha_1(1-\alpha)} \right\} y$ avec $y = 1.5 \log n$. Le choix des valeurs de p_1 doit permettre d'avoir un coefficient directeur positif pour la droite des moindres carrés définie ci-dessus et par suite une extrapolation, suivant la direction souhaitée, garantissant une représentativité des dépendances extrémales présentes dans l'échantillon.

Dans le but de proposer des choix valides pour p_1 et p_2 , on a appliqué cette approche sur plusieurs distributions couvrant différentes formes de dépendances, pour différentes valeurs de ces deux paramètres. Pour chacune des valeurs de $p_1 \in \{0.15; 0.2; 0.25\}$ on a choisi $p_2 \in \{0.01; 0.05; 0.1; 0.2\}$ et ceci pour les distributions suivantes : la loi normale bivariée avec $\rho \in \{0.5; 0.3; -0.3\}$ et la loi de queue inférieure de Clayton de paramètre $m = 1.4$. Les trois premières distributions correspondent à l'indépendance asymptotique avec les valeurs respectives de $\eta \in \{0.75, 0.65, 0.35\}$. Ces choix permettent d'étudier différentes formes de nuages de points, allant d'une association positive élevée à une association négative. Le dernier exemple correspond à la dépendance asymptotique ($\eta = 1$). Les résultats sont présentés sous forme de tableaux qui fournissent les RMSE de DBT versus les RMSE de WT pour les différentes combinaisons possibles de p_1 et p_2 . Pour chaque tableau, une lecture horizontale permet de comparer les RMSE de DBT à ceux de WT pour une valeur fixe de chacun des paramètres α , p_1 et p_2 . Verticalement chaque colonne du tableau donne les RMSE de DBT pour une valeur fixe de chacun des paramètres p_1

et p_2 en fonction des différentes valeurs de $\alpha \in \{0.05, \dots, 0.5\}$. Pour les deux distributions de loi normale avec une association positive (tableaux des figures 4.7 et 4.6), on remarque que indépendamment du choix de p_1 , les RMSE de DBT sont meilleurs que celles de WT pour les valeurs de $\alpha > 0.1$ dans le cas où $p_2 \in \{0.1; 0.2\}$, avec un léger avantage pour la colonne correspondante à $p_2 = 0.2$, pour les plus grandes valeurs de α . Pour les valeurs $\alpha < 0.15$, nos résultats sont meilleurs pour les valeurs de $p_2 \in \{0.01, 0.05\}$. Ceci correspond aux parties des tableaux coloriées en jaune. Le contrôle du paramètre k correspondant à chaque angle permet de conclure qu'on a gardé le même coefficient $k = 1$ pour toutes les valeurs de α dans le cas $p_2 = 0.2$, indépendamment des valeurs de α_1 et p_1 . En conséquence, on pourra penser à exiger que p_2 ne soit petit que pour les petits angles α . Ceci va permettre d'avoir des RMSE DBT plus petits que ceux de WT pour tous les angles.

Pour la loi normale avec $\rho = -0.3$ (tableau de la figure 4.8), on remarque que les parties colorées en jaune (correspondant à des RMSE de DBT meilleurs que ceux de WT) sur le tableau sont presque symétriques à celles correspondantes au cas de l'association positive. En d'autres termes, nos résultats sont meilleurs pour les petites valeurs de p_2 et le contrôle de k montre que dans tous les cas on n'a pas conservé la valeur initiale de k . Ceci s'explique en fait par la forme du nuage de points qui est plutôt plus allongée vers les deux axes. Ainsi, pour une valeur fixe de p_1 , on a intérêt à diminuer les valeurs de p_2 . En conséquence augmenter la valeur initiale k nous permettra de garder plus de valeurs fixes de k et par suite de gagner en temps de calcul.

Pour la loi de queue inférieure de Clayton (tableau de la figure 4.9), on remarque que les RMSE DBT sont meilleurs que ceux de WT, sauf pour $\alpha = 0.05$ et $p_2 \in \{0.1, 0.2\}$, et que l'écart entre les deux RMSE se creuse quand α tend vers 0.5. Ceci est en accord avec le résultat théorique. En effet on a montré dans la section 2 que cette distribution est ray-dépendante et que (3.11) n'est pas vérifiée lorsque $\beta = \gamma$, ce qui correspond à $\alpha = 0.5$. Une comparaison entre les différents colonnes de RMSE DBT permet de conclure que les résultats sont meilleurs pour $p_2 \in (0.1, 0.2)$. En conclusion d'après cette étude on peut donner les règles empiriques suivantes :

- pour un nuage de points présentant une association positive, prendre $p_1 \in \{0.2, 0.25\}$ et $p_2 = 0.2$.
- pour un nuage de points présentant une association négative, prendre $p_1 \in 0.15$ et $p_2 = 0.01$. La forme du nuage de point est un facteur important pour choisir les paramètres de cette approche et lorsqu'il est difficile de trancher, une estimation de la valeur de η pourrait être une solution pertinente.

4.6 Conclusion

α	p_2	0.15				0.2				0.25				RMSE WT
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	
0.05	X	0.496	0.495	0.504	0.510	0.488	0.503	0.537	0.543	0.496	0.501	0.567	0.655	0.494
0.1	X	0.413	0.405	0.409	0.410	0.408	0.407	0.413	0.428	0.408	0.411	0.417	0.452	0.416
0.15	X	0.517	0.506	0.517	0.513	0.512	0.514	0.515	0.505	0.512	0.520	0.512	0.515	0.524
0.2	X	0.530	0.519	0.511	0.505	0.520	0.519	0.506	0.501	0.517	0.509	0.504	0.494	0.529
0.25	X	0.577	0.543	0.529	0.514	0.566	0.539	0.518	0.505	0.556	0.531	0.511	0.499	0.571
0.3	X	0.559	0.534	0.511	0.501	0.554	0.527	0.506	0.496	0.548	0.521	0.502	0.494	0.543
0.35	X	0.729	0.648	0.604	0.572	0.721	0.643	0.597	0.552	0.711	0.634	0.585	0.530	0.657
0.4	X	0.758	0.654	0.607	0.574	0.758	0.655	0.605	0.556	0.754	0.652	0.593	0.546	0.643
0.45	X	0.905	0.776	0.721	0.689	0.914	0.787	0.722	0.677	0.916	0.789	0.721	0.668	0.740
0.5	X	1.141	0.955	0.854	0.805	1.171	0.976	0.864	0.793	1.182	0.988	0.869	0.781	0.853

Fig 4.6: RMSE DBT pour la distribution bivarée normale avec $\rho = 0.5$ pour $p_1 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$ et $p_2 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$. Pour chaque valeur de $\alpha \in \{0.05, 0.1, \dots, 0.45, 0.5\}$, les RMSE DBT inférieurs à ceux de WT sont colorés en jaune.

4.6 Conclusion

Le modèle (4.10) proposé dans ce chapitre est une généralisation de celui de Wadsworth and Tawn (2013). Nous avons exploité ce modèle pour développer une modélisation asymptotique de la fonction de survie, dépendant de la fonction κ et de la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^{*,1}$. Cette nouvelle modélisation permet de gérer d'une façon lisse la décroissance de queue d'une distribution bivarée d'une façon similaire au modèle (4.7) de Wadsworth and Tawn (2013) avec cependant une contrainte moins restrictive que (3.11) pour la fonction à variation lente. Ceci permet d'identifier les différentes classes de comportement de queue de distributions avec des fonctions à variation lente ray-dépendantes ou ray-indépendantes, et fournit un cadre unifié couvrant à la fois les distributions asymptotiquement dépendantes et asymptotiquement indépendantes, même dans le cas d'une association faible ou négative. Notre modèle fournit un compromis théorique entre les approches de Ledford and Tawn (1997) et de Wadsworth and Tawn (2013), en prenant les avantages des deux modèles : tenir compte des distributions ray-dépendantes, ce qui n'est possible que pour l'approche de Ledford et Tawn, et avoir la possibilité d'extrapoler selon toutes les directions du premier quadrant positif, ce qui n'est envisageable que pour l'approche de Wadsworth et Tawn.

	p_1	0.15				0.2				0.25				
α	p_2	0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	RMSE WT
0.05	X	0.490	0.493	0.496	0.551	0.489	0.491	0.532	0.661	0.493	0.501	0.571	0.696	0.498
0.1	X	0.443	0.431	0.426	0.428	0.438	0.433	0.425	0.444	0.431	0.426	0.430	0.445	0.444
0.15	X	0.521	0.508	0.501	0.509	0.512	0.504	0.512	0.508	0.508	0.503	0.510	0.511	0.522
0.2	X	0.613	0.572	0.550	0.534	0.598	0.566	0.544	0.518	0.584	0.555	0.537	0.528	0.600
0.25	X	0.656	0.578	0.542	0.498	0.640	0.560	0.526	0.488	0.611	0.547	0.508	0.483	0.597
0.3	X	0.693	0.619	0.585	0.567	0.683	0.614	0.579	0.566	0.670	0.602	0.572	0.574	0.618
0.35	X	0.914	0.768	0.668	0.585	0.903	0.762	0.660	0.558	0.885	0.741	0.641	0.541	0.720
0.4	X	0.961	0.779	0.693	0.610	0.958	0.784	0.691	0.602	0.945	0.777	0.683	0.597	0.707
0.45	X	1.157	0.933	0.843	0.757	1.166	0.948	0.848	0.751	1.160	0.949	0.846	0.745	0.830
0.5	X	1.447	1.155	0.998	0.872	1.466	1.180	1.012	0.861	1.468	1.19	1.02	0.848	0.937

Fig 4.7: RMSE DBT pour la distribution bivariée normale avec $\rho = 0.3$ pour $p_1 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$ et $p_2 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$. Pour chaque valeur de $\alpha \in \{0.05, 0.1, \dots, 0.45, 0.5\}$, les RMSE DBT inférieurs à ceux de WT sont colorés en jaune.

4.6 Conclusion

α	p_1 p_2	0.15				0.2				0.25				RMSE WT
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	
0.05	X	0.782	1.001	1.208	1.823	0.852	1.063	1.279	2.346	0.920	1.126	1.33	2.260	0.802
0.1	X	0.781	1.008	1.229	1.607	0.870	1.093	1.308	1.731	0.961	1.191	1.416	1.913	0.914
0.15	X	0.8643	1.084	1.285	1.613	0.947	1.152	1.376	1.796	1.034	1.245	1.491	1.935	1.103
0.2	X	0.783	0.980	1.210	1.643	0.806	1.048	1.276	1.711	0.903	1.137	1.372	1.832	1.1263
0.25	X	0.764	0.971	1.205	1.841	0.799	1.025	1.276	1.734	0.853	1.101	1.363	1.832	1.237
0.3	X	0.948	1.113	1.290	1.514	0.948	1.172	1.342	1.913	1.000	1.243	1.516	2.024	1.561
0.35	X	1.103	0.920	1.373	1.866	1.034	0.926	1.384	1.573	0.987	0.939	1.166	1.657	1.344
0.4	X	1.194	1.040	1.389	1.866	1.118	1.051	1.398	1.900	1.090	1.000	1.439	1.963	1.824
0.45	X	1.205	1.087	1.526	2.030	1.159	1.096	1.526	2.044	1.130	1.022	1.551	2.085	2.113
0.5	X	1.226	1.098	1.668	2.158	1.164	1.017	1.652	2.147	1.177	1.020	1.658	2.181	2.380

Fig 4.8: RMSE DBT pour la distribution bivariée normale avec $\rho = -0.3$ pour $p_1 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$ et $p_2 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$. Pour chaque valeur de $\alpha \in \{0.05, 0.1, \dots, 0.45, 0.5\}$, les RMSE DBT inférieurs à ceux de WT sont colorés en jaune.

α	p_1 p_2	0.15				0.2				0.25				RMSE WT
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	0.01	0.05	0.1	0.2	
0.05	X	0.404	0.402	0.434	0.533	0.408	0.406	0.457	0.644	0.406	0.427	0.504	0.656	0.413
0.1	X	0.476	0.485	0.497	0.468	0.480	0.491	0.492	0.467	0.490	0.496	0.473	0.486	0.499
0.15	X	0.439	0.434	0.439	0.440	0.438	0.437	0.437	0.449	0.434	0.439	0.441	0.451	0.472
0.2	X	0.402	0.405	0.415	0.416	0.403	0.411	0.416	0.416	0.404	0.415	0.415	0.412	0.443
0.25	X	0.409	0.418	0.427	0.432	0.412	0.422	0.427	0.431	0.413	0.427	0.428	0.431	0.465
0.3	X	0.418	0.417	0.426	0.432	0.419	0.418	0.430	0.432	0.418	0.421	0.428	0.430	0.481
0.35	X	0.463	0.460	0.459	0.431	0.462	0.459	0.459	0.459	0.460	0.459	0.460	0.458	0.539
0.4	X	0.586	0.514	0.472	0.459	0.575	0.509	0.466	0.425	0.565	0.501	0.461	0.421	0.575
0.45	X	1.163	1.032	0.948	0.870	1.155	1.029	0.945	0.859	1.138	1.020	0.937	0.846	1.446
0.5	X	2.096	1.898	1.782	1.653	2.086	1.905	1.784	1.643	2.072	1.900	1.781	1.629	2.146

Fig 4.9: RMSE DBT pour la loi de queue inférieure de Clayton avec paramètre $m = 1.4$ pour $p_1 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$ et $p_2 \in \{0.15, 0.2, 0.25\}$. Pour chaque valeur de $\alpha \in \{0.05, 0.1, \dots, 0.45, 0.5\}$, les RMSE DBT inférieurs à ceux de WT sont colorés en jaune.

Chapitre 5

Vers une représentation paramétrique des queues de distributions multivariées

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on se base sur le modèle (4.10) et l'étude de la variation régulière du vecteur $(X_P^{1/\beta}/n, Y_P^{1/\gamma}/n)$, $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$, pour développer des modèles semi-paramétriques pour la queue d'une distribution bivariee de marges Pareto sur le cône convexe $(0, \infty)^2$. Nous introduisons ainsi une mesure pseudo-radiale $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ généralisant la mesure H_η définie par Ramos and Ledford (2009), où le paramètre η est remplacé par la fonction κ définie dans Wadsworth and Tawn (2013). La fonction κ gère la décroissance de queue d'une distribution bivariee avec plus de flexibilité. En particulier, elle offre de meilleures possibilités d'extrapolations dans le premier quadrant positif comme cela a d'ailleurs été détaillé dans la dernière section du chapitre précédent. Nous montrons ci-dessous que la nouvelle mesure $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ doit vérifier une contrainte similaire à la contrainte de normalisation (3.7) imposée à la mesure H_η .

Nous développons ensuite une approche similaire à celle introduite par Tawn (1991) pour contourner cette contrainte imposée à $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$, difficile à vérifier en pratique. Nous fournissons ainsi une procédure générale pour la construction de modèles semi-paramétriques associés à la mesure $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$, ce qui généralise l'approche de Qin, Smith et Ren (Qin et al., 2010). Ces modèles fournissent un large spectre de dépendances extrémales. Quelques exemples de modèles semi-paramétriques seront détaillés. Par ailleurs nous construisons un nouveau processus ponctuel similaire à celui de Ramos and Ledford (2011) et nous l'utilisons pour définir une nouvelle loi des maxima généralisant celle de Ramos and Ledford (2011) sur le cône convexe $(0, \infty)^2$.

5.2 Approche semi-paramétrique

Soit (X_P, Y_P) un vecteur bivariee avec des marges Pareto. Pour $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in [1, \infty)^2$, le modèle de queue (4.10) défini dans le chapitre précédent s'écrit :

$$\mathbb{P}(X_P > n^\beta x, Y_P > n^\gamma y) = \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}}$$

où κ est la fonction introduite dans Wadsworth and Tawn (2013) pour le modèle (3.10), sans la contrainte de différentiabilité et \mathcal{L} une fonction bivariée vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y)}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)} = g_{(\beta, \gamma)}(x, y)$$

avec $g_{(\beta, \gamma)}$ une fonction bivariée vérifiant $g_{(\beta, \gamma)}(c^\beta, c^\gamma) = 1, \forall c > 0$. Dans la section 3 du chapitre 4, on a montré que la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^1$ définie par $g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) = g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, y^\gamma)$ peut être exprimée à l'aide d'une mesure positive $\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)}$ définie sur $(0, \infty)^2$ de la façon suivante :

$$g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) = g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, y^\gamma) = \frac{\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \{(x, \infty) \times (y, \infty)\}}{(xy)^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{2}}} \quad (5.1)$$

La mesure $\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)}$ peut être exprimée à l'aide d'une mesure pseudo radiale $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$

$$\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \{(x, \infty) \times (y, \infty)\} = \frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)} \int_0^1 \min\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right) dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega) \quad (5.2)$$

et l'identité $\Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \{(1, \infty) \times (1, \infty)\} = 1$, impose la contrainte suivante sur la mesure $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$

$$\kappa(\beta, \gamma) = \int_0^1 \min(\omega, 1-\omega) dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega). \quad (5.3)$$

En conséquence en utilisant (5.2), l'expression de la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^1$ dans (5.1) devient

$$g_{(\beta, \gamma)}^1(x, y) = \frac{(xy)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}}}{\kappa(\beta, \gamma)} \int_0^1 \min\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right) dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega) \quad (5.4)$$

avec $\omega = \frac{x}{x+y}$. De façon naturelle, on peut se poser la question suivante : étant donnée une mesure pseudo-radiale $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ vérifiant (5.3), sous quelles conditions, la fonction $g_{(\beta, \gamma)}(x, y)$ définie en (5.4) est-elle une fonction de dépendance valide pour le modèle (4.10) ? La réponse est contenue dans le théorème suivant, qui est une généralisation du théorème 1 de Ramos and Ledford (2009). En effet, pour chaque couple (β, γ) , la donnée d'une mesure pseudo radiale $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ permettra de construire une fonction de dépendance et en conséquence une modélisation de la queue de distribution de (X_P, Y_P) . Celle-ci permettra d'extrapoler selon n'importe quel angle du premier quadrant positif.

Théorème 5.2.1. *Soit (X_P, Y_P) un vecteur bivarié aléatoire avec des distributions marginales Pareto standard et une fonction de survie jointe vérifiant pour $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in [1, \infty)^2$ le modèle (4.10) :*

$$\mathbb{P}(X_P > n^\beta x, Y_P > n^\gamma y) = \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) n^{-\kappa(\beta, \gamma)} x^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{2\beta}} y^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{2\gamma}}.$$

Alors,

5.2 Approche semi-paramétrique

(i) pour tout $(x, y) \in [1, \infty)^2$ et $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\mathbb{P}(X_P > (nx)^\beta, Y_P > (ny)^\gamma)}{\mathbb{P}(X_P > n^\beta, Y_P > n^\gamma)} \right\} &= \Lambda_{\kappa(\beta, \gamma)} \{(x, \infty) \times (y, \infty)\} \\ &= g_{(\beta, \gamma)}^{1, *} \left(\frac{x}{x+y} \right) (xy)^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où $g_{(\beta, \gamma)}^{1, *} \left(\frac{x}{x+y} \right) \equiv g_{(\beta, \gamma)}^{1, *}(\omega)$, $\omega \in (0, 1)$, vérifie la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \kappa(\beta, \gamma) g_{(\beta, \gamma)}^{1, *}(\omega) &= \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} \int_0^\omega z^{\kappa(\beta, \gamma)} dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(z) \\ &+ \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}} \int_\omega^1 (1-z)^{\kappa(\beta, \gamma)} dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(z), \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ une mesure positive sur $[0, 1]$ vérifiant la condition de normalisation

$$\kappa(\beta, \gamma) = \int_0^{1/2} z^{\kappa(\beta, \gamma)} dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(z) + \int_{1/2}^1 (1-z)^{\kappa(\beta, \gamma)} dH_{\kappa(\beta, \gamma)}(z) \quad (5.7)$$

et $\kappa(\beta, \gamma)$ l'indice de variation régulière de (4.10).

(ii) Inversement, étant donnés $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ et une fonction positive $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ satisfaisant la condition de normalisation (5.7), l'équation (5.6) définit une fonction de dépendance $g_{(\beta, \gamma)}^{1, *}$ telle que $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(s, t) \equiv g_{(\beta, \gamma)}^{1, *} \left(\frac{s}{s+t} \right) (st)^{-\kappa(\beta, \gamma)}$ soit une fonction de survie jointe d'un vecteur aléatoire (S_β, T_γ) pour $(s, t) \in [1, \infty)^2$. Si de plus, pour un seuil élevé u et $\tau \in (0, 1/u)$, les fonctions $f_{S_\beta} : x \mapsto 1 - 1/x + \tau \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x/u, 1)$ et $f_{T_\gamma} : x \mapsto 1 - 1/x + \tau \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(1, x/u)$ sont strictement croissantes sur (u, ∞) , alors il existe un vecteur aléatoire (X_P, Y_P) avec des marges Pareto standard tel que (5.5) est satisfaite.

Démonstration.

(i) Nous adaptons un raisonnement similaire à celui de Ramos and Ledford (2009). On considère le vecteur bivarié aléatoire suivant

$$(S_\beta, T_\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(X_P^{1/\beta} / n, Y_P^{1/\gamma} / n \right) \mid \left(X_P^{1/\beta} > n, Y_P^{1/\gamma} > n \right) \right\},$$

avec $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$.

Alors, en utilisant (4.10), on a pour tout $(x, y) \in [1, \infty)^2$,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x, y) \equiv \mathbb{P}(S_\beta > x, T_\gamma > y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_P > (nx)^\beta, Y_P > (ny)^\gamma)}{\mathbb{P}(X_P > n^\beta, Y_P > n^\gamma)} \\ &= g_{(\beta, \gamma)}^{1, *} \left(\frac{x}{x+y} \right) (xy)^{-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{2}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

où $g_{(\beta, \gamma)}^{1, *} \left(\frac{x}{x+y} \right) \equiv g_{(\beta, \gamma)}(x^\beta, y^\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}[(nx)^\beta, (ny)^\gamma]}{\mathcal{L}(n^\beta, n^\gamma)}$.

Par ailleurs, pour des valeurs fixées de β et γ , la mesure $\mu_{RW}^{(\beta, \gamma)}$ associée aux coordonnées pseudo-radiales et angulaires $R = S + T$ et $W = S/R$ se factorise de la façon suivante

$\mu_{RW}^{(\beta,\gamma)}(dr, dz) = r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(z)$, où $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ est une mesure positive sur $[0, 1]$ (Resnick, 1987, proposition 5.11, page 268). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x, y) &= \\ &= \int_{\omega=0}^1 \int_{\max(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{1-\omega})}^{\infty} r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \min\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ \int_0^{x/(x+y)} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{x/(x+y)}^1 \left(\frac{1-\omega}{y}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour tout $(x, y) \in [1, \infty)^2$, des équations (5.8) et (5.9) on déduit

$$\begin{aligned} g_{(\beta,\gamma)}^{1,*} \left(\frac{x}{x+y} \right) (xy)^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^{x/(x+y)} \left(\frac{\omega}{x}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &+ \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_{x/(x+y)}^1 \left(\frac{1-\omega}{y}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \end{aligned} \quad (5.10)$$

et (5.6) découle facilement.

La mesure $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ doit satisfaire une condition de normalisation. En effet pour tout $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$, si l'on prend $x = y$ dans (5.10) et que l'on remarque que $g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}(\frac{1}{2}) = 1$, il est immédiat que

$$\kappa(\beta, \gamma) = \int_0^{1/2} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{1/2}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega). \quad (5.11)$$

(ii) Vérifions tout d'abord que l'équation (5.5) définit une fonction de survie valide : son éventuelle densité doit être positive et de masse égale 1 sur son domaine de définition $D = \{(x, y), x \geq 1, y \geq 1\}$ ou, d'une façon équivalente, la mesure de densité $r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$ du vecteur associé (R, W) est positive et de masse égale à 1 sur son domaine.

Dans le cas où $H_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$ est différentiable sur $(0, 1)$, la densité jointe $f(r, \omega)$ du vecteur (R, W) est définie par

$$f(r, \omega) = r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} h_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$$

pour $\omega \in (0, 1), r \in [\max\{\omega^{-1}, (1-\omega)^{-1}\}, \infty)$ et avec $h_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = \frac{dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)}{d\omega}$.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{\max\{\omega^{-1}, (1-\omega)^{-1}\}}^{\infty} r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \int_0^{1/2} \int_{\omega^{-1}}^{\infty} r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{1/2}^1 \int_{(1-\omega)^{-1}}^{\infty} r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ \int_0^{1/2} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{1/2}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \right\} \end{aligned}$$

et comme par (5.7), $\int_0^{1/2} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_{1/2}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = \kappa(\beta, \gamma)$ on en déduit que $\int_0^1 \int_{\max\{\omega^{-1}, (1-\omega)^{-1}\}}^{\infty} r^{-(1+\kappa(\beta,\gamma))} dr dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = 1$. En conséquence, la mesure de densité associée au vecteur (R, W) est positive et de masse égale à 1.

Pour un seuil élevé u et (β, γ) fixé on définit la région $R_{(u,\beta,\gamma)} = \{(x, y) : x > u^\beta, y > u^\gamma\}$. Ci-dessous nous donnons une méthode de construction de (X_P, Y_P) dans $(0, \infty)^2$. Pour $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ et un seuil très élevé u dans la région $R_{(u,\beta,\gamma)}$, les variables S_β et T_γ peuvent

5.2 Approche semi-paramétrique

être générées à partir de $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$. Il suffit alors de définir $(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma})$ par (uS_β, uT_γ) .

A l'extérieur de $R_{(u,\beta,\gamma)}$, $(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma})$ peut être défini de la façon suivante : pour les valeurs données de (β, γ) et u , soit τ tel que $0 < \tau < 1/u$. Sous la condition de la croissance de f_{S_β} et f_{T_γ} , les fonctions $G_{X_P^{1/\beta}}$ et $G_{Y_P^{1/\gamma}}$ définies ci-dessous sont croissantes sur $(0, \infty)$ et vérifient $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_{X_P^{1/\beta}}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_{Y_P^{1/\gamma}}(x) = 1$. Par conséquent ces deux fonctions sont des distributions.

$$G_{X_P^{1/\beta}}(x) = \frac{[1 - \frac{1}{x} - \tau \mathbb{1}(x > u) \{1 - \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(\frac{x}{u}, 1)\}]}{1 - \tau} = \begin{cases} \frac{f_{S_\beta}(x) - \tau}{1 - \tau} & \text{si } x > u, \\ \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \tau} & \text{si } 1 \leq x \leq u \end{cases}$$

et

$$G_{Y_P^{1/\gamma}}(y) = \frac{[1 - \frac{1}{y} - \tau \mathbb{1}(y > u) \{1 - \bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(1, \frac{y}{u})\}]}{1 - \tau} = \begin{cases} \frac{f_{T_\gamma}(y) - \tau}{1 - \tau} & \text{si } y > u, \\ \frac{1 - \frac{1}{y}}{1 - \tau} & \text{si } 1 \leq y \leq u. \end{cases}$$

Soit $v = \frac{1-\frac{1}{u}}{1-\tau}$ et (A, B) le vecteur bivarié de densité (constante) $\frac{2v-1}{v^2}$ sur $[0, v]^2$, v^{-1} sur $[0, v] \times [v, 1]$ et $[v, 1] \times [0, v]$ et 0 ailleurs. Il est facile de vérifier que les marginales de (A, B) sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$. Dans $R_{(u,\beta,\gamma)}^c$, $(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma}) = (G_{X_P^{1/\beta}}^{-1}(A), G_{Y_P^{1/\gamma}}^{-1}(B))$ donne le vecteur cherché. Supposons maintenant que τ représente la probabilité que le vecteur $(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma})$ soit dans $R_{(u,\beta,\gamma)}$. Ce vecteur peut alors être défini sur $(1, \infty)^2 = R_{(u,\beta,\gamma)} \cup R_{(u,\beta,\gamma)}^c$ comme suit :

$$(X_P^{1/\beta}, Y_P^{1/\gamma}) = (uS_\beta, uT_\gamma) \mathbb{1}(\{V < \tau\}) + (G_{X_P^{1/\beta}}^{-1}(A), G_{Y_P^{1/\gamma}}^{-1}(B)) \mathbb{1}(\{V > \tau\}),$$

où V est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de $X_P^{1/\beta}$ et $Y_P^{1/\gamma}$. □

Remarques

- Les deux variables S_β et T_γ dépendent directement de la forme de $H_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$. En effet par une transformation en coordonnées pseudo polaires on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_\beta > t) &= g_{(\beta,\gamma)}^{1,*} \left(\frac{t}{t+1}\right) t^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ \int_0^{t/(t+1)} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{t/(t+1)}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \{t^{-\kappa(\beta,\gamma)} I_1 + I_2\}, \end{aligned}$$

avec $I_1 = \int_0^{t/(t+1)} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$ et $I_2 = \int_{t/(t+1)}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$.

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_\gamma > t) &= g_{(\beta,\gamma)}^{1,*} \left(\frac{1}{1+t}\right) t^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ \int_0^{1/(t+1)} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \int_{1/(t+1)}^1 \left(\frac{1-\omega}{t}\right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \{I_3 + t^{-\kappa(\beta,\gamma)} I_4\}, \end{aligned}$$

avec $I_3 = \int_0^{1/(t+1)} \omega^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$ et $I_4 = \int_{1/(t+1)}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$. D'après les expressions des deux fonctions de survies ci-dessus, les marginales du vecteur (S_β, T_γ) ne sont pas de type Paréto standard.

- Du fait de l'équivalence $\exp(-\frac{1}{x}) \sim 1 - x$, les égalités (5.5) et (5.10) restent valides si l'on écrit le modèle (4.10) avec des marges Fréchet unitaire pour $(x, y) \in (0, \infty)^2$.

□

En pratique, pour un seuil suffisamment grand u , le théorème (5.2.1) permet d'avoir l'approximation de queue de distribution suivante pour tout $(x, y) \in (u^\beta, \infty) \times (u^\gamma, \infty)$:

$$\bar{F}_{X_P Y_P}(x, y) \simeq \tau_{(\beta,\gamma)} \bar{F}_{S_\beta T_\gamma} \left(\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{u^\beta}, \frac{y^{\frac{1}{\gamma}}}{u^\gamma} \right)$$

où $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(s, t) = g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}(\frac{s}{s+t})(st)^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}$ et $\tau_{(\beta,\gamma)} = \mathbb{P}(X_P > u^\beta, Y_P > u^\gamma)$.

D'un point de vue statistique, l'importance du théorème 5.6 réside dans la réciproque (ii). En effet, partant d'une mesure $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ vérifiant la condition de normalisation, on définira en premier lieu une fonction de dépendance $g_{(\beta,\gamma)}^{*,1}$ liée à cette mesure, puis une fonction de survie $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$. Enfin on construira un modèle semi-paramétrique pour la fonction de survie $\bar{F}_{X_P Y_P}$, exploitant $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$.

5.3 Modèles de dépendance pour les extrêmes multivariés

Dans cette section nous partons de la modélisation équivalente à (4.10) avec des marges Fréchet unitaire pour généraliser un résultat de Ramos and Ledford (2011) relatif à la loi limite des maxima normalisés dans $(0, \infty)^d$, $d \geq 2$. Dans le cas bivarié, le nouvel indice de variation régulière est la fonction $\kappa(\beta, \gamma)$.

5.3.1 Distribution des maxima : cas bivarié

La proposition ci-dessous donne le résultat dans le cas bivarié.

Proposition 5.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ n copies indépendantes d'un vecteur aléatoire (X, Y) avec des marges Fréchet unitaire. On suppose que pour tout $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ et $(x, y) \in (0, \infty)^2$*

$$\mathbb{P}(X > n^\beta x, Y > n^\gamma y) = \mathcal{L}(n^\beta x, n^\gamma y) n^{-\kappa(\beta,\gamma)} x^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2\beta}} y^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2\gamma}} \quad (5.12)$$

. Pour tout $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, on définit $R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} = \{(x, y) : x > \varepsilon_1, y > \varepsilon_2\}$ et $R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x, y) = R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \setminus \{[\varepsilon_1, x] \times [\varepsilon_2, y]\}$. Soit M_{X, n, ε_1} et M_{Y, n, ε_2} les maxima des composantes des points $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ dans $R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$. Alors pour tout $(x, y) \in R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$

5.3 Modèles de dépendance pour les extrêmes multivariés

on a :

$$G_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\frac{M_{X,n,\varepsilon_1} b_n}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n,\varepsilon_2} c_n}{c_n} \leq y \right) = \exp \{ -V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\gamma) \}$$

avec les constantes de normalisations b_n, c_n telles que $n\bar{F}(b_n, c_n) = 1$, où \bar{F} est la fonction de survie de (X, Y) , $\tilde{x}_\beta = x^{1/\beta}$, $\tilde{y}_\gamma = y^{1/\gamma}$ et la fonction de dépendance $V_{\kappa(\beta,\gamma)}$ est telle que

$$V_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, y) = \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left\{ \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) \right\}^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega), \quad (5.13)$$

où $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ est une mesure positive sur $[0, 1]$ satisfaisant (5.7). De plus $V_{\kappa(\beta,\gamma)}$ est homogène d'ordre $-\kappa(\beta,\gamma)$.

Démonstration.

Tout d'abord montrons l'existence de b_n et c_n telle que $n\bar{F}(b_n, c_n) = 1$. Soit (d_n) une suite vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$. Pour $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$, en utilisant (5.12), l'équation $n\bar{F}(d_n^\beta, d_n^\gamma) = 1$, d'inconnue d_n est équivalente à $n\mathcal{L}(d_n^\beta, d_n^\gamma) d_n^{-\kappa(\beta,\gamma)} = 1$. Par conséquent il suffit de prendre $d_n = O(n^{\frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)}})$, $b_n = d_n^\beta$ et $c_n = d_n^\gamma$.

Pour $\beta = \gamma = 1$, $\frac{1}{\kappa(1,1)} = \eta$ et $b_n = c_n = O(n^\eta)$, nous retrouvons ainsi la suite de normalisation du processus ponctuel considéré par Ledford and Tawn (1997). Comme $\kappa(\beta, \gamma) \geq \max(\beta, \gamma)$, donc $\frac{\beta}{\kappa(\beta,\gamma)} \leq 1$ et $\frac{\gamma}{\kappa(\beta,\gamma)} \leq 1$. La normalisation dans le cône convexe $(0, \infty)^2$ est ainsi plus légère que le cas max-stable.

Pour tout $x > \varepsilon_1$, $y > \varepsilon_2$ et en supposant que $n\bar{F}(b_n, c_n) = 1$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\frac{M_{X,n,\varepsilon_1} b_n}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n,\varepsilon_2} c_n}{c_n} \leq y \right) \\ &= \mathbb{P} \{ \text{Aucun des couples } (X_i, Y_i) \text{ ne tombe dans } R_{(\varepsilon_1 b_n, \varepsilon_2 c_n)}(x b_n, y c_n) \} \\ &= \mathbb{P} \{ \text{Tous les couples } (X_i, Y_i) \text{ tombent à l'extérieur de } R_{(\varepsilon_1 b_n, \varepsilon_2 c_n)}(x b_n, y c_n) \} \\ &= \left\{ 1 - \bar{F}(x b_n, \varepsilon_2 c_n) - \bar{F}(\varepsilon_1 b_n, y c_n) + \bar{F}(x b_n, y c_n) \right\}^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n} \left\{ \frac{\bar{F}(x b_n, \varepsilon_2 c_n)}{\bar{F}(b_n, c_n)} + \frac{\bar{F}(\varepsilon_1 b_n, y c_n)}{\bar{F}(b_n, c_n)} - \frac{\bar{F}(x b_n, y c_n)}{\bar{F}(b_n, c_n)} \right\} \right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n} \left\{ \frac{\bar{F}(x d_n^\beta, \varepsilon_2 d_n^\gamma)}{\bar{F}(d_n^\beta, d_n^\gamma)} + \frac{\bar{F}(\varepsilon_1 d_n^\beta, y d_n^\gamma)}{\bar{F}(d_n^\beta, d_n^\gamma)} - \frac{\bar{F}(x d_n^\beta, y d_n^\gamma)}{\bar{F}(d_n^\beta, d_n^\gamma)} \right\} \right]^n. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Par suite, en utilisant (5.5) avec des marges Fréchet unitaire on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_{X,n,\varepsilon_1} b_n}{b_n} \leq x, \frac{M_{Y,n,\varepsilon_2} c_n}{c_n} \leq y \right) \\ &= \exp \left[- \left\{ \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{x}_\beta, \tilde{\varepsilon}_2)}{(\tilde{x}_\beta \tilde{\varepsilon}_2)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} + \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{y}_\gamma)}{(\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{y}_\gamma)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} - \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\gamma)}{(\tilde{x}_\beta \tilde{y}_\gamma)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

où $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2^{\frac{1}{\beta}}$ et $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^{\frac{1}{\gamma}}$.

Par (5.10) avec des marges Fréchet on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{x}_\beta, \tilde{\varepsilon}_2)}{(\tilde{x}_\beta \tilde{\varepsilon}_2)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} &= g_{(\beta,\gamma)}^{1,*} \left(\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2} \right) (x_\beta \tilde{\varepsilon}_2)^{-\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left\{ \min \left(\frac{\omega}{x_\beta}, \frac{1-\omega}{\tilde{\varepsilon}_2} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} \right\} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^{\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2}} \left(\frac{\omega}{x_\beta} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_{\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2}}^1 \left(\frac{1-\omega}{\tilde{\varepsilon}_2} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega). \end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{x}_\beta, \tilde{\varepsilon}_2)}{(\tilde{x}_\beta \tilde{\varepsilon}_2)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} = \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\tilde{x}_\beta} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_{\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2}}^1 \left(\frac{1-\omega}{\tilde{\varepsilon}_2} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega).$$

Puisque la mesure $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ est finie et vérifie la condition de normalisation (5.7) alors,

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2}}^1 \left(\frac{1-\omega}{\tilde{\varepsilon}_2} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}_2^{-\kappa(\beta,\gamma)} \int_{\frac{\tilde{x}_\beta}{\tilde{x}_\beta + \tilde{\varepsilon}_2}}^1 (1-\omega)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{x}_\beta, \tilde{\varepsilon}_2)}{(\tilde{x}_\beta \tilde{\varepsilon}_2)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left(\frac{\omega}{\tilde{x}_\beta} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\tilde{x}_\beta, \infty). \end{aligned}$$

Avec un raisonnement analogue,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{g_{(\beta,\gamma)}^1(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{y}_\gamma)}{(\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{y}_\gamma)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}}} &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left(\frac{1-\omega}{\tilde{y}_\gamma} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\infty, \tilde{y}_\gamma). \end{aligned}$$

Donc, par l'identité $\max(a, b) = a + b - \min(a, b)$ on a :

$$\begin{aligned} G_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, y) &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{M_{X,n,\varepsilon_1} b_n}{b_n} \leq \tilde{x}_\beta, \frac{M_{Y,n,\varepsilon_2} c_n}{c_n} \leq \tilde{y}_\gamma \right) \\ &= \exp \left\{ -V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\tilde{x}_\beta, \infty) - V_{\lambda(\alpha)}(\infty, \tilde{y}_\gamma) + \Lambda_{\kappa(\beta,\gamma)}(\tilde{x}_\beta, \infty) \times (\tilde{y}_\gamma, \infty) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left[\left(\frac{\omega}{\tilde{x}_\beta} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} + \left(\frac{1-\omega}{\tilde{y}_\gamma} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} - \min \left(\frac{\omega}{\tilde{x}_\beta}, \frac{1-\omega}{\tilde{y}_\gamma} \right)^{\kappa(\beta,\gamma)} \right] dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \right\} \\ &= \exp \left\{ -V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\tilde{x}_\beta, \tilde{y}_\gamma) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, y) &= \frac{1}{\kappa(\beta,\gamma)} \int_0^1 \left\{ \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) \right\}^{\kappa(\beta,\gamma)} dH_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) \\ &= \text{le nombre de points attendu de } N_{(\beta,\gamma)}(\cdot) \text{ qui arrivent dans } \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} R_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x, y). \end{aligned}$$

5.3 Modèles de dépendance pour les extrêmes multivariés

où $N_{(\beta,\gamma)}(\cdot)$ est le processus de Poisson limite du processus ponctuel

$$N_{n,\beta,\gamma}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1} \left\{ \left(\frac{X_i^{\frac{1}{\beta}}}{d_n}, \frac{Y_i^{\frac{1}{\gamma}}}{d_n} \right) \in \cdot \right\}.$$

□

Remarque 5.3.1. Pour tout (β, γ) dans $(0, \infty)^2$ on a :

$$i) \Lambda_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, \infty) \times (y, \infty) = V_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, \infty) + V_{\kappa(\beta,\gamma)}(\infty, y) - V_{\kappa(\beta,\gamma)}(x, y).$$

ii) Si la densité $h_{\kappa(\beta,\gamma)}$ de $H_{\kappa(\beta,\gamma)}$ existe alors $\frac{\partial^2 V_{\kappa(\beta,\gamma)}}{\partial x \partial y} = -r^{-(2+\kappa(\beta,\gamma))} h_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega)$, où $r = x + y$ et $\omega = x/(x + y)$.

5.3.2 Extension au cas multivarié

Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in (0, \infty)^d$ et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de dimension d avec des marges Fréchet unitaire. Pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ avec $x_i > 1$, $1 \leq i \leq d$, une généralisation du modèle (5.12) est donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}) n^{-\kappa(\boldsymbol{\alpha})} x_1^{-\frac{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_1}} x_2^{-\frac{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_2}} \dots x_d^{-\frac{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_d}} \quad (5.16)$$

où $\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} = (n^{\alpha_1}, n^{\alpha_2}, \dots, n^{\alpha_d})$, $\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x} = (n^{\alpha_1} x_1, \dots, n^{\alpha_d} x_d)$ et \mathcal{L} est une fonction à variation lente multivariée non standard c'est-à-dire vérifiant :

$$\lim_{\min(n^{\alpha_1}, \dots, n^{\alpha_d}) \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x})}{\mathcal{L}(\mathbf{n}^{\boldsymbol{\alpha}})} = g_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$$

avec $g_{\boldsymbol{\alpha}}\{(c^{\alpha_1}, \dots, c^{\alpha_d}) \mathbf{x}\} = g_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ pour tout $c > 0$.

Le résultat de la Proposition 1 peut être étendu à des dimensions $d > 2$.

Proposition 5.3.2. Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d) \in (0, \infty)^d$ fixé et considérons $R_{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n \mathbf{1}\}$ avec $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n = (\varepsilon_1 b_{n,1}, \dots, \varepsilon_d b_{n,d})$ où $b_{n,i}$, $i = 1, \dots, d$ vérifient $n \mathbb{P}\{\mathbf{X}_P > (b_{n,1}, \dots, b_{n,d})\} = 1$. On désigne par $M_{n, \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n}$ le vecteur des maxima de \mathbf{X} dans $R_{\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n}$. Alors la loi limite des maxima normalisés $M_{n, \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}_n}$ quand $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ et $n \rightarrow \infty$ est donnée par :

$$G_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x}) = \exp\{-V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})\} \quad (5.17)$$

avec la fonction de dépendance

$$V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\omega_j}{x_j} \right)^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} dH_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}),$$

où $H_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ est une mesure positive dans le simplexe unitaire

$$S_d = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_d) \in (0, \infty)^d : \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_d = 1 \right\}$$

satisfaisant la condition de normalisation suivante

$$\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S_d} \min_{1 \leq j \leq d} (\omega_j)^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} dH_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}). \quad (5.18)$$

De plus $V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ est homogène d'ordre $-\kappa(\boldsymbol{\alpha})$.

Démonstration. En utilisant (5.16) on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{n}^\alpha \mathbf{x})}{\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{n}^\alpha)} = g_\alpha(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^d x_i^{-\frac{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}{\alpha_i}}$$

Le processus ponctuel

$$\mathcal{N}_{n,\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1} \left\{ \left(\frac{(X_i^1)^{\frac{1}{\alpha_1}}}{d_n}, \dots, \frac{(X_i^d)^{\frac{1}{\alpha_d}}}{d_n} \right) \in \cdot \right\}$$

où $d_n = O(n^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}})$ vérifie $n\mathbb{P}(\mathbf{X} > (d_n^{\alpha_1}, \dots, d_n^{\alpha_d})) = 1$, converge faiblement quand $n \rightarrow \infty$ vers un processus Poisson non homogène \mathcal{N}_α dans $(0, \infty)^d$. D'autre part, à l'aide de (5.16) on vérifie aisément que le processus \mathcal{N}_α a pour intensité

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^* \{(x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_P > (d_n \mathbf{x})^\alpha)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_P > d_n^{\alpha_1}, \dots, d_n^{\alpha_d})} = g_\alpha^1(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^d x_i^{-\frac{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}{\alpha_i}} \\ &= \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \int_{S_d} \min_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\omega_j}{x_j} \right)^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} dH_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}), \end{aligned}$$

où $H_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ est une mesure positive dans le simplexe unitaire S_d . La mesure $H_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ doit satisfaire la condition de normalisation suivante :

$$\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S_d} \min_{1 \leq j \leq d} \omega_j^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} dH_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}). \quad (5.19)$$

En utilisant l'égalité

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha \{(x_1, \infty) \times \dots \times (x_d, \infty)\} &= \sum_{i=1}^d V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty, \infty, \dots, \infty) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty, x_j, \infty, \dots, \infty) \\ &\quad + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(x_1, \dots, x_d) \end{aligned} \quad (5.20)$$

un raisonnement analogue au cas bivarié permet d'avoir

$$\begin{aligned} G_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_{n,\varepsilon b_n} \leq \mathbf{x}) = \exp[-V_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\tilde{\mathbf{x}}_\alpha)] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\omega_j}{x_j^{\frac{1}{\alpha_j}}} \right)^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} dH_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}) \right] \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{x}}_\alpha = (x_1^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, x_d^{\frac{1}{\alpha_d}})$. □

5.4 Modèles paramétriques pour $H_{\kappa(\alpha)}$

Remarque 5.3.2. Les dérivées partielles de (5.20) par rapport à x_1, \dots, x_d sont données par l'équation

$$\frac{\partial^d V_{\kappa(\alpha)}}{\partial x_1 \dots \partial x_d}(x_1, \dots, x_d) = - \left(\sum_{j=1}^d x_j \right)^{-(d+\kappa(\alpha))} h_{\kappa(\alpha)} \left(\frac{x_1}{\sum_{j=1}^d x_j}, \dots, \frac{x_d}{\sum_{j=1}^d x_j} \right) \quad (5.21)$$

où $h_{\kappa(\alpha)}$ est la densité de $H_{\kappa(\alpha)}$.

Les résultats prouvés dans cette section seront d'intérêt pour le développement de la section suivante où l'on se propose de construire des modèles semi-paramétriques pour la mesure $H_{\kappa(\alpha)}$ sans contrainte de normalisation.

5.4 Modèles paramétriques pour $H_{\kappa(\alpha)}$

5.4.1 Construction de $H_{\kappa(\alpha)}$ à partir d'une mesure positive quelconque

La tâche la plus difficile dans l'application de la réciproque du théorème 5.2.1 est la vérification de la contrainte de normalisation (5.19) de la mesure $H_{\kappa(\beta, \gamma)}$ considérée. Dans la suite, nous généralisons un résultat de Qin et al. (2010) qui consiste à construire une mesure vérifiant cette contrainte à partir d'une mesure positive quelconque sur le simplexe

$$S_d = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_d) \in (0, \infty)^d : \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_d = 1 \right\}$$

pour laquelle il est possible d'expliciter la fonction de dépendance.

Théorème 5.4.1. Soit $\alpha \in (0, \infty)^d$ et h une mesure positive sur le simplexe unitaire $S_d = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_d) \in (0, \infty)^d : \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_d = 1 \right\}$ pour laquelle les moments $m_i = \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\alpha)} u_i^{\kappa(\alpha)} h(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$, $i = 1, \dots, d$ sont finis. Alors la fonction

$$\begin{aligned} h_{\kappa(\alpha)}(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{\left(\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} * \boldsymbol{\omega} \right)^{-(d+\kappa(\alpha))}}{\Delta} \prod_{i=1}^d m_i^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} h \left(\frac{m_1^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} \omega_1}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} * \boldsymbol{\omega}}, \dots, \frac{m_d^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} \omega_d}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} * \boldsymbol{\omega}} \right) \\ &\equiv \frac{h_*(\boldsymbol{\omega})}{\Delta} \end{aligned} \quad (5.22)$$

est une densité d'une mesure $H_{\kappa(\alpha)}$ satisfaisant la contrainte (5.19) avec $\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} * \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^d m_i^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}} \omega_i$ et

$$\Delta = d - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty) + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\alpha)}^*(1, \dots, 1)$$

où $V_{\kappa(\alpha)}^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{\omega_j}{x_j} \right)^{\kappa(\alpha)} h_*(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$.

Démonstration.

Pour toute mesure positive h sur S_d avec des moments m_i finis, la distribution suivante

$$G(\mathbf{y}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{u_i}{y_i^{\frac{1}{\alpha_i}}} \right) \right\}^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} h(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\}$$

désigne la loi limite des maxima normalisés des points \mathbf{Y} qui tombent dans la région $R_{\varepsilon \mathbf{b}_n} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} > \varepsilon \mathbf{b}_n \mathbf{1}\}$ avec la i ème composante Y_i de Y , suit une loi Fréchet de paramètre de position $\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ et de paramètre d'échelle m_i . Soit $\mathbf{X} = \mathbf{m}^{-\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \mathbf{Y}$. La i ème composante X_i suit une loi de Fréchet de paramètre de position $\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ et de paramètre d'échelle 1. La loi limite des maxima qui lui correspond est

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{u_i}{m_i^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} x_i^{\frac{1}{\alpha_i}}} \right) \right\}^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} h(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\}.$$

Par le changement de variable $u_i = \frac{m_i^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \omega_i}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega}}$, on a :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{\omega_i}{x_i^{\frac{1}{\alpha_i}}} \right) \right\}^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \frac{|J(\boldsymbol{\omega})|}{(\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega})^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} h \left(\frac{m_1^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \omega_1}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega}}, \dots, \frac{m_d^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \omega_d}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega}} \right) d\boldsymbol{\omega} \right\},$$

où $|J(\boldsymbol{\omega})| = (\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega})^{-d} \prod_{i=1}^d m_i^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}}$.

Considérons $h_*(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega})^{(-d-\kappa(\boldsymbol{\alpha}))} \prod_{i=1}^d m_i^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} h \left(\frac{m_1^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \omega_1}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega}}, \dots, \frac{m_d^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \omega_d}{\mathbf{m}^{\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}} \boldsymbol{\omega}} \right)$. Alors

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{\omega_i}{x_i^{\frac{1}{\alpha_i}}} \right) \right\}^{\kappa(\boldsymbol{\alpha})} h_*(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \right\}$$

est la loi limite des maxima normalisés (5.17), avec le paramètre de position $\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}$ et le paramètre d'échelle 1. Considérons $h_{\kappa(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\Delta} h_*(\boldsymbol{\omega})$; par (5.20), on vérifie aisément

5.4 Modèles paramétriques pour $H_{\kappa(\alpha)}$

que :

$$\begin{aligned}
\Delta \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\alpha)} \left\{ \min_{1 \leq i \leq d} \omega_i \right\}^{\kappa(\alpha)} h_{\kappa(\alpha)}(\omega) d\omega &= \int_{S_d} \frac{1}{\kappa(\alpha)} \left\{ \min_{1 \leq i \leq d} \omega_i \right\}^{\kappa(\alpha)} h_*(\omega) d\omega \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{S_d} (\omega_i)^{\kappa(\alpha)} h_*(\omega) d\omega - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{S_d} \{\max(\omega_i, \omega_j)\}^{\kappa(\alpha)} h_*(\omega) d\omega \\
&\quad + \dots + (-1)^{d+1} \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{S_d} \{\max_{1 \leq i \leq d}(\omega_i)\}^{\kappa(\alpha)} h_*(\omega) d\omega \\
&= \sum_{i=1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, \dots, \infty) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty) \\
&\quad + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\alpha)}^*(1, \dots, 1) \\
&= d - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty) \\
&\quad + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\alpha)}^*(1, \dots, 1) \\
&= \Delta.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\kappa(\alpha) = \int_{S_d} \left\{ \min_{1 \leq i \leq d} \omega_i \right\}^{\kappa(\alpha)} h_{\kappa(\alpha)}(\omega) d\omega$$

et par suite $h_{\kappa(\alpha)}$ est la densité d'une mesure $H_{\kappa(\alpha)}$ vérifiant la contrainte de normalisation (5.19). \square

5.4.2 Exemples

Exemple A: Le modèle $\kappa(\alpha)$ -Dirichlet.

En 1991, Coles et Tawn (Coles and Tawn, 1991) ont introduit un modèle de Dirichlet modifié qui vérifie la contrainte classique (2.8) des loi max-stables. Ci-dessous, nous généralisons leur résultat par l'introduction du modèle $\kappa(\alpha)$ -Dirichlet.

Soit $h(\omega) = \left\{ \prod_{i=1}^d \Gamma(\beta_i) \right\}^{-1} \Gamma(\beta \cdot \mathbf{1}) \prod_{i=1}^d \omega^{\beta_i - 1}$, la densité de Dirichlet où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit scalaire usuel entre \mathbf{x} et \mathbf{y} . Comme le i ème moment de h $m_i = \frac{1}{\kappa(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta \cdot \mathbf{1}) \Gamma(\beta_i + \kappa(\alpha))}{\Gamma(\beta_i) \Gamma(\beta \cdot \mathbf{1} + \kappa(\alpha))}$ est fini, par le théorème 5.4.1 on a :

$$\begin{aligned}
h_{\kappa(\alpha)}(\omega) &= \frac{h_{\kappa(\alpha)}^*(\omega)}{\Delta} \\
&= \frac{\kappa(\alpha)}{\Delta} \prod_{i=1}^d \frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i + \kappa(\alpha)) \Gamma(\beta \cdot \mathbf{1} + \kappa(\alpha))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)} + 1}(\beta_i) \left\{ \sum_{i=1}^d \frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i + \kappa(\alpha))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i)} \omega_i \right\}^{d + \gamma(\alpha)}} \prod_{i=1}^d \left\{ \frac{\frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i + \kappa(\alpha))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i)} \omega_i}{\sum_{i=1}^d \frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i + \kappa(\alpha))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\alpha)}}(\beta_i)} \omega_i} \right\}^{\beta_i - 1}.
\end{aligned}$$

Dans un souci de simplification, on se limite au cas bivarié ($d = 2$). En notant $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta, \gamma)$, $\gamma_1 = \frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}}(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}}(\beta_1)}$ et $\gamma_2 = \frac{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}}(\beta_2 + \kappa(\beta, \gamma))}{\Gamma^{\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}}(\beta_2)}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
h_{\kappa(\beta, \gamma)}^*(\omega) &= \\
&= \frac{\kappa(\beta, \gamma) \gamma_1 \gamma_2 \Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \kappa(\beta, \gamma))}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2)} \{\gamma_1 \omega + (1 - \omega) \gamma_2\}^{-2 - \kappa(\beta, \gamma)} \left\{ \frac{\gamma_1 \omega}{\gamma_1 \omega + (1 - \omega) \gamma_2} \right\}^{\beta_1 - 1} \left\{ \frac{(1 - \omega) \gamma_2}{\gamma_1 \omega + (1 - \omega) \gamma_2} \right\}^{\beta_2 - 1}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

D'après (5.13), l'expression de $V_{\kappa(\beta,\gamma)}^*$ est donc

$$V_{\kappa(\beta,\gamma)}^*(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^{\kappa(\beta,\gamma)}} \left\{ 1 - Be\left(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2; \frac{\gamma_1 x_1}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}\right) \right\} + \frac{1}{x_2^{\kappa(\beta,\gamma)}} \left\{ Be\left(\beta_1, \beta_2 + \kappa(\beta, \gamma); \frac{\gamma_1 x_1}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}\right) \right\}$$

où $Be(\beta_1, \beta_2, u) = \frac{\Gamma(\beta_1 + \beta_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} \int_0^u \omega^{\beta_1 - 1} (1 - \omega)^{\beta_2 - 1} d\omega$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta &= V_{\kappa(\beta,\gamma)}^*(1, \infty) + V_{\kappa(\beta,\gamma)}^*(\infty, 1) - V_{\kappa(\beta,\gamma)}^*(1, 1) \\ &= 1 + Be(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2, \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}) - Be(\beta_1, \beta_2 + \kappa(\beta, \gamma), \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}). \end{aligned}$$

Par les équations (5.9) et (5.23), on vérifie que la fonction $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$ correspondant à ce modèle s'écrit

$$\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x, y) = \Delta^{-1} \left[x^{-\kappa(\beta,\gamma)} Be(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2, \frac{\gamma_1 x}{\gamma_1 x + \gamma_2 y}) + y^{-\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ 1 - Be(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2, \frac{\gamma_1 x}{\gamma_1 x + \gamma_2 y}) \right\} \right].$$

En conséquence en utilisant (5.6), la fonction de dépendance $g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}$ correspondante est

$$g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}(\omega) = \Delta^{-1} \left\{ \omega(1 - \omega) \right\}^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{2}} \times \left[(\omega)^{-\kappa(\beta,\gamma)} Be(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2, \frac{\gamma_1 \omega}{\gamma_1 \omega + \gamma_2 (1 - \omega)}) + (1 - \omega)^{-\kappa(\beta,\gamma)} \left\{ 1 - Be(\beta_1 + \kappa(\beta, \gamma), \beta_2, \frac{\gamma_1 \omega}{\gamma_1 \omega + \gamma_2 (1 - \omega)}) \right\} \right].$$

Afin de déterminer les cas de ray-indépendance, de symétrie ou de concavité de la fonction de dépendance, on pourra étudier les allures des courbes tridimensionnelles de $\log(g_{(\beta,\gamma)}^{1,*})$ en fonction de deux variables choisies parmi les trois paramètres β_1 , β_2 et $\kappa(\beta, \gamma)$ avec (β, γ) fixé. Par exemple, le cas particulier $(\beta, \gamma) = (1/2, 1/2)$ correspond à $\kappa(\beta, \gamma) = \frac{1}{\eta}$, et le comportement de la fonction de dépendance en fonction des paramètres β_1 , β_2 et η a été étudié par Qin et al. (2010).

Exemple B: *Le modèle asymétrique logistique.*

Étant donné un entier $d \geq 2$, Tawn (1991) a proposé le modèle asymétrique logistique avec la fonction de dépendance suivante :

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{c \in C} \left\{ \sum_{i \in c} (\theta_{i,c}/x_i)^{r_c} \right\}^{1/r_c}$$

où C est l'ensemble des sous ensembles non vides de $\{1, \dots, d\}$. Les paramètres sont contraints par $r_c \geq 1$ pour tout $c \in C$, $\theta_{i,c} = 0$ si $i \notin c$, $\theta_{i,c} \geq 0$, $i = 1, \dots, d$ et $\sum_{c \in C} \theta_{i,c} = 1$. Pour tout α , la fonction de dépendance associée au $\kappa(\alpha)$ -modèle asymétrique logistique multivarié peut être définie comme suit :

$$V_{\kappa(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Phi} \sum_{c \in C} \left\{ \sum_{i \in c} (\theta_{i,c}/x_i)^{r_c} \right\}^{\kappa(\alpha)/r_c}$$

5.4 Modèles paramétriques pour $H_{\kappa(\alpha)}$

où

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{i=1}^d V_{\kappa(\alpha)}^* (\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, \infty, \dots, \infty) \\ & - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\alpha)}^* (\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty) \\ & + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\alpha)}^* (1, \dots, 1) \end{aligned}$$

$$\text{et } V_{\kappa(\alpha)}^*(\mathbf{x}) = \sum_{c \in C} \left\{ \sum_{i \in c} (\theta_{i,c}/x_i)^{r_c} \right\}^{\kappa(\alpha)/r_c}.$$

$$\text{Pour } d = 2 \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta, \gamma), \Phi = \theta_1^{\kappa(\beta, \gamma)} + \theta_2^{\kappa(\beta, \gamma)} - \left(\theta_1^{\frac{1}{t}} + \theta_2^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{1}{t}}.$$

Pour tout $t \in (0, 1)$, Φ s'annule sur la courbe de niveau $\kappa(\beta, \gamma) = 1/t$. En conséquence pour tout couple (β, γ) vérifiant $\kappa(\beta, \gamma) \neq 1/t$ on a :

$$V_{\kappa(\beta, \gamma)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\theta_1^{\kappa(\beta, \gamma)} + \theta_2^{\kappa(\beta, \gamma)} - \left(\theta_1^{\frac{1}{t}} + \theta_2^{\frac{1}{t}} \right)^{\kappa(\beta, \gamma)t}} \left\{ \left[\left(\frac{x_1}{\theta_1} \right)^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{x_2}{\theta_2} \right)^{-\frac{1}{t}} \right]^{t\kappa(\beta, \gamma)} + \frac{1-\theta_1}{x_1^{\kappa(\beta, \gamma)}} + \frac{1-\theta_2}{x_2^{\kappa(\beta, \gamma)}} \right\}$$

où $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1]$ et $t \in (0, 1)$. Par (5.21) il est facile de vérifier que

$$h_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega) = \frac{\kappa(\beta, \gamma) - \kappa(\beta, \gamma)^2 t}{t\theta_1\theta_2 \left\{ \theta_1^{\kappa(\beta, \gamma)} + \theta_2^{\kappa(\beta, \gamma)} - \left(\theta_1^{\frac{1}{t}} + \theta_2^{\frac{1}{t}} \right)^{t\kappa(\beta, \gamma)} \right\}} \left\{ \left(\frac{\omega}{\theta_1} \right)^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1-\omega}{\theta_2} \right)^{-\frac{1}{t}} \right\}^{t\kappa(\beta, \gamma)-2} \left\{ \frac{\omega(1-\omega)}{\theta_1\theta_2} \right\}^{-(1+\frac{1}{t})}. \quad (5.24)$$

En posant $\varrho = \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$, le nombre de paramètres de ce modèle est réduit de 1. Par suite

$$h_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega) = \frac{\kappa(\beta, \gamma) - \kappa(\beta, \gamma)^2 t}{t \left\{ \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} + \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} - \left(\varrho^{\frac{1}{t}} + \varrho^{-\frac{1}{t}} \right)^{t\kappa(\beta, \gamma)} \right\}} \left\{ (\varrho\omega)^{-\frac{1}{t}} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho} \right)^{-\frac{1}{t}} \right\}^{t\kappa(\beta, \gamma)-2} \left\{ \omega(1-\omega) \right\}^{-(1+\frac{1}{t})}. \quad (5.25)$$

On rappelle que la fonction κ est homogène d'ordre 1, donc $\kappa(\beta, \gamma) = (\beta + \gamma)\kappa(\alpha, 1 - \alpha)$ où $\alpha = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$. En pratique le cas $\beta + \gamma = 1$ est suffisant pour mettre en évidence un modèle qui permet d'extrapoler dans toutes les directions du premier quadrant positif et le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ correspond à $\kappa(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{1}{\eta}$. En conséquence en posant

$N_\varrho = \varrho^{\frac{1}{\eta}} + \varrho^{-\frac{1}{\eta}} - \left(\varrho^{\frac{1}{t}} + \varrho^{-\frac{1}{t}} \right)^{\frac{t}{\eta}}$, nous retrouvons le modèle asymétrique logistique considéré par Ramos et Ledford (pour plus de détails voir Ramos and Ledford (2009)).

En utilisant (5.9) et (5.25) on vérifie que la fonction $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$ correspondante à ce modèle s'écrit

$$\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x, y) = N_\varrho^{-1} \left[(x\varrho)^{-\kappa(\beta, \gamma)} + \left(\frac{y}{\varrho} \right)^{-\kappa(\beta, \gamma)} - \left\{ (x\varrho)^{-1/t} + \left(\frac{y}{\varrho} \right)^{-1/t} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t} \right]. \quad (5.26)$$

En conséquence en utilisant (5.6), la fonction de dépendance $g_{(\beta, \gamma)}^1$ est explicitée

$$g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}(\omega) = \frac{\{\omega(1-\omega)\}^{\kappa(\beta, \gamma)/2}}{N_\varrho} \left[(\varrho\omega)^{-\kappa(\beta, \gamma)} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho} \right)^{-\kappa(\beta, \gamma)} - \left\{ (\varrho\omega)^{-1/t} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho} \right)^{-1/t} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t} \right].$$

Soit $t \in (0, 1)$. La courbe de niveau $\kappa(\beta, \gamma) = 2/t$ donne tous les cas de ray-indépendance. En effet, dans ce cas en utilisant l'identité $a^2 + b^2 - (a + b)^2 = -2ab$ on obtient

$$g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}(\omega) = \frac{\{(\omega)(1-\omega)\}^{\frac{1}{t}}}{N_\varrho} \left[\left\{ (\varrho\omega)^{-\frac{1}{t}} \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{1-\omega}{\varrho} \right)^{-\frac{1}{t}} \right\}^2 - \left\{ (\varrho\omega)^{-1/t} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho} \right)^{-1/t} \right\}^2 \right] \\ = \frac{-2}{N_\varrho}$$

ce qui prouve que la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}$ est constante. Si de plus $\varrho = 1$, alors pour tout $\omega \in (0, 1)$, $g_{(\beta, \gamma)}^{1,*} \equiv 1$, ce qui correspond au cas de la symétrie et de la ray-indépendance de la fonction de dépendance $g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}$.

Pour montrer qu'il n'existe pas d'autres cas de ray-indépendance, on vérifie facilement que pour tous (β, γ) et ω fixés, les dérivées partielles de la fonction $g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}$ respectivement par rapport à la variable t et à la variable κ ne s'annulent pas indépendamment de ω .

On remarque que l'asymétrie implique la ray-dépendance. En effet, dans ce cas il existe au moins un $\omega \in (0, 1)$ tel que $g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}(\omega) \neq g_{(\beta, \gamma)}^{1,*}(1 - \omega)$ ce qui veut dire que la fonction de dépendance n'est pas constante et est donc ray-dépendante.

Exemple C: *Le modèle asymétrique logistique négatif transformé.*

Pour satisfaire la contrainte (5.19), le modèle logistique négatif multivarié introduit par Joe (1997) peut être transformé de la façon suivante :

$$V_{\kappa(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Phi} \sum_{i=1}^d \frac{1}{x_i^{\kappa(\alpha)}} - \frac{1}{\Phi} \sum_{c \in C: |c| \geq 2} (-1)^{|c|} \left\{ \sum_{i \in C} \left(\frac{\theta_{i,c}}{x_i} \right)^{r_c} \right\}^{\frac{\kappa(\alpha)}{r_c}}$$

avec comme contraintes sur les paramètres $r_c < 0$ pour tout $c \in C$, $\theta_{i,c} = 0$ si $i \notin c$, $\theta_{i,c} > 0$ pour tout $c \in C$ et $\sum_{c \in C} (-1)^{|c|} \theta_{i,c} \leq 1$, où C désigne tous les sous ensembles non vides de $\{1, \dots, d\}$ et $|c|$ le cardinal du sous ensemble c . La valeur de Φ est donnée par

$$\Phi = \sum_{i=1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, \infty, \dots, \infty) \\ - \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d V_{\kappa(\alpha)}^*(\infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty, 1, \infty, \dots, \infty) \\ + \dots + (-1)^{d+1} V_{\kappa(\alpha)}^*(1, \dots, 1)$$

où $V_{\kappa(\alpha)}^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{1}{x_i^{\kappa(\alpha)}} - \sum_{c \in C: |c| \geq 2} (-1)^{|c|} \left\{ \sum_{i \in C} \left(\frac{\theta_{i,c}}{x_i} \right)^{r_c} \right\}^{\frac{\kappa(\alpha)}{r_c}}$.

Pour $d = 2$, $\theta_j = \theta_{j, \{1,2\}}$, $j = 1, 2$, $r = r_{\{1,2\}}$ et $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta, \gamma)$, on a :

$$V_{\kappa(\beta, \gamma)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(\theta_1^r + \theta_2^r)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}}} \left[\frac{1}{x_1^{\kappa(\beta, \gamma)}} + \frac{1}{x_2^{\kappa(\beta, \gamma)}} - \left\{ \left(\frac{\theta_1}{x_1} \right)^r + \left(\frac{\theta_2}{x_2} \right)^r \right\}^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}} \right]$$

et par (5.21) on obtient

$$h_{\kappa(\beta, \gamma)}(\omega) = \frac{\kappa(\beta, \gamma)(\kappa(\beta, \gamma) - r)}{(\theta_1^r + \theta_2^r)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}}} (\theta_1 \theta_2)^r \{\omega(1 - \omega)\}^{-r-1} \left\{ \left(\frac{\omega}{\theta_1} \right)^{-r} + \left(\frac{1-\omega}{\theta_2} \right)^{-r} \right\}^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r} - 2}.$$

5.5 Inférence et simulation

De même que l'exemple précédent, en posant $\varrho = \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$, la densité $h_{\kappa(\beta,\gamma)}$ s'écrit :

$$h_{\kappa(\beta,\gamma)}(\omega) = \frac{\kappa(\beta,\gamma)(\kappa(\beta,\gamma)-r)}{(\varrho^{-r} + \varrho^r)^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{r}}} \{\omega(1-\omega)\}^{-r-1} \left\{ (\omega\varrho)^{-r} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho}\right)^{-r} \right\}^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{r}-2}.$$

En utilisant (5.9), on vérifie que pour tout $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$

$$\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}(x, y) = M_\varrho^{-1} \left\{ (x\varrho)^{-r} + \left(\frac{y}{\varrho}\right)^{-r} \right\}^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{r}} \quad (5.27)$$

et en utilisant (5.6)

$$g_{(\beta,\gamma)}^{1,*}(\omega) = M_\varrho^{-1} \{\omega(1-\omega)\}^{\kappa(\beta,\gamma)/2} \left\{ (\omega\varrho)^{-r} + \left(\frac{1-\omega}{\varrho}\right)^{-r} \right\}^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{r}} \quad (5.28)$$

où $M_\varrho = \{(\varrho)^r + (\varrho)^{-r}\}^{\frac{\kappa(\beta,\gamma)}{r}}$. La figure (5.1) donne la courbe de $\log(g_{(\beta,\gamma)}^{1,*})$ en fonction de deux paramètres parmi les trois paramètres r , ϱ et $\kappa(\beta, \gamma)$ avec (β, γ) fixé. Le premier cas **a** correspond à $\varrho = 1$ donc le cas de symétrie et la forme de la courbe montre une ray-dépendance de la fonction à variation lente. Pour les deux autres cas **b** et **c** $\varrho \neq 1$, donc le modèle est ray-dépendant. On en déduit que ce modèle est mieux adapté au cas de ray-dépendance.

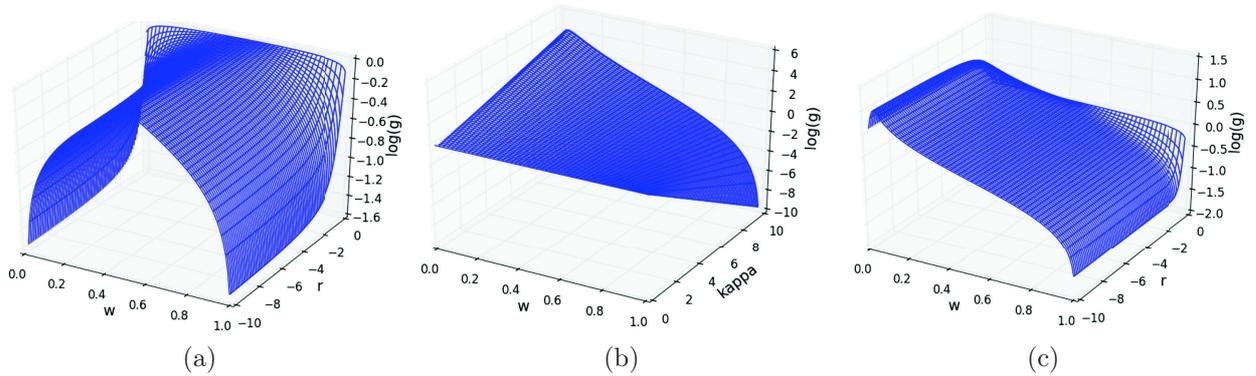


Fig 5.1: Courbe de $\log(g_{(\beta,\gamma)}^{1,*})$ (a) : en fonction de ω et κ pour $\varrho = 1$ et $r = -3$; (b) : en fonction de ω et r pour $\varrho = 5$ et $\kappa \equiv 1.33$; (c) : en fonction de ω et r pour $\varrho = 1$ et $\kappa \equiv 1$

5.5 Inférence et simulation

5.5.1 Simulation de (S_β, T_γ) satisfaisant (5.27).

Dans la section précédente on a présenté trois exemples de distributions dont les mesures pseudo-radiales vérifient la condition de normalisation (5.19). Les fonctions $\bar{F}_{S_\beta T_\gamma}$ corre-

spondant aux exemples A et B ont été présentées dans un cas particulier $(\beta, \gamma) = (1/2, 1/2)$ respectivement par Qin et al. (2010) et Ramos and Ledford (2009).

Afin d'examiner la capacité du modèle asymétrique logistique négatif transformé à représenter les différents cas de dépendance extrême, on se propose de simuler, avec (β, γ) fixé, 1000 réalisations du vecteur (S_β, T_γ) satisfaisant (5.27), tout en variant les valeurs des paramètres r, ϱ . Pour ceci, nous détaillons une approche appliquée par Shi et al. (1992) pour simuler le modèle logistique puis par Ramos et Ledford en 2009 pour simuler la loi logistique asymétrique. La densité de (S_β, T_γ) s'écrit

$$f_{S_\beta T_\gamma}(x, y) = \frac{(\kappa(\beta, \gamma) - r)\kappa(\beta, \gamma)}{M_\varrho} (xy)^{-r-1} \left\{ (x\varrho)^{-r} + \left(\frac{y}{\varrho}\right)^{-r} \right\}^{\frac{\kappa}{r}-2}.$$

On considère le changement des variables suivant $S_\beta = \varrho^{-1} Z^{-\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}} (\cos V)^{-\frac{2}{r}}$ et $T_\gamma = \varrho Z^{-\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}} (\sin V)^{-\frac{2}{r}}$. La densité du vecteur (Z, V) est donnée par

$$f_{ZV}(z, v) = \frac{2(r - \kappa(\beta, \gamma))}{rM_\varrho} \sin(v) \cos(v)$$

et est définie sur $\left\{0 \leq z \leq \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\cos v)^{-\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}}\right\}$, si $0 < v < v^*$, et sur $\left\{0 \leq z \leq \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} (\sin v)^{-\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}}\right\}$ si $v^* < v < \frac{\pi}{2}$ où v^* est la valeur de v qui correspond au cas limite $(S_\beta, T_\gamma) = (1, 1)$. En effet, dans ce cas $\varrho^2 = \tan^{\frac{2}{r}}(v^*)$ et comme la fonction \tan est inversible sur $]0, \pi/2[$, on en déduit que $v^* = \tan^{-1}(\varrho^r)$.

La densité f_V de la variable V est donnée par :

$$f_V(v) = \begin{cases} \int_0^{\varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\cos v)^{-\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}}} f_{ZV}(z, v) dz = \frac{2(r - \kappa(\beta, \gamma)) \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\cos v)^{1-2\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}} \sin(v)}{rM_\varrho} & \text{si } v \in (0, v^*), \\ \int_0^{\varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} (\sin v)^{-\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}}} f_{ZV}(z, v) dz = \frac{2(r - \kappa(\beta, \gamma)) \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} (\sin v)^{1-2\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}} \cos(v)}{rM_\varrho} & \text{si } v \in (v^*, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Par conséquent la fonction de distribution de V est

$$F_V(v) = \begin{cases} M_\varrho^{-1} \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} \left(1 - (\cos v)^{2(1-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r})}\right) & \text{si } v \in (0, v^*), \\ M_\varrho^{-1} \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} \left\{-\varrho^{r-\kappa(\beta, \gamma)} (\varrho^{-r} + \varrho^r)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}-1} + (\sin v)^{2(1-\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r})}\right\} & \text{si } v \in (v^*, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

On vérifie aisément que la variable $Z/V = v$ suit une loi uniforme sur $(0, \pi/2)$ avec la densité

$$f_{Z/V=v}(z) = \begin{cases} \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} (\cos v)^{\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}} & \text{si } v \in (0, v^*), \\ \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\sin v)^{\frac{2\kappa(\beta, \gamma)}{r}} & \text{si } v \in (v^*, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

On construit V et Z de la façon suivante :

$$V = \begin{cases} \cos^{-1} \left\{ \left(1 - M_\varrho \varrho^{\kappa(\beta, \gamma)} U_1\right)^{\frac{r}{2(r-\kappa(\beta, \gamma))}} \right\} & \text{si } U_1 \in (0, u^*), \\ \sin^{-1} \left[\left\{ \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} M_\varrho U_1 + \varrho^{r-\kappa(\beta, \gamma)} (\varrho^r + \varrho^{-r})^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}-1} \right\}^{\frac{r}{2(r-\kappa(\beta, \gamma))}} \right] & \text{si } U_1 \in (u^*, 1). \end{cases} \quad (5.29)$$

5.5 Inférence et simulation

$$Z = \begin{cases} U_2 \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\cos v)^{\frac{-2\kappa(\beta, \gamma)}{r}} & \text{si } U_1 \in (0, u^*), \\ U_2 \varrho^{-\kappa(\beta, \gamma)} (\sin v)^{\frac{-2\kappa(\beta, \gamma)}{r}} (v) & \text{si } U_1 \in (u^*, 1) \end{cases} \quad (5.30)$$

où U_1, U_2 sont deux variables indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et

$$u^* = \{M_\varrho(\varrho^{-r} + \varrho^r)\}^{-1} \left\{ \varrho^{r-\kappa(\beta, \gamma)} - (\varrho^{-r} + \varrho^r)^{\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{r}} - 1 \right\}.$$

Ainsi on peut générer des observations bivariées indépendantes du vecteur (S_β, T_γ) satisfaisant (5.27) selon l'algorithme suivant :

- ↪ générer deux variables aléatoires uniformes et indépendantes U_1 et U_2 sur $[0, 1]$,
- ↪ définir V et Z en utilisant les expressions (5.29) et (5.30),
- ↪ définir le vecteur (S_β, T_γ) par $S_\beta = \varrho^{-1} Z^{-\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}} (\cos V)^{-\frac{2}{r}}$ et $T_\gamma = \varrho Z^{-\frac{1}{\kappa(\beta, \gamma)}} (\sin V)^{-\frac{2}{r}}$.

La figure (5.2) présente quelques simulations du modèle asymétrique logistique négatif pour différents paramètres r, ϱ et κ .

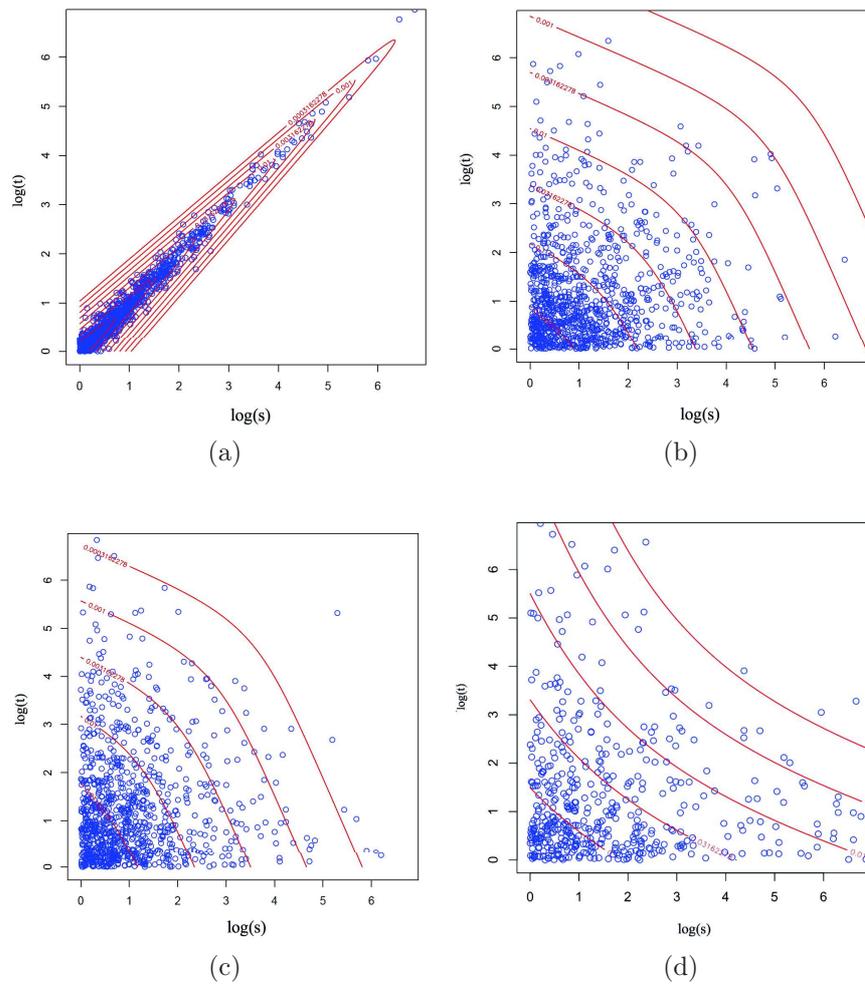


Fig 5.2: Simulation de 1000 réalisations de (S_β, T_γ) par l'algorithme (5.5.1). (a) : $r = -1$, $\kappa \equiv 1$ et $\varrho = 1$; (b) : $r = -1$, $\kappa \equiv 1.7$ et $\varrho = 1$; (c) : $r = -2$, $\kappa \equiv 1.3$ et $\varrho = 5$; (d) : $r = -0.33$, $\kappa \equiv 1.3$ et $\varrho = 3$.

5.5.2 Vraisemblance

Soit $(x, y) \in (u, \infty)^2$ où u est un seuil très élevé et $\tau_u = P(X_P^{\frac{1}{\beta}} > u, Y_P^{\frac{1}{\gamma}} > u) = P(X_P > u^\beta, Y_P > u^\gamma)$

$$\bar{F}_{X_P^{\frac{1}{\beta}} Y_P^{\frac{1}{\gamma}}}(x, y) = \tau_u \bar{F}_{S_\beta T_\gamma} \left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u} \right)$$

Par suite la fonction $\bar{F}_{X_P Y_P}$ correspondant au modèle asymétrique logistique détaillé dans l'exemple B ci dessus est

$$\bar{F}_{X_P Y_P}(x, y) = \tau_u u^{\kappa(\beta, \gamma)} N_\varrho^{-1} \left[\left(x \varrho^\beta \right)^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{\beta}} + \left(\frac{y}{\varrho^\gamma} \right)^{\frac{-\kappa(\beta, \gamma)}{\gamma}} \left\{ \left(x \varrho^\beta \right)^{-1/t\beta} + \left(\frac{y}{\varrho^\gamma} \right)^{-1/t\gamma} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t} \right] \quad (5.31)$$

Dans la suite on se propose d'estimer les paramètres du modèle (5.31) par maximum de vraisemblance. Le choix de ce modèle parmi les trois proposés ci-dessus est justifié par le fait qu'il est plus flexible pour la représentation des dépendances extrémales avec ray-dépendance ou ray-indépendance. En effet, l'étude des courbes des fonctions de dépendances dans Ramos and Ledford (2009) pour le modèle de l'exemple B, dans Qin et al. (2010) pour l'exemple A et dans la section 4 de ce chapitre pour l'exemple C, montre que la fonction de dépendance du modèle asymétrique logistique est la plus adaptée au cas de ray-indépendance. C'est en particulier le cas pour la distribution normale qui est asymptotiquement indépendante et ray-indépendante.

Nous avons utilisé une vraisemblance censurée de la même façon que Ledford et Tawn (Ledford and Tawn, 1997) pour le modèle (5.31). On désigne par $\{(X_{P,i}, Y_{P,i}), i = 1, \dots, n\}$, n réalisations indépendantes d'un vecteur (X_P, Y_P) de marge Paréto standard. Pour $(\beta, \gamma) \in (0, \infty)^2$ fixé, toutes les observations marginales au dessous du seuil u , choisi comme étant le quantile empirique à 95% de la variable $\min \left(X_P^{\frac{1}{\beta}}, Y_P^{\frac{1}{\gamma}} \right)$, seront censurées au seuil u . On partitionne $(1, \infty)^2$ en quatre régions $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ de la façon suivante : $R_{ij} = \left\{ (x, y) \in (1, \infty)^2 : \mathbb{1}_{\{x > u^\beta\}} = i, \mathbb{1}_{\{y > u^\gamma\}} = j \right\}$.

Désignons par $L_{ij}(x_0, y_0)$, la contribution à la vraisemblance des points (x_0, y_0) de la région R_{ij} , on a :

$$\begin{aligned} L_{00}(x_0, y_0) &= 2F(u) - 1 + \bar{F}_{X_P Y_P}(u^\beta, u^\gamma). \\ L_{10}(x_0, y_0) &= f(x_0) + \frac{\partial \bar{F}_{X_P Y_P}(x, u^\gamma)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \\ L_{01}(x_0, y_0) &= f(y_0) + \frac{\partial \bar{F}_{X_P Y_P}(u^\beta, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0}. \\ L_{11}(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 \bar{F}_{X_P Y_P}(x; y)}{\partial y \partial x} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \end{aligned}$$

où $F(x) = 1 - 1/x$ et $f(x) = 1/x^2$ sont respectivement la distribution et la densité de la loi Pareto standard. En considérant le modèle (5.31), on obtient

$$L_{00}(x_0, y_0) = 1 - 2/u + \tau_u$$

$$\begin{aligned}
 L_{10}(x_0, y_0) &= \\
 f(x_0) - \frac{\tau_u \kappa(\beta, \gamma) u^{\kappa(\beta, \gamma)} e^\beta}{N_\rho \rho^\beta} &\left[(x_0 \rho^\beta)^{-\left(\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{\beta} + 1\right)} - \left\{ (x_0 \rho^\beta)^{-1/t\beta} + \left(\frac{u}{\rho^\gamma}\right)^{-1/t\gamma} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t-1} (x_0 \rho^\beta)^{-(1+1/t\beta)} \right] \\
 L_{01}(x_0, y_0) &= \\
 f(y_0) - \frac{\tau_u u^{\kappa(\beta, \gamma)} \kappa(\beta, \gamma)}{N_\rho \rho^\gamma} &\left[\left(\frac{y_0}{\rho^\gamma}\right)^{-\left(\frac{\kappa(\beta, \gamma)}{\gamma} + 1\right)} - \left\{ (u \rho^\beta)^{-1/t\beta} + \left(\frac{y_0}{\rho^\gamma}\right)^{-1/t\gamma} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t-1} \left(\frac{y_0}{\rho^\gamma}\right)^{-(1+1/t\gamma)} \right] \\
 L_{11}(x_0, y_0) &= \\
 \frac{\tau_u u^{\kappa(\beta, \gamma)} (-\kappa(\beta, \gamma)t + \kappa(\beta, \gamma)^2 t) \rho^{\beta-\gamma}}{t N_\rho \beta \gamma} &\left[\left\{ (x_0 \rho^\beta)^{-1/t\beta} + \left(\frac{y_0}{\rho^\gamma}\right)^{-1/t\gamma} \right\}^{\kappa(\beta, \gamma)t-2} (x_0 \rho^\beta)^{-(1+1/t\beta)} \left(\frac{y_0}{\rho^\gamma}\right)^{-(1+1/t\gamma)} \right].
 \end{aligned}$$

Pour illustrer la performance du modèle (5.31) en terme de flexibilité d'extrapolation suivant tous les angles, nous suivons tout d'abord Ramos and Ledford (2009), en comparant les contours des densités jointes obtenues par maximum de vraisemblance de 2500 réalisations en marges Paréto avec les contours des vraies densités et ceci pour deux distributions. La première est la loi normale avec une corrélation $\rho = 0.5$, ce qui correspond à $\eta = 0.75$ donc une indépendance asymptotique avec une association positive. Le deuxième exemple considéré est la loi normale avec une corrélation $\rho = -0.5$ ce qui correspond à $\eta = 0.25$ donc une indépendance asymptotique avec une association négative. Pour chacune des deux distributions, on a considéré deux valeurs du couple (β, γ) . Le premier couple $(\beta, \gamma) = (1, 1)$, ou d'une façon équivalente $\alpha = 0.5$, permet de retrouver le modèle (3.8) de Ramos et Ledford (2009) avec des marges Paréto au lieu des marges Fréchet unitaire. Les résultats des deux exemples correspondant à ce couple (β, γ) sont illustrés dans les figures (5.3) (a) et (5.4) (a). Comme attendu puisque $\alpha = 1/2$, ces deux figures coïncident respectivement avec les figures (d) et (f) de la figure 3 de la section 5 de Ramos and Ledford (2009). Le deuxième couple considéré est $(\beta, \gamma) = (0.3, 0.7)$. Les résultats de ce cas sont illustrés dans les figures (5.3) (b) et (5.4) (b). Les segments de droite tracés dans les figures (5.3) et (5.4) correspondent respectivement à la droite linéaire de coefficient directeur $\alpha/(1 - \alpha)$ (trait en pointillé) et à la droite obtenue via l'approche proposée en section 4.5.1 (trait continu). Il est intéressant de constater que non seulement notre approche permet d'obtenir des estimations des probabilités de queue sur tout le quadrant considéré mais surtout que ces dernières semblent bien coïncider le long des directions fixées par la valeur de (β, γ) . Cela signifie qu'en pratique, pour toute valeur de (β, γ) connue, une estimation de qualité est atteignable. Par ailleurs, comme la procédure de la section 4.5.1 semble encore améliorer les résultats pour un (β, γ) fixé, il est vraisemblable qu'en pratique une approche de type régression sur un sous-ensemble donné comme en section 4.5.2 permettrait encore d'améliorer l'estimation des probabilités considérées.

Ensuite, pour permettre de comparer au mieux notre approche avec celle de Ramos et Ledford, nous nous plaçons dans le même contexte que celui utilisé dans le chapitre précédent, en estimant les probabilités des intervalles de la forme $(y\alpha/(1 - \alpha), \infty) \times (y, \infty)$ par les deux approches. Pour chaque distribution considérée, nous avons généré 5000 points avec des marges exponentielles et nous avons gardé 10% des données à des fins d'estimation. Ce processus a été répété 500 fois, en fixant $y = 1.5 \log 5000$ et en multipliant y par $\alpha/(1 - \alpha)$ pour obtenir la valeur de l'abscisse x , ceci pour la séquence des valeurs du pseudo angle $\alpha = 0.5, 0.45, \dots, 0, 05$. Les résultats sont illustrés dans la figure (5.5).

On remarque que pour les deux exemples considérés les RMSE de notre modèle sont nettement meilleurs surtout pour les petites valeurs de α . Ceci s'explique par la flexibilité d'identifier la probabilité d'être dans l'intervalle $(y(\alpha/(1-\alpha), \infty) \times (y, \infty))$ avec la fonction de survie de notre modèle en marges exponentielles, avec l'avantage d'avoir une estimation de la fonction $\kappa(\alpha, 1-\alpha)$ propre à chaque angle contrairement au modèle de Ramos et Ledford où une seule estimation pour tous les angles est utilisée.

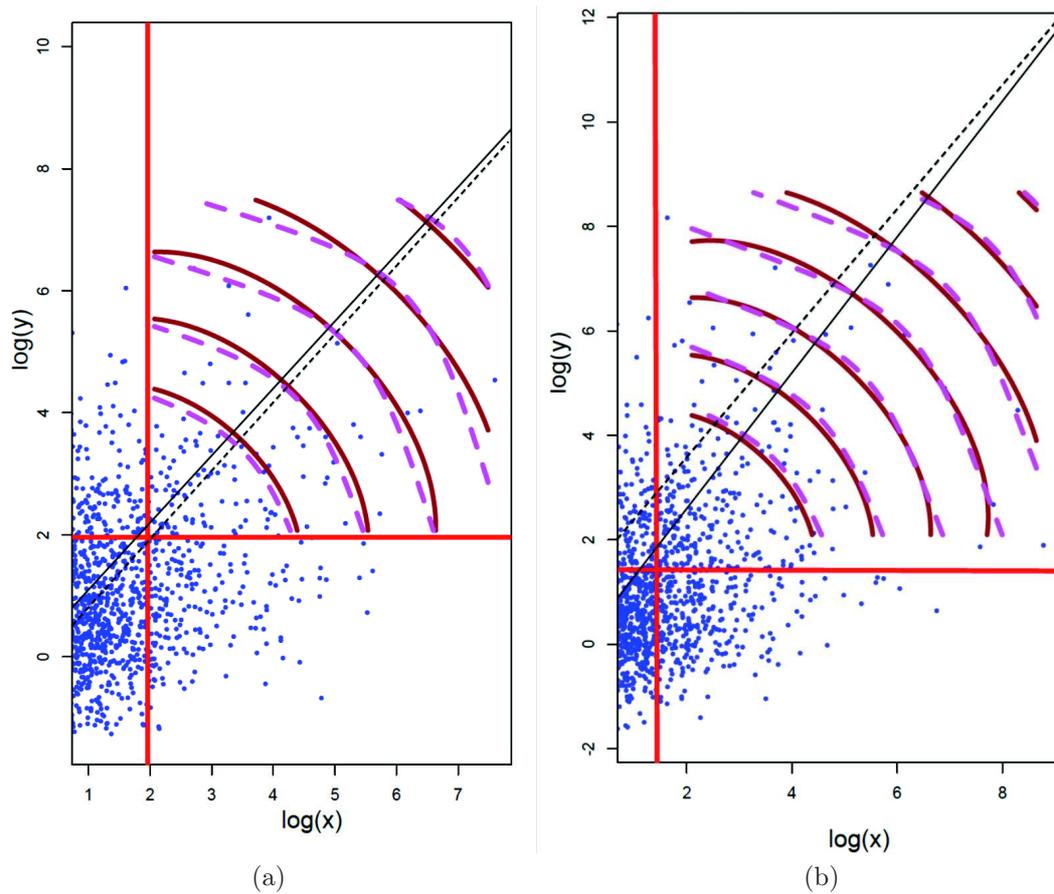


Fig 5.3: Simulation de 2500 réalisations de la loi normale de corrélation $\rho = 0.5$. (a) : pour $(\beta, \gamma) = (0.5, 0.5)$; (b) : pour $(\beta, \gamma) = (0.3, 0.7)$; les vraies densités jointes sont en trait continu, les densités jointes obtenues par maximum de vraisemblance du modèle (5.31) en trait discontinu ; les droites donnant la direction d'extrapolation vers $1.5 \log(5000)(\beta/\gamma, \infty) \times (1.5 \log(5000), \infty)$ obtenues selon (β, γ) et selon l'approche de la section 4.5.1 du chapitre 4 sont respectivement représentées en trait discontinu et continu.

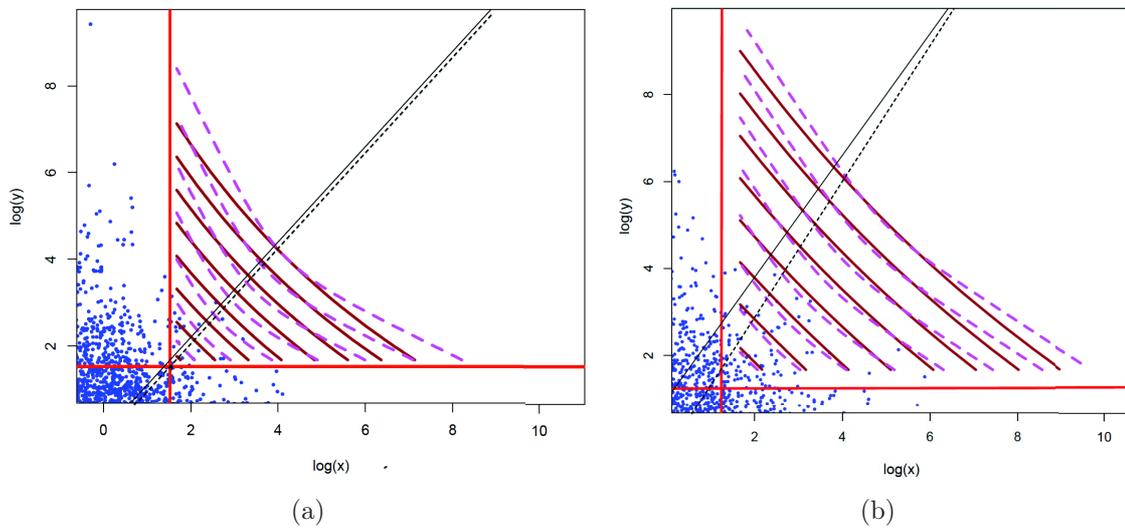


Fig 5.4: Simulation de 2500 réalisations de la loi normale de corrélation $\rho = -0.5$. (a) : pour $(\beta, \gamma) = (0.5, 0.5)$; (b) : pour $(\beta, \gamma) = (0.3, 0.7)$; les vraies densités jointes sont en trait continu, les densités jointes obtenues par maximum de vraisemblance du modèle (5.31) en trait discontinu ; les droites donnant la direction d'extrapolation vers $1.5 \log(5000)(\beta/\gamma, \infty) \times (1.5 \log(5000), \infty)$ obtenues selon (β, γ) et selon l'approche de la section 4.5.1 du chapitre 4 sont respectivement représentées en trait discontinu et continu.

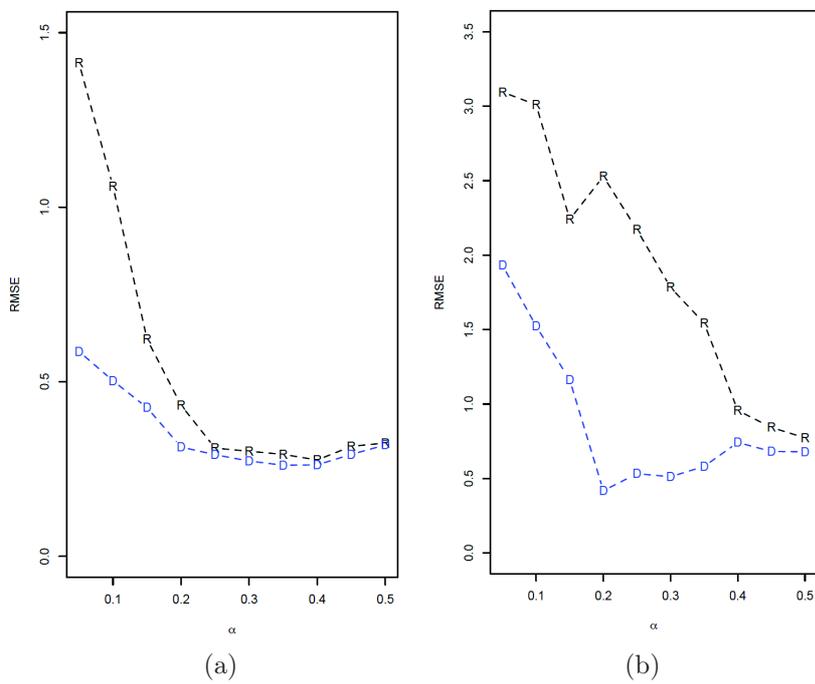


Fig 5.5: : RMSE; (a) distribution bvariée normale de corrélation $\rho = 0.5$; (b) : distribution bvariée normale de corrélation $\rho = -0.5$. Le caractère 'R' correspond à la modélisation de Ramos et Ledford et 'D' à la nôtre.

5.6 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle classe de modèles semi-paramétriques pour les queues de distributions venant enrichir la gamme de modèles adaptés à l'indépendance asymptotique déjà existants. Ces modèles sont adaptés à l'indépendance asymptotique. Des extrapolations suivant des rayons quelconques du premier quadrant positif seront possibles grâce à cette nouvelle modélisation avec une approche différente du chapitre précédent. En effet une nouvelle estimation paramétrique de la fonction de dépendance est désormais possible à partir des modèles semi-paramétriques de la mesure pseudo-radiale associée au modèle (4.10).

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

L'une des principales contributions théoriques de cette thèse est l'introduction d'une nouvelle modélisation de la queue d'une distribution bivariée avec des marges Paréto. En se basant sur cette modélisation, nous avons abordé le problème de l'estimation de probabilités de queue dans un cadre général permettant d'intégrer dépendance et indépendance asymptotique des extrêmes.

Pour cela, dans le premier chapitre, nous avons rappelé les résultats et outils essentiels à la compréhension de nos contributions. Puis, dans le chapitre 2, nous avons abordé les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre usuel de la littérature, à savoir le cadre max-stable, pour conclure à ses limitations quant au problème d'une inférence statistique des probabilités de queue en présence d'indépendance asymptotique. Dans le chapitre 3 nous avons analysé quelques unes des principales solutions apportées par les différentes modélisations déjà existantes dans la littérature, modélisations basées sur la variation régulière de la queue de distribution. Le chapitre 4 a été consacré à l'introduction de notre nouvelle modélisation pour les queues de distribution bivariée avec marges Paréto. Cette modélisation, qui étend aux distributions ray-dépendantes la modélisation de queue bivariée avec des marges Paréto proposée par Wadsworth and Tawn (2013), offre la possibilité d'une généralisation de l'inférence non-paramétrique introduite par Wadsworth and Tawn (2013). Enfin, dans le chapitre 5, en nous appuyant sur le modèle (4.10), nous avons développé une nouvelle approche semi-paramétrique de la fonction de survie multivariée, qui permet là encore d'améliorer l'approche récemment proposée par Ramos et Ledford (Ramos and Ledford, 2009).

La possibilité de travailler avec une fonction κ de deux variables, avec comme cas particuliers la fonction $\kappa(\alpha)$ de Wadsworth and Tawn (2013) et le coefficient de dépendance de queue η de Ledford and Tawn (1996), tout comme l'extension du modèle de maxima présenté au chapitre 5 offrent de nombreuses perspectives de travaux. Ci-dessous, nous énonçons quelques pistes possibles :

- Dans les applications du modèle (4.10), il pourrait aussi être intéressant de donner une forme paramétrique pour la fonction $\kappa(\beta, \gamma)$. Par exemple, une forme théorique possible pour κ pourrait être la suivante :

$$\kappa(\beta, \gamma) = \frac{1}{a+c} \left\{ a(\beta + \gamma) - b\sqrt{\beta\gamma} + c \max(\beta, \gamma) \right\} \quad (6.1)$$

où a , b et c sont des paramètres positifs tels que $a + c \neq 0$. Sur le plan pratique il reste cependant à explorer l'identifiabilité d'un tel modèle et à mettre en place une méthode d'inférence des paramètres.

- Le modèle que nous avons développé dans le Chapitre 4 mériterait d'être étendu au cadre spatial. Cette perspective pourrait être particulièrement intéressante pour traiter d'estimation de probabilités de queue concernant des événements simultanés et/ou conditionnels. Dans de nombreux domaines, comme par exemple en sciences du climat, les données spatialisées sont courantes et les approches actuelles pour le traitement des extrêmes sont fondées sur la modélisation par des processus max-stables supposant une dépendance asymptotique des extrêmes (voir par exemple Davison and Gholamrezaee (2012) et ses références), par des processus asymptotiquement indépendants (Davison et al., 2013; Opitz, 2016) ou encore par des mélanges entre processus max-stables et processus asymptotiquement indépendants (Wadsworth and Tawn, 2012; Bacro et al., 2016). Un modèle pouvant travailler sur des paires de sites sans a priori sur le type de dépendance extrême présente pourrait donc être de tout premier intérêt. En exploitant la possibilité de faire varier les valeurs de β et γ offerte par la modélisation (4.10), des probabilités de dépassement d'un certain seuil sur un site A conditionnellement à un autre dépassement qui n'est pas de même grandeur sur un site B pourrait être inférées, avec l'avantage de déterminer un coefficient de décroissance de queue $\kappa(\beta, \gamma)$ propre à chaque paire de sites. La difficulté reste néanmoins sérieuse car cela suppose de pouvoir construire un processus spatial dont les marginales bivariées vérifient notre modèle ...
- Toujours dans un cadre spatial, la connaissance des variations de la fonction κ selon la distance entre paires de sites pourrait aussi renseigner sur le type de dépendance extrême à considérer en fonction de la distance et pourrait être le fondement de tests statistiques relatifs à la présence d'une dépendance ou d'une indépendance asymptotique en fonction de la distance.
- Le modèle de maxima introduit dans le chapitre 5 pourrait être utilisé pour adapter le F -madogramme défini par Guillou et al. (2012) au modèle (4.10). Pour un couple (β, γ) fixé, désignons par (M_X, M_Y) le vecteur bivarié lié à la distribution $G_{\kappa(\beta, \gamma)}(x, y)$ i.e. $\mathbb{P}(M_X \leq x, M_Y \leq y) = \exp(-V_{\kappa(\beta, \gamma)}(x, y))$ avec les distributions marginales $F_X(x) := \mathbb{P}(M_X \leq x) = \exp(-\sigma_X x^{-\kappa(\beta, \gamma)})$ et $F_Y(y) := \mathbb{P}(M_Y \leq y) = \exp(-\sigma_Y y^{-\kappa(\beta, \gamma)})$ avec $\sigma_X = V_{\kappa(\beta, \gamma)}(1, \infty)$ et $\sigma_Y = V_{\kappa(\beta, \gamma)}(\infty, 1)$.

Le F -madogramme de (M_X, M_Y) peut être défini par :

$$\nu_{\kappa(\beta, \gamma)} = \frac{1}{2} \mathbb{E} | F_X(M_X) - F_Y(M_Y) | .$$

Le F -madogramme est lié à $\theta_{\kappa(\beta, \gamma)} = V_{\kappa(\beta, \gamma)}(\sigma_X^{1/\kappa(\beta, \gamma)}, \sigma_Y^{1/\kappa(\beta, \gamma)})$ par la relation suivante

$$\theta_{\kappa(\beta, \gamma)} = \frac{1 + 2\nu_{\kappa(\beta, \gamma)}}{1 - 2\nu_{\kappa(\beta, \gamma)}} .$$

Pour $(\beta, \gamma) = (1, 1)$ on retrouve les résultats de Guillou et al. (2012). Cette extension pourrait être intéressante si l'on s'intéresse à la mesure de dépendance entre des

extrêmes normalisés différemment. Son extension au cadre spatiale serait là encore d'intérêt.

Bibliographie

- Bacro, J.N., Gaetan, C., Toulemonde, G., 2016. A flexible dependence model for spatial extremes. *Journal of Statistical Planning and Inference* 172, 36–52.
- Balkema, A.A., de Haan, L., 1974. Residual life time at great age. *Ann. Probab.* 2, 792–804.
- Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J., 2004. *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L., 1987. Regular variation. volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Clayton, D.G., 1978. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika* 65, 141–145.
- Coles, S., Heffernan, J., Tawn, J., 1999. Dependence measures for extremes value analyses. *Extremes* 2, 339–365.
- Coles, S.G., 2001. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Value*. Springer, Boca Raton: FL.
- Coles, S.G., Tawn, J.A., 1991. Modelling extreme multivariate events. *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 53, 377–392.
- Coolley, D., Naveau, P., Poncet, P., 2006. Variograms for spatial max-stable random fields, in dependence in probability and statistics. *Lecture Notes In Statistics* 87, 373–390.
- Davison, A.C., Gholamrezaee, M.M., 2012. Geostatistics of extremes. *Proceedings of the Royal Society London, Series A* 468, 581–608.
- Davison, A.C., Huser, R., Thibaud, A., 2013. Geostatistics of dependent and asymptotically independent extremes. *Mathematical Geosciences* 45, 511–529.
- Draisma, G., Drees, H., Ferreira, A., de Haan, L., 2004. Bivariate tail estimation: dependence in asymptotic independence. *Bernoulli* 10, 251–280.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T., 1997. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, Berlin.

- Feller, W., 1968. An introduction to Probability Theory and Its Applications. Wiley, New York.
- Fisher, R., Tippett, L., 1928. Limiting forms of the frequency of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24, 180–190.
- Galambos, J., 1987. The asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. Wiley, New York.
- Gnedenko, B., 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Anales de Mathématiques* 44, 423–453.
- Guillou, A., Naveau, P., Schorgen, A., 2012. Madogram and asymptotic independence among maxima. *Biometrika* 98, 481–488.
- Gumbel, E., 1960. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association* 55, 698–707.
- de Haan, L., 1984. A spectral representation for max-stable processes. *Annals of Probability* 12, 1194–1204.
- de Haan, L., Ferreira, A., 2006. *Extreme Value Theory An Introduction*. Springer, New York.
- de Haan, L., Resnick, S.I., 1977. Limit theory for multidimensional sample extremes. *Z. Whar. vew. Geb.* 40, 317–337.
- de Haan, L., Zhou, C., 2011. Extreme residual dependence for random vectors and processes. *Applied Probability Trust.* 43, 217–242.
- Hill, B.M., 1975. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* 3, 1163–1174.
- Jenkinson, A.F., 1955. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Q.J.R. Meteorol. Soc.* 81, 158–171.
- Joe, H., 1997. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Ledford, A.W., Tawn, J.A., 1996. Statistics for near independence in multivariate extreme values. *Biometrika* 83, 169–187.
- Ledford, A.W., Tawn, J.A., 1997. Modelling dependence within joint tail regions. *J. R. Statist. Soc. B.* 59, 475–499.
- Maric, V., 2000. *Regular Variation and Differential Equations*. *Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Morgenstern, D., 1956. Einfache beisoile zweidimensionaler vertilungen. *Mitt. Math. Statist.* 8, 234–235.
- Nelsen, R., 1999. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.

BIBLIOGRAPHIE

- de Oliveira, T., 1962. Structure theory of bivariate extremes: extensions. *Estudos de Matemática, Estatística e Econometria* 7, 165–195.
- Opitz, T., 2016. Modeling asymptotically independent spatial extremes based on laplace random fields. *Spatial Statistics* 16, 1–18.
- Pickands, J., 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics* 3, 119–131.
- Pickands, J., 1981. Multivariate extreme value distributions. *Bull. Int. Statist. Inst.* , 859–878.
- Qin, X., Smith, R.L., Ren, R., 2010. Modelling multivariate joint tails and application in extreme risk spillovers between banking systems. Technical Report. Antai College of Economics and Management, Shanghai.
- Ramos, A., Ledford, A., 2009. A new class of models for bivariate joint tails. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat Methodol.* 71, 219–241.
- Ramos, A., Ledford, A., 2011. An alternative point process framework for modeling multivariate extreme values. *Comm. in Statistics—Theory and Methods* 40, 2205–2224.
- Reiss, R., 1984. *Approximate Distributions of Order Statistics*. Springer-Verlag, New York.
- Resnick, S., 1987. *Extreme values, Regular variation and Point Processes*. Springer, New York.
- Resnick, S., 2002. Hidden regular variation, second order regular variation and asymptotic independence. *Extremes* 5, 303–336. doi:10.1023/A:1025148622954.
- Resnick, S., 2006. *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*. Springer, New York.
- Ribatet, M., 2013. Support de cours, Master Biostatistique. Technical Report. Univ. Montpellier.
- RL. Smith, J.T., Coles, S., 1997. Markov chain models for threshold exceedances. *Biometrika* 84, 249–268.
- Shi, D., Smith, R., Coles, S.G., 1992. Joint versus marginal estimation for bivariate extremes. Technical Report. Department of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill.
- Shirayev, A., 1984. *Probability. Graduate texts in mathematics*. Springer, New York.
- Sibuya, M., 1960. Bivariate extreme statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.* 11, 195–210.
- Tawn, J., 1988. Bivariate extreme value theory: models and estimation. *Biometrika* 75, 397–415.
- Tawn, J., 1991. Modeling multivariate extreme value distributions. *Biometrika* 77, 245–253.

- Von Mises, R., 1936. La distribution de la plus grande des n valeurs. American Mathematical Society 92, 271–294.
- Wadsworth, J., Tawn, J., 2012. Dependence modelling for spatial extremes. Biometrika 99, 253–272.
- Wadsworth, J., Tawn, J., 2013. A new representation for multivariate tail probabilities. Bernoulli 19, 2689–2714.

Résumé.

Cette thèse présente des contributions à la modélisation multivariée des queues de distribution. Nous introduisons une nouvelle modélisation des probabilités de queue jointes d'une distribution multivariée avec des marges Paréto. Ce modèle est inspiré de celui de Wadsworth et Tawn (2013). Une nouvelle variation régulière multivariée non-standard de coefficient une fonction à deux variables est introduite, permettant de généraliser deux approches de modélisation respectivement proposées par Ramos et Ledford (2009) et Wadsworth et Tawn (2013). En nous appuyant sur cette modélisation nous proposons une nouvelle classe de modèles semi-paramétriques pour l'extrapolation multivariée selon des trajectoires couvrant tout le premier quadrant positif. Nous considérons aussi des modèles paramétriques construits grâce à une mesure non-négative satisfaisant une contrainte qui généralise celle de Ramos et Ledford (2009). Ces nouveaux modèles sont flexibles et conviennent tant pour les situations de dépendance que d'indépendance asymptotique.

Mots-clés. Extrêmes multivariés, (in)dépendance asymptotique, modélisation de queue de distributions, extrapolations, mesure pseudo-radiale.

Abstract.

This PhD thesis presents contributions to the modelling of multivariate extreme values. We introduce a new tail model for multivariate distribution with Pareto margins. This model is inspired from the Wadsworth and Tawn (2013) one. A new non-standard multivariate regular variation with index equals to a function of two variables is thus introduced to generalize both modeling approaches proposed by Ramos and Ledford (2009) and Wadsworth and Tawn (2013), respectively. Building on this new approach we propose a new class of non-parametric models allowing multivariate extrapolation along trajectories covering the entire first positive quadrant. Similarly we consider parametric models built with a non-negative measure satisfying a constraint that generalizes the Ramos and Ledford (2009) one. These new models are flexible and valid in both situations of dependence or asymptotic independence.

Keywords. Multivariate extremes, asymptotic (in)dependence, joint tail modelling, extrapolations, pseudo-radial measure.