



HAL
open science

**Étude de réseaux complexes de systèmes dynamiques
dissipatifs ou conservatifs en dimension finie ou infinie.
Application à l'analyse des comportements humains en
situation de catastrophe.**

Guillaume Cantin

► **To cite this version:**

Guillaume Cantin. Étude de réseaux complexes de systèmes dynamiques dissipatifs ou conservatifs en dimension finie ou infinie. Application à l'analyse des comportements humains en situation de catastrophe.. Mathématiques générales [math.GM]. Normandie Université, 2018. Français. NNT : 2018NORMLH16 . tel-01945759

HAL Id: tel-01945759

<https://theses.hal.science/tel-01945759>

Submitted on 5 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

**Pour obtenir le diplôme de Doctorat
Spécialité Mathématiques**

Préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre

**Étude de réseaux complexes de systèmes dynamiques dissipatifs
ou conservatifs en dimension finie ou infinie. Application à l'analyse des
comportements humains en situation de catastrophe.**

**Présentée et soutenue par
Guillaume CANTIN**

**Thèse soutenue publiquement le 12 octobre 2018
devant le Jury composé de**

M. Vitaly VOLPERT	Directeur de Recherche au CNRS Institut Camille Jordan, Université Lyon 1	Président du Jury
Mme Danielle HILHORST	Directrice de Recherche au CNRS Université Paris-Sud	Rapporteur
M. Alain MIRANVILLE	Professeur, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Poitiers	Rapporteur
M. Arnaud DUCROT	Professeur, Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre	Examineur
Mme Nathalie VERDIÈRE	Maître de Conférences, Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre	Co-encadrante
M. M.A. AZIZ-ALAOUI	Professeur, Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre	Directeur de Thèse
M. Cyrille BERTELLE	Professeur, LITIS - UFR Sciences et Technologies, Université du Havre	Invité
Mme Damienne Provitolo	Chargée de Recherche au CNRS UMR Géoazur, Sophia-Antipolis	Invitée

Thèse dirigée par M.A. Aziz-Alaoui, co-encadrée par Nathalie Verdière



Le travail réalisé dans cette thèse s'appuie sur les publications et communications suivantes.

Publications

[1] Cantin G., Verdière N., Lanza V., Aziz-Alaoui M.A., Charrier R., Bertelle C., Provitolo D. et Dubos-Paillard E. *Mathematical Modeling of Human Behaviors During Catastrophic Events : Stability and Bifurcations*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, 2016.

[2] Cantin G. *Non identical coupled networks with a geographical model for human behaviors during catastrophic events*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, 2017.

[3] Cantin G., Verdière N. et Aziz-Alaoui M.A. *Asymptotic behaviour in coupled networks of reaction-diffusion systems for a geographical problem*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A*, [under review].

[4] Cantin G. *Bifurcations of limit cycles in complex networks of hamiltonian systems*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, [soumis].

Communications dans des conférences

[1] Cantin G., Verdière N. et Aziz-Alaoui M.A. *Dynamique asymptotique d'un réseau couplé de systèmes de réaction-diffusion pour un modèle géographique*, CANUM 2018 (France).

[2] Cantin G., Verdière N. et Aziz-Alaoui M.A. *Damped oscillations in coupled complex networks of reaction-diffusion systems for a geographical model*, ICCDS 2018 (Aveiro, Portugal).

[3] Cantin G., Aziz-Alaoui M.A. *Mathematical analysis of human behaviors during catastrophic events*, WANCSA 2018 (Chine).

[4] Cantin G., Verdière N., Lanza V., Aziz-Alaoui M.A., Charrier R., Bertelle C., Provitolo D. et Dubos-Paillard E. *Control of panic behavior in a non identical network coupled with a geographical model*, PHYSCON 2017 (Firenze, Italie).

[5] Cantin G., Verdière N., Lanza V., Aziz-Alaoui M.A. *Multiple Hopf bifurcations in coupled networks of planar systems*, WANCSA 2017 (France).

Séminaires

[1] *Comportement asymptotique dans un réseau de systèmes de réaction-diffusion pour un modèle géographique*, Journée 2017 de la Fédération Normandie-Mathématiques (Rouen, France).

[2] *Bifurcations de cycles limites dans des réseaux complexes de systèmes hamiltoniens*, Journée 2018 de la Fédération Normandie-Mathématiques (Caen, France).

[3] *Attracteurs exponentiels pour un réseau de systèmes épidémiologiques*, Journée EDP et Applications aux Modèles Biologiques (Le Havre, France)

[4] *Attracteurs exponentiels pour des réseaux couplés de systèmes de réaction-diffusion*, Atelier des doctorants de l'Université de Rouen (France).

Remerciements

Le travail réalisé au cours cette thèse n'aurait pu aboutir sans le soutien ni les encouragements de nombreuses personnes que je souhaite ici vivement remercier.

Tout d'abord, j'aimerais exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur Aziz-Alaoui qui m'a dirigé au cours de ce travail, ainsi qu'à Nathalie Verdière qui m'a co-encadré. Je les remercie très sincèrement de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. Ils m'ont fait don d'un magnifique présent en m'ouvrant les portes de la recherche. Leur gentillesse, leur disponibilité, leur ouverture d'esprit et leur générosité ont été constantes et sont pour une large part à l'origine de ma motivation.

Je voudrais ensuite adresser mes remerciements à Danielle Hilhorst, Alain Miranville et Vitaly Volpert pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant de rapporter sur cette thèse, ainsi qu'à Arnaud Ducrot pour sa présence lors de la soutenance. J'ai beaucoup d'admiration pour la qualité et la portée de leurs travaux de recherche, qui m'ont très souvent guidé dans mes réflexions.

Je souhaite naturellement saluer très chaleureusement tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université du Havre, tout particulièrement Alexandre et Mohamed, ainsi que ceux du Laboratoire d'Information et de Traitement de l'Information des Systèmes, mais encore les géographes Damienne Provitolo et Edwige Dubos-Paillard, sans oublier Lucie Liot ni Fanny Léger-Leterc, qui ont toutes et tous contribué, par leur enthousiasme, leur gentillesse et leur amitié, à ce que ce travail voie le jour.

Enfin, d'une façon plus intime, j'adresse mes plus tendres remerciements à ma famille et mes amis.

Introduction	1
1 Préliminaires	7
1.1 Notations	7
1.2 Éléments d'analyse fonctionnelle	8
1.2.1 Espaces de fonctions usuelles	8
1.2.2 Espaces d'interpolation	9
1.2.3 Espaces de Sobolev	9
1.2.4 Triplets d'espaces	10
1.2.5 Opérateurs non bornés	11
1.3 Opérateurs sectoriels	12
1.3.1 Généralités	12
1.3.2 Opérateurs sectoriels associés à des formes sesquilinéaires	13
1.3.3 Semi-groupes analytiques	15
1.3.4 Opérateurs sectoriels sur des espaces produits	18
1.4 Équations paraboliques semi-linéaires	18
1.4.1 Existence et unicité d'une solution locale	18
1.4.2 Équations de réaction-diffusion	19
1.4.3 Existence globale	20
1.5 Systèmes dynamiques et systèmes complexes	20
1.5.1 Ensembles invariants et attracteurs	21
1.5.2 Stabilité	25
1.5.3 Bifurcations	27
1.5.4 Systèmes hamiltoniens et intégrale de Melnikov	29
1.5.5 Systèmes complexes	31
1.5.6 Éléments de théorie des graphes	32
1.6 Méthode numérique de décomposition	32
2 Étude d'un modèle comportemental	35
2.1 Éléments de modélisation	35
2.1.1 Modèles mathématiques pour l'étude de la panique	36
2.1.2 Typologie comportementale	36
2.1.3 Évolutions comportementales et imitations	37
2.1.4 Dimension spatiale	41

2.1.5	Effet domino	43
2.1.6	Calibrage du modèle	43
2.2	Stabilité et bifurcations du système PCR	44
2.2.1	Positivité et bornage	45
2.2.2	Points d'équilibre	47
2.2.3	Stabilité de l'équilibre trivial	48
2.2.4	Étude de la variété centrale	51
2.2.5	Bifurcation nœud-col dégénérée	55
2.2.6	Inhibition de la panique	58
2.3	Dynamique transitoire	62
2.3.1	Équilibre transitoire	62
2.3.2	Bifurcation de Hopf	63
3	Réseaux couplés de systèmes non identiques	69
3.1	Position du problème	69
3.2	Réseaux de systèmes PCR	72
3.2.1	Présentation du problème	72
3.2.2	Réseaux de deux nœuds	77
3.2.3	Condition de synchronisation	81
3.2.4	Stabilité globale du réseau	85
3.2.5	Simulations numériques	86
3.3	Chaînes d'oscillateurs	91
3.3.1	Chaînes de Hopf	92
3.3.2	Application	95
4	Réseaux couplés de systèmes de réaction-diffusion	99
4.1	Position du problème	99
4.2	Existence et unicité de solutions locales	102
4.2.1	Formulation abstraite	102
4.2.2	Solutions locales	103
4.3	Régions invariantes	105
4.3.1	Positivité	105
4.3.2	Bornage	109
4.4	Comportement asymptotique	110
4.4.1	Convergence vers la moyenne spatiale	110
4.4.2	Estimations d'énergie	111
4.4.3	Système dynamique	113
4.4.4	Attracteurs exponentiels	114
4.4.5	Estimation de la dimension fractale	117
4.5	Étude d'un modèle épidémiologique	118
5	Réseaux de systèmes PCR avec diffusion	125
5.1	Analyse du modèle spatio-temporel	125
5.1.1	Construction de solutions locales	127
5.1.2	Régions invariantes	128
5.1.3	Comportement asymptotique	131
5.1.4	Simulations numériques	133
5.2	Étude du problème réseau	135
5.2.1	Construction de solutions locales	136
5.2.2	Régions invariantes	137
5.2.3	Comportement asymptotique	138
5.2.4	Simulations numériques	139

6 Réseaux couplés de systèmes hamiltoniens	145
6.1 Construction d'une classe de systèmes hamiltoniens	146
6.1.1 Systèmes hamiltoniens admettant un nombre arbitraire de centres non dégénérés	146
6.1.2 Système hamiltonien admettant une grille rectangulaire de centres	149
6.1.3 Système hamiltonien admettant une grille circulaire de centres	152
6.2 Construction de perturbations polynomiales	153
6.2.1 Intégrale de Melnikov	153
6.2.2 Perturbation d'une ligne ou d'un cercle de centres	154
6.2.3 Perturbation d'un système hamiltonien le long de son gradient	159
6.2.4 Perturbations couplées	162
6.2.5 Recherche de perturbations de degré inférieur	164
A Programmes de calcul	169
A.1 Réseaux aléatoires de systèmes PCR	169
A.2 Méthode de décomposition pour le système PCR avec diffusion	170
A.3 Expression symbolique des coefficients de Melnikov	172
A.3.1 Algorithme de calcul	173
A.3.2 Résultats du programme	177
A.4 Programme de recherche d'une perturbation	178
Bibliographie	183

Cette thèse est consacrée à l'étude des réseaux couplés de systèmes dynamiques déterministes, définis par des équations différentielles ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles, et donnés par des problèmes d'évolution dissipatifs ou conservatifs. Ces réseaux couplés constituent des *systèmes complexes*, et sont obtenus à partir de multiples instances d'un même système initial, sur lesquelles agissent des interactions. Nous nous intéressons principalement à la question de déterminer la dynamique globale du réseau, connaissant d'une part la dynamique interne du système qui le compose, et d'autre part la nature et la distribution des interactions au sein de ce réseau. Notre étude s'appuie sur quelques applications, dont un modèle mathématique pour l'analyse des comportements humains en situation de catastrophe, ainsi que sur le problème des bifurcations de cycles limites dans un champ de vecteurs polynomial du plan.

Systèmes complexes

Si le concept de système complexe est moderne, on trouve pourtant dans des travaux anciens l'idée de réseau d'interaction. La loi physique d'interaction gravitationnelle entre deux corps massifs, découverte par Newton au XVII^e siècle en est un premier exemple. La mécanique céleste, c'est-à-dire l'étude du mouvement des planètes du système solaire, et le problème des n corps, auquel Poincaré consacra une part importante de son travail de recherche à la fin du XIX^e siècle [86], reposent en grande partie sur cette loi d'interaction, et présentent certaines problématiques que l'on retrouve aujourd'hui dans l'étude des systèmes complexes, comme celle de la *stabilité* par exemple. C'est également au XVII^e siècle que Huygens observe le phénomène de *synchronisation* de deux horloges placées à proximité [10]. Ce phénomène de synchronisation constitue aujourd'hui une des questions centrales dans l'étude des systèmes complexes.

Ainsi, un système complexe correspond à la donnée d'un système dynamique initial, et d'un réseau d'interaction, lui-même défini par un graphe dont chaque sommet est couplé avec une instance du système dynamique initial, et dont les arêtes représentent les interactions entre les différentes instances du système considéré. Comme nous allons le voir, les multiples instances qui composent le système complexe, appelées *nœuds* ou *cellules*, peuvent être identiques ou non identiques, et l'espace de phase du système complexe peut être le même que le système initial dont il est issu, ou avoir une dimension augmentée. De nombreux phénomènes sont aujourd'hui modélisés par des systèmes complexes, dans des domaines variés comme la physique, la biologie ou les sciences humaines. Les réseaux de circuits électriques [107], les réseaux de neurones [106], les réseaux de pendules [63] ou les réseaux géographiques de télécommunications en sont quelques exemples. Les problématiques classiques dans l'étude des systèmes complexes concernent d'abord les questions relatives aux systèmes dynamiques, dont celle de la stabilité des équilibres et des bifurcations provoquées par une perturbation du système. Puis, le

phénomène de synchronisation, qui correspond à la situation où tous les nœuds exhibent une dynamique commune, occupe une place centrale. De nombreux travaux ont été réalisés afin de déterminer des conditions suffisantes de synchronisation, et ont mené à proposer de nouvelles techniques. Par exemple, la *Connection Graph Stability method* [9] et la *Master Stability Function method* [83] utilisent les méthodes de stabilité de Lyapunov pour établir une condition de synchronisation dans un réseau de systèmes identiques. La surprenante synchronisation de systèmes chaotiques est étudiée dans [5]. Une autre problématique de l'étude des systèmes complexes consiste à établir un lien entre la dynamique globale du réseau, sa *topologie*, qui est déterminée par la nature et la distribution des couplages, et la dynamique interne à chaque nœud de ce réseau. On parle de raisonnement de type *bottom-up* lorsqu'on cherche à déterminer la dynamique globale d'un réseau, connaissant la dynamique locale de chaque nœud, et de raisonnement de type *top-down* lorsqu'on cherche au contraire à retrouver la dynamique locale, connaissant la dynamique globale. L'apparition de solutions périodiques dans un réseau construit à partir de systèmes dynamiques qui ne présentent pourtant pas d'oscillations est étudiée dans [38]. La théorie des formes normales est utilisée dans [91] afin de déterminer les bifurcations à l'échelle du réseau, connaissant la forme normale du système initial qui compose chaque nœud. Ces études sont toutes reliées en partie à la théorie des graphes, qui permet de décrire la topologie des couplages dans le réseau considéré. Par exemple, l'étude des réseaux de neurones modélise souvent les connexions inter-neuronales par des topologies de type *all-to-all* qui correspondent à des graphes complets. Puis, la tendance de certains systèmes complexes à l'*auto-organisation*, qui décrit la capacité d'un réseau à présenter une forme de synchronisation à partir d'une taille et d'une densité de topologie suffisantes, constitue une problématique supplémentaire [87]. Mais la connaissance précise et complète de la dynamique d'un système complexe n'est pas encore atteinte à ce jour.

Présentation des travaux effectués

Ainsi, notre objectif dans cette thèse est d'étudier la dynamique des systèmes complexes. Nous limitons notre étude au cas des systèmes dynamiques déterministes, donnés par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces systèmes dynamiques seront définis à partir de problèmes d'évolution, qui décrivent l'état d'un système en fonction du temps. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, l'état du système sera étudié dans un espace de phase de dimension réelle finie. Nous étudierons alors les états d'équilibre du système, leur stabilité, et les bifurcations provoquées par la variation de paramètres inhérents à ce système. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, l'espace de phase sera de dimension infinie. Nous aurons alors recours à certaines méthodes d'analyse fonctionnelle, développées notamment pour l'étude des équations de type parabolique, comme la théorie des semi-groupes analytiques et des opérateurs sectoriels. En outre, les systèmes que nous étudierons seront de nature *dissipative* ou *conservative*. Les systèmes dissipatifs seront caractérisés par une décroissance d'énergie ; nous serons amené à étudier leur comportement asymptotique, et nous utiliserons la notion d'*attracteur* en dimension quelconque. Les systèmes conservatifs seront de type hamiltonien et nous nous limiterons à étudier la possibilité de faire apparaître des solutions périodiques par perturbation de ces systèmes.

À partir de ces différents cas de systèmes dynamiques, nous construisons et étudions des réseaux d'interaction. Ces réseaux sont obtenus en couplant des instances identiques ou non identiques d'un même système. Le cas des instances non identiques correspond à un système présentant une bifurcation, et par conséquent au moins deux dynamiques internes différentes. La question à laquelle nous nous intéressons consiste alors à déterminer les conditions qui favorisent l'une ou l'autre de ces dynamiques internes à l'échelle du réseau. De plus, la nature des couplages nous amènera à analyser le comportement du réseau dans un espace de phase qui pourra être le même que celui du système initial, ou au contraire un espace de dimension augmentée, obtenu par produit des espaces de phase de chaque nœud du réseau.

Applications

Les questions auxquelles nous nous intéressons sont étudiées dans le cadre de quelques applications. Ainsi, nous considérons des systèmes dynamiques correspondant à divers modèles mathématiques. Nous présentons par exemple un modèle épidémiologique dans le chapitre 4, afin d'illustrer les résultats abstraits établis au cours de ce chapitre. Nous étudions également un réseau de systèmes *proie-prédateur* dans le chapitre 5. Une part importante de cette thèse est consacrée à l'étude d'un modèle mathématique pour l'étude des comportements humains en situation de catastrophe. Ce modèle nouveau a été proposé en 2014 [89, 99], dans le but de formaliser les réactions comportementales d'individus faisant face à une situation exceptionnelle de désastre d'origine naturelle ou industrielle, pour mieux les comprendre, les prévoir, et les maîtriser. L'étude mathématique de ce modèle a été réalisée dans le cadre de cette thèse, et a fait l'objet de deux publications [15, 13], et de plusieurs communications lors de congrès [16]. Ce travail de modélisation renforce l'association des mathématiques et de la géographie, qui est à la fois ancienne et pourtant moins fréquente que l'association des mathématiques avec les sciences physiques ou la biologie. Cette association était déjà présente dans l'antiquité chez les philosophes grecs qui, en voulant décrire la Terre, étudiaient ensemble la géométrie et la géographie. Le préfixe *géo*, du grec $\gamma\eta$ (la Terre), commun à ces deux disciplines, en est le témoin. Enfin, nous nous sommes intéressés au XVI^e problème de Hilbert, qui concerne le nombre et la disposition de cycles limites dans un champ de vecteurs polynomial du plan réel.

Plan de la thèse

Les deux premiers chapitres de cette thèse sont préliminaires. Dans le chapitre 1, nous présentons quelques-uns des outils mathématiques nécessaires à notre étude. Les espaces de fonctions, les semi-groupes analytiques et les opérateurs sectoriels sont en effet utilisés pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Puis, quelques éléments de la théorie des systèmes dynamiques sont présentés, qui permettent d'étudier la stabilité des états d'équilibre et leurs bifurcations. Nous terminons le chapitre 1 en donnant quelques méthodes numériques dont nous ferons usage au cours de notre étude. Afin de limiter ce chapitre à une taille raisonnable, nous avons choisi de renvoyer le lecteur à quelques ouvrages de référence pour les questions classiques d'existence et d'unicité de solutions aux équations différentielles ordinaires.

Le système Panique-Contrôle-Réflexe (PCR) est ensuite présenté dans le chapitre 2. Nous détaillons les éléments de modélisation qui ont conduit à ce nouveau modèle mathématique pour l'étude des comportements humains en situation de catastrophe, qui se décline sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires. Puis nous proposons une étude mathématique de ce modèle. Nous prouvons d'abord que les solutions du système d'équations différentielles correspondant sont positives, bornées et globales. Nous analysons les états d'équilibre du système, leur stabilité, et démontrons l'existence d'une bifurcation provoquée par la variation d'un paramètre d'évolution comportementale. Cette bifurcation révèle l'existence de solutions pour lesquelles le système présente un niveau de panique défavorable. Enfin, nous illustrons ces résultats théoriques par des simulations numériques.

Les quatre chapitres suivants sont tous consacrés à l'étude de la dynamique des réseaux d'interaction. Dans le chapitre 3, nous étudions des réseaux couplés de systèmes non identiques. Nous considérons pour cela un système dynamique présentant une bifurcation, et construisons un réseau à partir de multiples instances de ce système, qui exhibent des dynamiques internes distinctes. Nous souhaitons connaître les conditions de couplages qui favorisent l'une de ces dynamiques internes. Ainsi, nous considérons des réseaux de systèmes PCR non identiques, dans lesquels certains nœuds présentent un comportement favorable, alors que d'autres sont susceptibles d'exhiber un niveau de panique défavorable. Nous obtenons une condition nécessaire et suffisante de synchronisation du réseau, énoncée dans le Théorème 3.1, qui révèle l'importance des chemins d'évacuation au sein du réseau. Nous démontrons avec le Théorème 3.2 que cette condition de synchronisation garantit en même temps la stabilité globale à l'échelle du réseau. Puis, nous étudions quelques réseaux d'oscillateurs et démontrons qu'une chaîne d'oscillateurs non identiques peut donner lieu à l'émergence de nouvelles solutions périodiques. Nous appliquons ce résultat au cas d'un modèle *proie-prédateur*.

Dans le chapitre 4, nous proposons une analyse du comportement asymptotique de réseaux de systèmes de réaction-diffusion. Nous considérons pour cela un problème d'évolution donné par un système d'équations aux dérivées partielles de type parabolique, et construisons un problème réseau associé. Nous supposons que le système de réaction-diffusion est dissipatif, et que les couplages au sein du réseau sont conservatifs. Dans ces conditions, nous montrons que le réseau obtenu est lui-même dissipatif. En effet, nous démontrons avec le Théorème 4.7 l'existence d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie. La démonstration de ce théorème repose sur des estimations d'énergie et sur l'existence d'une région invariante. Nous appliquons ce résultat au cas d'un modèle épidémiologique.

Nous revenons à l'étude du système PCR dans le chapitre 5, au cours duquel nous proposons de spatialiser le modèle en tenant compte des phénomènes de diffusion locale. Nous obtenons alors un réseau de systèmes de réaction-diffusion, que nous étudions à l'aide des résultats du chapitre 4. En particulier, nous décrivons le comportement asymptotique du réseau avec la proposition 5.11 qui établit des estimations d'énergie, et le Théorème 5.4 qui donne à nouveau l'existence d'attracteurs. Comme dans le chapitre 2, nous illustrons par des simulations numériques les résultats théoriques établis.

Le chapitre 6 étudie à nouveau la possibilité d'émergence de nouvelles solutions périodiques dans un réseau d'oscillateurs. Contrairement au travail effectué dans le chapitre 3, nous étudions un réseau dont l'espace de phase n'est pas de dimension augmentée. Nous plaçons notre étude dans le cadre du XVI^e problème de Hilbert, qui est encore non résolu à ce jour. Nous proposons une nouvelle classe de systèmes, obtenus comme des réseaux couplés de systèmes hamiltoniens, qui admettent un nombre arbitraire de centres non dégénérés, et étudions quelques perturbations de ces réseaux, afin d'obtenir des cycles limites par bifurcation. Ainsi, nous montrons avec le Théorème 6.3 qu'en perturbant un réseau de centres le long du gradient au système correspondant, on obtient un nombre important de cycles limites. Cette approche novatrice permet déjà d'égaliser certains résultats obtenus précédemment par d'autres auteurs. Nous terminons en expérimentant la possibilité de dépasser ces résultats.

Enfin, nous donnons en annexe quelques programmes de calcul écrits en langage `Python`, en langage `FreeFem++` ou en langage `C++`, utilisés pour les simulations numériques ou pour le calcul symbolique.

Perspectives

Pour compléter cette introduction, nous indiquons quelques perspectives de recherche auxquelles nous avons abouti au cours de cette thèse. Ces perspectives seront détaillées dans chaque chapitre.

Modélisation mathématique des problèmes géographiques et contrôle optimal

Comme nous l'avons déjà mentionné, une des applications étudiées dans cette thèse concerne le système Panique-Contrôle-Réflexe (PCR), qui modélise les comportements humains en situation de catastrophe. Le travail de modélisation a été effectué dans le cadre d'un projet associant des laboratoires de recherche en mathématiques, informatique et géographie. Pourtant, certains choix de modélisation font encore à ce jour l'objet de discussions. De nombreux aspects seront donc à étudier pour approfondir l'analyse de ce modèle. En particulier, le calibrage précis du modèle est un travail en cours de réalisation. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 2. De plus, il est naturel de placer l'étude de ce modèle dans le cadre de la théorie du contrôle optimal. Nous avons donc le projet de poser un problème de contrôle en temps minimal du système PCR. Nous souhaitons modéliser deux aspects de contrôle, avec d'une part un contrôle préventif permettant de préparer les populations exposées aux risques de catastrophe, comme cela est le cas dans certains pays, et d'autre part un contrôle curatif du comportement de panique pendant l'événement, par les services de secours. Une étude de la contrôlabilité du système, puis une recherche des solutions optimales constitueront les deux étapes principales de l'étude. Les réseaux de systèmes PCR non identiques étudiés au cours du chapitre 3 peuvent à leur tour déboucher sur un problème de contrôle optimal.

Le système PCR peut également être enrichi par l'utilisation de techniques de la théorie des équations à retard ; on peut aussi expérimenter l'ajout d'une dimension stochastique afin de tenir compte de certains aspects aléatoires du comportement de panique.

Plus généralement, on peut envisager un rapprochement des mathématiques et de la géographie. De nombreux phénomènes contemporains peuvent être étudiés par le biais de la modélisation mathématique, comme la cinétique forestière, la dynamique urbaine, la fonte des glaces par exemple.

Analyse de la nature des attracteurs pour les réseaux dissipatifs

Au cours du chapitre 4, nous démontrons qu'un réseau de systèmes de réaction-diffusion admet sous certaines hypothèses une famille d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie. Nous proposons également une estimation de cette dimension fractale. Nous souhaitons poursuivre ce travail en recherchant le lien entre cette dimension fractale et les éléments de la topologie du réseau. Il paraît raisonnable, au regard des estimations d'énergie démontrées, de prévoir que cette dimension sera proportionnelle au nombre de nœuds du réseau. Mais nous souhaitons également étudier l'impact de la densité de connexions au sein du réseau. Peut-on par exemple montrer qu'un réseau densément connecté admet des attracteurs de faible dimension, en accord avec la tendance des systèmes complexes à l'auto-organisation? D'autre part, nous souhaitons analyser l'effet de la variation de certains paramètres de topologie sur ces attracteurs. Comment leur dimension varie-t-elle si l'on supprime une connexion du réseau, de sorte que plus aucun cycle n'existe dans ce même réseau? Enfin, nous proposons d'étudier la nature physique de ces attracteurs, qui sont obtenus par convergence asymptotique d'un système dissipatif. En considérant qu'un tel système tend vers un état de repos qui correspond à sa perte maximale d'énergie, peut-on alors décrire cet état de repos par un système conservatif? Cette question diffère des études effectuées sur les attracteurs des systèmes dissipatifs, puisque la difficulté principale à laquelle se sont attelés de nombreux auteurs [30, 31] consistait à décrire ces attracteurs par un système de dimension finie. Mais la nature supposée conservative ne figurait pas dans ces travaux.

Bifurcations dans les réseaux de systèmes non identiques

Nous montrons à la fin du chapitre 3 qu'une chaîne de systèmes non identiques, donnés par la forme normale de la bifurcation de Hopf, peut présenter de nouvelles solutions périodiques. Nous proposons d'étudier plus généralement la dynamique des réseaux construits à partir d'instances non identiques de systèmes donnés par les bifurcations locales de codimension 1 autres que la bifurcation de Hopf, c'est-à-dire la bifurcation *saddle-node*, la bifurcation *pitchfork*, et la bifurcation transcritique. Nous souhaitons établir une classification en distinguant d'une part la nature de la bifurcation considérée, et d'autre part, la nature du couplage au sein du réseau. Ce travail de classification peut commencer par l'étude de configurations de réseaux simples, comme les chaînes ou les cycles par exemple. Une classification même incomplète des bifurcations dans les réseaux de systèmes non identiques permettrait de mieux comprendre comment un système complexe peut exhiber des dynamiques nouvelles par le seul effet du couplage.

Diffusion généralisée

Les réseaux de systèmes de réaction-diffusion étudiés au cours des chapitres 4 et 5 permettent de tenir compte de la dimension spatiale d'un problème d'évolution par le biais du domaine sur lequel est posé le système de réaction-diffusion, mais aussi par l'intermédiaire de la structure du réseau. Nous souhaitons comparer ce modèle de réseau d'interaction avec une autre approche de la diffusion spatiale, appelée *diffusion généralisée*, qui associe l'opérateur laplacien de diffusion au plus proche voisin à l'opérateur bilaplacien, utilisé pour modéliser les phénomènes de diffusion à distance. Cette association des opérateurs laplacien et bilaplacien aboutit à une équation aux dérivées partielles de type parabolique, d'ordre 4, alors que les réseaux de systèmes de réaction-diffusion sont donnés par des équations paraboliques d'ordre 2. Nous avons le projet d'analyser conjointement la nature des solutions à ces deux problèmes et de comparer leur comportement asymptotique.

Cycles limites

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le travail réalisé dans le chapitre 6 sur les cycles limites dans les réseaux de systèmes hamiltoniens perturbés a permis d'égaliser certains résultats obtenus par différents auteurs. L'expérimentation numérique effectuée à la fin de ce chapitre nous autorise à penser que notre méthode peut aboutir à des résultats nouveaux. Nous souhaitons donc approfondir l'analyse des perturbations polynomiales des réseaux de systèmes hamiltoniens que nous avons construits. Le lien entre les coefficients du développement analytique de l'intégrale de Melnikov et l'expression polynomiale de ces perturbations doit être étudié en détail. La recherche de perturbations admettant les mêmes propriétés de symétrie que les réseaux de systèmes hamiltoniens considérés doit très certainement guider cette étude.

Dans ce chapitre préliminaire, nous présentons quelques-uns des éléments mathématiques essentiels utilisés au cours de cette thèse. Dans la première section, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle, concernant les espaces de fonctions usuelles, les espaces d'interpolation, les espaces de Sobolev, ainsi que les opérateurs linéaires. La seconde section est une introduction à la théorie des opérateurs sectoriels, utilisée dans la troisième section afin de démontrer l'existence et l'unicité de solutions locales pour certains problèmes d'évolution donnés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Dans la quatrième section, nous proposons un aperçu de quelques méthodes permettant l'étude qualitative des systèmes dynamiques, en présentant les notions d'attracteur, de stabilité et de bifurcation. Nous terminons ce chapitre par quelques généralités sur les systèmes complexes, ainsi que sur les méthodes numériques de décomposition utilisées pour le calcul approché des solutions des équations de réaction-diffusion.

Les théorèmes présentés dans ce chapitre sont classiques. Pour cette raison, nous ne donnons pas leur démonstration. Nous nous bornons à rappeler quelques idées essentielles, ainsi que des références bibliographiques. Afin de limiter ce chapitre à une taille raisonnable, nous avons choisi de ne pas rappeler certains résultats, parmi lesquels figurent les Théorèmes de Riesz, de Hahn-Banach, de Banach-Steinhaus, du graphe fermé en analyse fonctionnelle. On trouvera une présentation complète de ces théorèmes dans le livre de H. Brézis [12]. Nous n'avons pas non plus rappelé les résultats d'existence pour les équations différentielles. On trouvera un traitement approfondi de ce sujet dans les livres de J.-P. Demailly [26] ou L. Perko [84].

1.1 Notations

Dans toute cette thèse, nous noterons \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. Ω désignera un *domaine* de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un ouvert connexe de \mathbb{R}^n . Le bord de Ω sera noté $\partial\Omega$. En général, nous supposerons que $\partial\Omega$ est régulier. Nous dirons que $\partial\Omega$ est *Lipschitz* si $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction de type Lipschitz, ou que $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^r , avec $r \in \mathbb{N}^*$, si $\partial\Omega$ est une variété de dimension $n - 1$ de classe \mathcal{C}^r . La mesure de Lebesgue sur Ω sera notée dx . On désignera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels, qui sera muni d'une norme d'algèbre. Si (u_1, \dots, u_n) est une matrice-ligne à n coefficients, sa transposée est une matrice-colonne qui sera notée $(u_1, \dots, u_n)^T$. Si x est une fonction de la variable t , sa dérivée sera notée \dot{x} . Enfin, si X est un espace de Banach, sa norme sera notée $\|\cdot\|_X$. Les symboles \square , \triangleleft et \bullet indiqueront respectivement la fin d'une démonstration, d'un exemple et d'une remarque.

1.2 Éléments d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espaces de fonctions usuelles

Fonctions continues

On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles continues dans Ω , et $\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles k fois continûment dérivables dans Ω , pour un entier naturel k non nul, ou pour $k = +\infty$. On définit de la même façon les espaces $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$. L'espace des distributions sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit X un espace de Banach réel ou complexe et $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . On note $\mathcal{C}([a, b]; X)$ l'espace des fonctions continues dans $[a, b]$ à valeurs dans X , muni de

$$\|u\|_{\mathcal{C}([a, b]; X)} = \max_{a \leq t \leq b} \|u(t)\|_X.$$

De même, $\mathcal{C}^k([a, b]; X)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables dans $[a, b]$, à valeurs dans X , pour un entier naturel k non nul, muni de

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k([a, b]; X)} = \sum_{i=0}^k \max_{a \leq t \leq b} \|u^{(i)}(t)\|_X.$$

Fonctions intégrables

Pour un entier p tel que $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables u définies dans Ω telles que $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$. Muni de

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

c'est un espace de Banach.

On note $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables u définies dans Ω , pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que $|u(x)| \leq C$ p.p. sur Ω . Muni de

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C ; |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

c'est aussi un espace de Banach.

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx. \quad (1.1)$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder). *Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

où $1 \leq r \leq +\infty$. Alors $uv \in L^r(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.2)$$

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [12] par exemple.

Si X est un espace de Banach, $1 \leq p < +\infty$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on note $L^p(a, b; X)$ l'espace des fonctions u définies sur $]a, b[$, à valeurs dans X , pour lesquelles on a :

$$\|u\|_{L^p(a, b; X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Muni de cette norme, c'est un espace de Banach.

Applications linéaires

Soient X et Y deux espaces de Banach. L'espace des applications linéaires continues de X dans Y est noté $\mathcal{L}(X, Y)$. Muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y, \quad (1.3)$$

c'est un espace de Banach. Si $X = Y$, alors $\mathcal{L}(X, X)$ est noté plus simplement $\mathcal{L}(X)$.

1.2.2 Espaces d'interpolation

Soient X_0 et X_1 deux espaces de Banach, tels que X_1 s'injecte continûment et densément dans X_0 . La théorie des espaces d'interpolation permet de construire une famille $([X_0, X_1]_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ d'espaces de Banach, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $[X_0, X_1]_0 = X_0$ et $[X_0, X_1]_1 = X_1$ avec isométries ;
- (ii) $X_1 \subset [X_0, X_1]_\alpha \subset X_0$ avec injections continues et denses, pour $\alpha \in]0, 1[$;
- (iii) pour $\alpha \in]0, 1[$, on a $\|x\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \leq \|x\|_{X_0}^{1-\alpha} \|x\|_{X_1}^\alpha$ pour tout $x \in X_1$;
- (iv) $[X_0, X_1]_\beta \subset [X_0, X_1]_\alpha$ avec injection continue et dense, pour tous réels α, β tels que l'on ait $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Plusieurs méthodes ont été développées afin de construire ces espaces d'interpolation, parmi lesquelles la méthode de trace, due à J.-L. Lions, ou encore la K -méthode, due à L. Peetre. Ces méthodes sont présentées dans [71], [97] ou [74] par exemple. Les espaces d'interpolation permettent entre autres d'aborder les problèmes d'existence pour des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, en offrant une variété de niveaux intermédiaires entre les espaces fonctionnels choisis pour les résoudre.

1.2.3 Espaces de Sobolev

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note $H_p^m(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m au sens des distributions sont aussi dans $L^p(\Omega)$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans Ω , on note $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$; pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u$ et on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Muni de $\|u\|_{H_p^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$, $H_p^m(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $p = 2$, on note $H^m(\Omega) = H_2^m(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \quad (1.4)$$

On définit également les espaces de Sobolev $H_p^s(\Omega)$ d'ordre non entier $s \geq 0$, par exemple à l'aide des espaces d'interpolation. Si m est un entier tel que $m < s < m + 1$, on montre que

$$H_p^s(\Omega) = [H_p^m(\Omega), H_p^{m+1}(\Omega)]_\alpha,$$

où $\alpha = s - m$. On peut définir les espaces de Sobolev de manière équivalente à l'aide de la transformée de Fourier.

Le théorème suivant est un résultat de densité.

Théorème 1.2. *Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , de bord Lipschitz. Si $s > \frac{n}{p}$, alors on a*

$$H_p^s(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega}),$$

avec injection continue et dense.

Nous continuons avec un résultat de compacité.

Théorème 1.3. *Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , de bord Lipschitz, $s > 0$ et $1 < p < +\infty$. Alors l'injection $H_p^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compacte.*

Le théorème de trace suivant permet de définir sur le bord du domaine Ω une fonction donnée dans Ω .

Théorème 1.4. *Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , de bord Lipschitz, $s > 0$ et $1 < p < +\infty$ tels que $s > \frac{1}{p}$. Alors l'opérateur de trace*

$$\begin{aligned} \gamma : H_p^s(\Omega) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega) \\ f &\longmapsto f|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

est borné.

On trouvera dans [1] une présentation approfondie des espaces de Sobolev.

1.2.4 Triplets d'espaces

Produit de dualité

Soit X un espace de Banach. L'espace de Banach $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ des formes linéaires définies dans X est noté X' et il est appelé *espace dual* de X . On considère l'application canonique j définie dans X , à valeurs dans son *bidual* X'' :

$$\begin{aligned} j : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto j(x) : X' \longrightarrow \mathbb{C} \\ &f \longmapsto j(x)(f) = f(x). \end{aligned}$$

On vérifie que j est une isométrie. Lorsque j est surjective, on dit que X est *réflexif*. On montre que les espaces de Hilbert sont réflexifs. Lorsque $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif et séparable, et son dual coïncide avec $L^q(\Omega)$, où q désigne l'exposant conjugué de p , défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si X et Y sont des espaces de Banach, on appelle *produit de dualité* toute forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times Y}$ définie sur $X \times Y$ telle que

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle_{X \times Y}| &\leq \|x\|_X \|y\|_Y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \\ \|x\|_X &= \sup_{\|y\|_Y \leq 1} |\langle x, y \rangle_{X \times Y}|, \quad x \in X, \\ \|y\|_Y &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle x, y \rangle_{X \times Y}|, \quad y \in Y. \end{aligned}$$

Espaces adjoints

S'il existe un tel produit de dualité sur $X \times Y$, alors on dit que Y est un *espace adjoint* de X . Dans ce cas, X est aussi un espace adjoint de Y , avec le produit de dualité

$$\langle y, x \rangle_{Y \times X} = \overline{\langle x, y \rangle_{X \times Y}},$$

et on dit que $\{X, Y\}$ forme une *paire d'espaces adjoints*. Si X est un espace de Banach, on définit un produit de dualité sur $X \times X'$ en posant

$$\langle x, f \rangle_{X \times X'} = f(x), \quad x \in X, \quad f \in X'.$$

Ainsi, $\{X, X'\}$ forme une paire d'espaces adjoints. On remarque que $\{X', X''\}$ est également une paire d'espaces adjoints. Par conséquent, X' admet au moins deux espaces adjoints X et X'' . Dans toute la suite, nous noterons X^* un espace adjoint de X . Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} J : X^* &\longrightarrow X' \\ x &\longmapsto J(x) : X \longrightarrow \mathbb{C} \\ & y \longmapsto J(x)(y) = \langle y, x \rangle_{X \times X^*}. \end{aligned}$$

Théorème 1.5. *Soit X un espace de Banach et $\{X, X^*\}$ une paire d'espaces adjoints. Si X est réflexif, alors l'application J est une isométrie et un isomorphisme de X^* sur X' .*

Soient ensuite Z et X deux espaces de Hilbert tels que Z s'injecte continûment et densément dans X . On suppose qu'il existe un espace de Banach Z^* tel que l'on ait $Z \subset X \subset Z^*$ avec injections continues et denses, et que $\{Z, Z^*\}$ forme une paire d'espaces adjoints vérifiant la propriété

$$\langle z, u \rangle_{Z \times Z^*} = (z, u)_X, \quad z \in Z, \quad u \in X,$$

où $(\cdot, \cdot)_X$ désigne le produit scalaire dans X . Dans ce cas, on dit que Z^* est un *espace d'extrapolation* de Z et X , et que les espaces Z , X et Z^* forment un *triplet d'espaces*. On montre qu'un espace d'extrapolation peut toujours être construit de manière unique lorsque les hypothèses précédentes sont vérifiées.

Exemple 1.2.1. Si Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n , alors $Z = H^1(\Omega)$ et $X = L^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert et on a bien $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection continue et dense. Nous noterons $H^1(\Omega)^*$ l'espace d'extrapolation de $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. On prendra garde que $H^1(\Omega)^*$ ne coïncide avec aucun sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$. On pourra consulter [1] à ce sujet. \triangleleft

Pour cette partie, nous avons suivi le livre de A. Yagi [105]. On trouvera dans [12] une présentation équivalente des triplets d'espaces.

1.2.5 Opérateurs non bornés

Soit X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire de X dans Y est la donnée d'une application linéaire A définie sur un domaine $\mathcal{D}(A) \subset X$, à valeurs dans Y .

Définition 1.1. *On dit que A est fermé si son graphe $\{(x, Ax) ; x \in \mathcal{D}(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$. On dit que A est densément défini dans X si $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Soit A un opérateur linéaire fermé de X dans Y . Alors quel que soit $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A + B$ est aussi un opérateur fermé de X dans Y . L'identité I de X dans Y est notée 1 , et si $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\lambda I - A$ est noté $\lambda - A$. Si A est injectif, alors A admet un inverse A^{-1} dont le domaine est donné par l'image de A , et A^{-1} est fermé. Les opérateurs qui interviennent dans les problèmes d'évolution que nous traiterons seront des opérateurs différentiels fermés et densément définis.

Soit A un opérateur linéaire fermé, densément défini dans X . L'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\lambda - A$ admet un inverse borné $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Pour que $\rho(A)$ soit non vide, il est nécessaire que A soit fermé. On montre que $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{C} et que la fonction

$$\begin{aligned} \rho(A) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda - A)^{-1} \end{aligned}$$

est analytique dans $\rho(A)$. Si $\lambda_0 \in \rho(A)$, on a le développement analytique :

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda_0 - A)^{-(n+1)}, \quad (1.5)$$

pour tout λ vérifiant

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Le complémentaire de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} est appelé le *spectre* de A , et il est noté $\sigma(A)$.

Opérateur adjoint

Soient X, Y deux espaces de Banach, et A un opérateur de X dans Y , densément défini. L'adjoint de A , noté A^* , est un opérateur de Y' dans X' , dont le domaine est donné par :

$$\mathcal{D}(A) = \{v \in Y' ; \exists c \geq 0, |\langle v, Au \rangle_{Y' \times Y}| \leq c \|u\|_X, \forall u \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Si $v \in \mathcal{D}(A^*)$, on considère l'application

$$\begin{aligned} g : \mathcal{D}(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \langle v, Au \rangle_{Y' \times Y}. \end{aligned}$$

On montre que l'on peut prolonger g de manière unique, à l'aide du Théorème de Hahn-Banach par exemple, en une application linéaire f définie dans X , à valeurs dans \mathbb{R} , telle que

$$|f(u)| \leq c \|u\|_X,$$

pour tout $u \in X$. Ainsi, $f \in X'$. Finalement, on pose $A^*v = f$. L'adjoint A^* est caractérisé par la relation :

$$\langle v, Au \rangle_{Y' \times Y} = \langle A^*v, y \rangle_{X' \times X}, \quad u \in \mathcal{D}(A), \quad v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.3 Opérateurs sectoriels

Dans cette section, nous présentons une introduction à la théorie des opérateurs sectoriels. Les théorèmes cités sont tirés du livre d'A. Yagi [105]. Toutefois, on trouvera un traitement similaire dans d'autres ouvrages, par exemple [40] ou [74]. L'importance des opérateurs sectoriels repose sur le fait qu'ils permettent de définir un calcul fonctionnel. En effet, on montre, sous certaines hypothèses que nous détaillerons plus loin, qu'un opérateur sectoriel A engendre des semi-groupes analytiques, donnés par la fonction exponentielle e^{-tA} , et par les puissances fractionnaires A^z . Ce calcul fonctionnel permet d'aborder l'étude de certaines équations aux dérivées partielles, que nous serons amené à résoudre.

Dans un souci de clarté, nous avons limité notre présentation au cas d'un domaine borné, et d'un opérateur vérifiant une condition de Neumann. En effet, les problèmes d'évolution que nous étudierons plus loin correspondent à ce cadre. Cependant, des résultats similaires existent pour des opérateurs vérifiant d'autres conditions au bord, comme la condition de Dirichlet, ou des conditions périodiques par exemple, ainsi que dans le cas d'un domaine non borné. L'importance de l'espace L^2 et de sa structure hilbertienne apparaîtra ensuite, avec l'étude qualitative des solutions des problèmes d'évolution considérés, et notamment la question centrale de prouver l'existence d'un attracteur.

1.3.1 Généralités

Soit X un espace de Banach, et A un opérateur linéaire fermé et densément défini dans X . On suppose que le spectre de A est contenu dans un secteur ouvert du plan complexe :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}^*, |\arg(\lambda)| < \omega\}, \tag{1.6}$$

pour $\omega \in]0, \pi]$, et que sa résolvante satisfait :

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \tag{1.7}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\arg(\lambda)| \geq \omega$, avec $M \geq 1$.

Définition 1.2. *Un opérateur linéaire A fermé et densément défini dans X , vérifiant les conditions (1.6) et (1.7) est dit sectoriel.*

La condition (1.6) implique que $0 \notin \sigma(A)$, et donc que A admet un inverse borné A^{-1} défini dans X (voir sur la figure 1.1). D'après le développement analytique (1.5), on a :

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - |\lambda| \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

pour tout λ tel que

$$|\lambda| < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

On montre que si A est sectoriel, alors il existe un plus petit angle ω_A , appelé *angle de l'opérateur sectoriel A* , tel que les conditions (1.6) et (1.7) soient satisfaites.

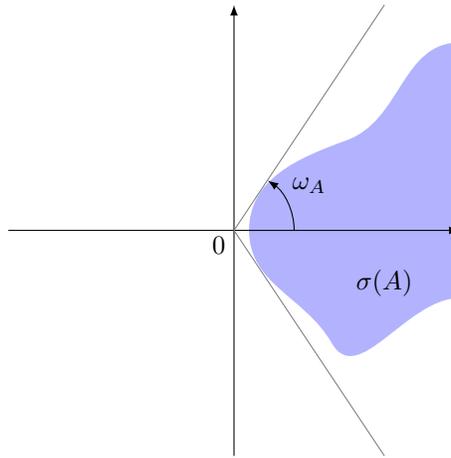


FIGURE 1.1 – Spectre $\sigma(A)$ d'un opérateur sectoriel A dans le plan complexe.

1.3.2 Opérateurs sectoriels associés à des formes sesquilinéaires

Soit $Z \subset X \subset Z^*$ un triplet d'espaces. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Z \times Z^*}$ le crochet de dualité, et on pose :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{Z^* \times Z} = \overline{\langle \cdot, \cdot \rangle_{Z \times Z^*}}.$$

On considère une forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie sur $Z \times Z$. On suppose que $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire :

$$|a(x, y)| \leq M \|x\|_Z \|y\|_Z, \quad x, y \in Z, \tag{1.8}$$

avec $M > 0$. Nous allons construire un opérateur linéaire A associé à la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$. Pour cela, on considère, pour chaque $U \in Z$, l'application

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow \mathbb{C} \\ V &\longmapsto \overline{a(U, V)} \end{aligned}$$

qui est linéaire et continue dans Z . D'après le Théorème 1.5, il existe un unique $\Phi \in Z^*$ tel que $a(U, V) = \langle \Phi, V \rangle_{Z^* \times Z}$ pour tout $V \in Z$. L'application

$$\begin{aligned} A : Z &\longrightarrow Z^* \\ U &\longmapsto \Phi \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire de Z dans Z^* , qui vérifie

$$a(U, V) = \langle AU, V \rangle_{Z^* \times Z}, \quad U, V \in Z.$$

La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ implique que A est un opérateur borné, tel que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(Z, Z^*)} \leq M,$$

où M est la constante définie dans (1.8). On dit que A est l'opérateur linéaire associé à la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$. On suppose maintenant que $a(\cdot, \cdot)$ est de plus coercive, c'est-à-dire :

$$\Re a(U, U) \geq \delta \|U\|_Z^2, \quad U \in Z, \quad (1.9)$$

avec $0 < \delta < M$.

Théorème 1.6. *Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire continue et coercive définie dans $Z \times Z$, et soit A l'opérateur linéaire associé à cette forme sesquilinéaire. Alors A est un isomorphisme de Z sur Z^* vérifiant*

$$\delta \|U\|_Z \leq \|AU\|_{Z^*} \leq M \|U\|_Z, \quad U \in Z.$$

De plus, A est un opérateur linéaire fermé et densément défini dans Z^* . Enfin, A et ses restrictions $A|_X$ et $A|_Z$ sont des opérateurs sectoriels de Z^* , X et Z respectivement, d'angles inférieurs strictement à $\frac{\pi}{2}$.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [105] ou [40]. Le théorème précédent nous permet de construire des opérateurs sectoriels dans des espaces modelés sur L^2 . Nous nous limitons au cas d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit $X = L^2(\Omega)$, $Z = H^1(\Omega)$ et $a(\cdot, \cdot)$ la forme sesquilinéaire définie par

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_i u D_j \bar{v} dx + \int_{\Omega} c(x) u \bar{v} dx, \quad (1.10)$$

pour $u, v \in Z$, où les fonctions a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, sont définies dans Ω , à valeurs dans \mathbb{R} , telles que

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \delta |\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec $\delta > 0$, et c est une fonction définie dans Ω , à valeurs réelles, telle que

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c(x) \geq c_0 > 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.12)$$

Théorème 1.7. *L'opérateur A associé à la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par (1.10) et ses restrictions $A|_X$ et $A|_Z$ sont des opérateurs sectoriels de $H^1(\Omega)^*$, $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ respectivement, d'angles inférieurs strictement à $\frac{\pi}{2}$. De plus, on a :*

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n D_j [a_{ij}(x) D_i u] + c(x)u, \quad u \in L^2(\Omega), \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n \nu_j(x) a_{ij}(x) D_i u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad u \in L^2(\Omega), \quad (1.14)$$

où $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ est le vecteur normal extérieur au bord de Ω en $x \in \partial\Omega$.

La condition (1.14) est appelée *condition de Neumann*. Supposons de plus que $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^2 et que

$$a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

ou bien que Ω est convexe, de bord $\partial\Omega$ Lipschitz, et que

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad x \in \Omega. \quad (1.15)$$

Alors on montre que l'opérateur A vérifie la propriété

$$Au \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega),$$

et que son domaine est donné par

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \quad (1.16)$$

Dans le cas où les fonctions a_{ij} vérifient la propriété de symétrie (1.15), on montre le résultat supplémentaire suivant.

Théorème 1.8. *Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , et A l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par (1.10), vérifiant (1.15). Alors A est un opérateur défini positif auto-adjoint de $L^2(\Omega)$.*

Exemple 1.3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné. On considère à nouveau le triplet d'espaces

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^*,$$

et on pose :

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad c(x) = c_0 > 0, \quad x \in \Omega.$$

Alors l'opérateur A associé vérifie :

$$Au = -\Delta u + c_0 u, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

pour tout $u \in L^2(\Omega)$, où Δ est l'opérateur laplacien, défini par :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

D'après le théorème précédent, A est un opérateur sectoriel, d'angle $\omega_A < \frac{\pi}{2}$. De plus, A est défini positif auto-adjoint, et son domaine $\mathcal{D}(A) = H_N^2(\Omega)$ tient compte de la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$. L'opérateur laplacien occupe une place centrale en dynamique des populations, où il est utilisé afin de modéliser des phénomènes de diffusion. Nous détaillerons ce sujet plus loin. \triangleleft

1.3.3 Semi-groupes analytiques

Semi-groupes d'opérateurs

Soit X un espace métrique.

Définition 1.3. *On dit qu'une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs définis dans X est un semi-groupe d'opérateurs si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $S(0) = 1$ (identité dans X);
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $t \geq 0$, $s \geq 0$.

Pour l'étude des systèmes dynamiques, que nous aborderons plus loin, nous serons amené à considérer des semi-groupes d'opérateurs non linéaires. Si X est un espace de Banach, nous dirons qu'une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires définis dans X si elle vérifie les propriétés (i) et (ii) de la définition précédente, et si de plus $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour chaque $t \geq 0$.

Fonction exponentielle

Soit X un espace de Banach et A un opérateur sectoriel défini dans X , d'angle $\omega_A < \frac{\pi}{2}$. On définit une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ à l'aide de l'intégrale de Dunford, en posant :

$$e^{-tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0, \quad (1.17)$$

dans $\mathcal{L}(X)$, où Γ est un chemin infini contenu dans $\rho(A)$, orienté dans le sens positif, qui entoure $\sigma(A)$, comme indiqué sur la figure 1.2. L'intégrale définie par (1.17) est convergente, puisque l'on a :

$$|e^{-t\lambda}| = e^{-t \operatorname{Re} \lambda} = e^{-t|\lambda| \cos \omega}, \quad \lambda \in \Gamma,$$

avec $\omega_A < \omega < \frac{\pi}{2}$. On montre que la famille d'opérateurs e^{-tA} vérifie la propriété de semi-groupe :

$$e^{-tA} e^{-sA} = e^{-sA} e^{-tA} = e^{-(t+s)A}, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

On dit alors que e^{-tA} est la *fonction exponentielle* engendrée par $-A$. De plus, on peut étendre e^{-tA} au secteur ouvert $\{z \in \mathbb{C} ; |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \omega\}$, en posant

$$e^{-zA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \omega. \quad (1.18)$$

On vérifie que la fonction exponentielle e^{-zA} est analytique dans le domaine

$$\{z \in \mathbb{C} ; |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \omega\},$$

et satisfait la propriété de semi-groupe :

$$e^{-zA} e^{-z'A} = e^{-z'A} e^{-zA} = e^{-(z+z')A}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \omega, |\arg z'| < \frac{\pi}{2} - \omega.$$

Enfin, on montre que e^{-zA} converge fortement dans X vers l'identité, lorsque z tend vers 0. On pose donc $e^{-0A} = 1$ (identité dans X). Finalement, on dit que la famille d'opérateurs e^{-zA} est la *semi-groupe analytique* engendré par $-A$.

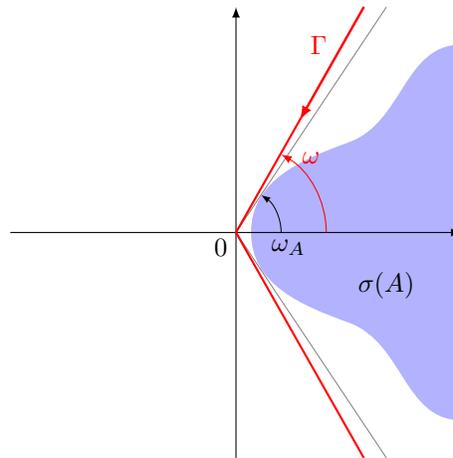


FIGURE 1.2 – Chemin entourant le spectre d'un opérateur sectoriel A d'angle $\omega_A < \frac{\pi}{2}$.

Puissances fractionnaires

Soit X un espace de Banach et A un opérateur sectoriel défini dans X , d'angle $\omega_A < \pi$. On définit, pour chaque nombre complexe z tel que $\Re z > 0$, l'opérateur A^{-z} à l'aide de l'intégrale de Dunford dans $\mathcal{L}(X)$, en posant :

$$A^{-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-z} (\lambda - A)^{-1} dz, \quad (1.19)$$

où Γ est un chemin infini contenu dans $\rho(A)$, orienté dans le sens positif, qui entoure $\sigma(A)$, comme indiqué sur la figure 1.3. Γ est composé de 2 demi-droites Γ^+ , Γ^- et d'un arc de cercle Γ_0 entourant 0, donnés par les paramétrisations :

$$\begin{aligned} \Gamma^{\pm} &: \lambda = \rho e^{\pm i\omega}, \quad \rho \geq \epsilon, \\ \Gamma_0 &: \lambda = \epsilon e^{i\varphi}, \quad -\omega < \varphi < \omega, \end{aligned}$$

avec $0 < \omega < \omega_A$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit de sorte que la boule ouverte de rayon ϵ est contenue dans $\rho(A)$. Cette intégrale est à nouveau convergente, puisque l'on a :

$$|\lambda^{-z}| = e^{\pm \omega \operatorname{Im} z} \rho^{-\operatorname{Re} z}, \quad \lambda \in \Gamma^{\pm}.$$

Il est nécessaire pour Γ de contourner l'origine afin de rester dans le domaine de définition de la représentation principale du logarithme complexe. On montre alors que la famille d'opérateurs A^{-z} est un semi-groupe analytique défini dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \Re z > 0\}$, et que A^{-z} admet un inverse noté A^z pour $\Re z > 0$. Pour tout x réel, A^x est appelé *puissance fractionnaire* de l'opérateur A . Si $x < 0$, A^x est un opérateur linéaire borné de X . De plus, $A^0 = 1$, et si $x > 0$, alors A^x est un opérateur linéaire fermé et densément défini dans X . On a les propriétés suivantes :

$$\mathcal{D}(A^x) \subset \mathcal{D}(A^y), \quad \text{si } x > y > 0, \quad (1.20)$$

$$A^x A^y = A^y A^x = A^{x+y}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

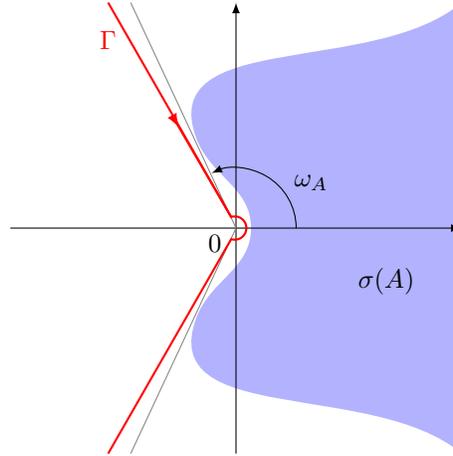


FIGURE 1.3 – Chemin entourant le spectre d'un opérateur sectoriel A d'angle $\omega_A < \pi$.

Supposons que X soit un espace de Hilbert. Si A est un opérateur défini positif auto-adjoint de X , alors le domaine de ses puissances fractionnaires coïncide avec les espaces d'interpolation définis précédemment.

Théorème 1.9. *Soit X un espace de Hilbert, et soit A un opérateur défini positif auto-adjoint de X . Alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\mathcal{D}(A^\alpha) = [X, \mathcal{D}(A)]_\alpha$, avec isométrie.*

Dans le cas où $X = L^2(\Omega)$, on peut caractériser de façon complète le domaine des puissances fractionnaires de A . Une fois de plus, nous nous limitons au cas où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n . On considère une forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par (1.10), vérifiant les propriétés (1.11) et (1.12), et l'opérateur linéaire A associé à cette forme sesquilinéaire. Comme plus haut, on suppose que $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^2 et que

$$a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

ou bien que Ω est convexe, de bord $\partial\Omega$ Lipschitz, et que

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad x \in \Omega.$$

Théorème 1.10. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\mathcal{D}(A^\alpha) = [L^2(\Omega), \mathcal{D}(A)]_\alpha = \begin{cases} H^{2\alpha}(\Omega) & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{3}{4}, \\ H_N^{2\alpha}(\Omega) & \text{si } \frac{3}{4} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

avec l'équivalence de normes

$$\frac{1}{C} \|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)} \leq \|A^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}, \quad u \in \mathcal{D}(A^\alpha),$$

où C est une constante strictement positive.

En particulier, le domaine de $A^{1/2}$ coïncide avec $H^1(\Omega)$.

1.3.4 Opérateurs sectoriels sur des espaces produits

Les systèmes d'équations que nous serons amené à résoudre nous conduiront naturellement à considérer des opérateurs définis dans des espaces produits du type $X = (L^p(\Omega))^N$, N désignant le nombre d'équations décrivant l'évolution du problème en question. Les résultats obtenus sur les opérateurs sectoriels s'étendent au cas des espaces produits.

Théorème 1.11. *Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach, A_1, A_2 deux opérateurs sectoriels définis dans X_1 et X_2 , d'angles $0 \leq \omega_1 < \pi$ et $0 \leq \omega_2 < \pi$ respectivement. Alors l'opérateur diagonal $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ défini dans $X_1 \times X_2$, ayant pour domaine $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_2)$, est lui-même sectoriel, d'angle $\omega_A \leq \max(\omega_1, \omega_2)$.*

1.4 Équations paraboliques semi-linéaires

Les problèmes d'évolution que nous traiterons dans cette thèse seront donnés par des systèmes d'équations différentielles ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans le premier cas, l'existence et l'unicité de solutions seront obtenues par application du Théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans le deuxième cas, nous utiliserons les théorèmes présentés dans cette section, qui concernent les équations paraboliques semi-linéaires, parmi lesquelles figurent les équations de réaction-diffusion. La démonstration de ces théorèmes repose elle-même sur le Théorème du point fixe de Banach.

1.4.1 Existence et unicité d'une solution locale

Soit X un espace de Banach, A un opérateur sectoriel défini dans X , d'angle $\omega_A < \frac{\pi}{2}$, $0 < \eta < 1$, et F un opérateur non linéaire défini dans $\mathcal{D}(A^\eta)$ à valeurs dans X . On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & 0 < t \leq T, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

avec $U_0 \in X$. On suppose que F vérifie la condition suivante :

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_X &\leq \varphi(\|U\|_X + \|V\|_X) \\ &\quad \times [\|A^\eta(U - V)\|_X + (\|A^\eta U\|_X + \|A^\eta V\|_X) \|U - V\|_X], \end{aligned} \quad (1.23)$$

pour $U, V \in \mathcal{D}(A^\eta)$, où φ est une fonction continue et croissante.

Théorème 1.12. *Pour tout $U_0 \in X$, le problème de Cauchy (1.22) admet une unique solution locale U définie sur $[0, T]$, telle que*

$$U \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T]; X) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; X), \quad (1.24)$$

où T dépend de $\|U_0\|_X$. En outre, U vérifie

$$\|U(t)\|_X + t \|AU(t)\|_X \leq C, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.25)$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend uniquement de $\|U_0\|$. Enfin, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$ et un temps $t_r > 0$, tels que

$$t^\eta \|A^\eta(U(t) - V(t))\|_X + \|U(t) - V(t)\|_X \leq C_r \|U_0 - V_0\|_X,$$

pour tous $U_0, V_0 \in B_r = \{U \in X ; \|U\|_X \leq r\}$ et $t \in]0, t_r]$, où U et V désignent les solutions issues de U_0 et V_0 respectivement.

Ce théorème est démontré dans [105]. La preuve repose sur l'utilisation du Théorème du point fixe de Banach, pour l'application Φ définie sur un ensemble fermé Y composé de fonctions continues à valeurs dans $\mathcal{D}(A^\eta)$ par :

$$\Phi(U)(t) = e^{-tA}U_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(U(s))ds, \quad 0 \leq t \leq S,$$

où $S \in]0, T]$, $U \in Y$ et e^{-tA} est la fonction exponentielle engendrée par l'opérateur $-A$. La solution locale U étant un point fixe de l'application Φ , elle est donnée par la formule précédente.

Remarque 1.4.1 (Méthodes variationnelles). L'existence et l'unicité de solutions locales aux problèmes paraboliques non linéaires donnés par (1.22) peuvent être prouvées par d'autres méthodes. Par exemple, on trouvera dans [70] une démonstration variationnelle par régularisation elliptique, qui garantit l'existence et l'unicité de solutions locales U dans l'espace de fonctions :

$$U \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

pour toute condition initiale $U_0 \in L^2(\Omega)$, dans le cas où $X = L^2(\Omega)$.

On trouvera encore d'autres méthodes n'utilisant pas la théorie des opérateurs sectoriels dans [34], pour montrer que les problèmes donnés par de telles équations sont bien posés. •

1.4.2 Équations de réaction-diffusion

Nous donnons maintenant un exemple d'équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires, dont l'étude correspond au cadre présenté précédemment. Soit Ω un domaine borné. On appelle *équation de réaction-diffusion* toute équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u),$$

où Δ est l'opérateur laplacien défini dans l'exemple (1.3.1), et f un opérateur non linéaire. Le terme Δu est appelé *terme de diffusion*, tandis que le terme $f(u)$ est appelé *terme de réaction*. On considère ensuite le problème aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où u est une fonction définie dans $\Omega \times]0, +\infty[$, et u_0 une fonction définie dans Ω . On considère maintenant le triplet d'espaces $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^*$, et l'opérateur $A = -\Delta + c_0$ avec $c_0 > 0$, introduit dans l'exemple 1.3.1. Alors on peut reformuler le problème aux limites précédent en écrivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où u est identifiée à une fonction définie dans $\Omega \times]0, +\infty[$, et F est défini par $F(u) = c_0 u + f(u)$. On parle de formulation abstraite de l'équation de réaction-diffusion avec condition au bord de Neumann. On peut de même donner une formulation abstraite des problèmes aux limites pour des *systèmes d'équations de réaction-diffusion* de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u),$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^m , et D une matrice diagonale de taille m , avec $m \geq 2$.

Remarque 1.4.2. Les équations de réaction-diffusion sont utilisées pour étudier des problèmes d'évolution de nature très variée, comme en physique statistique, en chimie, ou encore en dynamique des populations, où les phénomènes de dispersion sont modélisés par l'opérateur laplacien [79], [17], [80], [52]. Cet aspect sera abordé au cours du chapitre 2. Les équations de réaction-diffusion révèlent une dynamique très riche. Elles peuvent par exemple donner lieu à des phénomènes de propagation d'ondes, ou d'instabilité spatiale, avec formation de motifs de Turing [98], [58], [93]. L'intérêt de ces équations réside dans le fait que ces dynamiques non triviales ne peuvent pas se produire lorsqu'on sépare le phénomène de diffusion du phénomène de réaction. •

1.4.3 Existence globale

Nous terminons cette section par un résultat supplémentaire, tiré de [105], qui garantit l'existence globale d'une solution locale.

Corollaire 1.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème 1.12 soient satisfaites. Si la solution locale du problème de Cauchy (1.22) vérifie une majoration de la forme*

$$\|U(t)\|_X \leq C, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où C est une constante indépendante de T , alors $T = +\infty$.

1.5 Systèmes dynamiques et systèmes complexes

Dans cette section, nous présentons les éléments essentiels concernant les systèmes dynamiques continus définis par des problèmes d'évolution déterministes, et les systèmes complexes. Dans la suite,

ces problèmes seront décrits par des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO), ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP). Nous parlerons dans le premier cas de systèmes dynamiques de dimension finie, et dans le deuxième cas, de systèmes dynamiques de dimension infinie, en concordance avec la dimension de l'espace des solutions. Comme nous l'avons évoqué précédemment, les questions d'existence et d'unicité de solutions à ces problèmes sont traitées de manière différente pour les deux cas. Puis, l'étude qualitative de ces solutions est centrée autour de la notion d'*attracteur*. Nous présenterons donc les notions d'attracteur global et d'attracteur exponentiel. Dans le cas des systèmes d'EDO, une étude approfondie de la nature d'un attracteur, de sa stabilité, et de ses bifurcations est envisageable. Par exemple, de nombreuses méthodes ont été développées afin de démontrer l'existence d'un cycle limite, et d'en étudier la stabilité. Dans le cas des systèmes d'EDP, ces questions sont difficiles, et ont été l'objet d'intenses efforts de recherche. Le problème de l'analyse de bifurcation sur un attracteur est encore en partie ouvert aujourd'hui. Par exemple, la notion de *variété inertielle* a été proposée par plusieurs auteurs, afin de décrire un attracteur par un système d'EDO, réduisant ainsi à la dimension finie le problème considéré [95, 67, 30, 31, 75]. Toutefois, des hypothèses restrictives sur le spectre des opérateurs intervenant dans ces problèmes, restreignent fortement le champ d'application de ces méthodes.

1.5.1 Ensembles invariants et attracteurs

Soit X un espace de Banach, et \mathcal{K} une partie de X . On suppose que la distance induite sur \mathcal{K} par la norme de X confère à \mathcal{K} une structure d'espace métrique. On considère un système (\mathcal{S}) dont l'état est décrit par une famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ définis dans \mathcal{K} , à valeurs dans \mathcal{K} . Dans la suite, (\mathcal{S}) pourra être déterminé par un système d'EDO de la forme

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad t \geq t_0,$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}^p$, f étant une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, ou un système d'EDP de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + F(u), \quad t \geq 0,$$

A étant un opérateur linéaire et F un opérateur non linéaire définis dans X . Les formes de ces systèmes seront détaillées plus loin. Nous supposons que la famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfait la propriété de semi-groupe de la définition 1.3 dans \mathcal{K} .

Définition 1.4. *On dit que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe continu si l'application*

$$\begin{aligned} [0, +\infty[\times \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (t, u) &\longmapsto S(t)u \end{aligned}$$

est continue dans $[0, +\infty[\times \mathcal{K}$. Nous dirons alors que le triplet

$$(S(t), \mathcal{K}, X)$$

est un système dynamique défini dans X , et que \mathcal{K} est son espace de phase.

Pour $u_0 \in \mathcal{K}$, on appelle *orbite* ou *trajectoire* du système (\mathcal{S}) issue de u_0 l'ensemble $\bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0$.

L'application

$$\begin{aligned} [t_0, +\infty[\times \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ (t, u_0) &\longmapsto S(t)u_0 \end{aligned}$$

est appelée *flot* du système (\mathcal{S}) . Pour $\mathcal{W} \subset \mathcal{K}$, on définit l'*ensemble ω -limite* de \mathcal{W} comme l'ensemble

$$\omega(\mathcal{W}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{W}}.$$

Si $u \in \mathcal{K}$, alors $u \in \omega(\mathcal{W})$ si et seulement si il existe une suite (u_n) d'éléments de \mathcal{W} et une suite (t_n) de nombres réels telles que $t_n \rightarrow +\infty$ et $S(t_n)u_n \rightarrow u$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Définition 1.5. Un point d'équilibre (ou point fixe, point stationnaire, point critique) est un élément $u_0 \in \mathcal{K}$ tel que $S(t)u_0 = u_0$ pour tout $t \geq 0$. La variété stable de u_0 , notée $\mathcal{M}_s(u_0)$, est l'ensemble des éléments $u^* = u(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, qui appartiennent à une orbite du système (\mathcal{S}) et tels que $S(t-\tau)u^* \rightarrow u_0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. La variété instable de u_0 , notée $\mathcal{M}_i(u_0)$, est l'ensemble des éléments $u^* = u(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, qui appartiennent à une orbite du système (\mathcal{S}) et tels que $S(t-\tau)u^* \rightarrow u_0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$.

Les variétés stables et instables peuvent être vides. Un point d'équilibre u_0 est dit *stable* lorsque $\mathcal{M}_i(u_0) = \emptyset$, *instable* sinon.

Définition 1.6. Une partie \mathcal{W} de \mathcal{K} est dite *positivement invariante* si l'on a $S(t)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$ pour tout $t \geq 0$. Elle est dite *invariante* si $S(t)\mathcal{W} = \mathcal{W}$ pour tout $t \geq 0$.

Si u_0 est un point d'équilibre du système (\mathcal{S}) , alors $\{u_0\}$, $\mathcal{M}_i(u_0)$ et $\mathcal{M}_s(u_0)$ sont des ensembles invariants.

Proposition 1.1. Soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{K}$ une partie non vide. On suppose que l'ensemble $\bigcup_{t \geq \tau} S(t)\mathcal{W}$ est relativement compact dans \mathcal{K} pour $\tau > 0$. Alors $\omega(\mathcal{W})$ est non vide, compact et invariant.

Soit \mathcal{W} une partie de \mathcal{K} , et $u \in \mathcal{K}$. La distance de x à \mathcal{W} est définie par :

$$d(x, \mathcal{W}) = \inf_{v \in \mathcal{W}} d(u, v),$$

où d désigne la distance sur \mathcal{K} , induite par la norme de X .

Attracteur global

Définition 1.7. Soit \mathfrak{a} une partie de \mathcal{K} . On dit que \mathfrak{a} est un *attracteur* pour le système dynamique $(S(t), \mathcal{K}, X)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) \mathfrak{a} est invariant;
- (ii) \mathfrak{a} admet un voisinage ouvert \mathcal{U} tel que, pour tout $u_0 \in \mathcal{U}$,

$$d(S(t)u_0, \mathfrak{a}) \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Un attracteur peut par exemple être réduit à un point, ou peut correspondre à une orbite périodique isolée. Mais sa composition peut aussi être d'une nature plus complexe. Le plus grand ensemble \mathcal{U} qui réalise la condition (ii) est appelé *bassin d'attraction* de \mathfrak{a} .

Si \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 sont deux parties de X , la semi-distance de \mathcal{W}_1 à \mathcal{W}_2 est définie par

$$d(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = \sup_{u \in \mathcal{W}_1} \inf_{v \in \mathcal{W}_2} d(u, v).$$

On prendra garde que $d(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = 0$ implique seulement $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$.

On dit que \mathfrak{a} *attire* un ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ si

$$d(S(t)\mathcal{B}, \mathfrak{a}) \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$. Si \mathfrak{a} est compact et attire les parties bornées de \mathcal{K} , on dit qu'il est *global* ou *universel*. On remarque qu'un tel ensemble est nécessairement unique. On parlera donc de l'attracteur global. De plus, l'attracteur global est maximal pour la relation d'inclusion parmi les attracteurs bornés invariants. Pour cette raison, l'attracteur global est parfois appelé *attracteur maximal*.

Définition 1.8. Soit \mathcal{B} une partie de \mathcal{K} et \mathcal{U} un ouvert contenant \mathcal{B} . On dit que \mathcal{B} est absorbant dans \mathcal{U} , si pour toute partie bornée \mathcal{B}_0 de \mathcal{U} , il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq t_1.$$

On dit aussi que \mathcal{B} absorbe les parties bornées de \mathcal{U} .

Le théorème suivant, tiré de [95], garantit l'existence de l'attracteur global dans le cas où un ensemble absorbant est connu. Les problèmes d'évolution qui vérifient cette propriété sont parfois qualifiés de *dissipatifs*.

Théorème 1.13. On suppose que pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$, il existe t^* tel que

$$\bigcup_{t \geq t^*} S(t)\mathcal{B}$$

soit relativement compact dans \mathcal{K} . De plus, on suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ et une partie bornée \mathcal{B} de \mathcal{U} tels que \mathcal{B} soit absorbant dans \mathcal{U} . Alors l'ensemble ω -limite \mathfrak{a} de \mathcal{B} est un attracteur compact qui attire les parties bornées de \mathcal{U} . De plus, \mathfrak{a} est maximal pour l'inclusion parmi les attracteurs bornés dans \mathcal{U} . Enfin, si \mathcal{K} est un espace de Banach et que \mathcal{U} est convexe, alors \mathfrak{a} est connexe.

Enfin, on montre que si un système dynamique $(S(t), \mathcal{K}, X)$ possède l'attracteur global \mathfrak{a} , alors \mathfrak{a} contient la variété instable de chaque point d'équilibre de $(S(t), \mathcal{K}, X)$.

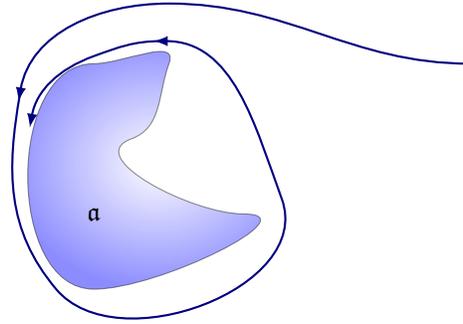


FIGURE 1.4 – Convergence d'une orbite d'un système dynamique $(S(t), \mathcal{K}, X)$ vers un attracteur \mathfrak{a} .

Attracteurs exponentiels

L'étude du comportement asymptotique des solutions d'un problème d'évolution donné par un système d'EDP est très souvent guidée par la notion d'attracteur global. Toutefois, la vitesse de convergence des trajectoires du système vers un tel attracteur n'est pas renseignée. De plus, on montre que l'attracteur global présente un défaut de robustesse sous l'action de la variation des paramètres inhérents au système étudié. Afin de pallier ces manques, on introduit donc la notion d'attracteur exponentiel [30, 31].

Si \mathfrak{m} est une partie compacte d'un espace de Banach X , alors pour tout $\varepsilon > 0$, \mathfrak{m} peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon ε . Soit N_ε le nombre minimal de boules fermées de rayon ε nécessaires pour recouvrir \mathfrak{m} . La *dimension fractale* de \mathfrak{m} est définie par :

$$d_F(\mathfrak{m}) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \in [0, +\infty]. \quad (1.26)$$

Si $d_F(\mathfrak{m}) < +\infty$, on dit que \mathfrak{m} est de dimension fractale finie.

Définition 1.9. Soit $(S(t), \mathcal{K}, X)$ un système dynamique admettant un attracteur global \mathfrak{a} , et \mathfrak{m} une partie de \mathcal{K} . On dit que \mathfrak{m} est un attracteur exponentiel de $(S(t), \mathcal{K}, X)$ si les trois conditions suivantes sont remplies :

- (i) \mathfrak{m} est une partie compacte de \mathcal{K} , telle que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathcal{K}$, avec une dimension fractale finie ;
- (ii) \mathfrak{m} est positivement invariant ;
- (iii) il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$, on ait :

$$d(S(t)\mathcal{B}, \mathfrak{m}) \leq c_{\mathcal{B}} e^{-kt}, \quad t \geq 0,$$

où $c_{\mathcal{B}} > 0$ est une constante qui dépend de \mathcal{B} .

L'existence d'attracteurs exponentiels peut être démontrée pour des systèmes dynamiques qui vérifient une propriété appelée *squeezing property*, dans le cas où X est un espace de Hilbert, et \mathcal{K} une partie compacte de X .

Définition 1.10. On considère un système dynamique $(S(t), \mathcal{K}, X)$ où X est un espace de Hilbert et \mathcal{K} une partie compacte de X , pour lequel il existe $t^* > 0$ tel que l'opérateur non linéaire $S = S(t^*)$ vérifie :

$$\|SU - SV\|_X \leq L \|U - V\|_X, \quad U, V \in \mathcal{K}, \quad (1.27)$$

avec $L > 0$. On dit que S possède la *squeezing property* s'il existe $\delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta < \frac{1}{4}$, et une projection orthogonale P de rang fini, tels que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soient remplies :

$$\begin{aligned} & \|SU - SV\|_X \leq \delta \|U - V\|_X \\ & \text{ou bien} \\ & \|(1 - P)(SU - SV)\|_X \leq \|P(SU - SV)\|_X, \end{aligned} \quad (1.28)$$

pour tous $U, V \in \mathcal{K}$.

Théorème 1.14. Soit $(S(t), \mathcal{K}, X)$ un système dynamique défini dans un espace de Hilbert X , pour lequel l'espace de phase \mathcal{K} est une partie compacte de X . On suppose qu'il existe $t^* > 0$, tel que

$$\|S(t)U_0 - S(s)V_0\|_X \leq C(|t - s| + \|U_0 - V_0\|_X), \quad (1.29)$$

pour tous $U_0, V_0 \in \mathcal{K}$ et $t, s \in [0, t^*]$. Si de plus $S(t^*)$ possède la *squeezing property* (1.28), alors le système dynamique $(S(t), \mathcal{K}, X)$ admet une famille \mathfrak{m} d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, qui contiennent l'attracteur global \mathfrak{a} .

On remarque que la condition (1.29) est suffisante pour que la propriété (1.27) soit satisfaite. Dans la suite, nous serons amené à démontrer l'existence de tels attracteurs pour des systèmes d'équations de réaction-diffusion. Nous choisirons pour cela le cadre fonctionnel hilbertien de l'espace L^2 . Le point central de la démonstration consistera alors à prouver que le système dynamique induit par le problème d'évolution étudié possède la *squeezing property*. Mentionnons que cette propriété trouve son origine dans l'étude des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides [30]. On trouvera dans [31] une généralisation de ces méthodes aux espaces de Banach qui ne sont pas munis d'une structure hilbertienne.

Enfin, l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels implique l'existence de l'attracteur global, et les estimations de la dimension fractale des attracteurs exponentiels fournissent une estimation de la dimension de l'attracteur global. Toutefois, on peut estimer la dimension de l'attracteur global par d'autres méthodes, qui utilisent une généralisation des exposants de Lyapunov, comme mesure de la contraction des volumes de l'espace de phase par le flot induit par le problème d'évolution étudié. On pourra consulter [95] à ce sujet.

1.5.2 Stabilité

Dans le cas d'un système dynamique de dimension finie, de nombreuses méthodes ont été développées afin d'étudier la nature qualitative des attracteurs, et qui trouvent souvent leur origine dans les travaux de Poincaré [85]. Dans cette partie, nous considérons un système d'EDO de la forme

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (1.30)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, t est la variable temporelle, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ est une fonction dont nous précisons la régularité, et λ est un vecteur de paramètres. Si f dépend explicitement du temps t , on dit que le système est *non autonome*. Dans le cas contraire, il est dit *autonome*. L'existence de solutions pour les systèmes autonomes et les systèmes non autonomes est garantie par le Théorème de Cauchy-Lipschitz [26, 84].

On suppose que \bar{x} est un point d'équilibre du système (1.30). On note $x(t; t_0, x_0)$ la solution de ce système issue de x_0 à $t = t_0$, définie pour x_0 appartenant à un voisinage U de \bar{x} .

Définition 1.11. *On dit que \bar{x} est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|x_0 - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

On dit que \bar{x} est asymptotiquement stable si pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; t_0, x_0) - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Si \bar{x} n'est pas stable, on dit que \bar{x} est instable.

Le théorème suivant permet de démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable. On en trouvera une démonstration dans [101].

Théorème 1.15 (Poincaré-Lyapunov). *On considère l'équation*

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + \varphi(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice carrée de taille n , $B(t)$ est une matrice carrée de taille n dont les coefficients dépendent continûment de t , telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|B(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0,$$

et φ est une fonction continue définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, lipschitzienne en x dans un voisinage de $x = 0$, vérifiant

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad \text{uniformément en } t.$$

Alors $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable. De plus, la vitesse d'attraction est exponentielle dans un voisinage de $x = 0$.

Méthode de Lyapunov

On considère l'équation

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1.31)$$

où f est une fonction définie dans \mathbb{R}^n et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in U$ est un point d'équilibre, c'est-à-dire que l'on a $f(0, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.

Théorème 1.16. *S'il existe une fonction V , définie dans un voisinage de 0, définie positive, admettant une dérivée orbitale semi-définie négative, alors le point d'équilibre 0 est stable.*

Une fonction V vérifiant les propriétés du théorème précédent est appelée *fonction de Lyapunov*. Pour les systèmes issus d'un problème physique, une telle fonction peut être déterminée par l'étude de l'énergie du système. Toutefois, la conclusion du théorème garantit la stabilité du point d'équilibre dans un voisinage de ce dernier. On parle alors de stabilité *locale*. Le théorème suivant, appelé *principe d'invariance de La Salle* [68], permet de démontrer la stabilité *globale* d'un point d'équilibre, c'est-à-dire dans un ensemble positivement invariant.

Théorème 1.17 (Principe d'invariance de La Salle). *Soit \mathcal{K} une partie compacte et positivement invariante par le flot induit par le système (1.31). On suppose qu'il existe une fonction V définie dans \mathcal{K} , définie positive, admettant une dérivée orbitale \dot{V} semi-définie négative dans \mathcal{K} . Soient*

$$E = \{x \in \mathcal{K} ; \dot{V}(x) = 0\},$$

et M le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E . Alors toute solution $x(t)$ du système (1.31) issue à t_0 d'une condition initiale x_0 dans \mathcal{K} converge vers M , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, on puisse trouver $p \in M$ tel que :

$$d(x(t), p) < \varepsilon.$$

Effet d'une perturbation

On considère le système

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad x(t_0) = \mu, \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.32)$$

où f est une fonction continue définie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ et $|t - t_0| \leq h$.

Théorème 1.18. *Si f est développable en série entière par rapport à x et λ , pour $\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho$ et $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, alors la solution du problème (1.32) peut elle-même être écrite comme la somme d'une série entière par rapport à λ et μ , dans un voisinage de $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.*

Théorème de la variété centrale

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.33)$$

où $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une fonction définie dans \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^r avec $r \geq 1$. La matrice

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est appelée *matrice jacobienne* du système (1.33). Soient E_s , E_i et E_c les sous-espaces propres engendrés par les vecteurs propres de la matrice jacobienne évaluée en \bar{x} , associés aux valeurs propres de partie réelle négative, positive et nulle respectivement. On a $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_i \oplus E_c$.

Théorème 1.19. *Il existe des variétés \mathcal{M}_s , \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_c de classe \mathcal{C}^r , invariantes par le flot induit par le système (1.33), tangentes respectivement à E_s , E_i et E_c . De plus, les variétés \mathcal{M}_s et \mathcal{M}_i sont uniques.*

Les variétés \mathcal{M}_s , \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_c sont respectivement appelées variétés *stable*, *instable* et *centrales*. On prendra garde que le théorème précédent ne garantit pas l'unicité des variétés centrales. L'appellation *Théorème de la variété centrale* constitue donc un abus de langage, pourtant communément admis. Ces variétés coïncident avec la définition présentée plus haut. Dans certains cas, il est possible d'obtenir une équation des variétés centrales au voisinage d'un point d'équilibre. On pourra consulter [25] à ce sujet. Notons enfin que le Théorème de la variété centrale peut être généralisé au cas de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles [18, 47].

1.5.3 Bifurcations

La théorie des bifurcations, issue des problèmes de mécanique, est un sujet vaste que nous ne traiterons que très partiellement. On trouvera dans [64] une introduction approfondie à ce sujet. Nous nous bornerons à décrire deux exemples de bifurcations locales : la bifurcation nœud-col et la bifurcation de Hopf. Puis, nous présenterons un cas particulier de la méthode de Melnikov permettant d'étudier certaines bifurcations globales de cycles limites, dans le cas des systèmes hamiltoniens définis dans \mathbb{R}^2 .

Considérons un système dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^p$, s'écrivant sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (1.34)$$

où f est une fonction définie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. On dit que le système (1.34) est *structurellement stable* en $\bar{\lambda}$ s'il existe un voisinage \mathcal{N} de $\bar{\lambda}$, tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{N}$, les trajectoires du système $\dot{x} = f(x, \lambda)$ et celles du système $\dot{x} = f(x, \bar{\lambda})$ soient homéomorphes, avec conservation de la direction du temps t . Dans ce cas, on dit aussi que les systèmes sont *topologiquement équivalents*. Dans le cas contraire, on dit que $\bar{\lambda}$ est un *point de bifurcation*.

Bifurcation nœud-col

On considère le système défini dans \mathbb{R} par :

$$\dot{x} = \lambda - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $\lambda > 0$, ce système admet deux points d'équilibres $x_1 = \sqrt{\lambda}$ et $x_2 = -\sqrt{\lambda}$. On montre que x_1 est stable, alors que x_2 est instable. Lorsque $\lambda = 0$, le système possède un unique point d'équilibre $x_0 = 0$. Si $\lambda < 0$, le système n'admet aucun point d'équilibre. Finalement, le système présente une bifurcation en $\lambda = 0$. Cette bifurcation est appelée bifurcation *nœud-col*. Les portraits de phase sont présentés sur la figure 1.5(a). Le diagramme présenté sur la figure 1.5(b) est un diagramme de bifurcation ; les valeurs du paramètre λ sont indiquées sur l'axe des abscisses, et celles des points d'équilibres sur l'axe des ordonnées. La courbe des points d'équilibres est divisée en deux parties : la partie en traits pleins représente les équilibres stables, tandis que la partie en pointillés représente les équilibres instables.

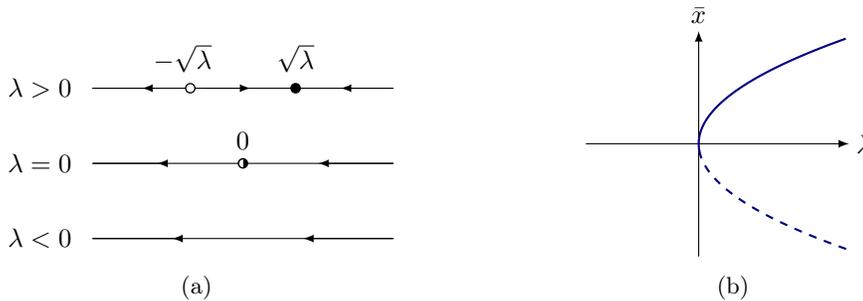


FIGURE 1.5 – Bifurcation nœud-col. (a) Portraits de phase. (b) Diagramme de bifurcation.

Bifurcation de Hopf

On considère ensuite le système défini dans \mathbb{R}^2 par :

$$\dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\lambda > 0$, le système admet un *cycle limite*, c'est-à-dire une orbite périodique isolée. Sinon, il présente un foyer stable en l'origine. Les portraits de phase correspondants sont montrés sur la figure 1.6. On dit que le système présente en $\lambda = 0$ une *bifurcation de Hopf*.

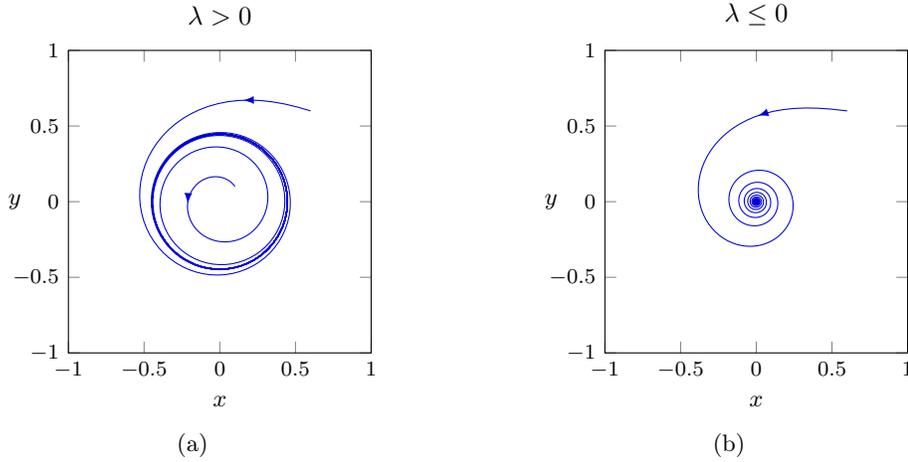


FIGURE 1.6 – Bifurcation de Hopf. (a) Existence d'un foyer instable et d'un cycle limite attracteur. (b) Existence d'un foyer stable et disparition du cycle limite.

Plus généralement, supposons que le système

$$\dot{u} = f(u, \lambda), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.35)$$

présente un point d'équilibre $\bar{u}(\lambda)$ et que sa matrice jacobienne évaluée en $\bar{u}(\lambda)$ possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées

$$\nu(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$$

telles qu'il existe une valeur de paramètre λ_c pour laquelle on a :

$$\alpha(\lambda_c) = 0, \quad \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c) \neq 0.$$

On suppose de plus que les $n - 2$ autres valeurs propres de la matrice jacobienne ont leur partie réelle strictement négative. Le système admet donc en $\bar{u}(\lambda_c)$ une variété centrale de dimension 2. On montre qu'il existe une transformation de coordonnées telle que l'équation de cette variété centrale puisse s'écrire :

$$\dot{\xi} = \nu(\mu)\xi + c_1(\mu)\bar{\xi}\xi^2 + O(\bar{\xi}\xi^2), \quad (1.36)$$

où ξ est une variable complexe et $\mu = \lambda - \lambda_c$. Cette dernière équation est appelée *forme normale de Poincaré*, et le coefficient $c_1(\mu)$ est appelé *premier nombre de Lyapunov*.

Théorème 1.20 (Poincaré-Andronov-Hopf). *Si les hypothèses précédentes sont satisfaites, et si l'on a :*

$$a_1 = \Re c_1 \neq 0, \quad \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c) \frac{\mu}{a_1} < 0,$$

alors λ_c est un point de bifurcation de l'état d'équilibre $\bar{u}(\lambda_c)$ vers un cycle limite.

On peut déterminer la stabilité du cycle limite en fonction des signes de $\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c)$ et a_1 . Par exemple, si $\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c) > 0$ et $a_1 < 0$, alors le point d'équilibre est stable si $\lambda < \lambda_c$, et perd sa stabilité si $\lambda > \lambda_c$, auquel cas le système présente un cycle stable. On parle de bifurcation *super-critique*. Enfin, l'algorithme de Hassard, Wan et Kazarinoff [47] permet de calculer le coefficient c_1 dans l'équation (1.36).

Sphère de Poincaré

Pour les systèmes définis dans \mathbb{R}^2 , l'étude de la stabilité de certaines branches infinies mène à considérer une projection du plan sur la *sphère de Poincaré* [85]. Notons (x, y) les coordonnées d'un point générique du plan \mathbb{R}^2 , et

$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 ; X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}.$$

On considère la projection dite *gnomonique* de la sphère S^2 sur son plan tangent au pôle nord, comme indiqué sur la figure 1.7. Les coordonnées (x, y) du point du plan tangent s'écrivent alors :

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Inversement, on peut faire correspondre à tout point du plan deux points A et B de la sphère, symétriques par rapport à son centre. Un seul de ces deux points appartient à l'hémisphère nord. Ses coordonnées s'obtiennent à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Dans cette transformation, les points du plan situés à l'infini sont envoyés sur l'équateur de la sphère.

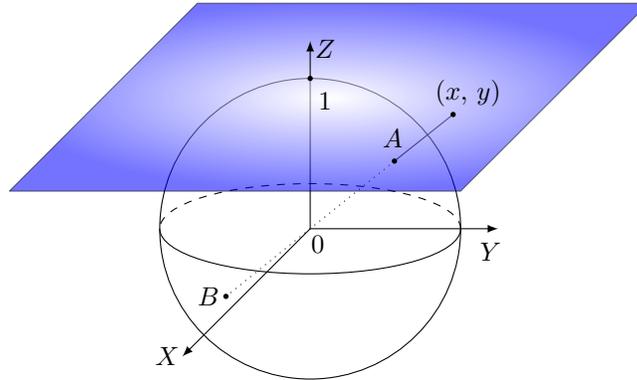


FIGURE 1.7 – Projection gnomonique de la sphère de Poincaré sur son plan tangent au pôle nord.

1.5.4 Systèmes hamiltoniens et intégrale de Melnikov

Soit H une fonction régulière définie dans \mathbb{R}^2 . Tout système de la forme

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.37}$$

est appelé système *hamiltonien* du plan \mathbb{R}^2 . Dans ce système, on utilise la notation $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$, $H_y = \frac{\partial H}{\partial y}$. Un point d'équilibre (x_0, y_0) est un *centre non dégénéré* du système (1.37) si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $H_x(x_0, y_0) = H_y(x_0, y_0) = 0$,
- (ii) $H_{xx}(x_0, y_0)H_{yy}(x_0, y_0) - H_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$.

Dans ce cas, on montre qu'il existe une bande continue d'orbites périodiques $\gamma_h \subset H^{-1}(\{h\})$ pour $h \in]0, h_0[$, avec $h_0 > 0$, encerclant (x_0, y_0) (voir [84], Théorème 2 de la section 2.14, ou [45]).

Considérons maintenant un système hamiltonien perturbé, s'écrivant sous la forme :

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f(x, y), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon g(x, y), \quad (1.38)$$

où H , f et g sont des polynômes, et ε est un coefficient réel. Supposons que le système non perturbé, obtenu pour $\varepsilon = 0$, présente un centre non dégénéré $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ avec une famille d'orbites fermées $\gamma_h \subset H^{-1}(\{h\})$, dépendant continûment de $h \in]0, h_0[$, encerclant \bar{p} . L'intégrale de Melnikov [77] au point \bar{p} , (également appelée *intégrale abélienne* [19]), est définie par :

$$M(\bar{p}, h) = \oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx. \quad (1.39)$$

On a de façon équivalente :

$$\oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx = \iint_{\Gamma_h} (f_x + g_y)dx dy, \quad (1.40)$$

où Γ_h désigne l'intérieur de la courbe fermée γ_h .

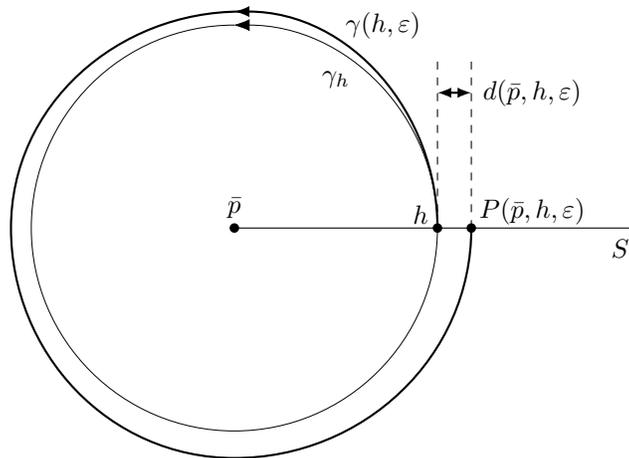


FIGURE 1.8 – Application de Poincaré et fonction de déplacement.

Considérons ensuite une section S de la famille d'orbites γ_h , $h \in]0, h_0[$, issue de \bar{p} , paramétrée par h , pour ε suffisamment petit. On montre que l'on peut définir une application, appelée *application de Poincaré* (voir [84] ou [43] par exemple), indépendante du choix de la section S , qui associe à chaque $h \in]0, h_0[$, la valeur $P(\bar{p}, h, \varepsilon)$ correspondant au premier retour de l'orbite perturbée $\gamma(h, \varepsilon)$ à travers S (voir sur la figure 1.8). On définit alors la fonction de déplacement :

$$d(\bar{p}, h, \varepsilon) = P(\bar{p}, h, \varepsilon) - h, \quad (1.41)$$

pour $h \in]0, h_0[$ et ε suffisamment petit. On montre [84] que l'application de Poincaré et la fonction de déplacement sont analytiques dans leur domaine de définition, lorsque H , f et g sont analytiques, et *a fortiori* polynomiaux. Le théorème suivant établit un lien entre la fonction de déplacement et l'intégrale de Melnikov. On trouvera une démonstration de ce théorème dans [19] par exemple.

Théorème 1.21 (Poincaré-Pontryagine). *La fonction de déplacement vérifie*

$$d(\bar{p}, h, \varepsilon) = \varepsilon [M(\bar{p}, h) + \varepsilon \varphi(h, \varepsilon)],$$

lorsque ε tend vers 0, où $\varphi(h, \varepsilon)$ est analytique et uniformément borné pour (h, ε) dans un voisinage compact de $(h, 0)$, avec $h \in]0, h_0[$.

Enfin, le lemme suivant permet d'établir une correspondance entre les zéros de l'intégrale de Melnikov et l'existence de cycles limites pour le système (1.38).

Lemme 1.1. *On suppose que l'intégrale de Melnikov $M(\bar{p}, h)$ n'est pas identiquement nulle pour $h \in]0, h_0[$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *S'il existe $h_1 \in]0, h_0[$ tel que $M(\bar{p}, h_1) = 0$ et $M'(\bar{p}, h_1) \neq 0$, alors le système perturbé (1.38) admet un unique cycle limite qui bifurque de γ_{h_1} .*
2. *S'il existe $h_1, h_2 \in]0, h_0[$ tels que $M(\bar{p}, h_1) > 0$ et $M(\bar{p}, h_2) < 0$, alors le système perturbé (1.38) admet au moins un cycle limite entre γ_{h_1} et γ_{h_2} .*

Le premier point est prouvé en détail dans [19]. Le second est présenté dans [20] sans preuve. Nous en donnerons une démonstration dans le chapitre consacré à la recherche de cycles limites dans les réseaux de systèmes hamiltoniens.

1.5.5 Systèmes complexes

Dans cette thèse, nous allons étudier le comportement des solutions de problèmes d'évolution obtenus en couplant plusieurs instances d'un système dynamique donné. Nous appellerons *système complexe* un tel problème. Nous distinguerons deux types de systèmes complexes.

Le premier type de systèmes complexes correspond à un couplage augmentant la dimension de l'espace de phase. Considérons par exemple un système dynamique de dimension infinie, donné par une équation aux dérivées partielles non linéaire s'écrivant sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

où Ω désigne un domaine borné de \mathbb{R}^n , u est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^m , et F est un opérateur non linéaire. On considère ensuite un entier $N \geq 2$, et on pose le système à N équations :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F(u_i) + G_i(u_1, \dots, u_N), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.42)$$

où les inconnues u_i , $1 \leq i \leq N$, sont à valeurs dans \mathbb{R}^m . Le terme

$$G(u_1, \dots, u_N) = (G_1(u_1, \dots, u_N), \dots, G_N(u_1, \dots, u_N))$$

sera appelé *terme de couplage*. Sa forme précise dépendra de la nature du problème étudié, et pourra être déterminée en correspondance avec un graphe \mathcal{G} constitué de N sommets qui seront associés à chaque instance du système dynamique initial. Nous donnons dans le paragraphe suivant quelques éléments de théorie des graphes. Pour désigner le problème (1.42), nous parlerons de *réseau couplé* ou de *problème réseau*. Dans ce premier cas, l'inconnue (u_1, \dots, u_N) du problème prend ses valeurs dans l'espace produit $(\mathbb{R}^m)^N$.

Le deuxième type de systèmes complexes que nous serons amené à étudier n'augmente pas la dimension de l'espace de phase. Considérons par exemple un système dynamique donné par un système d'EDO :

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

où f est une fonction définie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supposons que ce système possède un point d'équilibre à l'origine. On considère ensuite une famille finie

$$\mathcal{P} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$$

de points de \mathbb{R}^n , et on pose le problème :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N f(x - x_i, t) \delta(x, \mathcal{P}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $\delta(x, \mathcal{P})$ est le terme de couplage. Le système obtenu présente alors en chaque point de \mathcal{P} un équilibre. L'inconnue x du problème reste une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n . Suivant la forme du terme de couplage, la nature des équilibres du problème réseau peut différer de celle du système initial.

Des problématiques spécifiques aux systèmes complexes nous conduisent à les étudier avec une approche différente de celle qui consisterait à les aborder comme des systèmes ordinaires. Parmi ces problématiques, on peut citer les questions de *synchronisation* [4, 5, 83], d'*auto-organisation* [6, 22, 87], ou de *topologie du réseau* [9, 38, 91]. De manière générale, un système complexe peut présenter une dynamique différente de celle du système dynamique dont il est composé. Nous parlerons de *dynamique globale* pour désigner celle du système complexe, et de *dynamique locale* pour désigner celle du système dynamique initial. On peut chercher à déterminer la dynamique globale d'un réseau, connaissant la dynamique locale de chaque nœud (*bottom-up*), ou à retrouver la dynamique locale, connaissant la dynamique globale (*top-down*). On peut également, connaissant les dynamiques globale et locale, chercher à déterminer la topologie du réseau.

Finalement, indiquons que les systèmes complexes occupent une place importante en modélisation, où ils sont utilisés afin d'étudier des problèmes de nature variée, comme les réseaux de neurones, les groupes d'individus en dynamique des populations, les réseaux sociaux ou géographiques par exemple.

1.5.6 Éléments de théorie des graphes

Un graphe orienté est un triplet $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \Psi)$ constitué de deux ensembles finis \mathcal{N} , \mathcal{E} et d'une application Ψ définie de \mathcal{E} dans $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Les éléments de \mathcal{N} sont appelés *sommets* ou *nœuds*, et les éléments de \mathcal{E} sont appelés *arêtes*. Si une arête $e \in \mathcal{E}$ est telle que $\Psi(e) = (v, w)$, alors on dit que v et w sont les extrémités de e , ou que e relie v et w . Si $v = w$, on dit que e est une boucle. Si deux arêtes e et e' sont telles que $\Psi(e) = \Psi(e')$, alors on dit que e et e' sont parallèles. Un graphe est dit simple s'il n'admet pas d'arêtes parallèles. Dans ce cas, on peut identifier une arête $e \in \mathcal{E}$ avec son image $\Psi(e)$, et on écrit $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$.

Si v_1 et v_k sont deux sommets d'un graphe simple \mathcal{G} , on appelle *chaîne* toute suite de la forme

$$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k],$$

où les éléments e_i sont des arêtes, et où les éléments v_i sont des sommets, tels que e_i relie v_i à v_{i+1} , $1 \leq i \leq k - 1$. Nous dirons que deux sommets sont *connectés* s'il existe une chaîne admettant ces sommets comme extrémités. La longueur d'une chaîne est son nombre d'arêtes. S'il existe une chaîne reliant chaque paire de sommets d'un graphe \mathcal{G} , alors ce graphe est dit *connexe*.

Étant donné un graphe connexe \mathcal{G} et un sommet s de ce graphe, on peut déterminer les chaînes reliant s à tous les autres sommets à l'aide d'un algorithme de *balayage* [61]. Si n est le nombre de sommets de \mathcal{G} et m son nombre d'arêtes, alors la complexité d'un tel algorithme est $O(n + m)$: cela signifie que le nombre d'opérations élémentaires effectuées lors de l'exécution de l'algorithme est une fonction linéaire de $n + m$. Si s et t sont deux sommets d'un graphe connexe, on peut déterminer le plus court chemin reliant s à t en appliquant l'algorithme de Dijkstra, dont la complexité est $O(m + n \log n)$ [28, 61]. Pour l'exécution de ces algorithmes, nous avons utilisé la bibliothèque `networkx` du langage `python` (voir Annexe A).

1.6 Méthode numérique de décomposition

Pour terminer ce chapitre préliminaire, nous donnons quelques éléments concernant les méthodes numériques de décomposition, utilisées pour calculer une approximation numérique des solutions d'un

système de réaction-diffusion [27]. Considérons un système de réaction-diffusion défini dans \mathbb{R}^n , s'écrivant sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^m , f une fonction définie dans \mathbb{R}^n , et D une matrice diagonale de taille m , avec $m \geq 2$. On décompose le système précédent en introduisant les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= f(w), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

qui correspondent aux termes de diffusion et de réaction respectivement. On suppose que ces problèmes sont bien posés, et que l'on a montré l'existence et l'unicité de solutions locales pour chacun d'eux. Notons ensuite Φ_t^u , Φ_t^v et Φ_t^w les flots associés aux trois problèmes précédents respectivement. Selon la nature du problème considéré, on peut calculer une approximation numérique du flot Φ_t^v par la méthode des différences finies ou par la méthode des éléments finis [90]. D'autre part, on peut calculer une approximation numérique du flot Φ_t^w par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 par exemple [26]. Enfin, pour obtenir une approximation du flot Φ_t^u , on peut utiliser la formule de Strang :

$$\Phi_t^u = \Phi_{t/2}^v \Phi_t^w \Phi_{t/2}^v.$$

On montre que ce schéma d'approximation est convergent. On trouvera dans [27] une présentation détaillée de ce sujet, ainsi que des schémas optimisés, utiles pour l'approximation de solutions présentant des instabilités en temps ou en espace.

Les résultats numériques qui seront présentés au cours de cette thèse ont été obtenus par l'implémentation de ces schémas avec les langages **C++**, **FreeFem++** ou **Python**, sur un ordinateur personnel équipé du système d'exploitation **DEBIAN-GNU/LINUX**. Quelques programmes sont donnés dans l'annexe [A](#).

Étude d'un modèle comportemental

Aristote pensait que le cerveau humain avait pour seul rôle le contrôle des fonctions organiques primitives, telles le maintien de la température du corps [39]. Il considérait le cœur comme le siège des émotions et la *psyché* comme celui des pensées. Depuis, la science a progressé, et la connaissance du fonctionnement du cerveau humain avec. L'étude des comportements humains a bénéficié des avancées réalisées dans ce domaine, notamment concernant les comportements liés à des situations exceptionnelles, parmi lesquelles les événements catastrophiques qui font la condition humaine depuis le début de son histoire.

Dans ce chapitre, nous proposons l'étude de la dynamique d'un modèle mathématique pour des comportements humains en situation de catastrophe. Nous commençons en présentant les éléments et les choix de modélisation mathématique qui ont mené à considérer le système Panique-Contrôle-Réflexe, dont le but premier est de formaliser les réactions comportementales des individus faisant face à une situation de désastre, afin de mieux les comprendre, les prévenir, et les maîtriser. Nous citons également quelques autres modélisations proposées auparavant dans la littérature, et expliquons la spécificité du modèle que nous avons choisi d'étudier. Ensuite, nous proposons une analyse mathématique de ce modèle, qui prend d'abord la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires. En particulier, nous étudions la stabilité des équilibres de ce système, analysons les bifurcations associées, et présentons une étude de la dynamique transitoire et du comportement asymptotique des solutions. Tout au long de ce chapitre, des simulations numériques viendront illustrer les résultats théoriques.

2.1 Éléments de modélisation

Le simple est toujours faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable.
Paul Valéry, *Œuvres II (1942)*.

La modélisation mathématique est un art délicat, qui implique par nature un dilemme constant entre l'ambition d'une part de proposer un modèle complet et fidèle à la réalité, ou du moins à la perception que nous en avons, et d'autre part la nécessité de considérer un modèle suffisamment simple pour espérer en faire une analyse qualitative approfondie [96]. Nous allons néanmoins dans cette première partie présenter un modèle mathématique pour l'étude des comportements humains en situation de catastrophe [89, 99]. Le champ d'application de ce modèle aura des limites que nous spécifierons en détail. Ce modèle mathématique prendra la forme d'un système dynamique donné par un système d'équations différentielles, semblable, par quelques aspects que nous expliquerons, à certains modèles épidémiologiques.

Les principales références bibliographiques utilisées pour cette partie sont [88], [89], [11], [24], et les travaux cités dans ces articles.

2.1.1 Modèles mathématiques pour l'étude de la panique

De nombreux modèles mathématiques ont été proposés afin d'étudier le phénomène de la panique, dans ses différents aspects. Plusieurs études s'appuient sur l'analyse des mouvements et des comportements des piétons au sein d'une foule [53, 8]. Certains travaux proposent de modéliser les phénomènes de mouvements de foule en utilisant des équations issues de la cinétique des gaz, comme les équations de Boltzmann [50] ou les équations de Boltzmann-Fokker-Planck [49], partant du postulat qu'une foule peut être modélisée par un fluide ou un gaz. D'autres travaux proposent d'étudier la diffusion des individus au sein d'une foule par marche aléatoire et s'appuient également sur l'effet de la diffusion croisée [59]. Ces modèles sont microscopiques et déterministes. Certains auteurs proposent une modélisation dite *granulaire* des individus au sein d'une foule [76] et étudient les phénomènes d'engorgement aux abords des zones de circulation contraintes, par un goulot par exemple.

Le système Panique-Contrôle-Réflexe (PCR) que nous allons présenter dans ce chapitre est à notre connaissance le premier modèle mathématique comportemental pour l'étude de la panique chez des individus confrontés à une situation de catastrophe. Dans les prochaines sections, nous allons en proposer une étude mathématique. Toutefois, des réductions du système PCR, que nous préciserons plus loin, s'imposeront quelquefois comme une nécessité. D'autre part, nous n'excluons pas que ce modèle fasse dans un futur proche l'objet de modifications ou d'améliorations. Car c'est bien l'essence même de la modélisation mathématique, comme nous l'avons exposé en introduction de cette partie.

2.1.2 Typologie comportementale

L'étude des comportements d'individus confrontés à une situation exceptionnelle de catastrophe, qu'elle soit d'origine naturelle, comme un séisme, une inondation, une éruption volcanique, ou d'origine technique, comme une explosion industrielle ou un incendie urbain, constitue une recherche essentiellement empirique, qui repose sur le recueil d'informations issues des travaux d'historiens, de témoignages, ou d'observations effectuées par les services de secours intervenus sur la zone sinistrée. Les réactions d'un individu ont une durée limitée, avec un commencement et une fin clairement identifiés ; elles dépendent principalement de deux facteurs, qui sont l'environnement de cet individu, aussi bien physique, social, culturel ou spatial, et les caractéristiques propres de cet individu.

Prenant également en considération les dimensions temporelle et spatiale d'un événement catastrophique, D. Provitolo et E. Dubos-Paillard ont proposé une typologie comportementale détaillée de ces réactions [89], présentée dans le tableau 2.1. Partant de cette typologie, on propose de considérer trois groupes de comportements de catastrophe, que nous nommerons *panique*, *contrôle* et *réflexe*. Le groupe des comportements de réflexe rassemble les comportements instinctifs présentés dans le tableau 2.1, exception faite de la fuite panique, que nous appellerons simplement panique. Ces comportements sont traités par la zone reptilienne du cerveau. Le groupe des comportements de contrôle correspond à l'ensemble des comportements acquis et intelligents, gérés par le cortex préfrontal.

Fixons donc une population \mathcal{P} de N individus, touchée par un événement catastrophique. Nous noterons t_0 l'instant initial de l'événement et pour $t \geq t_0$, $p(t)$, $r(t)$, $c(t)$ les quantités respectives d'individus en comportement de panique, de réflexe et de contrôle. En outre, nous appellerons *comportements du quotidien*, tous les comportements adoptés par les individus avant l'événement catastrophique, dont nous noterons $q(t)$ la quantité, et après cet événement, dont nous noterons $b(t)$ la quantité. Ces notations sont indiquées dans le tableau 2.2. Nous limiterons notre étude au cas d'une catastrophe soudaine, à dynamique assez rapide et ne faisant pas l'objet d'une alerte à la population, et étudierons les comportements sur la zone d'impact du désastre. Citons un exemple correspondant à cette catégorie. Au large de la côte du littoral des Alpes Maritimes (France, Région Provence-Alpes-Côte d'Azur), à une distance d'environ 80 km, une faille tectonique identifiée est susceptible de provoquer des glissements sous-marins, qui eux-mêmes peuvent déclencher un tsunami. Le temps d'arrivée de ces tsunamis sur

TABLEAU 2.1 – Typologie comportementale pour une population affectée par un événement catastrophique. La dimension temporelle est divisée en deux phases. Dans la phase préalable au choc, on distingue le danger distant annoncé (A) du danger imminent annoncé et personnellement menaçant (B). Dans la phase postérieure au choc, on distingue le danger présent prévu ou imprévu (C) de l’immédiat post-impact (D). Source : [89].

Principaux types de comportements	A	B	C	D
Comportements instinctifs				
Fuite panique		✓	✓	✓
Sidération			✓	✓
Lutte instinctive			✓	
Agitation		✓	✓	✓
Comportement d’automate		✓	✓	✓
Comportements acquis et intelligents				
Évacuation, fuite	✓	✓	✓	✓
Confinement, mise à l’abri	✓	✓	✓	✓
Lutte réfléchie contre les effets du désastre	✓	✓	✓	✓
Immobilisme contraint ou réfléchi		✓	✓	✓
Recherche des proches	✓	✓	✓	✓
Recherche des secours			✓	✓
Entraide		✓	✓	✓
Curiosité			✓	✓
Comportements déviants				✓
Retour sur le lieu de travail ou d’habitation				✓

la côte peut être relativement court. En 1979, un tel tsunami d’intensité moyenne a mis moins de 8 minutes pour atteindre le littoral. De plus, nous supposons que l’événement catastrophique est d’intensité limitée, et nous posons l’hypothèse que la population est constante lors de cet événement. Pour désigner l’ensemble du processus comportemental considéré, nous parlerons du *système Panique-Contrôle-Réflexe*, ou plus simplement du système PCR.

2.1.3 Évolutions comportementales et imitations

Les comportements des individus affectés par un événement catastrophique sont de durée limitée, comme nous l’avons déjà mentionné, et sont sujets à deux types de changements. Premièrement, chaque individu connaît une évolution comportementale qui lui est propre. Typiquement, le comportement de réflexe r est adopté dès le déclenchement de l’événement, puis il évolue vers le comportement de panique p ou celui de contrôle c . Le déroulement des événements peut induire un retour momentané vers le réflexe. Nous noterons B_1, B_2 les proportions d’individus qui à l’instant t évoluent du comportement de réflexe $r(t)$ vers le contrôle $c(t)$ et la panique $p(t)$ respectivement. Les proportions correspondant aux retours du contrôle vers le réflexe, et de la panique vers le réflexe seront notées s_1 et s_2 respectivement ; ces évolutions rétrogrades peuvent être en particulier déclenchées par un effet de dominos, que nous détaillerons plus loin. Enfin, les proportions des évolutions de la panique vers le contrôle, et du contrôle vers la panique, seront notées C_1 et C_2 respectivement. Ces notations figurent dans le tableau 2.2.

Deuxièmement, les individus, au sein de leur entourage, sont sujets à des phénomènes de contagion émotionnelle. Dans de nombreux modèles épidémiologiques, on modélise la rencontre entre un individu I infecté par une maladie donnée et un individu sain S , par un produit du type $\psi(S)I$, où ψ est une fonction donnée, par exemple par $\psi(S) = \alpha S$ avec $\alpha > 0$, auquel cas cette rencontre se solde par une contagion, dans une certaine proportion α . De la même façon, nous supposons que les interactions

TABLEAU 2.2 – Notations principales pour le système PCR.

Fonction	Notation
Comportement quotidien avant la catastrophe	$q(t)$
Comportement de réflexe	$r(t)$
Comportement de contrôle	$c(t)$
Comportement de panique	$p(t)$
Comportement quotidien après la catastrophe	$b(t)$
Déclenchement de la catastrophe	$\gamma(t)$
Fonction de retour au comportement du quotidien	$\varphi(t)$
Fonctions d'imitation	f, g, h
Paramètre	Notation
Évolution du réflexe vers le contrôle	B_1
Évolution du réflexe vers la panique	B_2
Évolution de la panique vers le contrôle	C_1
Évolution du contrôle vers la panique	C_2
Imitation entre réflexe et contrôle	α_1, α_2
Imitation entre réflexe et panique	δ_1, δ_2
Imitation entre panique et contrôle	μ_1, μ_2
Effets de dominos	s_1, s_2
Capacité maximale de réflexe	r_m
Capacité maximale de retour au comportement du quotidien	b_m
Coefficients de diffusion spatiale	d_1, d_2, d_3, d_4

rc , rp et cp induisent des contagions émotionnelles, dans des proportions que nous noterons f , g et h respectivement. Une différence notable avec les contagions épidémiologiques doit ici être détaillée. En effet, dans un modèle épidémiologique classique, la rencontre SI se traduit par une diminution de la densité d'individus sains, modélisée par le terme $-\alpha SI$ dans l'équation de leur évolution, et une augmentation de la densité d'individus infectés, modélisée par le terme $+\alpha SI$ dans leur équation. Ces éléments seront détaillés dans le chapitre 4. Au contraire, les contagions émotionnelles au sein d'une population touchée par un désastre induisent des flux, dont l'orientation peut dépendre des proportions d'individus à l'instant t .

Par exemple, si à l'instant t_1 la proportion $p(t_1)$ d'individus en panique est nettement inférieure à la proportion $c(t_1)$ d'individus en contrôle, alors l'interaction $p(t_1)c(t_1)$ entre ces individus provoquera une augmentation $+\mu_1 p(t_1)c(t_1)$ de la densité d'individus en contrôle, dans une certaine proportion μ_1 . Si au contraire à l'instant t_2 les proportions sont inversées, alors l'interaction pourra provoquer une diminution $-\mu_2 p(t_2)c(t_2)$ de la densité d'individus en contrôle, dans une autre proportion μ_2 . Les proportions f , g et h des interactions qui induisent des contagions émotionnelles pourront donc changer de signe, en fonction des densités r , c et p . Elles dépendront donc des paramètres d'interaction α_i , δ_i

2.1. Éléments de modélisation

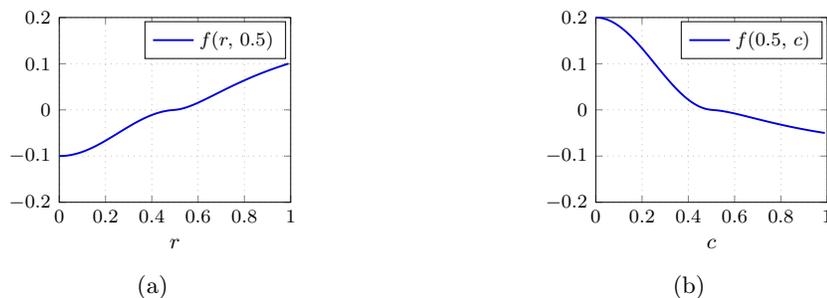


FIGURE 2.1 – Exemple de flux de contagion émotionnelle correspondant à la fonction d'imitation $f(r, c)$ avec $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.2$. (a) Pour $c = 0.5$, l'imitation est dirigée du comportement de contrôle c vers le comportement de réflexe r si $r > 0.5$, et change de sens si $r < 0.5$. (b) Pour $r = 0.5$, l'imitation est dirigée du comportement de contrôle c vers le comportement de réflexe r si $c < 0.5$, et change de sens si $c > 0.5$.

et $\mu_i, i \in \{1, 2\}$ et seront données par :

$$\begin{cases} f(r, c) = -\alpha_1 \xi\left(\frac{r}{c + \nu_0}\right) + \alpha_2 \xi\left(\frac{c}{r + \nu_0}\right) \\ g(r, p) = -\delta_1 \xi\left(\frac{r}{p + \nu_0}\right) + \delta_2 \xi\left(\frac{p}{r + \nu_0}\right) \\ h(c, p) = -\mu_1 \xi\left(\frac{c}{p + \nu_0}\right) + \mu_2 \xi\left(\frac{p}{c + \nu_0}\right), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\nu_0 > 0$ et ξ est définie par :

$$\xi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s > 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

La figure 2.1 montre l'inversion du flux de contagion émotionnelle correspondant à la fonction d'imitation $f(r, c)$, dans le cas où $\alpha_1 = 0.1$ et $\alpha_2 = 0.2$. Cependant, il sera quelquefois nécessaire de simplifier ce modèle, en supposant ces fonctions d'imitation constantes.

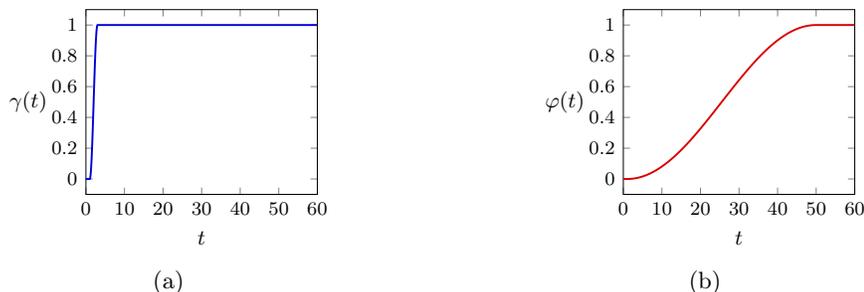


FIGURE 2.2 – Fonctions de déclenchement et de terminaison du processus comportemental dans le système PCR. (a) Fonction de déclenchement $\gamma(t)$. (b) Fonction de terminaison $\varphi(t)$.

Pour terminer cette section, indiquons les choix effectués pour modéliser le déclenchement et la terminaison du processus comportemental. Le caractère soudain des événements que nous avons choisi

d'étudier provoque un basculement des individus du comportement quotidien q vers le comportement réflexe r . Ce basculement comportemental sera modélisé par un terme d'interaction pondéré [79, 96] que nous écrivons

$$\pm\gamma(t)q(t)(r_m - r(t)),$$

permettant de tempérer la décroissance du comportement du quotidien q par l'effet de la capacité maximale d'individus en comportement de réflexe. La fonction de pondération γ sera souvent choisie en accord avec le caractère soudain de l'événement, comme indiqué sur la figure 2.2. Le processus de retour au comportement du quotidien sera de même modélisé par un terme d'interaction pondéré que nous écrivons

$$\pm\varphi c(t)(b_m - b(t)).$$

La fonction de pondération φ aura typiquement une allure moins brutale que celle de γ , illustrée sur la figure 2.2.

Finalement, l'ensemble du processus comportemental est schématisé sur la figure 2.3.

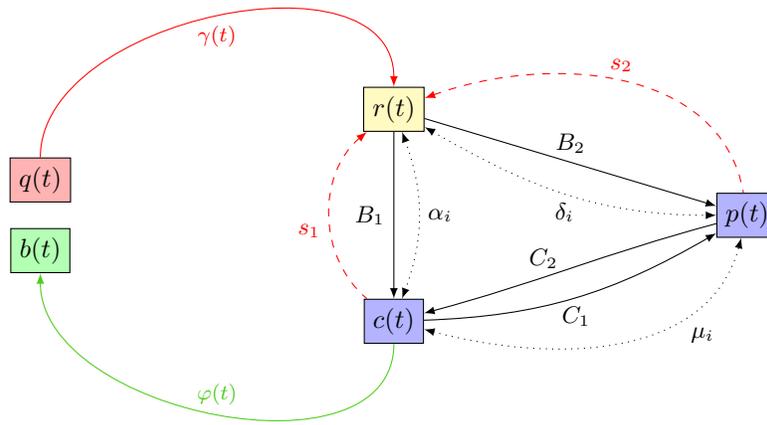


FIGURE 2.3 – Évolutions comportementales et contagions émotionnelles au sein d'une population touchée par un événement catastrophique. Source : [89].

Écrivons maintenant le système d'équations différentielles obtenu à partir des éléments de modélisation présentés jusqu'ici :

$$\begin{cases} \dot{r} = +\gamma q (r_m - r) - (B_1 + B_2)r + f(r, c)rc + g(r, p)rp + s_1c + s_2p \\ \dot{c} = B_1r - C_2c + C_1p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(b_m - b) - s_1c \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - C_1p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - s_2p \\ \dot{q} = -\gamma q (r_m - r) \\ \dot{b} = +\varphi c(b_m - b). \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans toute la suite, nous supposons que la capacité maximale b_m d'individus en comportement du quotidien après la catastrophe coïncide avec la population totale :

$$b_m = r(t) + c(t) + p(t) + q(t) + b(t), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

La cinquième équation du système (2.3) devient

$$\dot{b} = +\varphi c(r + c + p + q),$$

ce qui signifie qu'elle est gouvernée par le reste du système. Nous réduisons donc à 4 équations le système précédent :

$$\begin{cases} \dot{r} = +\gamma q (r_m - r) - (B_1 + B_2)r + f(r, c)rc + g(r, p)rp + s_1c + s_2p \\ \dot{c} = B_1r - C_2c + C_1p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(r + c + p + q) - s_1c \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - C_1p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - s_2p \\ \dot{q} = -\gamma q (r_m - r). \end{cases}$$

Notons $u = (r, c, p, q)^T$, et introduisons l'opérateur $\Phi(u, t) = (\Phi_i(u, t))_{1 \leq i \leq 4}$ défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, t) &= +\gamma q (r_m - r) - Br + f(r, c)rc + g(r, p)rp + s_1c + s_2p, \\ \Phi_2(u, t) &= B_1r - C_2c + C_1p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(r + c + p + q) - s_1c, \\ \Phi_3(u, t) &= B_2r + C_2c - C_1p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - s_2p, \\ \Phi_4(u, t) &= -\gamma q (r_m - r), \end{aligned}$$

où $B = B_1 + B_2$. Nous posons donc le problème d'étudier les fonctions u définies sur $[t_0, +\infty[$, telles que :

$$\begin{cases} \dot{u} = \Phi(u, t), & t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $u_0 = (r_0, c_0, p_0, q_0)^T$ désigne une condition initiale. De nombreuses simulations numériques seront effectuées en supposant que l'ensemble des individus est dans un comportement quotidien à $t = t_0$, ce qui se traduit par $u_0 = (0, 0, 0, 1)$.

Remarque 2.1.1. En sommant les équations du système (2.3), on obtient la loi d'évolution de la population totale :

$$\dot{b}_m = 0,$$

qui reproduit l'hypothèse selon laquelle la population est constante pendant la durée de l'événement catastrophique considéré. Cependant, nous serons amené à considérer des réseaux de systèmes PCR dans le chapitre 3. La population d'un nœud du réseau sera alors susceptible d'évoluer avec le temps, en fonction des couplages inhérents au réseau. La loi d'évolution de la population totale d'un nœud (i) du réseau sera dans ce cas de la forme

$$\dot{b}_m^{(i)} = \mathcal{C}(U, t, i),$$

où U décrit l'état du réseau et $\mathcal{C}(U, t, i)$ désigne l'ensemble des couplages du nœud (i). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3 (voir remarque 3.2.2).

Par ailleurs, on pourrait également prendre en compte une mortalité due à l'événement catastrophe, en considérant une matrice diagonale $M = \text{diag}(m_i, 1 \leq i \leq 4)$, contenant les taux de mortalité de chaque groupe de comportements, et en posant le système :

$$\dot{u} = \Phi(u, t) - Mu.$$

Néanmoins, notre étude portera sur le système (2.5), obtenu en supposant la population constante. •

2.1.4 Dimension spatiale

Selon la nature de la catastrophe considérée, et les spécificités du terrain géographique affecté, la dimension spatiale du phénomène doit être appréhendée différemment. Par exemple, le zonage géographique d'un événement d'origine sismique peut prendre la forme d'aires concentriques autour de l'épicentre du séisme, comme indiqué sur la figure 2.4.

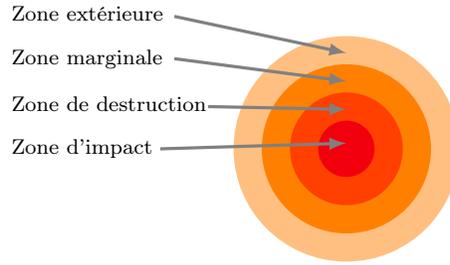


FIGURE 2.4 – Zonage d'une catastrophe d'origine sismique. Source : [24].

Afin de modéliser la propagation des comportements au sein de la population \mathcal{P} touchée, dans la zone d'impact, nous reprenons l'approche présentée dans [80] et [78], qui mène à introduire l'opérateur laplacien de diffusion Δ , à partir de l'hypothèse d'une *marche aléatoire*. Nous allons brièvement donner quelques éléments de cette méthode. Considérons une population répartie de façon homogène sur un espace, que nous supposons de dimension 1 afin de simplifier notre présentation. Chaque individu se déplace d'une courte distance ℓ vers la gauche ou vers la droite, dans un intervalle de temps τ . Dans un milieu isotrope, nous pouvons raisonnablement supposer que les deux directions sont équiprobables. Après 2 étapes de ce processus, un individu se trouve avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$ à une distance 2ℓ à gauche ou à droite de sa position initiale, ou revient à sa position initiale avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$. Après n étapes, la probabilité $p(m, n)$ qu'un individu se trouve en un point situé à une distance algébrique m de sa position initiale est alors donnée par :

$$p(m, n) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{[(n+m)/2]! [(n-m)/2]!}.$$

Si n tend vers $+\infty$, on montre que $p(m, n)$ converge vers une distribution gaussienne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(m, n) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} e^{-\frac{m^2}{2n}}.$$

Notons ensuite $x = m\ell$, $t = n\tau$, et D la limite de $\frac{\ell^2}{2\tau}$ lorsque ℓ et τ tendent vers 0. On obtient une distribution continue donnée par :

$$p(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{tD\pi}} e^{-\frac{x^2}{4tD}},$$

qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\Delta p.$$

Cette approche, également utilisée dans l'étude de la cinétique des gaz, justifie le choix de modéliser la diffusion spatiale par l'opérateur laplacien, comme cela apparaît dans le modèle épidémiologique que nous étudions dans le chapitre 4.

Présentons maintenant le système de réaction-diffusion obtenu en tenant compte de la diffusion spatiale par cette approche. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier modélisant la zone d'impact de l'événement considéré. Soit ensuite $D = \text{diag}(d_i, 1 \leq i \leq 4)$ une matrice diagonale contenant les coefficients de diffusion des groupes de comportement r , c , p et q respectivement. Supposons que la zone d'impact soit close, et qu'il n'y ait pas de diffusion le long de la frontière $\partial\Omega$. On obtient alors le système de réaction-diffusion suivant, avec une condition de Neumann au bord de Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \Phi(u, t) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t_0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

où l'inconnue u est une fonction de la variable spatiale $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et du temps $t \geq t_0$. L'étude du système de réaction-diffusion (2.6) est présentée dans le chapitre 5. Dans le chapitre 3, nous présentons une approche différente et complémentaire de la dimension spatiale, qui conduit à l'étude de réseaux couplés.

2.1.5 Effet domino

Dans de nombreux cas, un événement catastrophique révèle une structure temporelle avec un *effet domino*. Par exemple, à la suite du séisme de Tokyo en 1923, de nombreux incendies se sont déclarés dans la ville, tout comme lors du séisme de la baie de San Francisco en 1906. Cet effet domino est étudié dans [88], dans le cas particulier d'une inondation. Nous avons choisi d'intégrer cet effet domino au système PCR, par l'intermédiaire des coefficients s_1 et s_2 .

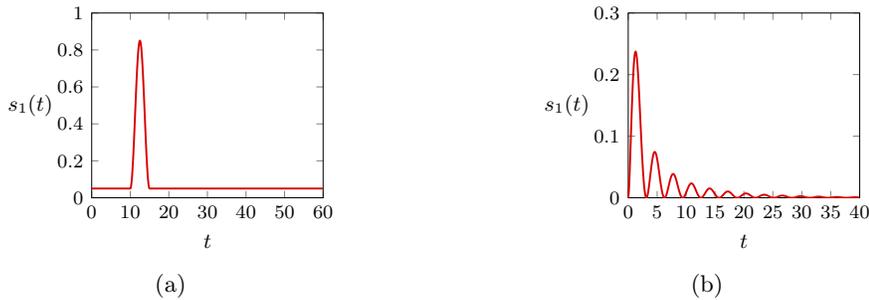


FIGURE 2.5 – Fonction $s_1(t)$ modélisant l'effet domino. (a) Cas de deux événements catastrophiques successifs. (b) Cas de multiples événements catastrophiques dont l'intensité diminue.

Dans le cas d'une succession de deux événements catastrophiques, on peut considérer que s_1 et s_2 sont des fonctions du temps, dont un exemple d'allure possible est montré sur la figure 2.5(a). Dans le cas d'une succession complexe d'événements catastrophiques, nous choisissons de considérer que s_1 et s_2 sont des fonctions définies à partir du système différentiel suivant :

$$\dot{s} = \lambda s + z - s(s^2 + z^2), \quad \dot{z} = -s + \lambda z - z(s^2 + z^2),$$

par la relation $s_1(t) = s_2(t) = s^2(t)$. Dans ce système, que nous avons présenté dans le chapitre préliminaire, le coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre de bifurcation de Hopf. Pour $\lambda < 0$, nous obtenons une allure de s_1 et s_2 qui modélise un enchaînement de désastres prenant la forme d'oscillations amorties, comme indiqué sur la figure 2.5(b).

2.1.6 Calibrage du modèle

Le calibrage d'un modèle mathématique nécessite souvent de pouvoir disposer de données précises sur les manifestations du phénomène étudié. De rares observations nous indiquent une durée approximative des comportements de catastrophe, ainsi que des intervalles pour chaque densité de comportement. Selon [11, 102], la durée des comportements de réflexe ne dépasserait pas généralement 15 minutes. Les comportements de panique peuvent durer de quelques minutes à 1 heure, mais ne dépasseraient pas non plus 15 minutes dans la plupart des cas. Enfin, les comportements de contrôle auraient une durée qui peut varier de quelques minutes à plusieurs heures. De plus, les observations rapportent que la densité d'individus en réflexe se situerait entre 50% et 75%, alors que les densités d'individus en contrôle ou panique se situeraient entre 12% et 25%. La figure 2.6 montre les résultats de 4 simulations numériques du système PCR (2.5), obtenus pour des valeurs de paramètres différentes, données dans le tableau 2.3. Sur chaque graphique, nous avons indiqué les aires \mathcal{A}_r , \mathcal{A}_c et \mathcal{A}_p correspondant aux domaines du plan situés sous les courbes représentatives des fonctions r , c et p respectivement.

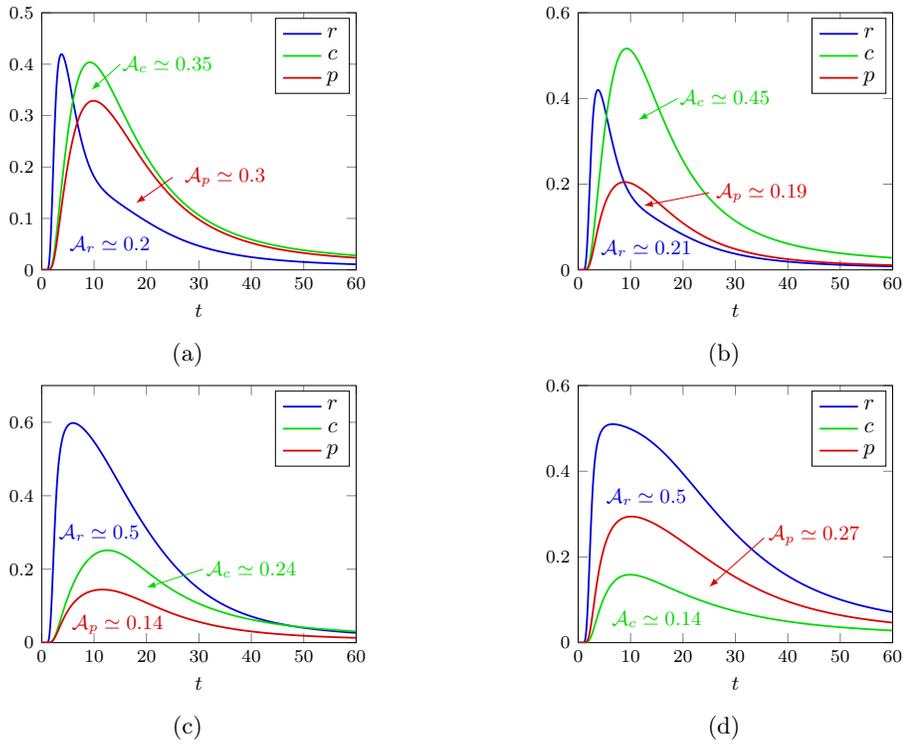


FIGURE 2.6 – Mesure des proportions d'individus en comportements de réflexe, de contrôle ou de panique pour le calibrage du modèle, par le calcul des aires situées sous les courbes correspondantes. Les valeurs de paramètres pour chaque simulation sont données dans le tableau 2.3.

TABLEAU 2.3 – Valeurs de paramètres choisies pour les simulations numériques présentées sur la figure 2.6.

	B_1	B_2	s_1	s_2	C_1	C_2	α_1	α_2
Cas 1	0.3	0.3	0.1	0.1	0.5	0.4	0.1	0.2
Cas 2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.6	0.2	0.1	0.2
Cas 3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.6	0.2	0	0.5
Cas 4	0.1	0.4	0	0.7	0.3	0.6	0	0.5

Ces quelques chiffres ne nous permettent cependant pas d'envisager un calibrage précis du modèle PCR. Nous en ferons néanmoins usage afin de guider notre raisonnement. Un travail en concertation étroite avec les services de sauvetage est actuellement en cours sur le département des Alpes Maritimes (France, Région Provence-Alpes-Côte d'Azur) pour combler ce manque [89].

2.2 Stabilité et bifurcations du système PCR

Dans cette partie, nous allons étudier la dynamique du système (2.5). Les résultats présentés ont fait l'objet d'une publication [15]. Les fonctions γ et φ sont données par :

$$\gamma(t) = \zeta(t, 1, 3), \quad \varphi(t) = \zeta(t, 1, 50), \quad (2.7)$$

où ζ est définie par :

$$\zeta(t, \tau_0, \tau_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau_0, \\ 1 & \text{si } t > \tau_1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \pi\right) & \text{si } \tau_0 \leq t \leq \tau_1, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $\tau_0 < \tau_1$. On a donc pour t suffisamment grand :

$$\gamma(t) = \varphi(t) = 1. \quad (2.9)$$

Les paramètres du système (2.5) sont regroupés dans le vecteur λ défini par :

$$\lambda = (B_1, B_2, C_1, C_2, s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \mu_1, \mu_2),$$

dont le domaine est donné par $\Lambda = (\mathbb{R}^{+*})^2 \times (\mathbb{R}^+)^{10}$. On note $B = B_1 + B_2$, et on fixe $r_m = 1$.

2.2.1 Positivité et bornage

La première proposition garantit l'existence, l'unicité et la positivité de solutions locales issues d'une condition initiale dont les composantes sont positives. La figure 2.7 montre quelques orbites issues de la condition initiale $(0, 0, 0, 1)$, projetées dans l'espace (r, c, p) , pour différentes valeurs des paramètres B_1, B_2, C_1 et C_2 .

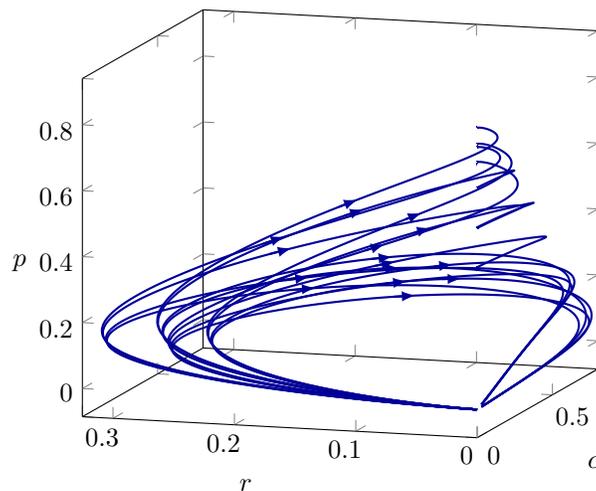


FIGURE 2.7 – Quelques orbites du système PCR défini par (2.5), pour différentes valeurs des paramètres $B_1 \in \{0.4, 0.7\}$, $B_2 \in \{0.4, 0.7\}$, $C_1 \in \{0, 0.4\}$, $C_2 \in \{0.01, 0.1\}$, et la même condition initiale $(0, 0, 0, 1)$, projetées dans l'espace (r, c, p) . Les solutions évoluent dans un ensemble compact.

Proposition 2.1. *Pour toute valeur du paramètre $\lambda \in \Lambda$, et pour toute condition initiale $u_0 \in (\mathbb{R}^+)^4$, il existe $T > t_0$ tel que le problème (2.5) possède une unique solution locale u définie et continûment dérivable sur $[t_0, T]$, dont les composantes sont positives.*

Commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soient a, b et u des fonctions régulières définies dans $[0, T]$, telles que :*

$$\dot{u}(t) + a(t)u(t) \leq b(t), \quad t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq u(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(s)e^{-\int_s^t a(\theta)d\theta} ds, \quad t \in [0, T].$$

Démonstration. On a pour $0 < t \leq T$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[u(s)e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} \right] &= [u'(s) + a(s)u(s)]e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} \\ &\leq b(s)e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

On intègre cette inégalité pour $s \in [0, t]$, ce qui donne :

$$u(t) - u(0)e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} \leq \int_0^t b(s)e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} ds.$$

□

Preuve de la proposition. L'existence, l'unicité et la régularité des solutions locales est donnée par le Théorème de Cauchy-Lipschitz [26]. Nous devons prouver que les composantes de la solution u , définie sur $[t_0, T]$, issue d'une condition initiale $u_0 = (r_0, c_0, p_0, q_0) \in (\mathbb{R}^+)^4$, sont positives.

Pour cela, nous considérons le système modifié suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}} = +\gamma\tilde{q}(1 - \tilde{r}) - (B_1 + B_2)\tilde{r} + f(\tilde{r}, \tilde{c})\tilde{r}\tilde{c} + g(\tilde{r}, \tilde{p})\tilde{r}\tilde{p} + s_1|\tilde{c}| + s_2|\tilde{p}| \\ \dot{\tilde{c}} = B_1\tilde{r} - C_2\tilde{c} + C_1|\tilde{p}| - f(\tilde{r}, \tilde{c})\tilde{r}\tilde{c} + h(\tilde{c}, \tilde{p})\tilde{c}\tilde{p} - \varphi\tilde{c}(\tilde{r} + \tilde{c} + \tilde{p} + \tilde{q}) - s_1\tilde{c} \\ \dot{\tilde{p}} = B_2\tilde{r} + C_2\tilde{c} - C_1\tilde{p} - g(\tilde{r}, \tilde{p})\tilde{r}\tilde{p} - h(\tilde{c}, \tilde{p})\tilde{c}\tilde{p} - s_2\tilde{p} \\ \dot{\tilde{q}} = -\gamma\tilde{q}(1 - \tilde{r}), \end{cases} \quad (2.10)$$

d'inconnue $\tilde{u} = (\tilde{r}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q})$. Le problème (2.10) admet une unique solution issue de la même condition initiale $u_0 = (r_0, c_0, p_0, q_0)$, définie sur $[0, \tilde{T}]$. Montrons que les composantes de \tilde{u} sont positives sur $[0, \tilde{T}]$.

Examinons d'abord la composante \tilde{q} , et intégrons la quatrième équation du système (2.10). On obtient :

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \gamma(s)(1 - \tilde{r}(s))ds}, \quad t \in [t_0, \tilde{T}], \quad (2.11)$$

ce qui implique que $\tilde{q}(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$ si $\tilde{q}(t_0) > 0$, et $\tilde{q}(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ si $\tilde{q}(t_0) = 0$. Pour montrer la positivité des autres composantes, on utilise une méthode de troncature présentée dans [105]. Soit χ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

La fonction χ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et $\chi'(s) = 0$ si $s > 0$, $\chi'(s) = s$ si $s \leq 0$. De plus, la fonction χ vérifie les propriétés suivantes :

$$\chi(s) \geq 0, \quad \chi'(s) \leq 0, \quad 0 \leq \chi'(s)s = 2\chi(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

On pose alors :

$$\rho(t) = \chi(\tilde{r}(t)), \quad t \in [t_0, \tilde{T}].$$

On a $\rho(t_0) = 0$, car $\tilde{r}(t_0) = r_0 \geq 0$. De plus, ρ est continûment dérivable sur $[t_0, \tilde{T}]$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \dot{\tilde{r}}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) \\ &= [\gamma(t)\tilde{q}(t)(1 - \tilde{r}(t)) - B\tilde{r}(t) + f(\tilde{r}(t), \tilde{c}(t))\tilde{r}(t)\tilde{c}(t) \\ &\quad + g(\tilde{r}(t), \tilde{p}(t))\tilde{r}(t)\tilde{p}(t) + s_1|\tilde{c}| + s_2|\tilde{p}|]\chi'(\tilde{r}(t)) \\ &= \gamma(t)\tilde{q}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) - \gamma(t)\tilde{q}(t)\tilde{r}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) \\ &\quad - B\tilde{r}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) + (s_1|\tilde{c}| + s_2|\tilde{p}|)\chi'(\tilde{r}(t)) \\ &\quad + [f(\tilde{r}(t), \tilde{c}(t))\tilde{c}(t) + g(\tilde{r}(t), \tilde{p}(t))\tilde{p}(t)]\tilde{r}(t)\chi'(\tilde{r}(t)). \end{aligned}$$

Or $\chi'(\tilde{r}(t)) \leq 0$ et $\tilde{r}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) \geq 0$, donc :

$$\begin{aligned} \rho'(t) &\leq [f(\tilde{r}(t), \tilde{c}(t))\tilde{c}(t) + g(\tilde{r}(t), \tilde{p}(t))\tilde{p}(t)]\tilde{r}(t)\chi'(\tilde{r}(t)) \\ &\leq 2M_1\rho(t), \end{aligned}$$

où M_1 est défini par :

$$M_1 = \sup_{[t_0, \tilde{T}]} [f(\tilde{r}(t), \tilde{c}(t))\tilde{c}(t) + g(\tilde{r}(t), \tilde{p}(t))\tilde{p}(t)] < +\infty.$$

En intégrant la dernière inégalité (voir le lemme 2.1), on obtient :

$$\rho(t) \leq \rho(t_0)e^{2M_1(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, \tilde{T}],$$

d'où $\rho(t) \leq 0$. Finalement, on a $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0, \tilde{T}]$, ce qui prouve que $\tilde{r}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [t_0, \tilde{T}]$.

On montre de la même façon que $\tilde{c}(t) \geq 0$ et $\tilde{p}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [t_0, \tilde{T}]$. Ainsi, les composantes de \tilde{u} sont positives sur $[t_0, \tilde{T}]$. Par conséquent, \tilde{u} est aussi une solution du problème non modifié (2.5), définie sur $[t_0, \tilde{T}]$. Par unicité, on a donc $u = \tilde{u}$ sur $[t_0, T] \cap [t_0, \tilde{T}]$. Si $\tilde{T} \geq T$, alors on a montré que les composantes de u sont positives sur $[0, T]$. Si au contraire $\tilde{T} < T$, on pose :

$$T^* = \sup\{s \in]t_0, T] ; r(t) \geq 0, c(t) \geq 0, p(t) \geq 0, q(t) \geq 0, \forall t \in [0, s]\}.$$

On a $\chi(r(T^*)) = \lim_{t \rightarrow T^*} \chi(r(t)) = 0$, donc $r(T^*) \geq 0$. De même, on a $c(T^*) \geq 0, p(T^*) \geq 0, q(T^*) \geq 0$. Si $T^* = T$, alors on a à nouveau montré que les composantes de u sont positives sur $[0, T]$. Si $T^* < T$, on considère le problème modifié (2.10), avec T^* comme temps initial, et $(r(T^*), c(T^*), p(T^*), q(T^*))$ comme condition initiale. On en déduit comme précédemment qu'il existe $\tau > 0$, tel que :

$$r(t) \geq 0, c(t) \geq 0, p(t) \geq 0, q(t) \geq 0, \forall t \in [T^*, T^* + \tau],$$

ce qui contredit la définition de T^* , et achève la démonstration. \square

Corollaire 2.1. *Pour toute valeur du paramètre $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble compact*

$$\mathcal{K} = \{(r, c, p, q) \in (\mathbb{R}^+)^4 ; r + c + p + q \leq 1\}$$

est positivement invariant pour le flot induit par le problème (2.5), et les solutions correspondantes sont globales.

Démonstration. On a montré que pour $u_0 \in (\mathbb{R}^+)^4$, les composantes de la solution u issue de u_0 sont positives. De plus, on a pour $t \geq t_0$:

$$\dot{r}(t) + \dot{c}(t) + \dot{p}(t) + \dot{q}(t) = -\varphi(t)c(t)(r(t) + c(t) + p(t) + q(t)) \leq 0,$$

donc $r(t) + c(t) + p(t) + q(t) \leq r_0 + c_0 + p_0 + q_0 \leq 1$. \square

2.2.2 Points d'équilibre

La figure 2.7 suggère que certaines orbites du système PCR sont attirées vers l'équilibre trivial $(0, 0, 0, 0)$, qui correspond au retour souhaité de tous les individus à un comportement du quotidien après l'événement catastrophique, alors que d'autres orbites semblent présenter une persistance de panique, ce qui constitue une situation à éviter. La proposition suivante énumère les équilibres du système (2.5) dans $(\mathbb{R}^+)^4$.

Proposition 2.2. *Si $C_1 > 0$ ou si $s_2 > 0$, alors le système (2.5) admet $(0, 0, 0, 0)$ comme unique point d'équilibre. Si $C_1 = 0$ et $s_2 = 0$, alors le système (2.5) admet tout point $(0, 0, \bar{p}, 0)$ avec $\bar{p} > 0$ comme point d'équilibre, en plus de $(0, 0, 0, 0)$.*

Démonstration. Pour trouver les équilibres du système (2.5) on doit résoudre :

$$\begin{cases} +\gamma q(1-r) - (B_1 + B_2)r + f(r, c)rc + g(r, p)rp + s_1c + s_2p = 0 \\ B_1r - C_2c + C_1p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(r + c + p + q) - s_1c = 0 \\ B_2r + C_2c - C_1p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - s_2p = 0 \\ -\gamma q(1-r) = 0. \end{cases}$$

La quatrième équation implique que $q(1-r) = 0$, et la somme des 4 équations implique que

$$c(r + c + p + q) = 0.$$

Comme $r \geq 0$, $c \geq 0$, $p \geq 0$ et $q \geq 0$, on obtient $c = 0$. La deuxième équation devient alors :

$$B_1r + C_1p = 0,$$

ce qui implique $B_1r = 0$ et $C_1p = 0$. Or $B_1 > 0$, donc $r = 0$, puis $q = 0$. Puis, si $C_1 > 0$, on a également $p = 0$. Si $C_1 = 0$, la troisième équation devient $s_2p = 0$. Si de plus $s_2 > 0$, alors nécessairement, on a $p = 0$. Si au contraire $s_2 = 0$, alors tout quadruplet $(0, 0, \bar{p}, 0)$ avec $\bar{p} > 0$ est solution du système précédent. \square

2.2.3 Stabilité de l'équilibre trivial

Proposition 2.3. *Pour toute valeur du paramètre $\lambda \in \Lambda$, le point d'équilibre $\mathcal{O}(0, 0, 0, 0)$ est localement stable.*

Démonstration. Considérons la fonction V définie par :

$$V(u) = \frac{1}{2}(r + c + p + q)^2,$$

pour tout $u = (r, c, p, q) \in \mathbb{R}^4$. Il est clair que V est définie positive. De plus, sa dérivée orbitale est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(u(t)) &= (r(t) + c(t) + p(t) + q(t))(\dot{r}(t) + \dot{c}(t) + \dot{p}(t) + \dot{q}(t)) \\ &= -\varphi(t)c(t)(r(t) + c(t) + p(t) + q(t))^2, \end{aligned}$$

donc \dot{V} est semi-définie négative. Le Théorème de Lyapunov 1.16 garantit la stabilité locale de \mathcal{O} . \square

Remarque 2.2.1. La fonction de Lyapunov V construite dans la démonstration précédente correspond à l'énergie liée au potentiel démographique \mathcal{T} de la population affectée par l'événement catastrophique étudié. Ce potentiel démographique est donné par :

$$\mathcal{T} = r + c + p + q.$$

Nous démontrerons dans le chapitre suivant, en appliquant le principe d'invariance de La Salle 1.17, que la stabilité du point d'équilibre \mathcal{O} est en fait globale. \bullet

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique de la solution du système (2.5) issue de la condition initiale $(0, 0, 0, 1)$, et montrer, sous l'hypothèse réductrice que certains paramètres sont nuls, que cette solution converge vers \mathcal{O} , bien que $(0, 0, 0, 1)$ ne puisse pas être considéré comme appartenant à un voisinage proche de \mathcal{O} . Nous aurons au préalable besoin de prouver deux lemmes.

Lemme 2.2. *Soit $u = (r, c, p, q)$ la solution du système (2.5) issue de la condition initiale $(0, 0, 0, 1)$. Alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0.$$

Démonstration. Nous avons vu plus haut que :

$$\frac{d(r + c + p + q)}{dt}(t) = -\varphi(t)c(t)(r + c + p + q)(t),$$

pour tout $t \geq t_0$. La positivité de φ , c et $r + c + p + q$ implique alors que $r + c + p + q$ est une fonction décroissante sur $[t_0, +\infty[$. Comme elle est de plus positive, elle converge vers une limite positive ℓ . Supposons que $\dot{r} + \dot{c} + \dot{p} + \dot{q}$ ne converge pas vers 0. On a alors $(\dot{r} + \dot{c} + \dot{p} + \dot{q})(t) < 0$ pour tout $t \geq t_0$, et il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(\dot{r} + \dot{c} + \dot{p} + \dot{q})(t) \leq -\eta,$$

pour tout $t \geq t_0$. En intégrant cette dernière inégalité de t_0 à t , on obtient :

$$(r + c + p + q)(t) - (r + c + p + q)(t_0) \leq -\eta(t - t_0),$$

ce qui mène à une contradiction, puisque :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\eta(t - t_0) = -\infty,$$

alors que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (r + c + p + q)(t) = \ell.$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)c(t)(r + c + p + q)(t) = 0.$$

Comme on a $\varphi(t) = 1$ pour t suffisamment grand, alors si $\ell = 0$, $r + c + p + q$ converge vers 0, et *a fortiori* c . Si au contraire $\ell > 0$, alors c doit converger vers 0, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 2.3. Soit $u = (r, c, p, q)$ la solution du système (2.5) issue de la condition initiale $(0, 0, 0, 1)$. Alors il existe $\beta > 0$, $k > 0$ et $\tau > 0$ tels que :

$$q(t) \leq ke^{-\beta t},$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau$.

Démonstration. Pour commencer, nous examinons le comportement de la composante r . Supposons qu'il existe $\theta > 0$ tel que $r(\theta) = 1$. Alors nécessairement :

$$c(\theta) = p(\theta) = q(\theta) = 0,$$

et par conséquent :

$$\dot{r}(\theta) = -B_1 - B_2 < 0.$$

Comme $r(t_0) = 0$, cela exclut la possibilité $r(\theta) = 1$. On a de même :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) < 1.$$

Il existe donc $\beta > 0$ tel que :

$$r(t) \leq 1 - \beta,$$

pour tout $t \geq t_0$. Soit ensuite $\tau > 0$ tel que $\gamma(t) = 1$ pour tout $t \geq t_0 + \tau$. Alors on a :

$$\dot{q}(t) = -q(t)(1 - r(t))$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} q(t) &= q(\tau)e^{-\int_{\tau}^t (1-r(s))ds} \\ &\leq q(\tau)e^{-\int_{\tau}^t \beta ds} \\ &\leq ke^{-\beta t} \end{aligned}$$

pour tout $t \geq \tau$, avec $k = q(\tau)e^{\beta\tau}$. \square

Proposition 2.4. *Supposons que $s_i = \alpha_i = \delta_i = \mu_i = 0$, $i \in \{1, 2\}$. Si $C_1 > 0$, alors la solution u du système (2.5), issue de $(0, 0, 0, 1)$ converge vers l'équilibre trivial $\mathcal{O}(0, 0, 0, 0)$.*

Démonstration. L'hypothèse sur les paramètres nous permet de séparer r et q du reste du système, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -(B_1 + B_2)r(t) + \gamma(t)q(t)(1 - r(t)) \\ \dot{q}(t) = -\gamma(t)q(t)(1 - r(t)). \end{cases} \quad (2.12)$$

Ce système de deux équations s'écrit sous forme matricielle :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)x(t) + \psi(t, x), \quad (2.13)$$

avec $x = (r, q)^T$, où $A, B(t)$ sont deux matrices carrées de taille 2 dont les coefficients sont donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} -B_1 - B_2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(t) - 1 \\ 0 & -\gamma(t) + 1 \end{pmatrix},$$

et où ψ est définie par :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} -\gamma(t)q(t)r(t) \\ \gamma(t)q(t)r(t) \end{pmatrix}.$$

Soit $S(t)$ la matrice fondamentale du système linéaire $\dot{x} = Ax$. Puisque A admet des valeurs propres strictement négatives, -1 et $-B_1 - B_2$, donc il existe $\xi > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|S(t)x(t_0)\| \leq Ce^{-\xi(t-t_0)},$$

où l'on a noté $\|x\| = \sum_{i=1}^2 |x_i|$ pour tout $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. La solution du système (2.12) est donnée par :

$$x(t) = S(t)x(t_0) + \int_{t_0}^t S(t-s+t_0)[B(s)x(s) + \psi(s, x(s))]ds.$$

Or, d'après le lemme précédent, on a :

$$q(t) \leq ke^{-\beta t},$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau$ avec $\tau > 0$, $k > 0$ et $\beta > 0$. De plus, on a $\gamma(t) = 1$ pour $t \geq t_0 + \tau$. Soit $t_1 = t_0 + \tau$. On obtient :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \tilde{C}e^{-\xi(t-t_1)} + \int_{t_1}^t \tilde{C}e^{-\xi(t-s)} \|\psi(s, x(s))\| ds \\ &\leq \tilde{C}e^{-\xi(t-t_1)} + \int_{t_1}^t \tilde{C}e^{-\xi(t-s)} |q(s)| |r(s)| ds \\ &\leq \tilde{C}e^{-\xi(t-t_1)} + \int_{t_1}^t \tilde{C}e^{-\xi(t-s)} ke^{-\beta s} \|x(s)\| ds \end{aligned}$$

d'où

$$e^{\xi(t-t_1)} \|x(t)\| \leq \tilde{C} + \int_{t_1}^t \tilde{C}e^{\xi(s-t_1)} \|x(s)\| ke^{-\beta s} ds$$

ce qui mène à

$$e^{\xi(t-t_1)} \|x(t)\| \leq \tilde{C}e^{\int_{t_1}^t \tilde{C}ke^{-\beta s} ds}$$

en utilisant le Lemme de Gronwall [26]. Finalement, on obtient :

$$\|x(t)\| \leq \tilde{C}e^{-\xi(t-t_1)} e^{\frac{-k\tilde{C}}{\beta} e^{-\beta t}}$$

pour tout $t \geq t_1$. On peut en déduire que $x(t)$ converge vers 0.

Considérons maintenant le système :

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = B_1 r(t) - C_2 c(t) + C_1 p(t) - \varphi(t) c(t) (r + c + p + q)(t) \\ \dot{p}(t) = B_2 r(t) + C_2 c(t) - C_1 p(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous avons montré précédemment que $r(t)$, $c(t)$ et $q(t)$ convergent vers 0, et que $(r + c + p + q)(t)$ converge vers ℓ , donc $p(t)$ converge vers ℓ , et par suite, $\dot{p}(t)$ converge aussi vers une limite finie, qui vaut nécessairement 0 (rappelons que si f est une fonction réelle régulière définie sur \mathbb{R} , telle que $f(t)$ converge vers une limite finie ℓ_1 , tandis que $\dot{f}(t)$ converge vers une limite finie ℓ_2 , alors nécessairement $\ell_2 = 0$). Si $C_1 > 0$, on obtient $0 = -C_1 \ell$, donc $\ell = 0$. \square

Remarque 2.2.2. Dans cette proposition, l'équilibre trivial \mathcal{O} joue un rôle attracteur que l'on pouvait prévoir. En effet, il est bien connu [25] que les systèmes dissipatifs exhibent souvent des attracteurs. Or le caractère dissipatif du système (2.5) peut être mesuré à travers le calcul de sa divergence. Pour simplifier, supposons que $\gamma(t) = \varphi(t) = 1$ pour tout $t \geq t_0$, et que les paramètres α_i , δ_i et μ_i , $i \in \{1, 2\}$, sont nuls. Alors la divergence du système (2.5) est donnée par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Phi(u, t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_i} \\ &\leq -B_1 - B_2 - C_1 - C_2 - s_1 - s_2 < 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le paramètre C_1 paraît jouer un rôle important dans la dynamique du système (2.5). Rappelons que C_1 est défini comme la proportion d'individus en comportement de panique évoluant vers le comportement de contrôle, par lequel s'opère la terminaison du processus comportemental. Il est donc raisonnable d'envisager une persistance de panique si ce paramètre C_1 tend vers 0. \bullet

2.2.4 Étude de la variété centrale

Nous allons maintenant étudier la dynamique du système (2.5) dans un voisinage de $C_1 = 0$. La figure 2.8 montre que les orbites du système révèlent une bifurcation lorsque C_1 traverse 0. Notre objectif est de déterminer la nature de cette bifurcation.

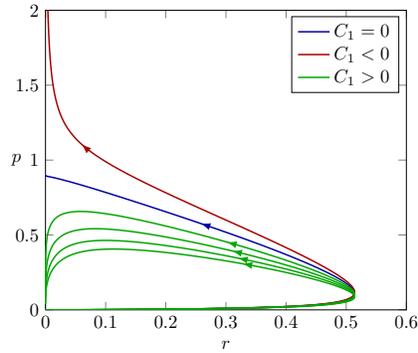


FIGURE 2.8 – Orbites du système (2.5) dans le plan (r, p) , issues de la condition initiale $(0, 0, 0, 1)$, pour différentes valeurs du paramètre d'évolution C_1 du comportement de panique vers le comportement de contrôle. Pour $C_1 > 0$, la solution converge vers l'équilibre trivial. Pour $C_1 = 0$, une persistance de panique apparaît soudainement. Pour $C_1 < 0$, la solution semble diverger

Pour cette partie, nous allons toutefois nous restreindre au cas où les fonctions d'imitations sont constantes :

$$f(r, c) = k_1, \quad g(r, p) = k_2, \quad h(c, p) = k_3,$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in [-1, 1]$, et nous supposons que l'on a :

$$\gamma(t) = \varphi(t) = 1,$$

pour tout $t \geq t_0$ (voir propriété (2.9)). Enfin, nous choisissons de négliger ici les effets de domino, c'est-à-dire que nous posons $s_1 = s_2 = 0$. Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = -(B_1 + B_2)r + q(1 - r) + k_1rc + k_2rp \\ \dot{c} = B_1r - c(r + c + p + q) - C_2c + C_1p - k_1rc + k_3cp \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - C_1p - k_2rp - k_3cp \\ \dot{q} = -q(1 - r). \end{cases} \quad (2.15)$$

La matrice jacobienne J de ce système, évaluée en $(0, 0, 0, 0)$ et $C_1 = 0$, s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -B_1 - B_2 & 0 & 0 & 1 \\ B_1 & -C_2 & 0 & 0 \\ B_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\chi_J(\lambda) = \lambda(1 + \lambda)(C_2 + \lambda)(B_1 + B_2 + \lambda).$$

Supposons que $C_2 \neq 1$, $B_1 + B_2 \neq 1$ et $C_2 \neq B_1 + B_2$; alors J admet 4 valeurs propres distinctes : 0, -1 , $-C_2$ et $-B_1 - B_2$. Puisque J admet une valeur propre nulle, nous allons rechercher une équation locale de la variété centrale dans un voisinage de $C_1 = 0$.

Proposition 2.5. *Supposons que $C_2 \neq 1$, $B_1 + B_2 \neq 1$ et $C_2 \neq B_1 + B_2$. Alors la matrice jacobienne J du système (2.15) admet 4 valeurs propres distinctes :*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 = 0.$$

De plus, dans un voisinage de $C_1 = 0$, il existe un système de coordonnées (x, y, z, w) tel que le système (2.15) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + O(x) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + O(y) \\ \dot{z} = \lambda_3 z + O(z) \\ \dot{w} = \frac{C_1}{\lambda_3} w^2 (1 + O(w)). \end{cases} \quad (2.17)$$

Démonstration. J admet 4 valeurs propres distinctes 0, -1 , $-C_2$ et $-B_1 - B_2$, et les vecteurs propres associés sont donnés par :

$$\begin{aligned} X_0 &= (0, 0, 1, 0)^T \\ X_{-1} &= \left(\frac{1}{B_1 + B_2 - 1}, \frac{B_1}{(B_1 + B_2 - 1)(C_2 - 1)}, \frac{-B_2}{B_1 + B_2 - 1} - \frac{C_2 B_1}{(B_1 + B_2 - 1)(C_2 - 1)}, 1 \right)^T \\ X_{-C_2} &= (0, -1, 1, 0)^T \\ X_{-B_1 - B_2} &= \left(\frac{(B_1 + B_2)(B_1 + B_2 - C_2)}{B_1 C_2 - B_2(B_1 + B_2 - C_2)}, \frac{-B_1(B_1 + B_2)}{B_1 C_2 - B_2(B_1 + B_2 - C_2)}, 1, 0 \right)^T. \end{aligned}$$

On écrit $J = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & 0 & 0 \\ g_3 & g_4 & -1 & 0 \\ 1 & g_5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -B_1 - B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les coefficients g_i , $1 \leq i \leq 5$, sont donnés par :

$$\begin{cases} g_1 = \frac{(B_1+B_2)(B_1+B_2-C_2)}{B_1C_2-B_2(B_1+B_2-C_2)} \\ g_2 = \frac{1}{B_1+B_2-1} \\ g_3 = \frac{-B_1(B_1+B_2)}{B_1C_2-B_2(B_1+B_2-C_2)} \\ g_4 = \frac{B_1}{(B_1+B_2-1)(C_2-1)} \\ g_5 = \frac{-B_2}{B_1+B_2-1} - \frac{C_2B_1}{(B_1+B_2-1)(C_2-1)}, \end{cases}$$

et vérifient

$$\begin{cases} g_1 + g_3 + 1 = 0 \\ g_2 + g_4 + g_5 + 1 = 0. \end{cases}$$

On calcule l'inverse de P et l'on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 & 0 & \frac{-g_2}{g_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(1+g_1)}{g_1} & -1 & 0 & g_2 + g_4 + \frac{g_2}{g_1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u = (r, c, p, q)^T$ et $X = (x, y, z, w)^T$. On a $u = PX$ et $X = P^{-1}u$. On obtient ensuite :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + P_1(x, y, z) + wQ_1(x, y, z) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + P_2(x, y, z) \\ \dot{z} = \lambda_3 z - C_1[x - (1 + g_2 + g_4)y + z + w] + w[-(1 + g_1)x + g_4y - z] \\ \quad + P_3(x, y, z) + wQ_2(x, y, z) \\ \dot{w} = -w[-(1 + g_1)x + g_4y - z], \end{cases}$$

où P_1, P_2, P_3 sont des polynômes homogènes de degré 2 en x, y, z , et Q_1, Q_2 des polynômes homogènes de degré 1 en x, y, z . Nous développons ensuite (x, y, z) par rapport à w et C_1 , dans un voisinage de $(w, C_1) = (0, 0)$, ce qui mène à :

$$\begin{cases} x = h_1, & y = h_2, & z = h_3, \\ h_i = a_i C_1^2 + b_i C_1 w + c_i w^2 + \dots, & i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Une équation locale de la variété centrale s'obtient en écrivant :

$$DH(w, C_1) \left[\lambda_4 w + F(w, h(w, C_1), C_1) \right] = Bh(w, C_1) + G(w, H(w, C_1), C_1),$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= 0, & H &= (h_1, h_2, h_3)^T, & B &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ F(w, (x, y, z), C_1) &= -w[-(1 + g_1)x + g_4y - z], \end{aligned}$$

et $G = (G_1, G_2, G_3)^T$, avec :

$$\begin{aligned} G_1 &= P_1(x, y, z) + wQ_1(x, y, z), \\ G_2 &= P_2(x, y, z), \\ G_3 &= -C_1(x - (1 + g_2 + g_4)y + z + w) + w(-(1 + g_1)x + g_4y - z) \\ &\quad + P_3(x, y, z) + wQ_2(x, y, z). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} (b_1C_1 + 2c_1w + \dots) \left(-w(-(1 + g_1)h_1 - g_4h_2 - h_3) \right) &= \\ \lambda_1h_1 + P_1(h_1, h_2, h_3) + wQ_1(h_1, h_2, h_3) + \dots & \\ (b_2C_1 + 2c_2w + \dots) \left(-w(-(1 + g_1)h_1 - g_4h_2 - h_3) \right) &= \\ \lambda_2h_2 + P_2(h_1, h_2, h_3) + \dots & \\ (b_3C_1 + 2c_3w + \dots) \left(-w(-(1 + g_1)h_1 - g_4h_2 - h_3) \right) &= \\ \lambda_3h_3 - C_1(w + h_1 - (1 + g_2 + g_4)h_2 + h_3) & \\ + w(-(1 + g_1)h_1 + g_4h_2 - h_3) & \\ + P_3(h_1, h_2, h_3) + wQ_2(h_1, h_2, h_3) + \dots & \end{aligned}$$

où les points indiquent des termes d'ordre supérieur à 3. En identifiant les termes en C_1^2 , C_1w et w^2 , on obtient :

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = c_1 = 0 \\ a_2 = b_2 = c_2 = 0 \\ a_3 = c_3 = 0 \\ b_3 = \frac{1}{\lambda_3}, \end{cases}$$

d'où $h_1 = h_2 = 0$ et $h_3 = \frac{C_1}{\lambda_3}w + \dots$.

Notons ensuite d_n^i le coefficient du monôme d'ordre $n \geq 3$ en w , dans h_i , $1 \leq i \leq 3$. En identifiant les termes en w^n , on obtient :

$$\lambda_i d_n^i = 0, \quad n \geq 3, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

ce qui montre que les coefficients d_n^i sont nuls pour $n \geq 3$ et $1 \leq i \leq 3$. On écrit alors :

$$\dot{w} = \frac{C_1}{\lambda_3}w^2(1 + \dots).$$

La variété centrale dans un voisinage de $C_1 = 0$ est donc donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1x + \dots \\ \dot{y} = \lambda_2y + \dots \\ \dot{z} = \lambda_3z + \dots \\ \dot{w} = \frac{C_1}{\lambda_3}w^2(1 + O(w)), \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Le changement de coordonnées effectué dans la diagonalisation de la matrice jacobienne J révèle, une fois de plus, le rôle important joué par la population totale impliquée dans l'événement catastrophique étudié, donnée par :

$$w = r + c + p + q,$$

et que nous avons déjà considérée afin de construire une fonction de Lyapunov. Le tableau 2.4 donne le niveau de la persistance de panique pour quelques valeurs des paramètres B_1 , B_2 et C_2 . Il semble

qu'une augmentation de B_1 induit une diminution de \bar{p} , alors qu'une hausse de C_2 ou B_2 exacerbe cette persistance. Nous étudierons plus loin l'effet des termes d'interaction, et notamment le rôle du paramètre μ_1 .

TABLEAU 2.4 – Niveau de la persistance de panique pour quelques valeurs des paramètres B_1 , B_2 et C_2 .

$B_1 = 0.5$			$B_1 = 0.7$		
B_2	C_2	\bar{p}	B_2	C_2	\bar{p}
0.2	0.1	0.70550	0.2	0.1	0.69018
0.2	0.2	0.84365	0.2	0.2	0.83984
0.3	0.1	0.74474	0.3	0.1	0.72252
0.3	0.2	0.86674	0.3	0.2	0.85823
0.4	0.1	0.77494	0.4	0.1	0.74885
0.4	0.2	0.88409	0.4	0.2	0.87294

Remarque 2.2.3. Le calcul des exposants de Lyapunov par l'algorithme de Wolf, Swinney et Vastano [25], qui constitue une mesure de la sensibilité du système étudié par rapport à une variation infinitésimale des conditions initiales, confirme ce comportement. La figure 2.9 montre qu'en effet, pour $C_1 > 0$, les 4 exposants de Lyapunov sont strictement négatifs. Si $C_1 = 0$, le plus grand exposant de Lyapunov s'annule. Si $C_1 < 0$, il devient même positif, ce qui n'implique cependant pas un comportement chaotique des solutions du système dans le compact

$$\mathcal{K} = \left\{ (r, c, p, q) \in (\mathbb{R}^+)^4 ; r + c + p + q \leq 1 \right\}.$$

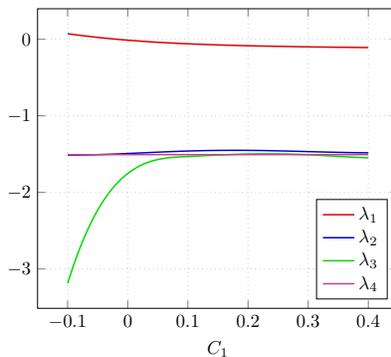


FIGURE 2.9 – Variation des exposants de Lyapunov du système PCR, sous l'effet d'une variation du paramètre C_1 .

2.2.5 Bifurcation nœud-col dégénérée

L'équation de la variété centrale obtenue dans un voisinage de $C_1 = 0$, montre que le système PCR est topologiquement équivalent au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = -z \\ \dot{w} = \varepsilon w^2, \end{cases} \quad (2.18)$$

où $\varepsilon = -C_1$. Afin de comprendre la dynamique de ce système, nous considérons le système réduit défini par :

$$\begin{cases} \dot{v} = -v \\ \dot{w} = \alpha + \varepsilon w^2, \end{cases} \quad (2.19)$$

où α et ε sont des paramètres réels.

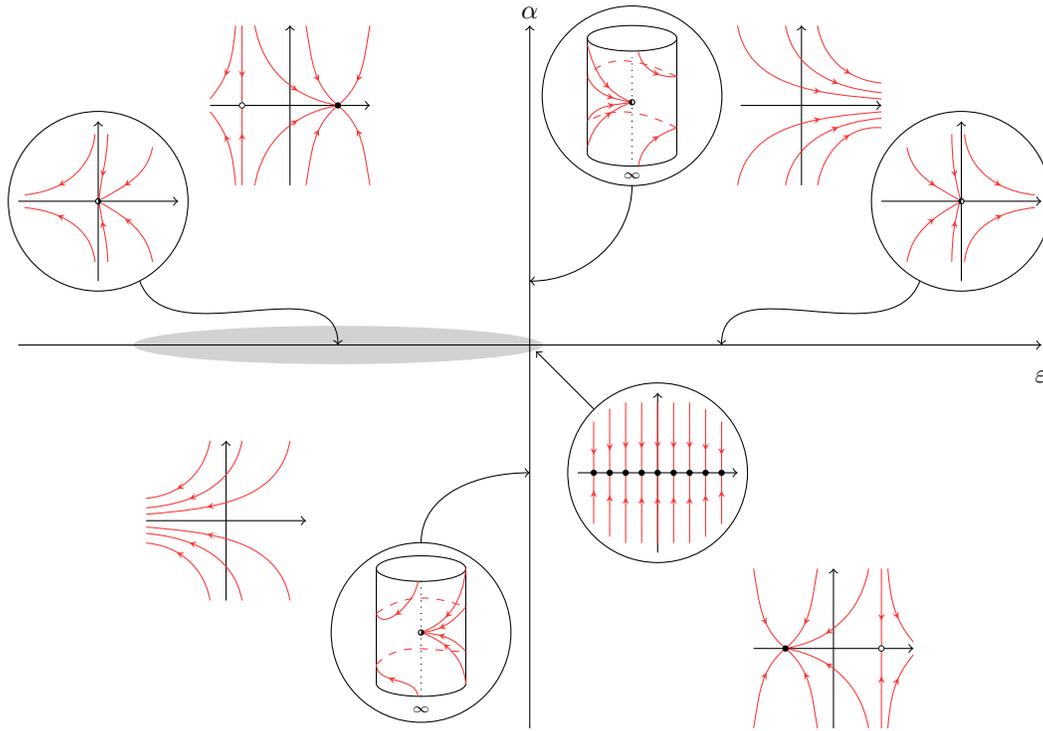


FIGURE 2.10 – Diagramme de bifurcation pour le système $\dot{w} = \alpha + \varepsilon w^2$, $\dot{v} = -v$, montrant les portraits de phase dans le plan (w, v) .

Le premier paramètre α est introduit pour éviter une dégénérescence systématique [64], tandis que le second paramètre ε correspond à l'opposé du paramètre C_1 dans le système PCR (2.5). La figure 2.10 montre différents portraits de phase pour le système réduit (2.19), en fonction des valeurs des deux paramètres α et ε . La zone grisée du diagramme, dans la partie gauche de l'axe des abscisses, correspond à la région du paramètre C_1 dans le système PCR. Pour analyser la bifurcation qui provoque soudainement l'émergence d'une infinité de points d'équilibre en $(0, 0)$, cherchons les points critiques du système (2.19). Il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} \alpha + \varepsilon w^2 = 0 \\ -v = 0. \end{cases}$$

On a nécessairement $v = 0$. Si $\alpha \times \varepsilon > 0$, alors il n'y a pas de point critique. Si $\alpha \times \varepsilon < 0$, il y a deux points critiques, qui sont donnés par :

$$\bar{w} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\varepsilon}}, \quad \bar{v} = 0.$$

L'un est un col, l'autre un nœud stable. Ils fusionnent lorsque ε est fixé et que α tend vers 0, comme dans le cas d'une bifurcation nœud-col que nous avons présentée dans le chapitre préliminaire. Si

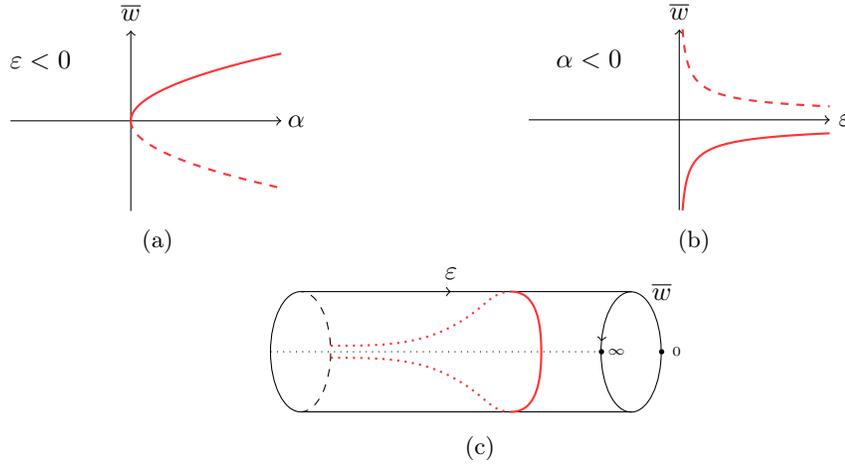


FIGURE 2.11 – Diagrammes de bifurcation pour le système (2.19). (a) Bifurcation nœud-col classique. (b) Bifurcation nœud-col à l’infini. (c) Bifurcation nœud-col à l’infini, sur un cylindre obtenu en enroulant le plan (ε, \bar{w}) .

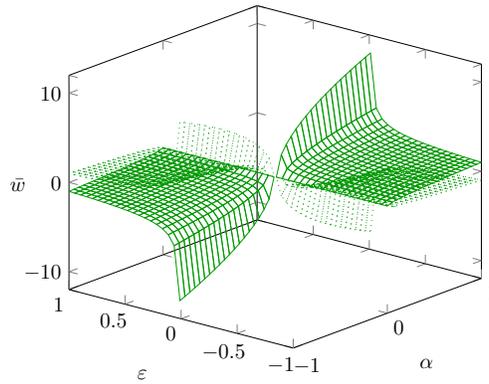


FIGURE 2.12 – Surface de bifurcation de codimension 2 pour le système gradient (2.20), admettant comme potentiel $V(w, v) = -\alpha w - \frac{\varepsilon}{3}w^3 + \frac{1}{2}v^2$. Les parties en traits pleins correspondent aux équilibres stables, alors que les parties en pointillés correspondent aux équilibres instables.

maintenant α est fixé et que ε tend vers 0, ils sont envoyés vers l’infini. On peut alors observer leur comportement sur un cylindre, obtenu en enroulant le plan (ε, \bar{w}) , comme le montre la figure 2.11(c).

Une autre façon d’analyser le comportement du système (2.19), est de remarquer qu’on peut l’écrire comme un système gradient [25]. On a en effet :

$$\dot{v} = -\frac{\partial V}{\partial v}, \quad \dot{w} = -\frac{\partial V}{\partial w}, \quad (2.20)$$

où V est le potentiel défini par :

$$V(w, v) = -\alpha w - \frac{\varepsilon}{3}w^3 + \frac{1}{2}v^2.$$

La figure 2.12 montre la surface de bifurcation correspondante, qui est un pli admettant une dégénérescence au voisinage de l’origine. La section de cette surface par un plan vertical d’équation $\varepsilon = \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 \neq 0$, correspond à la bifurcation nœud-col classique présentée sur la figure 2.11(a), tandis que la section par un plan vertical d’équation $\alpha = \alpha_0$, où $\alpha_0 \neq 0$, est décrite par la figure 2.11(b). De plus, les équilibres de persistance de panique correspondent à la dégénérescence du pli.

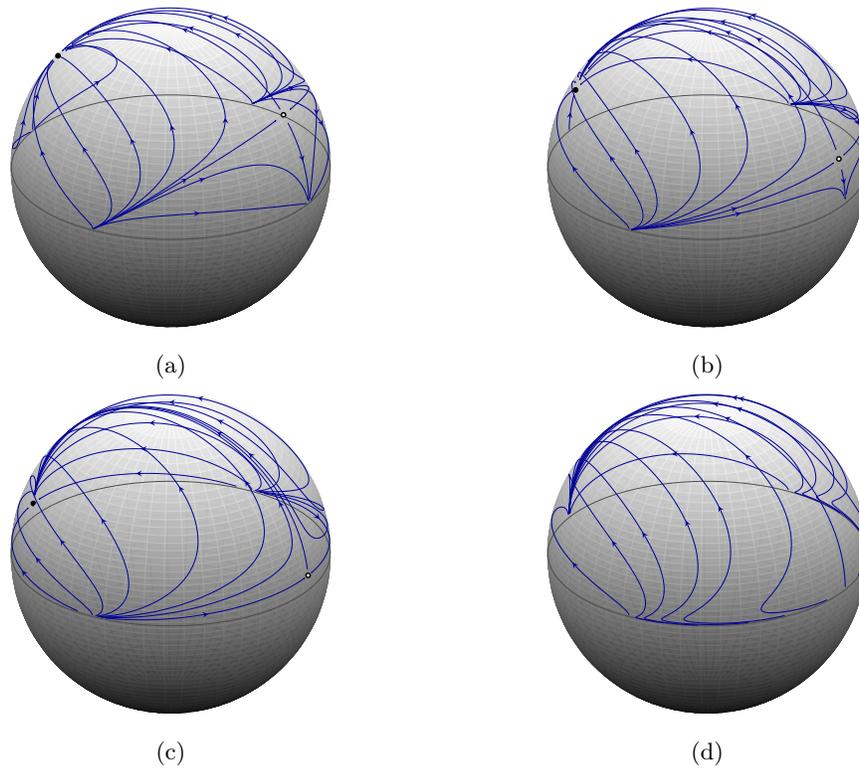


FIGURE 2.13 – Portraits de phase du système $\dot{w} = \alpha + \varepsilon w^2$, $\dot{v} = -v$, projetés sur la sphère de Poincaré, lorsque $\alpha = 1$, montrant la bifurcation nœud-col à l'infini. Lorsque ε change de signe, le nœud et le col sont envoyés vers deux points diamétralement opposés de l'équateur, et disparaissent lorsque $\varepsilon > 0$. (a) $\varepsilon = -0.5$. (b) $\varepsilon = -0.01$. (c) $\varepsilon = -0.0001$. (d) $\varepsilon = +0.5$.

Enfin, on peut également observer la bifurcation du système (2.19) sur la sphère de Poincaré, où les points situés à l'infini sont envoyés sur l'équateur. La figure (2.13) montre comment les 2 points critiques se rejoignent effectivement en 2 points diamétralement opposés de l'équateur, et donc identifiés. Le cas $\alpha = \varepsilon = 0$ dans cette bifurcation de codimension 2, correspond donc à une dégénérescence qui explique les équilibres de persistance de panique observés dans le système PCR (2.5).

2.2.6 Inhibition de la panique

Nous allons maintenant étudier l'effet des phénomènes de contagion émotionnelle, modélisés par les termes d'interaction, sur les équilibres de persistance de panique. Le tableau 2.5 montre l'effet du paramètre μ_1 sur le niveau de panique dans le cas où le paramètre C_1 est nul. Lorsque μ_1 augmente, ce niveau semble s'atténuer.

Pour étudier l'effet du paramètre μ_1 , nous posons :

$$\alpha_i = \delta_i = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \mu_2 = 0,$$

et écrivons simplement μ à la place de μ_1 , afin d'alléger les notations. Nous simplifions de nouveau le système (2.5) en posant :

$$\gamma(t) = \varphi(t) = 1, \quad t \geq t_0,$$

(voir propriété (2.9)), et choisissons de restreindre notre étude au cas où la fonction d'imitation h est constante. Nous noterons $h(c, p) = \mu$, pour tous nombres réels c et p , où μ désigne un coefficient réel

2.2. Stabilité et bifurcations du système PCR

TABLEAU 2.5 – Résultats numériques pour le niveau de panique sous l'effet d'une variation du paramètre μ_1 , lorsque $B_2 = 0.3$, $C_2 = 0.1$. Une augmentation de μ_1 semble inhiber le niveau de panique.

$B_1 = 0.4$		$B_1 = 0.7$	
μ_1	\bar{p}	μ_1	\bar{p}
0.0	0.76178	0.0	0.72252
0.1	0.64451	0.1	0.61713
0.2	0.49784	0.2	0.48676
0.3	0.37016	0.3	0.36852
0.4	0.28922	0.4	0.28856

compris entre 0 et 1. Nous considérons donc le système différentiel donné par :

$$\begin{cases} \dot{r} = -(B_1 + B_2)r + q(1 - r) \\ \dot{c} = B_1r - C_2c - c(r + c + p + q) + \mu cp \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - \mu cp \\ \dot{q} = -q(1 - r), \end{cases} \quad (2.21)$$

où $(r, c, p, q) \in \mathbb{R}^4$ et $t \geq t_0$. Nous étudions la solution issue de $(0, 0, 0, 1)$ à $t = t_0$, et souhaitons comparer les composantes de panique p_μ et p_{μ^*} des deux orbites obtenues pour deux valeurs $\mu > \mu^*$ du paramètre d'imitation. Nous fixons donc μ^* , et introduisons $\nu > 0$ tel que $\mu = \mu^* + \nu$.

Proposition 2.6. *Soient $\nu > 0$ et $\mu^* \in [0, 1]$. On note p_μ et p_{μ^*} les composantes de panique des solutions du système (2.21) issues de $(0, 0, 0, 1)$, obtenues pour μ et μ^* respectivement. Alors on a :*

$$p_{\mu^*}(t) \geq p_\mu(t), \quad \forall t \geq t_0$$

pour ν suffisamment petit.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4. *Soit f une fonction réelle, définie et continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x \in [a, c[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]c, b]$. Alors $f'(c) \leq 0$.*

Démonstration. On écrit un développement de Taylor de $f(x)$ au point c :

$$f(c + h) = hf'(c) + o(h),$$

pour h voisin de 0. Si $f'(c) > 0$, alors on obtient $f(c + h) > 0$ pour $h > 0$ suffisamment petit, et $f(c + h) < 0$ pour $h < 0$ suffisamment petit, ce qui contredit les hypothèses. On a donc bien $f'(c) \leq 0$. \square

Preuve de la proposition. La preuve repose sur le développement en série de Taylor de la solution du système par rapport au paramètre $\nu = \mu - \mu^*$. Ce développement est justifié par le Théorème 1.18 présenté dans le chapitre préliminaire. Avant d'appliquer ce théorème, nous introduisons à nouveau la variable $b = 1 - (r + c + p + q)$, afin de séparer le système (2.21) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = -(B_1 + B_2)r + q(1 - r) \\ \dot{q} = -q(1 - r), \\ \dot{c} = B_1r - C_2c - c(1 - b) + \mu^* cp + \nu cp \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - \mu^* cp - \nu cp \\ \dot{b} = c(1 - b). \end{cases} \quad (2.22)$$

Cherchons les premiers termes du développement en série de Taylor de la solution de ce système par rapport à ν . Notons (r, c, p, q, b) et $(r_0, c_0, p_0, q_0, b_0)$ les solutions correspondant aux valeurs de paramètres μ et μ^* respectivement. Puisque les composantes r et q ne dépendent pas de ν , on peut écrire :

$$\begin{cases} c = c_0 + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots \\ p = p_0 + \nu p_1 + \nu^2 p_2 + \dots \\ b = b_0 + \nu b_1 + \nu^2 b_2 + \dots \end{cases}$$

On a alors nécessairement :

$$\begin{aligned} \dot{c}_0 + \nu \dot{c}_1 + \nu^2 \dot{c}_2 + \dots &= B_1 r - C_2(c_0 + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots) \\ &\quad - (c_0 + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots)(1 - b_0 - \nu b_1 - \nu^2 b_2 - \dots) \\ &\quad + \mu^*(c_0 + \nu c_1 + \dots)(p_0 + \nu p_1 + \dots) \\ &\quad + \nu(c_0 + \nu c_1 + \dots)(p_0 + \nu p_1 + \dots) \\ \dot{p}_0 + \nu \dot{p}_1 + \nu^2 \dot{p}_2 + \dots &= B_2 r + C_2(c_0 + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots) \\ &\quad - \mu^*(c_0 + \nu c_1 + \dots)(p_0 + \nu p_1 + \dots) \\ &\quad - \nu(c_0 + \nu c_1 + \dots)(p_0 + \nu p_1 + \dots) \\ \dot{b}_0 + \nu \dot{b}_1 + \nu^2 \dot{b}_2 + \dots &= (c_0 + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots)(1 - b_0 - \nu b_1 - \nu^2 b_2 - \dots), \end{aligned}$$

où les points de suspension indiquent des termes de degré supérieur à 2. En identifiant les termes d'ordre 0 en ν , on obtient un système différentiel dont les inconnues sont c_0, p_0 et b_0 :

$$\begin{cases} \dot{c}_0 = B_1 r - C_2 c_0 - c_0(1 - b_0) + \mu^* c_0 p_0 \\ \dot{p}_0 = B_2 r + C_2 c_0 - \mu^* c_0 p_0 \\ \dot{b}_0 = c_0(1 - b_0). \end{cases}$$

On obtient de même pour les termes d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -C_2 c_1 + c_0 b_1 - c_1(1 - b_0) + \mu^*(c_0 p_1 + c_1 p_0) + c_0 p_0 \\ \dot{p}_1 = C_2 c_1 - \mu^*(c_0 p_1 + c_1 p_0) - c_0 p_0 \\ \dot{b}_1 = -c_0 b_1 + c_1(1 - b_0). \end{cases}$$

Puisque la condition initiale est égale à $(0, 0, 0, 1, 0)$, on a :

$$c_0(0) = p_0(0) = b_0(0) = 0, \quad c_1(0) = p_1(0) = b_1(0) = 0.$$

Cette condition initiale affecte également les dérivées :

$$\begin{cases} \dot{r}(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = -1, \quad \dot{c}_0(0) = \dot{p}_0(0) = \dot{b}_0(0) = 0, \\ \dot{c}_1(0) = \dot{p}_1(0) = \dot{b}_1(0) = 0. \end{cases}$$

On calcule maintenant les dérivées secondes de c_0, p_0, b_0 , ce qui mène à :

$$\begin{cases} \ddot{c}_0 = B_1 \dot{r} - C_2 \dot{c}_0 - \dot{c}_0(1 - b_0) + c_0 \dot{b}_0 + \mu^*(\dot{c}_0 p_0 + c_0 \dot{p}_0) \\ \ddot{p}_0 = B_2 \dot{r} + C_2 \dot{c}_0 - \mu^*(\dot{c}_0 p_0 + c_0 \dot{p}_0) \\ \ddot{b}_0 = \dot{c}_0(1 - b_0) - c_0 \dot{b}_0, \end{cases}$$

d'où $\ddot{c}_0(0) = B_1, \ddot{p}_0(0) = B_2$ et $\ddot{b}_0(0) = 0$. De la même façon, on calcule les dérivées de c_1, p_1, b_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{c}_1 &= -C_2 \dot{c}_1 + \dot{c}_0 b_1 + c_0 \dot{b}_1 - \dot{c}_1(1 - b_0) + c_1 \dot{b}_0 + (\dot{c}_0 p_0 + c_0 \dot{p}_0) \\ &\quad + \mu^*(\dot{c}_0 p_1 + c_0 \dot{p}_1 + \dot{c}_1 p_0 + c_1 \dot{p}_0), \\ \ddot{p}_1 &= C_2 \dot{c}_1 - (\dot{c}_0 p_0 + c_0 \dot{p}_0) - \mu^*(\dot{c}_0 p_1 + c_0 \dot{p}_1 + \dot{c}_1 p_0 + c_1 \dot{p}_0), \\ \ddot{b}_1 &= -\dot{c}_0 b_1 - c_0 \dot{b}_1 + \dot{c}_1(1 - b_0) - c_1 \dot{b}_0, \end{aligned}$$

d'où $\ddot{c}_1(0) = \ddot{p}_1(0) = \ddot{b}_1(0) = 0$. On obtient alors :

$$\begin{cases} c^{(3)}(0) = p^{(3)}(0) = b^{(3)}(0) = 0 \\ c^{(4)}(0) = p^{(4)}(0) = b^{(4)}(0) = 0 \\ c^{(5)}(0) = 6B_1B_2 > 0, p^{(5)}(0) = -6B_1B_2 < 0, b^{(5)}(0) = 0 \\ b^{(6)}(0) = 6B_1B_2 > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $c_1(t) > 0$, $p_1(t) < 0$ et $b_1(t) > 0$ sur un intervalle $[0, \eta[$, avec $\eta > 0$. Pour achever la démonstration, nous allons montrer que $\eta = +\infty$. Pour cela, supposons que $(b_1(\eta), c_1(\eta), p_1(\eta))$ sort du domaine $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$. Alors trois cas peuvent se produire. Supposons d'abord que $b_1(\eta) = 0$, $c_1(\eta) > 0$, $p_1(\eta) < 0$. On obtient :

$$\dot{b}_1(\eta) = c_1(\eta)(1 - b_0(\eta)) > 0,$$

ce qui mène à une contradiction, en vertu du Lemme 2.4. On en déduit que $b_1(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. Supposons ensuite que $c_1(\eta) = 0$, $b_1(\eta) > 0$ et $p_1(\eta) < 0$. Puisque $c_1 + p_1 + b_1 = 0$ et $\mu^* \in [0, 1]$, on obtient :

$$\dot{c}_1(\eta) = c_0(\eta)(b_1(\eta)(1 - \mu^*) + p_0(\eta)) > 0,$$

ce qui mène encore à une contradiction. D'où $c_1(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. Enfin, $p_1(\eta) = 0$ implique que $c_1(\eta) + p_1(\eta) = 0$, ce qui est également exclu. Donc $p_1(t) < 0$, pour tout $t \geq t_0$. En conséquence, pour ν suffisamment petit, la composante de panique p_{μ^*} est supérieure à p_{μ} , ce qui achève la démonstration. \square

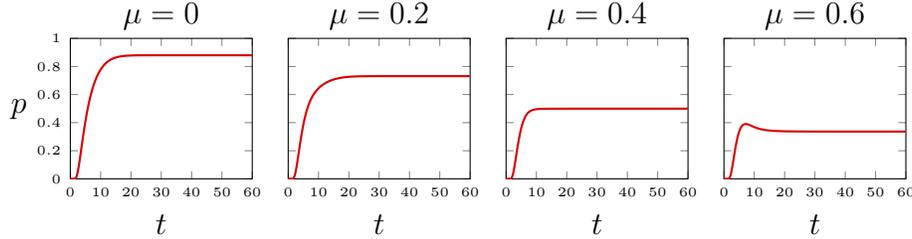


FIGURE 2.14 – Résultats numériques montrant une inhibition du niveau de panique sous l'effet d'une augmentation du paramètre $\mu = \mu_1$.

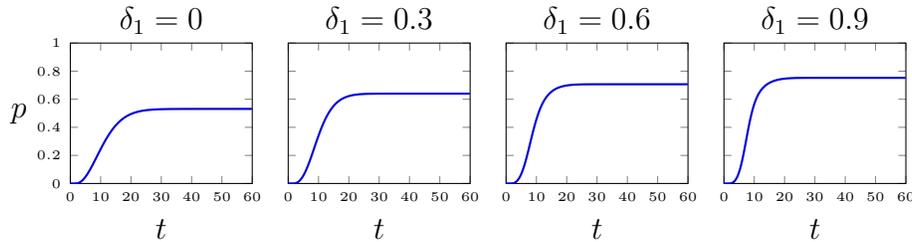


FIGURE 2.15 – Résultats numériques illustrant l'effet catalyseur du paramètre δ_1 sur le niveau de panique.

La méthode de développement utilisée dans la démonstration précédente peut être employée pour étudier l'effet des autres paramètres d'imitation. Par exemple, on peut montrer qu'une augmentation du paramètre δ_1 , qui modélise la contagion émotionnelle du comportement de réflexe vers le comportement de panique, accentue le niveau de panique. La figure 2.14 montre l'effet inhibiteur du paramètre μ_1 , et la figure 2.15 illustre au contraire l'effet catalyseur du paramètre δ_1 .

2.3 Dynamique transitoire

Nous allons maintenant étudier la phase transitoire du système PCR (2.5) obtenue en introduisant un délai dans l'action de la vidange comportementale φ . Nous parlerons de *phase transitoire*. La figure 2.16 montre que les trois comportements r , c et p semblent tendre vers un équilibre transitoire, avant d'évoluer vers leur équilibre asymptotique. C'est ce que nous nous proposons d'analyser dans cette partie.

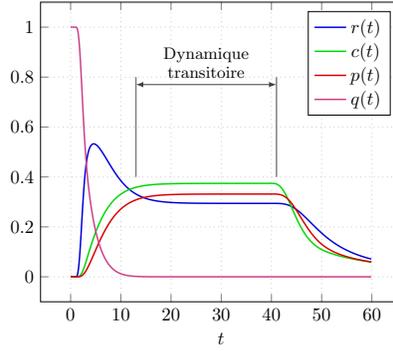


FIGURE 2.16 – Dynamique transitoire du système PCR.

2.3.1 Équilibre transitoire

Nous supposons qu'il existe un intervalle $[t_1, t_2]$ sur lequel on a :

$$\gamma(t) = 1, \quad \varphi(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (2.23)$$

Comme précédemment, nous restreignons notre étude au cas où les fonctions d'imitation sont nulles, c'est-à-dire que nous supposons :

$$\alpha_i = 0, \quad \mu_i = 0, \quad \delta_i = 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Nous considérons donc le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{r} = q(1-r) - (B_1 + B_2)r + s_1c + s_2p \\ \dot{c} = B_1r + C_1p - C_2c - s_1c \\ \dot{p} = B_2r - C_1p + C_2c - s_2p \\ \dot{q} = -q(1-r). \end{cases} \quad (2.24)$$

Proposition 2.7. *La phase transitoire du système PCR, définie par (2.23) et (2.24), présente un point d'équilibre attracteur et structurellement stable.*

Il n'y a donc pas de bifurcation au point d'équilibre de la phase transitoire du système PCR. Ce point attracteur est illustré sur la figure (2.16).

Démonstration. Pour déterminer les points d'équilibre du système (2.24), on résout :

$$\begin{cases} q(1-r) - (B_1 + B_2)r + s_1c + s_2p = 0 \\ B_1r + C_1p - C_2c - s_1c = 0 \\ B_2r - C_1p + C_2c - s_2p = 0 \\ -q(1-r) = 0. \end{cases}$$

Puisque la somme $r + c + p + q$ est constante et égale à 1, on obtient :

$$\begin{cases} 1 - (2 + B_1 + B_2)r + (s_1 - 1)c + (s_2 - 1)p + r^2 + rc + rp = 0 \\ B_1r + C_1p - C_2c - s_1c = 0 \\ B_2r - C_1p + C_2c - s_2p = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} r^* = \frac{C_1s_1 + C_2s_2 + s_1s_2}{N} \\ c^* = \frac{B_1s_2 + C_1B_1 + C_1B_2}{N} \\ p^* = \frac{B_1C_2 + B_2C_2 + B_2s_1}{N}, \end{cases}$$

où N est donné par :

$$N = C_1s_1 + C_2s_2 + s_1s_2 + B_1s_2 + C_1B_1 + C_1B_2 + B_1C_2 + B_2C_2 + B_2s_1,$$

avec $r^* + c^* + p^* = 1$. La matrice jacobienne du système (2.25), évaluée en (r^*, c^*, p^*) , admet trois valeurs propres qui sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-B_1 - B_2 - C_1 - C_2 - s_1 - s_2 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-B_1 - B_2 - C_1 - C_2 - s_1 - s_2 - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-(B_1C_1 + B_1C_2 + B_1s_1 + B_2C_1 + B_2C_2 + B_2s_1)}{N}, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta = & B_1^2 + 2B_1B_2 - 2B_1C_1 - 2B_1C_2 + 2B_1s_1 - 2B_1s_2 + B_2^2 - 2B_2C_1 \\ & - 2B_2C_2 - 2B_2s_1 + 2B_2s_2 + C_1^2 + 2C_1C_2 - 2C_1s_1 + 2C_1s_2 + C_2^2 \\ & + 2C_2s_1 - 2C_2s_2 + s_1^2 - 2s_1s_2 + s_2^2. \end{aligned}$$

La stabilité du point d'équilibre (r^*, c^*, p^*) est donnée par le signe de λ_1 , λ_2 et λ_3 . Il est clair que $\lambda_3 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. D'autre part, la somme et le produit de λ_1 et λ_2 vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -(B_1 + B_2 + C_1 + C_2 + s_1 + s_2), \\ \lambda_1\lambda_2 &= B_1C_1 + B_1C_2 + B_1s_2 + B_2C_1 + B_2C_2 + B_2s_1 + C_1s_1 + C_2s_2 + s_1s_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\lambda_1 < 0$. Nous avons donc montré que (r^*, c^*, p^*) est un nœud attracteur pour le système (2.25). Finalement, puisque la somme des densités $r + c + p + q$ est constante, égale à 1, $(r^*, c^*, p^*, 0)$ est aussi un point d'équilibre attracteur du système (2.24). Sa stabilité structurelle découle du fait que le signe des valeurs propres ne dépend pas des valeurs des paramètres B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , s_1 et s_2 . \square

Remarque 2.3.1. La dynamique transitoire du système PCR offre un intervalle de temps durant lequel les estimations de calibrage données plus haut peuvent être vérifiées. \bullet

2.3.2 Bifurcation de Hopf

Nous allons maintenant étudier la dynamique transitoire du système PCR dans le cas d'un effet domino multiple [16].

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} = \lambda s + z - s(s^2 + z^2) \\ \dot{z} = -s + \lambda z - z(s^2 + z^2) \\ \dot{r} = \gamma(t)q(1-r) - (B_1 + B_2)r + s^2(c+p) + f(r, c)rc + g(r, p)rp \\ \dot{c} = B_1r + C_1p - C_2c - s^2c - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi(t)c(r+c+p+q) \\ \dot{p} = B_2r - C_1p + C_2c - s^2p - g(r, p)rp - h(c, p)cp \\ \dot{q} = \gamma(t)q(1-r), \end{cases} \quad (2.26)$$

obtenu en modélisant l'effet de domino avec l'approche présentée dans la section 2.1.5. Nous nous proposons de montrer que l'effet domino peut provoquer l'apparition de cycles durant la phase transitoire. Nous nous plaçons donc sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ tel que :

$$\gamma(t) = 1, \quad \varphi(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Nous avons donc comme précédemment $r + c + p + q = 1$. Finalement, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{s} = \lambda s + z - s(s^2 + z^2) \\ \dot{z} = -s + \lambda z - z(s^2 + z^2) \\ \dot{r} = (1-r-c-p)(1-r) - (B_1 + B_2)r + s^2(c+p) + f(r, c)rc + g(r, p)rp \\ \dot{c} = B_1r + C_1p - C_2c - s^2c - f(r, c)rc + h(c, p)cp \\ \dot{p} = B_2r - C_1p + C_2c - s^2p - g(r, p)rp - h(c, p)cp. \end{cases} \quad (2.27)$$

Pour étudier les équilibres de la phase transitoire du système (2.27), nous considérons la condition suivante :

$$(H_1) \quad \alpha_2 + \delta_2 < B_1 + B_2,$$

qui correspond à une situation où les évolutions du comportement de réflexe vers les comportements de contrôle ou de panique dominent les interactions opposées, agissant des comportements de contrôle ou de panique vers le comportement de réflexe.

Proposition 2.8. *Sous la condition (H_1) , le système (2.27) admet un équilibre non trivial*

$$\mathcal{E}(0, 0, 0, c_0, p_0).$$

Démonstration. Pour trouver les équilibres du système (2.27), on résout :

$$\begin{cases} \lambda s + z - s(s^2 + z^2) = 0 \\ -s + \lambda z - z(s^2 + z^2) = 0 \\ (1-r-c-p)(1-r) - (B_1 + B_2)r + s^2(c+p) + f(r, c)rc + g(r, p)rp = 0 \\ B_1r + C_1p - C_2c - s^2c - f(r, c)rc + h(c, p)cp = 0 \\ B_2r - C_1p + C_2c - s^2p - g(r, p)rp - h(c, p)cp = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Les deux premières équations correspondent à la recherche des équilibres dans la forme normale d'une bifurcation de Hopf, et mènent à $s = z = 0$. La somme des trois dernières équations implique que $(1-r-c-p)(1-r) = 0$. Supposons que $r = 1$. Alors nécessairement $p = c = 0$, et on obtient dans la troisième équation $-(B_1 + B_2) = 0$, ce qui est absurde. Donc $r + c + p = 1$. La troisième équation devient alors :

$$r(-B_1 - B_2 + f(r, c)c + g(r, p)p) = 0.$$

Or la condition (H_1) garantit que $\alpha_2 + \delta_2 < B_1 + B_2$, donc :

$$\alpha_2 \xi \left(\frac{c}{r + \nu_0} \right) c + \delta_2 \xi \left(\frac{p}{r + \nu_0} \right) p < B_1 + B_2,$$

2.3. Dynamique transitoire

où ξ est définie par (2.2). En effet, on a $|\xi(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et $c(t) \leq 1$, $p(t) \leq 1$ pour tout $t \geq t_0$. Finalement, l'équation $f(r, c)c + g(r, p)p = B_1 + B_2$ n'a pas de solution, ce qui implique $r = 0$. On obtient alors $c + p = 1$, puis :

$$(C_1 + C_2)c - C_1 + h(c, 1 - c)c(c - 1) = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$h(c, 1 - c) = \frac{C_1 - c(C_1 + C_2)}{c(c - 1)}.$$

On prouve alors que la fonction β définie par :

$$\beta(c) = \frac{C_1 - c(C_1 + C_2)}{c(c - 1)}$$

est strictement croissante sur $]0, 1[$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \beta'(c) &= \frac{-(C_1 + C_2)c(c - 1) - (C_1 - c(C_1 + C_2))(2c - 1)}{c^2(c - 1)^2} \\ &= \frac{-(C_1 + C_2)c^2 + c(C_1 + C_2) - 2cC_1 + C_1 + 2c^2(C_1 + C_2) - c(C_1 + C_2)}{c^2(c - 1)^2} \\ &= \frac{c^2(C_1 + C_2) - 2cC_1 + C_1}{c^2(c - 1)^2}. \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 4C_1^2 - 4(C_1 + C_2)C_1 < 0$, ce qui montre que $\beta'(c)$ est strictement positif, pour tout $c \in]0, 1[$. On a par ailleurs :

$$\lim_{c \rightarrow 0} \beta(c) = -\infty, \quad \lim_{c \rightarrow 1} \beta(c) = +\infty.$$

D'autre part, on a :

$$h(c, 1 - c) = \mu_1 \xi \left(\frac{c}{1 + \nu_0 - c} \right) - \mu_2 \xi \left(\frac{1 - c}{c + \nu_0} \right),$$

donc :

$$\frac{dh(c, 1 - c)}{dc} = \mu_1 \frac{1 + \nu_0}{(1 + \nu_0 - c)^2} \xi' \left(\frac{c}{1 + \nu_0 - c} \right) + \mu_2 \frac{1 + \nu_0}{(c + \nu_0)^2} \xi' \left(\frac{1 - c}{c + \nu_0} \right),$$

donc $c \mapsto h(c, 1 - c)$ est décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit l'existence et l'unicité d'un nombre réel $c_0 \in]0, 1[$ tel que :

$$h(c_0, 1 - c_0) = \frac{C_1 - c_0(C_1 + C_2)}{c_0(c_0 - 1)}.$$

□

Pour étudier la nature du point d'équilibre \mathcal{E} , nous posons ensuite :

$$\begin{aligned} a_1 &= f(0, c_0)c_0, & a_2 &= g(0, p_0)p_0, \\ a_3 &= \frac{\partial h}{\partial c}(c_0, p_0)c_0p_0 + h(c_0, p_0)p_0, \\ a_4 &= \frac{\partial h}{\partial p}(c_0, p_0)c_0p_0 + h(c_0, p_0)c_0, \end{aligned}$$

et nous considérons les conditions :

$$\begin{aligned} (H_2) \quad a_1 + a_2 &< B_1 + B_2, \\ (H_3) \quad a_3 - a_4 &< C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Proposition 2.9. *Sous les conditions (H_1, H_2, H_3) , le système (2.27) présente au point d'équilibre $\mathcal{E}(0, 0, 0, c_0, p_0)$ une bifurcation de Hopf supercritique en $\lambda = 0$.*

Démonstration. On écrit la matrice jacobienne du système, au point d'équilibre \mathcal{E} :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - B_1 - B_2 + a_1 + a_2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & B_1 - a_1 & -C_2 + a_3 & C_1 + a_4 \\ 0 & 0 & B_2 - a_2 & C_2 - a_3 & -C_1 - a_4 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Ses valeurs propres sont

$$\lambda \pm i, -1, -B_1 - B_2 + a_1 + a_2, -C_1 - C_2 + a_3 - a_4.$$

Les conditions (H_2) et (H_3) garantissent que les valeurs propres réelles sont strictement négatives. En posant $x = (s, z, r, c, p)^T$, on obtient :

$$\dot{x} = J(\lambda)x + F(x, \lambda), \quad (2.30)$$

avec :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & B(\lambda) \end{pmatrix},$$

et $F(x, \lambda)$ contient les termes non linéaires du système (2.27) :

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -s(s^2 + z^2) \\ -z(s^2 + z^2) \\ F_3(s, z, r, c, p) \\ F_4(s, z, r, c, p) \\ F_5(s, z, r, c, p) \end{pmatrix}.$$

La matrice $J(\lambda)$ possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\alpha(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$ telles que :

- $\alpha(0) = 0$ et $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) = 1 \neq 0$;
- les autres valeurs propres de $J(0)$ sont réelles et strictement négatives.

Notons ensuite $\zeta = s + iz$ et $\xi = (r, c, p)^T$. On peut écrire le système (2.30) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = (\lambda + i)\zeta + \Gamma(\zeta, \bar{\zeta}) \\ \dot{\xi} = B(\lambda)\xi + \Lambda(\zeta, \bar{\zeta}, \xi), \end{cases} \quad (2.31)$$

où l'on remarque en particulier :

$$\Gamma(\zeta, \bar{\zeta}) = -\zeta^2 \bar{\zeta},$$

puisque les deux premières composantes de $F(x, \lambda)$ ne dépendent pas de ξ . On calcule enfin le premier nombre de Lyapunov :

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{21} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21},$$

où les coefficients ω_0 est, g_{20} , g_{11} , g_{02} et g_{21} sont donnés par :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1, \quad g_{20} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta^2} = 0, \quad g_{11} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = 0, \quad g_{02} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0, \\ g_{21} &= \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}} + k_1 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta \partial r} + k_2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta \partial c} + k_3 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta \partial p} = -2, \end{aligned}$$

ce qui donne $c_1 = -1$. Le Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf 1.20 permet de conclure que le système (2.27) présente au point d'équilibre \mathcal{E} une bifurcation de Hopf supercritique lorsque $\lambda = 0$. \square

La figure 2.17 montre l'orbite du système (2.27) issue de la condition initiale $(1, 0, 0, 0)$, obtenue pour différentes valeurs du paramètre λ . Lorsque λ augmente, l'effet domino gagne en intensité, et la phase transitoire présente un cycle attracteur.

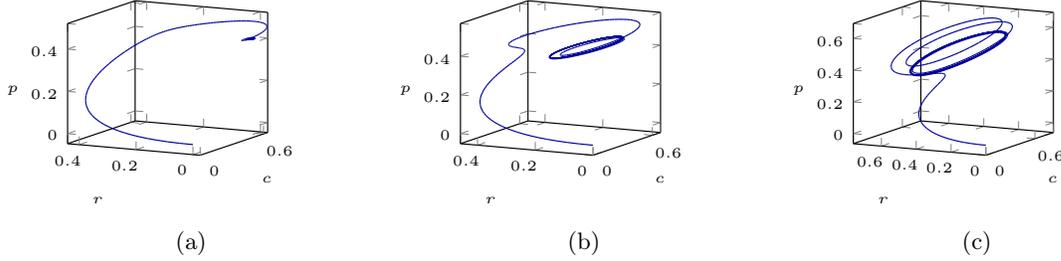


FIGURE 2.17 – Effet domino dans la phase transitoire du système PCR, donnée par (2.27), en fonction du paramètre λ . (a) $\lambda = 0$. (b) $\lambda = 0.4$. (c) $\lambda = 0.8$. Lorsque l'intensité λ de l'effet domino s'accroît, le système présente un cycle attracteur.

Remarque 2.3.2. La condition suffisante (H_2) est aisément satisfaite. On a en effet :

$$a_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \xi \left(\frac{c_0}{\nu_0} \right), \quad a_2 = -\delta_1 + \delta_2 \xi \left(\frac{p_0}{\nu_0} \right).$$

Or, ν_0 étant petit devant c_0 et p_0 , on a $a_1 \simeq -\alpha_1 \leq 0$ et de même $a_2 \simeq -\delta_1 \leq 0$. D'autre part, on a :

$$a_3 - a_4 = \left(\frac{\partial h}{\partial c} - \frac{\partial h}{\partial p} \right) c_0 p_0 + h(c_0, p_0) c_0 p_0,$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial c} &= \frac{\mu_1}{p_0 + \nu_0} \xi' \left(\frac{c_0}{p_0 + \nu_0} \right) + \frac{\mu_2 p_0}{(c_0 + \nu_0)^2} \xi' \left(\frac{p_0}{c_0 + \nu_0} \right) < 0, \\ \frac{\partial h}{\partial p} &= \frac{-\mu_1 c_0}{(p_0 + \nu_0)^2} \xi' \left(\frac{c_0}{p_0 + \nu_0} \right) - \frac{\mu_2}{c_0 + \nu_0} \xi' \left(\frac{p_0}{c_0 + \nu_0} \right) > 0. \end{aligned}$$

Pour que (H_3) soit vérifiée, il suffit donc que $h(c_0, p_0) c_0 p_0 \leq C_1 + C_2$. Finalement, les hypothèses $(H_1) - (H_2) - (H_3)$ sont remplies lorsque les phénomènes d'imitation sont dominés par les phénomènes d'évolution, ce qui est raisonnable au regard des éléments de modélisation présentés précédemment. \bullet

Conclusion et perspectives

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté l'étude d'un modèle de comportements humains en situation de catastrophe. Comme dans toute démarche de modélisation, nous avons effectué les choix qui nous semblaient les plus pertinents. Les résultats de l'étude mathématique qui en découlent sont donc à interpréter avec précaution. Rappelons également que nous avons quelquefois choisi de restreindre notre analyse mathématique, en supposant notamment les phénomènes de contagion émotionnelle négligeables devant les évolutions comportementales. Il est donc naturel de s'interroger sur la dynamique du système dans le cas où ces interactions sont dominantes. Il en est de même pour l'analyse complète de l'effet domino.

Enfin, le système Panique-Contrôle-Réflexe se prête naturellement à l'étude d'un problème de contrôle optimal. Nous proposons de modéliser deux aspects de contrôle, avec d'une part un contrôle

préventif u_1 permettant de préparer les populations exposées aux risques de catastrophe, comme cela est le cas dans certains pays comme le Japon par exemple, et d'autre part un contrôle curatif u_2 du comportement de panique pendant l'événement, par les services de secours. De plus, nous proposons de rechercher les contrôles (u_1, u_2) qui permettent d'atteindre l'équilibre de retour au comportement du quotidien en temps minimal. En supposant que le contrôle préventif u_1 agit sur le paramètre C_1 qui modélise l'évolution comportementale du comportement de panique p vers le comportement de contrôle c , et que le contrôle curatif u_2 agit directement sur l'évolution du nombre d'individus en comportement de panique, on obtient le système de contrôle général suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = +\gamma q (r_m - r) - (B_1 + B_2)r + f(r, c)rc + g(r, p)rp \\ \dot{c} = B_1r - C_2c + (C_1 + u_1)p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(b_m - b) \\ \dot{p} = B_2r + C_2c - (C_1 + u_1)p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - u_2 \\ \dot{q} = -\gamma q (r_m - r) \\ \dot{b} = +\varphi c(b_m - b), \end{cases}$$

où (u_1, u_2) désigne le contrôle. Une étude de la contrôlabilité de ce système, puis une recherche des solutions optimales constituent les deux étapes principales de l'étude. Ce travail constitue une perspective de recherche supplémentaire.

Réseaux couplés de systèmes non identiques

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique des réseaux de systèmes non identiques. À partir d'un système dynamique donné par une équation différentielle ordinaire, dépendant d'un paramètre de bifurcation, nous construisons un réseau, dont les nœuds sont couplés avec une instance du système dynamique initial, admettant chacune leur propre valeur du paramètre de bifurcation. Les nœuds composant le réseau sont donc susceptibles de présenter des dynamiques internes distinctes. La topologie du réseau est déterminée par la nature et la disposition des couplages entre les différents nœuds. Ces couplages seront supposés linéaires ou quadratiques, et seront orientés. Nous souhaitons savoir s'il est possible de déterminer la dynamique globale du réseau, connaissant d'une part sa topologie, et d'autre part la dynamique interne de chaque nœud. Est-il par exemple possible d'agir sur cette topologie pour qu'un nœud dicte sa dynamique interne aux autres nœuds, et que le réseau présente un état de synchronisation ? L'effet de la topologie du réseau peut-il au contraire induire de nouveaux équilibres ?

Après avoir exposé le problème, nous étudions ces questions dans les deux situations suivantes. Tout d'abord, nous considérons des réseaux construits à partir du modèle comportemental, donné par le système Panique-Contrôle-Réflexe présenté dans le chapitre précédent. Car les spécificités géographiques des terrains concernés par les événements catastrophiques nous amènent naturellement à étendre le modèle initial à un réseau, dont la topologie reproduit la topographie du lieu considéré. Nous distinguerons les instances du système Panique-Contrôle-Réflexe présentant un retour total au comportement du quotidien, des instances de ce même système présentant des persistances de panique. Dans cette situation, nous obtenons un résultat complet de synchronisation, qui met en évidence la nécessité d'évacuer les zones les plus exposées aux aléas catastrophiques. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une deuxième publication [13]. Ensuite, nous étudions des réseaux d'oscillateurs non identiques. Pour cela, nous construisons des chaînes orientées, à partir d'un système donné par la forme normale de la bifurcation de Hopf. Nous montrons que l'effet d'un couplage linéaire faible peut produire de nouvelles solutions périodiques, inexistantes en l'absence de couplage. Notre étude s'appuie sur l'algorithme de Hassard, Wan et Kazarinoff. De plus, nous vérifions dans le cas d'un système proie-prédateur cette tendance à l'émergence de nouvelles solutions périodiques dans les chaînes orientées.

3.1 Position du problème

Considérons un système dynamique donné par une équation de la forme

$$\dot{x} = \Phi(t, x, \lambda), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (3.1)$$

où n et p sont des entiers strictement positifs, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et Φ est une fonction définie dans $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^p$. Nous supposons que le système (3.1) présente une bifurcation pour la valeur λ_0 du paramètre λ , c'est-à-dire un changement dans la structure et la stabilité de ses ensembles invariants pour $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda > \lambda_0$.

Considérons ensuite un graphe \mathcal{G} constitué d'un ensemble \mathcal{V} de N sommets $\{1, \dots, N\}$ ($N \geq 2$), et de deux ensembles \mathcal{E}_L and \mathcal{E}_Q d'arêtes orientées, que nous allons faire correspondre à des couplages linéaires et quadratiques respectivement. Un élément (i, j) de \mathcal{E}_L ou \mathcal{E}_Q correspond à une connexion directe du sommet i vers le sommet j . Les éléments de \mathcal{E}_L et \mathcal{E}_Q seront appelés simplement *arêtes linéaires* et *arêtes quadratiques* respectivement. Puis, nous associons à chaque sommet $i \in \mathcal{V}$ une instance du système dynamique (3.1) avec sa propre valeur de paramètre λ_i , et nous considérons le problème réseau donné par

$$\dot{x}_i = \Phi(t, x_i, \lambda_i) + \sum_{j=1}^N L_{i,j}(t) \mathcal{H}x_j + \sum_{j=1}^N (Q(t, X))_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.2)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ donne l'état du sommet i , et $X = (x_1, \dots, x_N)^T$. La matrice $L(t) = (L_{i,j}(t))$ est appelée *matrice de connectivité linéaire*. Si $(i, j) \in \mathcal{E}_L$, $i \neq j$, alors $L_{j,i}(t) > 0$, pour tout $t \geq 0$. Si au contraire $(i, j) \notin \mathcal{E}_L$, $i \neq j$, alors $L_{j,i}(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$. De plus, les éléments diagonaux de la matrice L satisfont

$$L_{i,i}(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N L_{j,i}(t), \quad (3.3)$$

ce qui implique que la somme des coefficients de chaque colonne de L est nulle. Puis, la matrice \mathcal{H} est de taille n , et détermine quelles composantes des sommets x_i et x_j sont couplées.

De la même façon, la matrice $Q(t, X)$ est appelée *matrice de connectivité quadratique*. Si $(i, j) \in \mathcal{E}_Q$, $i \neq j$, on pose

$$(Q(t, X))_{j,i} = -Q_{j,i}(t) \kappa(x_i, x_j), \quad (Q(t, X))_{i,j} = +Q_{j,i}(t) \kappa(x_i, x_j), \quad (3.4)$$

où $Q_{j,i}(t)$ est une fonction continue de t , admettant des valeurs strictement positives. La fonction κ est définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par une expression quadratique de la forme

$$\kappa(x_i, x_j) = \left(\sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} \kappa_l^{\alpha, \beta} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\beta)} \right)^T, \quad 1 \leq l \leq n, \quad (3.5)$$

où les symboles $x_i^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq n$, désignent les composantes de x_i , et $\kappa_l^{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$ pour tous l , α et β tels que $1 \leq l \leq n$, $1 \leq \alpha \leq n$ et $1 \leq \beta \leq n$. La matrice des coefficients $(Q_{j,i})$ est de taille N et anti-symétrique. On prendra garde que la fonction κ n'est pas nécessairement symétrique.

Par simplicité, on introduit la fonction $\mathcal{Q}(t, X)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times N}$, en posant

$$\mathcal{Q}(t, X) = (\mathcal{Q}_i(t, X))^T = \left(\sum_{j=1}^N (Q(t, X))_{i,j} \right)^T, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.6)$$

Dans la suite de ce chapitre, afin d'alléger les notations, nous omettrons la dépendance en la variable t des matrices L et Q . Nous supposerons qu'il existe une force de couplage minimale $\eta_0 > 0$ telle que

$$L_{i,j}(t) \geq \eta_0, \quad Q_{i,j}(t) \geq \eta_0, \quad (3.7)$$

pour tout $t \geq 0$ et i, j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $L_{i,j}(t) \neq 0$ ou $Q_{i,j}(t) \neq 0$.

Les sommets du graphe \mathcal{G} seront appelés *nœuds*. Le terme $\Phi(t, x_i, \lambda_i)$ dans le système (3.2) détermine la dynamique interne à chaque nœud, tandis que les termes de couplages contenus dans les

3.1. Position du problème

matrices L et Q décrivent la topologie du réseau. Par souci de clarté, nous associerons une couleur à chaque valeur du paramètre λ_i . Ainsi, deux nœuds x_i et x_j de la même couleur admettront la même valeur de paramètre $\lambda_i = \lambda_j$, et donc la même dynamique interne.

Exemple 3.1.1. Posons $n = 2$, $N = 4$, et considérons le graphe \mathcal{G} présenté sur la figure 3.1.

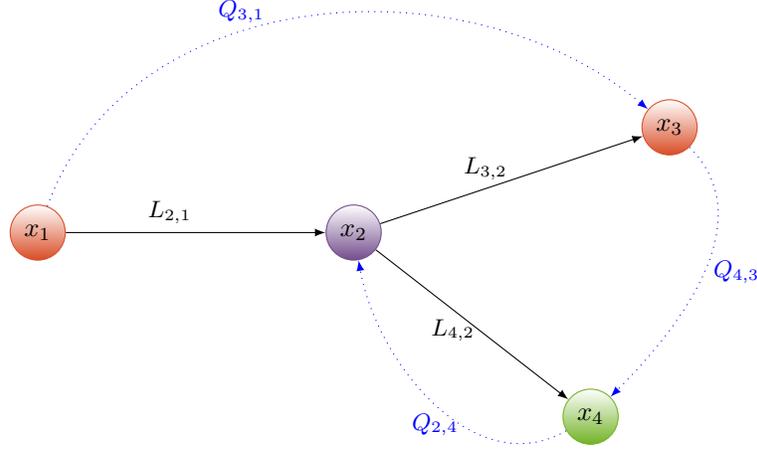


FIGURE 3.1 – Réseau couplé, composé de 4 nœuds, présentant 3 dynamiques internes distinctes, correspondant à 3 valeurs distinctes du paramètre λ dans le système $\dot{x} = \Phi(t, x, \lambda)$.

L'ensemble \mathcal{E}_L des arêtes linéaires est $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$. On a donc

$$L = \begin{pmatrix} -L_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & -L_{3,2} - L_{4,2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis, l'ensemble \mathcal{E}_Q des arêtes quadratiques est $\{(1, 3), (3, 4), (4, 2)\}$. Ainsi, on a

$$Q(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_{3,1}\kappa(x_1, x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{2,4}\kappa(x_4, x_2) \\ Q_{3,1}\kappa(x_1, x_3) & 0 & 0 & -Q_{4,3}\kappa(x_3, x_4) \\ 0 & -Q_{2,4}\kappa(x_4, x_2) & Q_{4,3}\kappa(x_3, x_4) & 0 \end{pmatrix}.$$

En considérant 3 valeurs de paramètre distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on obtient les équations du réseau :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \Phi(t, x_1, \lambda_1) - L_{2,1}\mathcal{H}x_1 - Q_{3,1}\kappa(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 = \Phi(t, x_2, \lambda_2) + L_{2,1}\mathcal{H}x_1 - (L_{3,2} + L_{4,2})\mathcal{H}x_2 + Q_{2,4}\kappa(x_4, x_2) \\ \dot{x}_3 = \Phi(t, x_3, \lambda_1) + L_{3,2}\mathcal{H}x_2 + Q_{3,1}\kappa(x_1, x_3) - Q_{4,3}\kappa(x_3, x_4) \\ \dot{x}_4 = \Phi(t, x_4, \lambda_3) + L_{4,2}\mathcal{H}x_2 + Q_{4,3}\kappa(x_3, x_4) - Q_{2,4}\kappa(x_4, x_2). \end{cases} \quad (3.8)$$

Notons $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$ les composantes de $x_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Si la première composante de x_i est couplée, mais pas la deuxième, on pose :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\mathcal{H}x_i = \left(x_i^{(1)}, 0\right)^T$. ◁

Soit $X_0 \in \Omega$. On note $X(t, X_0) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ la solution du système (3.2) issue de X_0 à $t = 0$, et $x_i(t, X_0) \in \mathbb{R}^n$ la projection de $X(t, X_0)$ correspondant à l'état du nœud i , pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$.

Définition 3.1 (Synchronisation identique). *On dit que deux nœuds i et j du problème (3.2) synchronisent identiquement lorsque*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_i(t, X_0) - x_j(t, X_0)\|_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad (3.9)$$

pour tout $X_0 \in \Omega$. On dit que le réseau (3.2) synchronise identiquement si toute paire de nœuds synchronise identiquement.

La question principale à laquelle nous nous intéressons est de déterminer la dynamique globale du réseau, connaissant sa topologie et la dynamique interne de ses nœuds. Par exemple, nous souhaitons savoir si un nœud particulier peut conduire le reste du réseau à adopter sa dynamique interne, et connaître l'effet de la topologie du réseau sur la bifurcation identifiée dans le système dynamique (3.1). Nous étudierons d'abord ces problématiques sur l'exemple du système Panique-Contrôle-Réflexe, présenté au cours du chapitre précédent. Puis, nous aborderons le cas des réseaux d'oscillateurs en fin de chapitre.

3.2 Réseaux de systèmes PCR

Dans cette section, nous étudions la dynamique de réseaux construits à partir d'instances non identiques du système Panique-Contrôle-Réflexe, présenté dans le chapitre précédent. La prise en compte de la dimension spatiale et des spécificités des terrains géographiques concernés, amène naturellement à introduire une structure de réseau, dont les nœuds correspondent aux zones densément peuplées, et dont les arêtes correspondent aux connexions entre ces différentes zones. Nous préciserons les choix de modélisation effectués tout au long de notre présentation. Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet d'une deuxième publication [13].

3.2.1 Présentation du problème

Considérons le système PCR (Panique-Contrôle-Réflexe), donné par

$$\dot{x} = \Phi(t, x, C_1), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad C_1 \geq 0, \quad (3.10)$$

où $x = (r, c, p, q)^T$, et $\Phi(t, x, C_1)$ est définie par :

$$\Phi(t, x, C_1) = \begin{pmatrix} \gamma(t)q(1-r) - (B_1 + B_2)r + f(r, c)rc + g(r, p)rp \\ B_1r + C_1p - C_2c - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi(t)c(r+c+p+q) \\ B_2r - C_1p + C_2c - g(r, p)rp - h(c, p)cp \\ -\gamma(t)q(1-r) \end{pmatrix}.$$

Nous allons construire un réseau à partir d'instances non identiques du système PCR. Rappelons que le paramètre C_1 d'évolution du comportement de panique vers le comportement de contrôle, induit une bifurcation en 0. Ainsi, lorsque $C_1 > 0$, la solution du système (3.10) converge vers l'équilibre trivial, alors que cette solution présente une persistance de panique lorsque $C_1 = 0$. Cette bifurcation a été analysée et interprétée dans le chapitre précédent.

Définition 3.2. *Un nœud couplé avec une instance du système (3.10) avec $C_1 = 0$ sera appelé nœud de type (1) ou nœud défavorable. Un nœud couplé avec une instance du système (3.10) avec $C_1 > 0$ sera appelé nœud de type (2) ou nœud favorable.*

Nous associerons le rouge aux nœuds de type (1), et le vert aux nœuds de type (2).

Remarque 3.2.1. La valeur du paramètre d'évolution C_1 doit être choisie à partir d'éléments de nature géographique, parmi lesquels figurent la nature de l'événement catastrophique étudié, ou la position des nœuds par rapport à la zone d'impact de la catastrophe. L'exemple d'un tremblement de terre au Japon est présenté dans [99]. Puisque la culture du risque sismique est bien implantée au Japon, la population est formée à réagir promptement lors d'un tel événement. Ainsi, le processus d'évolution du comportement de réflexe vers le comportement de contrôle domine les autres évolutions comportementales, ce qui implique une valeur relativement élevée du paramètre C_1 , même pour un nœud situé près de l'épicentre du séisme. En revanche, le risque de tsunami sur la côte méditerranéenne, étudié dans [16], présente une structure géographique hétérogène. Nous avons déjà expliqué que l'effet de surprise, dû au temps court d'arrivée de tels tsunamis sur le littoral, induit des réactions instinctives sur les zones correspondant au point d'impact de la catastrophe, qui sont en l'occurrence les plages du littoral concerné. Mais le paysage urbain singulier de certaines cités méditerranéennes, avec un centre dense, des ruelles étroites, et une élévation par rapport au niveau de la mer, peut présenter des éléments favorables de refuge pour les populations affectées. •

Étant donnés $n, m \in \mathbb{N}^*$, on considère ensuite un réseau de $n + m$ nœuds. Les n premiers nœuds sont notés x_i , $1 \leq i \leq n$, et nous supposons qu'ils sont de type (1), alors que les m nœuds suivants, notés y_j (C_1^j), $1 \leq j \leq m$, sont supposés de type (2), avec $C_1^j > 0$, $1 \leq j \leq m$. Le réseau est alors donné par le système

$$\dot{X} = \Psi(t, X, C) + L\tilde{X} + \mathcal{Q}(X), \quad (3.11)$$

où $X, \tilde{X} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$ et $C \in \mathbb{R}^{n+m}$ sont donnés par

$$\begin{cases} X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)^T \\ \tilde{X} = (\mathcal{H}x_1, \dots, \mathcal{H}x_n, \mathcal{H}y_1, \dots, \mathcal{H}y_m)^T \\ C = (0, \dots, 0, C_1^1, \dots, C_1^m), \end{cases}$$

et Ψ définit la dynamique interne de chaque nœud :

$$\Psi(t, X, C) = (\Phi(t, x_1, 0), \dots, \Phi(t, x_n, 0), \Phi(t, y_1, C_1^1), \dots, \Phi(t, y_m, C_1^m))^T.$$

Remarque 3.2.2. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent (voir remarque 2.1.1), la population totale d'un nœud du réseau coïncide avec la capacité maximale b_m d'individus en comportement du quotidien après la catastrophe :

$$b_{mi}(t) = r_i(t) + c_i(t) + p_i(t) + q_i(t) + b_i(t),$$

où b_i désigne le comportement du quotidien après la catastrophe. Le terme $-\varphi c_i(r_i + c_i + p_i + q_i)$ est obtenu par réduction du terme $-\varphi c_i(b_{mi} - b_i)$. La population d'un nœud n'est *a priori* pas constante, à moins que le nœud (i) soit isolé dans le réseau. La loi d'évolution du comportement du quotidien après la catastrophe est alors donnée par l'équation

$$\dot{b}_i = +\varphi c_i(r_i + c_i + p_i + q_i),$$

qui est gouvernée par les 4 premières équations de l'état du nœud considéré. Enfin, la loi d'évolution de la densité totale de population du nœud (i) est obtenue en sommant les équations de ses 5 composantes, et dépend alors uniquement des couplages :

$$\dot{b}_{mi}(t) = (L\tilde{X} + \mathcal{Q}(X))_i.$$

•

La matrice \mathcal{H} détermine quelles composantes sont couplées :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Le choix de la matrice \mathcal{H} signifie que seuls les individus ayant adopté un comportement de catastrophe (panique, contrôle ou réflexe) sont concernés par les couplages linéaires, alors que les individus en comportement du quotidien ne le sont pas.

La matrice L contient les termes de couplages linéaires, et peut être écrite par blocs :

$$L = \begin{pmatrix} L^1 & L^2 \\ L^3 & L^4 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où $L^1 = (L^1_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$, correspond aux couplages parmi les nœuds de type (1), $L^2 = (L^2_{i,j})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, et $L^3 = (L^3_{i,j})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, aux couplages entre les nœuds de type (1) et les nœuds de type (2), et $L^4 = (L^4_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq m$, aux couplages parmi les nœuds de type (2) (voir sur la figure 3.2).

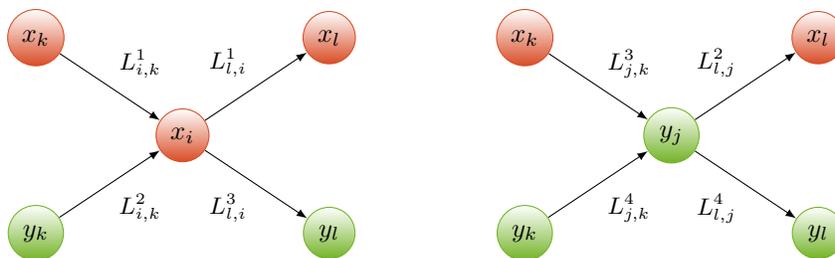


FIGURE 3.2 – Notations pour les couplages linéaires au sein d'un réseau PCR. Les nœuds de type (1) sont colorés en rouge, et les nœuds de type (2) en vert.

Puis, les couplages quadratiques sont contenus dans la fonction \mathcal{Q} donnée par

$$\mathcal{Q}(X) = (\mathcal{Q}^1(X), \mathcal{Q}^2(X)),$$

et définie par les coefficients de la matrice $Q(X)$, elle-même déterminée par (3.4) et (3.6). La fonction κ est donnée par

$$\kappa(x, \tilde{x}) = (x_1(\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3), x_2(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3), x_3(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2), 0)^T, \quad (3.14)$$

pour tous $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^4$. Cette expression modélise une situation où les individus situés sur le nœud i interagissent avec les individus situés sur le nœud j et ayant adopté un autre comportement, exception faite du comportement du quotidien.

Remarque 3.2.3. Nous supposons que les déplacements d'individus le long des connexions du réseau sont de deux types. Le premier type de déplacements résulte d'un mouvement d'ensemble de la foule concernée par l'événement catastrophique étudié, et se traduit par un couplage linéaire. Au cours de ces déplacements, nous supposons que les évolutions comportementales sont gelées. Le second type de déplacements intervient à la suite d'une interaction entre des individus situés sur des nœuds différents. La distance séparant ces nœuds ne permet pas une interaction physique, mais d'autres interactions peuvent survenir, comme par exemple une communication téléphonique, ou plus simplement un échange visuel par gestes, dans le cas où les nœuds sont proches. Puisque ces déplacements résultent d'une interaction, nous avons choisi de les modéliser par des couplages quadratiques. •

Exemple 3.2.1. Considérons le cas d'un tremblement de terre survenant dans une zone faiblement peuplée. Notons (r_1, c_1, p_1) et (r_2, c_2, p_2) les densités de réflexe, contrôle et panique sur deux nœuds 1 et 2 respectivement. Nous supposons que le nœud 1 est localisé près de l'épicentre du séisme, et peut présenter une forte densité d'individus en panique en l'absence de couplage, alors que le nœud 2 correspond à une zone de refuge, qui favorise le retour au comportement du quotidien. Les équations des densités de panique \dot{p}_1, \dot{p}_2 sur les 2 nœuds, et de la densité de contrôle \dot{c}_2 sur le nœud 2 s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = f_1(r_1, c_1, p_1) - \varepsilon_L p_1 - \varepsilon_Q p_1 c_2 \\ \dot{p}_2 = f_2(r_2, c_2, p_2) + \varepsilon_L p_1 \\ \dot{c}_2 = f_3(r_2, c_2, p_2) + \varepsilon_Q p_1 c_2, \end{cases}$$

où f_1, f_2, f_3 définissent la dynamique interne de chaque nœud (voir (3.10)). Le terme de couplage linéaire $\pm \varepsilon_L p_1$ modélise les déplacements d'individus en comportement de panique du nœud 1 vers le nœud 2. Au cours de ce déplacement, nous supposons que les individus ne changent pas de comportement. Au contraire, le couplage quadratique $\pm \varepsilon_Q p_1 c_2$ est le résultat d'une interaction, qui peut par exemple correspondre à des communications des services de secours, et qui aboutit à un déplacement d'individus du nœud 1 vers le nœud 2 ; ce déplacement s'accompagne cette fois d'un changement de comportement, puisque les individus concernés quittent le nœud 1 en panique, mais arrivent au nœud 2 en contrôle. \triangleleft

Le réseau PCR (3.11) peut être écrit sous une forme développée :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \Phi(t, x_i, 0) - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 + \sum_{l=1}^m L_{l,i}^3 \right) \mathcal{H}x_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{i,k}^1 \mathcal{H}x_k + \sum_{l=1}^m L_{i,l}^2 \mathcal{H}y_l + \mathcal{Q}_i^1(X), \\ \dot{y}_j = \Phi(t, y_j, C_1^j) - \left(\sum_{k=1}^n L_{k,j}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{l,j}^4 \right) \mathcal{H}y_j + \sum_{k=1}^n L_{j,k}^3 \mathcal{H}x_k + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{j,l}^4 \mathcal{H}y_l + \mathcal{Q}_j^2(X), \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}^4, 1 \leq i \leq n$ et $y_j \in \mathbb{R}^4, 1 \leq j \leq m$. Afin de distinguer les composantes des nœuds de types (1) et (2), nous noterons

$$\begin{aligned} x_i &= \left(r_i^{(1)}, c_i^{(1)}, p_i^{(1)}, q_i^{(1)} \right)^T, \quad 1 \leq i \leq n, \\ y_j &= \left(r_j^{(2)}, c_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)} \right)^T, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.4. Les réseaux PCR que nous étudions sont inspirés de configurations géographiques [89], qui permettent de déterminer les valeurs des paramètres sur chaque nœud, en fonction de leur localisation sur la zone affectée, ainsi que les forces de couplage, en fonction des dimensions physiques des connexions entre les nœuds. La topographie est donc implicitement prise en compte dans les paramètres du réseau. Nous supposons par exemple que la force de couplage est inversement proportionnelle à la distance séparant 2 nœuds. \bullet

Proposition 3.1. *Pour toute condition initiale $X_0 \in (\mathbb{R}^+)^{4(n+m)}$, il existe $\tau > 0$ tel que le problème de Cauchy donné par (3.11) et $X(0) = X_0$ possède une unique solution $X(t, X_0)$ définie sur $[0, \tau]$, dont les composantes sont positives.*

Démonstration. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution locale. Pour $X_0 \in (\mathbb{R}^+)^{4(n+m)}$, notons $X(t, X_0)$ la solution issue de X_0 , définie sur $[0, \tau]$. Pour montrer la positivité des composantes de $X(t, X_0)$, nous introduisons un opérateur modifié, comme nous l'avons

fait dans la démonstration de la proposition 2.1. Nous posons donc pour chaque $\hat{u} = (\hat{r}, \hat{c}, \hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(\hat{u}) &= +\gamma\hat{q}(1 - \hat{r}) - (B_1 + B_2)\hat{r} + f(\hat{r}, \hat{c})\hat{r}\hat{c} + g(\hat{r}, \hat{p})\hat{r}\hat{p} + s_1|\hat{c}| + s_2|\hat{p}| \\ \hat{\Phi}_2(\hat{u}) &= B_1\hat{r} - C_2\hat{c} + C_1|\hat{p}| - f(\hat{r}, \hat{c})\hat{r}\hat{c} + h(\hat{c}, \hat{p})\hat{c}\hat{p} - \varphi\hat{c}(\hat{r} + \hat{c} + \hat{p} + q) - s_1\hat{c} \\ \hat{\Phi}_3(\hat{u}) &= B_2\hat{r} + C_2\hat{c} - C_1\hat{p} - g(\hat{r}, \hat{p})\hat{r}\hat{p} - h(\hat{c}, \hat{p})\hat{c}\hat{p} - s_2\hat{p} \\ \hat{\Phi}_4(\hat{u}) &= -\gamma\hat{q}(1 - \hat{r}),\end{aligned}$$

et considérons le problème modifié

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{\Phi}(t, \hat{x}_i, 0) - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 + \sum_{l=1}^m L_{l,i}^3 \right) \mathcal{H}\hat{x}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{i,k}^1 \mathcal{H}|\hat{x}_k| + \sum_{l=1}^m L_{i,l}^2 \mathcal{H}|\hat{y}_l| + \hat{Q}_i^1(\hat{X}), \\ \dot{\hat{y}}_j = \hat{\Phi}(t, \hat{y}_j, C_1^j) - \left(\sum_{k=1}^n L_{k,j}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{l,j}^4 \right) \mathcal{H}\hat{y}_j + \sum_{k=1}^n L_{j,k}^3 \mathcal{H}|\hat{x}_k| + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{j,l}^4 \mathcal{H}|\hat{y}_l| + \hat{Q}_j^2(\hat{X}), \end{cases}$$

où \hat{X} est défini par

$$\hat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m),$$

et où l'on a noté $|\hat{x}| = (|\hat{r}|, |\hat{c}|, |\hat{p}|, |\hat{q}|)$. Enfin, (\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) est défini en modifiant les expressions (3.4) et (3.14). Plus précisément, on pose

$$\begin{aligned}(\hat{Q}(t, X))_{j,i} &= -Q_{j,i}(t)\kappa(x_i, x_j), \quad (\hat{Q}(t, X))_{i,j} = +Q_{j,i}(t)\hat{\kappa}(x_i, x_j), \\ \hat{\kappa}(x, \tilde{x}) &= (x_1(|\tilde{x}_2| + |\tilde{x}_3|), x_2(|\tilde{x}_1| + |\tilde{x}_3|), x_3(|\tilde{x}_1| + |\tilde{x}_2|), 0)^T.\end{aligned}$$

Autrement dit, le problème modifié est obtenu en conservant les flux sortants et en composant les flux entrants avec la fonction valeur absolue. On montre ensuite que les composantes $\hat{q}_i^{(1)}$, $1 \leq i \leq n$, et $\hat{q}_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq m$, sont positives, en intégrant une à une les équations donnant leur évolution, comme dans la démonstration de la proposition 2.1, puisque ces composantes ne sont pas couplées. On montre enfin par la même méthode que dans la proposition 2.1 que les autres composantes du problème modifié sont positives, et on conclut de même. \square

En l'absence de couplage, les nœuds défavorables x_i , $1 \leq i \leq n$, présentent une persistance de panique, tandis que les nœuds favorables y_j , $1 \leq j \leq m$, présentent un retour au comportement du quotidien.

Considérons maintenant la quantité totale de population \mathcal{T} impliquée dans l'événement catastrophique étudié, définie par :

$$\mathcal{T}(X) = \sum_{i=1}^n \left(r_i^{(1)} + c_i^{(1)} + p_i^{(1)} + q_i^{(1)} \right) + \sum_{j=1}^m \left(r_j^{(2)} + c_j^{(2)} + p_j^{(2)} + q_j^{(2)} \right). \quad (3.16)$$

Proposition 3.2. *La fonction \mathcal{T} est positive et décroissante sur $[0, \tau[$ le long de la solution $X(t, X_0)$ du réseau PCR (3.11) issue de $X_0 \in (\mathbb{R}^+)^{4(n+m)}$. Si la solution est globale i.e. $\tau = +\infty$, et si \mathcal{T} converge vers 0, alors le réseau (3.2) synchronise vers l'équilibre trivial.*

Démonstration. La somme des $4(n+m)$ équations dans le système (3.15) annule les termes de couplage, et aboutit à

$$\dot{\mathcal{T}}(X(t, X_0)) = -\varphi(t) \left[\sum_{i=1}^n c_i^{(1)}(t)(r_i^{(1)} + c_i^{(1)} + p_i^{(1)} + q_i^{(1)})(t) + \sum_{j=1}^m c_j^{(2)}(t)(r_j^{(2)} + c_j^{(2)} + p_j^{(2)} + q_j^{(2)})(t) \right],$$

d'où $\dot{\mathcal{T}} \leq 0$. Puis, la positivité des composantes, garantie par la proposition 3.1, implique que

$$\begin{aligned} 0 \leq r_i^{(1)}(t) \leq \mathcal{T}(t), \quad 0 \leq c_i^{(1)}(t) \leq \mathcal{T}(t), \\ 0 \leq p_i^{(1)}(t) \leq \mathcal{T}(t), \quad 0 \leq q_i^{(1)}(t) \leq \mathcal{T}(t), \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (3.17)$$

et de même pour les composantes $r_j^{(2)}$, $c_j^{(2)}$, $p_j^{(2)}$ et $q_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq m$. Par conséquent, si \mathcal{T} converge vers 0, alors nécessairement toutes les composantes des nœuds de types (1) et (2) convergent vers 0, c'est-à-dire que le réseau PCR synchronise vers l'équilibre trivial. \square

La population totale \mathcal{T} est également susceptible de ne pas converger vers 0, mais vers une limite strictement positive. Dans ce cas, le réseau est lui-même susceptible de présenter des persistances de panique sur certains nœuds. La réponse complète à cette question sera apportée à la fin de cette section, comme conséquence du Théorème 3.1. Considérons maintenant la fonction d'énergie

$$V = \frac{1}{2} \mathcal{T}^2. \quad (3.18)$$

Cette fonction est définie positive, et admet une dérivée orbitale négative d'après la proposition 3.2. Moyennant quoi, nous pouvons construire une région invariante pour le flot induit par le problème réseau (3.11).

Proposition 3.3. *L'ensemble compact $\mathcal{K} = \{X \in (\mathbb{R}^+)^{4(n+m)}, V(X) \leq 1\}$ est positivement invariant pour le flot induit par le problème réseau (3.11).*

Démonstration. Soit $X_0 \in \mathcal{K}$. Puisque $\dot{V}(X(t, X_0)) \leq 0$, alors la fonction

$$t \mapsto V(X(t, X_0))$$

est décroissante. Par conséquent, $X(t, X_0)$ reste dans \mathcal{K} pour tout $t \geq 0$. \square

Les solutions du problème réseau (3.11) issues de $X_0 \in \mathcal{K}$ sont donc globales. Dans la suite de cette section, nous allons étudier la dynamique de ces solutions.

Définition 3.3. *Nous dirons que le réseau (3.11) présente un retour global au comportement du quotidien si*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t, X_0)\|_{\mathbb{R}^{4(n+m)}} = 0,$$

pour tout $X_0 \in \mathcal{K}$. Nous dirons qu'un nœud défavorable (x) est évacué vers un nœud favorable (y) par une chaîne d'arêtes linéaires, s'il existe un chemin orienté dans le graphe \mathcal{G} sous-jacent, composé d'arêtes linéaires orientées, qui connecte x à y .

Deux nœuds qui convergent vers l'équilibre trivial $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^4$ pour toute condition initiale synchronisent nécessairement au sens de la définition 3.1, tandis que deux nœuds présentant des persistances de panique sont susceptibles de ne pas synchroniser. Le retour global du réseau PCR au comportement du quotidien, qui représente la situation la plus favorable, est une condition suffisante de synchronisation du réseau, puisque la solution converge vers l'équilibre trivial $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$. Lorsqu'un nœud défavorable (x) est évacué vers un nœud favorable (y), plusieurs chemins d'évacuation peuvent exister entre (x) et (y). Nous appellerons *longueur* d'un tel chemin le nombre d'arêtes qui le composent (voir sur la figure 3.6).

3.2.2 Réseaux de deux nœuds

Afin de dégager les tendances principales de la dynamique des réseaux PCR, nous allons commencer par étudier des réseaux de 2 nœuds, formés à partir d'un nœud défavorable (x) et d'un nœud favorable (y). Nous envisageons 4 situations de couplage, présentées sur la figure 3.3.



FIGURE 3.3 – Réseaux PCR de 2 nœuds. (a) Couplage linéaire d'un nœud défavorable (x) vers un nœud favorable (y). (b) Couplage linéaire d'un nœud favorable (y) vers un nœud défavorable (x). (c) Couplage quadratique d'un nœud défavorable (x) vers un nœud favorable (y). (d) Superposition d'un couplage quadratique et d'un couplage linéaire.

Considérons d'abord un réseau PCR de 2 nœuds, formé à partir d'un nœud défavorable (x) connecté par un couplage linéaire à un nœud favorable (y), comme indiqué sur la figure 3.3(a). Les équations d'un tel réseau s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(t, x, 0) - \eta \mathcal{H}x \\ \dot{y} = \Phi(t, y, C_1) + \eta \mathcal{H}x, \end{cases} \quad (3.19)$$

avec $x = (r_1, c_1, p_1, q_1)^T$, $y = (r_2, c_2, p_2, q_2)^T$, $C_1 > 0$, \mathcal{H} étant définie par (3.12), et $\eta > 0$ correspondant à la force de couplage.

Proposition 3.4. *Le système (3.19) admet un unique équilibre $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^8$. De plus, cet équilibre est localement stable.*

Démonstration. Nous commençons par déterminer les points d'équilibre du nœud (x). Pour cela, nous posons

$$\begin{cases} \gamma(t)q_1(1 - r_1) - (B_1 + B_2)r_1 + f(r_1, c_1)r_1c_1 + g(r_1, p_1)r_1p_1 - \eta r_1 = 0 \\ B_1r_1 - C_2c_1 - f(r_1, c_1)r_1c_1 + h(c_1, p_1)c_1p_1 - \varphi(t)c_1(r_1 + c_1 + p_1 + q_1) - \eta c_1 = 0 \\ B_2r_1 + C_2c_1 - g(r_1, p_1)r_1p_1 - h(c_1, p_1)c_1p_1 - \eta p_1 = 0 \\ -\gamma(t)q_1(1 - r_1) = 0. \end{cases}$$

La somme de ces 4 équations donne

$$-\varphi(t)c_1(r_1 + c_1 + p_1 + q_1) - \eta(r_1 + c_1 + p_1) = 0,$$

d'où $r_1 = c_1 = p_1 = q_1 = 0$, puisque les composantes de la solution sont positives. On écrit ensuite les 4 équations du nœud (x) sous la forme

$$\dot{x} = Mx + N(t)x + \epsilon(t, x),$$

où M et $N(t)$ sont 2 matrices de taille 4 définies par

$$M = \begin{pmatrix} -B_1 - B_2 - \eta & 0 & 0 & 1 \\ B_1 & -C_2 - \eta & 0 & 0 \\ B_2 & C_2 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma(t) - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma(t) + 1 \end{pmatrix},$$

et ϵ contient les termes non linéaires :

$$\epsilon(t, x) = \begin{pmatrix} -\gamma(t)q_1r_1 + f(r_1, c_1)r_1c_1 + g(r_1, p_1)r_1p_1 \\ -f(r_1, c_1)r_1c_1 + h(c_1, p_1)c_1p_1 - \varphi(t)c_1(r_1 + c_1 + p_1 + q_1) \\ -g(r_1, p_1)r_1p_1 - h(c_1, p_1)c_1p_1 \\ \gamma(t)q_1r_1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de M sont

$$-B_1 - B_2 - \eta, \quad -C_2 - \eta, \quad -\eta, \quad -1.$$

Elles sont donc toutes strictement négatives car $\eta > 0$. Puisque les fonctions γ et φ sont bornées, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|N(t)\|_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = 0, \quad \lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^4} \rightarrow 0} \frac{\|\epsilon(t, x)\|_{\mathbb{R}^4}}{\|x\|_{\mathbb{R}^4}} = 0, \quad \text{uniformément en } t.$$

La régularité des fonctions γ , φ , f , g et h implique celle de ϵ , qui est donc localement lipschitzienne en son second argument x . Le Théorème de Poincaré-Lyapunov 1.15 s'applique et garantit que le point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable. Nous examinons ensuite les points d'équilibre du nœud (y) , qui sont donnés par

$$\begin{cases} \gamma(t)q_2(1 - r_2) - (B_1 + B_2)r_2 + f(r_2, c_2)r_2c_2 + g(r_2, p_2)r_2p_2 + \eta r_1 = 0 \\ B_1r_2 + C_1p_2 - C_2c_2 - f(r_2, c_2)r_2c_2 + h(c_2, p_2)c_2p_2 - \varphi(t)c_2(r_2 + c_2 + p_2 + q_2) + \eta c_1 = 0 \\ B_2r_2 - C_1p_2 + C_2c_2 - g(r_2, p_2)r_2p_2 - h(c_2, p_2)c_2p_2 + \eta p_1 = 0 \\ -\gamma(t)q_2(1 - r_2) = 0. \end{cases}$$

Puisque $(r_1, c_1, p_1, q_1) = (0, 0, 0, 0)$ est l'unique point d'équilibre du nœud (x) , on obtient les équations correspondant aux points d'équilibre du système PCR (3.10) avec $C_1 > 0$. Par conséquent, on a $(r_2, c_2, p_2, q_2) = (0, 0, 0, 0)$. L'unique point d'équilibre du réseau (3.19) est donc $0 \in \mathbb{R}^8$. Sa stabilité locale découle de la stabilité locale du point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ du nœud (x) , et de celle du point d'équilibre $(0, 0, 0, 0)$ du nœud (y) prouvée dans le chapitre précédent (voir la proposition 2.3). \square

Remarque 3.2.5. Cette première proposition signifie qu'une évacuation des individus en comportement de panique d'un nœud défavorable, vers un nœud favorable, suffit à entraîner le réseau complet vers un retour global au comportement du quotidien. Autrement dit, le couplage linéaire agit sur la bifurcation du système PCR (3.10), en faisant disparaître l'équilibre de persistance de panique. Nous verrons plus loin, comme conséquence du cas général, que l'équilibre trivial est en fait globalement asymptotiquement stable. Ainsi, les deux nœuds du réseau (3.19) synchronisent, et le nœud favorable impose au nœud défavorable sa dynamique interne. \bullet

D'après les résultats généraux de la théorie des équations différentielles [23], toute solution $x(t)$ de la première équation du système (3.19) vérifie la propriété

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|_{\mathbb{R}^4}}{t} \leq \max_{1 \leq k \leq 4} (\lambda_k),$$

où les coefficients λ_k , $1 \leq k \leq 4$, désignent les valeurs propres de la matrice M . La démonstration de la proposition précédente montre que si $\eta < 1$, alors

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|_{\mathbb{R}^4}}{t} \leq -\eta,$$

d'où une accélération exponentielle de la convergence du nœud (x) vers l'équilibre trivial, sous l'action d'une augmentation de la force de couplage η , comme illustré sur la figure 3.4.

Nous poursuivons en étudiant la situation inverse, correspondant à un réseau de 2 nœuds formé par un nœud favorable (y) connecté à un nœud défavorable (x) par un couplage linéaire, comme indiqué sur la figure 3.3(b). Les équations d'un tel réseau sont données par

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(t, x, 0) + \eta \mathcal{H}y \\ \dot{y} = \Phi(t, y, C_1) - \eta \mathcal{H}x. \end{cases} \quad (3.20)$$

Proposition 3.5. *Le système (3.20) présente une persistance de panique sur le nœud (x) .*

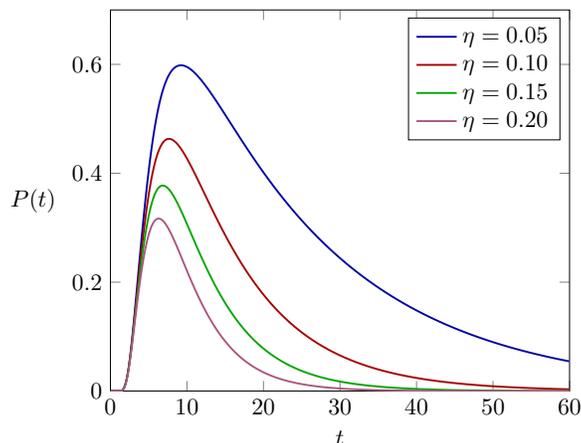


FIGURE 3.4 – Une augmentation de la force de couplage η dans le système (3.19) accélère la convergence de la quantité totale $P(t)$ d'individus en comportement de panique vers l'équilibre trivial.

Démonstration. On commence par la recherche des points d'équilibre du nœud (y), qui est semblable à celle des points d'équilibre du nœud (x) dans la démonstration de la proposition précédente. On obtient un unique point d'équilibre localement stable $(r_2, c_2, p_2, q_2) = (0, 0, 0, 0)$. Il s'ensuit que les points d'équilibre du nœud (x) correspondent aux équilibres du système PCR (3.10) avec $C_1 = 0$, d'où une persistance de panique sur le nœud (x). \square

Remarque 3.2.6. Cette seconde proposition suggère qu'un déplacement d'individus d'un nœud favorable en direction d'un nœud défavorable doit être évitée, au risque d'aggraver le niveau de panique sur le nœud exposé. \bullet

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un couplage quadratique connectant un nœud défavorable (x) à un nœud favorable (y), comme illustré sur la figure 3.3(c). Un tel réseau est donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(t, x, 0) - \xi\kappa(x, y) \\ \dot{y} = \Phi(t, y, C_1) + \xi\kappa(x, y), \end{cases} \quad (3.21)$$

où la fonction $\kappa(x, y)$ est définie par (3.14).

Proposition 3.6. *Le système (3.21) présente une persistance de panique sur le nœud (x).*

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition précédente, on montre que $(0, 0, 0, 0)$ est l'unique point d'équilibre pour le nœud (y). On obtient alors pour le nœud (x) les équations d'équilibre du système PCR (3.10) avec $C_1 = 0$, d'où une persistance de panique sur le nœud (x). \square

La proposition (3.6) montre qu'un couplage quadratique d'un nœud défavorable vers un nœud favorable ne suffit pas à faire disparaître l'équilibre de persistance de panique sur le nœud défavorable. Toutefois, nous allons montrer que la superposition d'un couplage linéaire dirigé du nœud favorable vers le nœud défavorable, avec un couplage quadratique orienté dans la direction inverse, suffit à inhiber la persistance de panique sur le nœud défavorable. Nous considérons donc le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(t, x, 0) + \eta\mathcal{H}y - \xi\kappa(x, y) \\ \dot{y} = \Phi(t, y, C_1) - \eta\mathcal{H}y + \xi\kappa(x, y). \end{cases} \quad (3.22)$$

Proposition 3.7. *La solution du système (3.22) issue de la condition initiale*

$$X_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$$

présente une persistance de panique sur le nœud (x) , qui diminue si la force de couplage quadratique ξ augmente, et que la force de couplage linéaire η est suffisamment petite.

Démonstration. La démonstration repose sur un développement en série de Taylor de la solution X_ξ du système (3.22) par rapport au paramètre ξ . On écrit donc :

$$X_\xi = \tilde{X}_0 + \xi X_1 + \xi^2 X_2 + \dots,$$

où le premier terme \tilde{X}_0 correspond à la solution du système (3.22) obtenue pour $\xi = 0$, et où les points indiquent des termes d'ordre supérieur à 2 en ξ . Les calculs sont semblables aux calculs effectués dans la démonstration de la proposition 2.6. On obtient alors

$$\left(r_1^{(1)}\right)^{(4)}(0) = -3(B_1 + B_2), \quad \left(c_1^{(1)}\right)^{(4)}(0) = -3B_1, \quad \left(p_1^{(1)}\right)^{(4)}(0) = -3B_2,$$

alors que les dérivées d'ordre inférieur à 4, évaluées en 0, sont nulles. Il s'ensuit que les composantes $r_1^{(1)}$, $c_1^{(1)}$ et $p_1^{(1)}$ du nœud (x) sont négatives sur un intervalle $[0, \tau[$, avec $\tau > 0$. On montre finalement, comme dans la preuve de la proposition 2.6, que $\tau = +\infty$, ce qui achève la démonstration. \square

Finalement, la figure 3.5 montre l'effet du couplage dans chacune des trois situations étudiées.

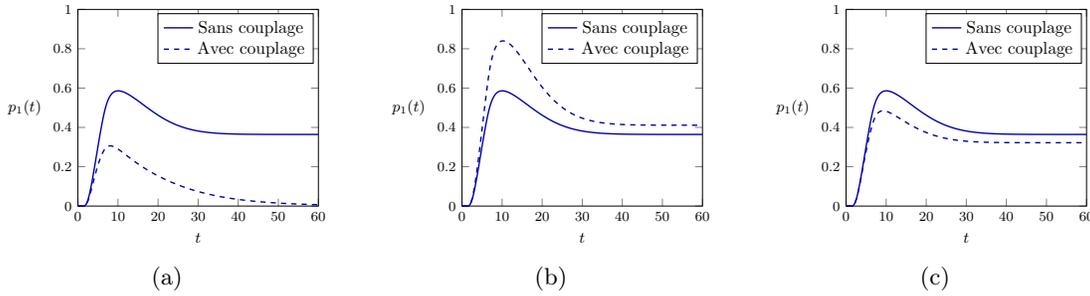


FIGURE 3.5 – Densité de panique $p_1(t)$ du nœud défavorable (x) dans un réseau PCR de 2 nœuds. (a) Couplage linéaire du nœud défavorable (x) vers le nœud favorable (y) : le couplage fait disparaître la persistance de panique sur le nœud défavorable. (b) Couplage linéaire du nœud favorable (y) vers le nœud défavorable (x) : le couplage exacerbe la persistance de panique sur le nœud défavorable (x) . (c) Couplage quadratique du nœud défavorable (x) vers le nœud favorable (y) : la persistance de panique subsiste, mais est atténuée.

3.2.3 Condition de synchronisation

Dans cette section, nous présentons le résultat principal de ce chapitre, qui établit une condition nécessaire et suffisante de synchronisation dans un réseau PCR. Nous analyserons dans la prochaine section la stabilité globale de l'équilibre trivial. Dans ce but, nous considérons, pour chaque $k \geq 1$, l'ensemble \mathcal{P}_k des nœuds défavorables qui sont connectés à au moins un nœud favorable, par un chemin orienté de longueur k , mais pas par un chemin plus court (voir sur la figure 3.6). Ainsi, on a $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_l = \emptyset$ si $k \neq l$. Nous rappelons qu'un nœud défavorable est susceptible d'être évacué par de multiples chemins, et que la longueur d'un tel chemin est égale au nombre d'arêtes qui le constituent. Il peut aussi se produire qu'un nœud défavorable soit *isolé*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun chemin d'évacuation de ce nœud défavorable vers un nœud favorable.

Théorème 3.1. *Le réseau PCR (3.15) admet un unique point d'équilibre, qui est l'équilibre trivial $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$, si et seulement si chaque nœud défavorable (x_i) , $1 \leq i \leq n$, est évacué par une chaîne orientée, constituée d'arêtes linéaires, vers au moins un nœud favorable. Dans ce cas, l'équilibre trivial est localement stable.*

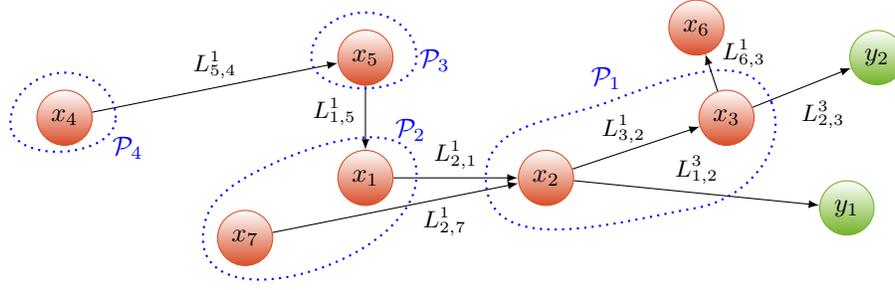


FIGURE 3.6 – Réseau PCR, avec des sous-ensembles de nœuds défavorables correspondant aux chemins d'évacuation possibles vers des nœuds favorables. Les nœuds (x_2) et (x_3) appartiennent au sous-ensemble \mathcal{P}_1 , puisqu'ils sont évacués vers un nœud favorable par une chaîne orientée de longueur 1. Le nœud défavorable (x_6) est isolé, puisqu'il n'appartient à aucun sous-ensemble \mathcal{P}_k .

Démonstration. La démonstration est divisée en trois étapes. Premièrement, on cherche les points d'équilibre du système (3.15), et on montre que les seules composantes qui sont susceptibles de ne pas être nulles correspondent aux composantes de panique des nœuds défavorables. Ainsi, tous les termes de couplage quadratique disparaissent dans les équations d'équilibre. Dans la seconde étape, on examine si les nœuds défavorables sont évacués vers un nœud favorable par une chaîne orientée composée d'arêtes linéaires, à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Enfin, on considère une fonction de Lyapunov, afin d'analyser la stabilité locale de l'équilibre trivial.

Première étape. Pour déterminer les points d'équilibre du réseau, on pose les équations :

$$\begin{cases} \Phi(t, x_i, 0) - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 + \sum_{l=1}^m L_{l,i}^3 \right) \mathcal{H}x_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{i,k}^1 \mathcal{H}x_k + \sum_{l=1}^m L_{i,l}^2 \mathcal{H}y_l + \mathcal{Q}_i^1(X) = 0 \\ \Phi(t, y_j, C_1^j) - \left(\sum_{k=1}^n L_{k,j}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{l,j}^4 \right) \mathcal{H}y_j + \sum_{k=1}^n L_{j,k}^3 \mathcal{H}x_k + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m L_{j,l}^4 \mathcal{H}y_l + \mathcal{Q}_j^2(X) = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

pour tout $t \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. La somme des $4(n+m)$ équations dans le système (3.23) donne

$$-\varphi(t) \left(\sum_{i=1}^n c_i^{(1)} (r_i^{(1)} + c_i^{(1)} + p_i^{(1)} + q_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^m c_j^{(2)} (r_j^{(2)} + c_j^{(2)} + p_j^{(2)} + q_j^{(2)}) \right) = 0.$$

Or $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$, et les composantes de la solution sont positives, donc on obtient :

$$c_i^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad c_j^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

On considère ensuite les équations des composantes de réflexe des nœuds défavorables :

$$B_1 r_i^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

et de même pour les composantes de réflexe des nœuds favorables :

$$B_1 r_j^{(2)} + C_1^j p_j^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

On obtient alors :

$$r_i^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad r_j^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

puisque $B_1 > 0$, et de la même façon :

$$p_j^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

puisque $C_1^j > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. De plus, nous rappelons que les composantes $q_i^{(1)}$, $1 \leq i \leq n$, et $q_j^{(2)}$, $1 \leq j \leq m$, ne sont pas couplées (voir (3.12)). Les équations d'équilibre correspondant à ces composantes donnent :

$$q_i^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad q_j^{(2)} = 0, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Deuxième étape. On examine si les nœuds défavorables sont évacués vers un nœud favorable par une chaîne orientée composée d'arêtes linéaires. Puisque l'on a $p_j^{(2)} = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on obtient pour les composantes de panique des nœuds défavorables :

$$-\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 + \sum_{l=1}^m L_{l,i}^3 \right) p_i^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{i,k}^1 p_k^{(1)} = 0, \quad (3.24)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. La somme de ces n équations donne :

$$\left(\sum_{l=1}^m L_{l,1}^3 \right) p_1^{(1)} + \left(\sum_{l=1}^m L_{l,2}^3 \right) p_2^{(1)} + \dots + \left(\sum_{l=1}^m L_{l,n}^3 \right) p_n^{(1)} = 0,$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\lambda_1 p_1^{(1)} + \lambda_2 p_2^{(1)} + \dots + \lambda_n p_n^{(1)} = 0,$$

où le coefficient

$$\lambda_i = \sum_{l=1}^m L_{l,i}^3, \quad 1 \leq i \leq n,$$

correspond aux connexions possibles du nœud défavorable (x_i) vers les nœuds favorables y_l , $1 \leq l \leq m$.

Premier cas. Supposons que $\mathcal{P}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors $\lambda_i > 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, ce qui signifie que tous les nœuds défavorables sont connectés à au moins un nœud favorable par une arête linéaire orientée. On obtient alors :

$$p_i^{(1)} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

ce qui garantit que $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$ est l'unique point d'équilibre du réseau PCR (3.15).

Deuxième cas. Supposons que $\mathcal{P}_1 = \emptyset$. Alors on a $\mathcal{P}_k = \emptyset$ pour tout $k \geq 1$, puisqu'un nœud défavorable qui est évacué par une chaîne de longueur k , est nécessairement connecté à un nœud défavorable qui est lui-même évacué par une chaîne de longueur $k - 1$. Ainsi, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et $L_{l,j}^3 = 0$ pour tout $l \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Les équations (3.24) deviennent alors :

$$-\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 \right) p_i^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{i,k}^1 p_k^{(1)} = 0, \quad (3.25)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ce qui constitue un système linéaire de rang au plus $n - 1$, et qui admet donc des solutions non triviales, d'où une infinité de points d'équilibre de la forme

$$\bar{X} = ((0, 0, \bar{p}_i, 0)_{1 \leq i \leq n}, (0, 0, 0, 0)_{1 \leq j \leq m}), \quad (3.26)$$

avec $\bar{p}_i > 0$ arbitraire, correspondant aux équilibres de persistance de panique.

Troisième cas. Supposons que $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$. On peut sans nuire à la généralité réordonner les indices et écrire :

$$\lambda_i = 0, \quad 1 \leq i \leq r_1, \quad \lambda_i > 0, \quad r_1 + 1 \leq i \leq n,$$

avec $1 \leq r_1 \leq n$, si bien que $\mathcal{P}_2 \subset \{x_1, \dots, x_{r_1}\}$ et $\mathcal{P}_1 = \{x_{r_1+1}, \dots, x_n\}$. On obtient alors :

$$\lambda_{r_1+1} p_{r_1+1}^{(1)} + \dots + \lambda_n p_n^{(1)} = 0,$$

ce qui mène à

$$p_i^{(1)} = 0, \quad \forall i \in \{r_1 + 1, \dots, n\}. \quad (3.27)$$

Les équations (3.24) deviennent

$$-\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{k,i}^1 \right) p_i^{(1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r_1} L_{i,k}^1 p_k^{(1)} = 0, \quad (3.28)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, r_1\}$. La somme de ces r_1 équations aboutit à

$$\left(\sum_{k=r_1+1}^n L_{k,1}^1 \right) p_1^{(1)} + \left(\sum_{k=r_1+1}^n L_{k,2}^1 \right) p_2^{(1)} + \dots + \left(\sum_{k=r_1+1}^n L_{k,r_1}^1 \right) p_{r_1}^{(1)} = 0,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\delta_1 p_1^{(1)} + \delta_2 p_2^{(1)} + \dots + \delta_{r_1} p_{r_1}^{(1)} = 0, \quad (3.29)$$

où le coefficient

$$\delta_i = \sum_{k=r_1+1}^n L_{k,i}^1, \quad 1 \leq i \leq r_1,$$

correspond aux connexions linéaires des nœuds défavorables $p_i^{(1)}$, $1 \leq i \leq r_1$ (qui ne sont pas évacués directement vers un nœud favorable), vers les nœuds défavorables $p_i^{(1)}$, $r_1 + 1 \leq i \leq n$, qui admettent une connexion directe vers au moins un nœud favorable. Comme précédemment, on distingue les trois cas suivants :

1. $\mathcal{P}_2 = \{x_1, \dots, x_{r_1}\}$,
2. $\mathcal{P}_2 = \emptyset$,
3. $\mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

On construit alors par récurrence une suite finie d'indices

$$1 \leq r_s < \dots < r_2 < r_1 < n,$$

telle que $\mathcal{P}_{s+1} \subset \{x_1, \dots, x_{r_s}\}$. Si $\bigcup_{k=1}^{s+1} \mathcal{P}_k = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors chaque nœud défavorable $p_i^{(1)}$ est évacué vers au moins un nœud favorable par une chaîne d'arêtes linéaires, et on a dans le même temps :

$$p_i^{(1)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

ce qui montre que le seul point d'équilibre du réseau correspond au retour global vers le comportement du quotidien.

Si au contraire $\bigcup_{k=1}^{s+1} \mathcal{P}_k \subsetneq \{x_1, \dots, x_n\}$, alors il existe au moins un nœud défavorable qui n'est pas évacué vers un nœud favorable par une chaîne orientée d'arêtes linéaires. L'ensemble de ces nœuds forme un *cluster* de nœuds défavorables, admettant des points d'équilibre de la forme

$$\bar{X} = ((0, 0, \bar{p}_i, 0)_{1 \leq i \leq r_s}, (0, 0, 0, 0)_{r_s+1 \leq i \leq n+m}), \quad (3.30)$$

avec $\bar{p}_i > 0$, $1 \leq i \leq r_s$.

Troisième étape. Pour finir, on analyse la stabilité locale de l'équilibre trivial $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$. Pour cela, on considère à nouveau la fonction d'énergie liée au potentiel démographique du réseau, donnée par

$$V = \frac{1}{2}\mathcal{T}^2, \quad (3.31)$$

où \mathcal{T} désigne la population totale impliquée dans l'événement catastrophique [voir (3.16)]. Plus précisément, V est semi définie positive, et admet une dérivée orbitale donnée par

$$\dot{V} = \mathcal{T}\dot{\mathcal{T}}. \quad (3.32)$$

Mais d'après la proposition (3.2), on a $\dot{\mathcal{T}} \leq 0$, donc \dot{V} est semi-définie négative, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 3.2.7. Le Théorème 3.1 met en évidence la nécessité d'évacuer les zones les plus exposées aux risques de catastrophe vers des zones de refuge. La topologie du réseau permet de connaître les chemins d'évacuation potentiels, ou de détecter leur absence. On peut contrôler le niveau de panique du réseau en choisissant d'ajouter certaines connexions en des lieux stratégiques. Les simulations numériques présentées dans la prochaine section illustreront ces éléments. \bullet

3.2.4 Stabilité globale du réseau

Nous poursuivons en étudiant la stabilité globale de l'équilibre trivial.

Théorème 3.2. *L'équilibre trivial d'un réseau PCR est globalement asymptotiquement stable si et seulement si chaque nœud défavorable (x_i), $1 \leq i \leq n$, est évacué par une chaîne orientée, constituée d'arêtes linéaires, vers au moins un nœud favorable.*

Démonstration. Supposons d'abord que l'équilibre trivial soit globalement asymptotiquement stable, et qu'au moins un nœud défavorable ne soit pas évacué. Alors, comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème précédent, le système (3.15) admet une infinité de points d'équilibre donnés par (3.30), qui sont arbitrairement proches de l'équilibre trivial. Or, l'équilibre trivial est supposé globalement asymptotiquement stable, donc il est nécessairement isolé dans son bassin d'attraction, ce qui mène à une contradiction.

Réciproquement, supposons que chaque nœud défavorable est évacué. Considérons le système auxiliaire, obtenu en substituant 1 à la place de $\gamma(t)$ et $\varphi(t)$ dans le système (3.11) :

$$\dot{Y} = \hat{\Phi}(t, Y, C) + L\tilde{Y} + \mathcal{Q}(Y), \quad (3.33)$$

où $Y, \tilde{Y} \in \mathbb{R}^{4(n+m)}$ et $C \in \mathbb{R}^{n+m}$ sont donnés par

$$\begin{cases} Y = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)^T \\ \tilde{Y} = (\mathcal{H}\hat{x}_1, \dots, \mathcal{H}\hat{x}_n, \mathcal{H}\hat{y}_1, \dots, \mathcal{H}\hat{y}_m)^T \\ C = (0, \dots, 0, C_1^1, \dots, C_1^m), \end{cases}$$

et où $\hat{\Phi}$ correspond à la dynamique modifiée, définie par

$$\hat{\Phi}(t, Y, C) = \left(\hat{\Phi}(t, \hat{x}_1, 0), \dots, \hat{\Phi}(t, \hat{x}_n, 0), \hat{\Phi}(t, \hat{y}_1, C_1^1), \dots, \hat{\Phi}(t, \hat{y}_m, C_1^m) \right)^T,$$

avec

$$\hat{\Phi}(t, \hat{x}, C_1) = \begin{pmatrix} \hat{q}(1 - \hat{r}) - (B_1 + B_2)\hat{r} + f(\hat{r}, \hat{c})\hat{r}\hat{c} + g(\hat{r}, \hat{p})\hat{r}\hat{p} \\ B_1\hat{r} + C_1\hat{p} - C_2\hat{c} - f(\hat{r}, \hat{c})\hat{r}\hat{c} + h(\hat{c}, \hat{p})\hat{c}\hat{p} - \hat{c}(\hat{r} + \hat{c} + \hat{p} + \hat{q}) \\ B_2\hat{r} - C_1\hat{p} + C_2\hat{c} - g(\hat{r}, \hat{p})\hat{r}\hat{p} - h(\hat{c}, \hat{p})\hat{c}\hat{p} \\ -\hat{q}(1 - \hat{r}) \end{pmatrix},$$

où $\hat{x} = (\hat{r}, \hat{c}, \hat{p}, \hat{q})$, le reste du système n'étant pas modifié, en particulier les termes de couplage. Soit alors V la fonction de Lyapunov définie par (3.18). On vérifie directement que l'ensemble compact \mathcal{K} introduit dans la proposition 3.3 est également positivement invariant pour le flot induit par le système modifié (3.33). On définit alors

$$E = \{Y \in \mathcal{K} ; \dot{V}(Y) = 0\}.$$

On a $Y \in E$ si et seulement si $\hat{c}_i^{(1)} = \hat{c}_j^{(2)} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. Le principe d'invariance de La Salle 1.17 garantit que les orbites du système (3.33) convergent vers le plus grand ensemble invariant M contenu dans E .

Il reste à montrer que M est réduit à l'équilibre trivial. Soit donc $Y(t, Y_0)$ une orbite du système (3.33) issue d'une condition initiale $Y_0 \in M$ à $t = 0$. Puisque $M \subset E$, on a

$$\hat{c}_i^{(1)}(t) = \hat{c}_j^{(2)}(t) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout t . Les équations du système (3.33) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c}}_i^{(1)} &= B_1 \hat{r}_i^{(1)}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \dot{\hat{c}}_j^{(2)} &= B_1 \hat{r}_j^{(2)} + C_1 \hat{p}_j^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

On a nécessairement $\hat{r}_i^{(1)}(t) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \geq 0$ et $\hat{r}_j^{(2)}(t) = \hat{p}_j^{(2)}(t) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $t \geq 0$. De la même façon, les équations pour les composantes de reflexe \hat{r} deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_i^{(1)} &= \hat{q}_i^{(1)}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \dot{\hat{r}}_j^{(2)} &= \hat{q}_j^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\hat{q}_i^{(1)}(t) = 0$ et $\hat{q}_j^{(2)}(t) = 0$ pour tous i, j, t . Soit ensuite $\hat{x}_i \in \mathcal{P}_1$ un nœud défavorable. Par hypothèse, il existe au moins un nœud favorable \hat{y}_j tel que \hat{x}_i est connecté \hat{y}_j . L'équation de la composante de panique du nœud \hat{y}_j s'écrit donc :

$$\dot{\hat{p}}_j^{(2)} = \sum_{k=1}^n L_{j,k}^3 \hat{p}_k^{(1)} \geq L_{j,i}^3 \hat{p}_i^{(1)},$$

d'où $\hat{p}_i^{(1)}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, puisque $L_{j,i}^3 > 0$. De même, on a $\hat{p}_i^{(1)}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, car tous les nœuds défavorables sont évacués par hypothèse. Nous avons donc montré que $Y(t, Y_0)$ converge vers l'équilibre trivial, pour toute condition initiale $Y_0 \in M$.

Pour terminer la démonstration, considérons une orbite $X(t, X_0)$ du système non modifié (3.11), issue de $X_0 \in \mathcal{K}$ à $t = 0$. D'après la proposition 3.3, on a $X(t, X_0) \in \mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$. En outre, d'après la propriété (2.9), il existe $t_1 > 0$ tel que $\gamma(t) = \varphi(t) = 1$ pour tout $t \geq t_1$, ce qui implique que

$$X(t, X_0) = Y(t, X_1), \quad \forall t \geq t_1,$$

où $X_1 = X(t_1, X_0)$. Le raisonnement précédent montre que $Y(t, X_1)$ converge vers l'équilibre trivial, donc il en est de même pour $X(t, X_0)$. La preuve est complète. \square

3.2.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques de réseaux PCR, afin d'illustrer les résultats théoriques établis précédemment.

TABLEAU 3.1 – Valeurs des paramètres pour les simulations numériques des trois configurations présentées sur la figure 3.7.

Paramètre	B_1	B_2	C_1	C_2	α_i	δ_i	μ_i	η_0
Valeur	0.5	0.5	0.3 ou 0	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

Influence de la topologie

Considérons d’abord un réseau PCR formé de 15 nœuds défavorables et de 15 nœuds favorables. Ce réseau est inspiré par le cas d’un événement catastrophique admettant une structure par zones concentriques autour d’un épocentre. La position d’un nœud sur le terrain géographique affecté influence sa nature : lorsque le nœud est proche de l’épicentre, nous supposons que le comportement de panique est prédominant. Nous envisageons trois dispositions de couplages différentes, représentées sur la figure 3.7. Ces graphes ont été en partie générés aléatoirement : le nombre de nœuds étant fixé, nous avons aléatoirement choisi un nombre d’arêtes linéaires et quadratiques, puis disposé les arêtes linéaires aléatoirement entre les nœuds du graphe, alors que les arêtes quadratiques ont été disposées systématiquement des nœuds défavorables vers les nœuds favorables. Pour chaque configuration, nous avons déterminé le nombre de nœuds défavorables isolés à l’aide d’un algorithme de recherche de chemin (voir l’annexe A). Les valeurs de paramètres choisies pour ces simulations sont indiquées dans le tableau 3.1.

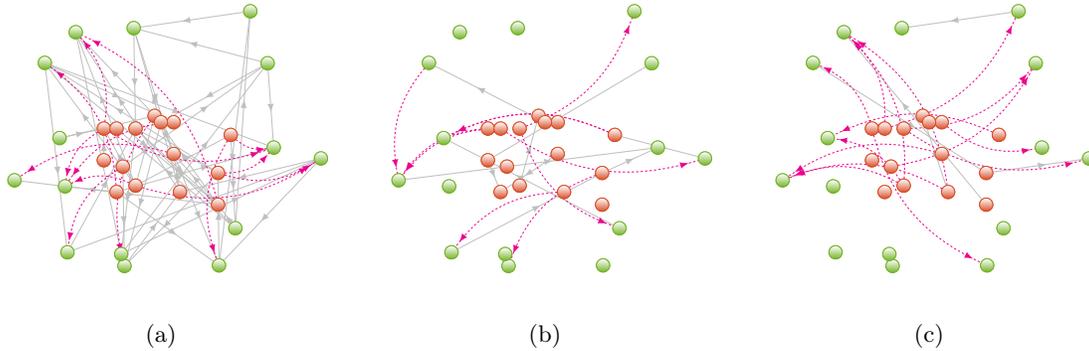


FIGURE 3.7 – Trois configurations de couplages différentes pour un réseau PCR formé de 15 nœuds défavorables (représentés en rouge) et de 15 nœuds favorables (représentés en vert). Les arêtes linéaires sont représentées en traits pleins gris, et les arêtes quadratiques en traits pointillés violets. (a) Réseau densément connecté, avec 53 arêtes linéaires, 15 arêtes quadratiques. (b) Réseau faiblement connecté, avec 10 arêtes linéaires, 10 arêtes quadratiques. (c) Réseau faiblement connecté, avec 5 arêtes linéaires, 15 arêtes quadratiques.

La première configuration, représentée sur la figure 3.7(a), correspond à un réseau densément connecté, avec 53 arêtes linéaires et 15 arêtes quadratiques. Elle admet 3 nœuds défavorables isolés, et un niveau de panique au temps final de simulation environ égal à $\bar{P} \simeq 3$, comme indiqué sur la figure 3.8(a). La deuxième configuration est faiblement connectée, avec 10 arêtes linéaires et 10 arêtes quadratiques. Elle admet 12 nœuds défavorables isolés, et un niveau de panique au temps final environ égal à $\bar{P} \simeq 9$, conformément aux résultats établis dans la section précédente. Enfin, la troisième configuration est également faiblement connectée, avec 5 arêtes linéaires et 15 arêtes quadratiques. Elle admet 13 nœuds défavorables isolés, mais un niveau de panique final inférieur à celui de la deuxième configuration, qui s’explique par l’effet des couplages quadratiques, orientés des nœuds défavorables vers les nœuds favorables, en accord avec la proposition 3.7.

Remarque 3.2.8. Les résultats numériques de ces 3 configurations corroborent les résultats théoriques de la section précédente, et suggèrent quels choix peuvent être envisagés afin d’éviter un niveau

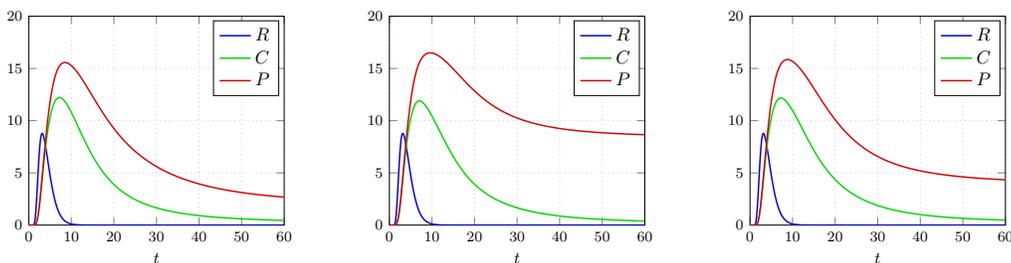


FIGURE 3.8 – Résultats des simulations numériques pour les trois configurations présentées sur la figure 3.7. (a) 3 nœuds défavorables isolés, $\bar{P} \simeq 3$. (b) 12 nœuds défavorables isolés, $\bar{P} \simeq 9$. (c) 13 nœuds défavorables isolés, $\bar{P} \simeq 4$.

de panique élevé dans le contexte d'un événement catastrophique soudain. En effet, le fait de connecter dans une large mesure les nœuds les plus exposés aux zones de refuge est un ingrédient décisif pour atteindre la synchronisation complète du réseau vers l'équilibre de retour au quotidien. Si les déplacements physiques ne sont pas naturellement possibles, on peut choisir de favoriser les interactions à distance afin de limiter le niveau de panique sur les nœuds isolés. Si un *cluster* de nœuds défavorables est identifié, on peut choisir de créer des zones de refuge, et des chemins d'évacuation vers ces zones de refuge. Enfin, il est prévisible qu'une connexion rompue entre un nœud exposé et une zone de refuge provoquera une augmentation du niveau de panique sur le nœud exposé. •

Effet de la longueur des chaînes d'évacuation

D'après le Théorème 3.1, un réseau PCR pour lequel chaque nœud défavorable est évacué vers un nœud favorable doit présenter un retour global au comportement du quotidien. La force de couplage linéaire peut accélérer ce retour, comme nous l'avons expliqué précédemment (voir figure 3.4). La longueur des chaînes d'évacuation est un autre paramètre important. En effet, considérons un réseau PCR construit avec n nœuds défavorables (x_i), $1 \leq i \leq n$, un unique nœud favorable y , et une chaîne d'arêtes linéaires de longueur n de la forme

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow y.$$

Notons alors p_y la densité de population en comportement de panique sur le nœud favorable y . La figure 3.9 montre que la convergence de p_y vers 0 est d'autant plus rapide que la chaîne est courte.

Remarque 3.2.9. Ce résultat numérique guide à nouveau la prise de décision dans l'organisation préventive des terrains géographiques exposés aux événements catastrophiques. En effet, l'ajout de zones de refuge dans les zones sensibles, à des endroits choisis pour raccourcir le temps et la distance d'évacuation, est un élément qui peut aider à limiter le niveau de panique sur les zones exposées. •

Effet du couplage quadratique

Nous continuons avec les résultats d'une simulation numérique de 200 réseaux PCR générés aléatoirement. Dans chaque cas, nous avons considéré deux configurations de couplages. La première est constituée d'arêtes linéaires uniquement, alors que la seconde configuration superpose aux arêtes linéaires de la première configuration des arêtes quadratiques orientées comme précédemment des nœuds défavorables vers les nœuds favorables. Nous comparons les niveaux de panique P_L et P_Q obtenus dans ces deux configurations respectives, et cela, pour chacun des 200 réseaux générés aléatoirement. De plus, pour chaque réseau, nous déterminons le nombre N_i de nœuds défavorables isolés, à l'aide d'un algorithme de recherche de chemin [28]. La figure 3.10 montre la relation entre le nombre $|\mathcal{E}_L|$ d'arêtes linéaires dans chaque réseau et le nombre N_i de nœuds défavorables isolés. Chaque croix rouge correspond à un des 200 réseaux et admet pour coordonnées le couple $(|\mathcal{E}_L|, N_i)$. Il apparaît clairement que

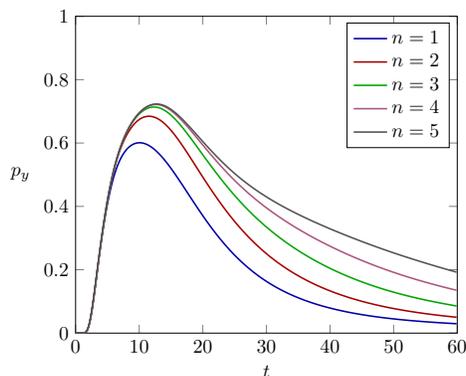


FIGURE 3.9 – Effet de la longueur de la chaîne d'évacuation. La convergence vers 0 du niveau de panique p_y sur le nœud favorable y est d'autant plus rapide que la chaîne est courte.

le nombre N_i de nœuds défavorables isolés tend à diminuer lorsque le nombre $|\mathcal{E}_L|$ d'arêtes linéaires augmente. Cependant, un nombre élevé d'arêtes linéaires ne garantit pas nécessairement que tous les nœuds défavorables seront évacués. Au contraire, une disposition optimale peut être obtenue avec un nombre de connexions linéaires égal au nombre de nœuds défavorables. Néanmoins, cette disposition optimale n'est pas toujours réaliste au regard des spécificités géographiques des zones affectées.

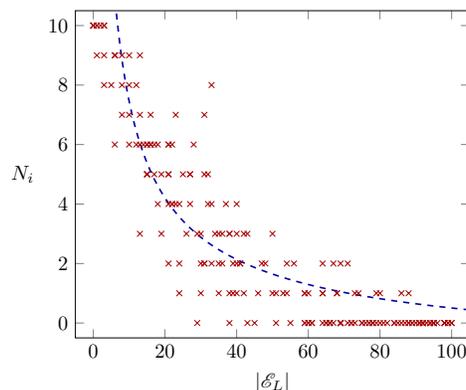


FIGURE 3.10 – Résultats d'une simulation numérique de 200 réseaux PCR générés aléatoirement. Chaque croix rouge correspond à un des 200 réseaux et admet pour coordonnées le couple $(|\mathcal{E}_L|, N_i)$, où $|\mathcal{E}_L|$ désigne le nombre d'arêtes linéaires et N_i le nombre de nœuds défavorables isolés. Le nuage de points est approché par une loi de puissance inverse du type $N_i = \frac{k_1}{|\mathcal{E}_L|^\nu} - k_2$, où k_1 , k_2 et ν sont des coefficients strictement positifs.

Remarque 3.2.10. La forme du nuage de points sur la figure 3.10 suggère une approximation par une loi de puissance inverse du type

$$N_i = \frac{k_1}{|\mathcal{E}_L|^\nu} - k_2,$$

avec des coefficients k_1 , k_2 et ν strictement positifs. L'apparition de telles lois heuristiques est fréquente dans l'étude des systèmes complexes, dans des domaines variés issus de problèmes physiques, biologiques ou des sciences humaines, et doit être mise en relation avec la propriété d'auto-organisation des réseaux couplés. On pourra consulter [87], [41], [6], [21] à ce sujet. •

Puis, la figure 3.11 illustre la proposition 3.7 en comparant les niveaux de panique P_L et P_Q des 2 configurations de couplage envisagées pour chacun des 200 réseaux. Les cercles bleus montrent que la

densité P_Q d'individus en comportement de panique est systématiquement inférieure à la densité P_L après un temps fini $T > 0$. Ceci montre l'effet bénéfique des phénomènes d'interaction, lorsqu'ils sont correctement orientés, dans le cas où les couplages linéaires ne sont pas suffisants.

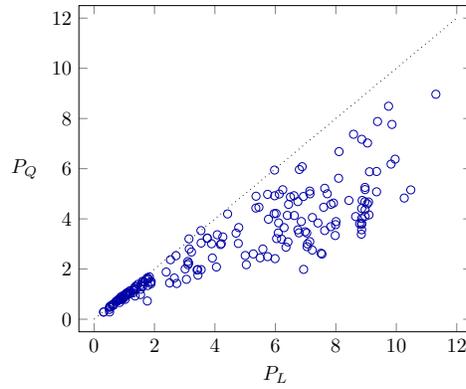


FIGURE 3.11 – Résultats d’une simulation numérique de 200 réseaux PCR générés aléatoirement. Les cercles bleus montrent que la densité P_Q d’individus en comportement de panique, est systématiquement inférieure à la densité P_L après un temps fini $T > 0$. Les connexions quadratiques correctement orientées réduisent donc le niveau de panique.

Simulation d’un tsunami sur le littoral azuréen

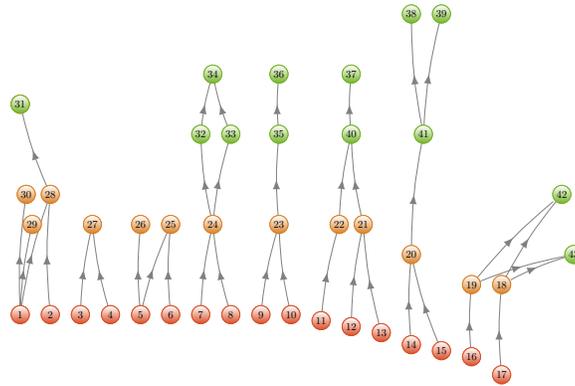


FIGURE 3.12 – Réseau PCR correspondant à la simulation d’un tsunami sur le littoral azuréen.

Nous terminons cette partie en présentant les résultats d’une simulation numérique préparée en collaboration avec les géographes D. Provitolo et E. Dubos-Paillard [16], et correspondant au scénario d’un tsunami sur le littoral azuréen. Comme nous l’avons expliqué dans le chapitre précédent, ce scénario est réaliste, puisqu’une faille sismique sous-marine est identifiée à proximité du littoral. Le réseau présenté sur la figure 3.12 est composé de 43 nœuds. Les nœuds 1 à 17 correspondent à des plages du littoral situées sur la commune de Nice. Nous supposons que ces nœuds sont défavorables. Les nœuds 18 à 30 correspondent aux abords des escaliers qui relient ces plages à la *Promenade des Anglais*, située quelques mètres au-dessus du niveau de la mer, à une hauteur suffisante pour protéger les individus d’une vague de submersion de taille moyenne. Nous supposons donc que ces nœuds sont favorables. Enfin, les autres nœuds correspondent à des places localisées dans le centre ancien de la cité niçoise. Nous les supposons également favorables. Les couplages linéaires identifiés par les

experts géographiques induisent une structure non connexe du réseau. Le tableau 3.2 donne la répartition des nœuds en 8 *clusters*, ainsi que les valeurs de paramètres choisies pour réaliser cette simulation numérique. Dans cette configuration, aucun nœud défavorable n'est isolé. Les résultats numériques sont présentés sur la figure 3.13. Comme cela est prédit par le Théorème 3.1, le niveau de panique converge vers 0 pour chaque *cluster*.

TABLEAU 3.2 – Répartition des nœuds en clusters pour le réseau PCR présenté sur la figure 3.12, et valeurs des paramètres.

Cluster	Nœuds	Paramètre	Nœuds 1 à 17	Nœuds 18 à 43
1	1, 2, 28, 29, 30, 31	B_1	0.5	0.5
2	3, 4, 27	B_2	0.5	0.5
3	5, 6, 25, 26	C_1	0	0.3
4	7, 8, 24, 32, 33, 34	C_2	0.2	0.2
5	9, 10, 23, 35, 36	$\alpha_i, i = 1, 2$	0.1	0.1
6	11, 12, 13, 21, 22, 37, 40	$\delta, i = 1, 2$	0.1	0.1
7	14, 15, 20, 38, 39, 41	$\mu_i, i = 1, 2$	0.1	0.1
8	16, 17, 18, 19, 42, 43	η_0	0.3	0.3

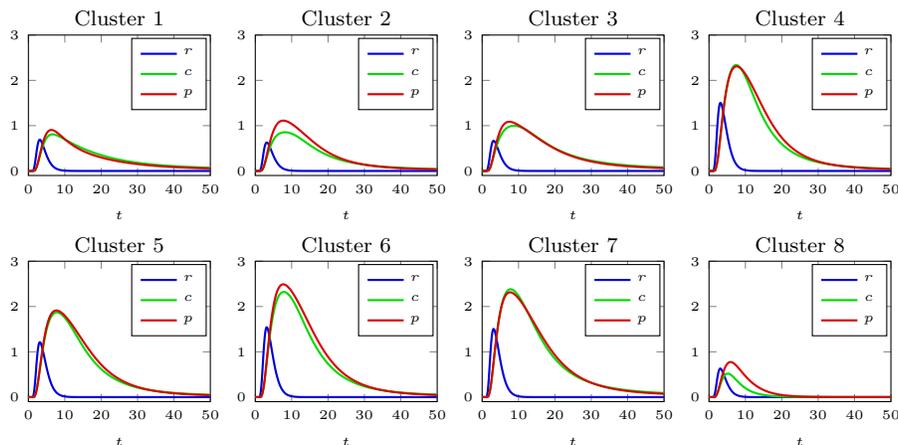


FIGURE 3.13 – Résultats de la simulation numérique du réseau PCR présenté sur la figure 3.12.

3.3 Chaînes d'oscillateurs

Dans cette section, nous étudions des réseaux de systèmes dynamiques admettant des solutions périodiques. Nous appellerons *oscillateur* un tel système. Nous traitons uniquement le cas où le réseau prend la forme d'une chaîne, et continuons de supposer que les nœuds composant cette chaîne sont non identiques. Nous nous intéressons particulièrement à la possibilité d'apparition de nouvelles solutions périodiques par l'effet du couplage.

3.3.1 Chaînes de Hopf

Pour commencer, nous considérons une chaîne construite à partir de la forme normale de la bifurcation de Hopf, dont les équations s'écrivent :

$$\dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (3.34)$$

où (ρ, θ) désignent les coordonnées polaires d'un point générique (x, y) dans \mathbb{R}^2 . La chaîne complète est alors donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\lambda_1 - \rho_1^2) - \varepsilon\rho_1 \\ \dot{\rho}_k = \rho_k(\lambda_k - \rho_k^2) + \varepsilon\rho_{k-1} - \varepsilon\rho_k, & 2 \leq k \leq n-1 \\ \dot{\rho}_n = \rho_n(\lambda_n - \rho_n^2) + \varepsilon\rho_{n-1}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Afin de simplifier notre étude, on suppose que chaque nœud admet une vitesse angulaire constante, c'est-à-dire $\dot{\theta}_k = 0$, pour $1 \leq k \leq n$.

Cas d'une chaîne de longueur 3

Supposons que $n = 3$. Le système (3.35) s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\lambda_1 - \rho_1^2) - \varepsilon\rho_1 \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(\lambda_2 - \rho_2^2) + \varepsilon\rho_1 - \varepsilon\rho_2 \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(\lambda_3 - \rho_3^2) + \varepsilon\rho_2. \end{cases} \quad (3.36)$$

La proposition suivante identifie une bifurcation de Hopf sur le nœud (2) de la chaîne (3.36), dans le cas où et $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, lorsque le paramètre de couplage ε vaut λ_1 .

Proposition 3.8. *Supposons $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors le nœud (2) présente une bifurcation de Hopf super-critique en $\varepsilon = \lambda_1$.*

Démonstration. Nous allons calculer le premier nombre de Lyapunov $c_1(\mu)$ dans la forme normale de Poincaré du système (3.36) en suivant l'algorithme de Hassard, Wan et Kazarinoff [47]. Pour cela, posons $\delta = \lambda_2 - \lambda_1$, $\mu = \lambda_1 - \varepsilon$. Les équilibres du nœud (1) sont donnés par $\rho_1 = 0$ ou $\rho_1 = \sqrt{\mu}$, et ceux du nœud (2) sont donnés par

$$\rho_2(\delta + \mu - \rho_2^2) = 0 \text{ ou } \rho_2(\delta + \mu - \rho_2^2) + \varepsilon\sqrt{\mu} = 0.$$

Pour étudier le comportement du système autour de $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \sqrt{\delta + \mu}$ et $\mu = 0$, opérons le changement de variable $\rho_2 \rightarrow \sqrt{\delta + \mu} + \rho_2$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\mu - \rho_1^2) \\ \dot{\rho}_2 = (\sqrt{\delta + \mu} + \rho_2)(\delta + \mu - (\sqrt{\delta + \mu} + \rho_2)^2) + (\lambda_1 - \mu)\rho_1. \end{cases}$$

La deuxième équation devient

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= (\sqrt{\delta + \mu} + \rho_2)(-2\sqrt{\delta + \mu}\rho_2 - \rho_2^2) + (\lambda_1 - \mu)\rho_1 \\ &= \rho_2(-2(\delta + \mu) - 3\sqrt{\delta + \mu}\rho_2 - \rho_2^2) + (\lambda_1 - \mu)\rho_1. \end{aligned}$$

Nous réécrivons ensuite les équations précédentes en coordonnées cartésiennes, ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - y_1 - x_1(x_1^2 + y_1^2) \\ \dot{y}_1 = x_1 + \mu y_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2) \\ \dot{x}_2 = x_2[-2(\delta + \mu) - 3\sqrt{\delta + \mu}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - (x_2^2 + y_2^2)] - y_2 + (\lambda_1 - \mu)x_1 \\ \dot{y}_2 = y_2[-2(\delta + \mu) - 3\sqrt{\delta + \mu}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - (x_2^2 + y_2^2)] + x_2 + (\lambda_1 - \mu)y_1. \end{cases}$$

Ce système précédent est donc de la forme

$$\dot{u} = A(\mu)u + \hat{F}(u, \mu),$$

avec $u = (x_1, y_1, x_2, y_2)^T$,

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \mu & 0 & -2(\delta + \mu) & -1 \\ 0 & \lambda_1 - \mu & 1 & -2(\delta + \mu) \end{pmatrix},$$

et où $\hat{F}(u, \mu)$ contient tous les termes non linéaires. La matrice $A(\mu)$ admet 2 paires de valeurs propres complexes conjuguées, données par

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1(\mu) \pm i\omega_1(\mu), & \alpha_1(\mu) &= \mu, & \omega_1(\mu) &= 1, \\ X &= \alpha_2(\mu) \pm i\omega_2(\mu), & \alpha_2(\mu) &= -2(\delta + \mu), & \omega_2(\mu) &= 1. \end{aligned}$$

Les conditions d'application de l'algorithme de Hassard, Wan et Kazarinoff sont vérifiées, puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= 0, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu}(0) &= 1, \\ \alpha_2(0) &= -2\delta, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu}(0) &= -2. \end{aligned}$$

Un vecteur propre de $A(\mu)$ associé à la valeur $\mu + i$ est donné par

$$v_1 = \left(-i \frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu}, -\frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu}, -i, -1 \right)^T.$$

On pose ensuite $T = [\Re v_1, \Im v_1, e_3, e_4]$ où e_3 et e_4 sont donnés par

$$e_3 = (0, 0, 0, 1)^T, \quad e_4 = (0, 0, -1, 0)^T.$$

On obtient alors

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(\delta + \mu) & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2(\delta + \mu) \end{pmatrix}.$$

Posons maintenant $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. On a

$$u = T\xi \iff \xi = T^{-1}u,$$

et le système $\dot{u} = A(\mu)u + \hat{F}(u, \mu)$ s'écrit

$$\dot{\xi} = A'(\mu)\xi + F(\xi, \mu),$$

avec $A'(\mu) = T^{-1}A(\mu)T$ et $F(\xi, \mu) = T^{-1}\hat{F}(T\xi, \mu)$. Examinons les composantes de $F(\xi, \mu)$. Les deux premières composantes de $\hat{F}(u, \mu)$ sont données par

$$\hat{F}_1(u, \mu) = -x_1(x_1^2 + y_1^2), \quad \hat{F}_2(u, \mu) = -y_1(x_1^2 + y_1^2),$$

et celles de $T\xi$ sont égales à

$$(T\xi)_1 = \xi_2 \frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu}, \quad (T\xi)_2 = -\xi_1 \frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu}.$$

Les deux premières composantes de $F(\xi, \mu)$ sont donc

$$F_1(\xi, \mu) = -\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left(\frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu} \right)^2, \quad F_2(\xi, \mu) = -\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left(\frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu} \right)^2.$$

On remarque que les autres composantes ne dépendent pas de ξ_3 ni de ξ_4 . Nous allons obtenir la forme normale de Poincaré en introduisant la variable complexe

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2.$$

On aboutit à

$$\dot{\zeta} = (\mu + i)\zeta + G(\zeta, \bar{\zeta}),$$

où G est donné par

$$G(\zeta, \bar{\zeta}) = -L\zeta^2\bar{\zeta}, \quad L = \left(\frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu} \right)^2.$$

Le premier nombre de Lyapunov est donc donné par :

$$c_1(\mu) = - \left(\frac{2\delta + 3\mu}{\lambda_1 - \mu} \right)^2. \quad (3.37)$$

En particulier, on a

$$c_1(0) = \frac{-4\delta^2}{\lambda_1^2},$$

ce qui prouve que le système (3.36) présente une bifurcation de Hopf supercritique en $\mu = 0$. \square

Les diagrammes de bifurcation des nœuds (1), (2) et (3) de la chaîne (3.36) sont présentés sur la figure 3.14 dans le cas $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$. En l'absence de couplage ($\varepsilon = 0$), les nœuds 1 et 2 admettent chacun un point d'équilibre, et un cycle limite stable, dont les rayons respectifs $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ satisfont

$$\bar{\rho}_1 < \bar{\rho}_2.$$

Le nœud 3 admet un unique point d'équilibre stable. Lorsque la force de couplage ε augmente faiblement, on observe l'apparition d'un second cycle limite sur le nœud 2, conformément à la proposition 3.8, et simultanément, l'apparition de 2 cycles limites distincts sur le nœud 3. Si ε continue d'augmenter, le plus grand de ces deux cycles limites disparaît d'abord, puis le second à son tour. Finalement, les 3 nœuds présentent la même dynamique lorsque ε est suffisamment grand.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors le premier nombre de Lyapunov $c_1(0)$ calculé dans la démonstration de la proposition 3.8 s'annule, et on observe une bifurcation de Hopf multiple, avec l'apparition simultanée de 2 cycles limites sur le nœud 2 pour $\varepsilon = \lambda_1$.

Cas d'une chaîne de longueur quelconque

Une chaîne de la forme (3.35) formée d'un nombre de nœuds supérieur à 3 peut présenter un nombre supérieur de bifurcations de Hopf. Il est remarquable que le nombre de cycles limites augmente dans le système (3.35), alors que le degré des polynômes impliqués dans le système (3.35) est constant. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier chapitre de cette thèse, consacré à l'étude des cycles limites dans les systèmes hamiltoniens du plan. Les portraits de phase pour une chaîne de longueur 6 sont présentés sur la figure 3.15.

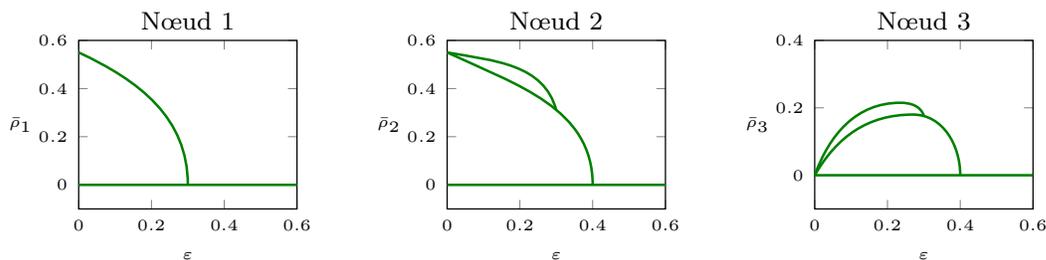


FIGURE 3.14 – Diagrammes de bifurcation pour une chaîne de 3 nœuds construite à partir de la forme normale de Hopf, dans le cas $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Pour $0 < \varepsilon < \lambda_1$, le nœud (1) présente un unique cycle limite, alors que les nœuds (2) et (3) en présentent 2.

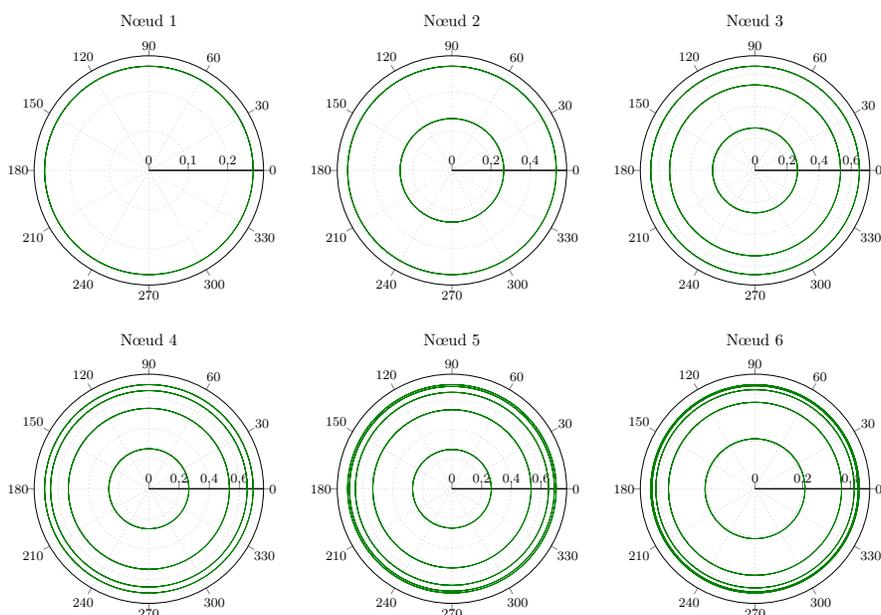


FIGURE 3.15 – Portraits de phase pour une chaîne de 6 nœuds construite avec la forme normale de Hopf. Le nombre de cycles limites augmente avec la position du nœud dans la chaîne.

3.3.2 Application

Des chaînes d'oscillateurs semblables au système (3.35) ont été considérées pour des applications variées, comme l'étude des réseaux de neurones, ou de circuits électriques [107]. Pour terminer cette section, nous présentons l'étude d'une chaîne construite à partir du système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) - \frac{cxy}{\alpha+x} \\ \dot{y} = -dy + \frac{cxy}{\alpha+x}, \end{cases} \quad (3.38)$$

où α , r , c , d et ε sont des coefficients réels strictement positifs. Le système (3.38) est par exemple présenté dans [64]. Les espèces x et y représentent respectivement une population de proies et une population de prédateurs. Le terme $rx(1-x)$ modélise la croissance logistique de la population de proies, tandis que le terme $-dy$ correspond à la mortalité des prédateurs. Enfin, le terme

$$\pm \frac{cxy}{\alpha+x}$$

modélise l'interaction entre les proies et les prédateurs ; la rencontre entre une proie et un prédateur provoque naturellement une diminution du nombre de proies, dans une certaine proportion correspondant à la réponse fonctionnelle donnée par :

$$\frac{cx}{\alpha + x}.$$

Cette interaction est d'autant plus importante que le nombre de proies est faible. En considérant le coefficient α comme paramètre de bifurcation, on montre [64] que le système présente une bifurcation de Hopf, avec un cycle limite lorsque $\alpha < \alpha_0$, où

$$\alpha_0 = \frac{c - d}{c + d}.$$

Dans ce cas, ce cycle encercle l'équilibre non trivial donné par

$$E_0 = \left(\frac{\alpha d}{c - d}, \frac{\alpha r}{c - d} \left(1 - \frac{\alpha d}{c - d} \right) \right).$$

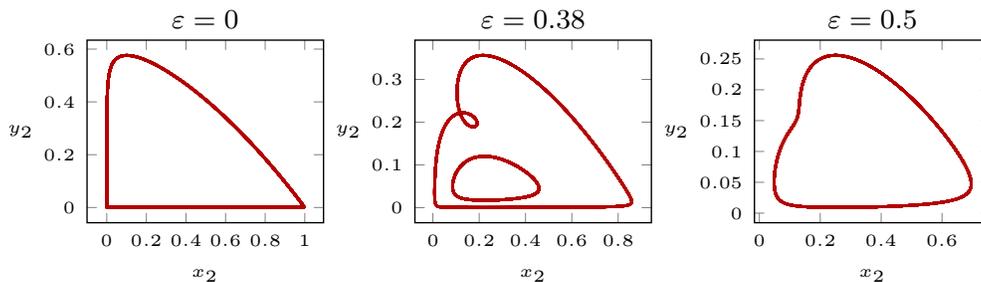


FIGURE 3.16 – Portraits de phase pour le nœud (2) dans la chaîne de systèmes proie-prédateur donnée par (3.39). Pour $\varepsilon = 0$, le nœud (2) présente un unique cycle limite. Pour $\varepsilon = 0.38$, il en admet 2. Pour $\varepsilon = 0.5$, il admet à nouveau un unique cycle limite.

Considérons maintenant une chaîne de longueur 3, formée à partir d'instances non identiques du système (3.38) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1(1 - x_1) - \frac{cx_1y_1}{\alpha_1 + x_1} - \varepsilon x_1 \\ \dot{y}_1 = -dy_1 + \frac{cx_1y_1}{\alpha_1 + x_1} - \varepsilon y_1 \\ \dot{x}_2 = rx_2(1 - x_2) - \frac{cx_2y_2}{\alpha_2 + x_2} + \varepsilon x_1 - \varepsilon x_2 \\ \dot{y}_2 = -dy_2 + \frac{cx_2y_2}{\alpha_2 + x_2} + \varepsilon y_1 - \varepsilon y_2 \\ \dot{x}_3 = rx_3(1 - x_3) - \frac{cx_3y_3}{\alpha_3 + x_3} + \varepsilon x_2 \\ \dot{y}_3 = -dy_3 + \frac{cx_3y_3}{\alpha_3 + x_3} + \varepsilon y_2, \end{cases} \quad (3.39)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in]0, \alpha_0[$.

Nous présentons sur la figure 3.16 les portraits de phase du nœud (2), c'est-à-dire la projection dans le plan (x_2, y_2) des orbites du système (3.39), pour les valeurs de paramètres suivantes :

$$r = d = 1, \quad c = 2, \quad \alpha_1 = 0.05, \quad \alpha_2 = 0.1, \quad \alpha_3 = 0.15.$$

Comme dans le cas de la chaîne (3.36) construite à partir de la forme normale de Hopf, on observe la présence de 2 cycles limites sur le nœud (2), pour de faibles valeurs du paramètre de couplage ε . Si ε augmente, l'un de ces deux cycles disparaît, pendant que la taille de l'autre diminue. Si ε continue d'augmenter, alors le cycle limite restant disparaît à nouveau. La méthode de Hassard, Wan et Kazarinoff, utilisée dans la démonstration de la proposition 3.8, peut à nouveau être employée pour prouver que la chaîne donnée par le système (3.39) présente des bifurcations de Hopf. Cette exploration numérique illustre la proposition 3.8, et suggère que la dynamique d'un réseau d'oscillateurs faiblement couplés peut présenter des cycles limites nouveaux.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié la dynamique de réseaux couplés avec des instances non identiques d'un système présentant potentiellement plusieurs comportements, selon la valeur du paramètre de bifurcation choisi. Nous avons étudié le cas des réseaux de systèmes Panique-Contrôle-Réflexe, et celui des chaînes d'oscillateurs. Dans le premier cas, nous avons obtenu un résultat complet de synchronisation, et dans le second, nous avons montré comment un couplage faible peut au contraire induire de nouvelles solutions périodiques. On pourra naturellement approfondir cette étude, en affinant les choix de modélisation de la nature des couplages par exemple.

On peut également étudier la dynamique des réseaux présentant d'autres bifurcations. Nous terminons donc ce chapitre en proposant un plan d'étude. Considérons les 4 bifurcations locales de codimension 1 :

- (i) la bifurcation de Hopf dont la forme normale s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{R} ;$$

- (ii) la bifurcation *saddle-node* correspondant au système

$$\dot{x} = \lambda - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} ;$$

- (iii) la bifurcation transcritique donnée par le système

$$\dot{x} = \lambda x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} ;$$

- (iv) la bifurcation fourche décrite par

$$\dot{x} = \lambda x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous proposons d'étudier la dynamique des réseaux non identiques construits à partir des 4 systèmes précédents. Pour cela, nous suggérons de considérer des couplages polynomiaux, et d'établir une classification de la dynamique du réseau en fonction de la topologie du réseau et du degré des couplages. Nous avons déjà obtenu les diagrammes de bifurcation dans le cas des chaînes orientées de longueur 2, et des couplages linéaires. Il semble naturel d'étendre ces résultats, dans le cas de réseaux simples, donnés par des arbres ou des cycles, ainsi que d'expérimenter des couplages donnés par des polynômes de degré supérieur. Il est raisonnable de penser qu'une telle étude peut permettre d'approfondir la connaissance des systèmes complexes.

Réseaux couplés de systèmes de réaction-diffusion

Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique asymptotique d'un problème d'évolution donné par un réseau complexe de systèmes de réaction-diffusion. À partir d'hypothèses portant sur la dynamique interne à chaque nœud composant le système complexe, ainsi que sur la topologie du réseau, nous analysons le comportement des solutions de ce problème. Après avoir montré l'existence et l'unicité de solutions locales, nous démontrons l'existence de régions positivement invariantes, qui garantissent à la fois la positivité des solutions et leur caractère global en temps. Ensuite, nous établissons des estimations d'énergie, qui révèlent la nature dissipative du système considéré, et qui permettent d'étudier le comportement asymptotique des solutions. Nous construisons alors un système dynamique associé au problème d'évolution, et montrons que ce système dynamique possède un attracteur global, ainsi qu'une famille d'attracteurs exponentiels. Nous continuons en donnant une estimation de la dimension fractale de ces attracteurs, et en présentant l'étude d'un modèle épidémiologique convenant au champ d'application des théorèmes établis. Dans le prochain chapitre, nous serons amené à appliquer à nouveau les résultats généraux de ce chapitre dans le cas du système Panique-Contrôle-Réflexe avec diffusion. Les principales références bibliographiques pour ce chapitre sont [105], [30] et [93].

4.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d avec $d \in \mathbb{N}^*$, $d \leq 3$. Nous supposons que le bord $\partial\Omega$ est régulier, et considérons le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - Ku + F(u) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, \quad 1 \leq i \leq m & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{I})$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$ est définie dans $\Omega \times [0, +\infty[$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, D et K sont deux matrices carrées de taille m données par

$$D = \text{diag}(d_i, 1 \leq i \leq m), \quad K = \text{diag}(k_i, 1 \leq i \leq m), \quad (4.1)$$

où les coefficients de diffusion d_i , $1 \leq i \leq m$, sont supposés strictement positifs, et $k_i > 0$, $1 \leq i \leq m$. L'opérateur non linéaire F est défini dans \mathbb{R}^m . Nous préciserons plus loin quelles hypothèses seront

posées sur F .

Nous allons maintenant définir un problème réseau associé au problème (I), c'est-à-dire un système de systèmes d'équations aux dérivées partielles porté par un graphe, la dynamique locale de chaque nœud de ce graphe étant déterminée par le problème (I). Soit alors $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ un graphe orienté constitué d'un ensemble fini \mathcal{N} de n sommets, $n \in \mathbb{N}^*$, et d'un ensemble fini d'arêtes \mathcal{E} . On considère donc le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial U^j}{\partial t} = D\Delta U^j - KU^j + F(U^j) + G^j(U) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial U_i^j}{\partial \nu} = 0, \quad 1 \leq i \leq m & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ U^j(x, 0) = U_0^j(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{II})$$

pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, où $U^j = (U_1^j, \dots, U_m^j)$ désigne l'état du nœud j , et $U = (U^j)_{1 \leq j \leq n}$ décrit l'état global du réseau. Dans notre notation, l'indice supérieur j est réservé pour marquer les paramètres et fonctions qui dépendent du nœud j , alors que l'indice inférieur indique les composantes de chaque vecteur de \mathbb{R}^m . L'opérateur $G = (G^j)_{1 \leq j \leq n}$ est l'opérateur de couplage. Il est défini en correspondance avec la topologie du graphe \mathcal{G} , qui est en partie décrite par l'ensemble \mathcal{E} de ses arêtes. Nous supposons que G peut être décomposé comme la somme de deux opérateurs

$$G = G_L + G_Q, \quad (4.2)$$

qui correspondent aux couplages *linéaires* et *quadratiques* respectivement. Ainsi, \mathcal{E} est l'union disjointe de deux sous-ensembles \mathcal{E}_L et \mathcal{E}_Q qui seront associés à G_L et G_Q respectivement. Plus précisément, nous introduisons une matrice de connectivité $L = (L_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$, qui est une matrice carrée de taille n , et une force de couplage $\varepsilon > 0$. Pour chaque arête $(k, j) \in \mathcal{E}_L$, $k \neq j$, nous posons $L_{j,k} = \varepsilon$. Les coefficients diagonaux sont donnés par :

$$L_{j,j} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n L_{k,j}. \quad (4.3)$$

Ainsi, la somme des coefficients de chaque colonne de L est nulle. De plus, on considère la matrice diagonale \mathcal{H} de taille m , dont les coefficients déterminent quelles composantes de U^j sont couplées : si la $i^{\text{ème}}$ composante est couplée, alors on pose $\mathcal{H}_{i,i} = 1$. Autrement, on pose $\mathcal{H}_{i,i} = 0$. Finalement, l'opérateur de couplage G_L est défini par :

$$G_L^j(U) = \sum_{k=1}^n L_{j,k} \mathcal{H} U^k, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.4)$$

La propriété (4.3) implique que la somme des équations du problème réseau (II) annule tous les termes de couplage linéaire :

$$\sum_{j=1}^n G_L^j \equiv 0. \quad (4.5)$$

Ensuite, nous supposons que G_Q^j peut être écrit comme un vecteur dont les composantes sont des polynômes homogènes de degré 2 en U_i^j , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$, c'est-à-dire :

$$G_Q^j(U) = (Q_1^j(U), \dots, Q_m^j(U))^T, \quad (4.6)$$

où $Q_i^j(U)$ est une expression quadratique. De plus, on suppose que $Q_i^j(U)$ peut être factorisé par U_i^j de la manière suivante :

$$Q_i^j(U) = U_i^j \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} q^{j,i,l,k} U_k^l, \quad (4.7)$$

4.1. Position du problème

avec $q^{j,i,l,k} \in \mathbb{R}$. Comme pour les couplages linéaires, nous supposons que la somme des équations dans le problème réseau (II) annule tous les couplages quadratiques :

$$\sum_{j=1}^n G_Q^j \equiv 0. \quad (4.8)$$

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on note

$$\begin{aligned} q_+^{j,i} &= \{(k, l) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n, q^{j,i,l,k} > 0\}, \\ q_-^{j,i} &= \{(k, l) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n, q^{j,i,l,k} < 0\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Remarque 4.1.1. La forme de l'opérateur de couplage G offre de multiples possibilités pour modéliser différentes situations, correspondant à des problèmes d'évolution de nature variée. Dans le cas du système PCR, étudié dans les chapitres 2, 3 et 5, les termes de couplage linéaire sont utilisés afin de modéliser des déplacements physiques d'individus d'un nœud du réseau vers un autre. Les termes de couplage quadratique sont au contraire utilisés pour modéliser une rencontre entre des individus situés sur des nœuds différents. Toutefois, de nombreuses autres variétés d'opérateurs de couplage sont utilisées pour des situations particulières, comme l'étude des réseaux de neurones par exemple. •

Exemple 4.1.1. Soient $m = 2$ et $n = 4$. Considérons le graphe \mathcal{G} représenté sur la figure 4.1.

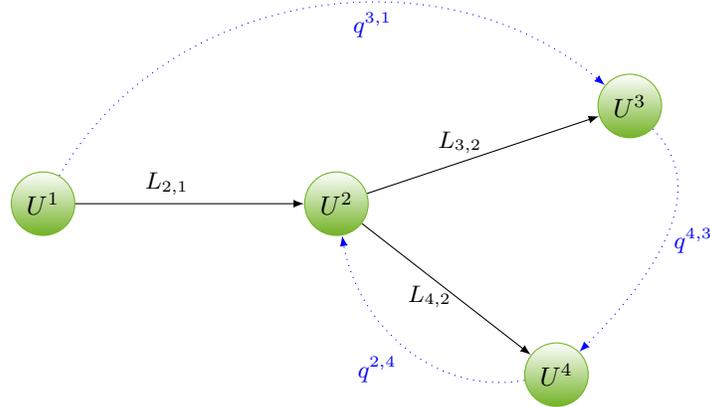


FIGURE 4.1 – Réseau couplé composé de 4 nœuds, connectés par deux familles d'arêtes. Les arêtes en traits pleins correspondent à un couplage linéaire, et les arêtes en traits pointillés à un couplage quadratique.

L'ensemble \mathcal{E}_L des arêtes correspondant aux termes de couplage linéaire est donné par

$$\mathcal{E}_L = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

On a donc :

$$L = \begin{pmatrix} -L_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & -L_{3,2} - L_{4,2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & L_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que la première composante de chaque nœud soit concernée par le couplage linéaire, mais pas la deuxième. Dans ce cas, on a :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis, l'ensemble \mathcal{E}_Q des arêtes correspondant aux termes de couplage quadratique est donné par $\mathcal{E}_Q = \{(1, 3), (3, 4), (4, 2)\}$. Supposons par ailleurs que l'on ait posé :

$$G_Q^j(U) = \left(U_1^j \sum_{k=1}^n q^{k,j} U_1^k, -U_2^j \sum_{k=1}^n q^{k,j} U_2^k \right)^T,$$

pour $1 \leq j \leq n$.

Le réseau complexe est finalement donné par les 8 équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1^1}{\partial t} = d_1 \Delta U_1^1 - k_1 U_1^1 + F_1(U^1) - L_{2,1} U_1^1 - q^{3,1} U_1^1 U_1^3 \\ \frac{\partial U_2^1}{\partial t} = d_2 \Delta U_2^1 - k_2 U_2^1 + F_2(U^1) + q^{3,1} U_2^1 U_2^3 \\ \frac{\partial U_1^2}{\partial t} = d_1 \Delta U_1^2 - k_1 U_1^2 + F_1(U^2) + L_{2,1} U_1^1 - (L_{3,2} + L_{4,2}) U_1^2 + q^{2,4} U_1^4 U_1^2 \\ \frac{\partial U_2^2}{\partial t} = d_2 \Delta U_2^2 - k_2 U_2^2 + F_2(U^2) - q^{2,4} U_2^4 U_2^2 \\ \frac{\partial U_1^3}{\partial t} = d_1 \Delta U_1^3 - k_1 U_1^3 + F_1(U^3) + L_{3,2} U_1^2 + q^{3,1} U_1^1 U_1^3 - q^{4,3} U_1^3 U_1^4 \\ \frac{\partial U_2^3}{\partial t} = d_2 \Delta U_2^3 - k_2 U_2^3 + F_2(U^3) - q^{3,1} U_2^1 U_2^3 + q^{4,3} U_2^3 U_2^4 \\ \frac{\partial U_1^4}{\partial t} = d_1 \Delta U_1^4 - k_1 U_1^4 + F_1(U^4) + L_{4,2} U_1^2 + q^{4,3} U_1^3 U_1^4 - q^{2,4} U_1^4 U_1^2 \\ \frac{\partial U_2^4}{\partial t} = d_2 \Delta U_2^4 - k_2 U_2^4 + F_2(U^4) - q^{4,3} U_2^3 U_2^4 + q^{2,4} U_2^4 U_2^2. \end{array} \right.$$

◁

4.2 Existence et unicité de solutions locales

Dans cette section, nous allons montrer l'existence et l'unicité de solutions locales aux problèmes (I) et (II). Pour cela, nous allons tout d'abord donner leur formulation abstraite.

4.2.1 Formulation abstraite

On considère l'espace de Banach

$$X = (L^2(\Omega))^m, \quad (4.10)$$

muni de la norme produit de $L^2(\Omega)$, et l'opérateur diagonal

$$A = \text{diag}(A_i, 1 \leq i \leq m)$$

où A_i est la réalisation de l'opérateur $-d_i \Delta + k_i$, $1 \leq i \leq m$, dans $L^2(\Omega)$, avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$.

D'après les Théorèmes 1.7 et 1.8 du chapitre 1, les opérateurs A_i , $1 \leq i \leq m$, sont des opérateurs sectoriels dans $L^2(\Omega)$, d'angles inférieurs strictement à $\frac{\pi}{2}$, définis positifs et auto-adjoints. De plus, ils admettent un domaine commun, donné par :

$$\mathcal{D}(A_i) = H_N^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.11)$$

Par conséquent, A est un opérateur sectoriel dans X , d'angle inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$, défini positif auto-adjoint. On fixe ensuite $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$, et on considère la puissance fractionnaire A^η , dont le domaine

est donné par l'espace produit d'interpolation :

$$\mathcal{D}(A^\eta) = \left([L^2(\Omega), H_N^2(\Omega)]_\eta \right)^4 = \left(H_N^{2\eta}(\Omega) \right)^4, \quad (4.12)$$

avec l'équivalence de normes :

$$\frac{1}{c_0} \|u\|_{H^{2\eta}(\Omega)} \leq \|A_i^\eta u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \|u\|_{H^{2\eta}(\Omega)}, \quad (4.13)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(A_i^\eta)$, $1 \leq i \leq m$, où c_0 est une constante strictement positive. De plus, on a la propriété d'interpolation :

$$\|u\|_{H^{2\eta}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\eta} \times \|u\|_{H^2(\Omega)}^\eta, \quad (4.14)$$

pour tout $u \in H^2(\Omega)$.

Puisque $2\eta > \frac{3}{2}$, $d \leq 3$ et que Ω est borné, d'après les résultats rappelés dans le chapitre 1, l'injection suivante est dense et continue :

$$H^{2\eta}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega}). \quad (4.15)$$

Enfin, puisque Ω est borné, on a :

$$\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad (4.16)$$

avec injections continues.

On considère ensuite l'opérateur non linéaire F défini dans $\mathcal{D}(A^\eta)$, et on introduit l'ensemble des conditions initiales :

$$X_0 = \{u_0 \in X ; u_{0,i} \geq 0 \text{ dans } \Omega, 1 \leq i \leq m\}. \quad (4.17)$$

Nous pouvons alors formuler le problème (I) comme une équation parabolique semi-linéaire dans X :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

De façon analogue, on donne la formulation abstraite du problème réseau (II) dans X^n :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.19)$$

où $\mathcal{A} = \text{diag}(A, 1 \leq j \leq n)$ est l'opérateur diagonal obtenu à partir de n copies de l'opérateur A , $U_0 \in X_0^n$, et l'opérateur non linéaire \mathcal{F} est défini dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\eta)$ par

$$\mathcal{F}(U) = \left(F(U^j) + G^j(U) \right)_{1 \leq j \leq n}. \quad (4.20)$$

Dans la suite de ce chapitre, afin d'alléger nos notations, nous écrirons L^2 , H_N^2 , H^2 , à la place de $L^2(\Omega)$, $H_N^2(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ respectivement. Les symboles c_r avec $r \in \mathbb{N}$ désigneront des constantes strictement positives.

4.2.2 Solutions locales

Le théorème suivant garantit l'existence et l'unicité de solutions locales pour le problème réseau (II), à la seule condition que l'opérateur F intervenant dans le problème initial (I) satisfait une condition de type Lipschitz. On obtient également avec ce théorème des estimations locales en temps qui seront utiles pour démontrer la positivité des solutions dans la suite.

Hypothèse 4.1. *L'opérateur non linéaire F vérifie*

$$\begin{aligned} \|F(v) - F(\tilde{v})\|_X &\leq \theta(\|v\|_X + \|\tilde{v}\|_X) \\ &\times \left[\|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

pour tous v, \tilde{v} dans $\mathcal{D}(A^\eta)$, où θ est une fonction croissante et continue à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Théorème 4.1. *Supposons que l'hypothèse 4.1 soit vérifiée. Alors pour tout $U_0 \in X_0^n$, le problème réseau (4.19) admet une unique solution U définie sur $[0, T_{U_0}]$ dans l'espace*

$$\mathcal{C}([0, T_{U_0}], \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}], X^n) \cap \mathcal{C}^1([0, T_{U_0}], X^n). \quad (4.22)$$

En outre, U vérifie l'estimation

$$\|U(t)\|_{X^n} + t \|\mathcal{A}U(t)\|_{X^n} \leq C_{U_0}, \quad t \leq T_{U_0}. \quad (4.23)$$

Enfin, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$ et un temps $t_r > 0$ tels que :

$$t^n \|\mathcal{A}^\eta(U(t) - V(t))\|_{X^n} + \|U(t) - V(t)\|_{X^n} \leq C_r \|U_0 - V_0\|_{X^n}, \quad 0 < t \leq t_r, \quad (4.24)$$

pour tous $U_0, V_0 \in B_r = \{U \in X^n ; \|U\|_{X^n} \leq r\}$, où U et V désignent les solutions issues de U_0 et V_0 respectivement.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'opérateur non linéaire \mathcal{F} impliqué dans le problème réseau (4.19) remplit lui-même une condition de type Lipschitz analogue à la majoration (4.21). Considérons donc $V = (V^1, \dots, V^n)$, $\tilde{V} = (\tilde{V}^1, \dots, \tilde{V}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\eta)$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| F(V^j) + G^j(V) - F(\tilde{V}^j) - G^j(\tilde{V}) \right\|_X &\leq \left\| F(V^j) - F(\tilde{V}^j) \right\|_X \\ &+ \left\| G_L^j(V) - G_L^j(\tilde{V}) \right\|_X \\ &+ \left\| G_Q^j(V) - G_Q^j(\tilde{V}) \right\|_X. \end{aligned}$$

On examine ensuite les termes de couplage linéaire :

$$\begin{aligned} \left\| G_L^j(V) - G_L^j(\tilde{V}) \right\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^n L_{j,k} \mathcal{H}(V^k - \tilde{V}^k) \right\|_X \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\| L_{j,k} \mathcal{H}(V^k - \tilde{V}^k) \right\|_X \\ &\leq c_1 \|L\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \|\mathcal{H}\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^n \left\| V^k - \tilde{V}^k \right\|_X \\ &\leq c_2 \left\| V - \tilde{V} \right\|_{X^n} \\ &\leq c_3 \left\| \mathcal{A}^\eta(V - \tilde{V}) \right\|_{X^n}, \end{aligned}$$

en vertu des injections continues (4.15)-(4.16) et de l'équivalence de normes (4.13). Comme G_Q^j est donné par un vecteur de polynômes homogènes de degré 2, il est suffisant d'estimer la différence

suivante, pour $1 \leq j, l \leq n$ et $1 \leq i, k \leq m$:

$$\begin{aligned}
 \left\| V_i^j V_k^l - \tilde{V}_i^j \tilde{V}_k^l \right\|_{L^2} &\leq \left\| V_i^j V_k^l - V_i^j \tilde{V}_k^l \right\|_{L^2} + \left\| V_i^j \tilde{V}_k^l - \tilde{V}_i^j \tilde{V}_k^l \right\|_{L^2} \\
 &\leq \left\| V_i^j \right\|_{L^\infty} \left\| V_k^l - \tilde{V}_k^l \right\|_{L^2} + \left\| \tilde{V}_k^l \right\|_{L^\infty} \left\| V_i^j - \tilde{V}_i^j \right\|_{L^2} \\
 &\leq c_4 \left[\left\| V_i^j \right\|_{H^{2n}} \left\| V_k^l - \tilde{V}_k^l \right\|_{L^2} + \left\| \tilde{V}_k^l \right\|_{H^{2n}} \left\| V_i^j - \tilde{V}_i^j \right\|_{L^2} \right] \\
 &\leq c_5 \left[\left\| A^\eta V^j \right\|_X \left\| V^l - \tilde{V}^l \right\|_X + \left\| A^\eta \tilde{V}^l \right\|_X \left\| V^j - \tilde{V}^j \right\|_X \right] \\
 &\leq c_6 \left(\left\| A^\eta V^j \right\|_X + \left\| A^\eta \tilde{V}^l \right\|_X \right) \left\| V - \tilde{V} \right\|_{X^n}.
 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathcal{F}(V) - \mathcal{F}(\tilde{V}) \right\|_{X^n} &\leq \theta \left(\left\| V \right\|_{X^n} + \left\| \tilde{V} \right\|_{X^n} \right) \\
 &\quad \times \left[\left\| \mathcal{A}^\eta(V - \tilde{V}) \right\|_{X^n} + \left(\left\| \mathcal{A}^\eta V \right\|_{X^n} + \left\| \mathcal{A}^\eta \tilde{V} \right\|_{X^n} \right) \left\| V - \tilde{V} \right\|_{X^n} \right],
 \end{aligned}$$

pour tous V, \tilde{V} dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\eta)$. Le Théorème 1.12 du chapitre préliminaire s'applique, et mène aux conclusions (4.22)-(4.23). \square

Remarque 4.2.1. Par application directe du Théorème 1.12, l'hypothèse 4.1 garantit également l'existence de solutions locales pour le problème initial (4.18). Ce problème initial peut aussi être traité comme un cas particulier du problème réseau, avec $n = 1$ et $G \equiv 0$. \bullet

4.3 Régions invariantes

4.3.1 Positivité

Pour les modèles mathématiques issus des problèmes de dynamique des populations, la positivité des solutions issues de conditions initiales positives est une propriété qui doit être évidemment satisfaite. De plus, c'est en général une première étape pour montrer l'existence d'une région positivement invariante. Une méthode couramment employée pour prouver cette propriété de positivité consiste à considérer le champ de vecteurs correspondant au terme de réaction du système, et à démontrer que ce champ de vecteurs pointe strictement vers l'intérieur du quadrant positif $(\mathbb{R}^+)^n$ sur son bord. Cette méthode est présentée en détail dans [93]. Toutefois, elle peut être délicate à appliquer lorsque le champ de vecteurs est tangent au quadrant positif en certains points de son bord. Dans ce cas, on peut utiliser une méthode de troncature, qui fait intervenir une modification de l'opérateur non linéaire constituant le terme de réaction du système. Nous allons donc prouver que la solution du problème réseau (II) vérifie cette propriété de positivité, sous la seule hypothèse que le problème initial (I) admet une modification de son opérateur non linéaire pour laquelle la propriété de positivité est satisfaite. Nous posons donc l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.2. Il existe un opérateur $\tilde{F} = (\tilde{F}_i)_{1 \leq i \leq m}$ défini dans $\mathcal{D}(A^\eta)$ et remplissant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(u) &= F(u), \quad \text{si } u \geq 0, \\
 (\tilde{F}(u))_i &= \zeta_i(u) + u_i \xi_i(u), \quad 1 \leq i \leq m,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

où ζ_i et ξ_i sont des fonctions à valeurs réelles, $1 \leq i \leq m$, et satisfont :

$$\begin{aligned}
 \zeta_i(u) &\geq 0, \\
 \xi_i(u) &\leq C \|A^\eta u\|_X, \quad u \in \mathcal{D}(A^\eta),
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

où C est une constante strictement positive.

Afin d'alléger les notations, si $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ vérifie $u_i \geq 0$, pour $1 \leq i \leq m$, c'est-à-dire $u_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$, nous avons simplement noté $u \geq 0$. On définit ensuite le problème modifié suivant, associé à l'opérateur \tilde{F} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = D\Delta \tilde{u} - K\tilde{u} + \tilde{F}(\tilde{u}) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \nu} = 0, \quad 1 \leq i \leq m & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ \tilde{u}(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.27)$$

Remarquons que la condition initiale u_0 du problème modifié (4.27) est identique à celle du problème initial (I). Or $u_0 \in X_0$, donc ses composantes sont positives. Par conséquent, si \tilde{u} est une solution du problème modifié (4.27) et admet des composantes positives, alors en vertu de la propriété (4.25), \tilde{u} sera également une solution du problème initial (I).

Remarque 4.3.1. Dans l'hypothèse 4.2, les fonctions ζ_i , $1 \leq i \leq m$, correspondront souvent à des flux entrants dans la dynamique interne du problème (I). Il est donc raisonnable de supposer la positivité des fonctions ζ_i . Au contraire, les termes $u_i \xi_i(u)$, $1 \leq i \leq m$, modéliseront souvent des flux sortants ; c'est la raison pour laquelle on suppose qu'on peut les factoriser par u_i . •

Théorème 4.2. *Supposons que l'hypothèse 4.2 soit satisfaite. Alors toute solution U du problème réseau (II) issue de $U_0 \in X_0^n$, définie sur $[0, T_{U_0}]$, admet des composantes positives :*

$$U_i^j \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Démonstration. On introduit le problème réseau modifié suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}^j}{\partial t} = D\Delta \tilde{U}^j - K\tilde{U}^j + \tilde{F}(\tilde{U}^j) + \tilde{G}^j(\tilde{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial \tilde{U}_i^j}{\partial \nu} = 0, \quad 1 \leq i \leq m & \text{sur } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \tilde{U}^j(x, 0) = U_0^j(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.28)$$

où l'opérateur de couplage modifié \tilde{G} est donné par :

$$\tilde{G}^j(\tilde{U}) = \tilde{G}_L^j(\tilde{U}) + \tilde{G}_Q^j(\tilde{U}),$$

avec

$$\tilde{G}_L^j(\tilde{U}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n L_{j,k} \mathcal{H} |\tilde{U}^k| + L_{j,j} \mathcal{H} \tilde{U}^j, \quad (4.29)$$

pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, où l'on utilise la notation $|u| = (|u_1|, \dots, |u_m|)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, et

$$\left(\tilde{G}_Q^j(\tilde{U}) \right)_i = Q_i^j(\tilde{U}) = \tilde{U}_i^j \left[\sum_{(k,l) \in q_+^{j,i}} q^{j,i,l,k} \tilde{U}_k^l + \sum_{(k,l) \in q_-^{j,i}} q^{j,i,l,k} |\tilde{U}_k^l| \right], \quad (4.30)$$

où $q_+^{j,i}$ et $q_-^{j,i}$ sont donnés par (4.9). D'après les résultats de la section précédente, le problème réseau modifié remplit les conditions d'application du Théorème 4.1. Notons donc \tilde{U} sa solution sur $[0, \tilde{T}_{U_0}]$, qui vérifie l'estimation

$$\left\| \tilde{U}(t) \right\|_{X^n} + t \left\| \mathcal{A} \tilde{U}(t) \right\|_{X^n} \leq \tilde{C}_{U_0}, \quad t \leq \tilde{T}_{U_0}. \quad (4.31)$$

Naturellement, \tilde{U} est à valeurs réelles, car son conjugué $\overline{\tilde{U}}$ est aussi une solution du problème réseau modifié. L'unicité de la solution implique alors $\tilde{U} = \overline{\tilde{U}}$. Par ailleurs, introduisons la fonction de troncature χ définie sur \mathbb{R} par :

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & \text{si } s \leq 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

La fonction χ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et l'on a $\chi'(s) = 0$ si $s > 0$, $\chi'(s) = s$ si $s \leq 0$. De plus, la fonction χ vérifie les propriétés suivantes :

$$\chi(s) \geq 0, \quad \chi'(s) \leq 0, \quad 0 \leq \chi'(s)s = 2\chi(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Puis, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on considère la fonction ρ_i^j définie sur $[0, \tilde{T}_{U_0}]$ par :

$$\rho_i^j(t) = \int_{\Omega} \chi(\tilde{U}_i^j(t)) dx.$$

Puisque $U_0 \in X_0$, on a $\rho_i^j(0) = 0$. En outre, ρ_i^j est continûment dérivable, et l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_i^j(t) &= \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \frac{\partial \tilde{U}_i^j}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \left[d_i \Delta \tilde{U}_i^j - k_i \tilde{U}_i^j + (\tilde{F}(\tilde{U}^j))_i + (\tilde{G}^j(\tilde{U}))_i \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{F}(\tilde{U}^j))_i dx + \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}^j(\tilde{U}))_i dx, \end{aligned}$$

car le Théorème de Green-Riemann (voir par exemple dans [3]) et la condition de Neumann impliquent :

$$\int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) d_i \Delta \tilde{U}_i^j dx = -d_i \int_{\Omega} \left| \nabla \chi'(\tilde{U}_i^j) \right|^2 dx \leq 0,$$

et parce que

$$-k_i \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j dx \leq 0$$

en vertu des propriétés (4.33). D'après l'hypothèse 4.2, on a :

$$\int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{F}(\tilde{U}^j))_i dx = \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) [\zeta_i(\tilde{U}^j) + \tilde{U}_i^j \xi_i(\tilde{U}^j)] dx.$$

Les propriétés (4.33) et (4.25) garantissent que

$$\int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \zeta_i(\tilde{U}^j) \leq 0$$

alors que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j \xi_i(\tilde{U}^j) &\leq c_7 \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j \left\| A^\eta \tilde{U}^j \right\|_X dx \\ &\leq c_8 \rho_i^j(t) \times \left\| A^\eta \tilde{U}^j \right\|_X. \end{aligned}$$

De plus, les expressions (4.4)-(4.6) pour l'opérateur modifié \tilde{G} mènent à :

$$\int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}^j(\tilde{U}))_i dx = \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}_L^j(\tilde{U}))_i dx + \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}_Q^j(\tilde{U}))_i dx,$$

avec

$$\int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}_L^j(\tilde{U}))_i dx \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n L_{j,k} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) |\tilde{U}_i^k| dx + L_{j,j} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j dx \leq 0,$$

d'après la propriété (4.33), et le fait que $L_{j,j} \leq 0$ et $L_{j,k} \geq 0$ si $k \neq j$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) (\tilde{G}_Q^j(\tilde{U}))_i dx &= \sum_{(k,l) \in q_+^{j,i}} q^{j,i,l,k} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j \tilde{U}_k^l dx \\ &+ \sum_{(k,l) \in q_-^{j,i}} q^{j,i,l,k} \int_{\Omega} \chi'(\tilde{U}_i^j) \tilde{U}_i^j |\tilde{U}_k^l| dx \\ &\leq c_9 \left\| \mathcal{A}^\eta \tilde{U} \right\|_{X^n} \rho_i^j(t). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \rho_i^j(t) \leq c_{10} \left\| \mathcal{A}^\eta \tilde{U} \right\|_{X^n} \rho_i^j(t), \quad (4.34)$$

pour $t \in [0, \tilde{T}_{U_0}]$.

Puis, en utilisant la propriété d'interpolation (4.14), combinée avec l'estimation (4.31), on obtient :

$$\left\| \mathcal{A}^\eta \tilde{U} \right\|_{X^n} \leq c_{11} t^{-\eta},$$

et par suite

$$\frac{d}{dt} \rho_i^j(t) \leq c_{12} t^{-\eta} \rho_i^j(t).$$

Puisque $-1 < -\eta < 0$, l'intégrale $\int_0^t s^{-\eta} ds$ est convergente. En intégrant cette dernière inégalité, d'après le Lemme 2.1, on obtient $\rho_i^j(t) \leq 0$, et enfin $\rho_i^j \equiv 0$. Finalement, on conclut que $\tilde{U}_i^j(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, \tilde{T}_{U_0}]$, et cela pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$.

Puis, on remarque que \tilde{U} est aussi une solution du problème réseau non modifié (II). L'unicité de la solution garantit alors que $\tilde{U} = U$ sur $[0, \min(T_{U_0}, \tilde{T}_{U_0})]$. Montrons enfin que $T_{U_0} = \tilde{T}_{U_0}$. Si $\tilde{T}_{U_0} \geq T_{U_0}$, alors on a montré que les composantes de U sont positives sur $[0, T_{U_0}]$. Si au contraire $\tilde{T}_{U_0} < T_{U_0}$, on pose :

$$T^* = \sup \{s \in]t_0, T_{U_0}]; U_i^j(t) \geq 0, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m, \forall t \in [0, s]\}.$$

On a de plus :

$$\int_{\Omega} \chi(U_i^j(x, T^*)) dx = \lim_{t \rightarrow T^*} \int_{\Omega} \chi(U_i^j(x, t)) dx = 0,$$

donc $U_i^j(T^*) \geq 0$, pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Si $T^* = T_{U_0}$, alors on a à nouveau montré que les composantes de U sont positives sur $[0, T_{U_0}]$. Si $T^* < T_{U_0}$, on considère le problème modifié (4.28), avec T^* comme temps initial, et $(U_i^j(T^*))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ comme condition initiale. On en déduit comme précédemment qu'il existe $\tau > 0$, tel que :

$$U_i^j(t) \geq 0, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m, \forall t \in [T^*, T^* + \tau],$$

ce qui contredit la définition de T^* , et achève la démonstration. \square

Remarque 4.3.2. Le Théorème 4.2, comme le Théorème 4.1, est valable pour le problème initial (I), en tant qu'instance du problème réseau (II) avec $n = 1$ et $G \equiv 0$. \bullet

4.3.2 Bornage

Dans cette section, on suppose que le flot induit par le problème initial (I) évolue dans une région positivement invariante. Par souci de clarté, nous traitons le cas où cette région admet une forme rectangulaire. On considère alors la partie compacte $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ définie par :

$$\mathcal{K} = \prod_{i=1}^m [0, b_i], \quad (4.35)$$

où $b_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, et nous supposons que \mathcal{K} est positivement invariante pour le flot induit par le problème (I), c'est-à-dire que si $u_0(x) \in \mathcal{K}$ pour tout $x \in \Omega$, alors la solution u issue de u_0 reste dans \mathcal{K} pour tout $t \geq t_0$, c'est-à-dire $u(x, t) \in \mathcal{K}$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \geq t_0$. Afin d'alléger les notations, nous écrirons simplement $u_0 \in \mathcal{K}$ et $u \in \mathcal{K}$.

Une condition suffisante pour que \mathcal{K} soit une région invariante est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.1. *On suppose que les composantes de la solution u du problème (I) issue de $u_0 \in X_0$ sont positives, et que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a :*

$$-k_i b_i + F(u)|_{u_i=b_i} < 0, \quad (4.36)$$

pour tout $u \in \mathcal{K}$. Alors la région \mathcal{K} est positivement invariante pour le flot induit par le problème (I).

Démonstration. La condition (4.36) implique que le champ de vecteurs correspondant au terme de réaction dans le système (I) pointe strictement vers l'intérieur de \mathcal{K} . D'après de le Théorème 14.7 de [93], \mathcal{K} est donc positivement invariante. \square

Remarque 4.3.3. S'il n'existe qu'un sous-ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, m\}$, tel que la condition (4.36) soit réalisée pour tout $i \in I$ et pour tout u tel que $u_i \in [0, b_i]$, $i \in I$, alors on peut quand-même en déduire que $u_i \in [0, b_i]$ pour tout $i \in I$. Pour les composantes correspondant aux indices $i \notin I$, on peut alors tenter d'appliquer la méthode de troncature que nous avons employée dans la section précédente. Nous montrerons plus loin, avec l'étude d'un modèle épidémiologique, comment procéder dans ce cas. \bullet

On suppose maintenant que certaines composantes de la solution du problème réseau (II) satisfont une loi de type Kirchoff sur le bord supérieur de \mathcal{K} , ce qui nécessite que la somme du flux entrant dans chaque nœud du réseau et de sa dynamique interne, doit être de moindre intensité que le flux sortant, dans un sens que nous allons définir. Pour tous $j \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{1, \dots, m\}$, on note :

$$\begin{aligned} \Phi_i(U^j) &= -k_i U_i^j + F_i(U^j), \\ f^E(U_i^j) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n L_{k,j} \delta_i U_i^k + U_i^j \sum_{(k,l) \in q_+^{j,i}} q^{j,i,l,k} U_k^l, \\ f^S(U_i^j) &= |L_{j,j}| \delta_i U_i^j + U_i^j \sum_{(k,l) \in q_-^{j,i}} |q^{j,i,l,k}| U_k^l, \end{aligned}$$

où $\delta_i = \mathcal{H}_{i,i}$. Les termes $\Phi_i(U^j)$, $1 \leq i \leq m$, correspondent à la dynamique interne du nœud j ; les termes $f^E(U_i^j)$ et $f^S(U_i^j)$ représentent les flux entrant et sortant respectivement, pour chaque nœud j .

Hypothèse 4.3. *Il existe un sous-ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, m\}$ tel que les composantes $(U_i^j)_{i \in I}$ du nœud j vérifient :*

$$\Phi_i(U^j)|_{u_i=b_i} + f^E(U_i^j)|_{u_i=b_i} < f^S(U_i^j)|_{u_i=b_i}, \quad (4.37)$$

pour tout $i \in I$ et pour tout U tel que $U_i^j \in [0, b_i]$, $i \in I$.

Théorème 4.3. *On suppose que les composantes de la solution U du problème réseau (II) issue de $U_0 \in X_0^n$ sont positives, et que l'hypothèse 4.3 est satisfaite pour $I \subset \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $U_i^j \in [0, b_i]$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. L'hypothèse 4.3 implique que le champ de vecteurs correspondant aux termes de réaction et de couplage pour les composantes U_i^j du nœud j , $i \in I$, pointe vers l'intérieur de l'intervalle $[0, b_i]$. On applique à nouveau le Théorème 14.7 de [93]. \square

Remarque 4.3.4. L'hypothèse 4.3 est aisément satisfaite pour un nœud qui joue le rôle d'une source. En effet, dans ce cas, le flux entrant est nul, alors que le flux sortant est positif strictement. Au contraire, cette hypothèse peut ne pas être satisfaite pour un nœud j placé dans une impasse, auquel cas le flux entrant est positif, alors que le flux sortant est nul. Cette situation peut se produire dans le cas des graphes orientés acycliques. Dans ce cas, l'action de la dynamique interne à chaque nœud doit être suffisamment efficace pour absorber le flux entrant. \bullet

En combinant la méthode de troncature et le Théorème 4.3, on dispose d'outils complémentaires pour montrer l'existence d'une région positivement invariante \mathcal{K} pour le problème réseau (II). Quelquefois, si on sait que \mathcal{K} est positivement invariante pour le problème initial (I), on peut montrer que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$, mais pas toujours.

Corollaire 4.1. *Sous les hypothèses 4.1-4.2, si de plus la région \mathcal{K} est positivement invariante pour le problème réseau (II), alors les solutions du problème réseau (II) issues de \mathcal{K} sont globales.*

Les résultats précédents nous permettent de construire un semi-groupe d'opérateurs non linéaires associé au problème réseau (II). En effet, supposons que la région compacte \mathcal{K} soit positivement invariante, et posons $\mathcal{R} = L^2(\Omega, \mathcal{K})$. Pour $U_0 \in \mathcal{R}$, soit $U(t, U_0)$ la solution du problème (II) définie pour tout $t \geq 0$. On définit une famille d'opérateurs non linéaires $\mathcal{S}(t)$ agissant sur \mathcal{R} en posant

$$\mathcal{S}(t)U_0 = U(t, U_0), \quad (4.38)$$

pour tout $t \geq 0$ et $U_0 \in \mathcal{R}$.

4.4 Comportement asymptotique

Cette section est consacrée à l'étude du comportement asymptotique de la famille d'opérateurs non linéaires $\mathcal{S}(t)$ définie précédemment, c'est-à-dire lorsque le temps t tend vers $+\infty$. Nous commençons par établir un résultat de convergence des orbites du problème réseau (II) vers leur moyenne spatiale. Puis, sous les hypothèses des sections précédentes, nous montrons la continuité de la famille $(\mathcal{S}(t))_{t \geq 0}$, qui par conséquent détermine un système dynamique

$$(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n), \quad (4.39)$$

dont l'espace de phase est \mathcal{R} . Nous démontrons enfin que le système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$ admet une famille d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, contenant l'attracteur global.

4.4.1 Convergence vers la moyenne spatiale

Pour cette partie, nous avons adapté le raisonnement du chapitre 4 de [93]. Supposons que le flot induit par le problème réseau (II) possède une région positivement invariante \mathcal{K} compacte. Posons

$$\sigma = \lambda_0 d_0 - M,$$

où $d_0 = \min(d_i, 1 \leq i \leq m)$ désigne le coefficient de diffusion minimal, λ_0 est la première valeur propre strictement positive de l'opérateur $-\Delta$ sur Ω avec condition de Neumann, et

$$M = \sup_{U \in \mathcal{K}} \|DH(U)\|_{\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})},$$

où H est l'opérateur non linéaire défini par $H(U) = -KU + \mathcal{F}(U)$.

Théorème 4.4. *Si $U_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{K})$ et $\sigma > 0$, alors la solution U du problème réseau (II) décroît dans X^n vers sa moyenne spatiale à une vitesse exponentielle :*

$$\|U(t) - \bar{U}(t)\|_{X^n} \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0, \quad (4.40)$$

où l'on a posé

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} U(x, t) dx,$$

et où C désigne une constante strictement positive.

Démonstration. Pour $t > 0$, on considère l'énergie de gradient du système, donnée par :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx,$$

où l'on omet les variables x et t afin d'alléger les notations. En dérivant $\Psi(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= -D \int_{\Omega} |\Delta U|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla U DH(\nabla U) dx \\ &\leq -\lambda_0 d_0 \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx + M \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx \\ &\leq -2\sigma \Psi(t). \end{aligned}$$

On en déduit que $\Psi(t) \leq \Psi(0)e^{-2\sigma t}$, pour tout $t > 0$. D'autre part, on a en vertu de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger [93] :

$$\lambda_0 \|U(t) - \bar{U}(t)\|_{X^n}^2 \leq \|\nabla U(t)\|^2, \quad t > 0,$$

ce qui mène à (4.40). □

Remarque 4.4.1. On peut montrer que λ_0 est inversement proportionnel au carré du diamètre de Ω . Par conséquent, si la taille du domaine Ω est relativement petite devant d_0 , alors l'hypothèse $\sigma > 0$ est raisonnable. Si au contraire la taille du domaine Ω est relativement grande devant d_0 , alors cette hypothèse peut ne pas être satisfaite. Par ailleurs, le coefficient M prend en compte indirectement la topologie du réseau et la taille de la région invariante. •

4.4.2 Estimations d'énergie

Les résultats de la section précédente sont valables dans un cadre limité. Il importe donc de compléter ces résultats, afin de comprendre le comportement asymptotique de la famille d'opérateurs non linéaires $(\mathcal{S}(t))_{t \geq 0}$. Soit U la solution du problème réseau (II) issue de $U_0 \in \mathcal{R}$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on introduit la fonction d'énergie :

$$\bar{U}_i^j(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(U_i^j(x, t) \right)^2 dx, \quad (4.41)$$

pour $t > 0$.

Théorème 4.5. *On suppose que les hypothèses 4.1-4.2 sont satisfaites, que \mathcal{K} et $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}^n$ sont positivement invariantes pour les problèmes (I) et (II) respectivement, et que F est continue sur \mathcal{K} . Alors, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, la fonction d'énergie \bar{U}_i^j donnée par (4.41) est définie pour tout $t > 0$, et vérifie l'estimation*

$$\bar{U}_i^j(t) \leq \bar{U}_i^j(0) e^{-2k_i t} + \frac{Z_i^j}{2k_i}, \quad (4.42)$$

pour $t > 0$, où Z_i^j est une constante strictement positive.

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons montré précédemment que sous les hypothèses du Théorème, le problème (II) avec $U_0 \in \mathcal{R}$ admet une unique solution globale U qui évolue dans \mathcal{K} . Ainsi, \bar{U}_i^j est définie pour tout $t > 0$.

La régularité de U implique que \bar{U}_i^j est dérivable. Calculons sa dérivée par rapport à t :

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_i^j(t) = \int_{\Omega} \left(U_i^j(x, t) \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(U_i^j(x, t) \right) dx.$$

Or la dérivée de U_i^j par rapport à t est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i^j = d_i \Delta U_i^j - k_i U_i^j + F_i(U^j) + (G^j(U))_i,$$

où on omet t et x afin d'alléger les notations. On a alors :

$$\int_{\Omega} U_i^j d_i \Delta U_i^j dx = -d_i \int_{\Omega} \left| \nabla U_i^j \right|^2 dx \leq 0,$$

et par ailleurs :

$$- \int_{\Omega} U_i^j k_i U_i^j dx = -2k_i \bar{U}_i^j.$$

Il reste à estimer les termes dans lesquels apparaissent les opérateurs F et G . En utilisant le fait que U évolue dans \mathcal{K} , et que F est continue sur \mathcal{K} , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_i^j F_i(U^j) dx &\leq \int_{\Omega} U_i^j \sup_{v \in \mathcal{K}} |F_i(v)| dx \\ &\leq b_i \times \sup_{v \in \mathcal{K}} |F_i(v)| \times |\Omega|. \end{aligned}$$

De la même façon, puisque G est donné par des expressions polynomiales, G est continu sur \mathcal{K} , et l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_i^j (G^j(U))_i dx &\leq \int_{\Omega} U_i^j \sup_{V \in \mathcal{K}} |G^j(V)| dx \\ &\leq b_i \times \sup_{V \in \mathcal{K}} |G^j(V)| \times |\Omega|, \end{aligned}$$

car $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^n$. En rassemblant les inégalités précédentes, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_i^j(t) + 2k_i \bar{U}_i^j(t) \leq Z_i^j,$$

où Z_i^j est une constante strictement positive donnée par :

$$Z_i^j = b_i |\Omega| \left(\sup_{v \in \mathcal{K}} |F_i(v)| + \sup_{V \in \mathcal{K}} |G^j(V)| \right).$$

D'après le lemme 2.1, l'intégration de l'inéquation précédente mène à :

$$\bar{U}_i^j(t) \leq \bar{U}_i^j(0) e^{-2k_i t} + \frac{Z_i^j}{2k_i}, \quad t > 0,$$

ce qui termine la preuve. □

4.4. Comportement asymptotique

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du Théorème 4.5, la solution U du problème réseau (II) issue de $U_0 \in \mathcal{R}$ satisfait l'estimation :*

$$\|U(t)\|_{X^n}^2 \leq \|U_0\|_{X^n}^2 e^{-2k_0 t} + \frac{Z_0}{2k_0}, \quad (4.43)$$

pour $t > 0$, $k_0 = \min(k_i, 1 \leq i \leq m)$, où Z_0 est une constante strictement positive donnée par :

$$Z_0 = n m b_{max} |\Omega| \left(\sup_{\mathcal{K}} |F| + \sup_{\mathcal{X}} |G| \right). \quad (4.44)$$

Démonstration. En sommant les inégalités (4.42) pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X^n}^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \|U_i^j(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \left[\|U_i^j(0)\|_{L^2}^2 e^{-2k_i t} + \frac{Z_i^j}{2k_i} \right] \\ &\leq e^{-2k_0 t} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \|U_i^j(0)\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{Z_i^j}{2k_i} \\ &\leq e^{-2k_0 t} \|U(0)\|_{X^n}^2 + \frac{1}{2k_0} \sum_{i,j} Z_i^j. \end{aligned}$$

Finalement, on écrit :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} Z_i^j \leq |\Omega| \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} b_i \left(\sup_{\mathcal{K}} |F_i| + \sup_{\mathcal{X}} |G^j| \right) \leq Z_0,$$

où Z_0 est donnée par (4.44), et $b_{max} = \max(b_i, 1 \leq i \leq m)$. □

4.4.3 Système dynamique

Les estimations d'énergie prouvées dans la section précédente révèlent le caractère dissipatif du système étudié. Nous allons maintenant utiliser ces estimations pour démontrer que la famille d'opérateurs non linéaires agissant sur $\mathcal{R} = L^2(\Omega, \mathcal{X})$ détermine un système dynamique.

Théorème 4.6. *On suppose que \mathcal{X} est une région compacte, et que les hypothèses du Théorème 4.5 sont satisfaites. Alors, la famille d'opérateurs non linéaires $(\mathcal{S}(t))_{t \geq 0}$ induite par le problème réseau (II) détermine un système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} [0, +\infty[\times \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (t, u) &\longmapsto \mathcal{S}(t)u \end{aligned}$$

est continue dans $[0, +\infty[\times \mathcal{R}$. Soit $r > 0$. D'après l'estimation (4.24), il existe $C_r > 0$ et $t_r > 0$ tels que :

$$\|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} \leq C_r \|U_0 - V_0\|_{X^n}, \quad 0 < t \leq t_r,$$

pour tous $U_0, V_0 \in B_r = \{U \in X^n ; \|U\|_{X^n} \leq r\}$. De plus, les estimations d'énergie (4.43) garantissent qu'il existe une fonction p continue et croissante définie dans \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq p(\|U_0\|_{X^n}),$$

pour tout $U_0 \in \mathcal{R}$. Posons $r_0 = p(r)$. On a alors

$$\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{S}(t)B_r \subset B_{r_0}.$$

Montrons, par récurrence sur k , que l'on a pour tout $k \geq 0$:

$$\|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} \leq C_{r_0}^{k+1} \|U_0 - V_0\|_{X^n},$$

pour $t \in [kt_{r_0}, (k+1)t_{r_0}]$ et $U_0, V_0 \in B_r$.

Si $k = 0$, on a bien

$$\|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} \leq C_{r_0} \|U_0 - V_0\|_{X^n},$$

puisque $B_r \subset B_{r_0}$.

Supposons ensuite que l'estimation soit vraie au rang $k - 1$. Si $t \in]kt_{r_0}, (k+1)t_{r_0}]$, on écrit :

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t - kt_{r_0})\mathcal{S}(kt_{r_0}).$$

Or $\mathcal{S}(kt_{r_0})U_0$ et $\mathcal{S}(kt_{r_0})V_0$ sont dans la boule B_{r_0} . On obtient donc l'estimation au rang k .

Finalement, $\mathcal{S}(t)$ est lipschitzien sur B_r , et la constante de Lipschitz C_{r_0} est uniformément bornée en t sur les intervalles finis de temps. Par ailleurs, pour tout $U_0 \in B_r$, l'application

$$\begin{aligned} [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{R} \\ t &\longmapsto \mathcal{S}(t)U_0 \end{aligned}$$

est continue. Comme r est arbitraire, on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} [0, +\infty[\times \mathcal{R} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (t, u) &\longmapsto S(t)u \end{aligned}$$

est continue dans $[0, +\infty[\times \mathcal{R}$. Par conséquent, la famille d'opérateurs non linéaires $\mathcal{S}(t)$ détermine un système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$. \square

4.4.4 Attracteurs exponentiels

Rappelons qu'un attracteur exponentiel est une partie compacte \mathfrak{m} positivement invariante, contenant l'attracteur global \mathfrak{a} , admettant une dimension fractale finie, et qui attire à une vitesse exponentielle les parties bornées de l'espace de phase. Nous allons maintenant démontrer que l'on peut réduire l'espace de phase du système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$, dans le but de prouver l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels.

Théorème 4.7. *Sous les hypothèses du Théorème 4.5, il existe une partie compacte \mathcal{R}_1 de X^n , bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, telle que le système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X^n)$ induit par le problème réseau (II) possède une famille \mathfrak{M} d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, qui contiennent l'attracteur global \mathfrak{a} .*

Nous commençons par démontrer deux lemmes. La réflexivité et la compacité sont deux éléments essentiels de leur preuve.

Lemme 4.1. *Pour tout $r > 0$, la boule fermée de rayon r*

$$\bar{B}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(r) = \{U \in X^n ; \|\mathcal{A}U\|_{X^n} \leq r\}$$

est une partie compacte de X^n .

Démonstration. Il suffit de montrer que $\bar{B}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(r)$ est fermée dans X^n . Soit (U_k) une suite de $\bar{B}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(r)$ qui converge vers U_∞ dans X^n . Puisque X^n est réflexif et que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est isomorphe à X^n , alors $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est réflexif. On en déduit, d'après le Théorème de Kakutani [12], que $\bar{B}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(r)$ est faiblement compacte. Par conséquent, (U_k) converge vers V_∞ faiblement dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, et on a $\|\mathcal{A}V_\infty\|_{X^n} \leq r$. D'autre part, l'injection $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X^n$ étant dense et continue, on a $(X^n)' \subset (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$. Donc (U_k) converge vers V_∞ faiblement dans X^n . Finalement, $U_\infty = V_\infty$. \square

Lemme 4.2. *Il existe une partie compacte \mathcal{R}_1 de X^n , bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, telle que le comportement asymptotique du système $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$ puisse être réduit à celui de $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X^n)$.*

Démonstration. D'après l'estimation d'énergie (4.43), on a

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq p(\|U_0\|_{X^n}), \quad t \geq 0,$$

pour tout $U_0 \in X^n$, où p est une fonction continue et croissante, définie dans \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Soit alors $s \geq 0$. On pose le problème

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(U), & t > 0, \\ U(0) = \mathcal{S}(s)U_0, \end{cases}$$

obtenu en modifiant la condition initiale dans le problème (4.19). On conclut qu'il existe $\tau > 0$, ne dépendant que de $\|\mathcal{S}(s)U_0\|_{X^n}$, et une fonction p_1 continue et croissante, définie dans \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que :

$$t \|\mathcal{A}\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq p_1(\|\mathcal{S}(s)U_0\|_{X^n}), \quad s < t < s + \tau.$$

Pour $s = 0$, on obtient :

$$\|\mathcal{A}\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq \frac{1}{t} p_1(\|\mathcal{S}(s)U_0\|_{X^n}), \quad 0 < t \leq \tau,$$

et pour $s = t - \tau$:

$$\|\mathcal{A}\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq \frac{1}{\tau} p_1(p_0(\|\mathcal{S}(s)U_0\|_{X^n})), \quad t > \tau.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que l'on ait, pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$:

$$\sup_{U_0 \in \mathcal{B}} \sup_{t \geq t_{\mathcal{B}}} \|\mathcal{A}\mathcal{S}(t)U_0\|_{X^n} \leq C_1,$$

où $t_{\mathcal{B}} > 0$ ne dépend que de \mathcal{B} . On pose alors

$$\mathcal{B}_1 = \bar{B}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(C_1).$$

Par construction, \mathcal{B}_1 est un ensemble absorbant. De plus, d'après le lemme précédent, \mathcal{B}_1 est une partie compacte de X^n . On introduit finalement

$$\mathcal{R}_1 = \overline{\bigcup_{t \geq t_{\mathcal{B}_1}} \mathcal{S}(t)\mathcal{B}_1} \subset \mathcal{B}_1,$$

où la fermeture est dans X^n . Ainsi construit, \mathcal{R}_1 est positivement invariant, compact, et borné dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. \square

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 4.7. Pour cela, nous allons d'abord démontrer que le système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X^n)$ vérifie la *squeezing property* (1.28). Puis, nous montrerons qu'il satisfait également la condition (1.29).

Preuve du Théorème. Montrons que le système $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X^n)$ vérifie la propriété (1.28). Puisque \mathcal{R}_1 est borné dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, la condition (4.21) implique que l'on a :

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|_{X^n} \leq L \|\mathcal{A}^\eta(U - V)\|_{X^n},$$

pour tous $U, V \in \mathcal{R}_1$, avec $L > 0$. De plus, l'injection $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X^n$ étant compacte, et \mathcal{A} étant un opérateur défini positif auto-adjoint, il existe une suite croissante de valeurs propres $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de \mathcal{A} strictement positives, qui tend vers $+\infty$, et telle que les vecteurs propres associés $(U_k)_{k \geq 1}$ composent une base orthonormale de X^n . Soit alors $N > 0$, Y_N l'espace vectoriel engendré par les N premiers vecteurs propres U_1, \dots, U_N , et soit P_N la projection orthogonale de X^n sur Y_N . Utilisant l'estimation (4.24), on fixe $t^* > 0$ tel que :

$$t^\eta \|\mathcal{A}^\eta(\mathcal{S}(t)U - \mathcal{S}(t)V)\|_{X^n} + \|\mathcal{S}(t)U - \mathcal{S}(t)V\|_{X^n} \leq C \|U - V\|_{X^n}$$

pour tous $U, V \in \mathcal{R}_1$ et $t \in]0, t^*]$, avec $C > 0$. Posons alors $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(t^*)$. Supposons ensuite que l'on ait :

$$\|(1 - P_N)(\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V)\|_{X^n} > \|\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V\|_{X^n}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V\|_{X^n}^2 &= \|P_N(\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V)\|_{X^n}^2 + \|(1 - P_N)(\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V)\|_{X^n}^2 \\ &< 2 \|(1 - P_N)(\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V)\|_{X^n}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, on a, d'après le Théorème 1.12 :

$$(1 - P_N)\mathcal{S}^*U = e^{-t^*\mathcal{A}}(1 - P_N)U + \int_0^{t^*} e^{-(t^*-s)\mathcal{A}}(1 - P_N)\mathcal{F}(\mathcal{S}(s)U)ds,$$

et de même pour $(1 - P_N)\mathcal{S}^*V$. On écrit maintenant

$$\begin{aligned} \left\| e^{-t^*\mathcal{A}}(1 - P_N)(U - V) \right\|_{X^n} &\leq e^{-t^*\lambda_{N+1}} \|U - V\|_{X^n} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{34}} \|U - V\|_{X^n}, \end{aligned}$$

pour N suffisamment grand. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t^*} e^{-(t^*-s)\mathcal{A}}(1 - P_N)[\mathcal{F}(\mathcal{S}(s)U) - \mathcal{F}(\mathcal{S}(s)V)]ds \right\|_{X^n} \\ &\leq L \int_0^{t^*} e^{-(t^*-s)\lambda_{N+1}} \|\mathcal{F}(\mathcal{S}(s)U) - \mathcal{F}(\mathcal{S}(s)V)\|_{X^n} ds \\ &\leq L \int_0^{t^*} e^{-(t^*-s)\lambda_{N+1}} s^{-\eta} \|U - V\|_{X^n} ds \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{34}} \|U - V\|_{X^n}, \end{aligned}$$

pour $N = N_0$ suffisamment grand. Il s'ensuit que

$$\|\mathcal{S}^*U - \mathcal{S}^*V\|_{X^n}^2 \leq \frac{1}{17} \|U - V\|_{X^n}^2,$$

si bien que \mathcal{S}^* vérifie la *squeezing property* (1.28) avec $\delta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $N = N_0$.

Puis, comme \mathcal{R}_1 est une partie compacte de X^n , il existe $\rho > 0$ tel que

$$\mathcal{R}_1 \subset B_\rho = \{U \in X^n ; \|U\|_{X^n} \leq \rho\}.$$

En répétant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 4.6, on montre qu'il existe une constante $C_{\rho_0} > 0$, où $\rho_0 = p(\rho)$, et $t_{\rho_0} > 0$, tels que :

$$\|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} \leq C_{\rho_0}^{k+1} \|U_0 - V_0\|_{X^n},$$

pour tous $U_0, V_0 \in B_\rho$ et $t \in [kt_{\rho_0}, (k+1)t_{\rho_0}]$. Il existe donc une constante $C_{\mathcal{R}_1} > 0$ telle que :

$$\|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} \leq C_{\mathcal{R}_1} \|U_0 - V_0\|_{X^n},$$

pour tous $U_0, V_0 \in \mathcal{R}_1$ et $t \in [0, t^*]$.

Enfin, puisque \mathcal{R}_1 est bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}(s)V_0\|_{X^n} &= \left\| \int_s^t [F(\mathcal{S}(\tau)V_0) - \mathcal{A}\mathcal{S}(\tau)V_0] d\tau \right\|_{X^n} \\ &\leq C_{\mathcal{R}_1} |t - s|, \end{aligned}$$

pour tout $V_0 \in \mathcal{R}_1$ et pour $0 \leq s < t \leq t^*$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(s)V_0\|_{X^n} &\leq \|\mathcal{S}(t)U_0 - \mathcal{S}(t)V_0\|_{X^n} + \|\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}(s)V_0\|_{X^n} \\ &\leq C_{\mathcal{R}_1} [|t - s| + \|U_0 - V_0\|_{X^n}], \end{aligned}$$

ce qui prouve que la propriété (1.29) est satisfaite.

Finalement, on applique le Théorème 1.14 présenté dans le chapitre préliminaire, ce qui achève la démonstration. \square

Puisque chaque attracteur exponentiel contient l'attracteur global, nous obtenons directement le résultat suivant.

Corollaire 4.3. *L'attracteur global \mathbf{a} a une dimension fractale finie.*

Les résultats précédents montrent que le comportement asymptotique du système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X^n)$ se réduit à l'étude d'une famille d'attracteurs de dimension fractale finie, qui décrit toutes les dynamiques asymptotiques possibles pour les solutions du problème réseau (II), bien qu'il ait été posé dans un contexte fonctionnel de dimension infinie. Le terme résiduel $\frac{Z_0}{2k_0}$ dans l'estimation d'énergie (4.43) peut être interprété comme une balance entre le paramètre k_0 , qui mesure la capacité du système à décroître exponentiellement vers l'équilibre trivial, et la constante Z_0 , qui dépend de la taille du réseau, à travers le nombre de ses nœuds, la forme de la région invariante \mathcal{H} , et le volume du domaine Ω . Si k_0 est grand devant Z_0 , alors le réseau est susceptible de converger vers l'équilibre trivial, à une vitesse exponentielle, auquel cas ses nœuds synchronisent. Si au contraire Z_0 est grand devant k_0 , alors le terme résiduel laisse envisager de multiples dynamiques, comme par exemple des motifs de Turing ou des phénomènes d'oscillations. Nous montrerons dans le prochain chapitre des simulations numériques pour l'exploration de ces dynamiques non triviales.

Remarque 4.4.2. Comme pour l'existence de solutions locales et la positivité, les Théorèmes 4.5, 4.6 et 4.7 sont valables pour le problème initial (I), en tant qu'instance du problème réseau (II) avec $n = 1$ et $G \equiv 0$. \bullet

4.4.5 Estimation de la dimension fractale

D'après [30], la dimension fractale de chaque attracteur exponentiel $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$ peut être estimée en fonction de la constante de Lipschitz L de l'opérateur non linéaire \mathcal{S}^* , du coefficient δ pour lequel l'opérateur \mathcal{S}^* vérifie la *squeezing property* (1.28), et de la valeur N_0 du rang de la projection orthogonale considérée dans la démonstration du Théorème 4.7 :

$$d_F(\mathbf{m}) \leq 1 + N_0 \max(1, \alpha(X)), \tag{4.45}$$

où $\alpha(X)$ est donné par :

$$\alpha(X) = \frac{\log\left(1 + \frac{2L}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{1}{4\delta}\right)}.$$

De plus, il est prouvé dans [30] que $\alpha(X)$ peut être majoré par une constante qui dépend des paramètres du système. Un travail en cours consiste à explorer le lien entre cette dimension fractale et les éléments de topologie du réseau. Cette perspective de recherche est discutée en conclusion de ce chapitre.

4.5 Étude d'un modèle épidémiologique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, de bord régulier, avec $d \in \mathbb{N}^*$, $d \leq 3$. On considère le modèle épidémiologique donné par le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_1 \Delta S - \alpha S I & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_2 \Delta I + \alpha S I - \beta I & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial S}{\partial \nu} = \frac{\partial I}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ S(x, 0) = S_0(x), \quad I(x, 0) = I_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.46)$$

avec une condition de Neumann au bord $\partial\Omega$, et des données initiales S_0, I_0 définies dans Ω . Dans ce système, S désigne la densité d'individus sains, susceptibles d'être infectés par une maladie donnée, au sein d'une population fixée, et I désigne la densité d'individus déjà infectés par cette maladie, au sein de la même population [79]. Les coefficients de diffusion d_1 et d_2 sont des nombres réels strictement positifs, tout comme les paramètres α et β . On suppose de plus que $\beta < 1$. Le terme $-\beta I$ apparaissant dans la deuxième équation correspond à la mortalité due à l'infection, parmi les individus infectés. Le terme $\pm\alpha SI$ modélise la contagion de l'infection par rencontre de deux individus, l'un étant infecté, et l'autre ne l'étant pas. Cette contagion augmente la densité d'individus infectés, tout en diminuant la densité d'individus sains. Notons $u = (S, I)^T$ et posons :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} F_1(u) \\ F_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S - \alpha S I \\ (1 - \beta)I + \alpha S I \end{pmatrix}.$$

Le système (4.46) s'écrit alors sous la forme (I) avec $m = 2$.

On construit ensuite un problème réseau à partir du système de réaction-diffusion (4.46), comme nous avons construit le problème (II) à partir du problème (I), en considérant un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ constitué de n sommets, et un opérateur de couplage G défini dans \mathbb{R}^{2n} . Soit $X = (L^2(\Omega))^2$. On note à nouveau A_i la réalisation de l'opérateur $-d_i \Delta + 1$ dans $L^2(\Omega)$ avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$, $i \in \{1, 2\}$, et $A = \text{diag}(A_1, A_2)$, dont le domaine est $(H_N^2(\Omega))^2$. En fixant $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$ et en suivant le raisonnement présenté dans la section 4.2.1, on donne enfin les formulations abstraites de ces deux problèmes, qui s'écrivent comme (4.18) et (4.19) respectivement :

$$(I) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = \mathcal{F}(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec $u_0 \in X_0$, $U = (u^1, \dots, u^n)$, $U_0 \in X_0^n$, $\mathcal{A} = \text{diag}(A, 1 \leq j \leq n)$ et \mathcal{F} est donné par (4.20).

Nous allons maintenant vérifier que le problème (4.46) satisfait les hypothèses 4.1, 4.2 et 4.3. Nous pourrions ainsi appliquer les théorèmes démontrés au cours de ce chapitre.

Commençons par vérifier l'hypothèse 4.1. Soient $v = (S, I)$ et $\tilde{v} = (\tilde{S}, \tilde{I})$ dans $\mathcal{D}(A^\eta)$. On a :

$$F(v) - F(\tilde{v}) = \begin{pmatrix} S - \tilde{S} - \alpha(SI - \tilde{S}\tilde{I}) \\ (1 - \beta)(I - \tilde{I}) + \alpha(SI - \tilde{S}\tilde{I}) \end{pmatrix}.$$

En utilisant la continuité des injections (4.15), (4.16) et l'équivalence de normes (4.13), on a :

$$\begin{aligned}
 & \left\| S - \tilde{S} - \alpha(SI - \tilde{S}\tilde{I}) \right\|_{L^2} \leq \left\| S - \tilde{S} \right\|_{L^2} + \alpha \left\| SI - \tilde{S}\tilde{I} \right\|_{L^2} \\
 & \leq \left\| A_1^\eta(S - \tilde{S}) \right\|_{L^2} + \alpha \left[\left\| SI - S\tilde{I} \right\|_{L^2} + \left\| S\tilde{I} - \tilde{S}\tilde{I} \right\|_{L^2} \right] \\
 & \leq \|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + \alpha \left[\|S\|_{L^\infty} \|I - \tilde{I}\|_{L^2} + \|\tilde{I}\|_{L^\infty} \|S - \tilde{S}\|_{L^2} \right] \\
 & \leq \|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + \alpha \left(\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X \right) \|v - \tilde{v}\|_X,
 \end{aligned}$$

où nous avons à nouveau noté L^2 et L^∞ à la place de $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ respectivement. Puis, on majore de façon similaire

$$\left\| (1 - \beta)(I - \tilde{I}) + \alpha(SI - \tilde{S}\tilde{I}) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'hypothèse 4.1 est donc satisfaite. Le Théorème 4.1 s'applique et garantit l'existence et l'unicité de solutions locales pour le système (4.46) et pour son problème réseau associé, pour toutes conditions initiales dans X_0 et X_0^n respectivement.

Nous continuons en montrant que l'hypothèse 4.2 est également satisfaite. En effet, il suffit d'introduire l'opérateur modifié \tilde{F} défini par :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(u) &= |S|, & \xi_1(u) &= -\alpha I, & \tilde{F}_1(u) &= \zeta_1(u) + S\xi_1(u), \\
 \zeta_2(u) &= (1 - \beta)|I|, & \xi_2(u) &= \alpha S, & \tilde{F}_2(u) &= \zeta_2(u) + I\xi_2(u),
 \end{aligned}$$

où on note encore $u = (S, I)^T$. Il est clair que $\zeta_i(u) \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$. De plus, on a pour tout $u \in \mathcal{D}(A^\eta)$:

$$\begin{aligned}
 \xi_1(u) &\leq \alpha \|I\|_{H^{2\eta}(\Omega)} \\
 &\leq \alpha \|A_1^\eta I\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \alpha \|A^\eta u\|_X,
 \end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\xi_2(u) \leq \alpha \|A^\eta u\|_X.$$

Par conséquent, le Théorème 4.2 s'applique et garantit la positivité des solutions pour le système (4.46) et pour son problème réseau associé.

Cherchons maintenant une région positivement invariante pour le flot induit par le système (4.46), sous la forme $\mathcal{K} = [0, b_1] \times [0, b_2]$, avec $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$. Nous supposons que $u_0 \in \mathcal{K}$, et nous notons

$$\Phi(u) = -Ku + F(u) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \Phi_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha S I \\ \alpha S I - \beta I \end{pmatrix}.$$

Nous supposons de plus que la solution locale du problème est définie sur $[0, T]$. Posons alors $\xi = b_1 - S$, et introduisons la fonction ρ définie par :

$$\rho(t) = \int_{\Omega} \chi(\xi) dx, \quad t \in [0, T],$$

où χ est la fonction de troncature donnée par (4.32). On a $\rho(0) = 0$ à condition que $S_0 \in [0, b_1]$. De plus, d'après les propriétés de χ , on a $\rho(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
 \rho'(t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial t} \chi'(\xi) dx \\
 &= \int_{\Omega} d_1 \Delta \xi \chi'(\xi) dx + \alpha \int_{\Omega} S I \chi'(\xi) dx \\
 &\leq \alpha \int_{\Omega} S I \chi'(\xi) dx \\
 &\leq 0,
 \end{aligned}$$

puisque $S \geq 0$, $I \geq 0$, $\chi'(\xi) \leq 0$, et que l'on a :

$$\int_{\Omega} d_1 \Delta \xi \chi'(\xi) dx = -d_1 \int_{\Omega} |\nabla \chi'(\xi)|^2 dx \leq 0.$$

Par conséquent, $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui montre que $S \in [0, b_1]$. Examinons ensuite le signe de Φ_2 sur le bord supérieur de \mathcal{K} . On a :

$$\Phi_2(S, b_2) < 0 \Leftrightarrow b_2(\alpha S - \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha S - \beta < 0.$$

Or, on a $S \leq b_1$. Une condition suffisante pour que \mathcal{K} soit une région positivement invariante pour le flot induit par le système (4.46) est donc $b_1 < \frac{\beta}{\alpha}$.

Considérons maintenant un problème réseau associé au système (4.46), qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial S^j}{\partial t} = d_1 \Delta S^j - \alpha S^j I^j + G_1^j(U) & 1 \leq j \leq n, \text{ dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial I^j}{\partial t} = d_2 \Delta I^j + \alpha S^j I^j - \beta I^j + G_2^j(U) & 1 \leq j \leq n, \text{ dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial S^j}{\partial \nu} = \frac{\partial I^j}{\partial \nu} = 0 & 1 \leq j \leq n, \text{ sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ S^j(x, 0) = S_0^j(x), \quad I^j(x, 0) = I_0^j(x) & 1 \leq j \leq n, \text{ dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où n désigne encore le nombre de nœuds dans le réseau, et $U = ((S^j, I^j), 1 \leq j \leq n)$. Pour simplifier, nous supposons que le couplage quadratique est nul, c'est-à-dire que $G_Q \equiv 0$, et que le couplage linéaire agit sur les deux variables S et I . On a donc :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$S = \sum_{j=1}^n S^j.$$

Puisque la somme des couplages sur les équations de chaque composante s'annule, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = d_1 \Delta S - \alpha \sum_{j=1}^n S^j I^j.$$

En considérant à nouveau $\xi = b_1 - S$ et $\rho(t) = \int_{\Omega} \chi(\xi) dx$, on montre que $S \leq b_1$, et à plus forte raison, $S^j \leq b_1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Autrement dit, la nature du graphe associé au problème réseau n'intervient pas dans la recherche d'une région invariante pour les composantes S^j , $1 \leq j \leq n$. Donnons maintenant quelques exemples simples de graphes pour lesquels les composantes I^j évolueront également dans une région invariante.

Considérons d'abord un graphe formé par une chaîne de n nœuds comme indiqué sur la figure 4.2. Supposons que chaque nœud soit couplé au nœud suivant par une connexion orientée.

Les équations du nœud 1 sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S^1}{\partial t} = d_1 \Delta S^1 - \alpha S^1 I^1 - \varepsilon S^1 \\ \frac{\partial I^1}{\partial t} = d_2 \Delta I^1 + \alpha S^1 I^1 - \beta I^1 - \varepsilon I^1, \end{array} \right.$$


 FIGURE 4.2 – Chaîne orientée composée de n nœuds pour un réseau de systèmes épidémiologiques.

celles des nœuds intermédiaires, $2 \leq j \leq n-1$, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial S^j}{\partial t} = d_1 \Delta S^j - \alpha S^j I^j - \varepsilon S^j + \varepsilon S^{j-1} \\ \frac{\partial I^j}{\partial t} = d_2 \Delta I^j + \alpha S^j I^j - \beta I^j - \varepsilon I^j + \varepsilon I^{j-1}, \end{cases}$$

et enfin, pour le nœud n :

$$\begin{cases} \frac{\partial S^n}{\partial t} = d_1 \Delta S^n - \alpha S^n I^n + \varepsilon S^{n-1} \\ \frac{\partial I^n}{\partial t} = d_2 \Delta I^n + \alpha S^n I^n - \beta I^n + \varepsilon I^{n-1}. \end{cases}$$

La condition (4.37) est directement vérifiée pour le nœud 1 qui est une source. On a donc $I^1 \in [0, b_2]$. Pour chaque nœud j intermédiaire, $2 \leq j \leq n-1$, la condition (4.37) s'écrit pour la composante I^j :

$$\varepsilon I^{j-1} + (\alpha S^j - \beta) b_2 < \varepsilon b_2.$$

Puisque $S^j \leq b_1$, une condition suffisante pour que l'inégalité précédente soit vérifiée est donc $I^{j-1} \leq b_2$ et $b_1 < \frac{\beta}{\alpha}$. Puisque l'on a $I^1 \leq b_2$, on obtient donc $I^j \leq b_2$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Enfin, la condition (4.37) pour le nœud n situé en bout de chaîne s'écrit pour la composante I^n :

$$(\alpha S^n - \beta) b_2 + \varepsilon I^{n-1} < \varepsilon b_2.$$

Elle est donc satisfaite pour $\varepsilon < \beta - \alpha b_1$. Cette condition sur ε disparaît si l'on ajoute une connexion du nœud n vers le nœud 1, transformant ainsi la chaîne en cycle.

Étudions maintenant le cas d'un graphe étoilé, composé d'un nœud central, connecté à $n-1$ nœuds périphériques, comme indiqué sur la figure 4.3.

La condition (4.37) est à nouveau directement satisfaite pour le nœud central. Chaque nœud périphérique étant une impasse, on retrouve comme précédemment que la condition (4.37) est vérifiée si $\varepsilon < \beta - \alpha b_1$. Si on inverse la direction du couplage, on obtient une condition plus restrictive, qui s'écrit :

$$\varepsilon < \frac{\beta - \alpha b_1}{n-1}.$$

Cette restriction devient d'autant plus forte que le nombre de nœuds périphériques augmente.

Dans chaque cas, nous avons démontré qu'il existe une condition sur ε pour que la région $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^n$ donnée par :

$$\mathcal{K} = \left\{ (S^j, I^j) \in (\mathbb{R}^+)^{2n} ; \sum_{j=1}^n S^j \leq b_1, I^j \leq b_2, 1 \leq j \leq n \right\},$$

avec $b_1 < \frac{\beta}{\alpha}$, soit une région positivement invariante pour le problème réseau associé au système (4.46). Puisque par ailleurs F est continue sur \mathcal{K} , on peut alors appliquer les Théorèmes 4.5, 4.6 et

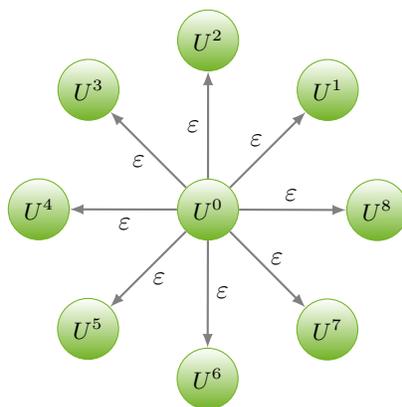


FIGURE 4.3 – Graphe étoilé pour un réseau de systèmes épidémiologiques.

4.7, qui montrent que le problème réseau associé au système (4.46) détermine un système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}, X^n)$, et qui décrivent le comportement asymptotique de ce système dynamique, en garantissant l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, contenant l'attracteur global.

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dynamique de réseaux couplés de systèmes de réaction-diffusion. En supposant ces systèmes dissipatifs, et les couplages conservatifs, nous avons montré que le réseau était lui-même dissipatif, en prouvant l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie. Nous utiliserons dans le prochain chapitre les résultats établis pour étudier des réseaux de systèmes PCR avec diffusion.

Au regard des estimations d'énergie (4.43), il paraît raisonnable de prévoir que la dimension fractale des attracteurs exponentiels sera proportionnelle au nombre de nœuds du réseau. Toutefois, les estimations (4.45) de la dimension fractale des attracteurs exponentiels ne font pas apparaître clairement les éléments de la topologie du système complexe étudié. Or, il est naturel de s'interroger sur la dépendance de cette dimension fractale par rapport à la taille du réseau sous-jacent, ou à la disposition des connexions au sein de ce réseau. Ainsi, la densité du réseau diminue-t-elle la dimension des attracteurs ? Quelles sont les configurations pour lesquelles la dimension de ces attracteurs augmente sensiblement ? Comment cette dimension varie-t-elle si l'on supprime une connexion du réseau, de sorte que plus aucun cycle n'existe dans ce même réseau ? Peut-on contrôler cette dimension par un choix particulier de topologie ? Ces questions sont étroitement liées au problème de l'analyse de bifurcation sur un attracteur, que nous avons évoqué dans notre introduction, et constituent une perspective de recherche.

Enfin, les réseaux de systèmes de réaction-diffusion permettent de tenir compte de la dimension spatiale d'un problème d'évolution par le biais du domaine sur lequel est posé le système de réaction-diffusion, mais aussi par l'intermédiaire de la structure du réseau. Nous souhaitons comparer ce modèle de réseau d'interaction avec une autre approche de la diffusion spatiale, appelée *diffusion généralisée*, qui associe l'opérateur laplacien de diffusion au plus proche voisin à l'opérateur bilaplacien [65], utilisé pour modéliser les phénomènes de diffusion à distance. Ainsi, considérons un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 . Supposons pour simplifier que Ω soit de forme rectangulaire, et partitionnons Ω en n sous-domaines $\omega_1, \dots, \omega_n$, reliés par des connexions distribuées sur une grille, comme indiqué sur la figure 4.4.

Nous proposons alors d'étudier conjointement les solutions de l'équation de diffusion généralisée,

4.5. Étude d'un modèle épidémiologique

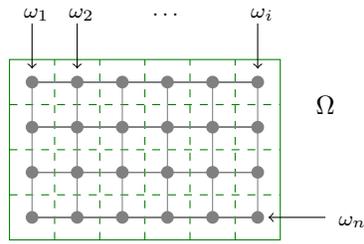


FIGURE 4.4 – Partitionnement d'un domaine rectangulaire Ω en une grille de sous-domaines $\omega_1, \dots, \omega_n$ pour l'étude de la diffusion généralisée.

définie par une équation d'ordre 4 de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta^2 U + c\Delta U + f(U), \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[,$$

où f est une fonction connue, et les solutions du réseau de systèmes de réaction-diffusion donné par :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = c\Delta U_i + f_i(U) + \varepsilon \sum_{j=1}^n (U_j - U_i), \quad \text{dans } \omega_i \times]0, +\infty[, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où les fonctions $f_i, 1 \leq i \leq n$, sont également connues, et ε est un coefficient réel. Nous souhaitons par exemple savoir si les solutions de ces deux problèmes ont la même nature et le même comportement asymptotique.

Réseaux de systèmes PCR avec diffusion

Ce chapitre est consacré à l'étude du système Panique-Contrôle-Réflexe avec diffusion, et des réseaux construits à partir de ce système de réaction-diffusion. Les résultats démontrés dans le chapitre précédent sont utilisés successivement pour les différentes étapes de l'étude. Nous commençons donc par prouver l'existence et l'unicité de solutions locales. Puis, nous démontrons leur positivité et établissons des conditions suffisantes qui garantissent l'existence de régions invariantes. Enfin, nous étudions le comportement asymptotique des solutions en montrant l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels, et nous illustrons les résultats théoriques par des simulations numériques effectuées à partir d'un schéma de décomposition.

5.1 Analyse du modèle spatio-temporel

Nous allons dans cette partie présenter l'étude du système de réaction-diffusion (2.6) obtenu en modélisant la propagation des comportements dans le système Panique-Contrôle-Réflexe. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné dont le bord $\partial\Omega$ est régulier. Le système Panique-Contrôle-Réflexe avec diffusion est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \Phi(u) & \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t_0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

où l'inconnue $u = (r, c, p, q)^T$ est une fonction de la variable spatiale $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et du temps $t \geq 0$. La matrice diagonale $D = \text{diag}(d_i, 1 \leq i \leq 4)$ contient les coefficients de diffusion $d_i > 0, 1 \leq i \leq 4$. Enfin, l'opérateur $\Phi(u) = (\Phi_i(u))_{1 \leq i \leq 4}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= +\gamma q(1-r) - Br + f(r, c)rc + g(r, p)rp + s_1c + s_2p, \\ \Phi_2(u) &= B_1r - C_2c + C_1p - f(r, c)rc + h(c, p)cp - \varphi c(r + c + p + q) - s_1c, \\ \Phi_3(u) &= B_2r + C_2c - C_1p - g(r, p)rp - h(c, p)cp - s_2p, \\ \Phi_4(u) &= -\gamma q(1-r), \end{aligned}$$

avec $B = B_1 + B_2$. Les éléments de modélisation conduisant à ce système ont été présentés au cours du chapitre 2.

Afin d'écrire la formulation abstraite du système (5.1), nous suivons le raisonnement présenté dans la section 4.2.1 ; nous considérons donc l'espace de Banach des fonctions à valeurs complexes

$$X = (L^2(\Omega))^4, \quad (5.2)$$

équipé de la norme produit de l'espace $L^2(\Omega)$. On introduit l'opérateur diagonal

$$A = \text{diag}(A_i, 1 \leq i \leq 4),$$

où les opérateurs A_i , $1 \leq i \leq 4$, sont les réalisations de $-d_1\Delta + B$, $-d_2\Delta + C_2$, $-d_3\Delta + C_1$ et $-d_4\Delta + \gamma$ respectivement, dans $L^2(\Omega)$, avec une condition de Neumann sur $\partial\Omega$. On suppose ici que la fonction γ est une constante strictement positive. D'après les résultats du chapitre préliminaire, les opérateurs A_i , $1 \leq i \leq 4$, sont des opérateurs sectoriels d'angles inférieurs strictement à $\frac{\pi}{2}$, définis positifs auto-adjoints dans $L^2(\Omega)$, et leur domaine est donné par :

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \quad (5.3)$$

Par conséquent, A est un opérateur sectoriel d'angle inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$, défini positif auto-adjoint dans X . Fixons ensuite $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$, et considérons la puissance fractionnaire A^η de l'opérateur A , dont le domaine est donné par l'espace d'interpolation :

$$\mathcal{D}(A^\eta) = \left([L^2(\Omega), H_N^2(\Omega)]_\eta \right)^4 = \left(H_N^{2\eta}(\Omega) \right)^4, \quad (5.4)$$

avec l'équivalence de normes :

$$\frac{1}{c_0} \|u\|_{H^{2\eta}(\Omega)} \leq \|A_i^\eta u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \|u\|_{H^{2\eta}(\Omega)}, \quad (5.5)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(A_i^\eta)$, $1 \leq i \leq 4$, où c_0 est une constante strictement positive. Comme dans le chapitre précédent, nous avons les injections continues :

$$H^{2\eta}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega). \quad (5.6)$$

Notons maintenant $F = (F_i)_{1 \leq i \leq 4}$ l'opérateur non linéaire défini dans $\mathcal{D}(A^\eta)$ par :

$$F(v) = \begin{pmatrix} \gamma q(1-r) + frc + grp \\ B_1 r + C_1 p - frc + hcp - \varphi c(r+c+p+q) \\ B_2 r + C_2 c - grp - hcp \\ \gamma qr \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

pour tout $v = (r, c, p, q)^T \in \mathcal{D}(A^\eta)$. Nous supposons ici que les fonctions f , g et h modélisant les contagions émotionnelles sont constantes. De plus, nous supposons que $s_1 = s_2 = 0$, c'est-à-dire que nous négligeons l'effet domino, et que la fonction φ est une constante strictement positive, comme la fonction γ . Enfin, on pose l'espace des conditions initiales :

$$X_0 = \{(r_0, c_0, p_0, q_0)^T \in X ; r_0 \geq 0, c_0 \geq 0, p_0 \geq 0, q_0 \geq 0\}. \quad (5.8)$$

Nous formulons donc le problème (5.1) comme une équation parabolique semi-linéaire dans X :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dans la suite, nous noterons H^2 , L^2 , L^∞ à la place de $H^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, afin d'alléger les notations. Les coefficients c_k désignent des constantes strictement positives.

5.1.1 Construction de solutions locales

Pour montrer que le problème (5.9) admet des solutions locales, nous allons vérifier que l'opérateur non linéaire F satisfait l'hypothèse 4.1. Commençons par démontrer un lemme.

Lemme 5.1. *Il existe une constante $K_1 > 0$, telle que :*

$$\|F_1(v) - F_1(\tilde{v})\|_{L^2} \leq K_1 \left[\|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X \right],$$

pour tous v, \tilde{v} dans $\mathcal{D}(A^\eta)$.

Démonstration. Choisissons $v = (r, c, p, q)^T$, $\tilde{v} = (\tilde{r}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q})^T \in \mathcal{D}(A^\eta)$. On a :

$$\|F_1(v) - F_1(\tilde{v})\|_{L^2} \leq \|\gamma q - \gamma \tilde{q}\|_{L^2} + \|\gamma q r - \gamma \tilde{q} \tilde{r}\|_{L^2} + \|f r c - f \tilde{r} \tilde{c}\|_{L^2} + \|g r p - g \tilde{r} \tilde{p}\|_{L^2}.$$

On écrit d'abord :

$$\begin{aligned} \|\gamma q - \gamma \tilde{q}\|_{L^2} &\leq \gamma \|q - \tilde{q}\|_{L^2} \\ &\leq \|q - \tilde{q}\|_{L^2} \\ &\leq c_1 \|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X, \end{aligned}$$

et de façon analogue :

$$\begin{aligned} \|\gamma q r - \gamma \tilde{q} \tilde{r}\|_{L^2} &\leq \|q r - q \tilde{r}\|_{L^2} + \|q \tilde{r} - \tilde{r} \tilde{q}\|_{L^2} \\ &\leq c_2 \left[\|q\|_{H^{2\eta}} \|r - \tilde{r}\|_{L^2} + \|\tilde{r}\|_{H^{2\eta}} \|q - \tilde{q}\|_{L^2} \right] \\ &\leq c_3 (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X. \end{aligned}$$

De la même façon, ayant supposé constantes les fonctions d'imitation f, g et h , on a :

$$\begin{aligned} \|f r c - f \tilde{r} \tilde{c}\|_{L^2} &\leq |f| \|r c - \tilde{r} \tilde{c}\|_{L^2} \\ &\leq c_4 \left[\|r c - r \tilde{c}\|_{L^2} + \|r \tilde{c} - \tilde{r} \tilde{c}\|_{L^2} \right] \\ &\leq c_5 (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X, \end{aligned}$$

et de la même manière :

$$\|g r p - g \tilde{r} \tilde{p}\|_{L^2} \leq c_6 (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X$$

Il s'ensuit que :

$$\|F_1(v) - F_1(\tilde{v})\|_{L^2} \leq c_7 \left[\|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X \right],$$

ce qui achève la démonstration. \square

On obtient, en répétant les mêmes arguments, des estimations semblables pour F_i , avec des constantes $K_i > 0$, $2 \leq i \leq 4$. Finalement, on pose :

$$K_0 = \max(K_i, 1 \leq i \leq 4),$$

ce qui donne :

$$\|F(v) - F(\tilde{v})\|_X \leq K_0 \left[\|A^\eta(v - \tilde{v})\|_X + (\|A^\eta v\|_X + \|A^\eta \tilde{v}\|_X) \|v - \tilde{v}\|_X \right], \quad (5.10)$$

pour tous $v, \tilde{v} \in \mathcal{D}(A^\eta)$.

Par application du Théorème 1.12 présenté dans le chapitre préliminaire, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Pour tout $U_0 \in X_0$, il existe $T_{U_0} > 0$ tel que le problème (5.1) possède une unique solution U dans l'espace*

$$\mathcal{C}([0, T_{U_0}], \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}], X) \cap \mathcal{C}^1([0, T_{U_0}], X). \quad (5.11)$$

De plus, U satisfait l'estimation :

$$\|U(t)\|_X + t \|AU(t)\|_X \leq C, \quad 0 < t \leq T_{U_0}, \quad (5.12)$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend uniquement de $\|U_0\|_X$. Enfin, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$ et un temps $t_r > 0$, tels que

$$t^n \|A^n(U(t) - V(t))\|_X + \|U(t) - V(t)\|_X \leq C_r \|U_0 - V_0\|_X,$$

pour tous $U_0, V_0 \in B_r = \{U \in X ; \|U\|_X \leq r\}$ et $t \in]0, t_r]$, où U et V désignent les solutions issues de U_0 et V_0 respectivement.

5.1.2 Régions invariantes

Positivité

Pour montrer la positivité des solutions du système (5.9), nous allons appliquer le Théorème 4.2 prouvé dans le chapitre précédent.

Proposition 5.1. *Pour tout $U_0 \in X_0$, les composantes de la solution U du problème (5.9) sont positives sur $[0, T_{U_0}]$.*

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \zeta_1(v) &= \gamma |q|, & \xi_1(v) &= -\gamma q + fc + gp, \\ \zeta_2(v) &= B_1 |r| + C_1 |p|, & \xi_2(v) &= -fr + hp - \varphi(r + c + p + q), \\ \zeta_3(v) &= B_2 |r| + C_2 |c|, & \xi_3(v) &= -gr - hc, \\ \zeta_4(v) &= 0, & \xi_4(v) &= \gamma r, \end{aligned}$$

pour tout $v = (r, c, p, q)^T \in \mathcal{D}(A^n)$, puis nous définissons \tilde{F} par :

$$\tilde{F}(v) = \begin{pmatrix} \zeta_1(v) + r\xi_1(v) \\ \zeta_2(v) + c\xi_2(v) \\ \zeta_3(v) + p\xi_3(v) \\ \zeta_4(v) + q\xi_4(v) \end{pmatrix}.$$

Ainsi défini, l'opérateur modifié \tilde{F} satisfait à l'hypothèse 4.2. En effet, il est clair que $\zeta_i(v) \geq 0$, pour $1 \leq i \leq 4$. De plus, on a :

$$\xi_1(v) \leq \|-\gamma q + fc + gp\|_{H^{2n}} \leq c_{13} \|A^n v\|_X,$$

et de même pour $\xi_i(v)$, $2 \leq i \leq 4$. En appliquant le Théorème 4.2 dans le cas d'un réseau réduit à un seul nœud, on obtient la positivité des solutions du système (5.9) issues de $U_0 \in X_0$. \square

Bornage

Pour $U_0 \in X_0$, notons $U = (r, c, p, q)^T$ la solution du problème (5.1), définie sur $[0, T_{U_0}]$. Introduisons la fonction V définie par

$$V(t) = \int_{\Omega} (r(t) + c(t) + p(t) + q(t)) dx, \quad (5.13)$$

pour $0 \leq t \leq T_{U_0}$. La positivité des composantes de U , que nous venons de démontrer, implique que $V(t) \geq 0$ pour tout $t \leq T_{U_0}$. De plus, V est continûment dérivable, et l'on a

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial r}{\partial t}(t) + \frac{\partial c}{\partial t}(t) + \frac{\partial p}{\partial t}(t) + \frac{\partial q}{\partial t}(t) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (d_1 \Delta r + d_2 \Delta c + d_3 \Delta p + d_4 \Delta q) dx - \varphi \int_{\Omega} c(t) (r(t) + c(t) + p(t) + q(t)) dx. \end{aligned}$$

Puisque U satisfait une condition au bord de Neumann, on obtient

$$\int_{\Omega} (d_1 \Delta r + d_2 \Delta c + d_3 \Delta p + d_4 \Delta q) dx = 0.$$

Puis, on a $\varphi > 0$, d'où $V'(t) \leq 0$ pour tout $t \leq T_{U_0}$. Il s'ensuit que V est une fonction décroissante sur $[0, T_{U_0}]$, ce qui mène à une borne dans L^1 .

Proposition 5.2. *Pour tout $t \in [0, T_{U_0}]$, on a :*

$$\|r(t) + c(t) + p(t) + q(t)\|_{L^1} \leq V(0). \quad (5.14)$$

Une borne dans L^1 n'est pas suffisante pour montrer que les solutions au problème (5.1) sont globales. Cependant, l'estimation (5.14) peut aboutir à une borne dans L^∞ , dans le cas restreint où les coefficients de diffusion d_i , $1 \leq i \leq 4$, sont égaux. Notons K la partie de \mathbb{R}^4 définie par

$$K = \{(r, c, p, q) \in (\mathbb{R}^+)^4 ; r + c + p + q \leq 1\}. \quad (5.15)$$

Proposition 5.3. *Supposons que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$. Alors K est positivement invariante pour le flot induit par le problème (5.1).*

Démonstration. Notons $\xi(t) = 1 - [r(t) + c(t) + p(t) + q(t)]$ pour $0 \leq t \leq T_{U_0}$, et

$$\rho(t) = \int_{\Omega} \chi(\xi(t)) dx,$$

où χ est la fonction de troncature définie par (4.32), vérifiant les propriétés (4.33). Puisque $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$, on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = d_1 \Delta \xi + \varphi c(1 - \xi).$$

Or $U_0 \in K$, donc $\xi(0) \geq 0$, d'où $\rho(0) = 0$. De plus, $\rho(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_{U_0}]$, par construction de χ . Puis, ρ est continûment dérivable, et l'on a

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \int_{\Omega} \chi'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} \chi'(\xi) [d_1 \Delta \xi + \varphi c(1 - \xi)] dx \\ &= d_1 \int_{\omega} \chi'(\xi) \Delta \xi dx + \varphi \int_{\Omega} \chi'(\xi) c dx - \varphi \int_{\Omega} \chi'(\xi) \xi dx \leq 0, \end{aligned}$$

car $\int_{\omega} \chi'(\xi) \Delta \xi = - \int_{\Omega} |\nabla \chi'(\xi)|^2 dx \leq 0$, et d'après les propriétés (4.33). \square

Cherchons ensuite une région positivement invariante pour le système (5.9) dans le cas où les coefficients de diffusion ne sont pas égaux. Nous posons $\mu = \max(|f|, |g|, |h|)$, et nous supposons que $\mu \leq \frac{\varphi}{2}$.

Lemme 5.2. Soit $U = (r, c, p, q)^T$ la solution du problème (5.9) issue de $U_0 \in X_0$, définie sur $[0, T_{U_0}]$. Soient α et β deux nombres réels strictement positifs, vérifiant :

$$\begin{cases} \mu(\alpha + \beta) < B \\ B_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha \\ C_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha \\ \mu < \frac{C_1}{1+\alpha} \\ B_2 + C_2\alpha < \beta[C_1 - \mu(1 + \alpha)]. \end{cases} \quad (5.16)$$

Alors la région $[0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta]$ est positivement invariante pour les composantes (r, c, p) .

Démonstration. Nous allons examiner le champ de vecteurs associé au terme de réaction du problème (5.9) sur le bord supérieur de la région donnée par le produit $[0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta]$. Supposons que $U \in [0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta] \times \mathbb{R}^+$. On a d'abord :

$$-B + F_1(U)|_{r=1} < 0 \Leftrightarrow -B + fc + gp < 0.$$

Comme $0 \leq c \leq \alpha$ et $0 \leq p \leq \beta$, une condition suffisante pour que l'inégalité précédente soit vérifiée est donc $\mu(\alpha + \beta) < B$. On continue avec le champ de vecteurs associé à la composante c :

$$-C_2\alpha + F_2(U)|_{c=\alpha} < 0 \Leftrightarrow -C_2\alpha + r(B_1 - f\alpha - \varphi\alpha) + p(C_1 + h\alpha - \varphi\alpha) - \varphi\alpha(\alpha + q) < 0.$$

Une condition suffisante pour obtenir cette dernière inégalité est donc :

$$B_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha, \quad C_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha.$$

Ayant supposé $\mu \leq \frac{\varphi}{2}$, on est assuré que $\varphi - \mu > 0$. Enfin, nous avons pour le champ de vecteurs associé à la composante p :

$$-C_1\beta + F_3(U)|_{p=\beta} < 0 \Leftrightarrow B_2r + C_2c - (gr + hc)\beta < C_1\beta.$$

Il est donc suffisant d'avoir

$$\mu < \frac{C_1}{1+\alpha}, \quad B_2 + C_2\alpha < \beta[C_1 - \mu(1 + \alpha)].$$

D'après la remarque 4.3.3, la région $[0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta]$ est donc positivement invariante pour les composantes (r, c, p) . \square

Remarque 5.1.1. Les conditions (5.16) sont aisément satisfaites lorsque $\mu = 0$. Indiquons comment choisir α et β lorsque $\mu > 0$. On choisit d'abord α suffisamment grand, de sorte que

$$\alpha \frac{\varphi}{2} \geq B_1, \quad \alpha \frac{\varphi}{2} \geq C_1.$$

Puisque $\mu \leq \frac{\varphi}{2}$, on a donc bien

$$B_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha, \quad C_1 \leq (\varphi - \mu)\alpha.$$

Une fois α choisi, quitte à diminuer μ , on s'assure que la condition

$$\mu < \frac{C_1}{1+\alpha}$$

est remplie. Notons que cette étape impose une nouvelle contrainte sur μ . On choisit ensuite β suffisamment grand, de sorte que

$$C_1\beta > \frac{B_2 + C_2\alpha}{C_1 - \mu(1 + \alpha)}.$$

Enfin, quitte à diminuer une seconde fois μ , on s'assure que

$$\mu < \frac{B}{\alpha + \beta}.$$

Cette diminution de μ induit éventuellement une baisse du quotient

$$\frac{B_2 + C_2\alpha}{C_1 - \mu(1 + \alpha)},$$

et n'altère donc pas le choix de β . L'ensemble des paramètres vérifiant les conditions (5.16) n'est donc pas vide, mais ces conditions imposent une restriction sur l'intensité des phénomènes de contagion émotionnelle modélisés par f , g et h . •

Proposition 5.4. *Sous les conditions (5.16), la région compacte $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$ définie par*

$$\mathcal{K}_{\alpha,\beta} = [0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta] \times [0, 1] \tag{5.17}$$

est positivement invariante pour le flot induit par le problème (5.9).

Démonstration. Supposons que $U_0 \in \mathcal{K}_{\alpha,\beta}$. La proposition 5.1 assure que les composantes de la solution $U = (r, c, p, q)^T$ du problème (5.9) issue de U_0 , définie sur $[0, T_{U_0}]$, sont positives. En outre, le lemme précédent garantit que $(r, c, p) \in [0, 1] \times [0, \alpha] \times [0, \beta]$. Il reste à examiner la composante q . Posons $\xi = 1 - q$ et considérons la fonction ρ définie par :

$$\rho(t) = \int_{\Omega} \chi(\xi) dx, \quad t \in [0, T_{U_0}],$$

où χ est la fonction de troncature définie par (2.2). On a à nouveau $\rho(0) = 0$, $\rho(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_{U_0}]$, et de plus :

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \chi'(\xi) dx \\ &= \int_{\Omega} d_4 \Delta \xi \chi'(\xi) dx + \gamma \int_{\Omega} q(1-r) \chi'(\xi) dx \\ &\leq \gamma \int_{\Omega} q(1-r) \chi'(\xi) dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

puisque $q \geq 0$, $r \leq 1$, $\chi'(\xi) \leq 0$, et que l'on a :

$$\int_{\Omega} d_4 \Delta \xi \chi'(\xi) dx = -d_4 \int_{\Omega} |\nabla \chi'(\xi)|^2 dx \leq 0.$$

Par conséquent, on a bien $\xi \geq 0$, c'est-à-dire $q \leq 1$, ce qui achève la démonstration. □

5.1.3 Comportement asymptotique

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats généraux démontrés au cours du chapitre précédent, afin de décrire le comportement asymptotique des solutions au problème (5.9). Dans toute cette partie, nous désignons à nouveau par $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$ la région positivement invariante donnée par la proposition 5.4, et nous supposons que les conditions (5.16) sont satisfaites. Enfin, nous posons $\mathcal{R} = L^2(\Omega, \mathcal{K}_{\alpha,\beta})$.

Estimations d'énergie

En appliquant le corollaire 4.2 avec $n = 1$ et $G \equiv 0$, on obtient directement la proposition suivante.

Proposition 5.5. *Soit $U_0 \in \mathcal{R}$, et soit U la solution du problème (5.9) issue de U_0 , définie sur $[0, +\infty[$. Alors on a pour tout $t \geq 0$:*

$$\|U(t)\|_X^2 \leq \|U_0\|_X^2 e^{-2k_0 t} + \frac{Z_0}{2k_0},$$

où k_0 et Z_0 sont des constantes données par :

$$\begin{aligned} k_0 &= \min(B, C_1, C_2, \gamma), \\ Z_0 &= 4 \max(1, \alpha, \beta) \times |\Omega| \times \sup_{\mathcal{K}_{\alpha, \beta}} |F|. \end{aligned}$$

Une analyse détaillée du système (5.9) permet cependant d'obtenir une estimation d'énergie plus fine pour les composantes r et q de la solution U issue de $U_0 \in \mathcal{R}$. Pour $\theta \in]0, 1[$, nous notons :

$$\delta_0 = \min\left(\gamma(1 - \theta), 2B - 1 - \frac{1}{\theta} - 2\mu(\alpha + \beta)\right).$$

Proposition 5.6. *Soit $U_0 \in \mathcal{R}$, et soit U la solution du problème (5.9) issue de U_0 , définie sur $[0, +\infty[$. On suppose que $\delta_0 > 0$. Alors on a pour tout $t \geq 0$:*

$$\theta\gamma \|r(t)\|_{L^2}^2 + \|q(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\theta\gamma \|r_0\|_{L^2}^2 + \|q_0\|_{L^2}^2\right) e^{-\delta_0 t}.$$

Démonstration. Puisque $U_0 \in \mathcal{R}$, les composantes r et q de la solution U du problème (5.9) issue de U_0 évoluent chacune dans $[0, 1]$. Considérons les fonctions d'énergie R et Q définies par :

$$R(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (r(t))^2 dx, \quad Q(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (q(t))^2 dx.$$

On a pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} R'(t) &= \int_{\Omega} r(t) \frac{\partial r}{\partial t}(t) dx \\ &= \int_{\Omega} d_1 r(t) \Delta r(t) dx - B \int_{\Omega} (r(t))^2 dx + \gamma \int_{\Omega} q(t) r(t) [1 - r(t)] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[f \times (r(t))^2 c(t) + g \times (r(t))^2 p(t) \right] dx \\ &\leq -2BR(t) + \gamma \int_{\Omega} q(t) r(t) dx - \gamma \int_{\Omega} q(t) (r(t))^2 dx + 2\mu(\alpha + \beta)R(t) \\ &\leq [-2B + 1 + 2\mu(\alpha + \beta)]R(t) + Q(t), \end{aligned}$$

puisque $q(t) \geq 0$, et d'après l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que

$$\theta\gamma R'(t) \leq \theta\gamma [-2B + 1 + 2\mu(\alpha + \beta)]R(t) + \theta\gamma Q(t),$$

pour $t > 0$. De la même façon, on a pour tout $t \geq 0$:

$$Q'(t) \leq -\gamma Q(t) + \gamma R(t),$$

ce qui mène à :

$$\theta\gamma R'(t) + Q'(t) \leq \left[-2B + 1 + \frac{1}{\theta} + 2\mu(\alpha + \beta)\right] \theta\gamma R(t) - \gamma(1 - \theta)Q(t), \quad \forall t > 0.$$

On introduit alors

$$\delta_0 = \min \left(\gamma(1 - \theta), 2B - 1 - \frac{1}{\theta} - 2\mu(\alpha + \beta) \right).$$

Il s'ensuit que

$$\theta\gamma R'(t) + Q'(t) \leq -\delta_0 [\theta\gamma R(t) + Q(t)], \quad \forall t > 0,$$

et on obtient finalement, d'après le lemme 2.1 :

$$\theta\gamma \|r(t)\|_{L^2}^2 + \|q(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\theta\gamma \|r_0\|_{L^2}^2 + \|q_0\|_{L^2}^2 \right) e^{-\delta_0 t},$$

pour tout $t > 0$. □

La proposition précédente garantit que la dynamique asymptotique des composantes r et q de la solution du système (2.2) est triviale lorsque que $\delta_0 > 0$, puisque r et q décroissent alors à une vitesse exponentielle vers 0 dans $L^2(\Omega)$. La condition $\delta_0 > 0$ est raisonnable puisque le paramètre μ , qui majore les coefficients f , g , h intervenant dans les processus de contagions émotionnelles, est négligeable devant le coefficient B , qui modélise la proportion d'individus évoluant du comportement de réflexe vers les comportements de contrôle et de panique. En revanche, l'estimation donnée par la proposition 5.5 ne permet pas de prouver une convergence des composantes c et p vers l'équilibre trivial. Leur dynamique asymptotique peut alors être étudiée à travers l'existence d'attracteurs.

Attracteur global et attracteurs exponentiels

En appliquant les Théorèmes 4.6 et 4.7, on obtient directement la proposition suivante.

Proposition 5.7. *Il existe une partie compacte \mathcal{R}_1 de X , bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, telle que le système dynamique $(\mathcal{S}(t), \mathcal{R}_1, X)$ induit par le problème (5.9) possède une famille \mathfrak{M} d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, qui contiennent l'attracteur global \mathfrak{a} .*

Les attracteurs exponentiels donnés par la proposition précédente décrivent la dynamique asymptotique des solutions du problème (5.9). Parmi les dynamiques possibles, on peut d'abord envisager une convergence des solutions vers l'équilibre trivial, qui correspond au retour attendu des individus touchés par l'événement catastrophique étudié vers un comportement du quotidien. En examinant le terme résiduel $\frac{Z_0}{2k_0}$ apparaissant dans l'estimation d'énergie donnée par la proposition 5.5, on retrouve le rôle particulier du paramètre C_1 , qui mesure la proportion d'individus évoluant du comportement de panique vers le comportement de contrôle. En effet, si C_1 est grand devant Z_0 , alors le terme résiduel $\frac{Z_0}{2k_0}$ diminue, et la solution doit rester relativement proche de l'équilibre trivial. Si au contraire C_1 tend vers 0, alors le terme résiduel $\frac{Z_0}{2k_0}$ augmente, ce qui laisse la possibilité d'une persistance de panique. Enfin, d'autres dynamiques non triviales sont envisageables, parmi lesquelles l'émergence de solutions périodiques, ou l'apparition de motifs de Turing. Ces dynamiques non triviales seront discutées en conclusion de ce chapitre.

5.1.4 Simulations numériques

Nous terminons cette section avec quelques simulations numériques du problème (5.9), afin d'illustrer les résultats théoriques établis précédemment.

Domaine circulaire

Nous considérons un domaine circulaire Ω de rayon $\bar{\rho} = 10$. Les valeurs des paramètres sont présentées dans le tableau 5.1, et la condition initiale est donnée par :

$$q_0(x, y) = [1 + (x - \bar{\rho})^2 + (y - \bar{\rho})^2]^{-1}, \quad r_0 = c_0 = p_0 \equiv 0,$$

ce qui correspond à la situation où tous les individus de la population étudiée sont dans un comportement du quotidien q avant le déclenchement de l'événement catastrophique, avec un regroupement des individus au centre du domaine Ω . Les valeurs de B_1 et B_2 signifient que le processus d'évolution du comportement de réflexe vers les comportements de contrôle et de panique respectivement, sont d'intensité équivalente, et sont dominés par les processus d'évolution du contrôle vers la panique, mesuré par C_2 . Le coefficient de diffusion d_2 est choisi supérieur aux autres coefficients de diffusion, ce qui signifie que l'on considère que la diffusion du comportement de contrôle est plus rapide.

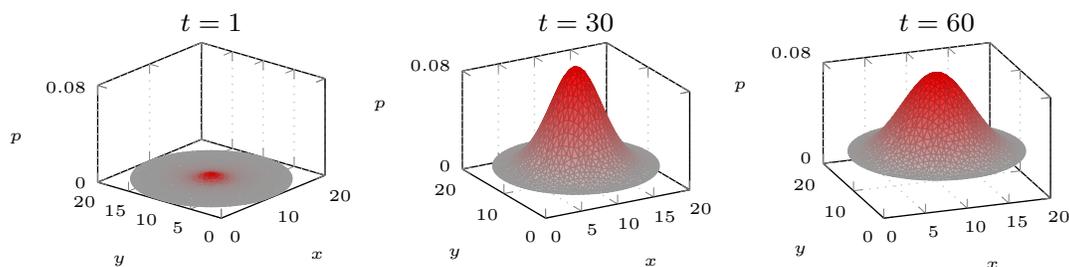


FIGURE 5.1 – Persistance de panique pour une faible valeur du paramètre C_1 mesurant l'évolution comportementale de la panique vers le contrôle. La moyenne du niveau de panique augmente avec le temps, et recouvre de plus en plus le domaine Ω .

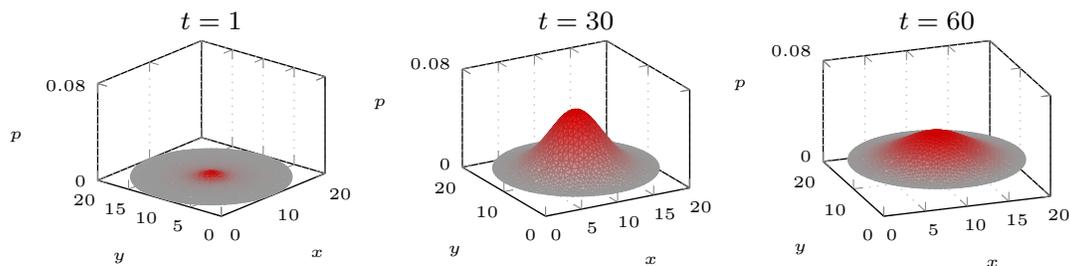


FIGURE 5.2 – Décroissance du niveau de panique obtenue pour $C_1 = 0.6$, après une phase de transition correspondant à l'action de la catastrophe, durant laquelle le comportement de panique se propage au sein de la population touchée par l'événement catastrophique.

Les résultats sont présentés sur les figures 5.1 et 5.2. Lorsque $C_1 = 0.02$, on observe une persistance de panique, notamment au bord du domaine Ω . Lorsque $C_1 = 0.6$, on observe au contraire une décroissance rapide du comportement de panique, en accord avec les résultats de la section précédente.

Domaine avec obstacle

Nous considérons ensuite un domaine modélisant un espace présentant un obstacle. Pour cela, nous choisissons $\Omega = D_1 \setminus D_2$, où D_1 est un disque de rayon $\bar{\rho} = 10$, et D_2 un disque de rayon $\frac{\bar{\rho}}{4}$. Les valeurs de paramètres sont $C_1 = 0.05$, $d_1 = d_2 = 50$, $d_3 = d_4 = 1$; les autres valeurs sont identiques à la simulation précédente, tout comme la condition initiale. Les résultats sont présentés sur la figure 5.3. On observe une propagation plus lente du comportement de panique à travers le domaine, qui s'explique par la valeur du rapport $\frac{d_2}{d_3}$ entre les coefficients de diffusion des comportements de contrôle et de panique respectivement. Lorsque $t = 60$, les comportements de panique et de contrôle semblent recouvrir la majeure partie du domaine, sans toutefois atteindre pleinement la partie située derrière l'obstacle.

TABLEAU 5.1 – Valeurs des paramètres pour les simulations numériques du problème (5.9).

Paramètre	Valeur
γ, φ	1
B_1, B_2	0.4
C_1	0.02 ou 0.6
C_2	0.6
d_1, d_3, d_4	1
d_2	5
$\bar{\rho}$	10

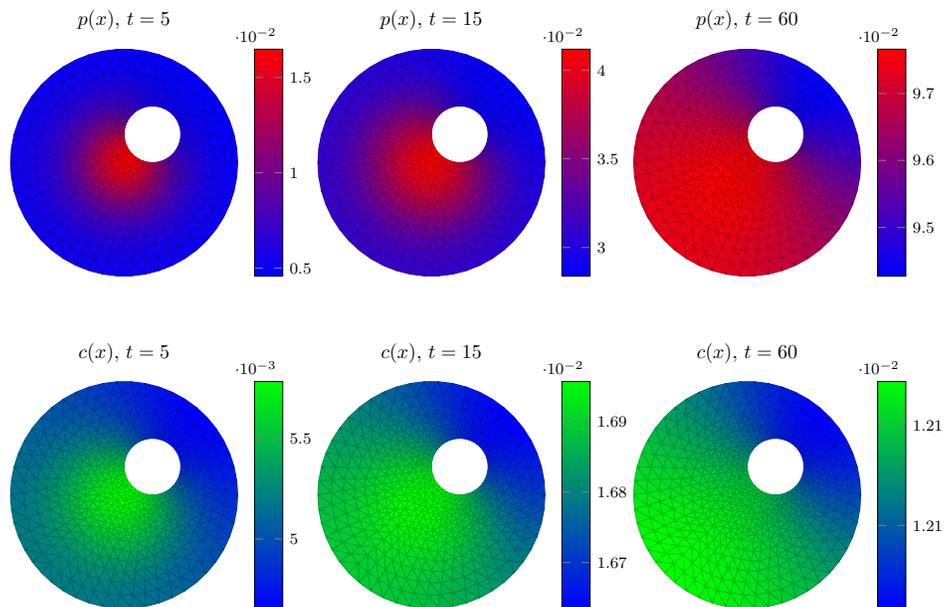


FIGURE 5.3 – Simulation numérique du système PCR (5.9) dans le cas d’un domaine présentant un obstacle. La première ligne montre la densité de panique pour trois valeurs du temps t . La deuxième ligne montre la densité de contrôle aux mêmes instants.

5.2 Étude du problème réseau

Nous continuons avec l’étude de la dynamique des réseaux couplés construits à partir du système (5.1). La majeure partie des résultats établis dans cette section est obtenue par application directe des théorèmes du chapitre précédent. Nous considérons donc un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ composé d’un ensemble fini \mathcal{N} de n nœuds ($n \in \mathbb{N}^*$) et d’un ensemble fini \mathcal{E} d’arêtes. Nous fixons $\varepsilon > 0$, et introduisons la matrice de connectivité $L = (L_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $L_{j,i} = \varepsilon$ si $(i, j) \in \mathcal{E}$ avec $i \neq j$, et

$$L_{i,i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n L_{j,i}. \quad (5.18)$$

La matrice L est donc de taille n , et la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est nulle. Nous supposons que l’ensemble \mathcal{E} ne contient aucune boucle. Nous considérons également la matrice

\mathcal{H} de taille 4 définie par

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

et l'opérateur Φ défini par

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} -Br + \gamma q(1-r) + frc + grp \\ B_1r - C_2c + C_1p - frc + hcp - \varphi c(r+c+p+q) \\ B_2r + C_2c - C_1p - grp - hcp \\ \gamma qr \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.2.1. Dans le modèle Panique-Contrôle-Réflexe, les couplages correspondent à des déplacements physiques d'individus d'un nœud vers un autre. La matrice \mathcal{H} indique que les composantes r , c et p sont couplées, mais pas q , ce qui signifie que les individus en comportement du quotidien sont davantage concernés par une évolution rapide vers le comportement de réflexe, que par une migration vers d'autres nœuds du réseau. •

Les équations du problème réseau s'écrivent donc :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = D\Delta U_i + \Phi(U_i) + \sum_{j=1}^n L_{i,j} \mathcal{H} U_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \quad (5.20)$$

où $U_i = (r_i, c_i, p_i, q_i)^T$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4)$, avec la condition de Neumann au bord $\partial\Omega$

$$\frac{\partial r_i}{\partial \nu} = \frac{\partial c_i}{\partial \nu} = \frac{\partial p_i}{\partial \nu} = \frac{\partial q_i}{\partial \nu} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (5.21)$$

et une condition initiale

$$\begin{aligned} r_i(x, 0) &= r_{i,0}(x), & c_i(x, 0) &= c_{i,0}(x), \\ p_i(x, 0) &= p_{i,0}(x), & q_i(x, 0) &= q_{i,0}(x), \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.22)$$

5.2.1 Construction de solutions locales

Le problème réseau (5.20)-(5.21)-(5.22) s'écrit dans X^n :

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{U}}{dt} + \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{U}), & t > 0, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \end{cases} \quad (5.23)$$

où $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)^T$, \mathcal{A} est l'opérateur obtenu avec n copies de l'opérateur A défini dans la section précédente :

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A, 1 \leq i \leq n), \quad (5.24)$$

dont le domaine est donné par $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H_N^2(\Omega))^{4n}$, et \mathcal{F} est l'opérateur non linéaire défini dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\eta)$ par

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = (F(U_i))_{1 \leq i \leq n} + \mathcal{L}(\mathcal{U}) \quad (5.25)$$

où η est fixé comme précédemment de sorte que $\frac{3}{4} < \eta < 1$, $\mathcal{U}_0 \in X_0^n$, et \mathcal{L} est donné par

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \left(\sum_{j=1}^n L_{i,j} \mathcal{H} U_j \right)_{1 \leq i \leq n}, \quad \mathcal{U} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (5.26)$$

Nous avons vérifié dans la section précédente que l'opérateur F satisfait l'hypothèse 4.1. Par application du Théorème 4.1 du chapitre précédent, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Pour tout $\mathcal{U}_0 \in X_0^n$, il existe $T_{\mathcal{U}_0} > 0$ tel que le problème (5.20) possède une unique solution \mathcal{U} dans l'espace*

$$\mathcal{C}([0, T_{\mathcal{U}_0}], \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}([0, T_{\mathcal{U}_0}], X^n) \cap \mathcal{C}^1([0, T_{\mathcal{U}_0}], X^n). \quad (5.27)$$

De plus, \mathcal{U} satisfait l'estimation :

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{X^n} + t \|\mathcal{A}\mathcal{U}(t)\|_{X^n} \leq C, \quad 0 < t \leq T_{\mathcal{U}_0}, \quad (5.28)$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend uniquement de $\|\mathcal{U}_0\|_X$. Enfin, pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$ et un temps $t_r > 0$, tels que

$$t^n \|\mathcal{A}^n(\mathcal{U}(t) - \mathcal{V}(t))\|_{X^n} + \|\mathcal{U}(t) - \mathcal{V}(t)\|_{X^n} \leq C_r \|\mathcal{U}_0 - \mathcal{V}_0\|_{X^n},$$

pour tous $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0 \in B_r = \{\mathcal{U} \in X^n ; \|\mathcal{U}\|_{X^n} \leq r\}$ et $t \in]0, t_r]$, où \mathcal{U} et \mathcal{V} désignent les solutions issues de \mathcal{U}_0 et \mathcal{V}_0 respectivement.

5.2.2 Régions invariantes

Positivité

La positivité des solutions au problème réseau (5.20) découle directement de la proposition 5.1, qui garantit que l'opérateur non linéaire F satisfait l'hypothèse 4.2, et du Théorème 4.2 établi dans le chapitre précédent.

Proposition 5.8. *Soit $\mathcal{U}_0 \in X_0^n$, et \mathcal{U} la solution du problème (5.20) issue de \mathcal{U}_0 , définie sur $[0, T_{\mathcal{U}_0}]$. Alors ses composantes r_i, c_i, p_i et q_i , $1 \leq i \leq n$, sont positives sur $[0, T_{\mathcal{U}_0}]$.*

Bornage

Comme dans l'étude du problème (5.1), on obtient aisément une borne dans L^1 pour les solutions du problème réseau (5.20). Soit \mathcal{V} la fonction définie par

$$\mathcal{V}(t) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(r_i(t) + c_i(t) + p_i(t) + q_i(t) \right) dx.$$

Proposition 5.9. *Pour tout $\mathcal{U}_0 \in X_0^n$, soit $\mathcal{U} = ((r_i, c_i, p_i, q_i), 1 \leq i \leq n)$ la solution du problème réseau (5.20), définie sur $[0, T_{\mathcal{U}_0}]$. Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^n \left[\|r_i(t) + c_i(t) + p_i(t) + q_i(t)\|_{L^1} \right] \leq \mathcal{V}(0), \quad t \in [0, T_{\mathcal{U}_0}]. \quad (5.29)$$

La preuve est identique à celle de la proposition 5.2. L'estimation (5.29) fournit également une borne dans L^∞ dans le cas où les coefficients de diffusion sont tous égaux.

Proposition 5.10. *Supposons que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$. Alors l'ensemble \mathcal{K} défini par*

$$\mathcal{K} = \left\{ (r_i, c_i, p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^+)^{4n} ; r_i + c_i + p_i + q_i \leq 1, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

est positivement invariant pour le flot induit par le problème réseau (5.20).

Considérons ensuite la région $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$ définie par (5.17). Montrer que $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^n$ est positivement invariante pour le flot induit par le problème réseau (5.20), requiert des hypothèses supplémentaires, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent. Pour chaque nœud $i \in \{1, \dots, n\}$ du réseau, notons $J_i \subset \{1, \dots, n\}$ le sous-ensemble d'indices correspondant aux nœuds j ($j \neq i$) qui admettent une connexion orientée vers le nœud i , et notons $S_i = -L_{i,i}$ la somme des couplages sortant du nœud i . En appliquant le Théorème 4.3, on obtient directement le résultat suivant.

Théorème 5.3. *Supposons que les conditions (5.16) soient satisfaites, et qu'on ait en plus*

$$\begin{aligned} \mu(\alpha + \beta) + \sum_{j \in J_i} L_{i,j} &< B + S_i, \\ \alpha \sum_{j \in J_i} L_{i,j} &< S_i \alpha + C_2 \alpha + \varphi \alpha^2, \\ B_2 + C_2 \alpha + \mu(1 + \alpha)\beta + \beta \sum_{j \in J_i} L_{i,j} &< S_i \beta + C_1 \beta, \end{aligned} \quad (5.30)$$

pour tout nœud $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors l'ensemble $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^n$ est positivement invariant pour le flot induit par le problème réseau (5.20).

Remarque 5.2.2. Les conditions (5.30) du Théorème 5.3 sont directement satisfaites pour un nœud qui joue le rôle d'une *source*. En effet, on a alors simultanément

$$S_i > 0, \quad \sum_{J_i} L_{i,j} = 0.$$

Au contraire, ces conditions sont restrictives pour un nœud placé dans une impasse. Il est alors impératif que la dynamique interne soit suffisamment efficace pour compenser le flux entrant, puisqu'alors on a $S_i = 0$. Dans les applications concrètes, les zones situées dans une impasse, c'est-à-dire en bout de chaîne, sont souvent des zones de refuge, ce qui favorise le processus d'évolution du comportement de panique vers le comportement de contrôle. Autrement dit, les conditions (5.30) sont compatibles avec le modèle. •

5.2.3 Comportement asymptotique

Sous les hypothèses du Théorème 5.3, nous avons montré que la région $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^n$ est positivement invariante pour le flot induit par le problème réseau (5.20). Posons alors

$$\mathcal{Z} = L^2(\Omega, \mathcal{K}_{\alpha,\beta}).$$

Pour $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{Z}$, notons $\mathcal{U}(t, \mathcal{U}_0)$ la solution du problème réseau (5.20), définie pour tout $t \geq 0$. On définit un semi-groupe $\mathcal{S}(t)$ d'opérateurs non linéaires agissant sur \mathcal{Z} en posant

$$\mathcal{S}(t)\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(t, \mathcal{U}_0), \quad (5.31)$$

pour tout $t \geq 0$ et $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{Z}$. En appliquant le corollaire 4.2 démontré dans le chapitre précédent, on obtient directement des estimations d'énergie pour les solutions du problème réseau (5.20).

Proposition 5.11. *Sous les hypothèses du Théorème 5.3, la solution \mathcal{U} du problème réseau (5.20) issue de $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{R}$ satisfait l'estimation :*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{X^n}^2 \leq \|\mathcal{U}_0\|_{X^n}^2 e^{-2k_0 t} + \frac{Z_0}{2k_0}, \quad (5.32)$$

pour $t > 0$, $k_0 = \min(B, C_2, C_1, \gamma)$, où Z_0 est une constante strictement positive donnée par :

$$Z_0 = 4n \max(1, \alpha, \beta) |\Omega| \left(\sup_{\mathcal{K}_{\alpha,\beta}} |F| + \sup_{\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^n} |\mathcal{L}| \right). \quad (5.33)$$

Remarque 5.2.3. Ces estimations d'énergie montrent que le terme résiduel $\frac{Z_0}{2^{k_0}}$ dépend de la taille du réseau, à travers le nombre n de ses nœuds, et de sa topologie, à travers le facteur

$$\sup_{\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^n} |\mathcal{L}|,$$

où \mathcal{L} est défini par (5.26). Comme nous l'avons évoqué au cours du chapitre précédent, il est naturel de s'interroger sur l'influence des éléments de topologie du réseau sur le comportement asymptotique des solutions du problème (5.20). Cette question centrale est l'objet d'une perspective de recherche. •

Pour montrer enfin que le problème réseau (5.20) induit un système dynamique qui admet une famille d'attracteurs, on applique les Théorèmes 4.6 et 4.7 du chapitre précédent.

Théorème 5.4. *On suppose que les hypothèses du Théorème 5.3 et de la proposition 5.11 sont vérifiées. Alors le semi-groupe d'opérateurs non linéaires $\mathcal{S}(t)$ défini par (5.31) détermine un système dynamique continu $(\mathcal{S}(t), \mathcal{Z}, X^n)$. De plus, il existe une partie compacte \mathcal{Z}_1 bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, telle que $(\mathcal{S}(t), \mathcal{Z}_1, X^n)$ possède un attracteur global \mathfrak{A} , et une famille d'attracteurs exponentiels \mathfrak{M} de dimension fractale finie, qui contiennent \mathfrak{A} .*

Remarque 5.2.4. L'attracteur global \mathfrak{A} et la famille d'attracteurs exponentiels \mathfrak{M} décrivent le comportement asymptotique du flot induit par le problème réseau (5.20). Leur dimension fractale peut être estimée en fonction des paramètres intervenant dans le système, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent. Un travail est en cours, pour donner une estimation précise de cette dimension fractale, et établir un certain lien entre cette dimension et les éléments de la topologie du réseau. Il semble par exemple raisonnable de prévoir que la dimension des attracteurs sera fonction de la taille du réseau. L'effet de la nature des couplages semble en revanche plus difficile à déceler. Un réseau densément connecté admet-il un attracteur de faible dimension? Comment varie cette dimension si l'on supprime quelques connexions dans le réseau? D'autre part, le caractère dissipatif du problème réseau (5.20) est décrit par les estimations d'énergie (5.32). Si le système perd une partie de son énergie et converge vers un état de repos, alors peut-on démontrer que cet état de repos est lui-même décrit par un système conservatif, de dimension inférieure à celle du système dont il est issu? Ces questions sont encore largement ouvertes. •

5.2.4 Simulations numériques

Pour terminer ce chapitre, nous présentons les résultats de quelques simulations obtenues par l'implémentation d'un schéma de décomposition.

Effet de l'orientation du couplage dans un réseau de 4 nœuds

Considérons d'abord un réseau de 4 nœuds, avec deux configurations de couplage distinctes. On suppose que 2 nœuds (représentés en rouge sur la figure 5.4) admettent une valeur faible du paramètre d'évolution C_1 , qui modélise l'évolution du comportement de panique vers le comportement de contrôle, et qu'ils sont couplés à 2 autres nœuds (représentés en vert sur la figure 5.4) pour lesquels ce même paramètre C_1 admet une valeur suffisamment grande. Les conditions initiales pour les 4 nœuds sont données par

$$q_0(x, y) = [1 + (x - \bar{\rho})^6 + (y - \bar{\rho})^6]^{-1}, \quad r_0 = c_0 = p_0 \equiv 0,$$

ce qui correspond à une concentration d'individus en comportement du quotidien, au centre du domaine, avant l'arrivée de l'événement catastrophique. Les valeurs des paramètres sont indiquées dans le tableau 5.2.

Les résultats de la première situation de couplage (figure 5.4(a)) sont présentés sur la figure 5.5. On observe que l'évacuation des individus situés sur les nœuds 1 et 2, susceptibles de présenter un niveau élevé de panique en l'absence de couplage, en direction des nœuds 3 et 4, identifiés comme ayant la

TABLEAU 5.2 – Valeurs de paramètres pour la simulation numérique d’un réseau PCR de 4 nœuds.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
γ, φ	1	C_2	0.2
B_1	0.15	d_1, d_2, d_3, d_4	1
B_2	0.9	ε	1
C_1	0 or 0.3	$\bar{\rho}$	10

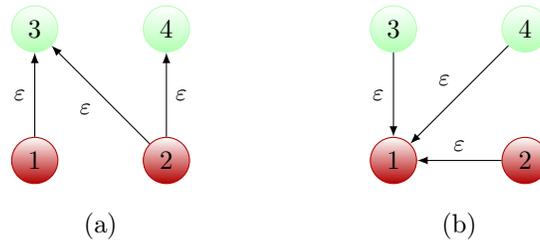


FIGURE 5.4 – Réseau PCR composé de 4 nœuds. (a) Évacuation des individus situés sur les nœuds 1 et 2, susceptibles de présenter un niveau élevé de panique, en direction des nœuds 3 et 4, identifiés comme ayant la capacité d’absorber le comportement de panique. (b) Déplacement des individus vers le nœud 1, qui admet un niveau de panique élevé en l’absence de couplage.

capacité d’absorber le comportement de panique, diminue le niveau de panique sur les nœuds exposés 1 et 2, et que la vitesse de décroissance du comportement de panique est plus rapide sur le nœud 2, qui admet une double évacuation.

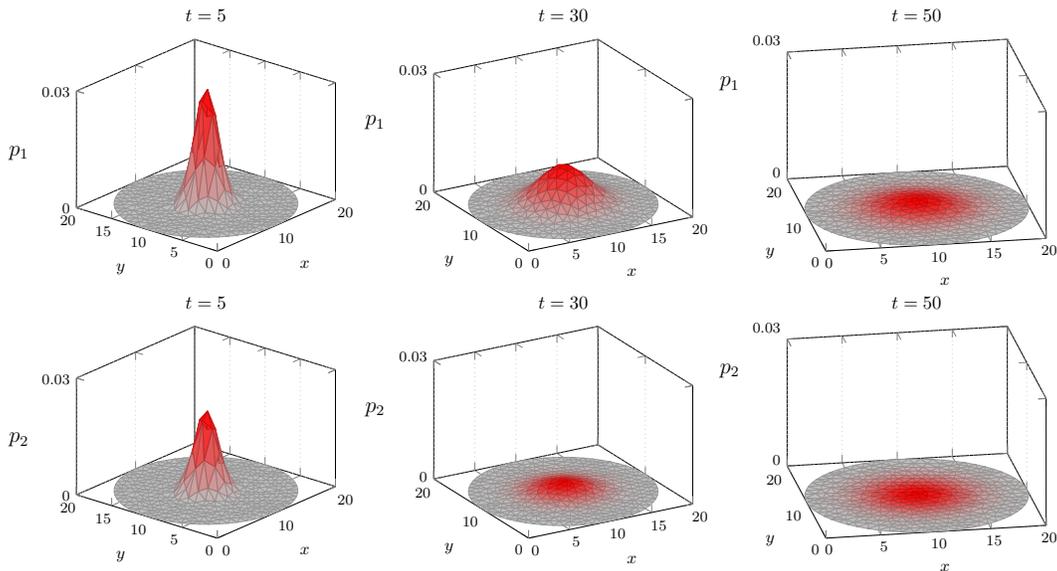


FIGURE 5.5 – Résultats numériques pour la situation de couplage indiquée sur la figure 5.4(a). Les densités de panique p_1 et p_2 des nœuds 1 et 2 sont présentés sur la première et la deuxième ligne respectivement. Ces densités décroissent, et la vitesse de décroissance du comportement de panique est plus rapide sur le nœud 2, qui admet une double évacuation.

Les résultats de la deuxième situation de couplage (figure 5.4(b)) sont présentés sur la figure 5.6. Le niveau de panique décroît rapidement sur le nœud 2, alors qu'il est exacerbé sur le nœud 1.

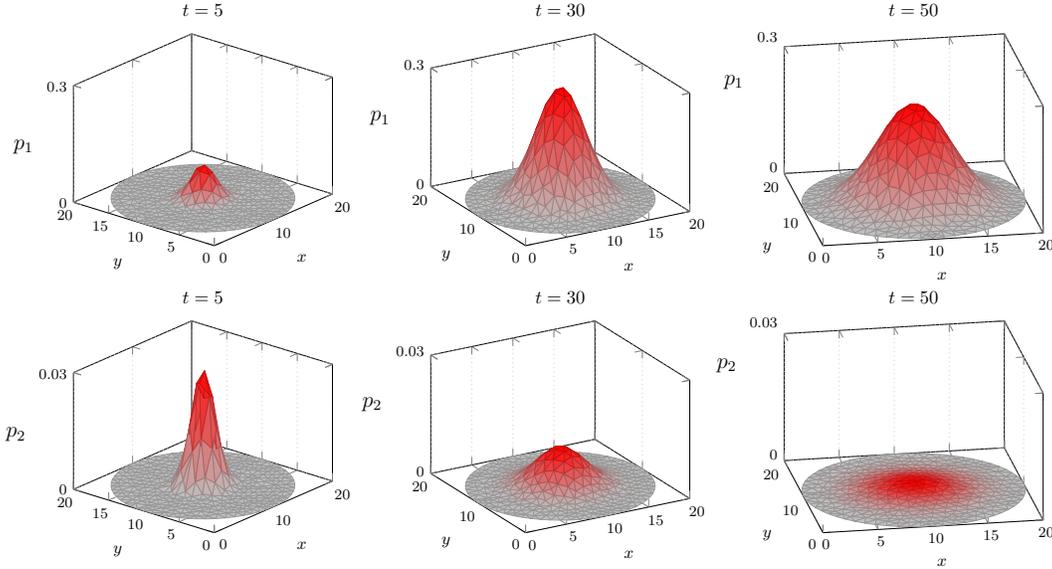


FIGURE 5.6 – Résultats numériques pour la situation de couplage indiquée sur la figure 5.4(b). Le niveau de panique p_1 sur le nœud 1 (première ligne) est exacerbé, tandis que le niveau de panique p_2 sur le nœud 2 (deuxième ligne) est inhibé.

Effet d'un fort ratio dans les coefficients de diffusion et d'une imitation quadratique contrôle-panique

Pour finir, nous présentons les résultats d'une simulation numérique réalisée sur un réseau de 2 nœuds, en supposant un fort ratio dans les coefficients de diffusion, ainsi qu'une imitation quadratique entre les comportements de contrôle et de panique sur le nœud 2, modélisée par le terme $\pm h c_2 p_2$, avec $h = 0.95$, dans les équations des comportements de contrôle et de panique du nœud 2. Nous supposons que le nœud 1 est connecté vers le nœud 2. Les valeurs de paramètres sont indiquées dans le tableau 5.3. Nous avons choisi des coefficients de diffusion qui privilégient la propagation du comportement de contrôle. Les conditions initiales sont données pour chaque nœud par :

$$q_0(x, y) = \left[1 + \frac{1}{10}(x - \bar{\rho})^6 + \frac{1}{10}(y - \frac{1}{2}\bar{\rho})^6\right]^{-1} + \left[1 + \frac{1}{10}(x - \bar{\rho})^6 + \frac{1}{10}(y - \frac{3}{2}\bar{\rho})^6\right]^{-1} \\ + \left[1 + \frac{1}{10}(x - \frac{3}{2}\bar{\rho})^6 + \frac{1}{10}(y - \bar{\rho})^6\right]^{-1} + \left[1 + \frac{1}{10}(x - \frac{1}{2}\bar{\rho})^6 + \frac{1}{10}(y - \bar{\rho})^6\right]^{-1},$$

et $r_0 = c_0 = p_0 \equiv 0$, ce qui correspond à un pic resserré d'individus en comportement du quotidien, au centre du domaine, avant l'arrivée de l'événement catastrophique.

Les résultats pour la densité du comportement de contrôle c_2 du nœud 2 sont présentés sur la figure 5.7. On observe que les zones sur lesquelles le comportement de contrôle c_2 admet un niveau élevé à $t = 5$, sont sujettes au processus d'imitation quadratique du comportement de contrôle vers le comportement de panique, d'où une diminution du niveau c_2 à $t = 50$. Dans le même temps, l'effet du couplage du nœud 1 vers le nœud 2 garantit un afflux d'individus sur le nœud 2 ; la faible valeur du paramètre φ inhibe le processus de retour au comportement du quotidien ; enfin, la valeur relativement forte du coefficient de diffusion d_2 pour le comportement de contrôle provoque une propagation du comportement de contrôle c_2 à travers le domaine Ω , à une vitesse supérieure à celle du comportement de panique. Ainsi, le comportement de contrôle c_2 reste majoritaire au centre du domaine, où l'effet

TABLEAU 5.3 – Valeurs de paramètres pour un réseau PCR de 2 nœuds.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
γ	1	ε, h	0.95
φ	0.01	d_1	15
B_1	0.15	d_2	25
B_2	0.9	d_3	0.1
C_1	0.01	d_4	5
C_2	0.2	$\bar{\rho}$	25

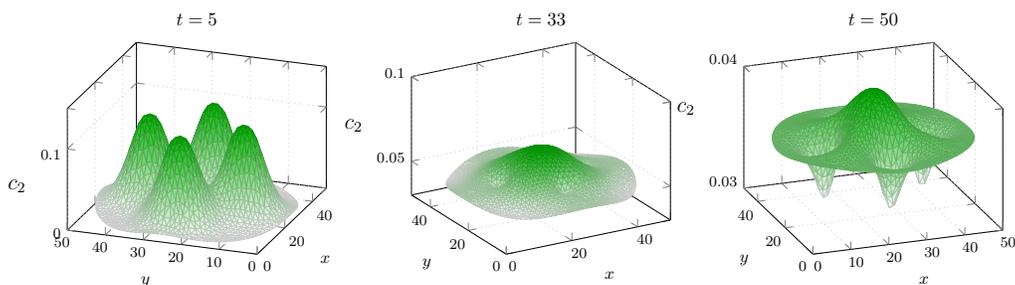


FIGURE 5.7 – Résultats pour la densité du comportement de contrôle c_2 du nœud 2, dans un réseau PCR de 2 nœuds. La superposition d'un fort ratio dans les coefficients de diffusion, et d'une imitation quadratique non négligeable entre les comportements de panique et de contrôle, produit une répartition hétérogène.

du processus d'imitation est moindre, puisque les individus en comportement de panique atteignent cette zone plus tard. En résumé, la superposition des effets de réaction, de diffusion, de couplage, et d'interaction non linéaire, produit des dynamiques hétérogènes, difficiles à interpréter.

Conclusion et perspectives

De nombreuses perspectives d'étude, dont certaines ont déjà été indiquées, apparaissent naturellement. Tout d'abord, on pourra choisir d'adapter ou de modifier les éléments de modélisation qui ont conduit à l'étude du système Panique-Réflexe-Contrôle avec diffusion. Par exemple, la diffusion par marche aléatoire, qui mène à considérer l'opérateur laplacien, ne privilégie aucune direction spatiale. Or, la nature des terrains géographiques concernés par les événements catastrophiques, permet d'envisager une diffusion orientée dans certaines directions. On pourra donc substituer à l'opérateur laplacien un opérateur de diffusion généralisée.

On pourra également expérimenter d'autres formes de couplage. Par exemple, considérons une fonction d'imitation $h_B(c, p)$ entre les comportements de panique et de contrôle, donnée par :

$$h_B(c, p) = -\mu_1 \frac{cp}{(1+c)^2} + \mu_2 \frac{cp}{(1+p)^2},$$

pour tous $c, p \in \mathbb{R}$. Ce choix, inspiré du modèle de Bazykin pour l'étude des systèmes proie-prédateur [7], est différent de celui que nous avons effectué dans notre étude, donné par l'équation (2.2). Mais il répond favorablement au caractère particulier du phénomène de contagion émotionnelle. En effet, si la densité p d'individus en panique est négligeable devant la densité c d'individus en contrôle, alors le deuxième terme $\mu_2 \frac{cp}{(1+p)^2}$ est dominant, ce qui correspond à un flux du comportement de panique vers le comportement de contrôle. Si les proportions sont inversées, c'est au contraire le premier terme

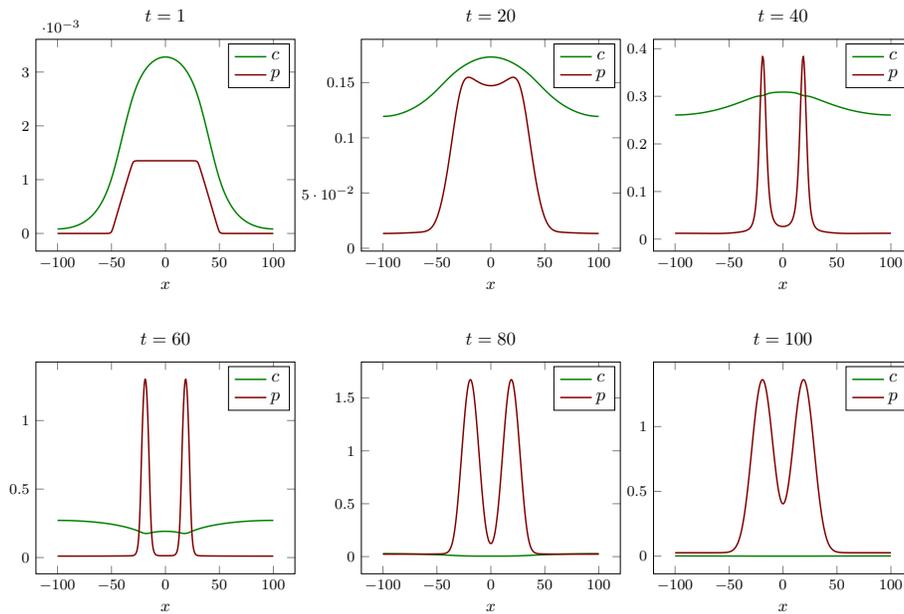


FIGURE 5.8 – Résultats numériques obtenus avec une fonction d’imitation inspirée du modèle proie-prédateur de Bazykin. Les phénomènes de contagion émotionnelle induisent une distribution hétérogène du comportement de panique.

qui domine. La fonction d’imitation h_B induit donc des flux qui peuvent être dirigés de la panique vers le contrôle, ou du contrôle vers la panique. La figure 5.8 montre les résultats numériques obtenus avec ce choix de modélisation, dans le cas d’un domaine Ω de dimension 1. Lorsque le coefficient de diffusion du comportement de contrôle est supérieur à celui du comportement de panique, le rapport entre les proportions c et p varie en fonction des points du domaine Ω . Les interactions qui en résultent provoquent alors l’apparition de pics de panique au centre du domaine. Ces dynamiques hétérogènes représentent un intérêt thématique particulier, qui montre que l’étude des comportements humains en situation de catastrophe n’en est qu’à ses prémices.

Enfin les questions d’analyse sur la dimension fractale des attracteurs et leur caractère conservatif supposé, qui ont été discutées dans la remarque 5.2.4, constituent une perspective de recherche supplémentaire.

Réseaux couplés de systèmes hamiltoniens

La recherche de solutions périodiques émergentes dans les réseaux complexes d'oscillateurs, présentée dans le chapitre 3, nous a conduit à étudier la dynamique des réseaux complexes de systèmes hamiltoniens, en lien avec le XVIème problème de Hilbert. Ce problème a été posé en 1900 à Paris, lors du Congrès International des Mathématiciens [51]. Il est divisé en deux parties, et la deuxième concerne en particulier la disposition et le nombre maximal $H(n)$ de cycles limites dans un champ de vecteurs polynomial du plan \mathbb{R}^2 , donné par un système de la forme

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y),$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n en x et y . Avant que le problème soit posé par Hilbert, Poincaré avait introduit la notion de cycle limite, et il avait déjà démontré qu'un champ de vecteurs polynomial du plan sans connexions hétéroclines ou homoclines entre des points-selles ne peut admettre qu'un nombre fini de cycles limites [85]. Ce théorème de finitude pour un système donné a été montré dans le cas général par Ilyashenko [56, 57] et Écalle [29] séparément, mais on ignore toujours aujourd'hui si $H(n)$ est fini, même pour des systèmes quadratiques. De nombreux efforts de recherche ont été menés pour faire progresser la connaissance dans ce domaine. On pourra consulter les revues de détail présentées dans [57] ou [69] à ce sujet. Par exemple, les équations de Liénard ont constitué une source intéressante de raisonnements innovants [84]. S'il semble difficile d'obtenir des bornes supérieures de $H(n)$, de nombreuses méthodes ont été au contraire développées afin de déterminer des bornes inférieures. L'une d'elles consiste à appliquer une perturbation à un système hamiltonien, et mène à l'étude de systèmes de la forme

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y),$$

où H , f et g sont des polynômes, et ε un coefficient réel. Une analyse de bifurcation permet alors de démontrer que la perturbation $(f, g)^T$ provoque la naissance de cycles limites, disposés en *nids*, c'est-à-dire en cycles limites encerclant un même point critique, dans un voisinage d'un centre ou d'un foyer faible par exemple. Dans [81, 55], il est ainsi démontré que le taux de croissance de $H(n)$ est au moins d'ordre n^2 . Par la suite, une nouvelle borne inférieure a été obtenue par Christopher et Lloyd en 1995 [20], et cette borne est d'ordre $n^2 \log n$. Quelques erreurs dans ce dernier article ont été corrigées par Li [69] et Han [44]. En outre, Lloyd a conjecturé en 1988 que $H(n)$ devait croître comme n^3 . Nous citons son raisonnement ci-dessous, tiré de [73].

Je conjecture que $H(n) = O(n^3)$. Mon raisonnement est simplement que $O(n^2)$ points critiques peuvent être encerclés par des cycles limites, et qu'il peut y avoir au plus $O(n)$ cycles limites autour de chacun de ces points.

Dans ce chapitre, nous allons introduire une nouvelle classe de systèmes hamiltoniens du plan, admettant des centres non dégénérés, dont le nombre et la disposition seront arbitraires. Ces systèmes hamiltoniens ont été construits avec une approche de type *réseau complexe* qui est nouvelle dans ce domaine. Ces systèmes hamiltoniens sont présentés dans la première partie. Dans la seconde partie, nous proposons quelques perturbations polynomiales qui provoquent l'apparition de nids de cycles limites dans un voisinage de chaque centre. Nous étudions pour cela plusieurs configurations géométriques simples de la disposition initiale des centres dans le système non perturbé. Puis, nous proposons une perturbation d'un système hamiltonien le long de son gradient, et montrons l'efficacité de cette perturbation. Nous terminons en montrant quelques résultats d'une approche algorithmique originale, qui repose sur le calcul symbolique des coefficients de Melnikov, développée afin de rechercher une perturbation de faible degré, et qui renforce la conjecture de Lloyd.

6.1 Construction d'une classe de systèmes hamiltoniens

6.1.1 Systèmes hamiltoniens admettant un nombre arbitraire de centres non dégénérés

Considérons une famille finie $\mathcal{P} = \{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n\}$ de points 2 à 2 distincts du plan \mathbb{R}^2 , où n est un entier naturel non nul. Pour chaque point $p = (x_i, y_i)$ de \mathcal{P} , $1 \leq i \leq n$, nous considérons le système différentiel (σ_i) défini par

$$(\sigma_i) \begin{cases} \dot{x} = y - y_i \\ \dot{y} = -(x - x_i), \end{cases} \quad (6.1)$$

qui admet un centre en $p = (x_i, y_i)$. Nous pouvons l'écrire comme un système hamiltonien :

$$(\sigma_i) \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial G_i}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial G_i}{\partial x}, \end{cases}$$

avec

$$G_i = \frac{1}{2} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]. \quad (6.2)$$

Notre premier objectif est de construire un système différentiel hamiltonien qui admet un centre en chaque point $p = (x_i, y_i)$ de \mathcal{P} , et qui se comporte localement comme le système (6.1) dans un voisinage de $p = (x_i, y_i)$, pour $1 \leq i \leq n$. Nous introduisons alors le système

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^n \left\{ (y - y_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\} \\ \dot{y} = \sum_{i=1}^n \left\{ -(x - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\}, \end{cases}$$

6.1. Construction d'une classe de systèmes hamiltoniens

obtenu en couplant les n systèmes (σ_i) , $1 \leq i \leq n$, dans le même espace de phase \mathbb{R}^2 . Pour chaque i , le terme de couplage

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \quad (6.3)$$

est défini comme un produit de distances euclidiennes quadratiques, afin de contrôler l'effet du champ de vecteurs induit par le système (σ_i) dans un voisinage des autres points (x_j, y_j) , pour $j \neq i$. Nous remarquons alors que ce dernier système est lui-même hamiltonien :

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} \dot{x} = G_y \\ \dot{y} = -G_x, \end{cases} \quad (6.4)$$

où $G = G(\mathcal{P})$ est donné par

$$G = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n 2G_i = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad (6.5)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons utilisé les notations $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$, $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$ afin d'alléger les formules. Nous rappelons qu'un point d'équilibre (x_0, y_0) est un centre non dégénéré d'un système hamiltonien

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x$$

si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $H_x(x_0, y_0) = H_y(x_0, y_0) = 0$,
- (ii) $H_{xx}(x_0, y_0)H_{yy}(x_0, y_0) - H_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$.

Dans ce cas, il existe une bande continue d'orbites périodiques $\gamma_h \subset H^{-1}(\{h\})$ pour $h \in]0, h_0[$, avec $h_0 > 0$, encerclant (x_0, y_0) (voir la section 1.5.4 du chapitre préliminaire).

Proposition 6.1. *Le système hamiltonien (6.4) est un système polynomial du plan, de degré $2n - 1$. Il admet n centres non dégénérés, situés en chaque point de \mathcal{P} . Enfin, on a $G(x_k, y_k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration. Puisque G est polynomial, de degré $2n$, il est clair que le système (6.4) est polynomial de degré $2n - 1$. Calculons maintenant G_x , G_y et $G_{xx}G_{yy} - G_{xy}^2$ en chaque point (x_k, y_k) , $1 \leq k \leq n$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x_k, y_k) &= \sum_{i=1}^n (x_k - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2] \\ &= (x_k - x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2] \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_k, y_k) = 0.$$

Puis, nous calculons les dérivées de G d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n \left\{ 1 \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right. \\ \left. + (x - x_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2] \right\}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_k, y_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2].$$

De la même façon, on a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x_k, y_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2].$$

Ensuite, on calcule

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^n (x - x_i) \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y - y_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, l \neq j}}^n [(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2] \right\},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) = 0.$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_k, y_k) \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x_k, y_k) - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) \right)^2 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2]^2 > 0,$$

puisque les points de \mathcal{P} sont 2 à 2 distincts.

Finalement, soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a par construction

$$G(x_k, y_k) = 0.$$

□

Cette première proposition montre que le système hamiltonien (6.4) admet bien des centres non dégénérés dont le nombre et la disposition sont arbitraires. Les centres sont tous situés au niveau d'énergie 0 du hamiltonien G . Le système (6.4) admet également des points d'équilibre qui sont des cols. En effet, les seuls points critiques non dégénérés d'un système hamiltonien sont des centres ou des cols ([84], Théorème 2, section 2.14); de plus, la théorie de l'indice ([85] ou [84], section 3.12) permet d'en déduire que le nombre de centres est égal au nombre de cols plus 1. Il est également susceptible de présenter des connections hétéroclines ou homoclines, comme le suggèrent les portraits de phase obtenus par le calcul numérique. Cependant, nous nous intéressons ici à la possibilité de faire bifurquer chaque centre vers un nid de cycles limites, c'est-à-dire une famille finie de cycles limites encerclant un même point singulier.

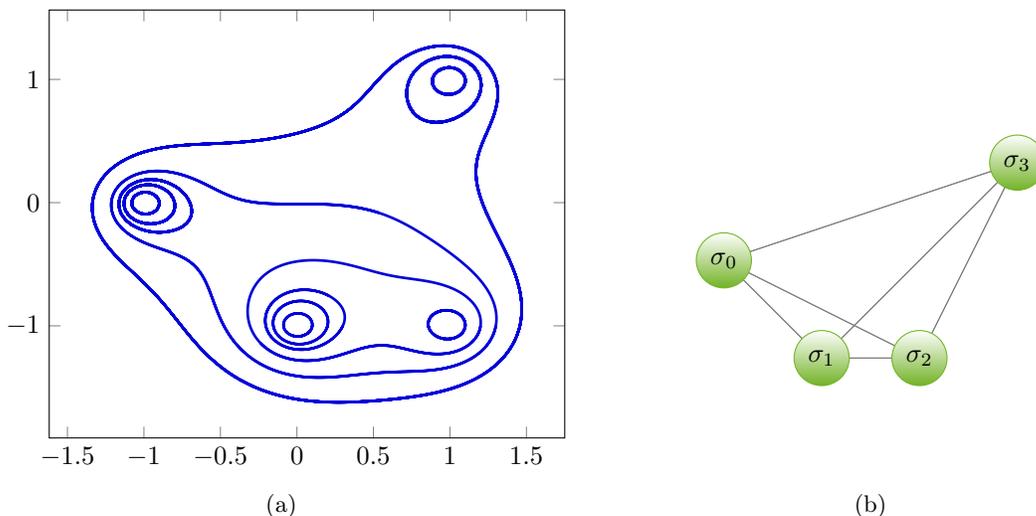


FIGURE 6.1 – (a) Portrait de phase du système (6.4) avec $\mathcal{P} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1)\}$, montrant les bandes continues d'orbites fermées dans un voisinage de chaque point $p \in \mathcal{P}$. La position et le nombre des centres peuvent être arbitrairement choisis. (b) Graphe complet sous-jacent au système (6.4) dans le cas $\mathcal{P} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1)\}$: les sommets du graphe correspondent aux centres du système, et les arêtes aux couplages entre ces centres.

Exemple 6.1.1. Le portrait de phase du système (6.4) avec

$$\mathcal{P} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1)\}$$

est représenté sur la figure 6.1. ◁

Remarque 6.1.1. Les courbes de niveaux du hamiltonien (6.5) recouvrent le plan \mathbb{R}^2 par des courbes fermées. Poincaré [85] appelait *système topographique* une telle partition du plan, par analogie avec les systèmes de courbes isohyètes des cartes géographiques. Le vocabulaire encore utilisé aujourd'hui pour décrire la nature des points singuliers du champ de vecteurs correspondant, parmi lesquels on peut citer les *cols* ou les *fonds*, est en partie emprunté au vocabulaire des géographes. En outre, les portraits de phase du système hamiltonien (6.4) suggèrent la présence d'un point col entre les différents centres du système, ce qui permet d'interpréter les portraits de phase comme des réseaux dont les nœuds sont les centres du système, et dont les arêtes sont les cols. •

6.1.2 Système hamiltonien admettant une grille rectangulaire de centres

Notre objectif suivant est de construire un système hamiltonien de degré $O(n)$, admettant n^2 centres non dégénérés. Soient n, m deux entiers naturels non nuls. On introduit le système hamiltonien $(\mathcal{S}_{n,m})$ défini par

$$(\mathcal{S}_{n,m}) \begin{cases} \dot{x} = F_y \\ \dot{y} = -F_x, \end{cases} \quad (6.6)$$

où F est donné par

$$F = \sum_{k=0}^{m-1} F_k \beta_k, \quad (6.7)$$

avec

$$F_k = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^{n-1} [(x-i)^2 + (y-k)^2], \quad \beta_k = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (y-l)^2.$$

Les hamiltoniens F_k sont des instances du hamiltonien G défini par (6.5), puisque l'on a

$$F_k = G(\mathcal{P}_k), \quad \mathcal{P}_k = \{(0, k), (1, k), \dots, (n-1, k)\}.$$

Ainsi, le hamiltonien F est obtenu en couplant les hamiltoniens F_k , qui admettent des centres non dégénérés situés sur des droites parallèles.

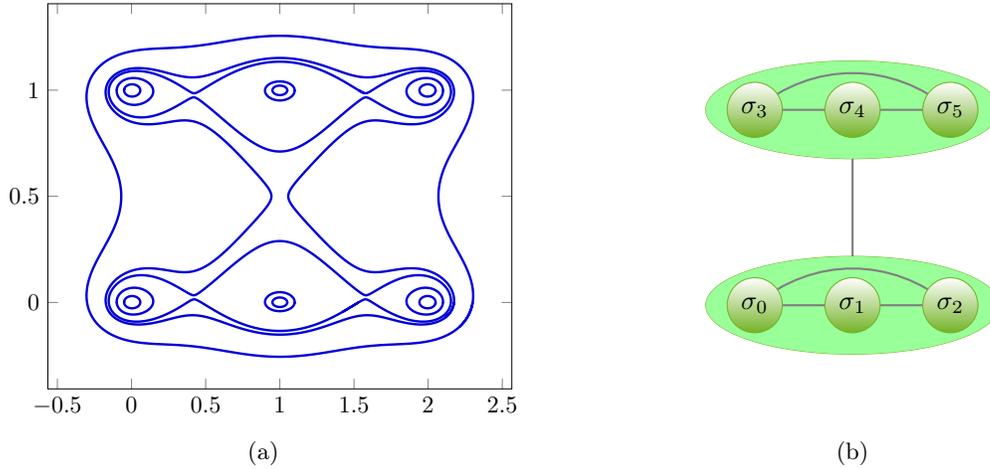


FIGURE 6.2 – (a) Simulation numérique du portait de phase du système (6.6) avec $n = 3$ et $m = 2$, montrant des orbites fermées dans un voisinage des points (i, k) pour $0 \leq i \leq 2$ et $0 \leq k \leq 1$, distribués sur une grille rectangulaire. (b) Graphe sous-jacent au système (6.6) avec $n = 3$ et $m = 2$: les sommets du graphe correspondent aux centres du système, et les arêtes aux couplages entre ces centres.

La proposition suivante garantit que le système (6.6) admet une grille rectangulaire de centres non dégénérés. Ce système peut facilement être modifié, de sorte que la distance entre deux lignes ou deux colonnes de la grille soit variable. Le portait de phase du système (6.6) avec $n = 3$ et $m = 2$, représenté sur la figure 6.2, illustre la disposition géométrique régulière des centres.

Proposition 6.2. *Le système hamiltonien (6.6) est un système polynomial de degré $2n + 2m - 3$. De plus, il admet $n \times m$ centres non dégénérés, qui sont situés aux points $(x_i, y_k) = (i, k)$, $0 \leq i \leq n - 1$, $0 \leq k \leq m - 1$. Enfin, ces centres sont au niveau d'énergie 0 du hamiltonien F , c'est-à-dire que l'on a*

$$F(x_i, y_k) = F(i, k) = 0, \quad 0 \leq i \leq n - 1, \quad 0 \leq k \leq m - 1.$$

Démonstration. Tout d'abord, F est un polynôme de degré $2n + 2(m - 1)$, donc il est clair que le système (6.6) est polynomial de degré $2n + 2m - 3$. Remarquons ensuite que pour chaque $k \in \{1, \dots, m\}$, on a d'après la proposition 6.1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial x}(i, k) &= \frac{\partial F_k}{\partial y}(i, k) = 0, \\ \frac{\partial^2 F_k}{\partial x^2}(i, k) \frac{\partial^2 F_k}{\partial x^2}(i, k) - \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial x \partial y}(i, k) \right)^2 &> 0, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, puisque $F_k = G(\mathcal{P}_k)$ avec

$$\mathcal{P}_k = \{(0, k), (1, k), \dots, (n-1, k)\}.$$

On calcule alors les dérivées d'ordres 1 et 2 de F . On commence par

$$F_x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} [F_k(x, y)\beta_k(y)] = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k(y) \frac{\partial}{\partial x} [F_k(x, y)].$$

Soit maintenant (i_0, k_0) tel que $0 \leq i_0 \leq n-1$ et $0 \leq k_0 \leq m-1$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{k_0}}{\partial x}(i_0, k_0) &= 0, \\ \beta_k(k_0) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (k_0 - l)^2 = 0, \text{ si } k \neq k_0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial F_{k_0}}{\partial x}(i_0, k_0) = \beta_{k_0}(k_0) \frac{\partial F_{k_0}}{\partial x}(i_0, k_0) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{m-1} \beta_k(k_0) \frac{\partial F_k}{\partial x}(i_0, k_0) = 0.$$

On continue avec la dérivée par rapport à y :

$$F_y = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y} [F_k(x, y)\beta_k(y)] = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \beta_k(y) \frac{\partial}{\partial y} [F_k(x, y)] + \frac{d\beta_k}{dy}(y) F_k(x, y) \right\}.$$

Comme précédemment, on a :

$$F_{k_0}(i_0, k_0) = \frac{\partial F_{k_0}}{\partial y}(i_0, k_0) = 0, \quad \beta_k(k_0) = 0 \text{ si } k \neq k_0.$$

Puis, on calcule

$$\frac{d\beta_k}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (y - l)^2 \right\} = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} 2(y - l) \left\{ \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq k, q \neq l}}^{m-1} (y - q)^2 \right\},$$

d'où $\frac{d\beta_k}{dy}(k_0) = 0$ si $k \neq k_0$, et on obtient $\frac{\partial F}{\partial y}(i_0, k_0) = 0$. On montre de même

$$(F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2)(i_0, k_0) \geq [\beta_{k_0}(k_0)]^2 \times \left[\frac{\partial^2 F_{k_0}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_{k_0}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F_{k_0}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right](i_0, k_0) > 0.$$

Il reste à montrer que les points (i, k) , $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq k \leq m-1$, sont au niveau d'énergie 0 du hamiltonien F . Soient donc $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k_0 \in \{1, \dots, m-1\}$. On calcule

$$\begin{aligned} F(i_0, k_0) &= \sum_{k=0}^{m-1} F_k(i_0, k_0)\beta_k(i_0, k_0) \\ &= F_{k_0}(i_0, k_0)\beta_{k_0}(i_0, k_0) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{m-1} F_k(i_0, k_0)\beta_k(i_0, k_0). \end{aligned}$$

Or on a $F_{k_0}(i_0, k_0) = 0$ et

$$\beta_k(i_0, k_0) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{m-1} (y - l)^2 = 0,$$

si $k \neq k_0$. Finalement, on a bien $F(i_0, k_0) = 0$. □

Pour $m = n$, le système (6.6) est un système polynomial du plan, dont le degré est de l'ordre de n , qui admet n^2 centres. La première étape de la conjecture de Lloyd, citée en introduction, est donc atteinte. On pourrait bien entendu calculer une instance du hamiltonien G donné par (6.5) admettant de même n^2 centres, mais dans ce cas, le système obtenu serait de degré $2n^2 - 1$ d'après la proposition 6.1. L'étape suivante consiste maintenant à rechercher une perturbation de degré $O(n)$ du système (6.6), de sorte que chaque centre bifurque vers un nid de $O(n)$ cycles limites, ce qui signifie que les bandes continues d'orbites périodiques encerclant les centres non dégénérés du système non perturbé disparaissent sous l'action de la perturbation, et laissent place à des nids de cycles limites. Avant cela, nous allons présenter une variante géométrique du système (6.6), pour laquelle les centres sont disposés sur des cercles concentriques [14].

6.1.3 Système hamiltonien admettant une grille circulaire de centres

Soient n, m deux entiers naturels non nuls. Considérons le système hamiltonien défini par

$$(\mathcal{I}_{n,m}) \begin{cases} \dot{x} = E_y \\ \dot{y} = -E_x, \end{cases} \quad (6.8)$$

où le hamiltonien E est défini par

$$E = \sum_{k=1}^m E_k \delta_k, \quad (6.9)$$

les fonctions E_k et δ_k étant données pour chaque $k \in \{1, \dots, m\}$ par

$$E_k = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n [(x - x_{i,k})^2 + (y - y_{i,k})^2], \quad \delta_k = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (x^2 + y^2 - \rho_l^2)^2, \quad (6.10)$$

avec $x_{i,k} = \rho_k \cos \frac{2i\pi}{n}$, $y_{i,k} = \rho_k \sin \frac{2i\pi}{n}$ et $0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_m$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, m\}$, le polynôme E_k est à nouveau une instance du hamiltonien G donné par (6.5), puisque l'on a

$$E_k = G(\mathcal{P}_k), \quad \mathcal{P}_k = \left\{ \left(\rho_k \cos \frac{2i\pi}{n}, \rho_k \sin \frac{2i\pi}{n} \right), \quad 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Proposition 6.3. *Pour tous entiers naturels non nuls n, m , le système (6.8) est un système polynomial, invariant par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, de degré $2n + 4m - 5$. Il admet $n \times m$ centres non dégénérés situés aux points $(x_{i,k}, y_{i,k})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Enfin, ces centres sont situés au niveau d'énergie 0 du hamiltonien E .*

Démonstration. Puisque E est polynomial de degré $2n + 4(m - 1)$, il est clair que le système (6.8) est lui-même polynomial system de degré $2n + 4m - 5$. Par construction, il est invariant par rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Comme précédemment, on calcule

$$\begin{aligned} E_x(x_{i,k}, y_{i,k}) &= E_y(x_{i,k}, y_{i,k}) = 0, \\ (E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2)(x_{i,k}, y_{i,k}) &> 0, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq m$. Enfin, on a

$$E(i, k) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq m.$$

□

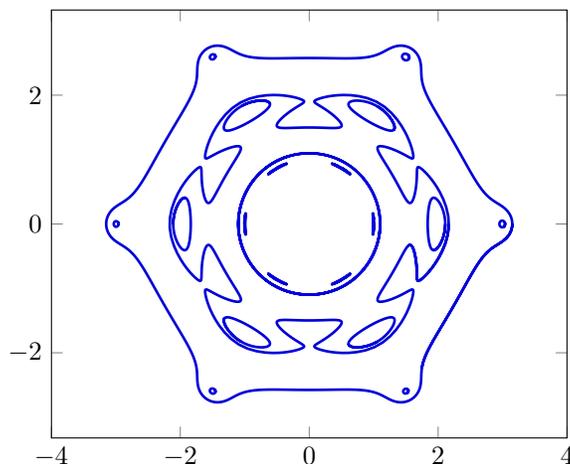


FIGURE 6.3 – Portrait de phase du système (6.8) pour $m = 3$, $n = 6$ et $\rho_k = k$, $1 \leq k \leq 3$, montrant 3 cercles sur lesquels sont situés 6 centres, encerclés par des bandes continues d'orbites fermées. Le système est invariant par rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Comme attendu, le système (6.8) présente une structure géométrique régulière, avec m cercles couplés, sur lesquels sont disposés n centres. Le portrait de phase du système (6.8) pour $m = 3$, $n = 6$ et $\rho_k = k$, $1 \leq k \leq 3$, est représenté sur la figure 6.3. En appliquant la même méthode de couplage, on peut construire des systèmes hamiltoniens admettant des centres sur des courbes de nature variée, comme des paraboles ou des cubiques par exemple. Cela montre que le système hamiltonien (6.4) offre de multiples possibilités géométriques. Nous allons voir dans la prochaine section que cet aspect géométrique est un ingrédient essentiel pour définir certaines perturbations, afin de faire apparaître des cycles limites dans un voisinage des centres non dégénérés.

6.2 Construction de perturbations polynomiales

Dans cette section, nous allons étudier quelques perturbations des systèmes hamiltoniens définis précédemment. Pour commencer, nous rappelons quelques généralités sur l'intégrale de Melnikov.

6.2.1 Intégrale de Melnikov

Considérons un système hamiltonien perturbé, s'écrivant sous la forme :

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f(x, y), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon g(x, y), \quad (6.11)$$

où H , f et g sont des polynômes et ε un coefficient réel. On suppose que le système non perturbé, obtenu pour $\varepsilon = 0$, admet un centre non dégénéré $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$, encerclé par une famille d'orbites fermées γ_h contenues dans les niveaux d'énergie $H^{-1}(\{h\})$ du hamiltonien H , et dépendant continûment de $h \in]0, h_0[$. L'intégrale de Melnikov en \bar{p} est définie par

$$M(\bar{p}, h) = \oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx. \quad (6.12)$$

On a de façon équivalente

$$\oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx = \iint_{\Gamma_h} (f_x + g_y)dx dy, \quad (6.13)$$

où Γ_h désigne l'intérieur de la courbe fermée γ_h . La fonction de Melnikov est liée à l'application de Poincaré par le Théorème de Poincaré-Pontryagine (voir le Théorème 1.21 du chapitre préliminaire). Le lemme suivant établit le lien entre les zéros de l'intégrale de Melnikov et l'existence de cycles limites dans le système hamiltonien perturbé (1.38).

Lemme 6.1. *On suppose que l'intégrale de Melnikov $M(\bar{p}, h)$ n'est pas identiquement nulle pour $h \in]0, h_0[$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *S'il existe $h_1 \in]0, h_0[$ tel que $M(\bar{p}, h_1) = 0$ et $M'(\bar{p}, h_1) \neq 0$, alors le système perturbé (6.11) admet un unique cycle limite qui bifurque de γ_{h_1} , i.e. la bande continue d'orbites périodiques encerclant \bar{p} pour $\varepsilon = 0$ disparaît pour $\varepsilon > 0$, et laisse place à un unique cycle limite.*
2. *S'il existe $h_1, h_2 \in]0, h_0[$ tels que $M(\bar{p}, h_1) > 0$ and $M(\bar{p}, h_2) < 0$, alors le système perturbé (6.11) admet au moins un cycle limite entre γ_{h_1} et γ_{h_2} .*

Démonstration. Le premier point est prouvé en détail dans [19]. Nous allons montrer le deuxième point. Par hypothèse, il existe $h_1, h_2 \in]0, h_0[$ tels que l'intégrale de Melnikov en \bar{p} satisfait $M(\bar{p}, h_1) > 0$ et $M(\bar{p}, h_2) < 0$. Pour $\varepsilon \neq 0$ et $h \in]0, h_0[$, on considère la fonction δ définie par

$$\delta(\bar{p}, h, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}d(\bar{p}, h, \varepsilon),$$

d désignant la fonction de déplacement au point \bar{p} , donnée par (1.41). D'après le Théorème de Poincaré-Pontryagine 1.21, on a

$$\delta(\bar{p}, h, \varepsilon) = M(\bar{p}, h) + \varepsilon\varphi(h, \varepsilon).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \delta(\bar{p}, h_1, \varepsilon) &= M(\bar{p}, h_1) + \varepsilon\varphi(h_1, \varepsilon) \geq \frac{1}{2}M(\bar{p}, h_1) > 0, & 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1, \\ \delta(\bar{p}, h_2, \varepsilon) &= M(\bar{p}, h_2) + \varepsilon\varphi(h_2, \varepsilon) \leq \frac{1}{2}M(\bar{p}, h_2) < 0, & 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Considérons maintenant ε_0 tel que $0 < |\varepsilon_0| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Puisque δ est analytique et vérifie

$$\delta(\bar{p}, h_1, \varepsilon_0) > 0, \quad \delta(\bar{p}, h_2, \varepsilon_0) < 0,$$

il existe $h(\varepsilon_0) \in]h_1, h_2[$ (non nécessairement unique), tel que $\delta(\bar{p}, h(\varepsilon_0), \varepsilon_0) = 0$. Par conséquent, le système perturbé (6.11) admet un cycle limite situé entre γ_{h_1} et γ_{h_2} pour ε suffisamment petit. \square

6.2.2 Perturbation d'une ligne ou d'un cercle de centres

Nous allons maintenant construire des perturbations polynomiales pour le système hamiltonien (6.4), dans des cas où la distribution des centres suit une configuration géométrique simple. Dans [20], les auteurs construisent un système admettant des centres situés sur deux axes orthogonaux du plan; cette disposition est un élément décisif pour construire ensuite une perturbation provoquant l'apparition de cycles limites. Nous commençons par le cas où les points de la famille \mathcal{P} sont disposés sur un axe vertical.

Théorème 6.1. *Soient $\mathcal{P} = \{(x_0, y_1), \dots, (x_0, y_n)\}$ une famille finie de n points situés sur l'axe vertical d'équation $x = x_0$, avec $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, r un entier naturel non nul, et H un polynôme tel que tout point $p \in \mathcal{P}$ soit un centre non dégénéré du système hamiltonien*

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

Alors il existe un polynôme $f_{x_0}(x)$ de degré $2r + 1$, tel que le système perturbé

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f_{x_0}(x), \quad \dot{y} = -H_x$$

6.2. Construction de perturbations polynomiales

présente au moins $n \times r$ cycles limites pour ε suffisamment petit, distribués par nids de r cycles limites autour de chaque point $p \in \mathcal{P}$. De plus, $f_{x_0}(x)$ est donné par

$$f_{x_0}(x) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \alpha_s (x - x_0)^{2s+1}, \quad (6.14)$$

avec des coefficients réels α_s , $0 \leq s \leq r$, vérifiant

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = 1. \quad (6.15)$$

Démonstration. Supposons que $x_0 = 0$. Par hypothèse, chaque point $p \in \mathcal{P}$ est un centre non dégénéré du système non perturbé

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

Pour chaque $p = (0, y_i) \in \mathcal{P}$, il existe donc une bande continue d'orbites fermées γ_h^i encerclant $p = (0, y_i)$, $1 \leq i \leq n$. Nous allons construire une perturbation polynomiale $f_{x_0}(x)$ telle que les intégrales de Melnikov en chaque point de \mathcal{P} , changent de signe r fois le long des orbites contenues dans les bandes continues γ_h^i . Choisissons pour cela n orbites

$$\gamma_0^1, \gamma_0^2, \dots, \gamma_0^n$$

encerclant les points $(0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_n)$ respectivement, et considérons la fonction N_0 définie pour toute orbite fermée ℓ par

$$N_0(\ell) = \oint_{\ell} x^{2r+1} dy.$$

On a en particulier

$$N_0(\gamma_0^i) = \oint_{\gamma_0^i} x^{2r+1} dy = \iint_{\Gamma_0^i} (2r+1)x^{2r} dx dy > 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où Γ_0^i désigne l'intérieur de l'orbite fermée γ_0^i , $1 \leq i \leq n$. Puis, introduisons pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction N_1^i définie pour toute orbite fermée ℓ par

$$N_1^i(\ell) = \oint_{\ell} (x^{2r+1} - \alpha_{r-1}^i x^{2r-1}) dy,$$

où nous avons choisi n coefficients suffisamment petits

$$\alpha_{r-1}^1, \alpha_{r-1}^2, \dots, \alpha_{r-1}^n$$

avec $\alpha_{r-1}^i < 1$, $1 \leq i \leq n$, de sorte que

$$N_1^i(\gamma_0^i) = \oint_{\gamma_0^i} (x^{2r+1} - \alpha_{r-1}^i x^{2r-1}) dy = \iint_{\Gamma_0^i} [(2r+1)x^{2r} - (2r-1)\alpha_{r-1}^i x^{2r}] dx dy > 0,$$

pour $1 \leq i \leq n$. Posons alors $\alpha_{r-1} = \min(\alpha_{r-1}^i, 1 \leq i \leq n)$. Il s'ensuit que les intégrales N_1^i ne dépendent plus de i . En effet, soit N_1 la fonction définie par

$$N_1(\ell) = \oint_{\ell} (x^{2r+1} - \alpha_{r-1} x^{2r-1}) dy,$$

pour toute orbite fermée ℓ . On obtient

$$N_1(\gamma_0^i) = \oint_{\gamma_0^i} (x^{2r+1} - \alpha_{r-1} x^{2r-1}) dy > 0,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Puis, nous choisissons n orbites fermées

$$\gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_1^n$$

suffisamment petites, contenues à l'intérieur de $\gamma_0^1, \gamma_0^2, \dots, \gamma_0^n$ et encerclant

$$(0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_n)$$

respectivement, telles que

$$N_1(\gamma_1^i) = \oint_{\gamma_1^i} (x^{2r+1} - \alpha_{r-1}x^{2r-1})dy < 0,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. À ce stade, nous avons montré, d'après le lemme 6.1, que le système perturbé

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon(x^{2r+1} - \alpha_{r-1}x^{2r-1}), \quad \dot{y} = -H_x,$$

admet, pour ε suffisamment petit, n cycles limites, qui sont situés autour de chaque point $p \in \mathcal{P}$. Nous poursuivons cette méthode en construisant une suite finie de coefficients réels α_s , $0 \leq s \leq r$, avec $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = 1$, et n familles finies d'orbites fermées

$$(\gamma_s^1)_{0 \leq s \leq r}, (\gamma_s^2)_{0 \leq s \leq r}, \dots, (\gamma_s^n)_{0 \leq s \leq r},$$

encerclant $(0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_n)$ respectivement, vérifiant

$$\gamma_{s+1}^i \subset \gamma_s^i, \quad 0 \leq s \leq r-1, \quad 1 \leq i \leq n,$$

telles que la fonction N_r définie pour toute orbite fermée ℓ par

$$N_r(\ell) = \oint_{\ell} [x^{2r+1} - \alpha_{r-1}x^{2r-1} + \dots + (-1)^r \alpha_0 x] dy$$

présente r changements de signe le long des orbites γ_s^i , c'est-à-dire :

$$N_r(\gamma_0^i) > 0, \quad N_r(\gamma_1^i) < 0, \quad \dots, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Finalement, on pose

$$f_{x_0}(x) = x^{2r+1} - \alpha_{r-1}x^{2r-1} + \dots + (-1)^r \alpha_0 x.$$

On a alors pour toute orbite fermée γ_s^i , $0 \leq s \leq r$, $1 \leq i \leq n$:

$$N_r(\gamma_s^i) = M((0, y_i), h_s^i),$$

avec $\gamma_s^i \subset H^{-1}(\{h_s^i\})$. Ainsi, les intégrales de Melnikov en chaque point $p \in \mathcal{P}$ changent de signe r fois le long des orbites contenues dans les bandes continues qui encerclent les points $(0, y_i)$, $1 \leq i \leq n$. D'après le deuxième point du lemme 6.1, on en conclut que le système perturbé (1.38) admet, pour ε suffisamment petit, au moins $n \times r$ cycles limites, qui sont distribués par nids de r cycles limites autour de chaque point $p \in \mathcal{P}$, ce qui termine la démonstration dans le cas $x_0 = 0$.

On traite le cas $x_0 \neq 0$ par le changement de variable $x \rightarrow x + x_0$. □

Exemple 6.2.1. Considérons le système hamiltonien perturbé, admettant 3 centres non dégénérés $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ pour $\varepsilon = 0$, situés sur l'axe $x = 0$, défini

$$\dot{x} = G_y + \varepsilon f(x), \quad \dot{y} = -G_x, \tag{6.16}$$

où G est le hamiltonien défini par (6.5) avec $\mathcal{P} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$. Nous avons calculé les orbites du système perturbé dans 2 cas. Le premier cas est obtenu avec

$$f(x) = x^3 - 0.01x,$$

et provoque l'apparition d'un cycle limite stable autour de chaque point $p \in \mathcal{P}$. Le deuxième cas est obtenu pour

$$f(x) = x^7 - 0.0233x^5 + 0.00014416x^3 - 2.304 \cdot 10^{-7}x,$$

et fait naître 2 cycles limites stables, encerclant un cycle limite instable, autour de chaque point $p \in \mathcal{P}$. Puisque les cycles limites instables sont répulsifs, les orbites issues d'un point situé dans leur voisinage sont repoussées vers les cycles limites stables. Les portraits de phase correspondants sont représentés sur la figure 6.4. On remarque que la perturbation agit sur une seule direction, ce qui donne aux cycles limites une forme écrasée. Nous avons également calculé une approximation de la fonction de déplacement au point $(0, 0)$, représentée sur la figure 6.5, afin de visualiser le lien entre ses zéros et la position des cycles limites dans le système perturbé. \triangleleft

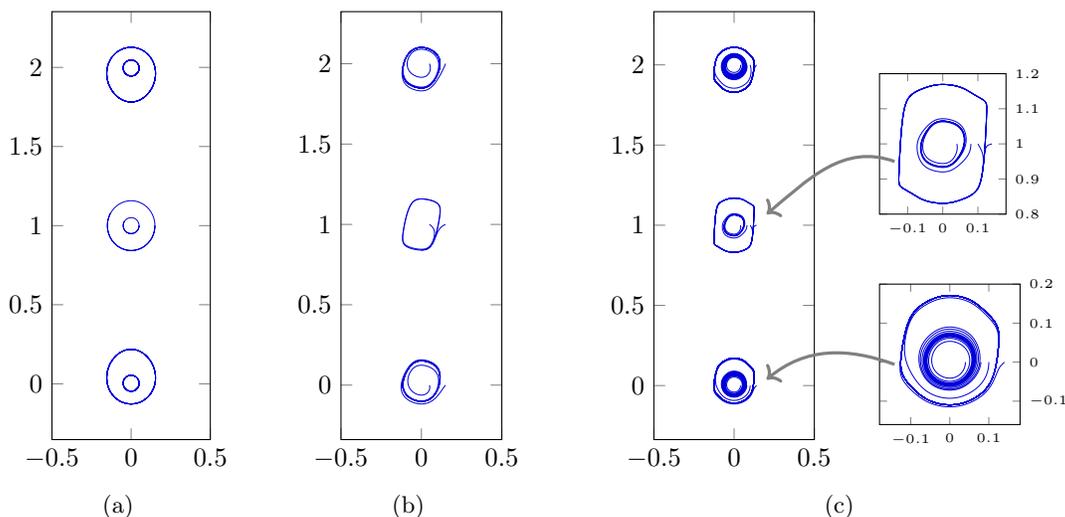


FIGURE 6.4 – Perturbation de 3 centres situés sur un axe. (a) Le système non perturbé (6.16) obtenu pour $\varepsilon = 0$ admet 3 centres non dégénérés situés sur l'axe $x = 0$. (b) Sous l'action d'une perturbation de degré 3, le système perturbé (6.16) admet 3 cycles limites stables. (c) Sous l'action d'une perturbation de degré 7, le système perturbé (6.16) admet 6 cycles limites stables et 3 cycles limites instables.

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un système hamiltonien admettant des centres situés un même cercle, et à la possibilité de construire une perturbation de ce système qui provoque l'apparition de cycles limites.

Théorème 6.2. Soit $\mathcal{P} = \{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie de n points situés sur un cercle de rayon $\rho > 0$, centré en l'origine. Soit r un entier naturel non nul, et H un polynôme tel que chaque point $p \in \mathcal{P}$ soit un centre non dégénéré du système hamiltonien

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

Alors, il existe un polynôme f de degré $2r + 1$, tel que le système perturbé

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon x f(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon y f(x^2 + y^2)$$

présente au moins $n \times r$ cycles limites, pour ε suffisamment petit, distribués par nids de r cycles limites dans un voisinage de chaque point $p \in \mathcal{P}$.

Démonstration. Par hypothèse, chaque point $p \in \mathcal{P}$ est un centre non dégénéré pour le système non perturbé

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

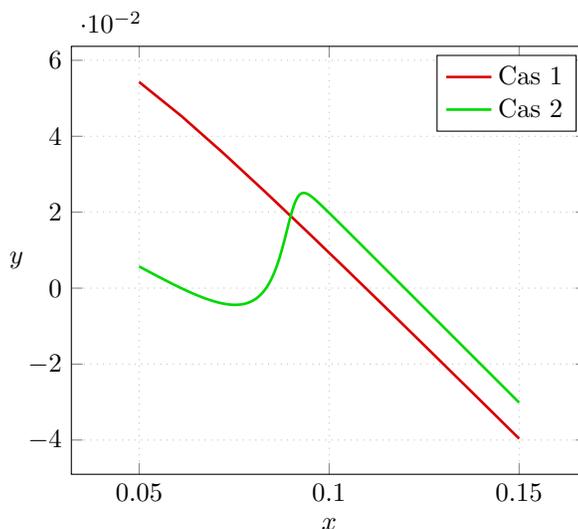


FIGURE 6.5 – Fonction de déplacement pour une section transverse de l'axe $x = 0$ par l'axe $y = 0$, dans un voisinage du point $(0, 0)$, pour l'exemple 6.2.1. Dans le premier cas, la perturbation est de degré 3, et la fonction de déplacement admet un unique zéro. Dans le second cas, la perturbation est de degré 7, et la fonction de déplacement admet 3 zéros. Lorsque la dérivée de la fonction de déplacement en un de ses zéros est négative, alors le cycle limite correspondant est stable. Lorsqu'elle est positive, le cycle limite correspondant est instable.

Pour tout point $p = (x_i, y_i) \in \mathcal{P}$, il existe donc une bande continue d'orbites fermées γ_h^i encerclant $p = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$. L'intégrale de Melnikov en p est donnée par

$$\begin{aligned} M(p, h_i) &= \oint_{\gamma_h^i} xf(x^2 + y^2)dy - yf(x^2 + y^2)dx \\ &= \iint_{\Gamma_h^i} \left[\frac{\partial}{\partial x}(xf(x^2 + y^2)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(x^2 + y^2)) \right] dx dy \\ &= 2 \iint_{\Gamma_h^i} [f(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2)] dx dy, \end{aligned}$$

où Γ_h^i désigne l'intérieur de l'orbite fermée γ_h^i . Posons alors $q(u) = f(u) + uf'(u)$, puis choisissons des coefficients réels β_s , $0 \leq s \leq r$, par la même méthode que dans la démonstration du Théorème 6.1, et notons

$$q(u) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \beta_s u^{2s+1},$$

de sorte que les intégrales

$$\iint_{\Gamma_h^i} q(x^2 + y^2) dx dy$$

changent de signe r fois le long des orbites fermées encerclant chaque point $p \in \mathcal{P}$. Finalement, on détermine f en résolvant l'équation

$$f(u) + uf'(u) = q(u).$$

Il suffit pour cela de poser $\alpha_s = \frac{(-1)^{n-s} \beta_s}{1+s}$ pour tout $s \in \{0, \dots, r\}$, et

$$f(u) = \sum_{s=0}^r \alpha_s u^{2s+1}.$$

Le polynôme $f(u)$ remplit les conditions voulues. \square

Exemple 6.2.2. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = G_y + \varepsilon x f(r) \\ \dot{y} = -G_x + \varepsilon y f(r). \end{cases} \quad (6.17)$$

où $G = G(\mathcal{P})$ est le hamiltonien défini par (6.5) avec

$$\mathcal{P} = \{(2, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\},$$

et f est la perturbation définie par $f(r) = r^3 - 0.01r$, où $r = x^2 + y^2 - 4$. D'après le Théorème 6.2, chaque centre non dégénéré bifurque vers un cycle limite pour $\varepsilon > 0$. Les portraits de phase du système non perturbé et du système perturbé sont représentés sur la figure 6.6. On observe à nouveau une forme écrasée des cycles limites, due au fait que la perturbation agit sur une seule direction. \triangleleft

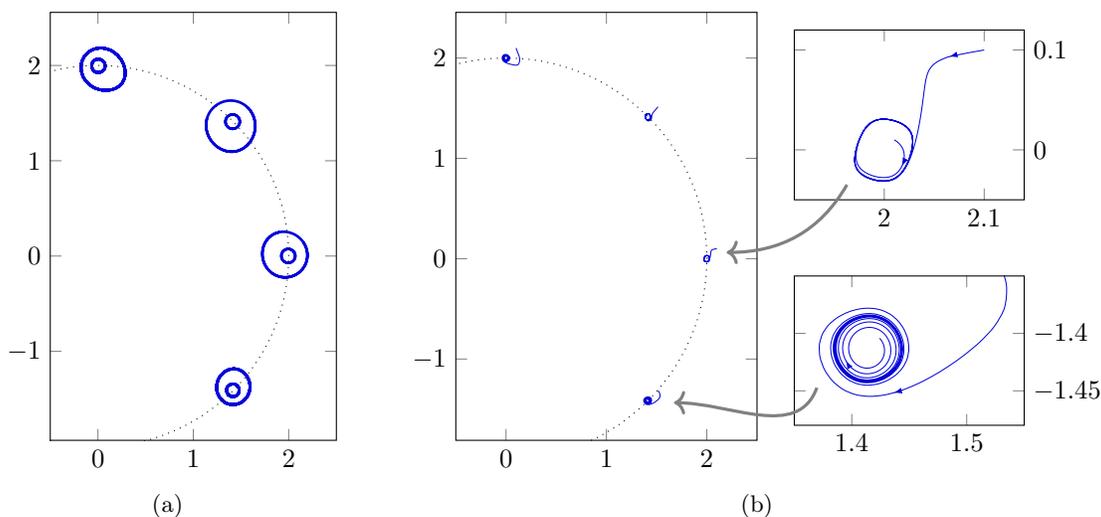


FIGURE 6.6 – (a) Portrait de phase du système (6.4) pour $\mathcal{P} = \{(2, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$, montrant 4 centres non dégénérés, encadrés par des bandes continues d'orbites fermées, et situés sur un même cercle. (b) Sous l'action d'une perturbation bien choisie, orientée le long de la normale au cercle unité, chaque centre non dégénéré bifurque vers un cycle limite de faible amplitude.

6.2.3 Perturbation d'un système hamiltonien le long de son gradient

Nous poursuivons avec la recherche de perturbations pour les systèmes (6.6) et (6.8) présentant une grille de centres non dégénérés.

Théorème 6.3. *Considérons un système hamiltonien perturbé s'écrivant :*

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon H_x f(H), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon H_y f(H), \quad (6.18)$$

où H, f sont des polynômes et ε un paramètre réel, admettant pour $\varepsilon = 0$ un nombre fini de centres non dégénérés p_1, \dots, p_n , tous situés au niveau d'énergie 0 du hamiltonien H . Soit r un entier naturel non nul. Alors on peut choisir f de degré $O(r)$, de sorte que chaque centre non dégénéré $p_i, 1 \leq i \leq n$, du système non perturbé (6.18) pour $\varepsilon = 0$, bifurque vers r cycles limites pour ε suffisamment petit.

Démonstration. Soit $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ un centre non dégénéré du système non perturbé (6.18) pour $\varepsilon = 0$. Il existe une bande continue d'orbites fermées $\gamma_{h,\bar{p}} \subset H^{-1}(\{h\})$ encerclant \bar{p} , avec $h \in]0, h_0]$, et on a :

$$(H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2)(\bar{x}, \bar{y}) > 0.$$

Il s'ensuit que $H_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \times H_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, d'où $H_{xx}(\bar{x}, \bar{y})$ et $H_{yy}(\bar{x}, \bar{y})$ ont le même signe. Supposons par exemple que $H_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ et $H_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$. Alors on obtient

$$H_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + H_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) > 0.$$

Choisissons ensuite un voisinage fermé $W_{\bar{p}}$ de $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ et $\alpha > 0$, de sorte que

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) \geq \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in W_{\bar{p}}.$$

On calcule l'intégrale de Melnikov au point $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$:

$$\begin{aligned} M(\bar{p}, h) &= \oint_{\gamma_{h,\bar{p}}} H_x f(H) dy - H_y f(H) dx \\ &= f(h) \oint_{\gamma_{h,\bar{p}}} H_x dy - H_y dx, \end{aligned}$$

puisque $H = h$ le long de l'orbite $\gamma_{h,\bar{p}}$. Il s'ensuit que

$$M(\bar{p}, h) = f(h) \iint_{\Gamma_{h,\bar{p}}} (H_{xx} + H_{yy}) dx dy,$$

où $\Gamma_{h,\bar{p}}$ désigne l'intérieur de la courbe fermée $\gamma_{h,\bar{p}}$. Puis, choisissons un polynôme $f(h)$ d'ordre $O(r)$, admettant r racines h_1, h_2, \dots, h_r dans l'intervalle $]0, h_0]$. Ces racines peuvent être choisies de telle sorte que $f'(h_i) \neq 0$, et $\gamma_{h_i,\bar{p}} \subset W_{\bar{p}}$, $1 \leq i \leq r$, pour tout centre non-dégénéré \bar{p} du système (6.18). Puisque $f(h_i) = 0$, on en déduit que $M(\bar{p}, h_i) = 0$, pour $1 \leq i \leq r$. On introduit alors

$$\psi(h) = \iint_{\Gamma_{h,\bar{p}}} (H_{xx} + H_{yy}) dx dy,$$

et on calcule la dérivée de l'intégrale de Melnikov au point \bar{p} par rapport à h :

$$M'(\bar{p}, h) = f'(h)\psi(h) + f(h)\psi'(h).$$

Comme $f(h_i) = 0$, on a $M'(\bar{p}, h_i) = f'(h_i)\psi(h_i)$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. De plus

$$\psi(h_i) = \iint_{\Gamma_{h_i,\bar{p}}} (H_{xx} + H_{yy}) dx dy \geq \alpha |\Gamma_{h_i,\bar{p}}| > 0,$$

où $|\Gamma_{h_i,\bar{p}}|$ désigne l'aire de $\Gamma_{h_i,\bar{p}}$. On en conclut que $M'(\bar{p}, h_i) \neq 0$. On traite de façon similaire le cas $H_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$ et $H_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$. Le premier point du lemme 6.1 garantit alors l'existence et l'unicité d'un cycle limite bifurquant de $\gamma_{h_i,\bar{p}}$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, d'où un nid de r cycles limites encerclant \bar{p} . Puisque le raisonnement précédent est valable pour chaque centre \bar{p} , nous avons prouvé l'existence de n nids de r cycles limites encerclant chaque centre non dégénéré du système (6.18) pour $\varepsilon = 0$, ce qui achève la démonstration. \square

Le Théorème 6.3 s'applique en particulier aux systèmes (6.4), (6.6) et (6.8), qui déterminent des grilles de centres dont la disposition est arbitraire, rectangulaire ou circulaire respectivement. En choisissant par exemple le système (6.6) avec $n = m = r$, on en déduit l'existence de perturbations polynomiales provoquant l'apparition de n^3 cycles limites dans un système admettant une grille de n^2 centres non dégénérés. Néanmoins, la perturbation construite par le Théorème 6.3 a dans ce cas un degré d'ordre n^2 . Si on choisit $r = 1$, alors la perturbation f a un degré d'ordre n , mais elle ne fait naître que n^2 cycles limites dans la grille de centres. La conjecture de Lloyd citée en introduction de ce chapitre est donc ouverte. Cependant, nous présentons plus loin un exemple de système hamiltonien perturbé qui renforce cette conjecture.

Remarque 6.2.1. Le système (6.18) peut être vu comme un système hamiltonien perturbé le long de son gradient, et peut être réécrit

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon K_x, \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon K_y, \quad (6.19)$$

où $K = F(H)$, F désignant une primitive quelconque du polynôme f . Le Théorème 6.3 montre comment choisir f pour donner naissance à des cycles limites de faible amplitude. L'exemple 6.2.3 révèle l'allure homogène des cycles limites obtenus, due au fait que la perturbation agit orthogonalement au champ de vecteurs initial, dans toutes ses directions. Mais on peut également choisir f afin de créer des cycles limites de grande amplitude, ou même des polycycles, comme le montre l'exemple 6.2.4 ci-après. Pour ces raisons, nous pensons que le système (6.19) est canonique. •

Exemple 6.2.3. Considérons le système défini par

$$\dot{x} = G_y, \quad \dot{y} = -G_x,$$

où $G = G(\mathcal{P})$ est donné par (6.5), avec

$$\mathcal{P} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1)\}.$$

Choisissons ensuite $f(u) = 0.01u - u^3$, et perturbons le système précédent le long de son gradient en posant le système :

$$\dot{x} = G_y + \varepsilon G_x f(G), \quad \dot{y} = -G_x + \varepsilon G_y f(G).$$

D'après le Théorème 6.3, chaque point de \mathcal{P} bifurque vers un unique cycle limite, représenté sur la figure 6.7. On observe que les 4 cycles limites obtenus ont des diamètres différents, et que leur forme est homogène, puisque que la perturbation agit sur les niveaux d'énergie du hamiltonien G , orthogonalement à toutes les directions du champ de vecteurs initial, contrairement aux cycles limites obtenus par l'effet d'une perturbation agissant sur une seule direction, qui révèlent une forme écrasée.

◀

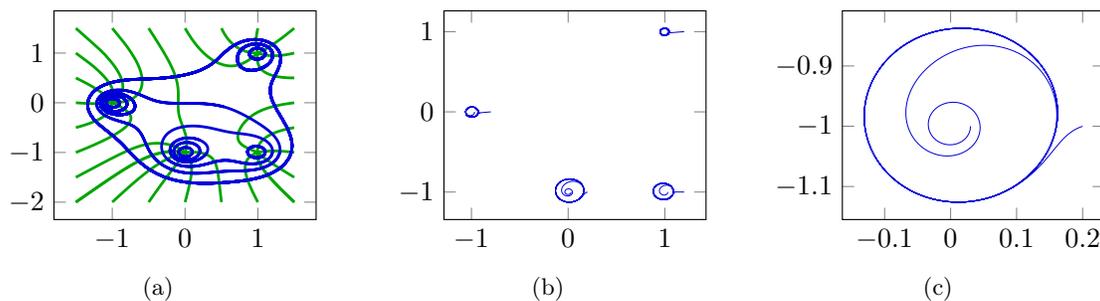


FIGURE 6.7 – (a) Portrait de phase du système (6.4) avec $\mathcal{P} = \{(-1, 0), (0, -1), (1, -1), (1, 1)\}$, montrant les bandes continues d'orbites fermées encadrant chaque point $p \in \mathcal{P}$. Les lignes vertes correspondent aux orbites du gradient, et sont orthogonales aux niveaux d'énergie du hamiltonien G . (b) Sous l'action d'une perturbation bien choisie, chaque centre non dégénéré bifurque vers un unique cycle limite. (c) Les cycles limites présentent une forme homogène, sans écrasement.

Exemple 6.2.4. Considérons ensuite le système hamiltonien perturbé le long de son gradient, donné par

$$\dot{x} = G_y + \varepsilon G_x f(G), \quad \dot{y} = -G_x + \varepsilon G_y f(G), \quad (6.20)$$

où $G = G(\mathcal{P})$ est défini par (6.5), avec

$$\mathcal{P} = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\},$$

et $f(u) = u - \frac{1}{2}$. Le système non perturbé admet 4 centres non dégénérés, situés en chaque point de \mathcal{P} , ainsi qu'un point-selle en l'origine, avec 4 orbites homoclines issues de ce point selle, et le rejoignant. Ces orbites homoclines sont contenues dans le niveau d'énergie $G = \frac{1}{2}$ du hamiltonien. Puis, la perturbation f est choisie en correspondance avec ce niveau d'énergie. Le système perturbé présente donc 4 cycles limites correspondant aux orbites homoclines du système non perturbé, ainsi que 1 polycycle passant 4 fois par le point selle $(0, 0)$ (voir la figure 6.8). \triangleleft

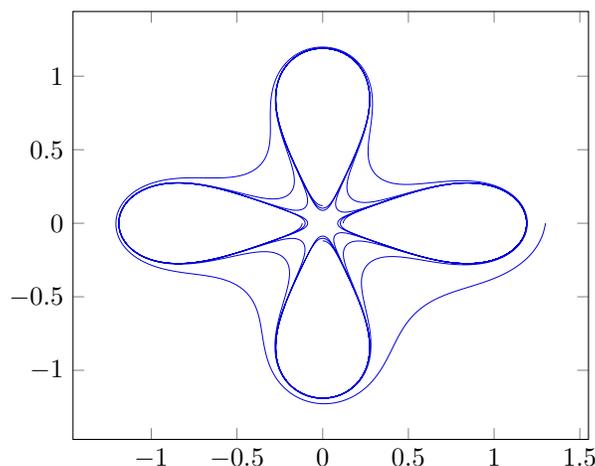


FIGURE 6.8 – Portrait de phase du système (6.20), montrant une orbite convergeant vers un polycycle qui passe 4 fois par le point selle $(0, 0)$, attirant les trajectoires issues des points extérieurs aux orbites homoclines.

6.2.4 Perturbations couplées

Dans cette section, nous présentons un autre choix de perturbation polynomiale permettant d'obtenir n^3 cycles limites à partir d'une grille de n^2 centres. La structure de réseau sous-jacente au système (6.6) amène naturellement à chercher une perturbation globale obtenue en couplant des perturbations agissant localement.

Considérons donc une grille rectangulaire composée de $n \times m$ points de coordonnées (i, k) , avec $0 \leq i \leq n - 1$ et $0 \leq k \leq m - 1$, qui sont des centres non dégénérés du système non perturbé (6.6), et soit r un entier naturel non nul. Ces points sont situés sur n colonnes $0, 1, \dots, n - 1$, elles-mêmes disposées sur les axes verticaux d'équations respectives

$$x = 0, \quad x = 1, \quad \dots, \quad x = n - 1,$$

chaque colonne admettant m centres. Le Théorème 6.1 garantit pour chaque $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ l'existence d'une perturbation polynomiale $f_i(x)$ de degré $2r + 1$, tel que le système

$$\dot{x} = \frac{\partial G_i}{\partial y} + \varepsilon f_i(x), \quad \dot{y} = -\frac{\partial G_i}{\partial x},$$

où G_i est le hamiltonien donné par (6.5) avec

$$\mathcal{P} = \{(i, k) ; 0 \leq k \leq m - 1\},$$

présente $m \times r$ cycles limites distribués par nids de r cycles limites encerclant les m points (i, k) , $0 \leq k \leq m - 1$, sur l'axe d'équation $x = i$. Posons alors

$$\varphi(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f_i(x). \tag{6.21}$$

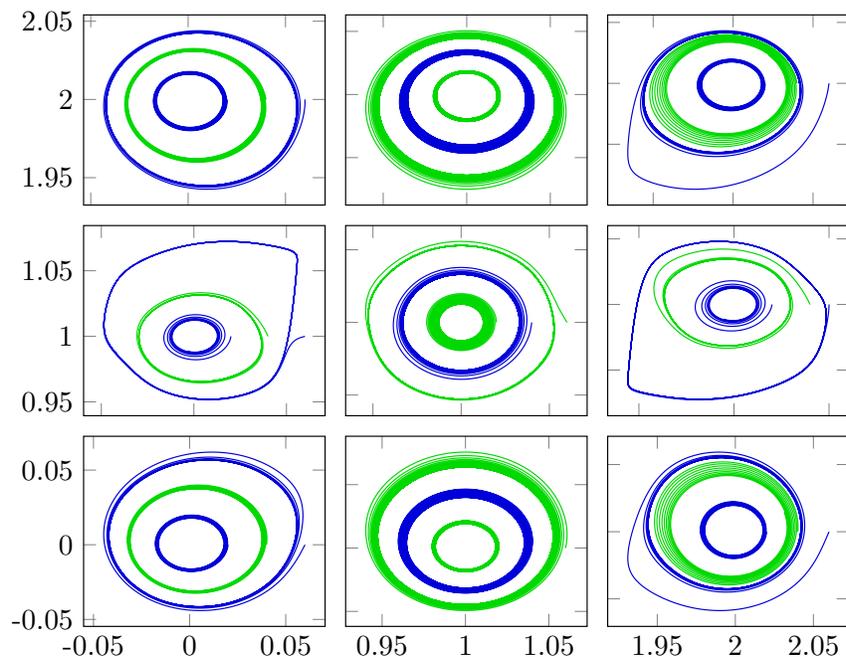


FIGURE 6.9 – Portraits de phase du système (6.6), avec $n = m = 3$, sous l'action de la perturbation φ définie par (6.21), montrant 27 cycles limites. Les cycles limites instables ont été calculés en inversant le temps dans le schéma numérique de Runge-Kutta, et sont représentés en traits verts. Les cycles limites stables sont dessinés en traits bleus.

Nous conjecturons que le système

$$\dot{x} = F_y + \varepsilon\varphi(x), \quad \dot{y} = -F_x,$$

où le hamiltonien F est défini par (6.7), possède $n \times m \times r$ cycles limites pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Nous pensons pouvoir démontrer cette affirmation à partir des éléments présentés dans la preuve du Théorème 6.1. Néanmoins, la perturbation polynomiale φ étant de degré $O(m \times r)$, il paraît inutile d'approfondir une telle démonstration. En effet, en choisissant $n = m = r$, on obtient n^3 cycles limites avec une perturbation de degré $O(n^2)$, et en posant $n = m$, $r = 1$, on obtient n^2 cycles limites avec une perturbation de degré $O(n)$. La conjecture de Lloyd est donc encore ouverte. Dans la prochaine section, nous explorons numériquement la possibilité de construire une perturbation de degré $O(n)$ aboutissant à n^3 cycles limites.

Exemple 6.2.5. Nous avons calculé les orbites du système

$$\dot{x} = F_y + \varepsilon\varphi(x), \quad \dot{y} = -F_x,$$

où le hamiltonien F est défini par (6.7) avec $n = m = 3$, et φ est la perturbation donnée par

$$\varphi(x) = \prod_{i=0}^2 \left[(x-i)^7 - 0.0035(x-i)^5 + 2.59 \cdot 10^{-6}(x-i)^3 - 2.25 \cdot 10^{-10}(x-i) \right].$$

Les portraits de phase correspondants sont représentés sur la figure 6.9. On observe l'existence de 27 cycles limites. Les orbites issues des cycles limites instables ont été calculées en inversant le temps dans le schéma numérique de Runge-Kutta, et sont dessinées en traits verts. Les fonctions de déplacement sont présentées sur la figure 6.10, qui montre les 27 zéros correspondant aux 27 cycles limites. ◁

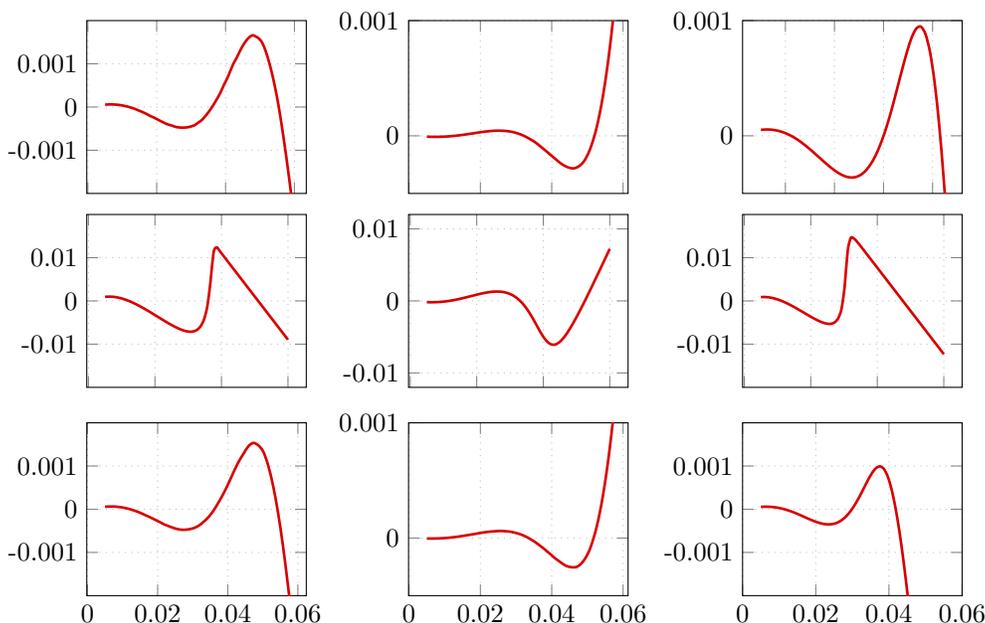


FIGURE 6.10 – Fonctions de déplacement pour le système (6.6), avec $n = m = 3$, sous l'action de la perturbation φ définie par (6.21). Les 3 zéros de chaque fonction de déplacement correspondent aux nids de 3 cycles limites encerclant les points (i, k) , $0 \leq i, k \leq 2$. La vitesse d'attraction ou de répulsion des cycles limites augmente avec la valeur de la dérivée de la fonction de déplacement.

6.2.5 Recherche de perturbations de degré inférieur

Dans ce qui précède, nous avons étudié des perturbations polynomiales de degré $O(n^2)$, permettant d'obtenir n^3 cycles limites à partir d'un système hamiltonien de degré $O(n)$. Nous posons maintenant la question de savoir si l'on peut déterminer une perturbation polynomiale de degré $O(n)$ aboutissant également à l'apparition de n^3 cycles limites. Nous allons pour cela utiliser une méthode algorithmique qui repose sur le calcul symbolique des coefficients du développement analytique de la fonction de Melnikov.

Coefficients de Melnikov

Considérons un système hamiltonien perturbé du plan \mathbb{R}^2 , s'écrivant

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f(x, y, \delta), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon g(x, y, \delta), \quad (6.22)$$

où H , f et g sont des polynômes, et $\delta \in D \subset \mathbb{R}^m$ est un paramètre, avec D compact et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'origine est un centre non dégénéré du système non perturbé, et que H peut s'écrire

$$H(x, y) = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i+j \geq 3} h_{ij} x^i y^j,$$

avec $\omega > 0$ et $h_{ij} \in \mathbb{R}$. Nous notons $M(h, \delta)$ la fonction de Melnikov en $(0, 0)$, définie par (6.12). Le théorème suivant, tiré de [43], explicite le développement analytique de la fonction de Melnikov.

Théorème 6.4. *L'intégrale de Melnikov admet un développement analytique*

$$M(h, \delta) = h \sum_{l \geq 0} b_l(\delta) h^l,$$

pour $h \geq 0$ voisin de 0. De plus, les coefficients $b_l(\delta)$, $l \geq 0$, dépendent linéairement de δ si les fonctions f et g de perturbation dépendent elles-mêmes linéairement de δ .

Les coefficients $b_l(\delta)$ du développement analytique de $M(h, \delta)$ sont appelés *coefficients de Melnikov*. On peut obtenir leur expression symbolique, en fonction des coefficients des polynômes H , f et g , à partir d'un algorithme présenté dans [45]. Nous donnons en annexe A l'implémentation en langage C++ de cet algorithme, ainsi que quelques résultats de son exécution.

Algorithme de recherche d'une perturbation

Nous souhaitons utiliser l'expression symbolique des coefficients de Melnikov afin de déterminer une nouvelle perturbation polynomiale du système hamiltonien (6.6). Pour simplifier notre présentation, nous nous plaçons dans le cas où $n = m$. Dans ce cas, le système (6.6) présente n^2 centres non dégénérés, et on souhaite trouver une perturbation polynomiale de degré $O(n)$ de ce système, de sorte que chaque centre bifurque vers un nid de n cycles limites. Une telle perturbation polynomiale $(f, g)^T$ de degré n du système (6.6) est donnée par

$$f(x, y, \delta) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j, \quad g(x, y, \delta) = \sum_{i+j \leq n} b_{i,j} x^i y^j,$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ sont réels, et δ est déterminé par

$$\delta = ((a_{i,j}, b_{i,j}) ; i + j \leq n) \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}.$$

Notons ensuite $b(\delta)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n^2(n+1)}$ obtenu en calculant les $n+1$ premiers coefficients de Melnikov en chaque centre (i, k) , $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$, du système (6.6) :

$$b(\delta) = \left(b_0^{(i,k)}(\delta) ; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1 \right),$$

et considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2(n+1)} \\ \delta &\longmapsto b(\delta). \end{aligned} \tag{6.23}$$

D'après le Théorème 6.4, l'application \mathcal{M} est linéaire, de $E_1 = \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ vers $E_2 = \mathbb{R}^{n^2(n+1)}$. Si $n \geq 3$, on a $\dim_{\mathbb{R}} E_1 < \dim_{\mathbb{R}} E_2$, donc \mathcal{M} ne peut pas être surjective, et son image est de dimension au plus $(n+1)(n+2)$. Pour chaque couple (i, k) , $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$, choisissons ensuite un vecteur $\bar{b}^{(i,k)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\begin{aligned} \bar{b}_n^{(i,k)} &= 1, \\ \bar{b}_{j-1}^{(i,k)} \bar{b}_j^{(i,k)} &< 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 &< \left| \bar{b}_0^{(i,k)} \right| \ll \left| \bar{b}_1^{(i,k)} \right| \ll \dots \ll \left| \bar{b}_{n-1}^{(i,k)} \right| \ll 1, \end{aligned}$$

de sorte que le polynôme

$$\bar{b}_0^{(i,k)} + \bar{b}_1^{(i,k)} h + \dots + \bar{b}_n^{(i,k)} h^n$$

admette n racines distinctes strictement positives et voisines de 0. Notons enfin

$$\bar{b} = \left[(\bar{b}_s^{(i,k)}) ; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq s \leq n \right] \in \mathbb{R}^{n^2(n+1)}. \tag{6.24}$$

Si ce vecteur \bar{b} admet un antécédent $\bar{\delta}$ par l'application linéaire \mathcal{M} , alors les fonctions de Melnikov en chaque centre (i, k) , $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$, du système (6.6), évaluées en $\bar{\delta}$, présenteront toutes

n changements de signe. Par le lemme 6.1, on peut alors en conclure que le système (6.6) perturbé par le couple $(f(x, y, \bar{\delta}), g(x, y, \bar{\delta}))^T$ admet n^3 cycles limites.

La question centrale consiste donc à étudier l'image de l'application linéaire \mathcal{M} , pour savoir si elle contient un tel vecteur \bar{b} . Le Théorème 2 de [45] donne une condition suffisante pour que le vecteur \bar{b} admette un antécédent, mais uniquement dans le cas où le système non perturbé présente un seul centre. Une réponse complète à cette question constitue donc une perspective de recherche, qui est susceptible d'apporter un progrès significatif dans l'analyse des bifurcations des cycles limites dans les champs de vecteurs polynomiaux du plan \mathbb{R}^2 . Nous allons maintenant étudier cette question dans un cas particulier.

Considérons pour cela le polynôme g défini par

$$g(x, y, \delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^r \delta_{i,k}^s y^{2s+1} \right) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} (x-l)^2 \right] \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (y-j)^2, \quad (6.25)$$

où n et r sont des entiers naturels non nuls et

$$\delta = (\delta_{i,k}^s; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq s \leq r)$$

un vecteur de paramètres dans $\mathbb{R}^{n^2 \times (r+1)}$. La fonction g est construite en couplant un réseau de perturbations agissant localement sur le centre non dégénéré (i, k) et s'écrivant :

$$g_{i,k}(y, \delta) = \sum_{s=0}^r \delta_{i,k}^s y^{2s+1}.$$

Ainsi construite, g est bien polynomiale, de degré $O(n+r)$, et dépend linéairement du paramètre δ . Pour savoir si le système perturbé

$$\dot{x} = F_y, \quad \dot{y} = -F_x + \varepsilon g(x, y, \delta), \quad (6.26)$$

où F est le hamiltonien défini par (6.7), admet $n^2 \times r$ cycles limites pour ε suffisamment petit, il suffit de déterminer si le vecteur \bar{b} défini par (6.24) admet un antécédent par l'application linéaire \mathcal{M} . Nous proposons donc d'appliquer l'algorithme suivant.

Algorithme

1. Pour chaque centre non dégénéré (i, k) du système non perturbé, $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1$:
 - (a) calculer les coefficients $b_j^{(i,k)}(\delta)$ du développement analytique de l'intégrale de Melnikov au point (i, k) , pour $0 \leq j \leq r$;
 - (b) poser les équations linéaires d'inconnues $\delta_{i,k}^s$:

$$(E_{i,k}^j) b_j^{(i,k)}(\delta) = \bar{b}_j^{(i,k)}, \quad 0 \leq j \leq r.$$

2. Résoudre le système linéaire obtenu en adjoignant les équations linéaires $(E_{i,k}^j)$ pour $0 \leq j \leq r$, $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq k \leq n-1$.

Le système linéaire résolu à l'étape 2 est un système carré de $n^2 \times (r+1)$ équations, avec autant d'inconnues. Si ce système admet une solution, alors d'après le raisonnement précédent, on en déduit que le système hamiltonien perturbé (6.22) présente $n^2 \times r$ cycles limites, d'où n^3 cycles limites dans le cas où $n = r$. Nous avons implémenté cet algorithme en langage C++ et donnons le programme correspondant en annexe A. L'exécution de ce programme, effectuée sur le serveur de calcul du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université du Havre-Normandie, pour quelques valeurs des entiers n et r , est présentée dans le tableau 6.1. Ces résultats suggèrent que la perturbation g définie par (6.25) semble effectivement provoquer l'apparition de $n^2 \times r$ cycles limites.

6.2. Construction de perturbations polynomiales

Exemple 6.2.6. Dans le cas $n = r = 2$, le programme de calcul aboutit aux équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 &(3.6275987284684357013)*d000 = 5.000000000000002396E-5, \\
 &(1.8137993642342178507)*d100+(1.8137993642342178506)*d010+(0.80613305077076349)*d000 \\
 &+(1.8137993642342178507)*d001 = -0.014999999999999999445, \\
 &(0.6045997880780726169)*d110+(21.228170336963438553)*d100+(33.320166098524890884)*d010 \\
 &+(24.848304870517330103)*d000+(1.0076663134634543615)*d101+(0.6045997880780726169)*d011 \\
 &+(9.875129871941852745)*d001+(1.0076663134634543615)*d002 = 1, \\
 &(10.882796185405307104)*d100+(18.137993642342178506)*d101 \\
 &+(25.393191099279049909)*d102 = 5.000000000000002396E-5, \\
 &(5.441398092702653552)*d110+(16.928794066186033275)*d100-(4.2321985165465083184)*d000 \\
 &+(9.068996821171089253)*d111+(13.099662075024906702)*d101-(0.6045997880780726165)*d001 \\
 &+(12.696595549639524954)*d112+(14.107328388488361064)*d102 \\
 &+(3.0229989403903630846)*d002 = -0.014999999999999999445, \\
 &(107.215695752511544055)*d110+(177.99865612713330482)*d100-(2.2168658896195995954)*d010 \\
 &-(27.408523726205958638)*d000+(169.6238294330148175)*d111+(200.48827540465469715)*d101 \\
 &-(1.0076663134634543616)*d011-(2.4855769065431874264)*d001+(230.41969701197656399)*d112 \\
 &+(232.71866904565614882)*d102+(0.20153326269269087202)*d012 \\
 &+(5.7772868638571383357)*d002 = 1, \\
 &(3.6275987284684357013)*d000 = 5.000000000000002396E-5, \\
 &(1.8137993642342178507)*d100+(1.8137993642342178506)*d010+(0.80613305077076349)*d000 \\
 &+(1.8137993642342178507)*d001 = -0.014999999999999999445, \\
 &(0.6045997880780726169)*d110+(21.228170336963438553)*d100+(33.320166098524890884)*d010 \\
 &+(24.848304870517330103)*d000+(1.0076663134634543615)*d101+(0.6045997880780726169)*d011 \\
 &+(9.875129871941852745)*d001+(1.0076663134634543615)*d002 = 1, \\
 &(10.882796185405307104)*d100+(18.137993642342178506)*d101 \\
 &+(25.393191099279049909)*d102 = 5.000000000000002396E-5, \\
 &(5.441398092702653552)*d110+(16.928794066186033275)*d100-(4.2321985165465083184)*d000 \\
 &+(9.068996821171089253)*d111+(13.099662075024906702)*d101-(0.6045997880780726165)*d001 \\
 &+(12.696595549639524954)*d112+(14.107328388488361064)*d102 \\
 &+(3.0229989403903630846)*d002 = -0.014999999999999999445, \\
 &(107.215695752511544055)*d110+(177.99865612713330482)*d100-(2.2168658896195995954)*d010 \\
 &-(27.408523726205958638)*d000+(169.6238294330148175)*d111+(200.48827540465469715)*d101 \\
 &-(1.0076663134634543616)*d011-(2.4855769065431874264)*d001+(230.41969701197656399)*d112 \\
 &+(232.71866904565614882)*d102+(0.20153326269269087202)*d012 \\
 &+(5.7772868638571383357)*d002 = 1,
 \end{aligned}$$

où les symboles $d_{i,k,s}$ correspondent aux paramètres $\delta_s^{(i,k)}$, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$, $0 \leq s \leq n$. On remarque que certaines équations sont redondantes, ce qui s'explique par les symétries simultanées du système (6.6) et de la perturbation (6.25). La résolution de ce système linéaire produit une solution non unique, ce qui suggère que le vecteur \tilde{b} défini par (6.24) admet au moins un antécédent. \triangleleft

En supposant qu'on puisse démontrer que le système (6.22) présente effectivement n^3 cycles limites pour ε suffisamment petit, et pour toute valeur de l'entier n , alors on pourrait en déduire qu'un système de degré $O(n)$ peut admettre $O(n^3)$ cycles limites. Cette question est liée à l'étude de l'application linéaire \mathcal{M} définie par (6.23). Une démonstration dans le cas général impliquerait finalement que la conjecture de Lloyd est vraie.

TABLEAU 6.1 – Nombre de cycles limites apparaissant dans le système (6.22) sous l'action de la perturbation (6.25), pour quelques valeurs des entiers n et r .

n	r	Nombre de cycles limites recherchés	Temps de calcul (s)
2	2	8	1
2	3	12	4
2	4	16	24
3	2	18	5
3	3	27	15
3	4	36	72
4	2	32	36
4	3	48	83
4	4	64	257
5	2	50	191
5	3	75	409
5	4	100	904
6	2	72	1509
6	3	108	2592
6	4	144	4742
7	2	98	5984
7	3	147	13755

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié des réseaux complexes de systèmes hamiltoniens, construits à partir de multiples instances du système

$$\dot{x} = (y - y_i), \quad \dot{y} = -(x - x_i), \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,$$

afin d'analyser le comportement asymptotique du nombre de Hilbert $H(n)$ de cycles limites dans un champ de vecteurs polynomial du plan. Nous avons proposé plusieurs configurations géométriques de réseaux complexes, portés par des graphes correspondant à des grilles rectangulaires ou circulaires, ainsi que quelques perturbations polynomiales de ces réseaux, provoquant l'apparition de cycles limites, distribués par nids autour de chaque centre du système non perturbé. L'une de ces perturbations, orientée le long du gradient du système initial, est de degré $O(n^2)$ et donne naissance à n^3 cycles limites de forme homogène, alors que le système non perturbé est lui-même de degré $O(n)$. Enfin, nous avons présenté une méthode algorithmique originale permettant de rechercher une perturbation de degré $O(n)$, donnant encore naissance à n^3 cycles limites. Le succès de cette méthode est lié à l'étude de l'application linéaire non surjective \mathcal{M} définie par (6.23). Les résultats numériques de cette méthode, bien que partiels, renforcent la conjecture de Lloyd, qui affirme que le nombre de Hilbert $H(n)$ est d'ordre n^3 , et suggèrent que l'étude des réseaux de systèmes hamiltoniens est susceptible de produire des résultats significatifs dans un futur proche.

*Il est inutile de demander au calcul plus de précision qu'aux observations,
mais il ne faut pas non plus lui en demander moins.*
Henri Poincaré, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste.*

Les programmes présentés dans cette annexe sont écrits en langage Python, en langage FreeFem++ ou en langage C++. Les programmes C++ utilisent la bibliothèque de calcul symbolique Ginac. L'interprétation, la compilation et l'exécution de ces programmes ont été réalisées dans un environnement DEBIAN-GNU/LINUX.

A.1 Réseaux aléatoires de systèmes PCR

Le programme Python suivant est utilisé pour réaliser les simulations de réseaux PCR aléatoires présentées dans le chapitre 3.

```
#!/usr/bin/env python3

#=====
# Simulation d'un réseau de systèmes PCR
# Couplages linéaires et quadratiques
#=====

# Bibliothèques scientifiques
import networkx as nx
from random import randint, random
import numpy as np

# Sommets et arêtes
N1 = 15 # sommets de type (1)
N2 = 15 # sommets de type (2)
N = N1 + N2
nodes1 = range(N1)
nodes2 = range(N1, N)

Nlinear_edges = randint(0, 100)
linear_edges = []
for k in range(Nlinear_edges):
    a, b = 0, 0
    while a==b:
        a, b = randint(0, N-1), randint(N1, N-1)
```

```

c = randint(1, 2)
if c==1:linear_edges = linear_edges + [(a,b)]
else:linear_edges = linear_edges + [(b,a)]

Nquadratic_edges = randint(0, 100)
quadratic_edges = []
for k in range(Nquadratic_edges):
    a, b = 0, 0
    while a==b:
        a, b = randint(0, N1-1), randint(N1, N-1)
    quadratic_edges = quadratic_edges + [(a,b)]

# Recherche de chemins d'évacuation
G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from(nodes1)
G.add_nodes_from(nodes2)
G.add_edges_from(linear_edges)

number_isolated_nodes = 0
for k in range(N1):
    connection = 0
    for j in range(N1, N):
        if nx.has_path(G, k, j):
            connection = connection + 1
    if connection==0:
        number_isolated_nodes = number_isolated_nodes + 1

```

On prendra garde qu'en langage Python, les fonctions `range` et `randint` n'ont pas la même syntaxe. Par exemple, `range(1, n)` génère la liste d'entiers $[1, 2, \dots, n-1]$, tandis que `randint(1, n)` génère un entier aléatoire dans l'ensemble $[1, 2, \dots, n]$.

A.2 Méthode de décomposition pour le système PCR avec diffusion

Le programme `FreeFem++` suivant correspond à l'implémentation de la méthode numérique de décomposition pour le système PCR avec diffusion.

```

/*****
*
*      Système PCR (réaction-diffusion)
*
*
*       $dr/dt = d1*Delta r - B*r + gamma * q * (1-r)$ 
*       $dc/dt = d2*Delta c + B1*r - C2*c + C1*p - phi*c*(r+c+p+q)$ 
*       $dp/dt = d3*Delta c + B2*r + C2*c - C1*p$ 
*       $dq/dt = d4*Delta q - gamma * q * (1-r)$ 
*
*****/

// Paramètres

real gamma = 1.0;
real phi = 1.0;
real B1 = 0.4;
real B2 = 0.4;
real B = 0;
B = B1 + B2;
real C1 = 0.6;
real C2 = 0.6;
real a = 0;
real dfast = 5;
real dslow = 1;

```

```

real dt = 0.1;
real dtau = dt/2.0;
real L = 20.0;

// Domaine : un disque

border C(t=0,2*pi){x=(L/2)*(cos(t))+L/2; y=(L/2)*(sin(t))+L/2;}
mesh Th = buildmesh(C(100));

fespace Vh(Th, P1);

// Réaction

func real[int] f(real[int] X, real t)
{
    // X[0] -> r, X[1] -> c, X[2] -> p, X[3] -> q

    real[int] dX(4);
    dX = 1.0;
    dX[0] = - B*X[0] + gamma * X[3] * (1-X[0]);
    dX[1] = + B1*X[0] - C2*X[1] + C1*X[2] + a*X[1]*X[2]
            - phi*X[1]*(X[0]+X[1]+X[2]+X[3]);
    dX[2] = + B2*X[0] + C2*X[1] - C1*X[2] - a*X[1]*X[2];
    dX[3] = - gamma * X[3] * (1-X[0]);
    return dX;
}

// Schéma de Runge-Kutta

func real[int] RK4(real[int] u, real t)
{
    real[int] u2(4), u3(4), u4(4);
    real[int] p1(4), p2(4), p3(4), p4(4);
    real t2, tnew;
    real[int] unew(4);
    unew = 1.0;

    p1 = f(u, t);
    t2 = t + 0.5*dt;
    u2 = u + 0.5*dt*p1;
    p2 = f(u2, t2);
    u3 = u + 0.5*dt*p2;
    p3 = f(u3, t2);
    tnew = t + dt;
    u4 = u + dt*p3;
    p4 = f(u4, tnew);
    unew = 1.0*p1;
    unew = unew + 2.0*p2;
    unew = unew + 2.0*p3;
    unew = unew + 1.0*p4;
    unew = u + dt*1./6.*unew;

    return unew;
}

// Diffusion

Vh rnew, rold, cnew, cold, pnew, pold, qnew, qold, w;

problem Diffusionr(rnew, w) = int2d(Th)( rnew*w + dslow*dtau*(dx(rnew)* dx(w)
    + dy(rnew)* dy(w))) + int2d(Th) (- rold*w );
problem Diffusionc(cnew, w) = int2d(Th)( cnew*w + dfast*dtau*(dx(cnew)* dx(w)
    + dy(cnew)* dy(w))) + int2d(Th) (- cold*w );
problem Diffusionp(pnew, w) = int2d(Th)( pnew*w + dslow*dtau*(dx(pnew)* dx(w)
    + dy(pnew)* dy(w))) + int2d(Th) (- pold*w );

```

```

problem Diffusionq(qnew, w) = int2d(Th)( qnew*w + dslow*dtau*(dx(qnew)* dx(w)
    + dy(qnew)* dy(w))) + int2d(Th) (- qold*w );

real t = 0.0;

// Condition initiale

func real q0(real x, real y)
{
    real res;
    res = 1/(1+1.0*(x-(L/2))*(x-(L/2))+1.0*(y-(L/2))*(y-(L/2)));
    return res;
}

qold = q0(x, y);
rold = 0.0;
cold = 0.0;
pold = 0.0;

// Méthode de décomposition

for (int m=0; m<6/dt; m++){
    // Diffusion pour un demi-pas
    Diffusionr; rold = rnew;
    Diffusionc; cold = cnew;
    Diffusionp; pold = pnew;
    Diffusionq; qold = qnew;
    t = t + dtau;

    // Réaction pour un pas
    func real[int] reaction(real x, real y){
        real[int] U(4);
        U[0] = rold;
        U[1] = cold;
        U[2] = pold;
        U[3] = qold;
        U = RK4(U, t);
        return U;
    }

    rold = reaction(x, y)[0];
    cold = reaction(x, y)[1];
    pold = reaction(x, y)[2];
    qold = reaction(x, y)[3];
    t = t + dt;

    // Diffusion pour un demi-pas
    Diffusionr; rold = rnew;
    Diffusionc; cold = cnew;
    Diffusionp; pold = pnew;
    Diffusionq; qold = qnew;
    t = t + dtau;
}

```

A.3 Expression symbolique des coefficients de Melnikov

On considère un système hamiltonien perturbé du plan \mathbb{R}^2 :

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon f(x, y, \delta), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon g(x, y, \delta),$$

où H , p et q sont des polynômes, avec

$$H(x, y) = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i+j \geq 3} h_{ij} x^i y^j,$$

$$f(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} a_{ij} x^i y^j, \quad g(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij} x^i y^j.$$

Le programme C++ suivant, adapté de [45], permet d'obtenir l'expression symbolique des coefficients de Melnikov, donnés par le théorème 6.4, en fonction des coefficients des polynômes H , f et g .

A.3.1 Algorithme de calcul

```

/*=====
*
*   Coefficients de Melnikov
*   Pour compiler :
*   g++ -std=gnu++11 MelnikovCoeff.cpp -lcln -lginac
*
*=====*/

#include <ginac/ginac.h>
using namespace GiNaC;
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <fstream>
#include <string>
#include <time.h>
using namespace std;

ex taylor(ex expr, symbol var, int x0, int n);

int main(){
    int N=5;
    int NHALF = N/2;
    symbol x("x"), y("y");

    // Construction du Hamiltonien

    ex H; symbol W("W");
    H = (W/2)*(x*x + y*y);
    symbol h("h");
    for (int i=3; i<=N+1; i++){
        for (int j=0; j<=i; j++){
            H = H + indexed(h, idx(i-j, N), idx(j, N))*pow(x, i-j)*pow(y, j);}
        }
    ex Hy; Hy = diff(H, y);

    // Construction de la perturbation

    ex P, Q; P = 0; Q = 0;
    symbol a("a"), b("b");
    for (int i=0; i<=N; i++){
        for (int j=0; j<=i; j++){
            P = P + indexed(a, idx(i-j, N), idx(j, N))*pow(x, i-j)*pow(y, j);
            Q = Q + indexed(b, idx(i-j, N), idx(j, N))*pow(x, i-j)*pow(y, j);
        }
    }

    // Construction de phi

    ex phi; symbol e("e");
    for (int i=2; i<=N; i++){phi = phi + indexed(e, idx(i, N))*pow(x, i);}

```

```

// (1) Calcul des coefficients e_j

ex temp;
temp = Hy.subs(y == phi); temp = expand(temp);
ex der, der0;
der = diff(temp, x)/2;
for (int i=2; i<=N; i++){
  der = diff(der, x)/(i+1);
  der0 = der.subs(x == 0);
  symbol ei("ei");
  der0 = der0.subs(indexed(e, idx(i, N)) == ei);
  ex sol;
  sol = lsolve(der0 == 0, ei);
  der = der.subs(indexed(e, idx(i, N)) == sol);
  phi = phi.subs(indexed(e, idx(i, N)) == sol);
}

// (2) Calcul des coefficients q_j(x)

lst temp2;
for (int k=0; k<=N+1; k++){temp2.append(0);}
der = expand(diff(P, x) + diff(Q, y));
temp2[0] = taylor(der.subs(y == phi), x, 0, N+1);
for (int j=1; j<=N; j++){
  der = expand(diff(der, y)/(j+1));
  temp2[j] = taylor(der.subs(y == phi), x, 0, N+1);
}
matrix barb(N+1, N+1);
for (int i=0; i<=N; i++){
  for (int j=0; j<=N; j++){barb(i, j) = 0;}
}
for (int j=0; j<=N; j++){
  barb(0, j) = temp2[j].coeff(x, 0);
  der = diff(temp2[j], x);
  for (int i=1; i<=N-j; i++){
    barb(i, j) = der.subs(x == 0);
    der = diff(der, x)/(i+1);
  }
}
lst qjx;
for (int k=0; k<=N; k++){qjx.append(0);}
for (int i=1; i<=N; i++){
  for (int j=0; j<=N; j++){qjx[i] = qjx[i] + barb(j, i-1)*pow(x, j);}
  qjx[i] = taylor(qjx[i], x, 0, N+1);
}
for (int i=0; i<=N; i++){
  for (int j=0; j<=N; j++){barb(i, j) = 0;}
}

// (3) Calcul des coefficients H*_j(x)

symbol v("v"), eps("eps");
ex Hstar;
Hstar = H.subs(y == v+phi);
Hstar = Hstar.subs(x == x*eps);
Hstar = Hstar.subs(v == v*eps);
Hstar = taylor(Hstar, eps, 0, N+2);
Hstar = Hstar.subs(eps == 1);
ex Hstar0;
Hstar0 = Hstar.subs(v == 0);
ex dHstar, dHstar0;
dHstar = diff(Hstar, v);
dHstar0 = dHstar.subs(v == 0);
ex v2Htilde;

```

```

v2Htilde = Hstar - Hstar0 - v*dHstar0;
v2Htilde = taylor(v2Htilde, v, 0, N+1);
lst Hjxstar;
for (int k=0; k<=N; k++){Hjxstar.append(0);}
for (int i=1; i<=N; i++){
    Hjxstar[i] = v2Htilde.coeff(v, i+1);
}

// (4) Calcul des coefficients a_j(x)

symbol Hs("Hs");
symbol ajx("ajx");
symbol u("u");
lst Ajx;
for (int k=0; k<=N; k++){Ajx.append(0);}
v2Htilde = 0;
for (int i=1; i<=N; i++){
    v2Htilde = v2Htilde + indexed(Hs, idx(i, N))*pow(v, i+1);
}
ex F; F = u*u - v2Htilde;
ex vv; vv = 0;
for (int i=1; i<=N; i++){
    vv = vv + indexed(ajx, idx(i, N))*pow(u, i);
}
F = F.subs(v == vv);
Ajx[1] = 1/sqrt(indexed(Hs, idx(1, N)));
der = diff(F, u, 2)/2;
for (int i=3; i<=N+1; i++){
    der = diff(der, u)/i;
    der0 = der.subs(u == 0);
    symbol xi("xi");
    der0 = der0.subs(indexed(ajx, idx(i-1, N)) == xi);
    Ajx[i-1] = lsolve(der0 == 0, xi);
}
for (int i=1; i<=N; i++){
    for (int j=1; j<=N; j++){
        Ajx[i] = Ajx[i].subs(indexed(ajx, idx(j, N)) == Ajx[j]);
    }
    Ajx[i] = expand(Ajx[i]);
}
for (int i=1; i<=N; i++){
    for (int j=1; j<=N; j++){
        Ajx[i] = Ajx[i].subs(indexed(Hs, idx(j, N)) == Hjxstar[j]);
    }
    Ajx[i] = taylor(Ajx[i], x, 0, N+1-i);
}

// (5) Calcul des coefficients bar_q_j(x)

symbol w("w"); Q = 0;
symbol q("q"), A("A");
lst V1, V2;
for (int k=0; k<=2*N+1; k++){
    V1.append(0); V2.append(0);
}
for (int i=1; i<=2*N; i++){
    V1[i] = V1[i-1] + indexed(A, idx(i, 2*N+1))*pow(w, i);
    V2[i] = V2[i-1] + indexed(A, idx(i, 2*N+1))*pow(-w, i);
}
for (int i=1; i<=2*N+1; i++){
    Q = Q + indexed(q, idx(i, 2*N+1))*(pow(V1[2*N+1-i], i)\
        - pow(V2[2*N+1-i], i));
}
Q = expand(Q);
lst qbarjx;

```

```

for (int k=0; k<=N; k++){qbarjx.append(Q.coeff(w, 2*k+1));}
for (int i=0; i<=NHALF; i++){
  for (int j=1; j<=N; j++){
    qbarjx[i] = qbarjx[i].subs( indexed(A, idx(j, 2*N+1)) == Ajx[j]);
    qbarjx[i] = qbarjx[i].subs( indexed(q, idx(j, 2*N+1)) == qjx[j]);
  }
  qbarjx[i] = taylor(qbarjx[i], x, 0, N);
}
Q = 0; V1 = V1.remove_all(); V2 = V2.remove_all();

// (6) Calcul des coefficients psi(x)

ex Hphi; Hphi = H.subs(y == phi);
ex H0; H0 = taylor(Hphi, x, 0, N+1);
lst hj;
for (int i=0; i<=N; i++){hj.append(H0.coeff(x, i));}
Hstar0 = 0;
for (int j=2; j<=N; j++){Hstar0 = Hstar0 + hj[j]*pow(x, j-2);}
temp = sqrt(Hstar0);
ex Hstar0half;
Hstar0half = taylor(temp, x, 0, N+1)*x;
ex psi;
psi = taylor(Hstar0half, x, 0, N);
hj = hj.remove_all();
Hstar0 = 0; Hphi = 0; H0 = 0; Hstar0half = 0;

// (7) Calcul des coefficients tilde_q_j

ex dpsi;
dpsi = diff(psi, x);
symbol qjtilde("qjtilde");
lst qjtilde;
for (int i=0; i<=NHALF; i++){qjtilde.append(0);}
for (int j=0; j<=NHALF; j++){
  for (int i=0; i<N-2*j; i++){
    qjtilde[j] = qjtilde[j]\
      + indexed(qjtilde, idx(i, N+1), idx(j, N+1))*pow(u, i);}
}
for (int j=0; j<=NHALF; j++){
  qjtilde[j] = qjtilde[j].subs(u == psi);
  qjtilde[j] = taylor(qjtilde[j], x, 0, N);
  qjtilde[j] = qjtilde[j]*dpsi;
  qjtilde[j] = taylor(qjtilde[j], x, 0, N-j*2);
}
ex d;
matrix Qij(N+1, N+1);
for (int i=0; i<=N; i++){
  for (int j=0; j<=N; j++){Qij(i, j) = 0;}
}
for (int j=0; j<=NHALF; j++){
  for (int i=0; i<N-2*j; i++){
    d = (qjtilde[j]-qbarjx[j]).coeff(x, i);
    symbol qij("qij");
    d = d.subs(indexed(qjtilde, idx(i, N+1), idx(j, N+1)) == qij);
    Qij(i, j) = lsolve(d == 0, qij);
    qjtilde[j] = qjtilde[j].subs(indexed(qjtilde, idx(i, N+1),\
      idx(j, N+1)) == Qij(i, j));
  }
}
qbarjx = qbarjx.remove_all(); qjtilde = qjtilde.remove_all();
psi = 0; dpsi = 0; phi = 0;

// (8) Calcul des coefficients r_ij

matrix rij(N+1, N+1);

```

```

for (int i=0; i<=N; i++){
    for (int j=0; j<=N; j++){rij(i, j) = 0;}
}
int ii;

for (int j=0; j<=NHALF; j++){
    for (int i=0; i<N-2*j; i=i+2){
        ii = i/2;
        rij(ii, j) = 2*Qij(i, j);
    }
}

// (9) Coefficients beta_ij (effectuée avec Maxima)

/*
BETA: [];
for j: 0 thru NHALF do(
    BETAnew: [],
    for i: 0 thru NHALF do(
        if j <= i then (
            BETAnew: append(BETAnew, \
                [integrate(x**(2*j)*(1-x**2)**(i-j)*sqrt(1-x**2), x, 0, 1)])
        )
    ),
    BETA: append(BETA, [BETAnew])
);
*/
matrix beta = {{Pi/4, 3*Pi/16, ...}};

// (10) Calcul final des coefficients b_j

ex B;
for (int i=0; i<=NHALF; i++){
    B = 0;
    for (int j=0; j<=i; j++){B = B + rij(j, i-j)*beta(j, i-j);}
    B = expand(B);
}
return 0;
}

ex taylor(ex expr, symbol var, int x0, int n){
    ex res;
    res = expr.subs(var == x0);
    ex der; der = expr; ex a;
    for (int k=0; k<n; k++){
        der = diff(der, var);
        a = der.subs(var == x0);
        res = res + a*pow(var, k+1)/factorial(k+1);
    }
    return res;
}

```

A.3.2 Résultats du programme

L'exécution du programme précédent fournit les résultats suivants.

$$b_0 = \frac{2\pi}{\omega}(a_{10} + b_{01}).$$

Lorsque $a_{10} = -b_{01}$, on obtient :

$$b_1 = \frac{\pi}{\omega^3} [\omega(3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03}) - (2a_{20} + b_{11})(3h_{30} + h_{12}) - (a_{11} + 2b_{02})(h_{21} + 3h_{03})],$$

$$\begin{aligned}
b_2 = \frac{\pi}{2\omega^6} & \left[2\omega^3 (a_{14} + a_{32} + 5a_{50} + 5b_{05} + b_{23} + b_{41}) - 2\omega^2 (5a_{11}h_{05} + a_{11}h_{23} + a_{11}h_{41} \right. \\
& + 5a_{12}h_{04} + a_{12}h_{22} + a_{12}h_{40} + 5a_{13}h_{03} + a_{13}h_{21} + 2a_{20}h_{14} + 2a_{20}h_{32} + 10a_{20}h_{50} + 2a_{21}h_{13} + 2a_{21}h_{31} \\
& + 2a_{22}h_{12} + 2a_{22}h_{30} + 3a_{30}h_{04} + 3a_{30}h_{22} + 15a_{30}h_{40} + 3a_{31}h_{03} + 3a_{31}h_{21} + 4a_{40}h_{12} + 20a_{40}h_{30} + 10b_{02}h_{05} \\
& + 2b_{02}h_{23} + 2b_{02}h_{41} + 15b_{03}h_{04} + 3b_{03}h_{22} + 3b_{03}h_{40} + 20b_{04}h_{03} + 4b_{04}h_{21} + b_{11}h_{14} + b_{11}h_{32} + 5b_{11}h_{50} \\
& + 2b_{12}h_{13} + 2b_{12}h_{31} + 3b_{13}h_{12} + 3b_{13}h_{30} + b_{21}h_{04} + b_{21}h_{22} + 5b_{21}h_{40} + 2b_{22}h_{03} + 2b_{22}h_{21} + b_{31}h_{12} \\
& + 5b_{31}h_{30}) + \omega (70a_{11}h_{03}h_{04} + 10a_{11}h_{03}h_{22} + 6a_{11}h_{03}h_{40} + 10a_{11}h_{04}h_{21} + 10a_{11}h_{12}h_{13} \\
& + 6a_{11}h_{12}h_{31} + 6a_{11}h_{13}h_{30} + 6a_{11}h_{21}h_{22} + 10a_{11}h_{21}h_{40} + 10a_{11}h_{30}h_{31} + 35a_{12}h_{03}^2 \\
& + 10a_{12}h_{03}h_{21} + 5a_{12}h_{12}^2 + 6a_{12}h_{12}h_{30} + 3a_{12}h_{21}^2 + 5a_{12}h_{30}^2 + 20a_{20}h_{03}h_{13} \\
& + 12a_{20}h_{03}h_{31} + 20a_{20}h_{04}h_{12} + 12a_{20}h_{04}h_{30} + 12a_{20}h_{12}h_{22} + 20a_{20}h_{12}h_{40} + 12a_{20}h_{13}h_{21} \\
& + 20a_{20}h_{21}h_{31} + 20a_{20}h_{22}h_{30} + 140a_{20}h_{30}h_{40} + 20a_{21}h_{03}h_{12} + 12a_{21}h_{03}h_{30} + 12a_{21}h_{12}h_{21} \\
& + 20a_{21}h_{21}h_{30} + 15a_{30}h_{03}^2 + 18a_{30}h_{03}h_{21} + 9a_{30}h_{12}^2 + 30a_{30}h_{12}h_{30} + 15a_{30}h_{21}^2 \\
& + 105a_{30}h_{30}^2 + 140b_{02}h_{03}h_{04} + 20b_{02}h_{03}h_{22} + 12b_{02}h_{03}h_{40} + 20b_{02}h_{04}h_{21} + 20b_{02}h_{12}h_{13} \\
& + 12b_{02}h_{12}h_{31} + 12b_{02}h_{13}h_{30} + 12b_{02}h_{21}h_{22} + 20b_{02}h_{21}h_{40} + 20b_{02}h_{30}h_{31} + 105b_{03}h_{03}^2 \\
& + 30b_{03}h_{03}h_{21} + 15b_{03}h_{12}^2 + 18b_{03}h_{12}h_{30} + 9b_{03}h_{21}^2 + 15b_{03}h_{30}^2 + 10b_{11}h_{03}h_{13} \\
& + 6b_{11}h_{03}h_{31} + 10b_{11}h_{04}h_{12} + 6b_{11}h_{04}h_{30} + 6b_{11}h_{12}h_{22} + 10b_{11}h_{12}h_{40} + 6b_{11}h_{13}h_{21} \\
& + 10b_{11}h_{21}h_{31} + 10b_{11}h_{22}h_{30} + 70b_{11}h_{30}h_{40} + 20b_{12}h_{03}h_{12} + 12b_{12}h_{03}h_{30} + 12b_{12}h_{12}h_{21} \\
& + 20b_{12}h_{21}h_{30} + 5b_{21}h_{03}^2 + 6b_{21}h_{03}h_{21} + 3b_{21}h_{12}^2 + 10b_{21}h_{12}h_{30} + 5b_{21}h_{21}^2 \\
& + 35b_{21}h_{30}^2) - 105a_{11}h_{03}^3 - 35a_{11}h_{03}^2h_{21} - 35a_{11}h_{03}h_{12}^2 - 30a_{11}h_{03}h_{12}h_{30} - 15a_{11}h_{03}h_{21}^2 \\
& - 15a_{11}h_{03}h_{30}^2 - 15a_{11}h_{12}^2h_{21} - 30a_{11}h_{12}h_{21}h_{30} - 5a_{11}h_{21}^3 - 35a_{11}h_{21}h_{30}^2 - 70a_{20}h_{03}^2h_{12} \\
& - 30a_{20}h_{03}^2h_{30} - 60a_{20}h_{03}h_{12}h_{21} - 60a_{20}h_{03}h_{21}h_{30} - 10a_{20}h_{12}^3 - 30a_{20}h_{12}^2h_{30} - 30a_{20}h_{12}h_{21}^2 \\
& - 70a_{20}h_{12}h_{30}^2 - 70a_{20}h_{21}^2h_{30} - 210a_{20}h_{30}^3 - 210b_{02}h_{03}^3 - 70b_{02}h_{03}^2h_{21} - 70b_{02}h_{03}h_{12}^2 \\
& - 60b_{02}h_{03}h_{12}h_{30} - 30b_{02}h_{03}h_{21}^2 - 30b_{02}h_{03}h_{30}^2 - 30b_{02}h_{12}^2h_{21} - 60b_{02}h_{12}h_{21}h_{30} - 10b_{02}h_{21}^3 \\
& - 70b_{02}h_{21}h_{30}^2 - 35b_{11}h_{03}^2h_{12} - 15b_{11}h_{03}^2h_{30} - 30b_{11}h_{03}h_{12}h_{21} - 30b_{11}h_{03}h_{21}h_{30} - 5b_{11}h_{12}^3 \\
& - 15b_{11}h_{12}^2h_{30} - 15b_{11}h_{12}h_{21}^2 - 35b_{11}h_{12}h_{30}^2 - 35b_{11}h_{21}^2h_{30} - 105b_{11}h_{30}^3].
\end{aligned}$$

L'expression symbolique des coefficients b_j pour $j \geq 3$ n'est pas lisible. Par exemple, l'expression non simplifiée du coefficient b_3 est donnée par une chaîne de plus de 612000 caractères.

A.4 Programme de recherche d'une perturbation

Le programme C++ suivant correspond à l'implémentation de l'algorithme de recherche d'une perturbation donné dans la section 6.2.5.

```

/*=====
*
*      Perturbation d'un réseau de centres
*
*      Compilation :
*      g++ -std=gnu++11 perturbation.cpp -o perturbation.out -lcln -lginac
*
*=====*/

#include <ginac/ginac.h>
using namespace GiNaC;
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <fstream>
#include <string>
#include <vector>
#include <time.h>
#define MAXIDX 10
#define MAXR 5

```

```

#define MAXN 9
#define MAXM 9
using namespace std;

// Variables

ex Ha, E; ex Q; ex Qsubs; ex Q_ik; ex Q_i;
ex Fk, Hk;
symbol d("d"); symbol x("x"), y("y");
vector<ex> B(5, 0);
vector<ex> mybeta(5, 0);
lst equations;
lst variables;
ex vjs; symbol W("W");
ex Hk_ij, Qsubs_ij; ex c1, c2;
symbol h("h"), a("a"), b("b");

lst delta(int n, int m, int r);
ex taylor(ex expr, symbol var, int x0, int n);

// Procédures

void hamiltonien(int n, int m);
void centre(int i, int k, int n, int m, int r);
void perturbation(int n, int m, int r);

int main(){
    int n = 3; // nombre de centres sur une ligne
    int m = 3; // nombre de lignes
    int r = 3; // nombre de cycles limites attendus autour de chaque centre

    // Calcul des coefficients de Melnikov pour chaque centre

    int k = 0;
    symtab table;
    table["x"] = x;
    table["y"] = y;
    table["W"] = W;

    for (int i=0; i<=MAXIDX; i++){
        for (int j=0; j<=MAXIDX; j++){
            table["h"+to_string(i)+to_string(j)] =\
                indexed(h, idx(i, MAXIDX), idx(j, MAXIDX));
            table["a"+to_string(i)+to_string(j)] =\
                indexed(a, idx(i, MAXIDX), idx(j, MAXIDX));
            table["b"+to_string(i)+to_string(j)] =\
                indexed(b, idx(i, MAXIDX), idx(j, MAXIDX));
        }
    }
    parser reader(table);

    string line;
    ifstream BETA("~/beta-4.txt");
    if (BETA.is_open()){
        while (getline(BETA, line)){
            line = RemoveChar(line, '.');
            if (k==0){mybeta[0] = reader(line);}
            if (k==2){mybeta[1] = reader(line);}
            if (k==4){mybeta[2] = reader(line);}
            if (k==6){mybeta[3] = reader(line);}
            if (k==8){mybeta[4] = reader(line);}
            k = k+1;
        }
        BETA.close();
    }
}

```

```

    }
    variables = delta(n, m, r);

    hamiltonien(n, m);
    perturbation(n, m, r);

    for (int i=0; i<n; i++){
        for (int k=0; k<m; k++){centre(i, k, n, m, r);}
    }
    return 0;
}

void perturbation(int n, int m, int r){
    Q = 0;
    Q_i = 0;
    for (int i=0; i<n; i++){
        for (int k=0; k<m; k++){
            Q_ik = 0;
            for (int s=0; s<=r; s++){
                Q_ik = Q_ik + indexed(d, idx(i, n), idx(k, m), idx(s, r))\
                    *pow(y, 2*s+1);
            }
            for (int l=0; l<m; l++){
                if (l!= k){Q_ik = Q_ik*pow(y-l, 2);}
            }
            Q_i = Q_i + Q_ik;
        }
        for (int j=0; j<n; j++){
            if (j!=i){Q_i = Q_i*pow(x-j, 2);}
        }
        Q = Q + Q_i;
    }
    Q = expand(Q);
}

void hamiltonien(int n, int m){
    Ha = 0;
    for (int k=0; k<m; k++){
        E = 0.5;
        for (int i=0; i<n; i++){
            E = E * ((x-i)*(x-i)+(y-k)*(y-k));
        }
        for (int l=0; l<m; l++){
            if (l!=k){
                E = E*pow(y-l, 2);
            }
        }
        Ha = Ha + E;
    }
    Ha = expand(Ha);
}

void centre(int i, int k, int n, int m, int r){
    for (int l=0; l <= r; l++){B[l] = mybeta[l];}
    Fk = expand(Ha.subs(x == i+x));
    Fk = expand(Ha.subs(y == k+y));
    c1 = Fk.coeff(x, 2).coeff(y, 0);
    c2 = Fk.coeff(y, 2).coeff(x, 0);
    Hk = Fk.subs(x == x/sqrt(2*c1)).subs(y == y/sqrt(2*c2));
    Hk = expand(Fk);

    Qsubs = 0;
    Qsubs = expand(Q.subs(x == i+x));
    Qsubs = expand(Q.subs(y == k+y));
    Qsubs = Qsubs.subs(x == x/sqrt(2*c1)).subs(y == y/sqrt(2*c2));
}

```

```

Qsubs = expand(Qsubs);

for (int ii=0; ii<=MAXIDX; ii++){
  for (int j=0; j<=MAXIDX; j++){
    for (int l=0; l<=r; l++){
      Hk_ij = Hk.coeff(x, ii).coeff(y, j);
      Qsubs_ij = Qsubs.coeff(x, ii).coeff(y, j);
      B[l] = B[l].subs(indexed(h, idx(ii, MAXIDX), idx(j, MAXIDX))\
        == Hk_ij);
      B[l] = B[l].subs(indexed(a, idx(ii, MAXIDX), idx(j, MAXIDX))\
        == 0);
      B[l] = B[l].subs(indexed(b, idx(ii, MAXIDX), idx(j, MAXIDX))\
        == Qsubs_ij);
      B[l] = evalf(B[l].subs(W == 1));
    }
  }
}

for (int l=0; l<=r; l++){
  B[l] = evalf(B[l]);
}

for (int ii=0; ii<n; ii++){
  for (int j=0; j<m; j++){
    for (int s=0; s<=r; s++){
      for (int l=0; l<=r; l++){
        vjs = variables[(r+1)*m*(ii)+(r+1)*(j)+s];
        B[l] = B[l].subs(indexed(d, idx(ii, n), idx(j, m),\
          idx(s, r)) == vjs);
      }
    }
  }
}

if (r == 1){
  equations.append(B[0] == -0.01);
  equations.append(B[1] == 1);
}

if (r == 2){
  equations.append(B[0] == 0.00005);
  equations.append(B[1] == -0.015);
  equations.append(B[2] == 1);
}

if (r == 3){
  equations.append(B[0] == -0.00000005);
  equations.append(B[1] == 0.000065);
  equations.append(B[2] == -0.016);
  equations.append(B[3] == 1);
}

if (r == 4){
  equations.append(B[0] == 0.00000000025);
  equations.append(B[1] == -0.0000000825);
  equations.append(B[2] == 0.000073);
  equations.append(B[3] == -0.0165);
  equations.append(B[4] == 1);
}
}

lst delta(int n, int m, int r){
  lst result;
  symbol d000("d000"); ... symbol d885("d885");
  lst stock;
}

```

```
stock = stock.append(d000); ... stock = stock.append(d885);

for (int i=0; i<n; i++){
    for (int k=0; k<m; k++){
        for (int s=0; s<=r; s++){
            result = result.append(stock[(MAXR+1)*MAXM*i + (MAXR+1)*(k) + s]);
        }
    }
}
return result;
}
```

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier Science, 2003.
- [2] E. Alberti and G. Belli. Contributions to the Boltzmann-like approach for traffic flow. a model for concentration dependent driving programs. *Transportation Research*, 12(1) :33–42, 1978.
- [3] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les Éditions de l'École Polytechnique, Paris, 3rd edition, octobre 2012.
- [4] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3) :93–153, 2008.
- [5] M. A. Aziz-Alaoui. Synchronization of chaos. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier, 5 :213–226, 2006.
- [6] M. A. Aziz-Alaoui and C. Bertelle. *From system complexity to emergent properties*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] A.D. Bazykin. *Nonlinear dynamics of interacting populations*, volume 11. World Scientific, 1998.
- [8] N. Bellomo and C. Dogbe. On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18 :1317–1345, 2008.
- [9] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret, and H. Nijmeijer. Synchronization and graph topology. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11) :3423–3433, 2005.
- [10] M. Bennett, M.F. Schatz, H. Rockwood, and K. Wiesenfeld. Huygens's clocks. In *Proc. R. Soc. A*, volume 458, pages 563–579. The Royal Society, 2002.
- [11] S. T. Boyd. Psychological reactions of disaster victims. *South African medical*, 60(19) :744–748, 1981.
- [12] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 5th edition, 1983.
- [13] G. Cantin. Non identical coupled networks with a geographical model for human behaviors during catastrophic events. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(14) :1750213, 2017.
- [14] G. Cantin, M. A. Aziz-Alaoui, N. Verdière, and V. Lanza. Multiple Hopf bifurcations in coupled networks of planar systems. In *WANCSA 2017*, pages 32–33, University, Le Havre, 2017.
- [15] G. Cantin, N. Verdière, V. Lanza, M. A. Aziz-Alaoui, R. Charrier, C. Bertelle, D. Provitolo, and E. Dubos-Paillard. Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events : Stability and bifurcations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(10) :1630025, 2016.
- [16] G. Cantin, N. Verdière, V. Lanza, M. A. Aziz-Alaoui, R. Charrier, C. Bertelle, D. Provitolo, and E. Dubos-Paillard. Control of panic behavior in a non identical network coupled with a geographical model. In *PhysCon 2017*, pages 1–6, University, Firenze, 2017.
- [17] R.S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*. John Wiley & Sons, 2004.
- [18] J. Carr. *Applications of centre manifold theory*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] C. Christopher and C. Li. *Limit cycles of differential equations*. Springer Science & Business Media, 2007.

- [20] C. J. Christopher and N. G. Lloyd. Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 450, pages 219–224. The Royal Society, 1995.
- [21] L. O. Chua. Local activity is the origin of complexity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11) :3435–3456, 2005.
- [22] L. O. Chua, L. Kocarev, K. Eckert, and M. Itoh. Experimental chaos synchronization in Chua’s circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 02(03) :705–708, 1992.
- [23] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [24] L. Crocq. La psychologie des catastrophes et les blessés psychiques. *Noto R., Médecine de catastrophe, Paris, Milan, Barcelone, Masson*, 1994.
- [25] H. Dang-Vu and C. Delcarte. *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Universités. Mécanique. Ellipses, 2000.
- [26] J.-P. Demailly. *Analyse Numérique et Équations Différentielles*. EDP Sciences, Grenoble, 1990.
- [27] S. Descombes. Convergence of a splitting method of high order for reaction-diffusion systems. *Mathematics of Computation*, 70(236), 2001.
- [28] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, pages 268–271, 1959.
- [29] J. Ecalle. Finitude des cycles-limites et accéléro-sommation de l’application de retour. *Bifurcations of planar vector fields*, pages 74–159, 1990.
- [30] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. Exponential attractors for dissipative evolution equations. *Research in Applied Mathematics*, 1994.
- [31] M. Efendiev, S. Zelik, and A. Miranville. Exponential attractors and finite-dimensional reduction for non-autonomous dynamical systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 135(4) :703–730, 2005.
- [32] M. Fan, Q. Wang, and X. Zou. Dynamics of a non-autonomous ratio-dependent predator-prey system. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 133(01) :97–118, 2003.
- [33] S. Faure and B. Maury. Crowd motion from the granular standpoint. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(03) :463–493, 2015.
- [34] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications, 2008.
- [35] G. Gallo and S. Pallottino. Shortest path algorithms. *Annals of Operations Research*, 13(1) :1–79, 1988.
- [36] N. George and L. Gamond. Premières impressions. *L’essentiel Cerveaux et Psycho : Les émotions au pouvoir Science*, 7, 2011.
- [37] J. A. Goldstein. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [38] M. Golubitsky and I. Stewart. Nonlinear dynamics of networks : the groupoid formalism. *Bulletin of the american mathematical society*, 43(3) :305–364, 2006.
- [39] C. G. Gross. Aristotle on the brain. *The Neuroscientist*, 1(4) :245–250, 1995.
- [40] M. Haase. The functional calculus for sectorial operators. *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, pages 19–60, 2006.
- [41] H. Haken. *Information and Self-organization : A Macroscopic Approach to Complex Systems*. Springer, New York, 2000.
- [42] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1980.
- [43] M. Han. Bifurcation theory of limit cycles of planar systems. *Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations*, 3 :341–433, 2006.
- [44] M. Han and J. Li. Lower bounds for the Hilbert number of polynomial systems. *Journal of Differential Equations*, 252(4) :3278–3304, 2012.
- [45] M. Han, J. Yang, and P. Yu. Hopf bifurcations for near-Hamiltonian systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19(12) :4117–4130, 2009.

- [46] M. Han, H. Zang, and J. Yang. Limit cycle bifurcations by perturbing a cuspidal loop in a Hamiltonian system. *Journal of Differential Equations*, 246(1) :129–163, 2009.
- [47] B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff, and Y.H. Wan. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1981.
- [48] E. Hatfield, J. T. Cacioppo, and R. L. Rapson. *Emotional contagion*. Cambridge University Press, 1994.
- [49] D. Helbing. Boltzmann-like and Boltzmann-Fokker-Planck equations as a foundation of behavioral models. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 196(4) :546–573, 1993.
- [50] D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407(6803) :487–490, 2000.
- [51] D. Hilbert. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 37(4) :407–436, 2000.
- [52] D. Hilhorst, M. Mimura, and R. Weidenfeld. On a reaction-diffusion system for a population of hunters and farmers. In *Free Boundary Problems*, pages 189–196. Springer, 2003.
- [53] R. L. Hughes. The flow of large crowds of pedestrians. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53(4) :367–370, 2000.
- [54] P. Huguenard, A. Larcán, and R. Noto. *Médecine de catastrophe*, 1994.
- [55] Y. Ilyashenko. The origin of limit cycles under perturbation of the equation $dwdz = -r_{zr}w$, where $r(z,w)$ is a polynomial. *Matematicheskii Sbornik*, 120(3) :360–373, 1969.
- [56] Y. Ilyashenko. Finiteness theorems for limit cycles. *Russian Mathematical Surveys*, 45(2) :129–203, 1990.
- [57] Y. Ilyashenko. Centennial history of Hilbert’s 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(3) :301–354, 2002.
- [58] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer, New York, 3rd edition, 2013.
- [59] A. Jüngel, C. Kuehn, and L. Trussardi. A meeting point of entropy and bifurcations in cross-diffusion herding. *European Journal of Applied Mathematics*, 28 :317–356, 2017.
- [60] A. Korobeinikov and G.C. Wake. Lyapunov functions and global stability for SIR, SIRS, and SIS epidemiological models. *Applied Mathematics Letters*, 15(8) :955–960, 2002.
- [61] B. Korte and J. Vygen. *Combinatorial optimization*, volume 2. Springer, 2012.
- [62] N.N. Krasovskij. *Stability of motion : applications of Lyapunov’s second method to differential systems and equations with delay*. University Press, 1963.
- [63] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*, pages 420–422. Springer, 1975.
- [64] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2004.
- [65] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau, and A. Thorel. On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450(1) :351 – 376, 2017.
- [66] H. Laborit. *La légende des comportements*. Flammarion, 1994.
- [67] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semi-groups and evolution equations*. CUP Archive, 1991.
- [68] J. LaSalle. Some extensions of Liapunov’s second method. *IRE Transactions on circuit theory*, 7(4) :520–527, 1960.
- [69] J. Li. Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(01) :47–106, 2003.
- [70] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [71] J.-L. Lions and J. Peetre. Sur une classe d’espaces d’interpolation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, 19(1) :5–68, 1964.
- [72] J. Llibre and G. Rodríguez. Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields. *Journal of Differential Equations*, 198(2) :374–380, 2004.
- [73] N. G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems-some recent developments. *London Math. Soc. Lecture note Ser*, 127 :192–234, 1988.

-
- [74] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [75] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(4) :805–866, 1988.
- [76] B. Maury and J. Venel. A mathematical framework for a crowd motion model. *Comptes Rendus Mathématiques*, 346(23) :1245–1250, 2008.
- [77] V. Mel'nicov. On the stability of the center for time-periodic perturbation. *Math. Proc., Moscow Math. Soc., USSR*, 1963.
- [78] J. D. Murray. *Mathematical Biology. II Spatial Models and Biomedical Applications {Interdisciplinary Applied Mathematics V. 18}*. Springer-Verlag New York Incorporated, 2001.
- [79] J. D. Murray. *Mathematical Biology I : An Introduction, vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, USA., 2002.
- [80] A. Okubo. Diffusion and ecological problems : mathematical models. *Biomath*, 10, 1980.
- [81] N. F. Otrokov. On the number of limit cycles of a differential equation in the neighborhood of a singular point. *Matematicheskii Sbornik*, 76(1) :127–144, 1954.
- [82] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- [83] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10) :2109, 1998.
- [84] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer, New York, 3rd edition, 2001.
- [85] H. Poincaré. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle : Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles (thèse inaugurale) ; Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*. Ed. J. Gabay, 1881–1886.
- [86] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome 1*. Gauthier-Villars et fils (Paris), 2015.
- [87] I. Prigogine and G. Nicolis. *Self organization in non-equilibrium systems*. J. Wiley and Sons, New York, 1977.
- [88] D. Provitolo. Un exemple d'effets de dominos : la panique dans les catastrophes urbaines. *Cybergeo : European Journal of Geography*, 2005.
- [89] D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, C. Bertelle, and M. A. Aziz-Alaoui. Les comportements humains en situation de catastrophe : de l'observation à la modélisation conceptuelle et mathématique. *Cybergeo : European Journal of Geography*, 735, 2015.
- [90] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1998.
- [91] B. Rink and J. Sanders. Coupled cell networks : semigroups, Lie algebras and normal forms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(5) :3509–3548, 2015.
- [92] J. H. Sims and D. D. Baumann. Educational programs and human response to natural hazards. *Environment and Behavior*, 15(2) :165–189, 1983.
- [93] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*, volume 258. Springer Science & Business Media, 1994.
- [94] E. Steur, W. Michiels, H. Huijberts, and H. Nijmeijer. Networks of diffusively time-delay coupled systems : Conditions for synchronization and its relation to the network topology. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 277 :22–39, 2014.
- [95] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.
- [96] H. R. Thieme. *Mathematics in population biology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
- [97] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [98] A.M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641) :37–72, 1952.

- [99] N. Verdière, G. Cantin, D. Provitolo, V. Lanza, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, M.A. Aziz-Alaoui, and C. Bertelle. Understanding and simulation of human behaviors in areas affected by disasters : From the observation to the conception of a mathematical model. *Global Journal of Human Social Science*, 15 :7–15, 2015.
- [100] N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, E. Dubos-Paillard, C. Bertelle, and M. A. Aziz-Alaoui. Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events. In *ICCSA 2014*, pages 1–30, University, Le Havre, 2014.
- [101] F. Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [102] E. Vermeiren. *Psychologie des foules : éléments de compréhension et de prévention en situation de catastrophe collective*, 2007.
- [103] I.I. Vrabie. *C_0 -semigroups and applications*, volume 191. Elsevier, 2003.
- [104] W. Wendi and M. Zhien. Harmless delays for uniform persistence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 158(1) :256–268, 1991.
- [105] A. Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [106] C. Zhang, B. Zheng, and L. Wang. Multiple Hopf bifurcations of symmetric BAM neural network model with delay. *Applied Mathematics Letters*, 22(4) :616–622, 2009.
- [107] C. Zhang, B. Zheng, and L. Wang. Multiple Hopf bifurcations of three coupled van der Pol oscillators with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 217(17) :7155–7166, 2011.
- [108] T. Zhang and Z. Teng. On a nonautonomous SEIRS model in epidemiology. *Bulletin of Mathematical Biology*, 69(8) :2537–2559, 2007.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la dynamique des systèmes complexes. Nous construisons des réseaux couplés à partir de multiples instances de systèmes dynamiques déterministes, donnés par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles de type parabolique, qui décrivent un problème d'évolution. Nous étudions le lien entre la dynamique interne à chaque nœud du réseau, les éléments de la topologie du graphe portant ce réseau, et sa dynamique globale. Nous recherchons les conditions de couplage qui favorisent une dynamique globale particulière à l'échelle du réseau, et étudions l'impact des interactions sur les bifurcations identifiées sur chaque nœud. Nous considérons en particulier des réseaux couplés de systèmes de réaction-diffusion, dont nous étudions le comportement asymptotique, en recherchant des régions positivement invariantes, et en démontrant l'existence d'attracteurs exponentiels de dimension fractale finie, à partir d'estimations d'énergie qui révèlent la nature dissipative de ces réseaux de systèmes de réaction-diffusion.

Ces questions sont étudiées dans le cadre de quelques applications. En particulier, nous considérons un modèle mathématique pour l'étude géographique des réactions comportementales d'individus, au sein d'une population en situation de catastrophe. Nous présentons les éléments de modélisation associés, ainsi que son étude mathématique, avec une analyse de la stabilité des équilibres et de leurs bifurcations. Nous établissons l'importance capitale des chemins d'évacuation dans les réseaux complexes construits à partir de ce modèle, pour atteindre l'équilibre attendu de retour au comportement du quotidien pour l'ensemble de la population considérée, tout en évitant une propagation du comportement de panique. D'autre part, la recherche de solutions périodiques émergentes dans les réseaux d'oscillateurs nous amène à considérer des réseaux complexes de systèmes hamiltoniens pour lesquels nous construisons des perturbations polynomiales qui provoquent l'apparition de cycles limites, problématique liée au XVIème problème de Hilbert.

Mots-clefs. Système complexe, système dynamique, réseau couplé, synchronisation, modèle géographique, bifurcation, cycle limite, équation différentielle, équation aux dérivées partielles.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the dynamics of complex systems. We consider coupled networks built with multiple instances of deterministic dynamical systems, defined by ordinary differential equations or partial differential equations of parabolic type, which describe an evolution problem. We study the link between the internal dynamics of each node in the network, its topology, and its global dynamics. We analyze the coupling conditions which favor a particular dynamics at the network's scale, and study the impact of the interactions on the bifurcations identified on each node. In particular, we consider coupled networks of reaction-diffusion systems; we analyze their asymptotic behavior by searching positively invariant regions, and proving the existence of exponential attractors of finite fractal dimension, derived from energy estimates which suggest the dissipative nature of those networks of reaction-diffusion systems.

Our framework includes the study of multiple applications. Among them, we consider a mathematical model for the geographical analysis of behavioral reactions of individuals facing a catastrophic event. We present the modeling choices that led to the study of this evolution problem, and its mathematical study, with a stability and bifurcation analysis of the equilibria. We highlight the decisive role of evacuation paths in coupled networks built from this model, in order to reach the expected equilibrium corresponding to a global return of all individuals to the daily behavior, avoiding a propagation of panic. Furthermore, the research of emergent periodic solutions in complex networks of oscillators brings us to consider coupled networks of hamiltonian systems, for which we construct polynomial perturbations which provoke the emergence of limit cycles, question which is related to the sixteenth Hilbert's problem.

Keywords. Complex system, dynamical system, coupled network, synchronization, geographical model, bifurcation, limit cycle, ordinary differential equation, partial differential equation.