



A la recherche du chaînon manquant : le groupement configuré comme intermédiaire entre l'approximation des quantités et la maîtrise du nombre chez des enfants de 5 et 8 ans

Sébastien Miravète

► To cite this version:

Sébastien Miravète. A la recherche du chaînon manquant : le groupement configuré comme intermédiaire entre l'approximation des quantités et la maîtrise du nombre chez des enfants de 5 et 8 ans. Psychologie. Université Toulouse le Mirail - Toulouse II, 2016. Français. NNT : 2016TOU20016 . tel-01949478

HAL Id: tel-01949478

<https://theses.hal.science/tel-01949478>

Submitted on 10 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse - Jean Jaurès



Présentée et soutenue par :

SEBASTIEN MIRAVETE

le 24 mars 2016

Titre :

A la recherche du chaînon manquant : le groupement configuré comme intermédiaire entre l'approximation des quantités et la maîtrise du nombre chez des enfants de 5 et 8 ans

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED CLESCO : Psychologie



Unité de recherche :

CLLE-LTC

Directeur/trice(s) de Thèse :

ANDRE TRICOT (Professeur, Psychologie)

FRANCK AMADIEU (Maitre de conférence, HDR, Psychologie)

Jury :

XAVIER BUFF (Professeur, Mathématiques)

MARIE-PASCALE NOEL (Professeur, Psychologie)

EMMANUEL SANDER (Professeur, Psychologie)

GERARD SENSEVY (Professeur, Sciences de l'éducation)

A la recherche du chaînon manquant

**Le groupement configuré comme intermédiaire entre
l'approximation des quantités et la maîtrise du nombre
chez des enfants de 5 et 8 ans**

Cette thèse a été réalisée au sein de la composante « Laboratoire Travail et Cognition » du laboratoire Cognition, Langues, Langage, Ergonomie (CNRS UMR 5263 - Université Toulouse II - France).

Résumé

Le sens inné du nombre (comparaisons approximatives de quantités, etc.) ne peut distinguer de grandes quantités exactes et n'a pas de représentation numérique interne (pour lui, une quantité n'est pas un nombre d'objets).

L'objectif principal est de montrer que de grandes quantités exactes peuvent être distinguées sans comptage et avec une représentation numérique interne, si elles sont organisées avec des groupement configurés. Les propriétés numériques de ces groupements peuvent être utilisées très tôt sans enseignement ou entraînement et avant l'apprentissage du système décimal. De cette façon, la découverte de ces propriétés (à l'école ou durant l'évolution culturelle humaine) pourrait être un chaînon (manquant) entre l'acquisition d'une représentation numérique interne et la découverte du système décimal.

Une revue de littérature (Article 1) et deux études (Articles 2 et 3) sont conduites afin de corroborer cette nouvelle perspective. L'article 1 montre que quatre règles ont besoin d'être respectées lorsqu'on évalue si les participants ont une représentation numérique interne. L'article 2 (3 expériences) montre que des enfants de 8 ans peuvent comparer avec une représentation numérique interne, en 5 secondes, de grandes quantités exactes organisées avec des groupements configurés, sans comptage, enseignement explicite ou entraînement. L'article 3 (3 expériences) montre que des enfants de 5 ans peuvent réussir le même type de comparaison avant d'avoir appris le système décimal.

Ces résultats suggèrent que certains apprentissages avancés peuvent être réussis spontanément par simple adaptation de l'environnement aux capacités cognitives des apprenants.

Mots-clés : psychologie des apprentissages, cognition numérique, psychologie de l'éducation, psychologie évolutionniste de l'éducation, ergonomie, compréhension du nombre, enfant, école, groupement

Abstract

In search of the missing link: the configured grouping as intermediary between the approximation of quantities and the mastery of number with five and eight year olds

Humans have a primary number sense (e.g. approximate estimations) and a secondary arithmetical knowledge (e.g. the counting). They are genetically predisposed to acquire the first but not the second. The number sense cannot distinguish exact large quantities and does not have an internal numerical representation (for this sense, a quantity is not a number).

The main goal is to show that exact large quantities can be easily distinguished without counting and with an internal numerical representation, if they are organized with configured groups. In addition, the numerical properties of configured groups could be used very early without instruction or training and before learning the decimal system. This way, the discovery of these properties (at school or during the human cultural evolution) could be a (missing) link between the acquisition of an internal numerical representation and the discovery of the decimal system.

A literature review (Article 1) and two studies (Article 2 and 3) are conducted in order to corroborate this new perspective. The Article 1 shows that four rules need to be respected in order to evaluate if participants have an internal numerical representation. The Article 2 (3 experiments) show that 8-year olds can compare with an internal numerical representation, in five seconds, exact large quantities organized with configured groups, without counting, instruction or training. The Article 3 (3 experiments) shows that 5-year olds can succeed in the same type of comparison before learning the decimal system.

These results suggest that some advanced learning can be spontaneously successful by adapting the environment to the cognitive abilities of learners.

Keywords: learning psychology, numerical cognition, educational psychology, evolutionnary educational psychology, ergonomy, number comprehension, child, school, grouping

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon Directeur de thèse, André Tricot. Je lui dois mon approche évolutionniste de la psychologie des apprentissages. Je le remercie aussi vivement pour la qualité exceptionnelle de son accompagnement. Il a particulièrement su mettre en perspective mon travail et m'encourager dans des moments de doute. Ses réflexions théoriques et méthodologiques continueront à exercer sur mes recherches une influence décisive.

Je tiens à remercier tout aussi vivement mon Co-Directeur, Franck Amadieu. Sa rigueur méthodologique restera pour moi un modèle de précision. J'aurai compris grâce à lui les ficelles les plus fines du métier de chercheur. Sa disponibilité et ses conseils auront été pour moi des « facteurs de réussite à l'université » hautement « significatifs » ($p = 0$).

Je tiens à remercier les rapporteurs de cette thèse, Marie-Pascale Noël et Emmanuel Sander, qui m'ont fait l'honneur de lire ce travail. Je remercie tout autant Gérard Sensevy et Xavier Buff d'avoir accepté d'être membres de mon jury. Je m'estime très chanceux de pouvoir bénéficier de l'expertise de chercheurs aussi remarquables.

Je remercie tous les Inspecteurs de l'Education Nationale et tous mes collègues enseignants pour leur aide précieuse : Jean-Luc Parmentelot (IEN), Sylvain Begue (IEN), Josette Suspène (IEN), Sylvaine Mailho (IEN), Jean-Marc Chaussard (IEN), Pierre Villenave, Anne Terrière, Véronique Perrier, Céline Burgues, Gaëlle Imbert, Laurent Icher, Mme Ortis, Mrs Peyrou, Denis Caillard, Nathalie Le Goffic, Nathalie Precigout, Nathalie Corpet, Julie Rozières, Mme Barral, Mme Cornic, Valérie Buosi, Marie-Pierre Caldeira, Olivier Carmouze, Stéphanie Sauvage, Aurélie Cazottes, Muriel Abeille, Mme Pouzac, Hélène Mouche, Delphine Boccacino, Michèle Save, Marie Paute. Ces expériences ont été réalisées grâce à leur dévouement. J'adresse aussi tous mes remerciements aux parents et à leurs enfants.

Je remercie chaleureusement ma tante Nathalie Burgues-Gensel de m'avoir accueilli si souvent dans sa classe. Elle m'a laissé prétester avec confiance les protocoles les plus insensés et m'a ainsi permis d'éviter par la suite de multiples déconvenues.

La rédaction de cette thèse aurait été émotionnellement et matériellement impossible sans le secours quotidien de ma femme. Je remercie mes parents pour leur aide « logistique » et leur soutien. Ma belle-famille m'a elle aussi épaulé dans des moments fort

utiles. Je remercie enfin mon vieil ami Grégory Korn pour sa relecture rapide et minutieuse et mon ami Pierre-Ulysse Barranque pour nos divers échanges autour de ce travail.

Je dédie cette thèse à ma grand-mère qui me rappelait souvent – alors que je me destinais à tout à fait autre chose – qu’étant enfant, mon rêve était de devenir « un savant ».

Table des matières

Cette thèse est une thèse par articles. C'est pourquoi les articles sont présentés tels qu'ils ont été soumis (conformément aux normes de présentation de chaque revue). Chaque article dispose pour cette raison de son propre système de numérotation de ses parties et de ses sous-parties. Aussi n'apparaissent dans cette table des matières que les parties de la thèse et les sous-parties de son Introduction et de sa Conclusion.

Résumé	7
Abstract	9
Remerciements	11
Table des matières.....	13
Table des figures.....	15
Table des tableaux.....	17
Introduction	19
1. Présentation générale : problème, hypothèse, enjeux	19
2. Positionnement théorique.....	22
2.1. La connaissance primaire du nombre et ses limites.....	22
2.1.1. Le Système d'Approximation Numérique.....	22
2.1.2. Le Système d'Individualisation Parallèle.....	24
2.1.3. La sensibilité à la pluralité	25
2.1.4 Résumé	26
2.2. Dépasser les limites de la connaissance primaire du nombre : les hypothèses actuelles	27
2.2.1. Calibrer le Système d'Approximation Numérique.....	27
2.2.2. Compter	28
2.2.3. Les correspondances terme à terme.....	31
2.2.4. La ligne numérique	33
2.2.5. Le groupement	36
2.2.6. Résumé	38
2.3. Les limites des hypothèses actuelles	39
2.4. L'hypothèse des groupements configurés.....	44
2.4.1. Définition d'une nouvelle hypothèse.....	44

2.4.2. Positionnement théorique de l'hypothèse	46
3. Contribution méthodologique et empirique.....	52
3.1. Présentation de la revue de littérature sur les tâches de numérosité (Article 1)	52
3.2. L'hypothèse générale opérationnelle et le paradigme expérimental.....	55
3.4. Présentation des différentes études réalisées	59
3.4.1. L'étude 0.....	60
3.4.2. L'étude 1 (Article 2).....	62
3.4.3. L'étude 2 (Article 3).....	66
 Article 1 : Comment évaluer la sensibilité à la numérosité ? Une revue des différentes tâches	71
Article 2 : Configured-groups hypothesis fast comparison of exact large quantities without counting.....	131
Article 3 : The numerical properties of configured groups: a missing link?.....	173
 Conclusion	221
1. Synthèse des principaux résultats.....	221
2. Discussion générale.....	225
2.1. Apport, limite, perspective.....	226
2.1.1. Apport théorique	226
2.1.2. Limite théorique.....	227
2.1.3. Apport méthodologique	229
2.1.4. Limite méthodologique.....	230
2.1.5. Synthèse et perspectives.....	231
2.2. La contribution de cette thèse à la psychologie des apprentissages	232
2.3. La contribution de cette thèse à l'enseignement.....	233
 Bibliographie.....	237
Annexe : attestations de soumission des articles	249

Table des figures

Cette table ne mentionne que les figures présentées dans l'Introduction et la Conclusion. Les autres figures apparaissent dans les trois articles. Chaque article dispose de son propre mode de présentation et de numérotation des figures (conformément aux normes de présentation de chaque revue).

Figure 1 : Exemple de deux quantités (65 vs 64) organisées à l'aide de groupements configurés et présentées aux enfants dans nos expériences.....	21
Figure 2 : Exemple de ligne numérique exacte allant de 1 à 10.....	33
Figure 3 : Exemple de lignes numériques non graduées délimitées ou non (adapté de Cohen et Sarnecka, 2014)	34
Figure 4 : Deux caractéristiques des anciens symboles numériques utilisés par les Sumériens. Adapté d'Ifrah (1994)	45
Figure 5 : Illustration des propriétés d'égalité et d'inégalité des groupements configurés ...	46
Figure 6 : Exemples d'items servant à opérationnaliser la variable indépendante (les points sont organisés ou non au moyen de groupements configurés).....	56
Figure 7 : Exemples d'items servant à contrôler certains facteurs qui pourraient interférer	59
Figure 8 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'étude 1 (Article 2)	63
Figure 9 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 2 de l'étude 1 (Article 2)	64
Figure 10 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 3 de l'étude 1 (Article 2)	65
Figure 11 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'étude 2 (Article 3)	67

Figure 12 : Exemples d'items utilisés lors de l'expérience 2 de l'étude 2 (a, b) et dans une expérience annexe (c).	69
Figure 13 : Exemple d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'article 3 et permettant ou non de préserver l'intégrité des groupements configurés.....	223
Figure 14 : Passage des connaissances arithmétiques primaires (ANS, SIP, Système de pluralité) à la connaissance secondaire du système décimal. Selon les hypothèses actuelles (Carey, 2009 ; Chan et al., 2014) l'acquisition du système décimal consiste toujours à étendre les capacités de comptage au domaine des grands nombres (en comptant de 1 en 1, de 10 en 10, en comptant le nombre de groupes de 10, etc.). Dans notre perspective, il existe un chaînon manquant dans ces hypothèses et accessible sans comptage : la découverte des propriétés numériques des groupements configurés. La façon de passer des connaissances primaires à l'idée de nombre exact ou encore de passer des propriétés numériques au système décimal demeure, quant à elle, inconnue (« ? ») pour le moment. Le passage de ces propriétés au système décimal pourrait toutefois consister à recourir au comptage.	225
Figure 15 : Exemple de deux contenus possibles de la représentation numérique interne mobilisée par les propriétés numériques des groupements configurés.....	228
Figure 16 : Exemples de représentations scolaires usuelles des nombres en CP	234

Table des tableaux

Cette table ne mentionne que les tableaux présentés dans l'Introduction et la Conclusion. Les autres tableaux apparaissent dans les trois articles. Chaque article dispose de son propre mode de présentation et de numérotation des tableaux (conformément aux normes de présentation de chaque revue).

Tableau I : Résumé des limites méthodologiques et théoriques des hypothèses actuelles expliquant le passage d'une connaissance primaire du nombre (approximative et externe) à une connaissance secondaire du nombre (exacte et interne). Les travaux à partir desquels ces limites ont été identifiées ont été indiqués.....	43
Tableau II : Différences théoriques entre notre hypothèse et les hypothèses actuelles au niveau de la conception de la numérosité et de la procédure non verbale assurant le passage de l'approximation à l'exactitude dans le domaine des grandes numérosités .	51
Tableau III : Ensemble des facteurs contrôlés en fonction de l'expérience.....	58
Tableau IV : Résumé des règles à respecter lors de l'élaboration d'une tâche de numérosité selon notre revue de littérature (cf. 3.1.).....	63
Tableau V : Les quatre règles d'élaboration d'une tâche de numérosité issues de l'article 1. Ces quatre contrôles sont à effectuer lorsqu'on évalue la sensibilité interne à la numérosité.....	222
Tableau VI : Les propriétés numériques des groupements configurés	223

Introduction

1. Présentation générale : problème, hypothèse, enjeux

Les êtres humains sont prédisposés génétiquement pour apprendre certaines connaissances comme la parole (Geary, 2008a). Les mots et leur signification ne sont pas inscrits dans notre ADN. Mais nous possédons des systèmes d'apprentissage innés qui cherchent à assimiler les mots et leur signification afin de pouvoir communiquer avec notre entourage. Toute connaissance acquise au moyen de tels systèmes est qualifiée de « primaire » et constitue une adaptation du système cognitif à la spécificité de son environnement.

L'école (Sweller, 2015) et les milieux professionnels (Tricot, 2012) requièrent l'apprentissage de multiples savoirs et savoir-faire, mais ces derniers ne constituent pas des connaissances primaires. La lecture, l'écriture, la maîtrise de machines-outils, la programmation informatique, etc., ne sont pas acquises au moyen de systèmes d'apprentissage innés.

Il ne faudrait pas croire pour autant que dans une telle perspective, les connaissances secondaires surgissent *ex nihilo*. Pour Geary, (2002), l'apprentissage de la lecture requiert au préalable une certaine maîtrise du langage oral (notamment de la segmentation d'un mot en phonèmes) et semble pour cette raison prolonger des compétences primaires issues originellement du domaine social : le langage écrit apparaît dans ce cas comme une extension de la capacité des êtres humains à communiquer entre eux. Aussi, dans le cadre de la psychologie évolutionniste de l'éducation (Geary, 2008b), l'apprentissage peut être conçu comme un ensemble d'étapes conduisant de connaissances primaires à des connaissances secondaires. Les connaissances primaires initient l'adaptation du système cognitif à son milieu et ces étapes ne sont rien d'autre qu'une tentative de perpétuer cet effort d'adaptation dans les environnements où l'acquisition de connaissances secondaires est exigée.

Cette conception offre un cadre d'étude intéressant dans le domaine de l'apprentissage du nombre. Les enfants scolarisés possèdent en effet des compétences mathématiques primaires (Geary, 2007) : ils peuvent comparer deux « grandes » quantités

(c.-à-d. supérieures à 3 ou 4) à condition que celles-ci ne soient pas trop proches (Dehaene, 2010). Ils sont donc déjà sensibles à la « numérosité » des collections, c'est-à-dire aux nombres d'objets qu'elles contiennent.

Cette sensibilité reste toutefois une sensibilité « externe » à la numérosité. Il est en effet admis que le sens inné du nombre se représente les grandes quantités sous la forme d'un unique objet plus ou moins long (Carey, 2009). La numérosité est codée sous la forme d'une grandeur indivisible plus ou moins étendue, semblable à un élastique plus ou moins étiré. Plus le nombre d'objets extérieurs s'accroît et plus la représentation de ces objets, dans notre système cognitif, s'élargit. Plus ce nombre diminue et plus cette représentation rétrécit. L'ajout ou le retrait d'unités est symbolisé par l'extension ou la contraction d'une unique entité. Pour ce sens inné du nombre, il n'existe donc pas une somme d'objets plus ou moins importante (une multiplicité d'objets). Il n'existe qu'une grandeur plus ou moins ample (un seul objet). Cette sensibilité externe aux grandes numérosités ne s'accompagne donc pas d'une sensibilité « interne » aux grandes numérosités.

L'apprentissage du nombre à l'école consiste donc à partir d'une connaissance primaire (approximative et externe) pour accéder ensuite à une connaissance secondaire (exacte et interne). C'est pourquoi cet apprentissage peut être envisagé comme un processus passant par plusieurs phases successives. Celles-ci permettent à l'enfant de rejoindre progressivement une connaissance secondaire du nombre.

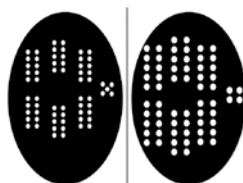
Quelles sont ces phases ? Ce travail s'intéresse à l'une d'entre elles. Il soulève par conséquent le problème suivant : comment les enfants acquièrent-ils des connaissances arithmétiques secondaires « exactes » et « internes » dans le domaine des grands nombres ?

Les données archéologiques (Ifrah, 1994) suggèrent que les êtres humains sont passés par différentes étapes depuis la fin de la Préhistoire. Pour le dire très brièvement, ils ont d'abord représenté les quantités sous la forme d'une suite de symboles alignés (0000000000). Ensuite, ils ont entrepris de les regrouper (00000 00000) et de les figurer à l'aide de symboles organisés désignant des groupes organisés de symboles (◆ = 000 et ◆◆◆ = 000 000 000). Enfin, les symboles ont été progressivement remplacés par des chiffres. L'une de ces étapes nous intéresse particulièrement. Il s'agit de celle des « groupements configurés ».

Notre hypothèse principale est en effet que les groupements configurés (Figure 1) rendent possible la comparaison exacte de grandes quantités et qu'ils mobilisent une représentation interne de la numérosité (dont le contenu ne fait pas l'objet de ce travail). Il

devient ainsi possible de distinguer visuellement de grands nombres d'objets, même très proches. Les groupements configurés facilitent ainsi la figuration exacte de grands nombres et l'accès à une connaissance secondaire de ces derniers. Ils seraient pour cette raison l'un des chaînons reliant la connaissance primaire (approximative et externe) à la connaissance secondaire (exacte et interne) des grandes numérosités.

Figure 1 : Exemple de deux quantités (65 vs 64) organisées à l'aide de groupements configurés et présentées aux enfants dans nos expériences.



Comprendre de quelle manière les êtres humains passent d'une connaissance primaire du nombre à une connaissance secondaire de celui-ci ne constitue pas seulement un enjeu pour la Psychologie des apprentissages, les Sciences de l'apprentissage (Sawyer, 2014) et les recherches conduites en Cognition numérique. Cette problématique s'inscrit naturellement dans le cadre de la Psychologie de l'éducation et plus largement dans celui des Sciences de l'éducation.

Sur le plan institutionnel, le Ministère de l'Education Nationale (Programme d'enseignement du CP au CE2, 2015) considère que la connaissance du nombre est une priorité de l'enseignement du CP au CE2 et rappelle que les « connaissances intuitives » (parmi lesquelles se trouvent les connaissances primaires) sont encore très présentes à cet âge et doivent servir de fondements pour l'apprentissage de savoirs scolaires (essentiellement secondaires). Les documents d'accompagnement de la maternelle (Canopé, 2015) soutiennent explicitement que les enfants passent d'une estimation approximative des quantités (connaissance primaire) à une évaluation exacte de celles-ci (connaissance secondaire). La question du passage de l'approximation à l'exactitude paraît donc au cœur de l'enseignement du nombre à l'école.

Enfin, l'enseignement au moyen d'outils informatiques est de nos jours particulièrement valorisé. Sur ce dernier point, notre hypothèse pourrait conduire, dans un avenir proche, à des améliorations des logiciels d'apprentissage du nombre.

2. Positionnement théorique

2.1. La connaissance primaire du nombre et ses limites

La connaissance primaire du nombre se fonde sur trois systèmes innés (Carey, 2009) : le Système d'Approximation Numérique désigné ordinairement par le sigle « ANS » (*Approximate Number System*), le Système d'Individuation Parallèle (*Parallel Individuation System*) que l'on appelle encore parfois la « subitisation » (*subitizing*), la sensibilité à la pluralité.

2.1.1. Le Système d'Approximation Numérique

L'ANS dispose d'une acuité respectant une loi de Weber. Un ANS possédant une acuité de 20% peut par exemple distinguer 10 et 12 objets ou encore 50 et 60 objets : $(12 - 10)/10 = (60 - 50)/50 = 20\%$. Cette acuité s'affine avec l'âge (Libertus & Brannon, 2009) et l'instruction (Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004), mais ne devient jamais inférieure à 15% (Piazza et al. 2010). L'ANS conserve donc son caractère approximatif dans le domaine des grandes quantités. Comment fonctionne l'ANS ?

Il existe dans le cerveau des macaques des neurones réagissant spécifiquement au nombre d'objets (Nieder & Dehaene, 2009). Ils ne réagissent pas à des paramètres non numériques comme la surface occupée ou délimitée par les objets. Ils sont effectivement sensibles à la numérosité. Le taux de décharge des « neurones monotones » augmente (ou diminue) continûment lorsque le nombre d'objets augmente (Roitman, Brannon & Platt, 2007). Ces neurones sont semblables à un accumulateur. Plus la quantité d'objets perçus croît, plus l'activité de ces neurones s'intensifie. Nieder et Dehaene (2009) comparent la croissance de cette activité à une somme. Cette comparaison est étonnante car elle est contraire à toutes leurs observations. Ils ne mesurent en effet que l'augmentation d'un taux de décharge. Or, un taux de décharge est de toute évidence, sur un plan purement physique, une grandeur continue. Il s'apparente à un segment plus ou moins long. Il ressemble à un unique objet plus ou moins étendu (une amplitude) et non à une multiplicité d'objets ajoutés les uns aux autres (une somme). Aussi, les neurones monotones ne

représentent pas les quantités sous la forme d'un nombre d'objets (une somme d'unités) mais sous la forme d'une amplitude.

Ces neurones monotones activent des « neurones des nombres » (Sawamura, Shima & Tanji, 2002 ; Nieder, Freedman & Miller, 2002) lorsqu'ils franchissent un certain seuil de décharge. Le taux de décharge d'un neurone monotone se rapproche par exemple du seuil correspondant au neurone du nombre cinq. Ce dernier commence alors à s'activer. Puis, il diminue son activité lorsque le taux de décharge du neurone monotone dépasse son seuil et s'en éloigne. De cette façon, le neurone du nombre cinq s'active progressivement lorsque la quantité d'objets s'approche de cinq objets. Il diminue progressivement son activité quand cette quantité dépasse cinq objets. Les données montrent qu'il est particulièrement actif au voisinage de cinq objets. Il aurait donc tendance à confondre les quantités proches (effet de distance). Ce neurone, en définitive, réagit préférentiellement à la présence de cinq objets. La valeur de son pic de décharge n'a strictement rien à voir avec la quantité d'objets en présence : le pic du neurone du nombre deux est aux environs de 70 hertz, celui du nombre quatre aux environs 10 hertz, celui du nombre six aux environs de 16 hertz et celui du nombre 20 aux environs de 13 hertz (Nieder & Merten, 2007). Les neurones du nombre ne servent donc pas à représenter la quantité perçue mais à la reconnaître. La quantité ne peut être représentée que par les neurones monotones.

Ces observations chez le macaque confirment l'hypothèse de Feigenson, Carey et Hauser (2002a) selon laquelle l'ANS représente les quantités sous la forme d'une amplitude. Il peut ainsi différencier des quantités entre elles, indépendamment de la surface qu'elles occupent (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009), puisque le taux de décharge du neurone monotone dépend uniquement du nombre d'objets. L'ANS possède finalement une sensibilité « externe » mais non « interne » à la numérosité. Il peut pour ainsi dire comparer des nombres d'objets sans savoir ce qu'est un nombre d'objets.

Il est vrai que Leslie, Gelman et Gallistel (2008) intègrent au modèle théorique de l'ANS la notion de nombre. Pour eux comme pour Hyde (2011), l'ANS se représente les quantités sous la forme de sommes approximatives d'unités. Mais il n'existe pas pour le moment de données empiriques étayant cette hypothèse. Au contraire, les observations neurologiques réalisées par Nieder et ses collègues sont plutôt conformes à l'hypothèse adverse selon laquelle l'ANS ne possède pas de représentation numérique interne.

2.1.2. Le Système d'Individualisation Parallèle

Des bébés de 10 à 12 mois sont exposés à une succession d'images comportant toujours la même petite quantité d'objets (1, 2 ou 3 objets) jusqu'à obtenir, de leur part, un temps d'attention constant pour chaque image (Feigenson, Carey & Spelke, 2002b). Puis, une image contenant une nouvelle petite quantité d'objets apparaît. On mesure alors si leur temps d'attention varie. Quand tous les objets ont la même aire, les bébés semblent intéressés par l'apparition d'une nouvelle quantité. Ils réussiraient donc à différencier 2 et 3 objets. En revanche, ils ne parviennent plus à les différencier lorsque 2 objets occupent la même surface totale que 3 objets. Les bébés ne sont donc pas sensibles au nombre d'objets contenu dans ces images, mais à un autre paramètre de nature non numérique (aire totale des objets, agrandissement ou diminution de l'aire de chaque objet, etc.).

Feigenson (2005) est parvenue toutefois à rendre à nouveau sensible à la numérosité, des bébés de 7 mois, en rendant chaque objet visuellement différent des autres. Elle en a déduit que ces bébés disposaient d'une sensibilité externe à la numérosité, mais qu'ils ne bénéficiaient pas d'une sensibilité interne à la numérosité. En effet, de tels résultats suggèrent que les bébés se représentent ces petites quantités composées d'éléments hétérogènes, sous la forme d'un ensemble d'objets singuliers. Chaque objet de la quantité est individualisé. De cette façon, les bébés ne perçoivent pas la disparition de « 2 » objets, mais la disparition de tel objet et de tel autre objet, comme dans un jeu de Kim. Ils seraient semblables à un instructeur qui fait l'appel et qui note dans son calepin l'absence de Pierre et de Paul sans pour autant y inscrire le nombre d'absents.

Ces résultats entrent en plus en résonance avec ceux obtenus sur la mémoire visuelle de travail chez des enfants de cet âge (Fayol, 2012 ; Feigenson, 2011) dans la mesure où cette dernière est limitée elle aussi à 3 objets. Chaque objet serait fiché par la mémoire. Elle pourrait ainsi détecter sa présence ou sa disparition et traiter en parallèle la présence ou la disparition d'autres objets fichés. Enfin, l'imagerie cérébrale révèle que la sensibilité externe aux petites numérosités est indépendante de la sensibilité externe aux grandes numérosités (Hyde & Spelke, 2010). C'est pourquoi il est généralement admis de nos jours que la sensibilité aux petites quantités est un système distinct de l'ANS et qu'elle se représente non numériquement les quantités sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés traités parallèlement (Hyde, 2011). Le Système inné d'Individuation Parallèle (SIP) est en définitive une sensibilité externe aux numérosités inférieures ou égales à 2

objets chez les bébés de moins de 5 mois, à 3 objets chez les enfants de plus de 5 mois (Coubart, Izard, Spelke, Marie & Streri, 2014) et à 3 ou 4 objets chez l'adulte (Burr, Turi, & Anobile, 2010).

2.1.3. La sensibilité à la pluralité

Une à quatre balles sont placées dans une boîte fermée (l'intérieur de la boîte est invisible mais accessible par une fente) sous le regard d'un bébé de 12 mois (Feigenson & Carey, 2005). Puis, le bébé est invité à récupérer l'une des balles. On évalue ensuite le temps mis par le bébé pour chercher les éventuelles autres balles.

Les auteures constatent que les bébés fouillent plus longuement la boîte lorsque celle-ci contient initialement deux ou trois balles. Le temps de fouille est moins long lorsqu'elle ne contient initialement qu'une seule balle. En revanche, le temps de fouille est le même lorsqu'une unique balle ou quatre balles sont placées au départ dans la boîte. Comment expliquer ce dernier résultat ?

Les bébés peuvent recourir au SIP. Ils peuvent ainsi « fichier » la présence d'une, de deux ou de trois balles. Leur SIP ne semble pas capable cependant de mémoriser la présence de quatre balles. Il demeure limité à trois objets. Les auteures observent en outre que leur ANS n'est pas intervenu. En effet, celui-ci peut tout à fait différencier une quantité et une quantité quatre fois supérieure. Il aurait donc dû pouvoir différencier une et quatre balles. Or les bébés n'y sont pas parvenus. La limitation du SIP et la non intervention de l'ANS explique donc la raison pour laquelle ces bébés ne parviennent pas à comparer un et quatre objets.

Des bébés de 22 mois réussissent cette comparaison (Barner, Thalwitz, Wood, Yang & Carey, 2007) sans pour autant parvenir à différencier 2 et 4 balles. Or leur ANS devrait y parvenir. Il devrait pouvoir différencier à cet âge 2 et 4 balles (Lipton & Spelke, 2003). Il ne semble donc pas encore capable de différencier deux quantités lorsque la première est « petite » (inférieure ou égale aux capacités du SIP) et la seconde « grande » (strictement supérieure aux capacités du SIP). Il ne semble donc pas que l'ANS puisse expliquer la réussite des bébés de 22 mois. Les auteurs en concluent que les bébés ne recourent ni à l'ANS, ni au SIP lorsqu'il s'agit de comparer un et quatre objets. Ils seraient par conséquent sensibles à la différence entre un et « plus qu'un » objets (ici entre un et

quatre objets) ou si l'on préfère entre un et « plusieurs » objets. Cette sensibilité à la « pluralité » serait un système numérique manifestement indépendant de l'ANS et du SIP.

La découverte de cette sensibilité précoce chez l'être humain et surtout chez le singe (Barner & Carey, 2008) suggère que cette sensibilité est innée. La sensibilité à la pluralité serait donc la troisième composante du sens inné du nombre. Cette sensibilité comprendrait la différence entre un et plusieurs objets, c'est-à-dire la différence entre « 1 » et « 1+1+1+... ». Mais elle ne serait pas capable de faire la différence entre deux pluralités (Carey, 2009 ; Condry & Spelke, 2008). Pour elle, toutes les pluralités se valent. Elle ne différencie que « 1 » et « plus que 1 ». C'est pourquoi elle n'est pas encore une sensibilité à la numérosité. Elle ignore en effet cette idée fondamentale : il suffit d'ajouter ou de retrancher un objet à un nombre d'objets pour obtenir un nouveau nombre d'objets.

2.1.4 Résumé

Le sens inné du nombre demeure une sensibilité approximative et externe dans le domaine des grands nombres. Deux grands nombres d'objets trop proches semblent identiques à l'ANS. La sensibilité à la pluralité est incapable de différencier des pluralités et par voie de conséquence des grands nombres d'objets entre eux. Seul le SIP réalise des comparaisons exactes, mais uniquement dans le domaine des petits nombres. La connaissance primaire des grands nombres semble condamnée pour ces trois raisons à l'approximation.

En outre, seule la sensibilité à la pluralité se représente les quantités sous la forme d'une somme (« 1+1+1+... »). L'ANS les représente en effet sous la forme d'une amplitude plus ou moins étendue et le SIP sous la forme d'objets individualisés. Cependant, la sensibilité à la pluralité ignore que cette somme génère à chaque addition un nouveau nombre d'objets. C'est pourquoi nous pouvons en conclure que le sens inné des grands nombres ignore ce qu'est un nombre d'objets. La connaissance primaire des grands nombres n'est donc pas dotée d'une sensibilité interne à la numérosité.

2.2. Dépasser les limites de la connaissance primaire du nombre : les hypothèses actuelles

Comment passer de l'approximation à l'exactitude, c'est-à-dire d'une connaissance primaire du nombre à une connaissance secondaire de celui-ci ? Depuis une dizaine d'années, les recherches en Cognition numérique ont privilégié cinq hypothèses : (1) rendre l'ANS exact ou autrement dit le « calibrer » ; (2) apprendre à compter ; (3) faire correspondre à chaque objet d'une première collection, un unique objet d'une autre collection et comparer de cette façon avec exactitude deux collections – en d'autres termes, réaliser des « correspondances terme à terme » ; (4) développer une image mentale des nombres sur une ligne semblable à une règle graduée – la ligne mentale numérique exacte ; (5) organiser une collection en groupes d'objets pour favoriser la représentation, le comptage, la mémorisation ou la reconstruction du nombre exact d'objets compris dans cette collection.

2.2.1. Calibrer le Système d'Approximation Numérique

Verguts et Vias (2004) ont élaboré un ANS artificiel, à l'aide d'un simulateur informatique de réseaux neuronaux. Cet ANS possédait les mêmes caractéristiques qu'un ANS réel dans la mesure où il disposait lui aussi d'une acuité. Cette dernière le rendait approximatif et victime de l'effet de distance et de l'effet de taille (cf. 2.1.1). Ils ont ensuite présenté à cet ANS des quantités d'objets (1 à 5 objets) accompagnées ou non du chiffre servant à les désigner (« 1, 2, 3, 4 ou 5 »). Ils ont observé qu'en l'absence de chiffres, l'ANS demeurait approximatif, alors qu'il devenait exact en présence de chiffres. Ils en ont déduit que la présentation conjointe des quantités et du chiffre servant à les désigner pouvait calibrer un ANS.

Dans une même perspective, Izard et Dehaene (2008) sont parvenus à améliorer l'acuité d'un ANS adulte en montrant aux participants des collections modèles approximatives : on leur présentait par exemple une collection de 25, 30 ou 39 points et on leur disait que celle-ci contenait exactement 30 points. On leur montrait ensuite très rapidement (100 ms) des collections de points et ils devaient estimer la quantité de points présentés. Les performances des participants étaient meilleures lorsqu'ils avaient pu bénéficier au préalable des collections modèles approximatives, c'est-à-dire de

l'association entre un symbole numérique (oral ou écrit) et la quantité approximative qu'il désigne¹.

Cette hypothèse est aussi confirmée indirectement dans différentes études² réalisées sur des enfants souffrant de dyscalculie (Meijias, Mussolin, Rousselle, Grégoire & Noël, 2012 ; Noël & Rousselle, 2011 ; Mussolin, Meijas & Noël, 2010 ; Rousselle & Noël, 2007). L'ANS de ces enfants possède en effet une acuité inférieure à celle d'enfants du même âge. Cependant, cette faible acuité ne résulte pas d'un dysfonctionnement de l'ANS. Elle provient plutôt de difficultés qu'ils rencontrent dans l'acquisition ou l'usage du langage oral. Ces enfants ont du mal à associer le symbole numérique oral et la quantité approximative qu'il désigne. Aussi, ils ont du mal à calibrer leur ANS. Cela montrerait que le langage est indispensable au calibrage de l'ANS. En définitive, il serait à la fois suffisant (Izard & Dehaene, 2008) et nécessaire (Rousselle & Noël, 2007).

2.2.2. Compter

Fuson (1988) demande à des enfants de compter le nombre n de soldats. Puis, elle leur demande si les n soldats désignent tous les soldats ou juste le dernier soldat. Les trois quarts des enfants répondent que les n soldats désignent le dernier soldat. Fuson en déduit que ces enfants ignorent le « principe de cardinalité » (Gelman & Gallistel, 1986) : ils ne savent pas nécessairement que le dernier mot prononcé désigne le nombre d'objets contenu dans la collection dénombrée. Ils comptent les objets et répètent machinalement le dernier mot prononcé pour indiquer le résultat à l'adulte. C'est pourquoi elle a proposé de remplacer la question « combien y a-t-il d'objets ? » (*How-many task*) par la requête « donne-moi n objets » (la tâche « Donne- n »). De cette façon, l'enfant doit non seulement compter les objets, mais les rapporter à l'adulte. S'il les rapporte exactement tous, alors cela implique qu'il ne se contente pas de répéter mécaniquement le dernier mot. Il sait manifestement que ce mot désigne les n objets. Depuis, la tâche Donne- n (*Give-n task*) s'est imposée dans

¹ Le domaine « estimation, grandeurs et mesures » du projet Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire dit « ACE » (2015) s'inscrit tout à fait cette perspective. Il s'agit en effet d'associer les symboles numériques (y compris les signes tels que « + ») à la représentation interne que leur procure l'ANS.

² Dans ces études, les auteurs ne supposent pas pour autant que le passage de l'approximation à l'exactitude ou l'acquisition d'une représentation interne numérique résulte du calibrage de l'ANS. Au contraire, Noël et Rousselle (2011) s'inscrivent plutôt dans l'approche de Carey proposée en 2009 (cf. 2.4.2.).

de multiples études (Sarnecka & Wright, 2013) comme la principale tâche susceptible d'évaluer si un enfant comprend la signification cardinale d'un comptage.

Six tâches sont proposées à des enfants de 2-4 ans (Sarnecka & Carey, 2008). La première (*Sequence task*) consiste simplement à leur demander de réciter la file numérique jusqu'à dix (« un, deux, trois, ... »), la seconde (*Correspondence task*), de compter dix objets, la troisième (Donne- n), de rapporter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 objets.

Dans la quatrième (*how-many task*³), l'expérimentateur compte 5 ou 7 objets devant l'enfant sans que ce dernier ne puisse pour autant les voir. Il demande ensuite à l'enfant de lui indiquer le nombre d'objets. On vérifie ainsi si l'enfant comprend que le dernier mot prononcé par l'adulte (le dernier mot du comptage) est la réponse attendue à la question « combien y a-t-il d'objets ? ».

Dans la cinquième tâche (*Direction task*), l'expérimentateur présente à l'enfant deux assiettes contenant chacune 5 ours (ou d'autres objets) et l'informe que ces assiettes contiennent chacune « cinq » ours. Puis, il prend un ours dans une assiette et le place dans l'autre assiette. Il dit ensuite à l'enfant qu'à présent l'une des assiettes contient « quatre » ours et que l'autre en possède « six ». Mais il n'indique pas lesquelles. Il lui demande alors de désigner celle qui contient « quatre » ours (ou dans d'autres cas, celle qui en contient « six »). Il vérifie de cette façon si l'enfant comprend la « direction du changement numérique » : dans la file numérique, le mot qui désigne la quantité « $n + 1$ » vient après celui qui désigne la quantité « n » et celui qui désigne la quantité « $n - 1$ » vient avant celui qui désigne la quantité « n ».

Dans la sixième tâche (*Unit-task*), l'expérimentateur dispose, dans une boîte, 4 objets identiques. Il informe l'enfant que la boîte contient « quatre » objets et s'assure que celui-ci a retenu cette information. Puis, il ajoute 1 ou 2 objets identiques aux premiers et lui demande si la boîte contient à présent « cinq » ou « six » objets. Il mesure ainsi « l'unité du changement numérique » : dans la file numérique, le mot servant à désigner la quantité « $n+1$ » ne peut être que celui venant immédiatement après le mot servant à désigner la quantité « n ».

Les auteurs ont observé, dans un premier temps, que les enfants réussissaient sans difficulté les deux premières tâches : ils savent réciter la file numérique jusqu'à dix (*Sequence*

³ Dans les tâches Combien (*How-many tasks*), le comptage n'est pas réalisé ordinairement par l'expérimentateur, mais par le participant lui-même (Wynn, 1992). On présente simplement une collection au participant et on lui demande « combien y a-t-il d'objets ? »

task) et compter dix objets (*Correspondance task*). La grande majorité sait aussi que le dernier mot prononcé lors d'un comptage est la réponse attendue à la question « combien d'objets y a-t-il ? » (*how-many task*). Ces enfants savent donc compter au moins 10 objets. Pourtant, la moitié de ces enfants ne parviennent pas à rapporter plus de 4 objets (*Give-n task*). Ils ne parviennent pas à se servir du comptage pour construire une collection comprenant plus de 4 objets.

L'échec de la moitié des enfants à la tâche *Give-n* semble donc confirmer l'expérience de Fuson (1988). Ces enfants étiquetteraient les objets à l'aide des mots de la file numérique et répéteraient machinalement le dernier mot employé pour communiquer à l'adulte leur réponse ; ils ne comprendraient pas que ce dernier mot désigne une quantité d'objets.

Les auteures n'ont pas seulement cherché à confirmer l'hypothèse de Fuson (1988). Elles ont utilisé la tâche *Donne-n* pour identifier 5 catégories d'enfants. Les « *one-knowers* » réussissent la tâche tant que n est égal à 1, les « *two-knowers* », tant que n est égal ou inférieur à 2, les « *three-knowers* », tant que n est égal ou inférieur à 3 et les « *four-knowers* », tant que n est égal ou inférieur à 4. Les « *Cardinal Principle-knowers* » (*CP-knowers*), quand à eux, réussissent la tâche, même lorsque n est égal à 5 ou 6.

Les auteures ont alors montré que seuls les *four-knowers* et les *CP-knowers* comprenaient la direction du changement numérique (*Direction task*) et surtout que seuls les *CP-knowers* comprenaient l'unité du changement numérique (*Unit-task*). En d'autres termes, seuls les *CP-knowers* semblent comprendre que le passage d'un symbole au suivant dans la file numérique représente l'ajout d'un objet et d'un seul à une quantité. Ils comprennent en définitive que la fonction de succession engendre à chaque addition un nouveau nombre et que ce nombre est désigné par un unique et nouveau symbole : « un » signifie « 1 », « deux » signifie « 1+1 », trois signifie « 1+1+1 », etc.

Le comptage permettrait donc d'accéder à une représentation exacte et interne des grands nombres, lorsque les enfants finissent par comprendre la relation entre la file numérique et la fonction de succession. Cette compréhension pourrait être évaluée par la tâche *Donne-n* (*Give-n task*) ou la tâche de l'unité (*Unit-task*).

L'étude de Davidson, Eng et Barner (2012) a toutefois révélé que la réussite à la tâche *Donne-n* par des enfants de 3-5 ans n'impliquait pas ou peu la réussite de ces enfants à la tâche de l'unité. Seuls des *CP-knowers* capables de compter jusqu'à 30 parviennent à réussir significativement la tâche de l'unité. En outre, ils n'y parviennent que dans le cas de

« petites » (4 et 5) et de « grandes » quantités (24 et 25). Ils n'y parviennent pas lorsque les quantités sont « moyennes » (13, 14 et 15). Celles-ci mobilisent en effet des mots spécifiques (« treize », « quatorze », ...), alors que les plus grandes quantités requièrent des mots déjà employés pour désigner les petites quantités (« quatre » et « vingt-quatre », « cinq » et « vingt-cinq », ...)⁴.

Ces résultats montrent qu'être un *CP-knower* ne suffit pas pour réussir la tâche de l'unité et que la compréhension de la relation entre la file numérique et la fonction de succession ne vaut pas pour tous les nombres : les meilleurs *CP-knowers* ont compris cette relation pour les petites et grandes quantités, mais non pour les quantités moyennes. Autrement dit, ils n'induisent pas les propriétés des nombres moyens : ce qui vaut pour les petits et grands nombres, ne vaut pas pour les nombres moyens. Ces résultats montrent que la tâche de l'unité semble de nos jours une tâche plus fiable que la tâche *Donne-n*, lorsqu'il s'agit d'évaluer si les enfants comprennent la relation entre la file numérique et la fonction de succession. Ils montrent aussi que la compréhension de cette relation n'est pas immédiatement généralisable à l'ensemble des nombres connus par l'enfant : elle peut n'être comprise que pour une partie d'entre eux.

Dans tous les cas, le comptage peut effectivement permettre l'accès à une représentation exacte et interne d'une partie des grands nombres, quand il institue une relation entre la file numérique et la fonction de succession. Sinon, il demeure une procédure numérique externe dépourvue de représentation numérique interne⁵.

2.2.3. Les correspondances terme à terme

Certaines sociétés ne possèdent pas de mots tels que « onze » ou « quinze » pour désigner de grands nombres d'objets (Pica et al., 2004). Les membres de ces sociétés ne peuvent donc calibrer leur ANS ou compter. Ils peuvent toutefois manipuler avec exactitude de grandes quantités au moyen de correspondances terme à terme (Izard, Pica,

⁴ Cette critique pourrait être adressée dans les mêmes termes à l'étude de Lipton et Spelke (2006).

⁵ Cette conception du comptage se retrouve dans d'autres disciplines des Sciences de l'éducation. Certains auteurs soutiennent par exemple que le comptage doit être dès la maternelle une activité mobilisant une représentation interne de la numérosité (Brissiaud, 2005). Sinon, il risque de demeurer une procédure numérique externe à l'école élémentaire. D'autres estiment que ce risque est négligeable et que le comptage peut être enseigné sous la forme d'une procédure numérique externe à la maternelle (Colomb, 2005). Notons aussi que certaines recherches en Didactique recourent explicitement aux tâches utilisées en Psychologie cognitive comme la tâche Combien ou celle *Donne-n* pour évaluer la compréhension du comptage par les élèves (Mansour, 2011 ; Ricco et al., 2008).

Spelke & Dehaene, 2008 ; Butterworth, Reeve, Reynolds & Lloyd, 2008 ; Gordon, 2004). Ils réussissent ainsi à fabriquer une collection comportant exactement le même grand nombre d'objets qu'une autre collection.

L'expérimentateur met un ensemble de boudruches à la disposition d'adultes Pirahã (Frank, Fedorenko, Lai, Saxe & Gibson, 2012). Puis, il leur montre des bobines alignées (4 à 12) et leur demande de fabriquer avec les boudruches une collection égale à celle des bobines. Les participants font alors correspondre à la première bobine, une première boudruche, à la seconde, une seconde boudruche, et ainsi de suite. Ils construisent de cette façon une collection de boudruches contenant exactement le même nombre de bobines. Cette procédure de mise en correspondance apparaît d'autant mieux quand l'expérimentateur l'empêche ou la rend particulièrement difficile : il dispose les bobines non pas horizontalement mais verticalement par rapport aux participants ; il dissimule les bobines au fur et à mesure derrière un cache ou dans une boîte, etc. Les correspondances terme à terme permettraient donc au système cognitif humain de passer de l'approximation à l'exactitude sans avoir besoin de nommer les quantités ou de les compter.

Les participants pourraient toutefois construire deux collections égales au moyen de correspondances terme à terme sans savoir que ces collections possèdent exactement le même nombre d'objets. Ils ignoreraient l'idée d'exactitude numérique (deux collections sont égales si et seulement elles possèdent le même nombre d'objets). Ils pourraient par exemple se contenter de construire deux collections de longueur égale dans le cas où les collections sont alignées. Dans ce cas, les collections sont dites « égales » parce qu'elles ont la même taille et non parce qu'elles ont le même nombre d'objets.

C'est pourquoi Izard, Streri & Spelke (2014) souhaitent s'inspirer des travaux de Gelman et Gallistel (1986) sur le comptage. Elles proposent d'accompagner toutes les tâches de correspondances terme à terme, de tâches de transformation. Ces dernières permettent de s'assurer que les participants comprennent trois principes fondamentaux et par voie de conséquence l'idée d'exactitude numérique : (1) les collections ne sont plus égales lorsqu'on ajoute ou retire un élément à l'une d'entre elles (principe d'addition-soustraction) ; (2) les collections sont toujours égales même si la position spatiale des éléments est modifiée (principe d'identité) ; (3) les collections sont toujours égales même si on remplace un élément d'une collection par un nouvel élément (principe de substitution).

2.2.4. La ligne numérique

Certaines représentations des nombres consistent à les positionner sur une ligne ou une bande. Ils sont ainsi disposés régulièrement les uns à la suite des autres, de gauche à droite (généralement) et du plus petit au plus grand (Figure 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Figure 2 : Exemple de ligne numérique exacte allant de 1 à 10.

Siegler et Ramani (2009) ont demandé à des enfants de 4-5 ans de positionner les chiffres 1, 2, 3, ..., 9 sur une ligne non graduée allant de 0 à 10. Ils ont observé que les enfants avaient tendance à placer tous les chiffres au milieu. Ils leur ont aussi demandé de comparer des chiffres (allant de 1 à 10) et de résoudre des petits problèmes d'arithmétique. Ils ont ensuite constitué trois groupes d'apprentissage.

Le premier apprenait à déplacer un pion sur dix cases disposées en ligne (sur la première case était marqué « 1 », sur la seconde « 2 », ...). Le second apprenait le même jeu, mais cette fois les cases étaient disposées en cercle. Le troisième réalisait différentes activités mathématiques (compter des objets, réciter la file numérique jusqu'à 10, nommer le chiffre montré).

A la suite de cette phase d'apprentissage, ils ont à nouveau demandé aux enfants de positionner les dix premiers chiffres sur une ligne non graduée, de comparer des chiffres (allant de 1 à 10) et de résoudre des petits problèmes d'arithmétiques. Les résultats indiquent que seuls les enfants du premier groupe ont progressé. L'exposition des enfants à une représentation linéaire des chiffres améliore leur réussite à la tâche de positionnement des chiffres sur une ligne non graduée et favorise leur réussite en arithmétique. Les auteurs en ont déduit qu'ils avaient probablement appris à se représenter mentalement les nombres sous la forme d'une ligne numérique et que cette représentation interne et exacte des numérosités expliquait leur progrès en arithmétique.

Certains auteurs (Dehaene, 2010 ; Geary, Hoard, Nugent & Byrd-Craven, 2008) considèrent que l'ANS se représente mentalement les quantités sous la forme d'une ligne numérique. Sa représentation demeure toutefois approximative : plus les quantités augmentent et plus elles sont tassées (par exemple, le 10 est placé au milieu d'une ligne allant de 0 à 100). Dans une telle perspective, l'acquisition d'une ligne mentale numérique exacte peut être comprise comme le calibrage d'une ligne mentale numérique innée (Izard

& Dehaene, 2008). Il a été observé en effet que des enfants de 5 ans (Siegler & Booth, 2004) ou des adultes appartenant à des sociétés dépourvues de ce genre de représentations (Dehaene, Izard, Spelke & Pica, 2008) étaient capables de positionner approximativement sur une ligne non graduée délimitée (Figure 3a) des chiffres ou des quantités. De tels résultats suggèrent que ce positionnement a été réalisé par l'ANS. Ce dernier aurait une représentation mentale des quantités sous la forme d'une ligne numérique. Sur celle-ci, les quantités seraient représentées approximativement par des amplitudes plus ou moins longues.

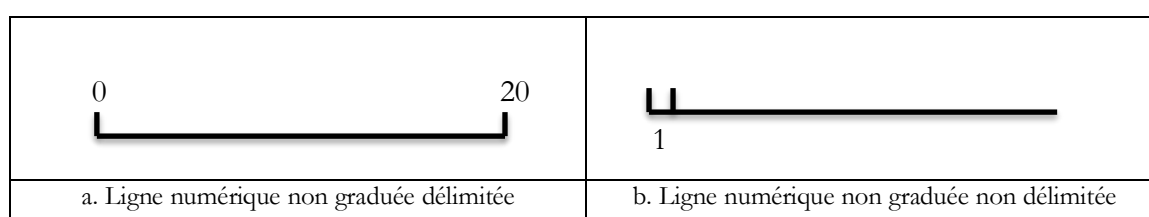


Figure 3 : Exemple de lignes numériques non graduées délimitées ou non (adapté de Cohen et Sarnecka, 2014).

Cependant, des recherches récentes réalisées sur des participants âgés de 3 ans jusqu'à l'âge adulte (Link, Hubert, Nuerk & Moeller, 2014 ; Cohen & Sarnecka, 2014) auraient montré que ce positionnement n'était pas dû à l'ANS. Quand la ligne non graduée est délimitée (*bounded number line*), à partir d'un certain âge, les participants recourraient à des stratégies mentales de division de la ligne – ils essaieraient par exemple de la diviser en dix parties égales (stratégie d'évaluation des proportions).

Quand cette ligne est non délimitée (*unbounded number line*) (Figure 3b), les participants utiliseraient des stratégies additives : ils tenteraient par exemple de reporter mentalement l'unité de mesure en collant les unités les unes à la suite des autres un certain nombre de fois. Ces stratégies ne semblent pas pouvoir être mises en place par l'ANS. Ce dernier se représente en effet les nombres sous la forme d'une amplitude : il ne somme pas des unités. Les auteurs ne tirent toutefois pas cette conclusion et considèrent que le placement des nombres sur une ligne non délimitée pourrait être l'œuvre de l'ANS. La question de la différence entre une amplitude et une somme d'unités n'est tout simplement pas abordée. Aussi il n'est pas possible de savoir si les auteurs ignorent cette question ou s'ils assimilent l'ANS à un système opérant des sommes approximatives d'unités (cf. 2.1.1.)

Dans tous les cas, au regard des données actuelles, l'hypothèse de la ligne mentale numérique exacte et celle du calibrage de la ligne mentale primaire ne doivent plus être confondues⁶. Supposons un instant en effet que la ligne mentale numérique approximative constitue une connaissance primaire. Peut-on en déduire que la ligne mentale numérique exacte résulte d'un calibrage de cette ligne mentale numérique approximative ? Nous pourrions en effet hypostasier que ce calibrage est le fruit du langage (association entre des symboles numériques et la quantité approximative qu'ils désignent) mais aussi de stratégies de division de la ligne, de report de l'unité (si celui-ci n'est pas effectué par l'ANS), etc.

Si un ANS pouvait calibrer parfaitement sa propre représentation interne, alors il devrait être capable de réaliser des comparaisons exactes. Cependant, l'ANS demeure toujours approximatif dans toutes les études réalisées jusqu'à maintenant : son acuité est au mieux de 15% (Piazza et al., 2008). L'acquisition d'une ligne mentale numérique exacte donne l'impression, pour cette raison, d'être un apprentissage distinct : ce dernier ne revient pas à calibrer une ligne mentale préexistante. Il consiste plutôt à construire une nouvelle forme de représentation interne et exacte des numérosités⁷.

Les nombres représentés sur une ligne mentale numérique exacte ne sont pas effectivement que des numéros. Ils ne désignent pas simplement une position⁸. Dans cette approche, le nombre « 53 » n'est pas uniquement le nombre situé entre « 52 » et « 54 ». Il importe aussi que le positionnement des nombres soit « linéaire » : la distance entre deux nombres successifs doit toujours être la même - comme sur une règle graduée. La tâche de positionnement des nombres sur une ligne non graduée consiste non seulement à évaluer si

⁶ L'hypothèse de la ligne mentale n'est pas mentionnée comme objet d'étude dans notre revue de littérature soumise à Psychologie Française (Article 1). Nous n'avions pas pris connaissance lors de cette revue des articles de Link et al. (2014) et de Cohen et Sarnecka (2014). En effet, ils n'étaient pas encore référencés dans la base de donnée *Ebscohost* que nous avons utilisée durant le mois de janvier 2015. La thèse selon laquelle le caractère approximatif du positionnement sur une ligne non graduée ne résulte pas de l'ANS a été activement débattue en 2011 et en 2012 (pour une revue de littérature, voir Ebersbach, Luwel & Verschaffel, 2013). Ebersbach et al. (2013) ont montré que ce débat ne pouvait être clos à partir des études antérieures. C'est pourquoi en l'absence de nouveaux résultats, il était difficile de faire de la ligne numérique un objet d'étude à part entière dans notre revue de littérature (examinant les tâches de numérosité de 2002 à 2014). L'absence de cet objet d'étude est néanmoins sans conséquence sur les conclusions de notre revue. Nous le montrerons plus loin (cf. 2.3.). Nous avons toutefois choisi de faire de la ligne numérique un objet d'étude à part entière car les données récentes nous y invitent.

⁷ La représentation des nombres sous la forme d'une ligne numérique est proposée dans de multiples recherches en Didactique conduites en France (Del Notaro & Floris, 2011 ; Elia, 2011 ; Colomb, 2005) comme aux Etats-Unis (Case & Griffin, 1990). Cette représentation est particulièrement utilisée dans les activités du domaine « Situations » du projet ACE (2015) au cours du premier et troisième trimestre.

⁸ Cette idée se retrouve aussi chez Brissiaud (2005) lorsqu'il soutient la thèse selon laquelle la ligne numérique devrait être enseignée sous la forme d'une somme d'unités : il faudrait éviter de conférer aux nombres une signification purement ordinale.

les participants ordonnent correctement les nombres entre eux, mais s'ils ont tendance aussi à les disposer linéairement (Siegler & Booth, 2004).

Dans une telle perspective, les nombres sont donc des nombres géométriques. Ils résultent de l'addition successive de longueurs égales. Le nombre 6 désigne par exemple six longueurs égales mises bout à bout (6 fois une unité de mesure). Il est donc bel et bien obtenu par un ajout successif d'objets (des longueurs), c'est-à-dire par la fonction de succession « $1+1+1+1+\dots$ » (Sarnecka & Carey, 2008). Il est en ce sens une numérosité. Cette numérosité est néanmoins particulière et caractéristique d'une compréhension géométrique des nombres : tous les éléments sommés ont la même taille (ce sont des unités de mesure) ; tous ces éléments sont « collés » les uns aux autres (aucun vide ne les sépare).

2.2.5. Le groupement

Grouper les objets par 2 ou par 3 facilite le comptage d'une collection d'objets (Starkey & McCandliss, 2014 ; Van Oeffelen & Vos, 1982 ; Beckwith & Restle, 1966). Compter de 2 en 2 ou de 3 en 3, plutôt que de 1 en 1, réduirait les chances d'oublier des objets ou de les comptabiliser deux fois.

Des bébés de 14 mois peuvent conserver en mémoire la trace de 2 groupes de 2 groupes de 2 objets (8 objets). Ils se rendent ainsi compte de l'absence de 1 objet lorsqu'ils ne trouvent que 7 objets (Rosenberg & Feigenson, 2013). Le groupement d'objets étend ainsi les capacités du SIP aux grands nombres d'objets.

Un expérimentateur montre à des enfants de 5 ans de quelle manière ils peuvent construire une collection de n petits cubes ($10 < n < 100$) en s'aidant de l'écriture chiffrée du nombre n (Vasilyeva et al., 2015). Il est possible par exemple de construire « 64 » cubes en réalisant « 6 » barres de 10 cubes et une barre de « 4 » cubes. En d'autres termes, l'expérimentateur les invite à utiliser les propriétés du système décimal : la place de chaque chiffre indique s'il désigne un nombre de dizaines ou d'unités. Il note ensuite si les enfants recourent à ces propriétés ou non pour construire une autre collection d'objets.

Ces enfants sont encore tous en « maternelle » et issus de quatre nationalités différentes (Etats-Unis, Russie, Corée, Taïwan) dont les systèmes linguistiques favorisent ou non la perception des propriétés du système décimal. Par exemple, en coréen, « 61 » se dit « six-dix-un », alors qu'en anglais, il se dit « soixante-un ». Les enfants coréens devraient donc être avantagés par rapport aux enfants américains, comme on le suppose

communément depuis les recherches réalisées sur des enfants plus âgés (Miura, Kim, Chang, & Okamoto, 1988) : leur langage oral les informe déjà pour ainsi dire que « soixante » signifie six dizaines. En d'autres termes, il est plus « transparent ». Il laisse mieux entrevoir les propriétés du système décimal.

Contrairement aux attentes, les auteurs n'observent aucun effet de transparence à cet âge. Ils en concluent que la variabilité des résultats obtenus entre les pays, dans les recherches antérieures, sont moins dues au degré de transparence de chaque langage oral, qu'aux types d'apprentissage proposés dans ces différents pays.

Dans une telle perspective (voir aussi Chan, Au & Tang, 2014), le système décimal est compris comme un système symbolique dont la position et la valeur de chaque chiffre désignent un certain nombre de groupements de 1, 10, 100, etc., objets (« 3657 » signifie par exemple 3 groupes de 1000, 6 groupes de 100, 5 groupes de 10 et 7 groupes de 1)⁹.

Cette perspective cardinale diffère par exemple de celle qui consisterait à faire du nombre 64 une valeur située entre 63 et 65. Dans cette approche ordinale des nombres, ces derniers sont des numéros : « 60 » ne désigne pas 6 groupes de 10. « 60 » veut dire « soixantième ». Dès lors, la position du chiffre « 6 » dans le nombre « 64 » signifie que l'on se situe après tous les nombres à deux chiffres commençant par 1, 2, 3, 4 ou 5 et avant tous ceux commençant par 7, 8 ou 9. C'est pourquoi toutes les études évaluant ou valorisant la compréhension cardinale (et non ordinale) du système décimal (Link et al., 2014 ; Fuson & Li, 2009) assimilent les grands nombres à des groupements de groupements de 10¹⁰. Elles supposent par conséquent que la connaissance secondaire des grands nombres repose sur notre capacité à réaliser et à nommer des groupements de groupements d'objets. Nous pourrions savoir que « 64 » signifie « 6 groupes de 10 objets et 4 objets » et avoir ainsi une représentation interne et exacte de cette numérosité.

Quel pourrait être le contenu de cette représentation interne ? Fuson et al. (1997) hypostasient que les enfants peuvent se figurer mentalement de grands nombres exacts d'objets. Ils pourraient par exemple se représenter visuellement et mentalement le nombre « 42 » au moyen de 4 groupes de 10 objets et de 1 groupe de 2 objets. Autrement dit, ils

⁹ Comme l'illustre emblématiquement le jeu du Fourmillon dans les recherches en Didactique (Bloch, 2008), il faudrait écrire plutôt que « 3657 » signifie 3 groupes de 10 groupes de 10 groupes de 10 objets, 6 groupes de 10 groupes de 10 objets, 5 groupes de 10 objets et 7 objets.

¹⁰ Dans le projet ACE (2015), la notion de dizaine est présentée à travers des activités de groupements d'objets (de cubes par exemple) au cours du second trimestre.

pourraient, à l'aide de groupements, imaginer visuellement de grands nombres d'objets. Ils construiraient de cette manière une représentation interne et exacte des grands nombres.

En définitive, le groupement favoriserait la connaissance secondaire des grands nombres en facilitant le comptage de grandes quantités d'objets, la mémorisation de grandes quantités, la compréhension du système décimal et la représentation mentale et visuelle de grandes quantités.

2.2.6. Résumé

La connaissance primaire des grands nombres est limitée car elle est une sensibilité approximative et externe à la numérosité. Toute la question est de savoir de quelle manière les êtres humains passent de cette connaissance primaire (approximative et externe) à une connaissance secondaire (exacte et interne). Cinq hypothèses ont été essentiellement envisagées depuis dix ans : le calibrage, le comptage, les correspondances, la ligne numérique, le groupement.

(1) Le calibrage de l'ANS est fondé sur l'association entre une quantité d'objets et le symbole numérique servant à désigner cette quantité.

(2) Le comptage consiste à appareiller la file numérique à la fonction de succession.

(3) Les correspondances terme à terme associent entre eux les objets d'une première collection et ceux d'une seconde collection sans recourir au langage.

(4) La ligne numérique exacte est une construction et une représentation mentale des nombres. Sur celle-ci, les symboles numériques sont régulièrement disposés les uns à la suite des autres. Ainsi, les êtres humains se font une certaine image des nombres et celle-ci les aide dans diverses tâches de nature mathématique (comparaison, résolution de problèmes, etc.).

(5) Le groupement revient à constituer des groupes d'objets contenant le même nombre d'objets. Il facilite le comptage. Il permet au SIP de retenir de plus grandes quantités. Il favorise la compréhension cardinale du système décimal et les êtres humains seraient en mesure, grâce à lui, de visualiser mentalement un grand nombre d'objets.

2.3. Les limites des hypothèses actuelles

Les hypothèses actuelles expliquent de quelle manière un système cognitif peut acquérir une sensibilité externe aux grandes numérosités. Elles ont par ailleurs toutes été vérifiées sur ce point. Cependant, elles ont toutes été contestées directement ou indirectement sur un autre point tout aussi fondamental.

Carey (2009) rappelle que l'ANS représente les quantités sous la forme d'un unique objet plus ou moins étendu (une amplitude). Il est alors possible d'en déduire qu'un ANS parfaitement calibré assimile encore les quantités à des amplitudes. Son exactitude ne le rend pas sensible à la numérosité : il ignore ce qu'est une pluralité d'objets et par voie de conséquence un nombre d'objets.

Davidson, Eng et Barner (2012) rappellent qu'un comptage pourrait ne pas mobiliser la moindre représentation numérique interne. Il pourrait être un étiquetage : les étiquettes seraient les mots de la file numérique (voici « un », voici « deux », etc.). Les participants rapporteraient tous les objets étiquetés et non simplement le dernier. Ils auraient ainsi une représentation interne non numérique : comme le SIP, ils se représenteraient les objets sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés.

Ces auteurs condamnent directement ou indirectement, de cette façon, toute tâche réalisable par un comptage comme la tâche Donne-*n* ou encore la tâche de l'unité. Il est vrai que dans la tâche de l'unité l'expérimentateur interdit aux enfants de compter. Mais ils pourraient tout à fait compter dans leur tête les objets à l'insu de l'expérimentateur. C'est pourquoi l'appariement entre la file numérique et la fonction de succession au sein du comptage n'a pas encore été véritablement vérifié.

Une correspondance terme à terme permet de comparer avec exactitude des collections. Cependant, cette procédure devient rapidement approximative dès que les collections ne sont plus alignées l'une contre l'autre, même chez des adultes scolarisés (Frank et al., 2012 ; Pietroski, Lidz, Hunter & Halberda, 2009). Dès lors, il devient difficile de savoir dans le cas où les collections sont alignées si les participants égalisent les longueurs des collections ou les nombres d'objets qu'elles contiennent. En d'autres termes, le principe d'identité ne peut plus être contrôlé. Il devient alors impossible de s'assurer que les participants comprennent l'idée d'exactitude numérique. Tel est aussi le problème méthodologique majeur de toutes ces recherches (Frank et al., 2012 ; Everett & Madora, 2012 ; Spaepen, Coppola, Spelke, Carey & Goldin-Meadow, 2011 ; Flaherty & Senghas,

2011; Izard et al., 2008 ; Butterworth et al., 2008; Frank, Everett, Fedorenko & Gibson, 2008, Gordon, 2004) dans lesquelles les participants (Pirahã, Mundurucu, ...) possèdent un langage composé de peu de mots-nombres et sont invités à réaliser des correspondances terme à terme.

Il importe en outre de contrôler le principe d'identité dans son intégralité (aire occupée et délimitée par les objets) lorsqu'on demande à des participants si deux collections alignées sont égales ou non. Dans la célèbre tâche de conservation de Piaget, la longueur des collections est contrôlée (De Neys, Lubin & Houdé, 2014 ; pour une revue de littérature de tâches de conservation plus anciennes, voir Vilette, 1996) mais non la somme des aires des objets (l'aire totale occupée par les objets). D'autres études contrôlent cette aire (Odic, Pietroski, Hunter, Lidz & Halberda, 2013 ; Pietroski et al., 2009) mais non la longueur des collections (l'aire délimitée par les objets). C'est pourquoi les études actuelles sur les correspondances terme à terme ne permettent pas de vérifier si pour les participants deux nombres égaux d'objets désignent des amplitudes égales (aire occupée ou délimitée par les objets) ou des sommes égales d'objets. En d'autres termes, les correspondances terme à terme pourraient être des procédures dépourvues de toute représentation numérique interne.

En effet, une représentation peut être qualifiée de « numérique » si elle repose sur la compréhension de deux idées fondamentales (Sarnecka & Wright, 2013 ; Carey, 2009) : (a) un nombre d'objet est une somme d'objets, un ajout successif d'objet (« $1+1+1+1+\dots$ ») ; (b) chaque nouvel ajout produit un nouveau nombre d'objets. A titre d'illustration, la sensibilité primaire à la pluralité n'est pas une sensibilité à la numérosité parce qu'elle ignore la seconde idée.

A partir d'une telle conception de la numérosité, nous pouvons nous interroger sur la nature « numérique » des lignes numériques. Sur de telles lignes, les symboles peuvent en effet tout aussi bien désigner un nombre d'objets (3 signifie « $1+1+1$ ») ou une position (3 signifie « 3^{ème} »). Dès lors, les nombres ont-ils pour les participants une signification cardinale ou ordinale ? Un nombre est-il pour eux une somme d'objets ? Quel type de conception du nombre véhiculent ces jeux consistant à déplacer un pion sur une ligne numérique dessinée ?

Les tâches de numérosité consistant à positionner un nombre sur une ligne non graduée ne semblent pas pour cette raison très fiables¹¹. Certes, les participants doivent situer les nombres linéairement. Mais cette linéarité est-elle le signe d'une compréhension cardinale des nombres ou de l'application d'une convention (tous les nombres sont habituellement présentés à égale distance les uns des autres) ? Le positionnement sur une ligne non graduée et non délimitée peut donner quant à elle l'impression de constituer une tâche de numérosité. Les enfants reporteraient l'unité de mesure au moyen de stratégies additives : ils sommeraient des objets. Ils comprendraient par conséquent la fonction de succession. Cependant, comment réaliseraient-ils cette somme ? Ils pourraient en effet compter dans leur tête à l'insu de l'expérimentateur. Ils étiquetteraient ainsi chaque unité et se représenteraient les nombres sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés.

Les groupements facilitent très probablement le comptage et la mémorisation d'un plus grand nombre d'objets par le SIP. Mais les tâches vérifiant ces hypothèses sont réalisables par un comptage ou par le SIP. Les participants peuvent se contenter pour les réussir d'individualiser les objets en les nommant (voici « un », voici « deux », ...) ou en les fichant dans leur mémoire de travail (cf. 2.1.2.). Il suffirait d'être sensible à l'individualité pour réussir ces tâches. Il n'est donc pas certain qu'elles constituent des tâches de numérosité.

Les tâches consistant à reconstituer une collection en s'aidant des propriétés du système décimal peuvent elles aussi être réussies au moyen d'un comptage. A titre d'exemple, pour élaborer 64 cubes, les participants doivent construire 6 groupes de 10 cubes et 1 groupe de 4 cubes. Or, chaque groupe de 10 ou 4 cubes peut être fabriqué au moyen d'un comptage. Il suffit ensuite, à l'aide d'un comptage des groupes, d'élaborer 6 groupes de 10 et 1 groupe de 4. Par conséquent, la compréhension cardinale du système décimal n'est pas garantie par cette tâche. Il est possible que les participants étiquettent machinalement les collections comme dans n'importe quelle autre activité de comptage.

Les êtres humains sont peut-être capables de se représenter mentalement des grands nombres d'objets en les regroupant. Il serait possible par exemple de visualiser « 32 » objets en imaginant simultanément 3 groupes de 10 objets et 1 groupe de 2. Mais

¹¹ Nous n'avons pas analysé ces tâches dans la revue de littérature (Article 1) soumise à *Psychologie Française* (cf. 2.2.4.). Cependant, cela ne modifie pas les conclusions de cette revue. Les limites des tâches de positionnement sur une ligne non graduée (délimitée ou non) sont les mêmes que celles que nous mentionnons dans cette revue. Cette tâche peut en effet être résolue à l'aide de procédures non numériques (stratégie pragmatique et comptage-étiquetage) et celles-ci sont déjà mises en lumière, dans cette revue, à travers l'analyse d'autres études.

aucune donnée expérimentale n'étaye cette hypothèse. Au contraire, la mémoire visuelle de travail semble limitée à 4 objets chez l'adulte. Au-delà, elle ne perçoit plus que des ensembles approximatifs d'objets (Feigenson, 2011). Il semble donc difficile *a posteriori* à un système cognitif de visualiser mentalement 3 groupes comprenant chacun très exactement 10 objets.

Les hypothèses actuelles présentent en résumé deux sortes de limites (Tableau 1). Premièrement, elles présentent des limites d'ordre méthodologique. Il n'est pas certain qu'elles recourent à des tâches de numérosité fiables. Elles pourraient être réussies en effet par des procédures non numériques observées dans différentes études. Deuxièmement, certaines présentent des limites d'ordre théorique. Des études supposent l'idée contradictoire selon laquelle un nombre (une pluralité) pourrait être une amplitude semblable à une ligne plus ou moins étendue (une non pluralité). D'autres proposent une conception imagée du nombre probablement unimaginable par un système cognitif humain.

Hypothèses actuelles		Limites méthodologiques	Limites théoriques
1. Calibrage		Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : une amplitude (Carey, 2009). Absence de validation expérimentale chez l'être humain : aucun ANS humain n'est exact (Piazza et al., 2010).	Une amplitude (approximative ou exacte) n'est pas un nombre (approximatif ou exact) d'objets.
2. Comptage		Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : un ensemble d'objets individualisés (Davidson et al., 2012).	Pas de limites identifiées
3. Correspondances		Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : une amplitude (Izard et al., 2014)	Pas de limites identifiées
4. Ligne numérique		Tâches de numérosité réalisables par un comptage-étiquetage ou au moyen d'une représentation non cardinale des nombres et d'une stratégie pragmatique (les nombres sont communément séparés par une distance égale lorsqu'on les représente sur une ligne)	Pas de limites identifiées
5. Groupement	a. Grouper pour compter	Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : un ensemble d'objets individualisés (Davidson et al., 2012)	Pas de limites identifiées
	b. Grouper pour mémoriser	Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : un ensemble d'objets individualisés (Rosenberg et Feigenson, 2013)	Pas de limites identifiées
	c. Compréhension du système décimal à l'aide de groupements	Tâches de numérosité réalisables par une représentation interne non numérique : un ensemble d'objets individualisés (Davidson et al., 2012)	Pas de limites identifiées
	d. Grouper pour se représenter mentalement de grands nombres d'objets	Absence de validation expérimentale ¹²	Il serait impossible de visualiser mentalement un grand nombre d'objets au regard des limites de la mémoire visuelle humaine de travail (Feigenson, 2011)

Tableau I : Résumé des limites méthodologiques et théoriques des hypothèses actuelles expliquant le passage d'une connaissance primaire du nombre (approximative et externe) à une connaissance secondaire du nombre (exacte et interne). Les travaux à partir desquels ces limites ont été identifiées ont été indiqués.

¹² Chan et al. (2014) souhaitent tester pour la première fois les hypothèses de Fuson et al. (1997). Mais ils ne s'intéressent qu'aux différentes stratégies de comptage (compter les objets un par un, compter de 10 en 10, compter le nombre de dizaines puis les unités, etc.) mises en place par des enfants de 5 à 7 ans pour dénombrer des ensembles de cubes organisés en barres de 10 cubes. Cette étude ne vérifie pas en d'autres termes cette hypothèse de Fuson et al. (1997) selon laquelle ces enfants auraient une représentation mentale et visuelle des nombres de cubes.

2.4. L'hypothèse des groupements configurés

Comment dépasser les limites des hypothèses actuelles sur le plan théorique et méthodologique ? Sur le plan théorique, une représentation interne numérique ne peut plus être assimilée à une amplitude ou à l'image visuelle d'un nombre d'objets trop important. C'est pourquoi les hypothèses 1 et 5d (Tableau 1) peuvent être écartées – sauf si de nouvelles données devaient dans les années à venir les réhabiliter. Sur le plan méthodologique, plusieurs pistes de recherche peuvent être envisagées : (1) améliorer les tâches de numérosité disponibles et confirmer l'une des hypothèses actuelles restantes ; (2) proposer une nouvelle tâche de numérosité plus fiable pour confirmer l'une des hypothèses actuelles restantes ; (3) proposer une nouvelle tâche de numérosité plus fiable pour étayer une nouvelle hypothèse.

2.4.1. Définition d'une nouvelle hypothèse

L'examen des données archéologiques nous invite à opter pour la troisième possibilité. Une certaine sorte de groupement est en effet utilisée depuis l'invention de l'écriture pour symboliser des quantités (Ifrah, 1994). Les premiers symboles numériques ressemblaient à la quantité qu'ils désignaient. Le nombre 1 était par exemple symbolisé par « I », le nombre 2 par « II », le nombre 3 par « III », etc. Le plus intéressant reste la manière dont les symboles étaient disposés. Ils n'étaient jamais en désordre (Figure 4a). En outre, leur organisation respectait toujours le même schéma. Nous dirons qu'ils étaient organisés sous la forme de « configurations » (Figure 4b).

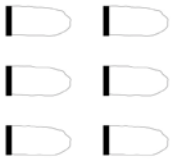
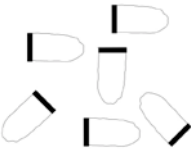
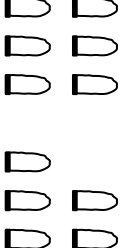
			
Organisés	En désordre	Configurés	Organisés mais non configurés
a. Les symboles des sumériens sont organisés et non disposés en désordre.		b. Quand les symboles sont configurés, le schéma de placement des symboles ne change pas. Aussi, l'ajout d'un symbole ne requiert pas de modifier la place des autres symboles. Ce n'est pas le cas sur un dé à jouer. Il faut en effet déplacer le point situé au milieu des quatre points de la face représentant cinq points pour élaborer une représentation de six points. Sur un dé, le cinq et le six ne respectent pas le même schéma d'organisation. C'est pourquoi les points sur un dé sont groupés, organisés, mais non configurés.	

Figure 4 : Deux caractéristiques des anciens symboles numériques utilisés par les Sumériens.
Adapté d'Ifrah (1994).

Cette observation des données archéologiques suggère une nouvelle approche du groupement : la configuration des objets faciliterait la perception des groupes et des éléments en présence dans chaque collection. Il serait alors aisé de se rendre compte s'il manque ou non un groupe ou un élément et de réaliser des comparaisons exactes entre de grandes quantités. Dès lors, il s'avère possible de formuler une nouvelle hypothèse : l'hypothèse des groupements configurés. Cette hypothèse peut être définie au moyen de deux propriétés fondamentales.

Premièrement, la configuration des groupements facilite la reconnaissance visuelle de deux quantités égales : deux groupements visuellement identiques ont par principe le même nombre d'objets pour le système cognitif (propriété d'égalité des groupements configurés). Si l'expérimentateur dispose sur un support deux groupements d'objets composés du même nombre d'objets et leur confère la même configuration, alors le système cognitif des participants se rend aisément compte qu'ils sont effectivement égaux (Figure 5a). Il n'a pas besoin pour cela de les compter.

Deuxièmement, les groupements configurés facilitent la perception de quantités inégales. Si deux groupements ont la même configuration, il est aisé de voir si l'un des groupements contient plus ou moins d'objets qu'un autre (propriété d'inégalité des groupements configurés). En effet, tout se passe comme dans un jeu des sept erreurs. Le système cognitif compare les groupes configurés et remarque aisément s'il manque ou non un point dans l'un des deux groupes (Figure 5b). Il n'a pas besoin pour cela de les compter.

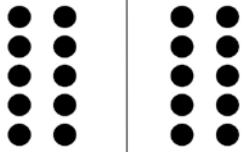
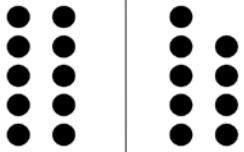
			
a. Deux groupes égaux possédant la même configuration	b. Deux groupes inégaux possédant la même configuration		

Figure 5 : Illustration des propriétés d'égalité et d'inégalité des groupements configurés.

2.4.2. Positionnement théorique de l'hypothèse

Dans quelle mesure cette hypothèse peut-elle dépasser les limites des hypothèses actuelles ? Sur le plan théorique, elle s'inscrit tout d'abord dans le cadre défini par Carey (2009) – celui-ci domine aujourd'hui les recherches en Cognition numérique¹³ (Izard et al., 2014 ; Sarnecka & Wright, 2013 ; Barner et al., 2007 ; Izard et al. 2008). Une numérosité est comprise comme une somme d'objets ou pour le dire autrement comme le résultat de la fonction de succession (« 1+1+1+...+1 »). Cette conception a pour corrélat une idée fondamentale pour toute recherche (Condry & Spelke, 2008) : tout nouvel ajout ou retrait d'un objet à un nombre d'objets engendre un nouveau nombre d'objets.

Aussi, si les participants sont en mesure de comparer deux grandes quantités très proches (séparées par un unique objet) organisées à l'aide de groupements configurés, alors cela implique qu'ils comprennent la fonction de succession : ils comprennent que deux

¹³ Les recherches en Didactique (Gagatsis, Deliyanni, Elia & Panaoura, 2011 ; Elia, 2011) ne privilégient pas nécessairement un certain type de représentation interne de la numérosité. Dans le projet ACE (2015) par exemple, les enfants sont invités à utiliser plusieurs formes de représentation des nombres : amplitude, ligne numérique, groupements d'objets par 10 – précisons toutefois que l'approche cardinale des nombres semble prépondérante.

nombres d'objets sont différents, même si le premier ne contient qu'un élément de plus que le second.

Ainsi, à la différence de Leslie et al. (2008), un nombre d'objets n'est pas une amplitude. De plus, il s'agit de configurer les groupements présentés aux participants et non d'apprendre aux participants à visualiser mentalement des groupements configurés. Cette approche « ergonomique » consiste à modifier l'environnement des participants (les quantités présentées) et non leur système cognitif (il ne leur est pas proposé d'intégrer une nouvelle forme de représentation). A la différence de Fuson et al. (1997), les participants ne sont pas invités à acquérir une image mentale des nombres qui risquerait de saturer leur mémoire visuelle de travail.

Cette hypothèse diffère de deux autres approches théoriques de la numérosité : la réduction des numérosités aux numérosités géométriques ; la réduction des numérosités aux numérosités décomposées en groupements de 10.

Dans l'hypothèse de la ligne numérique, la représentation géométrique des nombres en une dimension (sur un axe orienté de gauche à droite) est clairement préférée à toute autre forme de représentation. Cette préférence est justifiée généralement par des études selon lesquelles la réussite à la tâche de positionnement serait le meilleur prédicteur de la réussite future des élèves en mathématiques (Geary, Bailey & Hoard, 2009 ; Muldoon, Towse, Simms, Perra & Menzies, 2013 ; Gunderson, Ramirez, Beilock & Levine, 2012). Il s'agit donc d'inviter les élèves à transformer toute quantité discrète (15 poules) en une quantité continue (15 unités de mesure mises bout à bout) représentée dans un espace à une dimension.

Il est vrai que les êtres humains se représentent les nombres sous une forme géométrique (des unités de mesure collées les unes aux autres) chaque fois où ils mesurent des grandeurs (longueur, aire, volume, etc.). Cette forme de représentation apparaît dès l'invention de l'écriture (Izard et al., 2008). Toutefois, l'idée de représenter toutes les quantités à l'aide d'une représentation géométrique en une dimension n'apparaît en Occident qu'au XVIIIe siècle (Nunez, 2008). Les scientifiques ont depuis pris l'habitude de représenter toutes les quantités physiques sur des axes. Faut-il enseigner à l'enfant le plus tôt possible cette forme de représentation relativement récente dans l'Histoire ?

Cette réduction des quantités discrètes à des quantités continues favoriserait la réussite scolaire des enfants (pour une revue de littérature, voir Reeve, Paul & Butterworth, 2015). Autrement dit, la représentation de toutes les quantités sous la forme d'une ligne

numérique pourrait conférer aux enfants une représentation numérique interne relativement efficace. Aussi, cette orientation théorique se justifierait. Elle ne présenterait pas en ce sens de limites « théoriques », même si elle réduit les numérosités à des numérosités géométriques.

Cependant, la production d'une représentation exacte des nombres sur une ligne exigerait une compréhension du système décimal (Link et al., 2014) : les enfants devraient donc avoir compris au préalable que « 60 » signifie 6 groupements de 10 objets avant de pouvoir placer exactement « 60 » sur une ligne non graduée. Ils devraient apprendre par exemple à composer des segments composés de dix unités de mesure, puis à reporter ces segments pour obtenir six segments successifs composés de dix unités de mesure chacun. Dans une telle perspective, la ligne numérique serait construite à l'aide de groupements de 10¹⁴. D'un point de vue théorique, la représentation de la ligne numérique supposerait donc la représentation des nombres sous la forme de groupements de 10. En d'autres termes, elle supposerait la réduction des numérosités à des numérosités groupées par 10 (la base de 10) : « 60 » signifie 6 groupes de 10, « 300 », 3 groupes de 10 groupes de 10, « 4000 », 4 groupes de 10 groupes de 10 groupes de 10, etc.

Cependant, cette conception des nombres suppose l'existence de la fonction de succession. Un groupe de 10 objets est une somme de 10 objets : 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1. 3 groupes de 10 objets sont une somme de 3 sommes de 10 objets : (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) + (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) + (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1). Sur un plan théorique, la compréhension du système décimal ou le recourt à la base 10 suppose la définition proposée par Carey (2009) des numérosités. Elle ne fait que compléter cette définition en décomposant la fonction de succession en groupements de 10.

Notre hypothèse des groupements configurés ne suppose absolument pas, quant à elle, que les enfants décomposent la fonction de succession en groupements de 10. Elle demeure inscrite en ce sens dans le cadre défini par Carey (2009) : les enfants comprennent simplement la fonction de succession ou plus simplement l'idée ordinaire de numérosité¹⁵.

¹⁴ On retrouve cette approche par exemple chez Brissiaud (2005).

¹⁵ Carey emprunte l'expression « fonction de succession » à Dedekind. Cependant, pour Dedekind, cette fonction sert plutôt à désigner le successeur (le premier élément, le second, etc.). Elle ne somme pas pour Dedekind des unités ou des objets. Aussi, l'approche de Dedekind est plus ordinale que cardinale (Izard et al., 2008). Nous avons choisi néanmoins de conserver l'expression « fonction de succession » et de continuer à lui prêter une signification cardinale, dans la mesure où celle-ci est régulièrement reprise dans la littérature récente pour définir la notion de numérosité.

Nous ne supposons pas qu'ils se représenteraient les nombres d'objets à l'aide de groupements configurés. Nous supposons simplement que les groupements configurés permettent d'étendre la sensibilité à la numérosité (comprise au sens de Carey) aux grandes numérosités.

Dans cette approche, la découverte des propriétés numériques des groupements configurés pourrait être, en théorie, un intermédiaire entre l'acquisition de l'idée de numérosité et l'apprentissage de la base 10 ou du système décimal. C'est pourquoi notre hypothèse est plus « primitive » que l'hypothèse de Fuson et al. (1997) ou celles véhiculées par les travaux sur la compréhension du système décimal (Vasilyeva et al., 2015). Dans celles-ci, seuls les groupements configurés de 10 sont en effet utilisés.

Notre hypothèse se distingue enfin de celles (Rosenberg & Feigenson, 2013 ; Starkey & McCandliss, 2013) consistant à employer uniquement des petits groupements (de 2 ou 3 objets) susceptibles d'être intégralement traités par le SIP – dans une telle situation, les objets sont ou risquent d'être individualisés par le SIP (cf. 2.3.).

Il est clair que notre hypothèse suppose l'existence des lois de la Gestalt (Todovoric, 2011). Elle repose par exemple sur la possibilité de pouvoir identifier différents groupements au moyen de la loi de proximité. Cependant, dans l'approche gestaltiste du nombre (Van Oeffelen & Vos, 1982), les objets sont groupés car l'objectif est de compter le nombre de groupements. La loi de proximité est ainsi employée pour isoler les groupements les uns des autres et faciliter leur dénombrement. Mais cette loi n'apporte aucune information sur le nombre d'objets contenu dans chaque groupement. C'est pourquoi Van Oeffelen & Vos (1982) utilisent des petits groupes de 2 ou 3 objets : le nombre d'objet est suffisamment petit pour être immédiatement identifié.

Dans notre perspective, la configuration des éléments apporte au contraire une information sur le nombre d'éléments contenus dans un groupement. Elle ne nous renseigne pas sur leur nombre exact. Mais elle nous informe immédiatement si deux groupements configurés possèdent ou non le même nombre d'éléments.

Les lois de la Gestalt expliquent pour quelle raison une multiplicité d'objets (des feuilles éparpillées) peut être perçue comme un unique objet composé de plusieurs éléments (un tas de feuilles). Toutefois, elles ne disent rien sur la raison pour laquelle nous percevons un nombre plus ou moins important d'objets.

Les propriétés numériques des groupements ne sont pas des lois supplémentaires à ajouter à la théorie de la Gestalt. Notre hypothèse ne répond pas en effet à cette question

fondamentale de la Gestalt : pourquoi plusieurs objets sont-ils perçus comme les éléments constitutifs d'un seul et même objet ? Elle répond à cette autre interrogation : pourquoi certains groupements contenant parfois un très grand nombre d'objets sont néanmoins immédiatement perçus comme contenant le même nombre d'objets ou comme contenant un objet de moins ou de plus ? Comment de telles comparaisons exactes sur de grands nombres d'objets sont-elles possibles sans comptage et sans mise en correspondance des éléments entre eux ?

En définitive, notre hypothèse diffère théoriquement des autres hypothèses mobilisant des groupements configurés parce qu'elle ne privilégie pas certains groupements (groupes de 10 ou petits groupes de 2 ou de 3) et parce qu'elle ne consiste pas à enseigner au système cognitif une représentation numérique interne utilisant des groupements configurés. Elle ne consiste pas non plus à se servir du groupement pour simplifier le comptage de groupements.

Il est vrai qu'elle s'inscrit dans l'approche théorique de Carey au niveau de la définition de la numérosité. Cependant, elle diffère aussi radicalement de celle-ci dans la mesure où l'accès aux grandes numérosités ne se fait pas au moyen d'une procédure verbale (le comptage). Enfin, la procédure non verbale à laquelle elle recourt n'est pas une correspondance terme à terme ou une mise en œuvre exclusive du SIP ou de l'ANS. Il s'agit plutôt d'utiliser les propriétés numériques des groupements configurés.

Notre hypothèse diffère au final théoriquement des autres hypothèses soit par sa conception de la numérosité, soit par l'idée qu'elle se fait de la procédure non verbale permettant le passage de l'approximation à l'exactitude dans le domaine des grandes numérosités (Tableau II).

Hypothèses		Définition de la numérosité	Type de procédure
1. Calibrage		Amplitude	Non verbale Utilisation exclusive de l'ANS
2. Comptage		Fonction de succession	Verbale
3. Correspondances		Fonction de succession	Non verbale Correspondances terme à terme
4. Ligne numérique		Fonction de succession groupée par 10 et orientée	Verbale
5. Groupement	a. Grouper pour compter	Fonction de succession groupée par 2 ou 3	Verbale
	b. Grouper pour mémoriser	Ensemble d'objets individualisés	Non verbale Utilisation exclusive du SIP
	c. Compréhension du système décimal à l'aide de groupements	Fonction de succession groupée par 10	Verbale
	d. Grouper pour se représenter mentalement de grands nombres d'objets	Fonction de succession groupée par 2 ou 3	Verbale
	e. Utiliser des groupements configurés pour représenter non mentalement des grands nombres d'objets	Fonction de succession	Non Verbale Utilisation des propriétés numériques des groupements configurés

Tableau II : Différences théoriques entre notre hypothèse et les hypothèses actuelles au niveau de la conception de la numérosité et de la procédure non verbale assurant le passage de l'approximation à l'exactitude dans le domaine des grandes numérosités.

Cette hypothèse devrait pouvoir par conséquent dépasser les limites théoriques de certaines des hypothèses actuelles (hypothèses 1 et 5d, Tableau I) lorsqu'il s'agit d'expliquer le passage d'une connaissance primaire (approximative et externe) à une connaissance secondaire (exacte et interne) des grands nombres d'objets.

Elle apporte aussi une nouvelle explication de ce passage : les êtres humains parviennent à comparer deux grandes quantités exactes par l'adaptation de leur environnement à leur propre capacité ; ils organisent les grandes quantités en groupements configurés afin de pouvoir les différencier aisément et avec exactitude, sans avoir besoin de les compter ou de les mettre en correspondance terme à terme.

Cette hypothèse n'explique pas, toutefois, de quelle façon les êtres humains acquièrent une sensibilité exacte à la numérosité. Les groupements configurés confèrent le moyen à cette sensibilité d'accéder au domaine des grandes numérosités. Ils mobilisent cette sensibilité et accroissent son champ d'action. Ils ne la génèrent pas. Ils ne sont pour cette raison que l'un des chaînons assurant le passage d'une connaissance primaire à une connaissance secondaire des grandes numérosités.

3. Contribution méthodologique et empirique

3.1. Présentation de la revue de littérature sur les tâches de numérosité (Article 1)

Les limites théoriques des hypothèses actuelles ne semblent pas majoritaires (Tableau I). Dans la plupart de ces hypothèses, la notion de nombre et celle d'amplitude ne sont pas confondues. Ces hypothèses ne se fondent pas non plus sur une conception de la représentation numérique interne incompatible avec les limites de la mémoire visuelle de travail. Les limites paraissent donc plutôt d'ordre méthodologique : il n'est pas certain que les tâches de numérosité utilisées pour valider ces différentes hypothèses soient fiables (cf. 2.3.). Celles-ci peuvent être réalisées au moyen de procédures non numériques, c'est-à-dire au moyen de procédures ne mobilisant pas de sensibilité interne à la numérosité. Dès lors, comment élaborer une tâche fiable de numérosité ? Quelles précautions devrait-on prendre pour éviter qu'une tâche de numérosité soit réalisable par une procédure non numérique ?

Cette question fondamentale n'a jamais fait l'objet d'une revue de littérature. C'est pourquoi il pourrait être intéressant de commencer par examiner les différentes tâches de numérosité proposées depuis une dizaine d'années en Cognition numérique et de regrouper les différentes critiques qui en ont été faites. Cette analyse pourrait conduire à mettre à jour un ensemble de règles à respecter lors de l'élaboration d'une tâche de numérosité. Telle est en tout cas la conclusion de la revue de littérature présentée dans la première partie de ce travail.

Le moteur de recherche utilisé a été *Ebscohost*. Quatre bases de données ont été examinées (de 2002 à 2014) : *psycINFO*, *psycARTICLES*, *psycCRITIQUES* et *Psychology and Behavioral Sciences Collection*. « *Number comprehension* » et « *number concept* » ont été les mots-clefs employés. Ils apparaissent ordinairement dans les articles soucieux d'évaluer la sensibilité interne à la numérosité des participants – en particulier « *number comprehension* ».

Les articles ainsi sélectionnés ne mentionnent jamais l'intégralité des études réalisées en Cognition numérique. Ils privilégient certains domaines de recherche. De cette façon, il est possible de relier des recherches entre elles et d'identifier *a posteriori* 5 objets d'étude que nous avons déjà présentés : la subitisation (cf. 2.1.2), l'ANS (cf. 2.1.1), le comptage et le

langage (cf. 2.2.2.)¹⁶, la conservation du nombre et les correspondances terme à terme (cf. 2.2.3.)¹⁷, la pluralité (cf. 2.1.3.).

Le groupement (cf. 2.2.5) par exemple ne constitue pas encore un objet d'étude à part entière. Il sert dans la majorité des cas¹⁸ à étendre les capacités du SIP et appartient pour cette raison au domaine de recherche sur la subitisation. Les études sur la ligne numérique, quant à elles, commencent à peine à pouvoir être dissociées clairement des études sur l'ANS, comme nous l'avons déjà expliqué (cf. 2.2.4). C'est pourquoi les tâches de positionnement sont regroupées avec les tâches de numérosité caractéristiques des recherches sur l'ANS.

Les tâches de numérosité ont ensuite été regroupées en fonction de la tâche demandée aux participants. Six catégories de tâches ont été identifiées : les tâches de comparaison, les tâches de fouille, les tâches sémantiques, les tâches équinumériques, les tâches de comptage, les tâches approximatives.

Dans une tâche de comparaison, les participants évaluent si une collection comporte autant d'objets qu'une autre collection (cf. 2.1.2.). Dans une tâche de fouille, les participants doivent vérifier s'il ne reste pas des objets à l'intérieur d'une boîte fermée (ils peuvent toucher les objets mais non les voir) après que l'on ait retiré devant eux une partie ou la totalité des objets préalablement disposés dans cette boîte (cf. 2.1.3.). Dans une tâche sémantique, on évalue si les participants comprennent la signification cardinale des mots de la file numérique (par exemple, la tâche de l'unité ; cf. 2.2.2.). Dans une tâche équinumérique, les participants sont invités à construire ou à comparer des collections « équipotentes » (des collections égales dont les éléments peuvent être mis en correspondance terme à terme ; cf. 2.2.3.). Dans une tâche de comptage, les participants sont invités à compter les éléments d'une collection (exemplairement, la tâche Donne-*n* ; cf. 2.2.2.). Dans une tâche approximative, les participants sont invités à réaliser approximativement des comparaisons, des calculs, etc. (par exemple, des positionnements approximatifs de symboles numériques sur une ligne non graduée ; cf. 2.2.4.).

¹⁶ Les études sur le comptage s'accompagnent dans la majorité des cas d'études sur la compréhension des mots utilisés lors d'un comptage. C'est pourquoi nous parlons dans cette revue de littérature de l'étude du « comptage et du langage ».

¹⁷ Beaucoup d'études sur la conservation du nombre invitent les participants à utiliser des correspondances terme à terme. C'est pourquoi cette revue de littérature des tâches de numérosité réunit les études sur la conservation du nombre et celles sur les correspondances terme à terme.

¹⁸ Les hypothèses sur le groupement 5a, 5c, 5d (Tableau II) sont trop anciennes ou trop récentes pour apparaître dans cette revue de littérature.

Les tâches de numérosité ont été ainsi classées en fonction du domaine d'étude auxquelles elles appartiennent le plus souvent et en fonction de la tâche demandée aux participants. Cette double classification offre une première vision d'ensemble des tâches de numérosité. Elle montre que celles-ci sont préférentiellement utilisées dans certains domaines et que toutes les tâches de numérosité ont été élaborées à partir de six modèles de référence.

Chaque modèle a été divisé en sous-modèles – un sous-modèle est obtenu grâce à une modification du modèle de référence. Cela a permis de classer et de présenter dans le détail 19 tâches de numérosités particulièrement courantes dans la littérature.

Il a alors été constaté que certaines critiques formulées à l'encontre de certaines tâches par certains auteurs pouvaient être adressées à d'autres tâches. En d'autres termes, certaines critiques ont une portée générale. C'est pourquoi elles ont permis de mettre à jour quatre règles à respecter lors de l'élaboration d'une tâche de numérosité.

Premièrement, les paramètres non numériques doivent être contrôlés (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002 ; Dehaene, Izard & Piazza, 2005). Il faut s'assurer que les participants sont sensibles au nombre d'objets contenus dans une collection et non sensibles à une amplitude (surface occupée ou délimitée par les objets, densité, luminosité, longueur totale des contours des objets, etc.).

Deuxièmement, la tâche ne doit pas être réalisable par une individualisation des objets en présence au moyen du SIP (Feigenson, 2005), d'un comptage-étiquetage (Davidson et al., 2012), ou d'une mise en correspondance terme à terme (Izard et al., 2014)¹⁹ – sinon, les quantités en présence risquent d'être représentées sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés.

Troisièmement, la tâche ne doit pas être réalisable par l'ANS (Carey, 2009 ; Feigenson et al., 2002a) – sinon les quantités en présence risquent d'être représentées au moyen d'une amplitude.

Quatrièmement (Izard et al., 2014), la tâche ne doit pas être réalisable par une stratégie pragmatique « non numérique » (ne nécessitant pas une sensibilité interne à la numérosité) (pour un exemple, cf. 2.2.4.).

¹⁹ Izard et al. (2014) montrent dans leur étude empirique que des bébés de 32-36 mois peuvent tout à fait réaliser des correspondances terme à terme sans pour autant connaître le principe de substitution (cf. 2.2.3.). Tout se passe comme si, pour eux, les correspondances étaient des objets individualisés et par conséquent irremplaçables.

3.2. L'hypothèse générale opérationnelle et le paradigme expérimental

L'hypothèse générale est que divers groupements configurés permettent de passer d'une connaissance primaire (approximative et externe) à une connaissance secondaire (exacte et interne) des nombres et que cette transition s'effectue sans recourir au comptage : si les objets sont organisés à l'aide de groupements configurés, alors les êtres humains sont capables de comparer sans compter de grands nombres d'objets. Cette hypothèse traite des propriétés numériques des groupements configurés dans leur ensemble. Elle ne se restreint pas aux groupements configurés usuels (les barres de dizaines, etc.).

Cette hypothèse a été testée au moyen de deux études (Articles 2 et 3). Chacune comporte trois expériences. La première (Article 2) évalue cette hypothèse avec des enfants de 8 ans. La seconde (Article 3) évalue plus finement cette hypothèse avec des enfants de 8 ans (expérience 1) et la teste avec des enfants de 5 ans (expériences 2 et 3).

La tâche de comparaison (cf. 3.1.) a été choisie pour opérationnaliser cette hypothèse. Il s'agit de proposer aux participants de comparer deux grandes quantités de points très proches. Cette hypothèse porte en outre sur les collections groupées *et* configurées. Dans cette approche, la notion de groupement n'est pas abordée indépendamment de la notion de configuration. C'est pourquoi il n'existe qu'une seule variable indépendante : les points sont organisés au moyen de groupements configurés (Figure 6a) ou non (Figure 6b).

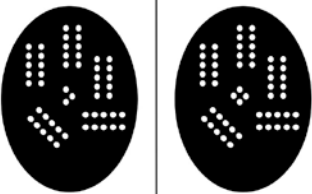
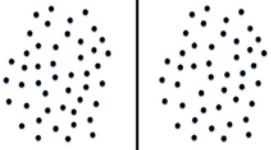
	
a. Les points sont organisés à l'aide de groupements configurés. Dans cet item, les points sont organisés à l'aide d'une configuration « 5-5 » (deux rangées de 5 points alignées l'une contre l'autre). Cette configuration est usuelle. Elle est en effet particulièrement utilisée au début de l'Antiquité (Ifrah, 1994) et dans certains matériels et manuels scolaires (Brissiaud, 2005, p. 169).	b. Les points ne sont pas organisés à l'aide de groupements configurés.

Figure 6 : Exemples d'items servant à opérationnaliser la variable indépendante (les points sont organisés ou non au moyen de groupements configurés).

Une autre dimension fondamentale de l'opérationnalisation est la limitation du temps d'exposition. Les participants ne perçoivent les collections à comparer que durant un temps très court (5 secondes). Ce temps est suffisamment long pour permettre aux participants d'observer les collections et d'utiliser les propriétés numériques des groupements configurés. Il est cependant suffisamment court pour empêcher les participants de compter. A la différence de Sarnecka et Carey (2008), l'expérimentateur n'interdit pas aux enfants de compter. A aucun moment l'expérimentateur les incite à utiliser ou ne pas utiliser telle ou telle stratégie. Il les *empêche* de compter en limitant le temps d'exposition à 5 secondes. Selon Camos (2003), des enfants de 9 ans comptent au maximum 8 objets en 5 secondes. Il leur faudrait donc un temps beaucoup plus long pour compter de grandes quantités d'objets semblables à celles utilisées dans nos expériences. La plus petite comparaison proposée aux enfants de 8 ans contient 90 points et celle proposée aux enfants de 5 ans, 17 points. Le temps d'exposition n'a pas été adapté à la vitesse de comptage des enfants. Au contraire, il a été constamment limité à 5 secondes. C'est de cette manière que les enfants ont été véritablement empêchés de compter.

Cette limitation du temps d'exposition confère en outre un important avantage méthodologique. Elle permet de neutraliser les stratégies de comptage des enfants et par conséquent de réaliser des expériences sur des participants qui savent déjà compter. De cette façon, il n'est pas obligatoire pour étudier les propriétés numériques des groupements configurés de réaliser des expériences avec de très jeunes enfants non-compteurs

(nourrissons, bébés, enfants de 3 ou 4 ans) ou avec des peuples non-compteurs (Munduruku, Pirahã, etc.).

L'opérationnalisation consiste donc à proposer aux participants de comparer deux grandes quantités de points organisées ou non à l'aide de groupements configurés dans un temps suffisamment limité pour empêcher les participants de compter, mais dans un temps suffisamment long pour leur permettre d'utiliser les propriétés numériques des groupements configurés. Dans un tel cadre méthodologique, il existe une variable indépendante à deux modalités (les points sont organisés ou non à l'aide de groupements configurés) et une variable dépendante (la performance de chaque participant dans chaque condition expérimentale).

L'expérience 1 de la première étude (Article 2) et l'expérience 1 de la seconde étude (Article 3) servent emblématiquement à évaluer l'hypothèse générale. Des enfants de 8 ans doivent comparer deux grandes quantités de points et désigner la plus grande. Les quantités ne restent affichées que 5 secondes. Les quantités sont ou non organisées au moyen de groupements configurés. Les résultats doivent montrer que les enfants réussissent quand les points sont organisés à l'aide de groupements configurés et ne réussissent pas quand les points ne le sont pas. Plus formellement, cela peut s'écrire :

(P₁) : Si les points sont organisés au moyen de groupements configurés alors les performances moyennes des élèves doivent être supérieures au hasard.

(P₂) Si les points ne sont pas organisés au moyen de groupements configurés alors les performances moyennes des élèves ne doivent pas différer du hasard.

Certains facteurs pourraient toutefois interférer avec la variable indépendante. Ils modifieraient ainsi les résultats et fausseraient par de voie de conséquence les conclusions de l'étude. Les enfants pourraient par exemple comparer les aires occupées ou délimitées par les points et non les nombres de points. Ils désigneraient la collection comportant le plus grand nombre de points parce qu'elle serait la collection possédant l'aire la plus grande. Ils réussiraient ainsi la tâche consistant à désigner la collection contenant le plus de points. Dès lors, cette réussite ne montrerait pas leur intérêt pour la numérosité des collections.

Les expériences 1 de la première (Article 2) et de la seconde étude (Article 3) contrôlent déjà une partie de ces facteurs qui pourraient interférer mais elles ne sont pas suffisantes. C'est pourquoi d'autres expériences devaient être conduites. La Tableau III récapitule l'ensemble des facteurs contrôlés durant chaque expérience.

Etudes	Expériences	Facteurs contrôlés
Etude 1 (Article 2)	Expérience 1	Les participants compareraient les collections au moyen de l'ANS, du SIP, du comptage, de correspondances terme à terme ou d'une stratégie pragmatique.
	Expérience 2	Les participants compareraient les aires délimitées par les points et non le nombre de points (Figure 7a). Les participants ne seraient pas capables de faire la différence entre des collections égales et inégales (ils ne percevraient que les collections inégales)
	Expérience 3	Les participants compareraient les aires occupées par les points et non le nombre de points (Figure 7b). Ils seraient capables de compter de 10 en 10 très rapidement et de comparer les points à l'aide d'un comptage-étiquetage.
Etude 2 (Article 3)	Expérience 1	Les participants compareraient les collections au moyen de l'ANS, du SIP, du comptage, de correspondances terme à terme ou d'une stratégie pragmatique.
	Expériences 2 et 3	Les participants sauraient comparer aisément des groupements configurés parce qu'ils auraient appris à le faire lors de leur apprentissage du système décimal (durant le CP et le CE1)

Tableau III : Ensemble des facteurs contrôlés en fonction de l'expérience.

Dans toutes les expériences, les enfants comparent en résumé deux grandes quantités de points et doivent toujours désigner la plus importante. Les points ne restent affichés que 5 secondes. Les points sont organisés ou non au moyen de groupements configurés.

L'expérience 1 de la première étude (Article 2) sert de modèle aux autres expériences. Dans celle-ci, les groupements configurés épousent une configuration « 5-5 » (Figure 6a). Les points qui ne sont pas organisés au moyen de groupements configurés sont dégroupés et éparpillés (Figure 6b). Les expériences suivantes consistent essentiellement à modifier la forme des groupements configurés présentés dans l'expérience modèle afin de contrôler certains facteurs qui pourraient interférer (les enfants compareraient les aires et non les nombres de points, etc.). Les groupements configurés sont par exemple plus étalés

(Figure 7a), les points sont grossis (Figure 7b), les configurations sont remplacées par d'autres (Figure 7c), etc.

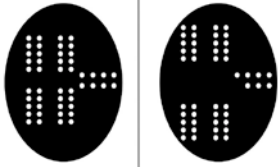
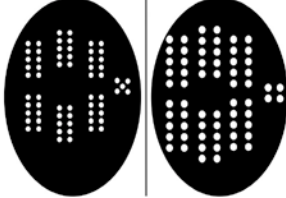
		
a. Contrôler l'aire délimitée par les points : les points les plus nombreux sont ceux qui possèdent la hauteur la moins importante. On vérifie ainsi que les enfants ne comparent pas les aires délimitées par les points.	b. Contrôler l'aire occupée par les points : les points les plus nombreux sont ceux qui possèdent l'aire totale la moins importante. On vérifie ainsi que les enfants ne comparent pas les aires occupées par les points.	c. Contrôler la possibilité d'utiliser les propriétés numériques des groupements configurés avant l'apprentissage du système décimal : la configuration utilisée ici est accessible à des enfants de 5 ans. On vérifie ainsi que les propriétés numériques des groupements configurés n'ont pas été acquises lors de l'apprentissage du système décimal.

Figure 7 : Exemples d'items servant à contrôler certains facteurs qui pourraient interférer.

3.4. Présentation des différentes études réalisées

Depuis le début de cette thèse, trois études ont été conduites (étude 0, étude 1, étude 2). Elles ont été effectuées en milieu scolaire ordinaire sur des enfants âgés de 5, 8 et 9 ans (de la dernière année de maternelle au CM1). Chaque étude se compose de trois expériences. Neuf expériences²⁰ auront donc été menées auprès de 578 enfants.

L'étude 0 n'a pas fonctionné. Il est toutefois intéressant d'en rappeler brièvement le contenu. Elle illustre à la fois les difficultés rencontrées dans la constitution d'une tâche fiable de numérosité et les évolutions de notre problématique. Les études 1 (Article 2) et 2 (Article 3) ont, quant à elles, donné des résultats intéressants. Chacune d'entre elles a été soumise à une revue scientifique.

²⁰ Ce total ne prend pas en compte la petite expérience réalisée sur un échantillon de 27 élèves entre l'expérience 2 et l'expérience 3 de la seconde étude.

3.4.1. L'étude 0

La première étude ne s'interrogeait pas sur le passage des connaissances primaires aux connaissances secondaires. Elle s'inscrivait dans sa quasi-totalité dans la perspective de Fuson et de ses collègues (cf. 2.2.5. et Fuson et al., 1997). L'hypothèse générale se composait de deux sous-hypothèses : (1) la réussite des enfants en arithmétique est liée à la manière dont ils se représentent mentalement les nombres ; (2) la façon la plus efficace de se représenter les nombres est de les imaginer visuellement sous la forme de groupements d'unités et de groupements de groupements.

Afin de tester cette hypothèse générale, trois expériences successives ont été mises en place. Elles avaient toutes pour objectif de mettre à jour l'existence d'enfants dits « groupeurs ». De tels enfants se représenteraient canoniquement les nombres sous la forme de groupements. Ils pourraient avoir d'autres formes de représentation, mais ces dernières seraient sous le contrôle de cette représentation canonique. Celle-ci servirait en quelque sorte de critère d'évaluation de toutes les représentations et de toutes les stratégies arithmétiques – c'est en ce sens qu'elle serait « unique ». Dès lors l'hypothèse générale aurait pu être vérifiée s'il avait été possible de montrer qu'il existe des enfants groupeurs et des enfants non groupeurs et que les premiers sont plus performants en arithmétique (calcul mental et résolution de problème).

Dans la première expérience (2 classes de CE2, 42 enfants), il a été demandé aux enfants de dessiner 74 traits et de résoudre des problèmes d'arithmétique plus ou moins difficiles selon la classification de Riley, Greeno et Heller (1983). Notre première hypothèse était que les enfants qui réaliseraient spontanément 7 groupes de 10 traits et 4 traits seraient des enfants groupeurs. Les enfants non groupeurs dessineraient les traits les uns à la suite des autres. Notre seconde hypothèse était que les enfants groupeurs seraient plus performants que les enfants non groupeurs en particulier aux problèmes les plus difficiles. Les résultats ont été prometteurs : 12 enfants ont pu être identifiés comme groupeurs et ceux-ci avaient effectivement tendance (0.67 de taux de réussite) à mieux réussir que les autres élèves (0.50 de taux de réussite) les problèmes les plus difficiles. Cependant, l'échantillon était trop faible pour que les résultats soient significatifs.

Une seconde expérience a alors été réalisée auprès d'un échantillon plus important (5 classes de CE2, 104 enfants). Afin d'obtenir des données plus complètes et plus précises, deux nouvelles catégories de problèmes plus ou moins difficiles ont été ajoutées : celle de

Brissiaud et Sander (2010) et celle de Fayol, Abdi et Gombert (1987). En outre, un second test a été ajouté en complément afin d'avoir une mesure plus fine de la tendance à être ou non groupeur. Celui-ci consistait à demander à des enfants de réaliser mentalement des sommes du type « $16+14+18$ » en un temps limité. Ces opérations seraient en effet plus accessibles à des enfants groupeurs. Ils auraient plus de chance de percevoir les compléments à 10 (ici, $6 + 4 = 10$) et de les utiliser pour calculer car ils auraient plus de chance d'utiliser des stratégies de groupements (un groupe de 10 pouvant être représenté comme un groupe de 6 et de 4). Nous avons malheureusement une fois de plus observé des tendances, mais rien de significatif.

Une troisième expérience a alors été mise en place avec des élèves de CM1 afin d'augmenter les chances d'avoir plus d'élèves groupeurs (4 classes de CM1, 89 élèves). Cette expérience ne visait qu'à identifier plus de groupeurs puisque c'était le problème majeur de nos expériences antérieures. C'est pourquoi nous nous sommes centrés sur cette question et n'avons conduit que des tests censés évaluer si un enfant était groupeur ou non. Nous avons employé le test des traits, le test des sommes et deux nouveaux tests : le test du choix et le test des groupements.

Le test du choix consistait à proposer aux enfants trois stratégies de calcul mental pour réaliser une soustraction du type « $74 - 27$ » (poser l'opération dans sa tête comme on le ferait sur une feuille de papier, utiliser les compléments à 10, soustraire d'un en un). L'enfant ne devait pas effectuer l'opération. Il devait juste indiquer la stratégie qui lui semblait la meilleure. L'hypothèse était qu'un enfant groupeur aurait désigné celle des compléments à 10.

Le test des groupements consistait à proposer à des enfants de comparer très rapidement des quantités de points organisées en paquets de 10. Notre hypothèse était que les enfants groupeurs sauraient s'appuyer sur l'organisation groupée des points et seraient plus performants.

Cette expérience n'a pas permis d'identifier plus d'enfants groupeurs. Au test du choix, les enfants ont tous désigné la même stratégie : poser l'opération dans sa tête. Au test des groupements, les enfants ont tous réussi. Ces résultats suggéraient qu'il n'y avait aucun groupeur (test du choix) et qu'il n'y avait que des groupeurs (test des groupements). Au regard de cette contradiction évidente, les nouveaux tests n'identifiaient pas des groupeurs. Le test des traits et celui des sommes ne devaient pas, quant à eux, identifier plus de groupeurs qu'à l'accoutumée.

En outre, nous avons enfin pris conscience de certaines limites des anciens tests. Le test des sommes paraissait à présent suspect : premièrement, il était difficile de savoir si les enfants utilisaient les groupements à 10 (ils auraient pu compter mentalement et très habilement de un en un) ; deuxièmement, ils auraient pu employer les compléments à 10 à l'aide d'un comptage-étiquetage et se représenter les nombres sous la forme de multiplicité d'objets individualisés (cf. 2.3). De même, la réussite au test des traits aurait pu s'expliquer au moyen d'un comptage-étiquetage (les groupements faciliteraient simplement le comptage, cf. 2.2.5). Les anciens tests ne semblaient donc plus très pertinents pour évaluer les représentations numériques des enfants.

Cette troisième expérience ne se solda pas pour autant par un échec. Elle a été en effet l'occasion d'entrevoir pour la première fois les propriétés numériques des groupements configurés. Durant les passations du test des groupements, l'aisance des enfants nous interpella. Tout se passait comme si les groupements (configurés) de points étaient pour ainsi dire parfaitement adaptés à leur architecture cognitive. C'est pour cette raison que nous avons été conduits progressivement à concevoir la question des groupements dans une perspective ergonomique et évolutionniste. La première problématique a été abandonnée et a ainsi laissé la place à celle de ce travail.

3.4.2. L'étude 1 (Article 2)

De quelle manière les enfants et les êtres humains passent-ils d'une connaissance primaire et approximative à une connaissance secondaire et exacte des grands nombres ? L'objectif de cette étude est de proposer une nouvelle hypothèse que nous avons déjà exposée (cf. 2.4.) : l'hypothèse des groupements configurés. Cette étude est présentée dans le détail dans la seconde partie de ce travail sous la forme d'un article. Elle se compose en résumé des trois expériences suivantes.

Expérience 1. L'hypothèse est que des enfants de 8 ans ($N = 87$) scolarisés en CE2 peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($30 < n < 60$) ne différant que d'un seul point lorsque ces quantités sont organisées au moyen de groupements configurés et qu'ils ne peuvent pas comparer ces mêmes quantités en moins de 5 secondes lorsqu'elles ne le sont pas (Figure 8)

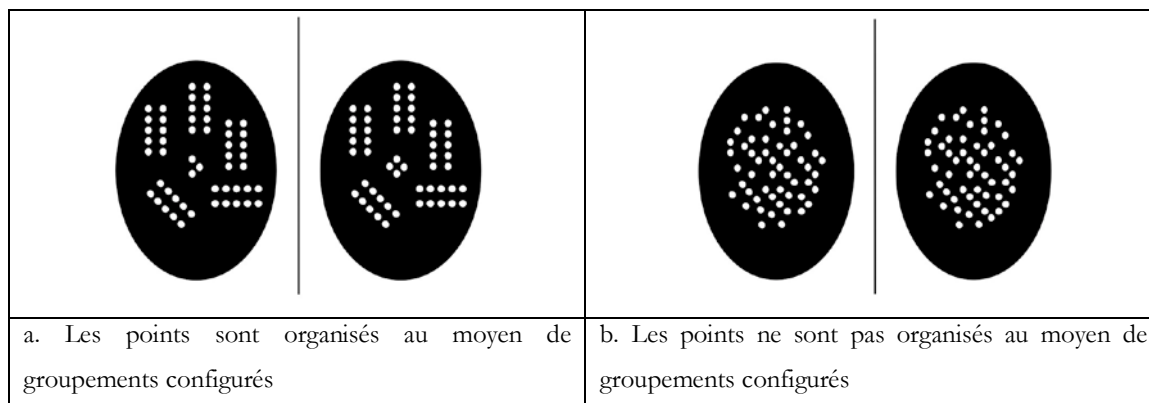


Figure 8 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'étude 1 (Article 2)

Dans cette tâche, les participants ne peuvent recourir exclusivement à l'ANS (les quantités sont trop proches), au SIP (les quantités sont trop importantes), au comptage et aux correspondances terme à terme (le temps d'exposition est trop court). C'est pourquoi cette tâche de numérosité respecte les règles 2 et 3 (cf. Tableau IV).

Règle 1	Les paramètres non numériques doivent être contrôlés (Mix et al., 2002 ; Dehaene et al., 2005). Il faut s'assurer que les participants sont sensibles au nombre d'objets contenus dans une collection et non sensibles à une amplitude (surface occupée ou délimitée par les objets, densité, luminosité, longueur totale des contours des objets, etc.).
Règle 2	La tâche ne doit pas être réalisable par une individualisation des objets en présence au moyen du SIP (Feigenson, 2005), d'un comptage-étiquetage (Davidson et al., 2012), ou d'une mise en correspondance terme à terme (Izard et al., 2014) – sinon, les quantités en présence risquent d'être représentées sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés.
Règle 3	La tâche ne doit pas être réalisable par l'ANS (Carey, 2009 ; Feigenson et al., 2002a) – sinon les quantités en présence risquent d'être représentées au moyen d'une amplitude.
Règle 4	La tâche ne doit pas être réalisable par une stratégie pragmatique « non numérique » (Izard et al., 2014), c'est-à-dire par une stratégie pragmatique ne nécessitant pas une sensibilité interne à la numérosité

Tableau IV : Résumé des règles à respecter lors de l'élaboration d'une tâche de numérosité selon notre revue de littérature (cf. 3.1.).

Elle respecte aussi la règle 4 : la tâche n'est pas réalisable au moyen d'une stratégie pragmatique non numérique. Les enfants ne peuvent pas en effet se contenter de montrer l'endroit où il manque un point ou l'endroit où il ne manque pas de point (comme dans un jeu des sept erreurs). Ils doivent désigner la quantité qui comporte le plus de points. Ils doivent par conséquent effectuer au moins le raisonnement suivant : s'il manque un point dans cette quantité, alors elle possède un point de moins que l'autre ; la quantité la plus

grande est donc celle dans laquelle il ne manque aucun point. Un tel raisonnement suppose qu'ils ont une sensibilité interne à la numérosité au sens défini par Carey (cf. 2.4.2.) : ils comprennent que deux nombres d'objets diffèrent dès que le premier possède un objet de plus ou de moins que le second (un nombre d'objets possède un objet de plus ou de moins qu'un autre $\rightarrow$ ces deux nombres d'objets sont différents).

Les résultats ont montré que l'hypothèse était vérifiée. Selon le test binomial²¹, les enfants réussissent aisément à comparer les points lorsque les collections sont organisées au moyen de groupements configurés de points ($M = 0,96$; $p < 0,0001$) et ils ne semblent pas y parvenir lorsque les points ne le sont pas ($M = 0,52$; $p > 0,18$).

Expérience 2. L'hypothèse est que les enfants de 8 ans ($N = 50$) peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($30 < n < 60$) organisées au moyen de groupements configurés même si elle sont égales et même si l'aire délimitée par les points de la quantité la plus grande est plus petite que celle délimitée par les points de la quantité la plus petite.

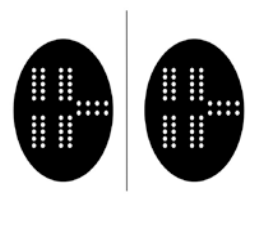
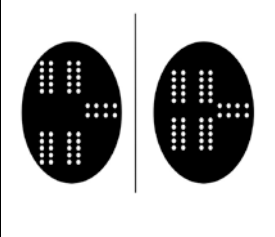
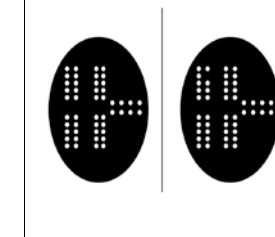
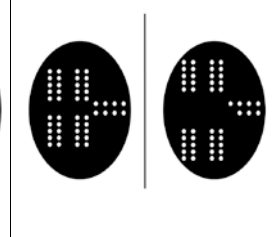
			
a. Les quantités sont égales et les aires sont égales	b. Les quantités sont égales et les aires inégales	c. Les quantités sont inégales et les aires égales	d. Les quantités sont inégales et les aires inégales

Figure 9 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 2 de l'étude 1 (Article 2)

Cette tâche respecte les règles 2, 3 et 4 (voir expérience 1). Elle respecte aussi en partie la règle 1 (Tableau IV) puisque l'aire délimitée par les points est contrôlée. Elle sert aussi à vérifier que les groupements configurés permettent des comparaisons exactes entre des quantités inégales ou égales. Elle peut montrer ainsi que les enfants ont une sensibilité interne à la numérosité en un sens plus précis : ils comprennent que deux nombres d'objets

²¹ La tâche de comparaison consiste à choisir entre deux collections de points (les données respectent donc une loi binomiale). Aussi, un taux de réussite de 0.50 peut simplement correspondre à une situation dans laquelle les participants choisissent au hasard (comme à pile ou face). Le taux de réussite (la valeur de la variable dépendante) devra donc être significativement supérieur à 0.50. Cette significativité du taux de réussite sera mesurée à l'aide d'un test binomial (*two-tailed sign test*).

diffèrent si et seulement si le premier possède un objet de plus ou de moins que le second (sinon, ils sont égaux).

En effet, la proposition « un nombre d'objets ne possède pas un objet de plus ou de moins qu'un autre $\rightarrow$ ces deux nombres d'objets ne sont pas différents » est équivalente à la proposition « deux nombres d'objets sont différents $\rightarrow$ un nombre d'objets possède un objet de plus ou de moins qu'un autre ». Cette dernière proposition est la réciproque de la proposition « un nombre d'objets possède un objet de plus ou de moins qu'un autre $\rightarrow$ ces deux nombres d'objets sont différents ». C'est pourquoi l'expérience 2 mobilise autant des quantités égales qu'inégales. Elle vérifie ainsi que les enfants comprennent implicitement cette relation d'équivalence : un nombre d'objets possède un objet de plus ou de moins qu'un autre $\leftrightarrow$ ces deux nombres d'objets sont différents.

Les résultats ont montré que l'hypothèse était vérifiée. Selon le test binomial, les enfants réussissent aisément et significativement ($M > 0,94$; $p < 0,0001$) même si les collections ont le même nombre de points et même si la collection comportant le plus grand nombre de points est la collection possédant l'aire la plus petite.

Expérience 3. L'hypothèse est que les enfants de 8 ans ($N = 56$) peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($30 < n < 60$) organisées au moyen de groupements configurés même si l'aire occupée par les points de la quantité la plus grande est plus petite que celle occupée par les points de la quantité la plus petite.

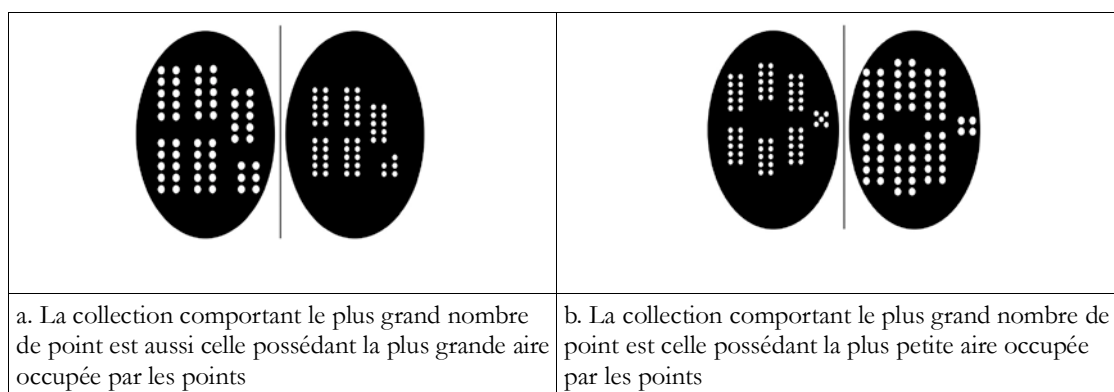


Figure 10 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 3 de l'étude 1 (Article 2)

Cette tâche respecte les règles 2, 3 et 4 (voir expérience 1). Elle respecte aussi intégralement la règle 1 : la quantité la plus grande est celle dont l'aire occupée (ou délimitée) par les points est la plus petite. Il est donc possible de s'assurer que les enfants sont sensibles à la numérosité et non à l'amplitude (surface occupée ou délimitée par les

points) des deux collections de points. Cette tâche est pour cette raison une tâche « fiable » de numérosité²².

Les résultats ont montré que l'hypothèse était vérifiée. Selon le test binomial, les enfants réussissent aisément et significativement ($M = 0,91, p < 0,0001$) même si la collection comportant le plus grand nombre de points est la collection possédant la plus petite aire occupée par les points.

3.4.3. L'étude 2 (Article 3)

Dans cette seconde étude, notre interrogation principale reste la même : comment les êtres humains accèdent-ils à une connaissance secondaire exacte des grands nombres alors qu'ils ne sont dotés que d'une connaissance primaire de ces derniers ? Notre « réponse » est aussi la même : la découverte des propriétés numériques des groupements configurés (« l'hypothèse des groupements configurés », cf. 2.4.) pourrait être l'une des étapes décisives de cette accession. Quel est alors l'apport de cette nouvelle étude ?

Dans l'expérience 1 de l'étude 1 (Article 2), il n'existe qu'une seule forme de collection organisée au moyen de groupements configurés et qu'une seule forme de collection non organisée au moyen de groupements configurés (Figure 8). Il serait intéressant de vérifier si l'on peut obtenir les mêmes résultats avec une plus grande variété de formes (Figure 11). Il existe pour cette raison deux façons d'organiser les points à l'aide de groupements configurés (Figure 11b et 11c) et deux manières de faire disparaître les groupements configurés (Figure 11a et 11e). Cette hypothèse est évaluée dans la première expérience de cette seconde étude.

Selon les propriétés numériques des groupements configurés, il devrait être plus facile de comparer deux groupements ayant la même configuration. Aussi, il serait intéressant de vérifier si les performances des enfants diminuent significativement lorsque les groupes n'ont pas la même configuration (Figure 11d). Cette hypothèse est aussi évaluée dans la première expérience de cette seconde étude.

²² Il resterait à contrôler la densité. Celle-ci est contrôlée dans l'expérience 3 de la seconde étude (Article 3)

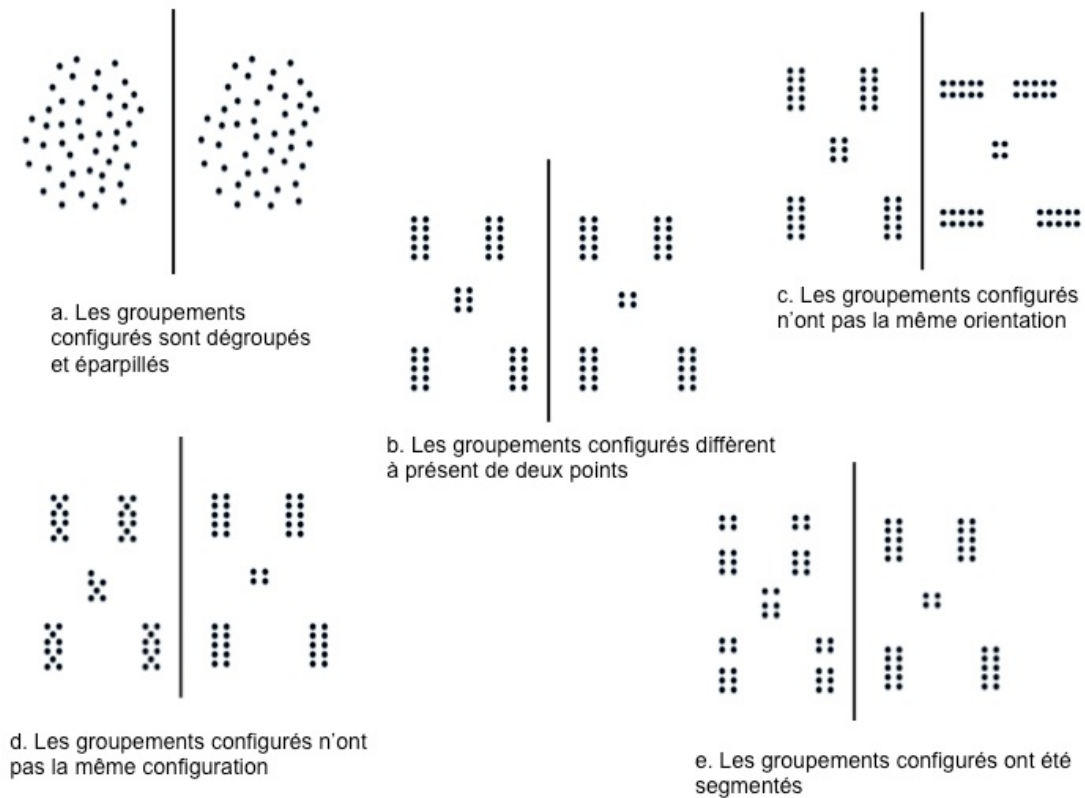


Figure 11 : Exemples d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'étude 2 (Article 3)

Dans l'étude 1 (Article 2) et dans la première expérience de l'étude 2 (Article 3), les participants sont en CE2. Ils ont appris le système décimal durant le CP et le CE1. Ils ont donc été habitués à représenter et à voir des collections d'objets organisées sous la forme de groupements configurés. Ils ont employé par exemple du matériel de numération comme les cubes emboîtables en barres de dix cubes (pour figurer les dizaines) et en plaques de 100 cubes (pour figurer les centaines). Ils pourraient donc avoir découvert les propriétés numériques des groupements configurés au cours de cet apprentissage. On leur aurait donc potentiellement appris explicitement ou implicitement à percevoir les propriétés numériques des groupements configurés. Ces propriétés ne seraient qu'un des éléments constituant l'apprentissage du système décimal. Leur rôle aurait donc été identifié depuis longtemps dans les différentes recherches conduites sur l'utilité du matériel de numération (ou de la représentation des nombres sous la forme de groupements d'objets) dans l'acquisition du système décimal (Vasilyeva et al., 2015 ; Fuson et al., 1997).

Notre hypothèse est au contraire que ces propriétés précèdent et soutiennent l'apprentissage du système décimal dans la mesure où elles permettent d'étendre sans

grande difficulté l'idée de numérosité exacte au domaine des grands nombres à l'aide de groupements. C'est en ce sens que ces propriétés pourraient être l'un des nouveaux maillons reliant la découverte de l'exactitude numérique et celle du système décimal. C'est en ce sens que ces mêmes propriétés pourraient être l'un des chaînons manquants conduisant des connaissances primaires aux connaissances secondaires dans le domaine des grands nombres (à l'école ou dans l'histoire de l'humanité).

C'est pourquoi il serait intéressant de vérifier si des enfants qui n'ont pas encore reçu d'enseignement du système décimal (des enfants de 5 ans issus de la dernière année de la maternelle) pourraient être capables d'utiliser les propriétés numériques des groupements configurés. Tel est l'objectif des expériences 2 et 3 de cette seconde étude.

Expérience 1. L'hypothèse est que des enfants de 8 ans ($N = 48$) scolarisés en CE2 peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($30 < n < 70$) ne différant que de deux points lorsque ces quantités sont organisées au moyen de groupements configurés (Figure 11b et 11c) et qu'ils ne peuvent pas comparer ces mêmes quantités en moins de 5 secondes lorsqu'elles ne le sont pas (Figure 11a et 11e). Il est aussi supposé que les performances de ces enfants devraient diminuer significativement lorsque les collections n'ont pas la même configuration (Figure 11d).

Cette tâche respecte les mêmes règles 2, 3 et 4 (Tableau IV) que l'expérience 1 de l'étude 1. La règle 1 (contrôler l'aire occupée ou délimitée par les points) de cette expérience est contrôlée indirectement par l'expérience 3 de cette seconde étude.

Les résultats ont montré que l'hypothèse principale était vérifiée. Selon le test binomial, les enfants réussissent aisément à comparer les points lorsque les collections sont organisées au moyen de groupements configurés de points ($M = 0,75$; $p < 0,0001$) et ils ne semblent pas y parvenir lorsque les points ne le sont pas ($M < 0,55$; $p > 0,17$).

Cependant, la seconde hypothèse n'a pas été vérifiée. Les performances diminuent lorsque les groupements configurés n'ont pas la même configuration ($M = 0,66$; $p < 0,001$; test binomial) mais cette baisse n'est pas significative selon le test non paramétrique de Friedman²³ ($p = 0,45$).

Expérience 2. L'hypothèse est que des enfants de 5 ans ($N = 58$) peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($18 < n < 26$) organisées au moyen de groupements configurés, même si l'aire occupée par les points de

²³ Ce test est l'équivalent de l'ANOVA dans le cas où les données ne respectent pas une loi normale.

la quantité la plus grande est plus petite que celle occupée par les points de la quantité la plus petite (Figure 12a).

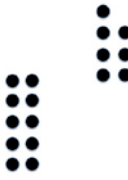
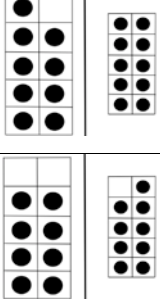
				
a. La collection comportant le plus grand nombre de points est celle possédant la plus petite aire occupée par les points	b. Exemple d'un item employé lors de la phase d'entraînement de l'expérience 2	c. Exemple de deux items utilisés lors de l'expérience annexe réalisée entre l'expérience 2 et l'expérience 3 de l'étude 2. Dans ces deux cas, les enfants échouent à désigner la quantité la plus grande.		

Figure 12 : Exemples d'items utilisés lors de l'expérience 2 de l'étude 2 (a, b) et dans une expérience annexe (c).

La tâche employée respecte les quatre règles d'élaboration d'une tâche de numérosité (Tableau IV). L'hypothèse n'a pas été cette fois vérifiée. Selon le test binomial, les enfants désignent la quantité composée des gros points (et non celle comportant le plus grand nombre de points) : $M = 37,93$; $p < 0,001$. Le plus étonnant est qu'ils n'y parviennent pas, même durant la phase d'entraînement, lorsque les quantités paraissent particulièrement simples à comparer (Figure 12b).

Ils n'y parviennent pas même lorsqu'on encadre ces quantités (Figure 12c) afin de faciliter la localisation du point manquant. Cette dernière expérience réalisée sur un petit groupe d'élèves de 5 ans ($N = 27$) n'a pas été intégrée à l'expérience 2, mais elle a été utile dans la mesure où elle a conduit à la recherche d'une autre configuration. Cette configuration « 5-5 » semble au final inaccessible aux enfants de cet âge. Elle exigerait peut-être trop de balayages visuels horizontaux et les enfants de 5 ans ne seraient pas encore capables d'en produire autant au regard de leur développement oculomoteur (Vurpillot, 1968).

Expérience 3. L'hypothèse est que des enfants de 5 ans ($N = 44$) peuvent comparer en moins de 5 secondes deux grandes quantités de points ($8 < n < 15$) organisées

au moyen de certains groupements configurés, même si l'aire occupée par les points de la quantité la plus grande est plus petite que celle occupée par les points de la quantité la plus petite.

La tâche utilisée respecte les quatre règles d'élaboration d'une tâche de numérosité (cf. expérience 3 de l'étude 1). La configuration employée est cette fois une configuration ovale non usuelle (Figure 7c). Elle nécessiterait moins de balayages horizontaux que la configuration « 5-5 ».

Les résultats ont montré que l'hypothèse était vérifiée. Selon le test binomial, les enfants réussissent aisément à comparer les points lorsque les collections sont organisées au moyen de groupements configurés ovales ($M = 0,81$; $p < 0,0001$).

Ces derniers résultats suggèrent que les propriétés numériques des groupements configurés ne résultent pas de l'enseignement du système décimal (cf. 2.4.2). Les propriétés numériques des groupements configurés précéderaient et rendraient possible la représentation de grandes quantités d'objets au moyen de groupements configurés plus usuels (les barres de dizaine, les configurations « 5-5 »). La découverte ou l'utilisation de ces propriétés serait un chaînon « oublié » reliant les connaissances primaires (approximatives et externes) aux connaissances secondaires (exactes et internes) à l'école ou dans l'Histoire.

Article 1

Comment évaluer la sensibilité à la numérosité ?

Une revue des différentes tâches

Cette thèse est une thèse par articles. Conformément aux normes de présentation de ce type de thèse, cet article est présenté tel qu'il a été soumis le 27 mars 2015 à la revue Psychologie Française. Il respecte pour cette raison les normes de soumission de cette revue.

Comment évaluer la sensibilité à la numérosité ?

Une revue des différentes tâches

How to evaluate the sensibility to numerosity?

A review of different tasks

Sébastien Miravète*, André Tricot et Franck Amadiou

Laboratoire CLLE-LTC, Université Toulouse-II, France

-Sébastien Miravète*, Doctorant en psychologie cognitive, CLLE-LTC (UMR 5263), Université de Toulouse Jean-Jaurès, 5 Allées A. Machado, 31058 Toulouse Cedex. Thèmes de recherche : psychologie des apprentissages, psychologie de l'éducation, cognition numérique

Contacts : téléphone : 06 98 82 61 77, mail : sebastien.miravete@gmail.com, adresse postale où faire parvenir les manuscrits : 20 avenue du Pic Du Midi, Spéhis, 31210, Clarac, France

-André Tricot, Professeur d'Université en psychologie cognitive, CLLE-LTC (UMR 5263), Université de Toulouse Jean-Jaurès, 5 Allées A. Machado, 31058 Toulouse Cedex. Thèmes de recherche : psychologie des apprentissages, documents numériques, ergonomie, théorie de la charge cognitive.

-Franck Amadiou, Maître de conférence en psychologie cognitive, CLLE-LTC (UMR 5263), Université de Toulouse Jean-Jaurès, 5 Allées A. Machado, 31058 Toulouse Cedex. Thèmes de recherche : Concept mapping, apprentissage avec technologies (hypertextes, animations, tablettes tactiles ...), TICE, lecture à l'écran.

Résumé : Les recherches en cognition numérique sont devenues un important champ d'investigation depuis une cinquantaine d'années. Elles vérifient si certaines espèces animales sont sensibles au nombre d'objets que comporte une collection et étudient de quelle manière cette sensibilité se déploie chez les êtres humains dans l'apprentissage des mathématiques. Cette revue de littérature a pour objectif d'analyser les différentes tâches employées en cognition numérique pour mesurer la sensibilité des participants au nombre d'objets. Nous voulons évaluer si ces tâches dites de « numérosité » permettent de prouver l'existence d'une sensibilité à la numérosité chez les êtres humains et les animaux. Il se pourrait en effet que ces tâches mesurent d'autres formes de sensibilité.

Mots-clefs : cognition numérique, numérosité, concept de nombre, compréhension du nombre

Resume: Numerical cognition research has become an important field of investigation for fifty years. It is studied whether certain species are sensitive to the number of objects contained in a collection (sensitivity to numerosity) and how this sensitivity is deployed by humans in mathematics' learning. This literature review aims to analyze different tasks used in numerical cognition to measure participants' sensitivity to numerosity. We want to verify whether these numerosity tasks prove existence of sensitivity to numerosity in humans and animals. Indeed, these tasks could measure other forms of sensitivities and do not show existence of numerical cognition. It was analysed all papers identified in Ebscohost database (*psycINFO, psycARTICLES, psycCRITIQUES, Psychology and Behavioral Sciences Collection*) for 12 years, with keywords "number comprehension" and "number concept". Five distinct objects of research were be delimited: subitizing, Approximate Number System (ANS), counting and language, number conservation and one-one correspondance, plurality. Nineteen types of numerosity task were be identified, described and classified in six

categories: comparison tasks, search tasks, semantic tasks, equinumerical tasks, counting tasks, approximate tasks. It was showed that these tasks do not respect at least one of four fundamental rules discovered by numerical cognition research. Indeed, different studies show that non numerical paramaters (area of objects, ...) or non numerical strategies (repeating last word spoken, using a new word after modification of collection's cardinality, ...) could explain success of participants in numerosity tasks. Moreover, other studies suggest that subitizing (sensitivity to small quantities) and ANS (sensitivity to large quantities) systems do not represent numerosity. For these innate systems, a number of objects is a set of individual objects (subitizing) or a continuous magnitude (ANS). Thus, with their subitizing and ANS systems, participants could success in numerosity tasks, even if they do not understand what is a number of objects. In resume, this review shows that numerical cognition researches have to control four potential interferences in numerosity tasks: non numerical paramaters (first rule), subitizing and its different extensions (second rule), ANS (third rule), pragmatical strategies (fourth rule). In conclusion, it is proposed an example of numerosity task which respects these four rules.

Keywords: numerical cognition, numerosity, number concept, number comprehension

1. Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre des recherches conduites en cognition numérique. Depuis les travaux de Piaget et Szeminska sur des enfants (1941) et de Moyer et Landauer sur des animaux (1967), les recherches expérimentales dans ce domaine n'ont en effet cessé de se développer et sont devenues aujourd'hui un important champ d'investigation (Fayol, 2012 ; Dehaene, 2010). Les êtres humains et certaines espèces animales se révèlent capables d'être

sensibles au *nombre* d'objets situés dans leur environnement. En d'autres termes, ils sont sensibles à la « numérosité ». Les chercheurs en cognition numérique essaient de déterminer les mécanismes cognitifs à l'origine de cette faculté. Dans une telle perspective, la sensibilité à la numérosité demeure la donnée la plus fondamentale et la plus importante à évaluer. Nous dirons que cette sensibilité se mesure à l'aide de « tâches de numérosité ». A l'aide de celles-ci, nous pouvons vérifier expérimentalement si telle ou telle catégorie de participants (rats, singes, poussins, bébés, jeunes enfants, ...) possède ou non une sensibilité à la numérosité.

Notre objectif est de procéder à un examen de toutes ces tâches. Nous souhaitons en particulier évaluer si celles-ci permettent effectivement de mesurer la sensibilité à la numérosité. Pour y parvenir, nous avons analysé tous les articles de psychologie recensés depuis 12 ans (2002-2014) dans la base de données *Ebscohost* (*psycINFO*, *psycARTICLES*, *psycCRITIQUES*, *Psychology and Behavioral Sciences Collection*) en recourant aux mots-clefs « *number comprehension* » et « *number concept* ». Nous avons d'abord identifié cinq objets d'études relativement distincts (Cf. Tableau I). Nous avons ensuite observé que certaines tâches servent de modèles pour l'élaboration d'autres tâches. Il n'existe pas une infinité de tâches absolument distinctes, mais des variations autour de tâches de référence (Cf. Tableau II). Nous avons ainsi réussi à mettre à jour les différentes formes de sensibilité à la numérosité étudiées par les chercheurs en cognition numériques et la façon dont ils les évaluent. En d'autres termes, nous avons recouru à ces deux classements (domaines de recherche en cognition numérique, types de tâches de numérosité) parce qu'ils nous offrent une image d'ensemble des recherches en cognition numérique. Ils révèlent en effet les objets et les méthodes caractéristiques de ces recherches. Mais quels sont plus précisément ces objets et ces méthodes ?

Selon Carey (2009), les recherches en cognition numérique semblent avoir découvert chez les êtres humains et chez certains animaux trois systèmes numériques innés : la subitisation, l'ANS (*Approximate Number System*) et la sensibilité à la pluralité.

Le premier permettrait de comparer, d'ajouter et de soustraire de petites quantités d'objets, inférieures ou à égales à 3 (ou 4). Le second nous conférerait le moyen de comparer approximativement des quantités strictement supérieures à 3 (ou 4) : l'ANS d'un adulte réussirait à distinguer 50 et 60 objets, mais non 50 et 52 objets. Le troisième nous donnerait la possibilité de faire la différence entre un objet et plusieurs objets, c'est-à-dire entre un objet et plus qu'un objet. Ajoutons que la subitisation, l'ANS et la sensibilité à la pluralité fonctionneraient dès le plus jeune âge (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009 ; Barner et al., 2007 ; Wynn, 1992b) et qu'ils précéderaient par conséquent tout apprentissage du comptage ou encore des mots servant à désigner des quantités (« trois », « sept », « vingt-quatre », ...). Ces systèmes numériques seraient en ce sens « préverbaux ».

Ces capacités numériques innées restent néanmoins limitées : la subitisation demeure cantonnée à des opérations sur 3 (ou 4) objets ; l'ANS quantifie approximativement et ne peut distinguer deux quantités proches ; la sensibilité à la pluralité ne différencie pas les quantités entre elles (pour elle, elles sont simplement des collections comportant plusieurs objets au lieu d'un seul). Aucune de ces capacités n'est par exemple en mesure de différencier 7 et 8 objets.

C'est pourquoi de multiples recherches tentent de comprendre de quelle manière un système cognitif acquiert une sensibilité au nombre d'objets plus fine ou plus étendue. Certaines études s'intéressent en particulier au rôle du langage : compréhension précoce des mots servant à désigner des quantités exactes (Slusser & Sarnecka 2011 ; Wynn, 1992a) ; utilité du comptage (Sarnecka & Wright, 2013 ; Frank et al., 2012). D'autres soulignent l'importance d'habiletés non verbales : disposition linéaire des nombres sur une droite

(Siegler & Booth, 2004), *chunking* (Rosenberg & Feigenson, 2013 ; Feigenson & Halberda, 2008), correspondance terme à terme (Franck, Everett, Fedorenko & Gibson, 2008).

Toutes ces études supposent toutefois que nous soyons en mesure d'évaluer si un enfant est sensible au caractère numérique d'une collection. Sinon, il s'avère impossible de déterminer dans quelles conditions un enfant le devient. En d'autres termes, nous devons disposer de tâches de numérosité susceptibles de mesurer si un enfant ou un adulte est sensible ou non au caractère numérique d'une collection. En l'absence de telles tâches, nous ne pouvons pas prouver expérimentalement que la cognition numérique existe. Les nativistes considèrent que la sensibilité à la numérosité est innée, les constructivistes soutiennent plutôt qu'elle est acquise (pour une revue de littérature, voir Izard, Streri & Spelke, 2014). Dans les deux cas, la sensibilité à la numérosité requiert d'être évaluée à l'aide de tâches de numérosité. C'est de cette façon que nous pouvons vérifier si la sensibilité à la numérosité est inscrite ou non dans notre patrimoine génétique. Quelles que soient les orientations théoriques, les tâches de numérosité restent par conséquent les plus indispensables et les plus décisives.

Nous trouvons depuis une dizaine d'années dans la littérature de multiples tâches censées évaluer si un individu est sensible ou non à la numérosité. Celles-ci varient essentiellement en fonction du domaine étudié (cf. Tableau I). Les premières proviennent des études de la subitisation et les deuxièmes de celles de l'ANS. Les troisièmes s'intéressent au rôle du comptage et du langage (des mots-nombres comme « six », « trois », ...). Les quatrièmes évaluent la capacité des individus à réaliser des correspondances terme à terme pour construire des collections égales ou pour considérer que deux quantités sont égales, même lorsque les éléments de la première occupent une surface plus grande que ceux de la seconde. Les cinquièmes essaient d'établir que des enfants sensibles à la pluralité sont déjà sensibles à la numérosité. (insérer par ici tableau I)

A partir de l'examen de ces cinq domaines de recherche, nous pouvons considérer qu'il existe six types de tâche de numérosité (cf. Tableau II) : tâche de comparaison, tâche de fouille, tâche sémantique, tâche équinumérique, tâche de comptage, tâche approximative. Cette classification se fonde sur l'observation de tâches récurrentes dans la littérature scientifique : une première étude propose une nouvelle forme de tâches de numérosité, puis d'autres la reprennent en y apportant des modifications. De cette façon, nous pouvons nous faire une idée relativement précise des différentes tâches de numérosité employées en cognition numérique depuis une dizaine d'années.

En résumé, dans une tâche de comparaison, il est proposé aux participants de comparer deux collections d'objets. De cette façon, on estime s'ils sont capables de choisir une collection en fonction du nombre d'objets qu'elle comporte.

Dans une tâche de fouille, on place des objets dans une boîte fermée. L'intérieur de la boîte est invisible. Mais l'expérimentateur et le participant peuvent glisser leurs mains à l'intérieur, à travers une fente. Dans un premier temps, l'expérimentateur et le participant retrouvent conjointement une partie des objets. Dans un second temps, on mesure si le participant continue ou non à chercher les objets restants. On devine ainsi s'il sait qu'il reste un certain nombre d'objets dans la boîte ou s'il croit que tous les objets ont été retrouvés.

Dans une tâche sémantique, on évalue la compréhension des mots servant à désigner des quantités (« six », « dix », ...). On présente aux participants une ou plusieurs collections d'objets et on lui demande par exemple : « Où sont les six tortues ? ». Le participant doit alors montrer la collection contenant les six tortues. On estime de cette façon s'il comprend la signification du mot « six ».

Dans une tâche équinumérique, le participant est invité à comparer ou à construire deux collections « équinumériques » (les deux collections sont égales et les éléments peuvent être mis en correspondance terme à terme). On mesure alors s'il comprend que le nombre

d'objets est le même dans les deux collections, ou s'il se révèle capable d'élaborer une collection comportant un nombre d'objets égal à une autre collection.

Dans une tâche de comptage, le participant compte une collection d'objets. On devine de cette manière s'il est en mesure de déterminer le nombre d'objets que comporte une collection ou de rapporter le nombre d'objets qu'on lui demande.

Enfin, dans une tâche approximative, le participant doit réaliser approximativement des estimations, des calculs et des positionnements de nombres sur une droite. On estime de cette manière s'il peut mobiliser spontanément son ANS, dans des tâches où il ne peut recourir à un comptage ou à une autre méthode de dénombrement. (insérer par ici tableau II)

Certaines de ces tâches de numérosité ont cependant suscité des critiques de la part de chercheurs en cognition numérique. Quatre de ces critiques paraissent essentielles.

Premièrement, Clearfield et Mix (1999) ont montré que l'aire totale des objets n'est pas contrôlée dans la tâche de comparaison surprenante proposée par Wynn (1992b) : on ne sait pas si les bébés sont sensibles au nombre d'objets ou à l'aire totale qu'ils occupent. En d'autres termes, le contrôle des paramètres non numériques se révèle insuffisant.

Deuxièmement, pour Feigenson (2005), la subitisation se contente en vérité de traquer chaque objet. Elle détecte ainsi si tel ou tel objet a disparu. Par exemple, un bébé ne se rend pas compte que deux objets sur trois ont disparu. Il piste individuellement chaque objet et remarque que cet objet et cet autre ont disparu. Les bébés sont donc moins sensibles à la numérosité qu'à l'individualité de chaque objet. Tout se passe comme s'ils détectaient la disparition de l'objet A et de l'objet B et non celle de 2 objets. Autrement dit, la sensibilité à l'individualité peut expliquer la réussite des bébés à la tâche de comparaison surprenante.

Troisièmement, pour Feigenson, Carey et Hauser (2002a), l'ANS ne se représente pas une multiplicité d'objets, mais une grandeur continue, semblable à un segment plus ou moins long. De cette façon, le système cognitif ignore qu'une quantité se compose de plusieurs

objets. Pour l'ANS, une quantité n'est constituée que d'un seul objet de taille variable. Pour le dire autrement, une augmentation numérique ressemble à ses yeux à l'étirement d'un élastique et non à l'ajout successif d'objets à une collection. Il ne serait donc pas sensible à la numérosité. L'ANS coderait toute quantité perçue sous la forme d'une grandeur continue. Il demeurerait pour cette raison capable de réagir à des variations numériques, mais incapable de se les représenter. Il n'aurait aucune sensibilité interne à la numérosité. Il ignorerait fondamentalement ce qu'est un nombre d'objets. Dès lors, les tâches approximatives, censées évaluer l'efficacité de l'ANS, ne pourraient constituer des tâches de numérosité.

Quatrièmement, la tâche de conservation initialement créée par Piaget et Szeminska (1941) a elle aussi suscité une importante critique. Rappelons que dans cette tâche, l'expérimentateur présente à un enfant de 4 ans deux quantités identiques, occupant la même surface, et leur demande quelle quantité contient le plus d'objets. Les enfants répondent que la première en comporte autant que la seconde. Puis, l'expérimentateur écarte, sous le regard de l'enfant, les objets de la première et agrandit ainsi la surface sur laquelle elle s'étale. Il repose ensuite la même question. La très grande majorité des enfants considèrent alors que la première quantité contient plus d'objets que l'autre. Ces enfants ne conserveraient donc pas le nombre : ils confondraient la différence numérique et la différence entre les aires délimitées par les objets. Cependant, McGarrigle et Donaldson (1974) se sont demandés si l'enfant n'utilisait pas tout simplement une stratégie que l'on pourrait qualifier de « pragmatique » : l'enfant supposerait qu'il s'est trompé la première fois où il a répondu, puisque l'expérimentateur lui repose la même question.

Ces quatre critiques consistent en résumé à souligner la nécessité de contrôler les paramètres non numériques, la sensibilité à l'individualité, la manière dont la quantité est codée et les stratégies pragmatiques. Notons toutefois que ces quatre critiques n'ont été formulées qu'à l'encontre de certaines tâches. Elles n'ont jamais été appliquées

systématiquement et simultanément à l'ensemble des recherches en cognition numérique. C'est pourquoi nous proposons de le faire. Nous voulons ainsi mettre en relief deux idées fondamentales pour ce domaine de recherche : (1) ces quatre critiques imposent respectivement quatre règles à respecter dans l'élaboration d'une tâche de numérosité (cf. Tableau III) ; (2) il n'existe pas pour le moment de tâche de numérosité susceptible d'échapper à l'une de ces critiques. (insérer par ici tableau III)

La première partie sera consacrée à la subitisation. Nous verrons que les recherches dans ce domaine nous invitent à contrôler les paramètres non numériques (cf. 2.1) et la sensibilité à l'individualité (cf. 2.2). Nous nous rendrons alors compte que la sensibilité à l'individualité peut expliquer la réussite aux tâches de subitisation.

Nous observerons dans une deuxième partie que les études sur l'ANS contrôlent en règle générale les paramètres non numériques (cf. 3.1). Mais elles n'éliminent pas la possibilité d'un codage non numérique de la quantité sous la forme d'une grandeur continue. L'analyse des modèles théoriques de l'ANS se révélera sur cette question particulièrement instructive (cf. 3.2). Nous constaterons aussi que les tâches de calcul et de positionnement de nombres sur une droite réalisables par l'ANS peuvent être réussies à l'aide d'un tel codage non numérique (cf. 3.3).

Dans une troisième partie, nous remarquerons que les systèmes cognitifs peuvent individualiser les objets au moyen d'un comptage (cf. 4.1) et de stratégies pragmatiques recourant à des correspondances terme à terme entre deux collections égales (cf. 4.2). De cette façon, des tâches peuvent être réussies en l'absence de tout codage numérique des quantités en présence.

Enfin, notre dernière partie abordera les études sur la sensibilité à la pluralité et montrera que celles-ci ne contrôlent jamais en même temps : la présence de paramètres non numériques (règle 1), l'éventuelle individualisation des objets (règle 2), le caractère

potentiellement non numérique du codage de la quantité (règle 3) et le recours possible à des stratégies pragmatiques non numériques (règle 4). En d'autres termes, les tâches utilisées dans ces études peuvent être réussies à l'aide de diverses stratégies non numériques. Cette dernière partie sera l'occasion de mobiliser simultanément les quatre règles énoncées dans les parties précédentes et d'illustrer la nécessité de respecter conjointement ces quatre règles.

2. La subitisation

2.1. Contrôler les paramètres non numériques

Des bébés peuvent-ils réaliser de petites opérations (ajouts, retraits) sur de petites quantités (inférieures ou égales à 3) ? Wynn (1992b) semble l'avoir démontré dans une expérience devenue célèbre. Une figurine est placée devant un bébé de 4 mois. Ce dernier l'observe durant un certain temps, puis un cache se dresse et la figurine disparaît derrière lui. Le bébé voit alors l'expérimentateur ajouter une seconde figurine derrière le cache. L'expérimentateur retire enfin le cache. Wynn constate que l'attention du bébé augmente significativement, lorsqu'il ne découvre qu'une seule figurine (tâche de comparaison surprenante). De même, il paraît surpris lorsque 3 figurines apparaissent. Il s'attend donc à n'observer que 2 figurines. Wynn en déduit que pour le bébé, « $1 + 1 = 2$ ».

Wynn ne contrôle pas cependant l'aire formée par la réunion des 3 figurines ou l'aire délimitée par celles-ci (cf. Figure 1). En effet, la différence entre 2 et 3 figurines ou entre 2 et 1 figurine n'est pas seulement de nature numérique. 3 figurines occupent une aire totale plus grande que 2 figurines (cf. Figure 1b). Aussi, nous pouvons nous demander si les bébés sont surpris de trouver plus ou moins d'objets que prévu ou de découvrir des aires plus ou moins importantes. Sont-ils sensibles au nombre d'objets ou aux aires que ces objets forment par

leur rassemblement (cf. Figure 1b) ou encore aux aires qu'ils délimitent (cf. Figure 1c) ?
(insérer par ici figure 1)

Lorsque l'on contrôle en effet l'aire totale, on se rend compte que les bébés cessent de réagir à la numérosité (Feigenson, Carey & Spelke, 2002b). On présente à des bébés âgés entre 10 et 12 mois, une suite d'images comportant toujours le même nombre d'objets (phase d'habituation) et on mesure en même temps leur attention (tâche de comparaison par habituation sur de petites quantités). Puis, on leur montre une nouvelle image dans laquelle le nombre d'objets varie. Comme prévu, les bébés réagissent immédiatement. Mais le plus intéressant est qu'ils ne réagissent plus quand l'image comporte un nombre différent d'objets, sans que l'aire totale de ces objets n'est changée - on rétrécit la taille des objets pour que deux objets occupent la même surface que trois objets. Si les bébés étaient sensibles à la numérosité, ils devraient réagir. En outre, ils réagissent lorsque le nombre est constant et l'aire totale variable. Les bébés paraissent donc moins sensibles au nombre d'objets, qu'à leur aire totale.

Il est vrai que nous ne pouvons pas vérifier si les bébés s'intéressent à l'aire totale des objets ou à la transformation de l'aire de chaque objet. En effet, pour présenter aux bébés deux collections comportant un nombre différent d'objets et une aire totale identique, les expérimentateurs doivent modifier la taille des objets. Aussi, les bébés pourraient être sensibles à l'augmentation de l'aire de chaque objet pris séparément et non à l'accroissement de l'aire totale des objets – ils seraient surpris que les objets grossissent.

Mais la question n'est pas de savoir si les bébés sont sensibles à l'aire totale. La tâche de Wynn (1992b) n'est pas une tâche de numérosité dans la mesure où elle ne contrôle pas la présence de paramètres non numériques (l'aire totale) dans son protocole. Cette absence de contrôle a permis à Feigenson et al. (2002b) de remettre en cause expérimentalement la thèse de Wynn selon laquelle les bébés seraient sensibles à la numérosité. Des expériences

antérieures sur des bébés de 6 à 8 mois, contrôlant cette fois l'aire délimitée par les objets présents, avaient conduit elles-aussi à rejeter l'hypothèse de Wynn (Clearfield & Mix, 1999, 2001). Dans une tâche de numérosité, les paramètres non numériques doivent par conséquent être rigoureusement contrôlés (Izard & Dehaene, 2008 ; Mix, Huttenlocher & Levine, 2002). Sinon, nous pourrions avoir l'illusion que les participants réagissent à la numérosité alors qu'ils réagissent en vérité à un autre paramètre non numérique (aire totale, aire délimitée, etc.). Toute tâche de numérosité doit donc respecter scrupuleusement cette règle : les paramètres non numériques doivent être contrôlés (Règle 1).

2.2. Renoncer aux tâches réalisables par une individualisation des objets

Nous venons de voir que les bébés sont capables de « subitiser » de petites quantités d'objets : ils parviennent à détecter la disparition ou l'apparition de 1, 2 ou 3 objets dans un ensemble composé d'1 à 3 objets. Nous allons montrer à présent que la subitisation n'a pas besoin pour fonctionner d'additionner ou de soustraire des objets, même dans les situations où les paramètres non numériques sont contrôlés. Cela va nous permettre d'en déduire que la subitisation n'est pas forcément un système numérique et que toute tâche réalisable par un acte de subitisation ne peut, pour cette raison, constituer une tâche de numérosité.

Dans une tâche d'habituation par comparaison sur de petites quantités, Feigenson (2005) a constaté que les bébés redevenaient sensibles à la numérosité d'un petit ensemble d'objets, lorsque ces derniers étaient en apparence suffisamment différents. Elle a donc mis à jour la condition selon laquelle les objets doivent visuellement différer les uns des autres pour être subitisés, dans une situation où les paramètres non numériques sont contrôlés. Or la découverte de cette condition ne l'a pas incitée à supposer que les bébés réagissaient au nombre d'objets, mais plutôt à la présence ou à la disparition de tel ou tel objet. Tout se passe

comme si les bébés pistaient chaque objet indépendamment des autres. Pour Feigenson (2011), les objets sont fichés. En d'autres termes, ils sont traités par le système cognitif comme étant des objets possédant des caractéristiques individuelles. Conformément à cette hypothèse, les bébés ne se rendraient donc pas compte qu'il manque 1 ou 2 objets au total, mais qu'il manque simplement tel objet, ou tel objet et tel autre objet. Tout se passe comme si le système cognitif faisait l'appel et constatait l'absence de telle ou telle personne : il n'aurait pas besoin dans ce cas de comptabiliser le nombre de personnes absentes.

Dans cette perspective, les bébés ne comparent donc pas des petites quantités entre elles. Pour ainsi dire, ils notent simplement la disparition ou l'apparition de A, de B, de C, de A et C, de B et A, etc. Ils traitent chaque objet comme s'ils étaient des individus distincts. Ils « individuent » chaque objet. Les objets ne leur apparaissent pas comme les éléments d'un même objet, mais comme plusieurs éléments. C'est pourquoi il ne suffit pas de contrôler les paramètres non numériques pour élaborer une tâche de numérosité. Il faut aussi que la tâche ne soit pas réalisable par une individualisation des objets présents.

Afin de contrôler les paramètres non numériques, Starkey, Gelman et Spelke (1990) ont eu l'idée de changer de modalité sensorielle au cours de leur expérience (tâche de comparaison par habituation sur de petites quantités). Ils habituent des bébés à percevoir une suite d'images comportant toujours le même nombre d'objets (2 ou 3). Puis, un disque noir immobile apparaît sur l'écran en même temps qu'une suite de sons. Cette suite comporte ou non autant de sons que d'objets présentés durant la phase précédente. On observe que les bébés fixent plus longtemps le disque, lorsque le nombre de sons et le nombre d'objets visuels sont les mêmes. Les auteurs en déduisent que les bébés sont sensibles à la numérosité. En effet, dans cette situation, les aires des objets visuels ne peuvent évidemment pas être comparées à la durée des sons : les paramètres non numériques sont ainsi contrôlés.

Il va donc de soi que dans ce protocole, les images et les sons diffèrent uniquement par leur nombre. Mais cette comparaison entre trois objets visuels et trois sons pourrait tout à fait s'expliquer au moyen d'une individuation. La possibilité de pouvoir associer chaque objet visuel à chaque son pourrait conduire le bébé à la conclusion suivante : chaque son est le son d'un objet ou si l'on préfère un son et un objet ne forment qu'un seul et même objet, qu'un seul et même « individu ». Chaque image se trouve associée à un son, comme lorsque nous associons l'image d'une personne qui frappe trois coups sur une porte et le son des trois coups. Dès lors, nous pouvons supposer que le bébé s'attend à voir trois objets au moment où il entend les trois sons. A la place, il ne perçoit qu'un disque noir, c'est-à-dire qu'un seul objet. Il est donc surpris. En revanche, lorsqu'il n'entend que deux sons, il n'a pas la possibilité d'associer à chaque son, le souvenir de chaque objet qu'il vient de voir. Il ne peut donc pas supposer que chaque son est le son d'un objet. Il ne peut pas individuer un son et un objet, en d'autres termes en faire les manifestations sensorielles d'une seule et même chose. Il n'a donc aucune raison d'être surpris par l'apparition du disque noir ou des deux sons qu'il assimile à de nouveaux objets, à de nouveaux individus.

Nous pouvons faire la même hypothèse dans l'étude de Feron, Gentaz et Streri (2006) où l'on remplace la modalité visuelle (les images) par une modalité tactile (des objets déposés dans la main du bébé) et la modalité sonore (les sons) par une modalité visuelle (des images). Le bébé se demande peut-être si les objets qu'il voit ne sont pas tout simplement ceux qu'on vient de lui déposer dans la main, car il peut associer à chaque information tactile une information visuelle (tâche de comparaison par habituation sur de petites quantités).

Pour le dire autrement : si dans deux situations immédiatement successives, le système cognitif peut associer à chaque élément de la première situation, un unique élément de la seconde sans en omettre un seul, alors les éléments associés peuvent former un individu, même si les éléments relèvent de modalités sensorielles distinctes (principe d'individuation).

Dès lors, si la tâche peut être réalisable en respectant ce principe, alors elle ne constitue pas une tâche de numérosité.

Kobayashi, Hiraki, Mugitani et Hasegawa (2004) font varier eux-aussi les modalités sensorielles (tâche de comparaison surprenante). Ils reprennent le protocole de Wynn (1992b) en remplaçant parfois une figurine par un son. Les bébés ne sont pas surpris lorsqu'ils ont vu une figurine, entendu un son, et découvert ensuite derrière le cache 2 figurines. En revanche ils sont surpris si 3 figurines apparaissent. A la suite de Wynn, les auteurs supposent que les bébés ajoutent les figurines et les sons entre eux et réalisent ainsi des opérations sur de petites quantités. Les bébés seraient donc sensibles à la numérosité. Mais une nouvelle fois nous pouvons simplement hypostasier que les bébés ont associé le son entendu à la figurine. Pour eux une figurine ou un son peuvent être les manifestations sensorielles d'une seule et même entité.

En effet, ils peuvent associer à chaque élément de la première situation, un seul élément de la seconde, sans en oublier un seul. Les deux situations sont équipotentes comme dans Starkey et al. (1990) et Feron et al. (2006). Elles respectent ce que nous venons de nommer « le principe d'individuation ». Les bébés peuvent en conclure que le son entendu dans la première situation n'est rien d'autre que celui qui correspond à la figurine de la situation suivante (en effet, le son est produit au moment où l'objet entre visuellement en contact avec son support). En définitive, le bébé est moins sensible à la numérosité qu'à la question de savoir si tel son est ou non le son de tel objet. Il est sensible à l'individualité des objets.

Du moins, nous pouvons le supposer afin de remettre en doute les conclusions de ces études. Les tâches proposées dans celles-ci contrôlent effectivement la présence de paramètres non numériques (voir aussi Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005). Mais elles ne contrôlent

pas pour ainsi dire « l'intention » du bébé. Celui-ci se soucie peut-être moins de la numérosité dans les situations proposées, que de l'individualité des objets en présence.

C'est pourquoi nous ne pouvons être certains que ces tâches réalisées dans diverses modalités sensorielles sur de petites quantités constituent des tâches de numérosité. En effet, elles ne respectent pas cette seconde règle tout aussi indispensable que la première : la tâche ne doit pas être réalisable uniquement par individualisation des éléments en présence (Règle 2).

Il est vrai que la subitisation peut optimiser ses capacités de stockage en groupant les objets (Feigenson & Halberda, 2008). On peut alors avoir l'impression que l'enfant réussit à se représenter des quantités supérieures à 3 sous la forme de 2 groupes de 2 groupes de 2 objets par exemple. Il saurait que : « $8 = (2 + 2) + (2 + 2)$ ».

Dans une tâche de fouille par « chunk », Rosenberg et Feigenson (2013) disposent 4 groupes de 2 balles devant une boîte (00 00 00 00). Dans une seconde condition, elles disposent 4 balles à gauche de la boîte en les groupant 2 à 2, et 4 balles à droite en les groupant de la même façon (00 00 | 00 00). Elles montrent à des bébés de 14 mois ces balles. Puis, elles les mettent dans une boîte fermée. Elles invitent alors le bébé à retrouver les balles. Elles extraient avec lui une partie ou la totalité des balles. Elles mesurent ensuite si lorsqu'il reste des balles dans la boîte, le bébé continue, tout seul, de les chercher. Elles comparent alors le temps mis par le bébé lorsque toutes les balles ont été extraites conjointement et lorsque seulement une partie des balles a été retrouvée. Elles évaluent ainsi si le bébé sait ou non qu'il reste encore des balles dans la boîte.

Elles observent alors que les bébés paraissent ignorer qu'il reste des balles lorsque les balles ont été organisées en 4 groupes de 2 (00 00 00 00). En revanche, ils semblent le savoir lorsque les balles ont été organisées en 2 groupes de 2 groupes de 2 (00 00 | 00 00). Ces résultats sont conformes aux limites de la subitisation. Dans la première condition, le bébé

doit mémoriser 4 objets (4 groupes de 2). Or, la subitisation est limitée à 3 objets. Il ne peut donc les mémoriser. En revanche, dans la seconde condition, il doit mémoriser seulement 2 objets et se souvenir que ces deux objets comportent 2 paires d'objets. « Chunker » les 4 groupes de 2 objets en 2 grands groupes de 2 paires d'objets améliore par conséquent les capacités de la subitisation. Les auteures n'en déduisent pas pour autant que les bébés sont sensibles à la numérosité. Ils peuvent tout simplement chercher le grand objet A puis le grand objet B, puis les paires A_1 et A_2 contenues dans A et les paires B_1 et B_2 contenues dans B, et enfin le premier et le second objet de chaque paire. Autrement dit, ils peuvent individualiser chaque grand objet, chaque paire, et chaque élément de chaque paire. Pour ces auteures, les bébés sont sensibles à l'individualité de ces objets et non à leur numérosité.

Dans une tâche de comparaison complexe, Rugani et al. (2009) contrôlent la sensibilité à l'individualité. Elles démontrent ainsi que des poussins de quelques jours réussissent à effectuer des opérations telles que « 4 objets – 2 objets » ou « 4 objets – 1 objet » alors que leur subitisation est limitée à 3 objets (Rugani, Regolin & Vallortigaga, 2008) et que leur ANS ne paraît pas pouvoir intervenir - les objets sont en effet présentés un par un et ajoutés ou retirés un par un et l'ANS des poussins ne paraît pas sensible à une présentation successive des objets (Rugani, Vallortigaga & Regolin, 2013a). Mais ces résultats semblent incohérents et mériteraient d'être répliqués : comment les poussins peuvent-ils être incapables de comparer 3 et 4 objets d'une part et d'autre part connaître le résultat exact d'opérations telles que « 4 – 2 » ou « 4 - 1 » ? En outre, Rugani et al. (2009) contrôlent l'aire totale lorsque 2 et 3 objets sont comparés, mais elles cessent de la contrôler lorsqu'elles font effectuer aux poussins des petites opérations. Les poussins pourraient par conséquent soustraire des aires et non des nombres d'objets.

3. L'ANS

3.1. Contrôler les paramètres non numériques

Les êtres humains possèdent un système inné : l'ANS. Celui-ci leur donne le moyen de comparer approximativement des quantités d'objets. Izard et al. (2009) présentent par exemple à des enfants âgés de deux jours, des séries de 4 ou 12 sons successifs et identiques - la durée totale de la série de 4 sons est identique à celle des 12 sons (tâche de comparaison par habitation sur de grandes quantités). Durant toute l'expérimentation, le nouveau-né n'entend soit que des séries de 4 sons, soit que des séries de 12 sons. Pendant la première étape, le nouveau-né perçoit des séries successives de sons et reste devant un écran noir. Lors de la seconde étape, l'écran s'allume. On lui montre alors des images qui contiennent le même nombre d'éléments que le nombre de sons, ou des images qui ne possèdent pas le même nombre d'éléments. Lorsque le nombre d'éléments et la quantité de sons diffèrent, le *ratio* est de 200% (4 sons pour 12 éléments, 4 éléments pour 12 sons, 6 sons pour 18 éléments, 6 éléments pour 18 sons) ou de 100% (4 sons pour 8 éléments, 8 éléments pour 4).

Les chercheurs constatent que les nouveau-nés fixent plus longuement les images qui contiennent approximativement ($\text{ratio} = 100\%$) le même nombre d'éléments que la série sonore. Les nouveau-nés réussissent donc à comparer des quantités, même lorsque ces dernières appartiennent à deux modalités sensorielles distinctes (son et image visuelle). Toutefois, le rapport entre les deux quantités ne doit pas être inférieur à trois. Les nouveau-nés paraissent pour cette raison sensibles au nombre d'objets que comportent les collections, et non à leur apparence. Ces résultats confirment le caractère inné et plurimodal de l'ANS. Ajoutons que de multiples animaux en dehors de l'être humain possèdent eux aussi cette faculté (Rugani, Cavazzana, Vallortigara & Regolin, 2013b ; Reznikova & Ryabko, 2011).

L'ANS ne semble pas être une capacité typiquement humaine, mais plutôt le fruit de l'évolution de diverses espèces.

Moyer et Landauer (1967) ont été les premiers à découvrir chez l'être humain l'existence de l'ANS. Ils ont proposé à des adultes de comparer deux nombres présentés sous la forme d'une écriture chiffrée (« 65 » et « 64 », ...) et ont mesuré les temps de réponse. Ils ont alors constaté que plus les nombres sont proches et plus le temps de réponse est long. Ils nomme ce fait « l'effet de distance » : comme pour les nouveau-nés, plus les nombres sont proches, plus ils sont difficiles à différencier. De plus, l'estimation de l'ANS est plus ou moins fine. Tous les ANS n'ont pas la même « acuité ». Autrement dit, le temps de réponse respecte une « loi de Weber » : le temps de réponse est le même lorsque le ratio entre deux nombres est identique. Les individus mettent autant de temps pour comparer « 20 » et « 40 » que pour comparer « 10 » et « 20 » ($\text{ratio} = (40-20)/20 = (20-10)/10 = 100\%$). De nombreux travaux ont depuis répliqué cette expérience avec succès (pour une revue de littérature, cf. Dehaene, 2007).

Pour mesurer l'évolution de l'acuité d'un ANS, on recourt le plus souvent au dispositif suivant (tâche de comparaison par approximation sur de grandes quantités) : sur un écran, on présente à des enfants ou à des adultes deux images (pour une revue de littérature sur cette tâche susceptible d'identifier l'acuité de l'ANS, voir Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004 ; Brannon, 2006). Les deux contiennent de multiples points et les points les moins nombreux sont toujours plus gros, afin que la somme des aires des points soit toujours la même des deux côtés de l'écran. Il est demandé aux participants de désigner le plus rapidement possible l'image qui contient le plus grand nombre de points. Les chercheurs observent que l'ANS opère très rapidement. Les points ne sont effectivement présentés que durant 200 ms. En outre, son acuité s'affine avec l'âge (Libertus & Brannon, 2009) et l'instruction (Pica, Dehaene, Lemer & Izard, 2004) : le *ratio* minimum pour distinguer deux collections diminue

avec le temps et l'enseignement. Toutefois, il ne s'annule jamais. Des adultes qui ont été scolarisés confondront encore 55 et 60 objets perçus (Piazza et al., 2010) : l'acuité de leur ANS avoisine les 15%.

Les études sur l'ANS sont multiples (Dehaene, 2010). Elles accordent une attention particulière aux contrôles de paramètres non numériques comme l'aire totale ou encore la luminosité (Izard et Dehaene, 2008 ; Dehaene, Izard et Piazza, 2005). Mais elles ne contrôlent pas l'aire délimitée lorsque la modalité est visuelle – ce paramètre a été contrôlé dans la modalité sonore par Lipton et Spelke (2003). Aussi nous ne savons pas encore si dans la modalité visuelle l'ANS est véritablement sensible ou non à la numérosité. En revanche comme nous l'avons vu, l'ANS semble sensible à la numérosité lorsque les modalités sensorielles diffèrent (Izard et al. 2009). Cependant, les modèles théoriques proposés dans la littérature, pour expliquer le fonctionnement de l'ANS, nous invitent à une toute autre conclusion. Dans ces modèles, l'ANS code en effet la quantité d'objets perçus, sous la forme d'une grandeur continue. Dans une telle perspective, nous pouvons donc douter qu'un système cognitif soit « sensible » à la numérosité. C'est ce que nous allons montrer à présent.

3.2. Renoncer aux tâches réalisables par l'ANS : les modèles théoriques de l'ANS

Dès 1983, Meck et Church ont proposé d'assimiler l'ANS à une machine analogique. Ce modèle théorique provient de la manière dont on conçoit l'activité d'un neurone. Les chercheurs ne comptabilisent pas le nombre de décharges produites par un neurone. Ils mesurent la fréquence de ses décharges. Plus un neurone est actif, plus son rythme de décharge s'accélère. L'important est moins de mesurer le nombre de décharges réalisées par le neurone que la vitesse à laquelle il les a générées. Le tempo de décharge augmente lorsqu'un

neurone s'active de plus en plus et diminue lorsqu'il ralentit son activité. Aussi, un neurone n'est pas un élément actif ou non actif, mais un élément *plus ou moins* actif.

Dans le modèle de Meck et Church, dont dérivent tous les autres modèles, plus le nombre d'objets augmente, plus un neurone accumulateur s'excite. Autrement dit, plus le nombre d'objets croît, plus la fréquence de ce neurone s'intensifie (fig. 3a). Or, la fréquence d'un neurone se comporte dans ces modèles à l'instar d'une variable continue. La croissance ou la décroissance d'une fréquence ne ressemble pas à l'ajout ou au retrait successif d'objets, à un ensemble d'objets. Elle s'apparente plutôt à un élastique que l'on étire plus ou moins. C'est pourquoi la plupart des auteurs représentent dans leur modèle la fréquence sous la forme d'un segment (fig. 3b) (Feigenson et al., 2002a) qui s'allonge ou d'une surface (fig. 3c) (Dehaene & Changeux, 1993, Leslie et al., 2008) qui s'étend plus ou moins. (insérer par ici figure 2)

Lorsque la fréquence de décharges du neurone accumulateur franchit un certain seuil, elle active le neurone du nombre qui correspond à ce seuil. Si la fréquence de décharge du neurone accumulateur pour 1 objet vaut par exemple 50, elle déclenche le neurone du nombre 2 lorsqu'elle atteint 100 (2×50), le neurone du nombre 3 lorsqu'elle atteint 150 (3×50), et ainsi de suite.

Toutefois, la fréquence de décharge du neurone accumulateur pour 1 objet n'est jamais constante. Elle oscille. Dans notre exemple, pour 1 objet, elle peut valoir entre 50 et 65. Aussi, pour 4 objets, elle peut valoir entre 200 et 265. Comme le seuil du neurone du nombre 5 est 250, 4 objets pourront déclencher aussi bien le neurone du nombre 4 que celui du nombre 5. Dans le cas de 7 objets, la fréquence oscille entre 350 et 455. Elle active donc aussi bien les neurones des nombres 7 (350), 8 (400) et 9 (450) – l'acuité de l'ANS est environ ici de 42% (adapté de Gallistel & Gelman, 2000).

Le fonctionnement de l'ANS reposerait par conséquent sur la coordination entre des neurones accumulateurs et des neurones du nombre - les neurones accumulateurs auraient été

observés dans la région LIP du cerveau et les neurones du nombre dans la région VIP (Nieder & Dehaene, 2009). Dans cette perspective, seuls les neurones accumulateurs sont véritablement responsables du caractère approximatif de l'ANS. En outre, ce sont eux qui varient en fonction de la quantité présente : plus le nombre d'objets s'accroît, plus la fréquence de ces neurones augmente. La quantité d'objets perçue serait donc codée dans notre système cognitif sous la forme d'une grandeur continue (la fréquence de décharge des neurones accumulateurs).

Tous les modèles théoriques supposent par conséquent que l'ANS se représente les quantités sous la forme de grandeurs continues. Autrement dit, pour l'ANS, un nombre d'objets n'est rien d'autre qu'une grandeur continue. A ses yeux, un nombre ne se compose pas de multiples éléments. Il n'est pas une somme d'unités ou un ensemble d'objets. Il est une grandeur dépourvue d'éléments semblable à un liquide. D'un point de vue théorique, l'ANS représente les nombres par des grandeurs non numériques.

Il est vrai qu'un nombre réel se représente géométriquement à l'aide d'une grandeur continue. C'est pourquoi Gallistel et Gelman (2000) considèrent que l'ANS représente les nombres d'objets par des nombres réels. Cependant, il ne faudrait pas confondre la grandeur et la mesure de cette grandeur. Représenter un nombre en géométrie ne consiste pas seulement à tracer un segment, mais à symboliser un rapport entre ce segment et le segment qui sert d'unité. Représenter le nombre 3 revient par exemple à tracer un segment dans lequel on peut reporter trois fois le segment servant d'unité de mesure. La représentation géométrique d'un nombre requiert par conséquent deux grandeurs continues : la grandeur mesurée et l'unité de mesure. L'ANS ne peut de toute évidence représenter un nombre au moyen d'une unique grandeur continue.

En d'autres termes, la fréquence de décharge d'un neurone accumulateur ne peut, à elle seule, représenter un nombre réel ou entier. Dans la mesure où elle n'est qu'une grandeur

continue, elle n'est pas un nombre. Or, pour comparer des nombres d'objets, l'ANS doit commencer par traduire ces nombres d'objets en une grandeur non numérique. Par conséquent, l'ANS ne sait pas ce qu'est un nombre d'objets. Il est sensible aux variations numériques, sans pour autant savoir ce qu'est une variation numérique. Pour opérer sur des variations numériques (ajout/retrait d'unités), il commence par les transformer en des variations de grandeurs continues (augmentation/diminution d'une fréquence de décharge). Par conséquent, toute tâche réalisable par l'ANS d'un individu ne peut garantir que cet individu comprend ce qu'est un nombre d'objets. Pour lui, un nombre d'éléments ne pourrait être qu'une grandeur continue dépourvue d'éléments. Les tâches que nous avons mentionnées pour prouver l'existence ou mesurer l'acuité de l'ANS ne sont donc pas des tâches de numérosité. Un individu pourrait en effet réussir ces tâches sans savoir ce qu'est un nombre d'objets. Nous devons donc ajouter cette troisième règle : la tâche ne doit pas être réalisable par l'ANS (Règle 3).

3.3. Calcul, dénombrement et positionnement

Certains auteurs proposent aux enfants de réaliser des tâches approximatives dans lesquelles des enfants de moins de 6 ans doivent réaliser des opérations sur de grandes quantités (tâche approximative de calcul ; Gilmore, McCarthy & Spelke, 2010 ; McCrink & Wynn, 2003) ou encore dans lesquelles les expérimentateurs les incitent à évaluer très rapidement un certain nombre d'objets (tâche approximative de dénombrement ; Le Corre & Carey, 2007). Conformément aux hypothèses de ces auteurs, les enfants recourent à l'ANS pour réaliser ces différentes tâches. Cependant, si ces expériences montrent que les mots-nombres peuvent être associés aux représentations de l'ANS afin de pouvoir réaliser certains calculs, elles ne démontrent pas toutefois que ces enfants sont sensibles à la numérosité. En

effet, l'ANS ne se représente pas les collections sous la forme de nombre d'objets, mais sous celle de grandeurs continues (cf. 3.2.). Les mots-nombres ne sont pas associés dans ce cas à des quantités, mais à des grandeurs continues (cf. Figure 2). Ces tâches ne respectent donc pas la règle 3 (la tâche ne doit pas être réalisable par l'ANS). C'est pourquoi elles ne sont pas des tâches de numérosité.

Pour la même raison, la tâche approximative de positionnement proposée par Siegler et Booth (2004) ne mesure pas la sensibilité à la numérosité. Ces auteurs demandent à des enfants âgés entre 5 et 8 ans de positionner sur une ligne non graduée comprise entre 0 et 100, des nombres présentés sous la forme d'écriture chiffrée (« 43 », « 57 », ...). On observe dans un premier temps que le placement des nombres respecte une loi logarithmique caractéristique de l'ANS : plus les nombres sont grands, plus ils se confondent, aussi le nombre 10 peut être placé au milieu de 0 et 100. Puis, au fur et à mesure de la scolarité, les auteurs constatent que ce placement s'affine et devient linéaire : chaque nombre est enfin placé à peu près au bon endroit. L'ANS semble s'être calibré (Izard & Dehaene, 2008). Cependant, calibré ou non, l'ANS ne produit en théorie que des représentations de grandeurs continues. « 57 » ne désigne théoriquement qu'une certaine longueur ou plus précisément qu'une certaine fréquence de décharge. Aussi, la tâche de positionnement ne nous assure en rien que ces enfants seraient plus ou moins sensibles à la numérosité en fonction de leur âge.

4. Comptage, conservation du nombre et correspondance terme à terme

4.1. Les tâches réalisables par un comptage

Pour vérifier si un enfant est sensible à la numérosité, on peut simplement lui demander de compter une collection d'objets (tâche de comptage « combien »). Toutefois,

rien ne nous garantit que la réponse de l'enfant désigne une quantité d'objets. L'enfant peut simplement associer à chaque objet, un mot de la file numérique verbale (« un », « deux », « trois », ...) et répéter machinalement le dernier mot qu'il prononce (Sarnecka & Carey, 2008 ; Fuson, 1988). Le résultat du comptage n'est alors pour lui qu'un mot dépourvu de signification ou un mot servant uniquement à désigner le dernier objet compté.

C'est pourquoi Wynn (1992) propose de demander plutôt aux enfants d'aller chercher n objets (tâche de comptage « donne- n »). Elle leur pose par exemple la question : « Peux-tu me rapporter huit voitures ? ». Si l'enfant ramène huit voitures, alors cela montre que le mot « huit » désigne pour lui les huit voitures. Cependant, comme le remarquent Davidson, Eng et Barner, (2012), l'enfant peut tout aussi bien se contenter de ramener tous les objets qui ont été pointés durant le comptage. A ses yeux, le mot « huit » désigne le dernier objet compté, comme le « un » le premier, le mot « deux » le deuxième, etc. Il ne rapporte donc pas huit fois une voiture, mais la première voiture, la seconde voiture, la troisième voiture, etc. Il nomme pour ainsi dire chaque objet et ramène machinalement tous les objets nommés.

Les tâches dans lesquelles les enfants peuvent compter, ne respectent donc pas la règle 2 (tâche non réalisable par une individualisation des objets, cf. 2.2.). On peut toujours considérer effectivement que la file numérique permet de personnifier momentanément chaque objet, de l'individualiser, comme nous pourrions le faire avec la suite des lettres de l'alphabet (« voici l'objet A, puis l'objet B, ... »). Par voie de conséquence, les enfants pourraient réussir ces tâches, sans comprendre que le résultat du comptage désigne un nombre d'objets.

Cette dernière hypothèse nous semble très importante dans la mesure où comme le rappelle Sarnecka et Wright (2013), la tâche de comptage donne- n (« Give- n task ») est de nos jours la plus utilisée pour évaluer la sensibilité à la numérosité des enfants. La corrélation

de cette tâche avec une tâche sémantique complexe a pour beaucoup contribué à cette situation.

Sarnecka et Carey (2008) montrent en effet que les enfants capables de rapporter n objets comprennent ce qu'elles appellent « le principe de succession ». Elles placent dans une boîte 4 petits tubes contenant des jouets identiques et s'assurent que les enfants ont retenu que la boîte contient « quatre » tubes (« Unit-task »). Puis elles ajoutent 1 ou 2 tubes et demandent alors à des enfants capables de ramener 6 objets : « Y en a-t-il à présent cinq ou six ? ». Elles observent que les enfants capables de ramener « six » objets ne répondent pas au hasard. Ils comprendraient au moins que passer du mot « quatre » au mot « cinq » revient à ajouter un objet et que passer du mot « cinq » au mot « six » revient à ajouter un objet supplémentaire. Ils auraient saisi le principe de succession : passer d'un mot de la file numérique au suivant revient à ajouter 1.

Cependant, nous pourrions tout à fait considérer que les enfants comptent ou surcomptent (au lieu de partir du premier objet, ils démarrent leur comptage à partir du quatrième). Certes, l'expérimentateur dit aux enfants de ne pas compter si ces derniers essaient de le faire. Mais rien ne nous assure qu'ils ne le font pas dans leur tête au moment même où les expérimentateurs ajoutent les bacs dans la boîte. Les enfants passent en effet l'épreuve six fois de suite – les deux premières servent en outre d'entraînement. Ils savent par conséquent qu'ils vont être interrogés sur la quantité d'objets que contient la boîte. Ils peuvent dès lors réussir la tâche sémantique complexe à l'aide d'un comptage. C'est pourquoi cette tâche sémantique ne respecte pas la règle 2, au même titre que la tâche de comptage « donne- n ».

Nous pouvons en outre faire cette hypothèse interprétative dans toutes les expériences recourant à des tâches sémantiques complexes dans lesquelles les enfants sont conduits à choisir entre deux mots-nombres, à la suite d'une opération d'ajout ou de retrait réalisée sur

une ou plusieurs collections d'objets (Brooks, Audet & Barner, 2012 ; Condry & Spelke, 2008 ; Sarnecka & Gelman, 2004) – nous exposerons plus loin ces autres tâches.

Pour la même raison, la seconde tâche sémantique complexe (« Direction-task ») proposée par Sarnecka et Carey (2008) n'est pas une tâche fiable de numérosité. Devant l'enfant, elles installent 5 petits ours sur une assiette, puis 5 petits ours sur une autre. Elles vérifient que chaque enfant a retenu que chaque assiette contient « cinq » ours. Elles retirent alors un ours à une assiette qu'elles transfèrent à l'autre. Elles disent ensuite à l'enfant : « A présent, une assiette contient quatre objets et l'autre six ». Elles lui demandent alors : « Quelle assiette en comporte six ? ». L'enfant a donc tout à fait le temps de surcompter : lorsqu'il voit l'expérimentateur ajouter un objet à l'assiette, il le désigne par le mot immédiatement supérieur à « cinq » dans la file numérique (à savoir « six »).

Dans d'autres protocoles (Slusser & Sarnecka, 2011 ; Levine et al., 2010 ; Wynn, 1992a), la sensibilité à la numérosité est évaluée à l'aide d'une tâche sémantique simple : on présente à l'enfant diverses collections et on lui demande de montrer celle qui contient le nombre d'objets indiqué à l'oral par l'expérimentateur (« montre-moi où se trouvent les sept tortues »). Il est vrai que parfois on interdit à l'enfant de compter (Slusser & Sarnecka, 2011). Mais on ne le contrôle pas. Rien ne nous assure par conséquent qu'il ne le fait pas mentalement. Ces tâches ne respectent donc pas la règle 2. Elles ne peuvent constituer des tâches de numérosité.

4.2. Les tâches de conservation et de correspondance

Dans une expérience célèbre, Piaget et Szeminska (1941) présentent une rangée de jetons à des enfants âgés de 4 à 5 ans (tâche équinumérique de conservation). Puis, ils placent à côté de celle-ci une autre rangée de jetons comportant le même nombre de jetons. Ajoutons

que les deux rangées sont parfaitement symétriques. Les auteurs font alors remarquer à l'enfant que les deux rangées possèdent la même quantité de jetons. Devant l'enfant, les auteurs écartent alors les jetons d'une des deux rangées et demandent à l'enfant si la rangée ainsi modifiée dispose toujours du même nombre de jetons. Ils observent que les enfants ne conservent pas la quantité : ils disent que la rangée modifiée comporte plus de jetons et maintiennent leur réponse même si on leur fait recompter les deux rangées (« il y a 7 jetons ici, 7 jetons là, mais moi je dis qu'il y en a quand même plus là »).

Certains auteurs ont considéré que dans la tâche de conservation l'enfant est induit en erreur par le questionnement de l'adulte et non parce qu'il serait incapable à cet âge de conserver la quantité. McGarrigle et Donaldson (1974) ont répliqué l'épreuve piagétienne en introduisant une nouvelle condition : dans la première situation, la rangée est modifiée par l'expérimentateur, dans la seconde, par un ours en peluche. Ils notent que 13 enfants conservent la quantité dans le premier cas, alors que 50 enfants le font dans le deuxième. Ils en déduisent que l'enfant recourt à ce que les chercheurs appellent aujourd'hui une « stratégie pragmatique » (Brooks et al., 2012). L'expérimentateur pose en effet à l'enfant deux fois la même question (« est-ce qu'il y a plus de jetons d'un côté que de l'autre ? »). L'enfant suppose peut-être qu'il s'est trompé la première fois, puisqu'on le réinterroge.

Cette hypothèse pragmatique de l'épreuve piagétienne a été l'objet d'une importante controverse (pour une revue de littérature, voir Vilette, 1996). Elle n'en demeure pas moins intéressante parce qu'elle révèle une nouvelle règle indispensable à la constitution d'une tâche de numérosité : la tâche ne doit pas être réalisable par une stratégie pragmatique ne nécessitant pas d'être sensible à la numérosité (règle 4). Ce biais induit par des stratégies pragmatiques ne concerne pas en effet que la tâche de conservation de Piaget. Les résultats obtenus respectivement par Sarnecka et Gelman (2004), Condry et Spelke (2008) et Brooks et al. (2012), pourraient tout à fait s'expliquer au moyen d'une stratégie pragmatique.

On place cinq voitures dans une boîte et on dit à un enfant âgé entre 2 et 4 ans : « regarde, je mets cinq voitures dans cette boîte » (tâche sémantique complexe). Puis, on ferme la boîte. On secoue alors la boîte ou on ajoute un élément. On interroge enfin l'enfant : « y a-t-il cinq ou six voitures dans cette boîte ? ». On constate que l'enfant répond « cinq » quand la boîte a été simplement secouée et « six » lorsque le nombre d'objets dans la boîte a été modifié – au préalable, on s'assure que les enfants ne savent pas compter jusqu'à 5 ou 6. Sarnecka et Gelman (2004) et Condry et Spelke (2008) en déduisent que les enfants savent que les mots-nombres « cinq » et « six » ne désignent pas la même quantité. Autrement dit, ils comprennent que chaque mot-nombre désigne spécifiquement telle quantité, avant même de savoir laquelle.

Toutefois, comme le remarquent Izard et al., (2014), les enfants pourraient tout aussi bien supposer qu'un mot ne désigne qu'une seule chose et que l'ajout d'un élément à une chose la transforme. Dès lors, puisque ce n'est plus la même chose, alors ce n'est plus le même mot qui la désigne. Certes, Sarnecka et Gelman (2004) observent que les enfants continuent à dire que la boîte contient 5 voitures, lorsqu'on se contente de la secouer. Cependant, secouer une boîte ne revient nullement à en modifier le contenu. L'addition d'un élément à un objet altère en revanche la composition même de l'objet (Brooks et al., 2012). L'enfant a alors l'impression que l'objet n'est plus le même : c'est pourquoi il choisit peut-être de lui conférer un nouveau nom (« six » au lieu de « cinq »).

La tâche équinumérique de conservation de Piaget ne soulève pas cette seule difficulté. Tout d'abord, elle ne respecte manifestement pas la règle 1. Piaget contrôle l'aire délimitée, mais non l'aire totale (cf. Figure 1). L'enfant pourrait n'être sensible qu'à la quantité de matière et non au nombre d'objets. C'est peut-être le cas dans l'expérience réalisée par Mehler et Bever en 1967 (tâche de comparaison simple) dans laquelle l'aire délimitée par 6 bonbons au chocolat est plus petite que celle délimitée par 4 bonbons. Il est

vrai que dans cette expérience les enfants choisissent les 6 bonbons, même si leur aire délimitée est plus petite. Les auteurs omettent cependant que l'aire totale des 6 bonbons est plus grande. Aussi, les enfants de 2 ans préfèrent-ils les 6 bonbons ou la possibilité de pouvoir ingérer plus de chocolat ? De même, lorsque des enfants réussissent la tâche équinumérique de conservation (De Neys, Lubin & Houdé, 2014 ; Piaget & Szeminska, 1941), préfèrent-ils le nombre d'objets à l'aire délimitée par les objets, ou leur aire totale à leur aire délimitée ?

La tâche équinumérique de conservation pose un autre problème : nous pouvons la réussir au moyen d'une correspondance terme à terme. Cette tâche n'est d'ailleurs pas la seule. Il existe de nombreuses expériences dans lesquelles on demande aux participants de réaliser des correspondances terme à terme entre deux collections égales ou de construire par ce moyen deux collections égales (Butterworth, Reeve, Reynolds & Lloyd, 2008 ; pour une revue de littérature, voir Izard et al., 2014). Mais toutes ces tâches équinumériques de correspondance ne respectent pas plus que la tâche équinumérique de conservation la règle 3. En effet, l'ANS peut tout à fait intervenir lorsque les quantités comparées sont égales. Il ne permet évidemment pas de faire correspondre à chaque objet un autre objet. Mais il peut produire une représentation de la quantité des deux collections sous la forme de deux grandeurs continues. L'égalité entre les deux collections n'est pas ici représentée sous la forme de deux quantités égales, mais sous celle de deux grandeurs continues égales. C'est pourquoi le succès à une tâche réalisable par une correspondance terme à terme n'est pas obligatoirement la manifestation d'une sensibilité à la numérosité.

Ces tâches équinumériques ne respectent pas enfin la règle 2. Premièrement, la tâche équinumérique de conservation est réalisable par un comptage. Deuxièmement, les tâches équinumériques de correspondance consistent à associer un élément à un autre. Tout se passe comme si l'on désignait ou nommait un objet par un autre. Dans une tâche de correspondance terme à terme, on fait simplement correspondre à chaque objet, un unique objet. De la même

manière, on peut donner une serviette à chaque invité, sans avoir à dénombrer le nombre d'invités.

En résumé, les tâches équinumériques ne peuvent constituer des tâches de numérosité car, dans celles-ci, les paramètres non numériques (règle 1), le codage des quantités (règle 3) et la sensibilité à l'individualité (règle 2) sont insuffisamment contrôlés.

5. La pluralité

Wynn (1992a) considère que les enfants savent relativement tôt que les mots-nombres (« trois », « cinq ») servent à désigner des quantités. Pour le prouver, elle pose à des enfants âgés de 2 à 3 ans la question suivante : « Peux-tu me montrer les quatre ballons ? » (tâche sémantique simple). L'enfant doit alors indiquer de quel côté d'une carte se trouvent les quatre ballons – un côté présente cinq ballons, l'autre quatre. Elle observe que des enfants, incapables de trouver les quatre ballons, réussissent toutefois lorsqu'on leur expose un ballon et quatre ballons.

Ces enfants savent donc au moins que le mot-nombre « quatre » désigne des objets et non un unique objet. Ils sont sensibles en ce sens à la pluralité. Ils comprennent la différence numérique entre un objet et plus qu'un objet. Cette sensibilité demeure incapable de différencier les quantités supérieures à un objet. Pour elle, toutes ces quantités sont les mêmes. Elles ont toutes pour propriété commune de comporter plusieurs objets et non un seul. Comme le souligne Carey (2009), cette sensibilité ignore le principe de succession. Elle sait que l'on obtient une quantité supérieure à un par l'ajout d'une unité. Mais elle ne sait pas qu'une addition répétée d'unités engendre à chaque fois une nouvelle quantité. Pour elle, toutes les quantités produites par le principe de succession sont identiques. Elle ne connaît donc pas la notion de quantité exacte, puisque cette dernière repose sur la possibilité de

différencier les quantités entre elles, par l'ajout ou le retrait d'un unique élément. Cette sensibilité à la pluralité n'en demeure pas moins une sensibilité à la numérosité, dans la mesure où elle comprend la différence numérique entre un objet et plus qu'un objet.

Toutefois, on peut s'interroger sur la présence de cette sensibilité chez le bébé.

Jusqu'à 20 mois, les bébés ne paraissent pas dotés de cette aptitude. Certes, ils se révèlent capables de comparer dans certaines conditions 1 et 3 objets (Feigenson, 2005) ou encore 16 et 32 objets (Lipton & Spelke, 2003). Mais ils ne réussissent pas pour autant à comparer 1 et 4 objets (Feigenson & Carey, 2005) ou encore 2 et 4 objets (Xu, 2003 ; Feigenson & Carey, 2003). Comment expliquer ce résultat étonnant ?

Tout d'abord, il doit exister deux systèmes distincts : la subitisation pour les quantités inférieures à 3 et l'ANS pour les quantités plus grandes (Feigenson et al., 2004 ; Xu, 2003). La subitisation assure la comparaison entre 1, 2 et 3 objets. L'ANS réalise quant à lui la comparaison entre des quantités supérieures ou égales à 4. Notons toutefois que l'ANS semble actif, même pour des quantités inférieures à 4, comme le dévoilent les techniques de neuro-imagerie (Izard, Dehaene-Lambertz & Dehaene, 2008) et de multiples études sur les animaux et les jeunes enfants (pour une revue de littérature, voir Rugani et al., 2013b). Par conséquent, deux hypothèses semblent s'imposer : (1) l'ANS de ces bébés réussit à comparer 1 et 4 objets, mais son résultat n'est pas pris en compte par le système cognitif (Izard, 2009) ; (2) L'ANS se représente les ensembles d'objets sous la forme de grandeurs continues (cf. Figure 2) et c'est pourquoi il ne peut distinguer 1 objet de plusieurs objets (Barner, Wood, Hauser & Carey, 2008 ; Feigenson & Carey, 2005) – cette hypothèse est par ailleurs conforme aux modèles théoriques de l'ANS (cf. 3.2.).

Soulignons que cette seconde hypothèse élimine définitivement de l'ANS toute sensibilité à la pluralité et donc à la numérosité. En outre, selon Feigenson et Carey (2005), la subitisation est sensible à l'individualité et non à la pluralité (cf. 2.2.). Aussi, dans cette

perspective, ni l'ANS, ni la subitisation, ne sont sensibles à la pluralité. La sensibilité à la pluralité et par voie de conséquence à la numérosité, émergerait plus tard.

La sensibilité à la pluralité apparaîtrait aux alentours de 22 mois chez des bébés anglophones (Barner et al., 2007). Ces derniers deviendraient alors capables de distinguer 1 et 4 objets. Devant un bébé d'environ une douzaine de mois par exemple, Feigenson et Carey (2005) disposent des balles dans une boîte fermée (la tâche de fouille ordinaire). Puis, elles autorisent le bébé à prendre une balle dans la boîte. Elles mesurent ensuite la durée prise par l'enfant pour retrouver les autres balles. Les enfants passent autant de temps à chercher 4 balles qu'une seule balle. En revanche, ils passent plus de temps à chercher 2 ou 3 balles. Cependant, des bébés de 22 et 24 mois passent plus de temps à chercher 4 balles qu'une unique balle (Barner et al., 2007). Les bébés américains deviendraient donc sensibles à la pluralité vers 22 mois.

Cette hypothèse paraît étayée par une autre étude réalisée à l'aide d'une tâche proche de celle utilisée par Wynn (Kouider, Halberda, Wood & Carey, 2006). On présente à des bébés de 20, 24 et 36 mois deux images. La première contient 1 objet alors que l'autre en contient 8 – l'aire totale est contrôlée (cf. Figure 1). Les bébés entendent alors des phrases. Celles-ci diffèrent au niveau des marques du pluriel : « look at the blicket » vs « look at the blickets ». On mesure alors si les bébés regardent l'image contenant plusieurs objets lorsqu'ils entendent des marques du pluriel (ici le « s » prononcé à la fin du mot) ou l'image contenant un seul objet lorsqu'ils n'en entendent pas. Les auteurs montrent que les bébés de 20 mois sont insensibles aux marques du pluriel, alors que les bébés plus âgés le sont. Ces résultats à cette tâche sémantique simple reproduisent donc bel et bien ceux obtenus à la tâche de fouille ordinaire.

Li et al. (2009) montrent toutefois que l'âge d'accession à la pluralité varie en fonction des nationalités. Ils font passer à des bébés japonais et chinois âgés entre 20 et 28 mois les

deux tâches que nous venons de décrire (la tâche de fouille et la tâche sémantique simple). Ils observent alors que les bébés japonais de 20 mois réussissent la tâche de fouille. Ils constatent surtout que les bébés chinois réussissent à la première, mais échouent à la seconde. Ils en déduisent que la sensibilité à la pluralité est une sensibilité non verbale. Selon eux, la sensibilité à la pluralité et à la numérosité précède la compréhension et l'acquisition d'un langage capable de désigner des nombres d'objets.

Cette hypothèse semble confirmée par la réussite de singes à une tâche de comparaison simple (Barner et al., 2008). On dépose devant un singe un certain nombre de pommes dans une boîte, puis on regarde si le singe se révèle capable de choisir la boîte contenant le plus grand nombre de pommes. Les singes réussissent à comparer 1 et 2 pommes et 1 et 5 pommes alors qu'ils ne parviennent pas à comparer 2 et 4 pommes ou encore 2 et 5 pommes. L'ANS des singes ne semble donc pas avoir réalisé ces différentes comparaisons : en effet le ratio entre 2 et 4 et entre 2 et 5 est égal ou supérieur à celui que l'on trouve entre 1 et 2. Si l'ANS avait comparé 1 et 2 pommes, il aurait dû pouvoir comparer 2 et 4 pommes ou encore 2 et 5 pommes. Nous pourrions croire aussi que la subitisation est à l'origine de la comparaison entre 1 et 5 pommes. Mais celle-ci paraît limitée à 4 objets chez les singes (Hauser, Carey & Hauser, 2000). Ces derniers réussissent en effet à comparer 2 et 4 pommes (et non 2 et 5 pommes) lorsque l'on veille à déposer les pommes une par une dans la boîte (et non toutes en même temps) : on facilite ainsi le fichage successif des objets. Dès lors nous pouvons nous demander de quelle manière les singes parviennent à comparer 1 et 5 pommes. Barner et al. (2008) supposent que les singes sont sensibles à la pluralité : ils comprennent la différence entre un et plus qu'un.

La sensibilité à la pluralité ne reposerait donc pas sur les seules capacités de l'ANS et de la subitisation. Soulignons en effet que la règle 2 (tâche irréalisable par individualisation, cf. 2.2.) est respectée dans ces études puisque l'expérimentateur propose des collections dont

les éléments ne sont pas « chunkés » (Feigenson & Halberda, 2004) et dont la cardinalité excède les capacités de la subitisation. La règle 3 (tâche irréalisable par l'ANS) est respectée, dans la mesure où l'on vérifie que l'ANS n'est pas actif en soumettant aux participants des comparaisons auxquelles ils échouent (2 et 5 pommes) et dont le ratio est pourtant supérieur à celui d'autres comparaisons auxquelles ils réussissent (1 et 2 pommes).

Les règles 2 et 3 paraissent donc respectées dans la plupart de ces différentes tâches susceptibles de détecter la sensibilité à la pluralité des singes et des bébés. Nous pouvons toutefois nous interroger sur le respect de la règle 1 (contrôle des paramètres non numériques). Dans ces tâches de fouille, dans ces tâches de comparaison simple, ou dans ces tâches sémantiques complexes, utilisées pour mesurer la sensibilité à la pluralité des participants, l'aire délimitée (cf. Figure 1) par les objets n'est jamais contrôlée. En outre, dans toutes ces études sur la pluralité, l'aire totale (cf. Figure 1) n'est contrôlée que par Feigenson et Carey (2003) dans une expérience démontrant que les bébés ne sont pas sensibles à la numérosité mais plutôt à l'individualité (cf. 2.2.). Pour le dire autrement, les règles 1, 2 et 3 ne sont pas jamais respectées simultanément. Il n'est donc pas évident que les bébés ou les singes aient une sensibilité à la pluralité. Ils pourraient n'être sensibles qu'à l'aire totale ou encore à l'aire délimitée par les objets.

Il est vrai que Slusser, Dita et Sarnecka (2013) ont eux aussi soumis pour la première fois à des enfants de 3 ans et demi une tâche sémantique simple respectant conjointement les règles 1, 2 et 3. Mais cette tâche ne respecte pas la règle 4. Les auteurs présentent en effet aux enfants un saladier rempli d'un liquide et un saladier rempli de 6 objets. Ils leur demandent alors : « Which cup has six ? » ou « Which cup has more ? ». Ils observent ensuite, en contrôlant les aires totales et délimitées par les objets, que les enfants choisissent le saladier contenant les objets lorsqu'ils entendent le mot-nombre « six ». A cet âge, cette tâche n'est certes pas réalisable par un comptage et l'ANS n'a pas encore pu conférer une signification au

mot « six » même sous la forme d'une grandeur continue. Les quantités sont quant à elles trop grandes pour être subitisées.

Cependant, nous pouvons tout à fait envisager que ces enfants savent que les mots-nombres servent à compter. Pour le dire simplement, ils ont associé les mots-nombres à l'activité de comptage. Ils choisissent par conséquent le saladier dans lequel un comptage est possible lorsqu'ils entendent le mot-nombre « six ». Rappelons que ce mot ne désigne pas nécessairement une quantité (cf. 4.1.). L'enfant pourrait par conséquent recourir à cette stratégie pragmatique. Il choisit tout simplement le saladier où il peut compter. Il opte au final pour une stratégie pragmatique et celle-ci mobilise uniquement une certaine sensibilité à l'individualité des objets (on peut compter sans être sensible à la numérosité, cf. 4.1). Il n'a donc pas besoin d'être sensible à la pluralité pour réussir la tâche proposée par ces auteurs. Il montre le saladier dans lequel il peut compter-nommer les objets avec un mot tel que « six ».

6. Conclusion

Nous venons de parcourir successivement les principaux domaines de recherche actuels en cognition numérique. Cet examen a été l'occasion de présenter les différentes tâches de numérosité utilisées depuis une dizaine d'années. A partir essentiellement des travaux de Clearfield et Mix (1999), nous avons relevé la nécessité de contrôler les paramètres non numériques, lorsque nous essayons de mesurer la sensibilité à la numérosité des participants. Les expériences de Feigenson (2005) nous ont rappelé la nécessité de contrôler la sensibilité à l'individualité. La nature du codage de la quantité par le système cognitif doit elle aussi être contrôlée, comme nous y incitent fortement les études de Barner et al. (2008) et de Feigenson et Carey (2005), ainsi que les analyses théoriques de l'ANS réalisées par Feigenson et al. (2002a). Enfin, les investigations expérimentales d'Izard et al.

(2014) et de McGarrigle et Donaldson (1974) nous ont contraint à nous méfier de la présence d'éventuelles stratégies pragmatiques. Ces différentes données empiriques et théoriques nous ont permis au final de mettre à jour 4 règles d'élaboration des tâches de numérosité (cf.

Tableau IV). (insérer par ici tableau IV)

Tel est le premier résultat de cette revue de littérature. Il est vrai que toutes ces règles ont déjà été énoncées séparément et sous d'autres formes dans tous ces travaux et dans d'importantes revues de littérature comme celles d'Izard (2009), de Carey (2009) ou encore de Mix et al. (2002). Cependant, ces règles n'avaient jamais été jusqu'à présent réunies dans une même revue de littérature. Au regard de la diversité des recherches en cognition numérique depuis dix ans, il nous semblait indispensable de les regrouper.

En effet, sans leur usage conjoint, nous pouvons toujours nous demander si telle ou telle tâche employée en cognition numérique mesure bel et bien la sensibilité à la numérosité. Rappelons que dans la première partie de ce travail, nous avons montré essentiellement que, chez les hommes et les animaux, la subitisation pourrait être sensible à l'individualité des objets en présence, et non à leur numérosité. Dans une seconde partie, nous avons vu que l'ANS des hommes et des animaux code les quantités sous la forme de grandeurs continues. Il ignore peut-être pour cette raison ce qu'est une multiplicité d'objets et par conséquent ce qu'est un nombre d'objets. Dans une troisième partie, nous avons constaté que le comptage pouvait étendre la sensibilité à l'individualité en nommant les objets comptés à l'aide des mots-nombres. De la même manière, les mises en correspondance dans les tâches équinumériques (conservation du nombre et construction de collections équipotentes) reviennent à indexer un objet par un autre et à étendre une nouvelle fois la sensibilité à l'individualité. Enfin, dans une quatrième partie, nous avons observé que la sensibilité à la pluralité ne pourrait être qu'une sensibilité à l'aire totale des objets ou la manifestation de stratégies pragmatiques.

Les êtres humains et les animaux disposent donc d'aptitudes numériques. Ils sont effectivement capables de réaliser de petites opérations exactes ou de grandes opérations approximatives. Ils peuvent élaborer des collections égales par correspondance terme à terme. Cependant, ces compétences ne s'accompagnent pas nécessairement de représentations numériques.

En d'autres termes, leur système cognitif possède manifestement des propriétés numériques *externes* dans la mesure où il est capable d'agir sur le nombre d'objets situés dans son environnement (et non uniquement sur leur aire totale ou leur volume global). En revanche, au regard des recherches conduites depuis dix ans, leur système cognitif ne paraît pas nécessairement coder la numérosité. Il ne se représente peut-être pas des nombres d'objets, mais simplement des individus ou des grandeurs continues. C'est pourquoi nous ne savons pas pour le moment si les êtres humains et les animaux disposent d'une sensibilité *interne* à la numérosité. Nous pouvons à ce titre douter de l'existence même d'un traitement véritablement numérique des quantités par les systèmes cognitifs humains ou animaux, c'est-à-dire de l'existence d'une cognition véritablement « numérique ».

Cette revue de littérature a été néanmoins l'occasion de mettre à jour quatre règles indispensables à la constitution de tâches de numérosité. A titre d'exemple, dans une tâche de comparaison, les quantités comparées pourraient avoir la même aire totale et délimitée (règle 1). Les quantités seraient supérieures aux limites de la subitisation (règle 2), leur ratio serait nettement inférieur à celui de l'ANS (règle 3) et la comparaison ne pourrait être réussie au moyen d'une stratégie pragmatique non numérique (règle 4). Nous pourrions demander dans cette approche à des enfants de 5 ans de désigner en moins de 5 secondes la quantité la plus importante en leur montrant 7 gros points et 8 petits points (règle 1). Dans une telle situation, leur subitisation et leur ANS seraient impuissants et ces enfants n'auraient pas le temps de compter (règle 2 et 3). Il suffirait d'organiser les quantités et de les rendre presque identiques

en apparence, afin que l'absence ou la présence d'un point supplémentaire soit aisément détectable. Comme l'enfant doit montrer la quantité la plus importante, il ne peut pas se contenter de montrer l'endroit où il manque ou non un point (règle 4). Il doit se servir de cette information (il manque un point) pour en déduire que l'autre collection en comporte un de plus, même si ses points sont moins gros.

Mais ceci n'est qu'un exemple et nous espérons que d'autres protocoles respectant les règles énoncées dans cette revue de littérature verront le jour. Il se pourrait en effet que l'application systématique et conjointe de ces quatre règles permette de confirmer, dans les années à venir, l'existence d'une cognition numérique, à un stade plus ou moins précoce.

7. Références bibliographiques

- Barner, D., Thalwitz, D., Wood, J., Yang, S-J, & Carey, S. (2007). On the relation between the acquisition of singular-plural morpho-syntax and the conceptual distinction between one and more than one. *Developmental Science*, 10(3), 365-373.
- Barner, D., Wood, J., Hauser, M., Carey, S. (2008). Evidence for a non- linguistic distinction between singular and plural sets in rhesus monkeys. *Cognition*, 107(2), 603–622.
- Brannon, E. M. (2006). The representation of numerical magnitude. *Current Opinion in Neurobiology*, 16(2), 222–229.
- Brooks, N., Audet, J., & Barner, D. (2012). Pragmatic inference, not semantic competence, guides 3-year-olds' interpretation of unknown number words. *Developmental Psychology*, 49, 1066-1075
- Butterworth, B., Reeve, R., Reynolds, F., & Lloyd, D. (2008). Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(35), 13179–13184.
- Carey, S. (2009). Where Our Number Concepts Come From. *The Journal of Philosophy*, 106(4), 220–254.
- Clearfield, M. W., & Mix, K. S. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, 10, 408 – 411.
- Condry, K. F., & Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology. General*, 137(1), 22–38.
- Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*. 123(1), 162-173.

- De Neys, W., Lubin, A., & Houdé O. (2014). The Smart Nonconservers: Preschoolers Detect Their Number Conservation Errors. *Child Development Research*, Article ID 768186, doi:10.1155/2014/768186.
- Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.
- Dehaene, S. & Changeux, J-P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Journal Cognitive Neuroscience*, 5, 390-407
- Dehaene, S., Izard, V., & Piazza, M. (2005). Control over non-numerical parameters in numerosity experiments. *Unpublished manuscript (available on www.unicog.org)*.
- Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Paris : PUF.
- Feigenson, L. (2005). A double-dissociation in infants' representations of object arrays. *Cognition*, 95(3), B37-B48
- Feigenson, L. (2011). Objects, sets, and ensembles. In S. Dehaene & E. Brannon (Eds.), *Space, Time, and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought*. London: Elsevier.
- Feigenson, L., & Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, 6, 568–584.
- Feigenson, L., Halberda, J. (2004). Infants chunk object arrays into sets of individuals. *Cognition*, 91, 173–190.
- Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97, 295-313.
- Feigenson, L. & Halberda, J. (2008). Conceptual knowledge increases infants' memory capacity. *PNAS*, 105(29), 9926-9930.
- Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002a). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13(2), 150–156.

- Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002b). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive Psychology*, 44(1), 33–66.
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.
- Féron, J., Gentaz, E., & Streri, A. (2006). Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-month-old infants. *Cognitive Development*, 21, 81–92.
- Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology: Evidence from Piraha language and cognition. *Cognition*, 108(3), 819–824.
- Frank, M. C., Fedorenko, E., Lai, P., Saxe, R., & Gibson, E. (2012). Verbal interference suppresses exact numerical representation. *Cognitive Psychology*, 64, 74-92.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.
- Gallistel, C.R., & Gelman, R. (2000). Non-verbal cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Science*, 4, 59-65.
- Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, 447, 589-59.
- Hauser, M. D., Carey, S., & Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semi-free-ranging rhesus monkeys. *Proceedings of the Royal Society: Biological Sciences*, 267, 829–833
- Izard, V. (2009). Le bébé et les nombres. *Annales de la Fondation Fyssen*, 23, 121-128.
- Izard, V. & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, 106, 1221-1247.
- Izard, V., Dehaene-Lambertz, G., & Dehaene, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS Biology*, 6(2), 275-285

- Izard, V., Sann, C., Spelke, E.S, & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *PNAS*, 106, 10382-10385.
- Izard, V., Streri, A., & Spelke, E.S. (2014). Toward Exact Number: Young Children Use One-to-one Correspondence to Measure Set Identity but not Numerical Equality. *Cognitive Psychology*, 72, 27-53.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, R., & Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: One object plus one tone. *Cognition*, 91, B23–B34.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., & Hasegawa, T. (2005) Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science*, 8(5), 409-419.
- Kouider S., Halberda J., Wood, J. & Carey, S. (2006). Acquisition of English number marking: The singular-plural distinction. *Language Learning and Development*, 2(1), 1–25.
- Le Corre, M. & Carrey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more : an investigation of the conceptual sources of the verbal counting system. *Cognition*, 105(2), 395-438.
- Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008).The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(6), 213–218
- Levine, S.C., Suriyakham, L., Rowe, M. & Huttenlocher, J. & Gunderson, E. A. (2011). What counts in the development of children’s number knowledge?. *Developmental Psychology*, 46(5), 1309-1313
- Li, P., Ogura, T., Barner, D., Yang, S., & Carey, S. (2009). Does the conceptual distinction between singular and plural sets depend on language? *Developmental Psychology*, 45, 1644-1653.
- Libertus M.E, & Brannon, E.M. (2009). Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental science*, 13(6), 900-906
- Lipton J.S., & Spelke E.S. (2003). Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 14(5), 396-401

- McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15, 776–781.
- McGarrigle, J., & Donaldson, M. (1974). Conservation accidents. *Cognition*, 3, 341-350
- Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology. Animal Behavior Processes*, 9, 320-334
- Melher, J. & Bever, T.G. (1967). Cognitive capacity of very young children. *Science*, 158, 141-142.
- Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215, 1519-1520.
- Nieder, A. & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208.
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1941). La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*. 116(1), 33-41
- Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group. *Science*, 306, 499-503
- Reznikova, Z. & Ryabko, B. (2011). Numerical competence in animals, with an insight from ants. *Behaviour*, 148(4), 405-434
- Rosenberg, R.D. & Feigenson, L. (2013). Infants hierarchically organize memory representations. *Developmental Science*, 16(4), 610-621.

- Rugani R., Regolin, L. & Vallortigara, G. (2008). Discrimination of small numerosities in young chicks. *Journal of Experimental Psychology. Animal Behavior Processes* 34(3), 388–399
- Rugani, R., Fontanari, L., Simoni, E., Regolin, L., Vallortigara, G. (2009). Arithmetic in newborn chicks. *Proceedings - Royal Society. Biological Sciences*, 276, 2451-2460
- Rugani, R., Vallortigara, G., & Regolin, L. (2013a). Numerical Abstraction in Young Domestic Chicks (*Gallus gallus*). *PLoS ONE*, 8(6), e65262.
- Rugani R., Cavazzana A., Vallortigara G., and Regolin L. (2013b). One, two, three, four, or is there something more? Numerical discrimination in day-old domestic chicks. *Animal Cognition*, 16 (4), 557-564.
- Sarnecka, B. W., & Gelman, S. (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, 92(3), 329–352.
- Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662–674.
- Sarnecka, B.W., & Wright, C.E. (2013). The idea of an exact number: Children's understanding of cardinality and equinumerosity. *Cognitive Science*, 37(8), 1493–1506.
- Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428-444.
- Slusser, E. & Sarnecka, B. W. (2011). Find the picture of eight turtles: A link between children's counting and their knowledge of number-word semantics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 110, 38-51.
- Slusser, E., Ditta, A., & Sarnecka, B. W. (2013). Connecting numbers to discrete quantification: A step in the child's construction of integer concepts. *Cognition*, 129, 31-41
- Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, 36, 97–127

- Verguts, T. & Vias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: a neural mode. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9), 1493-504.
- Vilette, B. (1996). *Le développement de la quantification chez l'enfant*. Villeneuve-d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion
- Wynn, K. (1992a). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive psychology*, 24, 220-251.
- Wynn, K. (1992b). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-750.
- Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, 89, B15-B25

8. Tableaux

8.1 tableau I

Tableau V : Classement des tâches de numérosité en fonction du domaine étudié.

Domaines étudiés	Tâches de numérosité
Subitisation	Les tâches de comparaison surprenante (Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005 ; Kobayashi, Hiraki, Mugitani & Hasegawa, 2004 ; Wynn, 1992b) ; les tâches de comparaison par habitude sur de petites quantités (Feron, Gentaz & Streri, 2006 ; Clearfield & Mix, 2002, 1999 ; Feigenson, Carey & Spelke, 2002 ; Starkey, Gelman & Spelke, 1990) ; les tâches de fouille par chunk (Rosenberg & Feigenson, 2013 ; Feigenson & Halberda, 2008) ; les tâches de comparaison simple (Turati, Gava, Valenza & Ghirardi, 2013) ; les tâches de comparaison complexe (Rugani, Fontanari, Simoni, Regolin, & Vallortigara, 2009)
ANS	les tâches de comparaison par habitude sur de grandes quantités (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009) ; les tâches de comparaison rapide (Brannon, 2006 ; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004) ; les tâches approximatives de calcul (Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010 ; McCrink & Wynn, 2003) et de dénombrement (Le Corre & Carey, 2007) ; les tâches approximatives de positionnement (Siegler & Booth, 2004)
Comptage et langage	les tâches de comptage « combien » (Wynn, 1992a ; Gelman & Gallistel, 1978) ; les tâches de comptage « donne- <i>n</i> » (Sarnecka & Carey, 2008 ; Wynn, 1992a) ; les tâches sémantiques complexes (Brooks, Audet & Barner, 2012 ; Sarnecka & Carey, 2008 ; Condry & Spelke, 2008 ; Sarnecka & Gelman, 2004) ; les tâches sémantiques simples (Slusser & Sarnecka, 2011 ; Levine, Suriyakham, Rowe, Huttenlocher & Gunderson, 2010 ; Wynn, 1992a)
Conservation du nombre et correspondances	les tâches équinumériques de conservation (De Neys, Lubin & Houdé, 2014 ; Piaget & Szeminska, 1941) ; les tâches équinumériques de correspondance (Butterworth, Reeve, Reynolds & Lloyd, 2008 ; Franck, Everett, Fedorenko & Gibson, 2008) ; les tâches de comparaison simple (Mehler & Bever, 1967) ; les tâches de fouille par correspondance terme à terme (Izard et al., 2014)
Pluralité	les tâches sémantiques simples (Slusser, Dita & Sarnecka, 2013 ; Wynn, 1992a) ; les tâches de fouille ordinaire (Feigenson & Carey, 2005 ; Feigenson & Carey, 2003) ; les tâches de comparaison par habitude sur des quantités intermédiaires (Xu, 2003) ; les tâches sémantiques simples (Li, Ogura, Barner, Yang & Carey, 2009 ; Kouider, Halberda, Wood & Carey, 2006) ; les tâches de comparaison simple (Barner, Wood, Hauser & Carey, 2008)

Pour chaque tâche, nous avons mentionné quelques études recourant exemplairement et emblématiquement à celles-ci. Le contenu de toutes ces tâches est présenté dans ce travail en respectant cet ordre. En outre, les domaines étudiés sont également présentés dans cet ordre.

8.2 Tableau II

Tableau VI : Les différents types et sous-types de tâches de numérosité.

Types de tâche	Sous-types de tâche	Description	Références
Tâche de comparaison	Tâche de comparaison rapide	Les participants doivent comparer très rapidement (200 ms) deux collections	Brannon, 2006 ; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004
	Tâche de comparaison simple	Les participants doivent comparer deux collections sans autre contrainte particulière	Turati, Gava, Valenza & Ghirardi, 2013 ; Barner, Wood, Hauser & Carey, 2008 ; Mehler & Bever, 1967
	Tâche de comparaison complexe	Les participants doivent se souvenir et comparer deux collections subissant des modifications (ajouts ou retrats)	Rugani, Regolin, & Vallortigaga, 2008 ;
	Tâche de comparaison par habitation sur de petites quantités	Les participants sont habitués à percevoir une suite d'images comportant toujours le même petit nombre d'objets (≤ 3) jusqu'à être exposés à une image comportant un nouveau nombre d'objets	Feron, Gentaz & Streri, 2006 ; Clearfield & Mix, 2002, 1999 ; Feigenson, Carey, & Spelke, 2002 ; Starkey, Gelman & Spelke, 1990
	Tâche de comparaison par habitation sur de grandes quantités	Comme précédemment. Le nombre d'objets est cette fois strictement supérieur à 3.	Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009 ;
	Tâche de comparaison par habitation sur des quantités intermédiaires	Comme précédemment. Si le nombre d'objets dans la phase d'habitation est inférieur ou égal à 3, il est strictement supérieur à 3 dans la phase de test, et inversement.	Xu, 2003
	Tâche de comparaison surprenante	Les participants perçoivent une première collection d'objets. Puis cette collection est dissimulée derrière un cache. A la vue des participants, des objets sont ajoutés ou retirés. Le cache est enfin retiré. Les participants sont surpris ou non par le nombre d'objets qu'ils perçoivent.	Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005 ; Kobayashi, Hiraki, Mugitani & Hasegawa, 2004 ; Wynn, 1992b
Tâche de fouille	Tâche de fouille ordinaire	Les participants perçoivent une collection d'objets. Puis celle-ci est mise dans une boîte fermée dans laquelle on peut glisser les mains. L'expérimentateur fouille avec le participant la boîte et retire une partie des objets qui viennent d'y être mis. On mesure si le	Feigenson & Carey, 2005 ; Feigenson & Carey, 2003

		participant cherche les objets restant dans celle-ci.	
	Tâche de fouille par chunk	Comme précédemment. La collection initialement montrée aux participants est décomposée (« chunkée ») en petits groupes de 2 ou 3 objets.	Rosenberg & Feigenson, 2013 ; Feigenson & Halberda, 2008
	Tâche de fouille par correspondance terme à terme	Comme précédemment. Les éléments de la collection sont disposés sur des supports dont le nombre peut être supérieur à ceux des éléments. Chaque élément peut ainsi être mis en correspondance terme à terme avec un support.	Izard et al., 2014
Tâche sémantique	Tâche sémantique simple	On demande au participant : « Quelle image contient les cinq objets ? ». Le participant doit montrer du doigt la bonne image. On s'assure ainsi s'il comprend le mot « cinq ».	Slusser, Dita & Sarnecka, 2013 ; Slusser & Sarnecka, 2011 ; Levine, Suriyakham, Rowe, Huttenlocher & Gunderson, 2010 ; Wynn, 1992a ; Li, Ogura, Barner, Yang & Carey, 2009 ; Kouider, Halberda, Wood & Carey, 2006
	Tâche sémantique complexe	On précise au participant le nombre n d'objets que comporte une collection, ou deux collections égales. Puis on ajoute ou retire des objets. En fonction des protocoles, on lui demande alors si cette collection contient « n » ou « $n+1$ » objets, « $n + 1$ » ou « $n + 2$ » objets, etc.	Brooks, Audet & Barner, 2012 ; Sarnecka & Carey, 2008 ; Condry & Spelke, 2008 ; Sarnecka & Gelman, 2004
Tâche équinumérique	Tâche équinumérique de conservation	Deux rangées d'objets parfaitement identiques sont disposées l'une à côté de l'autre. On fait remarquer au participant que les deux rangées comportent le même nombre d'objets. Puis, on agrandit la longueur de l'une des rangées en déplaçant une partie des objets. On vérifie alors si le participant comprend que le nombre d'objets dans la rangée modifiée n'a pas changé, même si sa longueur a été agrandie.	De Neys, Lubin & Houdé, 2014 ; Piaget & Szeminska, 1941
	Tâche équinumérique de correspondance	On demande aux participants de construire une collection comportant un nombre d'objets identique à une autre collection.	Butterworth, Reeve, Reynolds & Lloyd,

		Les objets de cette dernière peuvent être présentés de différentes façons (horizontalement, verticalement, l'un après l'autre, etc.).	2008
Tâche de comptage	Tâche de comptage « combien »	On demande au participant : « Combien y a-t-il d'objets ? ». Le participant doit alors compter les objets et donner le résultat.	Wynn, 1992a ; Gelman & Gallistel, 1978
	Tâche de comptage « donne- n »	On demande au participant d'aller chercher n objets. Le participant doit alors compter les objets pour pouvoir rapporter le nombre exact d'objets.	Sarnecka & Carey, 2008 ; Wynn, 1992a
Tâche approximative	Tâche approximative de dénombrement	On demande aux participants d'évaluer rapidement le nombre d'objets que comporte une collection (ils n'ont pas le temps de compter).	Le Corre & Carey, 2007
	Tâche approximative de calcul	On propose des calculs mentaux sur de grandes quantités à des participants incapables de les réaliser. On vérifie alors si leurs résultats approximatifs respectent ou non telle ou telle loi.	Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010 ; McCrink & Wynn, 2003
	Tâche approximative de positionnement	On demande aux participants d'indiquer sur une ligne non graduée allant de 0 à 100 (ou à 10) où se trouve tel ou tel nombre. On vérifie alors si leurs positionnements approximatifs respectent ou non telle ou telle loi.	Siegler & Booth, 2004

Pour chaque tâche, nous avons mentionné quelques études recourant exemplairement ou emblématiquement à celles-ci.

8.3. Tableau III

Tableau VII : Résumé des quatre règles d'élaboration d'une tâche de numérosité

Les règles d'élaboration d'une tâche de numérosité
Règle 1 : contrôler les paramètres non numériques
Règle 2 : contrôler la sensibilité à l'individualité
Règle 3 : contrôler le codage de la quantité
Règle 4 : contrôler les stratégies pragmatiques

Chaque règle sera précisée et reformulée dans chacune des parties mentionnées. La formulation définitive de ces règles sera résumée en conclusion.

8.4. Tableau IV

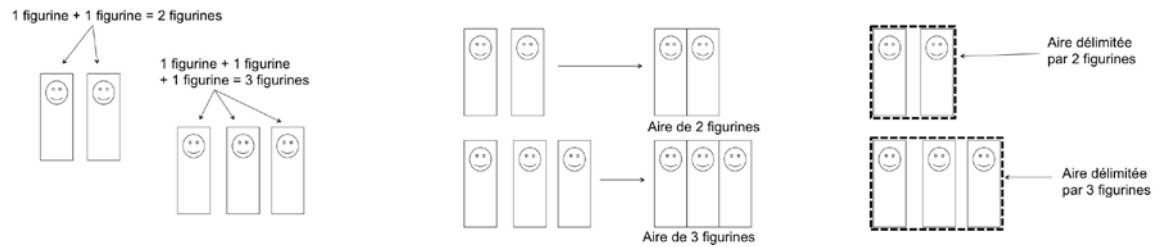
Tableau VIII : Les 4 règles méthodologiques indispensables pour constituer actuellement une tâche de numérosité

Règles d'élaboration d'une tâche de numérosité
Règle 1 : Les paramètres non numériques doivent être contrôlés.
Règle 2 : La tâche ne doit pas être réalisable par individualisation des objets en présence.
Règle 3 : La tâche ne doit pas être réalisable par l'ANS.
Règle 4 : La tâche ne doit pas être réalisable par une stratégie pragmatique ne nécessitant pas d'être sensible à la numérosité.

9. Figures

9.1 Figure 1

Exemple de présentation



1a. Les figurines diffèrent par leur nombre

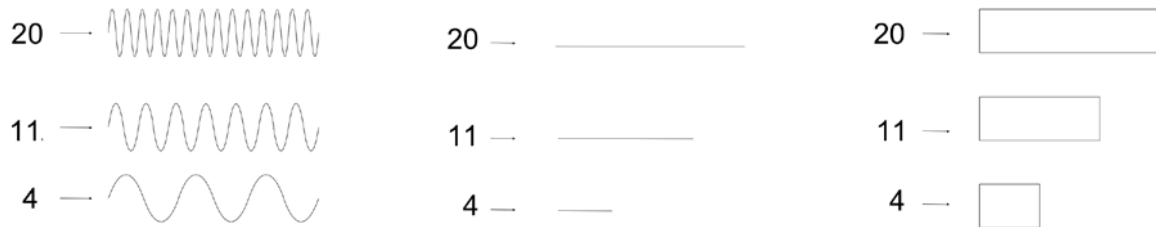
1b. Les figurines diffèrent par l'aire totale
qu'elles occupent lorsqu'on les rassemble

1c. Les figurines diffèrent par l'aire qu'elles
délimitent

Figure 1 : les deux figurines diffèrent des trois figurines par un paramètre numérique (leur nombre) mais aussi par des paramètres non numériques (aire totale, aire délimitée)

9.2. Figure 2

Exemple de présentation



2a. La grandeur qui sert à symboliser les quantités au sein du système cognitif est la fréquence de décharge d'un neurone. Plus le nombre augmente (4, 11, 20), plus la fréquence croît (adapté de Meck & Church, 1983).

2b. On représente la valeur de la fréquence de décharge par un segment qui s'allonge ou se rétrécit. (adapté de Feigenson, Carey, Hauser, 2002)

2c. On représente la valeur de la fréquence de décharge par une surface qui augmente ou diminue. (adapté de Dehaene, 1992, Gallistel & Gelman, 2000).

Figure 2 : Un nombre désigne une grandeur qui s'étend plus ou moins et plus précisément l'augmentation ou la diminution de la fréquence de décharge d'un neurone dit "accumulateur" (Meck & Church, 1983 ; Verguts & Fias, 2004, Leslie et al., 2008 ; Nieder & Dehaene, 2009).

9.3 Légendes des figures

9.3.1. Légendes des figures 1, 1a, 1b, 1c (cf. 9.1 pour un exemple de présentation)

Figure 1 : les deux figurines diffèrent des trois figurines par un paramètre numérique (leur nombre) mais aussi par des paramètres non numériques (aire totale, aire délimitée)

1a. Les figurines diffèrent par leur nombre

1b. Les figurines diffèrent par l'aire totale qu'elles occupent lorsqu'on les rassemble

1c. Les figurines diffèrent par l'aire qu'elles délimitent

9.3.2 Légendes des figures 2, 2a, 2b, 2c (cf. 9.2 pour un exemple de présentation)

Figure 2 : Un nombre désigne une grandeur qui s'étend plus ou moins et plus précisément l'augmentation ou la diminution de la fréquence de décharge d'un neurone dit "accumulateur" (Meck & Church, 1983 ; Verguts & Fias, 2004, Leslie & al., 2008 ; Nieder & Dehaene, 2009).

2a : La grandeur qui sert à symboliser les quantités au sein du système cognitif est la fréquence de décharge d'un neurone. Plus le nombre augmente (4, 11, 20), plus la fréquence croît (adapté de Meck & Church, 1983).

2b : On représente la valeur de la fréquence de décharge par un segment qui s'allonge ou se rétrécit. (adapté de Feigenson, Carey, Hauser, 2002).

2c : On représente la valeur de la fréquence de décharge par une surface qui augmente ou diminue. (adapté de Dehaene, 1992, Gallistel & Gelman, 2000).

Les auteurs déclarent n'avoir aucun conflit d'intérêt

Article 2

Configured-groups hypothesis

fast comparison of exact large quantities without counting

Cette thèse est une thèse par articles. Conformément aux normes de présentation de ce type de thèse, cet article est présenté tel qu'il a été soumis le 24 décembre 2015 à la revue Journal of experimental psychology: learning, memory, and cognition. Il respecte pour cette raison les normes de soumission de cette revue.

Configured-groups hypothesis: fast comparison of exact large quantities without counting

Sébastien Miravète¹, André Tricot¹, Slava Kalyuga² & Franck Amadieu¹

¹*CLLE Institute, University of Toulouse (FRANCE)*

²*School of Education, University of New South Wales, Sydney (AUSTRALIA)*

Abstract

The “number sense” is biologically primary knowledge - a type of knowledge that human being has used since early stages of its evolution. It is generally accepted that “number sense” cannot distinguish two large quantities that are very close (e.g., “45” vs “46” objects). The main hypothesis of this study is that configured-groups provide efficient transitions between number sense and exact comparison between large numbers. This hypothesis has been inspired by observations of some available archaeological data. In Experiment 1, children had to determine the collection with the higher quantity of dots from grouped and ungrouped sets presented for five seconds. The success rate for grouped sets exceeded .90 and was not different from random for ungrouped sets. In Experiment 2, the grouped collections were equal or unequal and the area delimited by the dots was not always the same. Children were able to find the equal collections even if the area of the larger collection was the smallest (more than .90 success). In Experiment 3, the dots had different sizes. Children were able to find the larger collections even if the dots of such collections were smaller (more than .90 success). It was also shown that children could not count to compare the collections (less than .15 success). These results suggest that configured-groups facilitate easily the transition from approximate comparison of large quantities to exact comparison of large quantities. Thus, to achieve numerical exactitude, it is not necessary to use such knowledge as language, one-one correspondences or counting.

Keywords: Number sense; Numerical cognition; Number concept; Number comprehension; Grouping

1. Introduction

The “number sense” is intuitive or biologically primary knowledge (Dehaene, 2011), i.e. a type of knowledge that humans have used since early stages of evolution to boost their chances of survival and which we are presumably genetically predisposed to acquire effortlessly in very young age (e.g., evolutionary educational psychology, Geary, 2008). This knowledge includes “primary mathematical competencies” (Geary, 2007): addition and subtraction on small quantities (Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005); approximate comparisons on large quantities (Le Corre & Carey, 2007), approximate addition on large quantities (Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010), etc. However, it is generally accepted that the “number sense” does not allow distinguishing two large quantities that are very close (e.g., “45” vs “46” objects). Therefore, how humans manage to compare very close large quantities? Do they need to count? Or are they able to do that without counting? Our main hypothesis is that some groups of objects could make possible easy comparisons between very close large quantities.

1. 1. Humans numerical systems to compare very close large quantities

According to recent research in cognitive development and animal cognition, humans (Coubart, Izard, Spelke, Marie & Streri, 2014; Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004) and animals (Reznikova & Ryabko, 2011) have two innate numerical systems: Parallel Individuation System and Approximate Numerical System

With *Parallel Individuation System*, we can compare, add and subtract small quantities (up to 3 or 4 objects). But the objects must be different (Feigenson, Carey, & Spelke, 2002). For example in Feigenson (2005) experiments, babies watch a sequence of images on a screen with the same number of objects (habituation phase), with their attention time measured. Then, an image appears which does not contain the same number of objects and their attention

time increases significantly. This time does not increase though when the number of objects is different but the total area of object does not change. However, this time increases again if the objects are not alike. That is why Feigenson (2011) and Carey (2009) consider that babies do not really have an internal numerical representation of objects. Their cognitive system gets an external numerical ability: it can detect the appearance or the disappearance of one, two or three objects. But for their system, there are not one, two or three objects. There are only this object, this object and this object - for instance, a teacher may realize that Peter and Paul are absent without having to think that “two” students are absent. Each object is processed individually, independently, in its “object-file”. Babies make “parallel individuation” and do not totalize, add or subtract the objects.

As Parallel Individuation System, *Approximate Numerical System* (ANS) has external numerical ability: it can compare approximately large quantities (greater than 4). But it does not have internal numerical representation of objects. Indeed, ANS codes quantity of objects with magnitude (Leslie Gallistel & Gelman, 2008; Feigenson, Carey, & Hauser, 2002; Gallistel & Gelmann, 2000). For it, there are not different objects. There is only one object (for empirical data, see Barner, Wood, Hauser, & Carey, 2008; Feigenson & Carey, 2005). More precisely, when the number of perceived objects increases, the neural frequency of internal representation increases (Meck & Church, 1983; Verguts & Fias, 2004; Nieder & Dehaene, 2009). However, this neural frequency is single magnitude and not multiplicity of objects. It looks like more or less long elastic. ANS does not have an internal representations of objects added to each other. It has only more or less extended undivided internal magnitude.

With ANS, large quantities could be compared and identified. But the result is always approximate. Indeed, distance-effect and size-effect characterize the ANS (Verguts & Van Opstal, 2005). According to the distance-effect, it is more difficult to compare two numbers if

they are close (e.g., 12 and 15) than if they are distant (e.g., 12 and 56). Young babies distinguish a group of 4 visual objects from a group of 12 sounds, but are not able to distinguish groups 4 visual objects and 8 sounds (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009). According to the size-effect, it is easier to compare small numbers (e.g., 4 and 8) than large numbers (e.g., 44 and 48). These two effects should interact when considered in combination. For instance, if an adult distinguishes very quickly a collection of 13 dots and another collection of 10 dots with .90 success rate, it's possible to predict that this adult will distinguish collections of 26 dots (13×2) and 20 dots (10×2), or 39 dots (13×3) and 30 dots (10×3) with the same success rate (adapted from Dehaene, 2011). The distance-effect would increase with the size of number, according to a Weber's law (for a critical review, see Dehaene, 2007).

If ANS is not exact, an important question for the research in numerical cognition is: how do humans access an exact comparison on large quantities (for a review, see Izard, Streri, & Spelke, 2014; Izard, Pica, Spelke, & Dehaene, 2008)? Today, four principal ways are explored: calibrating, counting, making one-one correspondences and grouping.

1. 2. Four hypotheses

Calibrating hypothesis. The use of symbols to designate quantities could make the ANS exact (Siegler & Ramani, 2009; Izard & Dehaene, 2008; Leslie et al., 2008). Verguts and Fias (2004) present different quantities of object to neural network simulator. Thereby, they make an artificial ANS. Then, they present quantities with their numerical symbols (e.g., “2”, “10”). They observe that this artificial ANS becomes exact. Naming the quantities with verbal (e.g., “two”, “ten”) or visual (e.g., “2”, “10”) symbols would suffice to phase out distance-effect and size-effect. Language could “calibrate” the ANS.

Counting hypothesis. When they grow, children come to understand that adding one to the previous number generates each number and come to conceive the “succession principle” (Sarnecka & Wright, 2013). For them, move from a symbol to the next symbol (e.g., move from “5” to “6” or from “five” to “six”) of an ordered sequence of symbols (like “1, 2, 3, 4, ...”) means adding an object to a collection of objects (Davidson, Eng, & Barner, 2012; Sarnecka & Carey, 2008). “24” is different from “25” because “25” contains one more object than “24”. Thus, each number means an exact quantity of objects. That is why it could be considered that, in this perspective, children have an internal numerical representation. Then, children are able to count the number of elements that contain a collection of objects. So, they can determine the exact cardinality of each collection and compare them.

One-one correspondences hypothesis. Some societies do not have verbal numerical symbols (e.g. “seven”, “nine”) to designate large quantities (Frank, Everett, Fedorenko, & Gibson, 2008; Gordon, 2004; Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004). Franck et al. (2012) use “matching task” for evaluating if adults of these societies are able to manipulate large quantities: some objects are presented and participants have to construct a collection with the same number of elements. In the absence of numerical symbols, participants could make one-one correspondences: for the first object, they take a first element, for the second, a second element, etc. Other studies utilize similar matching task (Everett & Madora, 2012; Flaherty & Senghas, 2011; Spaepen, Coppola, Spelke, Carey, & Goldin-Meadow, 2011) or propose to compare two aligned quantities next to the other (De Neys, Lubin & Houdé, 2014; Piaget, 1952). In all these experiments, participants use non-symbolic strategy (unlike Calibrating or Counting Hypotheses): one-one correspondences. All these authors assume that one-one correspondences require an internal numerical representation.

Grouping hypothesis. Grouping objects by two or three could facilitate counting on large quantities (Van Oeffelen & Vos, 1982; Beckwith & Restle, 1966). For example, 6-8

years old count faster if the seven dots are grouped by two or three dots (Starkey & McCandliss, 2014). When dots are not grouped, unstructured, in disorder, they count slowly. Grouping extends the capacity of Parallel Individuation System (Rosenberg & Feigenson, 2013): 2 groups of 2 groups of 2 objects (8 objects) could be encoded by system cognitive of 14-month-olds. According to the *Unitary-Decade-Sequence-Separate-Integrate-model* (UDSSI-model, Fuson et al., 1997), grouping could make possible an internal visual representation of exact large numbers: 42 could be represented by 4 groups of 10 and 1 group of 2.

1.3. Limits of these four hypotheses

In calibrating hypothesis, the accuracy comes from the calibration of ANS. However, a perfectly calibrated ANS has never been observed. In experiments, the precision of ANS can be improved but it never becomes perfect (Piazza et al., 2010). Particularly, the distance and size effects do not disappear. If ANS is never exact, the calibration of ANS cannot explain an exact comparison between two collections (e.g., “24” vs “25” objects). Moreover, calibrated ANS would not have internal numerical representation: quantities would still be coded by non-numerical magnitude.

In counting hypothesis, participants could count and make exact comparison on large quantities. However, they may simply associate a object to each word of ordered list (e.g. "one", "two", "three", ...) and automatically repeat the last pronounced word (Sarnecka & Carey, 2008; Fuson, 1988). Then, the result of the count is for them a meaningless word or a word only used to reference the last object counted. In other words, when subjects could count to success task, there is no evidence that they have an internal numerical representation. For instance, in Give-n task (for a review, see Sarnecka & Wright, 2013), children have to bring “n” objects (e.g. seven puppets), . However, according to Davidson et al. (2012), they

may simply name each object with a word from the counting list (“one”, “two”, ...) and bring all named objects. In this way, each word from the counting list refers to a single object and not to a total quantity of objects: “four” refers to the fourth object and not four objects.

It is the same problem with tasks (Brooks, Audet & Barner, 2012; Condry & Spelke, 2008; Sarnecka & Gelman, 2004) which are supposed evaluating the understanding of succession principle. For example, Sarnecka and Carey (2008) place four frogs in a box. Then, they close the box and check that the child (2-4 years old) has not forgotten the number of objects contained in the box. Then, they add one or two frogs and ask “now, is it five or six?”. If children succeed this task, authors assume that they understand succession principle: children know that moving from a symbol to the next symbol in counting list means adding only one object to a collection of objects. However, this task could be performed successful by counting. They count all the frogs in the box and they extend their counting when the experimenter adds one or two frogs. Children do not have the right to count. But they could count in their head. The possibility of counting is actual. That is why children could succeed in this task without internal numerical representation.

In one-one correspondences hypothesis, participants associate to the first element of the first collection, the first element of the second collection. Then, they associate to the second element of the first collection, the second element of second collection, etc. In this way, they make “one-one correspondences”. If one-one correspondences are visually facilitated, participants could make exact comparison on large quantities. For example, Pietroski, Lidz, Hunter and Halberda (2009) align collections. However, Izard, Streri & Spelke (2014) show that there is no evidence that one-one correspondences require internal numerical representation. 32-months babies could make one-one correspondences. But, a correspondence disappears for a baby when an element of this correspondence is subtracted or replaced. In other words, for babies, each correspondence is single. Babies do not detect that

two objects or correspondences disappeared. They only detect that this singular correspondence and this other singular correspondence disappeared. As Parallel Individuation System, one-one correspondences make parallel individuations.

To summarize, only counting and one-one correspondences hypotheses could explain comparisons on exact large quantities. But, if participants could count or make one-one correspondences, it cannot be controlled that participants have an internal numerical representation. Perhaps they individualize objects by naming them (counting) or by associating them with another objects (one-one correspondence). In this case, they do not totalize or add the objects. So, is it possible to verify if humans can compare large quantities with an internal numerical representation?

In grouping hypothesis experiments, participants count (Van Oeffelen & Vos, 1982; Starkey & McCandliss, 2014; Beckwith & Restle, 1966) or use Parallel Individuation System (Rosenberg and Feigenson, 2013; Feigenson & Halberda, 2008). Therefore, the problem remains the same. It is not sure that participants have an internal numerical representation. In UDSSI-model, humans have a visual internal numerical representation. But this model is theoretical and there is no empirical evidence that humans could visualize in their head for example nine groups of ten and one group of three (93 objects). That is why grouping objects do not seem currently an alternative to counting and one-one correspondences. In this perspective, it cannot be evaluated if humans are able to compare on exact large quantities with an internal numerical representation.

1.4. Configured grouping hypothesis

Grouping has been used for a long time by humans to represent quantities (Ifrah, 2000). The first numerical symbols look like quantities. For example, the symbol “I” means one object, the two symbols “II”, two objects, etc. The most interesting is the placement of

symbols: (1) The symbols are always organized; they are never disorderly (Figure 1a); (2) The symbols are arranged in a pattern: their organization is a *configuration* (Figure 1b).
(Please insert here Figure 1)

This observation of archaeological data suggests another approach of grouping: the configuration of the objects facilitates the perception of groups and elements in each group. Accordingly, a new way to achieve an exact comparison could be based on the following hypothesis:

Configured grouping hypothesis. The comparison between two collections of objects could be exact if the objects are grouped and configured. Specifically, in this study, our grouping hypothesis is based on two fundamental sub-hypothesis: equal and unequal property of configured groups.

Firstly, configured groups facilitate the visual perception of equal quantities: two identical groups have the same quantity of objects (Equal property of configured groups). In other words, if two groups have the same number of objects, the same configuration and the same orientation (Figure 2a), then cognitive system considers that these two groups are equal.

Secondly, configured groups facilitate the perception of unequal quantities: if two groups have the same configuration and the same orientation, it is easier to see if one of the two groups comprises more or less objects than the other (Unequal property of configured groups). Indeed, as in “difference game”, cognitive system could compare the two configured groups and detects readily if one object is missing (Figure 2c). Then, cognitive system considers that the group with the missing element includes fewer elements than the other.
(Please insert here Figure 2)

Therefore, we suppose that grouping objects with configurations naturally optimizes visual comparison of quantities: the use of the perception of groups in a numerical task could be a type of biologically primary knowledge.

2. Experiments

Three experiments were conducted with Grade 3 students who were asked to indicate what part of a computer screen was presenting the highest number of dots. The time of presentation was five seconds during which the children could not count the dots or make one-one correspondences between the dots. Parallel Individuation System could not compare these collections because the number of dots is too high (bigger than 30). Moreover, children's ANS could not compare the two collections because quantities of dots are too close (e.g. 53 vs 54; 45 vs 46).

Grade 3 students can count large numbers, make one-one correspondences, use their Parallel Individuation System and their ANS. It was assumed that the primary equal and unequal properties of configured groups coexisted with these capacities (counting, making one-one correspondences, Parallel Individuation System, ANS) and could be effective and accessible. Indeed, children could use very easily and spontaneously these properties in an exact numerical task where their other capacities are ineffective - in our numerical task, they did not have the time to count, make one-one correspondences and they could not use their Parallel Individuation System nor their ANS.

Experiment 1 was designed to demonstrate that the presence of configured groups would make possible accurate comparison; Experiment 2 - that children would compare the quantity of dots and not the area delimited by dots; and Experiment 3 - that children would compare the quantity of dots and not the total area of dots..

2.1. Experiment 1

The hypothesis tested by this experiment was that children could realize exact comparisons between two collections of objects if these collections are grouped (condition Grouped) and not if the collections are not grouped (condition Non-Grouped).

Participants

87 third graders (43 boys, 44 girls, $M_{\text{age}} = 8.62$, $SD = 0.47$) participated to this experiment. They came from four schools located in a middle socio-economic status area, South-west of France.

Materials

Two collections of white dots (diameter = 4 mm) were presented on a screen (Figure 3). The screen (286 x 180 mm) was divided into two equal parts (left and right) by a black vertical line. The bottom of the screen was white. Each part contained a black oval disk (height = 130 mm; width = 94 mm). White dots appeared on the black disk. The distance between the face of pupils and the screen was around 400 mm.

In condition Non-Grouped, the dots were not grouped but the distribution of the dots was the same in the two parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first. Then, one dot was subtracted in the left hand side or the right hand side. In this way, the right or left hand side contained one dot more than the other side. In other words, one part of the screen contained one more dot than the other part. (Please insert here Figure 3)

In condition Grouped, the dots were grouped by ten (height = 30 mm; width = 12 mm). The remaining dots were grouped into a single group of units ($4 \text{ mm} < \text{height} < 30 \text{ mm}$; width = 12 mm). The groups were organized in a five-five configuration. Groups of three dots were organized in a triangular configuration. Groups of five dots were organized in a dice

configuration or in a five-five configuration. The organization of the dots was the same in the both parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first. One dot was subtracted in the left or right hand side - on of the sides contained one dot more than the other side. The dot could be subtracted from a group of ten (tens-group) or from a group of units (units-group).

Procedure

Each participant was sitting on a chair in front of a computer screen. The experimenter was located on a seat behind him. The child could not see what the experimenter was writing. The experimenter noted the student's responses and scrolled items. For each item, the pupil must only point the portion of the screen (left or right), which contains the most dots. The exposure duration for each item was five seconds. Between items, the screen was white. The time between items was not limited. The experimenter displayed a new item after the child had given her/his answer (the response time was not limited).

The first game consisted of 10 items. In each item, the dots were not grouped (condition Non-Grouped). The order of items and the number of dots were as follows: 31 vs 32; 34 vs 35; 53 vs 52; 45 vs 46; 43 vs 42; 33 vs 32; 53 vs 54; 36 vs 35; 55 vs 54; 44 vs 43. The second game consisted of 20 items in condition Grouped. The quantities compared were the same as in the condition Non-Grouped. For each pair of comparison (e.g., 34 vs. 35; 43 vs. 42, ...), there were two versions: the "dot-subtracted-from-tens" version and the "dot-subtracted-from-units" version (Figure 3). In 10 items, the dot was subtracted from tens-group. In other 10 items, the dot was subtracted from units-group. In each item, the dots were grouped (condition Grouped). The order of items and the number of dots was as follows: 31 vs 32_{dot-subtracted-from-tens}; 34 vs 35_{dot-subtracted-from-units}; 53 vs 52_{dot-subtracted-from-tens}; 45 vs 46_{dot-subtracted-from-tens}; 43 vs 42_{dot-subtracted-from-units}; 33 vs 32_{dot-subtracted-from-tens}; 53 vs 54_{dot-subtracted-from-units}; 36 vs 35_{dot-}

subtracted-from-units; 55 vs 54_{dot-subtracted-from-units}; 44 vs 43_{dot-subtracted-from-tens}; 43 vs 44_{dot-subtracted-from-units}; 35 vs 36_{dot-subtracted-from-tens}; 43 vs 42_{dot-subtracted-from-tens}; 33 vs 32_{dot-subtracted-from-units}; 53 vs 54_{dot-subtracted-from-tens}; 31 vs 32_{dot-subtracted-from-units}; 43 vs 42_{dot-subtracted-from-tens}; 53 vs 52_{dot-subtracted-from-units}; 36 vs 35_{dot-subtracted-from-units}; 34 vs 35_{dot-subtracted-from-tens}.

Each child began the second game immediately after the first one had been completed. Children were not informed about the fact that their answers were correct or not.

Results and discussion

The results are shown in Figure 4. In condition Non-Grouped, the rate of correct answers is not different from random: $M = 0.52$ ($SD = 0.17$), $p > .18$, two-tailed sign test. The distribution is the same in the both parts of the screen but it has no effect on performance. In condition Grouped_{dot-subtracted-from-units} the rate of correct answers is different from random: $M = 0.96$ ($SD = 0.09$), $p < .0001$, two-tailed sign test. In condition Grouped_{dot-subtracted-from-tens}, the rate of correct answers is also different from random: $M = 0.87$ ($SD = 0.16$), $p < .0001$, two-tailed sign test. (Please insert here Figure 4)

Certainly, humans would normally not subtract a dot from a group of ten. For example, they would not represent 34 dots with two groups of 10, a group of 9 and a group of 5 but rather with three groups of 10 and a group of 4 (Ifrah, 2000). However, the presence of condition Grouped_{dot-subtracted-from-tens} is important. With this condition, a dot is not always missing in the group of units and therefore, children cannot look only at the group of units in order to compare the collections. They must look at each collection globally and compare not only the units-groups of the collections. Thus, grouping the dots with an identical configuration enhanced greatly the participants' performance. Indeed, the difference between the conditions Grouped_{dot-subtracted-from-units} (0.96) and Non-Grouped (0.52) is highly significant ($d = 3.48$). However, children could possibly compare the area delimited by the dots and not

the number of dots. Experiment 2 was designed to investigate if this could be a feasible approach. In addition, it was important to establish that they might be able to determine that two collections have exactly the same number of dots in the absence of visual differences.

2.2. Experiment 2

The hypotheses tested by this experiment were that children would not compare the areas delimited by the dots and they could compare equal quantities of dots. Therefore, the four conditions in this experiment involved collections that could have or not have the same area and could have or not have the same quantity of dots.

Participants

50 third graders (27 boys, 23 girls, $M_{\text{age}} = 8.65$, $SD = 0.49$) participated in the experiment. They came from two schools located in a middle socio-economic status area, South-west of France.

Material

The sizes of dots, the screen, black ovals, and the distance between the pupils and the screen were the same as in Experiment 1. The dots were grouped by ten (height = 30 mm; width = 12 mm). All the groups of ten were parallel and arranged vertically. The remaining dots were grouped into a single group ($4 \text{ mm} < \text{height} < 28 \text{ mm}$; width = 12 mm) and separated from the groups of ten. All the groups were organized in a five-five configuration.

In Condition Equal-number-equal-area (Figure 5), each part of the screen contained the same number of dots and the total area delimited by the dots was the same.

In Condition Equal-number-unequal-area, each part of the screen contained the same number of dots, however, the total area bounded by the dots was different. The increase in the

total size of the area was obtained by moving the groups of ten up and down ($15\% < \text{ratio} < 30\%$).

In Condition Unequal-number-equal-area, for each part of the screen, the number of dots was different due to one dot subtracted from the left or right side. The dot could be subtracted from either a group of ten or a group of units. However, the total area bounded by the dots was the same on each side.

Finally, in Condition Unequal-number-unequal-area, both the number of dots and the total area bounded by the dots were different. The part of the screen with the larger area always had the lower number of dots. (Please insert here Figure 5)

Procedure

The procedure was the same as in Experiment 1. The only difference was that the participants said “equal” when they thought that the number of dots was the same.

The game consisted of 40 items. For each condition, there were two versions: the “dot-subtracted-from-tens”-version and the “dot-subtracted-from-units”-version as in Experiment 1 (Figure 3). Thus, there were eight types of items: Equal-number-equal-area_{dot-subtracted-from-tens}; Equal-number-equal-area_{dot-subtracted-from-units}, Equal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-tens}; Equal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-units}, etc. There were five items for each type. For the conditions with unequal-area, the larger area could be on the left (L) or on the right (R). The order of items is given in Table 1. This order was randomly generated by computer. (Please insert here Table 1)

Results and discussion

The results are shown in Figure 6. In condition Equal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-units}, $M = 0.94$, $p < .0001$, two-tailed sign test. In condition Unequal-number-unequal-

area_{dot-subtracted-from-units}, $M = 0.97$, $p < .0001$, two-tailed sign test. In condition Equal-number-equal-area_{dot-subtracted-from-units} $M = 0.94$, $p < .0001$, two-tailed sign test. The results indicate that the area delimited by dots (Equal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-units} and Unequal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-units}) and the equality of the number of dots (Equal-number-unequal-area_{dot-subtracted-from-units} and Equal-number-equal-area_{dot-subtracted-from-units}) have no effect on the performance: if the children had compared the areas delimited by the dots, they would have failed in conditions Equal-number-unequal-area and Unequal-number-unequal-area; if the children had not realized that the two collections were equal, they would have failed in conditions Equal-number-equal-area and Equal-number-unequal-area. It seems that children would tend to compare the quantities and not the areas. However, children may compare the total surface of dots and not the number of dots. Moreover, even if it is impossible to count the dots one by one in five seconds, it is still might be possible to count the number of the groups of ten very quickly. The following experiment was designed to investigate these possibilities. (Please insert here Figure 6)

2.3. Experiment 3

The goal of this experiment was to show that children compared quantities and not the total surface of the dots, and that they did not count by the groups of ten.

Participants

56 third graders (25 boys, 31 girls, $M_{\text{age}} = 8.88$, $SD = 0.53$) participated to this experiment. They came from four schools located in a middle socio-economic status area, in the south-west of France.

Material

The sizes of dots, the screen, black ovals, and the distance between the pupils and the screen were the same as in Experiment 1. Dots were shown in groups of ten. All the groups of ten were parallel and arranged vertically. The remaining dots were grouped into a single group and separated from the groups of ten. All the groups were organized as in a five-five configuration.

In this experiment, parts of the screen contained small (diameter = 4 mm) or big (diameter = 6 mm) dots (Figure 7). If one part contained small dots, then the other part contained big dots and vice versa. Accordingly, a group of ten big dots (height = 40 mm; width = 18 mm) was longer and wider than a group of ten small dots (height = 30 mm; width = 12 mm). The area of a group of ten big dots (720 mm^2) was twice as large as the area of a group of small dots (360 mm^2). Therefore, in each item, the total area occupied by the big dots was approximately twice as large as the one occupied by the small dots.

The organization of the dots was the same in the two parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first one and by the replacement of small dots by big dots (vice versa). One dot was subtracted from one side. This dot could be subtracted either from a group of ten or from a group of units. In condition More-big-dots-than-small-dots, there were more big dots than small dots. In condition More-small-dots-than-big-dots, there are more small dots than big dots. (Please insert here Figure 7)

Procedure

The procedure was the same as in Experiment 1. The first game consisted of 20 items. As in Experiment A, there were two versions of More-big-dots-than-small-dots and More-small-dots-than-big-dots conditions: the “dot-subtracted-from-tens”-version and the “dot-subtracted-from-units”-version. That is why four types of items were used: More-big-dots-

than-small-dots_{dot-subtracted-from-tens}, More-big-dots-than-small-dots_{dot-subtracted-from-units}, More-small-dots-than-big-dots_{dot-subtracted-from-tens}, More-small-dots-than-big-dots_{dot-subtracted-from-units}.

There were five items for each type. The order of items and the number of dots were as follows (the big dots are indicated by *): 43 vs 44* (u), 57* vs 58 (t), 37* vs 38 (u), 43 vs 42* (t), 36* vs 35 (u), 53 vs 54* (t), 48 vs 47* (u), 46* vs 45 (t), 34 vs 33* (t), 35* vs 36 (u), 64 vs 63* (u), 49* vs 48 (t), 56* vs 55 (u), 65 vs 64* (u), 53 vs 52* (t), 34* vs 33 (u), 42 vs 41* (t), 58* vs 57 (t), 62 vs 63* (u), 34* vs 33 (t).

The second game consisted of 5 items. The items were the same as in Condition Unequal-Number-Equal-Area_{dot-subtracted-from-units} of Experiment 2 (Figure 5). For each item, the participants had to say how many dots were on the right hand side and on the left hand side.

Results and discussion

The results are shown in Figure 8. In condition More-small-dots-than-big-dots_{dot-subtracted-from-units}, $M = 0.91$, $p > .0001$, two-tailed sign test. The results show that children can compare the collections even if there are more small dots than big dots: they are really sensitive to the quantity of dots and not to the total surface of dots. In addition, the participants failed to count the groups of ten dots (0.15 of success) and were not able to find the number of dots contained in the two parts of the screen. Thus, the children do not count the groups of ten dots. These results prove that the children can compare the numbers of dots without having to count, even if the difference between the numbers of dots (ratio < 3.2 %) is less than the acuity of their ANS (ANS-ratio is around 34% for pre-schoolers, 25% for 10 year-olds, and 15% for adults, according to Piazza et al., 2010). (Please insert here Figure 8)

3. General discussion

The main hypothesis was that configured groups make possible quick comparisons of exact large quantities. Our main hypothesis assumed also that these quick comparisons used an internal numerical representation: children did not compare the total area of dots or the area delimited by dots but the number of dots. Obviously, content of this internal numerical representation remains unknown in our study: children could visualize the number of dots with their mental imagery (Fuson et al., 1997) or use general law (e.g. adding or subtracting one element to a quantity make a new quantity) as in bootstrapping's theory (Carey, 2009). The aim of this study was not to define or identify this content but to show that children could compare exact large quantities with internal numerical representation.

3.1. Internal numerical representation

Results show that children have an internal numerical representation. Indeed, they could identify the highest collection even if the smallest extend over larger area (Experiment 2) or have higher density (Experiment 3). They understood that the experimenter asked them about the numerosity of dots and not about their total area (Experiment 3) that they would constitute by their assembly. They did not settle for locating the missing dot – otherwise, they would have chosen the smallest collection. They assumed that the collection with missing dot had one dot less than the other. Therefore, they knew that the two collections consist of a number of dots and two numbers of dots are different if the first has one dot less than the other. In other words, they knew idea of exact quantity and accordingly had an internal numerical representation.

Indeed, experimenter asked children to show the larger collection. So, this experimenter's request could be interpreted by children as quantitative task (e.g. comparing number of dots, size of dots, areas delimited by dots, total areas of dots, ...) or as qualitative

task. (e.g. comparing colours of dots, localising the missing dot, ...). However, it seems improbable that third graders did not understand quantitative nature of the task. Indeed, kindergarteners have no problem with this type of request (Piazza & Dehaene, 2010; Halberda & Feigenson, 2008): when experimenter asked them to show the larger collection of dots, they most often chose the biggest, they understood clearly the quantitative nature of experimenter's request.

The real problem is that quantitative task could be interpreted as numerical quantitative task (e.g. comparing the number of dots, counting the number of dots) or as non numerical quantitative task (e.g. comparing size of dots, areas delimited by dots, total areas of dots, ...). Indeed, children could encode quantities with or without internal numerical representation. With internal numerical representation, children know idea of exact quantities. Without internal numerical representation, they do not know this idea. In this case, they could represent more or less large quantities with more or less large magnitude. For them, there is not number of dots, multiplicity of dots. There is single object (area delimited by dots, total area of dots) and this object could be more or less large (as volume of water). In this situation, they could not succeed in Experiment 3 because in this experiment, the smallest collections had the larger magnitude (area delimited by dots or total area of dots). But results show that they succeeded all Experiments. That is why it is impossible that children represent quantities with magnitude.

Moreover, children could not counting, making one-one correspondences, utilizing their Parallel Individuation System or their ANS, because for, each item, exposure duration is too short (five seconds), number of dots is too large (bigger than 30), and two quantities of dots are too close (they differ only in one dot). Therefore, children could not represent quantities with counting, one-one correspondences or Parallel Individuation System, as individualized objects. They could not represent also quantities as magnitude with their ANS.

In conclusion, children succeeded our comparison task with internal numerical representation. It is not exact that all they had to do was to determine which portion of the screen (left or right) was missing a dot. If they did not choose the portion with the largest number of dots, but the portion without missing dot, it implies that they did not understand the quantitative nature of experimenter's request. As seen before, this hypothesis seems improbable at their age, in our society. Therefore they had to determine which portion of the screen was missing a dot and they had also to use this information to conclude that a portion of screen contains one dot less than the other. Thus, they had to know that two quantities are different if the first quantity contains one dot less (or more) than the second. In other words, they had to understand idea of quantity (adding or subtracting one element to a quantity generates a new quantity) and thereby possess an internal numerical representation.

3.2. Configured grouping hypothesis

Configured grouping hypothesis is based on two key ideas: equal and unequal properties of configured groups. With unequal property of configured groups, children could compare quickly two unequal close quantities if these quantities had the same configuration and orientation (Experiments 1, 2 and 3). More precisely, children could localize quickly group with one dot less because, for example, alignment of dots in a group (Pietroski et al., 2009) facilitates perception of missing dot. However, unequal property is not sufficient. Without equal property (Experiment 2, condition Equal-number), children cannot consider that groups without missing dot are equal. This supposition is necessary. Otherwise, there may be more dots where dot is missing and children could not assume that there is only one point difference between two parts of screen.

These numerical properties of visual grouping certainly obey Gestalt laws. However, these properties are not new Gestalt laws. Indeed, the question in Gestalt theory (Todovoric,

2011) is “under which conditions a group of objects is perceived as single object?” Our question is: “under which conditions a group of objects is perceived as having same number of objects, or more or less one object, as another group?”. Our current answer is “if groups are configured, they have two numerical properties: equal and unequal properties of configured groups. That is why they could be consider by cognitive system as equal or unequal”. Obviously, mechanism of these properties remains unknow in this work. It will be study in future research.

Number sense cannot compare exact large quantities. So, an important question in numerical cognition research is: how humans access to exact comparisons on large quantities? This study suggests that, as Sumerians, they could use configured groups. Previous studies show that grouping facilitates counting (Starkey & McCandliss, 2014; Van Oeffelen & Vos, 1982; Beckwith & Restle, 1966) or memorization of large quantities (Rosenberg & Feigenson, 2013; Feigenson & Halberda, 2008). But grouping does not only facilitate counting or memorization. This work shows that grouping facilitates also exact comparison on large quantities even if it is impossible to count or memorize. Indeed, configured groups seems to have numerical properties: equal and unequal properties of configured groups. With these visual numerical properties, humans could access easely and very early to exact large comparisons. In normal configuration as the one used by Sumerians (conditions Grouped_{dot-subtracted-from-units} in Experiment 1 and Equal-number-equal-area_{dot-subtracted-from-units} in Experiment 2), score was very high (respectively, 0.96 and 0.94) even if the time of presentation was very short (five seconds). With grouping, an impossible task (condition Non-Grouped in Experiment 1) becomes an extremely easy task for children. This high score suggests that equal and unequal properties represent easy and early knowledge.

In sum, our results support the hypothesis that the ability to use visual perception of groups could potentially act as a facilitator in transitioning from intuitive “number sense” to

culturally developed number systems in a cognitively efficient way (considering processing limitations of human cognitive architecture).

Finally, as a potential instructional implication of this research, the effectiveness of using visual perception of groups in cognitively efficient transitioning from biologically primary, intuitive “number sense” to biologically secondary, scientific number systems learned in primary schools needs to be investigated within theoretical frameworks of instructional psychology that focus on processing limitations of human working memory (such as cognitive load theory, Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011).

As seen in Introduction, “number sense” cannot distinguish two very close quantities. In this perspective, teachers cannot represent visually integers (0, 1, 2, 3, ...) with objects. Indeed, for number sense, the representation of 24 objects contains the same number of objects that the representation of 25 objects. In other words, “ $24 = 25$ ” for number sense. But, our results show that the distinct representation of 24 and 25 objects make possible, with 8-years-old children, if objects are grouped and configured. Therefore, it is possible to represent integers with collection of objects. Moreover, our work shows that these representations are numerical (8-years-old are sensitive to the number of objects and not to their area) and can be read quickly and easily. That is why our study suggests that representation of integers with configured groups, on a screen, a board, a notebook, a manual, a table (with base 10 blocks) etc., could facilitate the visualisation of large integers. This visualisation could be used effectively by teachers in system decimal learning, in resolution of arithmetical problems, in comprehension of arithmetical operations (Fuson, 1997), etc.

3.3. Limitations and further research

This study does not reveal the mechanism of equal and unequal properties of configured groups and the content of the internal numerical representation used by these properties.

Nevertheless, results of this study open three perspectives for research in numerical cognition. Firstly, mechanism of equal and unequal properties could be studied. Do configured groups decrease cognitive load of visual strategies (locating the missing dot)? What is the exact role of Gestalt laws? What is the content of internal numerical representation in equal and unequal properties of configured groups?

Secondly, some configurations are probably better than others. Future experiments could identify the best configurations. They could explore laws of numerical perception. As result, cognitive psychologists could indicate to teachers the most effective configurations, the best way to group objects and represent quantities or integers.

Thirdly, it might be interesting to see whether these equal and unequal properties exist in younger children, babies, new-borns, animals, etc. After Parallel Individuation System and ANS these numerical properties of grouping could be the third innate numerical capacity of humans, the third element of intuitive human “number sense”. These ideas need to be explored in future research with young children.

Acknowledgements:

Jean-Luc Parmentelot, Sylvain Begue, Josette Suspène, Sylvaine Mailho, Nathalis Burgues-Gensel, Pierre Villenave, Anne Terrière, Véronique Perrier, Céline Burgues, Gaëlle Imbert, Laurent Icher, Mrs Ortis, Mrs Peyrou, Denis Caillard, Nathalie Le Goffic, Nathalie Precigout, Nathalie Corpet, Julie Rozières, Mrs Barral, Mrs Cornic, Valérie Buosi, Marie-Pierre Caldeira, Olivier Carmouze, Stéphanie Sauvage, Aurélie Cazottes, Muriel Abeille, parents and their children

References

- Barner, D., Thalwitz, D., Wood, J., Yang, S-J, & Carey, S. (2007). On the relation between the acquisition of singular-plural morpho-syntax and the conceptual distinction between one and more than one. *Developmental Science*, 10(3), 365-373. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-7687.2007.00591.x>
- Beckwith, M., & Restle, F. (1966). Process of enumeration. *Psychological Review*, 73, 437-444. <http://dx.doi.org/10.1037/h0023650>
- Brooks, N., Audet, J., & Barner, D. (2012). Pragmatic inference, not semantic competence, guides 3-year-olds' interpretation of unknown number words. *Developmental Psychology*, 49, 1066-1075. <http://dx.doi.org/10.1037/a0029384>
- Carey, S. (2009). Where our number concepts come from. *The Journal of Philosophy*, 106(4), 220–254. <http://dx.doi.org/10.5840/jphil2009106418>
- Condry, K. F., & Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology. General*, 137(1), 22–38. <http://dx.doi.org/10.1037/0096-3445.137.1.22>.
- Coubart, A., Izard, V., Spelke, E. S., Marie, J., & Streri, A. (2014). Dissociation between small and large numerosities in newborn infants. *Developmental Science*, 17(1), 11-22. <http://dx.doi.org/10.1111/desc.12108>
- Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*, 123(1), 162-173. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2011.12.013>
- Dehaene, S. (2011). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Revised and Updated Edition*. Oxford: Oxford University Press
- Dehaene, S. (2007). Symbols and quantities in parietal cortex: Elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. In P. Haggard & Y. Rossetti (eds.),

Attention & performance XXII. Sensori-motor foundations of Higher Cognition. (pp. 527-574). Cambridge, MA, Harvard University Press.

De Neys, W., Lubin, A., & Houdé O. (2014). The Smart Nonconservers: Preschoolers Detect Their Number Conservation Errors. *Child Development Research*, 2014, Article ID 768186, 7 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/768186>

Everett, C., & Madora, K. (2012). Quantity recognition among speakers of an Anumeric language. *Cognitive Science*, 36(1), 130–141. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1551-6709.2011.01209.x>.

Feigenson, L. (2011). Objects, sets, and ensembles. In S. Dehaene & E. Brannon (Eds.), *Space, Time, and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought*. London: Elsevier.

Feigenson, L. & Halberda, J. (2008). Conceptual knowledge increases infants' memory capacity. *PNAS*, 105(29), 9926-9930. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0709884105>

Feigenson, L. (2005). A double-dissociation in infants' representations of object arrays. *Cognition*, 95(3), B37-48. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2004.07.006>

Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97, 295-313. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2004.09.010>

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002>

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13, 150–156. <http://dx.doi.org/10.1111/1467-9280.00427>

Flaherty, M., & Senghas, A. (2011). Numerosity and number signs in deaf Nicaraguan adults. *Cognition*, 121(3), 427–436. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2011.07.007>.

- Frank, M. C., Fedorenko, E., Lai, P., Saxe, R., & Gibson, E. (2012). Verbal interference suppresses exact numerical representation. *Cognitive Psychology*, 64, 74-92.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.10.004>.
- Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology: Evidence from Piraha language and cognition. *Cognition*, 108(3), 819–824.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2008.04.007>.
- Fuson, K.C, Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Human, P.G., Olivier, A.I., Carpenter T.P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual Structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130- 162. <http://dx.doi.org/10.2307/749759>
- Gallistel, C.R., & Gelman, R. (2000). Non-verbal cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Science*, 4, 59-65. [http://dx.doi.org/10.1016/S1364-6613\(99\)01424-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1364-6613(99)01424-2)
- Geary, D. C. (2008). An evolutionarily informed education science. *Educational Psychologist*, 43(4), 179-195. <http://dx.doi.org/10.1080/00461520802392133>
- Geary, D.C. (2007). An evolutionary perspective on learning disability in mathematics. *Developmental Neuropsychology*, 32(1), 471–519.
<http://dx.doi.org/10.1080/87565640701360924>
- Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, 447, 589-59. <http://dx.doi.org/10.1038/nature05850>
- Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from amazonia. *Science*, 306, 496–499. <http://10.1126/science.1094492>
- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457–1465. <http://dx.doi.org/10.1037/a0012682>.

- Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From prehistory to the invention of the computer*. Hoboken (NJ, USA): John Wiley and Sons.
- Izard, V., Streri, A., & Spelke, E. S. (2014). Toward exact number: Young children use one-to-one correspondence to measure set identity but not numerical equality. *Cognitive Psychology*, 72, 27-53. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cogpsych.2014.01.004>
- Izard, V., Sann, C., Spelke, E.S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *PNAS*, 106, 10382-10385. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0812142106>
- Izard, V. & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, 106, 1221–1247. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2007.06.004>
- Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S., & Dehaene, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical Psychology*, 21(4), 491-505. <http://dx.doi.org/10.1080/09515080802285354>
- Kobayashi, T., Hiraki, K., & Hasegawa, T. (2005) Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science*, 8(5), 409-419. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-7687.2005.00429.x>
- Le Corre, M. & Carrey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting system. *Cognition*, 105(2), 395-438. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005>
- Leslie, A.M., Gelman, R., & Gallistel, C.R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(6). 213-218. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tics.2008.03.004>.
- Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology. Animal Behavior Processes*, 9, 320-334. <http://dx.doi.org/10.1037//0097-7403.9.3.320>

- Nieder, A. & Dehaene, S (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.neuro.051508.135550>.
- Piaget, J (1952). *The child's conception of number*. New York: Norton
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33-41.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012>.
- Pica, P., Dehaene, S., Lemer, C. & Izard, V. (2004). Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group. *Science*, 306, 499-503.
<http://dx.doi.org/10.1126/science.1102085>
- Pietroski, P., Lidz, J., Hunter, T. & Halberda, J. (2009). The Meaning of 'most': semantics, numerosity and psychology. *Mind and Language*, 24(5), 554–585.
<http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0017.2009.01374.x>
- Reznikova, Zh. & Ryabko, B. (2011). Numerical competence in animals, with an insight from ants. *Behaviour*, 148(4). 405-434. <http://dx.doi.org/10.2307/23034327>
- Rosenberg, R.D. & Feigenson, L. (2013). Infants hierarchically organize memory representations. *Developmental Science*, 16(4), 610-621. <http://dx.doi.org/10.1111/desc.12055>
- Sarnecka, B.W. & Wright, C.E. (2013). The Idea of an Exact Number: Children's Understanding of Cardinality and Equinumerosity. *Cognitive Science*, 37(8), 1493-1506.
<http://dx.doi.org/10.1111/cogs.12043>.
- Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2008.05.007>.

Sarnecka, B. W., & Gelman, S. (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, 92(3), 329–352.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2003.10.001>

Siegler, R.S & Ramani, G.B (2009). Playing linear number board games - but not circular ones- improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 545–560. <http://dx.doi.org/10.1037/a0014239>

Spaepen, E., Coppola, M., Spelke, E. S., Carey, S. E., & Goldin-Meadow, S. (2011). Number without a language model. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(8), 3163–3168. <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1015975108>

Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of experimental child psychology*, 126, 120-137.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006>.

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga S. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer

Todovoric, D. (2011). What is the origin of the Gestalt principles? *Humana Mente*, 17, 1-20

Verguts, T. & Van Opstal, F. (2005). Dissociation of the distance effect and size effect in one-digit numbers. *Psychonomic Bulletin & Review*, 12(5), 925-930. [http://dx.doi.org/](http://dx.doi.org/10.3758/BF03196787)

10.3758/BF03196787

Verguts, T & Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: A neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9), 1493–1504. [http://dx.doi.org/](http://dx.doi.org/10.1162/0898929042568497)

10.1162/0898929042568497

Van Oeffelen, M. P., & Vos, P. G. (1982). Configurational effects on the enumeration of dots: Counting by groups. *Memory & Cognition*, 10, 396–404. [http://dx.doi.org/](http://dx.doi.org/10.3758/BF03202432)

10.3758/BF03202432

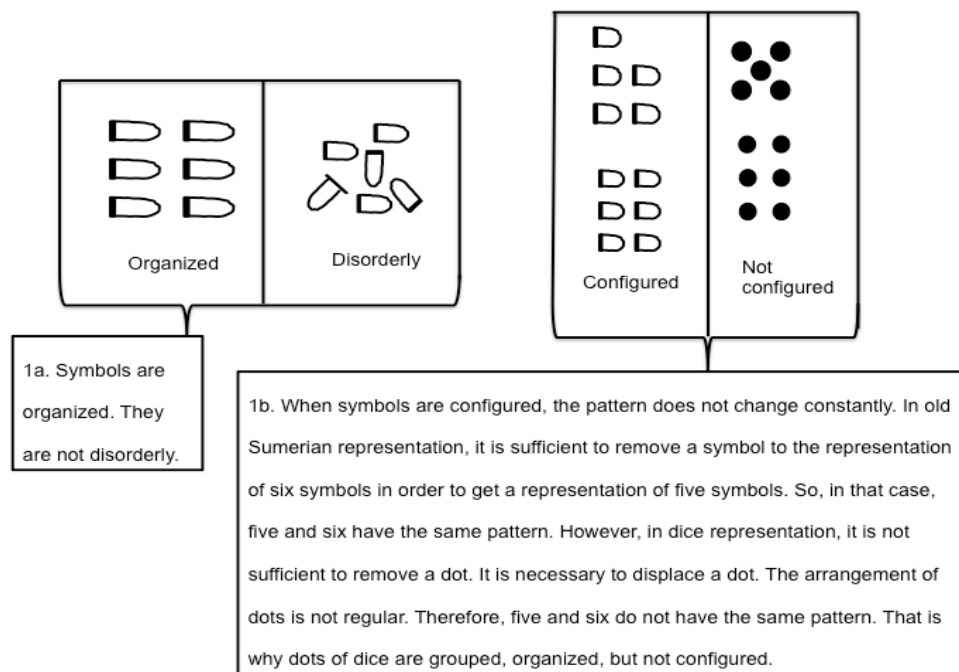


Figure 1: Two characteristics of old Sumerian numerical symbols. Adapted from Ifrah (2000)

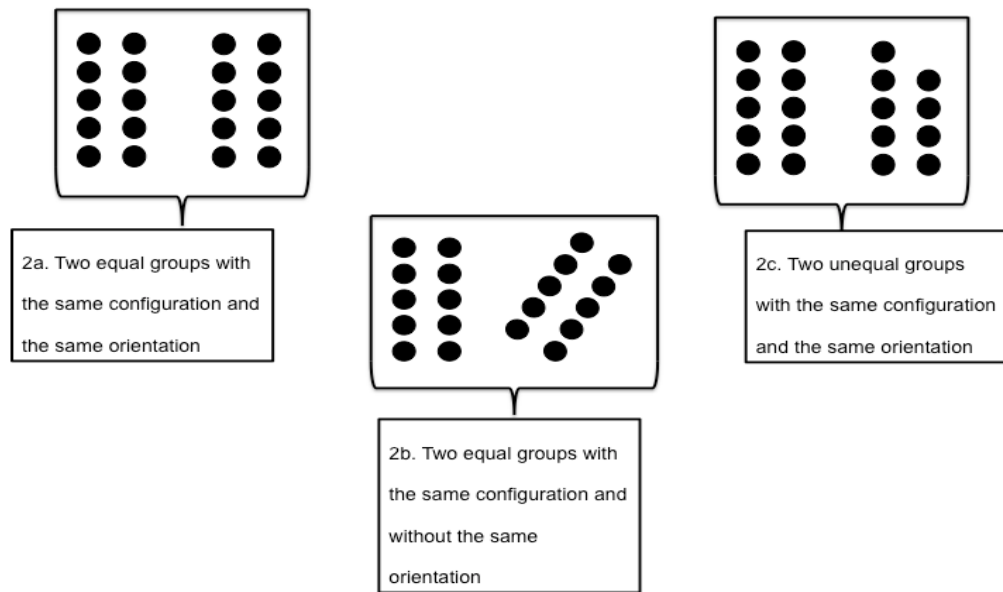


Figure 2: Examples of equal or unequal configured groups with or without same configuration and orientation

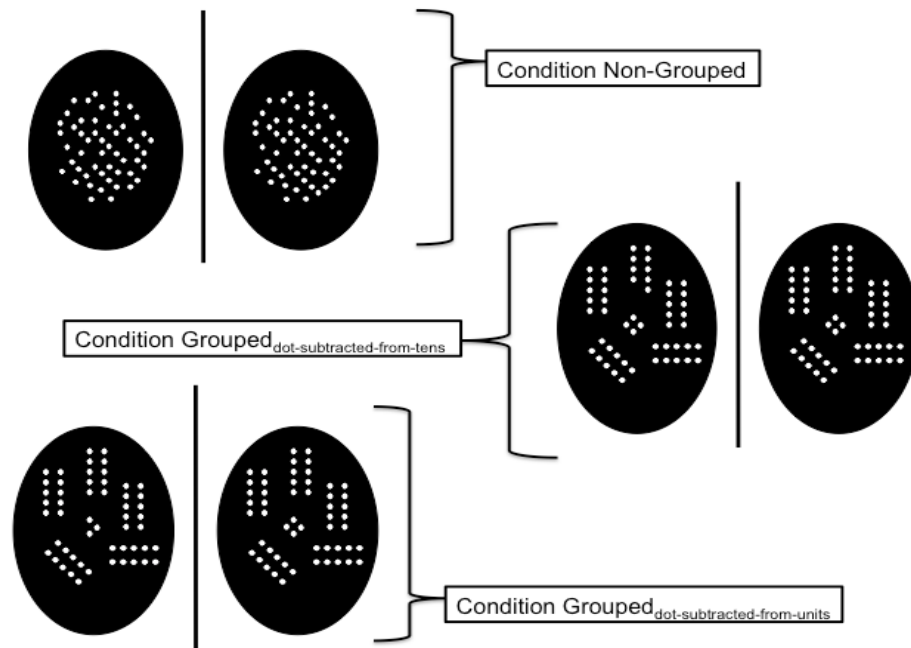


Figure 3: Examples of items (53 vs 54 dots) in conditions Non-Grouped and Grouped

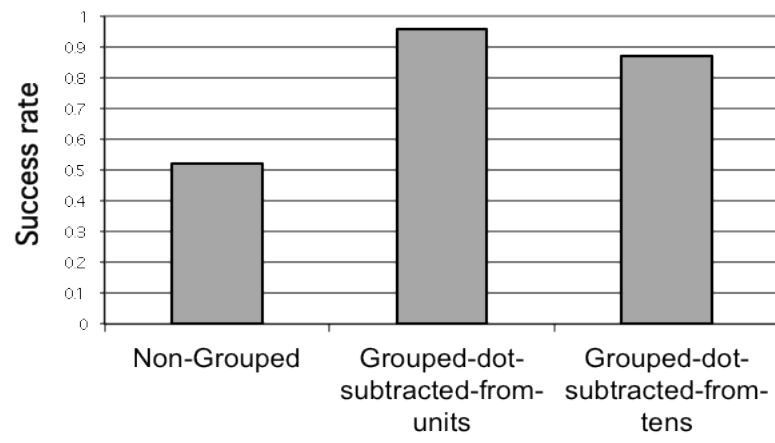


Figure 4: Results of Experiment 1 for conditions Non-Grouped,

Grouped_{dot-subtracted-from-units}, and Grouped_{dot-subtracted-from-tens}.

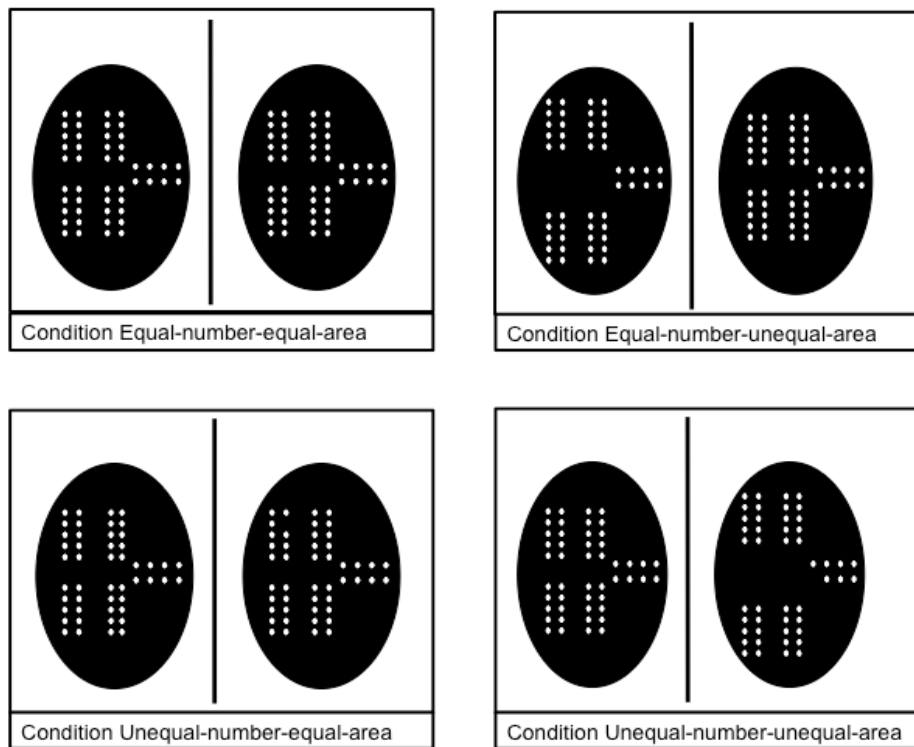


Figure 5: Examples of four items (48 vs 48; 48 vs 48; 47 vs 48; 48 vs 47) used in Experiment 2

Table 1: The order of items and the number of dots in Experiment 2. The quantities of dots are equal (eN) or unequal (uN).

The areas delimited by the dots are equal (eA) or unequal (uA). The missing dot is in a group of units (u) or in a group of ten (t). In Unequal-area conditions, the larger area is on the left (L) or on the right (R).

1	36 vs 36 eNeA (u)	11	32 vs 32 eNeA (t)	21	47 vs 48 uNeA (u)	31	54 vs 54 eNuA (u) R
2	33 vs 32 uNuA (u) R	12	54 vs 53 uNuA (u) R	22	36 vs 36 eNuA (t) L	32	33 vs 32 uNeA (t)
3	48 vs 48 eNuA (u) L	13	47 vs 48 uNuA (t) L	23	36 vs 35 uNuA (u) R	33	48 vs 47 uNuA (u) R
4	53 vs 53 eNeA (t)	14	43 vs 42 uNuA (u) R	24	47 vs 47 eNeA (t)	34	32 vs 32 eNuA (t) R
5	43 vs 43 eNuA (u) R	15	42 vs 42 eNeA (t)	25	43 vs 42 uNeA (t)	35	36 vs 36 eNuA (u) L
6	35 vs 35 eNeA (t)	16	53 vs 54 uNeA (u)	26	33 vs 33 eNuA (u) R	36	33 vs 33 eNeA (u)
7	35 vs 36 uNeA (u)	17	42 vs 42 eNuA (t) R	27	48 vs 47 uNeA (t)	37	53-54 uNuA (t) L
8	42 vs 43 uNuA (t) L	18	36 vs 35 uNeA (t)	28	42 vs 43 uNeA (u)	38	35 -36 uNuA (t) L
9	48 vs 48 eNeA (u)	19	32 vs 33 uNeA (u)	29	53 vs 53 eNuA (t) R	39	54 vs 54 eNeA (u)
10	47 vs 47 eNuA (t) L	20	54 vs 53 uNeA (t)	30	43 vs 43 eNeA (u)	40	32 vs 33 uNuA (t) L

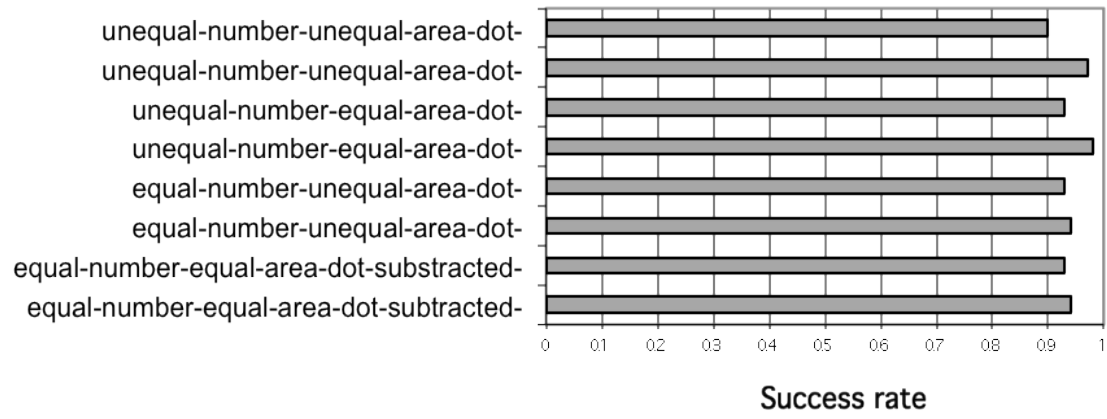


Figure 6: Results of Experiment 2

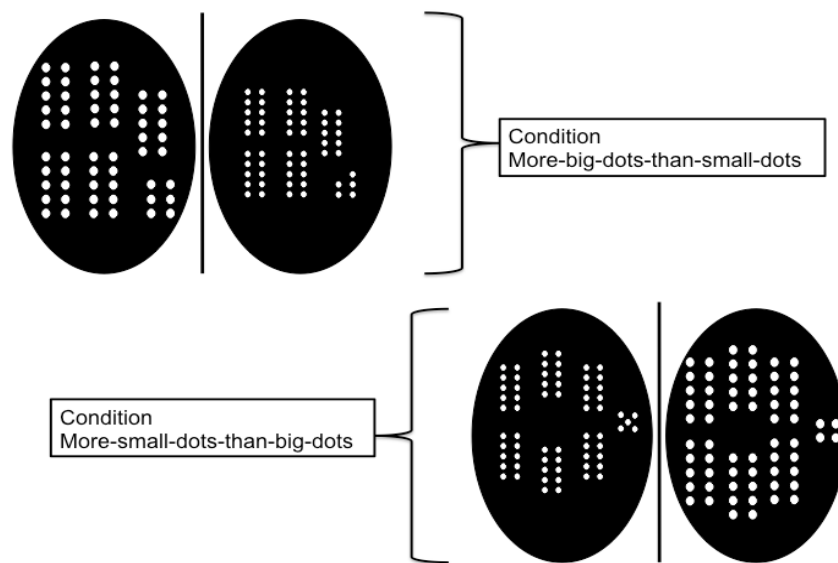


Figure 7: Example of two items (56 vs 55 and 65 vs 64) of Experiment 3

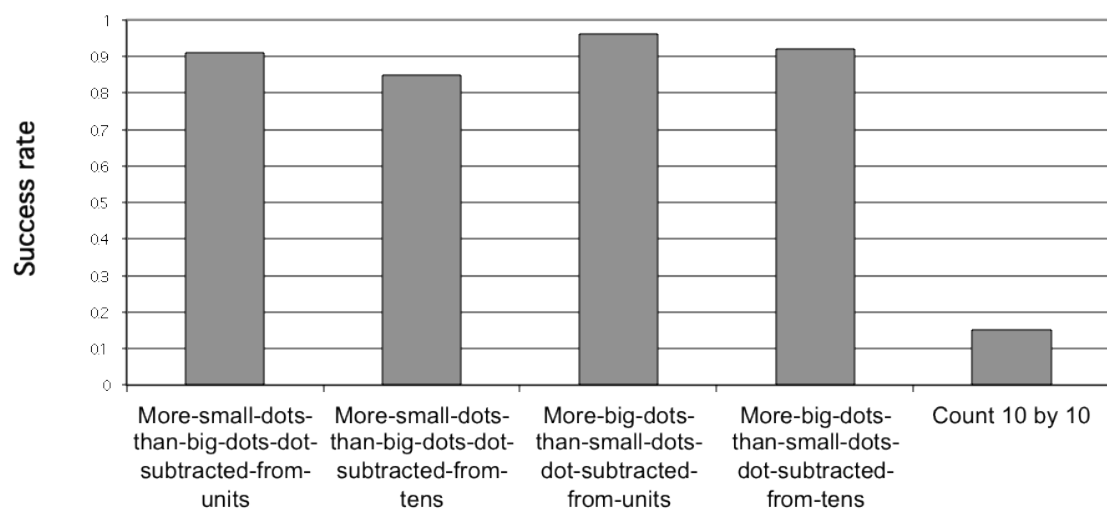


Figure 8: Results of Experiment 3

Article 3

The numerical properties of configured groups: a missing link?

Cette thèse est une thèse par articles. Conformément aux normes de présentation de ce type de thèse, cet article est présenté tel qu'il a été soumis le 21 janvier 2016 à la revue Journal of experimental child psychology. Il respecte pour cette raison les normes de soumission de cette revue.

The numerical properties of configured groups: a missing link?

Sébastien Miravète_A, André Tricot_B, Slava Kalyuga_C & Franck Amadieu_D

A (Corresponding author): Sébastien Miravète, CLLE Institute, University of Toulouse (France)

Mail: sebastien.miravete@gmail.com

Postal address: Sébastien Miravète/chez Andre Tricot/Laboratoire CLLE-LTC/Université de Toulouse Jean-Jaurès/Maison de la Recherche/ 5, allées Antonio-Machado/31058 TOULOUSE Cedex 9/France

B: André Tricot, CLLE Institute, University of Toulouse (France)

Mail: Andre.Tricot@univ-tlse2.fr

Postal address: Andre Tricot/Laboratoire CLLE-LTC/Université de Toulouse Jean-Jaurès/Maison de la Recherche/ 5, allées Antonio-Machado/31058 TOULOUSE Cedex 9/France

C: Slava Kalyuga, School of Education, University of New South Wales, Sydney (AUSTRALIA)

Mail: s.kalyuga@unsw.edu.au

Postal address: Slava Kalyuga/**School of Education**/The University of New South Wales/Sydney NSW 2052/Australia

D: Franck Amadieu, CLLE Institute, University of Toulouse (France)

Mail: Andre.Tricot@univ-tlse2.fr

Postal address: Franck Amadieu/Laboratoire CLLE-LTC/Université de Toulouse Jean-Jaurès/Maison de la Recherche/ 5, allées Antonio-Machado/31058 TOULOUSE Cedex 9/France

Abstract

Humans have primary innate arithmetical capacities (e.g. approximate comparisons of large quantities) and secondary acquired academic arithmetical abilities (e.g. the exact counting of large quantities, the use of the decimal system). The main hypothesis of this study is that the numerical properties of configured groups could be a transitional stage between the discovery of the exact number's idea and the discovery of the decimal system (at school or during human cultural evolution). Experiment 1 showed that 8-years old could compare two exact large quantities of dots in only five seconds when they were organized with configured groups and could not compare the same quantities when they were not organized with configured groups. Experiment 2 failed to show that 5-years old could compare exact large quantities but suggested that configured groups used in Experiment 1 were too difficult to visually analyze. Experiment 3 showed that 5-years old could compare exact large quantities when they were organized with simpler configured groups – these groups required fewer visual scans to be compared. These results suggest that children can use the numerical properties of configured groups without any explicit instruction or training and before their learning of the decimal system. Using these properties, they can quickly compare, without counting, exact large quantities, with a numerical representation. These properties could be a “missing link” between the primary and the secondary arithmetical abilities.

Keywords

Number sense; Numerical cognition; Number concept; Number comprehension;
Grouping; Evolutionary educational psychology

Printing in color (or in black-and-white) is not required.

Abstract

Humans have primary innate arithmetical capacities (e.g. approximate comparisons of large quantities) and secondary acquired academic arithmetical abilities (e.g. the exact counting of large quantities, the use of the decimal system). The main hypothesis of this study is that the numerical properties of configured groups could be a transitional stage between the discovery of the exact number's idea and the discovery of the decimal system (at school or during human cultural evolution). Experiment 1 showed that 8-years old could compare two exact large quantities of dots in only five seconds when they were organized with configured groups and could not compare the same quantities when they were not organized with configured groups. Experiment 2 failed to show that 5-years old could compare exact large quantities but suggested that configured groups used in Experiment 1 were too difficult to visually analyze. Experiment 3 showed that 5-years old could compare exact large quantities when they were organized with simpler configured groups – these groups required fewer visual scans to be compared. These results suggest that children can use the numerical properties of configured groups without any explicit instruction or training and before their learning of the decimal system. Using these properties, they can quickly compare, without counting, exact large quantities, with a numerical representation. These properties could be a “missing link” between the primary and the secondary arithmetical abilities.

Keywords

Number sense; Numerical cognition; Number concept; Number comprehension;
Grouping; Evolutionary educational psychology

1. Introduction

Humans have some “primary mathematical competencies” (Geary, 2007). In other words, they are genetically predisposed, since their origin, to acquire these numerical competencies effortlessly at very young ages in order to increase their chances of survival (Geary, 2008). For instance, newborns can compare approximately large quantities of objects (Coubart, Izard, Spelke, Marie & Streri, 2014); 5-months babies are able to compare exactly small numbers of objects (Féron, Gentaz & Streri, 2006), etc.

It is generally admitted that this innate “number sense” cannot operate on exact large quantities (Dehaene, 2011). That is why humans had to discover or learn some new numerical abilities (e.g. the counting, the use of the decimal system). With this “secondary numerical knowledge” (Geary, 2008), humans can process exact large number of objects.

However, number sense ignores the exact number’s idea: a number of objects is a sum of objects ($1+1+1+1+\dots$) and the number of objects of a collection changes if one object is added or subtracted to this collection ($1+1+1 \neq 1+1+1+1$). Number sense represents the number of objects but non-numerically (Carey, 2009). It processes quantities with non-numerical representations. Some studies suggest that some secondary numerical strategies (e.g. one-to-one correspondences, counting) could also use some non-numerical representations (Izard, Streri, & Spelke, 2014; Davidson, Eng & Barner, 2012). Some numerical-tasks could be successful without numerical representations. This is the “number comprehension problem” in Numerical cognition research.

The aim of this work is to show that children (5 and 8 years old) can use the numerical properties of configured groups in order to quickly compare, without counting, exact large quantities with a numerical representation. With 8-years old, the aim is to verify if these numerical properties coexist with the other exact numerical abilities (e.g. counting) and could

be spontaneously used by children without any instruction. With 5-years old, the aim is to verify if these numerical properties could be used before the learning of the decimal system. Then, it could be shown that the discovery of these properties during the human cultural evolution or their use in school could be a discovery between the acquisition of the exact number's idea and the acquisition of the decimal system.

1.1. Primary non-numerical representations

Humans have three innate numerical abilities (Carey, 2009; Le Corre & Carey, 2007): Approximate Number System (ANS), Parallel Individuation System (PIS) and Plurality System. With ANS, they can approximately compare (Xu, Spelke, Goddard, 2006), add and subtract (Gilmore, Mc Carthy & Spelke, 2007) large quantities (bigger than three). With PIS, they can exactly compare (Turati, Gava, Valenza & Ghirardi, 2013), add and subtract (Kobayashi, Hiraki, Mugitani & Hasegawa, 2004) small quantities (up to three objects). With Plurality System (Barner et al., 2007), they can distinguish one object and more than one objects ("one" and "many"). How do these primary systems represent quantities?

ANS could represent a quantity of objects with an internal analog magnitude (Nieder & Dehaene, 2009; Feigenson, Carey & Hauser, 2002): when the quantity of object increases, the internal magnitude increases, when the quantity decreases, the internal magnitude decreases. A magnitude is not a multiplicity of objects. A magnitude is a single object (e.g. a segment, a surface, a neural frequency). This object could be more or less extended. It is like a more or less long elastic. A number of objects is a sum of objects and consequently a multiplicity of objects. Therefore, a magnitude cannot be a number of objects because it cannot be a multiplicity of objects. Thus, ANS could process quantities with non-numerical representations.

For the PIS, a quantity of objects is not a number of objects (Feigenson, 2005; Feigenson et al., 2002) because the objects are not added to each other. It is just a multiplicity of different objects (each object is memorized in an “object file”). For instance, a teacher can detect the absence of Jack and the absence of John. In this situation, the number of absentees does not interest him. He is only interested by the absence of this student and this other student (the absentees are not added to each other).

For the Plurality System, quantities are pluralities. A plurality is a sum of objects that contains “more than one” object (Feigenson & Carey, 2005). However, there is no difference between two pluralities: there is no difference between “the dogs” and “the dogs”. There is only a difference between “the dog” and “the dogs”. The sum generates always the same number of objects (the number “many objects”). That is why the Plurality System processes quantities with non-numerical representations. It ignores that adding or subtracting an object to a sum of objects generates a new number of objects.

Some studies use intermodal tasks (Coubard et al., 2014; Féron et al., 2006; Kobayashi, Hiraki & Hasegawa, 2005). The results show that newborns or 4-7 months babies are able to compare small or large intermodal quantities: four sounds and twelve seen objects; two touched objects and three seen objects or two sounds and two seen objects. These results confirm that newborns and babies can compare the numerosity of collections.

However, the ANS could represent large intermodal quantities with internal magnitudes (e.g. four sounds are represented by an internal magnitude and twelve seen objects by a larger internal magnitude) and the PIS could associate the intermodal data in the same object file (e.g. this sound is the sound of this seen object, this seen object is the visual image of this touched object) and represent quantities by a multiplicity of different objects. These primary systems could process numerosities with non-numerical representations

(Carey, 2009; Geary, 2006). They have “external” numerical properties (they can compare numerosities) but they could not have “internal” numerical representations.

1.2. Secondary non-numerical representations

Primary numerical abilities are not able to process exact large quantities: the PIS only treats small quantities, the ANS does not distinguish two large quantities if they are too close, and all large quantities are the same for Plurality System. That is why humans have to use secondary numerical abilities to process exact large quantities. What are these secondary numerical abilities? Currently, researches in Numerical cognition explore five principle hypotheses: calibrating, counting, one-to-one correspondences, number line, grouping.

1.2.1. Main hypotheses

Calibrating hypothesis. Humans could associate a numeral (or a number-word as “three”, “twenty”) and an internal analog magnitude designated by this numeral (Le Corre & Carey, 2007). This “mapping” between numerals and internal analog magnitudes decreases the approximate nature of ANS (Noël & Rousselle, 2011; Izard & Dehaene, 2008). That is why Verguts and Fias (2004) suppose that this mapping could calibrate ANS. In this perspective, ANS could become exact: for each numeral, there would be a single internal magnitude.

Counting hypothesis. In our societies, children learn to count. During this learning, they acquire the “cardinal principle” and the “successor principle” (Sarnecka & Wright, 2013; Sarnecka & Carey, 2008). When they understand the cardinal principle, they know that the last word spoken, after a count, designates the number of counted objects. When they

understand the successor principle, they know that going forward one word in the number list means adding one object, going forward two words means adding two objects, going backward one word means subtracting one object, etc. In brief, if humans understand the cardinal principle and the succession principle, then their counting of large quantities is an exact procedure that uses some internal numerical representations.

Correspondence hypothesis. It is possible to associate an object of the first collection with an object of the second collection and so on. In this manner, it could be made or compare two equal large collections. According to Izard et al. (2014) and Gelman and Gallistel (1986), the experimenter has to verify if the collections are always equal for participants after some transformations: adding or subtracting an element to a collection (addition/subtraction principle); changing the spatial position of the elements in a collection (identity principle); replacing an element of a collection with a new element (substitution principle). In this manner, it could be verified if one-to-one correspondences use an internal numerical representation (if the participants understand these three principles, then they understand that two collections in one-to-one correspondence have exactly the same number of objects).

Number line hypothesis. Participants have to position some large numerals on a bounded or unbounded line (for a critical overview, see Ebersbach, Luwel & Verschaffel, 2013). Their positioning is approximate because the line is not graduated. Link, Hubert, Nuerk and Moeller (2014) suggest that their positioning on a bounded line depends on their understanding of the decimal system (e.g. “35” means “3 groups of ten units and 5 units”). In this case, a numeral designates at least a sum of units (e.g. “35” units). Furthermore, other results suggest that 3-8 years children position the numbers on an unbounded line with an addition or a multiplication strategy (Cohen & Sarnecka, 2014). Thus, for these children, a numeral designates perhaps a sum of measurement units. Ultimately, participants would use an internal numerical representation in order to position some large numerals on a bounded or

unbounded line. They could learn to figure large numerals on a non-graduated line with internal numerical representations.

Grouping hypothesis. Grouping facilitates the counting two-by-two or three-by-three (Starkey & McCandliss, 2014; Van Oeffelen & Vos, 1982). Grouping reveals the understanding of the decimal system (Vasilyeva et al., 2015; Chan, Au & Tang, 2014). In all these perspectives, a group is a sum of units. So, grouping would use an internal numerical representation.

Grouping objects would facilitate also the internal visual representation of exact large numbers (Fuson et al., 1997). A human cognitive system would have an internal “instamatic camera” and with this mental camera, it could have a mental image of the number “98”. It could visualize 9 groups of tens and 8 units, i.e. at least 17 objects simultaneously ($9 + 8 = 17$). However, this hypothesis seems improbable for the moment because the visual working memory is limited to three-four simultaneous objects (Fekuda, Awh & Vogel, 2010).

Rosenberg and Feigenson (2013) show that chunking optimizes the memorization of exact large quantities. Yet, according to the authors, this internal representation of grouped objects (e.g. 2 groups of 2 groups of 2 objects) is not an internal numerical representation of exact large quantities. It is a representation of a multiplicity of different objects (or groups). Chunking just increases the capabilities of the PIS. That is why this Grouping hypothesis is different, as a group is not considered as a sum of units. In this approach, it is assumed that grouping (or chunking) does not trigger some internal numerical representations.

1.2.2. Limits of these hypotheses

A perfectly calibrated ANS could not have an internal numerical representation. Indeed, a perfect calibration could consist to associate to each numeral, a single internal

magnitude or even to each external quantity, a single internal magnitude. In this manner, ANS would continue to represent numerals or quantities with magnitudes. It would process exact large quantities but with non-numerical representations (as seen before, a magnitude is not a number of objects).

During their counting learning, children acquire the cardinal principle and the successor principle. The acquisition of the cardinal principle is evaluated by the Give- n -task and the acquisition of the successor principle by the Unit-task (Sarnecka & Wright, 2013; Sarnecka & Carey, 2008). However, these tasks could be successful without internal numerical representations.

In a Give- n -task, participants have to report n objects (e.g. “give me four puppets”). According to Davidson et al. (2012), children (3-5 years old) could label each object with a number-word: the object “one”, the object “two”, etc. Then, they could report all the labeled objects and give the correct number of objects to the experimenter. This labeling-counting does not require an internal numerical representation: children could not report a number of objects, but a multiplicity of labeled objects (a multiplicity of different objects).

Sarnecka & Carey (2008) prohibit children (2-4 years old) from counting in the Unit-task. Yet, it is not sure that these children do not count in their mind. Experimenter presented a collection of five objects and said to children that this collection contained “four” objects. Then, the experimenter added one or two objects and asked “now, is it five or six?”. Children could label-count the four objects implicitly and continue their labeling-counting when the experimenter added one or two objects. In this manner, they could give the correct answer even if they did not understand the successor principle (or the cardinal principle) and even if they did not have an internal numerical representation.

When the children position some numerals on a bounded or unbounded line (Number line Hypothesis), they could label-count and use a pragmatic strategy (the numbers on a line

are habitually separated by the same distance). In the same way, when the participants count two-by-two or three-by-three (Starkey & McCandliss, 2014; Van Oeffelen & Vos, 1982) or use different strategies to count (Chan et al., 2014) or build (Vasilyeva et al., 2015) some groups of tens and units (with base-10 blocks), they could label-count. That is why these positioning tasks or these grouping tasks could be successful without internal numerical representations.

32-months babies could make some one-to-one correspondences, but they could represent quantities with non-numerical representations (multiplicity of different objects) because they do not know the substitution principle (Izard et al., 2014).

Some studies evaluate if participants with an innumerate language can make two equal collections with a one-to-one correspondence procedure (for a review, see Izard et al., 2014). However, they do not control for the participants' understanding of addition/subtraction, identity and substitution principles. Spaepen, Coppola, Spelke, Carey and Goldin-Meadow (2011) only control the addition/subtraction principle.

Other studies verify partially if participants with numerate language know the identity principle. For example, in the famous Piaget's conservation-task (De Neys, Lubin & Houdé, 2014; Piaget, 1952), the area delimited by the objects is controlled (the length of the collection) but not the sum of the areas of objects (the total area). Pietroski, Lidz, Hunter and Halberda (2009) control the total area (half of the trials are "area-controlled") but not the length of the collection when they perfectly align two collections ("Column pair sorted" condition). Moreover, the authors show that the one-to-one correspondence procedure is approximate when the objects are not perfectly aligned.

1.3. The configured grouping hypothesis

In summary, a numerical-task should not be feasible only by the ANS, the PIS, the Plural System, a one-to-one correspondence (except if participants understand addition/subtraction, identity, substitution principles), a labeling-counting, a sensibility to the magnitude of the collections (e.g. volume delimited or occupied by the objects) or a pragmatic strategy (for others examples of pragmatic strategies, see Izard et al., 2014). Otherwise, it is possible to evaluate if participants have external numerical abilities but not some internal numerical representations. How this number comprehension problem could be solved?

Archeological data (Ifrah, 2000) revealed that old civilizations such as Elamites used configured groups to represent quantities (Figure 1). These data suggest that some types of visual groups could facilitate the activation of numerical representations. It could be possible to easily compare some exact large quantities without counting or making one-to-one correspondence when the quantities are grouped and configured (Figure 1b).

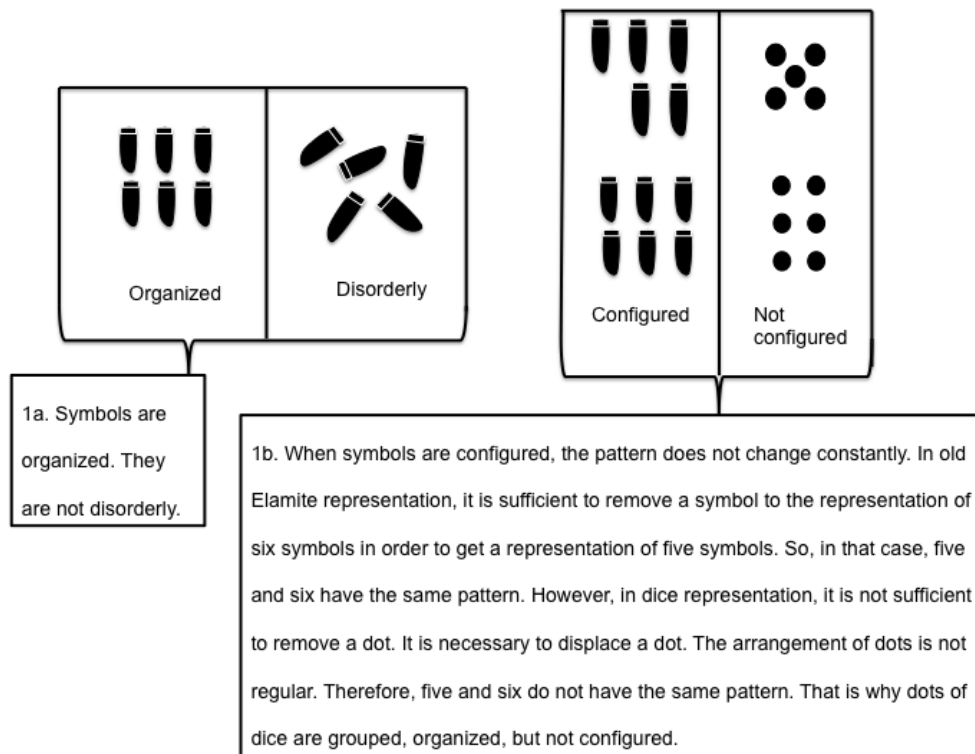


Figure 1: Two characteristics (organization and configuration) of old Elamite numerical symbols. Adapted from Ifrah (2000)

Indeed, configured groups seem to have two important properties: the equal and unequal properties of configured groups (Figure 2). Firstly, configured groups facilitate the visual perception of equal quantities: for a human cognitive system, two visually identical groups have the same quantity of objects (*equal property of configured groups*). Secondly, configured groups facilitate the visual perception of unequal quantities: for a human cognitive system, if two groups have the same configuration, then it is easier to see if one of the two groups contains more or less objects than the other (*unequal property of configured groups*). With these numerical properties of configured groups, a human cognitive system could quickly compare two exact large quantities organized with configured groups.

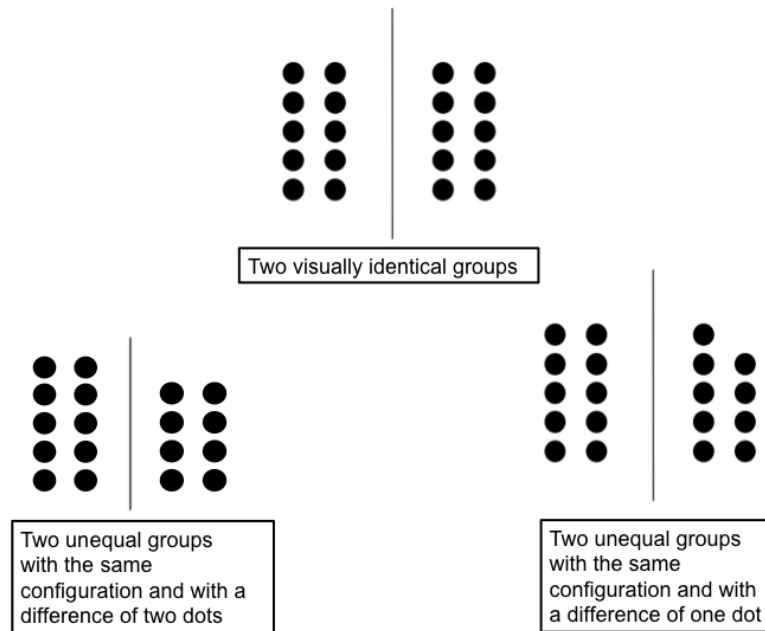


Figure 2: An illustration of equal and unequal properties of configured groups. Equal groups illustrate the equal property. Unequal groups illustrate the unequal property with a difference of one or two dots.

These numerical properties of configured groups require the comprehension of the exact number's idea: the human cognitive system needs to know that two quantities differ, if one of them has one more object, or one less object, than the other. In this case, the human cognitive system makes this conclusion: the collection with the missing dot has one dot less, so, this collection has fewer dots than the other. This reasoning requires understanding that two quantities differ when one object is added or subtracted in one of them and that a sum of dots generates different quantities of dots. In other words, it necessitates comprehending what is an exact number of objects.

The goal of this study is to show that these numerical properties could be easily used from an early age when it is impossible to count or to match with one-to-one correspondences some exact large quantities.

2. Experiments

Our main hypothesis was that equal and unequal properties of configured groups exist in human cognition from an early age and could be spontaneously used without counting. Three experiments were conducted with Grade 3 children (Experiment 1) and with kindergartens (Experiment 2 and 3). Children were asked to indicate what part of a computer screen was presenting more dots than the other. The time of presentation was five seconds and the number of dots was large. In this manner, it was impossible to count in so short a time with so many objects. Children did not receive any training. There was a single independent variable: the dots were either organized (in configured groups) or with configured groups.

Experiment 1 was designed to show that 8-years children could quickly compare some exact large quantities if the quantities were organized with configured-groups and could not quickly compare these same quantities if the quantities were not organized with configured-groups. At this age, children already had a lot of numerical abilities: the counting, the one-to-one correspondence, the ANS, etc. It was assumed that numerical properties of configured groups coexisted with these numerical abilities and could be accessible when the numerical abilities were inefficient.

However, during their learning of the decimal system, 8-years children probably used some configured groups (e.g. base-10 blocks) to represent exact large quantities. They could be accustomed to utilize some configured groups. That is why it could be interesting to verify if non-accustomed children (5-years old) are able to use the numerical properties of configured groups with the same ease. In this way, it could be showed that these numerical properties could be used spontaneously and easily before the learning of the decimal system. In this case, they would not be the result of this learning. That is why Experiment 2 and 3 were designed to show that kindergartens (5-years old) could use the numerical properties of

configured groups before their learning of the decimal system (In France, the learning of the decimal system starts in Grade 1 at 6-years old).

2.1. Experiment 1

In this study, 8-years children had to quickly compare (in only five seconds) some exact large quantities ($30 < n < 70$). Some quantities were organized with configured-groups (condition Grouped-Configured and Grouped-Oriented) or not (condition Non-Grouped or Grouped-Segmented). The integrity of configured groups was preserved in the first situation and was not preserved in the second situation. The aim was to show that configured groups were indispensable to compare these quantities.

In the first case (Figure 3b, 3c), the configured groups had (condition Configured-Grouped) or not (condition Grouped-Oriented) the same orientation. In this situation, the integrity of configured groups was preserved because they conserved their configuration. The aim was to control that the most important was the configuration and not the orientation of groups.

In the second case (Figure 3a, 3e), the configured groups were eliminated by bursting (condition Non-Grouped) or by cutting (condition Grouped-Segmented). In this situation, the integrity of configured groups was not preserved because their configuration was exploded or broken in two.

There was also an intermediate condition (condition Grouped-Reconfigured): the configured-groups had not the same configuration (Figure 3d).

There were two hypotheses: (1) children could compare some exact large quantities when the integrity of configured-groups was preserved and children could not compare some exact large quantities when this integrity was not preserved; (2) children could compare more

easily the dots when they were organized with the same configurations. This second hypothesis is to confirm the numerical property of configured groups (it is easier to compare two quantities if they have the same configuration).

2.1.1. Participants

48 third graders (22 boys, 26 girls, $M_{\text{age}} = 8.45$, $SD = 0.48$) participated to this experiment. They came from two schools located in a middle socio-economic status area, South-west of France.

2.1.2. Materials

A collection of black dots (diameter = 4 mm) was presented on a screen (Figure 3). The screen (286 x 180 mm) was divided into two equal parts (left and right) by a black vertical line. The bottom of the screen was white. The distance between the face of pupils and the screen was around 400 mm.

In condition Non-Grouped (Figure 3a), the dots were not grouped but the distribution of the dots was the same in the two parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first. Then, two dots were subtracted in the left hand side or the right hand side. In this way, the right or left hand side contained two dots more than the other side. In other words, one part of the screen contained two more dots than the other part.

In the condition Grouped-Configured (Figure 3b), the dots were grouped by ten (height = 40 mm; width = 12 mm). The remaining dots were grouped into a single group of units (10 mm < height < 30 mm; width = 12 mm). The groups were organized in a five-five configuration. The organization of the dots was the same in the both parts of the screen: the

second part had been obtained by a translation of the first. Two dots were subtracted in the left or right hand side - one of the sides contained two dots more than the other side.

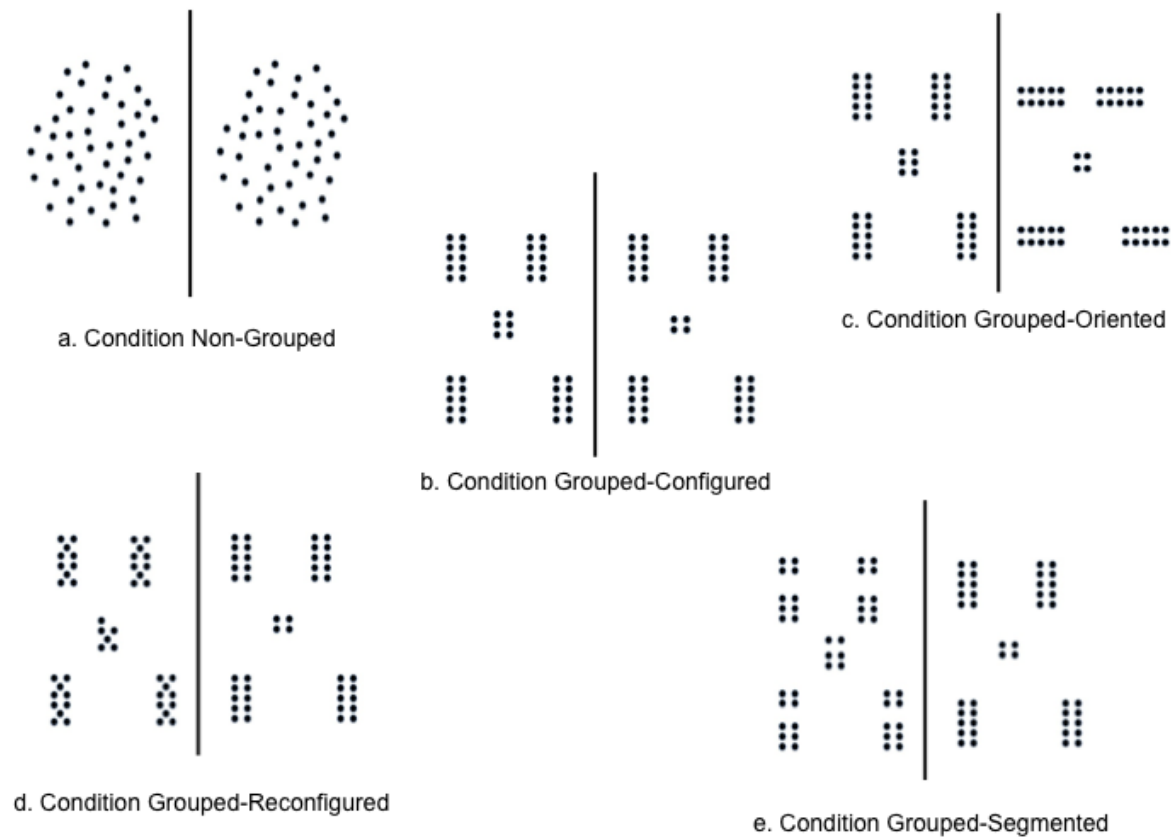


Figure 3: Examples of five items used in Experiment 1

The condition Grouped-Oriented (Figure 3c) was the same that the condition Grouped-Configured. The only difference was that the second part had been obtained by a translation of the first and by a rotation (90 degrees) of each group of tens and each group of units.

The condition Grouped-Reconfigured (Figure 3d) was the same that the condition Grouped-Configured. The only difference was that the second part had been obtained by a translation of the first and by a transformation of the groups' configuration. On the first side of the screen, the dots were always organized in a five-five configuration. But, on the other side, the dots were organized in a dice configuration.

The condition Grouped-Segmented (Figure 3e) was the same that the condition Grouped-Configured. The only difference was that the second part had been obtained by a translation of the first and by a segmentation of the groups. Of course, the segmentation increased the size of tens-group (height = 50 mm; width = 12 mm) and units-group (10 mm < height < 50 mm; width = 12 mm).

2.1.3. Procedure

Each participant was sitting on a chair in front of a computer screen. The experimenter was located on a seat behind him. The child could not see what the experimenter was writing. The experimenter noted the student's responses and scrolled items. For each item, the pupil must only point the portion of the screen (left or right), which contains the most dots. The exposure duration for each item was five seconds. Between items, the screen was white. The time between items was not limited. The experimenter displayed a new item after the child had given her/his answer (the response time was not limited).

The game consisted of 40 items (8 items per condition). In each condition, the number of dots were as follows: 46 vs 44; 58 vs 56; 66 vs 68; 46 vs 48. For each pair of comparison (e.g., 46 vs. 44, 58 vs. 56), there were two versions: dot-subtracted-from-tens version and the dot-subtracted-from-units version (Figure 4). Indeed, the dots could be subtracted from a group of ten or from a group of units. Naturally, nobody represents 45 dots with 3 groups of 10, a group of 8 and a group of 7 but rather with 4 groups of 10 and a group of 5 (Ifrah, 2000). However, the presence of dot-subtracted-from-tens version is important. With this version, children must globally look at each collection: they cannot only compare the groups of units.

There are two versions of each condition (Figure 4) because there are also two versions of condition Non-Grouped: dot-subtracted-from-tens version and dot-subtracted-from-units version. Indeed, an item of a condition Non-Grouped is obtained by mixing the dots of an item of a condition Grouped-Configured. That is why there are condition Non-Grouped_{dot-subtracted-from-tens} and condition Non-Grouped_{dot-subtracted-from-units}.

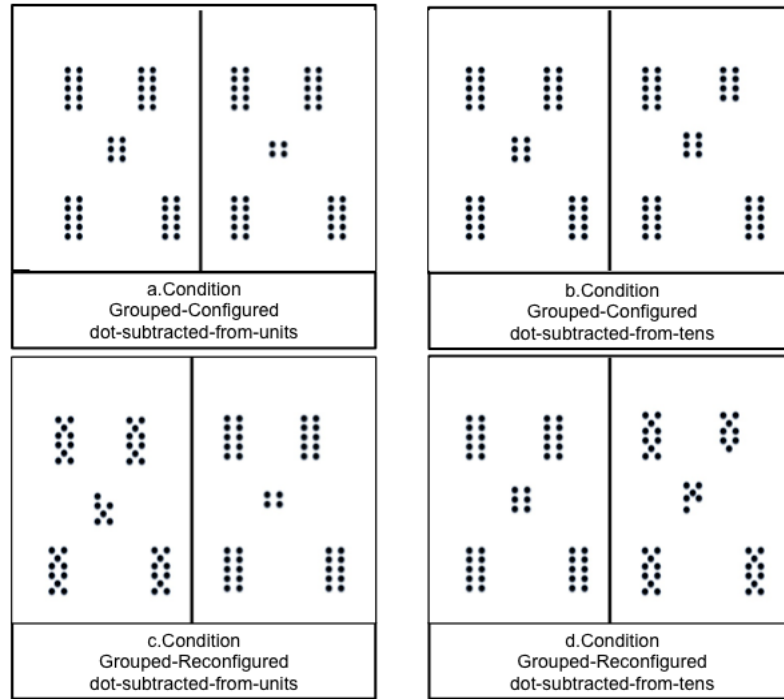


Figure 4: Examples of the dot-subtracted-from-tens version and the dot-subtracted-from-units version in two conditions Grouped-Configured and Grouped-Reconfigured in Experiment 1

In conditions Grouped-Oriented, Grouped-Reconfigured, Grouped-Segmented, the rotation, the reconfiguration and the segmentation were applied in the left or in the right hand side as follows: 46 vs 44 left_{dot-subtracted-from-units} ; 46 vs 44 right_{dot-subtracted-from-tens} ; 58 vs 56 right_{dot-subtracted-from-units} ; 58 vs 56 left_{dot-subtracted-from-tens} ; 66 vs 68 right_{dot-subtracted-from-units} ; 66 vs 68 left_{dot-subtracted-from-tens} ; 46 vs 48 left_{dot-subtracted-from-units} ; 46 vs 48 left_{dot-subtracted-from-tens}

The order of 40 items was random and different for each child. Children never knew if their answers were correct or not.

2.1.4. Results

In order to evaluate if the children are able to compare the quantities, a two-tailed sign test was used. The results are shown in Figure 5.

In the condition Non-Grouped_{dots-subtracted-from-units}, the rate of correct answers is not significantly different from random: $M = 0.55$, $SD = 0.25$, $p = 0.17$, two-tailed sign test.

In the condition Non-Grouped_{dots-subtracted-from-tens}, the rate is different from random: $M = 0.67$, $SD = 0.23$, $p < .001$, two-tailed sign test.

In the condition Grouped-Configured_{dots-subtracted-from-units}, the rate of correct answers is different from random: $M = 0.75$, $SD = 0.24$, $p < .001$, two-tailed sign test.

In the condition Grouped-Oriented_{dots-subtracted-from-units}, the rate of correct answers is different from random $M = 0.75$, $SD = 0.23$, $p < .001$, two-tailed sign test.

In the condition Grouped-Reconfigured_{dots-subtracted-from-units}, the rate of correct answers is different from random: $M = 0.64$, $SD = 0.22$, $p < .001$, two-tailed sign test.

In the condition Grouped-Segmented_{dots-subtracted-from-units}, the rate of correct answers is not significantly different from random: $M = 0.53$, $SD = 0.27$, $p = 0.42$, two-tailed sign test.

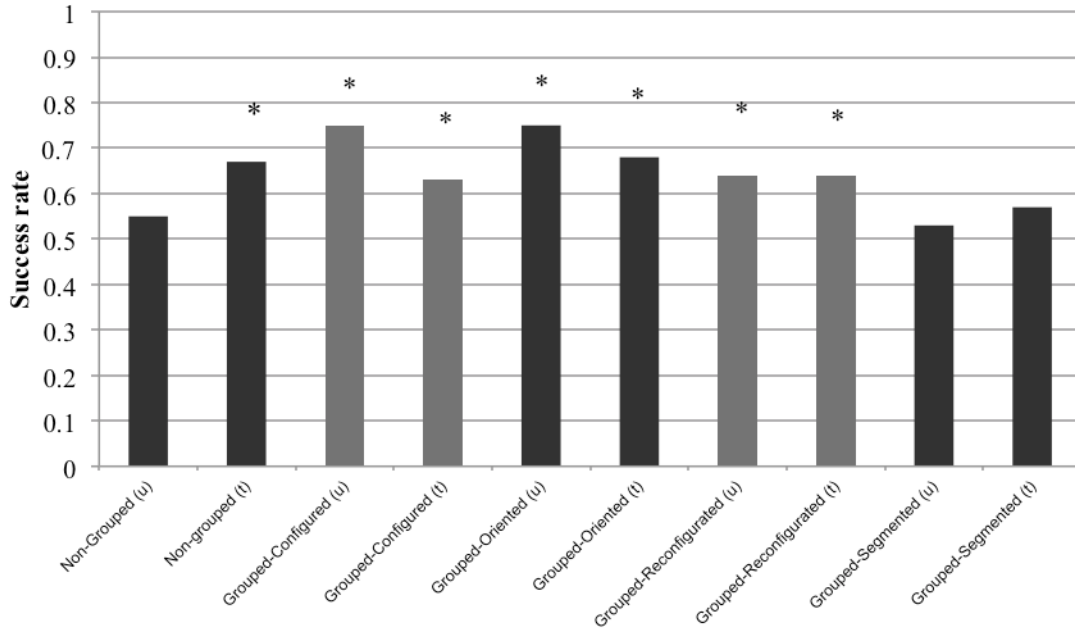


Figure 5: Results of Experiment 1 for each condition. The dots were subtracted from a group of units (u) or the dots were subtracted from a group of tens units (t).

A non-parametrical Friedman test is conducted in order to verify if there are some significant differences between the five conditions in the version “dots-subtracted-from-units” The Bonferroni correction is applied: the p-value are multiplied by 10 in order to avoid a statistical error (they are 10 two-by-two comparisons). This test is significant: $\chi^2(4,48) = 32.47$, $p < .001$. More precisely (Table I), there is four significant differences between the conditions: Grouped-Configured_{dots-subtracted-from-units} and Non-Grouped_{dots-subtracted-from-units} ($p = .004$); Grouped-Configured_{dots-subtracted-from-units} and Grouped-Segmented_{dots-subtracted-from-units} ($p = .001$); Grouped-Oriented_{dots-subtracted-from-units} and Non-Grouped_{dots-subtracted-from-units} ($p = .014$); Grouped-Oriented_{dots-subtracted-from-units} and Grouped-Segmented_{dots-subtracted-from-units} ($p = .002$). All the other two-by-two comparisons were not significant (all $p > .05$).

Table 2: Results of the Friedman Test with the five conditions in the version dots-subtracted-from units (u). In summary, the compared conditions are: the condition Grouped-Configured_{dots-subtracted-from-units}, the condition Grouped-Oriented_{dots-subtracted-from-units}, the condition Non-Grouped_{dots-subtracted-from-units}, the condition Grouped-Segmented_{dots-subtracted-from-units}, the condition Grouped-Reconfigured_{dots-subtracted-from-units}. The Bonferroni correction is applied (“adjusted p-value”) or not (“non-adjusted p-value”).

Compared conditions	Adjusted p-value	Non-Adjusted p-value
Grouped-Configured (u) vs. Non-Grouped (u)	0.004	0
Grouped-Configured (u) vs. Grouped-Segmented (u)	0.001	0
Grouped-Oriented (u) vs. Non-Grouped (u)	0.014	0.001
Grouped-Oriented (u) vs. Grouped-Segmented (u)	0.002	0
Grouped-Configured (u) vs. Grouped-Oriented (u)	1	0.747
Grouped-Configured (u) vs. Grouped-Reconfigured (u)	0.454	0.045
Grouped-Oriented (u) vs. Grouped-Reconfigured (u)	0.933	0.093
Non-Grouped (u) vs. Grouped-Reconfigured (u)	1	0.129
Grouped-Segmented (u) vs. Grouped-Reconfigured (u)	0.454	0.045
Grouped-Segmented (u) vs. Non-Grouped (u)	1	0.628

There are no significant differences between the five conditions in the version “dots-subtracted-from-tens”: khi-square (4,48)= 6.14, $p = 0.189$, Friedman test.

2.1.5. Discussion

These results verify the principle hypothesis: children can compare some exact large quantities when they are organized with configured-groups (conditions Grouped-Configured and Grouped-Oriented) and do not seem able to compare these same exact large quantities when they are not organized with configured-groups (conditions Non-Grouped and Grouped-Segmented). Moreover, the most important is the configuration and not the orientation of groups.

Indeed, as shown in the two-tailed sign test, the success rate is significantly different from random in conditions Grouped-Configured and Grouped-Oriented and not significantly

different from random in conditions Non-Grouped and Grouped-Segmented. As shown in the Friedman test, there is a significant difference in performance when the dots are organized with configured groups (Grouped-Configured or Grouped-Oriented) and when they are not (Non-Grouped or Grouped-Segmented). In addition, performances in conditions Grouped-Configured and Grouped-Oriented are the same (.75) and according to the Friedman test these performances are not significantly different ($p = 1.0$).

These results do not verify the second hypothesis. It is not sure that children compare more easily the dots when they are organized with the same configurations. According to the two-tailed sign test, it is true that the success rate in the condition Grouped-Configured (.75) is larger than the success rate in the condition Grouped-Reconfigured (.64). However, according to the Friedman Test (Table I), this difference is not significant ($p = .45$). This hypothesis is not invalidated but it is not validated. That is why it will need to be reevaluated in future research.

In condition Non-Grouped, the results are contradictory: according to the two-tailed sign test, children can compare (.67 of success rate) or not (.55 of success rate) some disordered collections. The success in Non-Grouped_{dots-subtracted-from-tens} condition could be explained by an accidental and favorable disposition of the dots in a situation where the second collection is obtained by a translation of the first. Perhaps, this “translation”-effect could have an effect on the numerical comparison under some conditions.

2.2. Experiment 2

During their learning of the decimal system, 8-years children had been accustomed to perceive some exact large quantities organized with configured groups (e.g. base-10 blocks). The hypothesis of Experiment 2 was that kindergartens (5-years old) could quickly compare

(in five seconds) some exact large quantities ($18 < n < 26$) organized with configured-groups, even if they did not have the time to count and even if they had never been accustomed to perceive some exact large quantities organized with configured-groups. The dots were small or big in order to control the area occupied or delimited by the dots. In this manner, it could be verified that kindergartens compared the number of dots and not the area occupied or delimited by the dots. Indeed, at this age, some children could be “nonconservers” (De Neys et al., 2014; Piaget, 1952): they could compare the area delimited (or occupied) by the dots and not the number of dots.

2.2.1. Participants

58 kindergartens (33 boys, 25 girls, $M_{age} = 5.48$, $SD = 0.29$) participated in this experiment. They came from three kindergarten schools located in a middle socio-economic status area, South-west of France.

2.2.2. Materials

A collection of big black dots (diameter = 12 mm) and small black dots (diameter = 8 mm) were presented on a screen (Figure 6). The screen size, the bottom of the screen, and the distance between pupils and screen were the same as in Experiment 1.

In condition Units (Figure 6a and 6b), there are only some units' groups. The dots were grouped in a five-five configuration. The distribution of the dots was the same in the two parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first and by an enlargement of the dots (50%). Then, one dot was subtracted in the left hand side or the right hand side. In this way, the right or left hand side contained one dot more than the other side.

The dot could be removed from the big dots (Figure 6a) or from the small dots (Figure 6b). In the condition Units-less-big-dots-than-small-dots, there are less big dots than small dots. In the condition Units-less-small-dots-than-big-dots, there are less small dots than big dots. In the items of the condition Units-less-big-dots-than-small-dots, the height and the width of the largest collection were equal or less than the height and the width of the smaller collection.

In the condition Units-Tens (Figure 6c and 6d), the only difference with the condition Units is that there are some groups of units and some groups of tens.

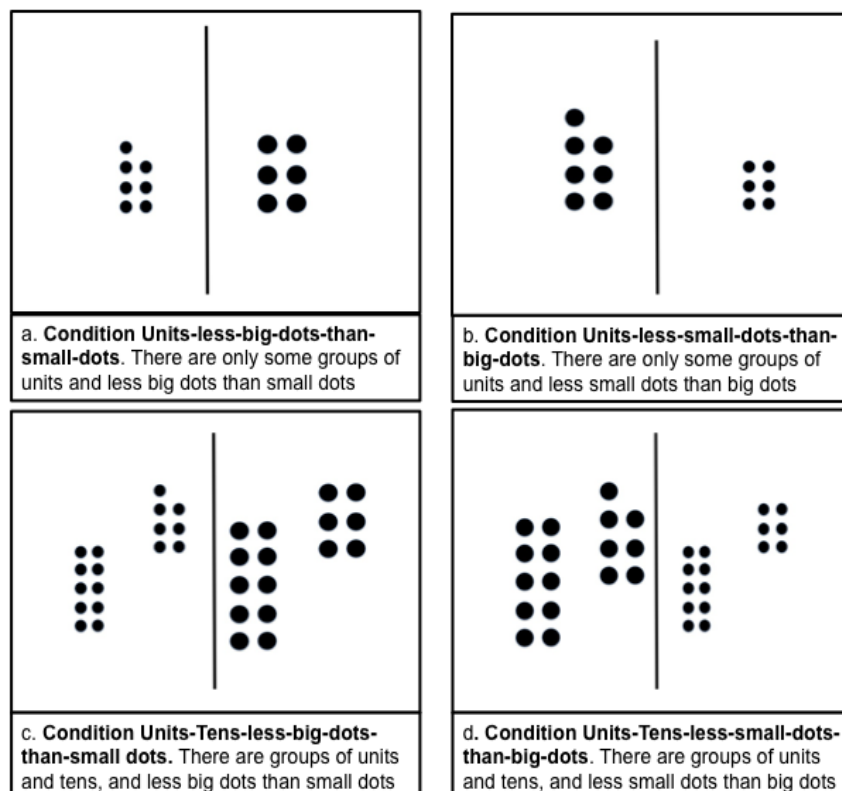


Figure 6: four examples of items in Experiment 2 (7 vs 6 and 17 vs 16)

2.2.3. Procedure

The procedure was the same as in Experiment 1. The only difference is the quantity of items and the number of games. The first game consisted of 8 items. The number of dots, and their left or right placement on the screen, were as follows: 7 vs 6, 8 vs 7, 8 vs 9, 9 vs 10. For

each comparison, there are two versions: Units-less-big-dots-than-small-dots and Units-less-small-dots-than-big-dots.

The second game consisted of 16 items. The number of dots, and their left or right placement on the screen, were as follows: 26 vs 25, 17 vs 16, 23 vs 24, 17 vs 18. For each comparison, there are four versions: Units-Tens-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-units}, Units-Tens-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-tens}, Units-Tens-less-small-dots-than-big-dots_{dots-subtracted-from-units}, Units-Tens-less-small-dots-than-big-dots_{dots-subtracted-from-tens}.

Each child began the second game immediately after the first one had been completed. Children never knew if their answers were correct or not.

2.2.4. Results and discussion

The results are shown in Figure 7. In the condition Units-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-units}, the rate of wrong answers is different from random: $M = 37.93$, $SD = 31.49$, $p < .001$, two-tailed sign test. In the condition Units-Tens-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-units} the rate of wrong answers is different from random: $M = 32.32$, $SD = 31.06$, $p < .001$, two-tailed sign-test.

These results suggest that children indicate the big dots or the bigger amplitude (the area delimited or occupied by the dots). There is no evidence that children compare the number of dots. Therefore, our hypothesis is not verified: 5-years children do not use the numerical properties of configured groups.

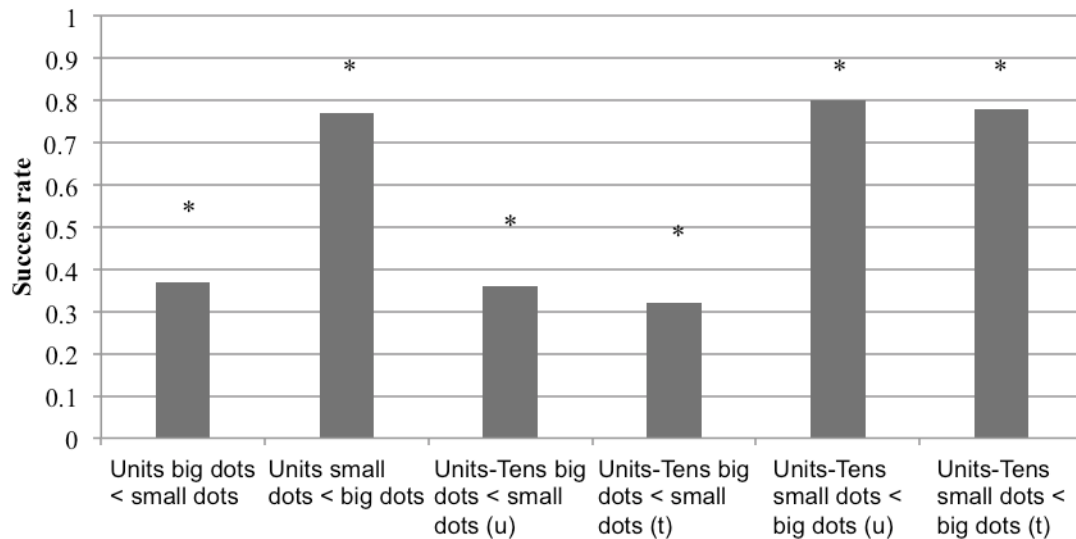


Figure 7: Results of Experiment 2 for each condition in this order: Units-less-big-dots-than-small-dots (Units big dots < small dots), Units-less-small-dots-than-big-dots (Units small dots < big dots), Units-Tens-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-units} (Units-Tens big dots < small dots (u)), Units-Tens-less-big-dots-than-small-dots_{dots-subtracted-from-tens} ((Units-Tens big dots < small dots (t)), Units-Tens-less-small-dots-than-big-dots_{dots-subtracted-from-units} (Units-Tens small dots < big dots (u)), Units-Tens-less-small-dots-than-big-dots_{dots-subtracted-from-tens} (Units-Tens small dots < big dots (t)).

The most amazing is that children seem to fail to compare six and seven dots (Figure 6a): $M = .45$, $SD = .50$, $p = .51$, two-tailed sign test. This result suggests that, at this age, five-five configurations (Figure 8) could be too difficult to compare. Indeed, these configurations require some parallel horizontal scans and perhaps these parallel scans are not easy at this step of oculomotor development (Vurpillot, 1968). According to cognitive load theory (Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011), the load of these scans could be too heavy for these young children. 5-years-old could use the numerical properties of configured groups with simpler configurations. These configurations could be obtained by decreasing the quantity of required horizontal scans.

2.3. Experiment 3

The hypothesis was the same as in Experiment 2. A new configuration was used (the oval configuration) in order to decrease the quantity of required horizontal scans (Figure 8).

In this manner, kindergartens could be able to quickly compare exact large quantities.

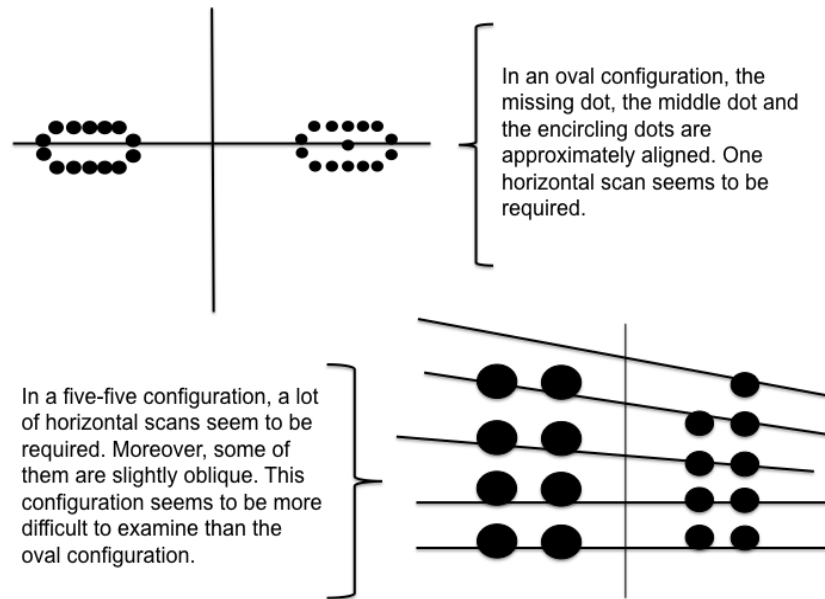


Figure 8: The difference between the oval-configuration and the five-five configuration, depending on the quantity of horizontal scans.

2.3.1. Participants

44 kindergartens (22 boys, 22 girls, $M_{age} = 5.61$, $SD = 0.29$) participated to this experiment. They came from two kindergarten schools located in a middle socio-economic status area, South-west of France.

2.3.2. Materials

In condition Oval, a collection of big black dots (diameter = 7 mm) and small black dots (diameter = 5 mm) were presented on a screen. The screen size, the bottom of the screen, and the distance between pupils and screen were the same as in Experiment 1.

The dots were implemented in an oval configuration (Figure 9). An oval configuration increases by adding a dot in each length.

The distribution of the dots was the same in the two parts of the screen: the second part had been obtained by a translation of the first and by an enlargement of the dots (40%). Then, the middle dot of this oval configuration was subtracted in the left hand side or the right hand side. In this way, the right or left hand side contained one dot more than the other side.

The dot could be removed from the big dots (Figure 9a and 9c) or from the small dots (Figure 9b and 9d). In the condition Oval-less-big-dots-than-small-dots, there are less big dots than small dots. In the condition Oval-less-small-dots-than-big-dots, there are less small dots than big dots. In the condition Oval-less-big-dots-than-small-dots, the height and the width of a largest collection were equal or less than the height and the width of a smaller collection. The condition Units is exactly the same as in Experiment 2.

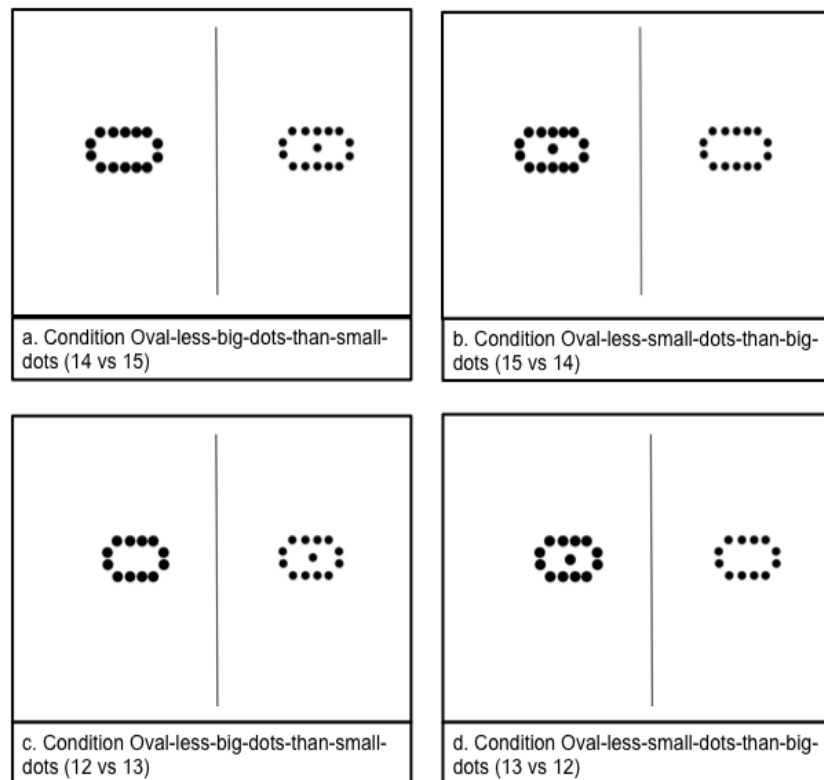


Figure 9: Four examples of condition Oval

2.3.3. Procedure

The procedure was the same as in Experiment 2. The only difference was the content of the games. The first game consisted of 8 items. The number of dots, and their left or right placement on the screen, were as follows: 9 vs 8, 11 vs 10, 12 vs 13, 14 vs 15, 8 vs 9, 10 vs 11, 13 vs 12, 15 vs 14. These first four comparisons were in condition Oval-less-big-dots-than-small-dots and the others, in condition Oval-less-small-dots-than-big-dots. The second game is the same as the first game in Experiment 2.

2.3.4. Results and discussion

The results are shown in Figure 10. In condition Oval-less-big-dots-than-small-dots, the rate of correct answers is different from random: $M = 0.82$, $SD = 0.28$, $p < .001$, two-tailed sign test. In condition Units-less-big-dots-than-small-dots, the rate of correct answer is not significantly different from random: $M = 0.44$, $SD = 0.27$, $p = 15.19$, two-tailed sign-test.

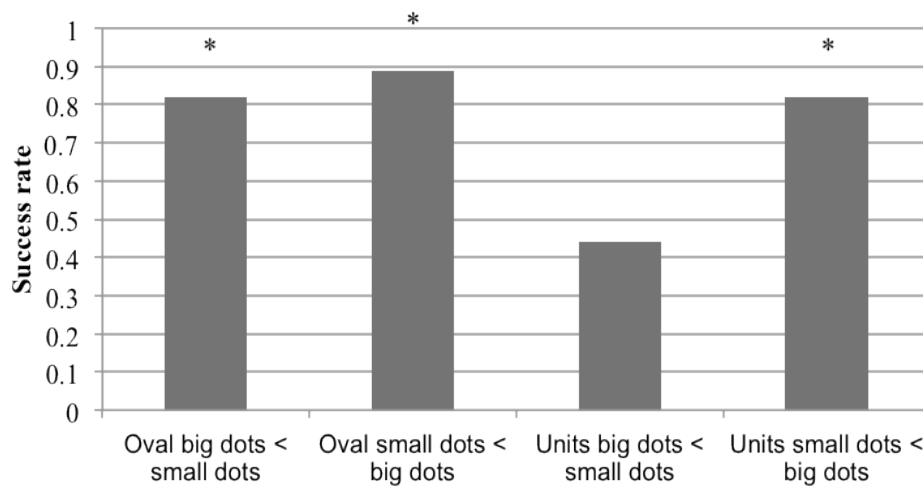


Figure 10: Results of Experiment 3 for each condition in this order: Oval-less-big-dots-than-small-dots (Oval big dots < small dots), Oval-less-small-dots-than-big-dots (Oval small dots < big dots), Units-big-dots-than-small-dots (Units big dots < small dots), Units-small-dots-than-big-dots (Units small dots < big dots).

These results verify our hypothesis. 5-years children can use spontaneously the numerical properties of configured groups. They can compare quickly (in less than five seconds) and easily (0.82 of success rate) some exact large quantities (between 8 and 15) without counting. However, they cannot use these numerical properties with five-five configurations even if the number of objects is not very high (between 6 and 10). Indeed, there is a significant difference between the conditions Oval-less-big-dots-than-small-dots and Units-less-big-dots-than-small-dots: $Z = -5.07$, $p < .001$, non-parametrical Wilcoxon test.

3. General discussion

Experiment 1 shows that 8-years children can compare quickly some exact large quantities when they are organized with configured groups and cannot compare these same quantities when they are not organized with configured groups. These results suggest that children can use numerical properties of configured groups when the other exact strategies (counting or making one-to-one correspondence) are inefficient. So, these properties seem to effectively coexist with the other exact strategies.

Children were accustomed to see some configured groups during their learning of the decimal system. However, they have never explicitly learned to utilize these properties. That is why these properties resemble knowledge implicitly acquired without any instruction (Gilmore et al. 2007).

Experiment 3 shows that 5-years children can compare easily (0.82 of success rate) and quickly (in less than five seconds) some exact large quantities but not with any type of configured groups. 5-years-old can compare oval-configurations but not five-five configurations. This last result suggests that kindergartens could use the numerical properties of some configured groups before the learning of the decimal system.

3.1. Children have an internal numerical representation

It was assumed that 8-years-old compare the number of dots and not the magnitude of dots in the first experiment. Yet, it could be objected that children may not understand the experimenter's request ("show me the collection which contains more dots than the other"). For them, "more dots" could mean "the dots which have the most magnitude". In other words,

they could indicate the bigger magnitude (area delimited or occupied by dots) and not the bigger number of dots.

Yet, Experiment 3 of this new study shows that kindergartens understand the comparison task's instruction. They compare the number of dots and not the magnitude of dots. Indeed, in Experiment 3, non-numerical parameters are controlled. In the condition Oval-less-big-dots-than-small-dots, kindergartens indicate the collection with the largest number of dots, even if the collection with the lowest number of dots has the largest magnitude (the area delimited or occupied by dots, the sum of the contour lengths of the dots). Therefore, it seems improbable that 8-years children do not understand the experimenter's request and compare the magnitude of dots and not the number of dots.

It was possible that kindergartens compared the number of dots without an internal numerical representation. However, this hypothesis seems improbable. ANS, PIS, and Plural System cannot compare some exact large quantities. Kindergartens could not count (or label-count) because the exposure time was too short (five seconds). Indeed, 5-years children can count only six dots on average in five seconds (Camos, 2003), and the smallest comparison of Experiment 3 contains 17 dots.

In the oval configuration, some dots (encircling dots) encircle a dot (the middle dot). In the smallest collection, the middle dot misses. That is why kindergartens can easily notice that the collection with the middle dot contains one more dot than the others. In this manner, kindergartens can conclude that the collection with the middle dot contains the largest number of dots.

However, kindergartens could only indicate the collection with the middle dot and not the collection with the most of dots; they show the collection in which nothing is missing. This hypothesis implies that children use a pragmatic strategy and do not understand the

quantitative nature of the word “more”. In other words, they do not know that the word “more” designates a bigger magnitude or a bigger numerosity.

Yet, Odic, Pietroski, Hunter, Lidz, and Halberda (2013) show that 3-years children know that the word “more” designates at least a bigger magnitude. Indeed, these children understand the question “are more of the dots blue or green?”. The authors suppose that the word “more” is connected to the representations of the ANS. In this case, the word “more” could designate a magnitude and not necessary a number of objects (cf. 1.1.). In any case, 3-years children can understand the quantitative nature of the word “more” even if the word “more” only designates a magnitude.

Halberda and Feigenson (2008) show that 3-years-old understand the question “who has more balls?” and give a correct answer most of the time when the quantities are not too close. Thus, it is improbable that 5-years children do not understand the quantitative nature of the experimenter’s request in a comparison task.

That is why the problem is not to verify if 5-years children understand or not the quantitative nature of experimenter’s request. The problem is to verify if these children compare the number of dots and not the magnitude of dots. In Experiment 3, the magnitude is controlled: the area delimited or occupied by the objects, the length and the height of the collections, the density and the total perimeter of the objects (Clearfield & Mix, 2001). Therefore, kindergartens indicate the collection with the larger number of dots and not the collection with the larger magnitude or with the middle dot.

Is it possible that kindergartens do not have an internal numerical representation? If they do not have an internal numerical representation, they have, at least, an internal magnitude representation. Otherwise, they would not be able to understand the quantitative nature of experimenter’s request. If they represent the numbers of objects by a magnitude, then they cannot perceive a number of objects. They do not know what is a number of objects.

For them, only some magnitudes exist in their environment. From their point of view, they represent some perceived external magnitudes by an internal magnitude. Therefore, the expression “more dots than the other” (“show me the collection which contains more dots than the other”) means, necessarily, for them, “a larger magnitude than another magnitude”. So, they understand that they have to indicate the largest magnitude.

In the condition Oval-less-big-dots-than-small-dots (Experiment 3), the collection with the largest number of objects has the smallest external magnitude and the collection with the smallest number of objects has the largest external magnitude. In this situation, children should indicate the largest magnitude if that they do not know what is a number of objects. Yet, they indicate the smallest magnitude with the largest number of objects. Therefore, it is impossible that they represent these collections of dots by some internal magnitudes. Thus, they should have an internal numerical representation.

However, one possibility still remains: kindergartens make one-to-one correspondence and for them, the dots are a set of different objects (cf. 1.2.2.) as for babies in the experiment of Izard et al. (2014). In this case, the dots are not added to each other: they are not associated with a number of dots. They are just a set of individualized dots. They look like a set of individuals (Peter, Jack, Albert, etc.).

However, as has been seen, if children represent the dots as a set of different objects, then they cannot understand the quantitative nature of the experimenter’s request (“show me the collection which contains more dots than the other”). Indeed, in this case, their cognitive system does not represent the dots as a magnitude or as a numerosity. So, they cannot understand the task and indicate the larger number of dots. Yet, the results show that kindergartens indicate the collection with the most of dots. That is why it seems improbable that kindergartens represent dots by a set of different objects. Therefore, only one possibility remains: kindergartens have an internal numerical representation.

3.2. Children use the numerical properties of configured groups

In summary, children cannot use the ANS, the PIS, the Plural System and the counting in Experiments 1 and 3. They could use one-to-one correspondences. However, in this case, the results in Experiment 1 would show that these one-to-one correspondences are efficient when the dots are organized with configured groups and inefficient when the dots are organized without configured groups. In other words, this hypothesis supposes the existence of the numerical properties of configured groups.

Indeed, the properties are: (1) configured groups facilitate the visual perception of equal quantities: for a human cognitive system, two visually identical groups have the same quantity of objects (*equal property of configured groups*); (2) configured groups facilitate the visual perception of unequal quantities: for a human cognitive system, if two groups have the same configuration, then it is easier to see if one of the two groups contains more or less objects than the other (*unequal property of configured groups*).

These properties do not suppose that the comparison between the “visually identical groups” or between two unequal groups with “the same configuration” is made by a one-to-one correspondence or by another procedure. They only suppose that the configured groups make possible some quick comparisons between exact large quantities. This research does not study the procedures that explain these fast comparisons.

It could be objected that in Experiment 3, children do not use the equal property of configured groups. They are not interested by the encircling dots. They only retain the absence or the presence of the middle dot. They do not assume that the encircling dots have the same number of dots because they have the same configuration and seem to have the same number of objects. This hypothesis implies that children would always indicate the collection with the middle dot because the number of encircling dots is not important for them. Yet, this

hypothesis seems improbable.

A collection without a middle dot could obviously have the largest number of encircling dots (Figure 11). In this situation, children should indicate the collection with the middle dot because they are not interested by the encircling dots. This possibility is contrary to the research studies on the ANS (cf. 1.1.). Indeed, children can compare some numbers of dots when the quantities are not too close (Odic et al., 2013; for a review, see Dehaene, 2011). Therefore, it seems improbable that children would indicate the collection with the middle dot even if the collection without the middle dot would obviously have the larger number of dots.

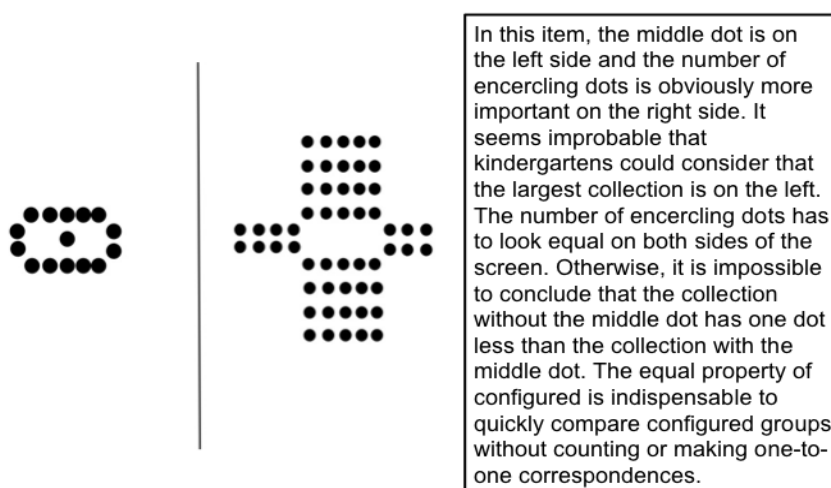


Figure 11: an example of an item that could be used to show the indispensable role of the equal property of configured groups in order to compare some exact large quantities without counting or making one-to-one correspondences

In summary, Experiment 1 suggests that 8-years children use the numerical properties of configured groups to compare some exact large quantities of dots. In Experiment 3, it seems more probable that 5-years children use the same properties.

3.3. The specificity of the Configured grouping Hypothesis and the missing link

The Configured grouping Hypothesis is evidently a Grouping Hypothesis. However, it is different from the other Grouping hypotheses (cf. 1.2.2).

Fuson et al. (1997) assume that children could have a mental image of numbers of objects (e.g. the mental image of 5 groups of tens and 8 units). In the Configured Grouping Hypothesis, it is not supposed that children have a mental image of configured groups. It is only assumed that children have an internal numerical representation. The specific content of this representation was not the subject of this study.

The numerical properties of configured groups obey Gestalt laws (Experiment 1). However, they do not represent a new Gestalt law. The Gestalt laws explain why a multiplicity of objects is spontaneously perceived as a single entity or as a plurality of objects (Todovoric, 2011). They do not inform the cognitive system about the number of objects contained in different groups of objects. They do not provide any numerical information. In the Gestaltist approach to counting (Van Oeffelen & Vos, 1982), the Gestalt laws are used to count two-by-two (or three-by-three). The Gestalt law of proximity is used to make some groups of two (or three) objects. This law do not inform the participants that the groups contain two (or three) dots. According to the authors, the participants use the PIS to determine the number of objects in each group. On the contrary, the numerical properties of configured groups inform the participants that some groups contain more or less objects than the others.

In the Configured grouping Hypothesis, the grouping is not used to memorize (Rosenberg & Feigenson, 2013) or to count (Starkey & McCandliss, 2014) some exact large quantities. It is not used to count tens and units (Chan et al., 2014). On the contrary, it is used to distinguish some exact large quantities without memorizing or counting.

That is why the Configured grouping Hypothesis is a new Grouping Hypothesis. This new hypothesis suggests the existence of a new transitional stage between the primary (the approximate processing of large quantities) and the secondary numerical knowledge (the exact processing of large quantities). With configured groups, humans do not discover or acquire the idea of an exact number of objects (the number of objects of a collection changes if and only if only one object is added to or subtracted from this collection). Indeed, they use this idea to compare the configured groups (if a collection contains one object less than the other, then the number of objects of this collection is smaller than the other). With configured groups, humans can use this idea in the domain of exact large number of objects.

Therefore, the discovery or the use of the configured groups' numerical properties could be a stage between the acquisition of the exact number's idea and the acquisition of the decimal system. In other words, these numerical properties could be a (missing) link between the primary and the secondary mathematical knowledge (at the school or in the human cultural evolution).

3.4. Limitations and further research

It is not clear if the configured groups must have the same configuration (Experiment 1). They could just have the same global appearance (e.g. the same rectangular form). In addition, the mechanism of numerical properties of configured groups remains obscure: (1) this study does not reveal the procedures that make possible the fast comparison of configured groups; (2) this study shows that the use of these properties requires the understanding and the use of the exact number's idea, but does not reveal the content of this exact number's idea (this idea could be a mental image, a general law, etc.); (3) Experiment 3 does not explain why the oval configuration is more easy than the five-five configuration. It is assumed that

the cognitive load of the oval configuration is lower but this hypothesis has not been tested. This hypothesis is just utilized to design the oval configuration; (4) Experiments 1 and 3 suggest that the numerical properties could be learned without any instruction before learning of the decimal system but do not show that these properties belong to primary knowledge (Geary, 2008).

However, all these obscurities open new perspectives in Numerical cognition research and Educational psychology: (1) studying the mechanism of these new numerical properties within a developmental approach; (2) identifying the most effective configurations in order to optimize the representation of large quantities in school in accordance with the age; (3) verifying if younger children, babies, newborns, animals, etc., could use these numerical properties; (4) evaluating if these properties represent the fourth type of primary numerical knowledge of human species (with the ANS, the PIS and the Plural System).

Acknowledgements

Jean-Luc Parmentelot, Sylvaine Mailho, Jean-Marc Chaussard, Mme Pouzac, Muriel Abeille, H  l  na Mouche, Delphine Boccacino, Mich  le Save, Marie Paute, parents and their children

References

- Barner, D., Thalwitz, D., Wood, J., Yang, S-J, & Carey, S. (2007). On the relation between the acquisition of singular-plural morpho-syntax and the conceptual distinction between one and more than one. *Developmental Science*, 10(3), 365-373.
- Carey, S. (2009). Where our number concepts come from. *The Journal of Philosophy*, 106(4), 220–254.
- Camos, V. (2003). Counting strategies from 5-years to adulthood: adaptation to structural features. *European journal of psychology of education*, 18(3), 251-265
- Chan, W.W.L., Au, T.K., & Tang, J. (2014). Strategic counting: A novel assessment of place-value understanding. *Learning and Instruction*, 29, 78-94
- Clearfield, M., & Mix, K.S. (2001). Amount versus number: Infants use of area and contour length to discriminate small sets. *Journal of Cognition and Development*, 2(3), 243-260.
- Cohen, D.J. & Sarnecka, B.W. (2014). Children's number-line estimation shows development of measurement skills (not number representations). *Developmental Psychology*, 50(6), 1640–1652.
- Coubart, A., Izard, V., Spelke, E. S., Marie, J., & Streri, A. (2014). Dissociation between small and large numerosities in newborn infants. *Developmental Science*, 17(1), 11-22.
- Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*, 123(1), 162-173.
- Dehaene, S. (2011). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Revised and Updated Edition*. Oxford: Oxford University Press
- De Neys, W., Lubin, A., & Houdé O. (2014). The Smart Nonconservers: Preschoolers Detect Their Number Conservation Errors. *Child Development Research*, 2014, Article ID 768186, 7 pages.

- Ebersbach, M., Luwel, K., and Verschaffel, L. (2013). Comparing apples and pears in studies on magnitude estimations. *Frontiers in psychology*, 4. Article 332.
- Feigenson, L. (2005). A double-dissociation in infants' representations of object arrays. *Cognition*, 95(3), B37-48.
- Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97, 295-313.
- Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13, 150–156.
- Féron, J., Gentaz, E., & Streri, A. (2006). Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-month-old infants. *Cognitive Development*, 21, 81-92.
- Fuson, K.C, Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Human, P.G., Olivier, A.I., Carpenter T.P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual Structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130- 162.
- Geary, D. C. (2008). An evolutionarily informed education science. *Educational Psychologist*, 43(4), 179-195.
- Geary, D.C. (2007). An evolutionary perspective on learning disability in mathematics. *Developmental Neuropsychology*, 32(1), 471–519.
- Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In W. Damon (Gen. Ed.), *Handbook of child psychology*, vol 2. New York: John Wiley & Sons.
- Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, 447, 589-59.

- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457–1465.
- Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From prehistory to the invention of the computer*. Hoboken (NJ, USA): John Wiley and Sons.
- Izard, V., Streri, A., & Spelke, E. S. (2014). Toward exact number: Young children use one-to-one correspondence to measure set identity but not numerical equality. *Cognitive Psychology*, 72, 27-53.
- Izard, V. & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, 106, 1221–1247.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., & Hasegawa, T. (2005) Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science*, 8(5), 409-419.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, R., & Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: one object plus one tone. *Cognition*, 91, B23–B34.
- Le Corre, M. & Carrey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting system. *Cognition*, 105(2), 395-438.
- Link, T., Huber, S., Nuerk, H. C., and Moeller, K. (2014). Unbounding the mental number line-new evidence on children’s spatial representation of numbers. *Frontiers in psychology*, 4, Article 1021.
- Nieder, A. & Dehaene, S (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208.
- Noël, M., and Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: an explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in human neuroscience*, 5, Article 165.

- Odic, D., Pietroski, P., Hunter, T., Lidz, J., & Halberda, J. (2013). Young Children's Understanding of "More" and Discrimination of Number and Surface Area. *Journal of experimental psychology*, 39(2), 451–461
- Piaget, J (1952). *The child's conception of number*. New York: Norton
- Pietroski, P., Lidz, J., Hunter, T. & Halberda, J. (2009). The Meaning of 'most': semantics, numerosity and psychology. *Mind and Language*, 24(5), 554–585.
- Rosenberg, R.D. & Feigenson, L. (2013). Infants hierarchically organize memory representations. *Developmental Science*, 16(4), 610-621.
- Sarnecka, B.W. & Wright, C.E. (2013). The Idea of an Exact Number: Children's Understanding of Cardinality and Equinumerosity. *Cognitive Science*, 37(8), 1493-1506.
- Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.
- Spaepen, E., Coppola, M., Spelke, E. S., Carey, S. E., & Goldin-Meadow, S. (2011). Number without a language model. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(8), 3163–3168.
- Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of experimental child psychology*, 126, 120-137.
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga S. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer
- Todoovic, D. (2011). What is the origin of the Gestalt principles? *Humana Mente*, 17, 1-20
- Turati, C., Gava, L., Valenza, E. & Ghirardi, V. (2013). Number versus extent in newborns' spontaneous preference for collections of dots. *Cognitive Development*, 28(1), 10-20
- Van Oeffelen, M. P., & Vos, P. G. (1982). Configurational effects on the enumeration of dots: Counting by groups. *Memory & Cognition*, 10, 396–404

- Vasilyeva, M., Laski, E.V., Ermakova, A., Lai, W-F., Jeong, Y., & Hachigian, A. (2015). Reexamining the language account of cross-national differences in base-10 number representations. *Journal of experimental child psychology*, 129, 12–25
- Verguts, T & Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: A neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9), 1493–1504.
- Vurpillot, E. (1968). The development of scanning strategies and their relation to visual differentiation. *Journal of experimental child psychology*, 6(4), 632-650.
- Xu, F., Spelke, S. & Goddard, S. (2006). Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8(1), 88–101

Conclusion

1. Synthèse des principaux résultats

Les êtres humains possèdent des connaissances arithmétiques dites « primaires » dans la mesure où leur patrimoine génétique les prédispose à acquérir de telles connaissances (Geary, 2008a). Ces capacités primaires sont toutefois doublement limitées : elles sont imprécises au-delà de 3 ou 4 objets et ne s'accompagnent pas d'une représentation numérique interne. Elles sont en ce sens « approximatives » et « externes ».

Elles ne différencient pas 12 et 13 objets et représentent ces deux quantités sous la forme de deux amplitudes. Dans le premier cas, deux quantités différentes semblent égales. Dans le second cas, deux nombres d'objets (deux multiplicités d'objets) sont représentés sous la forme d'un unique objet plus ou moins étendu. Elles se révèlent par conséquent incapables de traiter des quantités avec exactitude et de comprendre ce qu'est un nombre d'objets (une somme d'objets). Elles ignorent en définitive « l'idée de nombre exact » ou si l'on préfère l'idée de « numérosité ».

Dès lors, comment les êtres humains accèdent-ils à une telle idée ? Comment acquièrent-ils des connaissances arithmétiques secondaires « exactes » et « internes » dans le domaine des grands nombres ? Tel était le problème soulevé par cette thèse.

Dans l'Article 1, la revue de littérature a permis de montrer les limites des tâches de numérosité utilisées en Cognition numérique depuis une dizaine d'années. Ces tâches ne permettraient pas d'évaluer si les participants comprennent ou non l'idée de nombre exact. Elles montrent que les participants ont bel et bien des capacités exactes dans le domaine des grands nombres : ils peuvent compter avec exactitude des quantités d'objets, additionner, soustraire, positionner avec précision des nombres sur une ligne, etc. Mais ces habiletés exactes pourraient ne pas être accompagnées d'une représentation numérique interne.

Il serait toutefois possible de vérifier si les participants ont une représentation numérique interne. Il faudrait respecter quatre règles fondamentales lors de l'élaboration d'une tâche de numérosité (Tableau V). Le rôle de cette première partie n'était donc pas de

résoudre directement le problème soulevé par cette thèse. Elle était de préparer les deux parties suivantes en rendant possible la confection d'une tâche « fiable » de numérosité.

Règle 1	Contrôler les paramètres non numériques. Les participants doivent être sensibles au nombre d'objets contenus dans une collection et non sensibles à une amplitude (surface occupée ou délimitée par les objets, densité des objets, etc.).
Règle 2	Contrôler l'individualisation. Les participants ne doivent pas pouvoir réussir la tâche en individualisant les objets. C'est pourquoi ils ne doivent pas pouvoir recourir uniquement au SIP, compter-étiqueter ou mettre en correspondance terme à terme les objets. Sinon, les participants pourraient représenter les quantités sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés.
Règle 3	Contrôler l'ANS. Les participants ne doivent pas pouvoir utiliser leur ANS sinon ils pourraient représenter les quantités sous la forme d'une amplitude.
Règle 4	Contrôler les stratégies pragmatiques non numériques. Les participants ne doivent pas pouvoir employer une stratégie pragmatique qui ne requiert pas une représentation numérique interne.

Tableau V : Les quatre règles d'élaboration d'une tâche de numérosité issues de l'article 1. Ces quatre contrôles sont à effectuer lorsqu'on évalue la sensibilité interne à la numérosité.

Dans l'Article 2, il a été montré que des enfants de 8 ans pouvaient comparer avec exactitude de grandes quantités ($30 < n < 60$), sans avoir besoin de les compter, si celles-ci étaient organisées au moyen de groupements configurés. Ces comparaisons rapides (en moins de 5 secondes) et particulièrement réussies (les taux de réussite étaient supérieurs à 0,90) ont validé une nouvelle hypothèse : l'hypothèse des groupements configurés. Ces derniers possèdent des propriétés numériques (Tableau VI).

A partir de celles-ci, un système cognitif ne découvre pas l'idée de nombre exact. Mais il peut l'étendre aisément au domaine des grandes quantités. En ce sens, cette hypothèse et cette première étude répondent au problème soulevé. Les êtres humains peuvent accéder à une connaissance secondaire exacte et interne en s'appuyant sur les propriétés numériques des groupements configurés. De cette façon, ils peuvent figurer différentes quantités sans avoir besoin de les compter ou de les aligner les unes contre les autres.

Propriété d'égalité des groupements configurés	La configuration des groupements facilite la reconnaissance visuelle de deux quantités égales : deux groupements visuellement identiques ont par principe le même nombre d'objets pour le système cognitif. Si l'expérimentateur dispose sur un support deux groupements d'objets composés du même nombre d'objets et leur confère la même configuration, alors le système cognitif des participants se rend aisément compte qu'ils sont effectivement égaux. Il n'a pas besoin pour cela de les compter.
Propriété d'inégalité des groupements configurés	Les groupements configurés facilitent la perception de quantités inégales. Si deux groupements ont la même configuration, il est aisé de voir si l'un des groupements contient plus ou moins d'objets qu'un autre. En effet, tout se passe comme dans un jeu des sept erreurs. Le système cognitif compare les groupes configurés et remarque aisément s'il manque ou non un point dans l'un des deux groupes. Il n'a pas besoin pour cela de les compter.

Tableau VI : Les propriétés numériques des groupements configurés

Dans l'Article 3, l'hypothèse précédente a été confirmée. Des enfants de 8 ans parviennent à comparer (taux de réussite avoisinant les 0,75²⁴) rapidement (en moins de 5 secondes) de grandes quantités exactes ($30 < n < 70$) tant que l'intégrité des groupements configurés est préservée (en faisant varier uniquement leur orientation) et tant que cette intégrité n'est pas compromise (par éclatement ou par segmentation).

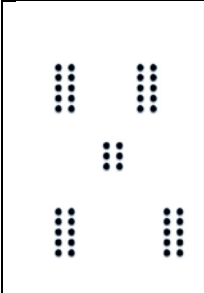
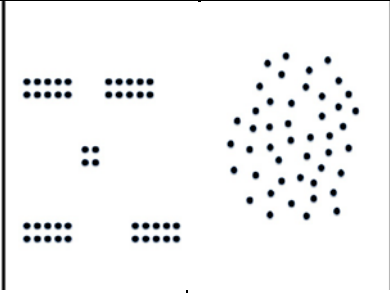
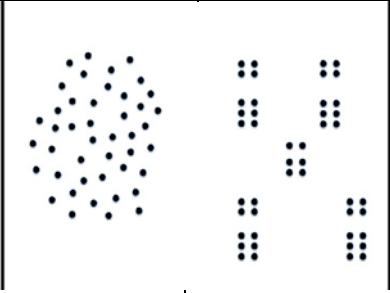
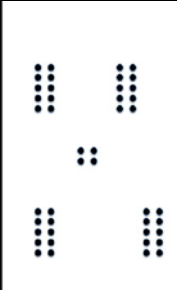
			
La variation de l'orientation conserve l'intégrité des groupements configurés	L'éclatement des groupements configurés ne conserve pas leur intégrité.		La segmentation des groupements configurés ne conserve pas leur intégrité

Figure 13 : Exemple d'items utilisés dans l'expérience 1 de l'article 3 et permettant ou non de préserver l'intégrité des groupements configurés

²⁴ Le taux de réussite est de 0,96 dans l'expérience 1 de l'article 2 et de 0,75 dans l'expérience 1 de l'article 3. Cette différence significative de performance (selon un test non paramétrique de Mann-Whitney mentionné uniquement ici à titre indicatif) peut être expliquée par une loi de la Gestalt. Selon la loi de symétrie, une configuration « 5-5 » de 6 et une configuration « 5-5 » de 8 points ont plus de chance de paraître identiques qu'une configuration « 5-5 » de 6 et une configuration « 5-5 » de 7 points. Cette hypothèse fera l'objet de futures recherches (pour des exemples de configurations « 5-5 », voir les Figures 6, 9 ou 10).

Cet article a surtout contribué à accroître la portée de l'hypothèse des groupements configurés en montrant que des enfants de 5 ans étaient déjà capables d'utiliser aisément (0.81 de taux de réussite) et rapidement (en moins de 5 secondes) les propriétés numériques de ces groupements. Cela est d'autant plus intéressant que de tels enfants n'ont jamais été habitués à percevoir de tels groupements pour représenter de grandes quantités d'objets (par exemple des barres de dix petits cubes). En effet, le système décimal ne leur a pas encore été transmis. Ils utilisent donc ces propriétés spontanément. L'expérimentateur n'a nul besoin de leur enseigner.

Cette étude suggère par conséquent que la découverte des propriétés numériques des groupements configurés (à l'école ou dans l'Histoire) ne résulte pas de l'apprentissage du système décimal. Au contraire, cette découverte semble précéder et soutenir cet apprentissage dans la mesure où elle facilite la figuration de grandes quantités exactes sous la forme de groupements configurés comme ceux utilisés couramment à l'école (barres de dizaine, plaques de centaine, etc.) lors de cet apprentissage.

Cette étude permet donc de répondre au problème soulevé avec une plus grande précision. Ces propriétés expliqueraient le passage d'une connaissance primaire (approximative et externe) à une connaissance secondaire (exacte et interne) et leur acquisition se logerait plus précisément entre la découverte de l'idée de nombre exact et celle du système décimal (ou de tout autre système de numération). Elles seraient ainsi le chaînon « manquant » reliant la connaissance primaire à la connaissance secondaire des grandes numérosités (Figure 14).

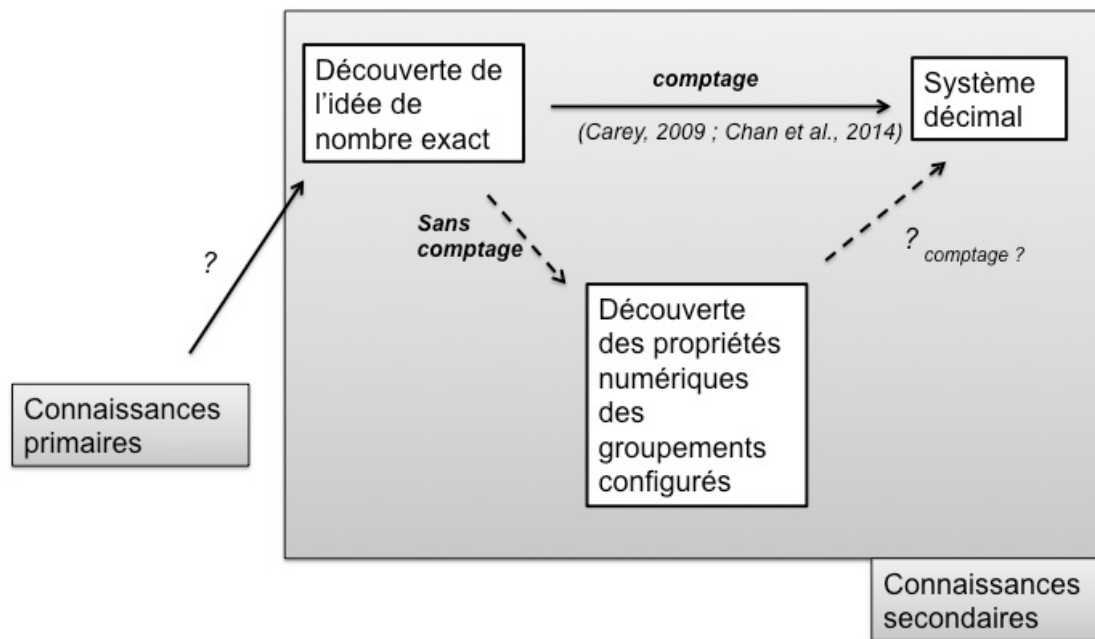


Figure 14 : Passage des connaissances arithmétiques primaires (ANS, SIP, Système de pluralité) à la connaissance secondaire du système décimal. Selon les hypothèses actuelles (Carey, 2009 ; Chan et al., 2014) l'acquisition du système décimal consiste toujours à étendre les capacités de comptage au domaine des grands nombres (en comptant de 1 en 1, de 10 en 10, en comptant le nombre de groupes de 10, etc.). Dans notre perspective, il existe un chaînon manquant dans ces hypothèses et accessible sans comptage : la découverte des propriétés numériques des groupements configurés. La façon de passer des connaissances primaires à l'idée de nombre exact ou encore de passer des propriétés numériques au système décimal demeure, quant à elle, inconnue (« ? ») pour le moment. Le passage de ces propriétés au système décimal pourrait toutefois consister à recourir au comptage.

2. Discussion générale

Quel est le principal apport théorique et méthodologique de ce travail ? Quelle est la principale limite théorique et méthodologique de celui-ci ? Enfin, quelle est la principale perspective de recherche ouverte par celui-ci ? Telles sont les premières questions que nous allons traiter dans la première partie de cette discussion. La seconde partie abordera la contribution de ce travail à la psychologie des apprentissages et la dernière partie, à l'enseignement.

2.1. Apport, limite, perspective

2.1.1. Apport théorique

Le principal apport de cette thèse est la découverte d'un nouveau champ d'investigation en Cognition numérique : l'étude et le rôle des propriétés numériques des groupements configurés. Dans le domaine des grands nombres, les groupements configurés ne servent pour le moment qu'à figurer les propriétés du système décimal. Dans cette perspective, les participants représentent les nombres à l'aide de groupements configurés (Vasilyeva et al., 2015 ; Fuson et al., 1997) ou comptent des objets organisés sous la forme de groupements configurés (Chan et al., 2014) : ils représentent le nombre « 54 » sous la forme de 5 barres de dix cubes et de 4 cubes ; ils comptent 5 barres de dix cubes et 4 cubes et en déduisent que la collection comporte « 54 » cubes.

Les groupements pourraient donc ne pas être configurés. Ils pourraient être simplement des tas désordonnés de 10 cubes. Les participants fabriqueraient 5 tas de 10 cubes et un tas de 4 cubes, ou compteraient 5 tas de 10 cubes et 4 cubes. Il suffirait de leur demander de constituer des tas de 10 à la place des barres de 10 ou de les informer que chaque tas contient 10 cubes.

Autrement dit, ce n'est pas la configuration des cubes qui permet de savoir que les groupes de 10 comportent le même nombre de cubes. C'est le fait de les avoir comptés ou d'être informé sur leur quantité. Dans les deux cas, les groupes de 10 sont égaux parce qu'ils sont *explicitement* désignés par le même mot nombre « 10 » et non parce qu'ils ont la même configuration. La configuration n'est donc pas porteuse de l'information numérique. Elle ne nous renseigne pas sur l'égalité numérique des groupes. Elle ne fait que faciliter la constitution des groupes de 10 ou leur comptage.

On en reste de cette manière à une approche gestaltiste (Van Oeffelen & Vos, 1982) : les groupements configurés en tant que tels ne renseignent en rien le système cognitif sur le nombre d'objets qu'ils contiennent ; ils ne possèdent pas de propriétés numériques. Ils ne font que faciliter la constitution ou la perception de totalités (les groupes de 10) visuellement indépendantes des autres (selon la loi de proximité). Ils ne servent pas à apporter d'information sur le nombre d'objets qu'ils comportent. Cette information leur est ajoutée au moyen d'une procédure langagière (comptage, mot-nombre, écriture chiffrée, etc.). Dans un cadre gestaltiste, en l'absence de procédures langagières, il est absolument

impossible de comparer numériquement des groupements configurés. Notre thèse défend une toute autre conception : les groupements ont déjà des propriétés numériques et il est inutile de recourir à une procédure langagière pour savoir s'ils possèdent ou non le même nombre d'éléments.

Il ne s'agit en aucun cas d'inviter les chercheurs (ou les enseignants) à neutraliser systématiquement les procédures langagières lorsqu'ils présentent des groupements configurés aux participants (aux élèves). L'objectif est uniquement de rappeler à quel point l'hypothèse des groupements configurés ne s'inscrit pas dans un cadre gestaltiste et pour quelle raison exacte elle propose un nouveau champ d'investigation.

2.1.2. Limite théorique

La limite théorique de ce travail apparaît particulièrement lorsqu'on soulève cette interrogation : pourquoi le système cognitif considère-t-il que deux groupements configurés visuellement identiques possèdent le même nombre d'éléments ? Plusieurs réponses à cette question peuvent être envisagées. Le système cognitif considère qu'il pourrait superposer ces deux groupements et se rendre compte ainsi qu'aucun des deux ne possède d'élément supplémentaire. Le système cognitif considère que les éléments de ces groupements peuvent être mis en correspondance terme à terme. Le système cognitif considère que les éléments de ces groupements pourraient être comptés pareillement.

Dans tous les cas, le système cognitif fait une supposition : les groupements pourraient être superposés, mis en correspondance terme à terme, comptés, etc. En d'autres termes, il imagine le résultat d'une procédure qu'il n'a pas besoin d'effectuer. C'est la nature de cette procédure virtuelle qui reste pour le moment indéterminée.

Cette méconnaissance est une limite manifeste de l'apport théorique de ce travail. Certes, l'hypothèse des groupements configurés introduit une nouvelle conception théorique des groupements configurés (ils possèdent des propriétés numériques). C'est d'ailleurs pourquoi cette hypothèse offre un nouveau champ d'investigation. Cependant, la raison pour laquelle ces groupements possèdent des propriétés numériques n'est pas théorisée. Les procédures virtuelles ne sont pas les seules par ailleurs à ne pas être identifiées. Qu'est-ce qu'une grande numérosité exacte aux yeux d'un enfant lorsque celui-ci utilise les propriétés numériques des groupements configurés ? Est-ce l'image mentale de tous les objets additionnés les uns aux autres (Figure 15a) ? Est-ce l'image mentale d'une

procédure (Figure 15b) ? Le contenu de cette représentation numérique interne demeure inconnu.

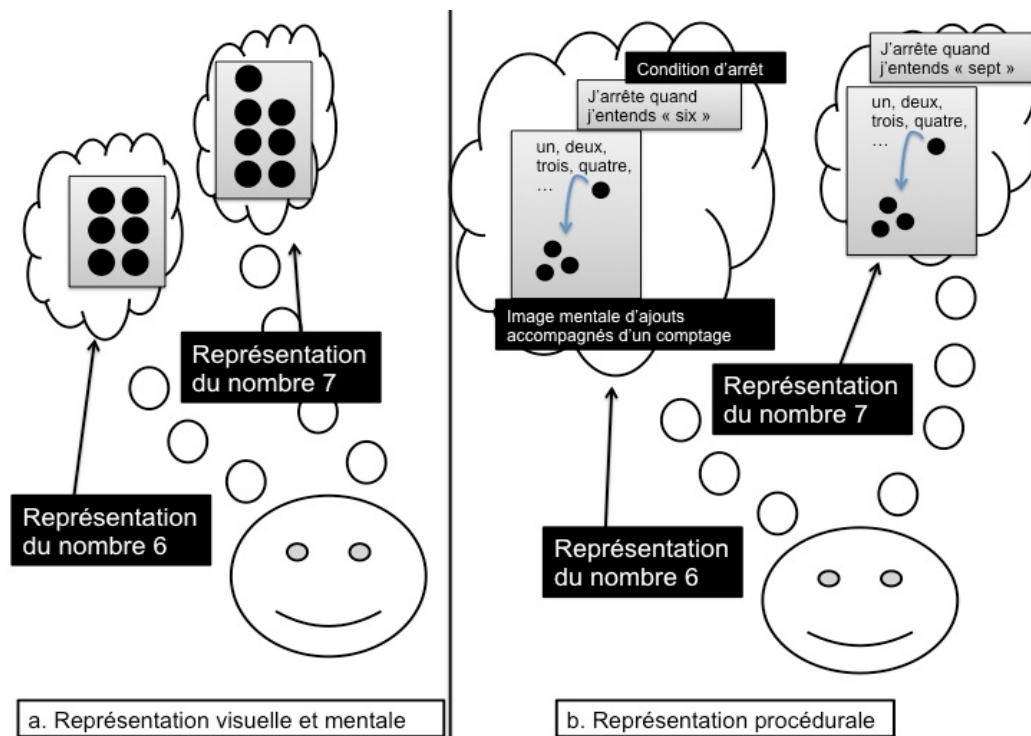


Figure 15 : Exemple de deux contenus possibles de la représentation numérique interne mobilisée par les propriétés numériques des groupements configurés

Il faut aussi ajouter à cela le rôle joué par les stratégies d'exploration visuelle. L'expérience 1 de l'article 3 suggère que celles-ci sont pénalisées lorsque les groupements configurés sont éparpillés ou segmentés. Il pourrait y avoir une forte interaction entre ces stratégies et la loi gestaltiste de proximité. L'expérience 3 du même article suggère en outre que les enfants de 5 ans, à la différence des enfants de 8 ans, ne peuvent réaliser de multiples balayages horizontaux parallèles. Il pourrait donc y avoir une interaction entre ces stratégies et le développement oculomoteur ou encore entre ces stratégies et les limites de la mémoire visuelle de travail en terme de charge cognitive.

En résumé, les stratégies visuelles ne sont pas plus déterminées que les procédures virtuelles et la représentation numérique interne. Tel est la principale limite théorique de ce travail : le mécanisme des propriétés numériques des groupements configurés demeure intégralement non théorisé (même à titre hypothétique) et par voie de conséquence entièrement mystérieux.

2.1.3. Apport méthodologique

Il pourrait être objecté que ce mystère est en outre une entrave sérieuse à la théorie elle-même. Le système cognitif pourrait recourir par exemple à un comptage virtuel. Il ne compterait pas réellement les objets. Il supposerait simplement que le résultat d'un tel compte donnerait pour chaque groupement configuré le même résultat. En effet, ces groupements ont manifestement la même forme (ils sont visuellement identiques). Il pourrait donc compter-étiqueter chaque groupement et considérer que deux groupements sont égaux tout simplement parce qu'ils possèdent la même « étiquette ». Il n'aurait donc pas de représentation numérique interne, contrairement à ce que notre hypothèse des groupements configurés suppose. Il se représenterait les objets sous la forme d'un ensemble d'éléments individualisés et non sous la forme d'une multiplicité d'éléments ajoutés les uns aux autres. Il serait semblable sur ce point à un berger capable de reconnaître chacune des bêtes de son troupeau et qui constate la disparition de telle et telle brebis et non de « deux » brebis.

Toutefois, l'un des apports méthodologiques de ce travail est d'avoir accordé une attention particulière (comme l'atteste la revue de littérature) au contrôle de ce genre de facteurs. Il est improbable que les enfants se représentent dans nos expériences les groupements configurés égaux sous la forme d'un ensemble d'objets individualisés, même s'ils recourent implicitement à des procédures virtuelles de comptage (ou de correspondances terme à terme). Le rôle joué par la nature quantitative de la requête de l'expérimentateur est sur ce point décisif. Celui-ci demande en effet aux enfants de montrer la collection comportant le « plus de points ». Comment cette requête pourrait-elle être comprise par les participant en l'absence de toute représentation quantitative interne (sous la forme d'une amplitude ou d'une numérosité) ?

L'expression « plus de points » ne peut être comprise que s'il y a effectivement quelque chose « en plus ». Mais dans un ensemble d'objets individualisés rien n'est ajouté à rien et donc rien n'est « en plus » (ou « en moins »). Aussi, si les enfants se représentent les collections sous la forme d'une multiplicité de points individualisés, alors ils ne peuvent comprendre la signification quantitative de l'expression « plus de points » et par conséquent la requête de l'expérimentateur.

Or, il semble improbable que des enfants de cet âge (5 et 8 ans) ne comprennent pas une telle requête parce qu'ils ne comprendraient pas la signification quantitative de

l'expression « plus de points ». Dès l'âge de 3 ans, les enfants comprennent la signification quantitative du mot « plus » (« more » en anglais ; Odic et al., 2013). Ils réussissent à répondre à des questions du type « Y a-t-il plus de bleu que de jaune ? » dans une situation où des aires ou des quantités d'objets sont comparées. Le problème n'est donc pas de savoir si les enfants ont ou non une représentation quantitative interne, mais si cette représentation est de nature numérique. Se représentent-ils les points sous la forme d'une amplitude ou la forme d'une somme d'objets ?

Il suffit dès lors de contrôler les aires occupées ou délimitées par les points (expérience 3 de l'article 2). Si les enfants se représentent les points sous la forme d'une amplitude alors ils devraient choisir l'amplitude la plus grande. Les résultats montrent qu'ils choisissent l'aire occupée ou délimitée par les points la plus petite à condition que celle-ci contienne le plus grand nombre de points. Ils choisissent donc la numérosité la plus grande et non l'amplitude la plus grande.

Toutefois, ce contrôle systématique des facteurs qui pourraient interférer n'est pas le principal apport méthodologique de ce travail. Le plus important est d'avoir empêché les enfants de compter (en limitant le temps d'exposition à 5 secondes). C'est de cette façon en effet qu'il est possible de contraindre les enfants à observer la forme des collections. C'est de cette manière que l'on évite de renouer avec une approche gestaltiste des groupements configurés. C'est parce que les enfants ne peuvent pas compter qu'ils sont contraints de fonder leur jugement sur les ressemblances visuelles entre les groupements et de recourir alors aux propriétés numériques des groupements configurés. Le principal apport méthodologique de ce travail est pour cette raison d'avoir identifié les conditions expérimentales qui rendent possible l'étude des propriétés numériques des groupements configurés ou pour le dire autrement d'avoir créé un paradigme expérimental propre à l'étude de ces propriétés.

2.1.4. Limite méthodologique

Certaines vérifications mériteraient d'être réalisées dans le but de consolider l'hypothèse des groupements configurés. Il importerait de montrer qu'il est plus facile pour un système cognitif de comparer des collections égales lorsqu'elles possèdent la même configuration et de confirmer ainsi la seconde hypothèse de l'expérience 1 de l'article 3.

Il faudrait aussi s'assurer définitivement que les enfants de 5 ans ne se focalisent pas uniquement sur le point du milieu lorsqu'ils comparent des configurations ovales et supposent bel et bien que les points entourant le point du milieu ont le même nombre d'objets (cf. Figure 11 de l'article 3). En d'autres termes, il pourrait être intéressant de montrer qu'ils utilisent la propriété d'égalité des groupements configurés. Cela permettrait en outre d'envisager des comparaisons entre des quantités beaucoup plus importantes et de les destiner à des enfants beaucoup plus jeunes (3 ou 4 ans).

Enfin, il serait intéressant d'évaluer dans une perspective développementale si les enfants de 6 (CP) et de 7 ans (CE1) sont capables de comparer des configurations « 5-5 » aussi aisément que leurs camarades de 8 ans et de s'interroger ainsi sur le rôle du développement oculomoteur dans l'usage des propriétés numériques des groupements configurés. Mais toutes ces vérifications reviennent essentiellement à reprendre et à approfondir la question du fonctionnement cognitif mis en œuvre lors du traitement de ces propriétés.

C'est pourquoi la principale limite méthodologique de ce travail est qu'il ne permet pas l'étude de ce fonctionnement. Les protocoles utilisés montrent que de telles propriétés existent et peuvent être employées aisément dès le plus jeune âge. Cependant, ils ne permettent pas d'en comprendre le mécanisme (procédures virtuelles, contenu de la représentation numérique interne, stratégies visuelles, etc.).

2.1.5. Synthèse et perspectives

En résumé, le principal apport de ce travail est d'avoir ouvert un nouveau champ d'investigation (l'étude et le rôle des propriétés numériques des groupements configurés) et de l'avoir doté d'un paradigme expérimental. Sa principale limite (théorique et méthodologique) est d'avoir insuffisamment interrogé le fonctionnement cognitif mis en œuvre lors du traitement de ces propriétés. C'est pourquoi la principale perspective de recherche est de mettre à jour ce fonctionnement.

Trois directions méritent au moins d'être empruntées : (1) identifier le contenu de la représentation numérique interne en montrant que celui-ci ne peut pas être uniquement visuel (Figure 15a) et doit inclure des composantes procédurales²⁵ (Figure 15b) ; (2)

²⁵ Cette hypothèse est inspirée par les résultats de l'étude 0 et par les recherches sur les limites de la mémoire visuelle de travail (Feigenson, 2011). La majorité des élèves de 8 ans dessinent en effet 74 barres les unes à

identifier les stratégies visuelles et le coût cognitif de celles-ci au moyen d'une analyse des mouvements oculaires²⁶; (3) identifier les procédures virtuelles au moyen de l'imagerie cérébrale²⁷.

2.2. La contribution de cette thèse à la psychologie des apprentissages

Ce travail montre que les êtres humains peuvent dépasser les limites de leurs aptitudes numériques primaires en utilisant les propriétés numériques des groupements configurés. Cette thèse n'est cependant qu'une illustration d'une réflexion plus vaste.

L'idée directrice est que les êtres humains « adaptent » leur environnement à leur propre capacité dans le but d'y améliorer leurs conditions de survie. Autrement dit, ils le modifient (dans notre exemple, en groupant et en configurant les objets) afin de le rendre traitable par le système cognitif humain.

D'un point de vue ergonomique (Bastien & Tricot, 2008), il s'agit de rendre la figuration des quantités sur un document « utile » (le groupement configuré permet de figurer et de distinguer de grands nombres très proches et favorise ainsi l'apprentissage de la numération, du calcul, etc.), « utilisable » (le groupement configuré facilite l'accès aux quantités exactes), « accessible » (le groupement est adapté aux enfants), et « adéquat » (le groupement configuré est aisément utilisable en situation de classe).

Nous avons vu en effet que le groupement configuré rend immédiatement possible chez des enfants de 5 et 8 ans un traitement exact et non plus seulement approximatif des quantités supérieures à 3 ou 4 objets. Le groupement configuré adapte donc la figuration des grandes quantités aux capacités cognitives des enfants et favorise ainsi leur traitement exact. Les enfants parviennent ainsi à accéder plus facilement à des compétences (dans notre cas, la comparaison exacte de grandes quantités) qui dépassent de loin leurs capacités primaires. Il est remarquable qu'ils accèdent à de telles compétences secondaires sans

la suite des autres. Ils ne les groupent pas. En outre, ils ne peuvent les visualiser mentalement. Ils peuvent au mieux imaginer le début de leur procédure (les premiers traits tracés). Tout se passe donc comme si pour eux la quantité « 74 » était le résultat d'une procédure de comptage d'un en un.

²⁶ Les études de Vurpillot (1968) sur les stratégies visuelles et celle d'Amadiou et al. (acceptée) sur le coût cognitif de ces stratégies ont inspiré cette piste de recherche.

²⁷ L'imagerie cérébrale permet par exemple de localiser et de dissocier la représentation des quantités par le SIP et la représentation des quantités par l'ANS (Hyde & Spelke, 2010). Elle pourrait donc permettre dans un premier temps de dissocier différentes stratégies (comptage, correspondance terme à terme, etc.) et dans un second temps d'identifier laquelle de ces stratégies est activée lors de l'utilisation des propriétés numériques des groupements configurés.

enseignement explicite (l'expérimentateur ne leur montre jamais de quelle manière procéder) et spontanément (l'expérimentateur n'a nul besoin de les entraîner).

Ce travail s'inscrit donc essentiellement dans le cadre de la psychologie cognitive des apprentissages. Il apporte à celle-ci les observations suivantes : (1) un système cognitif peut apprendre certaines connaissances secondaires grâce à une adaptation ergonomique de son environnement (Dinet & Bastien, 2011) réalisée par un tiers (l'expérimentateur) ; (2) certains apprentissages secondaires ne nécessitent pas d'être guidés – ils peuvent être appris sans instruction (Tricot, 2012) ; (3) certains apprentissages secondaires ne requièrent pas une pratique régulière (ils peuvent être appris spontanément)²⁸.

2.3. La contribution de cette thèse à l'enseignement

Que pourrait être l'apport de cette thèse du point de vue d'un professeur des écoles ? Les groupements configurés demeurent abordés *implicitement* à l'école élémentaire (en particulier en CP et CE1) dans une perspective gestaltiste : dix cubes sont comptés pour élaborer une barre de dizaine, les barres de dizaine sont à leur tour comptées, etc. Dans cette approche, ils restent des supports de comptage. Comme nous l'avons déjà expliqué, ils ne renseignent pas les élèves sur le nombre d'objets qu'ils pourraient contenir. Ils n'ont pour cette raison aucune propriété numérique.

Il ne s'agit en aucun cas de remettre en question cette lecture gestaltiste des groupements configurés et son usage dans l'enseignement du système décimal. Il se pourrait en effet qu'elle soit en partie l'arrière-fond théorique indispensable à l'acquisition du système décimal (Figure 14).

Ce travail suggère plutôt que les groupements configurés ne sont pas de simples supports de comptage. Ils peuvent servir par exemple à figurer les relations de supériorité et d'infériorité entre les nombres. La figuration des nombres 49 et 50 au moyen des groupements configurés peut aider à prendre conscience de la supériorité du nombre 50 sur le nombre 49 d'une manière non langagière. Selon les propriétés numériques des groupements configurés, l'enfant perçoit immédiatement que le nombre 50 possède un élément de plus que le nombre 49²⁹. Cette information lui est transmise spontanément par

²⁸ Tel est sans doute l'observation la plus originale puisque les apprentissages sans instruction requièrent en règle générale une pratique régulière (Tricot, 2012).

²⁹ Il faut que l'enseignant dise au moins que le nombre « 50 » possède « plus » d'éléments que le nombre

les groupements configurés. L'enseignant peut même utiliser des gros points pour représenter 49 et des petits points pour représenter 50 afin d'être certain d'attirer l'attention des élèves sur la numérosité des deux collections. Cette forme de représentation pourrait présenter deux avantages.

Premièrement, elle inscrit immédiatement le discours de l'enseignant dans un cadre numérique. L'élève voit que 50 n'est pas seulement « après » 49 mais qu'il contient plus d'unités que 49. Les nombres sont en effet à la fois des numérosités (des additions d'unités) et des numéros (des positions particulières dans une suite d'éléments ordonnée). Ils sont des numérosités lorsqu'ils sont figurés comme des sommes. Ils ressemblent plutôt à des numéros lorsqu'ils sont figurés comme des membres de la file numérique ou comme des positions particulières sur une ligne numérique ou au sein d'un tableau (Figure 16). Ces diverses figurations peuvent engendrer des conflits conceptuels du point de vue de l'élève³⁰ : l'enseignant est-il en train de parler de numérosités ou de numéros³¹ ? Pourquoi un nombre situé « après » un autre (sur une ligne ou dans un tableau) serait-il un nombre « plus grand » qu'un autre ?

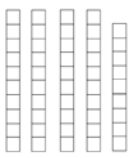
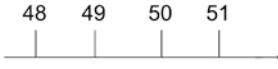
	<table border="1" data-bbox="512 1140 777 1180"><tr><td>48</td><td>49</td><td>50</td><td>51</td></tr></table> 	48	49	50	51	<table border="1" data-bbox="847 1191 1362 1279"><tr><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td></tr><tr><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td></tr></table>	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
48	49	50	51																							
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49																	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59																	
a. Représentation des nombres à l'aide du matériel scolaire usuel de numération	b. Représentation des nombres à l'aide d'une ligne numérique	c. Représentation des nombres à l'aide d'un tableau																								

Figure 16 : Exemples de représentations scolaires usuelles des nombres en CP

« 49 » ou inversement. Les groupements configurés ne sont en eux-mêmes qu'une simple image. Les propriétés numériques de cette image apparaissent lorsque le système cognitif la regarde avec un intérêt particulier pour la quantité d'éléments qu'elle contient. L'utilisation des propriétés numériques dans un cadre scolaire (ou expérimental) exige de la part de l'enseignant (ou de l'expérimentateur) un minimum de discours. (cf. 2.1.3 de la Conclusion).

³⁰ Faut-il voir un nombre *comme* une somme, *comme* un numéro, *comme* une position ? Cette interrogation semble rejoindre certains aspects de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy, 2012, p. 114).

³¹ La représentation des nombres sur une ligne numérique peut aussi suggérer que les nombres sont des longueurs semblables à des segments plus ou moins longs (des amplitudes).

Deuxièmement, l'élève n'a pas à fournir d'effort particulier pour comprendre la différence numérique entre 49 et 50. Il peut donc allouer toutes ses ressources intellectuelles à une tâche plus importante : comprendre que cette différence numérique se traduit symboliquement par le passage à un nouveau chiffre des dizaines (« 4 » devient « 5 ») et par une remise à zéro du compteur au niveau du chiffre des unités (« 9 » devient « 0 »). L'opération inverse est aussi plus aisément accessible puisque l'élève perçoit immédiatement que 49 contient un point de moins sans avoir besoin de recourir à une quelconque procédure langagière (compter, faire défiler la file numérique en sens inverse, repérer que l'écriture chiffrée du nombre « 49 » est placée « avant » l'écriture chiffrée du nombre « 50 », etc.).

En résumé, certains conflits conceptuels pourraient être évités et la charge cognitive langagière des élèves pourrait être allégée. Cela pourrait se révéler utile avec des élèves « ordinaires » et peut-être particulièrement efficace avec des élèves souffrant de difficultés verbales. Il deviendrait en outre possible d'aborder avec ces derniers l'idée de grand nombre exact sans passer par l'intermédiaire du langage (comptage, mot-nombre, écriture chiffrée, etc.). En fin de compte, les propriétés numériques des groupements configurés ont pour principal intérêt de « parler d'elles-mêmes ».

Bibliographie

Cette bibliographie détaille toutes les références mentionnées dans l'Introduction et la Conclusion de cette thèse. Les références mentionnées dans les articles sont détaillées dans les bibliographies de chaque article.

Amadiou, F., Salmerón, L., Cegarra, J., Paubel, P.-V., Lemarié, J., & Chevalier, A. (accepté). Learning from concept-mapping and hypertext: an eye tracking study. *Journal of Educational Technology & Society*.

Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire (2015). *Accueil*. En ligne <http://python.espe-bretagne.fr/ace/>, consultée le 19 janvier 2016

Barner, D., Wood, J., Hauser, M., Carey, S. (2008). Evidence for a non- linguistic distinction between singular and plural sets in rhesus monkeys. *Cognition*, 107(2), 603–622.

Barner, D., Thalwitz, D., Wood, J., Yang, S-J, & Carey, S. (2007). On the relation between the acquisition of singular-plural morpho-syntax and the conceptual distinction between one and more than one. *Developmental Science*, 10(3), 365-373.

Bastien, J.M.C., & Tricot, A. (2008). L'évaluation ergonomique des documents électroniques. In A. Chevalier & A. Tricot, (Eds.), *Ergonomie des documents électroniques*. (pp. 205-227). Paris : PUF

Beckwith, M., & Restle, F. (1966). Process of enumeration. *Psychological Review*, 73, 437-444.

Bloch, I. (2008). « Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. » *Les sciences de l'éducation— Pour l'Ère nouvelle*, 41(1), 91-113.

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010) « Arithmetic word problem solving: a situation strategy first framework », *Developmental Science*, 13(1), 92-107.

Burr, D. C., Turi, M., & Anobile, G. (2010). Subitizing but not estimation of numerosity requires attentional resources. *Journal of Vision*, 10(6), 20.

Butterworth, B., Reeve, R., Reynolds, F., & Lloyd, D. (2008). Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children. *Proceedings of the national academy of sciences*, 105(35), 13179–13184.

Canopé (2015). *Structurer sa pensée. 4. Construire les premiers outils pour structurer sa pensée*. En ligne <https://www.reseau-canope.fr/programme-maternelle-2015/5-domaines-dapprentissage/structurer-sa-pensee.html>, consulté le 19 janvier 2016.

Camos, V. (2003). Counting strategies from 5-years to adulthood: adaptation to structural features. *European journal of psychology of education*, 18(3), 251-265.

Carey, S. (2009). Where Our Number Concepts Come From. *The Journal of Philosophy*, 106(4), 220–254.

Case, R., & Griffin, S. (1990). Child cognitive development: the role of central conceptual structures in the development of scientific and social thought. In C.A. Hauert (Ed.), *Developmental psychology: Cognitive, perceptuo-motor, and neuropsychological perspectives* (pp. 193–230). Amsterdam: Elsevier Science.

Chan, W.W.L., Au, T.K., & Tang, J. (2014). Strategic counting: A novel assessment of place-value understanding. *Learning and Instruction*, 29, 78-94.

Cohen, D.J. & Sarnecka, B.W. (2014). Children's number-line estimation shows development of measurement skills (not number representations). *Developmental Psychology*, 50(6), 1640–1652.

Colomb J. (2005). *Ermel-Apprentissages numériques et résolutions de problèmes, CP*. Paris : Hatier.

Condry, K. F., & Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology. General*, 137(1), 22–38.

Coubart, A., Izard, V., Spelke, E. S., Marie, J., & Streri, A. (2014). Dissociation between small and large numerosities in newborn infants. *Developmental Science*, 17(1), 11-22.

Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*. 123(1), 162-173.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., Pica, P. (2008). Log or Linear? Distinct intuitions of the number scale in western and amazonian Indigene Cultures. *Science*, 320, 1217-1220.

Dehaene, S., Izard, V., & Piazza, M. (2005). Control over non-numerical parameters in numerosity experiments. Manuscrit non publié. En ligne
<http://www.unicog.org/docs/DocumentationDotsGeneration.doc>.

Del Notaro, L., & Floris, R. (2011). Calculatrice et propriétés arithmétiques à l'école élémentaire. *Grand N*, 87, 17-49.

De Neys, W., Lubin, A., & Houdé O. (2014). The Smart Nonconserver: Preschoolers Detect Their Number Conservation Errors. *Child Development Research*, Article ID 768186.

Dinet, J., & Bastien, J.M.C. (2011). *L'ergonomie au service de la vie quotidienne*. Paris : Hermès.

Ebersbach, M., Luwel, K., and Verschaffel, L. (2013). Comparing apples and pears in studies on magnitude estimations. *Frontiers in psychology*, 4. Article 332.

Elia, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 45-66.

Everett, C., & Madora, K. (2012). Quantity recognition among speakers of an Anumeric language. *Cognitive Science*, 36(1), 130–141.

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Paris : PUF.

Fayol, M., Abdi, H., & Gombert, J-E. (1987). Arithmetic problems formulation and working memory load. *Cognition and instruction*, 4(3), 187-202.

Feigenson, L. (2011). Objects, sets, and ensembles. In S. Dehaene & E. Brannon (Eds.), *Space, Time, and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought*. London: Elsevier.

Feigenson, L. (2005). A double-dissociation in infants' representations of object arrays. *Cognition*, 95(3), B37-B48.

Feigenson, L., & Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition*, 97, 295-313.

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002a). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13(2), 150–156.

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002b). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive Psychology*, 44(1), 33–66.

Flaherty, M., & Senghas, A. (2011). Numerosity and number signs in deaf Nicaraguan adults. *Cognition*, 121(3), 427–436.

Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology: Evidence from Piraha language and cognition. *Cognition*, 108(3), 819–824.

Frank, M. C., Fedorenko, E., Lai, P., Saxe, R., & Gibson, E. (2012). Verbal interference suppresses exact numerical representation. *Cognitive Psychology*, 64, 74-92.

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K.C., Li, Y. (2009). Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking. *ZDM Mathematics Education*, 41, 793–808.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia I., Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 25-43.

Geary, D. C. (2008a). An evolutionarily informed education science. *Educational Psychologist*, 43(4), 179-195.

Geary, D.C. (2008b). Whither Evolutionary Educational Psychology? *Educational psychologist*, 43(4), 217–226.

Geary, D.C. (2007). An evolutionary perspective on learning disability in mathematics. *Developmental Neuropsychology*, 32(1), 471–519.

Geary, D.C. (2002). Principles of evolutionary educational psychology. *Learning and Individual Differences*, 12, 317–345.

Geary, D.C., Bailey, D.H., & Hoard, M.K (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: the number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27, 265-279.

Geary, D.C., Hoard, M.K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 277–299.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from amazonia. *Science*, 306, 496–499.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., and Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental Psychology*, 48, 1229–1241.

Hyde, D. C. (2011). Two systems of non-symbolic numerical cognition. *Frontiers in Human Neuroscience*, 5, 150.

Hyde, D. C., & Spelke, E. S. (2010). Neural signatures of number processing in infants: evidence for two core systems underlying numerical cognition. *Developmental Science*, 14, 360–371.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Robert Laffont.

Izard, V., Streri, A., & Spelke, E. S. (2014). Toward exact number: Young children use one-to-one correspondence to measure set identity but not numerical equality. *Cognitive Psychology*, 72, 27–53.

Izard, V., Sann, C., Spelke, E.S, & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *PNAS*, 106, 10382–10385.

Izard, V. & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition*, 106, 1221–1247.

Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S., & Dehaene, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical Psychology*, 21(4), 491–505.

Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008). *The generative basis of natural number concepts*. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(6), 213–218.

- Libertus M.E, & Brannon, E.M. (2009). Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental science*, 13(6), 900-906.
- Link, T., Huber, S., Nuerk, H. C., and Moeller, K. (2014). Unbounding the mental number line-new evidence on children's spatial representation of numbers. *Frontiers in psychology*, 4, Article 1021.
- Lipton J.S., & Spelke E.S. (2006). Preschool children master the logic of number word meanings. *Cognition*, 98(3), B57-66.
- Lipton J.S., & Spelke E.S. (2003). Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 14(5), 396-401.
- Mansour, A. (2011). Connaître le nombre. Étude expérimentale. *Repères-IREM*, 83,75-88.
- Mejias, S., Mussolin, C., Rousselle, L. , Grégoire, J. , & Noël, M-P. (2012). Numerical and nonnumerical estimation in children with and without mathematical learning disabilities. *Child Neuropsychology*, 18 (6), 550–575.
- Programme d'enseignement du CP au CE2 : Arrêté du Ministère de l'Education Nationale du 9 novembre 2015 fixant le programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (2015). *Bulletin officiel special de l'Education Nationale*, 11, 26 novembre. MENE1526483A.
- Miura, I. T., Kim, C. C., Chang, C., & Okamoto, Y. (1988). Effects of language characteristics on children's cognitive representation of number: cross-national comparisons. *Child Development*, 59, 1445–1450.
- Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Muldoon, K., Towse, J., Simms, V., Perra, O., and Menzies, V. (2013). A longitudinal analysis of estimation, counting skills, and mathematical ability across the first school year. *Developmental Psychology*, 49, 250–257.

Mussolin, C., Mejias, S., & Noël, M.-P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, 115(1), 10–25.

Nieder, A. & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience*, 32, 185-208.

Nieder A., Freedman, D.J., Miller, E.K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, 297, 1708–11.

Nieder A, Merten K. 2007. A labeled-line code for small and large numerosities in the monkey prefrontal cortex. *Journal of neuroscience*, 27, 5986–5993.

Noël, M-P., & Rousselle, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: an explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in human neuroscience*, 5, Article 165.

Núñez, R. (2008). Reading between the Number Lines (Commentary). *Science*, 321, 1293.

Odic, D., Pietroski, P., Hunter, T., Lidz, J., & Halberda, J. (2013). Young Children's Understanding of "More" and Discrimination of Number and Surface Area. *Journal of experimental psychology*, 39(2), 451–461.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A.N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*. 116(1), 33-41.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group. *Science*, 306, 499-503.

Pietroski, P., Lidz, J., Hunter, T. & Halberda, J. (2009). The Meaning of ‘most’: semantics, numerosity and psychology. *Mind and Language*, 24(5), 554–585.

Reeve, R.A., Paul, J.M., & Butterworth, B. (2015). Longitudinal changes in young children’s 0–100 to 0–1000 number-line error signatures. *Frontiers in psychology*, 6, Article 647.

Ricco, G., Menotti G., Boyer C., Larere, C., Numa Bocage L., Allenbach, L. (2008). L’hétérogénéité des rapports des élèves au domaine numérique au début et à la fin de la première année de l’école élémentaire. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 28(3), 279–318.

Riley, M.S., Greeno, J. G., & Heller, J.I. (1983). Development of children’s problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New-York: Academic Press.

Roitman, J.D., Brannon, E.M., & Platt M.L. (2007). Monotonic coding of numerosity in macaque lateral intraparietal area. *Plos Biology*, 8, e208.

Rosenberg, R.D. & Feigenson, L. (2013). Infants hierarchically organize memory representations. *Developmental Science*, 16(4), 610–621.

Rousselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102(3), 361–395.

Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662–674.

Sarnecka, B.W. & Wright, C.E. (2013). The Idea of an Exact Number: Children’s Understanding of Cardinality and Equinumerosity. *Cognitive Science*, 37(8), 1493–1506.

Sawamura, H., Shima, K., Tanji, J. (2002). Numerical representation for action in the parietal cortex of the monkey. *Nature*, 415, 918–22.

- Sensevy, G. (2012). Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques. *Nouvelles Perspectives en Sciences Sociales*, 7(2), 105-131.
- Siegler, R.S & Ramani, G.B (2009). Playing linear number board games - but not circular ones- improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 545–560.
- Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428-444.
- Spaepen, E., Coppola, M., Spelke, E. S., Carey, S. E., & Goldin-Meadow, S. (2011). Number without a language model. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(8), 3163–3168.
- Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of experimental child psychology*, 126, 120-137.
- Sweller, J. (2015). In Academe, What Is Learned, and How Is It Learned?. *Current Directions in Psychological Science*, 24(3), 190-194.
- Todovoric, D. (2011). What is the origin of the Gestalt principles? *Humana Mente*, 17, 1-20.
- Tricot, A. (2012). Utilité, apprentissages et enseignement : une approche évolutionniste. In *Du mot au concept : utilité*. Grenoble : PUG.
- Van Oeffelen, M. P., & Vos, P. G. (1982). Configurational effects on the enumeration of dots: Counting by groups. *Memory & Cognition*, 10, 396–404.

Vasilyeva, M., Laski, E.V., Ermakova, A., Lai, W-F., Jeong, Y., & Hachigian, A. (2015). Reexamining the language account of cross-national differences in base-10 number representations. *Journal of experimental child psychology*, 129, 12–25.

Verguts, T. & Vias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: a neural mode. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9), 1493-504.

Vilette, B. (1996). *Le développement de la quantification chez l'enfant*. Villeneuve-d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.

Vurpillot, E. (1968). The development of scanning strategies and their relation to visual differentiation. *Journal of experimental child psychology*, 6(4), 632-650.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive psychology*, 24, 220-251.

Annexe

Attestations de soumission des articles

Attestation de soumission de l'article 1 **à la revue *Psychologie française***

ELSEVIER EDITORIAL SYSTEM

Psychologie française

Ms. Ref. No.: PSFR-D-15-00015

Titre: Comment évaluer la sensibilité à la numérosité ? Une revue des différentes tâches

Cher(e) Mr. sebastien miravete,

L'article que vous nous avez soumis intitulé "Comment évaluer la sensibilité à la numérosité ? Une revue des différentes tâches" sera pris en charge par Redacteur en chef Aline Chevalier, PhD.

Vous pouvez suivre l'évolution de votre manuscrit en vous rendant sur le site EES de la revue en tant qu'auteur. L'URL de la revue est la suivante <http://ees.elsevier.com/psfr/>.

Merci d'avoir soumis ce travail à notre revue.

Bien cordialement,

Psychologie française

Attestation de soumission de l'article 2 **à la revue *Journal of experimental psychology: learning, memory, and cognition***

Dear Mr Miravète,

Your submission "Configured-groups hypothesis: fast comparison of exact large quantities without counting" has been assigned the following manuscript number: XLM-2015-2531.

You will be able to check on the progress of your paper by logging on to Editorial Manager as an author.

The URL is <http://xlm.edmgr.com/>.

Thank you for considering Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition as an outlet for your work.

Best regards,
Journal of Experimental Psychology

3. Attestation de soumission de l'article 3
à la revue *Journal of experimental child psychology*

Ms. Ref. No.: JEC-P-D-16-00032

Title: The numerical properties of configured groups: a missing link?

Journal of Experimental Child Psychology

Dear Mr. sebastien miravete,

Your submission "The numerical properties of configured groups: a missing link?" will be handled by Associate Editor Steven Hecht, Ph.D..

You may check the progress of your paper by logging into the Elsevier Editorial System as an author at <http://ees.elsevier.com/jecp/>.

Your username is: sebastien.miravete@gmail.com

If you need to retrieve password details, please go to:
http://ees.elsevier.com/jecp/automail_query.asp

Thank you for submitting your work to this journal.

Kind regards,

Elsevier Editorial System

Journal of Experimental Child Psychology