



HAL
open science

Eléments finis en transformations finies à base d'ondelettes

Erwan Kergourlay

► **To cite this version:**

Erwan Kergourlay. Eléments finis en transformations finies à base d'ondelettes. Analyse numérique [math.NA]. Université de Bretagne Sud, 2017. Français. NNT : 2017LORIS472 . tel-01948571

HAL Id: tel-01948571

<https://theses.hal.science/tel-01948571>

Submitted on 7 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE / UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD

Mention : Sciences pour l'ingénieur

Ecole doctorale: École Doctorale SICMA

Présentée par

Erwan KERGOURLAY

Préparée à l'unité mixte de recherche

IRDL (CNRS FRE 3744)

Université de Bretagne-Sud

Structures et interactions (PTR3)

Thèse soutenue le 21 décembre 2017

devant le jury composé de :

M. Anh LE VAN

Professeur des Universités, Université de Nantes – GeM /
Président

M. Francisco CHINESTA

Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech ENSAM –
PIMM / Rapporteur

M. Patrice CARTRAUD

Professeur des Universités, École Centrale de Nantes – GeM /
Rapporteur

Mme. Muriel CARIN

Maître de Conférences (HDR), Université de Bretagne-Sud – IRDL /
Examineur

M. Jean-Marc CADOU

Maître de Conférences (HDR), Université de Bretagne-Sud – IRDL /
Examineur

M. Gérard RIO

Professeur des Universités, Université de Bretagne-Sud – IRDL /
Directeur de thèse

M. Yinong LIU

Professeur des Universités, Université d'Australie-Occidentale –
Laboratory for functional materials / Co-directeur de thèse

Éléments finis en transformations finies, à base d'ondelettes

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Je remercie tout d'abord Patrice CARTRAUD et Francisco CHINESTA d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail : d'avoir apprécié l'ensemble de mes travaux en apportant des remarques pertinentes ; remarques qui m'ont permis une meilleure orientation de mon exposé oral. Merci également à Ahn LE VAN qui a présidé ce jury avec une très grande attention. Merci aussi aux autres examinateurs ; à Jean-Marc CADOU et Muriel CARIN, pour leurs remarques sur ces travaux.

Je remercie chaleureusement mes encadrants Gérard RIO et Yinong LIU, pour leurs très grandes compétences en Mécanique et pour m'avoir guidé et encouragé durant ces 4 années de thèse.

Merci à mes parents et à ma famille qui ont toujours été là pour m'encourager et me soutenir afin de mener à bien ce projet. Une dédicace spéciale à ma sœur Emmanuelle et son conjoint William pour leurs soutiens précieux.

J'ai croisé la route de nombreuses personnes durant ces 4 années qu'il est difficile de les remercier toutes. Néanmoins, je souhaite remercier mon amie de bureau Lydie, pour qui mes références cinématographiques n'ont plus de secret pour elle ; les amis des bureaux voisins, Vincent, Émilie, Julien, Adrien, Hugo pour les bons moments passés autour d'un bon café préparé par une cafetière Apple ; les doctorants de l'IRDL, Nathan, Bertille, Antoine, Erwan... Je remercie également toutes les autres personnes ayant participé de près ou de loin à l'accomplissement de ces travaux : Anita, Sandrine, Yann, Thomas, Vincent, Pierre-Yves...

Enfin je remercie mes amis de longue date pour leurs encouragements. Je vais citer entre autre : Mathieu, Lucie, Johann, Alice, Vincent, Ludivine, Lucie...

Table des matières

Introduction générale	11
I Méthodes et outils	15
I.1 Introduction	17
I.2 Méthodes et outils développés pour visualiser les singularités.	17
I.2.1 Introduction	17
I.2.2 Méthodes adaptatives	17
I.2.2.1 Méthodes de raffinement du maillage.	18
I.2.2.2 Méthodes d'amélioration des fonctions de discrétisation	20
I.2.2.3 Méthodes adaptatives combinées	20
I.2.3 Méthodes multi-grilles locales	20
I.2.4 Méthode XFEM.	23
I.2.5 Méthode FEM avec discrétisation en ondelettes (WFEM)	23
I.2.5.1 Historique	23
I.2.5.2 Généralités sur les ondelettes	24
I.2.5.3 Analyse multirésolution (AMR).	27
I.2.5.4 Effets de bords concernant les transformées en onde- lettes discrètes (TOD)	30
I.2.5.5 Généralités des propriétés des ondelettes.	32
I.2.5.6 Méthode des éléments finis avec Ondelettes WFEM	33
I.2.6 Conclusion.	36
I.3 Ondelettes de Daubechies	37
I.3.1 Introduction	37
I.3.2 Rappel sur la définition des ondelettes de Daubechies.	37
I.3.3 Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'on- delette de Daubechies.	38
I.3.3.1 Valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10.	39
I.3.4 Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée de l'ondelette de Daubechies.	40
I.3.4.1 Valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées de l'on- delette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10.	41
I.3.5 Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle inté- grée de l'ondelette de Daubechies	42
I.3.5.1 Valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées de l'on- delette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10.	43

I.3.6	Intégration fonction d'échelle, en fonction du niveau de résolution "j" et sur une intervalle [a :b]	44
I.3.7	Particularités des ondelettes de Daubechies	44
I.3.8	Détails sur le calcul des Moments de la fonction d'échelle.	45
I.3.9	Intégrales classiques associées aux fonctions de base des ondelettes de Daubechies	46
I.3.10	Intégration d'une fonction d'échelle et fonction d'échelle dérivée sur l'intervalle [0 :1] et sur un niveau de résolution "j" quelconque	46
I.3.10.1	Détails sur le calcul des coefficients de connexion θ_k^0	47
I.3.10.2	Calcul des coefficients de connexion θ_k^j par rapport au niveau de résolution "j"	48
I.3.10.3	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{0;d_1}$	49
I.3.10.4	Calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{j;d_1}$ par rapport au niveau de résolution 'j'	50
I.3.11	Intégration du produit de deux fonctions d'échelle et du produit de deux fonctions d'échelle dérivées sur l'intervalle [0 :1] et sur un niveau de résolution "j" quelconque	51
I.3.11.1	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^0$:	52
I.3.11.2	Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^j$ par rapport au niveau de résolution 'j' :	53
I.3.11.3	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}$:	54
I.3.11.4	Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2}$ par rapport au niveau de résolution 'j' :	56
I.3.12	Conclusion	57
I.4	Conclusion	57
II	Introduction d'une ondelette dans la méthode des éléments finis	59
II.1	Introduction	61
II.2	Formulation variationnelle WFEM	61
II.2.1	Préambule	61
II.2.1.1	Représentation d'une fonction via une fonction d'échelle sur un domaine \mathbb{R}	61
II.2.1.2	Mise en œuvre de la décomposition en ondelettes	64
II.2.1.3	Bornes inférieures et supérieures pour le facteur translation	66
II.2.1.4	Représentation d'une fonction définie via une fonction d'échelle sur un intervalle défini [a :b]	67
II.2.1.5	Analyse Multirésolution	68
II.2.1.6	Représentation d'une fonction dérivée via une fonction d'échelle dérivée sur un domaine	68
II.2.1.7	Représentation d'une fonction intégrée via une fonction d'échelle intégrée sur un domaine [0 :1]	69
II.2.1.8	Validation de la méthode de décomposition en ondelettes	70
II.2.2	Application de conditions limites dans le cadre éléments finis	74
II.2.2.1	Projection des coefficients d'approximation	74

II.2.2.2	Exemple illustrant la méthodologie pour imposer une condition limite de Dirichlet.	75
II.2.3	Formulation variationnelle WFEM : application en 1D	76
II.2.4	Définition des termes de la formulation variationnelle WFEM	77
II.2.4.1	Définition des termes du résidu	78
II.2.4.2	Définition des termes de l'opérateur tangent.	81
II.3	Intégration du support de discrétisation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies	84
II.3.1	Intégration du résidu	84
II.3.1.1	Intégration des fonctions membres	84
II.3.1.2	Méthode d'intégration approchée par ondelettes	85
II.3.1.3	Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires	88
II.3.2	Intégration de la variation du résidu	94
II.4	Méthode de résolution de Newton	96
II.5	WFEM Résolution de problèmes	102
II.5.1	Présentation des géométries	102
II.5.2	Résultats analytiques	103
II.5.3	Discrétisation de la structure	104
II.5.4	Analyse des résultats avec la méthode WFEM	104
II.5.5	Évolution du résidu concernant la méthode de résolution de Newton	106
II.6	Conclusion	107
III	Construction d'un support de discrétisation hybride	109
III.1	Introduction	110
III.2	Support de discrétisation hybride, interpolation polynomiale-ondelettes	111
III.2.1	Préambule	111
III.2.1.1	Interpolation polynomiale : rappel et notation	111
III.2.1.2	Interpolation en ondelettes : rappel et notation	112
III.2.2	Création du support hybride, interpolation polynomiale-ondelettes	112
III.2.2.1	Représentation d'une fonction via un couplage polynomiale-ondelettes sur un intervalle $[0 :1]$	113
III.2.2.2	Imposition de conditions particulières pour la décomposition polynomiale-ondelettes	115
III.2.2.3	Évolution des fonctions d'interpolation polynomiale-ondelettes	118
III.2.2.4	Validation de la méthode de décomposition hybride polynomiale-ondelettes	119
III.3	Intégration du support de discrétisation hybride	123
III.3.1	Méthode d'intégration du résidu.	123
III.3.1.1	Développement de la méthode d'intégration analytiquement	123
III.3.1.2	Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires	125

III.3.2	Intégration de la variation du résidu avec le support hybride . . .	128
III.4	Conclusion	131
IV	Détection de la singularité et présentation de la méthode WFEM improved	133
IV.1	Introduction	134
IV.2	Détection d'une localisation et définition du niveau de résolution "j" . . .	135
IV.2.1	Préambule	135
IV.2.2	Détection et localisation du phénomène.	135
IV.2.2.1	Méthodologie de détection et surveillance de phénomènes particuliers	135
IV.2.2.2	Illustration de la méthode de détection sur la poutre étudiée du chapitre II.4	136
IV.2.3	Définition du niveau de résolution.	138
IV.2.3.1	Méthodologie de définition du niveau de résolution . . .	138
IV.2.3.2	Illustration de la méthode de définition du niveau de résolution sur la poutre étudiée du chapitre II.4.	139
IV.3	Résolution de la méthode éléments finis via la méthode de Newton avec un support de discrétisation hybride	140
IV.3.1	Préambule	140
IV.3.2	Méthode de résolution de Newton	140
IV.3.2.1	Définition des termes du résidu	141
IV.3.2.2	Définition des termes de l'opérateur tangent.	142
IV.3.2.3	Étapes de résolution via la méthode de Newton	143
IV.4	Conclusion	148
V	Analyse et illustration de la méthode WFEM improved	151
V.1	Introduction	152
V.2	Organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode hybride WFEM improved	152
V.3	Résolution d'un problème 1D, présentation des résultats via les différentes méthodes	155
V.3.1	Rappel de la géométrie	155
V.3.2	Résolution en éléments finis avec interpolation polynomiale . . .	155
V.3.2.1	Maillage et discrétisation	155
V.3.2.2	Résultats avec la méthode FEM	156
V.3.3	Résolution avec la méthode WFEM : supports ondelettes purs, rappels	157
V.3.3.1	Maillage et discrétisation	157
V.3.3.2	Résultats avec la méthode WFEM	157
V.3.3.3	Évolution du résidu WFEM	158
V.3.4	Résolution avec la méthode WFEM improved : support mixte polynomiale-ondelettes	159
V.3.4.1	Maillage et discrétisation	159
V.3.4.2	Résultats avec la méthode WFEM improved	159
V.3.4.3	Évolution du résidu WFEM improved	161

V.3.5	Comparaison des méthodes FEM, WFEM et WFEM improved . . .	162
V.4	Conclusion	163
	Conclusion générale et perspectives	165
A	Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle D6	171
B	Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée première D6	173
C	Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée D6	175
D	Résultats concernant l'ondelette de Daubechies D6	177

Introduction générale

La simulation numérique est une discipline qui s'est particulièrement développée au XX^{ème} siècle. Sa principale mission est de simuler le comportement d'un phénomène physique réel et complexe. Des exemples concrets tels que la résistance d'un pont, l'endommagement d'un corps par un projectile, la résistance d'une prothèse médicale... montrent la grande diversité des structures modélisées et analysées. Les méthodes n'ont cessé d'évoluer ces dernières années via des techniques hybrides [101] par exemple.

Les simulations numériques s'appuient sur des modèles théoriques permettant ainsi de modéliser des phénomènes divers, que ce soit en mécanique, en chimie, en biologie, ou encore dans les sciences humaines et les sciences géophysiques.

Elles permettent ainsi de faire des ajustements/améliorations, de limiter des risques éventuels et d'éviter des séries d'essais réels qui peuvent se révéler coûteuses et/ou difficiles à mettre en place. De plus, les outils permettent de modéliser des structures de grandes échelles.

Mais ces simulations informatiques ne peuvent être efficaces que par le choix judicieux de l'algorithme, du modèle mathématique, des outils de représentations et des méthodes de résolution numérique appropriées.

Dans ce contexte, ces travaux de thèse portent sur l'une des méthodes de résolution numérique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations décrivent le comportement physique du système.

Les méthodes les plus couramment utilisées pour la résolution des EDP sont la méthode des différences finies (MDF), la méthode des volumes finis (MVF), la méthode des caractéristiques (MC) et la méthode des éléments finis (MEF). Ces travaux se sont principalement concentrés sur la MEF.

De nombreuses études ont été traitées et résolues avec cette méthode que ce soit dans le domaine du génie civil, l'ingénierie mécanique, le biomédical... et les résultats des analyses se sont révélés satisfaisants. La MEF s'avère cependant, par sa forme classique, limitée dans la représentation des régions à fort gradient (singularité [29], phénomène local, fissures[39]...). Afin de pallier ce problème, des techniques et outils ont été développés et mis en place au sein de la méthode des éléments finis. Ces techniques classiques actuellement déployées seront abordées dans la partie 1.2.

La méthode de raffinement du maillage adaptatif 1.2.2.1 présente de réels avantages. Cette technique peut cependant se révéler très coûteuse en temps de calcul.

La méthode concernant le changement du degré des fonctions d'interpolations polynomiales 1.2.2.2 est une autre voie d'investigation. Elle permet d'avoir une bonne rapidité au niveau du calcul et des convergences à chaque itération. Cependant cette dernière permet difficilement d'avoir des meilleures approximations de la géométrie au niveau des zones d'intérêts compte tenu de la forme polynomiale des interpolations utilisées.

Les méthodes multi grilles locales 1.2.3 permettent quant à elles d'avoir des résultats pro-

jetés sur différentes grilles de maille. Des résultats plus précis aux zones à fort gradient sont obtenus.

En ce qui concerne la méthode XFEM [I.2.4](#), celle-ci se révèle être très robuste pour traiter la fissuration en éléments finis. Toutefois la précision d'intégration de fonctions singulières en fond de fissure n'est pas optimale.

Enfin, la méthode WFEM [I.2.5](#) consiste à utiliser la fonction échelle de l'ondelette comme fonction d'interpolation. Des résultats concluants ont montré l'avantage réel d'utiliser ce type de fonction, notamment pour décrire des phénomènes particuliers. D'autre part, elle s'appuie également sur une méthode multirésolution, sur différents niveaux de résolution, qui est très similaire à la méthode multi grilles.

Les fondateurs de ces méthodes ont inventé des outils performants qui ont la capacité de visualiser et traiter des singularités, des fissures... Ces techniques montrent, toutefois, certains inconvénients : elles se limitent souvent qu'à certains cas d'études précis.

L'objectif de cette étude est de proposer une méthode générale qui a la capacité de résoudre à la fois des problèmes réguliers/simples et des systèmes qui peuvent se révéler plus complexes (localisations, singularités...).

Dans cette optique d'amélioration, une méthode permettant de combiner la méthode des éléments finis sous sa forme classique et la méthode des ondelettes a été étudiée. Un support de discrétisation couplant les deux types de représentation a été créé à cet effet.

La théorie mathématique des ondelettes s'est particulièrement développée dans les années 80 ce qui est relativement récent, comparé à d'autres types d'espaces et de transformées classiques : Fourier, Laplace... La théorie des ondelettes a conduit à des propriétés remarquables de représentation, en particulier pour des évolutions non régulières. Les transformations en ondelettes continues puis discrètes ont permis de nombreuses applications notamment, dans les domaines du traitement du signal et de la résolution d'équations différentielles. Ces transformations sont ainsi utilisées dans de nombreux domaines d'applications telles que l'imagerie médicale, le traitement de l'image, et plus généralement les domaines des sciences de l'ingénieur... Ces propriétés intrinsèques pour détecter et représenter des oscillations brèves sont, en effet, un réel atout.

La MEF, sous sa forme classique, est une méthode permettant de représenter des phénomènes réguliers. Les résultats atteignent une précision remarquable et sont obtenus très rapidement.

L'objectif est alors de se munir des avantages des deux méthodes pour concevoir un support de discrétisation hybride.

Le chapitre [I](#) présente les outils et les méthodes classiques développées pour visualiser et traiter les phénomènes particuliers (singularités, fissures ...) dans le cadre des éléments finis. Les ondelettes dans un cadre général puis dans les applications d'éléments finis sont illustrées. Enfin un rappel des particularités et des propriétés des ondelettes de Daubechies est exposé, où l'une de ces dernières est utilisée dans ces travaux.

Le chapitre [II](#) détaille l'introduction de l'interpolation en ondelettes, plus précisément l'ondelette de Daubechies, au sein de la méthode des éléments finis dans un cadre non linéaire.

Le chapitre [III](#) est quant à lui consacré à la création d'un support de discrétisation couplant une interpolation polynomiale avec un enrichissement par un support en ondelettes.

Le chapitre [IV](#) illustre une méthode de détection de singularités et l'implantation de la technique au niveau d'un schéma de résolution de Newton.

Le chapitre [V](#) expose le déroulement de la méthode sur un exemple académique permettant ainsi d'illustrer les résultats pouvant être obtenus avec l'approche proposée.

CHAPITRE I

Méthodes et outils

Sommaire

I.1	Introduction	17
I.2	Méthodes et outils développés pour visualiser les singularités	17
I.2.1	Introduction	17
I.2.2	Méthodes adaptatives	17
I.2.2.1	Méthodes de raffinement du maillage	18
I.2.2.2	Méthodes d'amélioration des fonctions de discrétisation	20
I.2.2.3	Méthodes adaptatives combinées	20
I.2.3	Méthodes multi-grilles locales	20
I.2.4	Méthode XFEM	23
I.2.5	Méthode FEM avec discrétisation en ondelettes (WFEM)	23
I.2.5.1	Historique	23
I.2.5.2	Généralités sur les ondelettes	24
I.2.5.3	Analyse multirésolution (AMR)	27
I.2.5.4	Effets de bords concernant les transformées en ondelettes discrètes (TOD)	30
I.2.5.5	Généralités des propriétés des ondelettes	32
I.2.5.6	Méthode des éléments finis avec Ondelettes WFEM	33
I.2.6	Conclusion	36
I.3	Ondelettes de Daubechies	37
I.3.1	Introduction	37
I.3.2	Rappel sur la définition des ondelettes de Daubechies	37

I.3.3	Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies	38
I.3.3.1	Valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	39
I.3.4	Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée de l'ondelette de Daubechies	40
I.3.4.1	Valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	41
I.3.5	Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée de l'ondelette de Daubechies	42
I.3.5.1	Valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	43
I.3.6	Intégration fonction d'échelle, en fonction du niveau de résolution "j" et sur une intervalle [a :b]	44
I.3.7	Particularités des ondelettes de Daubechies	44
I.3.8	Détails sur le calcul des Moments de la fonction d'échelle	45
I.3.9	Intégrales classiques associées aux fonctions de base des ondelettes de Daubechies	46
I.3.10	Intégration d'une fonction d'échelle et fonction d'échelle dérivée sur l'intervalle [0 :1] et sur un niveau de résolution "j" quelconque	46
I.3.10.1	Détails sur le calcul des coefficients de connexion θ_k^0	47
I.3.10.2	Calcul des coefficients de connexion θ_k^j par rapport au niveau de résolution "j"	48
I.3.10.3	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{0;d_1}$	49
I.3.10.4	Calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{j;d_1}$ par rapport au niveau de résolution 'j'	50
I.3.11	Intégration du produit de deux fonctions d'échelle et du produit de deux fonctions d'échelle dérivées sur l'intervalle [0 :1] et sur un niveau de résolution "j" quelconque	51
I.3.11.1	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^0$:	52
I.3.11.2	Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^j$ par rapport au niveau de résolution 'j' :	53
I.3.11.3	Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}$:	54
I.3.11.4	Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2}$ par rapport au niveau de résolution 'j' :	56
I.3.12	Conclusion	57
I.4	Conclusion	57

I.1. Introduction

Le contexte des travaux présentés est celui de la simulation numérique par éléments finis appliquée aux comportements des solides. La méthode des éléments finis, largement utilisée en conception et détaillée dans de nombreux ouvrages, présente néanmoins des limitations. Celles-ci font l'objet d'une recherche extrêmement active. Parmi ces limitations on trouve la difficulté à rendre compte précisément des phénomènes non réguliers au niveau spatial et/ou temporel. De nombreux travaux ont été consacrés aux problèmes de la représentation d'évolution non régulière en particulier dans les domaines du traitement du signal et des images. Compte tenu de l'étendue de ces travaux, les rappels bibliographiques qui suivent n'ont pas pour objectif d'être exhaustifs, mais plutôt de présenter des développements classiques qui font références dans le domaine. À travers cette présentation, l'idée est de mieux préciser la problématique, ses difficultés, ainsi que les avantages et limitations des choix couramment mis en œuvre.

Le chapitre est découpé en deux grandes parties : la première (I.2) aborde les outils et les méthodes développés pour analyser et visualiser des phénomènes particuliers, fissuration, localisation... Une méthode récente (I.2.5), également présentée dans cette partie, est consacrée aux éléments finis utilisant une discrétisation en ondelettes. La dernière partie (I.3) traite plus spécifiquement des ondelettes de Daubechies [40], qui constituent les outils principaux utilisés dans ce travail de thèse.

I.2. Méthodes et outils développés pour visualiser les singularités

I.2.1. Introduction

Cette section a pour objectif d'illustrer la problématique par quelques méthodes et outils caractéristiques développés pour représenter et analyser des phénomènes non réguliers. La complexité des structures et des matériaux, actuellement étudiées en modélisation numérique induit la nécessité de prendre en compte de plus en plus précisément les phénomènes non réguliers qui apparaissent. Des améliorations considérables ont été réalisées ces dernières années dans ce domaine. Il est possible de citer, par exemple, les méthodes adaptatives I.2.2, les méthodes multi-grilles I.2.3, les méthodes des éléments finis étendus (XFEM) I.2.4 et la méthode des éléments finis avec Ondelettes (WFEM) I.2.5. Dans ce contexte, avant de proposer une nouvelle solution, quelques caractéristiques principales de ces méthodes sont présentées ci-après.

I.2.2. Méthodes adaptatives

Les méthodes adaptatives consistent à modifier et enrichir localement le maillage initial soit en fonction du nombre d'éléments soit en fonction du degré des fonctions d'interpolation utilisées. L'objectif principal est de réduire l'erreur de discrétisation. Les méthodes adaptatives peuvent être séparées en deux catégories distinctes. La première regroupe les méthodes h-adaptative, r-adaptative et s-adaptative I.2.2.1, où ces dernières interviennent directement sur le maillage via une technique de raffinement alors que la seconde catégorie rassemble la méthode p-adaptative I.2.2.2, la technique visant à modifier la fonction de forme utilisée (fonction d'interpolation).

La figure I.1 représente ces méthodes adaptatives à travers à un cas bidimensionnel, dont l'image a été extraite de la thèse de L. Barbié [10].

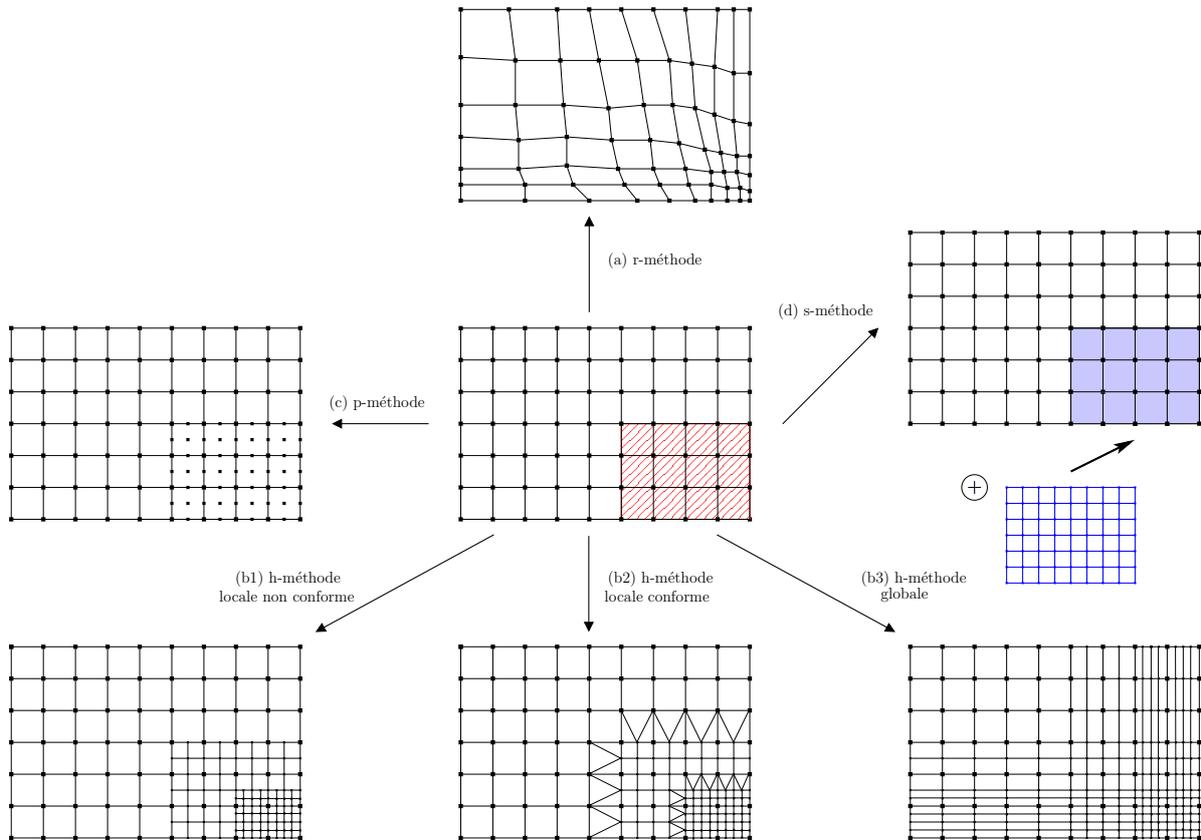


FIGURE I.1 – Méthodes adaptatives, cas bidimensionnel, extrait de la thèse L. Barbié [10]

I.2.2.1. Méthodes de raffinement du maillage

Les méthodes de raffinement du maillage se composent de trois grandes techniques particulières :

1. méthodes h-adaptatives
2. méthodes r-adaptatives
3. méthodes s-adaptatives

La littérature [106, 27, 10] expose les avantages et les inconvénients de ces différentes méthodes. La démarche de ces dernières ainsi que les articles qui mettent en application ces techniques de raffinement.

1. Méthodes h-adaptatives :

Les méthodes h-adaptatives consistent à raffiner localement les éléments initiaux d'une maille grossière en ajoutant des éléments de taille plus fine dans les zones d'intérêt ou à fort gradient. Ces éléments supplémentaires utilisent également le même degré des fonctions de forme que les éléments initiaux. Ces techniques de raffinement sont les méthodes les plus couramment utilisées [42, 13, 62, 5, 133, 73, 9]. Un élément sera par conséquent divisé en plusieurs éléments plus petits dans le cas où la précision voulue n'est pas atteinte (erreur locale trop importante). Différentes

méthodes de calcul de tailles optimales d'éléments sont présentées dans la littérature [170, 127, 103, 95]. Une analyse approfondie de ces différentes méthodes a été réalisée via W. Ehlers [51], et a mis en avant la méthode de P. Ladevèze [95] dont la technique conduit à priori directement au maillage optimal. Lorsque le problème comporte des singularités [8], les méthodes h-adaptatives permettent d'améliorer la représentation de la solution en raffinant près des singularités. Néanmoins, les méthodes h-adaptatives réalisent des maillages particuliers, qui peuvent être régulièrement non conformes (cf. I.1, b1). Il est par conséquent nécessaire d'avoir une stratégie adaptée permettant de traiter ces nœuds non-conformes en définissant des conditions supplémentaires, en se référant aux travaux de T. Strouboulis [142]. Cet article illustre l'utilisation d'une zone de transition (cf. I.1, b2) entre les éléments de différents types (triangles et quadrangles, par exemple) et la capacité du mailleur et du solveur à accepter ce mélange d'éléments. Une autre solution consiste à remailler entièrement la structure à l'aide d'un seul type d'éléments (cf. I.1, b3), ce qui conduit à une méthode h-adaptative globale [42, 45].

Un point important est le temps de convergence des méthodes h-adaptatives pouvant être long, en raison des différentes tailles et types d'éléments qui peut conduire à avoir des éléments distordus ou très étirés.

Bien que ces méthodes permettent de mieux représenter des problèmes singuliers ou des structures complexes [8], il est à noter que l'analyse des maillages obtenus implique au solveur un travail additionnel par rapport aux zones de transition, aux conditions supplémentaires qui permettent de traiter les nœuds non-conformes,... Et l'augmentation du nombre d'éléments fait croître en général de manière conséquente le nombre de degrés de liberté.

2. Méthodes r-adaptatives :

Les méthodes r-adaptatives consistent à déplacer la position des nœuds du maillage initial vers les zones d'intérêt ou à fort gradient (cf. I.1, a). Ces méthodes se révèlent très intéressantes pour des problèmes qui subissent des évolutions, où les éléments permettent de suivre ces phénomènes particuliers en mouvement. La littérature [67, 12, 22, 84, 149] fait état du développement et de la forte utilisation de ces méthodes r-adaptatives. Un avantage de ces méthodologies est sa simplicité à mettre en application, mais également le fait de ne pas modifier le nombre de degrés de liberté. Des algorithmes concernant le déplacement des nœuds ont été développés notamment par W.Huang [84]. Néanmoins la précision des résultats est limitée par la distorsion des éléments et le nombre initial de degrés de liberté du maillage.

3. Méthodes s-adaptatives :

Les méthodes s-adaptatives consistent à superposer des maillages de taille plus fine sur le maillage initial au niveau des zones d'intérêt (cf. I.1, d). Les travaux de J. Fish et Z. Yue [58, 163, 60] ont contribué au développement de ces méthodologies. Selon l'article de J. Fish [58], le problème initial est divisé en plusieurs sous-problèmes qui sont résolus par rapport à leur maillage respectif. La solution générale correspond à la somme des solutions des sous-problèmes et du couplage entre les différents niveaux. Ces méthodes s-adaptatives ont été appliquées à différents problèmes linéaires et non linéaires cités dans les articles suivants [61, 59, 163, 164]. Il est à noter que ces méthodologies sont très similaires aux méthodes multi-grilles locales, abordées dans la partie I.2.3. La différence réside sur le fait que l'assemblage des différents niveaux est effectué avant la résolution du problème. L'inconvénient des méthodes s-adaptatives est le nombre de degrés de liberté cumulés des différents ni-

veaux, ce qui influe par conséquent sur la taille de la matrice du système d'équations.

I.2.2.2. Méthodes d'amélioration des fonctions de discrétisation

Les méthodes p-adaptatives consistent à augmenter localement le degré des fonctions de forme (fonctions d'interpolation) tandis que le découpage du maillage initial reste inchangé (cf. I.1, c). Les articles [7, 49, 11, 93] illustrent le développement des méthodes p-adaptatives. Selon l'article de I. Babuska [8], la vitesse de convergence de ces techniques est nettement plus élevée que les méthodes h-adaptatives. On a en conséquence une meilleure approximation des solutions d'ordre élevé tout en conservant un découpage identique. Il est important de relever que la géométrie doit être au préalable bien approchée par le maillage initial, car l'augmentation du degré des fonctions d'interpolation ne permet pas d'améliorer la représentation géométrique du problème : l'article de A. Duster [49]. De plus, ces méthodes p-adaptatives ne permettent pas d'améliorer les représentations des problèmes singuliers lorsque des interpolations polynomiales classiques sont utilisées. La majeure partie des développements utilisent des fonctions de forme hiérarchiques [169], où les nouvelles fonctions d'interpolation viennent s'ajouter aux fonctions initiales. De plus, l'implantation de ces méthodes p-adaptatives dans un code éléments finis industriel nécessite que le solveur ait une gestion adaptée des éléments d'ordres différents sachant que classiquement les codes sont souvent limités à un degré d'interpolation maximal de 2 [94].

I.2.2.3. Méthodes adaptatives combinées

Les méthodes adaptatives peuvent être également combinées entre elles afin de cumuler les avantages de chacune. Le couplage des méthodes h-adaptatives et r-adaptatives, nommé communément hr-adaptatives, sont illustrées dans les articles [145, 50, 4]. L'assemblage des méthodes h-adaptatives et p-adaptatives, plus connu sous le nom des méthodes hp-adaptatives sont mentionnés dans les articles [6, 126, 43, 70, 98, 140, 134, 48]. Ces méthodes hp-adaptatives sont employées au sein de différents domaines, tels qu'en thermohydraulique [126], en neutronique [98, 63] ou en mécanique du solide [140, 48].

I.2.3. Méthodes multi-grilles locales

Les méthodes multi-grilles standards ont été développées dans les années 60 par R.P. Fedorenko [53] pour la résolution de l'équation de Poisson dans un carré, puis elles ont été adaptées quelques années plus tard par A. Brandt [19] pour la résolution de problèmes elliptiques. Ces méthodes ont été créées dans l'optique d'améliorer la rapidité de convergence des calculs à travers l'utilisation de maillages supplémentaires comportant moins de degrés de liberté. Le processus multi-grilles standard permet ainsi de résoudre rapidement des problèmes contenant un nombre important de degrés de liberté.

Le principe de la méthode réside sur le fait de lisser les hautes fréquences de l'erreur du maillage le plus fin afin d'évaluer les basses fréquences de l'erreur sur les maillages additionnels plus grossiers.

L'idée consiste ainsi de partir d'un maillage initial avec des éléments de taille fine, de définir des niveaux de grilles avec des mailles plus grossières sur tout le domaine (cf. figure I.2(a)), de résoudre le problème restreint sur ces niveaux de grilles et de prolonger ces résultats sur le niveau supérieur jusqu'à atteindre le niveau initial. Cette idée est plus habituellement conçue sous forme de cycle et illustrée par la thèse de L. Barbié [10].

Des opérateurs de restriction (transmission du résidu d'une grille fine vers une grille grossière) et de prolongement (prolongement d'une correction d'une grille grossière vers une grille fine) permettent de relier et transmettre les données d'une grille à l'autre, selon les travaux de A. Brandt [19].

Les problèmes sont résolus de manière itérative jusqu'à la convergence de la solution sur le maillage initial fin. Ce type de méthodes multi-grilles standards a été très étudié dans la littérature [96, 17, 157, 97] et a suscité l'intérêt des chercheurs à développer des méthodes multi-grilles locales.

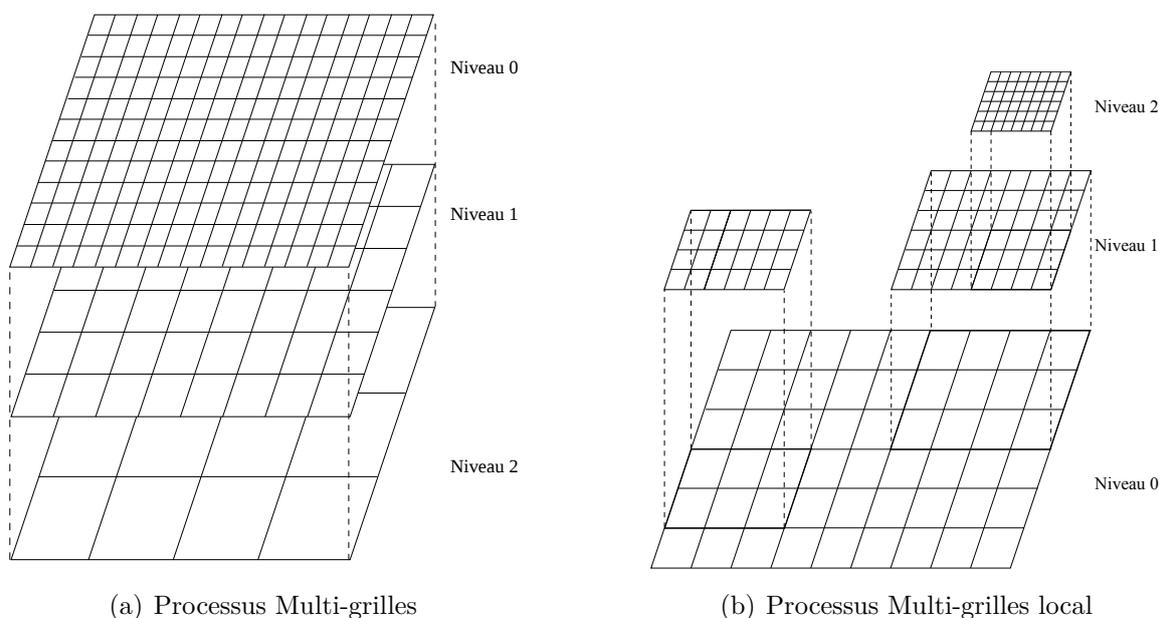


FIGURE I.2 – Processus multi-grilles, images extraites de la thèse de H. Liu [106]

L'ensemble des méthodes multi-grilles locales présent dans la littérature [14, 91, 18, 72] émane des travaux pionniers de A. Brandt [19]. Ces méthodes s'apparentent à des méthodes adaptatives mais où la résolution des sous-problèmes, définis sur leurs niveaux de grilles respectifs, se fait séparément.

Le processus multi-grille local consiste à affiner le maillage dans les zones à fort gradient (cf. figure I.2(b)). L'idée est de partir d'une grille grossière globale, qui recouvre le domaine initial du calcul, d'ajouter des grilles avec des mailles plus fines localement et de résoudre le problème sur ces niveaux de grilles. Les problèmes sont ainsi résolus de manière récursive jusqu'à la convergence de la solution du maillage grossier.

Un avantage considérable de ces méthodes par rapport à l'approche multi-grilles standard est le gain en termes d'espace mémoire et de temps de calcul.

Trois méthodes de raffinement multi-grilles locales sont recensées dans la littérature et sont présentées ci-dessous. Ces méthodes se différencient par rapport à l'opérateur de restriction, où ce dernier permet de corriger les solutions des maillages grossiers à partir des résidus obtenus via les solutions fines. L'opérateur de prolongement est commun aux méthodes et consiste à définir les conditions limites de Dirichlet sur les bords du problème fin local à partir de la solution la plus grossière qui précède.

1. La méthode LDC (Local Defect Correction)

La méthode LDC a été développée par W. Hackbusch [71]. L'opérateur de restriction de cette méthodologie vise à corriger le problème grossier à partir du calcul du résidu restreint déterminé au niveau des zones de recouvrement. Ce résidu est calculé via la méthode multi-grilles standard de A.Brandt [19]. Le problème du maillage grossier est ainsi déterminé en ajoutant au second membre le résidu obtenu sur ces zones. Les travaux de P.J.J. Ferket et al. [56, 54] ont permis d'adapter la méthodologie de W. Hackbusch dans le cadre d'une discrétisation par différences finies. Un couplage de la méthode LDC et de la méthode des volumes finis a été réalisé dans les travaux de M.J.H. Anthonissen [120]. J.U. Wrappler [155] a associé la méthode des éléments finis avec la méthode LDC.

Un avantage de la méthode LDC est sa possibilité d'être utilisée avec n'importe quelle discrétisation, cependant selon ces travaux, il a été relevé que la zone de recouvrement était légèrement plus grande, car elle se compose d'une zone de sécurité sur les bords de la zone d'intérêt raffinée [56, 120, 155]. Sur ces zones de sécurité, le problème grossier n'est pas corrigé même si la zone a été affinée, mais le but de la méthodologie est d'éviter des effets néfastes émanant des conditions limites projetées.

2. La méthode FAC (Fast Adaptive Composite)

La méthode FAC a été développée par S.F. McCormick [113]. L'idée est d'introduire un problème intermédiaire composite entre deux niveaux de grille. Ce problème contient en conséquence les nœuds de la grille plus fine, complétée par les nœuds de la grille plus grossière sur la zone non raffinée. L'opérateur de restriction vise ainsi à déterminer le résidu sur ce maillage intermédiaire, où ce dernier permet de corriger à la fois les solutions grossières et fines.

Cette méthodologie est régulièrement utilisée dans le cadre d'une résolution par différences finies et l'analyse de la convergence de la technique a été abordée dans les articles [113, 114, 55].

Quelques résolutions numériques montrent l'efficacité de la méthode FAC [78, 150, 135], pouvant être facilement utilisables sur des architectures parallèles [100].

3. Les méthodes FMG (Full MultiGrid)

Les méthodes FMG locales ont été développées plus récemment et sont détaillées dans les articles suivants [28, 156, 16]. Ces méthodes FMG locales sont fondées sur les rudiments de la méthode FMG datant de 1994 par A. Brandt. Il s'intéressait à améliorer la convergence de la méthode multigrilles standard [20, 23]. L'idée de la méthode FMG vise à accélérer la vitesse de convergence de la méthode multigrilles standard en partant du maillage grossier et en effectuant une résolution bi-grilles, dans l'optique d'avoir une résolution progressive. Les opérateurs de projections (restriction et prolongement) sont communs aux méthodes multigrilles standards. Les maillages plus fins sont ajoutés progressivement après la convergence des cycles multigrilles précédents.

Les travaux de B. Watremetz et al. et de E. Biotteau et al. [156, 16] ont eu pour objectif d'appliquer la méthode FMG localement. L'opérateur de restriction est différent dans ce cas-ci, mais il s'apparente à celui de la méthode LDC. Par contre l'opérateur de prolongement est défini différemment, car il émane des méthodes multigrilles standards et de la méthode multigrilles LDC.

I.2.4. Méthode XFEM

La méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) a été développée à la fin des années 90 pour traiter les problèmes de convergence des éléments finis par rapport aux éventuelles singularités du domaine. La méthode se base essentiellement sur les travaux de J.M. Melenk et I. Babuska [115] qui consistaient à introduire des fonctions capables de décrire la singularité tout en respectant les conditions limites. L'introduction de cette technique appelée partition de l'unité à la méthode des éléments finis, permet d'enrichir une approximation éléments finis à l'aide de fonctions quelconques. N. Moës, co-fondateur de la méthode X-FEM, expose la technique dans l'article [122]. Quelques années plus tard, l'article de N. Moës et T. Belytschko [121] illustre un bilan des avancées réalisées concernant la méthode X-FEM et plus particulièrement sur le couplage X-FEM avec la méthode des "level sets".

La technique des "level sets" a été introduite par J.A. Sethian [138] dans la mécanique des fluides pour représenter l'évolution d'interfaces. Cette méthode permet ainsi de propager la surface localisée de discontinuité sous un champ de vitesse connu. On retrouve la modélisation complète de fissures avec X-FEM dans les travaux de N. Moës [122] et étendue au cas 3D dans l'article de N. Sukumar [144]. Les thèses de M. Geniaut [66] et de M. Siavelis [139] mettent en lumière, respectivement, la méthode via son application pour la modélisation de fissures sous contact des structures industrielles et la modélisation des failles géologiques. Concernant l'intégration numérique par cette méthode, M. Siavelis souligne que la précision d'intégration de fonctions singulières en fond de fissure n'est pas optimale en raison de l'utilisation de l'intégrale avec Gauss-Legendre. Néanmoins avec un changement de variables adéquat, il est possible de revenir sur une intégration classique. On notera également qu'il est possible d'utiliser l'algorithme de Decuhr [52], méthode d'intégration adaptative, qui permet d'évaluer des intégrales singulières. La thèse de M. Siavelis met en avant la possibilité de traiter plusieurs discontinuités et également l'accessibilité des résultats concernant l'élément pour chacune des singularités. La thèse de A. Sbitti [137] présente la propagation de fissures 2D et 3D planes sous chargement thermo-mécanique à amplitudes variables.

I.2.5. Méthode FEM avec discrétisation en ondelettes (WFEM)

Avant de s'intéresser à la méthode FEM avec Ondelettes, il est important de rappeler quelques éléments historiques et théoriques sur la méthode des ondelettes dans un domaine particulier : la sismologie qui a été un moteur de son développement.

I.2.5.1. Historique

La méthode des ondelettes a été créée aux XIX^{ème} siècle dans l'optique d'améliorer l'analyse et le traitement du signal. L'objectif principal de cette technique est de décrire des signaux produits dans le monde réel dans l'optique de caractériser, d'identifier, de compresser, de filtrer, de transmettre, de prédire...

Bien avant cette technique, l'utilisation de la transformation de Fourier (1822) était employée pour cette action. Ces transformations linéaires permettaient de décomposer le signal en un ensemble de signaux dit de "base" du type cosinus, sinus et exponentielle imaginaire. Il s'est avéré que cette méthode ne permettait pas d'avoir des décompositions satisfaisantes.

La première transformation en ondelettes a vu le jour en 1910 avec A. Haar. La fonction était définie par une courte impulsion négative suivie d'une courte impulsion positive.

Quelques décennies plus tard, en 1946, D. Gabor inventa une ondelette [65], dont la méthode est très similaire à la transformation de Fourier, où le principe est d'appliquer une fenêtre définie par une fonction gaussienne. Jusqu'aux années 1980, il n'était pas réellement question de parler de transformation en ondelettes pour les fonctions de A. Haar et de D. Gabor.

Mais c'est à partir de 1982 que la méthode des ondelettes fut pour la première fois introduite par J. Morlet [123] et deux ans plus tard, la méthode est instaurée dans le langage mathématique via J. Morlet et A. Grossmann [69]. En 1986, Y. Meyer, un des créateurs de la théorie des ondelettes, réalise un travail de synthèse des ondelettes déjà existantes et crée des ondelettes orthogonales [116, 99]. S. Mallat fait le lien entre la méthode des ondelettes et l'analyse multirésolution [108, 110, 109]. Et en 1987, I. Daubechies créa des ondelettes orthogonales, identifiées sous le nom des Ondelettes de Daubechies. Elles sont caractérisées par leur nombre de moments nuls [40]. De plus, cette famille d'ondelettes est facilement utilisable dans différents domaines.

La méthode des ondelettes est un outil très puissant dans son domaine d'origine (la sismologie), et les performances de cette technique ont suscité l'intérêt des chercheurs à extrapoler cette dernière à des domaines différents, tels que la compression d'image, l'imagerie médicale, la téléphonie vidéo, la modélisation numérique par éléments finis. L'article de B.Li [101] résume les avancées des travaux de recherches jusqu'en 2013 sur l'analyse numérique basée sur les ondelettes.

L'auteur a répertorié différentes méthodes de résolution à l'aide des ondelettes, telles que :

- WWRM wavelet weighted residual method
- WFEM wavelet finite element method
- WBM wavelet boundray method
- WMM wavelet meshless method

Ce travail permet de mettre en lumière la méthode des ondelettes au sein des méthodes d'analyse numérique. Dans ce cadre, ces travaux de thèse se consacrent principalement à la méthode des éléments finis avec ondelettes, plus connue sous l'acronyme WFEM (Wavelet Finite Element Method).

Mais avant de s'intéresser de manière précise à cette technique, il est important de comprendre la méthode des ondelettes avec ses particularités, ses espaces de projection et de définition, et les familles d'ondelette existantes.

I.2.5.2. Généralités sur les ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions à partir desquelles il est possible d'analyser un signal, une image... en fréquence et en temps. Cette analyse précise permet d'extraire des éléments remarquables, d'atténuer des bruits parasites... et ainsi de représenter un signal décomposé dans plusieurs espaces.

En mathématiques, une ondelette ψ est une fonction de carré sommable de l'espace de Hilbert L^2 , avec une évolution oscillante dans la majeure partie du temps et une moyenne nulle. Cette fonction est souvent choisie comme outil d'analyse et de reconstruction multiéchelles et de nombreux travaux ont été résolus via la méthode des ondelettes [125, 38, 112, 101, 92].

Cette fonction $\psi \in L^1 \cap L^2$ est appelée ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité dans le domaine fréquentiel suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (\text{I.1})$$

On notera que $\hat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ . Cette condition entraîne que l'ondelette soit d'intégrale nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (\text{I.2})$$

Cette condition est souvent renforcée en exigeant que l'ondelette ait $(m+1)$ moments nuls, qui vérifie la relation :

$$\int_{\mathbb{R}} x^z \psi(x) dx = 0 \quad \text{avec } z = 0, \dots, m \quad (\text{I.3})$$

Les ondelettes par familles sont constituées d'une ondelette mère ψ et de l'ensemble de ses images par les éléments d'un sous-groupe Λ du groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n .

Les familles d'ondelettes les plus connues et les plus utilisées sont les ondelettes de Daubechies, de Haar, Morlet, Meyer, Symlets et Coiflets...

Le choix de l'ondelette est laissé libre à l'utilisateur, mais en fonction des objectifs du traitement par ondelettes, la transformée en ondelettes continues (TOC) peut être préférable à la transformée en ondelettes discrètes (TOD); ces transformées seront détaillées dans la suite de cette section. De plus, selon le choix de l'espace, certaines familles d'ondelettes sont plus adaptées à la situation, telles que les ondelettes de Daubechies et les ondelettes bi-orthogonales pour la TOD, et les ondelettes gaussiennes et de Morlet pour les TOC. Il est intéressant de se référer au livre de M. Misiti et al. [119] pour davantage de détails et pour leurs travaux de synthèse concernant les caractéristiques des familles des ondelettes existantes.

On notera également que toutes les ondelettes ne sont pas définies via une formule analytique, néanmoins dans ce cas précis, elles sont caractérisées par leurs filtres associés. Avec les algorithmes de reconstruction de S. Mallat, il est possible d'avoir une approximation de l'ondelette définie implicitement.

1. Transformées en ondelettes continues (TOC)

La transformée en ondelettes continue [38, 151, 131, 119, 15, 37] commence par la définition de l'ondelette mère $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Pour éviter toute dépendance par rapport à l'échelle de grandeur ainsi introduite, les versions dilatées et comprimées de ψ sont ainsi utilisées et sont définies via :

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi_a(x) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{I.4})$$

La localisation dans le temps est obtenue en translatant ces différentes "versions" de ψ

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \psi_{a,b}(x) := \psi_a(x - b) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right) \quad (\text{I.5})$$

Remarques :

- b correspond au facteur de position (ou de translation) $b \in \mathbb{R}$
- a correspond au facteur d'échelle (ou de contraction/dilatation) $a \in \mathbb{R}$

La famille $\{\psi_{a,b}\}_{a,b}$ est la famille d'ondelettes associée à ψ et en prenant ψ avec une énergie 1, c'est à dire ($\|\psi\|_{L^2} = 1$), toutes les fonctions de la famille $\psi_{a,b}$ sont par conséquent de norme 1.

La transformée en ondelettes continue d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ d'énergie finie est définie via la famille de coefficients $C_f(a,b)$ qui sont déterminés par la relation suivante :

$$C_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx = (f, \psi_{a,b})_{L^2} \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad (\text{I.6})$$

avec $\overline{\psi_{a,b}(x)}$ qui correspond au conjugué de la famille d'ondelettes $\psi_{a,b}$.

La transformation admet une inverse, sous la condition d'admissibilité I.1 et la formule de synthèse est :

$$f(x) = \frac{1}{K_\psi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} C_f(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2} \text{ dans } L^2 \quad (\text{I.7})$$

La condition d'admissibilité I.1 est :

$$K_\psi = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\omega\|} d\omega \quad (\text{I.8})$$

La transformation en ondelettes continue montre que la reconstruction du signal est extrêmement redondante dans le sens où toutes les ondelettes sont utilisées, et qu'elles sont linéairement dépendantes. Une première méthode de discrétisation a été mise au point, qui se base sur la généralisation des théorèmes d'échantillonnage de Shannon [111]. Elle introduit en conséquence les transformées en ondelettes discrètes.

2. Transformées en ondelettes discrètes (TOD)

J. Morlet [123, 69] a proposé de construire des bases ou des frames de fonctions construites sur le modèle suivant :

$$g_{t_0, \Delta t}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} g\left(\frac{t - t_0}{\Delta t}\right) \quad (\text{I.9})$$

où les valeurs de Δt sont prises sur une échelle géométrique et les paramètres de translation sont proportionnels à Δt :

$$\begin{aligned} \Delta t &= a^j \\ t_0 &= k\Delta t \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Ces travaux conduisent ainsi à la transformée discrète de la famille d'ondelettes $\psi_{a,b}$ qui s'exprime par la relation :

$$\psi_{j,k}(x) = a_0^{j/2} \psi(a_0^j x - kb_0) \quad a_0 > 1, b_0 > 0 \text{ fixés et } j, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.11})$$

Un choix usuel de $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ est dicté par le théorème d'échantillonnage de Shannon [111]. Dans ce cas de transformation en ondelettes discrète, une gamme

d'échelles Δt est couramment employée correspondant à la gamme des échelles dyadique 2^j . Des familles d'ondelettes $\psi_{j,k}$ sont ainsi obtenues et s'expriment par :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.12})$$

La transformée en ondelettes discrètes [38, 151, 131, 119, 15, 37] d'une fonction $f \in L^2$ est définie via les coefficients $C_f(j, k)$ qui sont déterminés par la relation suivante :

$$C_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx = (f, \psi_{j,k})_{L^2} \quad j \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \quad (\text{I.13})$$

où $\overline{\psi_{j,k}(x)}$ correspond au conjugué de la famille d'ondelette $\psi_{j,k}$. Dans ce cas discret, il est possible d'écrire également :

$$C_f(j, k) = (f(x) * \overline{\psi_{j,k}(x)})(k) \quad (\text{I.14})$$

où la relation est exprimée via un produit de convolution entre la fonction f et la famille d'ondelettes conjuguée autour du point \mathbf{k} .

La recomposition du signal s'effectue via la relation :

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k}) \cdot \psi_{j,k}(x) \quad (\text{I.15})$$

$(f, \psi_{j,k})$ correspond au produit scalaire

En 1986, la transformation en ondelettes discrètes évolue avec une nouvelle méthode de discrétisation basée sur une analyse multirésolution (AMR). Cette nouvelle méthode de discrétisation mise au point par S. Mallat, [108, 110, 109], permet d'avoir une technique complètement récursive, engendrant une famille d'ondelettes orthonormales, avec un avantage considérable, car elle réduit la redondance à néant.

S. Mallat établit ainsi le lien entre la méthode des ondelettes provenant des travaux de J. Morlet [123] et l'analyse multirésolution via les bancs de filtres classiques en traitement du signal. Ces bancs de filtres se composent de 4 filtres, plus connus sous le nom de QMF (Quadrature mirror filter). S. Mallat propose en 1987 [108], un algorithme de transformation rapide de décomposition/ reconstruction pour la transformée en ondelettes discrète basé sur ce principe.

I.2.5.3. Analyse multirésolution (AMR)

Cadre théorique :

Le cadre théorique de l'analyse multirésolution se base sur les travaux de S. Mallat en 1987 [108, 110, 109, 111]. Selon ces articles, une analyse multirésolution est une suite de sous-espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ vectoriels fermés, qualifiés également d'espaces d'approximation, de L^2 vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1}$
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans L^2
4. $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - k) \in V_j$
5. $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

6. Il existe une fonction $\phi \in V_0$ telle que la famille $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de V_0 , et cette base correspond à une base de Riesz de V_0 . Cette fonction ϕ est appelée sous le nom de fonction d'échelle de l'analyse multirésolution.

La relation 3. montre qu'il existe une fonction d'échelle ϕ qui par dilatation et translation engendre une base orthonormale V_j . Les fonctions de bases sont construites suivant la relation :

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.16})$$

L'indice "**j**" correspond au niveau de résolution sous la forme d'un entier relatif, \mathbb{Z} et **k** représente le facteur de translation.

L'intérêt d'une analyse multirésolution réside sur une représentation multiéchelles, dont la méthode s'apparente fortement aux méthodes multi-grilles standards. Le passage d'une échelle à une autre s'effectue via des formulations assez simples, détaillées dans l'article de Y. Meyer [117].

Les espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de l'AMR servent d'espaces d'approximation (ou de tendance). Ces espaces se déduisent de l'espace central V_0 par contraction (pour $j > 0$) et dilatation (pour $j < 0$).

L'inclusion des différents espaces V_j ne permet pas de regrouper les $\phi_{j,k}$ pour former une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Des espaces de détails notés $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ viennent en complément des espaces d'approximation. Il est noté que l'espace W_j est le supplémentaire orthogonal de V_j dans l'espace V_{j+1} :

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp \quad (\text{I.17})$$

La relation suivante peut être ainsi déduite :

$$V_{j+1} = V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j \quad (\text{I.18})$$

Le point clé est alors que, sous ces hypothèses, l'orthogonal de V_j dans V_{j+1} a une structure similaire à celle de V_j . Cette structure est exprimée par l'ondelette notée ψ .

L'application récursive de la formule précédente dans le cas de deux espaces V_{J_0} et V_J , où $J > J_0$ permet d'en déduire la relation suivante :

$$V_J = V_{J_0} \oplus \left(\bigoplus_{i=J_0}^{J-1} W_i \right) \quad (\text{I.19})$$

Il existe une fonction ψ telle que $\{\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base hilbertienne de W_0 . Connaissant les valeurs de ϕ , il est possible de déterminer les valeurs de ψ via l'algorithme rapide de S. Mallat.

Remarque :

Il est également possible d'avoir l'espace de détails W_j qui ne soit pas orthogonal à l'espace d'approximation V_j . On parle alors d'une analyse multirésolution dites bi-orthogonales, il est possible de se référer à l'article de B. Jawerth [85], pour plus de détails.

Dans un cadre orthogonal, l'équation $V_{j+1} = V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j$ définit les espaces de détails W_j de façon unique. Des bases hilbertiennes des différents espaces sont ainsi utilisables et s'expriment par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \\ \phi_{J,k}(x) &= 2^{J/2} \phi(2^J x - k) \\ \phi_{J_0,k}(x) &= 2^{J_0/2} \phi(2^{J_0} x - k) \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Il est alors possible d'exprimer une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f_J \in V_j$ telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{J_0, k} \rangle \phi_{J_0, k}(x) + \sum_{j \leq J_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j, k} \rangle \psi_{j, k}(x) \\ f_J(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{J, k} \rangle \phi_{J, k}(x) \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Les signaux peuvent être ainsi exprimés sur des bases d'ondelettes orthogonales [41]. Il sera noté plus communément $\langle f, \phi_{0, k} \rangle = c_{0, k}$, $\langle f, \psi_{j, k} \rangle = d_{j, k}$, $\langle f, \phi_{j, k} \rangle = c_{j, k}$. Les coefficients $c_{j, k}$ correspondent ainsi aux facteurs d'approximation, et les $d_{j, k}$ indiquent les coefficients de détails.

Les coefficients sont déterminés via les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_{J_0, k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_{J_0, k} dx \\ d_{j, k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j, k} dx \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Décomposition en Ondelettes via l'algorithme rapide de S. Mallat

S. Mallat, développe en 1987 [108] un algorithme de décomposition/reconstruction rapide pour la transformée en ondelettes discrètes. Via cette algorithme, il est ainsi possible d'obtenir la relation entre les coefficients d'approximation $c_{j, k}$ et les coefficients de détails $d_{j, k}$ entre deux niveaux d'échelle successifs.

Mais avant de s'intéresser à ces relations, il est nécessaire d'établir les relations à deux échelles. Ces relations sont établies via les relations 1. et 5. des propriétés de l'analyse multirésolution $V_j \subset V_{j+1}$.

$$\begin{aligned} \phi_{j, k}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{j+1, k}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1}x - k) \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

$$\phi_{0, k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k 2^{1/2} \phi(2^1x - k) \quad \text{si } j=0$$

$$\begin{aligned} \psi_{j, k}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{j+1, k}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1}x - k) \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

$$\psi_{0, k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k 2^{1/2} \phi(2^1x - k) \quad \text{si } j=0$$

Les fonctions ψ et ϕ sont exprimées dans la base hilbertienne V_0 . Les coefficients h_k et g_k font référence aux filtres qui composent le quadrature mirror filter (QMF). Les coefficients h_k correspondent au filtre passe-bas alors que g_k spécifient le filtre passe-haut. Il est également possible de déterminer les coefficients g_k à partir des valeurs h_k via la relation suivante :

$$g_k = (-1)^k h_{N-1-k} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.25})$$

Avec N , qui correspond à l'ordre de l'ondelette utilisée, par exemple l'ondelette de Daubechies D6, avec $N=6$.

À partir de ces relations, celles entre les coefficients d'approximation et de détails peuvent être déduites. Si $f \in V_j$ alors $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}$; or $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ donc : f peut s'écrire via la relation suivante :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x) \quad (\text{I.26})$$

A l'aide de la relation aux deux échelles I.23, il est possible d'obtenir une équation liant les coefficients d'approximation des deux niveaux.

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \\ &= \langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \phi_{j,l}, \phi_{j-1,k} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \langle \phi_{j,l}, \phi_{j-1,k} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \langle \phi_{1,l-2k}, \phi \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} h_{l-2k} \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

A l'aide de la relation aux deux échelles I.24, il est possible d'obtenir une formulation liant les coefficients de détails entre deux niveaux :

$$\begin{aligned} d_{j-1,k} &= \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \\ &= \langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \phi_{j,l}, \psi_{j-1,k} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \langle \phi_{j,l}, \psi_{j-1,k} \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} \langle \phi_{1,l-2k}, \psi \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} g_{l-2k} \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Et ces deux nouvelles relations conduisent à une relation entre le niveau j et le niveau $j-1$:

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1,l} \overline{h_{k-2l}} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{j-1,l} \overline{g_{k-2l}} \quad (\text{I.29})$$

I.2.5.4. Effets de bords concernant les transformées en ondelettes discrètes (TOD)

L'utilisation de la méthode de décomposition en ondelettes dans le domaine du filtrage peut-être assez complexe au niveau du calcul des termes situés aux bords du domaine de l'intervalle. D'un point de vue numérique, des choix de représentation sont à effectuer. En effet, la particularité de certaines opérations (produit de convolution) nécessite de modifier le domaine de définition de la fonction initiale. Ces modifications sont nécessaires afin de représenter avec précision la fonction sinon des phénomènes de bords apparaissent aux extrémités.

La littérature [141, 90, 143, 124, 57, 21, 148, 111, 87] expose différentes méthodes afin d'améliorer la représentation.

Quatre techniques sont principalement utilisées et illustrées par rapport à un signal défini sur $[b_{inf} : b_{sup}]$:

1. Zéro padding :

Cette méthode consiste à avoir le signal nul à l'extérieur du support original, cf [I.3\(e\)](#).

$$f(x < b_{inf}) = f(x > b_{sup}) = 0 \quad (\text{I.30})$$

Via cette méthode, l'inconvénient est bien sûr la création artificielle d'une discontinuité sur les bords.

2. Périodisation :

Cette méthode met en œuvre une répétition du support original à l'extérieur du support via une extension périodique, cf [I.3\(b\)](#).

$$\begin{aligned} f(b_{inf} - 1) &= f(b_{sup}) & f(b_{inf} - 2) &= f(b_{sup} - 1) \cdots \\ f(b_{sup} + 1) &= f(b_{inf}) & f(b_{sup} + 2) &= f(b_{inf} + 1) \cdots \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

L'inconvénient de la méthode réside sur la création d'une discontinuité sur les bords du support dans le cas, où il y a une différence de potentiel entre les deux valeurs extrêmes du support original. Cependant c'est la méthode la plus utilisée dans le traitement des signaux de courte durée, car elle provoque une discrétisation du spectre qui ne modifie pas la transformée en ondelettes dans le domaine spectral.

3. Symétrisation :

Cette technique a pour objectif de réaliser une symétrie du signal par rapport aux bords du support original, cf [I.3\(c\)](#).

$$\begin{aligned} f(b_{inf} - 1) &= f(b_{inf} + 1) & f(b_{inf} - 2) &= f(b_{inf} - 2) \cdots \\ f(b_{sup} + 1) &= f(b_{sup} - 1) & f(b_{sup} + 2) &= f(b_{inf} - 2) \cdots \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

L'inconvénient de cette méthode est la création d'une discontinuité sur la dérivée première au niveau des bords du support. La symétrisation introduit moins de discontinuités lorsque l'évolution du signal varie sensiblement entre ses deux extrémités.

4. Expansion :

La méthode se divise en deux variantes possibles, notées "SPd" avec d qui réfère par rapport à l'ordre de la dérivée. Dans le cas "SP0", la méthode consiste à étendre le signal avec une extrapolation linéaire. Les valeurs extrêmes sont ainsi répétées à l'extérieur du support original. Dans le cas "SP1", la technique a pour but d'étendre le signal via une extrapolation exprimée par sa dérivée première, cf [I.3\(d\)](#). Les valeurs extrêmes sont déterminées via les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2.f(b_{inf}) - f(x) \\ f(b_{sup} + x) &= 2.f(b_{sup}) - f(b_{sup} - x) \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Cette méthode s'avère très efficace dans le cas où les potentiels des valeurs extrêmes sont très importants.

La figure I.3 représente les différentes méthodes à travers l'analyse d'un signal original avec une évolution particulière.

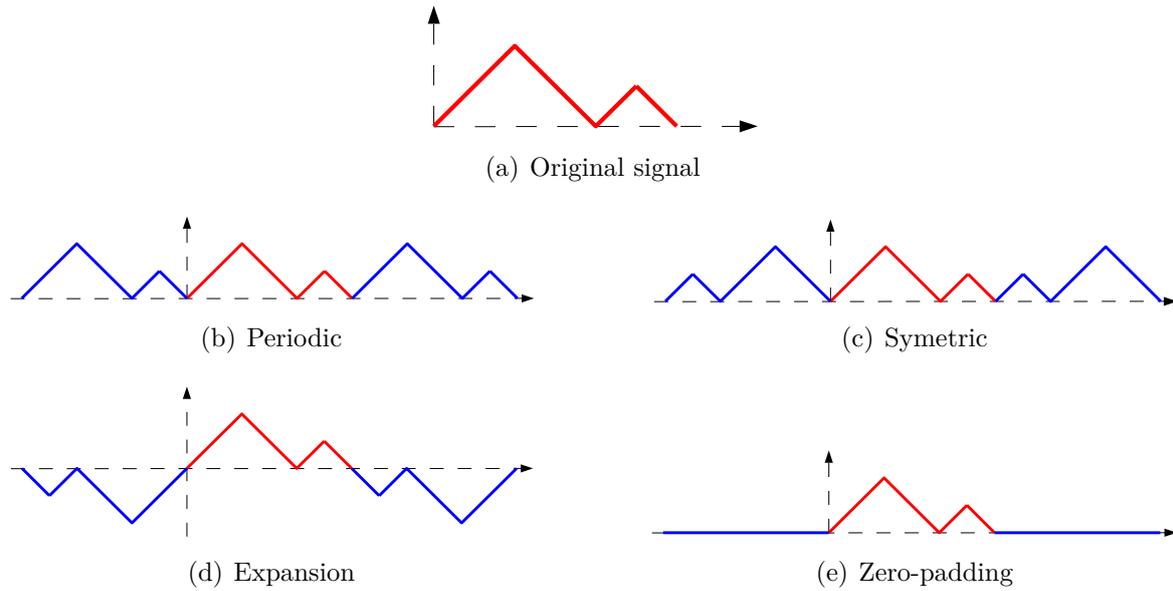


FIGURE I.3 – Représentation des méthodes pour le traitement des effets de bords

Les méthodes illustrées, permettant de traiter les effets de bords, sont particulièrement utilisées dans les transformées en ondelettes discrètes, via l'analyse multirésolution. Les effets de bords sont des discontinuités qui viennent s'ajouter aux phénomènes particuliers déjà présents sur le support original. Le fait de pouvoir éviter l'apparition de ces singularités additionnelles permet d'avoir une analyse précise. La reconstruction des signaux via ces méthodes permettent d'avoir une restitution parfaite du signal, mais la décomposition peut exposer des phénomènes suivant la méthode choisie et le signal analysé.

I.2.5.5. Généralités des propriétés des ondelettes

Les formulations suivantes sont des généralités des propriétés des ondelettes :
L'intégrale de la fonction d'échelle $\in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (\text{I.34})$$

L'intégrale de la fonction ondelette $\in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (\text{I.35})$$

L'intégrale qui permet de vérifier que l'ondelette a $(m+1)$ moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^z \psi(x) dx = 0 \quad \text{avec } z = 0, \dots, m \quad (\text{I.36})$$

Condition permettant de vérifier si la base est orthonormée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(x+n)} dx = \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.37})$$

I.2.5.6. Méthode des éléments finis avec Ondelettes WFEM

Durant ces 30 dernières décennies, les chercheurs ont montré un réel intérêt à l'analyse numérique via les ondelettes, en raison de leurs propriétés remarquables et de leurs capacités à résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP).

Mais plus récemment, de nombreuses études ont été réalisées couplant la méthode des éléments finis et les ondelettes, se référant ainsi sous l'acronyme WFEM (Wavelet Finite Element method). Les articles de J. Ko, J. Ma, H. Antes, J.G. Han, L.M.S. Castro, M.R.T. Arruda, R.Q. Jia, J. Xiang, W. Sweldens, Y. He [92, 107, 2, 76, 25, 3, 86, 159, 146, 80] illustrent ces travaux.

Ces avancées démontrent l'utilisation des différentes familles d'ondelette, Daubechies, Spline, Hermite, polynomial et seconde génération d'ondelette en modélisation numérique avec la MEF. Ces avancées selon les familles d'ondelettes utilisées sont détaillées ci-après :

Daubechies wavelet FEM :

Dans la littérature, l'ondelette de Daubechies est couramment utilisée en raison de son domaine compact, ses moments nuls et ses propriétés d'orthogonalité [101]. Ces propriétés intrinsèques aux ondelettes de Daubechies permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) de façon efficace et précise.

L'article J.Ko [92] expose les différentes propriétés et les équations disponibles concernant les ondelettes de Daubechies. La fonction d'échelle est utilisée comme fonction d'interpolation, et cette dernière est dérivée permettant ainsi de satisfaire le degré de dérivation des équations aux dérivées partielles étudiées. L'intégration du produit de deux fonctions d'échelles dérivées est exploitée dans ces travaux, plus communément appelée coefficients de connexions.

Une méthode similaire peut-être retrouvée dans les articles de J. Ma et R. Patton [107, 128], où ils prennent en compte les connexions des éléments voisins. L'exemple numérique traité illustre cette technique à travers la résolution d'un problème 1D sur une poutre.

Les travaux de X. Chen [35] extrapolent la méthode, pour la résolution de problèmes 2D et il étudie une nouvelle méthode d'intégration pour déterminer les matrices de raideurs et des efforts. Il expose dans l'article que le produit tensoriel des espaces doit être déterminé en premier [102], ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul.

Néanmoins, J.Jin et al. construit en 2D via les ondelettes de Daubechies, une méthode sans produit tensoriel [88]. Les fonctions d'échelles et des ondelettes sont exprimées en 2D, et la méthodologie développée est très remarquable. Dans cet article, il met en application la méthodologie sur une plaque fine en acier étudiée dans un cas de flexion. Ces travaux montrent également que la formulation de déviation dépend essentiellement des conditions limites spécifiques et n'est efficace que pour des plaques homogènes carrées. Les conditions limites simples ont été traitées dans les travaux de J. Jin.

Peu de temps après, Y. H. Zhou a modifié l'approximation en ondelettes de la solution de déviation [168], en y insérant des conditions limites sur les degrés de liberté de rotation sur des poutres et des plaques. Ces modifications sont directement introduites sous forme de coefficients d'ondelettes de Daubechies.

Cet article fait référence à la publication de M.A.Alves [1] avec une méthode multirésolution qui se compose d'une grille de résolution qui s'adapte automatiquement aux zones à fort gradient. Cette méthodologie est adaptée principalement à la résolution d'équations aux dérivées partielles hyperboliques.

L.A.Diaz [44] met en lumière la faisabilité et la capacité d'utiliser les ondelettes de Daubechies dans la méthode des éléments finis afin de traiter avec précision des problèmes 1D et 2D avec le modèle Mindlin Reissner.

La méthodologie illustrée dans les articles de J. Ma [107] et de L.A. Diaz [44] introduisent la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies comme fonction d'interpolation. L'évolution du nombre de points d'interpolation est effectuée via l'ordre de l'ondelette. L'aspect multirésolution n'est donc pas utilisé dans ces articles. Néanmoins l'article de J. Chen [31] présente une technique en 2D avec l'utilisation de la multirésolution via la fonction d'échelle. L'approximation 2D est obtenue par un produit tensoriel de deux approximations 1D. Les conditions limites sont mises en place via une méthode de pénalisation. Les résultats obtenus via cette méthodologie sont très précis par rapport à ANSYS.

Pour résumer, les ondelettes de Daubechies sont très utilisées pour approximer les déplacements et les forces dans la méthode des éléments finis. Les coefficients d'approximation peuvent être déterminés via l'imposition de conditions limites, où il peut être utile de passer de l'espace des ondelettes à l'espace physique via une matrice de transformation [107]. Les intégrations s'appuient sur les méthodes d'intégration illustrées dans l'article de J. Ko [92]. Des grilles de résolution via l'analyse multirésolution permet d'obtenir des résultats de plus en plus précis aux zones à fort gradient. La littérature expose ainsi des résultats remarquables avec l'introduction de l'ondelette de Daubechies dans la méthode FEM.

Spline wavelet FEM :

L'article de B. Li [101] décrit la méthodologie des éléments finis avec l'ondelette B-spline. La technique est similaire aux méthodes p-adaptatives (cf. I.2.2.2) concernant l'augmentation du degré du polynôme, en se référant à l'article de C.K. Chui et J.Z. Wang, les créateurs de la méthode [36]. La différence réside sur le fait que l'ordre du polynôme est fixé pour l'interpolation et la multirésolution vient enrichir le domaine par tronçon avec cette interpolation B-spline. La fonction B-spline possède une forme très régulière, mais contrairement à l'ondelette de Daubechies, elle n'a pas un domaine compact, néanmoins elle est définie explicitement. Des méthodes d'adaptation de l'ondelette spline sur un intervalle $[0 : 1]$ ont été traitées via J.C. Goswami [68].

Des applications de l'ondelette B-spline en éléments finis sont présentées dans les articles suivants [2, 76, 77]. H. Antes [2] utilise des bicubic splines pour traiter un problème 2D, d'une plaque en flexion. Les articles de J.G. Han et al. [76, 77] exposent l'extension de la méthode en 2D et 3D via la création d'éléments tels que triangles, quadrangles, tétraèdres et hexaèdres. Ces éléments ont été utilisés pour résoudre différents problèmes exposés dans les articles [158, 34, 166]. La méthode se révèle très intéressante, car elle combine la polyvalence de la méthode des éléments finis avec la précision de l'approximation des fonctions B-splines [162]. Ces travaux ont permis de poursuivre sur l'analyse de structure avec détection/représentation de fissures [160, 161, 46]. J.W. Xiang souligne dans ses articles son choix d'utiliser l'ondelette B-spline en raison de son expression explicite par rapport aux ondelettes de Daubechies, où il est nécessaire de calculer les coefficients de connexions dans le cas des intégrations. La méthode est également utilisée pour la résolution de problème de flexion sur des plaques épaisses, où la formulation multivariable de la méthode éléments finis avec ondelettes est dérivée via la méthode de Hellinger-Reissner [74]. X.W. Zhang et al. propose deux éléments supplémentaires multivariable correspondant à des éléments coques cylindriques et hyperboloïdes [165]. De plus, cet article montre une méthode qui traite le déplacement et la contrainte comme deux variables indépendantes. La méthode permet ainsi d'améliorer la précision des champs de déformations et de contraintes. J.G. Han [75] présente une nouvelle méthode éléments finis en ondelettes, stochastique, déve-

loppée à partir des ondelettes B-spline. L'application de la méthodologie est réalisée sur des plaques fines en flexion, les travaux montrent des résultats précis, mais la méthode nécessite des développements supplémentaires pour traiter les zones à fort gradients, les singularités via la propriété de multirésolution. Des méthodes hybrides sont réalisées par T.H.H. Pian et al. dans le cadre de résolution de plaques épaisses, de poutres via la théorie de Timoshenko [130, 129]. Cette méthode hybride se compose du principe de Hellinger-Reisner et de Hu-Washizu.

Pour résumer les ondelettes B-spline sont utilisées dans la méthode des éléments finis comme fonction d'interpolation pour approcher les champs de déplacements et d'efforts. De nombreux développements ont été réalisés afin de traiter des problèmes 1D, 2D et 3D. La propriété multirésolution est utilisée dans les articles de [34, 166] et la création d'éléments a été abordé dans les articles [76, 77]. Les déplacements sont représentés par les coefficients d'approximations dans l'espace des ondelettes et sont transformés en degrés de liberté dans l'espace élément fini via une matrice de transformation. Dans le cas de représentation/détection de fissures, la transformation en ondelettes de Daubechies est utilisée pour prédire l'endroit endommagé [161].

Polynomiale wavelet FEM :

L'article de L.M.S. Castro [24] met en œuvre l'utilisation d'une ondelette polynomiale comme fonction d'interpolation pour la méthode des éléments finis. L'ondelette polynomiale est basée sur la définition d'une combinaison linéaire de polynôme de Legendre, dont la méthode a été réalisée via J. Frohlich [64]. L'expansion en 2D peut être obtenue facilement via un produit tensoriel. Les racines des polynômes de Chebyshev sont utilisées pour obtenir les coefficients d'expansion dans la formulation. Des formulations hybrides mixtes ont été également développées, car elles ne sont pas nécessaires pour satisfaire les conditions élastodynamiques locales. L.M.S. Castro a employé l'ondelette polynomiale sur un intervalle comme fonction d'approximation dans le cadre d'une formulation hybride mixte [26]. Cet article met en avant un point très intéressant concernant l'aspect multirésolution via l'utilisation de l'ondelette de Daubechies, où le niveau minimum de résolution s'exprime :

$$j_{min} = \log_2(4A - 2)$$

Il est à constater que le niveau dépend du nombre de moments nuls "A" de Daubechies. Les articles [3, 25] ont montré que l'utilisation des ondelettes doit se faire essentiellement pour la résolution de problème statique et dynamique non linéaires.

Second generation wavelet FEM :

La seconde génération d'ondelette pour la méthode des éléments finis adopte également une fonction d'échelle et une fonction d'ondelette dans le cadre de l'analyse multirésolution. Néanmoins, la construction est différente, car elle s'appuie sur la méthode du "lifting scheme" qui consiste à enrichir localement la zone où un phénomène particulier se produit [154]. Un avantage considérable de cette famille d'ondelettes réside sur le fait de diminuer le nombre de degrés de liberté, par rapport à un autre type d'ondelettes, le développement de cette famille d'ondelette est détaillé dans les articles [147, 146]. Y. Wang illustre dans son article [152] la réalisation d'une méthode éléments finis multirésolution basée sur ce type d'ondelettes et propose également une nouvelle méthode adaptative via une interpolation ondelettes de seconde génération sur des problèmes de structures en vibration [153]. Y. He et X. Chen ont amélioré la méthode d'analyse éléments finis multirésolution,

en utilisant des fonctions d'interpolation appropriées et en ajoutant une ondelette d'interconnexion sur l'intervalle [80, 81]. La méthode permet de calculer la flexibilité locale provenant d'une fissure dans un tuyau et la littérature présente des résultats expérimentaux et numériques validant la méthodologie [82]. Un développement 2D a été effectué par S.M. Quraishi [132] permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques.

L'article de B. Li [101] permet d'avoir une synthèse complète sur les différentes méthodes éléments finis avec ondelettes. Les méthodes qui utilisent l'aspect multirésolution de la méthode des ondelettes montrent des résultats remarquables avec des précisions supérieures aux techniques sans multirésolution. Les ondelettes de Daubechies sont très utilisées dans la littérature et montrent de nombreux avantages au niveau de la détection de singularités, son domaine compact et la possibilité d'utiliser une analyse multirésolution. Néanmoins, elle ne possède pas de forme explicite et en conséquence le calcul des intégrales nécessite une méthode bien particulière. Les applications avec les ondelettes B-spline illustrent une méthode précise, qui s'apparente aux méthodes p-adaptative concernant le degré du polynôme. Néanmoins l'aspect multirésolution vient enrichir davantage l'intervalle. De nombreux développements ont été réalisés avec la création d'éléments triangles, quadrangles, hexaèdres... Les ondelettes polynomiales se rapprochent beaucoup des ondelettes B-splines, mais avec l'utilisation des racines des polynômes de Chebyshev pour obtenir les coefficients d'expansion. La méthode s'apparente aux méthodes p-adaptatives et l'article de L.M.S. Castro [24] utilise ces méthodes adaptatives pour l'aspect multirésolution. La seconde génération d'ondelettes montre des résultats remarquables et présente des avantages considérables du fait du raffinement localisé par rapport à un phénomène particulier.

L'ensemble des méthodes illustrées dans la littérature montrent des résultats précis et utilisent uniquement une interpolation en ondelettes pour exprimer les champs de déplacements, déformations et contraintes. Quelques méthodes hybrides ont été développées, couplant différentes méthodes pour simplifier et améliorer les résolutions des problèmes. De nombreux articles ont également relevé le temps de calcul occupé via la méthode des éléments finis avec ondelettes et ont cherché des améliorations via l'aspect multirésolution ou le "lifting scheme".

I.2.6. Conclusion

La section I.2 avait pour objectif de présenter les méthodes et les outils développés pour analyser les phénomènes particuliers. Des améliorations considérables ont été réalisées ces dernières années dans ce domaine et des méthodes adaptatives I.2.2, des méthodes multi-grilles I.2.3, la méthode XFEM I.2.4 et des méthodes éléments finis avec une discrétisation en ondelettes I.2.5 ont été créées.

Chaque méthodologie présente des avantages et des inconvénients et peut être parfois limitée à des cas d'études précis. La méthode des éléments finis doit être constamment adaptée pour la résolution du problème visé sinon des écarts importants entre la modélisation numérique et la réponse réelle seront présents.

Ces travaux de thèse consistent à chercher une nouvelle méthode de résolution de problèmes avec des discontinuités basées sur la méthode des éléments finis avec ondelettes. Dans ce cadre, le choix s'est porté sur l'ondelette de Daubechies en raison de ses propriétés et sa capacité de détection. La partie suivante I.3 a pour objectif de présenter les formulations concernant cette famille d'ondelettes.

I.3. Ondelettes de Daubechies

I.3.1. Introduction

Les ondelettes de Daubechies sont des fonctions de base particulièrement utilisées dans le traitement du signal et des images. Ces dernières permettent de représenter des fonctions à différents niveaux de résolution.

Elles possèdent les particularités suivantes :

- une forme non analytique : seuls les coefficients aux points de définition (points particuliers) sont connus, ils correspondent plus précisément aux coefficients du filtre passe-bas
- un domaine de définition compact $[0 : N - 1]$ (fonction nulle en dehors du domaine)
- des évolutions remarquablement non linéaires (cf figure I.4)
- des moments nuls, qui constituent ainsi des conditions mises à profit pour déterminer les coefficients de l'ondelette, le nombre de moments nuls équivaut à la moitié de l'ordre $\mathbf{A} = N/2$

Le nombre de coefficients correspond à l'ordre "N" de l'ondelette de Daubechies. En dehors de ce domaine, l'ondelette équivaut à zéro.

Deux notations sont ainsi utilisées pour référencer une ondelette : DN et/ou DbA.

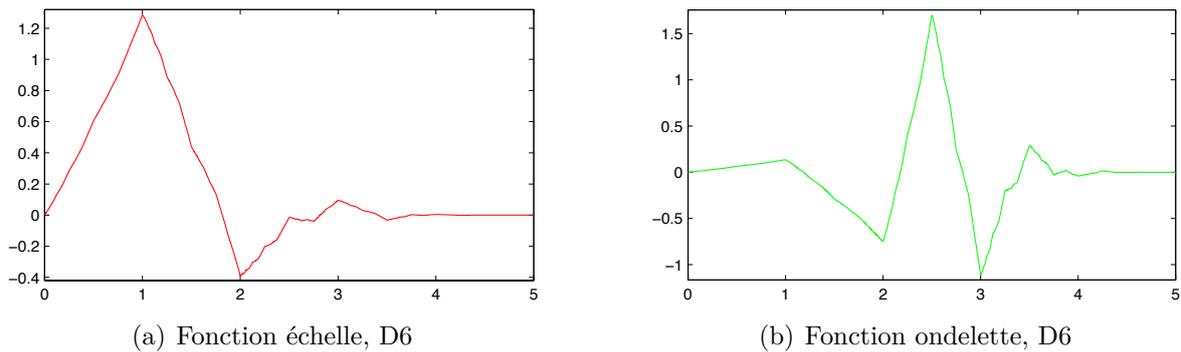


FIGURE I.4 – Évolution de la fonction d'échelle et fonction ondelette de l'ondelette de Daubechies D6

I.3.2. Rappel sur la définition des ondelettes de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies sont définies sur des bases orthonormales et sont formées par les fonctions $\phi_{j,k}(x)$ et $\psi_{j,k}(x)$ construites à partir des deux fonctions ϕ et ψ , représentant la fonction d'échelle et la fonction ondelette mère.

Ces bases sont représentées par :

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (\text{I.38})$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (\text{I.39})$$

Le terme j correspond au facteur de dilatation/contraction, et le facteur k correspond au facteur de translation. Le facteur j est plus généralement associé au niveau de résolution.

Lorsque les fonctions d'échelle et ondelette de l'ondelette de Daubechies sont utilisées, ces dernières satisfont les deux relations d'échelle suivantes.

La première concerne la fonction d'échelle (fonction d'approximation) :

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j \phi(2x - j) \quad (\text{I.40})$$

et la seconde correspond à l'équation de la fonction ondelette (fonction détails) :

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j p_{N-1-j} \phi(2x - j) \quad (\text{I.41})$$

avec N : le nombre de coefficients du filtre passe-bas de l'ondelette choisie dont ces derniers apparaissent plus généralement dans le domaine du traitement discret d'images comme les coefficients d'un filtre

Remarques :

- Les coefficients p_j définissent et sont attachés à une ondelette particulière
- La relation I.41 permet le calcul de la fonction ondelette à partir de la connaissance de la fonction d'échelle
- Les équations I.40 et I.41 permettent de calculer les valeurs de la fonction d'échelle et de la fonction ondelette par récurrence en tout point "x".

I.3.3. Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies

La première étape consiste à calculer les valeurs initiales de fonction d'échelle. Pour déterminer ces coefficients, la formule de récurrence I.40 est utilisée. Un système d'équations est ainsi écrit sous la forme suivante :

$$M\Phi = \Phi \quad (\text{I.42})$$

qui constituera alors une équation aux valeurs propres. Cette méthode est extraite des articles de J.R.W [89] et de la thèse de O.M.N [125]. Les étapes principales du calcul de ces valeurs sont rappelées ci-après en prenant l'exemple de l'ondelette de Daubechies Db3, définie par 6 coefficients à définir.

La matrice M est construite à partir de la relation I.40 appliquée en 6 points d'abscisses entières 0...5, et en tenant compte du fait qu'en dehors de l'intervalle [0 :5] la fonction d'échelle doit-être nulle :

$$M = \sqrt{2} \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & h_4 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 \end{pmatrix} \quad (\text{I.43})$$

La matrice I.43 M illustrée ci-dessus utilise les coefficients " h_i ", définissant le filtre passe-bas de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. Ces coefficients sont extraits de la bibliothèque des Ondelettes réalisée par l'université de Stanford, téléchargeable à l'adresse

http://statweb.stanford.edu/~wavelab/Wavelab_850/download.html. Les valeurs extraites ont été contrôlées à l'aide de l'article de I. Daubechies [40], fondatrice de cette famille d'ondelettes orthogonales.

La relation I.44 permet de faire la liaison entre les coefficients du filtre passe-bas " h_i " et les coefficients de définition " p_i " associés à l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. La matrice I.43 est ainsi multipliée par $\sqrt{2}$ afin d'obtenir les coefficients p_i de l'ondelette de Daubechies.

$$p_i = \sqrt{2}h_i \quad (\text{I.44})$$

Dans l'optique d'obtenir une solution non nulle, le système I.42 conduit à une équation aux valeurs propres λ_i .

Les valeurs propres de la matrice M sont les scalaires λ_i vérifiant :

$$\det(M - \lambda I_n) = 0 \quad (\text{I.45})$$

avec \mathbf{I} : la matrice identité et \mathbf{n} : ordre de la matrice

Les vecteurs propres sont les vecteurs x de composante (x', x'', \dots) associés aux valeurs propres λ_i et vérifiant la relation I.46 suivante :

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow (M - \lambda_i I_n) \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (\text{I.46})$$

L'obtention des vecteurs propres et des valeurs propres permet une analyse de ces valeurs. Le repérage de la valeur propre 1 permet d'extraire le vecteur propre associé. La raison de ce choix vient du fait que le système I.42 correspond uniquement à la valeur propre 1.

Puis, de manière à normaliser l'intégrale discrète (c'est-à-dire la somme des valeurs) de la fonction d'échelle (cf I.34), ce vecteur propre est divisé par la somme de ses termes, afin d'obtenir les valeurs initiales de la fonction d'échelle.

I.3.3.1. Valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

Le tableau I.1 illustre les valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10. Les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont présentées dans l'Annexe A.

$\phi(i)$	$Db2 = D4$	$Db3 = D6$	$Db4 = D8$	$Db5 = D10$
0	0	0	0	0
1	0.13660254 e+01	0.12863351 e+01	0.10071700 e+01	0.69613606 e+00
2	-0.36602540 e+00	-0.38583696 e+00	-0.33836954 e-01	0.44905760 e+00
3	0	0.95267546 e-01	0.39610463 e-01	-0.18225401 e+00
4	-	0.42343456 e-02	-0.11764358 e-01	0.37231823 e-01
5	-	0	-0.11979576 e-02	0.15175751 e-02
6	-	-	0.18829413 e-04	-0.17267962 e-02
7	-	-	0	0.37569471 e-04
8	-	-	-	0.17413312 e-06
9	-	-	-	0

TABLE I.1 – Valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

La vérification de la somme des coefficients est effectuée pour chaque ordre d'ondelette et cette somme doit être équivalente à 1, condition nécessaire de la fonction d'échelle (cf chapitre I.2.5.5).

I.3.4. Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée de l'ondelette de Daubechies

Dans le cadre de la résolution d'équations différentielles il est nécessaire de pouvoir calculer des dérivées. La forme non explicite (non analytique) de l'ondelette de Daubechies ne permet pas un calcul classique direct. Néanmoins, il est possible de calculer les coefficients de la dérivée de la fonction d'échelle en suivant une technique analogue à celle présentée pour la fonction de base (cf I.3.3). La méthodologie de calcul de ces coefficients est rappelée ci-après. Pour une présentation plus précise il est possible de se reporter par exemple aux travaux de M.Q.Chen, L.A.Diaz, J. Ma et W. Lin [32, 44, 107, 105].

La dérivée à l'ordre n de la fonction d'échelle est définie par :

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{d^n \phi(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \phi^{(n-1)}(x) \quad (\text{I.47})$$

Compte tenu de la relation I.40, la relation suivante peut être déduite :

$$\phi^{(n)}(x) = 2^n \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi^{(n)}(2x - k) \quad (\text{I.48})$$

Cette équation est une formule analogue à I.40 au coefficient 2^n près.

La première étape consiste à calculer les valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée pour les valeurs entières de l'intervalle de définition de la fonction $[0 : N-1]$. En appliquant la formule de récurrence I.48, le système d'équations s'écrit sous la forme suivante :

$$M^{(n)} \phi^{(n)} = 2^{-n} \phi^{(n)} \quad (\text{I.49})$$

En prenant l'exemple de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6, la matrice $M^{(n)}$ s'écrira de la façon suivante :

$$M^{(n)} = \sqrt{(2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_5 & h_4 & h_3 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_5 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.50})$$

La matrice est multipliée par $\sqrt{(2)}$ afin d'obtenir les coefficients p_i de l'ondelette de Daubechies. La relation I.51 permet de faire le lien entre les coefficients du filtre passe-bas " h_i " et les coefficients de définition " p_i ", d'où la multiplication de la matrice $M^{(n)}$ par $\sqrt{2}$.

$$p_i = \sqrt{2}h_i \quad (\text{I.51})$$

À partir de cette matrice, les vecteurs propres et les valeurs propres en sont déduits. Compte tenu de la relation I.48, la valeur propre égale à 2^{-n} est ensuite recherchée. Dans l'exemple, la valeur propre 0.5 est recherchée, ce qui correspond à la dérivée première ($n=1$).

Le vecteur propre associé à cette valeur est extrait puis normalisé la formule suivante :

$$\sum_{x=1}^{N-2} (-x)^n \phi^{(n)}(x) = n! \quad (\text{I.52})$$

Les valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée de l'ondelette de Daubechies sont ainsi obtenues.

I.3.4.1. Valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

Le tableau I.2 illustre les valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10. Les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont présentées en Annexe B.

$\phi^{(1)}(i)$	$Db2 = D4$	$Db3 = D6$	$Db4 = D8$	$Db5 = D10$
0	0	0	0	0
1	0.1 e+01	0.16384523 e+01	0.17760720 e+01	0.15583263 e+01
2	-0.1 e+01	-0.22327582 e+01	-0.27853494 e+01	-0.24360128 e+01
3	0	0.55015936 e+00	0.11924525 e+01	0.12359051 e+01
4	-	0.44146491 e-01	-0.13137451 e+00	-0.36743771 e+00
5	-	0	-0.53571028 e-01	-0.21780351 e-01
6	-	-	0.17703965 e-02	0.32347193 e-01
7	-	-	0	-0.13356199 e-02
8	-	-	-	0.12168385 e-04
9	-	-	-	0

TABLE I.2 – Valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées premières de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

I.3.5. Détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée de l'ondelette de Daubechies

Dans le cadre d'une résolution d'une équation aux dérivées partielles par la méthode de Galerkin, il est nécessaire de pouvoir intégrer les fonctions échelles et ondelettes. Dans ce chapitre, une méthodologie mise au point par plusieurs auteurs permet d'obtenir les coefficients d'une fonction d'échelle intégrée associée à l'ondelette de Daubechies.

Les articles de M.Q.Chen et de H.Hashish [32, 79] définissent l'intégrale $n^{\text{ième}}$ continue de la fonction d'échelle selon :

$$\theta_{(n)}(x) = \int_0^x \int_0^{Y_n} \dots \int_0^{Y_2} \phi(y_1) dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n \quad (\text{I.53})$$

$\phi_{(n)}$ est associé à $\theta_{(n)}$ pour exprimer l'intégrale de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies.

Compte tenu de la relation I.40 et des propriétés générales de l'opération d'intégration, la relation suivante peut être écrite :

$$\phi_{(n)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_{(n)}(2x - k) \quad (\text{I.54})$$

De manière analogue au calcul de la dérivée, cette expression appliquée aux différents points de l'intervalle de définition de l'ondelette conduit à un système linéaire. Cependant contrairement aux calculs de la dérivée, le second membre ne sera pas nul du fait que l'intégrale de la fonction d'échelle en dehors des bornes du domaine de définition, n'est pas une grandeur nulle. Le calcul des termes du second membre et la résolution du système permettent alors de calculer les valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée. Il est

possible ainsi de calculer les intégrales $n^{\text{ième}}$ de la fonction d'échelle à l'aide d'une formule de récurrence ([32, 79]).

D'une manière pratique dans le cas d'une intégrale du premier ordre, pour déterminer ces coefficients, la formule suivante est utilisée :

$$(I - 2^{-n}M^{(n)})\phi_{(n)} = (C) \quad (\text{I.55})$$

Les termes de la matrice "M" sont obtenus à partir de la relation I.54.

$$(C) = (< C_0 \ C_1 \ C_{\dots} \ \dots >)^T \quad T : \text{Transpose} \quad (\text{I.56})$$

(C) forme un vecteur et chaque terme est calculé à partir de la formule suivante :

$$C_i = 2^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_{(n)}(2i - k) \quad \text{et } 2i - k \geq N - 1 \quad (\text{I.57})$$

La détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée se fait via la résolution du système d'équations I.55.

I.3.5.1. Valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

Le tableau I.3 illustre les valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10. Les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont présentées en Annexe C.

$\phi_{(1)}(i)$ $=\theta_{(1)}(i)$	<i>Db2 = D4</i>	<i>Db3 = D6</i>	<i>Db4 = D8</i>	<i>Db5 = D10</i>
0	0	0	0	0
1	0.84967937 e+00	0.60074157 e+00	0.37993441 e+00	0.22061401 e+00
2	0.10163460 e+01	0.10967114 e+01	0.11533818 e+01	0.11166736 e+01
3	1	0.98548673 e+00	0.95442792 e+00	0.95626923 e+00
4	1	0.99965909 e+00	0.10063655 e+01	0.10145771 e+01
5	1	1	0.10005009 e+01	0.99819794 e+00
6	1	1	0.99999616 e+00	0.99976213 e+00
7	1	1	1	0.99999787 e+00
8	1	1	1	0.99999999 e+00
9	1	1	1	1

TABLE I.3 – Valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10

I.3.6. Intégration fonction d'échelle, en fonction du niveau de résolution "j" et sur une intervalle [a :b]

La méthode d'intégration de l'article de H.Hashish, S.L.Ho, M.Q.Chen [79, 83, 32] définit l'intégrale n^{ième} continue de la fonction d'échelle par la formule I.58.

$$\theta_{(n)}(x) = \int_0^x \int_0^{Y_n} \dots \int_0^{Y_2} \phi(y_1) dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n \quad (\text{I.58})$$

Dans le cas d'une décomposition ondelette sur un niveau de résolution "j", il est nécessaire de savoir exprimer l'intégrale de la fonction d'échelle à ce niveau, en fonction des bornes de l'intégrale ainsi que du facteur de translation "l".

La démonstration I.59 montre la méthodologie suivie :

$$\begin{aligned} \int_a^b 2^{j/2} \phi(2^j x - l) dx &= \int_{2^j a}^{2^j b} 2^{j/2} 2^{-j} \phi(x - l) dx \\ &= 2^{-j/2} \left(\int_0^{2^j b} \phi(x - l) dx - \int_0^{2^j a} \phi(x - l) dx \right) \\ &= 2^{-j/2} \left(\theta_{(1)}(2^j b - l) - \theta_{(1)}(2^j a - l) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

A partir de la formule I.54, où $\phi_{(n)}$ est équivalent à $\theta_{(n)}$, la valeur de l'intégrale de la fonction d'échelle est déterminée par rapport au niveau de résolution "j" et du facteur de translation "l".

Une méthodologie plus détaillée peut-être retrouvée dans la partie I.3.10 où la fonction d'échelle est intégrée sur un domaine restreint [0 :1].

I.3.7. Particularités des ondelettes de Daubechies

D'après les articles [32, 107, 44, 33], les ondelettes de Daubechies ont certaines particularités.

1. Intégrale de la fonction d'échelle de base :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (\text{I.60})$$

Cette première particularité est commune à toutes les fonctions d'échelles des différentes familles d'ondelettes existantes.

2. Propriétés d'orthogonalité entre deux fonctions échelles translatées, et de même niveau :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x) \phi_{j,l}(x) dx = \delta_{k,l} \quad (\text{I.61})$$

$$\text{et } \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

3. Produit de deux fonctions ondelettes translatées et de niveau quelconque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x) \psi_{l,m}(x) dx = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad (\text{I.63})$$

4. Produit d'une fonction ondelette et d'une fonction d'échelle, translatées et de même niveau :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x)\psi_{j,m}(x)dx = 0 \quad (\text{I.64})$$

5. La fonction ondelette a z moments nuls, si l'intégrale du produit d'un monôme de degré z et de la fonction ondelette équivaut à 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^z \psi(x)dx = 0 \quad \text{avec } 0 \leq z \leq N/2 - 1 \quad (\text{I.65})$$

6. Cette particularité est reliée aux moments nuls " z " de la fonction ondelette. L'intégrale du produit d'un monôme de degré z et de la fonction d'échelle équivaut à une constante si :

$$M_0^z = \int_{-\infty}^{+\infty} x^z \phi(x)dx \quad \text{avec } 0 \leq z \leq N/2 - 1 \quad (\text{I.66})$$

Cette relation met en évidence la capacité de la fonction d'échelle à interpoler avec précision un monôme de degré " z ".

Ces moments " M_0^z " sont utilisés au sein de nombreuses intégrales telles que la détermination des valeurs des intégrales d'une fonction d'échelle et d'une fonction d'échelle dérivée de niveau de résolution quelconque, [I.3.10](#) mais également pour le calcul des valeurs des intégrales du produit de fonction d'échelle et du produit de fonction d'échelle dérivée à des degrés différents [I.3.11](#).

I.3.8. Détails sur le calcul des Moments de la fonction d'échelle

Selon l'article de M.Q.Chen [\[32\]](#) et la thèse de O.M.Nielsen [\[125\]](#), les moments de la fonction d'échelle peuvent s'obtenir récursivement à partir de la relation :

$$\begin{aligned} M_0^z &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^z \phi(x)dx \\ &= \frac{1}{2^{z+1} - 2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=1}^z \frac{z!}{l!(z-l)!} p_i^l M_0^{z-l} \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

avec

$$M_0^0 = 1 \quad (\text{I.68})$$

et avec

$$z = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (\text{I.69})$$

Les moments translatés peuvent être calculés via la relation suivante :

$$\begin{aligned} M_k^z &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y+k)^z \phi(y)dy \\ &= \sum_{n=0}^z \frac{z!}{n!(z-n)!} k^{z-n} \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \phi(y)dy \\ &= \sum_{n=0}^z \frac{z!}{n!(z-n)!} k^{z-n} M_0^n \end{aligned} \quad (\text{I.70})$$

Les résultats des moments translatés de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction du degré du polynôme et du facteur de translation sont présentés en annexe [D](#), au tableau [D.1](#).

I.3.9. Intégrales classiques associées aux fonctions de base des ondelettes de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies sont employées en particulier pour l'intégration directe des équations aux dérivées partielles.

Plusieurs fonctions sont alors employées pour simplifier et calculer les intégrales [32]. Certaines de ces grandeurs classiques seront également employées dans cette étude pour l'intégration du problème éléments finis. Ces principales grandeurs sont rappelées ci-dessous :

$$M_k^m(x) = \int_0^x y^m \phi(y - k) dy \quad (\text{I.71})$$

$$\Gamma_k^n(x) = \int_0^x \phi^{(n)}(y - k) \phi(y) dy \quad (\text{I.72})$$

$$\Lambda_k^{m,n}(x) = \int_0^x y^m \phi^{(n)}(y - k) \phi(y) dy \quad (\text{I.73})$$

$$\Upsilon_k^{m,n}(x) = \int_0^x y^m \phi^{(n)}(y - k) \phi(y) dy \quad (\text{I.74})$$

$$\Omega_{j,k}^{m,n}(x) = \int_0^x \phi(y) \phi^{(m)}(y - j) \phi^{(n)}(y - k) dy \quad (\text{I.75})$$

I.3.10. Intégration d'une fonction d'échelle et fonction d'échelle dérivée sur l'intervalle [0 : 1] et sur un niveau de résolution "j" quelconque

La grandeur correspond au calcul de l'intégrale d'une fonction d'échelle de niveau j pour des bornes différentes de $-\infty$ et $+\infty$. La démarche s'inspire des méthodes développées pour le calcul de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle de niveau j I.3.11 (détaillée par la suite). La technique concernant le calcul de l'intégrale d'une fonction d'échelle de base (niveau 0) est explicitée dans la partie ci-après I.3.10.1.

$$\theta_k^j = \int_0^1 \phi_{j,k}(y) dy$$

ou encore

$$\theta_k^j = \int_0^1 2^{j/2} \phi(2^j y - k) dy \quad (\text{I.76})$$

et pour le niveau 0

$$\theta_k^0 = \int_0^1 \phi(y - k) dy \quad \text{avec } j = 0$$

D'une manière analogue, l'intégrale d'une fonction d'échelle dérivée peut être écrite sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_k^{j;d_1} &= \int_0^1 \phi_{j,k}^{(d_1)}(y) dy \\ \theta_k^{j;d_1} &= \int_0^1 2^{j/2} \phi^{(d_1)}(2^j y - k) 2^j dy \\ \theta_k^{0;d_1} &= \int_0^1 \phi^{(d_1)}(y - k) dy \quad \text{avec } j = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.77})$$

Cette méthode est développée dans la partie I.3.10.3

I.3.10.1. Détails sur le calcul des coefficients de connexion θ_k^0

Les termes θ_k^0 sont appelés coefficients de connexion. Les valeurs des termes θ_k^0 sont déterminées en deux étapes. La première consiste à exploiter directement la formule I.76 à l'aide de la définition de la fonction d'échelle I.40.

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi(2x - k)$$

Cette relation de la fonction d'échelle permet de détailler I.76 selon :

$$\begin{aligned}
 \theta_k^0 &= \int_0^1 \phi(y - k) dy \\
 &= \sum_r p_r \int_0^1 \phi(2y - 2k - r) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_r p_r \int_0^2 \phi(y - 2k - r) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_r p_r \int_0^1 \phi(y - 2k - r) dy \\
 &\quad + 2^{-1} \sum_r p_r \int_1^2 \phi(y - 2k - r) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_r p_r (\theta_{2k+r}^0 + \theta_{2k+r-1}^0) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_m (p_{m-2k} + p_{m-2k+1}) \theta_m^0 \\
 &= 2^{-1} B_{k:m} \theta_m^0 \\
 &= \delta_{k:m} \theta_m^0
 \end{aligned} \tag{I.78}$$

Cette équation peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$(2^{-1} B_{k:m} - \delta_{k:m}) \theta_m^0 = 0 \quad \text{avec } \delta_{k:m} : \text{matrice identité } \mathbf{I} \tag{I.79}$$

À partir de cette matrice $(2^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{I})$, les vecteurs et les valeurs propres en sont déduits. La recherche des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 est alors réalisée permettant de déduire la dimension du noyau $\ker(2^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{I})$. De manière à déterminer une solution non nulle unique, le système homogène d'équations linéaires est complété par des équations supplémentaires. Ces dernières proviennent d'une des propriétés de l'ondelette de Daubechies : la fonction d'échelle a la capacité de représenter exactement un polynôme dont le degré correspond à l'ordre "N" de l'ondelette divisé par 2 ôté de 1.

$$x^z = \sum_k M_k^z \phi_k(x) \quad \text{avec } M_k^z : \text{Moments translatsés et } 0 \leq z \leq \frac{N}{2} - 1 \tag{I.80}$$

En intégrant cette relation, il est obtenu :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^z dx &= \int_0^1 \sum_k M_k^z \phi_k(x) dx \\
 \frac{1}{(z+1)} &= \sum_k M_k^z \theta_k^0 \\
 \text{valeur}^{(z)} &= \sum_k M \text{Moment}_{(k)}^{(z)} \theta_k^0
 \end{aligned} \tag{I.81}$$

Ces équations supplémentaires sont exprimées avec un second membre "*valeur*^(z)" et une équation " $\sum_k MMoment_{(k)}^{(z)} \theta_k^0$ ".

Les vecteurs propres extraits de la matrice $(2^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{I})$ sont utilisés à travers ces équations supplémentaires dont le second membre est différent de 0 (produit scalaire entre le vecteur et l'équation).

L'espace des solutions générées par les vecteurs propres est associé à l'espace des conditions particulières supplémentaires de manière à obtenir un vecteur solution unique non nul (θ_k^0) qui constitue les valeurs de l'intégrale de la fonction d'échelle en fonction du facteur de translation k et des bornes $[0 : 1]$ de l'intégrale.

I.3.10.2. Calcul des coefficients de connexion θ_k^j par rapport au niveau de résolution "j"

La partie précédente a permis de trouver les valeurs de l'intégrale de la fonction d'échelle à un niveau de résolution égal à 0. Or dans le cas étudié, la recherche porte sur les valeurs des intégrales pour tous les niveaux de résolution. La méthode réalisée s'inspire de la démonstration précédente.

$$\begin{aligned}
 \theta_k^j &= \int_0^1 \phi_{j,k}(y) dy && \text{avec } j : \text{niveau de résolution} \\
 &= \int_0^1 2^{j/2} \phi(2^j y - k) dy \\
 &= \int_0^{2^j} \phi(y - k) 2^{-j} 2^{j/2} dy \\
 &= 2^{-j/2} \int_0^{2^j} \phi(y - k) dy && \text{(I.82)} \\
 &= 2^{-j/2} \sum_r p_r 2^{-1} \int_0^{2^{j+1}} \phi(y - 2k - r) dy \\
 &= 2^{-(j+2)/2} \sum_r p_r \left(\theta_{2k+r}^{j+1} 2^{(j+1)/2} \right) \\
 &= 2^{-1/2} \sum_r p_r \theta_{2k+r}^{j+1}
 \end{aligned}$$

Une relation de récurrence entre un niveau bas à un niveau supérieur est ainsi obtenue mais il est également possible de trouver une relation dans le sens inverse : un niveau haut s'exprimant en fonction d'un niveau inférieur :

$$\begin{aligned}
 \theta_k^{j+1} &= \int_0^1 \phi_{j+1,k}(y) dy \\
 &= \int_0^1 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} y - k) dy \\
 &= \int_0^{2^{j+1}} 2^{(j+1)/2} \phi(y - k) 2^{-(j+1)} dy \\
 &= 2^{-(j+1)/2} \int_0^{2^{j+1}} \phi(y - k) dy && \text{(I.83)} \\
 &= 2^{-(j+1)/2} \left(\int_0^{2^j} \phi(y - k) dy + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi(y - k) dy \right) \\
 &= 2^{-(j+1)/2} \left(\theta_k^j 2^{j/2} + \theta_{k-2^j}^j 2^{j/2} \right) \\
 &= 2^{-1/2} \left(\theta_k^j + \theta_{k-2^j}^j \right)
 \end{aligned}$$

Connaissant le résultat pour le niveau 0, il est possible alors de calculer par récurrence le résultat pour tous les niveaux. Par exemple pour le niveau 1 :

$$\theta_k^1 = 2^{-1/2} (\theta_k^0 + \theta_{k-1}^0) \quad (\text{I.84})$$

I.3.10.3. Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{0;d_1}$

Les termes $\theta_k^{0;d_1}$ sont déterminés en suivant une démarche analogue à celle utilisée pour le calcul des coefficients θ_k^0 (cf. I.3.10.1). La première partie, consiste à exploiter directement la formule I.77 à l'aide de la définition de la fonction d'échelle dérivée I.48.

$$\phi^{(n)}(x) = 2^n \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi^{(n)}(2x - k)$$

À partir de la définition de la dérivée de la fonction d'échelle, la relation I.77 est détaillée selon :

$$\begin{aligned} \theta_k^{0;d_1} &= \int_0^1 \phi^{(d_1)}(y - k) dy \\ &= 2^{d_1} \sum_r p_r \int_0^1 \phi^{(d_1)}(2y - 2k - r) dy \\ &= 2^{d_1-1} \sum_r p_r \int_0^2 \phi^{(d_1)}(y - 2k - r) dy \\ &= 2^{d_1-1} \sum_r p_r \int_0^1 \phi^{(d_1)}(y - 2k - r) dy \\ &\quad + 2^{d_1-1} \sum_r p_r \int_1^2 \phi^{(d_1)}(y - 2k - r) dy \\ &= 2^{d_1-1} \sum_r p_r (\theta_{2k+r}^{0;d_1} + \theta_{2k+r-1}^{0;d_1}) dy \\ &= 2^{d_1-1} \sum_m (p_{m-2k} + p_{m-2k+1}) \theta_m^{0;d_1} \\ &= 2^{d_1-1} B_{k:m} \theta_m^{0;d_1} \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(2^{d_1-1} B_{k:m} - \delta_{k:m}) \theta_m^{0;d_1} = 0 \quad \text{avec } \delta_{k:m} : \text{matrice identité } \mathbf{I} \quad (\text{I.86})$$

À partir de cette matrice $(2^{d_1-1} \mathbf{B} - \mathbf{I})$, les vecteurs et les valeurs propres en sont déduits. La recherche des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 est alors réalisée permettant de déduire la dimension du noyau $\ker(2^{d_1-1} \mathbf{B} - \mathbf{I})$. De manière à déterminer une solution non nulle unique, le système homogène d'équations linéaires est complété par des équations supplémentaires. Comme dans le calcul des coefficients θ_k^0 (cf. I.3.10.1) celles-ci proviennent d'une des propriétés de l'ondelette de Daubechies : la fonction d'échelle a la capacité de représenter exactement un polynôme dont le degré correspond à l'ordre de l'ondelette divisé par 2 ôté de 1.

$$x^z = \sum_k M_k^z \phi_k(x) \quad \text{avec } M_k^z : \text{Moments translatsés et } 0 \leq z \leq \frac{N}{2} - 1$$

En dérivant cette formulation :

$$z(z-1)\dots(z-d_1+1)x^{z-d_1} = \sum_k M_k^z \phi_k^{(d_1)}(x) \quad (\text{I.87})$$

Si cette relation est intégrée alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 z(z-1)\dots(z-d_1+1)x^{z-d_1}dx &= \int_0^1 \sum_k M_k^z \phi_k^{(d_1)}(x)dx \\
 \frac{z(z-1)\dots(z-d_1+1)}{(z-d_1+1)} &= \sum_k M_k^z \theta_k^{0;d_1} \\
 \text{valeurder}^{(z;d_1)} &= \sum_k MMoment_{(k)}^{(z)} \theta_k^{0;d_1}
 \end{aligned} \tag{I.88}$$

Ces équations supplémentaires sont exprimées avec un second membre "*valeurder*^(z;d₁)" et une équation " $\sum_k MMoment_{(k)}^{(z)} \theta_k^{0;d_1}$ ".

Les vecteurs propres extraits de la matrice ($2^{d_1-1}\mathbf{B} - \mathbf{I}$) sont ainsi utilisés via ces équations supplémentaires dont le second membre est différent de 0 (produit scalaire entre le vecteur et l'équation).

L'espace des solutions générées par les vecteurs propres est associé à l'espace des conditions particulières supplémentaires de manière à obtenir un vecteur solution unique non nulle ($\theta_k^{0;d_1}$) qui constitue les valeurs de l'intégrale de la fonction d'échelle dérivée en fonction du facteur de translation k et des bornes [0 :1] de l'intégrale.

I.3.10.4. Calcul des coefficients de connexion $\theta_k^{j;d_1}$ par rapport au niveau de résolution 'j'

La partie précédente a permis de trouver les valeurs de l'intégrale de la fonction d'échelle dérivée à un niveau de résolution égal à 0. Or dans le cas étudié, la recherche porte sur les valeurs des intégrales pour tous les niveaux de résolution. La méthode de calcul est une technique analogue à celle utilisée pour θ_k^j (cf.I.3.10.2), mais avec la prise en compte de la dérivation.

$$\begin{aligned}
 \theta_k^{j;d_1} &= \int_0^1 \phi_{j,k}^{(d_1)}(y)dy \quad \text{avec j :niveau de résolution} \\
 &= \int_0^1 2^{j/2} \phi^{(d_1)}(2^j y - k) 2^j dy \\
 &= \int_0^{2^j} \phi^{(d_1)}(y - k) 2^{-j} 2^{j/2} 2^j dy \\
 &= 2^{j/2} \int_0^{2^j} \phi^{(d_1)}(y - k) dy \\
 &= 2^{j/2} \sum_r p_r 2^{d_1-1} \int_0^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y - 2k - r) dy \\
 &= 2^{j/2-1+d_1} \sum_r p_r \left(\theta_{2k+r}^{j+1;d_1} 2^{-(j+1)/2} \right) \\
 &= 2^{d_1-3/2} \sum_r p_r \theta_{2k+r}^{j+1;d_1}
 \end{aligned} \tag{I.89}$$

et

$$\begin{aligned}
 \theta_k^{j+1;d_1} &= \int_0^1 \phi_{j+1,k}^{(d_1)}(y) dy \\
 &= \int_0^1 2^{(j+1)/2} \phi^{(d_1)}(2^{j+1}y - k) 2^{j+1} dy \\
 &= \int_0^{2^{j+1}} 2^{(j+1)/2} \phi^{(d_1)}(y - k) 2^{-(j+1)} 2^{j+1} dy \\
 &= 2^{(j+1)/2} \int_0^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y - k) dy \\
 &= 2^{(j+1)/2} \left(\int_0^{2^j} \phi^{(d_1)}(y - k) dy + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y - k) dy \right) \\
 &= 2^{(j+1)/2} \left(\theta_k^{j;d_1} 2^{-j/2} + \theta_{k-2^j}^{j;d_1} 2^{-j/2} \right) \\
 &= 2^{1/2} \left(\theta_k^{j;d_1} + \theta_{k-2^j}^{j;d_1} \right)
 \end{aligned} \tag{I.90}$$

Ainsi cette dernière relation, connaissant le résultat pour le niveau 0, il est possible alors de calculer par récurrence le résultat pour tous les niveaux.

I.3.11. Intégration du produit de deux fonctions d'échelle et du produit de deux fonctions d'échelle dérivées sur l'intervalle $[0 : 1]$ et sur un niveau de résolution "j" quelconque

La méthode concernant le calcul de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies émane de la particularité d'orthogonalité.

D'après la formule I.61, l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle équivaut à 1 si $k=l$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(y) \phi_{j,l}(y) dy && = 1 \quad \text{si } k = l \\
 \Gamma_{k,l}^j &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} \phi(2^j y - k) 2^{j/2} \phi(2^j y - l) dy \\
 \Gamma_{k,l}^0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y - k) \phi(y - l) dy \quad \text{avec } j = 0
 \end{aligned} \tag{I.91}$$

Cette équation est valide dans le cas où les bornes de l'intégrale sont équivalentes à $-\infty$ et $+\infty$. Dans les autres cas, il est nécessaire d'utiliser une relation différente prenant en compte ces modifications. L'article de E.B. Lin [104] détaille la méthode de calcul, dont le développement est présenté dans la partie I.3.11.1.

La propriété I.61 a conduit également à une nouvelle relation, selon les articles [92, 44, 107, 32, 35, 104, 167, 136], permettant ainsi de calculer l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées à des degrés de dérivation différents, afin de satisfaire le degré de l'équation différentielle. Cette méthode est développée dans la partie I.3.11.3.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2} &= \int_0^1 \phi_{j,k}^{(d_1)}(y) \phi_{j,l}^{(d_2)}(y) dy \\
 \Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2} &= \int_0^1 2^{j/2} \phi^{(d_1)}(2^j y - k) 2^{j/2} \phi^{(d_2)}(2^j y - l) 2^j dy \\
 \Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2} &= \int_0^1 (\phi^{(d_1)}(y - k) \phi^{(d_2)}(y - l)) dy \quad \text{avec } j = 0
 \end{aligned} \tag{I.92}$$

I.3.11.1. Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^0$:

Les valeurs $\Gamma_{k,l}^0$ sont déterminées selon une méthodologie similaire par exemple à I.3.10.1. Dans une première étape, elle consiste à exploiter directement la formule I.91 à partir de la définition de la fonction d'échelle I.40.

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi(2x - k)$$

À partir de la définition de la fonction d'échelle, la formule I.91 peut-être plus détaillée plus finement. Les détails de ce développement sont illustrés dans les articles de E.B. Lin et de J. Ko [104, 92].

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^0 &= \int_0^1 \phi(y - k) \phi(y - l) dy \\
 &= \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^1 \phi(2y - 2k - r) \phi(2y - 2l - s) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^2 \phi(y - 2k - r) \phi(y - 2l - s) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^1 \phi(y - 2k - r) \phi(y - 2l - s) dy \\
 &\quad + 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_1^2 \phi(y - 2k - r) \phi(y - 2l - s) dy \\
 &= 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s (\Gamma_{2k+r,2l+s}^0 + \Gamma_{2k+r-1,2l+s-1}^0) \\
 &= 2^{-1} \sum_{m,n} (p_{m-2k} p_{n-2l} + p_{m-2k+1} p_{n-2l+1}) \Gamma_{m,n}^0 \\
 &= 2^{-1} A_{k,l;m,n} \Gamma_{m,n}^0 \\
 &= \delta_{k,l;m,n} \Gamma_{m,n}^0
 \end{aligned} \tag{I.93}$$

$$\text{où } \delta_{k,l;m,n} = \delta_{km} \delta_{ln}$$

La synthèse de ces relations donne, sous la forme suivante :

$$(2^{-1} A_{k,l;m,n} - \delta_{k,l;m,n}) \Gamma_{m,n}^0 = 0 \quad \text{avec } \delta_{k,l;m,n} : \text{matrice identité } \mathbf{I} \tag{I.94}$$

À partir de la matrice $(2^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{I})$, les vecteurs et les valeurs propres en sont déduits. La recherche des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 est alors réalisée permettant de déduire la dimension du noyau $\ker(2^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{I})$. De façon à obtenir une solution non nulle unique, le système homogène d'équations linéaires est complété via des équations supplémentaires issues d'une des propriétés de l'ondelette de Daubechies, où la fonction d'échelle a la capacité de représenter exactement un polynôme de degré équivalent à l'ordre de l'ondelette divisé par 2 ôté de 1.

$$x^z = \sum_k M_k^z \phi_k(x) \quad \text{avec } M_k^z : \text{Moments translatsés et } 0 \leq z \leq \frac{N}{2} - 1 \tag{I.95}$$

Cette relation permet ainsi d'exprimer une équation supplémentaire, correspondant

au produit de deux fonctions d'échelle :

$$\begin{aligned}
 x^z x^z &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k(x) \phi_l(x) \\
 x^{2z} &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k(x) \phi_l(x)
 \end{aligned}
 \tag{I.96}$$

En intégrant cette relation :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^{2z} dx &= \int_0^1 \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k(x) \phi_l(x) dx \\
 \frac{1}{(2z+1)} &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \Gamma_{k,l}^0 \\
 prvaleur^{(z)} &= \sum_{k,l} MprMoment_{(k,l)}^{(z)} \Gamma_{k,l}^0
 \end{aligned}
 \tag{I.97}$$

Ces équations supplémentaires sont exprimées avec un second membre "*prvaleur*^(z)" et une équation " $\sum_{k,l} MprMoment_{(k,l)}^{(z)} \Gamma_{k,l}^0$ ". Une relation existe pour chaque valeur de "z" différente.

Les vecteurs propres extraits de la matrice $(2^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{I})$ sont ainsi utilisés via ces équations ajoutées où le second membre est différent de 0 (produit scalaire entre le vecteur et l'équation).

L'espace des solutions générées par les vecteurs propres est associé à l'espace des conditions particulières supplémentaires de façon à obtenir un vecteur solution unique non nulle ($\Gamma_{k,l}^0$) qui constitue les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle en fonction des facteurs de translation k et l et des bornes [0 : 1] de l'intégrale.

Ce vecteur ($\Gamma_{k,l}^0$) est représenté par la suite sous forme de matrice en fonction des facteurs de translation "k" et "l".

La matrice ($\Gamma_{k,l}^0$) concernant l'intégration du produit de deux fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 au niveau de résolution "j=0" est présentée en annexe D, tableau D.2.

I.3.11.2. Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^j$ par rapport au niveau de résolution 'j' :

La partie précédente a permis de trouver les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle à un niveau de résolution égal à 0. Or dans le cas étudié, la recherche porte sur les valeurs des intégrales pour tous les niveaux de résolution. La méthode réalisée s'inspire de la démonstration précédente et elle est également démontrée dans les articles de E.B. Lin et de C.H. Romine [104, 136].

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^j &= \int_0^1 \phi_{j,k}(y)\phi_{j,l}(y)dy \quad \text{avec } j : \text{niveau de résolution} \\
 &= \int_0^1 2^{j/2}\phi(2^j y - k)2^{j/2}\phi(2^j y - l)dy \\
 &= \int_0^{2^j} \phi(y - k)\phi(y - l)(y)dy \frac{1}{2^j}2^{j/2}2^{j/2} \\
 &= \int_0^{2^j} \phi(y - k)\phi(y - l)dy \\
 &= 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^{2^{j+1}} \phi(y - 2k - r)\phi(y - 2l - s)dy \\
 &= 2^{-1} \sum_{r,s} p_r p_s \Gamma_{2k+r,2l+s}^{j+1}
 \end{aligned} \tag{I.98}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^{j+1} &= \int_0^{2^{j+1}} \phi(y - k)\phi(y - l)dy \\
 &= \int_0^{2^j} \phi(y - k)\phi(y - l)dy + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi(y - k)\phi(y - l)dy \\
 &= \Gamma_{k,l}^j + \Gamma_{k-2^j,l-2^j}^j
 \end{aligned} \tag{I.99}$$

Connaissant le résultat pour le niveau 0, il est ainsi possible de déterminer par récurrence le résultat pour tous les niveaux.

I.3.11.3. Détails sur le calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}$:

Les valeurs $\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}$ sont appelées coefficients de connexion. Ces valeurs sont déterminées en deux étapes. La première étape consiste à exploiter directement la formule I.92 via la définition de la fonction d'échelle dérivée I.48.

$$\phi^{(n)}(x) = 2^n \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi^{(n)}(2x - k) \tag{I.100}$$

À partir de la définition de la fonction d'échelle dérivée, la formule I.92 peut-être réécrite de manière plus détaillée. Ce développement est explicité dans les articles de X. Zhou, J. Ko et L.A. Diaz, [167, 92, 44].

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2} &= \int_0^1 \phi^{(d_1)}(y-k)\phi^{(d_2)}(y-l)dy \\
 &= 2^{d_1+d_2} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^1 \phi^{(d_1)}(2y-2k-r)\phi^{(d_2)}(2y-2l-s)dy \\
 &= 2^{d-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^2 \phi^{(d_1)}(y-2k-r)\phi^{(d_2)}(y-2l-s)dy \quad d = d_1 + d_2 \\
 &= 2^{d-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^1 \phi^{(d_1)}(y-2k-r)\phi^{(d_2)}(y-2l-s)dy \\
 &\quad + 2^{d-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_1^2 \phi^{(d_1)}(y-2k-r)\phi^{(d_2)}(y-2l-s)dy \tag{I.101} \\
 &= 2^{d-1} \sum_{r,s} p_r p_s (\Gamma_{2k+r,2l+s}^{0;d_1,d_2} + \Gamma_{2k+r-1,2l+s-1}^{0;d_1,d_2}) \\
 &= 2^{d-1} \sum_{m,n} (p_{m-2k} p_{n-2l} + p_{m-2k+1} p_{n-2l+1}) \Gamma_{m,n}^{0;d_1,d_2} \\
 &= 2^{d-1} A_{k,l;m,n} \Gamma_{m,n}^{0;d_1,d_2} \\
 &= \delta_{k,l;m,n} \Gamma_{m,n}^{0;d_1,d_2}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta_{k,l;m,n} = \delta_{km} \delta_{ln}$$

La synthèse de ces relations donne, sous la forme suivante :

$$(2^{d-1} A_{k,l;m,n} - \delta_{k,l;m,n}) \Gamma_{m,n}^{0;d_1,d_2} = 0 \quad \text{avec } \delta_{k,l;m,n} : \text{matrice identité } \mathbf{I} \tag{I.102}$$

À partir de la matrice $(2^{d-1} \mathbf{A} - \mathbf{I})$, les vecteurs et les valeurs propres en sont déduits. La recherche des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 est alors réalisée permettant de déduire la dimension du noyau $\ker(2^{d-1} \mathbf{A} - \mathbf{I})$. De manière à obtenir une solution non nulle unique, le système homogène d'équations linéaires est complété via des équations additionnelles issues d'une des propriétés de l'ondelette de Daubechies, où la fonction d'échelle a la capacité de représenter avec justesse un polynôme de degré équivalent à l'ordre N de l'ondelette divisé par 2 ôté de 1.

$$x^z = \sum_l M_l^z \phi_l(x) \quad \text{avec } M_l^z : \text{Moments translatsés et } 0 \leq z \leq N/2 - 1 \tag{I.103}$$

En dérivant la relation précédente, les deux relations additionnelles dépendantes des degrés de dérivation "d₁" et "d₂" peuvent être exprimées.

$$z(z-1)\dots(z-d_1+1)x^{z-d_1} = \sum_l M_l^z \phi_l^{(d_1)}(x) \tag{I.104}$$

$$z(z-1)\dots(z-d_2+1)x^{z-d_2} = \sum_l M_l^z \phi_l^{(d_2)}(x) \tag{I.105}$$

Ces deux relations permettent ainsi d'exprimer une équation supplémentaire, corres-

pondant au produit de deux fonctions d'échelle dérivées :

$$\begin{aligned}
 z(z-1)\dots(z-d_1+1)x^{z-d_1}z(z-1)\dots(z-d_2+1)x^{z-d_2} &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k^{(d_1)}(x) \phi_l^{(d_2)}(x) \\
 (z^2(z-1)^2\dots(z-d_1+1)^2)x^{2z-d} &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k^{(d_1)}(x) \phi_l^{(d_2)}(x) \\
 \text{où} \quad d &= d_1 + d_2
 \end{aligned} \tag{I.106}$$

En intégrant cette relation :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (z^2(z-1)^2\dots(z-d_1+1)^2)x^{2z-d} dx &= \int_0^1 \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \phi_k^{(d_1)}(x) \phi_l^{(d_2)}(x) dx \\
 \frac{(z^2(z-1)^2\dots(z-d_1+1)^2)}{(2z-d+1)} &= \sum_{k,l} M_k^z M_l^z \Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2} \\
 \text{prvaleurder}^{(z;d_1,d_2)} &= \sum_{k,l} MprMoment_{(k,l)}^{(z)} \Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}
 \end{aligned} \tag{I.107}$$

Ces équations supplémentaires sont exprimées avec un second membre "*prvaleurder*^(z;d₁,d₂)" et une équation " $\sum_{k,l} MprMoment_{(k,l)}^{(z)} \Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2}$ ". Une relation existe pour chaque valeur de "z" différente.

Les vecteurs propres extraits de la matrice $(2^{d-1}\mathbf{A} - \mathbf{I})$ sont ainsi utilisés via ces équations ajoutées où le second membre est différent de 0 (produit scalaire entre le vecteur et l'équation).

L'espace des solutions générées par les vecteurs propres est associé à l'espace des conditions particulières supplémentaires de façon à obtenir un vecteur solution unique non nul $(\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2})$ qui constitue les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle en fonction des facteurs de translation k et l et des bornes [0 : 1] de l'intégrale.

Ce vecteur $(\Gamma_{k,l}^{0;d_1,d_2})$ est représenté par la suite sous forme de matrice en fonction des facteurs de translation "k" et "l".

La matrice $(\Gamma_{k,l}^{0;1,1})$ concernant l'intégration du produit de deux fonctions d'échelle dérivées, aux degrés de dérivation identiques " $d_1 = d_2 = 1$ " de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 au niveau de résolution "j=0" est présentée en annexe D, tableau D.3.

I.3.11.4. Calcul des coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2}$ par rapport au niveau de résolution 'j' :

La partie précédente a permis de trouver les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées à un niveau de résolution j=0. Or dans le cas étudié, la recherche porte les valeurs des intégrales pour tous les niveaux de résolution. La méthode réalisée s'inspire fortement de la démonstration précédente et elle est démontrée dans les articles [104, 136]

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2} &= \int_0^1 \phi_{j,k}^{(d_1)}(y) \phi_{j,l}^{(d_2)}(y) dy \quad \text{avec } j : \text{niveau de résolution} \\
 &= \int_0^{2^j} 2^{2j} \phi_{0,k}^{(d_1)}(y) \phi_{0,l}^{(d_2)}(y) dy \frac{1}{2^j} 2^{j/2} 2^{j/2} \\
 &= 2^{2j} \int_0^{2^j} \phi^{(d_1)}(y-k) \phi^{(d_2)}(y-l) dy \\
 &= 2^{2j+d-1} \sum_{r,s} p_r p_s \int_0^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y-2k-r) \phi^{(d_2)}(y-2l-s) dy \quad d = d_1 + d_2 \\
 &= 2^{2j+d-1} \sum_{r,s} p_r p_s \Gamma_{2k+r, 2l+s}^{j+1;d_1,d_2}
 \end{aligned} \tag{I.108}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k,l}^{j+1;d_1,d_2} &= 2^{2(j+1)} \int_0^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y-k) \phi^{(d_2)}(y-l) dy \\
 &= 2^{2(j+1)} \int_0^{2^j} \phi^{(d_1)}(y-k) \phi^{(d_2)}(y-l) dy + 2^{2(j+1)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi^{(d_1)}(y-k) \phi^{(d_2)}(y-l) dy \\
 &= 2^2 \Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2} + 2^2 \Gamma_{k-2^j, l-2^j}^{j;d_1,d_2}
 \end{aligned} \tag{I.109}$$

I.3.12. Conclusion

Cette section I.3 avait pour objectif de présenter les différentes formulations existantes concernant les ondelettes de Daubechies. Ces différentes propriétés intrinsèques font de cette ondelette, un outil performant pour l'analyse de signaux discontinus et surtout pour une analyse multiresolution.

Cette partie I.3 permet ainsi d'avoir les définitions et les fondamentaux utilisés dans la suite du manuscrit de thèse.

I.4. Conclusion

Ce chapitre I permet de bien comprendre les techniques associées aux méthodes d'analyse numérique actuelles.

La méthode des éléments finis est un outil performant et en constante évolution depuis sa création en 1850. Cette méthode atteint parfois ses limites lors de la modélisation de structures complexes. Des phénomènes particuliers peuvent apparaître rendant ainsi la résolution des simulations inexactes. Ces phénomènes sont plus communément connus sous le nom de singularités.

Il est important de noter que les singularités naissent de la théorie de la mécanique des milieux continus et non d'erreurs de calculs, d'erreurs d'application de la théorie, encore de modèles physiques inadaptés. Ces phénomènes conduisent souvent à des écarts importants entre les résultats de la modélisation et la réponse réelle.

Mais des méthodes adaptatives, multi grilles locales, XFEM et WFEM ont vu le jour pour pallier ce problème de modélisation numérique. Les méthodes adaptatives, agissant soit sur la taille des éléments soit sur le degré de la fonction de discrétisation, ont permis d'améliorer les visualisations, mais en dépit du temps de calcul grandissant via l'augmentation

du nombre de degrés de liberté. Il est à noter que les méthodes p-adaptatives, concernant l'augmentation du degré des fonctions de forme, ne permettent pas d'améliorer les représentations des problèmes singuliers. Des couplages entre les méthodes adaptatives ont été créés afin d'en combiner les avantages. L'inconvénient majeur de ces méthodes adaptatives est le fait d'avoir à recalculer à chaque modification du maillage, l'ensemble des données aux degrés de liberté.

Les méthodes multi grilles locales permettent de pallier ce désavantage en recalculant uniquement dans les zones à fort gradient. L'idée réside sur l'utilisation d'une grille grossière globale, qui recouvre le domaine initial du calcul, et d'ajouter des grilles plus fines localement afin de résoudre le problème sur ces niveaux de grilles. Les problèmes sont ainsi résolus de manière récursive jusqu'à la convergence de la solution par rapport au maillage grossier. Les méthodes FMG (Full MultiGrid) montrent un réel potentiel, car la technique consiste à ajouter progressivement les maillages plus fins après convergence des cycles multi grilles précédents. Il est ainsi obtenu une accélération de la vitesse de convergence via cette méthodologie. Néanmoins, ces méthodes multi grilles présentent un inconvénient en raison de la résolution du problème sous forme de cycles. Les opérations de projection et la résolution aux différents niveaux de grilles augmentent le temps de calcul.

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) a été développée pour traiter les problèmes de convergence des éléments finis par rapport aux éventuelles singularités du domaine. Cette technique permet ainsi d'obtenir une représentation très précise de fissures, de perforations... Cependant la XFEM peut présenter quelques difficultés à intégrer des fonctions singulières en fond de fissures, où la précision d'intégration n'est pas optimale en raison de l'utilisation de l'intégrale avec Gauss-Legendre.

La méthode des éléments finis avec Ondelettes (WFEM) est une technique relativement récente et suscite l'intérêt des chercheurs du fait de la capacité des ondelettes de représenter naturellement des phénomènes discontinus. Plusieurs familles d'ondelettes sont ainsi introduites dans la méthode des éléments finis, où la fonction d'échelle de l'ondelette est utilisée comme fonction de forme. De nombreuses applications ont été analysées via cette méthodologie et montrent un réel potentiel de cette dernière. Les ondelettes de Daubechies sont couramment utilisées au sein de la méthode des éléments finis et la littérature montre la difficulté à intégrer à l'aide de cette famille d'ondelettes en raison qu'elle ne possède pas de forme explicite. Il faut en conséquence employer une méthode particulière via les coefficients de connexion. La seconde génération d'ondelette s'appuie sur la méthode du "lifting scheme" et consiste à enrichir localement la zone où un phénomène particulier se produit. De plus, cette méthode du "lifting scheme" peut être utilisée uniquement pour certaines familles d'ondelettes qui sont définies via un filtre. Il est ainsi obtenu une adaptation du support par rapport au problème.

L'introduction des ondelettes au sein de la méthode des éléments finis apporte ainsi un réel avantage pour la représentation des zones à fort gradient. Le chapitre II permet d'illustrer la méthodologie via l'utilisation de l'ondelette de Daubechies. Il sera possible de se référer aux définitions et aux fondamentaux concernant cette famille d'ondelettes dans la section I.3.

CHAPITRE II

Introduction d'une ondelette dans la méthode des éléments finis

Sommaire

II.1	Introduction	61
II.2	Formulation variationnelle WFEM	61
II.2.1	Préambule	61
II.2.1.1	Représentation d'une fonction via une fonction d'échelle sur un domaine \mathbb{R}	61
II.2.1.2	Mise en œuvre de la décomposition en ondelettes	64
II.2.1.3	Bornes inférieures et supérieures pour le facteur translation	66
II.2.1.4	Représentation d'une fonction définie via une fonction d'échelle sur un intervalle défini $[a : b]$	67
II.2.1.5	Analyse Multirésolution	68
II.2.1.6	Représentation d'une fonction dérivée via une fonction d'échelle dérivée sur un domaine	68
II.2.1.7	Représentation d'une fonction intégrée via une fonction d'échelle intégrée sur un domaine $[0 : 1]$	69
II.2.1.8	Validation de la méthode de décomposition en ondelettes	70
II.2.2	Application de conditions limites dans le cadre éléments finis	74
II.2.2.1	Projection des coefficients d'approximation	74
II.2.2.2	Exemple illustrant la méthodologie pour imposer une condition limite de Dirichlet	75
II.2.3	Formulation variationnelle WFEM : application en 1D	76
II.2.4	Définition des termes de la formulation variationnelle WFEM	77
II.2.4.1	Définition des termes du résidu	78
II.2.4.2	Définition des termes de l'opérateur tangent	81
II.3	Intégration du support de discrétisation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies	84
II.3.1	Intégration du résidu	84
II.3.1.1	Intégration des fonctions membres	84

II.3.1.2	Méthode d'intégration approchée par ondelettes	85
II.3.1.3	Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires	88
II.3.2	Intégration de la variation du résidu	94
II.4	Méthode de résolution de Newton	96
II.5	WFEM Résolution de problèmes	102
II.5.1	Présentation des géométries	102
II.5.2	Résultats analytiques.	103
II.5.3	Discrétisation de la structure.	104
II.5.4	Analyse des résultats avec la méthode WFEM.	104
II.5.5	Évolution du résidu concernant la méthode de résolution de Newton	106
II.6	Conclusion	107

II.1. Introduction

Dans le chapitre précédent [I](#), l'utilisation des ondelettes dans la méthode des éléments finis, plus connue sous le nom WFEM (Wavelet finite element method) a été décrite. Afin de détecter, analyser et visualiser des phénomènes particuliers, les travaux de J. Ko, J. Ma, L.A. Diaz, J. Jin, X. Chen, J. Chen, R.D. Patton [[92](#), [107](#), [44](#), [88](#), [35](#), [31](#), [128](#)] ont montré des résultats remarquables. Cette méthode a ainsi attiré notre attention et ce chapitre [II](#) a pour but d'illustrer la méthode WFEM. Deux approches d'intégration seront illustrées dans ce chapitre.

L'ondelette de Daubechies a été utilisée en raison :

1. de son domaine compact, ses propriétés d'orthogonalité, et ses moments nuls,
2. de son évolution fortement irrégulière, ce qui semble de bon augure pour représenter à terme des singularités et des localisations.

La partie [I.3](#) du chapitre précédent présente les éléments théoriques nécessaires, concernant cette famille d'ondelettes.

La première section [II.2](#) de ce chapitre se concentre sur la définition du support de discrétisation avec la fonction d'échelle de l'ondelette comme fonction d'interpolation, ainsi que l'insertion de ce support au sein des formulations variationnelles.

La seconde section [II.3](#) illustre les deux approches d'intégration, ainsi que les particularités et les simplifications réalisables avec cette famille d'ondelette.

La troisième section [II.4](#) expose les différentes étapes de la méthode de résolution de Newton, mises en place au sein d'un code éléments finis.

La quatrième section [II.5](#) permet enfin de valider la méthode WFEM à travers la résolution de deux problèmes 1D.

Afin de différencier l'interpolation polynomiale de l'interpolation en ondelettes, l'ondelette dans la partie [I.3](#) sera notée γ pour la fonction échelle (appelée également fonction d'approximation) et ψ pour la fonction ondelette (nommée aussi fonction de détails).

L'ensemble des développements numériques présentés dans ces travaux sont réalisés avec le logiciel Octave.

II.2. Formulation variationnelle WFEM

II.2.1. Préambule

Avant de s'intéresser à l'introduction des ondelettes au sein de la formulation variationnelle, il est important de comprendre les différents aspects de la décomposition en ondelettes. Les décompositions, les espaces de projection, les effets de bords et l'aspect multirésolution sont explicités dans cette section.

II.2.1.1. Représentation d'une fonction via une fonction d'échelle sur un domaine \mathbb{R}

La littérature [[92](#), [107](#), [79](#), [32](#)] montre que la fonction d'échelle γ d'une ondelette a la capacité de représenter une fonction "f" dans l'espace V_j (espace d'approximation) par la

formule suivante :

$$f\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,k}\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) c^{j,k} \quad (\text{II.1})$$

Les coefficients $c^{j,k}$ sont des facteurs d'approximation de la fonction f au niveau de décomposition " j ". Le terme " k " correspond à l'indice de translation.

Afin de décomposer la fonction f sur une échelle dyadique. Pour cela, le terme $\theta^{i\textcircled{j}}$ va s'écrire :

$$\theta^{i\textcircled{j}} = \frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q} \quad q \geq j \quad \text{avec } t^{i\textcircled{j}} = \dots, 0, 1, \dots, 2^q, \dots \quad (\text{II.2})$$

L'échelle dyadique joue un rôle capital au sein de la décomposition, car elle permet d'avoir une correspondance entre les valeurs définissant la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N et les valeurs utilisées pour la décomposition. En outre, l'emploi de cette échelle donne lieu à un découpage régulier de la fonction étudiée.

La relation II.1 peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$f\left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q}\right) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,k}\left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q}\right) c^{j,k} \quad (\text{II.3})$$

Par la définition des Ondelettes de Daubechies dans le chapitre I.3, la base $\gamma_{j,k}$ s'écrit à partir des valeurs de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies déterminées au niveau de résolution " j " :

$$\gamma_{j,k}\left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q}\right) = 2^{j/2} \gamma\left(2^j \left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q}\right) - k\right) \quad (\text{II.4})$$

Ces valeurs " $\gamma()$ " sont calculées via une formulation de récurrence II.5, dont les premières valeurs connues correspondent aux coefficients initiaux définissant la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies.

$$\gamma(x) = \sum_{l=0}^{N-1} p_l \gamma(2x - l) \quad \text{et } \text{supp}(\gamma) = [0 : N - 1] \quad (\text{II.5})$$

Le domaine compact de l'ondelette de Daubechies $[0 : N - 1]$, avec N l'ordre de l'ondelette permet d'étudier de façon très précise une fonction définie sur un intervalle. Cette équation récurrente met en avant un avantage et un inconvénient direct. L'avantage de ce type de formulation est bien sûr sa simplicité en terme de définition. Les valeurs initiales de définition de la fonction d'échelle suffisent pour déterminer les suivantes. Mais l'inconvénient est, par conséquent, cette dépendance de niveau en niveau.

Si, par exemple, le niveau $j = 3$ et $q = 5$ sont fixés au sein de l'équation II.4, il est nécessaire de calculer les valeurs intermédiaires au niveau 1 (de 0.5 en 0.5), et au niveau 2 (de 0.25 en 0.25). Ces calculs obligatoires peuvent être très contraignants au sein d'un algorithme de résolution par éléments finis. Deux solutions peuvent être envisageables :

1. **Calculer l'ensemble des valeurs intermédiaires nécessaires, pour $q > j$, avant la procédure de résolution.**

Avantages :

- Augmentation du nombre des valeurs intermédiaires définissant la fonction d'échelle de l'ondelette

- Amélioration de la précision des coefficients d'approximation

Inconvénients :

- Stockage des valeurs intermédiaires, qui peuvent être nombreuses si q est important
- Création d'une méthodologie particulière à chaque récupération d'une valeur intermédiaire ciblée : type trie par exemple
- Stockage des données représentant toutes les ondelettes de Daubechies
- Temps de calcul nécessaire pour l'initialisation

2. Utiliser une échelle dyadique dépendante du niveau de résolution 'j', avec q équivalent à j

Avantages :

- Simplification des écritures, les valeurs initiales définissant la fonction d'échelle de l'ondelette suffisent pour la résolution
- Conservation de la précision des valeurs initiales

Inconvénients :

- Si l'ordre de l'ondelette est petit, la précision des coefficients d'approximation d'une décomposition sera impactée

Les deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients à considérer. Dans le premier cas, la méthode fait appel à de nombreuses ressources concernant le stockage des données et dans le deuxième cas, la précision des coefficients est dépendante de l'ordre de l'ondelette.

La solution 2 s'avère ainsi la technique la plus adaptée pour cette étude utilisant la méthode des éléments finis via les ondelettes. Le choix de l'ordre de l'ondelette de Daubechies sera de préférence supérieur à 4, afin d'augmenter la précision des coefficients d'approximation.

Par exemple, pour un niveau de décomposition j , $q = j$ et $t^{\textcircled{1}} = 1$. L'utilisation de la relation II.4 permet de réécrire l'expression II.3 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{2^j}\right) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,k} \left(\frac{1}{2^j}\right) c^{j,k} \\
 f\left(\frac{1}{2^j}\right) &:= 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(1-k) c^{j,k}
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

L'échantillonnage d'une fonction f à un niveau de décomposition $j=3$, définie sur le domaine \mathbb{R} va pouvoir s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ f(0) \\ f\left(\frac{1}{8}\right) \\ \vdots \\ f\left(\frac{4}{8}\right) \\ \vdots \\ f\left(\frac{7}{8}\right) \\ f(1) \\ \vdots \end{pmatrix} := 2^{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \gamma(0) & \gamma(-1) & \gamma(-2) & \dots & \gamma(-7) & \gamma(-8) & \dots \\ \dots & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \dots & \gamma(-6) & \gamma(-7) & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \gamma(4) & \gamma(3) & \gamma(2) & \dots & \gamma(-3) & \gamma(-2) & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \gamma(7) & \gamma(6) & \gamma(5) & \dots & \gamma(0) & \gamma(-1) & \dots \\ \dots & \gamma(8) & \gamma(7) & \gamma(6) & \dots & \gamma(1) & \gamma(0) & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ c^{3,0} \\ c^{3,1} \\ \vdots \\ c^{3,4} \\ \vdots \\ c^{3,7} \\ c^{3,8} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{II.7}$$

D'une manière pratique, seules les valeurs de la fonction, appliquée à l'intervalle $[0,1]$ sont intéressantes. En dehors de cet intervalle, la fonction est réputée nulle, elle est, par conséquent, connue.

Pour simplifier l'écriture, la relation précédente peut ainsi être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$(f) := 2^{\frac{3}{2}} [FImatr](c) \quad (\text{II.8})$$

Avec (f) l'ensemble des valeurs de f , restreint à l'intervalle $[0,1]$. De la même manière, la matrice $[FImatr]$ et le vecteur (c) sont également restreints aux valeurs utiles (cf. explications dans le paragraphe suivant).

Remarque : Il est important de noter que la matrice $[FImatr]$ est indépendante des valeurs de (f) ou (c) , par contre celle-ci dépend du niveau j .

En supposant que les valeurs de f soient connues aux différents points, une expression inverse peut alors être écrite. Pour formellement déterminer les coefficients d'approximation $c^{j,k}$ de la fonction étudiée, il est nécessaire de résoudre le système linéaire. La relation précédente peut s'exprimer ainsi :

$$(c) = 2^{-\frac{3}{2}} [FImatr]^{-1}(f) \quad (\text{II.9})$$

Il est important de remarquer que la matrice a la dimension $2^j + 1$, tous les autres termes étant nuls. La méthode de calcul de cette matrice est présentée dans la partie suivante [II.2.1.2](#)

Remarques : En fait, la matrice est singulière et donc non-inversible. Une condition supplémentaire, présentée dans la partie suivante, est, en effet, introduite pour permettre cette inversion.

II.2.1.2. Mise en œuvre de la décomposition en ondelettes

La méthodologie porte sur l'étude d'une fonction "f" définie uniquement sur l'intervalle $[0 : 1]$. En dehors de cet intervalle, la fonction est considérée nulle, ce qui correspond à la méthode du zéro padding [I.2.5.4](#). Pour cette démonstration, l'ensemble de l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ est, tout d'abord, considéré pour expliciter les propriétés de la méthode de décomposition en ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies.

La relation [II.10](#) s'applique pour une fonction définie sur un domaine \mathbb{R} .

$$f\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(2^j \theta^{i\textcircled{j}} - k) c^{j,k} \quad (\text{II.10})$$

Une échelle dyadique est utilisée pour cette décomposition dont l'échelle dyadique "q" est équivalente au niveau de résolution "j=3".

$$\theta^{i\textcircled{j}} = \frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^j} \quad q = j \quad \text{avec } t^{i\textcircled{j}} = \dots, 0, 1, \dots, 2^j, \dots \quad (\text{II.11})$$

En notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} f\left(-\frac{2}{8}\right) = 0 \\ \vdots \\ f(0) \\ \vdots \\ f\left(\frac{4}{8}\right) \\ \vdots \\ f(1) \\ \vdots \\ f\left(\frac{10}{8}\right) = 0 \end{pmatrix} = 2^{3/2} \begin{pmatrix} \gamma(0) & \cdots & \gamma(-2) & \cdots & \gamma(-6) & \cdots & \gamma(-10) & \cdots & \gamma(-12) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(2) & \cdots & \gamma(0) & \cdots & \gamma(-4) & \cdots & \gamma(-8) & \cdots & \gamma(-10) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(6) & \cdots & \gamma(4) & \cdots & \gamma(0) & \cdots & \gamma(-4) & \cdots & \gamma(-6) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(10) & \cdots & \gamma(8) & \cdots & \gamma(4) & \cdots & \gamma(0) & \cdots & \gamma(-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(12) & \cdots & \gamma(10) & \cdots & \gamma(6) & \cdots & \gamma(2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{3,-2} \\ \vdots \\ c^{3,0} \\ \vdots \\ c^{3,1} \\ \vdots \\ c^{3,8} \\ \vdots \\ c^{3,10} \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

La matrice se composant des termes de la fonction d'échelle $\gamma(x)$ est une matrice triangulaire inférieure. La fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies a , en effet, pour support $[0 : N - 1]$. Ainsi, en dehors de cet intervalle, la fonction d'échelle vaut 0. L'échelle dyadique apporte, ainsi, un découpage régulier de la fonction f étudiée.

$$\gamma(\text{Valeur}) \begin{cases} \neq 0 & \text{si} & 0 \leq \text{Valeur} \leq N - 1 \\ = 0 & \text{si} & \text{Valeur} < 0 \text{ ou } \text{Valeur} > N - 1 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

L'inversion d'une matrice triangulaire inférieure donne une matrice de même nature. Les valeurs de la fonction, dont l'indice $\theta^{i \textcircled{j}}$ est négatif , donnent par résolution des coefficients d'approximation $c^{j,k}$ équivalant à 0, pour les indices $\mathbf{k} < \mathbf{0}$.

La matrice entourée en pointillé rouge correspond, quant à elle, à la matrice $[FImatr]$. Cette matrice par sa construction est singulière. De manière à obtenir une solution particulière, il est nécessaire de considérer des conditions supplémentaires prenant en compte les effets de bords. La solution a été d'appliquer une méthodologie qui permettrait de traiter ces effets de bords. Différentes méthodes existent et ont été présentées dans la partie I.2.5.4 du chapitre I.

Dans notre cas, la méthode consiste à utiliser la technique du zéro padding pour la conception de la matrice $[FImatr]$. La première valeur de la fonction " $f(0)$ " est directement impactée par cette méthode. En effet, les coefficients dont l'indice " \mathbf{k} " est strictement inférieur à 0 seront nuls et par conséquent l'équation au premier nœud s'exprime :

$$f(0) = 2^{3j/2} \gamma(0) c^{3,0} \quad (\text{II.14})$$

Or la valeur de la fonction d'échelle à son premier point de définition $\gamma(0)$ est égale à 0, cf le tableau I.1. Par conséquent, cette première équation du système n'a aucune incidence sur la résolution du système. Dans ce cas, la valeur de la fonction approchée par une décomposition en ondelettes pour $\theta^{i \textcircled{j}} = 0$ sera toujours nulle alors qu'en réalité, elle peut être différente. Un effet de bord au premier nœud est par conséquent obtenu. Il est important de remarquer également que la dernière colonne de la matrice $[FImatr]$ fait intervenir les valeurs de la fonction d'échelle de "-8" à "0", ce qui conduit à une colonne de 0. Le coefficient $c^{3,8}$ est donc équivalent à 0, du fait de cette colonne.

Il en résulte un système de 7 équations et de 7 inconnues " $c^{3,0}$ à $c^{3,7}$ " pour cette décomposition.

$$\begin{pmatrix} c^{3,0} \\ c^{3,1} \\ \vdots \\ c^{3,4} \\ \vdots \\ c^{3,7} \end{pmatrix} := 2^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(4) & \gamma(3) & \gamma(2) & \cdots & \gamma(-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(7) & \gamma(6) & \gamma(5) & \cdots & \gamma(0) \\ \gamma(8) & \gamma(7) & \gamma(6) & \cdots & \gamma(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(\frac{1}{8}) \\ \vdots \\ f(\frac{4}{8}) \\ \vdots \\ f(\frac{7}{8}) \\ f(1) \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Une matrice $[FImatr^*]$ permettant de déterminer les coefficients d'approximation est ainsi définie :

$$(c) = 2^{-\frac{3}{2}} [FImatr^*]^{-1}(f) \quad (\text{II.16})$$

II.2.1.3. Bornes inférieures et supérieures pour le facteur translation

Pour déterminer les bornes inférieures et supérieures du facteur de translation \mathbf{k} , la méthode s'appuie sur la définition de la fonction d'échelle mère de Daubechies.

Lors de l'utilisation de l'analyse multirésolution, la méthode consiste à dilater/contracter la fonction d'échelle mère et de traduire cette dernière pour balayer le domaine de définition de la fonction étudiée.

L'équation employée correspond à la fonction définissant la base orthonormale V_j II.4, dont la formulation est, pour rappel, définie ci-dessous :

$$\gamma_{j,k}(x) = 2^{j/2} \gamma(2^j x - k) \quad \text{supp}(\gamma) = [0 : N - 1] \quad (\text{II.17})$$

A l'aide de cette relation, les bornes du facteur de translation \mathbf{k} peuvent être fixées pour les relations de décomposition en ondelettes.

Plusieurs cas de figure peuvent être employés :

1. Cas 1 : Formule générale, \mathbb{R}

$$f(\theta^{i \textcircled{j}}) := 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(2^j \theta^{i \textcircled{j}} - k) c^{j,k} \quad (\text{II.18})$$

$$0 \leq 2^j \theta^{i \textcircled{j}} - k \leq N - 1$$

$$-2^j \theta^{i \textcircled{j}} \leq -k \leq -2^j \theta^{i \textcircled{j}} + (N - 1) \quad (\text{II.19})$$

$$2^j \theta^{i \textcircled{j}} - (N - 1) \leq k \leq 2^j \theta^{i \textcircled{j}}$$

$$f(\theta^{i \textcircled{j}}) := 2^{j/2} \sum_{k=2^j \theta^{i \textcircled{j}} - (N-1)}^{2^j \theta^{i \textcircled{j}}} \gamma(2^j \theta^{i \textcircled{j}} - k) c^{j,k} \quad (\text{II.20})$$

Ce premier cas montre que le facteur de translation dépend essentiellement du terme $(\theta^{i \textcircled{j}})$. L'ensemble des valeurs définissant la fonction d'échelle sont utilisées par

l'équation. L'écriture II.20 est qualifiée de formule générale pour une échelle non-dyadique.

2. Cas 2 : Formule par rapport à l'échelle dyadique "q", limité sur un intervalle [0 : 1]

$$f\left(\frac{t^{i(j)}}{2^q}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma\left(2^j \frac{t^{i(j)}}{2^q} - k\right) c^{j,k} \quad \text{avec } q \geq j \quad (\text{II.21})$$

$$\text{avec } t^{i(j)} = 0, 1, \dots, 2^q$$

$$0 \leq 2^j \frac{t^{i(j)}}{2^q} - k \leq (N-1)$$

$$0 \leq 2^j t^{i(j)} - 2^q k \leq 2^q (N-1) \quad (\text{II.22})$$

$$-2^j t^{i(j)} \leq -2^q k \leq -2^j t^{i(j)} + 2^q (N-1)$$

$$2^{j-q} t^{i(j)} - (N-1) \leq k \leq 2^{j-q} t^{i(j)}$$

$$f\left(\frac{t^{i(j)}}{2^q}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=2^{j-q} t^{i(j)} - (N-1)}^{2^{j-q} t^{i(j)}} \gamma\left(2^j \frac{t^{i(j)}}{2^q} - k\right) c^{j,k} \quad (\text{II.23})$$

Simplification de l'écriture II.23 en impliquant les limites de $t^{i(j)}$.

$$\text{Si } t^{i(j)} = 0 \text{ alors}$$

$$-(N-1) \leq k \leq 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\text{Si } t^{i(j)} = 2^q \text{ alors}$$

$$2^j - (N-1) \leq k \leq 2^j$$

Dans le cas où $q = j$, et selon les deux inéquations II.24, le facteur de translation k va varier entre le minimum de la première inéquation et la maximum de la seconde, soit $[-(N-1) : 2^j]$. Or selon le domaine de la fonction $[0 : 1]$, la relation de décomposition en ondelettes II.21 et la démonstration II.2.1.2 de la méthode de décomposition, la taille du vecteur "f" est équivalente à la taille du vecteur " $c^{j,k}$ " et les équations utilisant les termes communs " $c^{j,k}$ " sont pour k variant entre $[0 : 2^j]$, en dehors de cet intervalle la fonction f étant supposée nulle. La relation II.21 peut ainsi s'écrire sous la forme II.25.

$$f\left(\frac{t^{i(j)}}{2^j}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j} \gamma\left(2^j \frac{t^{i(j)}}{2^j} - k\right) c^{j,k} \quad (\text{II.25})$$

II.2.1.4. Représentation d'une fonction définie via une fonction d'échelle sur un intervalle défini [a : b]

Une fonction "f" définie sur un intervalle $[a : b]$ peut-être représentée par une décomposition en ondelettes à l'aide d'une fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre

N , dans l'espace V_j . La relation générale II.26 rappelle cette décomposition.

$$f\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) := \sum_{k=2^j a - (N-1)}^{2^j b} \gamma_{j,k}\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) c^{j,k} \text{ pour } \theta^{i\textcircled{j}} \in [a : b] \quad (\text{II.26})$$

avec N : l'ordre de l'ondelette de Daubechies

Dans le cas d'une décomposition sur une échelle dyadique sur l'intervalle $[a : b]$, la relation II.26 s'écrit :

$$f\left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=2^{j-q} t^{i\textcircled{j}} - (N-1)}^{2^{j-q} t^{i\textcircled{j}} - 1} \gamma\left(2^j \frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^q} - k\right) c^{j,k} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{avec } t^{i\textcircled{j}} = 2^q a, 2^q a + (b - a), \dots, 2^q a + (2^q)(b - a)$$

L'équation II.27 peut être simplifiée dans le cas où $q=j$. En appliquant les limites de $t^{i\textcircled{j}}$ et en se référant à la méthodologie de la partie 2 du chapitre II.2.1.3, la relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f\left(\frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^j}\right) := 2^{j/2} \sum_{k=2^j a}^{2^j b} \gamma\left(2^j \frac{t^{i\textcircled{j}}}{2^j} - k\right) c^{j,k} \quad (\text{II.28})$$

II.2.1.5. Analyse Multirésolution

Pour l'analyse multirésolution, la formulation fait référence aux différentes bases de projection : la base d'approximation V_j (avec $j=0$) et les bases de détails W_j . Il est possible de retrouver davantage de détails dans la partie I.2.5.3. La décomposition en ondelettes d'une fonction sur ces bases de projection s'écrit :

$$f\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) := \sum_k \gamma_{0,k}\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) c^{0,k} + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_k \psi_{i,k}\left(\theta^{i\textcircled{j}}\right) d^{i,k} \quad (\text{II.29})$$

avec $\gamma_{0,k}$ qui correspond à la fonction d'échelle au niveau de résolution $j=0$ et $\psi_{i,k}$ qui fait référence à la fonction ondelette déterminée à chaque niveau de résolution de 0 à "j". Les coefficients d'approximation " $c^{0,k}$ " et les coefficients de détails " $d^{i,k}$ " sont utilisés dans cette relation. Il est à noter que les coefficients " $d^{i,k}$ " sont répartis sur plusieurs bases de détails W_j .

II.2.1.6. Représentation d'une fonction dérivée via une fonction d'échelle dérivée sur un domaine

L'équation II.30 permet de définir la dérivée d'une fonction "f" via la décomposition en ondelettes exprimée par l'intermédiaire de la fonction d'échelle dérivée $\gamma^{(1)}$ I.3.4 de l'ondelette de Daubechies d'ordre N . Cette décomposition est exprimée sur le domaine de définition de "f", \mathbb{R} . Les coefficients d'approximations $c^{j,k}$ sont déterminés au préalable par la décomposition en ondelettes exprimée à partir de la fonction d'échelle γ I.3.3 dont la méthodologie est présentée dans la partie II.2.1.1.

$$\begin{aligned}
 f' \left(\theta^{i \textcircled{j}} \right) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^j \gamma_{j,k}^{(1)} \left(\theta^{i \textcircled{j}} \right) c^{j,k} \\
 &:= 2^j 2^{j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma^{(1)} \left(2^j \theta^{i \textcircled{j}} - k \right) c^{j,k}
 \end{aligned} \tag{II.30}$$

Dans le cas d'une décomposition sur une échelle dyadique, référée par l'indice "q", la relation II.30 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 f' \left(\frac{t^{i \textcircled{j}}}{2^q} \right) &:= 2^j 2^{j/2} \sum_{k=2^j - q t^{i \textcircled{j}} - (N-1)}^{2^j - q t^{i \textcircled{j}}} \gamma^{(1)} \left(2^j \frac{t^{i \textcircled{j}}}{2^q} - k \right) c^{j,k} \\
 \text{avec } t^{i \textcircled{j}} &= \dots, 0, 1, \dots, 2^q, \dots \quad q \geq j
 \end{aligned} \tag{II.31}$$

Dans le cas d'une décomposition sur un intervalle $[0 : 1]$, et une échelle dyadique "q" équivalente au niveau de résolution "j", les bornes du facteur de translation "k" de la formule II.25 peuvent être appliquées.

En prenant pour l'exemple un échantillonnage d'une fonction f dérivée à un niveau de décomposition $j=3$, une échelle dyadique $q=j=3$, définie sur le domaine $[0 : 1]$, la relation II.31 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} f'(0) \\ f'(\frac{1}{8}) \\ \vdots \\ f'(\frac{4}{8}) \\ \vdots \\ f'(\frac{7}{8}) \\ f'(1) \end{pmatrix} := 2^{\frac{9}{2}} \begin{bmatrix} \gamma^{(1)}(0) & \gamma^{(1)}(-1) & \gamma^{(1)}(-2) & \dots & \gamma^{(1)}(-7) & \gamma^{(1)}(-8) \\ \gamma^{(1)}(1) & \gamma^{(1)}(0) & \gamma^{(1)}(-1) & \dots & \gamma^{(1)}(-6) & \gamma^{(1)}(-7) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma^{(1)}(4) & \gamma^{(1)}(3) & \gamma^{(1)}(2) & \dots & \gamma^{(1)}(-3) & \gamma^{(1)}(-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma^{(1)}(7) & \gamma^{(1)}(6) & \gamma^{(1)}(5) & \dots & \gamma^{(1)}(0) & \gamma^{(1)}(-1) \\ \gamma^{(1)}(8) & \gamma^{(1)}(7) & \gamma^{(1)}(6) & \dots & \gamma^{(1)}(1) & \gamma^{(1)}(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c^{3,0} \\ c^{3,1} \\ \vdots \\ c^{3,4} \\ \vdots \\ c^{3,7} \\ c^{3,8} = 0 \end{pmatrix} \tag{II.32}$$

Pour simplifier l'écriture, la relation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(f') := 2^{\frac{9}{2}} [FImatrderiv](c) \tag{II.33}$$

Remarque : Comme pour le calcul des valeurs de la fonction (f) via la matrice [FImatr], il faut noter que la matrice [FImatrderiv] est indépendante des valeurs de (f') et (c).

II.2.1.7. Représentation d'une fonction intégrée via une fonction d'échelle intégrée sur un domaine $[0 : 1]$

L'équation II.34 définit l'intégration d'une fonction "f" via la décomposition en ondelettes, dont cette dernière est exprimée à partir de la fonction d'échelle intégrée " θ_k^j " I.3.10 de l'ondelette de Daubechies d'ordre N. Les coefficients d'approximations $c^{j,k}$ sont déterminés au préalable par la décomposition en ondelettes exprimée par l'intermédiaire de la fonction d'échelle γ I.3.3 dont la méthodologie est présentée dans la partie II.2.1.1.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(\theta) d\theta &:= \int_0^1 \sum_{k=0}^{2^j} \gamma_{j,k}(\theta) c^{j,k} d\theta \\
 &:= \sum_{k=0}^{2^j} \theta_k^j c^{j,k}
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

Le terme θ_k^j correspond à l'intégrale de la fonction d'échelle explicitée dans le chapitre I.3.10.

II.2.1.8. Validation de la méthode de décomposition en ondelettes

Pour cette étude de validation, l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 est utilisée pour décomposer les fonctions suivantes :

1. fonction linéaire

$$f_1(x) = x$$

2. fonction cosinus

$$f_2(x) = \cos(2\pi x)$$

3. fonction carré

$$f_3(x) = x^2$$

4. fonction en dents de scie

$$f_4(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2(x - 0.5), & 0.5 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \cup x < 0 \end{cases}$$

dont leurs évolutions sont représentées sur le graphique II.1 avec un niveau d'échantillonnage $j=6$, soit 65 points de discrétisation.

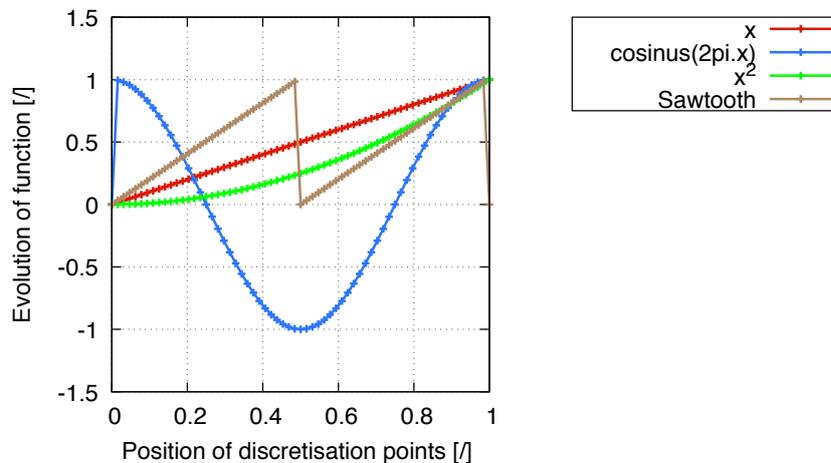


FIGURE II.1 – Évolution des fonctions au niveau de résolution "j=6"

Validation de la méthode de décomposition en ondelettes par la représentation de dérivée de fonctions

L'idée est de valider la méthode de décomposition à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, en vérifiant l'évolution des fonctions dérivées par rapport à l'allure des courbes représentant les dérivées analytiques. Plusieurs niveaux de résolution "j" sont utilisés pour visualiser la précision obtenue ($j=2, 4$ et 6 , soit $5, 17$ et 65 points de discrétisation respectivement).

Le graphique II.2 représente l'évolution de la dérivée de la fonction linéaire "x" aux niveaux de résolution cités. Le graphique II.3 illustre l'évolution de la dérivée de la fonction cosinus " $\cos(2\pi x)$ ". La figure II.4 permet de visualiser l'allure des dérivées de la fonction

carré " x^2 ". Enfin, les deux derniers graphiques permettent de montrer la dérivée de la fonction en dents de scie II.5, II.6.

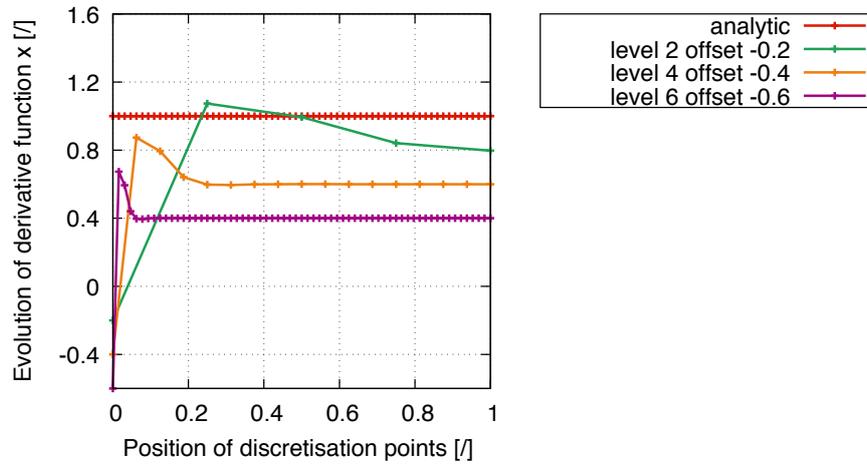


FIGURE II.2 – Évolution de la fonction dérivée $(x)'$ via l'interpolation fonction d'échelle

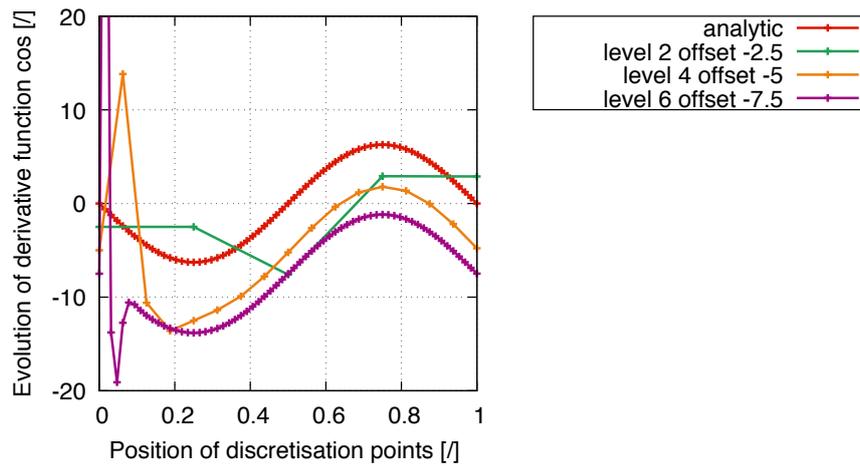


FIGURE II.3 – Évolution de la fonction dérivée $(\cos(2\pi x))'$ via l'interpolation fonction d'échelle

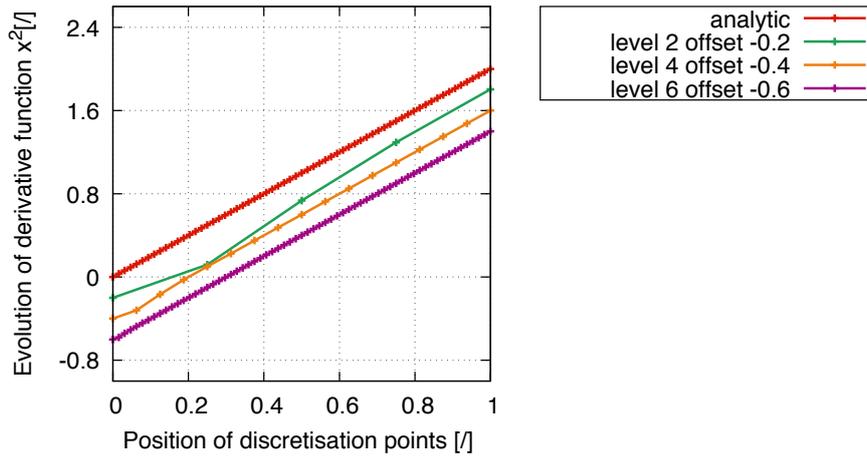


FIGURE II.4 – Évolution de la fonction dérivée $(x^2)'$ via l'interpolation fonction d'échelle

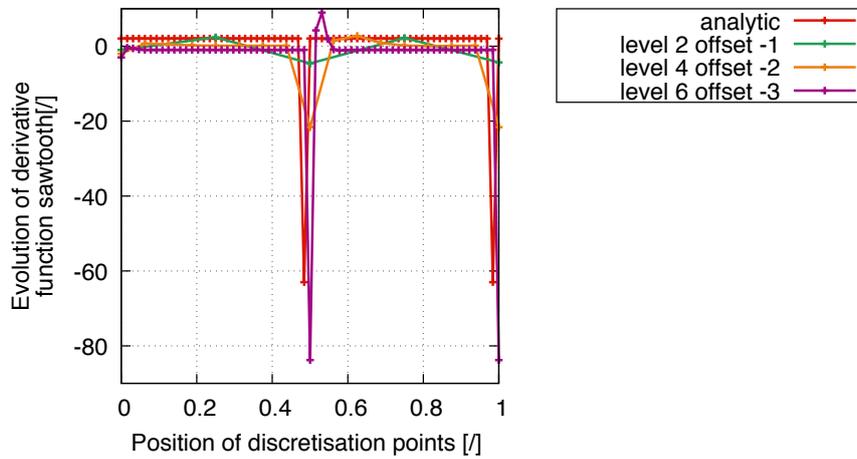


FIGURE II.5 – Évolution de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation fonction d'échelle

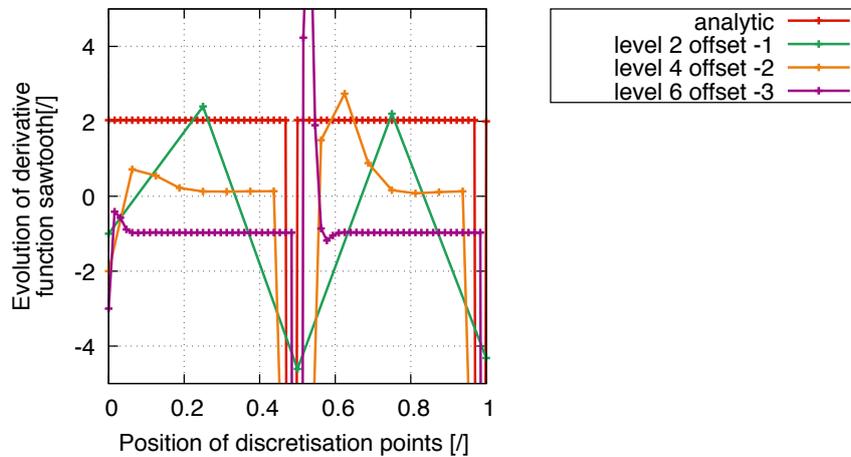


FIGURE II.6 – Évolution zoomé de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation fonction d'échelle

Les figures II.2, II.3 et II.6 montrent un effet de bord au premier nœud de discrétisation. Cet effet provient de la conception particulière de la matrice de décomposition "[FImatr]" via la technique du zéro padding.

Les figures II.5 et II.6 illustrent la dérivée d'un signal en dents de scie qui est sensiblement identique à la dérivée analytique. La différence de valeur, présente au milieu de la fonction en dents de scie II.1, est représentée par une oscillation courte concernant la dérivée.

Cet exemple permet de mettre en lumière le réel avantage de la théorie de la décomposition en ondelettes, pour l'étude d'un signal discontinu.

Validation de la méthode de décomposition en ondelettes par l'intégration de fonctions

Le tableau II.1 présente les valeurs des intégrations obtenues à l'aide de l'intégration fonction d'échelle pour les 4 fonctions étudiées. Ces valeurs d'intégrales sont comparées par rapport aux valeurs théoriques ainsi qu'aux valeurs calculées par la méthode d'intégration numérique de Clenshaw-Curtis. Trois niveaux de résolution ($j=2, 4$ et 6) sont également utilisés pour cette étude. L'erreur relative des valeurs des intégrales est déterminée pour chaque valeur d'intégration calculée à l'aide de l'intégration de la fonction d'échelle (FE).

$$Erreur_{relative} = \frac{|FE_Niveau - Valeur_{théorique}|}{|Valeur_{théorique}|} \quad (II.35)$$

Intégration méthode	$\int_0^1 f_1(x) dx$	$\int_0^1 f_2(x) dx$	$\int_0^1 f_3(x) dx$	$\int_0^1 f_4(x) dx$
Valeur théorique	5.000000e-01 (1/2)	0	3.333333e-01 (1/3)	5.000000e-01 (1/2)
Clenshaw-Curtis	5.000000e-01	0	3.333333e-01	5.000000e-01
FE_Niveau j=2	4.947162e-01 (1.1 %)	-1.405663e-01 (/ %)	3.364727e-01 (0.9 %)	3.339141e-01 (33.2 %)
FE_Niveau j=4	4.996745e-01 (0 %)	-3.215388e-02 (/ %)	3.333819e-01 (0 %)	4.681716e-01 (6.4 %)
FE_Niveau j=6	4.999797e-01 (0 %)	-7.827442e-03 (/ %)	3.333341e-01 (0 %)	4.925457e-01 (1.5 %)

TABLE II.1 – Intégration de fonctions à l'aide de l'intégration fonction d'échelle

D'après le tableau II.1, les intégrales calculées à l'aide de l'intégration de la fonction d'échelle sont de plus en plus précises par rapport aux valeurs théoriques. L'erreur relative déterminée pour chaque valeur d'intégrale reflète la précision atteinte au niveau de résolution.

Malgré la discontinuité de la fonction en dents de scie II.1, l'intégrale au niveau "j=6 (65 points de discrétisation)" est sensiblement identique à la valeur théorique.

Cette première section permet ainsi de comprendre les différents aspects de la décomposition en ondelettes, et plus particulièrement la dérivation, l'intégration, l'analyse

multirésolution et le découpage régulier via l'échelle dyadique. Les premiers résultats obtenus dans le cadre de la validation de la méthode de décomposition montrent la capacité de la technique des ondelettes à analyser des fonctions discontinues. Ces travaux exposent ainsi les avantages potentiels d'insérer des ondelettes dans la méthode des éléments finis. Avant de s'intéresser à l'introduction des ondelettes au sein de la formulation variationnelle, il était important de vérifier la possibilité d'appliquer des conditions limites à une décomposition en ondelettes. La démarche est présentée dans la partie suivante [II.2.2](#).

II.2.2. Application de conditions limites dans le cadre éléments finis

La méthode des éléments finis utilise le principe des conditions limites de Dirichlet. Ces dernières s'imposent aux nœuds où des liaisons mécaniques telles qu'un encastrement ou un appui simple par exemple sont représentées ; l'objectif étant d'avoir une correspondance la plus fidèle possible avec l'environnement extérieur. Ces liaisons mécaniques se traduisent par des conditions de blocage (déplacement, rotation) imposées.

La fonction de discrétisation est définie à partir d'une fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. Le fait d'utiliser une décomposition en ondelettes pour exprimer la cinématique nécessite, par construction, une technique de blocage non nodale pour imposer les conditions limites. Ceci peut représenter un inconvénient par rapport à l'interpolation nodale classique. Ce même type de problème se retrouve également pour les méthodes meshless avec une interpolation non nodale. Pour pallier cette difficulté, une technique particulière permettant de retrouver la flexibilité de l'interpolation nodale classique est proposée.

L'imposition des conditions s'effectue en deux étapes. La première étape consiste à projeter les coefficients d'approximation $(c^{j,k})$ appartenant à la base V_j vers le repère de l'élément. L'intérêt de cette projection est le fait que les coefficients d'approximation interviennent au sein de nombreuses équations de la décomposition. La projection facilite alors le processus pour imposer des conditions sur ces dernières. L'avantage de cette projection réside en particulier sur le fait que des conditions limites cinématiques soient directement appliquées sur les nœuds concernés, ce qui constitue le but recherché.

II.2.2.1. Projection des coefficients d'approximation

La projection des coefficients d'approximation de la base d'approximation V_j au repère de l'élément s'effectue à l'aide de la formule [II.8](#). Elle permet d'exprimer les coefficients d'approximation " $c^{j,k}$ " en fonction du vecteur des déplacements nodaux " f ". Les formules [II.36](#) expriment la projection :

$$(c) := 2^{-j/2} [FImatr^{*(j)}]^{-1} (f) \quad (\text{II.36})$$

Les coefficients d'approximation n'intervenant pas au sein de l'intégration, il est possible de mettre en facteur le vecteur " f ". Néanmoins, il a été observé dans la partie [II.2.1.2](#), que la valeur de la fonction au premier nœud n'intervenait pas dans le calcul des coefficients d'approximation. Afin d'imposer une condition limite sur ce premier nœud, il est, par conséquent, nécessaire d'introduire une équation supplémentaire qui n'aura aucune influence sur la détermination des coefficients.

L'idée est d'utiliser le dernier coefficient d'approximation " $c^{j,2^j} = 0$ " pour établir l'équa-

tion. La relation suivante peut ainsi s'écrire :

$$f(0) = f^{j,0} = 1 c^{j,2^j} \quad (\text{II.37})$$

Dans le cas d'une mise en œuvre de cette relation additionnelle dans le cas d'une décomposition en ondelettes d'une fonction f par rapport à un niveau de relation "j=3", avec 9 points de discrétisation, la notation matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{1}{8}) \\ \vdots \\ f(\frac{4}{8}) \\ \vdots \\ f(\frac{7}{8}) \\ f(1) \end{pmatrix} := 2^{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-6) & \gamma(-7) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(4) & \gamma(3) & \gamma(2) & \cdots & \gamma(-3) & \gamma(-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(7) & \gamma(6) & \gamma(5) & \cdots & \gamma(0) & \gamma(-1) \\ \gamma(8) & \gamma(7) & \gamma(6) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c^{3,0} \\ c^{3,1} \\ \vdots \\ c^{3,4} \\ \vdots \\ c^{3,7} \\ c^{3,8} \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Les coefficients d'approximation peuvent être déterminés via l'expression inverse.

II.2.2.2. Exemple illustrant la méthodologie pour imposer une condition limite de Dirichlet

Dans le cas où le déplacement au premier nœud est fixé, le produit matriciel illustré dans la partie II.2.2.1 s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} c^{j,0} \\ c^{j,1} \\ \vdots \\ c^{j,k} \\ \vdots \\ c^{j,2^j} = 0 \end{pmatrix} := 2^{-j/2} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \langle FImatr^{\textcircled{j}}(\frac{1}{2^j}) \rangle & & \\ & \vdots & & \\ & \langle FImatr^{\textcircled{j}}(\theta^i \textcircled{j}) \rangle & & \\ & \vdots & & \\ & \langle FImatr^{\textcircled{j}}(1) \rangle & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f^{j,0} = 0 \\ f^{j,1} \\ \vdots \\ f^{j,k} \\ \vdots \\ f^{j,2^j} \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

L'application de cette condition de blocage entraîne l'annulation des termes situés sur la première colonne de la matrice. La formulation II.39 peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$(c) := [M_{\text{applicondilimite}}^{\textcircled{j}}] (f) \quad (\text{II.40})$$

Une matrice " $[M_{\text{applicondilimite}}^{\textcircled{j}}]$ " peut ainsi être déduite. Elle assurera la condition limite de blocage, en imposant réellement les termes de la colonne à 0. La dernière ligne mise à 0 permet d'assurer d'avoir le coefficient $c^{j,2^j} = 0$. La matrice " $[M_{\text{applicondilimite}}^{\textcircled{j}}]$ " est obtenue via le produit matriciel de Hadamard de l'inverse de la matrice " $2^{j/2} \cdot [FImatr^{\textcircled{j}}]$ " multipliée à la matrice " $[M_{\text{condilimite}}]$ ".

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} M_{applicondilimite}^{(j)} = \left(2^{-j/2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \langle FImatr^{(j)} \left(\frac{1}{2^j} \right) \rangle & & \\ & \vdots & & \\ & \langle FImatr^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle & & \\ & \vdots & & \\ & \langle FImatr^{(j)} (1) \rangle & & \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & M_{condilimite} & 1 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Suite à l'application de la condition limite de Dirichlet, il est nécessaire de revoir l'écriture des matrices **FImatr** et **FImatrderiv**. Deux nouvelles matrices **FImatrcp** et **FImatrderivcp** sont ainsi définies pour répondre à la condition limite de blocage sur le premier nœud. Ces dernières seront par conséquent utilisées au sein de la formulation variationnelle.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ FImatrcp^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \left(2^{j/2} \begin{bmatrix} \vdots \\ FImatr^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{applicondilimite}^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ FImatrderivcp^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \left(2^{3j/2} \begin{bmatrix} \vdots \\ FImatrderiv^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{applicondilimite}^{(j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.43})$$

Les formulations II.8 et II.33 sont ainsi définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (f) &:= [FImatrcp^{(j)}] (f_{coeff}) & \text{avec } (f_{coeff}) &:= [FImatrcp^{(j)}]^{-1} (f) \\ (f') &:= [FImatrderivcp^{(j)}] (f_{coeff}) \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Les coefficients " f_{coeff} " présents dans les formulations représentent les termes " $f^{j,k}$ ".

L'étude montre ainsi la faisabilité d'appliquer les conditions limites de Dirichlet à une décomposition en ondelette et ainsi de réaliser une interpolation nodale. Cette démonstration confirme la possibilité d'insérer les ondelettes dans la méthode des éléments finis. La section suivante II.2.3 illustre l'introduction du support de discrétisation, défini à partir d'une discrétisation fonction d'échelle d'une ondelette de Daubechies, au sein de la formulation variationnelle.

II.2.3. Formulation variationnelle WFEM : application en 1D

L'équilibre mécanique est représenté par le principe des puissances virtuelles. L'idée dans les développements qui suivent est d'utiliser une approximation en ondelettes (fonction d'échelle et ondelette) pour représenter la solution du problème. Pour illustrer le processus de résolution, un cas 1D avec une loi élastique linéaire simple est utilisé. Cette

illustration est volontairement simple pour mettre en évidence les aspects géométriques-approximations, qui sont ceux spécifiquement liés à l'utilisation d'une représentation en ondelettes.

$$- \int_D \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V} ds = 0 \quad (\text{II.45})$$

Dans cette équation D représente le volume de la pièce, ∂D la frontière extérieure du volume, \vec{T} les efforts appliqués, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes internes dans la matière, $\overset{*}{\mathbf{D}}$ le tenseur vitesse de déformation virtuelle, \vec{V} les vitesses virtuelles.

Concernant l'application 1D, dans le repère de l'élément de référence, la formulation variationnelle II.45 peut s'écrire sous la forme :

$$- S \int_{-1}^1 \sigma : \overset{*}{\mathbf{D}} \sqrt{g} d\theta^{\textcircled{1}} + \int_{\partial D} T \overset{*}{V} ds = 0 \quad \text{avec } dv = S d\theta^{\textcircled{1}} \quad (\text{II.46})$$

Dans cette expression, les grandeurs tensorielles se résument à des scalaires.

D'une manière plus générale, pour résoudre l'équation II.45 on se place dans le cadre d'une recherche de zéro via une méthode de résolution de Newton. Celle-ci constitue la méthode classique de résolution des problèmes non-linéaires. L'inconnue est le champ de positions finales en fonction de conditions limites imposées en position. Le résidu est exprimé à partir de la formulation variationnelle :

$$R(\hat{X}) = - \int_{D_{ref}} \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} \sqrt{g} dv_{ref} + \int_{\partial D_{ref}} \vec{T} \cdot \vec{V} \sqrt{g_s} ds_{ref} \quad (\text{II.47})$$

Remarques : Il est à noter que les intégrations sont ici réalisées sur les volumes et surfaces de référence et elles sont par conséquent indépendantes de la solution. La dépendance est transférée aux jacobiens : \sqrt{g} pour le volume et $\sqrt{g_s}$ pour la surface.

Les positions finales \hat{X} dépendent des degrés de liberté "ddl", l'opérateur tangent suivant est ainsi utilisé :

$$-\frac{\partial R(\hat{X}(ddl))}{\partial ddl} = + \int_{D_{ref}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} \sqrt{g}}{\partial ddl} dv_{ref} - \int_{\partial D_{ref}} \frac{\partial \vec{T} \cdot \vec{V} \sqrt{g_s}}{\partial ddl} ds_{ref} \quad (\text{II.48})$$

La variation du résidu est un élément important dans la résolution de l'équation. À noter que le temps CPU consommé par le calcul de l'opérateur tangent, est en général très pénalisant en particulier dans le cas d'une loi de comportement complexe.

II.2.4. Définition des termes de la formulation variationnelle WFEM

L'idée de la section II.2.4 est de présenter l'insertion du support de discrétisation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N dans un schéma de résolution de Newton par rapport à la formulation variationnelle II.47. Mais avant de s'intéresser aux différentes étapes de résolution, es différents termes de la formulation vont tout d'abord être définis.

Le résidu II.47 se compose d'un tenseur vitesse de déformation $\overset{*}{\mathbf{D}}$, d'un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le terme pour le changement de base \sqrt{g} et les vitesses virtuelles $\overset{*}{\mathbf{V}}$. Le terme \sqrt{g} , qui est le déterminant du tenseur métrique, correspond au jacobien de la transformation qui relie les coordonnées globales X^a et les coordonnées matérielles θ^i , coordonnées fixes pendant le chargement.

Ces termes sont alors exprimés à partir d'une interpolation en ondelettes, où l'emploi de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N I.38 est utilisée pour la discrétisation. Les formulations sont présentées dans la partie II.2.4.1. L'expression des termes peut se faire en deux catégories, les termes virtuels et les termes non-virtuels.

L'opérateur tangent II.48 est défini par le rapport entre la formulation du résidu et les degrés de liberté "ddl". Les mêmes définitions des termes de la formulation du résidu II.47 sont retrouvées, mais avec la division par les degrés de liberté. Les expressions seront détaillées dans la partie II.2.4.2.

II.2.4.1. Définition des termes du résidu

En ce qui concerne la définition des termes de la formulation du résidu II.47, la formulation peut être séparée entre deux parties distinctes. La première partie correspond à la définition des forces internes et le second membre correspond, quant à lui, aux forces externes.

1. Définition des forces internes généralisées $\int_D \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} dv = \langle \text{ddl} \rangle (F_{int})$

Les forces internes sont définies à partir des termes virtuels et non-virtuels. Le tenseur de vitesse de déformation $\overset{*}{\mathbf{D}}$, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le jacobien \sqrt{g} et les vitesses virtuelles $\overset{*}{\mathbf{V}}$ sont ainsi utilisés.

— Les termes non-virtuels

Le tenseur des contraintes dépend classiquement du tenseur des déformations et de vitesse de déformation via la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma} = H(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$. La loi "H" dépend du problème traité, une loi simple étant la relation linéaire entre contrainte et déformation de Hooke.

$$\sigma^{kl} = E \epsilon_{mn}^{(j)} \left(\hat{g}^{mk(j)} \hat{g}^{nl(j)} \right) \quad (\text{II.49})$$

Quelque soit la complexité de la loi de comportement, elle nécessite le calcul de la déformation. La vitesse de déformation s'en déduit en général via une approximation linéaire sur un pas de temps. Dans ce cas étudié, le calcul du tenseur de déformation correspond à la mesure d'Almansi. Ce choix est arbitraire, cependant à partir de la connaissance d'une mesure il est possible théoriquement de calculer toutes les autres mesures.

Les composantes du tenseur de déformation d'Almansi ϵ_{mn} sont définies par :

$$\epsilon_{mn}^{(j)} = \frac{1}{2} \left(\hat{g}_{mn}^{(j)} - g_{mn}^{(j)} \right) \quad (\text{II.50})$$

avec les composantes du tenseur métrique \hat{g}_{mn} et g_{mn} après et avant déformation :

$$\begin{aligned}\hat{g}_{mn}^{(j)} &= \vec{\hat{g}}_m^{(j)} \cdot \vec{\hat{g}}_n^{(j)} \\ g_{mn}^{(j)} &= \vec{g}_m^{(j)} \cdot \vec{g}_n^{(j)}\end{aligned}\quad (\text{II.51})$$

Les termes du tenseur métrique inverse \hat{g}^{mk} et \hat{g}^{nl} s'obtiennent directement à l'aide de la relation :

$$\hat{g}_{mk}^{(j)} \cdot \hat{g}^{mk(j)} = 1 \quad (\text{II.52})$$

Les termes $\hat{g}_m^{(j)}$ et $g_m^{(j)}$ sont calculés à partir de la dérivée partielle de la position discrétisée.

$$\begin{aligned}\vec{\hat{g}}_m^{(j)} &= \frac{\partial \hat{X}_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \vec{I}_a \\ \vec{g}_m^{(j)} &= \frac{\partial X_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \vec{I}_a\end{aligned}\quad (\text{II.53})$$

Les vecteurs des positions finales $\vec{\hat{X}}$ et initiales \vec{X} sont définis à l'aide d'une interpolation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N " au niveau j, de coefficients : γ_{j,k_j} ".

Les positions peuvent être déterminées en chaque point de discrétisation $\theta^{i(j)}$, avec i l'indice du point.

$$\begin{aligned}\hat{X}_a \left(\theta^{i(j)} \right) &:= 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma \left(2^j \left(\theta^{i(j)} \right) - k_j \right) C_{\hat{X}_a}^{j,k_j} \\ &:= 2^{j/2} \langle FImatr^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle \left(C_{\hat{X}_a} \right)\end{aligned}\quad (\text{II.54})$$

Remarque : dans cette expression "j" est fixe ; "a" est également fixe et représente l'indice de coordonnée cartésienne, variant de 1 à 3.

Les coefficients d'approximation sont déterminés via la relation matricielle suivante :

$$\left(C_{\hat{X}_a} \right) := \left[M_{applicondilimite}^{(j)} \right] \left(\hat{X}_a^{(j)} \right) \quad (\text{II.55})$$

Cette formulation fait intervenir la matrice $\left[M_{applicondilimite}^{(j)} \right]$ permettant de projeter les coefficients d'approximation de l'espace des ondelettes à l'espace physique de l'élément, (cf II.2.2). La relation II.54 peut être ainsi réécrite sous la forme suivante :

$$\hat{X}_a \left(\theta^{i(j)} \right) := 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma \left(2^j \left(\theta^{i(j)} \right) - k_j \right) \left[M_{applicondilimite}^{(j)} \right] \left(\hat{X}_a^{(j)} \right) \quad (\text{II.56})$$

Afin de simplifier la formulation, la matrice "[*FImatrcp*]" est introduite. Sa construction est détaillée dans la partie II.2.2. La formule précédente peut ainsi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}\hat{X}_a \left(\theta^{i \circledast} \right) &:= \langle FImatrcp^{\circledast} \left(\theta^{i \circledast} \right) \rangle \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \\ \text{ou encore} \\ \left(\hat{X}_a^{\circledast} \right) &:= [FImatrcp^{\circledast}] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \\ \text{et} \\ \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) &= [FImatrcp^{\circledast}]^{-1} \left(\hat{X}_a^{\circledast} \right)\end{aligned}\tag{II.57}$$

Sous forme vectorielle, cette dernière s'écrit :

$$\overrightarrow{\hat{X}^{\circledast}} := [FImatrcp^{\circledast}] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a\tag{II.58}$$

Ces définitions font intervenir la matrice "[*FImatrcp*]" et les degrés de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ ". Une expression équivalente est retrouvée pour les positions avant déformations à l'aide des degrés fixes " $X_{a,coeff}$ ".

$$\overrightarrow{X^{\circledast}} := [FImatrcp^{\circledast}] \left(X_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a\tag{II.59}$$

Dorénavant, les vecteurs de la base naturelle avant et après déformation peuvent être exprimés en fonction de $X_{a,coeff}$ et $\hat{X}_{a,coeff}$ à l'aide de la formule de la dérivation présentée dans la section II.2.2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{g}_m^{\circledast}} &= \frac{\partial \hat{X}_a^{\circledast}}{\partial \theta_m^{\circledast}} \overrightarrow{I}_a \\ &:= [FImatrcp^{\circledast}] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a\end{aligned}\tag{II.60}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g}_m^{\circledast} &= \frac{\partial X_a^{\circledast}}{\partial \theta_m^{\circledast}} \overrightarrow{I}_a \\ &:= [FImatrcp^{\circledast}] \left(X_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a\end{aligned}\tag{II.61}$$

— Les termes virtuels

Le tenseur de la vitesse de déformation virtuelle s'écrit :

$$\overset{*}{\mathbf{D}} = \frac{\left(\mathbf{grad} \left(\overrightarrow{V}^* \right) + \left(\mathbf{grad} \left(\overrightarrow{V}^* \right) \right)^T \right)}{2}\tag{II.62}$$

avec

$$\mathbf{grad} \left(\overrightarrow{V}^* \right) = V_{k|l}^* \overrightarrow{\hat{g}}^k \otimes \overrightarrow{\hat{g}}^l$$

La définition du vecteur virtuelle \overrightarrow{V}^* s'écrit également à l'aide d'une interpolation fonction d'échelle d'une ondelette de Daubechies. Le niveau de résolution

j est identique pour la discrétisation de la position et de la vitesse virtuelle afin d'avoir une matrice de raideur carrée.

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_a^* \left(\theta^{i \circledast j} \right) &:= 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma \left(2^j \left(\theta^{i \circledast j} \right) - k_j \right) C_{\vec{V}_a^*}^{j,k_j} \\
 &:= \langle FImatrcp^{\circledast j} \left(\theta^{i \circledast j} \right) \rangle \left(\vec{V}_{a,coeff}^* \right) \\
 \vec{V}_{a,coeff}^* &:= \langle \vec{V}_{a,coeff}^* \rangle \left[FImatrcp^{\circledast j} \right]^T \vec{I}_a
 \end{aligned} \tag{II.63}$$

Le vecteur $\hat{X}_{a,coeff}$ représente les degrés de liberté du problème et les vecteurs $X_{a,coeff}$ et $\vec{V}_{a,coeff}^*$ définissent les degrés fixes et les degrés de liberté virtuels respectivement. Les vitesses virtuelles \vec{V}^* sont calculées à partir des valeurs réelles, et plus précisément à l'aide des positions initiales des points de discrétisation et des vitesses virtuelles imposées aux nœuds. La résolution des systèmes linéaires permet de déterminer ces valeurs.

Le terme \sqrt{g} , déterminant du tenseur métrique, permet de relier les coordonnées globales et les coordonnées matérielles. Ce dernier est calculé à partir des termes du tenseur métrique, défini par l'équation II.64.

$$\sqrt{g} = \|\hat{g}_{mn}\| \tag{II.64}$$

La complexité du produit de l'ensemble des fonctions discontinues définissant les forces internes conduit à utiliser une stratégie d'intégration particulière. La partie II.3 traite des méthodes d'intégration envisageables.

2. Définition du second membre $\int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V}^* ds$

Le second membre est défini par le produit des forces externes supposées connues et les vitesses virtuelles.

$$\begin{aligned}
 \vec{T} \cdot \vec{V}^* \left(\theta^{i \circledast j} \right) \sqrt{g_s} &:= \langle \vec{V}_{a,coeff}^* \rangle \left(\langle FImatrcp^{\circledast j} \left(\theta^{i \circledast j} \right) \rangle \right)^T (T_a) \sqrt{g_s} \\
 \vec{T} \cdot \vec{V}^* \sqrt{g_s} &:= \langle \vec{V}_{a,coeff}^* \rangle \left[FImatrcp^{\circledast j} \right]^T (T_a) \sqrt{g_s}
 \end{aligned} \tag{II.65}$$

II.2.4.2. Définition des termes de l'opérateur tangent

Les degrés de liberté $\hat{X}_{a,coeff}$ interviennent principalement dans la définition des forces internes. Les ddl interviennent également dans le calcul de l'élément de surface pour le second membre via le jacobien $\sqrt{g_s}$, excepté pour des cas particuliers tels que celui des forces suiveuses. Généralement, par simplicité, la variation du second membre dans le calcul de l'opérateur tangent de la méthode de Newton n'est pas prise en considération. Il en résulte que le calcul de l'opérateur tangent dans ce travail sera exclusivement défini par le rapport entre les forces internes et les degrés de liberté.

Remarque : Il est à noter qu'à priori l'extension de l'opérateur tangent à la prise en compte de la variation du second membre par rapport aux degrés de liberté peut se calculer en suivant la même démarche que celle présentée pour les forces internes.

D'une manière générale, l'opérateur tangent s'écrit :

$$-\frac{\partial R(ddl)}{\partial ddl} = -\frac{\partial}{\partial ddl} \int_{Dref} -\sigma^{kl} D_{kl}^* \sqrt{g} dv = \int_{Dref} \frac{\partial(\sigma^{kl} D_{kl}^* \sqrt{g})}{\partial ddl} dv \quad (\text{II.66})$$

La relation II.66 peut être trivialement subdivisée en trois variations, selon les trois termes composant cette équation " σ^{kl} ", " D^* " et " \sqrt{g} ". La formulation II.67 présente les trois variations élémentaires à déterminer.

$$\frac{\partial(\sigma^{kl} D_{kl}^* \sqrt{g})}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial ddl} D_{kl}^* \sqrt{g} + \frac{\partial(D_{kl}^*)}{\partial ddl} \sigma^{kl} \sqrt{g} + \frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial ddl} \sigma^{kl} D_{kl}^* \quad (\text{II.67})$$

1. Calcul du premier terme

$$\frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial ddl} \quad (\text{II.68})$$

Le terme $\frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}}$ est spécifique à la loi de comportement que l'on souhaite utiliser. Pour cette application 1D avec le comportement de Hooke celle-ci peut s'écrire :

$$\sigma^{11} = E \epsilon^{11} = E \epsilon_{11} (\hat{g}^{11} \hat{g}^{11}) \quad (\text{II.69})$$

D'une manière plus générale, il est nécessaire d'avoir la variation des déformations : $\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial ddl}$, mais également de la variation de la base naturelle $\frac{\partial \vec{\hat{g}}_m}{\partial ddl}$ ainsi que des composantes de la métrique $\frac{\partial \hat{g}^{mk}}{\partial ddl}$, $\frac{\partial \hat{g}_{mk}}{\partial ddl}$

$$\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial ddl} = \frac{1}{2} \left(\vec{\hat{g}}_m \frac{\partial \vec{\hat{g}}_n}{\partial ddl} + \vec{\hat{g}}_n \frac{\partial \vec{\hat{g}}_m}{\partial ddl} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{mn}}{\partial ddl} \quad (\text{II.70})$$

$$\frac{\partial \hat{g}^{mk}}{\partial ddl} = -\frac{\hat{g}^{mk}}{\hat{g}_{mk}} \frac{\partial \hat{g}_{mk}}{\partial ddl}$$

Les degrés de liberté \mathbf{ddl} correspondent à $\hat{\mathbf{X}}_a^{j,k_j}$, qui sont compris dans le vecteur $\hat{\mathbf{X}}_{a,coeff}$. La relation suivante peut être ainsi écrite :

$$\frac{\partial \vec{\hat{g}}_m}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{a,coeff}} = \left[FImatrderivcp_m^{\textcircled{j}} \right] \quad (\text{II.71})$$

2. Calcul du second terme

$$\overset{*}{\mathbf{D}} = \frac{\left(\text{grad} \left(\overset{*}{\vec{V}} \right) + \left(\text{grad} \left(\overset{*}{\vec{V}} \right) \right)^T \right)}{2} \quad (\text{II.72})$$

avec

$$\text{grad} \left(\overset{*}{\vec{V}} \right) = V_{k|l}^* \vec{\hat{g}}^k \otimes \vec{\hat{g}}^l$$

Dans un cas classique d'interpolation polynomiale linéaire, la dérivée covariante de la vitesse de déformation virtuelle est indépendante des degrés de liberté. Dans le cas d'une interpolation plus complexe, et donc en particulier pour une interpolation utilisant des ondelettes, cette dérivée covariante n'est plus constante. Néanmoins, il a été considéré que dans une première étape de validation du processus, son importance pouvait être négligée par rapport à la dépendance de la loi de la contrainte (le premier terme). Il est à rappeler que l'opérateur tangent n'intervient pas dans la précision du résultat, mais seulement sur la vitesse de convergence.

Donc dans ce cas d'étude, il peut être posé :

$$\frac{\partial(\overset{*}{D})}{\partial d d l} \approx 0 \quad (\text{II.73})$$

3. Calcul du troisième terme

Le jacobien correspond au produit mixte des vecteurs de la base naturelle ou la racine carrée du déterminant des composantes deux fois covariantes du tenseur métrique. Ses variations se déduisent via les formules [II.71](#) et [II.70](#).

En 1D :

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \sqrt{\hat{g}_1 \cdot \hat{g}_1} \\ \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial d d l} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(2 \vec{\hat{g}}_1 \frac{\partial \vec{\hat{g}}_1}{\partial d d l} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial d d l} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Les termes du résidu et de l'opérateur tangent ont été définis dans les deux parties précédentes [II.2.4.1](#) et [II.2.4.2](#).

Compte tenu du support discret d'une ondelette d'évolution à priori non régulière, il apparaît pertinent de réfléchir à la méthode d'intégration numérique. En effet, la méthode classique de Gauss est bien adaptée à l'intégration de fonctions plutôt régulières, via une approximation polynomiale. Dans le cas du support en ondelettes, l'idée a été de chercher une méthode d'intégration particulière plus adaptée. Ceci fait l'objet de la partie suivante [II.3](#).

II.3. Intégration du support de discrétisation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies

II.3.1. Intégration du résidu

La phase d'intégration dans la méthode des éléments finis nécessite une attention particulière, car elle impacte directement le temps de résolution et la précision des résultats. La méthode classique pour les fonctions "assez régulières", est la méthode dite de Gauss. Elle consiste à approcher la fonction à intégrer à l'aide d'une approximation polynomiale. Au final, le calcul s'effectue via une somme pondérée de la valeur de la fonction à différents points : les points de Gauss. Dans le cas d'une ondelette dont l'évolution est fortement irrégulière (type Daubechies), l'approximation polynomiale n'est pas forcément pertinente, car elle pourrait avoir tendance à lisser l'évolution irrégulière. Dans ce contexte, pour tenter de conserver au mieux les informations d'irrégularité contenues dans l'approximation par ondelette, l'idée a été de chercher une méthode d'intégration qui repose également sur l'utilisation d'ondelettes.

Deux méthodes d'intégration sont présentées pour les formulations variationnelles II.47. La première méthode II.3.1.1 consiste à intégrer les fonctions membres de l'élément fini en s'appuyant sur une méthode d'intégration déjà existante constituée de deux fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies. La seconde II.3.1.2 a pour objectif d'intégrer une nouvelle décomposition en ondelettes, dont cette dernière est une approximation du produit des termes de la formulation variationnelle. La seconde version d'intégration a été retenue pour la méthode de résolution de Newton.

II.3.1.1. Intégration des fonctions membres

La méthode d'intégration s'appuie sur l'une des propriétés de l'ondelette de Daubechies. D'après la formule I.61, l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle équivaut à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_N(\theta) \gamma_N(\theta) d\theta = 1 \quad (\text{II.75})$$

Cette propriété a conduit à une nouvelle relation, selon les articles de J. Ko, L.A. Diaz, J. Ma, M.Q. Chen, X. Chen, E.B. Lin, X. Zhou et C.H. Romine [92, 44, 107, 32, 35, 104, 167, 136], permettant ainsi de calculer l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées à des ordres différents. Ceci permet notamment de satisfaire le degré de l'équation aux dérivées partielles.

$$\Gamma_{k,l}^{d_1,d_2} = \int_0^1 \gamma^{(d_1)}(y-k) \gamma^{(d_2)}(y-l) dy \quad (\text{II.76})$$

$$\Gamma_{k,l}^{j;d_1,d_2} = \int_0^1 \gamma_{j,k}^{(d_1)}(y) \gamma_{j,l}^{(d_2)}(y) dy \quad (\text{II.77})$$

La méthode de calcul est plus détaillée dans la partie I.3.11.3.

Illustration de la méthode en 1D : en supposant une déformation infinitésimale

L'expression du tenseur des contraintes II.78 se résume à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^{11} \left(\theta^{i(j)} \right) &= E \epsilon_{11}^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) (l_0)^{-2} \\ \text{avec } \epsilon_{11}^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) &= \frac{\partial \hat{X}_a^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right)}{\partial \theta^{(j)}} = 2^{3j/2} \left(\langle FImatrderiv^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle \right) \left(C_{\hat{X}_a}^{j,k_j} \right) \quad (\text{II.78}) \\ \text{et } \left(C_{\hat{X}_a} \right) &:= 2^{-j/2} [FImatr^{*(j)}]^{-1} \left(\hat{X}_a^{(j)} \right) \end{aligned}$$

Le tenseur de déformation suit également des modifications, où son expression II.79 est la suivante :

$$\begin{aligned} D_{11}^* \left(\theta^{i(j)} \right) &= \frac{\partial V^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right)}{\partial \theta^{(j)}} \quad (\text{II.79}) \\ \text{d'où } D_{11}^* \left(\theta^{i(j)} \right) &= 2^{3j/2} \left(\langle FImatrderiv^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle \right) \left(C_{V_a}^{j,k_j} \right) \end{aligned}$$

L'intégration des forces internes II.80 s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma^{11}(\theta) : D_{11}^*(\theta) \sqrt{g} d\theta &= \\ \int_0^1 \left(\left(C_{V_a}^{j,k_j} \right)^T 2^{3j/2} \left(\langle FImatrderiv^{(j)}(\theta) \rangle \right)^T \right) & \\ E \left(2^{3j/2} \left(\langle FImatrderiv^{(j)}(\theta) \rangle \right) \left(C_{\hat{X}_a}^{j,k_j} \right) \right) (l_0)^{-2} l_0 S_0 d\theta & \\ = \frac{S_0}{l_0} \left(C_{V_a}^{j,k_j} \right)^T \Gamma_{k_j,k_j}^{j;1,1} \left(C_{\hat{X}_a}^{j,k_j} \right) & \quad (\text{II.80}) \end{aligned}$$

Il est à noter que la matrice $\Gamma_{k_j,k_j}^{j;1,1}$ est une matrice carrée de dimension 2^j . Cette forme d'intégration est celle que l'on retrouve majoritairement dans les publications relatives à l'utilisation des ondelettes en éléments finis. Cette méthode d'intégration, qui exprime l'intégration d'un produit de deux fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies d'ordre N, est spécifique à une loi particulière (correspondant à l'élasticité linéaire) pour laquelle une forme explicite est possible. Son extension à un comportement matériel complexe est difficilement envisageable. Ceci a justifié la recherche d'une nouvelle méthode d'intégration faisant objet des travaux présentés postérieurement.

II.3.1.2. Méthode d'intégration approchée par ondelettes

Compte tenu de l'approximation faite via la fonction d'échelle, la fonction résidu II.47 n'est connue qu'à un nombre discret de points : les points de définition de la décomposition en ondelettes au niveau de résolution "j". La solution est alors d'utiliser ces valeurs de la fonction résidu pour approcher son évolution via une fonction d'échelle de l'ondelette de même nature, ici une ondelette de Daubechies d'ordre N.

Pour illustrer cette méthode, le produit de deux fonctions arbitraires : f et \hat{g} font l'objet d'une intégration. Ces fonctions sont exprimées à partir d'une interpolation en ondelettes,

plus précisément à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N.

Fonction f :

Tout comme les différentes étapes vues précédemment et d'une manière générale, la fonction non discrète à un niveau "j" s'exprime :

$$f(\theta) := 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma(2^j(\theta) - k_j) C_f^{j,k_j} \quad (\text{II.81})$$

Appliquée aux points $(\theta^{i \circledast j})$ sont obtenues n valeurs de la fonction :

$$f(\theta^{i \circledast j}) := 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma(2^j(\theta^{i \circledast j}) - k_j) C_f^{j,k_j} \quad (\text{II.82})$$

Sous forme matricielle, cette équation peut s'écrire :

$$f(\theta^{i \circledast j}) := 2^{j/2} \langle FImatr^{\circledast j}(\theta^{i \circledast j}) \rangle (C_f) \quad (\text{II.83})$$

et en inversant via des conditions aux bords adéquates ($[M_{applicondilimite}^{\circledast j}]$) :

$$(C_f) := [M_{applicondilimite}^{\circledast j}](f) \quad (\text{II.84})$$

En reprenant la fonction non discrète de niveau "j" et en la dérivant, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} f'(\theta) = f^{(1)}(\theta) &:= 2^j 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma^{(1)}(2^j(\theta) - k_j) C_f^{j,k_j} \\ &:= 2^{3j/2} \langle FImatrderiv^{\circledast j}(\theta) \rangle (C_f) \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

Fonction $\overset{*}{g}$:

La fonction $\overset{*}{g}$ s'exprime de la même façon que la fonction f, les coefficients d'approximation sont nommés $C_{\overset{*}{g}}^{j,k_j}$, le vecteur caractérisant les coefficients d'approximation se note $C_{\overset{*}{g}}$.

L'expression de l'intégrale du produit des deux fonctions dérivées s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 T(\theta) d\theta &= \int_0^1 f'(\theta) \overset{*}{g}'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^1 \langle C_{\overset{*}{g}} \rangle \left(2^{3j/2} \langle FImatrderiv^{\circledast j}(\theta) \rangle \right)^T f'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^1 \left([M_{applicondilimite}^{\circledast j}] (\overset{*}{g}) \right)^T \left(2^{3j/2} \langle FImatrderiv^{\circledast j}(\theta) \rangle \right)^T f'(\theta) d\theta \\ &= \langle \overset{*}{g} \rangle \int_0^1 [M_{applicondilimite}^{\circledast j}]^T \left(2^{3j/2} \langle FImatrderiv^{\circledast j}(\theta) \rangle \right)^T . f'(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Afin de simplifier les écritures, la matrice "[FImatrderivcp]" est utilisée. Sa construction est été détaillée dans la partie II.2.2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 T(\theta) d\theta &= \langle \overset{*}{g} \rangle \int_0^1 \left(\langle FImatrderivcp^{\textcircled{j}}(\theta) \rangle \right)^T \cdot f'(\theta) d\theta \\
 &= \langle \overset{*}{g} \rangle \left(\int_0^1 P^L(\theta) d\theta \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle \overset{*}{g} \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 P^0(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^1 P^L(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^1 P^{2^j}(\theta) d\theta \end{pmatrix} \quad (\text{II.87})
 \end{aligned}$$

L'intégration de " $\int_0^1 T(\theta) d\theta$ " est équivalente au produit du vecteur représentant la fonction " $\langle \overset{*}{g} \rangle$ " par le vecteur intégration " $\left(\int_0^1 P^L(\theta) d\theta \right)$ ". L'indice "**L**" est la valeur référant le point de discrétisation utilisé pour la décomposition en ondelettes de la fonction " $\overset{*}{g}$ ". La fonction " $P^L(\theta)$ " est approchée par une fonction d'échelle à un niveau de résolution j , identique au niveau de résolution utilisé pour les interpolations primaires. Cette approximation de fonction est intégrée à l'aide d'une fonction d'échelle intégrée [I.3.10](#).

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (P^L(\theta)) d\theta &= \sum_{k=0}^{2^j} \int_0^1 \gamma_{j,k}(\theta) (C_{PL}^{j,k}) d\theta \\
 &= \langle \theta_0^j \theta_1^j \cdots \theta_k^j \cdots \theta_{2^j}^j \rangle (C_{PL}) \quad (\text{II.88}) \\
 &= \langle \theta_0^j \theta_1^j \cdots \theta_k^j \cdots \theta_{2^j}^j \rangle \left([M_{applicondilimite}^{\textcircled{j}}] (P^L) \right) \\
 &= \langle \cdots S^{\textcircled{j}} \cdots \rangle (P^L)
 \end{aligned}$$

Le terme θ_k^j correspond à l'intégration de la fonction d'échelle. La définition des termes composant ce vecteur est explicitée dans la partie [I.3.10](#). Les termes $C_{PL}^{j,k}$ sont relatifs au vecteur " (P^L) " sachant que chaque terme $P^L(\theta^{\textcircled{j}})$ correspond à la valeur de la fonction $P^L(\theta)$ calculée au point $(\theta^{\textcircled{j}})$. Le vecteur $S^{\textcircled{j}}$ est le produit entre le vecteur qui se compose des valeurs de l'intégrale de la fonction d'échelle par rapport à " k " et de la matrice $[M_{applicondilimite}^{\textcircled{j}}]$. Une présentation du calcul du premier terme du vecteur intégration permet de comprendre le déroulement de la méthode.

Illustration du calcul du premier terme $\int_0^1 (P^0(\theta)) d\theta$ du vecteur intégration

L'indice "**L**" est la valeur référant le point de discrétisation utilisé pour la décomposition en ondelettes de la fonction " $\overset{*}{g}$ ". La fonction $\left(\langle FImatrderivcp^{\textcircled{j}}(\theta) \rangle \right)$ s'écrit également sous forme matricielle lorsque " θ " est défini en plusieurs valeurs, comme vu précédemment dans la partie [II.2.2](#). Pour cette démonstration, il a été choisi "**L=0**", ce qui a pour conséquence d'utiliser uniquement la première colonne de la matrice " $[FImatrderivcp^{\textcircled{j}}]$ ", d'où l'indice "**0**" sur l'écriture de la formulation [II.89](#) de $(FImatrderivcp^{\textcircled{j} \ 0}(\theta))$.

Le calcul du premier terme du vecteur intégration est illustré par la formule :

$$\int_0^1 (P^0(\theta)) d\theta = \int_0^1 (FImatrderivcp^{\textcircled{j} \ 0}(\theta)) \cdot f'(\theta) d\theta \quad (\text{II.89})$$

À partir de l'écriture [II.89](#), une discrétisation des fonctions, au niveau j de résolution, est réalisée.

Le premier vecteur (P^0) s'écrit ainsi sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P^0(0) \\ P^0\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ P^0\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ P^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FImatrderivcp^{(j)0}(0) \\ FImatrderivcp^{(j)0}\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ FImatrderivcp^{(j)0}\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ FImatrderivcp^{(j)0}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(0) \\ f'\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ f'\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ f'(1) \end{pmatrix} \quad (\text{II.90})$$

Ce premier vecteur (P^0) est inséré à la formule II.88 et il en résulte la première valeur du vecteur intégration.

II.3.1.3. Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires

La validation de la méthode d'intégration approchée est réalisée sur l'intégration de produit de différentes fonctions arbitraires. Pour mémoire, une représentation discrète (reliée par des segments) des 3 dernières fonctions en est donnée à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 (cf. fig II.7). Les fonctions retenues pour cette étude sont les suivantes :

1. fonction carrée

$$f_4(x) = x^2$$

2. fonction

$$f_5(x) = x^4$$

3. fonction

$$f_6(x) = 4.x^3$$

4. fonction

$$f_7(x) = x^5$$

5. fonction

$$f_8(x) = 6.x^4$$

6. fonction

$$f_9(x) = 2.x^6$$

7. fonction en dents de scie

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2(x - 0.5), & 0.5 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \cup x < 0 \end{cases}$$

8. fonction en double dents de scie

$$f_{11}(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 0.25 \\ 4(x - 0.25), & 0.25 \leq x < 0.5 \\ 4(x - 0.5), & 0.5 \leq x < 0.75 \\ 4(x - 0.75), & 0.75 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \cup x < 0 \end{cases}$$

9. fonction porte

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 0.5, & 0.25 \leq x < 0.5 \\ 1, & 0.75 \leq x < 1 \\ 0, & 0 \leq x < 0.25 \cup 0.5 \leq x < 0.75 \cup x \geq 1 \end{cases}$$

10. fonction porte

$$f_{13}(x) = \begin{cases} 0.5, & 0.125 \leq x < 0.25 \\ 1, & 0.375 \leq x < 0.5 \\ 0.5, & 0.625 \leq x < 0.75 \\ 0, & 0 \leq x < 0.125 \cup 0.25 \leq x < 0.375 \cup 0.5 \leq x < 0.625 \cup x \geq 0.75 \end{cases}$$

Le graphique II.7 illustre les trois dernières fonctions de cette investigation f_{10} , f_{11} et f_{12} . Des décalages ont été effectués afin de permettre de mieux visualiser les discontinuités. Il peut être observé que la représentation par points d'ondelette au niveau 6, reliés par des segments, illustrent intuitivement et fidèlement les évolutions analytiques (bien que les "murs" ne soient qu'approximativement reproduits).

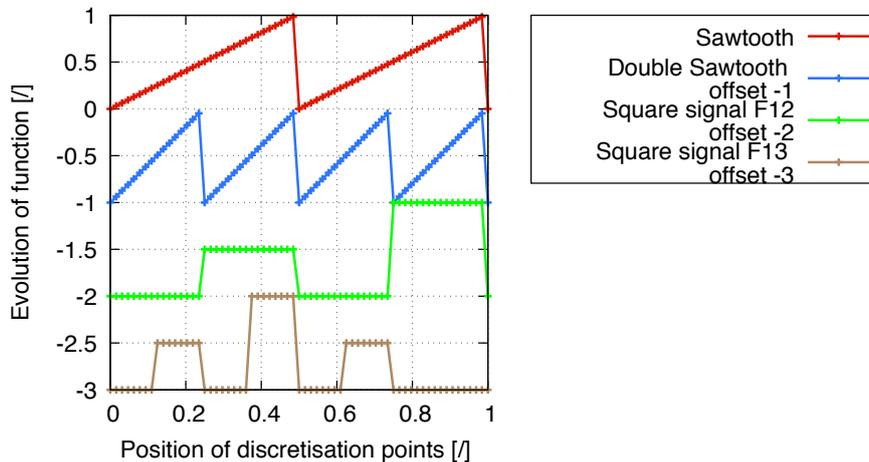


FIGURE II.7 – Évolution des fonctions avec des singularités au niveau de résolution "j=6"

Afin de valider la méthode d'intégration approchée, plusieurs calculs d'intégrales ont été réalisés. Ces derniers peuvent être classés en deux catégories. La première catégorie répertorie les calculs liés à l'intégration du produit de fonctions dérivées 1, et la seconde inclut les calculs liés aux intégrations du produit de fonctions avec des discontinuités 2.

1. Intégration approchée du produit de fonctions dérivées :

L'idée est dans un premier temps de se rapprocher d'une grandeur analogue à un résidu mécanique, calculée à l'aide d'une interpolation polynomiale du champ de déplacement, et dans un second temps d'étudier la précision d'une représentation par fonction d'échelle.

Les intégrations approchées concernent les intégrales des produits des fonctions dérivées suivantes :

(a)

$$\int_0^1 f_4'(x) \cdot f_5'(x) dx$$

(b)

$$\int_0^1 f'_6(x) \cdot f'_7(x) dx$$

(c)

$$\int_0^1 f'_8(x) \cdot f'_9(x) dx$$

Le tableau II.2 présente les valeurs des intégrations obtenues à l'aide de la méthode d'intégration approchée pour les produits des fonctions dérivées cités ci-dessus. Ces valeurs sont comparées aux valeurs théoriques ainsi qu'aux valeurs calculées par la méthode d'intégration numérique de Clenshaw-Curtis. Les trois niveaux de décomposition (j=2, 4 et 6) sont utilisés pour cette investigation. L'erreur relative des valeurs des intégrales est également déterminée pour chaque valeur d'intégration calculée à l'aide de l'intégration de la fonction d'échelle de l'ondelette (O).

Intégration méthode	$\int_0^1 f'_4(x) \cdot f'_5(x) dx$	$\int_0^1 f'_6(x) \cdot f'_7(x) dx$	$\int_0^1 f'_8(x) \cdot f'_9(x) dx$
Valeur théorique	1.600000e+00 (8/5)	8.571429e+00 (60/7)	3.200000e+01 (32)
Clenshaw-Curtis 33 points d'intégration	1.600000e+00	8.571429e+00	3.200000e+01
O_Niveau j=2	1.332185e+00 (16.7 %)	6.539976e+00 (23.7 %)	2.264455e+01 (29.2 %)
O_Niveau j=4	1.569630e+00 (1.9 %)	8.281340e+00 (3.4 %)	3.033363e+01 (5.2 %)
O_Niveau j=6	1.597838e+00 (0.13 %)	8.549259e+00 (0.26 %)	3.186240e+01 (0.43 %)

TABLE II.2 – Intégration du produit de fonctions dérivées par intégration approchée fonction d'échelle

D'après le tableau II.2, les intégrales approchées sont de plus en plus précises par rapport aux valeurs théoriques. Bien que l'écart est encore important au niveau de résolution (j=6), la méthode d'intégration approchée montre sa capacité à intégrer un produit avec un degré important (degré 8 pour le polynôme $f'_8 \cdot f'_9$).

2. Intégration approchée du produit de fonctions avec des discontinuités :

Dans cette partie, les intégrales suivantes ont été intégrées via la méthode d'intégration approchée :

(a)

$$\int_0^1 f_{10}(x) \cdot f_{10}(x) dx$$

(b)

$$\int_0^1 f_{11}(x) \cdot f_{11}(x) dx$$

(c)

$$\int_0^1 f_{12}(x) \cdot f_{12}(x) dx$$

(d)

$$\int_0^1 f_{13}(x) \cdot f_{13}(x) dx$$

La première intégrale concerne le produit de deux fonctions en dents de scie f_{10} , II.3, la seconde, l'intégration du produit de quatre fonctions en dents de scie f_{11} , II.4, la troisième, l'intégrale du produit de deux fonctions portes d'amplitudes différentes f_{12} , II.5 et la dernière, l'intégrale du produit de trois fonctions portes d'amplitudes différentes et de largeur plus fine f_{13} , II.6.

Ces valeurs sont comparées aux valeurs numériques déterminées via la méthode d'intégration numérique de Gauss. Quatre niveaux de décomposition ($j=2, 3, 4$ et 6) ont été retenus pour cette étude. L'erreur relative sera également calculée pour chaque valeur d'intégration.

Pour mémoire, la formule d'approximation de l'intégrale via la méthode de quadrature de Gauss s'écrit :

$$\frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n W_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{II.91})$$

avec :

a : borne inférieure de l'intégrale

b : borne supérieure de l'intégrale

W_i : les poids évalués au points x_i

x_i : Position du point d'intégration par rapport à un élément défini sur $[-1 : 1]$

n : nombre maximum de points d'intégration de gauss

Le tableau II.3 expose les valeurs des intégrales obtenues pour le produit de deux fonctions en dents de scie.

Intégration méthode	Gauss $\int_0^1 f_{10}(x) \cdot f_{10}(x) dx$	Intégration approchée $\int_0^1 f_{10}(x) \cdot f_{10}(x) dx$
Valeur théorique	3.333333e-01 (1/3)	3.333333e-01 (1/3)
Niveau j=2 (4 points d'intégration)	3.120659e-01 (6.4 %)	2.226094e-01 (33.2 %)
Niveau j=3 (8 points d'intégration)	3.275693e-01 (1.7 %)	2.862822e-01 (14.1 %)
Niveau j=4 (16 points d'intégration)	3.318178e-01 (0.4 %)	3.121967e-01 (6.3 %)
Niveau j=6 (64 points d'intégration)	/	3.284933e-01 (1.4 %)

TABLE II.3 – Intégration du produit de 2 fonctions en dents de scie par intégration approchée fonction d'échelle

Le tableau II.4 récapitule les valeurs des intégrales obtenues pour le produit de quatre fonctions en dents de scie.

Intégration méthode	Gauss $\int_0^1 f_{11}(x) \cdot f_{11}(x) dx$	Intégration approchée $\int_0^1 f_{11}(x) \cdot f_{11}(x) dx$
Valeur théorique	3.333333e-01 (1/3)	3.333333e-01 (1/3)
Niveau j=3 (8 points d'intégration)	3.394966e-01 (1.7 %)	1.633824e-01 (50.1 %)
Niveau j=4 (16 points d'intégration)	3.29413e-01 (0.4 %)	2.491366e-01 (25.2 %)
Niveau j=6 (64 points d'intégration)	/	3.127977e-01 (6.2 %)

TABLE II.4 – Intégration du produit de 4 fonctions en dents de scie par intégration approchée fonction d'échelle

Le tableau II.5 illustre les valeurs des intégrales obtenues pour le produit de trois fonctions portes f_{12} .

Intégration méthode	Gauss $\int_0^1 f_{12}(x) \cdot f_{12}(x) dx$	Intégration approchée $\int_0^1 f_{12}(x) \cdot f_{12}(x) dx$
Valeur théorique	3.125000e-01 (5/16)	3.125000e-01 (5/16)
Niveau j=2 (4 points d'intégration)	2.554455e-01 (18.2 %)	3.113431e-01 (0.37 %)
Niveau j=3 8 points d'intégration)	3.639936e-01 (16.5 %)	3.152173e-01 (0.87 %)
Niveau j=4 (16 points d'intégration)	2.970460e-01 (4.9 %)	3.146168e-01 (0.67 %)
Niveau j=6 (64 points d'intégration)	/	3.130153e-01 (0.16 %)

TABLE II.5 – Intégration du produit de 2 fonctions porte par intégration approchée fonction d'échelle

Le tableau II.6 illustre les valeurs des intégrales obtenues pour le produit de deux fonctions portes plus fines f_{13} .

Intégration méthode	Gauss $\int_0^1 f_{13}(x) \cdot f_{13}(x) dx$	Intégration approchée $\int_0^1 f_{13}(x) \cdot f_{13}(x) dx$
Valeur théorique	1.875000e-01 (6/32)	1.875000e-01 (6/32)
Niveau j=3 (8 points d'intégration)	2.205552e-01 (17.6 %)	1.877656e-01 (0.14 %)
Niveau j=4 (16 points d'intégration)	1.573948e-01 (16.0 %)	1.874872e-01 (0.0068 %)
Niveau j=6 (64 points d'intégration)	/	1.875000e-01 (0 %)

TABLE II.6 – Intégration du produit de 3 fonctions porte par intégration approchée fonction d'échelle

Ces quatre tableaux II.3, II.4, II.5, II.6 montrent le fort potentiel de la méthode d'intégration approchée permettant de déterminer l'intégrale du produit de fonctions avec des singularités. Il est important de noter que la méthode d'intégration numérique de Gauss permet de calculer, avec une bien meilleure précision, les intégrales des fonctions en dents de scie. Néanmoins, les intégrales des fonctions du type porte sont approchées plus exactement via la méthode d'intégration approchée, exprimée via l'intégrale de la fonction échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.

Les points d'intégration de Gauss sont bien situés dans le cas des intégrales du produit des fonctions en dents de scie exposées. Les valeurs évaluées à ces points ont une grandeur et ne sont pas influencées par les singularités, alors que dans le cas du produit des fonctions porte, les valeurs évaluées peuvent être nulles à certains points de définition, cf II.91. En prenant l'exemple d'un signal avec plusieurs créneaux, où ces derniers se situent entre les points d'intégration de Gauss et avec une largeur inférieure à la distance entre deux points, l'intégrale numérique déterminée via la méthode de Gauss sera nulle alors qu'en réalité ce n'est pas le cas. La solution est par conséquent d'augmenter le nombre de points d'intégration de Gauss afin d'évaluer une valeur approximative de l'intégrale. Mais dans le cas de la méthode d'intégration approchée, le niveau de résolution "j" est adapté à la représentation des singularités et par conséquent l'intégrale calculée est plus juste.

De manière pratique, lorsqu'une approximation par ondelettes de type Daubechies est utilisée, seules des valeurs discrètes sont disponibles. De plus, l'utilisation d'une méthode de type Gauss nécessite un calcul supplémentaire pour déterminer la valeur de la fonction à intégrer au niveau des points de Gauss qui ne sont pas coïncidents avec les θ^i ①. Cela peut conduire à une imprécision supplémentaire et/ou à un temps de calcul supplémentaire par rapport à la méthode proposée. En conclusion, il peut être retenu que l'intégration approchée par fonction d'échelle n'est pas à priori performante pour des fonctions régulières de type polynomiale. Par contre pour des phénomènes de localisation, de type apparition de bande de transformation qui traverserait un élément fini et qui serait bien représentée par une fonction porte, la méthode converge rapidement vers une intégrale précise. Il semble, d'autre part, possible d'utiliser un niveau plus faible pour l'intégration que celui utilisé initialement pour les fonctions membres. Ceci peut représenter un gain de temps via la

diminution du nombre de calculs.

II.3.2. Intégration de la variation du résidu

L'utilisation de la méthode de résolution de Newton conduit à intégrer la variation du résidu II.48. La complexité des termes à intégrer, concernant le résidu II.47, montre l'intérêt d'utiliser la méthode d'intégration développée précédemment II.3.1.2. En effet, il n'est pas nécessaire de connaître l'assemblage interne des fonctions constitutives du résidu pour effectuer l'intégration approchée.

La variation du résidu consiste à calculer l'intégrale de la dérivée partielle des forces internes par rapport aux degrés de liberté utilisés pour l'interpolation de la position. L'objectif dans cette sous-partie est d'approcher l'intégrale du mixte des fonctions complexes constituant le résidu, par l'intégrale d'une approximation globale par une seule ondelette.

Pour illustrer la méthode d'intégration de la variation du résidu II.48, les deux fonctions f , g^* de la partie précédente II.3.1.2 sont utilisées. L'intégrale de la dérivée partielle du produit des deux fonctions dérivées par rapport à la valeur de la fonction f au point " θ^i " s'écrit sous la forme II.92 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T(\theta)}{\partial(f)} d\theta &= \int_0^1 \frac{\partial \left(f'(\theta) g^*(\theta) \right)}{\partial(f)} d\theta \\ &= \langle g^* \rangle \left[\int_0^1 Q_{(f)}^L(\theta) d\theta \right] \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

L'intégration de " $\int_0^1 \frac{\partial T(\theta)}{\partial(f)} d\theta$ " est équivalente au produit du vecteur représentant la fonction " $\langle g^* \rangle$ " par la matrice intégration " $\left[\int_0^1 Q_{(f)}^L(\theta) d\theta \right]$ ". Les termes de la matrice intégration correspondent à un ensemble d'intégrations. Ces dernières dépendent à la fois de l'indice " \mathbf{L} ", référant le point de discrétisation utilisé, et de la valeur de la fonction f au point " θ^i ".

L'équation II.92 peut-être réécrite en fonction de l'indice " \mathbf{p} ", dont ce dernier est une valeur correspondante à la fonction f au point " θ^i ".

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T(\theta)}{\partial(f(p))} d(\theta) &= \int_0^1 g^*(\theta) \cdot \frac{\partial f'(\theta)}{\partial(f(p))} d(\theta) \quad \text{avec } p = [0 : 2^j] \\ &= \int_0^1 \langle g^* \rangle \left(\langle FImatrderivcp^{\textcircled{j}}(\theta) \rangle \right)^T \cdot \frac{\partial f'(\theta)}{\partial(f(p))} d\theta \\ &= \langle g^* \rangle \left(\int_0^1 Q_{(f(p))}^L(\theta) d\theta \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\ &= \langle g^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 Q_{(f(p))}^0(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^1 Q_{(f(p))}^L(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^1 Q_{(f(p))}^{2^j}(\theta) d\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

L'intégrale II.93 écrite par rapport aux valeurs de la fonction f au point " θ^i ", est

similaire à l'écriture II.87 présente dans la partie II.3.1.2. La méthode d'intégration développée peut-être ainsi utilisée, la formulation générale est :

$$\int_0^1 (Q_{(f(p))}^L(\theta)) d\theta = \langle \dots S^{(j)} \dots \rangle (Q_{(f(p))}^L) \quad (\text{II.94})$$

La fonction " $Q_{(f(p))}^L(\theta)$ " est approchée par une fonction d'échelle à un niveau de résolution j . Cette approximation de fonction est intégrée à l'aide de la fonction d'échelle intégrée I.3.10.

Illustration du calcul du premier terme $\int_0^1 Q_{(f(0))}^0(\theta) d\theta$

Le calcul du premier terme du vecteur intégration issue de la matrice intégration est illustré via la formule :

$$\int_0^1 (Q_{(f(0))}^0(\theta)) d\theta = \int_0^1 (FImatrderivcp^{(j)0}(\theta)) \cdot \frac{\partial f'(\theta)}{\partial (f(0))} d\theta \quad (\text{II.95})$$

À partir de l'écriture II.95, une discrétisation des fonctions, au niveau de résolution j , est effectuée. Le premier vecteur ($Q_{(f(0))}^0$) devient :

$$\begin{pmatrix} Q_{(f(0))}^0(0) \\ Q_{(f(0))}^0\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ Q_{(f(0))}^0\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ Q_{(f(0))}^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FImatrderivcp^{(j)0}(0) \\ FImatrderivcp^{(j)0}\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ FImatrderivcp^{(j)0}\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ FImatrderivcp^{(j)0}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f'(0)}{\partial (f(0))} \\ \frac{\partial f'\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\partial (f(0))} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'\left(\theta^{i(j)}\right)}{\partial (f(0))} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'(1)}{\partial (f(0))} \end{pmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Ce premier vecteur ($Q_{(f(0))}^0$) est inséré à la formule II.94 et il en résulte la première valeur de la matrice intégration.

Écriture finale l'intégration de la variation du résidu

L'intégrale de la variation du résidu s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_0^1 \frac{\partial T(\theta)}{\partial (f)} d\theta = \langle \mathbf{g}^* \rangle \left[\int_0^1 Q_{(f)}^L(\theta) d\theta \right] \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \text{ et } p = [0 : 2^j]$$

$$= \langle \mathbf{g}^* \rangle \begin{bmatrix} \int_0^1 (Q_{(f(0))}^0(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(p))}^0(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(2^j))}^0(\theta)) d\theta \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 (Q_{(f(0))}^L(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(p))}^L(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(2^j))}^L(\theta)) d\theta \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 (Q_{(f(0))}^{2^j}(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(p))}^{2^j}(\theta)) d\theta & \cdots & \int_0^1 (Q_{(f(2^j))}^{2^j}(\theta)) d\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

Remarques :

La matrice d'intégration $\left[\int_0^1 Q_{(f)}^L(\theta) d\theta \right]$ est une des étapes clés de la résolution de Newton. Le temps de calcul dépendra essentiellement de l'intégration de cette matrice. Cette méthode d'intégration II.3.1.2 est facilement implantable au sein d'un code de calcul

par éléments finis, car sa conception est très similaire à la méthode actuelle. L'intégration se résume à la somme d'un produit de poids multiplié à des coefficients.

Pour valider la méthode d'intégration par rapport à un code de calcul par éléments finis, deux structures seront étudiées dans la partie II.5. Avant de s'intéresser à l'analyse de ces poutres 1D, il est nécessaire de définir, au préalable, les différentes étapes de la méthode de résolution de Newton. Ceci fait l'objet des travaux exposés dans la section suivante II.4.

II.4. Méthode de résolution de Newton

Une présentation succincte des étapes de la méthode de résolution est illustrée ci-dessous. Une description plus étoffée est réalisée après la définition des notations utilisées.

Les étapes de la méthode de Newton sont :

1. Initialisation des données et des variables
2. Calcul des bases naturelles avant et après déformation " \vec{g}_k " et " \hat{g}_k " puis des métriques et des bases duales
3. Calcul des termes du résidu
4. Approximation et intégration du résidu
5. Calcul des termes de l'opérateur tangent, variation du résidu
6. Approximation et intégration de l'opérateur tangent
7. Résolution du système d'équations
8. Définition du nouveau vecteur position finale $\hat{X}_{a,coef}$
9. Vérification de la précision du résidu

La méthode de résolution de Newton est adaptée à la méthodologie d'intégration approchée, développée dans le chapitre II.3.1.2. Deux étapes spécifiques ont été introduites afin de définir le résidu et l'opérateur tangent à un niveau de résolution "jo". La durée d'analyse en temps CPU, de l'approximation par ondelettes dépend directement du nombre de points utilisés pour les différents calculs. Concernant l'approximation de l'intégration via une ondelette globale, l'idée est d'utiliser la même position des points que ceux utilisés pour le calcul de la cinématique.

Pour diminuer le temps de calcul, il est possible d'utiliser pour l'intégration un nombre inférieur de points, choisit dans l'ensemble des points utilisés pour la cinématique et ce, sans changer la technique exposée au chapitre II.3.1.2. L'ensemble des points utilisé pour l'approximation d'intégration devra alors correspondre à un niveau "jo" identique ou inférieur au niveau "j" utilisé pour la cinématique.

Notations utilisées

Liste des indices liés à la cinématique :

- $i_{\textcircled{j}}$: L'indice des points de l'échelle de la décomposition en ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, "i" : indice du point et "j" : niveau

- k_j : le facteur de translation concernant l'interpolation de la décomposition en ondelettes

Liste des indices liés à l'intégration :

- $io_{(jo)}$: L'indice des points de l'échelle de la décomposition en ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, "io" : indice du point et "jo" : niveau
- k_{jo} : le facteur de translation concernant l'intégration de la décomposition en ondelettes

Détails des étapes de résolution de la méthode de Newton

1. Initialisation :

Les positions initiales X sont connues et fixes au cours de la résolution. À l'initialisation ($m=0$), les positions finales \hat{X} sont prédéfinies par les valeurs des positions initiales.

$$X_a \left(\theta^{i(j)} \right)^{(m)} := \langle FImatrcp^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle (X_{a,coeff}) \quad (\text{II.98})$$

$$\hat{X}_a \left(\theta^{i(j)} \right)^{(m)} := \langle FImatrcp^{(j)} \left(\theta^{i(j)} \right) \rangle (\hat{X}_{a,coeff}) \quad (\text{II.99})$$

$$\hat{X}_a \left(\theta^{i(j)} \right)^{(0)} := X_a \left(\theta^{i(j)} \right)^{(0)} \quad (\text{II.100})$$

Les termes $\vec{g}_k^{(j)}$ ($k=1..3$ correspond à l'indice de direction locale en 3D) peuvent être calculés à l'initialisation, car ces termes resteront inchangés jusqu'à la fin de la résolution. $\theta^{i(j)}$ sont les points utilisés par la décomposition de la fonction d'échelle au niveau "j" de résolution.

$$\begin{aligned} \vec{g}_k^{(j)} &= \frac{\partial X^{(j)}}{\partial \theta_k^{(j)}} \\ &= \frac{\partial X^a}{\partial \theta_k^{(j)}} \vec{I}_a \\ &:= \langle \vec{I}_a \rangle \left[FImatrderivcp_k^{(j)} \right] (X_{a,coeff}) \end{aligned} \quad (\text{II.101})$$

2. Calcul de la base naturelle à l'étape "m"

Le calcul des termes $\hat{g}_k^{(j)}$ se fait aux points de discrétisation de la décomposition en ondelettes.

$$\begin{aligned}
 \vec{\hat{g}}_k^{(j)(m)} &= \frac{\partial \vec{\hat{X}}^{(j)}}{\partial \theta_k^{(j)}} \\
 &= \frac{\partial \hat{X}^a{}^{(j)}}{\partial \theta_k^{(j)}} \vec{I}_a \\
 &:= \langle \vec{I}_a \rangle [FImatrderivcp_k^{(j)}] (\hat{X}_{a,coeff})
 \end{aligned} \tag{II.102}$$

3. Calcul des termes du résidu à l'étape m

A l'aide de la définition II.2.4.1 des différents termes du résidu et du calcul de $\vec{\hat{g}}_k^{(j)}$ initial et à l'étape m, les forces internes et externes de l'expression du résidu à l'étape m peuvent être déduites.

Le calcul de ces forces suit les étapes suivantes :

- Calcul des composantes covariantes du tenseur métrique $\hat{g}_{kl}^{(j)}$ et $g_{kl}^{(j)}$
- Calcul des composantes contravariantes du tenseur métrique inverse $\hat{g}^{kl(j)}$ et $g^{kl(j)}$
- Calcul des composantes covariantes du tenseur de déformation $\epsilon_{kl}^{(j)}$
- Calcul des composantes contravariantes du tenseur de contrainte σ^{kl} (pour faciliter le produit doublement contracté avec la vitesse de déformation virtuelle)
- Calcul des composantes covariantes du tenseur vitesse de déformation virtuelle D_{kl}^*
- Calcul de $\sqrt{g} = \|\hat{g}_{kl}\|$

Il est ainsi possible d'en déduire les forces internes non intégrées $\sigma : \vec{D}^* \sqrt{g}$ et les forces externes non intégrées $\vec{T} \cdot \vec{V}^* \sqrt{g_s}$ aux différents points $(\theta^{i(j)})$.

4. Approximation et intégration du résidu à l'étape m

L'intégration du résidu peut être décomposée en deux parties : celle des forces internes et celle des forces externes. Les intégrations sont directement calculées suivant la méthode d'intégration proposée précédemment au chapitre II.3.1.2.

- **Illustration de la procédure d'intégration des forces internes sur le cas 1D**

Les forces internes généralisées qui correspondent aux composantes du vecteur résidu nécessitent d'être intégrées. Pour simplifier les écritures, la nomination **F** est utilisée pour représenter ces composantes. La méthode d'intégration approchée est mise en œuvre dans ce calcul. Cette technique d'intégration est détaillée au chapitre II.3.1.2.

L'intégration des forces internes est définie par :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sigma^{11}(x) D_{11}^*(x) \sqrt{g} dx &= \int_0^1 \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \left(\langle FImatrderivcp^{\textcircled{1}}(x) \rangle \right)^T \cdot \sigma^{11}(x) \cdot \sqrt{g} dx \\
 &= \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 F^L(x) dx \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 F^0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 F^L(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 F^{2^j}(x) dx \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{II.103}$$

Remarque : pour simplifier, $\langle \dot{V}_{1,coeff}^* \rangle$ est noté $\langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle$

L'intégration de $\int_0^1 \sigma^{11}(x) D_{11}^*(x) \sqrt{g} dx$ est équivalente au produit du vecteur représentant les degrés de liberté virtuels " $\langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle$ " par le vecteur " $\left(\int_0^1 F^L(x) dx \right)$ ". La même forme d'intégration générique donnée par l'expression II.87 est retrouvée dans ce calcul. Le résultat nécessite plusieurs intégrations approchées, dont la formulation générale est donnée par les expressions II.88.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 F^L(x) dx &= \sum_{k_{j^o}=0}^{2^{j^o}} \int_0^1 \gamma_{j^o, k_{j^o}}(x) \left(C_{F^L}^{j^o, k_{j^o}} \right) dx \\
 &= \langle \theta_0^{j^o} \quad \theta_1^{j^o} \dots \theta_k^{j^o} \dots \theta_{2^{j^o}}^{j^o} \rangle \cdot \left(\left[M_{applicondilimite}^{\textcircled{j^o}} \right] (F^L) \right) \tag{II.104} \\
 &= \langle \dots S^{\textcircled{j^o}} \dots \rangle (F^L)
 \end{aligned}$$

Pour mémoire, le vecteur " (F^L) " est approché par un support de discrétisation qui se compose d'une interpolation fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N, à un niveau de résolution " j^o ". D'autre part, chaque terme " $\left(F^L \left(\theta^{\textcircled{j^o}} \right) \right)$ " du vecteur correspond à la valeur de " $(F^L(x))$ " calculée au point $\theta^{\textcircled{j^o}}$.

Remarques :

L'application d'une nouvelle décomposition en ondelettes, avant d'intégrer, permet d'avoir une certaine liberté au niveau de la résolution.

En effet, une interpolation initiale de la cinématique via une fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies à un niveau " j " de résolution a été réalisée, avec une échelle de points " $\theta^{\textcircled{i}}$ " équivalente à $2^j + 1$ points. L'ajout de la nouvelle décomposition à l'étape d'intégration permet de choisir une échelle de points différente, qui est soit équivalente ou soit inférieure à l'échelle initiale, notée ici : " $\theta^{\textcircled{j^o}}$ ". Dans ce cadre d'applications, il a été choisi, dans un premier temps et, par simplicité, d'utiliser une échelle " j^o " équivalente à l'échelle initiale " j ".

— Illustration de la procédure d'intégration du second membre, forces externes généralisées, sur le cas 1D

L'intégration des forces externes généralisées est exprimée via la relation :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 TV^*(x)\sqrt{g_s}dx &= \int_0^1 \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \left(FImatrcp^{(j)}(x) \right)^T \cdot T\sqrt{g_s}dx \\
 &= \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 SM^L(x)dx \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle \dot{V}_{coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 SM^0(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 SM^L(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 SM^{2^j}(x)dx \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{II.105}$$

Dans ce cas de figure, les vecteurs \vec{T} et \vec{V}^* ont été remplacés par des scalaires. La forme générique d'intégration donnée par l'expression II.87 est retrouvée dans ce cas. Le calcul est ainsi effectué à l'aide des expressions génériques : II.88, c'est à dire :

$$\int_0^1 SM^L(x)dx = \langle \dots S^{(j_0)} \dots \rangle (SM^L) \tag{II.106}$$

5. Calcul des termes de l'opérateur tangent, variation du résidu à l'étape m

La définition II.2.4.2 des différents termes de l'opérateur tangent permet de le calculer sans intégrer à l'étape m.

Le calcul de la variation du résidu est guidé par les étapes suivantes :

- Calcul de $\frac{\partial \vec{g}_k}{\partial \hat{X}_{a,coeff}}$
- Calcul de $\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \hat{X}_{a,coeff}}$
- Calcul de $\frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \hat{X}_{a,coeff}}$
- Calcul de $\frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial \hat{X}_{a,coeff}}$
- Calcul de $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \hat{X}_{a,coeff}}$

Il est ainsi possible d'en déduire les différentes parties de l'opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial ddl} \dot{D} \sqrt{g}$ et $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} \sigma^{kl} \dot{D}$ où "ddl" représente les degrés de liberté notés $\hat{X}_{a,coeff}$.

6. Approximation et intégration de l'opérateur tangent à l'étape m

L'expression de l'intégrale de la dérivée partielle des forces internes par rapport aux degrés de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ " peut se résumer sous la forme générique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial d d l} \int_0^1 \sigma^{kl}(x) D^*(x) \sqrt{g} dx = \langle V_{coeff}^* \rangle \left[\int_0^1 G_{(ddl)}^L(x) dx \right] \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \quad (\text{II.107})$$

La méthode d'intégration approchée de la variation du résidu est détaillée dans la partie II.3.2.

L'intégration de " $\frac{\partial}{\partial d d l} \int_0^1 \sigma^{kl}(x) D_{kl}^*(x) \sqrt{g} dx$ " équivaut au produit du vecteur représentant les degrés de liberté virtuels " $\langle V_{a,coeff}^* \rangle$ " par la matrice intégration $\left[\int_0^1 G_{(ddl)}^L(x) dx \right]$. Les termes de la matrice intégration correspondent à un ensemble d'intégrales. Ces dernières dépendent à la fois de l'indice "L", faisant référence au point de discrétisation utilisé, et du degré de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ ", en lien avec la discrétisation des positions finales " \hat{X} ". La relation II.107 peut-être réécrite en fonction de l'indice "p", dont ce dernier est une valeur correspondante au degré de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ " utilisé et devient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_{(ddl(p))}^L(x) dx &= \int_0^1 \left(\langle FImatrderivcp^{\textcircled{j}}(x) \rangle^T \cdot \frac{\partial (\sigma^{kl}(x) \sqrt{g})}{\partial d d l(p)} dx \right) \\ &= \int_0^1 \left(G_{(ddl(p))}^L(x) \right) dx \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \quad p = [0 : 2^j] \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^1 G_{(ddl(p))}^0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 G_{(ddl(p))}^L(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 G_{(ddl(p))}^{2^j}(x) dx \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

À partir de cette écriture, la méthode d'intégration développée dans le chapitre II.3.1.2 permet de calculer les composantes de la matrice de raideur.

$$\int_0^1 \left(G_{(ddl(p))}^L(x) \right) dx = \langle \dots S^{\textcircled{jo}} \dots \rangle \left(G_{(ddl(p))}^L \right) \quad (\text{II.109})$$

Le terme " $G_{(ddl(p))}^L$ " est approché par un support de discrétisation hybride à un niveau de résolution 'jo'.

7. Résolution du système d'équations afin de déterminer $\delta \hat{X}_{a,coeff}^{(m)}$

Le système d'équations s'exprime via la relation suivante :

$$\left(R^{(m)} \right) = \left[-\frac{\partial R^{(m)}}{\partial d d l} \right] \left(\delta \hat{X}_{a,coeff}^{(m)} \right) \quad (\text{II.110})$$

Les inconnues sont déterminées via la résolution du système :

$$\left(\delta \hat{X}_{a,coeff}^{(m)} \right) = \left[-\frac{\partial R^{(m)}}{\partial d d l} \right]^{-1} \left(R^{(m)} \right) \quad (\text{II.111})$$

8. Définition du nouveau vecteur des positions finales $\hat{X}_{a,coeff}^{(m+1)}$

Le nouveau vecteur des positions finales est défini par l'équation suivante :

$$\hat{X}_{a,coeff}^{(m+1)} = \hat{X}_{a,coeff}^{(m)} + \delta \hat{X}_{a,coeff}^{(m)} \quad (\text{II.112})$$

9. Vérification de la précision du résidu

Une norme infinie du résidu est utilisée pour valider la méthode de résolution de Newton. Cette norme est contrôlée par rapport à un critère de précision " Ω " qui est fixé à 1.10^{-5} dans les simulations sélectionnées.

$$\Omega \geq \|R(\hat{X})\|_{\infty} \quad (\text{II.113})$$

La section II.4 a permis de présenter la méthode de résolution de Newton en détail. L'application de la méthodologie par rapport à un code de calcul par éléments finis est abordée dans la partie suivante II.5.

II.5. WFEM Résolution de problèmes

L'objectif de la section II.5 est de valider l'insertion des ondelettes dans la méthode des éléments finis à travers la résolution de deux problèmes 1D. Pour cela, il est nécessaire de vérifier la capacité de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, d'ordre 6, à représenter un phénomène de localisation.

Ces résolutions permettent de mettre en œuvre la méthode d'intégration développée dans la section II.3.1.2, et ce, dans le cadre d'une résolution par éléments finis. Les trois sections précédentes II.2, II.3 et II.4 ont présenté les formulations analytiques et les conditions particulières à mettre en place pour résoudre des équations aux dérivées partielles via la méthode des éléments finis avec ondelettes.

La méthode de résolution de Newton, présentée dans la section précédente II.4 est déployée pour l'analyse de ces structures.

II.5.1. Présentation des géométries

Les deux géométries retenues pour cette investigation sont représentées à la figure II.8.

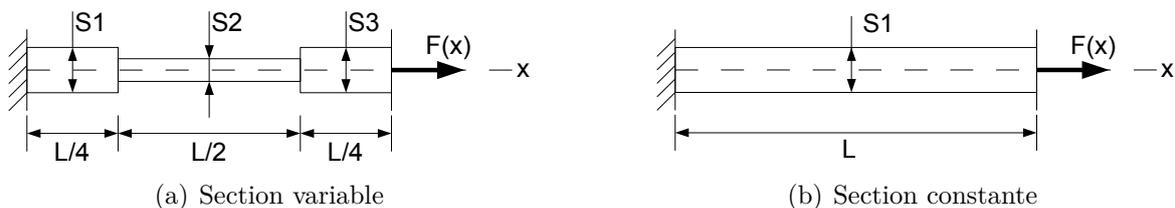


FIGURE II.8 – Poutres soumises à un essai de traction uniaxial

La première structure numérique étudiée II.8(a) est une poutre avec une variation de section. La poutre se compose de trois sections : la première section et la troisième ont la même grandeur " $S_1=S_3=1 \text{ mm}^2$ " et la seconde section équivaut au dixième de la section " S_1 ", soit " $S_2 = (1/10) S_1$ ". Les longueurs de la section 1 et 3 correspondent au quart de la poutre " $L/4$ ", et la longueur de la section intermédiaire est de " $L/2$ ". La longueur totale " L " de la structure est de 1 mm.

La seconde structure II.8(b) est une poutre similaire à la première, mais avec une section constante. La longueur totale est identique à la première structure, soit 1mm. La section est équivalente à 1 mm^2 .

Pour cette étude, le matériau utilisé est de l'acier de construction dont le module d'Young est de l'ordre de 210 GPa. Les structures sont soumises à un test de traction uniaxial, dont la force ponctuelle sera de 1050 N, placée à l'extrémité des poutres. La déformation maximale atteinte dans la cas de la poutre à section variable est de 5% alors que la déformation minimale est de 0,5%. L'évolution de la déformation est équivalente à un signal en créneau à deux seuils.

En ce qui concerne la poutre à section constante, la déformation est régulière sur l'ensemble de l'élément, soit 0,5%.

Deux cas 1D avec une loi élastique linéaire simple sont volontairement utilisés afin de comparer les résultats obtenus avec les solutions analytiques.

II.5.2. Résultats analytiques

L'équation II.114 définit les longueurs finales atteintes " L_{11} , L_{21} et L_{31} " pour chacune des sections de la première géométrie II.8(a). La position des nœuds peut être ainsi déduite via ces données.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 S_1 &= \sigma_2 S_2 = \sigma_3 S_3 = F \\
 E \epsilon_1 S_1 &= E \epsilon_2 S_2 = E \epsilon_3 S_3 = F \\
 \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(L_{10})^2}{(L_{11})^2} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{11} = \sqrt{\left(\frac{-(L_{10})^2}{2 \epsilon_1 - 1} \right)} \\
 \epsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(L_{20})^2}{(L_{21})^2} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{21} = \sqrt{\left(\frac{-(L_{20})^2}{2 \epsilon_2 - 1} \right)} + L_{11} \\
 \epsilon_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(L_{30})^2}{(L_{31})^2} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{31} = \sqrt{\left(\frac{-(L_{30})^2}{2 \epsilon_3 - 1} \right)} + L_{21}
 \end{aligned} \tag{II.114}$$

L'équation II.115 définit la longueur finale atteinte " L_{11} " pour la seconde géométrie II.8(b). La position de nœud de discrétisation peut être déduite via cette information.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 S_1 &= F \\
 E \epsilon_1 S_1 &= F \\
 \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(L_{10})^2}{(L_{11})^2} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{11} = \sqrt{\left(\frac{-(L_{10})^2}{2 \epsilon_1 - 1} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.115}$$

II.5.3. Discrétisation de la structure

La figure II.9 illustre la discrétisation des géométries à un niveau de résolution "j" égal à 3, soit 9 points de discrétisation.

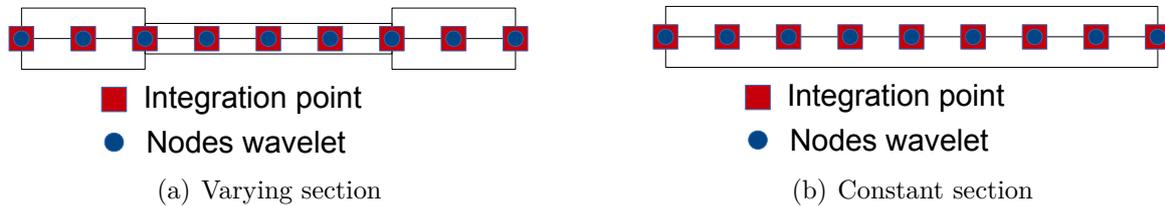


FIGURE II.9 – Poutres discrétisées, interpolation à l'aide d'une fonction d'échelle de l'ondelette, niveau de résolution "j=3"

La figure II.9(a) illustre le découpage de la géométrie avec une section variable à l'aide d'une décomposition en ondelettes via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.

L'image II.9(b) expose la discrétisation de la seconde structure avec une section constante à l'aide d'une décomposition similaire à la précédente.

Le niveau de résolution pour l'intégration "jo" II.3.1.2, II.4 est équivalent au niveau de résolution de la discrétisation "j". Les points d'intégration sont ainsi situés à la même position que les nœuds, où sont déterminés les déplacements.

Un autre niveau de résolution "j" est employé pour cette investigation "j=6", avec 65 points de discrétisation.

II.5.4. Analyse des résultats avec la méthode WFEM

La méthode de résolution de Newton permet de résoudre les formulations variationnelles décrivant le comportement physique des deux problèmes 1D II.8. La technique conduit ainsi aux résultats suivants.

La figure II.10 représente l'évolution de la déformation " ϵ^{11} " des deux géométries et l'évolution de la contrainte " σ^{11} " est illustrée sur l'image II.11.

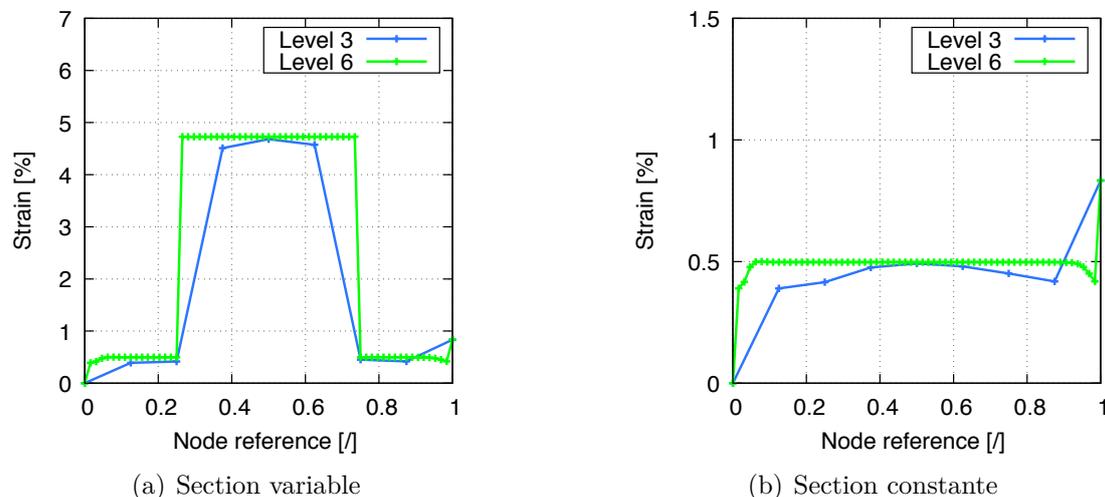


FIGURE II.10 – Évolution de la déformation avec la méthode WFEM

Le graphique II.10(a) présente l'évolution de la déformation " ϵ^{11} " à deux niveaux de résolution (" $j=3$ ", en bleu, et " $j=6$ ", en vert) pour la géométrie avec une section variable. La fonction d'échelle de l'ondelette permet de visualiser convenablement le saut de déformation présent au milieu de cette structure. L'augmentation du niveau de résolution " j " permet de se rapprocher plus sensiblement du résultat analytique, qui est obtenu via les formulations analytiques II.5.2. L'évolution exacte de la déformation correspond à un créneau à deux seuils, 0,5% sur le premier et le dernier quart de l'élément et 5% sur la partie centrale de la structure.

L'évolution de la contrainte II.11(a) est similaire à l'évolution de la déformation II.10(a). Cela est notamment dû à la contrainte " σ^{11} " qui correspond au produit du module d'Young " E " et de la déformation " ϵ^{11} ". La contrainte sur la première et la dernière section équivaut à 1045 MPa. Pour la section centrale, celle-ci est de 9930 MPa.

Le graphique II.10(b) présente l'évolution de la déformation à deux niveaux de résolution (" $j=3$ ", en bleu, et " $j=6$ " en vert) pour la structure avec une section constante. La déformation " ϵ^{11} " atteint approximativement 0,5% pour le cas de résolution " $j=6$ ".

L'évolution de la contrainte II.11(b) est identique à celle de la déformation II.10(b). La contrainte atteint un point maximum sur les premiers nœuds d'intégration et redescend sur un plateau de 1045MPa.

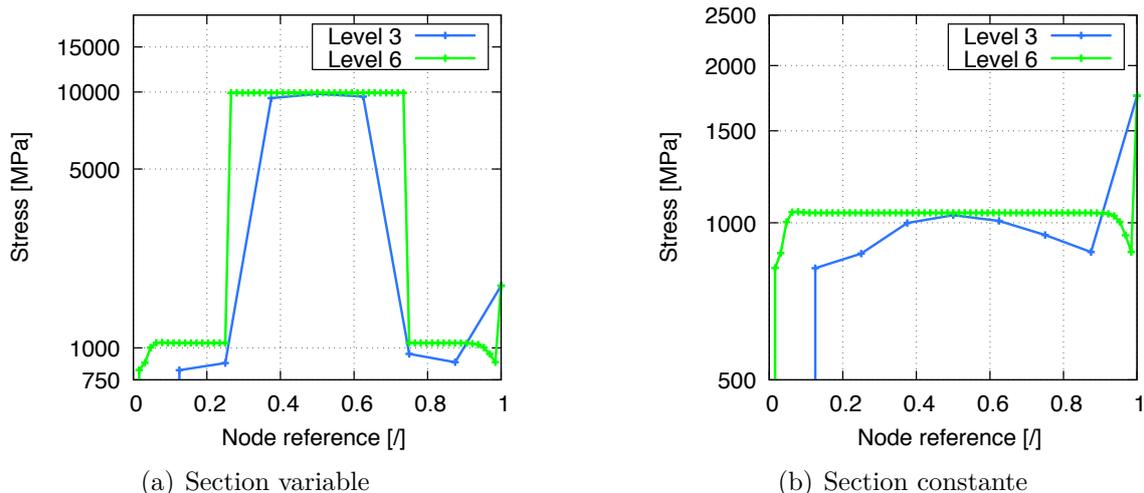


FIGURE II.11 – Évolution de la contrainte avec la méthode WFEM

L'insertion des ondelettes dans la méthode des éléments finis permet de représenter des phénomènes de localisation tels qu'une poutre avec une variation de section II.10(a). Cependant, il peut être observé quelques effets de bords aux niveaux des nœuds extrêmes qui peuvent s'expliquer par une représentation erronée des termes dérivés de la formulation variationnelle II.47. Ces termes inexacts viennent, par conséquent, impacter les intégrations approchées et le système d'équations.

Il peut être également constaté que l'emploi des ondelettes dans la méthode des éléments finis pour le calcul d'une structure avec une section constante ne permet pas de visualiser une contrainte et une déformation régulière. L'utilisation des ondelettes dans ce cas précis n'est pas recommandée.

Malgré ces erreurs de modélisation, pouvant être considérées comme négligeables, la méthode des éléments finis avec ondelette permet d'analyser et visualiser des phénomènes particuliers.

II.5.5. Évolution du résidu concernant la méthode de résolution de Newton

Le graphique II.12 représente l'évolution du résidu II.47 via la méthode de résolution de Newton. Les résultats présentés concernent la géométrie à section variable au niveau de résolution "j=6". Des décalages et des coefficients multiplicateurs ont été mis en place afin de donner plus de lisibilité au graphique.

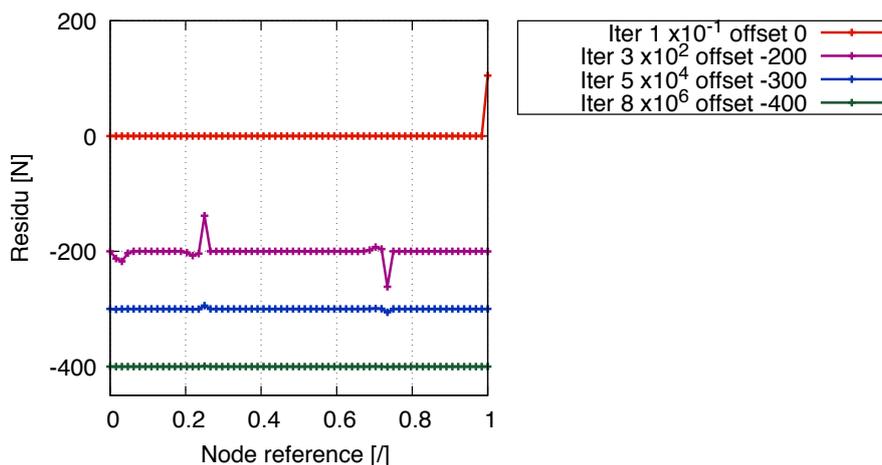


FIGURE II.12 – Évolution du résidu avec la méthode WFEM

La courbe rouge correspond à l'évolution à la première itération. Un coefficient multiplicateur de 10^{-1} et un décalage de 0 a été imposé. Cette courbe montre une évolution particulière du résidu en raison qu'au premier pas de résolution, le résidu est équivalent aux forces externes. Cette équivalence se justifie par l'initialisation des positions finales \hat{X} via les valeurs des positions initiales fixes X . Dans ce cas précis, la contrainte σ^{11} équivaut à 0.

La courbe violette représente l'évolution à l'itération 3. Un coefficient multiplicateur de 10^2 et un décalage de -200 a été imposé. L'évolution du résidu révèle dans ce cas de figure que l'évolution des forces internes viennent s'annuler avec les forces externes. Des oscillations brèves sont observables au niveau des nœuds proches de la variation de section.

La courbe bleue symbolise l'évolution à l'itération 5 avec un coefficient multiplicateur de 10^4 et un décalage de -300. Les oscillations présentes au niveau des deux épaulements s'atténuent assez rapidement.

La courbe verte, enfin, illustre l'évolution à l'itération 8 avec un coefficient multiplicateur de 10^6 et un décalage de -400. Les oscillations sont lissées et il en résulte que le système est résolu.

L'analyse de l'évolution du résidu apporte également une information supplémentaire : elle permet de situer les phénomènes particuliers sur l'élément.

II.6. Conclusion

Le chapitre II a permis d'illustrer la méthode des éléments finis avec ondelettes, plus connue sous le nom WFEM (Wavelet Finite Element Method). La littérature expose des résultats remarquables dans les articles de J. Ko, J. Ma, L.A. Diaz, J. Jin, X. Chen, J. Chen, R.D. Patton [92, 107, 44, 88, 35, 31, 128]. Le fait de pouvoir détecter, analyser et de résoudre des problèmes comportant des phénomènes particuliers a attiré notre attention.

La section de ce chapitre II.2 expose les formulations analytiques utilisées pour la formulation variationnelle II.47. Les termes composant cette équation ont été définis via un support de discrétisation qui se compose de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N .

Un autre point a également été abordé : l'application des conditions limites de Dirichlet sur une décomposition en ondelettes. Le fait de pouvoir imposer des conditions limites traditionnelles apporte un réel avantage au niveau de l'implantation de la méthode au sein d'un code de calcul par éléments finis. La projection des coefficients d'approximation de la base V_j au repère de l'élément évite l'application de conditions limites particulières sur un ensemble d'équations. En effet, les coefficients d'approximation " $c^{j,k}$ " interviennent au sein de nombreuses équations de la décomposition, il est, par conséquent, difficile d'imposer des conditions sur ces facteurs.

La section suivante II.3 illustre deux approches d'intégration utilisables pour la formulation variationnelle II.47.

La première méthode II.3.1.1 consiste à intégrer des fonctions membres en s'appuyant sur l'une des propriétés relatives à l'ondelette de Daubechies. Cette propriété concerne l'intégrale d'un produit de deux fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette. Ces formulations ont été développées afin de satisfaire le degré de l'équation aux dérivées partielles comme il a pu être observé dans d'autres travaux, notamment ceux de J. Ko, L.A. Diaz, J. Ma, M.Q. Chen, X. Chen, E.B. Lin, X. Zhou et C.H. Romine [92, 44, 107, 32, 35, 104, 167, 136]. Des modifications de la définition des termes des forces internes II.2.4.1 ont été réalisées dans l'optique de faire correspondre les écritures. Le tenseur des contraintes et le tenseur de déformation sont ainsi exprimés à l'aide d'une discrétisation fonction d'échelle dérivée. L'intégration du produit du tenseur des contraintes et du tenseur de déformation permet d'appliquer la technique d'intégration. Il a pu être constaté que la méthode d'intégration est spécifique à une loi particulière pour laquelle une formule explicite est possible. Son expression à un comportement matériel complexe est difficilement envisageable, d'où l'utilisation d'une seconde méthode d'intégration.

Cette seconde technique II.3.1.2 repose sur l'approximation de l'intégration d'un produit complexe de fonctions dérivées à l'aide d'une intégration approchée, exprimée via l'intégrale de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N . La validation de la méthode d'intégration II.3.1.3 à travers l'intégration de produit de différentes fonctions arbitraires a montré des résultats remarquables avec des erreurs pouvant être considérées comme négligeables. L'intégration de l'opérateur tangent II.3.2 a pu être réalisée via cette méthode d'intégration.

La section II.4 présente, ensuite, les différentes étapes de la méthode de résolution de Newton mises en application au sein du code des éléments finis.

Deux étapes supplémentaires ont été ajoutées afin de définir le résidu et l'opérateur tangent à un niveau de résolution " jo ". Ces ajouts s'expliquent via l'utilisation de la méthode d'intégration approchée, développée dans la partie II.3.1.2. Cette dernière possède une

particularité, car il est, en effet, possible d'intégrer un produit de fonctions définies sur un niveau de résolution "j", à un niveau de résolution "jo" pour l'intégration. Cette échelle "jo" peut être uniquement identique ou inférieure au niveau de résolution "j". Cette particularité s'explique par l'étape d'approximation du vecteur " (P^L) " au sein de la méthode d'intégration II.3.1.2. Pour cette méthode de résolution de Newton, le critère de précision " Ω " a été fixé à 1.10^{-5} .

Enfin, la section II.5 permet de mettre en application la méthode des éléments finis avec ondelettes à travers la résolution de deux problèmes 1D. L'objectif était de vérifier la capacité de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 à représenter un phénomène de localisation. Ces résolutions ont permis de mettre en œuvre la méthode d'intégration développée dans la partie II.3.1.2.

Pour cette investigation, deux géométries ont été retenues afin de mettre en lumière les avantages et les inconvénients de la méthode WFEM. La visualisation des évolutions de la déformation " ϵ_{11} " et de la contrainte " σ_{11} " par rapport aux deux géométries a révélé le potentiel de la technique à représenter un saut de déformation et de contrainte pour la géométrie avec une variation de section. Cependant, l'emploi des ondelettes dans la méthode des EF sur une structure avec une section constante n'est pas recommandé. En effet, de meilleurs résultats sont obtenus avec la méthode traditionnelle des EF.

Des effets de bords, toutefois, ont été relevés sur les graphiques. Ceux-ci peuvent s'expliquer par des intégrations approchées erronées des termes dérivés de la formulation variationnelle II.47. En effet, comme il a pu être constaté dans la section II.2 la représentation des dérivées des fonctions arbitraires comportait des effets de bords II.2.1.8. Ces derniers se justifiaient par une conception particulière des matrices [FImatr] et [FImatr-deriv]. Le système d'équations des problèmes 1D est, par conséquent, impacté et des effets de bords apparaissent.

Ce chapitre II a ainsi permis de présenter la méthode des éléments finis avec ondelettes. Des optimisations via l'application de conditions limites de Dirichlet et par la méthode d'intégration approchée ont été apportées. La méthode WFEM a montré un réel potentiel pour analyser et visualiser des fonctions discontinues, mais des améliorations de représentation peuvent encore être apportées. L'utilisation de la méthode WFEM se justifie pour l'analyse de structures complexes. Toutefois, dans le cas d'une modélisation numérique d'une structure 1D avec une section constante, la méthode des EF traditionnelle permet d'avoir de bien meilleurs résultats.

Le nouvel objectif est ainsi de développer une méthode hybride qui permettrait de combiner la méthode des éléments finis traditionnelle à la méthode des éléments finis avec ondelettes. Le développement de la technique est abordé dans le chapitre suivant III.

CHAPITRE III

Construction d'un support de discrétisation hybride

Sommaire

III.1 Introduction	110
III.2 Support de discrétisation hybride, interpolation polynomiale- ondelettes	111
III.2.1 Préambule	111
III.2.1.1 Interpolation polynomiale : rappel et notation	111
III.2.1.2 Interpolation en ondelettes : rappel et notation	112
III.2.2 Création du support hybride, interpolation polynomiale- ondelettes	112
III.2.2.1 Représentation d'une fonction via un couplage polynomiale- ondelettes sur un intervalle $[0 :1]$	113
III.2.2.2 Imposition de conditions particulières pour la dé- composition polynomiale-ondelettes	115
III.2.2.3 Évolution des fonctions d'interpolation polynomiale- ondelettes	118
III.2.2.4 Validation de la méthode de décomposition hy- bride polynomiale-ondelettes	119
III.3 Intégration du support de discrétisation hybride.	123
III.3.1 Méthode d'intégration du résidu	123
III.3.1.1 Développement de la méthode d'intégration ana- lytiquement	123
III.3.1.2 Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires	125
III.3.2 Intégration de la variation du résidu avec le support hybride	128
III.4 Conclusion	131

III.1. Introduction

La technique couramment employée dans les logiciels de simulation numérique s'appuie sur une interpolation polynomiale afin de déterminer et résoudre les équations différentielles associées. Cependant une des limitations de l'interpolation polynomiale est sa difficulté à modéliser simplement et précisément des phénomènes de localisations.

Il est à noter par exemple que les éléments de continuité C^0 ne permettent une rupture de continuité de la dérivée qu'au niveau de la jonction des éléments, ce qui conduit d'une part à une dépendance de la solution au maillage. D'autre part, par nature, aucune rupture de continuité ne peut être simulée dans un élément, cela impose en général une finesse de maillage importante pour détecter et rendre compte d'une singularité.

Le chapitre II a présenté, l'utilisation de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies employée comme fonction d'interpolation pour la méthode des éléments finis. L'exemple de l'analyse du problème 1D, via la méthode d'intégration développée II.3.1.2 a montré que le support ondelette permettait d'obtenir une solution approchée au problème académique posé. L'application de cette interpolation en ondelettes améliore nettement la représentation de géométries et/ou de phénomènes irréguliers, montrant ainsi son intérêt. Cependant, il a été remarqué que pour l'analyse d'évolutions régulières, son utilisation n'était pas justifiée. Une solution présentée dans la littérature pour être plus versatile entre des phénomènes réguliers et non réguliers est de rechercher une base d'ondelettes plus régulière. Compte tenu de la très bonne performance des éléments finis classiques à base polynomiale, cette voie n'est pas retenue dans ce travail.

L'idée a été de développer une méthode hybride permettant de combiner la méthode des éléments finis sous sa forme classique et la méthode des éléments finis avec ondelettes. Pour cela, il est proposé un nouveau support de discrétisation couplant à la fois l'interpolation polynomiale et l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N . La partie ondelette est alors conçue pour pouvoir enrichir l'interpolation polynomiale initiale.

Ce chapitre III présente ce couplage hybride avec les particularités liées. Ce couplage "interpolation polynomiale" et "interpolation en ondelettes" permettra de représenter avec précision les différents phénomènes rencontrés (de localisation, de régularité,...).

L'apport de l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle à la méthode des éléments finis habituelle est d'enrichir localement l'interpolation native polynomiale. L'idée à terme est que cet enrichissement soit adaptatif en fonction de l'importance des singularités observées. Cette adaptation doit s'effectuer à l'aide de l'apport multirésolution de l'approximation en ondelettes. Il est à rappeler qu'il serait ainsi possible théoriquement de représenter un nombre quelconque d'irrégularités sur un même élément, les limitations étant principalement liées aux surcoûts des temps de calcul induits.

À noter enfin que l'utilisation d'ondelettes de Daubechies, de par leurs évolutions fortement irrégulières, se justifie particulièrement dans ce cadre de l'enrichissement :

- le support polynomial est dédié à la part régulière de la réponse qui est censée concerner la majeure partie de la structure,
- le support fonction d'échelle de l'ondelette intervient spécifiquement pour les parties irrégulières de la réponse qui sont censées être localisées.

Ce chapitre III a pour objectif de présenter et de valider ce support hybride en représentant des fonctions arbitraires, des dérivées de fonctions, des intégrations de produit de

fonctions arbitraires...

La première section III.2 expose la construction du support de discrétisation hybride avec l'application de conditions particulières liées à la décomposition polynomiale-ondelettes. La seconde section III.3 présente la méthode d'intégration du support hybride développée pour la résolution de la formulation variationnelle.

III.2. Support de discrétisation hybride, interpolation polynomiale-ondelettes

III.2.1. Préambule

Avant de s'intéresser à la création du support de discrétisation hybride, un rappel des fonctions d'interpolation est réalisé. L'interpolation polynomiale III.2.1.1 constitue l'interpolation classique utilisée dans le domaine des mathématiques et également au sein des logiciels de modélisation numérique par éléments finis. L'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette Daubechies d'ordre N est employée dans le traitement du signal pour l'analyse et la décomposition de signaux bruités III.2.1.2.

III.2.1.1. Interpolation polynomiale : rappel et notation

L'interpolation correspond à une opération mathématique permettant de construire par exemple en 1D une courbe à partir d'un nombre fini de points. Il existe différents types d'interpolation suivant l'espace utilisé (ex : espace cartésien classique, espace des transformées de Fourier). En éléments finis, l'interpolation polynomiale est la plus usitée de par sa simplicité. Seules les interpolations linéaires et quadratiques sont couramment retenues dans les codes de calcul bien que de nombreux travaux aient montré l'intérêt d'augmenter ce degré d'interpolation pour obtenir une meilleure précision. En fait l'utilisation de polynômes de degré élevé est intéressante pour des problèmes réguliers, mais dès que des ruptures de régularités apparaissent, ce sont les éléments de bas niveaux couplés à un maillage fin qui permettent de représenter plus facilement ces irrégularités (cf. l'introduction du chapitre).

Pour illustrer les choix classiques, un cas d'école 1D est employé. Ce cadre sera ensuite utilisé pour illustrer l'interpolation mixte proposée.

En ce qui concerne l'**interpolation linéaire** relative à un domaine de référence $[-1,1]$, les fonctions d'interpolations classiques (ou fonctions de formes) sont :

$$\varphi_1(x) = \frac{1-x}{2} \qquad \varphi_2(x) = \frac{1+x}{2} \qquad \text{(III.1)}$$

Et à propos de l'**interpolation quadratique** :

$$\varphi_1(x) = \frac{-x(1-x)}{2} \qquad \varphi_2(x) = 1-x^2 \qquad \varphi_3(x) = \frac{x(1+x)}{2} \qquad \text{(III.2)}$$

Les interpolations III.1 et III.2 sont utilisées dans la méthode des éléments finis classique pour représenter tout d'abord la géométrie, mais éventuellement toutes grandeurs nécessaires pour la simulation.

III.2.1.2. Interpolation en ondelettes : rappel et notation

En se plaçant dans un cas de transformées en ondelettes discrètes, les intégrales sont alors représentées par des sommes discrètes.

La fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies est utilisée comme fonction d'interpolation, dont l'ondelette de Daubechies est définie sur un support compact $[0 : N - 1]$ avec N représentant l'ordre de l'ondelette. En dehors de ce domaine, l'ondelette est nulle.

Afin de différencier l'interpolation polynomiale de l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N , les notations utilisées pour définir la fonction d'échelle ϕ dans la partie I.3 sont γ pour la fonction d'approximation et ψ pour la fonction de détails (la notation est inchangée).

Les bases orthonormales associées à ces deux fonctions s'écrivent $\gamma_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$. Ces bases permettent de réaliser une décomposition en ondelettes précise d'une fonction arbitraire. Ces travaux sont présentés dans la partie II.2.1.5.

Il est à rappeler que l'espace V_j est également associé à la base $\gamma_{j,k}$ et W_j à la base $\psi_{j,k}$. L'espace W_j est complémentaire à l'espace V_j .

La base $\gamma_{j,k}$ s'exprime de manière discrète par rapport à la fonction d'échelle sous la formule suivante :

$$\gamma_{j,k}(\theta^i \textcircled{1}) = 2^{j/2} \gamma(2^j \theta^i \textcircled{1} - k) \quad \text{supp}(\gamma) = [0 : N - 1] \quad (\text{III.3})$$

et la base $\psi_{j,k}$ est définie à partir de la fonction ondelette mère :

$$\psi_{j,k}(\theta^i \textcircled{1}) = 2^{j/2} \psi(2^j (\theta^i \textcircled{1}) - k) \quad (\text{III.4})$$

La fonction d'échelle et la fonction ondelette mère satisfont les deux relations d'échelle :

— la fonction d'échelle (fonction d'approximation) :

$$\gamma(x) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j \gamma(2x - j) \quad (\text{III.5})$$

— la fonction ondelette (fonction détails) :

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j p_{N-1-j} \gamma(2x - j) \quad (\text{III.6})$$

III.2.2. Création du support hybride, interpolation polynomiale-ondelettes

L'insertion d'un support en ondelettes, comme fonction d'interpolation, au sein de la formulation variationnelle (cf.II) conduit à des résultats pertinents dans le cas d'une évolution non régulière de la solution. De manière à essayer d'introduire les avantages d'une interpolation à base d'ondelettes, l'objectif a été la création d'un support de discrétisation hybride, couplant l'interpolation polynomiale et l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N .

L'illustration de ce nouveau support au sein de la méthode des éléments finis se fera dans le chapitre IV.

L'idée ici est de vérifier et de valider ce support hybride à travers la représentation de fonctions arbitraires, de fonctions dérivées...

III.2.2.1. Représentation d'une fonction via un couplage polynomiale-ondelettes sur un intervalle $[0 : 1]$

Le chapitre II a montré la capacité de la fonction d'échelle γ à représenter une fonction arbitraire II.1. L'idée du couplage hybride est de représenter la partie irrégulière des phénomènes avec l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N et la partie régulière avec l'interpolation polynomiale. L'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette intervient comme enrichissement local de l'élément.

Afin de simplifier la présentation, un cas 1D est utilisé. Une fonction est choisie arbitrairement et nécessite d'être exprimée au point $\left(\theta^{i \oplus j}\right)$. Sa valeur finale est décomposée additivement entre une contribution polynomiale et une contribution en ondelettes.

$$f\left(\theta^{i \oplus j}\right) := f\left(\theta^{i \oplus j}\right)_p + f\left(\theta^{i \oplus j}\right)_o \quad (\text{III.7})$$

Les indices "P" et "O" font références à la partie de la fonction avec l'interpolation polynomiale "P" et avec l'interpolation en ondelettes "O" exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette. Compte tenu de la connaissance discrète des valeurs de l'ondelette de Daubechies, la décomposition de la fonction "f" est faite sur une échelle dyadique, où le terme " $\theta^{i \oplus j}$ " est défini par :

$$\theta^{i \oplus j} = \frac{t^{i \oplus j}}{2^q} \quad q \geq j \quad \text{avec } t^{i \oplus j} = (0, 1, \dots, 2^q) \quad (\text{III.8})$$

L'échelle dyadique joue un rôle central au sein de la décomposition, car elle permet d'avoir la bonne correspondance entre les valeurs définissant la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N et les valeurs utilisées pour l'interpolation en ondelettes. L'échelle dyadique "q" est équivalente au niveau de résolution "j" afin de simplifier les écritures et les calculs initiaux.

En utilisant la forme générale de l'interpolation polynomiale et l'expression générale de la fonction d'échelle, la relation III.7 s'écrit :

$$f\left(\frac{t^{i \oplus j}}{2^j}\right) := f^r \varphi_r\left(\frac{t^{i \oplus j}}{2^j}\right) + 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j} \gamma\left(2^j \left(\frac{t^{i \oplus j}}{2^j}\right) - k\right) \Delta_c f^{j,k} \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients " f^r " correspondent aux valeurs nodales. L'indice "r" varie de 1 et 2, dans le cas de l'illustration 1D via l'interpolation linéaire, où le "r" est le numéro du nœud d'interpolation utilisé.

Les coefficients " $\Delta_c f^{j,k}$ " correspondent à l'enrichissement apporté par la fonction d'échelle, aux différents points "i" pour le niveau "j". Sous forme matricielle, cela peut se représenter selon :

$$(f) := [Mpoly](f^r) + 2^{j/2}[FImatr](\Delta_c f) \quad (\text{III.10})$$

La taille des matrices dépend du niveau de résolution "j" choisi, les fonctions seront ainsi définies sur " $2^j + 1$ " points.

Dans le cas de l'illustration 1D :

$$Mpoly = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(0) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_2(0) \\ \varphi_1(\frac{1}{2^j}) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_2(\frac{1}{2^j}) \\ \varphi_1(\dots) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_2(\dots) \\ \varphi_1(\frac{2^j-1}{2^j}) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_2(\frac{2^j-1}{2^j}) \\ \varphi_1(1) & 0 & \cdots & 0 & \varphi_2(1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$Mfondelette = 2^{j/2} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma(1) & \cdots & \cdots & \gamma(1 - (2^j)) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \gamma(2^j - 1) & \cdots & \cdots & \gamma(2^j - 1 - (2^j)) \\ \gamma(2^j) & \cdots & \cdots & \gamma(2^j - (2^j)) \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

et plus précisément :

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(\frac{1}{2^j}) \\ f(\dots) \\ f(\frac{2^j-1}{2^j}) \\ f(1) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} Mpoly \begin{bmatrix} f^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} Mfondelette \begin{bmatrix} \Delta cf^{j,0} \\ \Delta cf^{j,1} \\ \Delta cf^{j,\dots} \\ \Delta cf^{j,2^j-1} \\ \Delta cf^{j,2^j} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

La démarche concernant la définition de la dérivée de la fonction "f" est similaire à la définition de la fonction "f" via l'interpolation polynomiale-ondelettes. L'interpolation polynomiale et l'interpolation en ondelettes sont dérivées par rapport à " $\theta^{\textcircled{j}}$ ". La fonction dérivée de la fonction "f" s'écrit par conséquent sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(\theta^{\textcircled{j}}) &:= f'(\theta^{\textcircled{j}})_p + f'(\theta^{\textcircled{j}})_o \\ &:= f^r \varphi'_r \left(\frac{t^{\textcircled{j}}}{2^j} \right) + 2^{j/2} 2^j \sum_{k=0}^{2^j} \gamma^{(1)} \left(2^j \left(\frac{t^{\textcircled{j}}}{2^j} \right) - k \right) \Delta cf^{j,k} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Les coefficients " f^r " et " $\Delta cf^{j,k}$ " sont identiques aux coefficients de l'écriture III.9. Sous forme matricielle :

$$(f') := [Mpolyderiv] (f^r) + 2^{j/2} 2^j [FImatrderiv] (\Delta cf) \quad (\text{III.15})$$

et dans le cas de l'illustration 1D :

$$Mpolyderiv = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(0) & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_2(0) \\ \varphi'_1(\frac{1}{2^j}) & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_2(\frac{1}{2^j}) \\ \varphi'_1(\dots) & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_2(\dots) \\ \varphi'_1(\frac{2^j-1}{2^j}) & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_2(\frac{2^j-1}{2^j}) \\ \varphi'_1(1) & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_2(1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ Mfondelettederiv \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 2^{j/2} 2^j \begin{bmatrix} \gamma^{(1)}(0) & \dots & \gamma^{(1)}(0 - (2^j)) \\ \gamma^{(1)}(1) & \dots & \gamma^{(1)}(1 - (2^j)) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma^{(1)}(2^j - 1) & \dots & \gamma^{(1)}(2^j - 1 - (2^j)) \\ \gamma^{(1)}(2^j) & \dots & \gamma^{(1)}(2^j - (2^j)) \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

et finalement :

$$\begin{bmatrix} f'(0) \\ f'\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ f'\left(\frac{\dots}{2^j}\right) \\ f'\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) \\ f'(1) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ Mpolyderiv \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ Mfondelettederiv \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c f^{j,0} \\ \Delta c f^{j,1} \\ \Delta c f^{j,\dots} \\ \Delta c f^{j,2^j-1} \\ \Delta c f^{j,2^j} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Il est constaté que l'interpolation en ondelettes intervient sur l'ensemble du support, or il s'est avéré dans le chapitre précédent [II](#) que la décomposition en ondelettes avait des difficultés à représenter précisément les bords des fonctions dérivées.

L'idée est par conséquent d'utiliser l'interpolation polynomiale sur l'ensemble du support de discrétisation et d'enrichir uniquement les points internes à l'aide de l'interpolation en ondelettes. La démarche est présentée dans la partie suivante [III.2.2.2](#).

III.2.2.2. Imposition de conditions particulières pour la décomposition polynomiale-ondelettes

La partie [II.2.2](#) a montré un réel avantage de pouvoir appliquer des conditions limites traditionnelles sur une décomposition en ondelettes et ainsi de réaliser une interpolation nodale. L'intérêt de cette projection est le fait que les coefficients d'approximation interviennent au sein de nombreuses équations de la décomposition, la projection permet ainsi de faciliter le processus pour imposer des conditions. Malgré l'application des conditions limites de Dirichlet, des effets de bords apparaissaient sur les graphiques [II.2.1.8](#). Ces erreurs de représentation s'expliquaient par des intégrations approchées erronées des termes dérivés de la formulation variationnelle [II.47](#). Les dérivées des fonctions comportaient des effets de bords qui se justifient par une conception particulière des matrices "[*FImatr*]" et "[*FImatrderiv*]". De ce constat, l'idée a été de créer un support de discrétisation hybride avec des conditions particulières imposées sur la contribution en ondelettes.

Pour ce couplage hybride, il est souhaité que l'interpolation en ondelettes soit présente uniquement sur les points intermédiaires de la discrétisation de l'élément et que l'interpolation polynomiale soit présente sur l'ensemble des points de la discrétisation.

Pour limiter l'interpolation en ondelettes, la méthodologie consiste à utiliser le technique du zéro padding, afin d'imposer la valeur 0 aux bords de l'élément. Se reporter à la partie [I.2.5.4](#) du chapitre [I](#) pour comprendre la technique installée.

L'utilisation de la méthode du zéro padding, dans ce cas d'étude, présente deux avantages. Le premier avantage de la technique est le fait d'éviter les effets néfastes aux bords en appliquant une valeur nulle aux nœuds extrêmes et le second est la possibilité d'ajouter la contribution polynomiale à la contribution en ondelettes limitée en une seule

matrice, du fait de l'application de ces conditions particulières sur la partie en ondelettes. Un enrichissement local est ainsi obtenu. La décomposition polynomiale-ondelettes vue dans la partie III.2.2.1 reste inchangée, par contre les coefficients $\Delta c f^{j,k}$ vont être définis différemment dans l'optique de satisfaire les conditions particulières mises en place.

Pour illustrer l'imposition des conditions particulières, l'écriture matricielle en 1D de la partie III.2.2.1 sera utilisée.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ f\left(\frac{\dots}{2^j}\right) \\ f\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) \\ f(1) \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \varphi_1(0) & 0 & \dots & 0 & \varphi_2(0) \\ \varphi_1\left(\frac{1}{2^j}\right) & 0 & \dots & 0 & \varphi_2\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \varphi_1(\dots) & 0 & \dots & 0 & \varphi_2(\dots) \\ \varphi_1\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) & 0 & \dots & 0 & \varphi_2\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) \\ \varphi_1(1) & 0 & \dots & 0 & \varphi_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^2 \end{bmatrix} \\
 &+ 2^{j/2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \gamma(1) & \dots & \dots & \gamma(1 - (2^j)) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \gamma(2^j - 1) & \dots & \dots & \gamma(2^j - 1 - (2^j)) \\ \gamma(2^j) & \dots & \dots & \gamma(2^j - (2^j)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c f^{j,0} \\ \Delta c f^{j,1} \\ \Delta c f^{j,\dots} \\ \Delta c f^{j,2^j-1} \\ \Delta c f^{j,2^j} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.19}$$

L'addition du produit de la matrice "[*Mpoly*]" multipliée au vecteur " f^r " et du produit de la matrice "[*Mfondelette*]" multipliée au vecteur " $(\Delta c f)$ " décrit parfaitement la fonction " f ". Les termes " $\Delta c f^{j,k}$ " représentent les coefficients d'approximation de la fonction " $\Delta f = f_o$ " décrivant la différence qui peut exister entre la fonction " f " interpolée par la discrétisation polynomiale " f_p " et les valeurs réelles de la fonction " f ". Or pour déterminer ces coefficients d'approximation, il est nécessaire de savoir exprimer cet écart " $\Delta f = f_o$ ". Pour les définir, la définition du calcul des coefficients d'approximation de la partie II.39 est utilisée.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta c f^{j,0} \\ \Delta c f^{j,1} \\ \Delta c f^{j,\dots} \\ \Delta c f^{j,2^j-1} \\ \Delta c f^{j,2^j} = 0 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & Mfondelette & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta f^{j,0} = 0 \\ \Delta f^{j,1} \\ \Delta f^{j,\dots} \\ \Delta f^{j,2^j-1} \\ \Delta f^{j,2^j} = 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

Trois conditions particulières seront imposées sur l'inverse de la matrice "[*Mfondelette*]", dans le but de satisfaire les exigences de l'interpolation polynomiale-ondelettes.

Ces conditions peuvent être séparées en deux catégories : la première concerne une particularité de la décomposition en ondelettes et la seconde concerne l'interpolation polynomiale-ondelettes s'inspirant de la technique du zéro padding.

$$\left. \begin{aligned} \Delta c f^{j,2^j} = 0 \\ \Delta f^{j,0} = 0 \\ \Delta f^{j,2^j} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{condition intrinsèque à la méthode de décomposition en ondelettes} \\ &\text{conditions par rapport à l'interpolation polynomiale-ondelettes} \end{aligned}$$

La matrice d'application des conditions particulières se présente par conséquent sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ M_{applicondelette} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ M_{fondelette} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & M_{condipart} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

La matrice " $M_{applicondelette}$ " correspond au produit matriciel de Hadamard de l'inverse de la matrice " $M_{fondelette}$ " multipliée à la matrice " $M_{condipart}$ ".

Le fait d'avoir appliqué ces conditions particulières sur la partie en ondelettes et en conséquence d'avoir limité l'interpolation en ondelettes sur les nœuds intermédiaires, il est ainsi possible d'additionner la contribution polynomiale à la contribution en ondelettes en une seule matrice.

Bien noter que la matrice " $M_{fondelette}$ ", utilisée dans la fabrication de la matrice " $M_{applicondelette}$ ", est une matrice de coefficients et non de fonctions. Elle est calculée à partir des points de définition de l'ondelette et elle est fixe, quelque soit l'interpolation finale obtenue.

La matrice **Kraidcp** additionne ainsi les termes de la matrice d'interpolation polynomiale " M_{poly} " et les valeurs correspondant au produit de la matrice d'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction échelle de Daubechies d'ordre N " $M_{fondelette}$ " multipliée à la matrice imposant les conditions particulières " $M_{applicondelette}$ ".

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ K_{raidcp} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{poly} \\ \vdots \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \vdots \\ M_{fondelette} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{applicondelette} \\ \vdots \end{bmatrix} \right) \quad (\text{III.22})$$

Ici dans l'assemblage final, " $M_{fondelette}$ " représente la matrice des "fonctions" d'approximation d'échelle, alors que comme il a été précisé précédemment " $M_{applicondelette}$ " est une matrice de coefficients. On peut alors en déduire les dérivées.

La matrice **Kraiderivcp** correspond à la somme des termes de la matrice d'interpolation polynomiale dérivée " $M_{polyderiv}$ " et les termes correspondent au produit de la matrice d'interpolation en ondelettes dérivée, exprimée par la fonction d'échelle dérivée de l'ondelette de Daubechies d'ordre N " $M_{fondelettederiv}$ " multipliée à la matrice imposant les conditions particulières " $M_{applicondelette}$ ".

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ K_{raiderivcp} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{polyderiv} \\ \vdots \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \vdots \\ M_{fondelettederiv} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ M_{applicondelette} \\ \vdots \end{bmatrix} \right) \quad (\text{III.23})$$

Par conséquent, il est possible de modifier les écritures matricielles de la partie [III.2.2.1](#) en fonction de deux matrices **Kraidcp** et **Kraiderivcp**.

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ f\left(\frac{2}{2^j}\right) \\ \vdots \\ f\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) \\ f(1) \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \text{Kraidcp} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ \Delta f^{j,1} \\ \Delta f^{j,\dots} \\ \Delta f^{j,2^j-1} \\ f^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{bmatrix} f'(0) \\ f'\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ f'\left(\frac{2}{2^j}\right) \\ \vdots \\ f'\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right) \\ f'(1) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \text{Kraidderivcp} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1 \\ \Delta f^{j,1} \\ \Delta f^{j,\dots} \\ \Delta f^{j,2^j-1} \\ f^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Les formulations III.10 et III.15 de la partie III.2.2.1 sont ainsi définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (f) &:= [\text{Kraidcp}] (f_{coeff}) \\ (f_{coeff}) &:= [\text{Kraidcp}]^{-1} (f) \\ (f') &:= [\text{Kraidderivcp}] (f_{coeff}) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Le vecteur " (f_{coeff}) " présent dans les formulations ci-dessus exprime la somme du vecteur " (f^r) " et du vecteur " $(\Delta f^{j,k})$ ".

La partie suivante III.2.2.3 permet de visualiser l'évolution des déformations virtuelles en fonction de l'application d'une vitesse virtuelle imposée à un nœud de l'élément.

III.2.2.3. Évolution des fonctions d'interpolation polynomiale-ondelettes

Le graphique III.2 illustre l'évolution des fonctions d'interpolation polynomiale-ondelettes dérivées en fonction d'une vitesse virtuelle imposée à un nœud de l'interpolation III.1. La figure III.2 représente ainsi les fonctions de formes dérivées afin de valider l'imposition des conditions particulières mises en application sur la matrice **Kraidcp**.

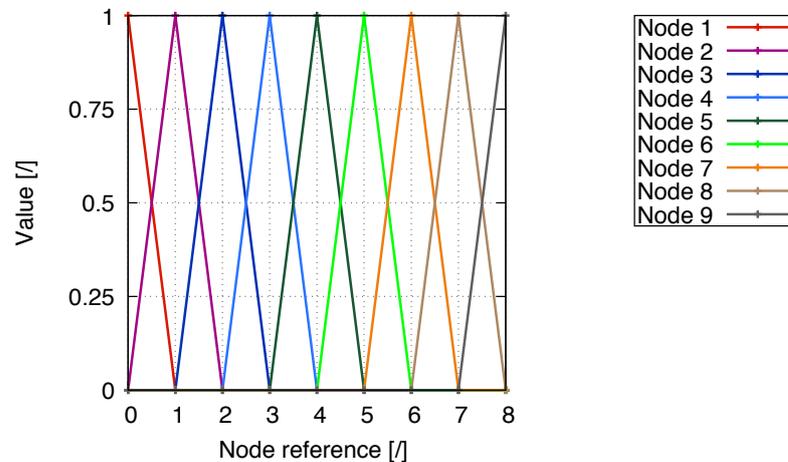


FIGURE III.1 – Évolution des vitesses virtuelles imposées

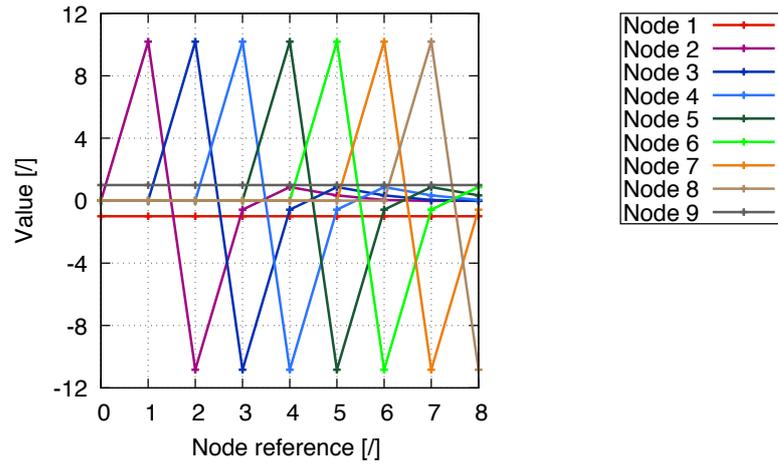


FIGURE III.2 – Évolution des déformations virtuelles, avec imposition des conditions particulières

L'évolution du graphique III.2 permet de confirmer la bonne mise en équation du couplage hybride, avec l'interpolation polynomiale présente sur l'ensemble des points de discrétisation et l'interpolation en ondelettes centrée sur les points internes de la discrétisation. Il est ainsi obtenu un enrichissement local avec l'interpolation en ondelettes.

III.2.2.4. Validation de la méthode de décomposition hybride polynomiale-ondelettes

La validation de la méthode de décomposition polynomiale-ondelettes porte sur l'étude des fonctions utilisées dans la partie II.2.1.8, leurs définitions sont rappelées :

1. fonction linéaire

$$f_1(x) = x$$

2. fonction cosinus

$$f_2(x) = \cos(2\pi x)$$

3. fonction carré

$$f_3(x) = x^2$$

4. fonction en dents de scie

$$f_4(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2(x - 0.5), & 0.5 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \cup x < 0 \end{cases}$$

Elles sont représentées sur le graphique III.3 avec un niveau d'échantillonnage $j=6$, soit 64 points de discrétisation. Ces fonctions sont discrétisées à l'aide du support hybride polynomiale-ondelettes, dont la partie ondelette du support de discrétisation se compose de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.

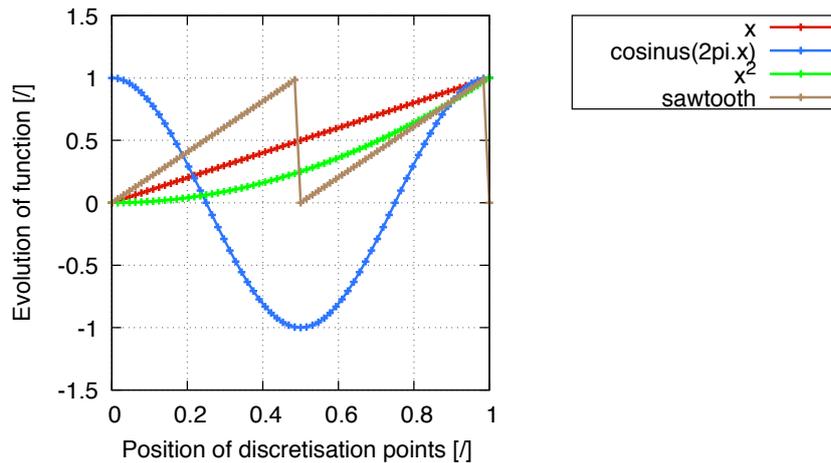
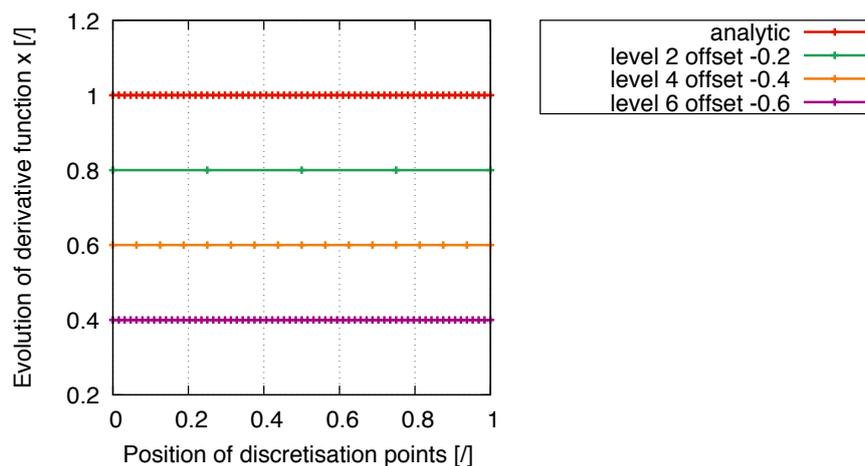


FIGURE III.3 – Évolution des fonctions au niveau de résolution "j=6"

Validation de la méthode de décomposition polynomiale-ondelettes par la représentation de dérivée de fonctions

L'idée est de valider la méthode de décomposition à l'aide d'un couplage hybride en vérifiant l'évolution des fonctions dérivées par rapport à l'allure des courbes représentant les dérivées analytiques. On utilise plusieurs niveaux de résolution "j" pour visualiser la précision obtenue (j=2, 4 et 6, soit 5, 17 et 65 points de discrétisation respectivement). Le graphique III.4 représente l'évolution de la dérivée de la fonction linéaire "x" aux niveaux de résolution cités. Le graphique III.5 illustre l'évolution de la dérivée de la fonction cosinus " $\cos(2\pi x)$ ". La figure III.6 permet de visualiser l'allure des dérivées de la fonction carré " x^2 ". Enfin, les deux derniers graphiques permettent de montrer la dérivée de la fonction en dents de scie III.7, III.8.

FIGURE III.4 – Évolution de la fonction dérivée $(x)'$ via l'interpolation polynomiale-ondelettes

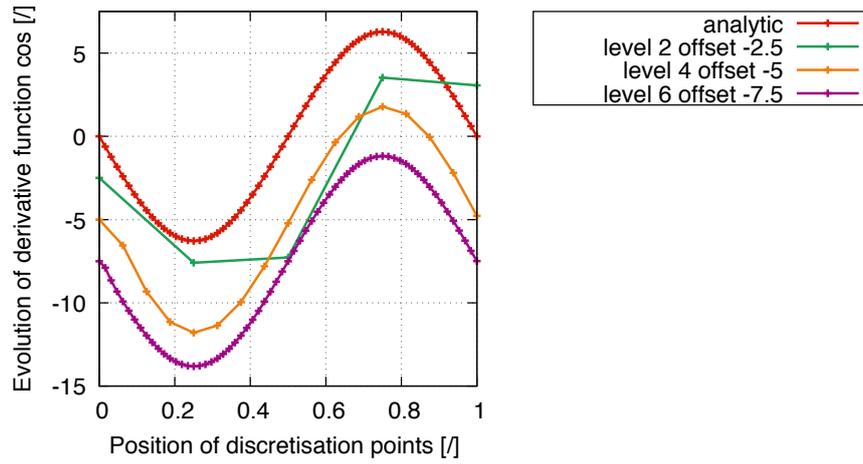


FIGURE III.5 – Évolution de la fonction dérivée $(\cos(2\pi x))'$ via l'interpolation polynomiale-ondelettes

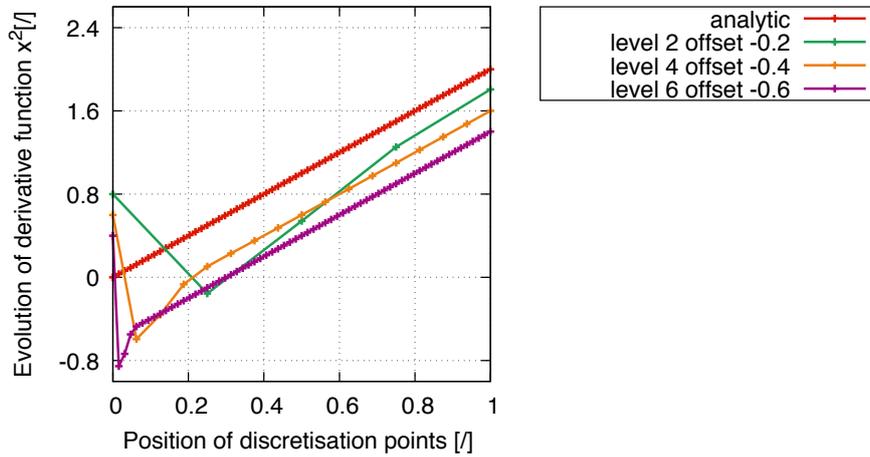


FIGURE III.6 – Évolution de la fonction dérivée $(x^2)'$ via l'interpolation polynomiale-ondelettes

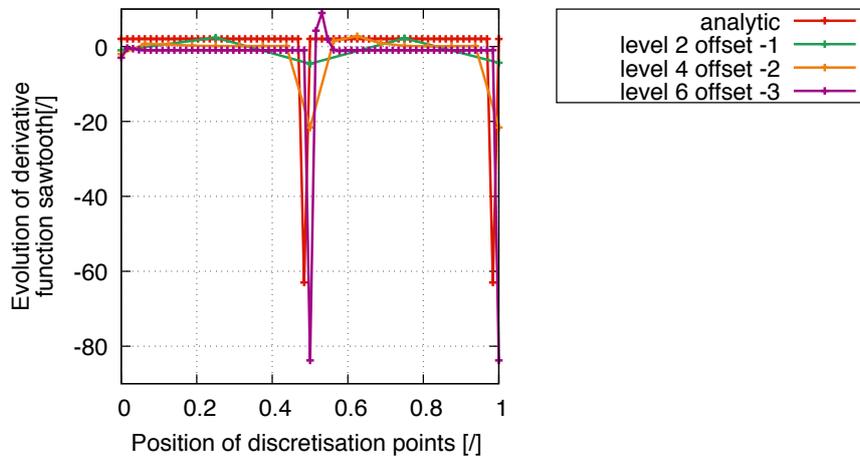


FIGURE III.7 – Évolution de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation polynomiale-ondelettes

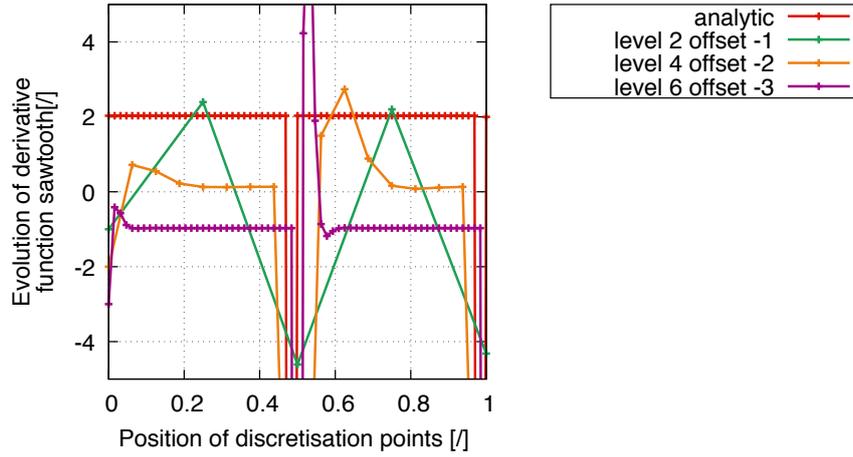


FIGURE III.8 – Évolution zoomée de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation polynomiale-ondelettes

Les évolutions des dérivées des fonctions exprimées par un support de discrétisation polynomiale-ondelettes, présentées sur les figures III.4, III.5, III.6 et III.8, sont sensiblement identiques aux allures des dérivées analytiques.

Cependant, il est constaté une erreur de représentation de la dérivée de la fonction (x^2) sur la figure III.6 au premier nœud de discrétisation, qui s'explique par l'utilisation de l'interpolation polynomiale aux nœuds des extrémités uniquement.

Le système de résolution réduit en ce point s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 f_3'(0) &= f^1 \varphi_1'(0) + f^2 \varphi_2'(0) \\
 &= f^2 \varphi_2'(0) \quad \text{simplification} \\
 f_3(1) &= f^1 \varphi_1(1) + f^2 \varphi_2(1) \quad \text{avec } f^1 = 0 \\
 \text{et } f^2 &= \frac{f_3(1)}{\varphi_2(1)} = \frac{1}{\frac{1+1}{2}} = 1
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Les inconnus f^1 et f^2 qui composent cette interpolation nodale sont déterminées par la résolution du système linéaire. Pour résoudre ce dernier, des conditions limites sont appliquées au système afin d'obtenir une solution unique. Dans le cas étudié, il est imposé $f^1 = 0$, ce qui simplifie l'équation III.27. Par résolution, l'inconnu f^2 est égale à 1, et par conséquent la valeur de la dérivée de la fonction au premier nœud sera équivalente à 1.

Les figures III.7 et III.8 illustrent la dérivée d'un signal en dents de scie, dont son évolution est relativement semblable à la dérivée analytique. La différence de potentiel présente au milieu de la fonction en dents de scie, est symbolisée par une oscillation brève sur l'évolution de la dérivée. L'impact de l'interpolation polynomiale au premier nœud de discrétisation est également retrouvé sur ces évolutions.

Ces différentes représentations permettent de mettre en avant la capacité du couplage hybride à illustrer avec une bonne précision les dérivées des fonctions interpolées par une discrétisation polynomiale-ondelettes. L'enrichissement de la partie centrale de l'élément apporte une grande contribution pour l'analyse de signaux discontinus.

Cette première section III.2.2 permet ainsi de valider ce support de discrétisation hybride pour la résolution de la formulation variationnelle. Cependant la complexité de ce

support conduit à développer une méthode d'intégration particulière qui est présentée dans la partie suivante III.3.

III.3. Intégration du support de discrétisation hybride

L'utilisation de la méthode de résolution de Newton conduit à intégrer le résidu et la variation du résidu. Les termes sont discrétisés via le support hybride composé d'une interpolation polynomiale et d'une interpolation en ondelettes. Ce couplage induit une complexité de la définition des termes, les rendant ainsi impossible à intégrer avec des formulations classiques.

L'évolution irrégulière des fonctions à intégrer conduit à développer une méthode d'intégration similaire à la méthode développée dans la partie II.3.1.2, mais en prenant en compte cette fois-ci l'intégration de la partie polynomiale.

L'objectif de la méthode est d'approcher l'intégration d'un produit complexe de fonctions dérivées à l'aide d'une intégration approchée, exprimée via la somme des intégrales de la partie polynomiale et de la partie fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies.

Cette partie III.3 présente la méthodologie d'intégration utilisée pour la formulation variationnelle du chapitre IV.

III.3.1. Méthode d'intégration du résidu

Pour illustrer la méthode d'intégration par une discrétisation par points, deux fonctions arbitraires seront utilisées. Ces deux dernières sont exprimées à partir d'une interpolation polynomiale couplée à une interpolation en ondelettes exprimée par la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N.

La première fonction f :

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= f^r \varphi_r(x) + 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j} \gamma(2^j(x) - k) \Delta c f^{j,k} \\
 &:= \left(\langle \text{Kraidcp}^{\textcircled{j}}(x) \rangle \right) (f_{coeff}) \tag{III.28} \\
 (f_{coeff}) &= [\text{Kraidcp}^{\textcircled{j}}]^{-1}(f) \\
 f'(x) &:= \left(\langle \text{Kraidderivcp}^{\textcircled{j}}(x) \rangle \right) (f_{coeff})
 \end{aligned}$$

La seconde fonction g^* s'exprime avec une discrétisation similaire à la fonction f, les coefficients d'approximation sont nommés $\Delta c g^{j,k}$, les coefficients " g^r " correspondent aux valeurs nodales et le vecteur caractérisant les coefficients de la discrétisation hybride se note g_{coeff}^* .

III.3.1.1. Développement de la méthode d'intégration analytiquement

Le développement de la méthode d'intégration est exposé via l'intégrale du produit de deux fonctions dérivées " f " et " g " définies ci-dessus.

L'expression de l'intégrale s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 T(x) dx &= \int_0^1 f'(x) \cdot g'(x) dx \\
 &= \int_0^1 \langle g_{coeff}^* \rangle \left(\langle Kraidderivcp^{\textcircled{j}}(x) \rangle \right)^T \cdot f'(x) dx \\
 &= \langle g_{coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 B^L(x) dx \right) \quad L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle g_{coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 B^0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 B^L(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 B^{2^j}(x) dx \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.29}$$

L'intégration de $\int_0^1 T(x) dx$ est équivalente au produit du vecteur représentant les coefficients " g_{coeff}^* " multipliés au vecteur d'intégration " $\left(\int_0^1 B^L(x) dx\right)$ ". L'indice "L" réfère le point de discrétisation utilisé pour la décomposition polynomiale-ondelettes de la fonction " g^* ". La fonction " $B^L(x)$ " est approchée par une décomposition polynomiale-ondelettes à un niveau de résolution "j", identique au niveau de résolution utilisé pour les supports de discrétisation primaires. Cette approximation de fonction est intégrée à l'aide du couplage des interpolations intégrées. La formule générale est définie via la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (B^L(x)) dx &= \int_0^1 \left(\sum_{r=1}^2 \varphi_r(x) + \left(\sum_{k=0}^{2^j} \gamma_{j,k}(x) [Mapplicpondelette] \right) \right) \cdot (B_{coeff}^L) dx \\
 &= \int_0^1 \langle Kraidcp^{\textcircled{j}}(x) \rangle \cdot ([Kraidcp^{\textcircled{j}}]^{-1} (B^L)) dx \\
 &= \langle \dots W^{\textcircled{j}} \dots \rangle [Kraidcp^{\textcircled{j}}]^{-1} (B^L) \\
 &= \langle \dots S^{\textcircled{j}} \dots \rangle (B^L)
 \end{aligned} \tag{III.30}$$

Les termes " B_{coeff}^L " sont relatifs au vecteur " (B^L) " sachant que chaque terme " $B^L(\theta^{i\textcircled{j}})$ " correspond à la valeur de la fonction $B^L(x)$ calculée au point $(\theta^{i\textcircled{j}})$. Le vecteur $S^{\textcircled{j}}$ est le produit entre le vecteur qui se compose des valeurs de l'intégrale polynomiale et de la fonction d'échelle par rapport à "k" et de l'inverse de la matrice $[Kraidcp^{\textcircled{j}}]$.

Illustration du calcul du premier terme $\int_0^1 B^0(x)$ du vecteur intégration

L'indice "L" fait référence au point de discrétisation utilisé pour la décomposition de la fonction " g^* ". La fonction " $\langle Kraidderivcp^{\textcircled{j}}(x) \rangle$ " s'écrit également sous la forme matricielle lorsque "x" est défini sur plusieurs valeurs, se référer à la partie III.2.2.2. Pour cette illustration, " $L = 0$ " a été choisi, ce qui a pour conséquence d'utiliser uniquement les valeurs de la première colonne de la matrice " $[Kraidderivcp^{\textcircled{j}}]$ " d'où l'indice "0" sur l'écriture de la formule III.31 de $(Kraidderivcp^{\textcircled{j}})^0(x)$.

Le calcul du premier terme du vecteur intégration est illustré par la formule III.31.

$$\int_0^1 (B^0(x)) dx = \int_0^1 (Kraidderivcp^{\textcircled{j}})^0(x) \cdot f'(x) dx \tag{III.31}$$

À partir de l'équation III.31, une discrétisation des fonctions avec un couplage hybride, au niveau de résolution "j", est réalisée.

Le premier vecteur (B^0) s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} B^0(0) \\ B^0\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ B^0\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ B^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kraidderivcp^{(j)0}(0) \\ Kraidderivcp^{(j)0}\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ Kraidderivcp^{(j)0}\left(\left(\theta^{j(j)}\right)\right) \\ \vdots \\ Kraidderivcp^{(j)0}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(0) \\ f'\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ f'\left(\theta^{i(j)}\right) \\ \vdots \\ f'(1) \end{pmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Ce premier vecteur (B^0) est inséré à la formule III.30 et il en résulte la première valeur du vecteur intégration.

III.3.1.2. Validation de la méthode d'intégration approchée sur des fonctions arbitraires

La validation de la méthode d'intégration approchée III.3.1.1 est réalisée sur l'intégration de différentes fonctions arbitraires. La validation se compose de deux parties, dont la première consiste à vérifier la méthode par rapport à l'intégration des fonctions étudiées dans la partie III.2.2.4 et la seconde a pour objectif de contrôler la technique en calculant l'intégration d'un produit de fonctions dérivées.

L'ordre 6 de l'ondelette de Daubechies est utilisé pour définir la partie ondelette du support de discrétisation.

Validation de la méthode d'intégration approchée, par rapport à l'intégration de fonctions

Le tableau III.1 présente les valeurs des intégrations obtenues à l'aide de la méthode d'intégration approchée III.3.1.1, exprimées via la somme des intégrales de la partie polynomiale et de la partie fonction d'échelle sur les 4 fonctions étudiées. Ces valeurs d'intégrales sont comparées par rapport aux valeurs théoriques, aux valeurs calculées via la méthode d'intégration numérique de Clenshaw-Curtis et les valeurs obtenues à l'aide de l'intégration de la fonction d'échelle au niveau de résolution "j=6" (cf. le tableau II.1). On utilise pour cette investigation, les trois niveaux de résolution (j=2, 4 et 6). L'erreur relative des valeurs des intégrales est déterminée pour chaque valeur d'intégration calculée à l'aide de l'intégration couplée(P-O).

Intégration méthode	$\int_0^1 f_1(x) dx$	$\int_0^1 f_2(x) dx$	$\int_0^1 f_3(x) dx$	$\int_0^1 f_4(x) dx$
Valeur théorique	1/2	0	1/3	1/2
Clenshaw-Curtis	5.000000e-01	0	3.333333e-01	5.000000e-01
FE_Niveau j=6	4.999797e-01 (0 %)	-7.827442e-03 (/ %)	3.333341e-01 (0 %)	4.925457e-01 (1.5 %)
P-O_Niveau j=2	5.000000e-01 (0 %)	-1.551277e-02 (/ %)	3.417565e-01 (2.5 %)	3.339141e-01 (33.2 %)
P-O_Niveau j=4	5.000000e-01 (0 %)	-9.038786e-04 (/ %)	3.337075e-01 (0.1 %)	4.681716e-01 (6.4 %)
P-O_Niveau j=6	5.000000e-01 (0 %)	-1.494180e-05 (/ %)	3.333544e-01 (0 %)	4.925457e-01 (1.5 %)

TABLE III.1 – Intégration de fonctions à l'aide de l'intégration polynomiale-fonction d'échelle

D'après le tableau III.1, les intégrales calculées à l'aide de l'intégration couplée sont de plus en plus précises par rapport aux valeurs théoriques. L'erreur relative confirme la précision obtenue pour chaque intégrale.

L'intégration couplée (P-O) au niveau de résolution 6 et l'intégration de la fonction d'échelle (FE) calculée au même niveau sont sensiblement identiques. Sauf dans le cas de la fonction " f_1 ", où la bonne valeur de l'intégrale est obtenue directement avec le support hybride intégré. Les résultats obtenus montrent ainsi un réel atout de la méthode d'intégration approchée III.3.1.1, mais également la capacité du couplage hybride à atteindre une bonne précision.

Validation de la méthode d'intégration approchée, par rapport à l'intégration du produit de fonctions dérivées

La validation de la méthode d'intégration approchée III.3.1.1 est réalisée sur l'intégration du produit de différentes fonctions arbitraires, dont ces dernières sont décomposées à l'aide d'un support de discrétisation hybride couplant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. Les fonctions retenues pour cette étude sont identiques à celles utilisées dans la partie II.3.1.3.

Pour valider la méthode d'intégration approchée, plusieurs calculs d'intégrales ont été réalisés et répartis en deux catégories. La première concerne l'intégration du produit de fonctions dérivées 1, et la seconde se rapporte aux intégrations du produit de fonctions avec des discontinuités 2.

1. Intégration approchée du produit de fonctions dérivées :

Le tableau III.2 présente les valeurs des intégrations approchées pour les produits des fonctions dérivées cités dans la partie II.3.1.3 - 1.

Ces valeurs sont comparées par rapport aux valeurs théoriques, aux valeurs calculées via la méthode d'intégration numérique de Clenshaw-Curtis et aux valeurs obtenues à l'aide de l'intégration approchée par une intégration d'une fonction d'échelle II.3.1.3 au niveau de résolution "j=6".

Pour cette vérification, trois niveaux de décomposition sont utilisés ($j=2, 4$ et 6). L'erreur relative des valeurs des intégrales est déduite pour chaque valeur d'intégration calculée à l'aide de l'intégration couplée (P-O).

Intégration méthode	$\int_0^1 f_4'(x) \cdot f_5'(x) dx$	$\int_0^1 f_6'(x) \cdot f_7'(x) dx$	$\int_0^1 f_8'(x) \cdot f_9'(x) dx$
Valeur théorique	8/5	60/7	288/9
Clenshaw-Curtis	1.600000e+00	8.571429e+00	3.200000e+01
O_Niveau j=6	1.597838e+00 (0.13 %)	8.549259e+00 (0.26 %)	3.186240e+01 (0.43 %)
P-O_Niveau j=2	1.405394e+00 (12.1 %)	7.101250e+00 (17.1 %)	2.484359e+01 (22.4 %)
P-O_Niveau j=4	1.605372e+00 (0.33 %)	8.450174e+00 (1.4 %)	3.087885e+01 (3.5 %)
P-O_Niveau j=6	1.607276e+00 (0.45 %)	8.588747e+00 (0.2 %)	3.198316e+01 (0.05 %)

TABLE III.2 – Intégration du produit de fonctions dérivées par intégration approchée polynomiale-fonction d'échelle

D'après le tableau III.2, les intégrales approchées avec ce couplage hybride permettent d'atteindre les valeurs théoriques avec une précision moyenne de 0.25 % pour le niveau de résolution "j=6".

Selon l'erreur relative, il est également constaté que si le degré du polynôme des fonctions augmente, l'erreur croît. Cela confirme que la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 ne peut intégrer avec précision un produit de fonction d'ordre élevé.

La comparaison entre l'intégration approchée à l'aide de l'intégration fonction d'échelle (O) et l'intégration approchée à l'aide de l'intégration couplée (P-O) montre que les résultats sont sensiblement identiques.

2. Intégration approchée du produit de fonctions avec des discontinuités :

Le tableau III.3 présente les valeurs d'intégrations obtenues via la méthode d'intégration approchée pour le produit de deux fonctions en dents de scie f_{10} , (cf. la partie II.3.1.3 - 2).

Ces valeurs sont comparées par rapport aux valeurs numériques déterminées via la méthode d'intégration numérique de Gauss. Quatre niveaux de décomposition ($j=2, 3, 4$ et 6) ont été retenus pour cette étude. L'erreur relative est également calculée pour chaque valeur d'intégration.

Intégration méthode	Gauss $\int_0^1 f_{10}(x) \cdot f_{10}(x) dx$	Intégration approchée $\int_0^1 f_{10}(x) \cdot f_{10}(x) dx$
Valeur théorique	1/3	1/3
Niveau j=2 (4 points d'intégration)	3.120659e-01 (6.4 %)	2.226094e-01 (33.2 %)
Niveau j=3 (8 points d'intégration)	3.275693e-01 (1.7 %)	2.862822e-01 (14.1 %)
Niveau j=4 (16 points d'intégration)	3.318178e-01 (0.4 %)	3.121967e-01 (6.3 %)
Niveau j=6 (64 points d'intégration)	/	3.284933e-01 (1.4 %)

TABLE III.3 – Intégration du produit de 2 fonctions en dent de scie par intégration approchée polynomiale-fonction échelle

Il faut constaté que les résultats obtenus via la méthode d'intégration approchée polynomiale-fonction échelle sont identiques aux résultats des intégrales du tableau II.3. Ces valeurs similaires se justifient par le fait que la partie polynomiale n'apporte pas de poids additionnel à l'intégrale, en raison que la fonction en dents de scie équivaut à 0 au milieu de son domaine. Se référer à sa représentation sur la figure III.3.

Des résultats d'intégrales similaires sont obtenus concernant le produit de quatre fonctions en dents de scie et le produit de deux fonctions porte avec cette méthode d'intégration approchée polynomiale-fonction échelle, cf. les tableaux II.4, II.5, II.6.

III.3.2. Intégration de la variation du résidu avec le support hybride

Comme il a été montré au chapitre II.3.2, l'utilisation de la méthode de Newton conduit à intégrer la variation du résidu. La variation du résidu consiste à calculer l'intégration de la dérivée partielle des termes définissant la formulation variationnelle par rapport au degré de liberté utilisé pour l'interpolation de la position.

La complexité de la définition des termes via le support de discrétisation hybride rend l'étape d'intégration complexe et par conséquent une méthode d'intégration a dû être développée III.3.1.1.

L'objectif de la méthode est d'approcher l'intégration d'un produit complexe de fonctions dérivées à l'aide d'une intégration approchée, exprimée via la somme des intégrales de la partie polynomiale et de la partie fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. L'idée est d'utiliser la méthode d'intégration III.3.1.1 pour déterminer l'intégrale de l'opérateur tangent.

Pour illustrer la méthodologie d'intégration de la variation du résidu, les deux fonctions "f", "g" de la partie précédente III.3.1 seront utilisées. L'expression de l'intégrale de la dérivée partielle du produit des deux fonctions dérivées par rapport au coefficient " f_{coeff} " s'écrit sous la forme III.33 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T(x)}{\partial (f_{coeff})} dx &= \int_0^1 \frac{\partial \left(f'(x) g^*(x) \right)}{\partial (f_{coeff})} dx \\ &= \langle g_{coeff}^* \rangle \left[\int_0^1 D_{(f_{coeff})}^L(x) dx \right] \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

L'intégration de " $\int_0^1 \frac{\partial T(x)}{\partial (f_{coeff})}$ " est équivalente au produit du vecteur représentant les coefficients virtuels " $\langle g_{coeff}^* \rangle$ " multiplié à la matrice intégration " $\left[\int_0^1 D_{(f_{coeff})}^L(x) dx \right]$ ". Les termes de la matrice intégration correspondent à un ensemble d'intégrations, dont ces dernières dépendent à la fois de l'indice "L", qui réfère le point de discrétisation utilisé, et du coefficient " f_{coeff} ", concernant la discrétisation de la fonction "f". La formulation III.33 peut-être réécrite en fonction de l'indice "p", dont ce dernier est une valeur correspondante au coefficient " f_{coeff} ".

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T(x)}{\partial (f_{coeff}(p))} dx &= \int_0^1 g^*(x) \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial (f_{coeff}(p))} dx \quad \text{avec } p = [0 : 2^j] \\ &= \int_0^1 \langle g_{coeff}^* \rangle \left(\langle Kraidderivcp^{\textcircled{j}}(x) \rangle \right)^T \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial (f_{coeff}(p))} dx \\ &= \langle g_{coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 D_{(f_{coeff}(p))}^L(x) dx \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\ &= \langle g_{coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 D_{(f_{coeff}(p))}^0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 D_{(f_{coeff}(p))}^L(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 D_{(f_{coeff}(p))}^{2^j}(x) dx \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

La formule III.34 écrite par rapport au coefficient " f_{coeff} ", est similaire à celle III.29 dans la partie III.3.1.1. La méthode d'intégration développée peut-être ainsi utilisée, dont la formule générale est rappelée :

$$\int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(p))}^L(x) \right) dx = \langle \dots S^{\textcircled{j}} \dots \rangle \left(D_{(f_{coeff}(p))}^L \right) \quad (\text{III.35})$$

La fonction " $D_{(f_{coeff}(p))}^L(x)$ " est approchée par un support de discrétisation hybride à un niveau de résolution "j". Cette approximation de fonction est intégrée à l'aide du couplage des interpolations intégrées.

Illustration du calcul de deux termes $\int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(0))}^0(x) \right) dx$ et $\int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(1))}^1(x) \right) dx$

$$\int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(0))}^0(x) \right) dx = \int_0^1 \left(Kraidderivcp^{\textcircled{j} \ 0}(x) \right) \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial (f_{coeff}(0))} dx \quad (\text{III.36})$$

$$\int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(1))}^1(x) \right) dx = \int_0^1 \left(Kraidderivcp^{\textcircled{j} \ 1}(x) \right) \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial (f_{coeff}(1))} dx \quad (\text{III.37})$$

À partir des équations III.36 et III.37, une discrétisation des fonctions, au niveau "j", est effectuée. Les deux vecteurs $(D_{(f^1)}^0)$ et $(D_{(\Delta f^{j,1})}^1)$ peuvent ainsi s'écrire :

$$\begin{pmatrix} D_{(f^1)}^0(0) \\ D_{(f^1)}^0\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ D_{(f^1)}^0\left(\theta^i(\mathbb{j})\right) \\ \vdots \\ D_{(f^1)}^0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}0}(0) \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}0}\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}0}\left(\left(\theta^j(\mathbb{j})\right)\right) \\ \vdots \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}0}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f'(0)}{\partial(f^1)} \\ \frac{\partial f'\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\partial(f^1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'\left(\theta^i(\mathbb{j})\right)}{\partial(f^1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'(1)}{\partial(f^1)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.38})$$

$$\begin{pmatrix} D_{(\Delta f^{j,1})}^1(0) \\ D_{(\Delta f^{j,1})}^1\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ D_{(\Delta f^{j,1})}^1\left(\theta^i(\mathbb{j})\right) \\ \vdots \\ D_{(\Delta f^{j,1})}^1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}1}(0) \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}1}\left(\frac{1}{2^j}\right) \\ \vdots \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}1}\left(\left(\theta^j(\mathbb{j})\right)\right) \\ \vdots \\ \text{Kraidderivcp}^{\mathbb{j}1}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f'(0)}{\partial(\Delta f^{j,1})} \\ \frac{\partial f'\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\partial(\Delta f^{j,1})} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'\left(\theta^i(\mathbb{j})\right)}{\partial(\Delta f^{j,1})} \\ \vdots \\ \frac{\partial f'(1)}{\partial(\Delta f^{j,1})} \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Ces deux vecteurs sont insérés à la formule III.35 et il en résulte les deux valeurs d'intégration de la matrice intégration.

Écriture finale de l'intégration de la variation du résidu par rapport au support hybride

L'intégrale de la variation du résidu s'écrira sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T(x)}{\partial(f_{coeff})} dx &= \langle \overset{*}{g}_{coeff} \rangle \left[\int_0^1 D_{(f_{coeff})}^L(x) dx \right] \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \text{ et } p = [0 : 2^j] \\ &= \langle \overset{*}{g}_{coeff} \rangle \\ & \left[\begin{array}{cccc} \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(0))}^0(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(p))}^0(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(2^j))}^0(x) \right) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(0))}^L(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(p))}^L(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(2^j))}^L(x) \right) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(0))}^{2^j}(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(p))}^{2^j}(x) \right) dx & \cdots & \int_0^1 \left(D_{(f_{coeff}(2^j))}^{2^j}(x) \right) dx \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Remarques : La matrice d'intégration $\left[\int_0^1 D_{(f_{coeff})}^L(x) dx \right]$ de l'opérateur tangent est une étape importante dans la méthode de résolution de Newton. Le calcul et l'inversion de cette matrice occupent la majeure partie du temps de calcul. Il est par conséquent nécessaire d'avoir une méthode d'intégration rapide et peu coûteuse en temps de calcul.

La méthode d'intégration approchée de l'intégration du produit de fonctions dérivées apporte un réel avantage, car elle permet de réduire le nombre d'intégrations. Cette méthode d'intégration III.3.1.1 est facilement implémentable au sein d'un code de calcul éléments finis, car la conception est très similaire à la méthode traditionnelle. L'intégration se résume à la somme de poids multipliés à des coefficients.

III.4. Conclusion

Le chapitre III a permis de présenter un support de discrétisation hybride associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N .

La méthode des éléments finis sous sa forme classique s'appuie sur une interpolation polynomiale afin de déterminer et résoudre les équations différentielles associées. Le support de discrétisation hybride a été introduit pour prendre en compte la présence de phénomènes fortement irréguliers. L'utilisation de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies appliquée comme fonction d'interpolation au sein de la méthode des éléments finis a montré des résultats intéressants. Le fait de pouvoir détecter, analyser et visualiser des phénomènes particuliers constitue un atout de cette interpolation.

La section III.2 expose la construction du support de discrétisation hybride. Un point important a été abordé dans cette section, concernant l'application de conditions limites de Dirichlet et surtout l'imposition de conditions particulières à l'interpolation en ondelettes. L'application de ces conditions supplémentaires permettent premièrement d'éliminer les effets de bords relevés sur les fonctions dérivées II.2.1.8, dû à la conception particulière des matrices [FImatr] et [FImatrderiv]. Il est possible de se référer à la partie III.2.2.4 pour visualiser la suppression de ces effets sur l'évolution des fonctions dérivées. Et deuxièmement, d'ajouter la partie polynomiale à la partie en ondelettes limitée en une seule matrice. Ce second point s'avère un avantage considérable, étant donné qu'il est possible d'ajouter également le vecteur " f^r " et le vecteur " $(\Delta f^{j,k})$ " en un seul vecteur " f_{coeff} ". Cette investigation permet ainsi de réaliser un enrichissement local et une interpolation nodale via les extrêmes du vecteur " f_{coeff} ".

Les résultats obtenus permettent de mettre en avant la capacité du couplage hybride à représenter avec une excellente précision les dérivées des fonctions interpolées via une contribution polynomiale et une contribution en ondelettes. L'enrichissement central de l'élément via la fonction d'échelle apporte une grande contribution pour l'analyse de signaux fortement irréguliers.

La section III.3 illustre la méthode d'intégration qui sera utilisée dans la méthode de résolution de Newton pour résoudre la formulation variationnelle. La méthode d'intégration est similaire à la méthode développée dans la partie II.3.1.2, mais avec la prise en compte de l'intégrale de la partie polynomiale. La technique III.3.1.1 repose sur l'approximation de l'intégration d'un produit complexe de fonctions dérivées à l'aide d'une intégration approchée, exprimée via la somme des intégrales de la partie polynomiale et de la partie fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. La validation de la méthode III.3.1.2 à travers l'intégration de produit de différentes fonctions arbitraires dérivées a montré des résultats remarquables avec des erreurs relatives avoisinant 0.25 %. Cette méthode d'intégration III.3.1.1 permet d'atteindre une précision similaire à la méthode d'intégration du chapitre précédent II.3.1.2. L'intégration du résidu III.3.1 et de l'opéra-

teur tangent III.3.2 peuvent être exécutées via cette méthode d'intégration.

Ce chapitre III a permis de détailler la construction du support de discrétisation hybride avec des optimisations telles que la méthode d'intégration approchée et la prise en compte des erreurs de représentation des fonctions dérivées via l'interpolation en ondelettes en appliquant des conditions particulières sur cette contribution. Cette investigation confirme la possibilité d'insérer ce support de discrétisation au sein de la méthode des éléments finis. L'adaptabilité du support en fonction de l'importance des singularités observées est abordée dans le chapitre suivant IV. Une stratégie particulière est mise en place afin de détecter/surveiller des phénomènes particuliers et définir le niveau de résolution "j" adapté.

CHAPITRE IV

Détection de la singularité et présentation de la méthode WFEM improved

Sommaire

IV.1 Introduction	134
IV.2 Détection d'une localisation et définition du niveau de résolution "j"	135
IV.2.1 Préambule	135
IV.2.2 Détection et localisation du phénomène	135
IV.2.2.1 Méthodologie de détection et surveillance de phénomènes particuliers	135
IV.2.2.2 Illustration de la méthode de détection sur la poutre étudiée du chapitre II.4	136
IV.2.3 Définition du niveau de résolution	138
IV.2.3.1 Méthodologie de définition du niveau de résolution	138
IV.2.3.2 Illustration de la méthode de définition du niveau de résolution sur la poutre étudiée du chapitre II.4	139
IV.3 Résolution de la méthode éléments finis via la méthode de Newton avec un support de discrétisation hybride.	140
IV.3.1 Préambule	140
IV.3.2 Méthode de résolution de Newton	140
IV.3.2.1 Définition des termes du résidu	141
IV.3.2.2 Définition des termes de l'opérateur tangent	142
IV.3.2.3 Étapes de résolution via la méthode de Newton.	143
IV.4 Conclusion	148

IV.1. Introduction

Il a été vu au chapitre précédent III, la construction d'un support de discrétisation hybride couplant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle d'une ondelette de Daubechies d'ordre N . L'apport de l'interpolation en ondelettes au support polynomial a pour objectif de mieux représenter des phénomènes irréguliers.

La méthode d'intégration approchée développée dans la partie III.3.1.1 permet de calculer l'approximation de l'intégration d'un produit complexe de fonctions dérivées par une intégration approchée, exprimée via la somme des intégrales de la partie polynomiale et de la partie fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. La validation de la méthode d'intégration III.3.1.2 a montré la nécessité d'avoir un nombre conséquent de points de discrétisation. Ce nombre important se justifie par la précision de l'intégrale souhaitée.

Dans le cas de l'intégration d'une fonction continue, l'intégration classique de Gauss permet de calculer précisément le résultat. Et l'intégration de la fonction d'échelle n'a pas d'intérêt dans ce cas-là.

Dans le cas de l'intégration d'une fonction discontinue, en présence d'une irrégularité, le couplage des intégrations révèle son importance. Les deux intégrales couplées permettent d'atteindre des résultats d'intégration plus précis. Dans ce cas présent, l'intégration de la fonction d'échelle joue un rôle primordial.

Dans ce contexte 3 objectifs sont abordés.

Le premier objectif est d'avoir une méthodologie de détection/surveillance des phénomènes particuliers, en s'appuyant sur une particularité de la méthode de décomposition en ondelettes, qui correspond à l'analyse des détails. Ces coefficients de détails " $d^{j,k}$ " sont obtenus par l'intermédiaire de la décomposition via la fonction ondelette I.3.2 et II.2.1.5. L'analyse des coefficients de détails " $d^{j,k}$ " permet de révéler les localisations et les phénomènes particuliers [47, 101, 44, 30, 38, 118, 112].

Le second objectif consiste à définir le niveau de résolution " j " (le niveau de discrétisation) permettant d'atteindre une précision d'approximation correcte. La méthode est fondée sur la technique de décomposition en ondelettes, où les niveaux d'approximations seront comparés entre-eux. Pour mémoire, les niveaux d'approximation sont déterminés à l'aide de la fonction d'échelle I.3.2 et II.2.1.1.

Le troisième objectif est d'insérer le support de discrétisation hybride au sein de la méthode numérique par éléments finis. Une illustration de la méthode est proposée via la présentation d'une application 1D similaire au chapitre II.

Ce chapitre IV présente en première partie IV.2, la méthodologie de détection de localisations IV.2.2 et la technique pour définir le niveau de résolution IV.2.3. Puis en seconde partie IV.3, l'utilisation du support de discrétisation hybride est exposée au sein de la formulation variationnelle illustrée via une application 1D.

IV.2. Détection d'une localisation et définition du niveau de résolution "j"

IV.2.1. Préambule

Une première résolution de l'équilibre globale avec la méthode de Newton et l'utilisation d'une discrétisation polynomiale classique est réalisée. Une échelle de points de définition plus affinée est alors définie. Dans l'exemple d'illustration, le nombre de points de définition par éléments est augmenté à 8 points au lieu de 2 par rapport à l'interpolation de référence.

Cette base de travail permet ainsi de réaliser les études de détection et de définition du niveau de résolution à l'aide de l'application des algorithmes développés pour le traitement du signal. De manière plus précise, il est nécessaire de prendre en considération, les éléments de la méthode d'intégration développée dans le chapitre précédent III.3.1.1.

Le premier vecteur (B^0) de cette méthode d'intégration sera défini via une interpolation polynomiale avec 8 points de définition ($j=3$) dans le cas de détection, et il sera analysé par les deux méthodes de cette section IV.2. Ces méthodes mettent à profit les algorithmes de filtrage, développés pour le débruitage des signaux, dans l'optique d'obtenir une décomposition en ondelettes au niveau inférieur ($j=2$), soit 4 points pour décrire l'approximation du niveau 2 et 4 points pour représenter les détails du même niveau.

L'algorithme de filtrage consiste à réaliser un produit de convolution entre la fonction de référence et le filtre passe-haut pour obtenir les détails et passe bas pour recueillir l'approximation. Ces opérations permettent ainsi de détecter et de définir le niveau de résolution. Une présentation des méthodes est réalisée dans les parties ci-après.

IV.2.2. Détection et localisation du phénomène

La méthode de décomposition en ondelettes consiste à analyser un signal bruité sur différents espaces de projections I.2.5.2 et II.2.1.5. Ces espaces de projections se composent des bases d'approximations (V_j) et des bases de détails (W_j).

Dans le cadre du traitement du signal, et plus spécifiquement le débruitage d'un signal, le but est d'obtenir une représentation du signal sans perturbation en filtrant les bruits parasites. Or dans le cas étudié, ces perturbations sont conservées afin de déceler une évolution singulière.

Dans un contexte d'analyse en ondelettes, les bases de détails représentent les événements perturbateurs du signal à chaque niveau de résolution "j" alors que les bases d'approximations permettent d'obtenir une représentation du signal d'origine avec une soustraction des bruits. Ces propriétés intrinsèques pour détecter et représenter des oscillations brèves peuvent se révéler particulièrement intéressantes pour la méthode de simulation numérique par éléments finis.

La méthodologie de détection des perturbations consiste à s'appuyer sur l'analyse des détails à un niveau de résolution "j=2", dont les étapes de la technique sont détaillées dans la partie IV.2.2.1 ci-après.

IV.2.2.1. Méthodologie de détection et surveillance de phénomènes particuliers

La méthode de décomposition en ondelettes permet de détecter un ou plusieurs phénomènes via l'analyse des coefficients de détails " $d^{j,k}$ ". L'idée réside sur l'étude de la variation

des coefficients à un niveau de résolution "j=2".

La méthodologie mise en place consiste premièrement à définir le premier vecteur (B^0) sur une échelle "j=3", avec 8 points de définition.

Ce vecteur (B^0) est initialement calculé à partir de l'interpolation polynomiale de base utilisée pour définir la position et la vitesse virtuelle. Le vecteur est ensuite analysé et décomposé par une méthode de filtrage en ondelettes. D'une manière pratique dans l'exemple d'application, la méthode classique "DownDyadHi" est utilisée. Cette dernière est issue de la bibliothèque des Ondelettes "WaveLab", téléchargeable à l'adresse http://statweb.stanford.edu/~wavelab/Wavelab_850/download.html.

Cette fonction permet d'obtenir les coefficients de détails " $d^{j,k}$ " au niveau de résolution inférieure "j=2", en effectuant un produit de convolution entre le filtre passe-haut, associé à l'ondelette de Daubechies d'ordre N, et le vecteur (B^0). Il est également important de noter que cette fonction est spécifiquement créée pour des signaux périodiques et par conséquent le signal est défini sur une échelle 2^j .

Dans ce cas d'analyse, le vecteur possède une certaine particularité, car les valeurs aux extrêmes sont identiques. Ces dernières sont semblables, car les dérivées des interpolations linéaires valent -1 et 1, par rapport aux équations III.1 de définition des interpolations linéaires " φ_1 " et " φ_2 " respectivement. En outre la condition limite au nœud 1 équivaut à 0, ce qui permet de simplifier le système d'équations et ainsi d'avoir les extrema similaires. Le fait d'avoir ces valeurs similaires permet de focaliser la détection de singularités sur l'intérieur de l'élément.

Dans le cas, où les valeurs extrêmes sont différentes, la méthode détecte également cette variation et révèle que la singularité se trouve à la jonction des éléments.

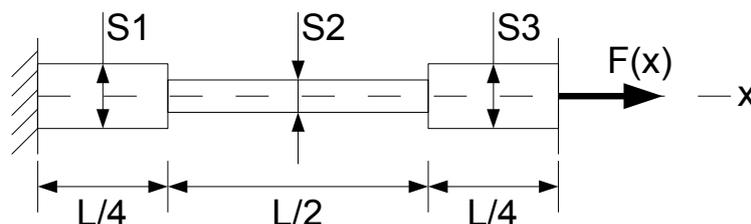
Les coefficients de détails sont alors analysés à partir de la valeur " Υ " qui représente la variation relative des extrema de l'amplitude des coefficients de détails :

$$\Upsilon \geq \frac{|d_{(max)}^{j,k}| - |d_{(min)}^{j,k}|}{|d_{(max)}^{j,k}|} \quad (\text{IV.1})$$

Dans les illustrations présentées, ce critère " Υ " est fixé à 1.10^{-4} soit une erreur relative de 0.01%.

IV.2.2.2. Illustration de la méthode de détection sur la poutre étudiée du chapitre II.4

Dans le cas étudié, l'objectif est de détecter un saut de contrainte ou de déformation, causé par une variation de section au sein d'un élément, dont il est possible de retrouver une représentation au chapitre II.4. La pièce analysée se compose de trois sections, dont la première et la dernière ont une section similaire et sont réparties sur le premier et dernier quart de la poutre. La section intermédiaire correspond au dixième de la section du premier quart de la pièce. La variation de contrainte doit alors être de type "créneau".



Le résidu s'exprime :

$$R(\hat{X}) = - \int_{D_{ref}} \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} \sqrt{g} \, dv_{ref} + \int_{\partial D_{ref}} \mathbf{T} \cdot \overset{*}{\mathbf{V}} \sqrt{g_s} \, ds_{ref} \quad (IV.2)$$

L'intervention d'une variation de section dans la formulation variationnelle entraîne une évolution non régulière de $\boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\mathbf{D}} \sqrt{g}$ le long de la poutre, et par conséquent une évolution discontinue des composantes du vecteur (B^0) .

Il est à noter que le calcul du vecteur (B^0) ne nécessite pas celui de la raideur, qui est en général celui qui consomme le plus de temps de calcul.

L'analyse de ce vecteur doit confirmer une évolution non régulière au centre de l'élément. Cette analyse est également comparée au cas sans variation de section.

Le graphique IV.1 illustre l'évolution des détails à deux niveaux de résolution (courbe rouge, niveau 2 et courbe violette, niveau 4) concernant la poutre avec une variation de section, et la représentation des détails (courbe bleue, niveau 2) à un seul niveau de résolution concernant une poutre avec une section uniforme. Les courbes sont tracées par rapport à la position des nœuds de discrétisation sur l'élément.

Un décalage de -1.10^{-3} a été effectué sur la courbe bleue, qui caractérise le cas avec une section constante, afin de donner plus de lisibilité au graphique.

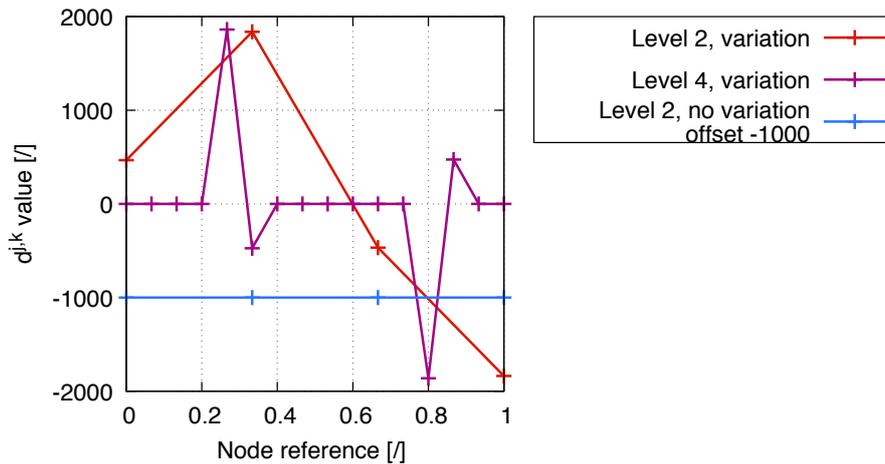


FIGURE IV.1 – Détection de la variation de section sur la poutre, évolution des détails

La figure montre bien que la variation de section, présente au milieu de la poutre, entraîne une différence entre la courbe bleue et la courbe rouge. L'affinage du découpage (niveau 2 à 4) révèle une meilleure localisation des changements de section sur la poutre (courbe violette). Cet enrichissement du nombre de points de discrétisation, par l'analyse multirésolution donne lieu à une représentation plus précise du changement abrupt de section.

L'algorithme de filtrage en ondelettes, avec la fonction "DownDyadHi" et l'analyse des coefficients de détails permettent d'obtenir une méthodologie de détection automatique des phénomènes non réguliers. Cette technique est intégrable dans la formulation variationnelle classique et ne requiert pas une ressource de calcul trop importante, car seules les forces généralisées sont prises en compte, et non leurs variations.

Cependant l'analyse des détails n'est pertinente que si le phénomène irrégulier peut s'exprimer via l'interpolation polynomiale initiale. C'est le cas dans l'exemple étudié, car

la variation de section est une donnée d'entrée. Par contre dans le cas d'une localisation due par exemple à une transformation de phase du matériau, il est sans doute nécessaire de disposer d'un critère physique supplémentaire pour induire une non-régularité au niveau de la loi de comportement. Ainsi l'enrichissement par ondelettes permet à priori de représenter l'évolution non régulière, de la détecter, mais pas fondamentalement de la créer.

La variation des détails est ainsi l'élément déclencheur de l'utilisation du support de discrétisation hybride couplant les deux interpolations. Mais pour une utilisation optimale, il est nécessaire de définir le niveau de résolution "j" le mieux adapté à la représentation précise des irrégularités via la fonction d'échelle. Il est proposé dans le chapitre suivant, une méthode simple pour évaluer automatiquement ce niveau.

IV.2.3. Définition du niveau de résolution

À l'image des méthodes classiques d'estimation d'erreur, l'idée est de s'appuyer sur l'analyse de l'approximation à deux niveaux de résolution. Cette analyse est effectuée uniquement dans le cas où un élément particulier a été détecté [IV.2.2](#).

IV.2.3.1. Méthodologie de définition du niveau de résolution

Pour mémoire, l'approximation au niveau "j" est représentée par le produit de coefficients d'approximation " $c^{j,k}$ " avec la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies à l'ordre N, déterminée au niveau "j".

Illustration de la méthode :

La première étape est identique au premier point de la technique de détection, qui consiste à définir le premier vecteur (B^0) à une échelle "j=3", soit 8 points de définition. En deuxième étape, la méthode classique "DownDyadLo" issue de la bibliothèque "WaveLab" est utilisée. Cette fonction permet de déterminer les coefficients d'approximation " $c^{j,k}$ " au niveau de résolution "j=2", en effectuant un produit de convolution entre le filtre passe-bas, associé à l'ondelette de Daubechies d'ordre N, et le vecteur (B^0).

La troisième étape consiste à effectuer une nouvelle définition du vecteur (B^0) à un niveau supérieur "j=4", puis de le décomposer via l'algorithme de filtrage, afin d'obtenir les coefficients d'approximation au niveau de résolution "j=3".

Enfin, lors de la dernière étape, les coefficients d'approximation des deux niveaux ("j=2" et "j=3") sont analysés via la formule [IV.3](#). L'erreur relative de l'approximation sous la forme du rapport entre la différence des valeurs maximales des coefficients d'approximation des deux niveaux ("j=2" et "j=3") et la valeur maximale du niveau ("j=3") est comparée au critère de précision " Λ ".

Si l'erreur relative calculée est supérieure à la précision recherchée, une nouvelle discrétisation est effectuée à un niveau supérieur ("j=5").

$$\Lambda \geq \frac{|c_{max}^{j+1}| - |c_{max}^j|}{|c_{max}^{j+1}|} \quad (\text{IV.3})$$

Dans l'exemple étudié, ce critère de précision " Λ " est fixé à 1.10^{-3} soit une erreur de 0.1%.

IV.2.3.2. Illustration de la méthode de définition du niveau de résolution sur la poutre étudiée du chapitre II.4

L'objectif de cette étude est d'obtenir une précision d'approximation de l'ordre de 1.10^{-3} et de définir le niveau de résolution "j" le plus adapté à la représentation précise du saut de contrainte ou de déformation. Ce saut est causé par la variation de section sur la poutre 1D étudiée au chapitre II.4.

Le graphique IV.2 présente l'évolution du critère de précision IV.3 par rapport au niveau de discrétisation. Pour satisfaire la précision d'approximation souhaitée, il est nécessaire d'effectuer une discrétisation à l'ordre 6, soit 64 nœuds sur l'élément.

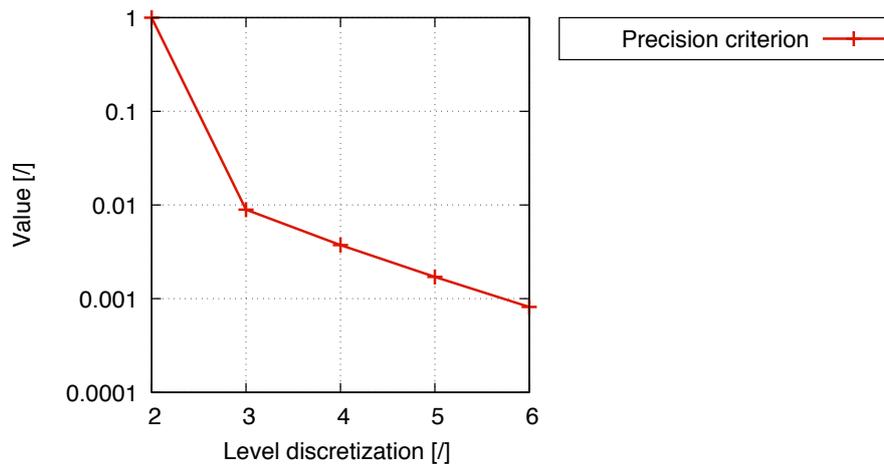


FIGURE IV.2 – Évolution du critère de précision

Il est constaté sur la figure IV.2, une décroissance linéaire à partir du niveau 3 et à partir de ce dernier, la précision atteinte est déjà acceptable.

La qualité des approximations peut se retrouver sur le tracé de ces évolutions sur le graphique IV.3. Le niveau 2 conduit à une représentation imprécise de la fonction étudiée. L'évolution représentative de l'évolution théorique est obtenue à partir du niveau 4. Le niveau 6, qui est le niveau retenu pour ce cas d'étude, permet ici d'obtenir une approximation très précise.

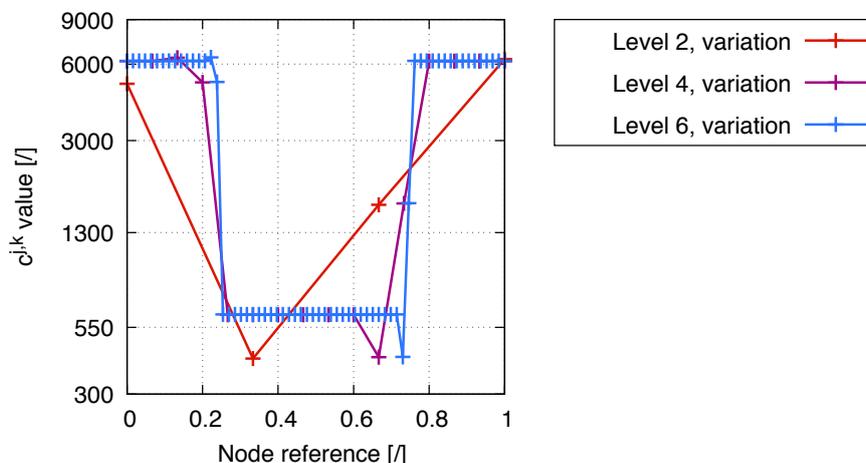


FIGURE IV.3 – Évolution de la fonction approchée par rapport au niveau de résolution "j"

L'algorithme de filtrage en ondelettes, avec la fonction "DownDyadLo" et l'analyse des coefficients d'approximation sur deux niveaux permettent d'obtenir une technique de définition très simple du niveau de résolution efficace et facilement intégrable dans une méthode de résolution numérique par éléments finis.

Une autre solution pourrait être d'étudier directement l'importance des "détails" à un niveau fixé. Néanmoins il faut remarquer qu'une fois le calcul effectué des composantes du vecteur (B^0) , à un niveau donné, le coût de l'évaluation d'une comparaison entre deux niveaux ou de celui de l'examen direct des détails, est du même ordre.

Ce travail en amont, qui a pour objectif de définir le niveau de discrétisation du support hybride doit maintenant être inséré au sein du schéma de résolution de Newton.

IV.3. Résolution de la méthode éléments finis via la méthode de Newton avec un support de discrétisation hybride

IV.3.1. Préambule

L'utilisation de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N employée comme fonction d'interpolation pour la méthode des éléments finis, a été développée au chapitre II. L'insertion des ondelettes dans la méthode des éléments finis a montré un réel intérêt. Mais des améliorations de la méthodologie et plus précisément du support de discrétisation et de son adaptabilité ont été proposées.

Le premier axe d'amélioration a été la création et la validation d'un support hybride couplant une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette d'ordre N et l'interpolation polynomiale dans le chapitre III. Ce support de discrétisation hybride a révélé une association performante et précise pour des représentations de fonctions continues et discontinues.

Le second axe d'optimisation a concerné la proposition d'une méthodologie adaptative en fonction de l'importance des singularités observées.

Dans cette partie, le support de discrétisation hybride au sein de la méthode des éléments finis est mis en œuvre dans un cadre non-linéaire, traité par un algorithme de Newton. Une application 1D, similaire au chapitre II illustre la méthodologie. Les termes modifiés via ce nouveau support seront présentés ci-après.

IV.3.2. Méthode de résolution de Newton

Pour mémoire, le résidu II.47 se compose du tenseur vitesse de déformation $\overset{*}{\mathbf{D}}$, du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, du terme pour le changement de base \sqrt{g} et des vitesses virtuelles $\overset{*}{\mathbf{V}}$. Le terme \sqrt{g} , qui est le déterminant du tenseur métrique, correspond au jacobien de la transformation qui relie les coordonnées globales X^a et les coordonnées matérielles θ^i , coordonnées fixées pendant le chargement. Ces termes sont exprimés à partir de l'**interpolation hybride**. Les termes peuvent être répartis en deux catégories virtuels et non-virtuels. L'opérateur tangent II.48 est défini via la variation du résidu par rapport aux degrés de liberté "ddl".

IV.3.2.1. Définition des termes du résidu

1. Définition des forces internes généralisées $\int_D \sigma : \overset{*}{D} dv = \langle ddl \rangle (F_{int}^*)$

— Les termes non-virtuels modifiés

Les termes $\hat{g}_m^{(j)}$ et $g_m^{(j)}$ ont été modifiés et sont calculés à partir de la dérivée partielle de la position discrétisée via l'interpolation hybride. Avec $m=1\dots 3$, qui correspond à l'indice de direction locale en 3D.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{g}_m^{(j)}} &= \frac{\partial \hat{X}_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \overrightarrow{I}_a \\ \overrightarrow{g_m^{(j)}} &= \frac{\partial X_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \overrightarrow{I}_a\end{aligned}\quad (IV.4)$$

Les vecteurs des positions finales \hat{X} et initiales \vec{X} sont définis à partir de l'interpolation polynomiale " φ_r " et de l'enrichissement via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N sur la base d'approximation de niveau "j" " γ_{j,k_j} ". Les positions peuvent être déterminées en chaque point de discrétisation $\theta^{i(j)}$, avec i l'indice du point.

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(\theta^{i(j)}) &:= \hat{X}_a(\theta^{i(j)})_p + \hat{X}_a(\theta^{i(j)})_o \\ &:= \hat{X}_a^r \varphi_r(\theta^{i(j)}) + 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma(2^j(\theta^{i(j)}) - k_j) \Delta_c \hat{X}_a^{j,k_j}\end{aligned}\quad (IV.5)$$

Dans cette expression "j" et "a" sont fixés, et "a" représente l'indice de coordonnée cartésienne, variant de 1 à 3. À partir de cette formule, une nouvelle définition du vecteur au point de discrétisation est réalisée afin de satisfaire les conditions particulières appliquées à la décomposition polynomiale-ondelettes, vue dans la partie III.2.2.2. La nouvelle formulation fait intervenir la matrice "Kraidcp", dont sa construction est détaillée dans le chapitre précédent III.2.2.2 et les degrés de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ ".

$$\hat{X}_a(\theta^{i(j)}) := \langle Kraidcp^{(j)}(\theta^{i(j)}) \rangle (\hat{X}_{a,coeff}) \quad (IV.6)$$

sous la forme matricielle :

$$\left(\hat{X}_a^{(j)} \right) := \left[Kraidcp^{(j)} \right] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \quad (IV.7)$$

et sous la forme vectorielle :

$$\overrightarrow{\hat{X}^{(j)}} := \left[Kraidcp^{(j)} \right] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a \quad (IV.8)$$

Une expression équivalente est retrouvée pour les positions avant déformations à l'aide des degrés fixes " $X_{a,coeff}$ ".

$$\overrightarrow{X^{(j)}} := \left[Kraidcp^{(j)} \right] \left(X_{a,coeff} \right) \overrightarrow{I}_a \quad (IV.9)$$

Il est maintenant possible de définir les vecteurs de la base naturelle avant et après déformation, en fonction de " $X_{a,coeff}$ " et " $\hat{X}_{a,coeff}$ " à l'aide de la formule de la dérivation du couplage présentée dans la section III.2.2.2.

$$\begin{aligned} \vec{\hat{g}}_m^{(j)} &= \frac{\partial \hat{X}_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \vec{I}_a \\ &:= [Kraidderivcp_m^{(j)}] (\hat{X}_{a,coeff}) \vec{I}_a \end{aligned} \quad (IV.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_m^{(j)} &= \frac{\partial X_a^{(j)}}{\partial \theta_m^{(j)}} \vec{I}_a \\ &:= [Kraidderivcp_m^{(j)}] (X_{a,coeff}) \vec{I}_a \end{aligned} \quad (IV.11)$$

— Les termes virtuels modifiés

La vitesse virtuelle se calcule en suivant une logique similaire à celle des positions finales. Le niveau de résolution "j" est identique pour la discrétisation de la position et de la vitesse virtuelle afin d'avoir une matrice de raideur carrée.

$$\begin{aligned} V_a^* (\theta^{i(j)}) &:= V_a^* (\theta^{i(j)})_p + V_a^* (\theta^{i(j)})_o \\ &:= V_a^* \varphi_r (\theta^{i(j)}) + 2^{j/2} \sum_{k_j=0}^{2^j} \gamma (2^j (\theta^{i(j)}) - k_j) \Delta c V_a^{*,j,k_j} \\ &:= \langle Kraidcp^{(j)} (\theta^{i(j)}) \rangle (V_{a,coeff}^*) \\ \vec{V}^{*(j)} &:= \langle V_{a,coeff}^* \rangle [Kraidcp^{(j)}]^T \vec{I}_a \end{aligned} \quad (IV.12)$$

Le vecteur $\hat{X}_{a,coeff}$ représente les degrés de liberté du problème et les vecteurs $X_{a,coeff}$ et $V_{a,coeff}^*$ définissent, respectivement, les degrés fixes et les degrés de liberté virtuels.

2. Définition du second membre $\int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V}^* ds$

Le second membre est défini par le produit des forces externes supposées connues et les vitesses virtuelles qui sont exprimées via l'interpolation hybride.

$$\begin{aligned} \vec{T} \cdot \vec{V}^* (\theta^{i(j)}) \sqrt{g_s} &:= \langle V_{a,coeff}^* \rangle \left(\langle Kraidcp^{(j)} (\theta^{i(j)}) \rangle \right)^T (T_a) \sqrt{g_s} \\ \vec{T} \cdot \vec{V}^* \sqrt{g_s} &:= \langle V_{a,coeff}^* \rangle [Kraidcp^{(j)}]^T (T_a) \sqrt{g_s} \end{aligned} \quad (IV.13)$$

IV.3.2.2. Définition des termes de l'opérateur tangent

Les degrés de liberté $\hat{X}_{a,coeff}$ interviennent principalement dans la définition des forces internes. Dans ce travail, le calcul de l'opérateur tangent est limité à la variation forces

généralisées internes par rapport aux degrés de liberté. Les expressions des termes de l'opérateur tangent ont été définies dans la partie II.2.4.2.

La seule modification intervenant dans la définition des termes de la variation du résidu concerne la variation de la base naturelle $\frac{\partial \hat{g}_m}{\partial \mathbf{ddl}}$. Les degrés de liberté \mathbf{ddl} sont définis par $\hat{\mathbf{X}}_a^r$ et $\Delta \hat{\mathbf{X}}_a^{j,k_j}$, qui sont globalisés par le vecteur $\hat{\mathbf{X}}_{a,coeff}$. La variation de la base s'exprimant en fonction de ces ddl, et il en résulte la définition suivante :

$$\frac{\partial \vec{\hat{g}}_m}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{a,coeff}} = \left[Kraidderivcp_m^{(j)} \right] \quad (\text{IV.14})$$

Les termes du résidu et de l'opérateur tangent ont été définis dans les deux parties précédentes IV.3.2.1 et IV.3.2.2 avec les termes modifiés par rapport aux parties II.2.4.1 et II.2.4.2. Les différentes étapes de la méthode de résolution de Newton IV.3.2.3 sont explicitées ci-après.

IV.3.2.3. Étapes de résolution via la méthode de Newton

Les étapes de la méthode de résolution sont rappelées, ci-dessous, de façon concise. Elles seront davantage détaillées après la définition des notations utilisées.

1. Initialisation des données et des variables
2. Calcul des bases naturelles avant et après déformation " \vec{g}_k " et " \hat{g}_k " puis des métriques et des bases duales
3. Calcul des termes du résidu
4. Approximation et intégration du résidu
5. Calcul des termes de l'opérateur tangent, variation du résidu
6. Approximation et intégration de l'opérateur tangent
7. Résolution du système d'équations
8. Définition du nouveau vecteur position finale $\hat{\mathbf{X}}_{a,coeff}$
9. Vérification de la précision du résidu

Les mêmes étapes que celles de la méthodologie vue dans le chapitre II.4 sont utilisées. La description qui suit met en avant les modifications apportées.

La méthode de résolution de Newton est adaptée à la méthodologie d'intégration approchée, développée dans le chapitre III.3.1.1. Deux étapes supplémentaires ont été ajoutées afin de définir le résidu et l'opérateur tangent à une échelle de résolution "j". La technique d'intégration introduite au chapitre III.3.1.1 possède la particularité de pouvoir utiliser une échelle différente de la représentation de la fonction de départ. Ce niveau de résolution est noté "jo", dont sa valeur peut être identique ou inférieur au niveau "j" initial.

Notations utilisées :

Liste des indices liées à la cinématique :

- r : L'indice des noeuds concernant l'interpolation polynomiale
- $i_{(j)}$: L'indice des points de l'échelle de la décomposition en ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, "i" : indice du point et "j" : niveau

- j : Le niveau de résolution utilisé pour la décomposition en ondelettes
- k_j : Le facteur de translation concernant l'interpolation de la décomposition en ondelettes

Liste des indices liés à l'intégration :

- $ig_{\textcircled{j}o}$: L'indice de position des points d'intégration de Gauss
- $io_{\textcircled{j}o}$: L'indice des points de l'échelle de la décomposition en ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies, "io" : indice du point et "jo" : niveau de résolution
- jo : Le niveau de résolution utilisé pour la décomposition en ondelettes
- k_{jo} : le facteur de translation concernant l'intégration de la décomposition en ondelettes

Étapes de la résolution de la méthode de Newton

1. Initialisation :

Les positions initiales X sont connues et fixées au cours de la résolution. À l'initialisation ($m=0$), les positions finales \hat{X} sont initialisées par les valeurs des positions initiales.

$$X_a \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right)^{(m)} := \langle \text{Kraidcp}^{\textcircled{j}} \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right) \rangle (X_{a,coeff}) \quad (\text{IV.15})$$

$$\hat{X}_a \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right)^{(m)} := \langle \text{Kraidcp}^{\textcircled{j}} \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right) \rangle (\hat{X}_{a,coeff}) \quad (\text{IV.16})$$

$$\hat{X}_a \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right)^{(0)} := X_a \left(\theta^{i\textcircled{j}} \right)^{(0)} \quad (\text{IV.17})$$

Les termes $\vec{g}_k^{\textcircled{j}}$ ($k=1, \dots, 3$ correspondant à l'indice de direction locale en 3D) peuvent être calculés à l'initialisation, ces termes resteront inchangés jusqu'à la fin de la résolution.

$$\begin{aligned} \vec{g}_k^{\textcircled{j}} &= \frac{\partial \vec{X}^{\textcircled{j}}}{\partial \theta_k^{\textcircled{j}}} \vec{I} \\ &:= \left[\text{Kraidderivcp}_k^{\textcircled{j}} \right] (X_{a,coeff}) \vec{I}_a \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

2. Base naturelle à l'étape "m"

Les termes \hat{g}_k doivent être calculés aux points de Gauss et aux points de discrétisation de la décomposition hybride. Il est noté $\theta^{ig_{\textcircled{j}o}}$, les points de Gauss et $\theta^{io_{\textcircled{j}o}}$,

les points utilisés par la décomposition en ondelettes via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies au niveau de résolution "j".

$$\begin{aligned} \vec{\hat{g}}_k^{(j)(m)} &= \frac{\partial \vec{\hat{X}}^{(j)}}{\partial \theta_k^{(j)}} \vec{I}_a \\ &:= \left[\text{Kraidderivcp}_k^{(j)} \right] \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \vec{I}_a \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Le calcul des \hat{g}_k aux points de définition de la décomposition " $\theta^{(j)o}$ " est directement accessible, étant donné que la position des nœuds est parfaitement déterminée que ce soit pour l'interpolation polynomiale ou pour l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle.

Par contre la détermination de $g_k(\theta^{ig(j)o})$ aux points $\theta^{ig(j)o}$ n'est pas directe, étant donné que ces points de Gauss n'appartiennent pas à l'échelle de décomposition. Pour remédier à ce problème, une interpolation linéaire est réalisée. Il est noté "v" et "v+1", les points appartenant à l'échelle de décomposition en ondelettes concernant l'intégration et qui encadrent le point "igjo".

$$\hat{g}_k \left(\theta^{v(j)o} \right) < \hat{g}_k \left(\theta^{ig(j)o} \right) < \hat{g}_k \left(\theta^{v+1(j)o} \right) \quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_k \left(\theta^{v(j)o} \right) &= \hat{X}^r \varphi_r' \left(\theta^{v(j)o} \right) + 2^{j_o/2} 2^{j_o} \sum_{k_{j_o}=0}^{2^{j_o}} \gamma^{(1)} \left(2^j \left(\theta^{v(j)o} \right) - k_{j_o} \right) \Delta c \hat{X}^{j_o, k_{j_o}} \\ &= \langle \text{Kraidderivcp}_k^{(j)o} \left(\theta^{v(j)o} \right) \rangle \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_k \left(\theta^{v+1(j)o} \right) &= \hat{X}^r \varphi_r' \left(\theta^{v+1(j)o} \right) + 2^{j_o/2} 2^{j_o} \sum_{k_{j_o}=0}^{2^{j_o}} \gamma^{(1)} \left(2^j \left(\theta^{v+1(j)o} \right) - k_{j_o} \right) \Delta c \hat{X}^{j_o, k_{j_o}} \\ &= \langle \text{Kraidderivcp}_k^{(j)o} \left(\theta^{v(j)o} \right) \rangle \left(\hat{X}_{a,coeff} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

L'interpolation linéaire s'exprime :

$$\hat{g}_k \left(\theta^{ig(j)o} \right) \approx \frac{\hat{g}_k \left(\theta^{v(j)o} \right) \left(\theta^{v+1(j)o} - \theta^{ig(j)o} \right) + \hat{g}_k \left(\theta^{v+1(j)o} \right) \left(\theta^{ig(j)o} - \theta^{v(j)o} \right)}{\theta^{v+1(j)o} - \theta^{v(j)o}} \quad (\text{IV.22})$$

La figure IV.4 permet d'illustrer la position des points d'intégration par rapport à chaque contribution du support hybride.

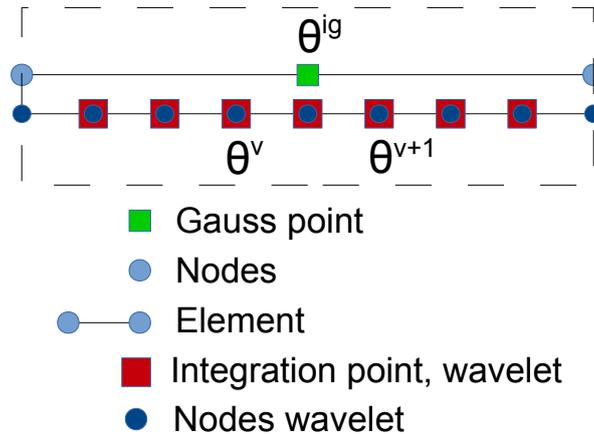


FIGURE IV.4 – Positions des points d'intégration ondelettes et Gauss

Dans ce cas d'interpolation polynomiale de type linéaire, la position du point d'intégration de Gauss se situe exactement à la position d'un des points d'intégration de la décomposition en ondelettes, par conséquent la méthode illustrée n'est pas nécessaire. Néanmoins, dans le cas d'une interpolation polynomiale de type quadratique, avec deux points d'intégration de Gauss, cette méthodologie peut être appliquée. Les termes g_k et \hat{g}_k sont ainsi déterminés aux points de Gauss et aux points de définition de la décomposition en ondelettes.

3. Calcul des termes du résidu à l'étape m

À cette étape, les différents tenseurs, exprimés à l'étape 3 de la méthode de Newton II.4, sont calculés avec la prise en compte des termes modifiés g_k et \hat{g}_k dans les formules.

4. Intégration du résidu à l'étape m

Les formules sont similaires à l'étape 4 de la méthode de Newton II.4 mais avec la prise en compte de la nouvelle méthode d'intégration du chapitre III.3.1.1 et les définitions des termes de la formulation variationnelle exprimées via l'**interpolation hybride**. Les matrices "[*FImatrderivcp*]" et "[*FImatrcp*]" sont, par conséquent, remplacées respectivement par les matrices "[*Kraidderivcp*]" et "[*Kraidcp*]".

— Intégration des forces internes

Il est possible de se reporter à la méthode d'intégration approchée du chapitre III.3.1.1 pour plus de détails.

L'intégration approchée des forces internes dans le cadre de l'illustration 1D, est définie par :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sigma^{11}(x) D_{11}(x) \sqrt{g} dx &= \int_0^1 \langle \dot{V}_{a,coeff}^* \rangle \left(\langle Kraidderivcp^{(j)}(x) \rangle \right)^T \cdot \sigma^{11}(x) \cdot \sqrt{g} dx \\
 &= \langle \dot{V}_{a,coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 F^L(x) dx \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle \dot{V}_{a,coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 F^0(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 F^L(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 F^{2^j}(x) dx \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV.23}$$

L'intégration de " $\int_0^1 \sigma^{11}(x) D_{11}(x) \sqrt{g} dx$ " est équivalente au produit du vecteur représentant les degrés de liberté virtuels " $\langle \dot{V}_{a,coeff}^* \rangle$ " par le vecteur d'intégration " $\left(\int_0^1 F^L(x) dx \right)$ ". Les termes de ce dernier correspondent à un ensemble d'intégrales calculées selon la relation :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 F^L(x) dx &= \int_0^1 F_p^L(x) dx + \int_0^1 F_o^L(x) dx \\
 &= \int_0^1 \langle Kraidcp^{(jo)}(x) \rangle dx \cdot [Kraidcp^{(jo)}]^{-1} (F^L) dx \tag{IV.24} \\
 &= \langle \dots W^{(jo)} \dots \rangle [Kraidcp^{(jo)}]^{-1} (F^L) \\
 &= \langle \dots S^{(jo)} \dots \rangle (F^L)
 \end{aligned}$$

Le vecteur " (F^L) " est approché par le support de discrétisation hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes à un niveau de résolution "jo". Chaque terme " $\left(F^L \left(\theta^{io(jo)} \right) \right)$ " du vecteur correspond à la valeur de " $(F^L(x))$ " calculée au point $\theta^{io(jo)}$.

Remarques :

L'application d'une nouvelle décomposition polynomiale-ondelettes, avant d'intégrer, permet d'avoir une certaine liberté au niveau de la résolution.

En effet, il est possible d'employer une interpolation hybride à un niveau "j" de résolution, dont l'échelle de points " $\theta^{i(j)}$ " est équivalente à $2^j + 1$ points.

L'ajout de la nouvelle décomposition à l'étape d'intégration permet de choisir une échelle de points différente, qui est équivalente ou inférieure à l'échelle initiale. Dans le cadre de notre exemple 1D, une échelle "jo" équivalente à l'échelle initiale "j" a été choisie.

 — Intégration du second membre, forces externes

L'intégration approchée des forces externes équivaut à :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 TV^*(x)\sqrt{g_s}dx &= \int_0^1 \langle V_{a,coeff}^* \rangle \left(Kraidcp^{(j)}(x) \right)^T \cdot T\sqrt{g_s}dx \\
 &= \langle V_{a,coeff}^* \rangle \left(\int_0^1 SM^L(x)dx \right) \quad \text{avec } L = [0 : 2^j] \\
 &= \langle V_{a,coeff}^* \rangle \begin{pmatrix} \int_0^1 SM^0(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 SM^L(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 SM^{2^j}(x)dx \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Et les intégrations simplifiées sont calculées par l'équation suivante :

$$\int_0^1 SM^L(x)dx = \langle \dots S^{(jo)} \dots \rangle (SM^L) \tag{IV.26}$$

5. Calcul des termes de l'opérateur tangent, variation du résidu à l'étape m

À cette étape, les différentes grandeurs, exprimées à l'étape 5 de la méthode de Newton II.4, sont déterminées avec la prise en compte des termes modifiés g_k et \hat{g}_k dans les formules ainsi que des nouveaux degrés de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ ".

6. Intégration de l'opérateur tangent à l'étape m

Les expressions sont similaires à l'étape 6 de la méthode de Newton II.4 mais avec la prise en compte de la nouvelle méthode d'intégration du chapitre III.3.1.1 et les définitions des termes de l'opérateur tangent exprimées via l'**interpolation hybride**. La matrice " $[FImatrderivcp]$ " est par conséquent remplacée par la matrice " $[Kraidderivcp]$ " et les nouveaux degrés de liberté " $\hat{X}_{a,coeff}$ " sont utilisés.

Les trois dernières étapes de cette méthode se réfèrent directement aux étapes 7, 8, 9 de la méthode de Newton II.4.

IV.4. Conclusion

L'objet du chapitre IV a été de présenter un couplage hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N, dans le cas où une localisation était détectée.

La section IV.2 expose l'adaptation du support hybride en fonction de l'importance des singularités observées. L'investigation a été abordée en deux étapes : une méthode de détection et de surveillance d'éventuelles singularités puis une définition du niveau de

résolution "j" adapté à la représentation précise de ces phénomènes singuliers. La méthode de détection s'appuie sur l'analyse des coefficients de détails obtenus à l'aide de la décomposition en ondelettes du vecteur des forces généralisées. L'illustration de la technique dans la partie IV.2.2.2 a montré l'efficacité de cette dernière, en matière de localisation des deux variations de section de la poutre 1D. Sur cet exemple, une simple analyse réduite à 4 coefficients de détails suffit à la détection, permettant un traitement très rapide. La définition du niveau de résolution "j" IV.2.3.1 permet de compléter la méthode de détection, dans le but d'atteindre une représentation précise des évolutions non régulières. La méthodologie repose sur l'étude d'approximations à deux niveaux de résolution différents. Celle-ci compare les coefficients d'approximation des deux niveaux et une erreur relative est déterminée. Cette erreur comparée à une valeur cible proposée par l'utilisateur permet ainsi d'ajuster le niveau de résolution adéquate. Un exemple d'utilisation est présenté dans l'étude 1D de la poutre à deux variations de section.

L'association des deux méthodes conduit à une méthodologie de résolution adaptative, contrôlée par des paramètres de précision.

La méthode d'intégration approchée joue également un rôle central dans ce schéma de résolution, car elle permet de calculer l'intégrale du résidu IV.3 et de l'opérateur tangent IV.3 dans le contexte d'une définition discrète du support ondelette et d'une évolution à priori irrégulière des phénomènes. Il est à noter la possibilité d'ajuster la précision d'intégration de fonctions définies sur un niveau de résolution "j", via un niveau spécifique "jo". Ce dernier peut être identique ou inférieur à l'échelle de points initiale "j".

Le chapitre suivant V illustre l'application de la méthode WFEM improved à travers la résolution du problème 1D. Les résultats seront comparés au cas des éléments finis traditionnels et au cas des éléments finis avec ondelettes.

CHAPITRE V

Analyse et illustration de la méthode WFEM improved

Sommaire

V.1	Introduction	152
V.2	Organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode hybride WFEM improved	152
V.3	Résolution d'un problème 1D, présentation des résultats via les différentes méthodes	155
V.3.1	Rappel de la géométrie	155
V.3.2	Résolution en éléments finis avec interpolation polynomiale	155
V.3.2.1	Maillage et discrétisation	155
V.3.2.2	Résultats avec la méthode FEM	156
V.3.3	Résolution avec la méthode WFEM : supports ondelettes purs, rappels	157
V.3.3.1	Maillage et discrétisation	157
V.3.3.2	Résultats avec la méthode WFEM	157
V.3.3.3	Évolution du résidu WFEM	158
V.3.4	Résolution avec la méthode WFEM improved : support mixte polynomiale-ondelettes	159
V.3.4.1	Maillage et discrétisation	159
V.3.4.2	Résultats avec la méthode WFEM improved	159
V.3.4.3	Évolution du résidu WFEM improved	161
V.3.5	Comparaison des méthodes FEM, WFEM et WFEM improved	162
V.4	Conclusion	163

V.1. Introduction

L'utilisation de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N en tant que fonction d'interpolation pour la méthode des éléments finis a été présentée dans le chapitre II.

Les chapitres III et IV, quant à eux, ont abordé les axes d'amélioration et d'adaptation de la méthodologie pour faire face à la représentation d'irrégularités.

Le premier axe concernait la création et la validation d'un support de discrétisation hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N .

Le second axe consistait à développer une méthode d'intégration approchée en raison de la complexité et de l'aspect discret de la définition des termes de la formulation variationnelle.

Enfin, le troisième axe a traité de l'adaptation de la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée par rapport à l'importance des singularités observées.

Dans ce chapitre V, l'application du support de discrétisation hybride va dorénavant être présentée. L'illustration par l'application 1D sera comparée aux résultats obtenus via la méthode des éléments finis MEF et la méthode des éléments finis avec ondelettes WFEM.

Le chapitre V s'articule ainsi en deux sections. La première V.2 expose l'organigramme de résolution d'un problème mécanique via la méthode des éléments finis hybrides WFEM improved et la seconde V.3 est dédiée à l'analyse des résultats obtenus par les différentes méthodes dans le cadre de l'illustration 1D.

V.2. Organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode hybride WFEM improved

La figure V.1 présente l'organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved).

La géométrie, pour cette étude, est représentée par un maillage 1D, composé d'éléments à 2 nœuds avec une interpolation initiale linéaire. L'encadré en pointillé bleu correspond à la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved).

La simulation est contrôlée par :

1. les paramètres classiques d'un calcul élément fini :
 - (a) les données physiques : section et loi de comportement
 - (b) les conditions limites : cinématiques et en efforts
 - (c) le pilotage de la méthode de Newton :
 - i. incréments de chargement et erreur tolérée sur l'équilibre
 - ii. bornes maxi tolérées sur le nombre d'itérations et/ou le nombre d'incrément de charge

2. les paramètres relatifs à l'enrichissement par ondelettes :

- (a) l'ordre N de l'ondelette de Daubechies et le premier niveau de résolution " j " à employer,
- (b) les critères d'erreur " Υ " et " Λ ".

La méthode de résolution de Newton, encadrée en pointillé rouge, est dédiée à la formulation variationnelle IV.3. Les différentes étapes de la méthode et les termes calculés sont schématiquement retrouvés.

Dans le cas où la norme infinie du résidu n'est pas suffisamment petite, le compteur d'itération est incrémenté. Si ce compteur excède le nombre maximum d'itérations " NB_{iter} ", l'incrément de charge est diminué d'un coefficient. Dans le cas contraire, un nouveau cycle de résolution est réalisé.

Une fois l'équilibre satisfait, la grandeur $\sigma : \mathbf{D}^* \sqrt{g}$ est calculé en 8 points (de l'échelle dyadique) à l'aide de l'interpolation polynomiale initiale au premier passage puis, avec le support mixte si une singularité est détectée (voir ci-après). Ces grandeurs sont nécessaires pour l'application des méthodes de détection de singularités IV.2 et de définition du niveau de résolution " j " adapté IV.2.3 à la bonne représentation de ces phénomènes singuliers. L'encadré en pointillé vert regroupe ces deux méthodes.

À partir des grandeurs aux 8 points de définition, une étude de variation des coefficients de détails " $d^{j,k}$ " est effectuée et la variation est comparée au coefficient d'erreur " Υ ".

Dans le cas où il n'y a pas de singularités, l'investigation "ondelette" est stoppée. L'étape de pilotage du calcul est rejointe et l'incrément de charge est incrémenté. Dans le cas contraire, une définition du niveau " j " approprié est effectuée via l'analyse des coefficients d'approximation à deux niveaux, où l'erreur relative de l'approximation est comparée au coefficient de précision d'approximation " Λ ".

Dans le cas où le niveau d'approximation n'est pas assez précis, la grandeur $\sigma : \mathbf{D}^* \sqrt{g}$ est calculée sur une nouvelle échelle de points de définition à un niveau de résolution supérieur " $j+1$ ". Dans le cas contraire, le support de discrétisation hybride, associant l'interpolation linéaire et l'interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle au niveau " j ", est définie comme nouvelle fonction de forme. Cette dernière est, par conséquent, utilisée dans le schéma de résolution de Newton pour résoudre la formulation variationnelle IV.3.

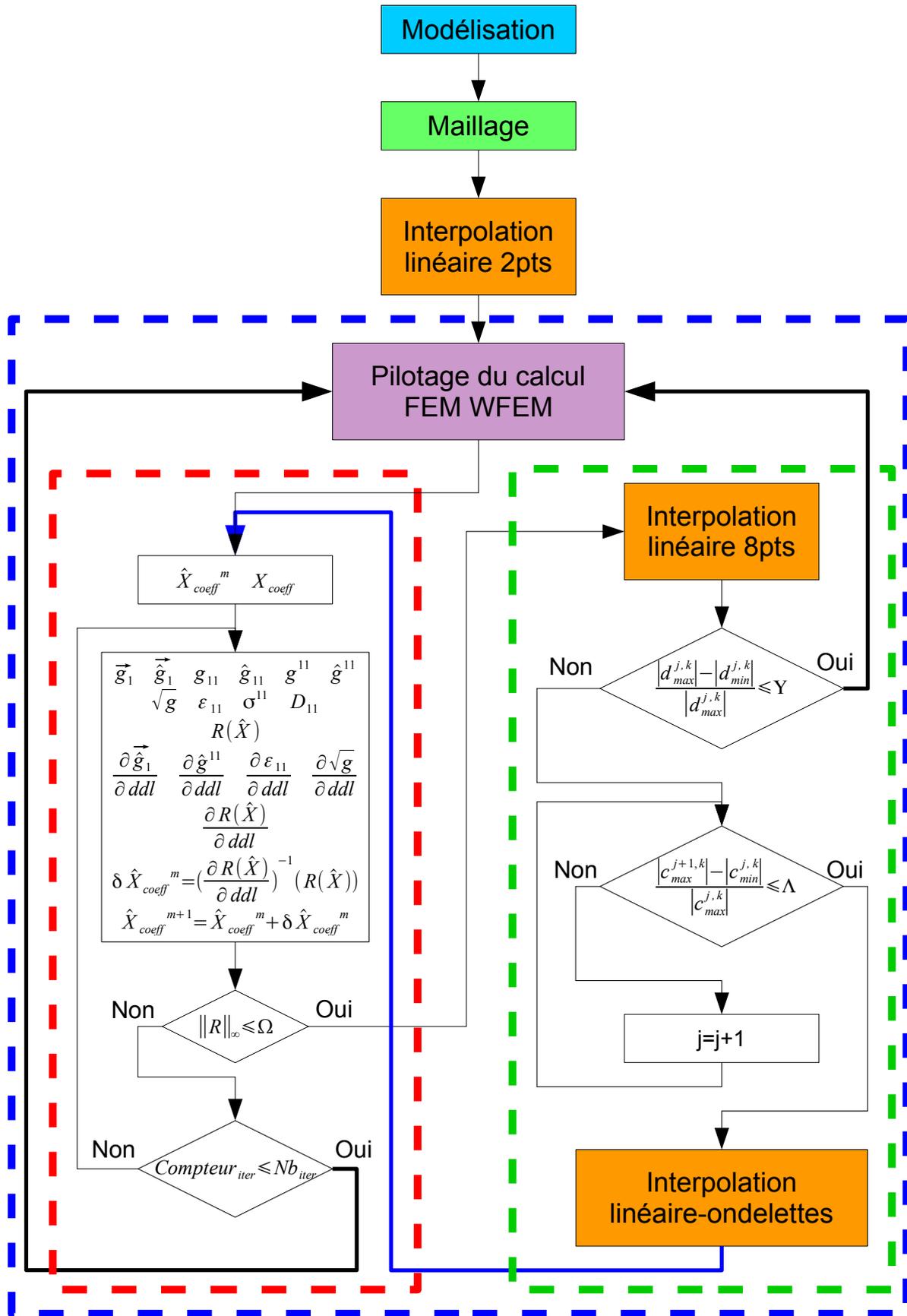


FIGURE V.1 – Organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode des éléments finis hybrides WFEM improved

V.3. Résolution d'un problème 1D, présentation des résultats via les différentes méthodes

Les résultats obtenus avec le support mixte sont comparés avec ceux obtenus par une discrétisation classique et ceux obtenus par un support ondelette seul.

Les éléments comparés sont l'évolution de la contrainte " σ^{11} " et l'évolution de la déformation " ϵ_{11} ". Ces termes sont représentés sur deux niveaux de résolution concernant les deux méthodes WFEM et WFEM improved "Level 3 et 6", soit 9 et 65 points respectivement et avec deux maillages à propos de la méthode FEM "8 et 64 éléments". Les deux maillages et les deux niveaux de résolution permettent d'avoir une échelle de points sensiblement identique pour les différentes méthodes.

Les trois techniques utilisent une méthode de résolution de Newton pour résoudre la formulation variationnelle. Le critère de précision " Ω " est fixé à 1.10^{-5} .

L'ondelette de Daubechies utilisée pour la décomposition en ondelettes pour la méthode WFEM et WFEM improved est d'ordre 6.

V.3.1. Rappel de la géométrie

La géométrie correspond à la poutre 1D étudiée dans le chapitre II.5 qui présente une variation de section.

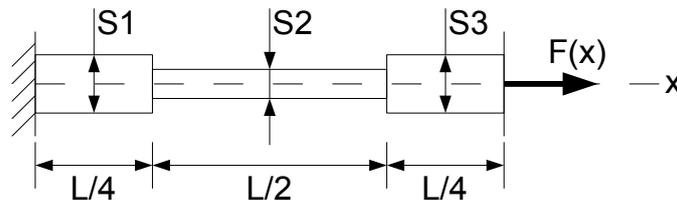


FIGURE V.2 – Poutre à section variable soumise à un essai de traction uniaxial

La poutre se compose de trois sections : la première et la troisième sont de même grandeur " $S1=S3=1 \text{ mm}^2$ " et la seconde correspond au dixième de la section précédente " $S2=(1/10)S1$ ". S1 et S3 sont réparties sur le quart de la structure " $L/4$ " et la longueur de la section S2 est de " $L/2$ ". La longueur totale " L " est de 1 mm.

Le matériau utilisé est de l'acier de construction, de module d'Young $E=210 \text{ GPa}$. La poutre est soumise à un effort de traction de 1050 N, placée à l'extrémité de la structure.

Analytiquement avec une hypothèse de linéarité, la déformation maximale atteinte est de l'ordre de 5% sur la section intermédiaire S2 et de 0,5% sur les sections S1 et S3. La contrainte maximale est de l'ordre de 10500 MPa sur la section S2 et 1050 MPa sur les sections S1 et S3.

V.3.2. Résolution en éléments finis avec interpolation polynomiale

V.3.2.1. Maillage et discrétisation

La figure V.3 illustre le maillage utilisé, représentant la géométrie de la poutre pour la méthode des éléments finis traditionnelle FEM. Ce premier maillage se compose de 9

nœuds et de 8 éléments linéiques. La fonction de forme appliquée pour ces éléments est une interpolation linéaire III.1.

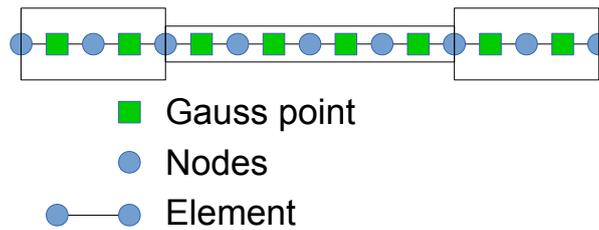


FIGURE V.3 – Maillage et discrétisation de la poutre, FEM

Il est à noter sur la figure V.3, la présence de 8 points d'intégration de Gauss. Le second maillage comprend 64 éléments linéiques avec 65 nœuds et 64 points d'intégration de Gauss.

En fait, un seul élément fini linéaire par tronçon, c'est à dire 3 éléments au total, suffit pour obtenir la solution exacte si le changement de section se situe exactement à la frontière des éléments. L'interpolation linéaire, des contraintes ou des déformations calculées aux points de Gauss, tend vers leurs évolutions exactes, à condition de raffiner le maillage. Une erreur systématique sera introduite s'il n'y a pas de nœud aux changements de section.

L'interpolation linéaire des déformations aux points de Gauss donne une idée sur l'évolution attendue dans le cas, où les lieux de changement de section ne sont pas connus (des irrégularités). Néanmoins, une procédure de raffinement de maillage permet d'améliorer la représentation de cette évolution.

V.3.2.2. Résultats avec la méthode FEM

La figure V.4(a) représente l'interpolation linéaire de la déformation " ϵ_{11} " pour 8 éléments (courbe bleue) et 64 éléments (courbe verte).

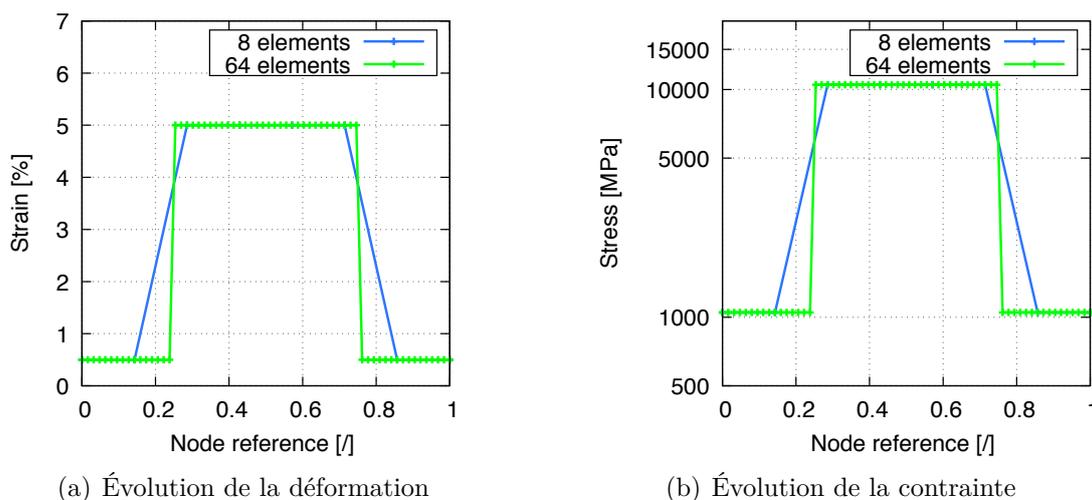


FIGURE V.4 – Résultats avec la méthode des éléments finis (FEM)

Compte tenu du comportement linéaire, des évolutions similaires à la contrainte " σ^{11} " sont obtenues pour 8 éléments (courbe bleue) et 64 éléments (courbe verte).

V.3.3. Résolution avec la méthode WFEM : supports ondelettes purs, rappels

V.3.3.1. Maillage et discrétisation

La figure V.5 présente la discrétisation au niveau de résolution "3" avec le support de discrétisation en ondelettes via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.

Cette première discrétisation en ondelettes se compose de 9 nœuds répartis uniformément sur l'élément et également de 9 points d'intégration.

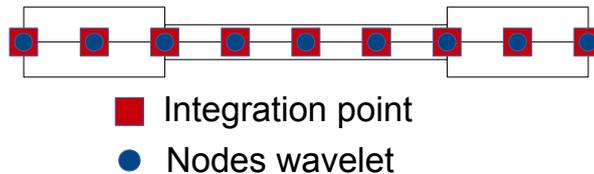
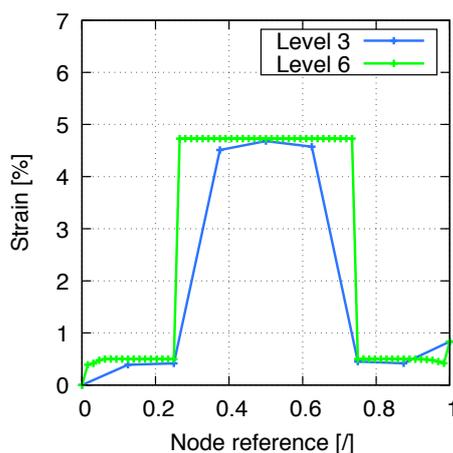


FIGURE V.5 – Poutre discrétisée, interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle au niveau de résolution "j=3"

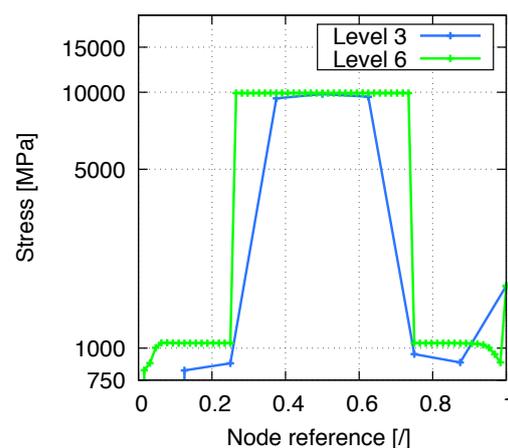
La seconde discrétisation, au niveau de résolution "j=6", comprend 65 nœuds, 65 points d'intégration répartis uniformément sur l'élément.

V.3.3.2. Résultats avec la méthode WFEM

Le graphique V.6(a) représente l'évolution de la déformation " ϵ_{11} ", où la courbe bleue correspond au niveau de résolution "j=3" et la courbe verte au niveau de résolution "j=6". L'interpolation en ondelettes permet de représenter le saut de déformation présent au milieu de la structure. La déformation maximale atteinte est de l'ordre de 4,73 % et la déformation minimale moyenne est de 0,5 %.



(a) Évolution de la déformation



(b) Évolution de la contrainte

FIGURE V.6 – Résultats avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)

De même, la figure V.6(b) présente l'évolution de la contrainte " σ^{11} " aux deux niveaux de résolution. La contrainte maximale atteinte est 9930 MPa et la contrainte minimale moyenne de 1045 MPa. Les résultats sont relativement proches de l'analytique (variation

de contrainte et de déformation de type créneau) mais avec des valeurs différentes aux extréma.

Remarque : Des effets de bords ont été relevés sur ces évolutions qui s'expliquent par des intégrations approchées erronées des termes dérivés de la formulation variationnelle II.47. Ces effets néfastes ont été supprimés au sein de la nouvelle méthode WFEM improved.

La figure V.7 illustre l'évolution du déplacement aux deux niveaux de résolution qui est comparée au déplacement obtenu analytiquement.

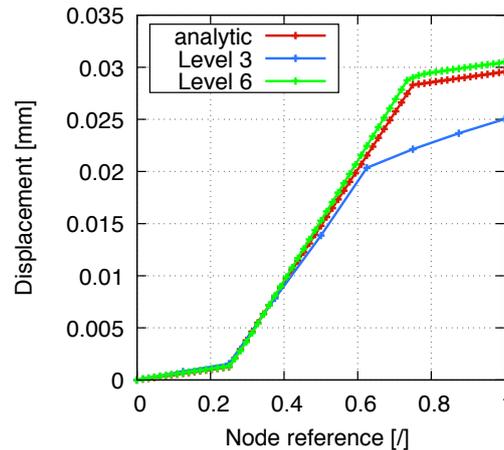


FIGURE V.7 – Évolution du déplacement avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)

Remarque : L'évolution du niveau de résolution "j=6" permet d'atteindre un résultat sensiblement proche de l'analytique.

V.3.3.3. Évolution du résidu WFEM

Le graphique V.8 représente l'évolution du résidu II.47 via la méthode de résolution de Newton. Des décalages et des coefficients multiplicateurs ont été appliqués afin de donner plus de lisibilité au graphique.

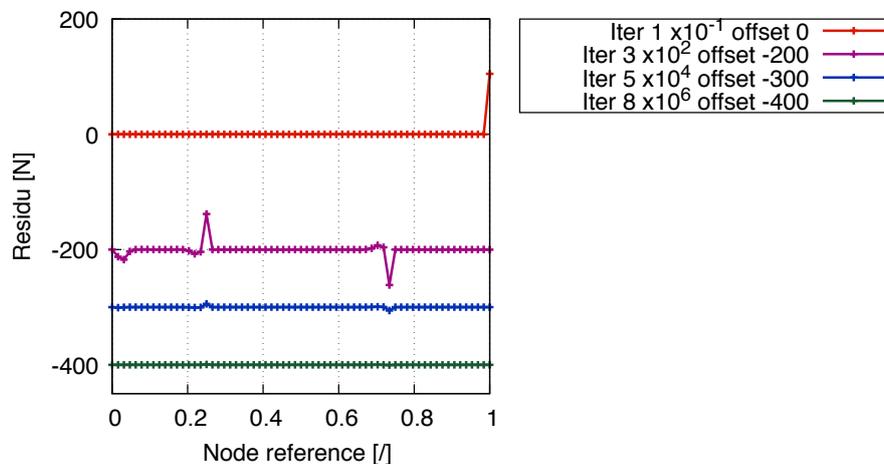


FIGURE V.8 – Évolution du résidu avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)

La courbe rouge, qui correspond à la première itération, montre une évolution particulière du résidu. Un coefficient multiplicateur de 10^{-1} et un décalage de 0 a été imposé. À ce premier pas de résolution, le résidu équivaut aux forces externes. En effet, les positions finales \hat{X} sont initialisées par les valeurs des positions fixes initiales X , la déformation et donc la contrainte σ^{11} sont alors nulles. La courbe violette représente l'évolution à l'itération 3. Des oscillations brèves peuvent être observées au niveau des nœuds proches du changement de section. La courbe bleue symbolise, quant à elle, l'évolution à l'itération 5. Les oscillations présentes au niveau des épaulements s'atténuent assez rapidement. Enfin, la courbe verte illustre l'évolution à l'itération 8 avec un coefficient multiplicateur de 10^6 et un décalage de -400. Les oscillations sont lissées et le critère de précision de la méthode de Newton Ω est atteint. Cette évolution du résidu montre bien que les écarts observés sur les résultats ne sont pas dus à la méthode de Newton, mais bien à la discrétisation retenue.

V.3.4. Résolution avec la méthode WFEM improved : support mixte polynomiale-ondelettes

V.3.4.1. Maillage et discrétisation

La figure V.9 présente la discrétisation au niveau de résolution "j=3" avec le support de discrétisation hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation fonction d'échelle d'une ondelette de Daubechies d'ordre 6. Cette première discrétisation polynomiale-ondelettes se compose de 9 nœuds répartis sur la longueur totale de l'élément (2 nœuds concernant la partie polynomiale et 7 nœuds concernant la partie en ondelettes). Cet élément particulier dispose de 7 points d'intégration concernant la contribution en ondelettes et 1 point d'intégration de Gauss.

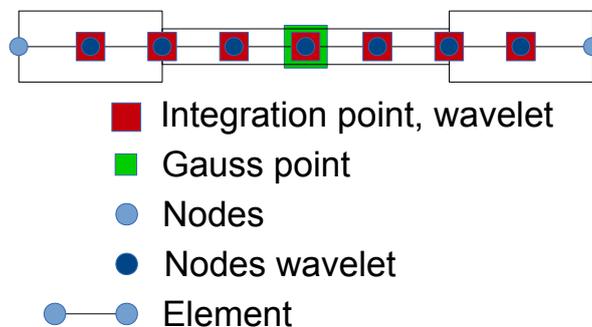


FIGURE V.9 – Poutre discrétisée, interpolation polynomiale-ondelettes, niveau de résolution "j=3"

La seconde discrétisation, au niveau de résolution "j=6", comprend 65 nœuds et 64 points d'intégration disposés de façon similaire à la figure V.9.

V.3.4.2. Résultats avec la méthode WFEM improved

La figure V.10(a) illustre l'évolution de la déformation " ϵ_{11} " aux deux niveaux de résolution cités précédemment. La courbe bleue indique le niveau de résolution "j=3" alors que la courbe verte spécifie le niveau "6". La déformation maximale atteinte au

niveau "3" est de 3,8 % et au niveau "6" de 4,6 % et la déformation minimale au niveau "3" est de 0,38 % et au niveau "6" de 0,48 %.

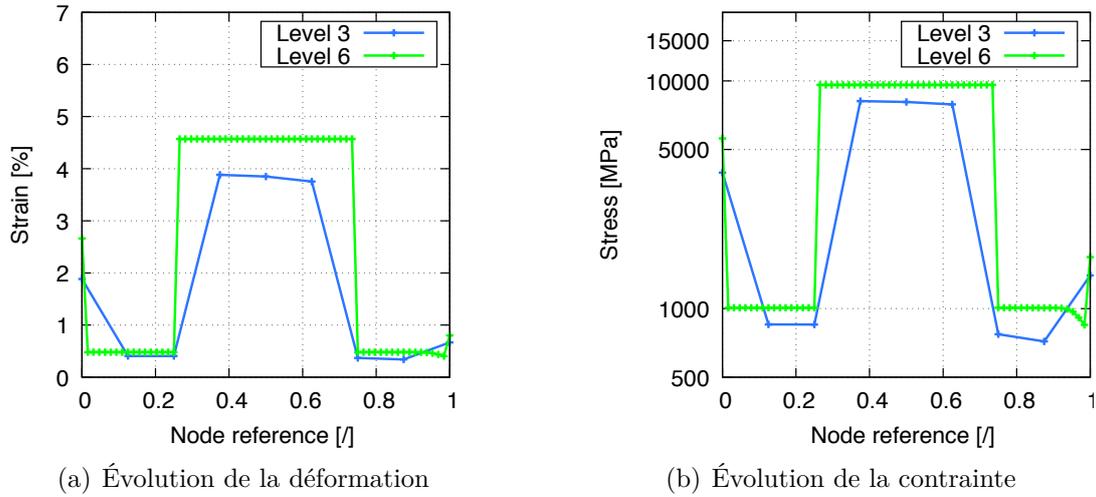


FIGURE V.10 – Résultats avec la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved)

La figure V.10(b) expose l'évolution de la contrainte " σ^{11} " aux deux niveaux de résolution. L'allure de ces évolutions est sensiblement identique aux courbes représentant la déformation " ϵ_{11} ". La contrainte maximale est de 9600 MPa et la contrainte minimale est de 1010 MPa.

Remarque : Des évolutions particulières peuvent être observées sur le premier nœud de la discrétisation sur les deux graphiques V.10(a) et V.10(b). Cette valeur correspond à la moyenne des termes calculés avec l'interpolation polynomiale sur l'ensemble de l'élément.

Pour confirmer cette valeur, la position finale du dernier nœud de la discrétisation est prise en considération, et la contrainte et la déformation associée vont être calculées par rapport à une géométrie avec une section constante.

La position finale " L_{11} " du dernier nœud est de 1,029444 et la position initiale " L_{10} " est de 1.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(L_{10})^2}{(L_{11})^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1^2}{(1,029444e+00)^2} \right) = 2,8193 \% \quad (V.1) \\
 \sigma^{11} &= E \epsilon_{11} = 210000 \cdot 2,8193 \% = 5920 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Malgré cette erreur sur le premier nœud, les résultats obtenus sont remarquables, car la méthode est capable de représenter un saut de contrainte avec grande précision. Il faut également noter que cette évolution particulière au premier nœud est due à la forme particulière de l'ondelette choisie. Une dérivée non nulle au premier point ($\gamma(0)$) conduirait à d'autres résultats. Il serait intéressant d'étudier l'impact d'un autre choix d'ondelette sur cet aspect.

La figure V.11 illustre l'évolution du déplacement aux deux niveaux de résolution qui est comparée au déplacement obtenu analytiquement.

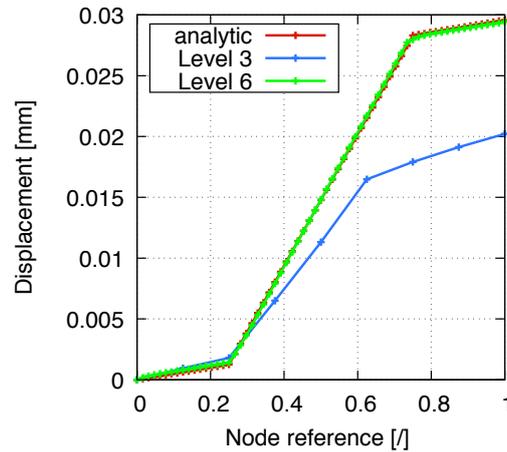


FIGURE V.11 – Évolution du déplacement avec la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved)

Remarque : L'évolution du niveau de résolution "j=6" permet d'atteindre un résultat sensiblement identique à l'analytique.

V.3.4.3. Évolution du résidu WFEM improved

Le graphique V.12 représente l'évolution du résidu IV.3 via la méthode de résolution de Newton. Des décalages et des coefficients multiplicateurs ont été appliqués pour donner plus de lisibilité à la figure.

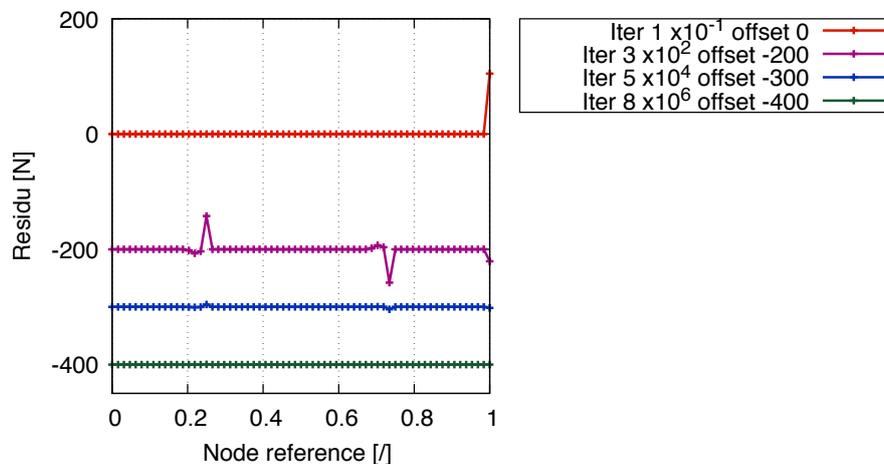


FIGURE V.12 – Évolution du résidu avec la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved)

La courbe rouge correspondant à la première itération, montre une évolution particulière du résidu qui pour les mêmes raisons que pour les autres calculs équivaut aux forces externes. Une évolution du résidu très similaire au cas WFEM (cf. II.12) est retrouvée avec cette méthode améliorée.

V.3.5. Comparaison des méthodes FEM, WFEM et WFEM improved

Le graphique V.13 présente l'évolution des erreurs relatives des différentes méthodes des éléments finis (FEM, WFEM et WFEM improved) en comparaison au résultat analytique.

L'erreur relative est calculée via la formule V.2 suivante :

$$Erreur_{relative}(x) = \frac{|\hat{X}_{method}(x) - \hat{X}_{analytic}(x)|}{|\hat{X}_{analytic}(x)|} \quad (V.2)$$

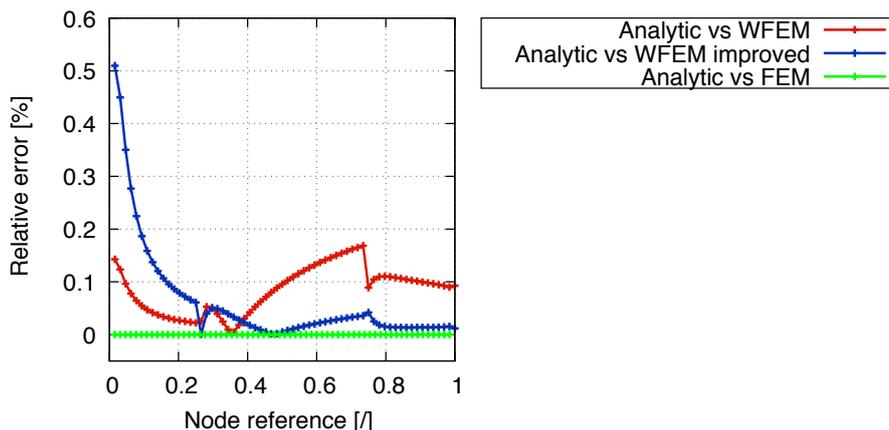


FIGURE V.13 – Évolution des erreurs relatives des méthodes FEM, WFEM et WFEM improved

La courbe bleue représente l'erreur relative entre la WFEM improved et le résultat analytique. La courbe rouge illustre l'erreur relative entre la WFEM et le résultat analytique. Enfin, la courbe verte montre l'évolution de l'erreur relative entre la FEM et le résultat analytique. Il est à noter que pour cette dernière, l'erreur relative est nulle compte tenu du cas particulier étudié et de la discrétisation retenue.

L'erreur relative mesurée entre la méthode des éléments finis en ondelettes et l'analytique, illustrée en rouge, est en dessous de 0,2 %. L'évolution comporte des petites oscillations au niveau des nœuds où il y a le changement de section. L'évolution est importante sur les deux derniers tiers de la poutre, avec un maximum de 0,17 %.

L'erreur relative évaluée entre la méthode des éléments finis en ondelettes améliorée et l'analytique, tracée en bleu est en dessous de 0,6 %. Sur la première moitié de son évolution, l'erreur décroît très rapidement jusqu'à atteindre 0 % et remonte légèrement au deuxième changement de section à 0,04 % et descend à 0 %. Il est important de noter la présence d'oscillations au niveau des points où il y a les changements de section. L'évolution des erreurs relatives WFEM et WFEM improved montrent une asymétrie des résultats. Cette dernière se justifie par le fait de l'asymétrie de l'ondelette de Daubechies I.4.

La section V.3 a permis de mettre en application la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée à travers la résolution d'un problème 1D. Les résultats obtenus montrent la capacité de la méthode à représenter avec précision un saut de contrainte et de déformation. Des améliorations de la représentation de la contrainte et de la déformation au

premier nœud de discrétisation peuvent être apportées.

V.4. Conclusion

Le chapitre V a permis de présenter l'application du support de discrétisation hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6, au sein de la méthode des éléments finis. L'ensemble du fonctionnement a été précisé au travers d'un organigramme de résolution illustré sur un problème 1D.

Concernant la méthode WFEM improved, des évolutions particulières sur le premier nœud de discrétisation ont été relevées sur les deux graphiques V.10(a) et V.10(b). Ces valeurs correspondent à la moyenne des termes calculés avec l'interpolation polynomiale uniquement. Ceci est dû à l'évolution particulière de l'ondelette de Daubechies au premier nœud.

La comparaison entre les deux méthodes avec support ondelette (WFEM et WFEM improved) et la méthode analytique V.3.5 a permis d'observer des erreurs relatives inférieures à 0,6%. La méthode WFEM improved se place avec une erreur relative assez élevée sur le premier quart de la structure par rapport aux autres méthodes, mais cette différence se justifie par les évolutions particulières notées sur le premier nœud de discrétisation. Par contre, sur la seconde moitié, l'erreur relative est proche de 0%.

Cette application 1D met ainsi en lumière la capacité de la méthode WFEM improved et montre que ce support mixte polynomiale-ondelettes constitue une voie pertinente à la représentation de phénomènes de localisation.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur l'amélioration de la méthode des éléments finis (FEM) et plus particulièrement sur la représentation de zones à fort gradient, des singularités.

La littérature expose de nombreuses méthodologies permettant d'analyser ces phénomènes singuliers via, par exemple, des méthodes dites adaptatives (méthodes h , p , r , s) ou encore des méthodes multi grilles ou la méthode XFEM. Les applications de ces méthodes montrent leurs intérêts certains à améliorer la représentation des singularités. Toutefois, ces dernières présentent également des inconvénients tels que l'augmentation importante du nombre de degrés de liberté, la création de conditions limites de frontières particulières ou encore les difficultés liées aux opérations de projection pour passer d'une grille de résolution à une autre. Ceux-ci influent directement sur le temps de résolution. Or dans un contexte industriel, il est nécessaire d'avoir des résultats précis et dans un temps limité. Dans ce contexte, une méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM) a été récemment développée. Les ondelettes sont classiquement utilisées pour améliorer l'analyse et le traitement du signal. Elles ont, en effet, la capacité à représenter naturellement des phénomènes discontinus. Cet atout en fait leur notoriété et leur intérêt dans le cadre de la WFEM. Des améliorations sont constamment apportées à la méthode des éléments finis avec ondelettes. Néanmoins, les articles relatifs à cette méthodologie ont montré une difficulté concernant l'étape d'intégration, en particulier par l'utilisation des ondelettes de Daubechies. En effet, il est alors nécessaire de calculer au préalable les coefficients de connexion. Néanmoins, cette famille d'ondelettes possède des particularités intéressantes et permet de détecter facilement des phénomènes particuliers. Le potentiel de la WFEM a orienté ces travaux de thèse à la création d'une méthode générale qui a la capacité de résoudre à la fois des problèmes réguliers et des systèmes qui peuvent se révéler plus complexes.

Le chapitre II a présenté l'introduction de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 au sein de la méthode des éléments finis ainsi que des améliorations de la méthode. Le choix de l'ordre de l'ondelette a été fait de manière arbitraire.

Une première partie a permis de comprendre les différents aspects de la décomposition en ondelettes et de mettre en lumière la difficulté de la méthode des ondelettes à représenter une fonction dérivée. Un phénomène de bords apparaissait sur le premier nœud du domaine en raison de la conception particulière de la matrice de décomposition via l'utilisation de la méthode du zéro padding. Malgré cette limitation, des résultats, relativement précis, ont été obtenus. Un point important a également été abordé par l'imposition de conditions limites de Dirichlet. Une technique particulière a été mise en place permettant ainsi de retrouver la flexibilité de l'interpolation nodale classique. Cette méthode consiste à projeter, dans un premier temps, les coefficients d'approximation de la base V_j au re-

père de l'élément et dans un second temps d'imposer les conditions limites de Dirichlet sur les termes appartenant au repère de l'élément. Les formulations variationnelles sont ainsi définies par un support de discrétisation qui se compose de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies.

Une deuxième partie a permis de décrire la phase d'intégration, où deux méthodes d'intégration ont été présentées.

La première méthode s'appuie sur la méthode d'intégration habituellement présentée dans la littérature via l'utilisation de coefficients de connexion. La littérature a montré la nécessité de calculer l'ensemble des valeurs au préalable, ce qui peut représenter des coûts supplémentaires liés au temps de calcul. De plus, cette méthode classique impose de connaître la forme explicite des fonctions à intégrer ce qui la rend inapplicable dans le cas d'un comportement mécanique complexe quelconque.

La seconde méthode est une technique développée par ces travaux de thèse. L'objectif est d'intégrer une nouvelle décomposition en ondelettes correspondant à l'approximation du produit des termes de la formulation variationnelle. La validation de la méthode d'intégration approchée par l'intégration du produit de différentes fonctions arbitraires a montré des résultats encourageants. La comparaison effectuée entre la méthode d'intégration approchée et une méthode de type Gauss a révélé que la méthode d'intégration approchée n'était pas performante pour des fonctions régulières de type polynomiales. Par contre, pour des phénomènes de localisation, type apparition de bande de transformation qui serait représenté par une fonction porte, la méthode converge rapidement vers une intégrale précise. L'utilisation d'une nouvelle décomposition en ondelettes dans l'intégrale permet d'avoir une certaine flexibilité car il est, alors, possible de choisir un nombre inférieur de points que ceux utilisés pour le calcul de la cinématique. Cette particularité se révèle intéressante pour diminuer les temps de calcul. Elle ouvre également la possibilité de retenir un ordre d'ondelette différent voire d'utiliser une autre famille d'ondelette.

Une troisième partie a été dédiée à la mise en application de la méthode proposée avec l'utilisation d'une ondelette de Daubechies d'ordre 6 à travers la résolution de deux problèmes académiques 1D. Cette investigation a permis d'illustrer le potentiel de la méthode pour la résolution de problèmes singuliers. En revanche, dans le cas d'évolution régulière, la méthode des éléments finis traditionnelle permet d'obtenir de meilleurs résultats. L'objectif, pour la suite des travaux de thèse, a, alors, été de développer une méthode hybride permettant de combiner la méthode des éléments finis traditionnelle à la méthode des éléments finis avec ondelettes dans l'optique d'avoir une méthode générale qui s'adapte automatiquement au problème analysé.

Le chapitre III expose la construction de ce support de discrétisation hybride associant à la fois une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre N . L'apport de l'interpolation en ondelettes est d'enrichir localement l'interpolation native polynomiale. L'objectif du couplage est de représenter la partie régulière de la réponse par le support polynomial et la partie irrégulière via le support fonction d'échelle de l'ondelette au niveau de résolution " j ".

La création du support a été présentée dans une première partie, où un point important a été abordé concernant l'application de conditions particulières sur le support de discrétisation. L'application de ces conditions spécifiques a été imposée plus particulièrement sur la contribution en ondelettes. L'objectif était, en effet, d'obtenir le support en ondelettes uniquement sur les points intermédiaires de la discrétisation de l'élément. La représentation de fonctions arbitraires a montré un réel potentiel de cette proposition d'amélioration que ce soit pour des fonctions régulières ou pour représenter des discontinuités.

Une seconde partie a concerné l'étape d'intégration. La méthode d'intégration développée est similaire à celle du chapitre II, mais elle se distingue par l'ajout de l'intégration de la partie polynomiale. Cette méthode d'intégration approchée a été validée à travers l'intégration du produit de différentes fonctions arbitraires et elle a montré des résultats remarquables. Avec cette nouvelle méthode d'intégration hybride, les deux spécificités vues pour le cas de l'ondelette seule sont conservées, à savoir, la possibilité de choisir, d'une part, un ordre différent de l'ondelette et, d'autre part, un nombre inférieur de points que ceux utilisés pour le calcul de la cinématique.

L'adaptabilité du support hybride en fonction de l'importance des singularités observées a été abordée dans la chapitre IV. L'objectif était d'utiliser l'interpolation en ondelettes comme enrichissement local et adaptatif en fonction des phénomènes singuliers présents sur l'élément.

Deux techniques associées ont été introduites. La première consiste à détecter et à surveiller d'éventuelles singularités. La seconde a pour rôle de définir le niveau de résolution "j" adapté permettant ainsi d'analyser et de représenter avec justesse ces phénomènes singuliers. Ces deux techniques s'appuient sur l'analyse des coefficients de détails dans le cas de la détection et l'étude de coefficients d'approximation sur deux niveaux dans le cas de la définition du niveau de résolution. L'application des techniques à travers l'étude 1D avec deux variations de section a illustré une capacité certaine de détection ainsi qu'une approximation très précise du saut de contrainte/déformation.

L'introduction du support hybride au sein de la méthode des éléments finis a été détaillée dans ce chapitre. Les développements sont relativement similaires au chapitre II. À noter qu'il est nécessaire de pouvoir calculer les éléments de la métrique aux points de définition de l'ondelette et aux points de Gauss. La localisation de ces points étant généralement différente, une méthode d'approximation des points de Gauss via les points de l'ondelette a été proposée.

L'application du support de discrétisation hybride associant une interpolation linéaire et une interpolation en ondelettes exprimée par la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 a été présentée dans le chapitre V.

La méthodologie générale, dans un cadre non linéaire, a été synthétisée à l'aide d'un organigramme général. Elle est établie en trois étapes dans le cas de la résolution d'un problème 1D via le support hybride (WFEM improved). La première étape consiste à paramétrer le calcul et à modéliser la géométrie. La deuxième étape concerne la méthode de résolution de Newton. La dernière étape, en fin, correspond à l'analyse des singularités.

L'application numérique du support hybride au test académique, comparée aux autres méthodes (FEM, WFEM) permet d'en illustrer ses capacités. Néanmoins, des erreurs de représentation sur les bords de l'élément ont été relevées. Toutefois, il est important de noter que l'analyse via la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved) s'est révélée plus précise que la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM). La comparaison effectuée entre la WFEM improved et la méthode des éléments finis traditionnelle, après raffinement local, ne permet pas de juger correctement l'apport du support hybride à la méthode de résolution. En effet, le maillage raffiné, présenté dans ces travaux, est un cas idéal d'analyse pour la FEM car la variation de section intervient exactement à la jonction des éléments. Dans le cas, où une localisation se produirait dans l'élément, la représentation avec la FEM serait par conséquent erronée alors que la méthode WFEM permettrait naturellement de la modéliser.

Ainsi cette étude a permis de montrer que la méthode des éléments finis avec un

support de discrétisation hybride polynomiale-ondelettes, proposée, constitue une voie pertinente pour l'analyse et la représentation de singularités.

Perspectives

Plusieurs aspects de ces travaux nécessitent d'être explorés et approfondis en commençant, tout d'abord, par les méthodes de décomposition en ondelettes du chapitre II. Bien qu'une décomposition ait été effectuée avec une ondelette de Daubechies d'ordre 6, l'ensemble des ondelettes composant cette famille n'a été étudié. L'idée consisterait ainsi à approfondir cette étude actuelle via l'utilisation d'ondelette de Daubechies d'ordre différent. Il est, ainsi, possible qu'une ondelette avec un ordre inférieur soit moins précise pour déterminer les coefficients d'approximation. Néanmoins, il est difficile de tirer des conclusions sans avoir fait une étude préalable.

Ce chapitre II a permis également de mettre en œuvre une nouvelle méthode d'intégration ayant pour objectif d'intégrer une nouvelle décomposition en ondelettes. Cette dernière correspond à l'approximation du produit des termes de la formulation variationnelle. Cette méthodologie possède certaines particularités : d'une part, un nombre inférieur de points que ceux utilisés pour le calcul de la cinématique peut être choisi et d'autre part, une ondelette d'un ordre différent ou d'une autre famille d'ondelettes peut également être sélectionnée. Deux études pourraient être ainsi menées : la première consisterait à relever les résultats des intégrales en fonction de l'ordre de l'ondelette et la seconde aurait pour objectif d'analyser l'influence d'une autre famille d'ondelettes sur ces résultats des intégrales.

Le chapitre III a présenté une méthode d'intégration hybride, associant l'intégration de la partie polynomiale et l'intégration de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. Une étude permettrait d'évaluer l'influence du degré de l'interpolation polynomiale sur les résultats des intégrales.

Le chapitre IV a montré qu'il était nécessaire d'avoir un nombre conséquent de points pour représenter avec précision les sauts de section (65 points - niveau de résolution 6). Néanmoins, la littérature a montré la possibilité d'avoir un support plus approprié via l'utilisation de la méthode de "lifting scheme". Une étude consisterait ainsi à introduire cette méthode afin d'enrichir localement la zone de l'élément où le phénomène particulier se produit. Cette méthode permettra ainsi de réduire le nombre de points global et par conséquent de diminuer le temps de calcul, tout en conservant une précision de la représentation des singularités. La méthodologie de détection présentée dans ces travaux s'est révélée être performante pour la structure étudiée. En revanche, elle s'est avérée limitée à la détection de variation de section, il serait par conséquent intéressant de trouver une méthode plus étendue.

Le chapitre V a illustré le support de discrétisation hybride à travers la résolution d'un problème académique. Des problèmes de représentation sur les bords de l'élément ont été relevés en raison de la forme particulière de l'ondelette choisie. Il serait intéressant d'étudier l'impact d'une autre famille d'ondelette sur cet aspect.

Finalement, la validation complète du support de discrétisation 1D, après la représentation précise des bords, permettra ainsi d'étendre le modèle en 2D, puis en 3D. La littérature a montré des études sur l'extrapolation de la méthode WFEM en 2D et 3D, il serait intéressant de s'appuyer sur ces travaux pour l'extension du modèle WFEM improved.

ANNEXE A

Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle D6

Cette annexe illustre les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. Les formules analytiques sont présentées au chapitre [I.3.3](#).

Les coefficients du filtre passe-bas " h_i " associé à l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont extraits de la bibliothèque des Ondelettes réalisée par l'université de Stanford, téléchargeable à l'adresse http://statweb.stanford.edu/~wavelab/Wavelab_850/download.html.

h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
3.32670553 e-01	8.06891509 e-01	4.59877502 e-01	-1.35011020 e-01	-8.54412739 e-02	3.52262918 e-02

TABLE A.1 – Valeurs des coefficients h_i du filtre passe-bas de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6

Les coefficients du filtre passe-bas " h_i " sont transformés en coefficient " p_i " via la relation :

$$p_i = \sqrt{2}h_i \quad (\text{A.1})$$

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
4.70467208 e-01	1.14111691 e+00	6.50365000 e-01	-1.90934415 e-01	-1.20832208 e-01	4.98174997 e-02

TABLE A.2 – Valeurs des coefficients p_i de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6

La formule de récurrence concernant la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 est utilisée et définie par la relation suivante :

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{6-1} p_j \phi(2x - j) \quad (\text{A.2})$$

Un système d'équations est ainsi déduit :

$$M\Phi = \Phi \quad (\text{A.3})$$

La matrice M est construite à partir de la formule de récurrence :

$$M = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Dans l'optique d'obtenir une solution non nulle, le système conduit à une équation aux valeurs propres λ_i . Les valeurs propres de la matrice M sont les scalaires λ_i vérifiant :

$$\det(M - \lambda I_n) = 0 \quad \text{avec } \mathbf{I} \text{ la matrice d'identité et } \mathbf{n} \text{ l'ordre de la matrice} \quad (\text{A.5})$$

Les valeurs propres obtenues sont :

VAP(0)	VAP(1)	VAP(2)	VAP(3)	VAP4)	VAP(5)
-2.70284707 e-01	2.50000000 e-01	5.00000000 e-01	9.99999999 e-01	4.70467208 e-01	4.98174997 e-02

TABLE A.3 – Valeurs propres de la matrice M

et les vecteurs propres associés sont les suivants :

VEP(0)	VEP(1)	VEP(2)	VEP(3)	VEP4)	VEP(5)
0	0	0	0	2.35226539 e-01	0
-2.23606798 e-01	-4.37681400 e-01	-5.80210935 e-01	-9.55433573 e-01	-6.89860017 e-01	-3.36205116 e-01
6.70820393 e-01	8.29016969 e-01	7.90667317 e-01	2.86582862 e-01	6.58220819 e-01	7.79864018 e-01
-6.70820393 e-01	-3.44989740 e-01	-1.94823168 e-01	-7.07605771 e-02	-1.87767742 e-01	-3.22361357 e-01
2.23606798 e-01	-4.63458295 e-02	-1.56332145 e-02	-3.14508720 e-03	-1.58195987 e-02	-3.50048876 e-01
0	0	0	0	0	2.28751331 e-01

TABLE A.4 – Valeurs propres de la matrice M

La valeur propre 1 est repérée et le vecteur propre associé est ainsi extrait. La raison de ce choix vient du fait que le système A.3 correspond uniquement à la valeur propre 1. Ce vecteur est ensuite normalisé, par la division de ce vecteur par la somme de ses termes.

Les valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont ainsi obtenues.

$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\phi(2)$	$\phi(3)$	$\phi(4)$	$\phi(5)$
0	0.12863351 e+01	-0.38583696 e+00	0.95267546 e-01	0.42343456 e-02	0

TABLE A.5 – Valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6

Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée première D6

Cette annexe illustre les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée première de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. Les formules analytiques sont présentées au chapitre [I.3.4](#).

La formule de récurrence concernant la dérivée première de la fonction échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 est utilisée et définie par la relation suivante :

$$\phi^{(1)}(x) = 2^1 \sum_{k=0}^{6-1} p_k \phi^{(1)}(2x - k) \quad (\text{B.1})$$

où les coefficients p_k ont été présentés à l'annexe précédente. Un système d'équations est ainsi déduit :

$$M^{(1)}\phi^{(1)} = 2^{-1}\phi^{(1)} \quad (\text{B.2})$$

La matrice $M^{(1)}$ est construite à partir de la formule de récurrence :

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Dans l'optique d'obtenir une solution non nulle, le système conduit à une équation aux valeurs propres λ_i .

Les valeurs propres obtenues sont :

VAP(0)	VAP(1)	VAP(2)	VAP(3)	VAP(4)	VAP(5)
-2.70284707 e-01	2.50000000 e-01	5.00000000 e-01	9.99999999 e-01	0	0

TABLE B.1 – Valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$

et les vecteurs propres associés sont les suivants :

VEP(0)	VEP(1)	VEP(2)	VEP(3)	VEP4)	VEP(5)
0	0	0	0	1	0
-2.23606798 e-01	-4.37681400 e-01	-5.80210935 e-01	-9.55433573 e-01	0	0
6.70820393 e-01	8.29016969 e-01	7.90667317 e-01	2.86582862 e-01	0	0
-6.70820393 e-01	-3.44989740 e-01	-1.94823168 e-01	-7.07605771 e-02	0	0
2.23606798 e-01	-4.63458295 e-02	-1.56332145 e-02	-3.14508720 e-03	0	0
0	0	0	0	0	1

TABLE B.2 – Valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$

La valeur propre 2^{-1} est repérée et le vecteur propre associé est extrait. Le fait de chercher la valeur propre 2^{-1} correspond à la dérivée première. La normalisation de ce vecteur est effectuée via la relation suivante :

$$\sum_{x=1}^{N-2} (-x)^1 \phi^{(1)}(x) = 1! \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Sum} &= (-1) \cdot (-5.80210935e - 01) + (-2) \cdot (7.90667317e - 01) \\ &\quad + (-3) \cdot (-1.94823168e - 01) + (-4) \cdot (-1.56332145e - 02) \quad (\text{B.5}) \\ &= -3.54121338e - 01 \end{aligned}$$

Les valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 sont ainsi obtenues.

$\phi^{(1)}(0)$	$\phi^{(1)}(1)$	$\phi^{(1)}(2)$	$\phi^{(1)}(3)$	$\phi^{(1)}(4)$	$\phi^{(1)}(5)$
0	0.16384523 e+01	-0.22327582 e+01	0.55015936 e+00	0.44146491 e-01	0

TABLE B.3 – Valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6

Étapes concernant le calcul des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée D6

Cette annexe illustre les différentes étapes de la détermination des valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6. Les formules analytiques sont présentées au chapitre [I.3.5](#).

La formule de récurrence concernant la première intégrale de la fonction échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 est utilisée et définie par la relation suivante :

$$\phi_{(1)}(x) = 2^{-1} \sum_{k=0}^{6-1} p_k \phi_{(1)}(2x - k) \quad (\text{C.1})$$

où les coefficients p_k ont été présentés à l'annexe [A](#). Un système d'équations est ainsi déduit :

$$(I - 2^{-n} M^{(1)}) \phi_{(n)} = (C) \quad (\text{C.2})$$

Il faut constater que la matrice $M^{(1)}$ de l'annexe [B](#) est utilisée dans cette relation. La matrice $[I - 2^{-1} M^{(1)}]$ est construite par rapport au système :

$$I - 2^{-1} M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 0.5.p_1 & -0.5.p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5.p_3 & 1 - 0.5.p_2 & -0.5.p_1 & -0.5.p_0 & 0 \\ 0 & -0.5.p_5 & -0.5.p_4 & 1 - 0.5.p_3 & -0.5.p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5.p_5 & 1 - 0.5.p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Le vecteur (C) est ensuite défini et ces termes sont déterminés via la formule suivante :

$$C_i = 2^{-1} \sum_{k=0}^{6-1} p_k \phi_{(1)}(2i - k) \quad \text{et } 2i - k \geq 6 - 1 \quad (\text{C.4})$$

Cette relation met en évidence une des particularités de l'ondelette de Daubechies, qui correspond à :

$$\phi_{(1)}(X) = \int_0^X \phi(y) dy = 1 \quad \text{si } X \geq N - 1 \quad (\text{C.5})$$

Le vecteur (C) équivaut à :

$$(C) = (0 \ 0 \ 0 \ 1.61158412e + 00 \ 2.07101471e + 00 \ 2)^T \quad (C.6)$$

En résolvant le système d'équations C.2, les valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée au premier degré peuvent être déduites.

$\phi_{(1)}(0)$	$\phi_{(1)}(1)$	$\phi_{(1)}(2)$	$\phi_{(1)}(3)$	$\phi_{(1)}(4)$	$\phi_{(1)}(5)$
0	0.60074157 e+00	0.10967114 e+01	0.98548673 e+00	0.99965909 e+00	1

TABLE C.1 – Valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6

ANNEXE D

Résultats concernant l'ondelette de Daubechies D6

Cette annexe présente les moments translés concernant l'ondelette de Daubechies d'ordre 6, les coefficients de connexion $\Gamma_{k,l}^0$ et $\Gamma_{k,l}^{0;1,1}$. Ces coefficients de connexion représentent les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle et les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées au premier ordre.

Le tableau D.1 illustre les moments translés de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction du degré du polynôme "z" et du facteur de translation "k". Les formules analytiques sont présentées au chapitre I.3.8.

k	-4	-3	-2	-1	0
z = 0	1.00000000 e+00	1.00000000 e+00	1.00000000 e+00	1.00000000 e+00	1.00000000 e+00
z = 1	-3.18259883 e+00	-2.18259883 e+00	-1.18259883 e+00	-1.82598832 e-01	8.17401168 e-01
z = 2	1.01289353 e+01	4.76373766 e+00	1.39854000 e+00	3.33423335 e-02	6.68144669 e-01

TABLE D.1 – Moments translés de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction du degré du polynôme "z" et du facteur de translation "k"

Le tableau D.2 représente les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l" symbolisée via $\Gamma_{k,l}^0$. Ces intégrales sont calculées par rapport aux bornes [0 :1]. Les formules analytiques sont présentées à la partie I.3.11.1.

$k \ l$	-4	-3	-2	-1	0
-4	1.47791133 e-06	3.24935171 e-05	-1.34388719 e-04	4.41328283 e-04	-5.13282702 e-16
-3	3.24935171 e-05	1.33846092 e-03	-5.68478777 e-03	1.89275244 e-02	-4.41328283 e-04
-2	-1.34388719 e-04	-5.68478777 e-03	3.10635327 e-02	-1.17675941 e-01	-1.87931357 e-02
-1	4.41328283 e-04	1.89275244 e-02	-1.17675941 e-01	4.70948730 e-01	1.23328236 e-01
-1	-5.13282702 e-16	-4.41328283 e-04	-1.87931357 e-02	1.23328236 e-01	4.96647798 e-01

TABLE D.2 – Valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l", $\Gamma_{k,l}^0$

Le tableau D.3 expose les valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées, aux degrés de dérivation identiques $d_1 = d_2 = 1$ de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l" nommée $\Gamma_{k,l}^{0;1,1}$. Ces intégrales sont calculées par rapport aux bornes [0 :1]. Les formules analytiques sont présentées à la partie I.3.11.3.

$k \ l$	-4	-3	-2	-1	0
-4	1.98359243 e-04	1.53079476 e-03	-4.77946450 e-03	8.40745335 e-03	-5.35714286 e-03
-3	1.53079476 e-03	4.60236099 e-02	-1.28299571 e-01	2.03438334 e-01	-1.22693168 e-01
-2	-4.77946450 e-03	-1.28299571 e-01	4.67364636 e-01	-1.01181721 e+00	6.77531606 e-01
-1	8.40745335 e-03	2.03438334 e-01	-1.01181721 e+00	3.05186163 e+00	-2.25189021 e+00
-1	-5.35714286 e-03	-1.22693168 e-01	6.77531606 e-01	-2.25189021 e+00	1.70240891 e+00

TABLE D.3 – Valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l", $\Gamma_{k,l}^{0;1,1}$

Table des figures

I.1	Méthodes adaptatives, cas bidimensionnel, extrait de la thèse L. Barbié [10] . . .	18
I.2	Processus multi-grilles, images extraites de la thèse de H. Liu [106]	21
I.3	Représentation des méthodes pour le traitement des effets de bords	32
I.4	Évolution de la fonction d'échelle et fonction ondelette de l'ondelette de Daubechies D6	37
II.1	Évolution des fonctions au niveau de résolution "j=6"	70
II.2	Évolution de la fonction dérivée $(x)'$ via l'interpolation fonction d'échelle	71
II.3	Évolution de la fonction dérivée $(\cos(2\pi x))'$ via l'interpolation fonction d'échelle	71
II.4	Évolution de la fonction dérivée $(x^2)'$ via l'interpolation fonction d'échelle	72
II.5	Évolution de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation fonction d'échelle	72
II.6	Évolution zoomé de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation fonction d'échelle	72
II.7	Évolution des fonctions avec des singularités au niveau de résolution "j=6"	89
II.8	Poutres soumises à un essai de traction uniaxial	102
II.9	Poutres discrétisées, interpolation à l'aide d'une fonction d'échelle de l'ondelette, niveau de résolution "j=3"	104
II.10	Évolution de la déformation avec la méthode WFEM	104
II.11	Évolution de la contrainte avec la méthode WFEM	105
II.12	Évolution du résidu avec la méthode WFEM	106
III.1	Évolution des vitesses virtuelles imposées	118
III.2	Évolution des déformations virtuelles, avec imposition des conditions particulières	119
III.3	Évolution des fonctions au niveau de résolution "j=6"	120
III.4	Évolution de la fonction dérivée $(x)'$ via l'interpolation polynomiale-ondelettes	120

III.5	Évolution de la fonction dérivée $(\cos(2\pi x))'$ via l'interpolation polynomiale- ondelettes121
III.6	Évolution de la fonction dérivée $(x^2)'$ via l'interpolation polynomiale- ondelettes121
III.7	Évolution de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'interpolation polynomiale-ondelettes121
III.8	Évolution zoomé de la fonction dérivée en dent de scie (sawtooth) via l'inter- polation polynomiale-ondelettes122
IV.1	Détection de la variation de section sur la poutre, évolution des détails137
IV.2	Évolution du critère de précision.139
IV.3	Évolution de la fonction approchée par rapport au niveau de résolution "j"139
IV.4	Positions des points d'intégration ondelettes et Gauss146
V.1	Organigramme de résolution d'un problème mécanique 1D via la méthode des éléments finis hybrides WFEM improved154
V.2	Poutre à section variable soumise à un essai de traction uniaxial.155
V.3	Maillage et discrétisation de la poutre, FEM156
V.4	Résultats avec la méthode des éléments finis (FEM)156
V.5	Poutre discrétisée, interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle au niveau de résolution "j=3"157
V.6	Résultats avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)157
V.7	Évolution du déplacement avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)158
V.8	Évolution du résidu avec la méthode des éléments finis avec ondelettes (WFEM)158
V.9	Poutre discrétisée, interpolation polynomiale-ondelettes, niveau de résolution "j=3"159
V.10	Résultats avec la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved)160
V.11	Évolution du déplacement avec la méthode des éléments finis avec ondelettes améliorée (WFEM improved)161
V.12	Évolution du résidu avec la méthode des éléments finis avec ondelettes amé- liorée (WFEM improved)161
V.13	Évolution des erreurs relatives des méthodes FEM, WFEM et WFEM impro- ved162

Liste des tableaux

I.1	Valeurs initiales des fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	40
I.2	Valeurs initiales des fonctions d'échelle dérivées premières de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	42
I.3	Valeurs initiales des fonctions d'échelle intégrées au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 4, 6, 8 et 10	43
II.1	Intégration de fonctions à l'aide de l'intégration fonction d'échelle	73
II.2	Intégration du produit de fonctions dérivées par intégration approchée fonction d'échelle	90
II.3	Intégration du produit de 2 fonctions en dents de scie par intégration approchée fonction d'échelle	91
II.4	Intégration du produit de 4 fonctions en dents de scie par intégration approchée fonction d'échelle	92
II.5	Intégration du produit de 2 fonctions porte par intégration approchée fonction d'échelle	92
II.6	Intégration du produit de 3 fonctions porte par intégration approchée fonction d'échelle	93
III.1	Intégration de fonctions à l'aide de l'intégration polynomiale-fonction d'échelle	126
III.2	Intégration du produit de fonctions dérivées par intégration approchée polynomiale-fonction d'échelle	127
III.3	Intégration du produit de 2 fonctions en dent de scie par intégration approchée polynomiale-fonction échelle	128
A.1	Valeurs des coefficients h_i du filtre passe-bas de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6	171
A.2	Valeurs des coefficients p_i de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.	171
A.3	Valeurs propres de la matrice M	172
A.4	Valeurs propres de la matrice M	172
A.5	Valeurs initiales de la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6.	172

B.1	Valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$173
B.2	Valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$174
B.3	Valeurs initiales de la fonction d'échelle dérivée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6174
C.1	Valeurs initiales de la fonction d'échelle intégrée au premier degré de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6176
D.1	Moments translatsés de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction du degré du polynôme "z" et du facteur de translation "k"177
D.2	Valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l", $\Gamma_{k,l}^0$178
D.3	Valeurs de l'intégrale du produit de deux fonctions d'échelle dérivées de l'ondelette de Daubechies d'ordre 6 en fonction des facteurs de translation "k" et "l", $\Gamma_{k,l}^{0;1,1}$178

Bibliographie

- [1] M.A. Alves, P. Cruz, A. Mendes, F.D. Magalhaes, F.T Pinho, and P.J. Oliveira. Adaptive multiresolution approach for solution of hyperbolic pdes. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 191 :3909–3928, 2002.
- [2] H. Antes. Bicubic fundamental splines in plate bending. *International journal for numerical methods in engineering*, 8 :503–511, December 1974.
- [3] M.R.T. Arruda and L.M. S. Castro. Structural dynamic analysis using hybrid and mixed finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57 :43–54, April 2012.
- [4] H. Askes and A. Rodriguez-Ferran. A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. formulation and linear examples. *International journal for numerical methods in engineering*, 51 :253–273, 2001.
- [5] I. Babuska, T. Strouboulis, A. Mathur, and C.S. Upadhyay. Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17 :273–321, May 1994.
- [6] I. Babuska and M. Suri. The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes. *Mathematical, modelling and numerical analysis*, 21(2) :199–238, 1987.
- [7] I. Babuska and M. Suri. The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(4) :750–776, August 1987.
- [8] I. Babuska and B. Szabo. On the rates of convergence of the finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 18 :323–341, March 1982.
- [9] G. Bao, G. Hu, and D. Liu. An h-adaptive finite element solver for the calculations of the electronic structures. *Journal of computational Physics*, 231 :4967–4979, April 2012.
- [10] L. Barbié. *Raffinement de maillage multi-grille local en vue de la simulation 3D du combustible nucléaire des Réacteurs à Eau sous Pression*. Mécanique, physique, micro et nanoélectronique, Aix-Marseille Université, October 2013.
- [11] F.B. Barros, S.P.B Proenca, and C.S. de Barcellos. Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a p-adaptive strategy. *Computational Mechanics*, 33 :95–107, 2004.
- [12] G. Beckett, J.A. Mackenzie, and M.L. Robertson. A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional stefan problems. *Journal of computational Physics*, 168 :500–518, October 2001.
- [13] T. Belytschko and M. Tabbara. H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International journal for numerical methods in engineering*, 36 :4245–4265, January 1993.

- [14] M.J. Berger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, 53 :484–512, 1984.
- [15] J. Bigot. Analyse par ondelettes. 2009.
- [16] E. Biotteau, A. Gravouil, A.A. Lubrecht, and A. Combescure. Multigrid solver with automatic mesh refinement for transient elastoplastic dynamic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 84 :947–971, 2010.
- [17] A. Boersma and P. Wriggers. An algebraic multigrid solver for finite element computations in solid mechanics. *Engineering computations*, 14(2) :202–215, 1997.
- [18] M. Borrel, J. Ryan, and G. Billet. A generalized patch amr platform that uses cell centered or cell vertex solvers. P. Wesseling, E. Onate and J. Périaux ECCOMAS CFD 2006, European Conference on Computational Fluid Dynamics, September 2006.
- [19] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, 31(138) :333–390, April 1977.
- [20] A. Brandt. Rigorous quantitative analysis of multigrid, i : Constant coefficients two-level cycle with l2-norm. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(6) :1695–1730, December 1994.
- [21] C. M. Brislawn. Classification of nonexpansive symmetric extension transform for multirate filter banks. *Applied and Computational harmonic analysis*, 3(0026) :337–357, March 1996.
- [22] W. Cao, W. Huang, and R. D. Russel. Comparison of two-dimensional r-adaptive finite element methods using various error indicators. *Mathematics and computers in simulation*, 56 :127–143, 2001.
- [23] G. Carré and A. Dervieux. On the application of fmg to variational approximation of flow problems. *International journal of computational fluid dynamics*, 12(2) :99–117, 1999.
- [24] L.M. S. Castro. Polynomial wavelets in hybrid-mixed stress finite element models. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 26 :1293–1312, November 2010.
- [25] L.M. S. Castro and J.A. Teixeira de Freitas. Wavelets in hybrid-mixed stress elements. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3977–3998, May 2001.
- [26] L.M. Santos Castro and A.R. Barbosa. Implementation of an hybrid-mixed stress model based on the use of wavelets. *Computers and structures*, 84 :718–731, November 2006.
- [27] P. Cavin. *Méthode éléments finis avec raffinement spatial et temporel adaptatif et automatique : "Star-method" (Space time automatic refinement)*. Mécanique, INSA Lyon, June 2006.
- [28] P. Cavin, A. Gravouil, A.A. Lubrecht, and A. Combescure. Efficient fem calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :1043–1055, 2005.
- [29] L. Champaney and L. Gendre. Attention aux singularités. Technical report, Ecole normale supérieure paris-saclay, January 2012.
- [30] C. Chauvin. *Les ondelettes comme fonctions de base dans le calcul de structures électroniques*. Mathématiques, sciences et technologies de l’information, informatique, Institut National Polytechnique de Grenoble, November 2005.

- [31] J. Chen, W. Tang, and M. Xu. A mesh-free analysis of the ship structures based on daubechies wavelet basis theory. *Journal of information and computational science*, 12(5) :1675–1684, March 2015.
- [32] M.Q. Chen, C. Hwang, and Y.P. Shih. The computation of wavelet-galerkin approximation on a bounded interval. *International journal for numerical methods in engineering*, 39 :2921–2944, July 1996.
- [33] M.Q. Chen, C. Hwang, and Y.P. Shih. A wavelet-galerkin method for solving population balance equations. *Computers and Chemical Engineering*, 20(2) :131–145, February 1996.
- [34] X. Chen, J. Xiang, B. Li, and Z. He. A study of multiscale wavelet-based elements for adaptive finite element analysis. *Advances in Engineering software*, 41 :196–205, October 2010.
- [35] X. Chen, S. Yang, J. Ma, and Z. He. The construction of wavelet finite element and its application. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40 :541–554, February 2004.
- [36] C.K. Chui and J.Z. Wang. A cardinal spline approach to wavelets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(3) :785–793, 1991.
- [37] A. Cohen. Construction de bases d’ondelettes à holdériennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 6(3-4) :91–108, 1990.
- [38] C. Damerval. *Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d’images*. Mathématiques, sciences et technologies de l’information, informatique, Université Joseph Fourier, May 2008.
- [39] T.B.T. Dang. *Calcul multi-échelle de singularités et applications en mécanique de la rupture*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, September 2013.
- [40] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI :909–996, 1988.
- [41] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [42] L. Demkowicz, Ph. Devloo, and J.T. Oden. On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 53 :67–89, December 1985.
- [43] L. Demkowicz, J.T. Oden, W. Rachowicz, and O. Hardy. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 1 constrained approximation and data structure. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 77 :79–112, March 1989.
- [44] L.A. Diaz, M.T. Martin, and V.Vampa. Daubechies wavelet beam and plate finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45 :200–209, December 2008.
- [45] P. Diez and A. Huerta. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 176 :215–229, May 1999.
- [46] H.B. Dong, X.F. Chen, B. Li, K.Y. Qi, and Z.J. He. Rotor crack detection based on high-precision modal parameter identification method and wavelet finite element model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :869–883, August 2009.
- [47] C. Ducottet. *Ondelettes, analyse de singularités lissées et traitement d’hologrammes numériques de micro-particules*. Hdr, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, <tel-00511234>, August 2003.

- [48] A. Duster, A. Niggli, and E. Rank. Applying the hp-d version of the fem to locally enhance dimensionally reduced models. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 196 :3524–3533, 2007.
- [49] A. Duster and E. Rank. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 190 :1925–1935, 2001.
- [50] M.G. Edwards, J.T. Oden, and L. Demkowicz. An h-r-adaptive approximate riemann solver for the euler equations in two dimensions. *SIAM Journal on scientific computing*, 14(1) :185–217, January 1993.
- [51] W. Ehlers, M. Ammann, and S. Diebels. h-adaptive fe methods applied to single-and multiphase problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 54 :219–239, August 2002.
- [52] T.O. Espelid and A. Genz. Decuhr : an algorithm for automatic integration of singular functions over a hyperrectangular region. *Numerical algorithms*, 8(2) :201–220, 1994.
- [53] R.P. Fedorenko. A relaxation method for solving elliptic difference equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, pages 1092–1096, 1961.
- [54] P.J.J Ferket. The finite difference based fast adaptive composite grid method. *Numerical linear algebra with applications*, 3(5) :391–411, 1996.
- [55] P.J.J Ferket. The finite difference based fast adaptive composite grid method. *Numerical linear algebra with applications*, 3(5) :391–411, 1996.
- [56] P.J.J Ferket and A.A. Reusken. Further analysis of the local defect correction method. *Computing*, 56 :114–139, August 1996.
- [57] M. Ferreti and D. Rizzo. Handling borders in systolic architectures for 1d discrete wavelet transform for perfect reconstruction. *IEEE Transactions on signal processing*, 48(5) :1365–1378, May 2000.
- [58] J. Fish. The s-version of the finite element method. *Computers and structures*, 43(3) :539–547, 1992.
- [59] J. Fish and R. Guttal. The s-version of finite element method for laminated composites. *International journal for numerical methods in engineering*, 39 :3641–3662, April 1996.
- [60] J. Fish and S. Markolefas. The s-version of the finite element method for multilayer laminates. *International journal for numerical methods in engineering*, 33 :1081–1105, February 1992.
- [61] J. Fish and S. Markolefas. Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 104 :363–396, February 1993.
- [62] J. Fish and S. Markolefas. Adaptive global-local refinement strategy based on the interir error estimates of the h-method. *International journal for numerical methods in engineering*, 37 :827–838, August 1994.
- [63] D. Fournier, R. Le Tellier, and C. Suteau. Analysis of an a posteriori error estimator for the transport equation with sn and discontinuous galerkin discretizations. *Annals of Nuclear Energy*, 38 :221–231, 2011.
- [64] J. Frohlich and M. Uhlmann. Orthonormal polynomial wavelets on the interval and applications to the analysis of turbulent. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(5) :1789–1830, 2003.

- [65] D. Gabor. Theory of communication, part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26) :429–441, 1946.
- [66] S. Geniaut. *Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2006.
- [67] S. Ghosh and S.K. Manna. R-adapted arbitrary lagrangian-eulerian finite-element method in metal-forming simulation. *Journal of materials Engineering and Performance*, 2 :271–282, April 1993.
- [68] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 43(6) :614–622, June 1995.
- [69] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SISIAM journal on mathematical analysis*, 15(4) :723–736, July 1984.
- [70] B. Guo and I. Babuska. The h-p version of the finite element method. *Computational Mechanics*, 1(1) :21–41, 1986.
- [71] W. Hackbusch. Local defect correction method and domain decomposition techniques. *Computing Suppl. Springer-Verlag*, 5 :89–113, 1984.
- [72] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*, volume 4 of *Springer series in computational mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1985.
- [73] C.S. Han and P. Wriggers. An h-adaptive method for elasto-plastic-shell-problems. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 189 :651–671, July 2000.
- [74] J.G. Han, W.X Ren, and Y. Huang. A multivariable wavelet-based finite element method and its application to thick plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :821–833, December 2005.
- [75] J.G. Han, W.X Ren, and Y. Huang. A wavelet-based stochastic finite element method of thin plate bending. *Applied mathematical modelling*, 31 :181–193, November 2005.
- [76] J.G. Han, W.X. Ren, and Y. Huang. A spline wavelet finite-element method in structural mechanics. *International journal for numerical methods in engineering*, 66 :166–190, November 2006.
- [77] J.G. Han, W.X. Ren, and Y. Huang. A spline wavelet finite element formulation of thin plate bending. *Engineering with Computers*, 25 :319–326, June 2009.
- [78] L. Hart, S.F. McCormick, and A. O’Gallagher. The fast adaptive composite grid (fa) : Algorithms for advanced computers. *Applied Mathematics and Computation*, 19 :103–125, 1986.
- [79] H. Hashish, S.H. Behiry, and N.A. El-Shamy. Numerical integration using wavelets. *Applied Mathematics and Computation*, 211 :480–487, 2009.
- [80] Y. He, X. Chen, J. Xiang, and Z. He. Adaptive multiresolution finite element method based on second generation wavelets. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 :566–579, February 2007.
- [81] Y. He, X. Chen, J. Xiang, and Z. He. Multiresolution analysis for finite element method using interpolating wavelet and lifting scheme. *Communications in numerical methods in engineering*, 24 :1045–1066, May 2008.
- [82] Y. He, J. Ye, X. Chen, and Z. He. Discussion on calculation of the local flexibility due to the crack in a pipe. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :804–810, August 2009.

- [83] S.L. Ho and S.Y. Yang. Wavelet-galerkin method for solving parabolic equations in finite domains. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37 :1023–1037, 2001.
- [84] W. Huang and R.D. Russel. *Adaptive moving mesh methods*, volume 174 of *0066-5452*. Springer-Verlag New York, 2010.
- [85] B. Jawerth and W. Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *Siam review*, 36(3) :377–412, 1994.
- [86] R.Q. Jia and S.T. Liu. Wavelet bases of hermite cubic splines on the interval. *Advances in Computational Mathematics*, 25 :23–29, 2006.
- [87] M.E.D. Jimenez and N. G. Prelicic. Linear boundary extensions for finite length signals and paraunitary two channel filterbanks. *IEEE Transactions on signal processing*, 52(11) :3213–3226, November 2004.
- [88] J. Jin, P. Xue, Y. Xu, and Y. Zhu. Compactly supported non-tensor product form two-dimension wavelet finite element. *Applied Mathematics and Mechanics*, 27(12) :1673–1686, June 2006.
- [89] J.R. Williams and K. Amaratunga. *Introduction to wavelets in Engineering*. PhD thesis, 1994.
- [90] J.R. Williams and K. Amaratunga. A discrete wavelet transform without edge effects using wavelet extrapolation. *The journal of fourier analysis and applications*, 3(4) :435–449, 1997.
- [91] K. Khadra, Ph. Angot, J.P. Caltagirone, and P. Morel. Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes l.d.c.,f.a.c. et f.i.c. *Mathematical, modelling and numerical analysis*, 30(1) :39–82, 1996.
- [92] J. Ko, A.J. Kurdilla, and M.S. Pilant. A class of finite element methods based on orthonormal, compactly supported wavelets. *Computational Mechanics*, 16 :235–244, March 1995.
- [93] E.J. Kubatko, S. Bunya, C. Dawson, and J.J. Westerink. Dynamic p-adaptive runge-kutta discontinuous galerkin methods for the shallow water equations. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 198 :1766–1774, January 2009.
- [94] P. Ladevèze and J.P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*, volume 171. Springer-Verlag New York, 2005.
- [95] P. Ladevèze, J.P. Pelle, and PH. Rougeot. Error estimation and mesh optimization for classical finite elements. *Engineering computations*, 8 :69–80, July 1991.
- [96] F. Lebon. Two-grid method for regularized frictional elastostatics problems. *Engineering computations*, 12 :657–664, 1995.
- [97] F. Lebon, M. Raous, and L. Rosu. Multigrid methods for unilateral contact problems with friction. In *IUTAM-Symposium on Computational Methods in Contact Mechanics*, pages 1–16. Springer, v1 edition, 2007.
- [98] D. Lebrun-Grandié, J. Ragusa, and B. Turcksin. Adaptive multimesh hp-fem for a coupled neutronics and nonlinear heat conduction problem. *International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering*, 2011.
- [99] P.G. Lemarié and Y. Meyer. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matematica Iberoamericana*, 2(1-2) :1–18, 1986.
- [100] M. Lemke and D. Quinlan. Fast adaptive composite grid methods on distributed parallel architectures. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 8(9) :609–619, 1992.

- [101] B. Li and X. Chen. Wavelet-based numerical analysis : A review and classification. *Finite Elements in Analysis and Design*, 81 :14–31, December 2013.
- [102] B. Li, C. Hongrui, and Z. He. 686. the construction of one-dimensional daubechies wavelet-based finite elements for structural response analysis. *Journal of Vibroengineering*, 13(4), 2011.
- [103] L. Y. Li, J. W. Bull, T. Bond, and I. Applegarth. Theoretical formulations for adaptive finite element computations. *Communications in numerical methods in engineering*, 11 :857–868, February 1995.
- [104] E. B. Lin and X. Zhou. Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of burgers equation. *Journal of computational and applied mathematics*, 135 :63–78, January 2000.
- [105] W. Lin, N. Kovvali, and L. Carin. Direct algorithm for computation of derivatives of the daubechies basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 170 :1006–1013, 2005.
- [106] H. Liu. *Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine*. Sciences pour l'ingénieur : mécanique, physique, micro et nanoélectronique, Aix-Marseille, tel-01404140, December 2016.
- [107] J. Ma, J. Xue, S. Yang, and Z. He. A study of the construction and application of a daubechies wavelet-based beam element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39 :965–975, January 2002.
- [108] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. Technical report, University of Pennsylvania Department of Computer and Information Science, 1987.
- [109] S.G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of l^2 . *Transactions of the American mathematical society*, 315(1) :69–87, 1989.
- [110] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11(7) :674–693, 1989.
- [111] S.G. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 2009.
- [112] S.G. Mallat and W.L Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on information theory*, 38(2) :617–643, March 1992.
- [113] S.F. McCormick. Fast adaptive composite grid (fac) methods : Theory for the variational case. In *Defect correction methods*, pages 115–121. Springer, 1984.
- [114] S.F. McCormick and J. Thomas. The fast adaptive composite grid (fac) method for elliptic equations. *Mathematics of computation*, 46(174) :439–456, 1986.
- [115] J.M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4) :289–314, April 1996.
- [116] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, 28 :209–223, 1985-1986.
- [117] Y. Meyer. Ondelettes et opérateurs i : ondelettes. *Hermann, Paris*, 1990.
- [118] Y. Meyer, S. Jaffard, and O. Rioul. L'analyse par ondelettes. *Pour la science*, 119 :p28–37, September 1987.
- [119] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J.M. Poggi. *Les ondelettes et leurs applications*. Hermès science publications, 2003.

- [120] M.J.H.Anthonissen, B. Van't Hof, and A.A. Reusken. A finite volume scheme for solving elliptic boundary value problems on composite grids. *Computing*, 61 :285–305, July 1998.
- [121] N. Moës and T. Belytschko. X-fem, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue européenne des Eléments*, 11(2-4) :305–318, July 2002.
- [122] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1) :131–150, February 1999.
- [123] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, and D. Giard. Wave propagation and sampling theory -part 1 : Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, 47(2) :203–221, February 1982.
- [124] I.V.D. Nicolae, P.T. Nicolae, and D.C. Purcaru. Computational issues related to the discrete wavelet analysis of power systems. /, 2011.
- [125] O. M. Nielsen. *Wavelets in scientific computing*. PhD thesis, University of Denmark, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00803835>, March 2013.
- [126] J.T. Oden and L. Demkowicz. h-p adaptive finite element methods in computational fluid dynamics. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 89 :11–40, August 1991.
- [127] E. Onate and G. Bugeda. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. *Engineering computations*, 10 :307–321, December 1993.
- [128] R. D. Patton and P. C. Marks. One-dimensional finite elements based on the daubechies family of wavelets. *AIAA Journal*, 34(8) :1696–1698, August 1996.
- [129] T.H.H. Pian and D.P. Chen. Alternative ways for simulation of hybrid stress elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 18 :1679–1684, January 1982.
- [130] T.H.H. Pian and K. Sumihara. Rational approach for assumed stress finite elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 20 :1685–1695, July 1984.
- [131] L. Quarta. Une introduction élémentaire à la théorie des ondelettes. *Cahier pédagogique*, 2 :22, 2001.
- [132] S.M. Quraishi and K. Sandeep. A second generation wavelet based finite elements. *Computational Mechanics*, 48 :163–174, March 2011.
- [133] W. Rachowicz. An anisotropic h-adaptive finite element method for compressible navier-stokes equations. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 146 :231–252, September 1997.
- [134] W. Rachowicz and A. Zdunek. An hp-adaptive finite element method for scattering problems in computational electromagnetics. *International journal for numerical methods in engineering*, 62 :1226–1249, December 2005.
- [135] D. Ritter, M. Sturmer, and U. Rude. A fast-adaptive composite grid algorithm for solving the free-space poisson problem on the cell broadband engine. *Numerical linear algebra with applications*, 17 :291–305, February 2010.
- [136] C. H. Romine and B. W. Peyton. Computing connection coefficients of compactly supported wavelets on bounded intervals. In Research Gate, editor, *Computer Science and Mathematics Division*, 1997.
- [137] A. Sbitti. *Propagation des fissures 2D et 3D planes sous chargement thermomécanique à amplitudes variables*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2009.

- [138] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press, 1999.
- [139] M. Siavelis. *Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2011.
- [140] P. Solin, J. Cerveny, L. Dubcova, and D. Andrs. Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp-fem. *Journal of computational and applied mathematics*, 234 :2350–2357, March 2010.
- [141] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and filterbanks*. SIAM, 1996.
- [142] T. Strouboulis and K.A. Haque. Recent experiences with error estimation and adaptivity, part ii : error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 100 :359–430, November 1992.
- [143] H. Su, Q. Liu, and J. Li. Boundary effects reduction in wavelet transform for time-frequency analysis. *Wseas transactions on signal processing*, 8 :169–179, October 2012.
- [144] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48 :1549–1570, 2000.
- [145] W. Sun and N.G. Zamani. An adaptive h-r boundary element algorithm for the laplace equation. *International journal for numerical methods in engineering*, 33 :537–552, 1992.
- [146] W. Sweldens. The lifting scheme : A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational harmonic analysis*, 3 :186–200, November 1996.
- [147] W. Sweldens. The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM journal on mathematical analysis*, 29(2) :511–546, 1998.
- [148] C. Taswell and K. C. McGill. Algorithm 735 : Wavelet transform algorithms for finite duration discrete time signals. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(3) :398–412, September 1994.
- [149] A. Tezuka and O. Okuda. An adaptive mesh refinement for the finite element method (trial by the r-method). *JSME International Journal*, 31(1) :50–55, 1988.
- [150] J.W. Thomas, R. Schweitzer, M. Heroux, S.F. McCormick, and A.M. Thomas. Application of the fast adaptive composite grid method to computational fluid dynamics. In *Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 606–611. Springer, 1986.
- [151] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. Collection "Traitement du signal". Hermes Science Publications, 1998.
- [152] Y. Wang, X. Chen, and Z. He. Adaptive multiwavelet-hierarchical method for multiscale computation. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8(4), 2010.
- [153] Y. Wang, X. Chen, and Z. He. An adaptive inverse iteration algorithm using interpolating multiwavelets for structural eigenvalue problems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :591–600, September 2011.

- [154] Y. Wang, X. Chen, and Z. He. A second-generation wavelet-based finite element method for the solution of partial differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 25 :1608–1613, January 2012.
- [155] J.U. Wappler. *Die lokale Defektkorrekturmethode zur adaptiven Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit finiten Elementen*. dissertation. de, 1999.
- [156] B. Watremetz, M.C. Baietto-Dubourg, and A.A. Lubrecht. 2d thermo-mechanical contact simulations in a functionally graded material : A multigrid-based approach. *Tribology international*, 40 :754–762, 2007.
- [157] P. Wriggers and A. Boersma. A parallel algebraic multigrid solver for problems in solid mechanics discretized by finite elements. *Computers and structures*, 69 :129–137, January 1998.
- [158] J. Xiang, X. Chen, Z. He, and Y. Zhang. A new wavelet-based thin plate element using b-spline wavelet on the interval. *Computational Mechanics*, (41) :243–255, May 2007.
- [159] J. Xiang, X. Chen, and X. Li. Numerical solution of poisson equations with wavelet bases of hermite cubic splines on the interval. *Applied Mathematics and Mechanics*, 30(10) :1325–1334, 2009.
- [160] J. W. Xiang, X.F. Chen, B. Li, Y.M. He, and Z.J. He. Identification of a crack in a beam based on the finite element method of a b-spline wavelet on the interval. *Journal of sound and vibration*, 296 :1046–1052, May 2006.
- [161] J.W. Xiang, T. Matsumoto, J.Q. Long, and G. Ma. Identification of damage locations based on operating deflection shape. *Nondestructive testing and evaluation*, 28(2) :166–180, 2013.
- [162] Z. Yang, X. Chen, X. Zhang, and Z. He. Free vibration and buckling analysis of plates using b-spline wavelet on the interval mindlin element. *Applied mathematical modelling*, 37 :3449–3466, 2013.
- [163] Z. Yue and D. H. Robbins Jr. Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 63 :1604–1635, April 2005.
- [164] Z. Yue and D. H. Robbins Jr. Adaptive superposition of finite element meshes in non-linear transient solid mechanics problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 72 :1063–1094, May 2007.
- [165] X. Zhang, X. Chen, Z. He, and Z. Yang. The analysis of shallow shells based on multivariable wavelet finite element method. *Acta mechanica solida sinica*, 24(5) :450–460, October 2011.
- [166] Y. Zhong and J. Xiang. Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems. *Acta mechanica solida sinica*, 24(4) :355–364, January 2011.
- [167] X. Zhou and W. Zhang. The evaluation of connection coefficients on an interval. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 3(4) :252–255, December 1998.
- [168] Y. Zhou and J. Zhou. A modified wavelet approximation of deflections for solving pdes of beams and square thin plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44 :773–783, June 2006.
- [169] O.C. Zienkiewicz, J.P. de S.R. Gago, and D.W. Kelly. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers and structures*, 16(1-4) :53–65, 1983.

- [170] O.C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 24 :337–357, January 1987.

Éléments finis en transformations finies, à base d'ondelettes

Résumé : La modélisation numérique via la méthode des éléments finis utilise classiquement des fonctions de forme polynomiale qui de par leur régularité représentent difficilement des évolutions singulières telles que celles observées dans les phénomènes de localisation en mécanique. Pour pallier cette difficulté, ces travaux de thèse ont eu pour objectif de proposer un nouveau support d'approximation adaptatif couplant la méthode de représentation par ondelettes à la méthode des éléments finis classique. Dans le domaine du traitement du signal, la méthode des ondelettes montre un réel potentiel pour traiter les phénomènes singuliers. L'étude porte sur la création d'un support de discrétisation hybride, associant une interpolation polynomiale et une interpolation en ondelettes exprimée via la fonction d'échelle de l'ondelette de Daubechies. Ce couplage permet de représenter la partie régulière de la réponse via le support polynomial et les éventuelles singularités à l'aide du support en ondelettes. L'adaptation du support hybride est effectuée via l'apport multirésolution, qui ajuste le support en fonction de l'importance des singularités observées. Une méthodologie de détection et d'enrichissement automatique est réalisée ayant pour objectif d'obtenir le support optimum. L'ondelette de Daubechies n'étant connue qu'en des points discrets, une méthode d'intégration particulière est proposée. Une modification de l'interpolation naturellement non nodale de l'ondelette est également introduite, de manière à pouvoir imposer des conditions limites classiques nodales. Une illustration de la méthode et de son implémentation informatique est présentée via une étude académique 1D.

Mots clefs : Méthodes des Éléments Finis, Méthode des Éléments Finis avec Ondelettes, Méthode de Newton, Couplage interpolation polynomiale et interpolation fonction d'échelle, Méthode d'intégration, Méthode adaptative, Enrichissement local, Détection, Singularités, Phénomènes locaux

Finite element for finite transformations with a wavelet support

Abstract : The numerical modelling with the finite element method conventionally uses functions of polynomial form which, by their regularity, hardly represent singular evolutions such as those observed in the phenomena of localization in mechanics. To solve the issue, the aim of this thesis was to propose a new adaptive approximation support coupling the wavelet representation with the classical finite element method. In the field of signal processing, the wavelet method shows a real capacity to treat singular phenomena. This research study deals with the creation of a hybrid discretisation support, including a polynomial interpolation and a wavelet interpolation formulated with the scaling function of the Daubechies wavelet. The regular part of the solution is represented with the polynomial support and the singularities are visualised with the wavelet support. The adaptation of the hybrid support is carried out with the multiresolution contribution, which adjusts the support according to the importance of observed singularities. An automatic detection and enrichment method is carried out in order to obtain the optimum support. The Daubechies wavelet being known only in discrete points, a particular integration method is proposed. A modification of the not nodal naturally interpolated wavelet interpolation is also introduced, in order to impose classical nodal boundary conditions. An illustration of the method and its computer implementation is presented via a 1D academic study.

Key words : Finite Element Method, Wavelet Finite Element Method, Newton Method, Polynomial interpolation and scaling function interpolation coupling, Integration Method, Adaptive Method, Local enrichment, detection, singularities, local phenomena

N° ordre 472