



**HAL**  
open science

## Propagation robuste de défauts en 3D

Matthieu Le Cren-Rossi Le Cren

► **To cite this version:**

Matthieu Le Cren-Rossi Le Cren. Propagation robuste de défauts en 3D. Mécanique des solides [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2018. Français. NNT : 2018ECDN0028 . tel-01952979

**HAL Id: tel-01952979**

**<https://theses.hal.science/tel-01952979>**

Submitted on 12 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : *Mécanique des solides, des matériaux, des structures et  
des surfaces*

Par

**Matthieu Le Cren**  
**Propagation robuste de défauts en 3D**

Thèse présentée et soutenue à École Centrale de Nantes le 18 octobre 2018  
Unité de recherche : Institut de recherche en génie civil et mécanique (GeM)

## Composition du Jury :

Sylvie Pommier	Professeure	Rapporteur
Stéphane Bordas	Professeur	Rapporteur
Anthony Gravouil	Professeur	Président du jury
Nicolas Moës	Professeur	Directeur de thèse
Patrick Massin	Ingénieur Chercheur	Examineur
Alexandre Martin	Ingénieur Chercheur	Examineur
Claude Stolz	Directeur de recherche	Invité



# Remerciements

---

Dans un premier temps, je tiens à remercier les différents membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail de thèse. Un grand merci à M. Anthony Gravouil qui a présidé cette soutenance et aux rapporteurs Mme. Sylvie Pommier et M. Stéphane Bordas pour leurs rapports constructifs et les suggestions très intéressantes apportées au mémoire de thèse.

Je remercie également les différents membres de mon encadrement de thèse : M. Nicolas Moës, directeur de thèse, pour son soutien et ses conseils avisés, M. Patrick Massin, co-directeur de thèse, pour ses compétences et sa disponibilité et M. Alexandre Martin, co-encadrant de thèse, pour son investissement dans ce travail et son aide très précieuse. Ce fut un plaisir et un honneur de travailler avec vous.

Je tiens aussi à remercier M. Claude Stolz, qui a contribué à l'élaboration de ce travail. Ses compétences et sa pédagogie m'ont permis d'avancer de manière efficace sur des sujets complexes.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes de l'IMSIA que j'ai pu côtoyer durant ces années. Que ce soit les doctorants, les stagiaires ou les titulaires, chacun d'entre eux me laisse un souvenir indélébile.

Merci à tous mes collègues d'EDF, dont certains ont aussi apporté une contribution précieuse à ce travail, pour leur compagnie et leur bonne humeur quotidienne.

Je finirai par remercier ma famille et ma compagne qui m'ont soutenu et encouragé dans cette aventure.

N'acceptez jamais la défaite, vous êtes peut-être à un pas de la réussite...



# Résumé

---

Afin d'assurer le contrôle de son parc de production d'électricité, EDF doit maîtriser le vieillissement de ses installations pour en garantir le bon fonctionnement dans la durée. Pour la filière nucléaire, les normes de sécurité de haut niveau imposées par l'Autorité de Sûreté Nucléaire astreignent EDF à justifier de manière rigoureuse de la tenue mécanique des composants et notamment ceux qui ne sont pas remplaçables. Dans ce but, il est nécessaire de disposer d'outils performants pour modéliser et simuler la propagation des défauts dans les structures.

Dans ces travaux de thèse, on s'intéresse à la propagation de fissures avec la méthode X-FEM et notamment à l'étape de localisation de la fissure par une technique de courbes de niveau (*level sets*). Nous avons proposé une approche fondée sur une méthode de propagation d'information de distance depuis les lèvres de la fissure dite *fast marching method* pour rendre cette étape plus robuste dans le processus de propagation de la méthode X-FEM. Elle est applicable à tous types de mailles, linéaires ou quadratiques.

Dans la seconde partie de la thèse, on s'intéresse à l'évaluation du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte. En effet, le calcul de ces quantités doit être précis pour permettre de calculer la direction et l'avancée de la fissure à chaque pas de propagation. Pour ce faire, nous avons considéré une méthode d'intégrale de domaine, et nous avons soulevé, à travers des exemples simples mais pertinents, les difficultés liées à une représentation de la fissure dans un espace tridimensionnel. Une analyse liée au choix d'une base appropriée permettant de discrétiser le front de fissure ou encore la contribution des intégrales de surfaces pour les fissures débouchantes sera traitée.

La dernière partie de ce travail traite du calcul des facteurs d'intensité de contrainte avec une méthode d'intégrale d'interaction pour les fissures à front courbe. Nous avons identifié les limites de l'utilisation des champs asymptotiques obtenus sous l'hypothèse des déformations planes comme champs auxiliaires de ces méthodes et nous avons proposé des nouveaux champs de déplacements qui prennent en compte la courbure du front de fissure.



# Table des matières

---

<b>Introduction et contexte industriel</b>	<b>1</b>
<b>1 Méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissures</b>	<b>7</b>
1.1 Mécanique linéaire élastique de la rupture . . . . .	8
1.1.1 Décomposition du champ de déplacement au voisinage de la fissure	8
1.1.2 Définition des champs asymptotiques . . . . .	9
1.1.3 Approche énergétique . . . . .	12
1.1.3.1 Problème de référence . . . . .	12
1.1.3.2 Taux de restitution d'énergie . . . . .	13
1.1.3.3 Lien entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	14
1.1.3.4 Intégrale de Rice . . . . .	14
1.1.4 Les principales techniques de calcul du taux de restitution d'éner- gie et des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	15
1.1.4.1 Le calcul de l'intégrale de Rice . . . . .	16
1.1.4.2 La méthode $G-\theta$ . . . . .	16
1.1.4.3 Extrapolation des déplacements . . . . .	17
1.1.4.4 Découplage des modes de rupture . . . . .	18
1.2 Propagation de fissures avec X-FEM . . . . .	19
1.2.1 Méthode des éléments finis étendue . . . . .	20
1.2.2 Théorie des <i>level sets</i> et représentation de la fissure . . . . .	22
1.2.3 Algorithme de propagation de fissures . . . . .	24
1.2.4 Représentation de l'avancée de la fissure . . . . .	26
1.2.4.1 Direction de propagation . . . . .	26
1.2.4.2 Avancée de la fissure . . . . .	27
1.2.5 Les différentes techniques de mise à jour des <i>level sets</i> . . . . .	29
1.2.5.1 Les équations d'Hamilton-Jacobi . . . . .	29
1.2.5.2 Processus de mise à jour des <i>level sets</i> . . . . .	30
1.2.5.3 Application de la méthode <i>upwind</i> à des maillages irrég- guliers . . . . .	33
1.2.5.4 Une méthode de calcul direct pour la mise à jour des <i>level sets</i> . . . . .	35

1.3	Résultats de simulation . . . . .	36
1.3.1	Éprouvette en flexion trois points . . . . .	36
1.3.2	Test de rupture en torsion sur béton . . . . .	38
1.4	Bilan et mise en exergue des difficultés rencontrées . . . . .	39
<b>2</b>	<b><i>Fast marching method</i> dans le cadre de la fissuration</b>	<b>43</b>
2.1	Principe de la <i>fast marching method</i> pour la propagation de fissures . . . . .	44
2.2	Réinitialisation des <i>level sets</i> sur maillage structuré . . . . .	46
2.2.1	Discrétisation de l'équation eikonale . . . . .	46
2.2.2	Algorithme de réinitialisation de la <i>level set</i> sur un maillage structuré . . . . .	48
2.2.3	Traitement des nœuds particuliers . . . . .	48
2.2.4	Quelques résultats de validation . . . . .	49
2.2.4.1	Propagation d'une fissure X-FEM dans une plaque en flexion trois points, dans un espace bidimensionnel . . . . .	50
2.2.4.2	Éprouvette en flexion trois points . . . . .	52
2.3	Réinitialisation des <i>level sets</i> sur un maillage discrétisé en simplexes . . . . .	54
2.3.1	Principe de la méthode . . . . .	54
2.3.2	Algorithme de réinitialisation de la <i>level set</i> sur un maillage discrétisé en simplexes . . . . .	57
2.3.3	Traitement des nœuds problématiques . . . . .	57
2.4	Extension de la <i>fast marching method</i> à tous types de mailles . . . . .	62
2.4.1	Application sur maillage linéaire . . . . .	64
2.4.1.1	Connectivité de la maille en 2D . . . . .	64
2.4.1.2	Connectivité de la maille en 3D . . . . .	65
2.4.2	Application sur maillage quadratique . . . . .	68
2.4.2.1	Cas 2D . . . . .	69
2.4.2.2	Propagation d'une fissure X-FEM débouchante sollicitée en mode I, dans un espace 2D . . . . .	70
2.4.2.3	Cas 3D . . . . .	71
2.4.2.4	Propagation plane d'une fissure X-FEM débouchante, dans un espace 3D . . . . .	72
2.5	Résultats . . . . .	75
2.5.1	Propagation non plane d'une fissure débouchante . . . . .	75
2.5.2	Test Brokenshire . . . . .	78
2.5.3	Propagation de fissures dans une brique de graphite . . . . .	80
2.5.3.1	Propagation d'une fissure plane dans une tranche de brique de graphite . . . . .	80

2.5.3.2	Propagation d'une fissure non-plane dans une tranche de brique de graphite . . . . .	83
2.6	Conclusions . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Méthode de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte</b>	<b>87</b>
3.1	Méthode $G-\theta$ . . . . .	89
3.1.1	Cas bidimensionnel . . . . .	90
3.1.2	Cas tridimensionnel . . . . .	93
3.1.3	Calcul du taux de restitution d'énergie sur un exemple de fissure droite en 3D . . . . .	99
3.1.3.1	Définition du problème . . . . .	99
3.1.3.2	Calcul analytique du taux de restitution d'énergie et identification au cas 2D . . . . .	101
3.1.3.3	Calculs numériques du taux de restitution d'énergie . . . . .	105
3.1.3.4	Interpolation du champ $\theta$ . . . . .	105
3.1.4	Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode X-FEM . . . . .	108
3.1.4.1	Fissure plane à front droit incliné dans un maillage structuré . . . . .	108
3.1.4.2	Fissure plane à front droit dans un maillage libre tétraédrique . . . . .	109
3.2	Calcul numérique des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	111
3.2.1	Forme bilinéaire du taux de restitution d'énergie . . . . .	113
3.2.2	Calcul des facteurs d'intensité de contraintes sur un problème de fissure droite 3D . . . . .	115
3.2.2.1	Analyse d'un mode II . . . . .	115
3.2.2.2	Calcul des intégrales surfaciques . . . . .	116
3.2.2.3	Remarque concernant les modèles comportant des surfaces libres de chargement . . . . .	117
3.3	Conclusions . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Prise en compte de la courbure pour l'estimation des facteurs d'intensité de contrainte</b>	<b>119</b>
4.1	Champ à l'équilibre dans le repère local . . . . .	121
4.1.1	Analyse numérique de l'équilibre pour une solution axisymétrique . . . . .	123
4.1.2	Calcul du taux de restitution d'énergie pour une fissure plane à front courbe . . . . .	125

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.2	Construction d'un champ de déplacement avec une prise en compte de la courbure . . . . .	127
4.2.1	Analyse numérique du calcul du taux de restitution d'énergie . .	129
4.3	Résultats numériques . . . . .	130
4.3.1	Fissure circulaire représentée dans un maillage bidimensionnel .	130
4.3.2	Fissure circulaire représentée dans un maillage tridimensionnel .	132
4.3.3	Fissure elliptique représentée dans un maillage tridimensionnel .	133
4.4	Conclusions . . . . .	135
<b>5</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Gradient du champ <math>\theta</math></b>	<b>141</b>
<b>B</b>	<b>Divergence d'un tenseur d'ordre deux</b>	<b>142</b>
<b>C</b>	<b>Coefficients des termes d'ordre supérieur</b>	<b>144</b>

# Table des figures

---

1	Réacteurs avancés refroidis au gaz (AGR). . . . .	2
2	À gauche, les briques de graphite assemblées dans le coeur du réacteur, à droite, la représentation d'une seule brique de graphite (source EDF Energy). . . . .	2
1.1	Modes de sollicitation d'une fissure dans un espace tridimensionnel. . .	9
1.2	Base locale et coordonnées polaires $r$ et $\varphi$ en front de fissure. . . . .	11
1.3	Domaine fissuré. . . . .	12
1.4	Intégrale de contour en pointe de fissure. . . . .	15
1.5	Couronne d'intégration pour l'intégrale $G$ . . . . .	17
1.6	À gauche, un enrichissement « topologique » et, à droite, un enrichissement « géométrique ». . . . .	22
1.7	Définition des <i>level sets</i> dans le domaine et représentation du front de fissure avec les iso-zéros des <i>level sets</i> . . . . .	25
1.8	Front de fissure discrétisé et base locale associée à chaque point du front.	29
1.9	Recherche d'un point du front de fissure associé à un point $M$ du domaine.	34
1.10	À gauche, configuration initiale de la fissure, à droite, configuration après propagation. Seule la zone à l'intérieur du tore de calcul (en gris foncé) est mise à jour. . . . .	34
1.11	Calcul des <i>level sets</i> avec l'utilisation d'un tore. . . . .	35
1.12	Avancée du front de fissure ( <i>cf.</i> [Col12a]). . . . .	35
1.13	Éprouvette pré-fissurée en flexion trois points, à gauche, une représentation en 3D, et à droite, projection sur les plans $xOy$ et $yOz$ . . . . .	37
1.14	À gauche, faciès de rupture observés expérimentalement et, à droite, représentation schématique de la surface de la fissure (d'après [Cit08; Laz08]). . . . .	37
1.15	Faciès de rupture observé expérimentalement (d'après [Bro96]). . . . .	38
1.16	Géométrie et chargement du test de Brokenshire. . . . .	38
1.17	Représentation des iso-zéros des <i>level sets</i> au cours de la propagation. En gris, l'iso-zéro de la <i>level set</i> tangente et, en violet, l'iso-zéro de la <i>level set</i> normale. . . . .	40
2.1	Réinitialisation d'une <i>level set</i> par <i>fast marching method</i> . . . . .	45

TABLE DES FIGURES

---

2.2	Trois directions de recherche pour le nœud courant. . . . .	48
2.3	Plaque fissurée soumise à une flexion trois points : description de la géométrie et des chargements. . . . .	50
2.4	Trajet de fissuration dans une plaque en flexion trois points. . . . .	51
2.5	Représentation de l'iso-zéro de la <i>level set</i> normale. À gauche, l'iso-zéro de la <i>level set</i> normale obtenue par la méthode <i>upwind</i> , et à droite, l'iso-zéro de la <i>level set</i> normale obtenue par la <i>fast marching method</i> . . . . .	52
2.6	Localisation du front de fissure pour chaque pas de propagation par <i>fast marching method</i> . . . . .	53
2.7	tétraèdre dans l'espace 3D. . . . .	54
2.8	Géométrie de la structure d'un test de propagation avec la méthode X-FEM. . . . .	59
2.9	(a) front de fissure représenté comme l'intersection des deux iso-zéros au deuxième pas de propagation, (b) différentes iso-valeurs de la <i>level set</i> tangente après deux pas de propagation et (c) un agrandissement de l'iso-zéro de la <i>level set</i> tangente près des bords. . . . .	60
2.10	En vert, le trajet le plus court du plan au nœud $i_4$ pour un cas où la condition de monotonie n'est pas satisfaite. . . . .	61
2.11	Triangle dans un espace 3D. . . . .	62
2.12	(a) et (c) représentent la réinitialisation de la <i>level set</i> tangente avec la condition (2.22). (b) et (d) représentent la réinitialisation de la <i>level set</i> tangente avec la condition (2.27). . . . .	63
2.13	Découpage d'une maille carrée en sous-mailles triangles. Les nœuds oranges représentent les valeurs de <i>level sets</i> connues et les nœuds rouges, les valeurs de <i>level sets</i> à déterminer. . . . .	64
2.14	Découpage d'une maille pyramide en sous-éléments tétraèdres. Les nœuds oranges représentent les valeurs de <i>level sets</i> connues et les nœuds rouges, les valeurs de <i>level sets</i> à déterminer. . . . .	66
2.15	Découpage d'une maille pentaèdre à six nœuds en sous-éléments pyramidaux. . . . .	67
2.16	Découpage d'une maille hexaèdre en sous-éléments pentaèdres. . . . .	68
2.17	Découpage d'un triangle à six nœuds. . . . .	69
2.18	Découpage d'un quadrangle à huit nœuds. . . . .	69
2.19	Géométrie de référence pour le test de la propagation d'une fissure sollicitée en mode I, en 2D (d'après [Cod15]). Une traction est imposée sur la face supérieure et sur la face inférieure. . . . .	70
2.20	Découpage d'un tétraèdre à dix nœuds. . . . .	71

2.21	Découpage d'une pyramide à treize nœuds. . . . .	72
2.22	Découpage d'un pentaèdre à quinze nœuds. . . . .	72
2.23	Découpage d'un hexaèdre à vingt nœuds. . . . .	73
2.24	Géométrie de référence pour le test de la propagation d'une fissure sollicitée en mode I, en 3D ( <i>cf.</i> [Cod11a]). . . . .	74
2.25	Géométrie de référence pour le test de propagation d'une fissure non plane (d'après [Cod11b]). . . . .	76
2.26	Visualisation du champ de déplacement après propagation de la fissure. . . . .	76
2.27	Visualisation du champ de <i>level set</i> après propagation et réinitialisation par différentes méthodes. Les deux iso-zéros des <i>level sets</i> sont représentés en vert. . . . .	77
2.28	Visualisation des <i>level sets</i> au cours de la propagation. En violet, la <i>level set</i> normale et, en gris, la <i>level set</i> tangente. . . . .	78
2.29	Configuration obtenue à la fin de la propagation, après rupture totale de la pièce. . . . .	79
2.30	Faciès de rupture obtenus pour le modèle numérique et le modèle expérimental. . . . .	79
2.31	Étude de la fissuration plane dans la brique. . . . .	80
2.32	Les deux formes de fissures initiales considérées. . . . .	81
2.33	Propagation de la fissure, en partant de la fissure à front droit. . . . .	82
2.34	Propagation d'une fissure, en partant de la fissure de forme circulaire. . . . .	82
2.35	Étude de la fissuration non-plane dans la brique de graphite. . . . .	83
2.36	Propagation d'une fissure non-plane dans la brique de graphite. . . . .	84
2.37	Étude de la propagation de fissure dans une brique allongée [Vo15; Vo]. . . . .	86
3.1	Domaine fissuré. . . . .	89
3.2	Illustration d'une fonction $\mathcal{F}^\eta$ : (a) domaine fissuré $\Omega$ et (b) domaine $\Omega^\eta$ , image de $\Omega$ par la transformation $\mathcal{F}^\eta$ . . . . .	90
3.3	Domaine de définition du champ $\underline{\theta}$ . . . . .	92
3.4	Graphe de la fonction $\Theta$ . . . . .	92
3.5	Base locale pour un point $M_0$ du front de fissure, d'abscisse curviligne $s$ . . . . .	94
3.6	Fonctions de forme linéaires de type Lagrange. . . . .	95
3.7	Représentation des six premiers polynômes de Legendre. Sur ce graphe $P_n$ désigne le polynôme de Legendre de degré $n$ . . . . .	96
3.8	Calcul de $G$ avec une représentation par les fonctions de forme de Lagrange, pour différents choix de discrétisation du front de fissure. . . . .	98
3.9	Conditions aux limites du problème de référence. . . . .	100

TABLE DES FIGURES

---

3.10	Erreur relative en termes de la norme $L^2$ du déplacement et de la norme en énergie, en fonction du raffinement du maillage. . . . .	101
3.11	Visualisation du champ de déplacement, pour un maillage FEM. . . . .	102
3.12	Représentation des surfaces et volumes nécessaires pour exprimer les intégrales intervenant dans la méthode $G-\theta$ . . . . .	103
3.13	Comparaison des résultats du calcul de $G$ par la méthode $G-\theta$ entre le modèle 2D et le modèle 3D. . . . .	106
3.14	Résultats du calcul de $G$ avec la nouvelle interpolation du champ $\theta_i$ . . . . .	107
3.15	Étude d'une fissure plane à front droit incliné. . . . .	110
3.16	Erreur relative de $G$ en fonction du raffinement pour les deux choix d'interpolations du champ $\theta_i$ . . . . .	111
3.17	Taux de restitution $G$ en fonction de l'abscisse curviligne $s$ . . . . .	112
3.18	Erreur relative sur $K_I$ pour un mode I et erreur relative sur $K_{II}$ pour un mode II, en fonction du raffinement de maillage. . . . .	115
3.19	Évolution de $K_I$ , $K_{II}$ et $K_{III}$ en fonction de l'abscisse curviligne $s$ pour une fissure sollicitée en mode II. Cette figure représente le cas où les intégrales de surface sont prises en compte dans le calcul. . . . .	116
3.20	Évolution de $K_I$ , $K_{II}$ et $K_{III}$ en fonction de l'abscisse curviligne $s$ pour une fissure sollicitée en mode II. Cette figure représente le cas où les intégrales de surface ne sont pas prises en compte dans le calcul. . . . .	117
4.1	Base locale dans le plan perpendiculaire au front de fissure. . . . .	122
4.2	Domaines $\Omega_i$ entourant la pointe de la fissure. . . . .	124
4.3	Étude de convergence en norme $L^2$ et en énergie pour différentes tailles de domaines $\Omega_i$ entourant la pointe de fissure. . . . .	125
4.4	Surfaces entourant le front de fissure dans un plan orthogonal. . . . .	127
4.5	Analyse de convergence en norme $L^2$ pour un domaine $\Omega_i$ fixé, obtenue avec les champs de déplacement $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ . . . . .	130
4.6	Calcul de l'erreur relative en termes de $G$ en fonction de $\frac{R}{a}$ pour une finesse de maille fixée et pour les champs de déplacement $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ . . . . .	131
4.7	Étude d'un modèle axisymétrique. . . . .	132
4.8	Fissure circulaire 3D. . . . .	132
4.9	Évolution de $K_I$ en fonction de l'abscisse curviligne $s$ . . . . .	133
4.10	Fissure elliptique 3D. . . . .	134
4.11	Calcul de $G$ et de $K_I$ pour une fissure plane à front elliptique. . . . .	135

# Introduction et contexte industriel

---

Afin d'assurer le contrôle de son parc de production d'électricité, EDF (Électricité de France) doit maîtriser le vieillissement de ses installations pour en garantir le bon fonctionnement dans la durée. Pour la filière nucléaire, les normes de sécurité de haut niveau imposées par l'Autorité de Sûreté Nucléaire astreignent EDF à justifier de manière rigoureuse de la tenue mécanique des composants et notamment ceux qui ne sont pas remplaçables. Dans ce but, des études s'appuyant sur la simulation numérique sont proposées pour modéliser et simuler des comportements complexes. Nous nous intéressons ici aux réacteurs avancés refroidis au gaz (AGR) (voir figure 1) du parc nucléaire Anglais, exploité par EDF Energy<sup>1</sup>

## Propagation de fissures dans les briques de graphite des réacteurs avancés refroidis au gaz.

Actuellement, 14 réacteurs avancés refroidis au gaz (AGR) (voir figure 1) sont exploités par EDF Energy. Ces réacteurs ont un cœur composé de milliers de briques de graphite (voir figure 2) qui remplissent la fonction de modérateur de la réaction nucléaire tout en assurant le maintien en position des autres éléments nécessaires à la réaction (crayons combustibles, conduits de passage du gaz). Pendant le fonctionnement du réacteur, les briques de graphite subissent des efforts dus à l'irradiation et aux contraintes d'origine thermique qui engendrent l'apparition de fissures. Certaines de ces fissures vont se propager dans la brique alors que d'autres conserveront leur état initial. Malheureusement, les briques de graphite étant irremplaçables, et l'apparition des fissures inévitable, EDF Energy doit garantir, à l'ONR (Office For Nuclear Regulation), que le taux de briques fissurées ne dépasse pas un seuil fixé, au-dessus duquel le bon fonctionnement du réacteur est compromis, afin d'être autorisé à prolonger la durée de vie des réacteurs. L'ONR n'impose pas à EDF Energy une démarche particulière pour réaliser cette démonstration de sûreté. La stratégie d'EDF Energy consiste à exhiber, pour chaque configuration étudiée, au moins deux résultats cohérents entre eux, obtenus à l'aide d'outils fondés sur des méthodes différentes.

---

1. EDF Energy est une compagnie de production et de fourniture d'électricité basée à Londres au Royaume-Uni, détenue en totalité par EDF.

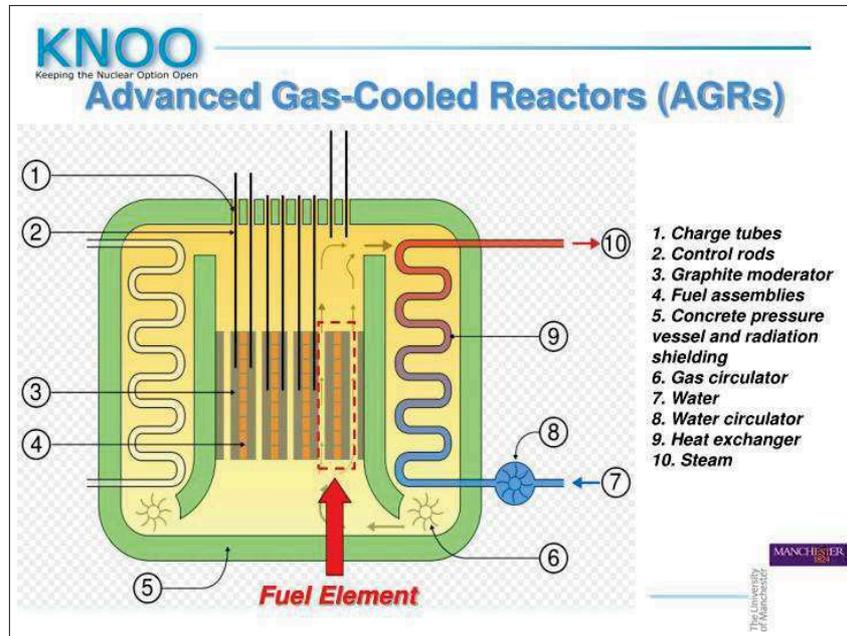


FIGURE 1 – Réacteurs avancés refroidis au gaz (AGR).



(a)



(b)

FIGURE 2 – À gauche, les briques de graphite assemblées dans le coeur du réacteur, à droite, la représentation d'une seule brique de graphite (source EDF Energy).

---

Le UKC<sup>2</sup> dispose de trois outils pour modéliser et simuler la propagation de fissures. Deux de ces outils sont basés sur le logiciel `code_aster` (Analyses des Structures et Thermomécanique pour des Études et des Recherches) développé depuis plus de 25 ans par la R&D d'EDF. Il s'agit d'un logiciel de simulation en mécanique fondé sur la méthode des éléments finis. Il sert d'outil de capitalisation des méthodes développées à la R&D d'EDF. Les trois outils à la disposition de UKC sont :

- Le logiciel `code_aster` couplé avec Z-cracks (module de la suite logiciel Z-set co-développée par l'Onera, le Centre des matériaux de MINES ParisTech et par la société North West Numerics). La méthode des éléments finis s'est imposée au fil du temps comme la méthode de référence pour simuler des problèmes complexes de différentes natures. Cependant, pour des problèmes de fissuration, à savoir la représentation d'une singularité, la gestion du maillage devient un réel obstacle. En effet, pour obtenir des résultats pertinents, le maillage doit être modifié à chaque avancée de la fissure afin de représenter la nouvelle configuration de la structure. Pour respecter cette contrainte, il faut donc remailler à chaque nouvelle avancée de la fissure, ce qui s'avère complexe en 3D. Néanmoins, ces dernières années, beaucoup de progrès ont été fait pour améliorer les techniques de remaillage et permettre une utilisation plus robuste des éléments finis. EDF utilise le module Z-cracks qui permet de construire un maillage conforme aux lèvres d'une fissure se propageant dans une structure tridimensionnelle [Chi10].
- Le module X-FEM du logiciel `code_aster`. Cette méthode repose sur la localisation de la fissure via des fonctions de niveau appelées *level-sets* et sur un enrichissement approprié pour représenter la discontinuité due à la présence de la fissure [Bel99 ; Moë99]. Les *level-sets* permettent de localiser une surface dans l'espace. Pour définir une fissure, l'utilisation de deux *level-sets* est nécessaire. Ces deux *level-sets* doivent être mises à jour pour représenter l'avancée de la fissure. Cette méthode ne nécessite pas de reconstruire un maillage conforme aux lèvres de la fissure. Néanmoins, l'utilisation d'un logiciel d'adaptation de maillage autorisant le contrôle de la taille des mailles au voisinage du front de fissure permet d'obtenir des résultats plus précis.
- MoFEM (Mesh Orientated Finite Element Method), est un code d'analyse par éléments finis libre développé et maintenu à l'Université de Glasgow. Ce code effectue des simulations de mécanique de la rupture élastique linéaire en utilisant une approche fondée sur les forces configurationnelles pour contrôler l'avancée de la fissure [Kac14]. Cette méthode nécessite de construire un maillage conforme aux lèvres d'une fissure.

---

2. EDF Energy R&D ou R&D UKC est le centre de recherche et développement de EDF Energy.

## Objectif de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de modéliser et de simuler la propagation de fissures de manière robuste à l'aide du logiciel `code_aster` et de la méthode X-FEM. Pour ce faire, ces travaux de thèse sont séparés en deux parties distinctes :

- Une première partie qui concerne la propagation de fissures avec la méthode X-FEM. On abordera les difficultés qui apparaissent dans l'étape de modification des *level sets* en s'appuyant sur des applications industrielles. Nous proposerons deux méthodes fondées sur la *fast marching method* [Set96 ; Set99] pour rendre robuste cette étape dans le processus de propagation avec la méthode X-FEM. Il est à noter que l'activité sur la propagation de fissure reste un domaine d'étude assez restreint pour EDF. Cette activité est surtout associée aux problèmes de fissuration dans les réacteurs de type AGR en service au Royaume-Uni.
- L'activité principale sur la rupture à EDF est le calcul de nocivité pour lequel on cherche à déterminer, à géométrie de fissure donnée, si la fissure se propage ou non. Pour ce faire, on calcule le taux de restitution d'énergie et/ou les facteurs d'intensité de contrainte. Le calcul de ces quantités doit être précis et robuste, premièrement pour, prédire de manière fiable si la fissure risque de se propager ou non, et deuxièmement pour, garantir une précision raisonnable afin de calculer la direction et la vitesse dans les calculs de propagation. Pour ce faire, une méthode d'intégrale de domaine sera considérée. Nous soulèverons les problèmes liés à une représentation de la fissure dans un espace tridimensionnel et nous proposerons des solutions dans l'optique de rendre la méthode plus robuste et plus précise.

## Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres. Le premier chapitre a pour rôle de présenter les concepts de la mécanique linéaire de la rupture, qui est le cadre adapté à l'étude des matériaux fragiles, tels que le graphite irradié. Ce chapitre introduit notamment le taux de restitution d'énergie, les facteurs d'intensité de contrainte et les méthodes utilisées pour calculer ces quantités. La méthode X-FEM est présentée, ainsi que toutes les étapes liées à la propagation d'une fissure. Dans le cadre de la méthode X-FEM, on utilise deux *level sets* pour représenter la fissure qui doivent être modifiées pour représenter sa nouvelle position. On présente donc les différentes méthodes pour mettre à jour ces *level sets* au cours de la propagation de la fissure. L'application de ces méthodes sur des cas industriels soulève certains problèmes de robustesse.

Dans le deuxième chapitre, on propose deux méthodes fondées sur une technique *fast marching method* dans le but d'améliorer la représentation des *level sets* au cours

---

de la propagation. Une des méthodes, applicable uniquement à des maillages composés d'éléments simplexes, est étendue à tous types de mailles, linéaires ou quadratiques. Les méthodes sont validées sur des applications industrielles.

Le troisième chapitre traite du calcul du taux de restitution d'énergie et/ou des facteurs d'intensité de contrainte en utilisant une méthode d'intégrale de domaine, nommée  $G-\theta$ . L'application de la méthode à des fissures tridimensionnelles soulève certains problèmes comme le choix d'une base appropriée permettant de discrétiser le front de fissure, l'interpolation des champs dans la méthode ou la contribution des intégrales de surface qui apparaissent notamment pour les fissures débouchantes. Dans un premier temps, on propose d'analyser les résultats obtenus avec la méthode sur des cas académiques afin d'identifier les problèmes de manière précise. On propose par la suite des solutions pour rendre les calculs plus robustes.

Le dernier chapitre soulève le problème du calcul des facteurs d'intensité de contrainte, par une méthode d'intégrale d'interaction, pour une fissure plane à front courbe. Le choix des champs de déplacement auxiliaires classiquement utilisé est discuté. On identifie les limites de cette pratique et on propose de nouveaux champs de déplacement auxiliaires qui prennent en compte la courbure. On valide cette approche sur trois cas : deux fissures circulaires et une fissure elliptique.



# Méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissures

---

## Sommaire

---

<b>1.1 Mécanique linéaire élastique de la rupture . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1.1 Décomposition du champ de déplacement au voisinage de la fissure . . . . .	8
1.1.2 Définition des champs asymptotiques . . . . .	9
1.1.3 Approche énergétique . . . . .	12
1.1.4 Les principales techniques de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	15
<b>1.2 Propagation de fissures avec X-FEM . . . . .</b>	<b>19</b>
1.2.1 Méthode des éléments finis étendue . . . . .	20
1.2.2 Théorie des <i>level sets</i> et représentation de la fissure . . . . .	22
1.2.3 Algorithme de propagation de fissures . . . . .	24
1.2.4 Représentation de l'avancée de la fissure . . . . .	26
1.2.5 Les différentes techniques de mise à jour des <i>level sets</i> . . . . .	29
<b>1.3 Résultats de simulation . . . . .</b>	<b>36</b>
1.3.1 Éprouvette en flexion trois points . . . . .	36
1.3.2 Test de rupture en torsion sur béton . . . . .	38
<b>1.4 Bilan et mise en exergue des difficultés rencontrées . . . . .</b>	<b>39</b>

---

## 1.1 Mécanique linéaire élastique de la rupture

Les premiers travaux en mécanique de la rupture remontent aux années 1920 suite aux travaux de Griffith [Gri21], qui a proposé un modèle pour représenter le mécanisme de rupture fragile. Ce modèle postule l'existence d'une énergie de surface consommée par l'avancée de la fissure. La mécanique de la rupture a pour but d'étudier les fissures macroscopiques dans un matériau. En effet, quand une structure est soumise à diverses sollicitations extérieures, il peut apparaître des discontinuités qui viennent modifier l'état de contrainte, de déformation ou de déplacement et qui peuvent entraîner la rupture de la pièce. Dans cette thèse, on s'intéresse à évaluer la nocivité d'un défaut préexistant dans une structure, en utilisant la mécanique linéaire de la rupture. Cette théorie sert à modéliser la rupture fragile, qui se produit en l'absence de déformation plastique ou en plasticité confinée.

### 1.1.1 Décomposition du champ de déplacement au voisinage de la fissure

La présence d'un défaut dans un matériau est caractérisée par l'apparition d'une surface géométrique  $\Gamma$ . Cette surface nouvellement créée représente la fissure qui est sollicitée selon trois modes, voir figure 1.1. En effet, dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le champ de déplacement se décompose en une partie régulière et une partie singulière [Bui78] :

$$\underline{u} = \underline{u}_R + K_I \underline{u}^I + K_{II} \underline{u}^{II} + K_{III} \underline{u}^{III}, \quad (1.1)$$

où  $\underline{u}_R$  représente la partie régulière et la partie singulière de (1.1) est décomposée selon les trois modes de rupture suivants :

- le mode I ou mode d'ouverture,
- le mode II ou mode de cisaillement plan,
- le mode III ou de cisaillement anti-plan ou même de déchirure.

Pour chaque mode  $\alpha \in \{I, II, III\}$ , le champ asymptotique  $\underline{u}^\alpha$  décrit le déplacement au voisinage du front de fissure, tandis que la quantité  $K_\alpha$ , appelée facteur d'intensité de contrainte associé au mode  $\alpha$ , caractérise l'amplitude de ce déplacement. Ces différents modes peuvent agir seuls sur la fissure ou bien se combiner entre eux pour modéliser une propagation dite en mode mixte. Historiquement, la notion de facteurs d'intensité de contrainte, qui permet de quantifier l'intensité de la singularité des contraintes, est introduite par Irwin [Irw57]. Les facteurs d'intensité de contrainte dépendent de la

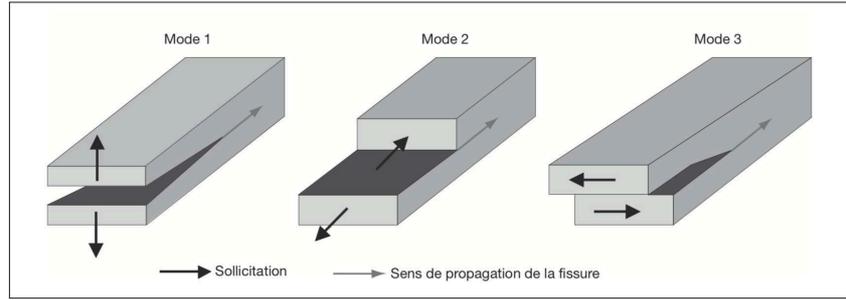


FIGURE 1.1 – Modes de sollicitation d'une fissure dans un espace tridimensionnel.

géométrie de la fissure et du chargement. L'unité d'un facteur d'intensité de contrainte dans le système international, est le  $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ .

### 1.1.2 Définition des champs asymptotiques

En élasticité linéaire, pour une zone proche du front de fissure, la solution obtenue en contrainte est singulière [Bui78] : cela signifie que la contrainte tend vers l'infini lorsque  $r$ , la distance au front de fissure, tend vers zéro. En effet, sous l'hypothèse d'une fissure semi-infinie immergée dans un espace infini, les travaux de Williams [Wil57] ont permis d'exprimer les solutions singulières en termes du déplacement  $\underline{u}$  et de la contrainte  $\underline{\sigma}$  sous forme d'une série :

$$\underline{\sigma}(r, \varphi) = \sum_{p=I}^{III} \sum_{n=1}^{\infty} K_p^n \underline{f}^{p,n}(\varphi) r^{(n-2)/2}, \quad (1.2)$$

$$\underline{u}(r, \varphi) = \sum_{p=I}^{III} \sum_{n=1}^{\infty} K_p^n \underline{g}^{p,n}(\varphi) r^{n/2}, \quad (1.3)$$

où les  $K_p^n$  sont les facteurs d'intensité de contrainte,  $\underline{f}^{p,n}$  et  $\underline{g}^{p,n}$  sont des fonctions de distributions spatiales, respectivement, pour le champ de contrainte et pour le champ de déplacement et  $(r, \varphi)$  les coordonnées polaires d'un point  $M$  de l'espace, voir figure 1.2.

Dans le cas où seul le premier terme de la série est pris en compte, on retrouve les développements au premier ordre des contraintes et des déplacements des solutions asymptotiques de Westergaard, pour les trois modes de sollicitation de la fissure [Wes39]. Soit  $\mu$  le module de cisaillement,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $k$  la constante de Kolosov valant  $k = 3 - 4\nu$  en déformations planes et  $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes.

Pour le mode I, le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{u}^I = u_N^I \underline{N} + u_B^I \underline{B}, \quad (1.4)$$

où

$$u_N^I(r, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (k - \cos \varphi), \quad (1.5)$$

$$u_B^I(r, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (k - \cos \varphi), \quad (1.6)$$

et les vecteurs  $\underline{N}$  et  $\underline{B}$  sont représentés sur la figure 1.2. Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^I = \sigma_{NN}^I \underline{N} \otimes \underline{N} + \sigma_{BB}^I \underline{B} \otimes \underline{B} + \sigma_{TT}^I \underline{T} \otimes \underline{T} + \sigma_{NB}^I (\underline{N} \otimes \underline{B} + \underline{B} \otimes \underline{N}), \quad (1.7)$$

où

$$\sigma_{NN}^I(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \quad (1.8)$$

$$\sigma_{BB}^I(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \quad (1.9)$$

$$\sigma_{TT}^I(r, \varphi) = \begin{cases} \nu (\sigma_{NN}^I + \sigma_{BB}^I) & \text{en déformations planes,} \\ 0 & \text{en contraintes planes,} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\sigma_{NB}^I(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right). \quad (1.11)$$

Pour le mode II, le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{u}^{\text{II}} = u_N^{\text{II}} \underline{N} + u_B^{\text{II}} \underline{B}, \quad (1.12)$$

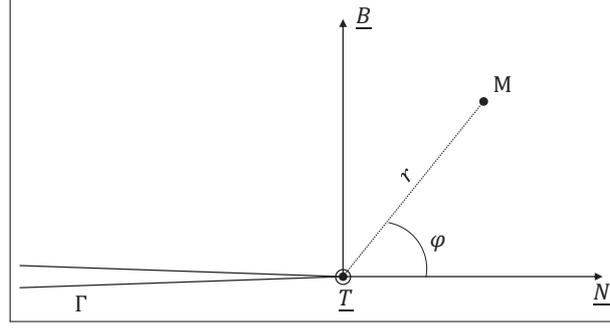
où

$$u_N^{\text{II}}(r, \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (k + \cos \varphi + 2), \quad (1.13)$$

$$u_B^{\text{II}}(r, \varphi) = -\frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (k + \cos \varphi - 2). \quad (1.14)$$

Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{II}} = \sigma_{NN}^{\text{II}} \underline{N} \otimes \underline{N} + \sigma_{BB}^{\text{II}} \underline{B} \otimes \underline{B} + \sigma_{TT}^{\text{II}} \underline{T} \otimes \underline{T} + \sigma_{NB}^{\text{II}} (\underline{N} \otimes \underline{B} + \underline{B} \otimes \underline{N}), \quad (1.15)$$


 FIGURE 1.2 – Base locale et coordonnées polaires  $r$  et  $\varphi$  en front de fissure.

où

$$\sigma_{NN}^{\text{II}}(r, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \left( 2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right), \quad (1.16)$$

$$\sigma_{BB}^{\text{II}}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}, \quad (1.17)$$

$$\sigma_{TT}^{\text{II}}(r, \varphi) = \begin{cases} \nu (\sigma_{NN}^{\text{II}} + \sigma_{BB}^{\text{II}}) & \text{en déformations planes,} \\ 0 & \text{en contraintes planes,} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\sigma_{NB}^{\text{II}}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right). \quad (1.19)$$

Pour le mode III, le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{u}^{\text{III}} = \frac{2}{\mu\sqrt{2r\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \underline{T}, \quad (1.20)$$

et le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{III}} = \sigma_{NT}^{\text{III}} (\underline{N} \otimes \underline{T} + \underline{T} \otimes \underline{N}) + \sigma_{BT}^{\text{III}} (\underline{B} \otimes \underline{T} + \underline{T} \otimes \underline{B}), \quad (1.21)$$

où

$$\sigma_{NT}^{\text{III}}(r, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (1.22)$$

$$\sigma_{BT}^{\text{III}}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (1.23)$$

Ces formules permettent d'exprimer les champs de contraintes et les champs de déplacement en pointe de fissure pour les différents modes de sollicitation de la fissure.

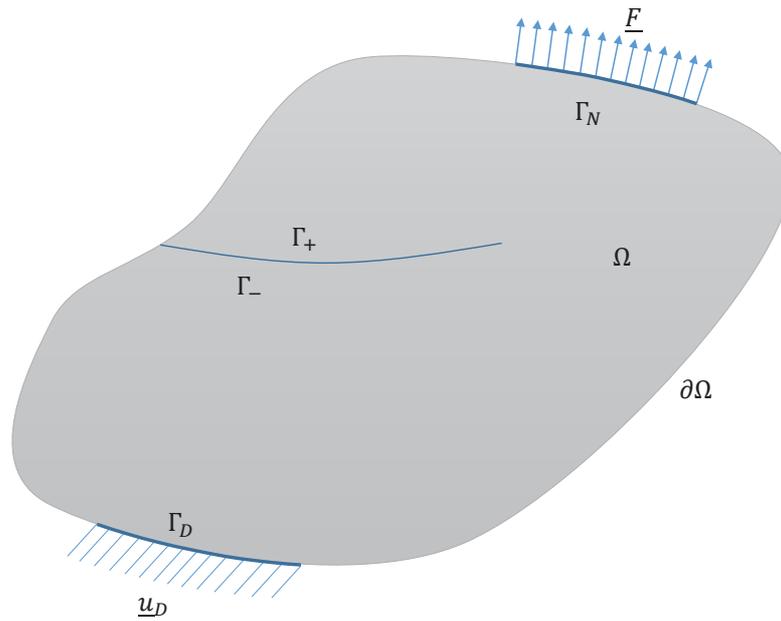


FIGURE 1.3 – Domaine fissuré.

### 1.1.3 Approche énergétique

#### 1.1.3.1 Problème de référence

Considérons un problème d'élasticité linéaire, pour un matériau homogène et isotrope. Soit  $\Omega$  un domaine fissuré (voir figure 1.3), soumis à des forces surfaciques  $\underline{F}$  sur une partie  $\Gamma_N$  de son bord  $\partial\Omega$ , et à des déplacements imposés  $\underline{u}_D$  sur une autre partie  $\Gamma_D$  de  $\partial\Omega$ . Le problème est résolu en utilisant les équations permettant de déterminer les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  à l'équilibre et les déplacements  $\underline{u}$  dans la position d'équilibre.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{0} && \text{dans } \Omega, \\
 \underline{u} &= \underline{u}_D && \text{sur } \Gamma_D, \\
 \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{F} && \text{sur } \Gamma_N, \\
 \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{0} && \text{sur } \Gamma_-, \\
 \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{0} && \text{sur } \Gamma_+.
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

où  $\underline{n}$  est la normale extérieur à  $\Omega$ . Sous l'hypothèse des petites déformations, le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est défini comme la partie symétrique du gradient des déplacements  $\underline{u}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}} u^T \right). \tag{1.25}$$

De plus, la loi de comportement élastique linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations donne la relation entre les déformations et les contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (1.26)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, qui s'expriment en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (1.27)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.28)$$

et  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité.

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit : trouver  $\underline{u}$ , tel que  $\underline{u} = \underline{u}_D$  sur  $\Gamma_D$ , qui minimise l'énergie potentielle

$$W(\Omega, \underline{u}) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{F} \cdot \underline{u} \, d\Gamma, \quad (1.29)$$

où  $\Psi$  est la densité d'énergie libre. En élasticité linéaire, elle est définie par

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

où  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$  est le tenseur de Hooke.

### 1.1.3.2 Taux de restitution d'énergie

Griffith a introduit le taux de restitution d'énergie  $G$  défini comme l'opposé de la variation de l'énergie potentielle  $W$  par rapport à la surface de la fissure  $A$  :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial A}. \quad (1.30)$$

L'unité du taux de restitution d'énergie dans le système international est le J/m<sup>2</sup>. Ce taux de restitution d'énergie permet de définir un critère dans le but de déterminer si la fissure se propage ou bien conserve son état initial. Le critère de Griffith est fondé sur la comparaison de  $G$  et d'une valeur critique  $G_c$ , qui caractérise le seuil au-delà duquel la fissure se propage :

$$\begin{aligned} G &< G_c && \text{la fissure ne propage pas,} \\ G &= G_c && \text{la fissure peut se propager.} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Le paramètre  $G_c$  mesure l'énergie dissipée par unité de surface de la fissure. C'est un paramètre matériau, indépendant de la géométrie de la structure. Notons que le critère de Griffith ne permet pas de déterminer la direction et la vitesse de propagation de la fissure.

### 1.1.3.3 Lien entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte

Le taux de restitution d'énergie étant une grandeur globale et les facteurs d'intensité de contrainte des grandeurs locales, il semble difficile d'établir un lien entre les deux quantités. Toutefois, Irwin [Irw57] établit une formule permettant de les relier sous certaines hypothèses :

- élasticité linéaire isotrope et homogène,
- comportement quasi-statique,
- géométrie plane et fissure rectiligne,
- les lèvres de la fissure sont libres de chargement.

Sous ces hypothèses, il relie le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte par une relation, dite formule d'Irwin, qui s'écrit :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2. \quad (1.32)$$

La formule précédente est écrite pour le cas 3D. En 2D, la formule d'Irwin s'écrit, sous l'hypothèse des déformations planes :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2), \quad (1.33)$$

et sous l'hypothèse des contraintes planes :

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2). \quad (1.34)$$

### 1.1.3.4 Intégrale de Rice

Rice [Ric68] a introduit l'intégrale de contour  $J$  :

$$J = \int_C \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} \, dS, \quad (1.35)$$

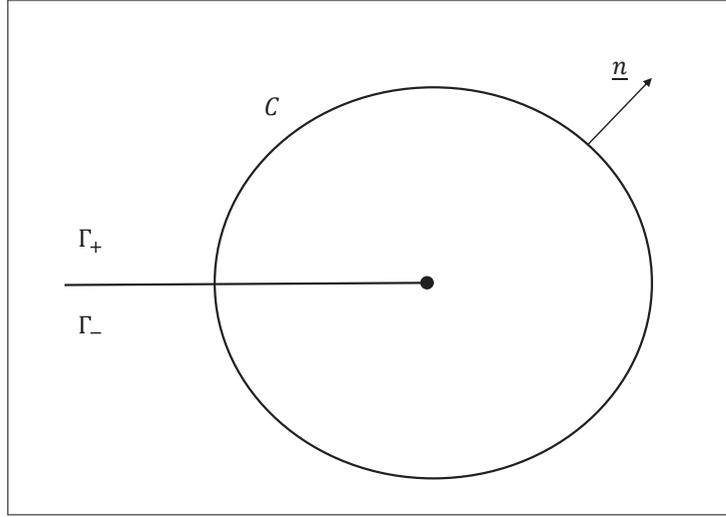


FIGURE 1.4 – Intégrale de contour en pointe de fissure.

où  $\underline{n}$  est la normale au contour  $C$ ,  $\underline{N}$  est le vecteur normal au front de fissure et où  $\underline{\underline{E}}$  est le tenseur d'Eshelby défini par :

$$\underline{\underline{E}} = \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}u,$$

et qui vérifie :

$$\text{div}\underline{\underline{E}}^T = 0.$$

Dans le cas bidimensionnel, le contour  $C$  est une courbe et la normale au front de fissure  $\underline{N}$  est uniforme dans la partie du domaine entourée par  $C$ .

Elle possède deux propriétés importantes :

- l'intégrale  $J$  est nulle pour tout contour fermé,
- l'intégrale  $J$  est indépendante du contour en l'absence de forces volumiques.

De plus, Rice [Ric68] a montré que l'intégrale  $J$  permet d'évaluer le taux de restitution d'énergie dans le cas d'un chargement monotone, soit :

$$J = G. \tag{1.36}$$

#### 1.1.4 Les principales techniques de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte

Précédemment, nous avons défini le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte permettant de statuer de la propagation, ou non, d'une fissure. Ces quantités sont comparées à des valeurs critiques, qui permettent d'obtenir un critère de propagation pour justifier de l'avancée de la fissure. Dans la littérature, il existe de

nombreuses expressions analytiques du taux de restitution d'énergie ou des facteurs d'intensité de contrainte, qui, pour la plupart, sont déterminées dans le cas d'un milieu infini ou semi-infini. Ces solutions sont regroupées, par exemple, dans les ouvrages de [Mur86] et [Tad00]. Cependant, pour des structures plus complexes, il n'existe pas de solution analytique permettant de quantifier  $G$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  ou  $K_{III}$ , et seule la simulation numérique permet d'estimer ces quantités. Dans la suite, nous proposons un état de l'art non-exhaustif des principales méthodes numériques utilisées pour calculer le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte.

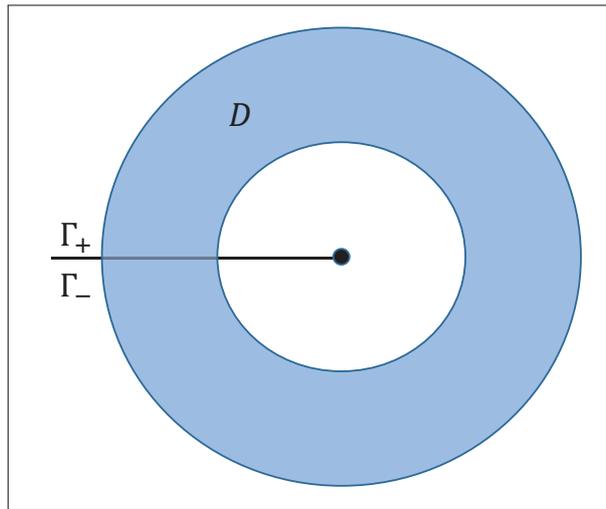
#### 1.1.4.1 Le calcul de l'intégrale de Rice

Le calcul de l'intégrale de Rice  $J$  est une méthode très appréciée dans l'industrie car elle est relativement simple à mettre en œuvre. Sa facilité d'utilisation provient du fait que l'utilisateur est relativement libre du choix du contour d'intégration dans la mise en donnée de son problème. De plus, comme pour  $G$ , il existe une valeur critique  $J_c$  obtenue à partir d'essai sur éprouvettes normalisées [Eis91], telle que si  $J = J_c$ , la fissure se propage. Le point bloquant avec les intégrales de contour est la qualité de la solution obtenue dans le cadre de la méthode des éléments finis, qui laisse apparaître des oscillations sur la solution dues à l'approximation locale des contraintes et des dérivées du champ de déplacement [Des83; Lev13]. Dans le but d'améliorer la qualité des résultats, Destuynder *et al.* [Des81; Des83] proposent une méthode dite méthode  $G-\theta$ , initialement adaptée aux fissures bidimensionnelles pour des matériaux élastiques linéaires, qui a l'avantage par rapport à l'intégrale de contour de Rice, d'améliorer l'intégration numérique des champs de contrainte et de déplacement en intégrant sur une surface. La méthode est étendue au 3D sous le nom de *domain integral method* ou méthode d'intégrale de domaine [Li85; Del85; Shi86; Mor87; Nik87a; Nik87b; Mia88] et une extension à la plasticité est proposée par Lorentz *et al.* [Lor00].

#### 1.1.4.2 La méthode $G-\theta$

La méthode  $G-\theta$  a été introduite par Destuynder *et al.* [Des81; Des83]. L'idée de la méthode est d'introduire des transformations géométriques décrivant une avancée de la fissure. Pour cela on introduit un champ de vitesse  $\underline{\theta}$ , continûment dérivable sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega$  et qui est nul à l'extérieur de  $\mathcal{D}$  (voir figure 1.5). L'intégrale s'exprime sous la forme suivante :

$$G(\underline{u}, \underline{\theta}) = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) \text{div} \underline{\theta} - \text{tr} \left( \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta \right) d\Omega. \quad (1.37)$$

FIGURE 1.5 – Couronne d'intégration pour l'intégrale  $G$ .

Cette méthode permet de calculer  $G$  de façon assez précise. En effet, l'intégration sur un domaine et non sur un contour atténue les oscillations dues à l'approximation du calcul numérique. Cette méthode est implantée dans de nombreux codes de calcul et notamment dans `code_aster`. Dans la suite ce mémoire, nous reviendrons plus précisément sur sa mise en oeuvre et sur l'analyse des résultats obtenus avec cette méthode.

#### 1.1.4.3 Extrapolation des déplacements

Si le problème ne fait intervenir qu'un seul mode, la formule d'Irwin (*cf.* (1.32), (1.33) et (1.34)) permet d'obtenir le facteur d'intensité de contrainte correspondant, à partir du taux de restitution d'énergie, que l'on peut calculer par l'une des méthodes présentées précédemment. Par exemple, si la fissure est sollicitée en mode I,  $K_I$  s'exprime directement à partir de  $G$  par :

$$K_I = \sqrt{\frac{EG}{1 - \nu^2}},$$

en 3D ou en 2D sous l'hypothèse des déformations planes. Cette approche atteint sa limite quand on considère un mode mixte. En effet, dans ce cas la formule d'Irwin donne seulement une équation vérifiée par les facteurs d'intensité de contrainte et ne suffit pas à les déterminer. Il faut donc avoir recours à d'autres méthodes. Un procédé simple à mettre en oeuvre dans un code de calcul est la méthode de calcul des facteurs d'intensité de contrainte par extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure [Par65; Ban10; Zhu95]. La méthode est fondée sur la connaissance du champ asymptotique en pointe de fissure et du saut de déplacement entre les deux lèvres de la fissure. En effet, on a vu précédemment qu'il était possible d'exprimer les champs de déplacement et de

contraintes pour les différents modes d'ouverture de la fissure. Pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte, il suffit de récupérer les déplacements nodaux autour de la fissure et de les comparer au saut de déplacement théorique :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u \rrbracket \cdot \underline{B} \right), \quad (1.38)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u \rrbracket \cdot \underline{N} \right), \quad (1.39)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u \rrbracket \cdot \underline{T} \right), \quad (1.40)$$

où  $\underline{B}$ ,  $\underline{N}$  et  $\underline{T}$  sont respectivement, le vecteur normal au plan de la fissure, le vecteur normal au front de la fissure et le vecteur tangent au front de la fissure, voir figure 1.2. Cette méthode est simple à mettre en œuvre et s'avère robuste pour traiter des cas complexes, mais cette simplicité à un prix puisqu'elle s'avère aussi beaucoup moins précise que les méthodes énergétiques [Zhu95; Ban10]. En effet comme le calcul est localisé au voisinage de la pointe de fissure, il est important d'avoir un raffinement suffisant pour espérer obtenir un résultat exploitable. Pour améliorer sa précision, il est conseillé d'utiliser la méthode avec des éléments quadratiques et des nœuds dont le milieu est situé au quart des arêtes, dit « éléments de Barsoum » [Bar77]. Ces éléments munis de nœuds supplémentaires aux quarts des côtés permettent de mieux capter la singularité du champ de contraintes en fond de fissure et ainsi obtenir de meilleurs résultats.

Dans ce travail de thèse, cette méthode sera surtout utilisée pour comparer les résultats avec des méthodes plus sophistiquées.

#### 1.1.4.4 Découplage des modes de rupture

Les intégrales d'interaction ont permis d'étendre l'intégrale  $J$ , qui se limitait au calcul du taux de restitution d'énergie, à un calcul plus large rendant possible le calcul des facteurs d'intensité de contrainte en exploitant la solution asymptotique en pointe de fissure [Ste76; Shi88]. Des travaux dans le cas d'une fissure plane à front courbe ont été menés par Gosz *et al.* [Gos98] et étendus par la suite à des fissures non planes [Gos02]. Pour les intégrales de domaine, l'idée reste la même, c'est-à-dire l'utilisation des fonctions singulières connues en pointe de fissure pour les champs de déplacement et de contraintes.

L'équation (1.37) permet de montrer que l'intégrale de domaine  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$  qui permet de calculer le taux de restitution d'énergie est une forme quadratique du champ de

déplacement  $\underline{u}$ . L'idée est d'utiliser la forme bilinéaire  $g$  associée cette forme quadratique et définie par :

$$g(\underline{u}, \underline{v}, \theta) = \frac{1}{4} (\mathcal{G}(\underline{u} + \underline{v}, \theta) - \mathcal{G}(\underline{u} - \underline{v}, \theta)), \quad (1.41)$$

où  $\underline{v}$  est un champ de déplacement associé à un champ de contrainte à l'équilibre, appelé champ de déplacement auxiliaire. On obtient alors les facteurs d'intensité de contrainte en choisissant  $\underline{v}$  comme le champ de déplacement singulier associé à un mode de rupture connu en pointe de fissure,  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^{II}$  ou  $\underline{u}^{III}$ . L'intérêt de la forme bilinéaire est qu'elle permet de séparer les trois modes d'ouverture et ainsi d'extraire les facteurs d'intensité de contrainte en utilisant les expressions suivantes [Gos02] :

$$K_I = \frac{E}{1 - \nu^2} g(\underline{u}, \underline{u}^I, \theta), \quad (1.42)$$

$$K_{II} = \frac{E}{1 - \nu^2} g(\underline{u}, \underline{u}^{II}, \theta), \quad (1.43)$$

$$K_{III} = 2\mu g(\underline{u}, \underline{u}^{III}, \theta). \quad (1.44)$$

Bui *et al.* [Bui85] ont également proposé une méthode de découplage qui consiste à découpler les modes de rupture en introduisant des champs de déplacements symétriques et antisymétriques.

## 1.2 Propagation de fissures avec X-FEM

En mécanique de la rupture, on utilise classiquement la méthode des éléments finis pour simuler une propagation de fissure. C'est une méthode connue et reconnue, qui bénéficie d'une grande reconnaissance dans le domaine de la modélisation et de la simulation numérique. Cependant, la mécanique de la rupture est une discipline complexe dans laquelle des discontinuités et des singularités apparaissent. Partant de ce constat, il semble nécessaire pour obtenir des résultats exploitables de raffiner très finement au voisinage de la pointe de fissure et d'utiliser des éléments spéciaux de Barsoum [Bar77] qui permettent d'améliorer la qualité de la solution. Cependant, le raffinement local près des zones d'intérêt est un problème assez général qui impacte toutes les méthodes numériques. Les éléments finis ne sont pas capables de représenter une discontinuité dans un élément, et il est donc nécessaire que la fissure soit définie par le bord des éléments qui l'entourent. On parle alors de maillage conforme à la fissure. L'inconvénient de cette pratique est qu'elle nécessite un remaillage à chaque évolution de la fissure, avec toutes les difficultés liées à ce processus : projection de champ entre l'ancien maillage

et le nouveau maillage, création de nouvelle surface libre représentant la nouvelle fissure qui a pour effet de modifier l'équilibre énergétique de la structure [Rét04]. Pour contourner ces difficultés, de nouvelles méthodes numériques ont émergé, dans lesquelles la contrainte d'utiliser un maillage conforme à la fissure a été levée. Le principe de ces méthodes est d'enrichir les fonctions de forme par des solutions connues et représentatives du problème. Cette idée repose sur le concept de partition de l'unité introduite par [Mel96; Bab97], dans lequel on cherche à introduire directement la discontinuité dans les éléments pour s'affranchir du fait que la fissure soit conforme au maillage. Dans la littérature, on trouve plusieurs méthodes qui se fondent sur la partition de l'unité. On peut par exemple citer la PUFEM (partition of unity finite element method) [Mel96] ou bien la GFEM (generalized finite element method) [Dua00]. La méthode qui nous intéresse dans la suite de ce mémoire est la méthode des éléments finis étendus ou X-FEM. Le principe de la méthode découle d'une idée innovante de Belytschko *et al.* [Bel99] qui utilisent l'expression des champs asymptotiques pour enrichir le champ de déplacement. Moës *et al.* [Moë99], ajoutent une fonction Heaviside dans la base d'enrichissement, qui donne l'expression finale de la formulation X-FEM. La X-FEM a été implantée dans différents codes éléments finis, par exemple, CAST3M, ABAQUS et ANSYS. La méthode a aussi été implémentée dans code\_aster il y a une dizaine d'années dans le cadre de la thèse de Geniaut [Gen06] dans le but d'avoir une méthode performante pour simuler la propagation de fissures et prédire la tenue en service des différentes pièces qui composent le parc nucléaire.

Le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage de Pommier *et al.* [Pom09], qui décrit de manière très complète la méthode des éléments finis étendue pour simuler la propagation de fissures.

### 1.2.1 Méthode des éléments finis étendue

En mécanique de la rupture, la méthode X-FEM [Moë99; Bel99; Dol00] est particulièrement adaptée à la représentation d'une discontinuité dans une structure, comme par exemple, une interface ou une fissure. Le principe de la méthode est d'enrichir l'espace classique des éléments finis par de nouvelles fonctions de base, qui satisfont la partition de l'unité [Mel96]. Nous rappelons l'expression de  $\underline{u}_h$ , l'approximation éléments finis du déplacement, évaluée au point  $M$  de coordonnées  $\underline{x}$  :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \underline{a}_i, \quad (1.45)$$

où les  $\underline{a}_i$  sont les degrés de liberté du déplacement au nœud  $i$ , les  $N_i$  les fonctions de forme linéaires associées au nœud  $i$  et  $I$  est l'ensemble des nœuds du maillage.

À partir de l'approximation éléments finis, l'idée est d'introduire une fonction Heaviside [Moë99] modélisant le saut de déplacement à travers les deux lèvres de la fissure :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{j \in L} H(\Phi(\underline{x})) N_j(\underline{x}) \underline{b}_j, \quad (1.46)$$

où les  $\underline{b}_j$  sont des degrés de liberté enrichis,  $\Phi$  est fonction distance signée, qui est positive d'un côté de l'interface et négative de l'autre, et  $H$ , est la fonction Heaviside définie par :

$$H(\Phi(\underline{x})) = \begin{cases} +1 & \text{if } \Phi(\underline{x}) \geq 0, \\ -1 & \text{if } \Phi(\underline{x}) < 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

De plus,  $L \subset I$  est l'ensemble des nœuds dont le support est coupé par l'interface. Sous cette forme, l'approximation éléments finis (1.46) est adaptée à la résolution d'un problème d'interface. Afin de représenter la singularité en pointe de la fissure, un terme est ajouté dans la formulation en utilisant les expressions connues des champs au voisinage du front de fissure [Irw57 ; Wil57 ; Wes39]. Finalement, on obtient :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{j \in L} H(\Phi(\underline{x})) N_j(\underline{x}) \underline{b}_j + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{k \in T} F^\alpha(r, \varphi) N_k(\underline{x}) \underline{c}_k^\alpha, \quad (1.48)$$

où  $\underline{c}_k^\alpha$  sont des degrés de liberté enrichis,  $F^\alpha$  sont les fonctions singulières définies par :

$$\begin{aligned} F_1(r, \varphi) &= \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}, & F_3(r, \varphi) &= \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi, \\ F_2(r, \varphi) &= \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2}, & F_4(r, \varphi) &= \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.49)$$

et  $(r, \varphi)$  sont les coordonnées polaires qui repèrent le point  $M$ , dans le plan normal au front de fissure qui passe par le point  $M$ . Cette base de fonction qui est adaptée à des problèmes 2D et 3D [Moë02], découle de la connaissance des champs de déplacement des solutions asymptotiques de Westergaard en pointe de fissure. L'ensemble  $T \subset I$  contient, au minimum, l'ensemble des nœuds dont le support est coupé par le front de fissure. Si l'ensemble  $T$  est réduit à cet ensemble de nœuds l'enrichissement est dit « topologique ». Différents travaux sur le sujet [Bec05 ; Lab05], ont montré qu'un enrichissement dit « géométrique », dans lequel l'ensemble  $T$  contient l'ensemble des nœuds situés à une distance du front de fissure inférieure au rayon d'enrichissement  $R_e$  (voir figure 1.6), permet de retrouver le taux de convergence optimal permis par la méthode.

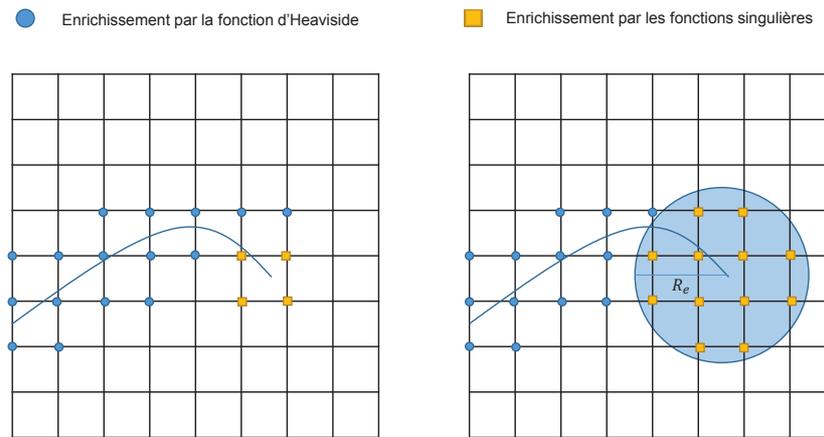


FIGURE 1.6 – À gauche, un enrichissement « topologique » et, à droite, un enrichissement « géométrique ».

### 1.2.2 Théorie des *level sets* et représentation de la fissure

La méthode X-FEM s'affranchit d'une représentation explicite de la fissure, c'est-à-dire une fissure maillée, en utilisant des *level sets* (ou fonctions de niveau). Cette technique a été introduite en 2D pour des problèmes de fissuration [Sto01; Suk01] et également en 3D [Gra02; Moë02].

La méthode des *level sets* est très populaire pour traiter des problèmes d'interfaces ou de surfaces libres. L'idée de la méthode [Osh88] est de considérer une fonction  $\Phi(\underline{x})$  régulière (au moins lipchitzienne) telle que le sous-espace  $\Phi(\underline{x}) = 0$  représente l'interface. Considérons un domaine  $\Omega$  divisé en deux sous-espace  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  et délimités par un hyperplan  $\Gamma$ , alors la fonction *level set*  $\Phi$  a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \{ \underline{x} \in \Omega, \Phi(\underline{x}) = 0 \}, \\ \Phi(\underline{x}) > 0 \text{ pour } \underline{x} \in \Omega^+, \\ \Phi(\underline{x}) < 0 \text{ pour } \underline{x} \in \Omega^-. \end{array} \right. \quad (1.50)$$

L'utilisation d'une seule *level set* est adaptée à la représentation d'une interface qui sépare un objet en deux parties distinctes. Pour la représentation d'une fissure, l'utilisation de deux *level sets* est indispensable [Sto01; Gra02]. En effet, une fissure est un objet de co-dimension 1, et le front de fissure un objet de co-dimension 2, et donc le sous-espace  $\Phi(\underline{x}) = 0$  ne permet pas de représenter la géométrie du front de fissure. En effet, en 2D, la fissure est une courbe et le front de fissure est un point et, en 3D, la fissure est une surface et le front de fissure est une courbe. Par conséquent, on introduit deux *level sets* définies de la manière suivante (voir figure 1.7(a)) :

- la *level set*  $\Phi_n$  qui représente la distance à la surface de la fissure, appelée *level set normale*,

- la *level set*  $\Phi_t$  qui représente la distance au fond de la fissure, appelée *level set* tangente.

(voir figure 1.7(b)) :

$$\{\underline{x} : \Phi_n(\underline{x}) = 0\} \cap \{\underline{x} : \Phi_t(\underline{x}) = 0\}. \quad (1.51)$$

De la même manière, on définit la surface de la fissure :

$$\{\underline{x} : \Phi_n(\underline{x}) = 0\} \cap \{\underline{x} : \Phi_t(\underline{x}) < 0\}. \quad (1.52)$$

D'après leurs définitions, les *level sets* doivent garder deux propriétés importantes pour représenter correctement une fissure.

- Premièrement, les *level sets* doivent rester orthogonales l'une par rapport à l'autre, au voisinage du front de fissure :

$$\underline{\nabla}\Phi_n \cdot \underline{\nabla}\Phi_t = 0. \quad (1.53)$$

- Deuxièmement, les *level sets* doivent demeurer des fonctions distances signées, pour représenter la distance euclidienne minimale entre un point et une surface, soit :

$$\|\underline{\nabla}\Phi_n\| = 1, \quad (1.54)$$

$$\|\underline{\nabla}\Phi_t\| = 1. \quad (1.55)$$

*Preuve.* Montrons que la norme du gradient d'une fonction distance signée est égale à un, presque partout. Soit  $\underline{x}$  un point de l'espace  $\mathbb{R}^n$  et  $\underline{y}$  un point appartenant à une surface, on définit une fonction distance  $d(\underline{x})$  comme :

$$d(\underline{x}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|,$$

$$d(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2}.$$

On exprime les dérivées partielles de  $d(x_1, \dots, x_d)$  :

$$\frac{\partial d(\underline{x})}{\partial x_n} = \frac{x_n - y_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2}}.$$

on a donc :

$$\|\underline{\nabla}d\|^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial d(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_n} \right)^2 = 1.$$

□

On obtient donc le champ de distance en résolvant l'équation suivante, dite équation eikonale :

$$\|\underline{\nabla}d\| = 1. \tag{1.56}$$

L'utilisation de la méthode X-FEM et des *level sets* est donc efficace pour deux raisons :

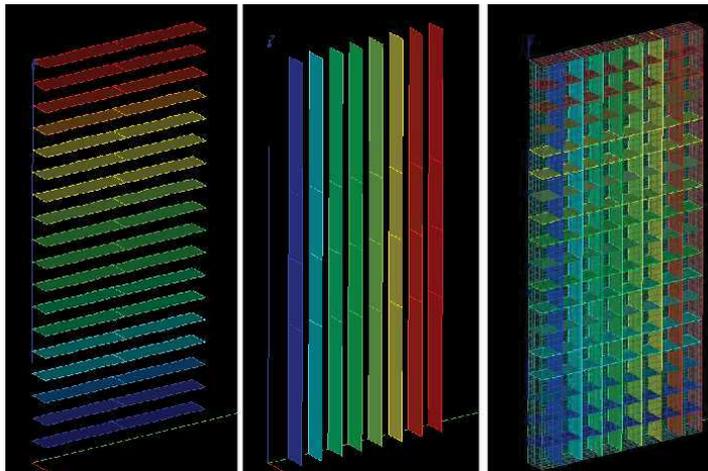
- on n'a pas besoin de modifier la structure du maillage pendant la propagation de la fissure,
- on peut représenter la propagation en modifiant les *level sets*.

Cependant, l'étape de mise à jour des *level sets* s'avère compliquée d'un point de vue numérique et engendre souvent des erreurs impactant la qualité globale de la solution. Nous reviendrons dans la suite de ce mémoire sur l'importance de cette étape dans le processus.

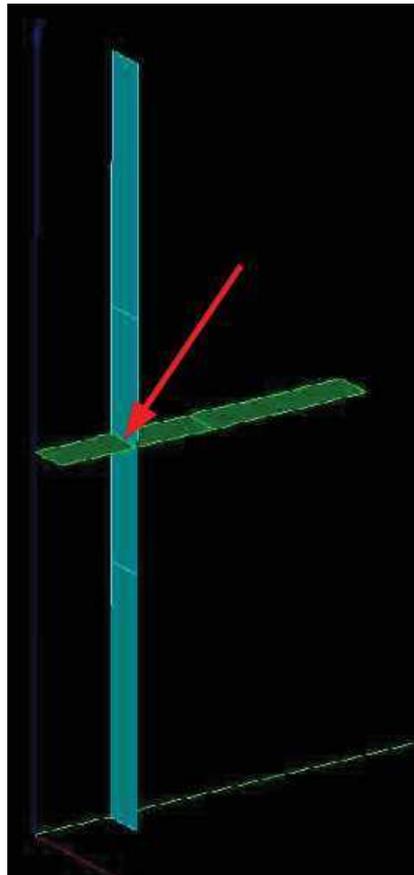
**Remarque.** Précisons toutefois que si la méthode X-FEM permet de réaliser la propagation d'une fissure sans nécessiter d'étape de remaillage, utiliser un algorithme de maillage adaptatif pour contrôler la taille des éléments au voisinage de la point de fissure permet d'obtenir des résultats plus précis, pour un coût en temps CPU et en mémoire identique. Naturellement, ce gain en précision est obtenu au prix d'étapes de projection, voire d'étapes de rééquilibrage des champs pour un calcul non linéaire.

### 1.2.3 Algorithme de propagation de fissures

Munis des concepts introduits dans les sections précédentes, nous sommes en mesure de présenter l'algorithme de propagation d'une fissure avec la méthode X-FEM. Nous utilisons l'approche explicite classique dans laquelle l'évolution de l'avancée de la fissure est discrétisée en pas de propagation. L'utilisation de cet algorithme suppose que l'on sait, *a priori*, que le chargement est tel que la fissure va se propager. Il est donc conçu pour interpréter des résultats d'essais dans lesquels la propagation de la fissure a été observée. L'algorithme 1 résume les principales étapes réalisées à chaque pas de



(a) À gauche, représentation de la *level set* normale et au centre, représentation de la *level set* tangente. À droite, représentation des deux *level sets*.



(b) Intersection des deux iso-zéros des deux *level sets*. En vert, l'iso-zéro de la *level set* normale et, en gris, l'iso-zéro de la *level set* tangente.

FIGURE 1.7 – Définition des *level sets* dans le domaine et représentation du front de fissure avec les iso-zéros des *level sets*.

propagation.

---

**Algorithme 1** : Algorithme de propagation de fissures

---

**INITIALISATION** :

$k = 0$ ,  $\Phi_n^0$  et  $\Phi_t^0$  sont les *level sets* qui décrivent la géométrie initiale de la fissure.

**TRAITEMENT** :

POUR *le pas de propagation*  $k$

1. Calcul mécanique en utilisant la géométrie de la fissure décrite par  $\Phi_n^k$  et  $\Phi_t^k$ .
2. Calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte pour la configuration courante.
3. Détermination de l'avancée de chaque point du front de fissure  $\rightarrow$  position des points du front de fissure après propagation.
4. Calcul de la représentation géométrique de la fissure après propagation  $\rightarrow \Phi_n^{k+1}$  et  $\Phi_t^{k+1}$ .
5. Passage au pas de propagation suivant :

$$\begin{aligned} k &\leftarrow k + 1, \\ \Phi_n^k &\leftarrow \Phi_n^{k+1}, \\ \Phi_t^k &\leftarrow \Phi_t^{k+1}. \end{aligned}$$

FIN POUR

---

## 1.2.4 Représentation de l'avancée de la fissure

Dans cette section, nous entrons dans les détails de l'étape de détermination de l'avancée de chaque point du front de fissure de l'algorithme de propagation. L'avancée maximale de la fissure au cours d'un pas de propagation donnée  $\Delta a$  est une donnée du calcul. Il reste à caractériser la direction de propagation et la distance parcourue par chaque point du front de fissure au cours d'un pas de propagation. L'avancée maximale  $\Delta a$  est choisie de sorte à imposer que tous les points du front de fissure traversent au moins une couche d'éléments au cours d'un pas de propagation.

### 1.2.4.1 Direction de propagation

En élasticité, plusieurs critères permettent d'obtenir la direction de propagation pour des petits angles de déviation [Erd63 ; Sih74 ; Nui75]. Nous donnons ci-après quelques techniques utilisées :

- Le critère de Leblond *et al.* [Leb85] permet de calculer l'angle de branchement en considérant que la fissure prend la direction du mode I pur après le branchement. En considérant les facteurs d'intensité  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$  juste après le branchement et les facteurs d'intensité  $K_I$ ,  $K_{II}$  juste avant le branchement, la relation  $K_{II}^*(K_I, K_{II}) = 0$ , fournie par le principe de symétrie locale permet alors de calculer l'angle de branchement en fonction du rapport  $\frac{K_{II}}{K_I}$ .
- Un critère global [Nui75], peut-être déterminé sur le principe de la méthode de calcul de  $G$  avec une extension virtuelle  $\underline{\theta}$  de la fissure :

$$G = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta \right) d\Omega.$$

La direction de propagation est définie comme la direction qui maximise le taux de restitution d'énergie.

- Pour une fissure sollicitée en mode mixte I+II, l'orientation du plan de la fissure varie au cours de la propagation. L'évolution de cette orientation est paramétrée par un angle  $\beta$  qui représente la rotation de la normale au plan de fissure au cours de l'avancée du front. Le critère du maximum de la contrainte circonférentielle où *maximum hoop stress criterion* [Erd63] permet alors de calculer l'angle  $\beta$  à partir des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  :

$$\beta = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]. \quad (1.57)$$

En présence de déversement, l'évolution de l'orientation de la normale au plan de la fissure ne se déroule plus dans un plan et il est nécessaire d'introduire un angle supplémentaire pour caractériser cette évolution. La prise en compte de l'angle de déversement a été étudiée dans le cadre de la thèse de Habousa [Hab12].

**Remarque.** Dans ce travail de thèse, sauf mention contraire, la direction de propagation est calculée en utilisant le *maximum hoop stress criterion*.

#### 1.2.4.2 Avancée de la fissure

Les méthodes de post-traitement de mécanique linéaire de la rupture, nous permettent d'estimer les facteurs d'intensité de contrainte en chaque point du front de fissure. Nous souhaitons utiliser ces données pour déterminer l'avancée de chaque point du front de fissure. Il est possible d'utiliser la loi de Paris [Par65] qui relie l'avancée de

la fissure par cycle  $\frac{da}{dN}$  à la variation du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (1.58)$$

où  $C$  et  $m$  sont des paramètres matériau. Il est à noter que ce choix restreint nos analyses aux fissures de fatigue, et qu'il reste à déterminer  $\Delta K$ . Pour une propagation en fatigue, le taux de restitution d'énergie  $G$  est utilisé pour calculer le facteur d'intensité équivalent  $\Delta K$ . Dans le cas des déformations planes, on a le résultat suivant :

$$K_{eq} = \sqrt{\frac{GE}{1-\nu^2}}, \quad (1.59)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson. De cette expression, on déduit un  $\Delta K = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}}(\sqrt{G_{max}} - \sqrt{G_{min}})$  sur un cycle de chargement. Pour une fissure de fatigue, sous chargement cyclique proportionnel, la vitesse de la propagation  $\underline{V}^I$  d'un point du front de fissure  $I$  s'écrit :

$$\underline{V}^I = V_n^I \underline{B}^I + V_t^I \underline{N}^I, \quad (1.60)$$

avec :

$$V_n^I = C(\Delta K)^m \sin \beta^I, \quad (1.61)$$

$$V_t^I = C(\Delta K)^m \cos \beta^I, \quad (1.62)$$

où  $\beta^I$  est l'angle calculé associé au point  $I$  et  $(\underline{N}^I, \underline{B}^I, \underline{T}^I)$  est la base locale associée au point  $I$ , voir figure 1.8. Il est à noter que dans le cas de l'utilisation du *maximum hoop stress criterion*, l'angle  $\beta^I$  est calculé à partir des facteurs d'intensité de contrainte associés au point du front  $I$ . Il reste à déterminer le nombre de cycles de fatigue équivalent  $\Delta t$  au pas de propagation courant. Afin de garantir que le point du front de fissure le plus rapide avance d'une distance  $\Delta a$ , on choisit :

$$\Delta t = \frac{\Delta a}{\max_I(\|\underline{V}^I\|)}, \quad (1.63)$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des points de discrétisation du front de fissure et  $\underline{V}^I$  est la vitesse du point du front  $I$ . Il est à noter que dans ce problème d'évolution, le nombre de cycles joue le rôle du temps.

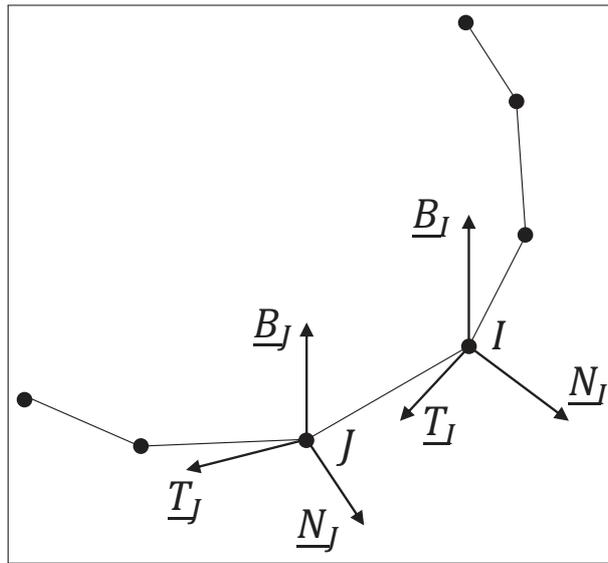


FIGURE 1.8 – Front de fissure discrétisé et base locale associée à chaque point du front.

### 1.2.5 Les différentes techniques de mise à jour des *level sets*

Dans le cadre de la méthode X-FEM, le calcul mécanique permet d'obtenir un champ déplacement  $\underline{u}$  et un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$ . À la suite de ce calcul mécanique, on détermine le taux de restitution d'énergie et/ou les facteurs d'intensité de contrainte qui vont permettre d'établir, si oui ou non, la fissure se propage et comment elle se propage. Les *level sets*, qui permettent de représenter la fissure, vont alors être modifiées pour représenter la nouvelle position de fissure. Suite à cette évolution des *level sets*, il est important de conserver les propriétés de fonction distance signée et d'orthogonalité. L'étape qui permet de réinitialiser les *level sets* est donc cruciale pour obtenir une représentation correcte de la fissure après la propagation. Différents travaux sur le sujet ont été menés, on peut citer les travaux [Ada94; Pen99; Gra02; Moë02] qui reposent sur les équations d'évolution des *level sets* ou encore les travaux de [Ven03; Suk03; Suk08; Col12a] qui abordent le problème de manière géométrique. Dans le but d'obtenir des méthodes numériques précises et robustes, EDF R&D a mis en oeuvre plusieurs techniques de réinitialisation des *level sets*.

#### 1.2.5.1 Les équations d'Hamilton-Jacobi

Après une étape de propagation, une fois que la fissure se propage, la géométrie de la fissure change et il faut faire évoluer les *level sets* pour décrire la nouvelle configuration. Une méthode consiste à résoudre les équations de mise à jour des *level sets* qui décrivent leurs évolutions.

Soit  $\Phi$  une fonction *level set*, caractérisée par  $\Phi(\underline{x}, t) = cst$ . Elle vérifie l'équation de

conservation suivante :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \underline{\nabla}\Phi \cdot \underline{V} = 0, \quad (1.64)$$

où  $\underline{V} = \frac{\partial x}{\partial t}$  est la vitesse du point courant. On a  $\underline{\nabla}\Phi \cdot \underline{V} = V_\Phi \|\underline{\nabla}\Phi\|$  où on a posé  $V_\Phi = \underline{V} \cdot \underline{n}$  et  $\underline{n} = \frac{\underline{\nabla}\Phi}{\|\underline{\nabla}\Phi\|}$  est la direction qui porte  $\underline{\nabla}\Phi$ . Finalement on obtient l'équation (1.64) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + V_\Phi \|\underline{\nabla}\Phi\| = 0. \quad (1.65)$$

Différents schémas numériques sont utilisés dans la littérature pour résoudre cette équation d'Hamilton-Jacobi. On peut recourir à un schéma implicite [Osh88], un schéma explicite [Pen99; Gra02; Pra09] ou à une *fast marching method* [Suk03; Suk08]. Pour plus de précision, on peut se référer à l'étude comparative de Duflot [Duf07] sur les méthodes numériques qui permettent de mettre à jour les *level sets*. Nous résumons dans la suite, les méthodes utilisées dans le code\_aster pour résoudre numériquement ces équations.

- Une méthode, que nous nommerons « simplexe », introduite par Barth *et al.* [Bar98] et adoptée par [Gra02; Col11], qui a l'avantage de s'utiliser sur des maillages non structurés. Cette méthode consiste à évaluer la contribution de chaque élément à la réinitialisation de la *level set* en un nœud, puis à trier les contributions positives afin d'obtenir un schéma monotone.
- Une méthode, que nous nommerons *upwind*, utilisée par Prabel *et al.* [Pra09], qui est une méthode de différence finie centrée sélective applicable exclusivement à des maillages réglés.

Les schémas explicites « simplexe » et *upwind* ne sont stables que si la condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) est respectée, ce qui peut augmenter considérablement le nombre de pas de temps. Pour s'affranchir de cette contrainte, il est possible d'utiliser un schéma implicite, mais il est signalé que ces schémas sont non seulement compliqués à mettre en œuvre mais aussi sujet à des instabilités numériques [Suk08; Col12a].

### 1.2.5.2 Processus de mise à jour des *level sets*

Suite à la propagation de la fissure, on souhaite conserver les propriétés d'orthogonalité et de fonction distance signée qui caractérisent les *level sets* et permettent d'assurer une définition correcte de la base locale, voir figure 1.2. En effet, on veut garantir que les *level sets* sont reliées à la base locale par les relations  $r = \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_t^2}$  et  $\varphi = \arctan\left(\frac{\Phi_n}{\Phi_t}\right)$ .

Il faut pour cela assurer les propriétés suivantes :

$$\|\underline{\nabla}\Phi_n\| = 1, \quad (1.66)$$

$$\|\underline{\nabla}\Phi_t\| = 1, \quad (1.67)$$

$$\underline{\nabla}\Phi_n \cdot \underline{\nabla}\Phi_t = 0. \quad (1.68)$$

L'équation (1.66) traduit le fait que  $\Phi_n$  est une fonction distance signée, l'équation (1.67) traduit le fait que  $\Phi_t$  est une fonction distance signée et l'équation (1.68) traduit le fait que le gradient de  $\Phi_n$  et le gradient de  $\Phi_t$  sont orthogonaux entre eux. Il est à noter que  $\Phi_n$  et  $\Phi_t$  doivent être des fonctions distance signées presque partout dans le domaine, tandis qu'il est suffisant d'assurer la condition d'orthogonalité (1.68) au voisinage du front de fissure. Les différentes étapes qui permettent de conserver les propriétés des *level sets* se décomposent de la manière suivante :

- une étape de réinitialisation de  $\Phi_n$ , la *level set* normale,
- une étape de réorthogonalisation du gradient de  $\Phi_t$  par rapport au gradient de  $\Phi_n$ ,
- une étape de réinitialisation de  $\Phi_t$ , la *level set* tangente.

L'ordre des étapes est important car dans le cas d'une fissure non plane, il n'est pas possible de vérifier en même temps la condition d'orthogonalité et de gradient unitaire sauf au voisinage du front de fissure. C'est pourquoi dans les différentes étapes, on privilégie la notion de fonction distance signée à celle d'orthogonalité.

Précédemment, on a établi l'équation (1.65) permettant de faire évoluer les *level sets*. Le problème est que dans la pratique, la solution obtenue par intégration de cette équation ne conserve pas la propriété de distance signée. Un traitement supplémentaire permettant de retrouver la propriété de fonction distance signée est donc nécessaire après l'étape d'évolution des *level sets* [Pen99]. On introduit un problème d'évolution faisant intervenir un temps fictif dont la solution à l'état stationnaire vérifie les propriétés de fonction distance signée. Classiquement (*cf.* [Suk01 ; Gra02 ; Moë02]), l'équation utilisée pour ce traitement est :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = -\text{sign}(\Phi) \cdot (\|\underline{\nabla}\Phi\| - 1), \quad (1.69)$$

où  $\tau$  représente le temps fictif.

Finalement, on explicite les différentes étapes de mises à jour et de réinitialisation des *level sets* [Col12a] :

1. Extension de la vitesse connue uniquement sur le front de fissure à tout le domaine.  
Un point  $P$  du front de fissure est repéré par son abscisse curviligne  $s$  et le repère

local associé à ce point est  $(\underline{T}(s), \underline{N}(s), \underline{B}(s))$ . Afin d'associer une vitesse à chaque nœud du maillage, nous appliquons le traitement suivant, cf. [Col11]. Soit  $M$  un point du domaine. On cherche le point  $P$  appartenant au front de fissure tel que  $M$  appartient au plan affine  $\Pi$  généré par les vecteurs  $\underline{B}$  et  $\underline{N}$  du repère local associé au point  $P$  et qui contient  $P$ . Ce problème revient à chercher le point  $P$  appartenant au front de fissure tel que :

$$\underline{PM} \cdot \underline{T} = 0. \quad (1.70)$$

La figure 1.9 représente, pour un point  $M$  donné, le point  $P(s)$  solution de ce problème, ainsi que le repère local associé. Ce problème n'admet pas toujours une solution. On considère donc le problème suivant : trouver le point  $P$  appartenant au front de fissure qui minimise la quantité  $|\underline{PM} \cdot \underline{T}|$ . Si le premier problème admet une solution, elle est également solution du second problème. En pratique, on parcourt les segments qui constituent la discrétisation du front de fissure. Pour chaque segment  $I$ , on recherche le point  $P^I$  du segment qui minimise  $|\underline{P^I M} \cdot \underline{T}|$ . On conserve le point  $P$  le plus proche de  $M$  parmi tous les points  $P^I$  ainsi construits. La vitesse associée au point  $P$  est construite en interpolant les vitesses des deux points extrémités du segment auquel  $P$  appartient. La vitesse du point  $P$  est finalement associée au point  $M$ .

## 2. Évolution des *level sets*.

On calcule les incréments de distance associés à l'avancée de la fissure durant le temps  $\Delta t$ , correspondant au pas de propagation courant :

$$\Delta\Phi_n = \Delta t V_n (\underline{\nabla}\Phi_n^k \cdot \underline{B}), \quad (1.71)$$

$$\Delta\Phi_t = \Delta t V_t (\underline{\nabla}\Phi_t^k \cdot \underline{N}). \quad (1.72)$$

La mise à jour des *level sets* s'écrit :

$$\tilde{\Phi}_n = \Phi_n^k + \Delta\Phi_n, \quad (1.73)$$

$$\tilde{\Phi}_t = \Phi_t^k + \Delta\Phi_t, \quad (1.74)$$

où  $\tilde{\Phi}_n$  et  $\tilde{\Phi}_t$  sont les *level sets* mises à jour, qui n'ont pas nécessairement les propriétés d'une fonction distance signée.

## 3. Réinitialisation de la *level set* normale.

Considérons le problème d'évolution d'inconnue  $\Phi_n$  :

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} = -\text{sign}(\Phi_n) \cdot (||\nabla \Phi_n|| - 1), \quad (1.75)$$

$$\Phi_n(\tau = 0) = \tilde{\Phi}_n. \quad (1.76)$$

La *level set* normale à la fin de l'étape de propagation  $\Phi_n^{k+1}$  est la solution stationnaire de ce problème d'évolution.

4. Orthogonalisation de la *level set* tangente par rapport à la *level set* normale. Considérons le problème d'évolution d'inconnue  $\Phi_t$  :

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \tau} = -\text{sign}(\Phi_n^{k+1}) \cdot \frac{\nabla \Phi_n^{k+1}}{||\nabla \Phi_n^{k+1}||} \cdot \nabla \Phi_t, \quad (1.77)$$

$$\Phi_t(\tau = 0) = \tilde{\Phi}_t. \quad (1.78)$$

Soit  $\hat{\Phi}_t$  la solution stationnaire de ce problème d'évolution. Le gradient de  $\hat{\Phi}_t$  est orthogonal au gradient de  $\Phi_n^{k+1}$  mais  $\hat{\Phi}_t$  n'est pas nécessairement une fonction distance signée.

5. Réinitialisation de la *level set* tangente.

Considérons le problème d'évolution d'inconnue  $\Phi_t$  :

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \tau} = -\text{sign}(\Phi_t) \cdot (||\nabla \Phi_t|| - 1), \quad (1.79)$$

$$\Phi_t(\tau = 0) = \hat{\Phi}_t. \quad (1.80)$$

La *level set* tangente à la fin de l'étape de propagation  $\Phi_t^{k+1}$  est la solution stationnaire de ce problème d'évolution.

### 1.2.5.3 Application de la méthode *upwind* à des maillages irréguliers

L'usage de la méthode *upwind* nécessite un maillage régulier, constitué de mailles hexaédriques en 3D et de mailles quadrangulaires en 2D, dont les arêtes sont orientées selon les directions de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  en 3D et  $\mathbb{R}^2$  en 2D. Le problème est que cela représente une forte restriction et limite les cas qui peuvent être traités par la méthode. La solution retenue dans `code_aster` repose sur l'utilisation de deux maillages différents [Pra09] : le maillage de la structure physique et un maillage auxiliaire et régulier pour la représentation des *level sets*. Les valeurs des *level sets* sur le maillage physique sont calculées par projection des valeurs connues sur le maillage auxiliaire. On peut donc réaliser la mise à jour, la réinitialisation et la réorthogonalisation des *level sets* en utilisant seulement le maillage auxiliaire. La projection permet d'obtenir l'in-

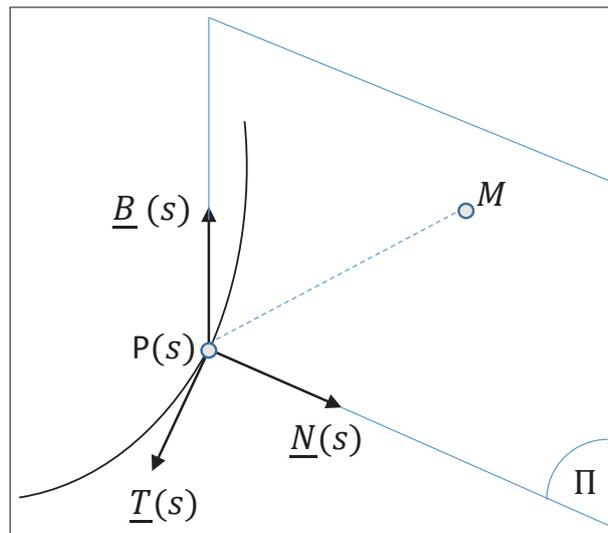


FIGURE 1.9 – Recherche d'un point du front de fissure associé à un point  $M$  du domaine.

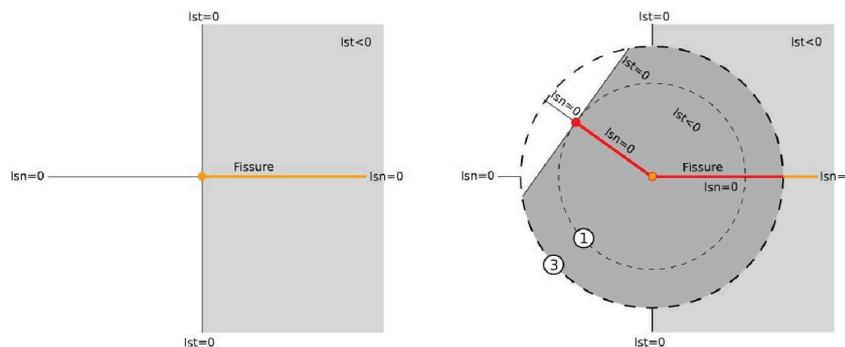
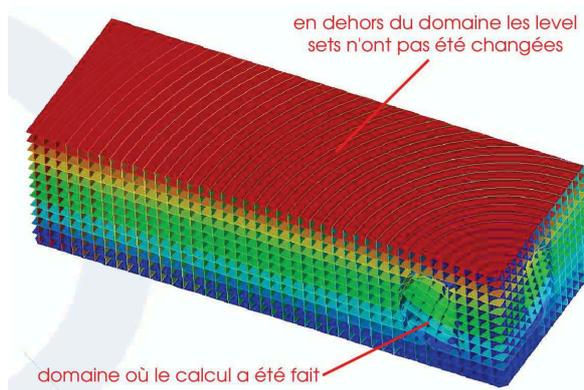
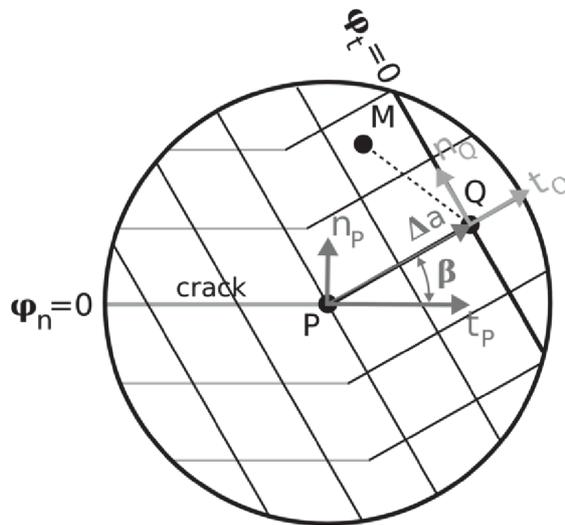


FIGURE 1.10 – À gauche, configuration initiale de la fissure, à droite, configuration après propagation. Seule la zone à l'intérieur du tore de calcul (en gris foncé) est mise à jour.

dépendance géométrique entre les deux maillages, c'est-à-dire que le maillage auxiliaire peut occuper uniquement la zone de propagation de la fissure dans la structure.

Pour un maillage très fin, la projection entre la grille auxiliaire et le maillage physique peut être très coûteuse en temps de calcul. De plus, les erreurs dans le calcul de l'angle de propagation de la fissure sont amplifiées aux nœuds les plus éloignés du front de fissure. Ceci a pour conséquence de rendre difficile la convergence de la méthode. Pour résoudre ce problème et donc optimiser les performances et la robustesse de la méthode *upwind*, on localise un domaine de calcul autour du front de fissure (voir figure 1.10) et on calcule uniquement les nœuds inclus dans le domaine afin de mettre à jour les *level sets*, voir figure 1.11.

FIGURE 1.11 – Calcul des *level sets* avec l'utilisation d'un tore.FIGURE 1.12 – Avancée du front de fissure (*cf.* [Col12a]).

#### 1.2.5.4 Une méthode de calcul direct pour la mise à jour des *level sets*

On présente ici une méthode plus récente, implémentée dans `code_aster`. Cette méthode de mise à jour des *level sets*, dite « géométrique », a été introduite par Colombo *et al.* [Col11 ; Col12a]. Elle est fondée sur un calcul direct et non plus sur la résolution d'équations d'Hamilton-Jacobi. Elle n'impose pas l'usage d'une grille auxiliaire ce qui simplifie son utilisation.

On considère un point  $M$  du domaine où l'on souhaite calculer la nouvelle valeur des deux *level sets*. Soit  $P$ , le projeté de  $M$  sur le front de fissure construit en appliquant la procédure d'extension des vitesses, décrite section 1.2.5.2. Soit  $Q$ , le point d'intersection des iso-zéros des *level sets*  $\tilde{\Phi}_n$  et  $\tilde{\Phi}_t$ , obtenues à la suite de l'étape de mise à jour, et du plan  $\Pi$  généré par les vecteurs  $\underline{B}$  et  $\underline{N}$  du repère local associé au point  $P$  et qui contient  $P$ . Les points  $M$ ,  $P$ , et  $Q$  sont représentés, dans le plan  $\Pi$ , sur la figure 1.12. Il est à noter que sur la figure 1.12, le vecteur  $\underline{n}_P$  correspond au vecteur  $\underline{B}$  et le vecteur

$\underline{t}_P$  correspond au vecteur  $\underline{N}$ . Muni de ces notations, on peut exprimer directement les *level sets* à la fin du pas de propagation  $\Phi_n^{k+1}$  et  $\Phi_t^{k+1}$  par :

$$\Phi_n^{k+1}(\underline{M}) = \underline{QM} \cdot \underline{n}_Q, \quad (1.81)$$

$$\Phi_t^{k+1}(\underline{M}) = \underline{QM} \cdot \underline{t}_Q, \quad (1.82)$$

où :

$$\underline{n}_Q = -\sin\beta\underline{N} + \cos\beta\underline{B}, \quad (1.83)$$

$$\underline{t}_Q = \cos\beta\underline{N} + \sin\beta\underline{B}, \quad (1.84)$$

et  $\beta$  est l'angle de bifurcation associé au point  $P$ . L'angle  $\beta$  associé au point  $P$  est calculé par interpolation, en appliquant la méthode utilisée pour le calcul de la vitesse associée au point  $P$ , décrite dans la procédure d'extension des vitesses, et présentée dans la section 1.2.5.2.

## 1.3 Résultats de simulation

Les méthodes présentées dans la section 1.2.5, mises en oeuvre dans `code_aster`, ont des avantages et des inconvénients qu'il est important d'identifier et de comprendre pour rendre les calculs plus robustes et précis. Dans l'étude de propagation sur les briques de graphite, nous avons constaté que les méthodes disponibles dans le `code_aster` ne permettaient pas de représenter les *level sets* avec assez de précision pour justifier d'un calcul fiable et robuste. Nous présentons deux tests qui permettent de mieux comprendre les faiblesses des méthodes de réinitialisation des *level sets*.

### 1.3.1 Éprouvette en flexion trois points

Une éprouvette pré-fissurée soumise à une flexion 3 points est modélisée, voir figure 1.13. La force  $F$  appliquée a une amplitude de 2.4 kN. Ce test, qui a fait l'objet d'études expérimentales et numériques [Cit08; Laz08] est intéressant pour évaluer la robustesse des algorithmes et la capacité à représenter le trajet de fissuration. La fissure est initialement inclinée par rapport à la direction de chargement, ce qui signifie que pendant la propagation une torsion de la surface de la fissure est observée. La fissure est initialement sollicitée en mode mixte et au cours de la propagation, la fissure se déverse pour retrouver une propagation en mode I (voir figure 1.14). Ce test est intéressant pour comparer les méthodes du `code_aster` et a fait l'objet d'un *benchmark* dans [Col11], où, l'auteur constate un manque de robustesse et de précision des méthodes

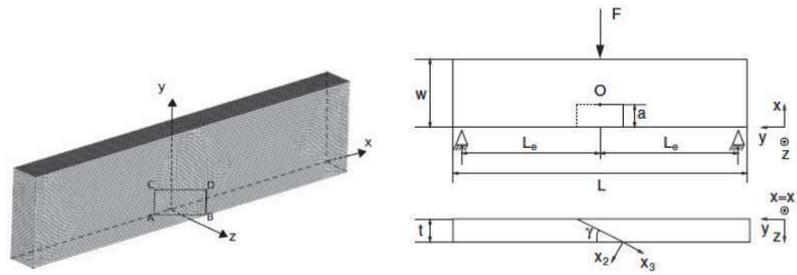


FIGURE 1.13 – Éprouvette pré-fissurée en flexion trois points, à gauche, une représentation en 3D, et à droite, projection sur les plans  $xOy$  et  $yOz$ .

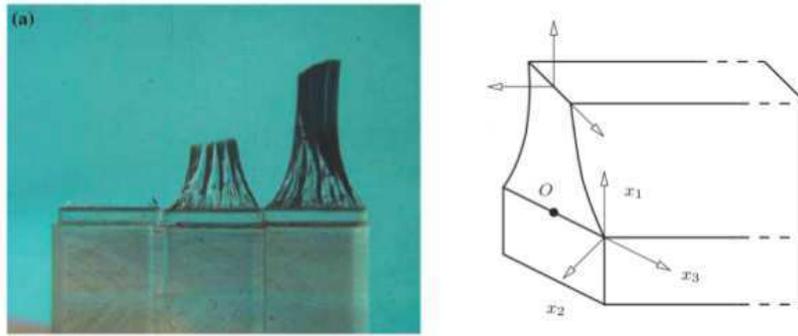


FIGURE 1.14 – À gauche, faciès de rupture observés expérimentalement et, à droite, représentation schématique de la surface de la fissure (d'après [Cit08 ; Laz08]).

*upwind* et « simplexe ». Colombo [Col12b] remarque qu'en présence d'une fissure subissant une torsion, les champs de *level sets* sont chahutés et rendent difficile l'intégration des équations différentielles, ce qui a pour conséquence de faire échouer la convergence des algorithmes. Pour régler ce problème, il propose l'approche géométrique [Col12a], décrite dans la section 1.2.5.4, qui semble plus robuste, fiable et moins coûteuse en temps CPU. Il conclut que :

- la méthode *upwind* converge mais que les *level sets* se déforment de plus en plus au cours de la propagation,
- la méthode « simplexe » ne converge pas,
- la méthode « géométrique » semble la plus performante pour modéliser le trajet de fissuration avec un temps 3 à 5 fois inférieur à celui de la méthode *upwind*.

Module de Young	$E = 2800 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.38$

TABLE 1.1 – Paramètres matériau



FIGURE 1.15 – Faciès de rupture observé expérimentalement (d'après [Bro96]).

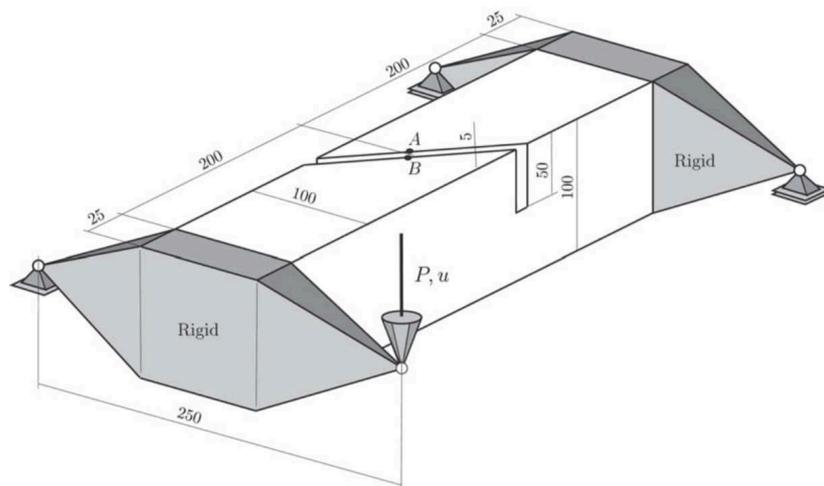


FIGURE 1.16 – Géométrie et chargement du test de Brokenshire.

### 1.3.2 Test de rupture en torsion sur béton

Un test de rupture en torsion sur béton est présenté dans le but de compléter la validation des algorithmes de propagation. L'étude expérimentale menée par [Bro96 ; Bar96] a été réalisée dans les années 1990 pour déterminer le trajet de fissuration (voir figure 1.15) sur un bloc de béton. Par la suite, [Jef04 ; Gas05 ; Bay12] ont simulé numériquement le trajet de fissuration pour tester différents algorithmes de propagation. Ce test est difficile car le chargement en mode mixte implique une sévère torsion de la structure. Ici les méthodes de résolution d'équations d'Hamilton-Jacobi telles que la méthode *upwind* ou la méthode « simplexe » ne convergent pas. En effet, dans ce test, la torsion de la fissure engendre des oscillations importantes des iso-zéros des *level sets* et

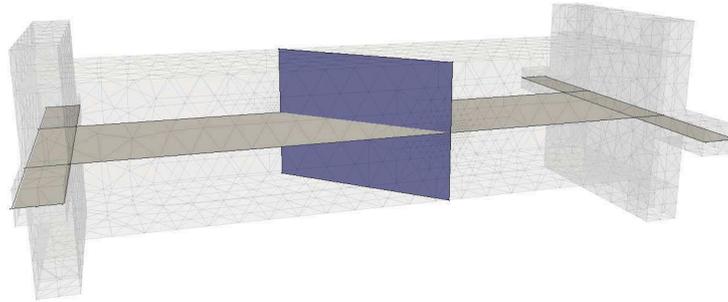
Module de Young	$E = 35000$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$

TABLE 1.2 – Paramètres matériau

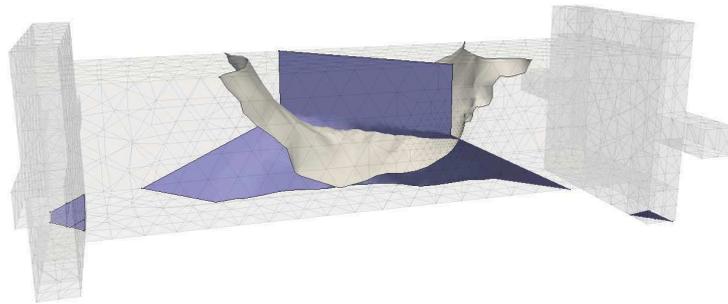
entraîne un arrêt prématuré du calcul. Pour la méthode « géométrique », qui s'avère plus fiable et robuste que les deux autres, le constat est plus mitigé. La méthode semble très sensible au paramétrage du calcul, par exemple, dans le cas où l'on considère tous les points du front de fissure, c'est-à-dire l'intersection entre le front de fissure et les arêtes du maillage, le calcul n'aboutit pas. Les *level sets* perdent rapidement leur régularité (voir figure 1.17) et le calcul s'arrête car plusieurs fronts de fissure sont détectés. Une technique, servant à redéfinir la discrétisation du front de fissure, consiste à déterminer le nombre de points souhaité en front de fissure et à répartir ces points de manière uniforme. Ce procédé permet d'améliorer la solution obtenue en front de fissure et d'aller plus loin dans la simulation. Cependant, les iso-zéros des *level sets* continuent d'osciller et le calcul s'arrête prématurément.

## 1.4 Bilan et mise en exergue des difficultés rencontrées

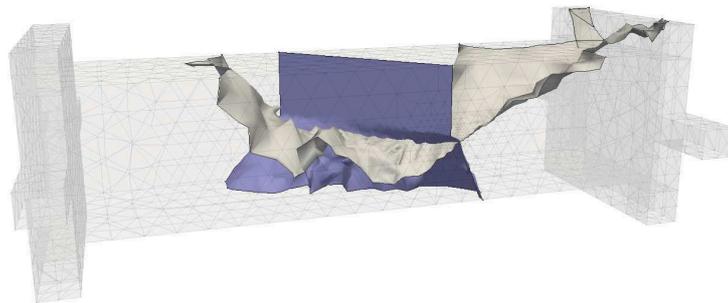
Ce chapitre a permis d'évoquer les concepts fondamentaux en mécanique linéaire de la rupture et de présenter les différentes méthodes pour simuler la propagation de fissures. La méthode X-FEM a été présentée et se trouve être une alternative séduisante à la méthode des éléments finis pour simuler la propagation de fissure. La représentation de la fissure par des *level sets* permet en effet de s'affranchir de la représentation explicite de la fissure dans le maillage, qui pose plusieurs problèmes. Premièrement, l'impossibilité de représenter une discontinuité qui traverse un élément contraint la taille des éléments sur toute la surface de la fissure alors que des éléments plus grossiers pourraient suffire loin du front de fissure. Deuxièmement, bien que les maillages disponibles sur le marché soient de plus en plus performants, l'étape de construction d'un maillage conforme à la position de la fissure après un propagation reste coûteuse en temps de calcul et peut échouer dans certains cas. Enfin, l'étape de projection des champs mécaniques entre deux maillages fissurés, correspondant à deux pas de propagation successifs, reste délicate. La méthode X-FEM pour sa part n'est pas exempte de difficultés. La fissure est représentée par des *level sets* et la méthode doit être en mesure de simuler l'avancée de la fissure tout en conservant des *level sets* correctement définies et régulières. L'abondance de la littérature sur le sujet laisse supposer que cette étape



(a) Fissure initiale



(b) Fissure après 1 pas de propagation



(c) Fissure après 2 pas de propagation

FIGURE 1.17 – Représentation des iso-zéros des *level sets* au cours de la propagation. En gris, l'iso-zéro de la *level set* tangente et, en violet, l'iso-zéro de la *level set* normale.

est difficile et qu'une mise à jour des *level sets* incorrecte a pour effet de dégrader très vite la représentation de la fissure dans le maillage et la qualité de la solution. Dans le cadre de cette thèse qui, rappelons-le, vise à améliorer les outils de simulation de propagation de fissures à l'aide du logiciel de simulation numérique `code_aster`, on a observé que les méthodes disponibles dans le code ne permettent pas de réinitialiser les *level sets* de manière satisfaisante, notamment dans les cas les plus complexes. Les méthodes de résolution des équations différentielles d'Hamilton-Jacobi sont sujettes à des défauts de convergence et des instabilités numériques qui ne permettent pas de les utiliser sur des cas industriels. La méthode *upwind* est certes plus robuste que celle qui traite uniquement les éléments simplexes mais l'utilisation d'une grille auxiliaire limite son usage car il n'est pas ergonomique pour l'ingénieur de travailler avec deux maillages pour représenter une fissure. De plus, la projection de champ entre le maillage de la structure et le maillage auxiliaire reste une étape délicate qui peut engendrer des erreurs numériques supplémentaires. Ultérieurement, la méthode dite « géométrique » a été présentée : celle-ci s'avère effectivement plus robuste et précise que les deux autres mais son utilisation sur un problème de torsion a mis en évidence des difficultés à conserver des *level sets* de qualité au cours de la propagation.

Dans la suite de ce mémoire, nous proposons de mettre en place une méthode numérique fondée sur la *fast marching method* pour mettre à jour les *level sets*. En effet, les travaux menés sur le sujet par les auteurs des articles suivants [Suk03 ; Suk08 ; Bar98 ; Shi10] montrent que cette méthode est pertinente pour cette application, car la *fast marching method* résout le problème de façon directe et permet, théoriquement, d'éviter les instabilités numériques dues à la recherche de l'état stationnaire d'une équation d'évolution. Le but de ce travail est donc de proposer une méthode précise, robuste et peu coûteuse en temps de calcul pour remplacer les méthodes disponibles dans le logiciel `code_aster`.



# *Fast marching method* dans le cadre de la fissuration

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b> Principe de la <i>fast marching method</i> pour la propagation de fissures . . . . .	44
<b>2.2</b> Réinitialisation des <i>level sets</i> sur maillage structuré . . .	46
2.2.1 Discrétisation de l'équation eikonale . . . . .	46
2.2.2 Algorithme de réinitialisation de la <i>level set</i> sur un maillage structuré . . . . .	48
2.2.3 Traitement des nœuds particuliers . . . . .	48
2.2.4 Quelques résultats de validation . . . . .	49
<b>2.3</b> Réinitialisation des <i>level sets</i> sur un maillage discrétisé en simplexes . . . . .	54
2.3.1 Principe de la méthode . . . . .	54
2.3.2 Algorithme de réinitialisation de la <i>level set</i> sur un maillage discrétisé en simplexes . . . . .	57
2.3.3 Traitement des nœuds problématiques . . . . .	57
<b>2.4</b> Extension de la <i>fast marching method</i> à tous types de mailles	<b>62</b>
2.4.1 Application sur maillage linéaire . . . . .	64
2.4.2 Application sur maillage quadratique . . . . .	68
<b>2.5</b> Résultats . . . . .	<b>75</b>
2.5.1 Propagation non plane d'une fissure débouchante . . . . .	75
2.5.2 Test Brokenshire . . . . .	78
2.5.3 Propagation de fissures dans une brique de graphite . . . . .	80
<b>2.6</b> Conclusions . . . . .	<b>84</b>

---

Initialement, la méthode des *level sets* proposée par Osher *et al.* [Osh88] permet de représenter une interface par l’iso-zéro d’une fonction et de mettre à jour cette fonction par la résolution des équations d’Hamilton-Jacobi en connaissant la vitesse de l’interface dans la direction normale à celle-ci. Dans le chapitre précédent, plusieurs algorithmes ont été présentés pour réinitialiser une *level set* et conserver la propriété de fonction distance signée. Ici, nous présentons une méthode adaptée à la résolution de problèmes d’interface et d’évolution de front monotone : la *fast marching method*. Elle découle d’une idée originale de Sethian *et al.* [Set96], améliorée par la suite par [Set99; Cho01], pour suivre l’évolution d’une interface et qui s’avère être une méthode efficace pour résoudre l’équation eikonale. La méthode est utilisée dans différents domaines d’application tels que l’imagerie médicale [Mal96], la sismologie [Set96] où bien la propagation de fissure [Suk03; Suk08]. Dans le cadre de la propagation de fissure, Sukumar *et al.* [Suk03] ont proposé de combiner la méthode X-FEM avec la *fast marching method* pour modéliser la propagation de fissure plane en 3D, et ultérieurement, Sukumar *et al.* [Suk08] ont proposé une extension de ces travaux pour la propagation de fissure non plane en 3D. Dans un premier temps, nous proposons, comme dans les références suivantes [Suk03; Suk08], d’utiliser un schéma aux différences finies pour résoudre l’équation eikonale. Cette approche, nécessite d’utiliser un maillage composé de mailles hexaédriques en 3D ou bien l’utilisation d’une grille auxiliaire sur laquelle la réinitialisation des *level sets* est effectuée comme expliquée dans la section 1.2.5.3. Précédemment, on a vu que cette restriction pouvait poser des problèmes de projection entre les deux maillages et provoquer des erreurs importantes. De plus, il est difficile, voire, impossible de générer un maillage composé exclusivement d’héxaèdres pour une structure complexe. Pour se libérer de cette contrainte, on proposera une méthode géométrique applicable à tous types de mailles et fondée sur un calcul de distance géodésique, *cf.* [Kim98]. Les résultats obtenus sur différents tests seront présentés afin de valider la méthode.

## 2.1 Principe de la *fast marching method* pour la propagation de fissures

La mise à jour des *level sets* permet de représenter le front de fissure dans la nouvelle configuration après un pas de propagation. En revanche, les deux fonctions *level sets* qui représentent la fissure peuvent perdre les propriétés de fonction distance signée et d’orthogonalité. En d’autres termes, si l’on suppose que les fonctions  $\Phi_n$  et  $\Phi_t$  vérifient presque partout les propriétés d’une fonction distance signée tels que  $\|\nabla\Phi_n\| = 1$  et  $\|\nabla\Phi_t\| = 1$  et d’orthogonalité  $\nabla\Phi_n \cdot \nabla\Phi_t = 0$ , ces fonctions n’ont aucune raison de conserver cette propriété suite à la propagation. Pour maintenir tout au long du

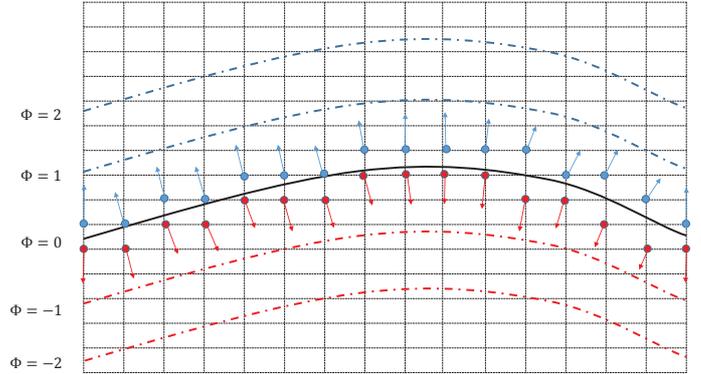


FIGURE 2.1 – Réinitialisation d'une *level set* par *fast marching method*.

processus les propriétés des *level sets*, une réinitialisation fondée sur la *fast marching method* est présentée dans ce travail. L'idée de base est de considérer l'équation eikonale suivante :

$$||\underline{\nabla}\Phi(x)|| = 1, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$ .

À partir de valeurs connues, l'idée de la méthode est de propager de proche en proche la donnée de distance des points aux valeurs les plus faibles aux zones les plus lointaines. Pour représenter de manière simple le mécanisme de la méthode, considérons un domaine coupé en deux par une interface  $\Gamma$  et cherchons à construire la fonction distance signée sur ce domaine à partir de la donnée de la fonction sur  $\Gamma$ , voir figure 2.1. Le problème s'écrit de la manière suivante :

$$||\underline{\nabla}\Phi|| = 1, \quad (2.2)$$

$$\Phi = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.3)$$

Toute la qualité de la méthode repose sur la donnée initiale, qui numériquement se traduit par le simple fait de calculer les valeurs de la *level set* aux nœuds les plus proches de l'interface  $\Gamma$ . Connaissant la valeur de la fonction en ces nœuds, on peut propager l'information de fonction distance signée sur tout le domaine. La méthode est proposée pour résoudre le cas où le front n'évolue que dans un sens sans retour possible. Si on considère seulement un front monotone croissant, c'est-à-dire une vitesse de propagation strictement positive, une première étape propage l'information de  $\Phi$  du côté où  $\Phi > 0$  et une deuxième étape propage l'information  $-\Phi$  du côté où  $\Phi < 0$ .

Pour réinitialiser les deux *level sets*, permettant de repérer la fissure, on procède de

la manière suivante :

- réinitialisation de la *level set* normale  $\tilde{\Phi}_n$  à partir des valeurs connues sur les nœuds proches l’iso-zéro. Il est à noter que  $\tilde{\Phi}_n$  est la *level set* normale mise à jour, cf. section 1.2.5.2.  $\Phi_n^{k+1}$  est la *level set* normale obtenue après réinitialisation de  $\tilde{\Phi}_n$  et vérifie  $\|\nabla\Phi_n^{k+1}\| = 1$ , presque partout,
- réinitialisation de la *level set* tangente  $\tilde{\Phi}_t$  à partir des valeurs connues sur les nœuds proches l’iso-zéro. Remarquons que pour cette étape,  $\tilde{\Phi}_t$  est la *level set* tangente mise à jour mais dont le gradient n’est pas forcément orthogonal au gradient  $\Phi_n^{k+1}$ , comme expliqué dans le processus de réinitialisation des *level set* de la section 1.2.5.2. Pour s’affranchir de l’étape de réorthogonalisation, on localise les nœuds autour de l’iso-zéro de  $\tilde{\Phi}_t$  et on attribue à ces nœuds une nouvelle valeur par application de la méthode géométrique [Col12a]. Après ce traitement, le gradient de  $\tilde{\Phi}_t$  est orthogonal au gradient de  $\Phi_n^{k+1}$  dans les éléments traversés par l’iso-zéro de  $\tilde{\Phi}_t$ , situés au voisinage du front de fissure. On utilise donc ces nœuds pour démarrer le processus de *fast marching* et réinitialiser  $\tilde{\Phi}_t$ .  $\Phi_t^{k+1}$  est la *level-set* tangente obtenue après réinitialisation de  $\tilde{\Phi}_t$ . Elle vérifie  $\|\nabla\Phi_t^{k+1}\| = 1$  presque partout et  $\underline{\nabla}\Phi_n^{k+1} \cdot \underline{\nabla}\Phi_t^{k+1} = 0$ , au voisinage du front de fissure.

## 2.2 Réinitialisation des *level sets* sur maillage structuré

### 2.2.1 Discrétisation de l’équation eikonale

Une méthode adaptée à la résolution de l’équation eikonale est fondée sur une discrétisation par différence finie que l’on retrouve dans [Suk03 ; Suk08]. Dans la phase de réinitialisation de la *level set* on cherche à résoudre numériquement :

$$\|\underline{\nabla}\Phi\| = 1. \quad (2.4)$$

En considérant un maillage régulier à pas constant suivant les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , on discrétise l’équation (2.4) :

$$\left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_2}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_3}{\Delta z}\right)^2 = 1, \quad (2.5)$$

où  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  permettent chacun d’estimer la dérivée partielle de  $\Phi$ , dans la direction qui lui est associée, en utilisant un décentrage amont ou un décentrage aval, selon l’information disponible pendant l’itération en cours. Par exemple, si  $\Phi_1 = \Phi_{i-1,j,k}$ , la

dérivée de  $\Phi$  par rapport à la direction  $Ox$  est approchée en utilisant un décentrage amont et si  $\Phi_1 = \Phi_{i+1,j,k}$ , cette même dérivée partielle est approchée par un décentrage aval. La figure 2.2 présente l'ensemble des valeurs susceptibles d'être utilisées pour évaluer le carré de la norme du gradient de  $\Phi$  par l'équation (2.5). Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  ont pu être déterminés.

Soit le polynôme du second degré de  $\Phi_{i,j,k}$  :

$$\left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_2}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_3}{\Delta z}\right)^2 - 1 = 0. \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) admet deux racines de la forme :

$$\delta_1 = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}, \quad (2.7)$$

$$\delta_2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}, \quad (2.8)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha &= \Phi_1 \Delta y^2 \Delta z^2 + \Phi_2 \Delta x^2 \Delta z^2 + \Phi_3 \Delta x^2 \Delta y^2, \\ \beta &= \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta y^2, \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 - \beta (\Phi_1^2 \Delta y^2 \Delta z^2 + \Phi_2^2 \Delta x^2 \Delta z^2 + \Phi_3^2 \Delta x^2 \Delta y^2 - \Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2)}. \end{aligned}$$

Il faut déterminer à quelle racine correspond la valeur  $\Phi_{i,j,k}$  cherchée. Pour ce faire, on rappelle que dans le processus de la *fast marching method*, la distance augmente lorsque nous nous éloignons de l'interface et donc que la solution  $\Phi_{i,j,k}$  est plus grande que les valeurs  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ . Ainsi nous avons nécessairement  $\Phi_{i,j,k} > \Phi_n, \forall n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \Phi_1 \Delta y^2 \Delta z^2 + \Phi_2 \Delta x^2 \Delta z^2 + \Phi_3 \Delta x^2 \Delta y^2 \\ &\leq \max(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) (\Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta y^2). \end{aligned}$$

On en déduit, par définition de  $\beta$  et car  $\Phi_{i,j,k} > \Phi_n, \forall n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  :

$$\Phi_{i,j,k} \beta - \alpha > 0.$$

Or, d'après (2.7) et (2.8), on a :

$$\delta_1 \beta - \alpha = \gamma > 0 \text{ et } \delta_2 \beta - \alpha = -\gamma < 0.$$

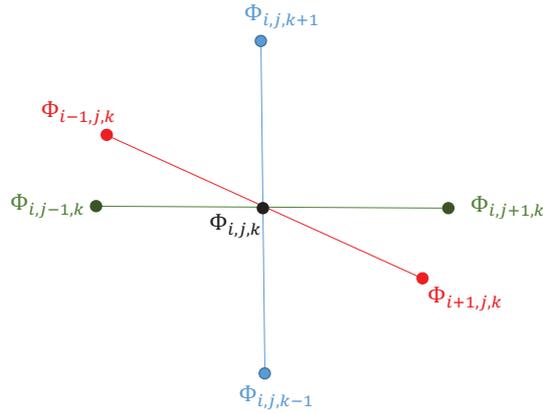


FIGURE 2.2 – Trois directions de recherche pour le nœud courant.

Ceci implique que la solution  $\Phi_{i,j,k} = \delta_1$  est la seule solution acceptable.

### 2.2.2 Algorithme de réinitialisation de la *level set* sur un maillage structuré

L'algorithme 2 présente les différentes étapes de la méthode conçue pour un maillage régulier, à pas constant, et dont les arêtes sont orientées suivant les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . L'application de cette méthode à un maillage plus complexe est possible avec l'utilisation d'une grille auxiliaire qui sert uniquement à réinitialiser les *level sets*. L'algorithme présenté traite la réinitialisation de  $\Phi_n$  dans le domaine  $\Phi_n > 0$  et la réinitialisation de  $\Phi_t$  dans le domaine  $\Phi_t > 0$ . Pour la réinitialisation de  $\Phi_n$  dans le domaine  $\Phi_n < 0$ , on réinitialise  $-\Phi_n$ . Pour la réinitialisation de  $\Phi_t$  dans le domaine  $\Phi_t < 0$ , on réinitialise  $-\Phi_t$ .

### 2.2.3 Traitement des nœuds particuliers

La discrétisation par différences finies de l'équation (2.4), peut poser des problèmes pour certains nœuds pour lesquels l'information nécessaire au calcul est absente. En effet, pour chaque nœud pour lequel on souhaite déterminer la valeur de  $\Phi_{i,j,k}$ , il faut au préalable disposer de l'information en aval ou en amont, c'est-à-dire les valeurs de  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ . Il existe quatre cas possibles que nous allons décrire pour  $\Phi_1$  (*i.e.* la direction  $Ox$ ), et qui sont similaires pour  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  dans les directions  $Oy$  et  $Oz$  :

1.  $\Phi_{i-1,j,k}$  et  $\Phi_{i+1,j,k}$  sont connues. On choisit  $\Phi_1 = \min(\Phi_{i-1,j,k}, \Phi_{i+1,j,k})$ .
2.  $\Phi_{i-1,j,k}$  est connue mais pas  $\Phi_{i+1,j,k}$ . On a  $\Phi_1 = \Phi_{i-1,j,k}$ .
3.  $\Phi_{i+1,j,k}$  est connue mais pas  $\Phi_{i-1,j,k}$ . On a  $\Phi_1 = \Phi_{i+1,j,k}$ .
4.  $\Phi_{i-1,j,k}$  et  $\Phi_{i+1,j,k}$  sont inconnues. On ne peut pas attribuer de valeur à  $\Phi_1$ .

**Algorithme 2** : *Fast marching method* sur maillage structuré**INITIALISATION** :

$\mathcal{K}$  est l'ensemble des nœuds pour lesquels la valeur de la *level set* est connue.  
 Il est initialisé à l'ensemble des nœuds proches de l'iso-zéro de la *level set*.  
 $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nœuds parcourus dans l'algorithme. Il est initialisé à l'ensemble vide.

**TRAITEMENT** :

```

TANT QUE  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{P} \neq \emptyset$ 
|   On localise le nœud  $i$  ayant la plus petite valeur de level set dans  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{P}$ ;
|   Le nœud  $i$  est ajouté à l'ensemble  $\mathcal{P}$ ;
|   POUR chaque nœud  $j$  adjacent au nœud  $i$ 
|   |   SI  $j \notin \mathcal{K}$  ALORS
|   |   |   SI le calcul de level set au nœud  $j$  est possible ALORS
|   |   |   |   Calcul de la level set au nœud  $j$ ;
|   |   |   |   On ajoute le nœud  $j$  à l'ensemble  $\mathcal{K}$ ;
|   |   |   FIN SI
|   |   FIN SI
|   FIN POUR
FIN TANT QUE

```

Si il est possible d'attribuer une valeur à  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ , l'utilisation de la formule (2.7) est licite pour attribuer une valeur à  $\Phi_{i,j,k}$ . Dans le cas contraire, si au moins un des  $\Phi_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  est inconnu, on ne peut pas utiliser la formule (2.7) pour attribuer une valeur à  $\Phi_{i,j,k}$ . Pour résoudre ce problème, on met donc en place une condition qui permet de déterminer si oui ou non la valeur au nœud courant peut être calculée par la formule (2.7). Pour le cas où cela n'est pas possible, nous attribuons à  $\Phi_{i,j,k}$  la valeur fournie par application de la méthode géométrique de Colombo [Col12a]. Le problème posé par le manque d'information autour du nœud courant, interdisant l'application de la méthode aux différences finies, a déjà été soulevé dans les références suivantes [Suk08; Shi10]. Il apparaît notamment près des bords, là où l'information nécessaire est localisée hors de la structure.

**2.2.4 Quelques résultats de validation**

La méthode présentée dans la section précédente a été implémentée dans le logiciel `code_aster`. La restitution d'une méthode numérique dans un code industriel passe par de nombreuses étapes de validation qui permettent de vérifier sa robustesse, sa précision et son efficacité en termes de temps de calcul. On présente ici deux tests : un test 2D d'une plaque soumise à une flexion trois points et un test 3D de propagation en mode mixte d'une fissure non plane et débouchante.

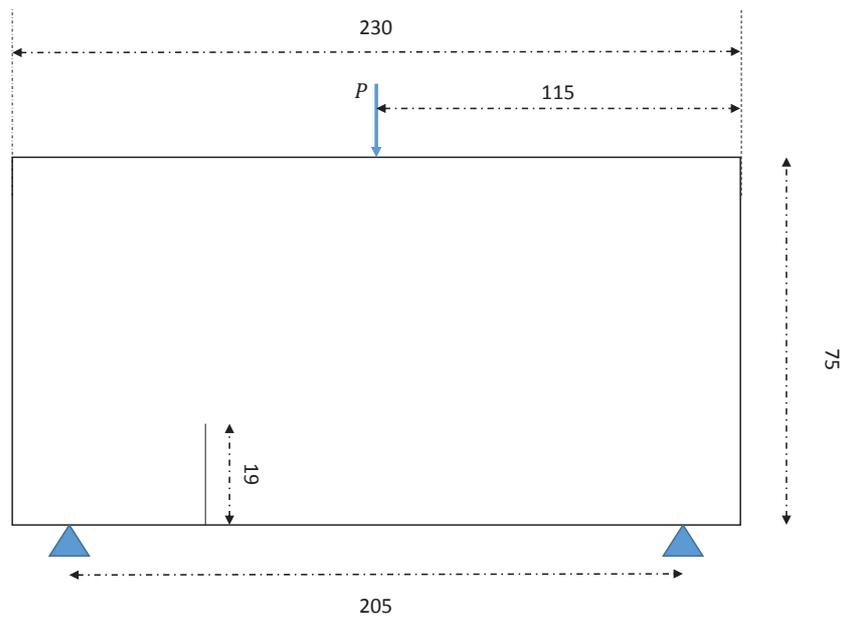


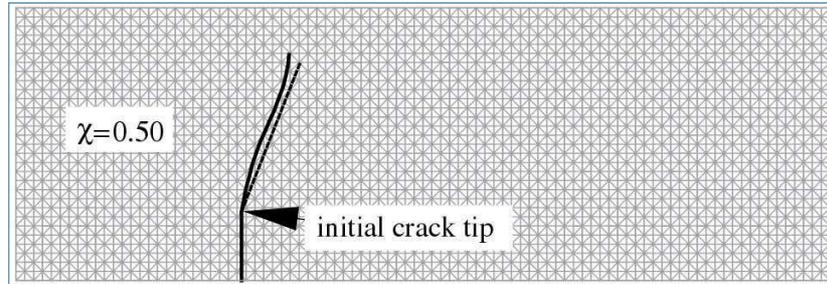
FIGURE 2.3 – Plaque fissurée soumise à une flexion trois points : description de la géométrie et des chargements.

Module de Young	$E = 31370 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$

TABLE 2.1 – Paramètres matériau

#### 2.2.4.1 Propagation d’une fissure X-FEM dans une plaque en flexion trois points, dans un espace bidimensionnel

Le test modélise la propagation d’une fissure X-FEM débouchante dans une plaque rectangulaire ( $230 \text{ mm} \times 75 \text{ mm}$ ), comme présenté dans les travaux de Mariani *et al.* [Mar03], voir figure 2.3. La plaque est soumise à une flexion trois points, où la force appliquée est  $P = 1 \text{ Nm}^{-1}$ , et l’avancée maximale de la fissure est fixée à  $\Delta a = 0.3 \text{ mm}$ . Nous comparons les résultats obtenus avec la *fast marching method*, voir figure 2.4(b), avec les résultats expérimentaux de John [Joh90] et avec les résultats numériques de Mariani, voir figure 2.4(a). Comme le maillage de la structure est réglé et à pas constant, nous n’avons pas besoin d’utiliser un maillage auxiliaire. De manière qualitative, on constate que le trajet de fissuration obtenu par la *fast marching method* concorde avec les résultats expérimentaux de John [Joh90], voir figure 2.4(c). Ce test valide la méthode sur un modèle 2D.



(a) En noir, le trajet de fissuration obtenu numériquement par [Mar03], en pointillés, les résultats expérimentaux de [Joh90].



(b) Trajet de fissuration obtenu par la *fast marching method* et la discrétisation de l'équation eikonale par différence finie.



(c) Superposition des deux figures afin de comparer les résultats obtenus.

FIGURE 2.4 – Trajet de fissuration dans une plaque en flexion trois points.

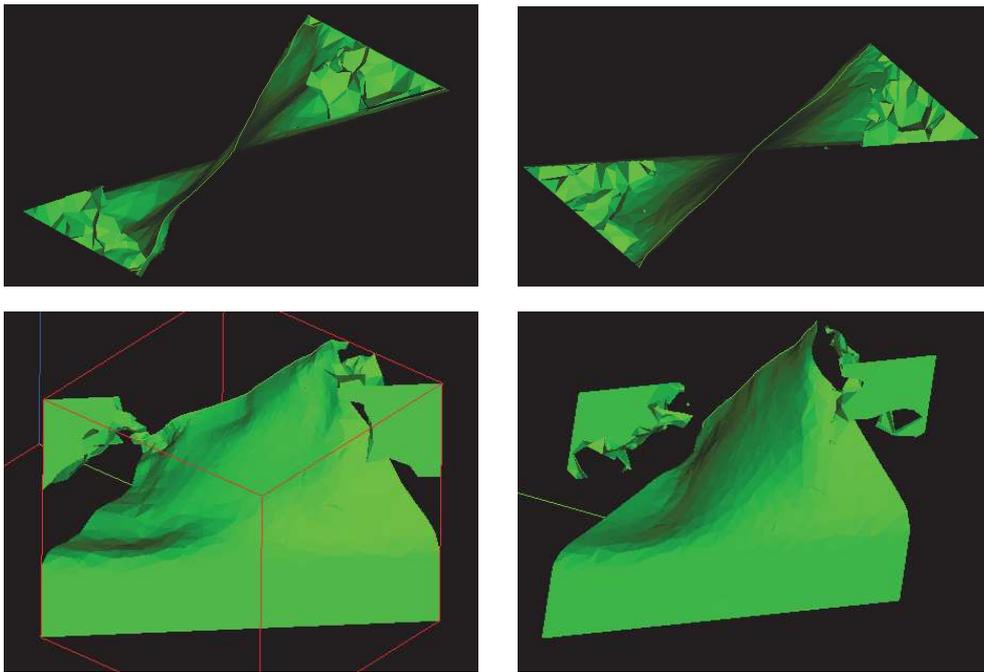


FIGURE 2.5 – Représentation de l’iso-zéro de la *level set* normale. À gauche, l’iso-zéro de la *level set* normale obtenue par la méthode *upwind*, et à droite, l’iso-zéro de la *level set* normale obtenue par la *fast marching method*.

#### 2.2.4.2 Éprouvette en flexion trois points

Revenons au cas étudié dans la section 1.3.1, voir figure 1.13. Les conclusions de Colombo *et al.* [Col11], ont indiqué que la méthode « simplexe » ne convergait pas mais que la méthode *upwind* permettait de simuler la propagation de fissure. On compare ici les résultats obtenus avec la méthode *upwind* et la *fast marching method* pour un maillage réglé. La réinitialisation des *level sets* est restreinte à un tore qui entoure le front de fissure et suit son évolution. Dans le cas de la méthode *upwind*, la restriction du domaine de calcul améliore la qualité des résultats. Pour la *fast marching method*, l’utilisation du tore modifie peu les résultats obtenus. Néanmoins, pour garantir une comparaison équitable entre les deux méthodes, le domaine de calcul est restreint de la même façon. Sur la figure 2.5, qui représente l’iso-zéro de la *level set* normale pour le dernier pas de propagation, on observe que les deux méthodes simulent correctement le déversement de la fissure en concordance avec les résultats expérimentaux obtenus par Citarella *et al.* [Cit08]. En revanche, on constate que la *fast marching method* permet d’obtenir une *level set* plus régulière tout au long de la propagation. Sur la figure 2.6, on représente la position du front de fissure à chaque pas de propagation. Ce résultat valide la méthode sur un modèle 3D.

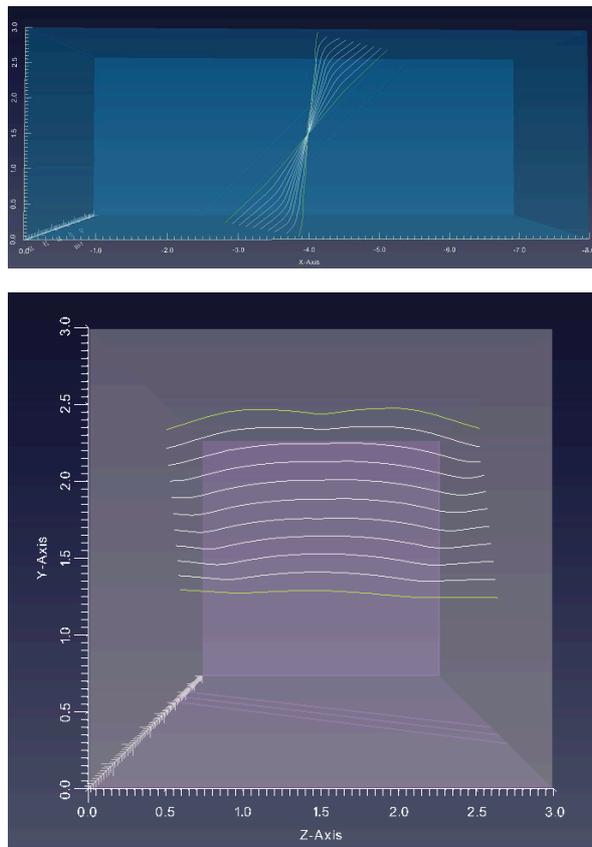


FIGURE 2.6 – Localisation du front de fissure pour chaque pas de propagation par *fast marching method*.

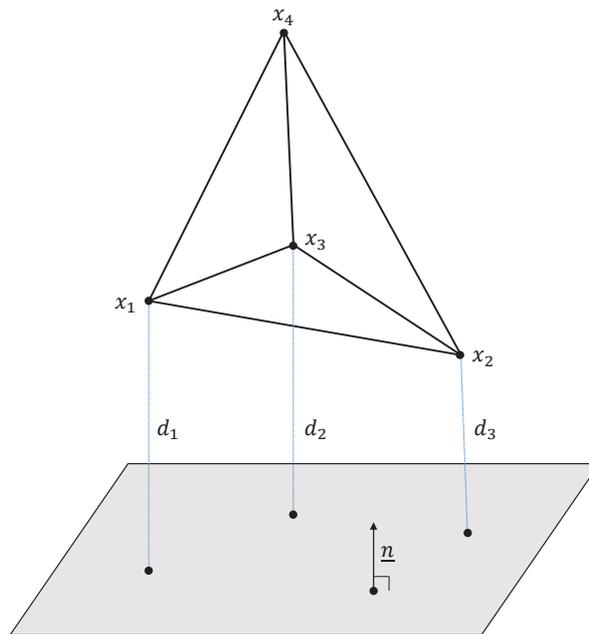


FIGURE 2.7 – tétraèdre dans l'espace 3D.

## 2.3 Réinitialisation des *level sets* sur un maillage discrétisé en simplexes

Dans la section précédente, on a développé et implanté une *fast marching method*, applicable à un maillage structuré, dans `code_aster`. Cette méthode a été validée sur différents exemples tirés de la littérature. En revanche, l'usage des différences finies pour discrétiser l'équation eikonale contraint à l'utilisation d'un maillage réglé. Dans le cas, où l'on souhaite mailler la structure avec des éléments simplexes (triangles en 2D et tétraèdres en 3D), l'utilisation d'un maillage auxiliaire est indispensable pour appliquer la méthode. Cette procédure complexifie l'étude et ajoute une source d'erreurs supplémentaire en raison de la projection de champ entre les deux maillages. Pour s'affranchir du maillage auxiliaire, on propose de mettre en place une *fast marching method*, compatible avec un maillage composé de triangles en 2D ou de tétraèdres en 3D. La méthode proposée s'inspire du travail de Bronstein *et al.* [Bro07a].

### 2.3.1 Principe de la méthode

Considérons un tétraèdre, où  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$  et  $\underline{x}_4$  sont les positions des quatre nœuds de l'élément, d'indices respectifs  $i_1, i_2, i_3$  et  $i_4$ . Soient  $d_1, d_2, d_3$ , les trois valeurs connues de la *level set*, où  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont interprétés comme les distances des nœuds  $i_1, i_2$  et  $i_3$  à un plan, de normale  $\underline{n}$ , voir figure 2.7. Le problème consiste à déterminer la valeur de la *level set*  $d_4$  au nœud  $i_4$ .

La distance de chaque nœud au plan est calculée par projection du nœud sur le plan :

$$\begin{cases} d_1 = \underline{x}_1 \cdot \underline{n} + c, \\ d_2 = \underline{x}_2 \cdot \underline{n} + c, \\ d_3 = \underline{x}_3 \cdot \underline{n} + c, \\ d_4 = \underline{x}_4 \cdot \underline{n} + c, \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$  est la normale au plan et  $c$  une constante. Dans ce système d'équations, les paramètres  $\underline{n}$ ,  $c$  et  $d_4$  sont inconnus. On peut éliminer la constante  $c$  en écrivant les écarts suivants :

$$\begin{cases} d_1 - d_4 = (\underline{x}_1 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} \\ d_2 - d_4 = (\underline{x}_2 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} \\ d_3 - d_4 = (\underline{x}_3 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} \end{cases} \iff \begin{cases} d_1 = (\underline{x}_1 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} + d_4, \\ d_2 = (\underline{x}_2 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} + d_4, \\ d_3 = (\underline{x}_3 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} + d_4. \end{cases} \quad (2.10)$$

Sous cette forme, nous avons un système de trois équations et quatre inconnues ( $d_4$  et les trois composantes de  $\underline{n}$ ). Le problème s'écrit sous forme matricielle :

$$\underline{d} = \underline{X} \cdot \underline{n} + d_4 \underline{1}_3, \quad (2.11)$$

où  $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 - \underline{x}_4 & \underline{x}_2 - \underline{x}_4 & \underline{x}_3 - \underline{x}_4 \end{bmatrix}^T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $\underline{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T \in \mathbb{R}^3$  et  $\underline{1}_3 = [1 \ 1 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ . Le déterminant de la matrice  $\underline{X}$  est le volume du tétraèdre. le maillage est supposé ne pas contenir de mailles dégénérées, de volume nul. La matrice  $\underline{X}$  est donc toujours inversible. On peut donc écrire (2.11) sous la forme suivante :

$$\underline{n} = \underline{X}^{-1} \cdot (\underline{d} - d_4 \underline{1}_3). \quad (2.12)$$

$\underline{n}$  est un vecteur unitaire, c'est-à-dire :

$$1 = \underline{n}^T \cdot \underline{n}. \quad (2.13)$$

En utilisant l'équation (2.12), on obtient la forme quadratique suivante :

$$1 = d_4^2 \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3 - 2d_4 \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} + \underline{d}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d}, \text{ où } \underline{Q} = (\underline{X} \cdot \underline{X}^T)^{-1}. \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) admet deux racines :

$$\delta_1 = \frac{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} + \sqrt{(\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d})^2 - \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3 (\underline{d}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} - 1)}}{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3}, \quad (2.15)$$

$$\delta_2 = \frac{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} - \sqrt{(\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d})^2 - \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3 (\underline{d}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} - 1)}}{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3}. \quad (2.16)$$

On rappelle que la *fast marching method* propage les valeurs les plus faibles de la *level set*, donc proches de l'iso-zéro, aux zones les plus lointaines. On souhaite donc propager l'information de distance de manière croissante et monotone. Pour garantir la condition de croissance, c'est-à-dire  $d_4 > d_1$ ,  $d_4 > d_2$  et  $d_4 > d_3$ , on élimine le choix  $d_4 = \delta_2$ , en accord avec les travaux de Kimmel *et al.* [Kim98]. Les auteurs de [Bro07a] appellent condition de monotonie :  $\frac{\partial d_4}{\partial d_1} > 0$ ,  $\frac{\partial d_4}{\partial d_2} > 0$  et  $\frac{\partial d_4}{\partial d_3} > 0$ . Cette condition de monotonie suffit à assurer la condition de croissance, alors qu'elle n'est pas garantie par le choix  $d_4 = \delta_1$ .

La dérivée de l'équation (2.14) par rapport à  $\underline{d}$  est :

$$2 \left( \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{1}_3 \right) d_4 \frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}} - 2 \left( \underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{d} \right) \frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}} - 2 d_4 \underline{Q} \cdot \underline{1}_3 + 2 \underline{Q} \cdot \underline{d} = 0, \quad (2.17)$$

donc  $\frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}}$ , la dérivée de  $d_4$  par rapport à  $\underline{d}$ , vérifie :

$$\frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}} = \frac{\underline{Q} \cdot (\underline{d} - d_4 \underline{1}_3)}{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{d} - d_4 \underline{1}_3)}, \quad (2.18)$$

et d'après (2.11), on a finalement :

$$\frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}} = \frac{\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}}{\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}}. \quad (2.19)$$

On a remarqué que  $\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  n'est rien d'autre que la somme des composantes du vecteur  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ . Donc si toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont positives,  $\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sera également positif. De même, si toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont négatives,  $\underline{1}_3^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sera également négatif. En conséquence, si toutes les composantes  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont de même signe, toutes les composantes de  $\frac{\partial d_4}{\partial \underline{d}}$  seront positives. En conclusion, la condition de monotonie est satisfaite si toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont de même signe. Il est à noter que cette dernière condition est suffisante mais pas nécessaire.

De plus, il est impossible que toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  soient positives.

*Preuve.* Supposons que toutes les composantes du vecteur  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont positives et montrons qu'il y a contradiction. Soit  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . On a  $(\underline{X} \cdot \underline{n})_i = d_i - d_4$ , d'après (2.11). La condition de croissance impose  $d_4 > d_i$ . On a donc  $(\underline{X} \cdot \underline{n})_i < 0$ .

Évaluons le signe de  $(\underline{X} \cdot \underline{n})^T \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{n})$ . On a :

$$(\underline{X} \cdot \underline{n})^T \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{n}) = \sum_{i=1}^3 (\underline{X} \cdot \underline{n})_i (\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n})_i. \quad (2.20)$$

On vient de montrer que toutes les composantes de  $(\underline{X} \cdot \underline{n})$  sont négatives et on a supposé que toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont positives. On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, (\underline{X} \cdot \underline{n})_i (\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n})_i < 0. \quad (2.21)$$

Finalement  $(\underline{X} \cdot \underline{n})^T \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{n})$  est négatif. Or par construction, la matrice  $\underline{Q}$  est définie positive, donc :  $(\underline{X} \cdot \underline{n})^T \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{n}) > 0$  et il y a contradiction.  $\square$

Si pour le problème courant toutes les composantes de  $\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$  sont négatives, la condition de monotonie est satisfaite et on attribue la valeur  $\delta_1$  à  $d_4$ . Dans le cas contraire, on considère trois nouvelles valeurs possibles pour  $d_4$  :  $d_1 + \|\underline{x}_1 - \underline{x}_4\|$ ,  $d_2 + \|\underline{x}_2 - \underline{x}_4\|$  et  $d_3 + \|\underline{x}_3 - \underline{x}_4\|$ . On choisit la plus petite valeur entre les trois valeurs possibles :

$$d_4 = \min \left\{ d_1 + \|\underline{x}_1 - \underline{x}_4\|, d_2 + \|\underline{x}_2 - \underline{x}_4\|, d_3 + \|\underline{x}_3 - \underline{x}_4\| \right\}. \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Algorithme de réinitialisation de la *level set* sur un maillage discrétisé en simplexes

L'algorithme 3 présente les différentes étapes de la méthode conçue pour un maillage composé d'éléments simplexes. Elle n'est applicable qu'avec un maillage composé de mailles triangles en 2D ou tétraèdres en 3D. Le principe reste similaire à la méthode appliquée sur le maillage structuré mais diffère sur certains points que nous expliciterons. L'algorithme 3 traite la réinitialisation de  $\Phi_n$  dans le domaine  $\Phi_n > 0$  et la réinitialisation de  $\Phi_t$  dans le domaine  $\Phi_t > 0$ . Pour la réinitialisation de  $\Phi_n$  dans le domaine  $\Phi_n < 0$ , on réinitialise  $-\Phi_n$ . Pour la réinitialisation de  $\Phi_t$  dans le domaine  $\Phi_t < 0$ , on réinitialise  $-\Phi_t$ .

### 2.3.3 Traitement des nœuds problématiques

L'algorithme 3 soulève le problème suivant : autour d'un nœud minimum localisé, on peut attribuer à ses nœuds voisins des valeurs de *level set* qui ne sont pas la vraie distance signée. En effet, si la condition de monotonie n'est pas satisfaite, la valeur attribuée au nœud est déterminée par le critère géométrique de la formule (2.22). En

---

**Algorithme 3 :** *Fast marching method* sur maillage simplexe

---

**INITIALISATION :**

$\mathcal{K}$  est l'ensemble des nœuds pour lesquels la valeur de la *level set* est connue.  
 Il est initialisé à l'ensemble des nœuds proches de l'iso-zéro de la *level set* ;  
 $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nœuds parcourus dans l'algorithme. Il est initialisé à l'ensemble vide ;

**TRAITEMENT :**

TANT QUE  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{P} \neq \emptyset$

- On localise le nœud  $i$  ayant la plus petite valeur de *level set* dans  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{P}$  ;
- Le nœud  $i$  est ajouté à l'ensemble  $\mathcal{P}$  ;
- POUR chaque simplexe  $T$  adjacent au nœud  $i$ 
  - POUR chaque nœud  $j$  du simplexe  $T$ 
    - SI  $j \notin \mathcal{P}$  ALORS
      - SI Tous les autres nœuds adjacents à  $T$  sont dans l'ensemble  $\mathcal{K}$  ALORS
        - Le calcul de la *level set* au nœud  $j$  est possible
        - Calcul de  $\phi_c$  la nouvelle valeur candidate de la *level set* au nœud  $j$  en appliquant la procédure décrite dans la section 2.3.1 ;
        - SI  $j \notin \mathcal{K}$  ALORS
          - $\phi_c$  devient la valeur de *level set* au nœud  $j$  ;
          - On ajoute le nœud  $j$  à l'ensemble  $\mathcal{K}$  ;
        - SINON
          - Soit  $\phi_j$  la valeur courante de *level set* au nœud  $j$  ;
          - $\phi_j \leftarrow \min(\phi_j, \phi_c)$  ;
      - FIN SI
    - FIN SI
  - FIN POUR
- FIN POUR

FIN TANT QUE

---

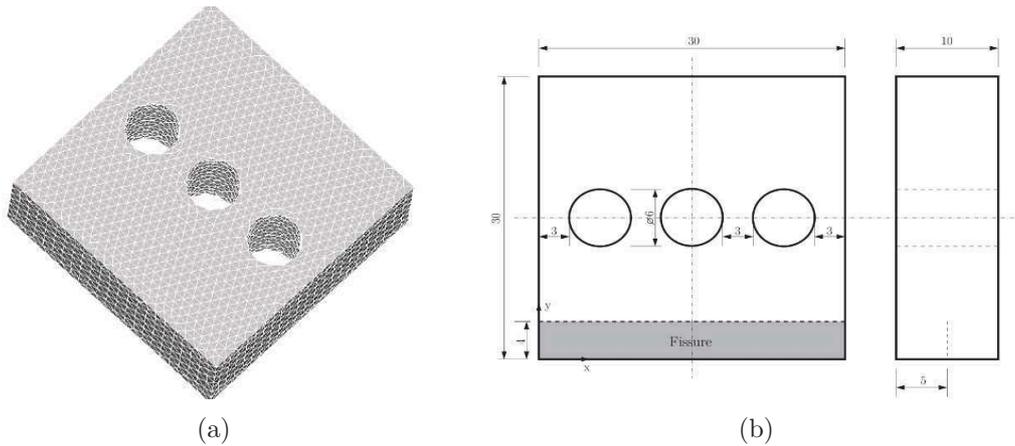


FIGURE 2.8 – Géométrie de la structure d’un test de propagation avec la méthode X-FEM.

pratique, la *fast marching method* calcule plusieurs fois la valeur de la *level set* pour un même nœud dans différentes configurations, c’est-à-dire pour différents simplexes. Ce processus permet d’attribuer au nœud la meilleure valeur possible, c’est-à-dire la valeur de la plus grande racine de l’équation (2.14) obtenue quand la condition de monotonie est satisfaite. En l’occurrence, les cas pathologiques se situent sur les bords de la structure où des nœuds peuvent se voir attribuer une valeur finale qui n’est pas la vraie distance signée mais qui est la valeur obtenue par la formule (2.22). Observons concrètement ce qui se passe sur un test de propagation plane d’une fissure se divisant et fusionnant avec la méthode X-FEM que l’on trouve dans la documentation de référence de `code_aster` [Col15]. On considère un parallélépipède de taille  $30 \times 30 \times 10$  mm qui présente trois trous et une fissure sur un de ses côtés, voir figure 2.8(b). Ce test est intéressant car la présence des trois trous de la structure permet de vérifier la robustesse de la réinitialisation des *level sets* sur une géométrie complexe.

Dans ce test on calcule une avancée de fissure à déplacement imposé  $\Delta a = 12$  mm le long du front. La fissure reste plane pendant la propagation et l’iso-zéro de la *level set* normale reste inchangée durant toute la simulation. L’intérêt dans ce cas, est de suivre l’évolution de la *level set* tangente dont l’iso-zéro est modifiée pour modéliser la nouvelle position du front de fissure à la fin de chaque pas de propagation. En observant la *level set* tangente réinitialisée par la *fast marching method* sur la figure (2.9), on remarque deux choses importantes :

- premièrement, ce test montre la capacité de la *fast marching method* à gérer des géométries complexes ;
- deuxièmement, on constate que la *level set* présente des défauts près des bords, voir figure 2.9(c). Ces défauts apparaissent pour les nœuds dont la valeur finale

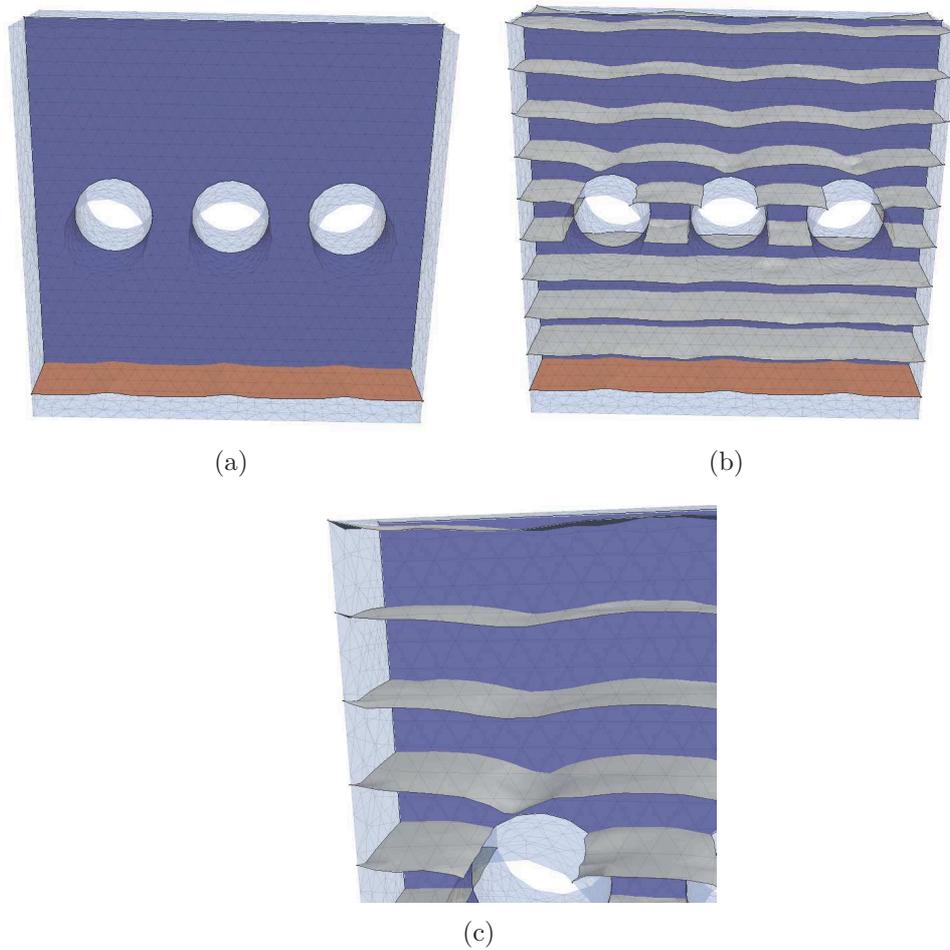


FIGURE 2.9 – (a) front de fissure représenté comme l’intersection des deux iso-zéros au deuxième pas de propagation, (b) différentes iso-valeurs de la *level set* tangente après deux pas de propagation et (c) un agrandissement de l’iso-zéro de la *level set* tangente près des bords.

est obtenue par la formule (2.22).

Nous proposons une amélioration pour résoudre ce problème et obtenir, pour des simulations 3D, une meilleure réinitialisation de la *level set*. Cette amélioration consiste à enrichir les choix possibles de l’équation (2.22) qui permettent d’attribuer une valeur de *level set* au nœud, dans le cas où la condition de monotonie n’est pas satisfaite. Pour ce faire, on remarque que les distances  $d_1 + \|\underline{x}_1 - \underline{x}_4\|$ ,  $d_2 + \|\underline{x}_2 - \underline{x}_4\|$  et  $d_3 + \|\underline{x}_3 - \underline{x}_4\|$  ne sont pas forcément les meilleurs choix pour attribuer une valeur à la *level set*. En effet, sur la figure 2.10, on représente une situation où le trajet le plus court entre le nœud  $i_4$  et le plan, et qui passe par la frontière du simplexe, n’est pas obtenu en passant par les arêtes du simplexe. Dans ce cas là, le trajet le plus court est représenté en vert sur la figure 2.10. Pour déterminer cette distance, on considère chaque triangle de chaque face du tétraèdre qui contient le nœud  $i_4$  et on calcule pour chacun de ces triangles

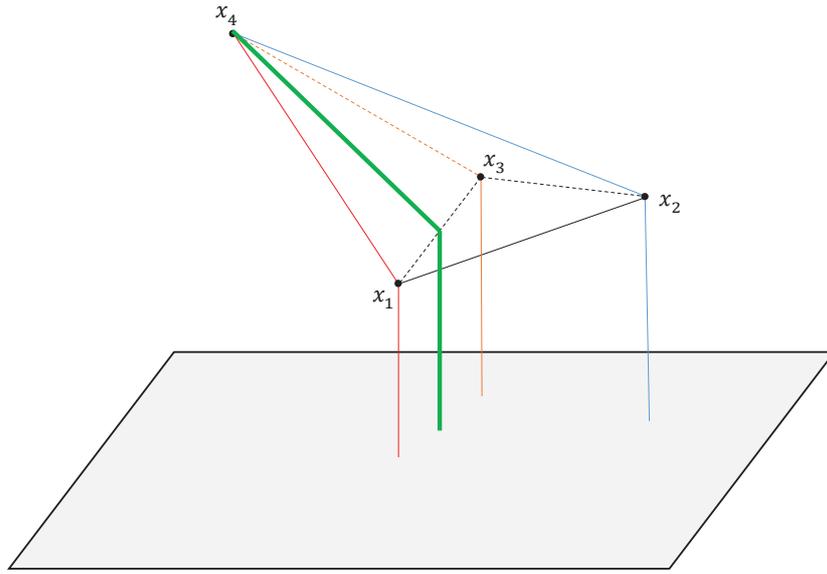


FIGURE 2.10 – En vert, le trajet le plus court du plan au nœud  $i_4$  pour un cas où la condition de monotonie n'est pas satisfaite.

une distance en appliquant la méthode suivante. Si on considère une face du tétraèdre dans l'espace 3D, voir figure 2.11, la distance de chaque nœud au plan est calculée par projection du nœud sur le plan :

$$\begin{cases} d_1 = \underline{x}_1 \cdot \underline{n} + c, \\ d_2 = \underline{x}_2 \cdot \underline{n} + c, \\ d_4 = \underline{x}_4 \cdot \underline{n} + c. \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$  est la normale au plan et  $c$  une constante. On écrit :

$$\begin{cases} d_1 - d_4 = (\underline{x}_1 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} \\ d_2 - d_4 = (\underline{x}_2 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} \end{cases} \iff \begin{cases} d_1 = (\underline{x}_1 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} + d_4, \\ d_2 = (\underline{x}_2 - \underline{x}_4) \cdot \underline{n} + d_4. \end{cases} \quad (2.24)$$

Le problème s'écrit sous forme matricielle :

$$\underline{d} = \underline{X} \cdot \underline{n} + d_4 \underline{I}, \quad (2.25)$$

où  $\underline{X} = [\underline{x}_1 - \underline{x}_4 \quad \underline{x}_2 - \underline{x}_4]^T \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ,  $\underline{d} = [d_1 \quad d_2]^T \in \mathbb{R}^2$  et  $\underline{1}_2 = [1 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $\underline{Q} = (\underline{X} \cdot \underline{X}^T)^{-1} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ .

Avec ces données, on résout l'équation (2.14) et on conserve la plus grande racine. Cette valeur, que l'on nommera  $d_{face}$ , est la distance qui représente le trajet le plus court du

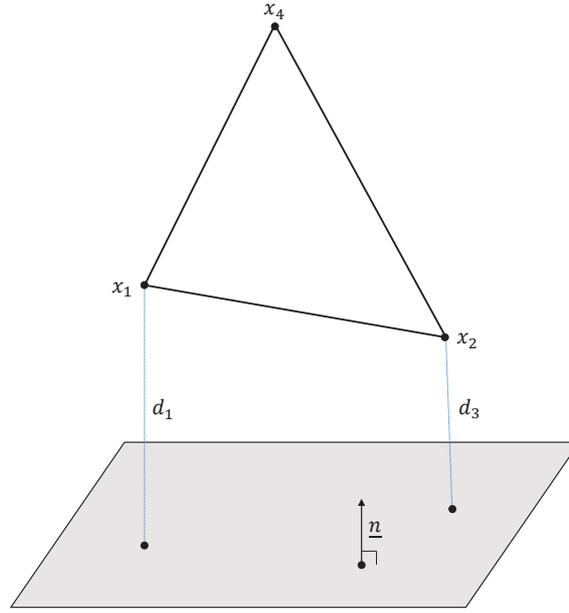


FIGURE 2.11 – Triangle dans un espace 3D.

noeud  $i_4$  au plan, en passant par la face du triangle :

$$d_{face} = \frac{\underline{\mathbf{1}}_2^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{d}} + \sqrt{\left(\underline{\mathbf{1}}_2^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{d}}\right)^2 - \underline{\mathbf{1}}_2^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\mathbf{1}}_2 \left(\underline{\underline{d}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{d}} - 1\right)}}{\underline{\mathbf{1}}_2^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\mathbf{1}}_2}. \quad (2.26)$$

On calcule donc pour chaque triangle de chaque face du simplexe, qui contient le noeud  $i_4$ , la valeur  $d_{face}$  et on conserve la plus petite.

Finalement, dans le cas où la condition de monotonie n'est pas satisfaite, on attribue à  $d_4$  la valeur suivante :

$$d_4 = \min \left\{ d_1 + \|\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_4\|, d_2 + \|\underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{x}}_4\|, d_3 + \|\underline{\mathbf{x}}_3 - \underline{\mathbf{x}}_4\|, d_{face} \right\}. \quad (2.27)$$

En observant de nouveau la réinitialisation de la level tangente (voir figure 2.12), on constate une nette amélioration de la régularité de la *level set* sur les bords et après le passage des trous.

## 2.4 Extension de la *fast marching method* à tous types de mailles

La *fast marching method* sur maillage simplexe s'avère efficace pour réinitialiser les *level sets* sur un maillage non structuré. Elle permet aussi de calculer pour tous les noeuds du maillage la valeur de la *level set*. L'usage de cette méthode est limité par

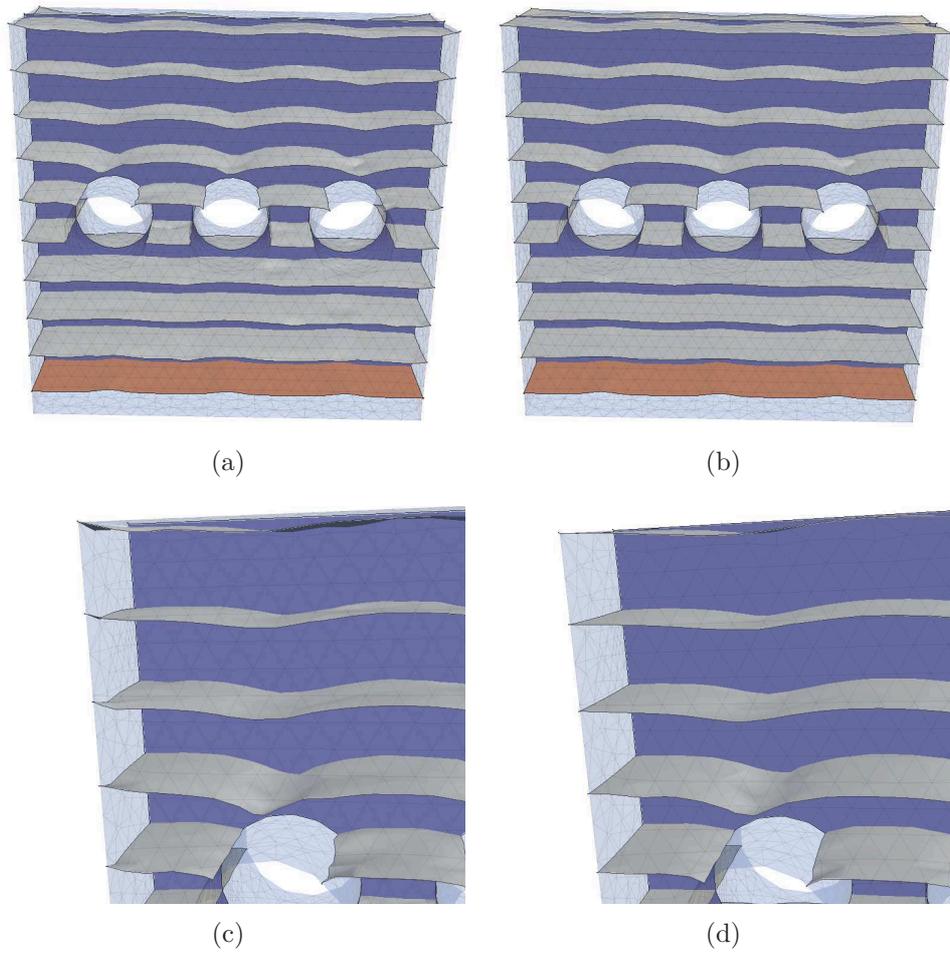


FIGURE 2.12 – (a) et (c) représentent la réinitialisation de la *level set* tangente avec la condition (2.22). (b) et (d) représentent la réinitialisation de la *level set* tangente avec la condition (2.27).

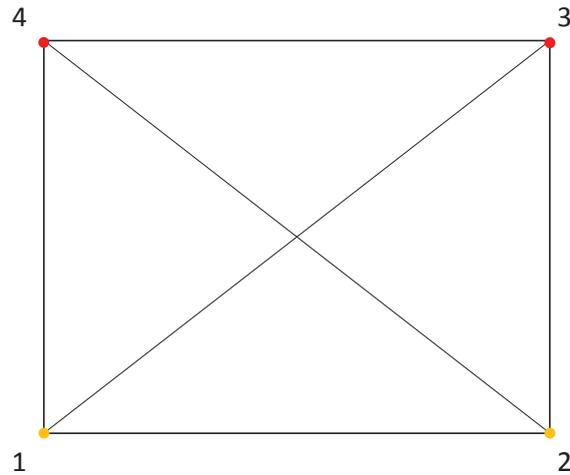


FIGURE 2.13 – Découpage d’une maille carrée en sous-mailles triangles. Les nœuds oranges représentent les valeurs de *level sets* connus et les nœuds rouges, les valeurs de *level sets* à déterminer.

le fait qu’elle se limite exclusivement aux mailles tétraèdres en 3D et triangles en 2D. Pour l’utiliser sur tous types de mailles, nous proposons une technique de découpe des éléments en éléments simplexes.

### 2.4.1 Application sur maillage linéaire

L’idée est de découper une maille quelconque en mailles simplexes en construisant une connectivité qui permette la construction de sous-cellules dans la maille principale.

#### 2.4.1.1 Connectivité de la maille en 2D

En 2D, pour un maillage linéaire, le type de maille est restreint : une maille triangle sur laquelle la méthode fonctionne efficacement ou une maille rectangle sur laquelle on procède à un découpage en mailles triangles. La figure 2.13, représente les différentes possibilités de découpes de la maille principale en sous-mailles triangles. La connectivité utilisée pour représenter les sous-mailles est prise telle que  $abc$  signifie le triangle qui s’appuie sur les nœuds  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On constate, pour ce cas-là, qu’il est possible de construire quatre mailles triangulaires munies de la connectivité suivante.

$$tab_{SE} = \begin{bmatrix} 123 \\ 124 \\ 234 \\ 134 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Naïvement, on peut appliquer l'algorithme 3 pour toutes les sous-mailles de la maille principale et ainsi parcourir l'ensemble du maillage pour réinitialiser la *level set*. Le seul inconvénient de cette pratique est que l'on augmente sensiblement le nombre d'appels à l'algorithme 3 et donc par conséquent le temps CPU. Pour optimiser ce traitement, on identifie les nœuds pour lesquels une valeur de la *level set* a été calculée au préalable, les nœuds oranges sur la figure 2.13, et on effectue uniquement un calcul pour les triangles ayant au moins deux valeurs connues de la *level set*. D'après la figure 2.13, les deux seuls triangles respectant cette condition sont :

$$tab_{SE} = \begin{bmatrix} 123 \\ 124 \\ 234 \\ 134 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

En appliquant cette technique, l'algorithme de *fast marching* sur maillage simplexe est applicable à tout maillage en 2D.

#### 2.4.1.2 Connectivité de la maille en 3D

Le cas 3D est beaucoup plus complexe au vu du nombre de sous-mailles tétraèdres qu'il est possible de créer à partir d'une maille possédant plus de 5 nœuds. On distingue 4 types de mailles : les tétraèdres sur lesquels la méthode est applicable, les pyramides à 5 nœuds, les pentaèdres à 6 nœuds et les hexaèdres à 8 nœuds. Dans le cas de la pyramide présenté sur la figure 2.14, il est possible de créer 4 tétraèdres différents avec la connectivité suivante. La connectivité utilisée pour représenter les sous-mailles est prise telle que *abcd* signifie le tétraèdre qui s'appuie sur les nœuds *a*, *b*, *c* et *d*.

$$tab_{SE} = \begin{bmatrix} 1345 \\ 1235 \\ 1245 \\ 2345 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Il existe trois cas de figure différents :

- tous les nœuds de la base de la pyramide sont connus (voir figure (2.14(a))) et on cherche à déterminer la valeur de la *level set* au nœud {5}. Dans cette situation on effectue le calcul pour tous les tétraèdres de (2.30) et on conserve la valeur minimale,
- quatre nœuds de la pyramide sont connus mais ne forment pas sa base (voir figure (2.14(b))), par exemple {1, 2, 4, 5}, et on cherche à déterminer la valeur de la *level*

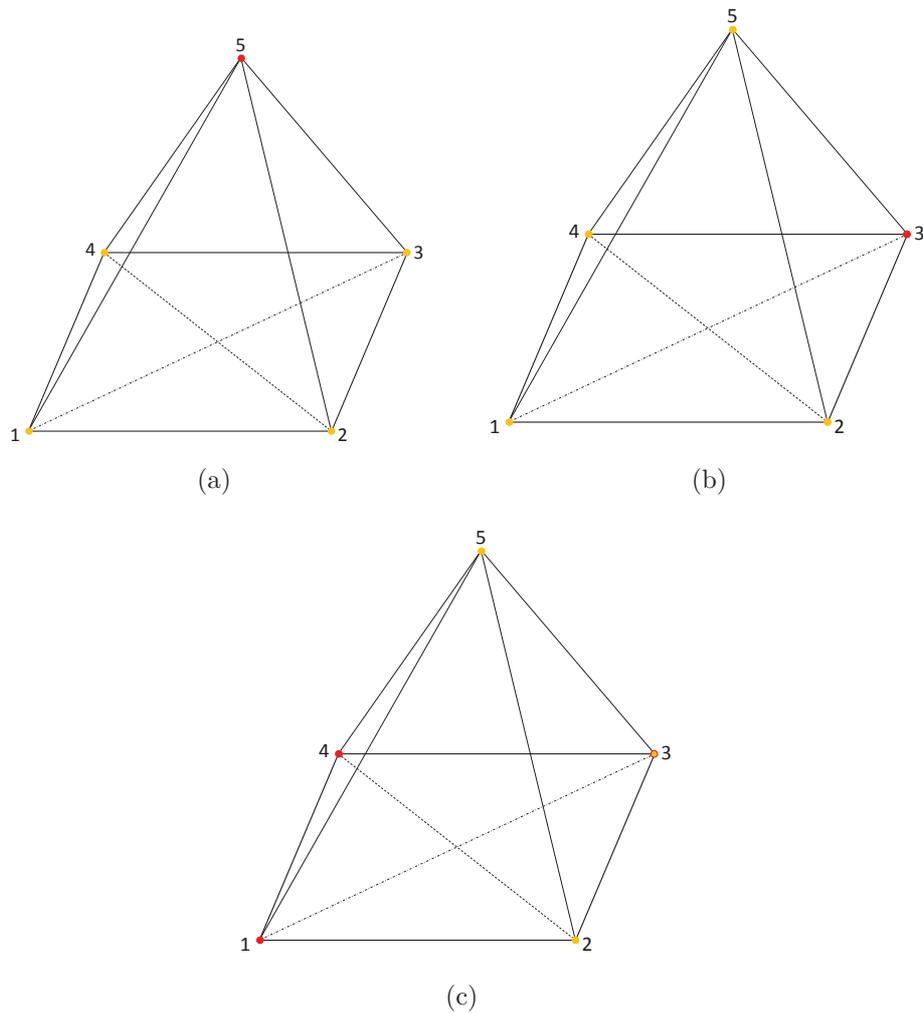


FIGURE 2.14 – Découpage d’une maille pyramide en sous-éléments tétraèdres. Les nœuds oranges représentent les valeurs de *level sets* connues et les nœuds rouges, les valeurs de *level sets* à déterminer.

*set* au nœud {3}. On restreint le calcul aux tétraèdres  $\{2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{1, 3, 4, 5\}$  et  $\{1, 2, 3, 5\}$  dans cette configuration,

- trois nœuds sont connus sur une des faces adjacente au nœud du sommet (voir figure (2.14(c))), par exemple  $\{2, 3, 5\}$  et on cherche à déterminer la valeur de la *level set* aux nœuds  $\{1, 4\}$ . Dans ce cas-là, on restreint le calcul aux tétraèdres  $\{1, 2, 3, 5\}$  et  $\{2, 3, 4, 5\}$ .

Pour le pentaèdre à six nœuds, la construction est plus compliquée car cette géométrie avec trois faces quadrilatérales adjacentes génère la construction de six pyramides (voir figure (2.15)), qui engendrent chacune quatre tétraèdres. On génère donc 24 tétraèdres dans un pentaèdre à six nœuds, mais il est possible d’éliminer certains cas redondants pour finalement obtenir douze tétraèdres. Dans (2.31), la première ligne représente

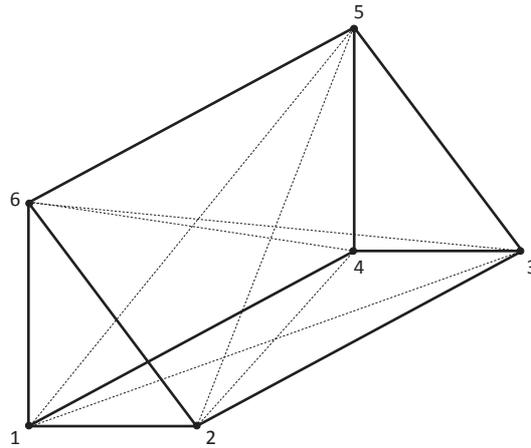


FIGURE 2.15 – Découpage d’une maille pentaèdre à six nœuds en sous-éléments pyramidaux.

les six pyramides du pentaèdre et les colonnes représentent les tétraèdres de chaque pyramide. L’utilisation des douze tétraèdres restants assure que la *fast marching method* est capable de calculer les valeurs des nœuds voisins quelle que soit la configuration, c’est-à-dire quels que soient les nœuds pour lesquels les valeurs de la *level set* sont connues.

$$tab_{SE} = \begin{bmatrix} 12345 & 12346 & 14562 & 14563 & 23564 & 23561 \\ \hline 1245 & 1246 & 1245 & 1345 & 1256 & 2456 \\ 1235 & 1236 & 1246 & 1346 & 1235 & 2345 \\ 2345 & 2346 & 1256 & 1356 & 1356 & 3456 \\ 1345 & 1346 & 2456 & 3456 & 1236 & 2346 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le dernier cas qui reste à traiter est l’hexaèdre, qui s’avère encore plus compliqué au vu du nombre de tétraèdres qu’il engendre. En effet, on constate qu’il est possible de construire douze pentaèdres à six nœuds (voir figure 2.16), qui engendrent chacun douze tétraèdres. Finalement, à partir des 12 pentaèdres, on construit un tableau de connectivité qui contient 144 tétraèdres. Bien évidemment, on ne parcourt pas l’ensemble du tableau pour chaque hexaèdre. Ce tableau sert juste à définir toutes les configurations possibles des tétraèdres dans une maille hexaèdre. Une fois que le minimum de la *level set* est localisé, on recherche les nœuds autour de ce minimum qui sont dans l’état connu ou inconnu, et à partir de ces données on choisit tous les tétraèdres du tableau qui permettent d’attribuer une valeur aux nœuds dans l’état inconnu.

Il est possible d’optimiser le tableau de connectivité en remarquant que le nombre de tétraèdres possibles dans un pentaèdre ou un hexaèdre est une combinaison de quatre nœuds parmi six ou huit nœuds moins les combinaisons qui engendrent des tétraèdres dégénérés. Pour le pentaèdre on retrouve le résultat de (2.31) en écrivant que

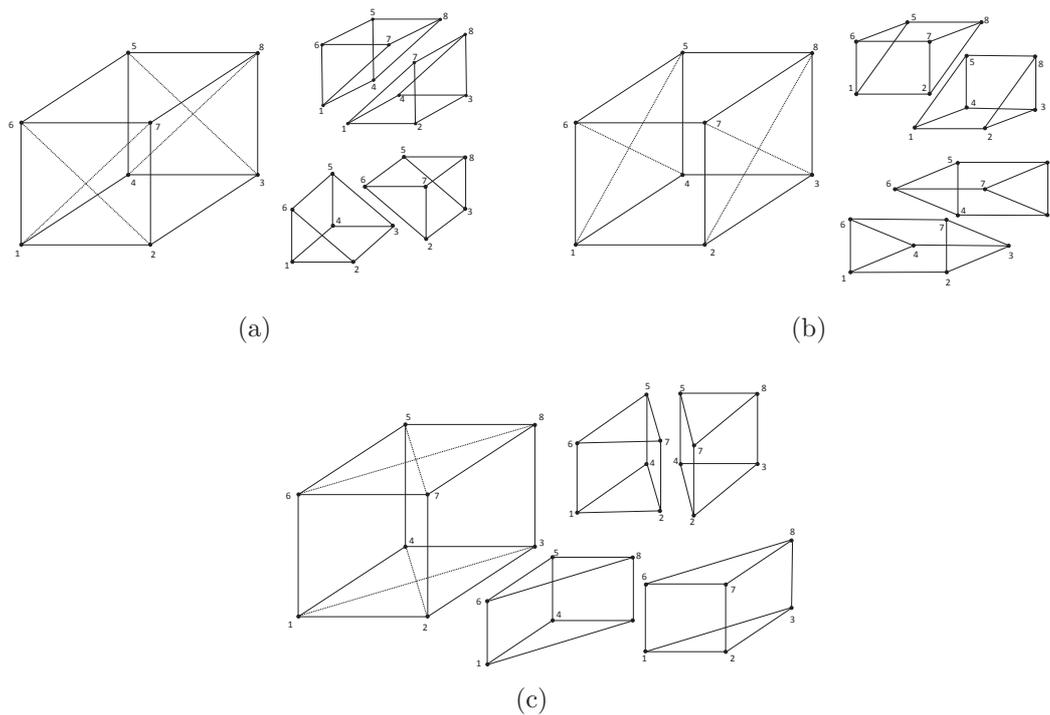


FIGURE 2.16 – Découpage d’une maille hexaèdre en sous-éléments pentaèdres.

$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$  tétraèdres, et en soustrayant les trois combinaisons qui génèrent les trois faces quadrilatérales du pentaèdre. Pour l’hexaèdre, on obtient  $C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$  tétraèdres, auxquels on soustrait les combinaisons qui engendrent les six faces et les six diagonales. Finalement, avec 58 tétraèdres on génère toutes les configurations possibles pour calculer les valeurs inconnues de l’hexaèdre. En pratique, les tables de connectivité des tétraèdres ne sont pas tabulées mais elles sont calculées dynamiquement.

### 2.4.2 Application sur maillage quadratique

Les résultats de la section précédente, qui permettent d’utiliser l’algorithme de *fast marching* sur tous types de mailles, laissent envisager une procédure similaire pour les éléments quadratiques. Initialement, la méthode X-FEM a été introduite dans le code\_aster pour des éléments linéaires suite aux travaux de thèse de Geniaut [Gen06 ; Gen07]. Par la suite, Siavelis [Sia11 ; Sia13] a proposé des critères pour limiter le conditionnement de la matrice de rigidité pour des éléments quadratiques et Ndeffo [Nde15 ; Nde17] a permis, au prix d’une modification des fonctions d’enrichissement, de lever plusieurs verrous numériques à l’utilisation des éléments quadratiques dans code\_aster, notamment les problèmes de conditionnement identifiés par [Lab05 ; Che13] qui limitaient fortement l’usage des éléments quadratiques.

Le travail de réinitialisation de la *level set* sur un maillage quadratique présenté ici dé-

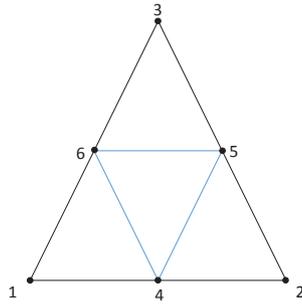


FIGURE 2.17 – Découpage d’un triangle à six nœuds.

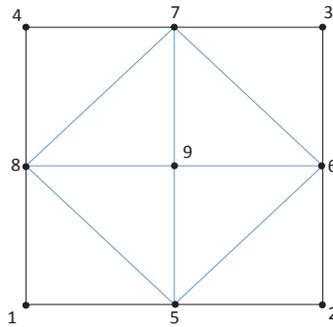


FIGURE 2.18 – Découpage d’un quadrangle à huit nœuds.

montre seulement la capacité de la méthode à identifier les nœuds milieux d’un élément quadratique afin de lui attribuer une valeur de distance signée. On propose une technique de découpe des éléments quadratiques qui a été réalisée avec Tiirats [Tii16] afin d’utiliser l’algorithme de *fast marching*. Les résultats sont validés sur différents tests de `code_aster`.

### 2.4.2.1 Cas 2D

Les éléments quadratiques sont caractérisés par l’ajout de nœuds milieux qui augmentent significativement le nombre de simplexes dans la maille principale. Afin de limiter le nombre de sous-éléments, des choix ingénieux de découpe sont faits pour éviter de traiter tous les cas. Nous présentons les choix effectués pour les différents éléments :

- la maille triangle à six nœuds est découpée en quatre triangles à trois nœuds (*cf.* figure 2.17),
- la maille rectangle à huit nœuds est découpée en huit triangles (*cf.* figure 2.18). Cette configuration nécessite d’introduire un nœud supplémentaire, auquel une valeur de *level set* est attribuée pendant le processus de réinitialisation. Ce nœud est éliminé à la fin du processus de réinitialisation,

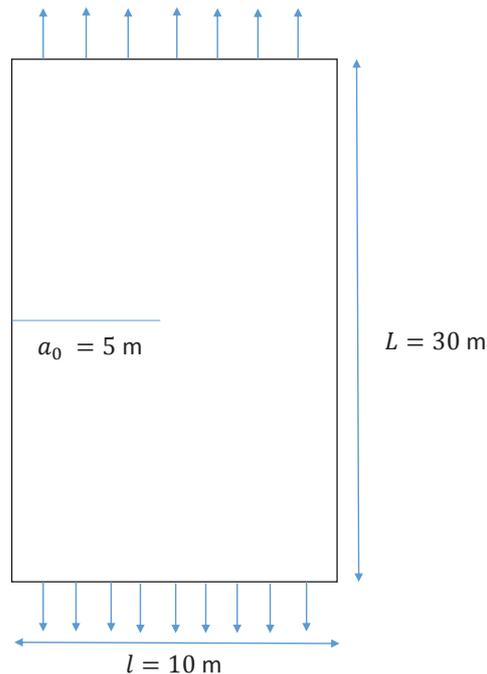


FIGURE 2.19 – Géométrie de référence pour le test de la propagation d’une fissure sollicitée en mode I, en 2D (d’après [Cod15]). Une traction est imposée sur la face supérieure et sur la face inférieure.

Module de Young	$E = 205000\text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$

TABLE 2.2 – Paramètres matériau

#### 2.4.2.2 Propagation d’une fissure X-FEM débouchante sollicitée en mode I, dans un espace 2D

Ce test présenté dans la documentation de référence code\_aster [Cod15], simule le trajet d’une fissure X-FEM 2D et compare les valeurs des facteurs d’intensité de contrainte obtenues numériquement avec les valeurs analytiques obtenues dans [Tad00]. La structure se compose d’une plaque rectangulaire de largeur  $l = 10\text{ m}$  et de longueur  $L = 30\text{ m}$ , comportant une fissure débouchante de longueur initiale  $a_0 = 5\text{ m}$ , voir figure 2.19. Le chargement consiste à appliquer une traction  $t = 106\text{ Pa}$  répartie sur les faces supérieure et inférieure. Le tableau 2.3 présente pour chaque pas de propagation l’erreur relative de  $K_I$ . On remarque deux choses : premièrement, la réinitialisation de la *level set* avec les éléments quadratiques est précise car on obtient moins de 1% d’erreur avec les triangles à 6 nœuds et les quadrangles à 8 nœuds. Deuxièmement, les résultats obtenus avec les éléments quadratiques sont plus précis que ceux obtenus avec les éléments linéaires, même pour un cas de fissure droite, en propagation plane.

Erreur relative de $K_I$ exprimée en %				
Pas de propagation	TRIA3	TRIA6	QUAD4	QUAD8
1	0.6223	0.3229	0.2257	0.1817
2	0.6210	0.0772	0.1292	0.0813
3	0.4806	0.0889	0.0055	0.0531
4	0.7748	0.1298	0.1496	0.1954
5	0.2492	0.1661	0.2784	0.3332
6	0.3036	0.5763	0.3684	0.4242
7	0.2906	0.4602	0.4029	0.4696
8	0.8785	0.2991	0.3729	0.4461
9	0.5297	0.0735	0.2810	0.3553
10	0.8604	0.2905	0.1417	0.2142
11	1.0204	0.0135	0.0167	0.0686
12	1.8616	0.2946	0.1521	0.0603
13	1.3707	0.4746	0.2083	0.0963
14	1.5136	0.1069	0.1143	0.0096

TABLE 2.3 – Erreur relative de  $K_I$  obtenue à chaque pas de propagation pour des éléments linéaires triangles (TRIA3) et quadrangles (QUAD4) et des éléments quadratiques triangles (TRIA6) et quadrangles (QUAD8).

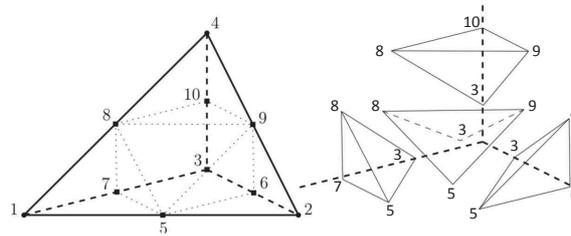


FIGURE 2.20 – Découpage d'un tétraèdre à dix nœuds.

### 2.4.2.3 Cas 3D

Obtenir un découpage optimal dans le cas tridimensionnel est plus complexe que dans le cas bidimensionnel, pour les éléments linéaires. Cette complexité augmente pour les éléments quadratiques. Nous proposons un découpage des éléments quadratiques qui permet la création d'un tableau de connectivité nécessaire à l'utilisation de l'algorithme de *fast marching method*. Les choix proposés ne sont pas nécessairement optimaux mais ils permettent de démontrer la capacité de la méthode à gérer tous types de mailles. Ici on s'intéresse au tétraèdre à dix nœuds, à la pyramide à treize nœuds, au pentaèdre à quinze nœuds et à l'hexaèdre à vingt nœuds.

- Le tétraèdre est découpé en sept éléments simples, trois proviennent des sommets et quatre du bloc central  $\{3, 6, 5, 7, 8, 9, 10\}$  qui est divisé en quatre tétraèdres, voir figure 2.20.

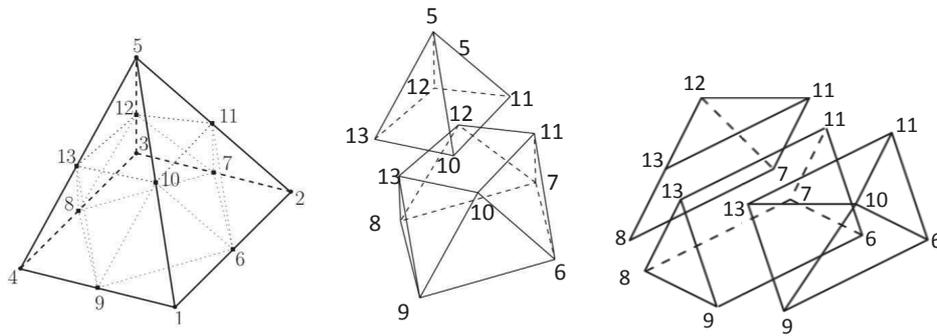


FIGURE 2.21 – Découpage d’une pyramide à treize nœuds.

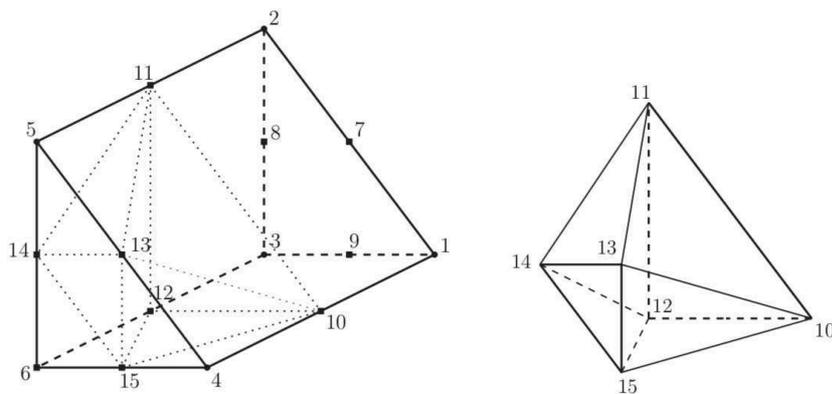


FIGURE 2.22 – Découpage d’un pentaèdre à quinze nœuds.

- La pyramide est découpée de la façon suivante : quatre tétraèdres provenant des sommets de la base (*i.e.* les nœuds 1, 2, 3 et 4), quatre tétraèdres qui sont formés à partir de la pyramide adjacente au sommet (*i.e.* le nœud 5). Le bloc restant est découpé en deux pyramides et un pentaèdre, voir figure 2.21.
- Le pentaèdre est découpé en deux parties égales. À partir de chaque partie on obtient trois tétraèdres provenant des sommets (*e.g.* les nœuds 4, 5, et 6). Le bloc restant est décomposé en douze tétraèdres, voir figure 2.22.
- L’hexaèdre est découpé en huit tétraèdres provenant des huit sommets (*i.e.* les nœuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8), seize tétraèdres sont construits à partir des quatre pyramides présentées sur la figure 2.23. Il reste un bloc à huit nœuds que nous traitons comme un hexaèdre linéaire.

#### 2.4.2.4 Propagation plane d’une fissure X-FEM débouchante, dans un espace 3D

On présente un test de propagation plane d’une fissure 3D débouchante avec X-FEM. La structure de hauteur  $H = 18$  m, de largeur  $L = 8$  m et d’épaisseur  $E = 1$  m, comporte une fissure débouchante de longueur initiale  $a_0 = 2$  m, voir figure 2.24. Le

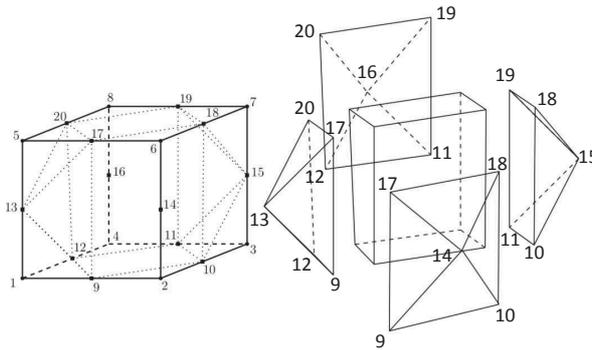


FIGURE 2.23 – Découpage d’un hexaèdre à vingt nœuds.

Module de Young	$E = 205000 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$

TABLE 2.4 – Paramètres matériau

chargement consiste à appliquer une traction  $t = 1 \text{ MPa}$  répartie sur les faces supérieure et inférieure. Ce test a été validé pour des éléments linéaires, qualitativement, par comparaison des positions du front de fissure après trois pas de propagation obtenues par la *fast marching method* et par une autre méthode disponible dans `code_aster` et utilisée comme référence pour ce test (*cf.* [Cod11a]). Pour valider la réinitialisation de la *level set* sur un maillage quadratique on compare la valeur de la *level set* obtenue sur différents nœuds, à la fois pour un maillage linéaire et pour un maillage quadratique. Les tableaux 2.5 et 2.6 présentent les résultats obtenus pour un maillage composé :

- d’hexaèdres linéaires (HEXA8),
- d’hexaèdres quadratiques (HEXA20),
- de pentaèdres linéaires (PENTA6),
- de pentaèdres quadratiques (PENTA15).

Trois nœuds sont identifiés sur les deux maillages, qui ne se trouvent pas à la même position entre le maillage hexaédrique et le maillage pentaédrique, dans le but de comparer la valeur de la *level set* après trois pas de propagation et donc trois réinitialisations consécutives. Pour chaque type de support géométrique, on constate que les résultats du maillage linéaire et ceux du maillage quadratique concordent, ce qui permet de valider l’algorithme pour les éléments quadratiques.

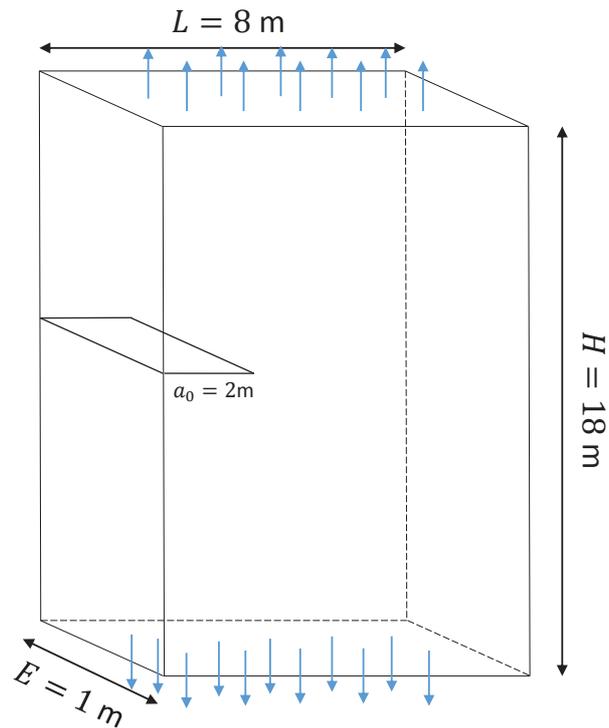


FIGURE 2.24 – Géométrie de référence pour le test de la propagation d’une fissure sollicitée en mode I, en 3D (cf. [Cod11a]).

nœud	<i>level set</i>	HEXA8	HEXA20
1130	$\Phi_n$	2.5E-01	2.5006E-01
1130	$\Phi_t$	2.667E-01	2.6675E-01
1028	$\Phi_n$	5.0E-02	5.0060E-02
1028	$\Phi_t$	2.667E-01	2.66684E-01
926	$\Phi_n$	1.5E-01	1.4994E-01
926	$\Phi_t$	2.667E-01	2.66615E-01

TABLE 2.5 – Comparaison entre les valeurs de la *level set* obtenues avec un maillage linéaire composé d’hexaèdres (HEXA8) et les valeurs de la *level set* obtenues avec un maillage quadratique composé d’hexaèdres (HEXA20).

nœud	<i>level set</i>	PENTA6	PENTA15
1130	$\Phi_n$	7.85E+00	7.8500E+00
1130	$\Phi_t$	-1.533E+00	-1.5395E+00
1028	$\Phi_n$	7.25E+00	7.2507E+00
1028	$\Phi_t$	2.20E+00	2.1931E+00
926	$\Phi_n$	5.45E+00	5.4500E+00
926	$\Phi_t$	-1.80E+00	-1.8051E+00

TABLE 2.6 – Comparaison entre les valeurs de la *level set* obtenues avec un maillage linéaire composé de pentaèdres (PENTA6) et les valeurs de la *level set* obtenues avec un maillage quadratique composé de pentaèdres (PENTA15).

Module de Young	$E = 205000 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$

TABLE 2.7 – Paramètres matériau

## 2.5 Résultats

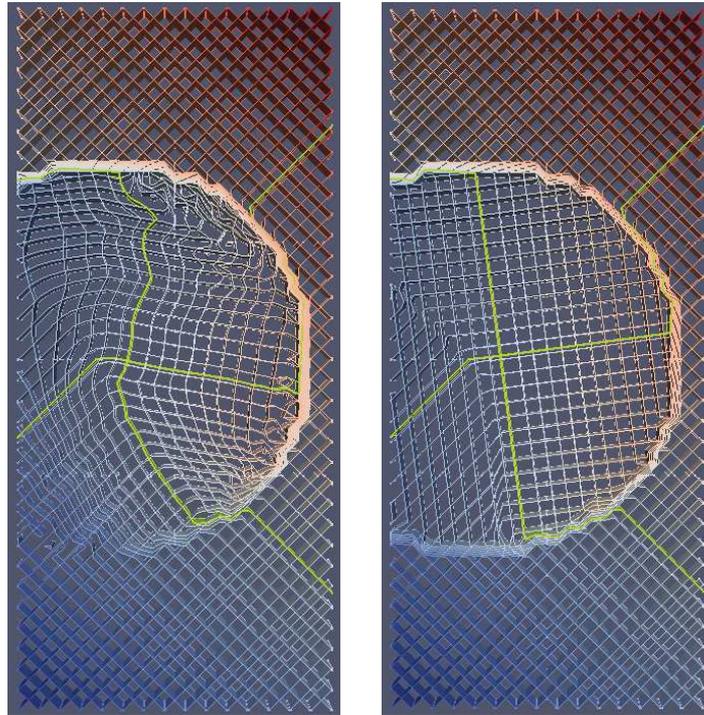
Les nouvelles approches présentées dans ce travail sont une alternative efficace aux méthodes de résolution *upwind* et « simplexe » et permettent de s’affranchir de la condition CFL, qui peut rapidement augmenter le nombre de pas de temps et par conséquent le temps CPU. Dans un premier temps, nous avons mis en place une méthode fondée sur la *fast marching method* applicable uniquement aux maillages structurés et nous avons montré sa robustesse par rapport aux méthodes de résolution *upwind* et « simplexe ». Par la suite, nous avons proposé une méthode de réinitialisation des *level sets* conçue pour un maillage composé d’éléments simplexes, que nous avons étendue à tous types de mailles. Nous proposons d’étudier différents cas afin de comparer les résultats obtenus par la *fast marching method* et ceux obtenus avec les autres méthodes disponibles dans `code_aster`.

### 2.5.1 Propagation non plane d’une fissure débouchante

Afin d’examiner les performances de la réinitialisation des *level sets* sur un cas plus complexe, un test de propagation d’une fissure non plane débouchante avec la méthode X-FEM est présenté. Dans ce cas, contrairement aux tests de propagation plane présentés jusqu’à présent, l’iso-zéro de *level set* normale évolue au cours de la propagation.

La structure de hauteur  $H = 18 \text{ m}$ , de largeur  $L = 8 \text{ m}$  et d’épaisseur  $E = 1 \text{ m}$ , comporte une fissure débouchante initialement orientée à  $45^\circ$ , voir figure 2.25. Le chargement consiste à appliquer une traction  $t = 1 \text{ MPa}$  répartie sur les faces supérieure et inférieure. Compte tenu de la symétrie du chargement appliqué et de l’inclinaison initiale de la fissure, on observe une fissure qui revient dans le plan horizontal et se propage en mode I comme observé sur la figure 2.26. La zone de calcul est restreinte à un tore centré autour du front de fissure, afin de réduire la zone où la *level set* est réinitialisée. En examinant la figure 2.27, on constate que la méthode « simplexe » fournit un champ de *level set* chahuté qui se dégrade au cours de la propagation. À l’inverse, la méthode géométrique de Colombo [Col12a] et la *fast marching method* permettent d’obtenir un champ régulier. On démontre, sur un cas complexe, l’efficacité de la méthode mise en place.





(a) Méthode « simplexe ».

(b) Méthode géométrique.

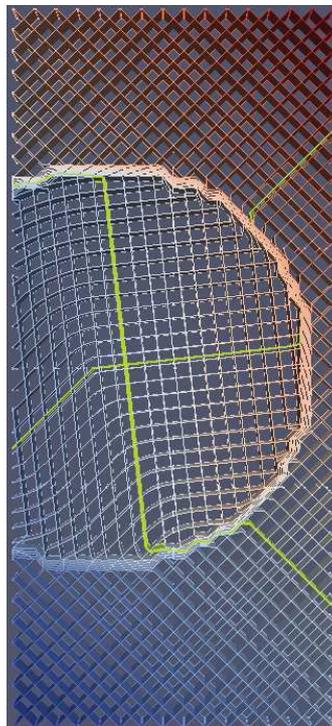
(c) *Fast marching method.*

FIGURE 2.27 – Visualisation du champ de *level set* après propagation et réinitialisation par différentes méthodes. Les deux iso-zéros des *level sets* sont représentés en vert.

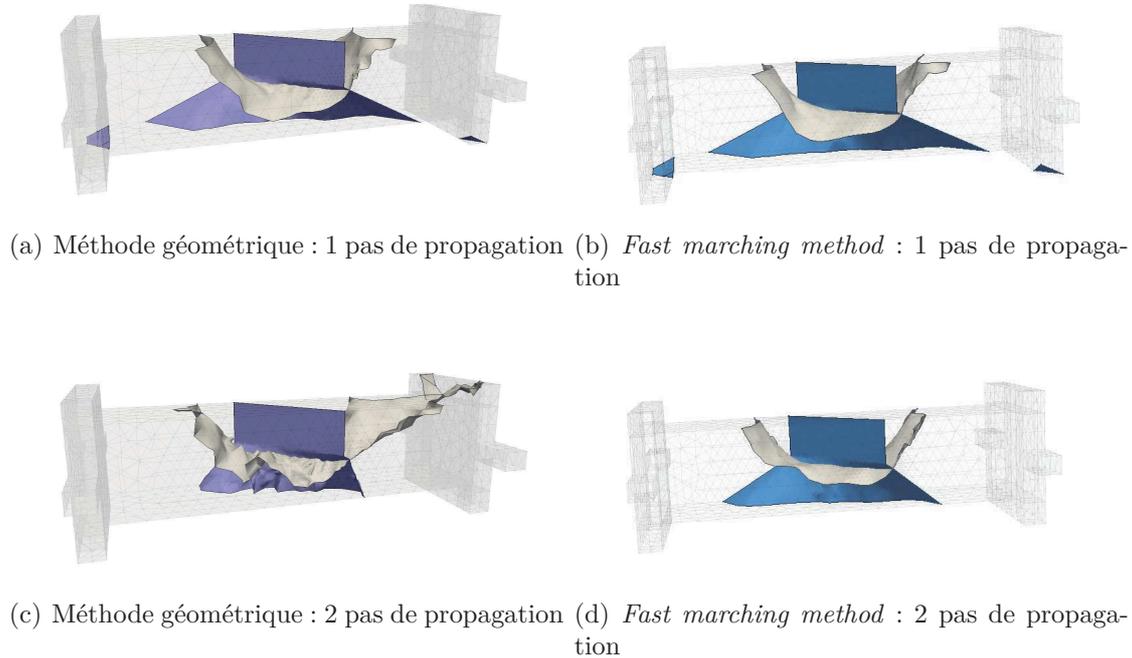


FIGURE 2.28 – Visualisation des *level sets* au cours de la propagation. En violet, la *level set* normale et, en gris, la *level set* tangente.

## 2.5.2 Test Brokenshire

On constate que la méthode géométrique et la *fast marching method* sont efficaces pour la réinitialisation de la *level set* sur les tests de propagation disponibles dans `code_aster`. Ces tests permettent de qualifier les méthodes et vérifier leur robustesse sur différentes configurations afin d'envisager une restitution dans le code industriel `code_aster`. En revanche, l'étape de validation sur une base de cas tests ne mesure pas la robustesse de la méthode, vis-à-vis d'études industrielles plus complexes, à l'exemple du test de rupture en torsion sur béton présenté en dans la section 1.3.2. En simulant de nouveau la propagation de fissure dans le bloc de béton, et en comparant les résultats obtenus, avec la *fast marching method*, avec ceux de la méthode géométrique, on remarque que les iso-zéros des *level sets* au deuxième pas de propagation sont plus régulières avec la *fast marching method*, voir figure 2.28. Dans cette étude, le calcul avec la *fast marching method* permet de propager la fissure jusqu'à rupture totale de la pièce comme on peut l'observer sur la figure 2.29. La comparaison des faciès de rupture observés numériquement et expérimentalement, voir figure 2.30, montre une bonne concordance du trajet de fissuration et valide qualitativement les résultats.

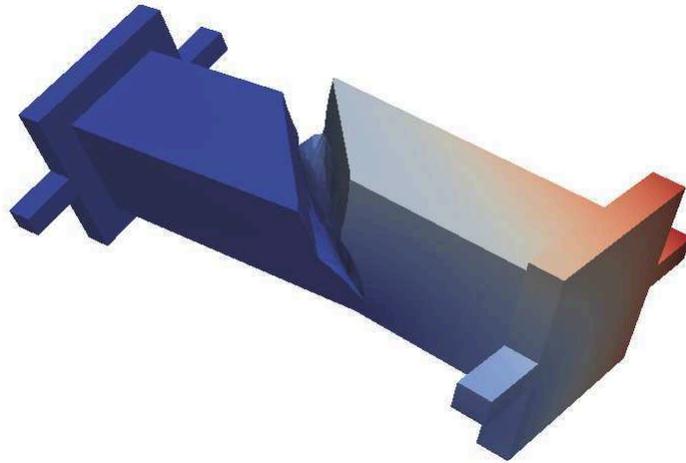


FIGURE 2.29 – Configuration obtenue à la fin de la propagation, après rupture totale de la pièce.

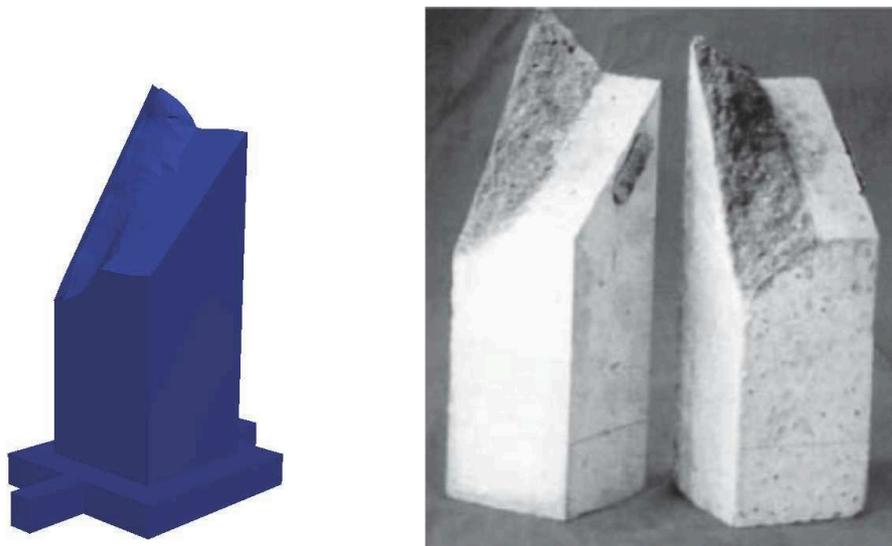


FIGURE 2.30 – Faciès de rupture obtenus pour le modèle numérique et le modèle expérimental.

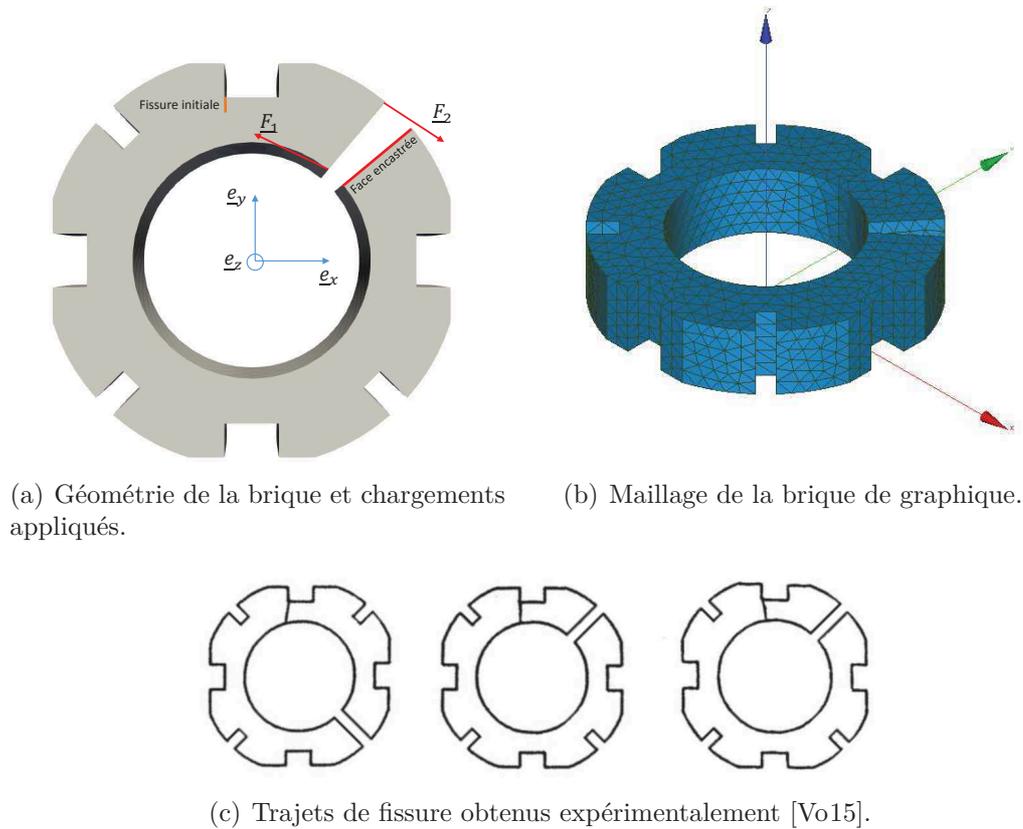


FIGURE 2.31 – Étude de la fissuration plane dans la brique.

### 2.5.3 Propagation de fissures dans une brique de graphite

Nous présentons dans cette partie quelques exemples de propagation de fissures dans les briques de graphite avec l'utilisation de la méthode X-FEM et de la *fast marching method* pour la réinitialisation des *level sets*. Ces tests sont tous issus d'applications industrielles mais sont simplifiés car ils ne prennent en compte ni les effets thermiques, ni le vieillissement du matériau. Ils font partie d'un ensemble de test menés par le UKC dans le cadre des études d'EDF Energy sur la prolongation de durée de vie des centrales AGRs. On peut trouver quelques exemples de ces études dans les documents suivants [Vo15; Deg16].

#### 2.5.3.1 Propagation d'une fissure plane dans une tranche de brique de graphite

La structure 3D représente une tranche de brique d'épaisseur 10 cm, comme dans les expériences réalisées de [Vo15], voir figure 2.31(c). La brique est encastree sur une face et des forces linéiques sont appliquées dans l'épaisseur telles que  $\underline{F}_1 = (0.766\text{N}, 0.643\text{N})$  et  $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$ , voir figure 2.31(a). La pièce est maillée en tétraèdres, voir figure 2.31(b).

Dans cette étude, pour mailler suffisamment fin autour du front de fissure, une procédure de remaillage disponible dans le code\_aster est utilisée. Pour plus d'informations le lecteur pourra se référer à la documentation de l'outil Homard [Cod]. Les paramètres matériau sont  $E = 9600$  MPa et  $\nu = 0.2$ . De plus, deux géométries de fissure sont étudiées : une fissure initiale à front droit qui traverse toute l'épaisseur de la pièce et une fissure initiale circulaire située dans un coin de la brique, voir figure 2.32. Les

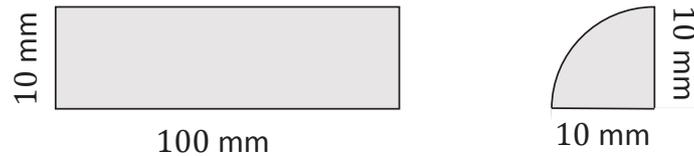


FIGURE 2.32 – Les deux formes de fissures initiales considérées.

résultats obtenus avec code\_aster sont validés de manière qualitative par rapport aux expériences et le principal intérêt ici est de simuler une propagation qui respecte le trajet de fissuration observé expérimentalement et qui est robuste, au sens où on est capable de simuler la propagation jusqu'à rupture complète. Pour la fissure à front droit, le trajet de fissuration est représenté sur la figure 2.33. Celui-ci reste conforme au trajet de fissure obtenu expérimentalement. Cette étude valide le cas d'une fissure plane à front droit. Dans le cas de la fissure circulaire, où la surface de la fissure au cours de la propagation est présentée sur la figure 2.34, on observe un trajet de fissure cohérent avec les résultats expérimentaux. Cependant, on note une légère déviation de la fissure en cours de la propagation. Cette déviation provient de l'angle de branchement, déterminé à partir des facteurs d'intensité de contrainte, et n'est pas négligeable.

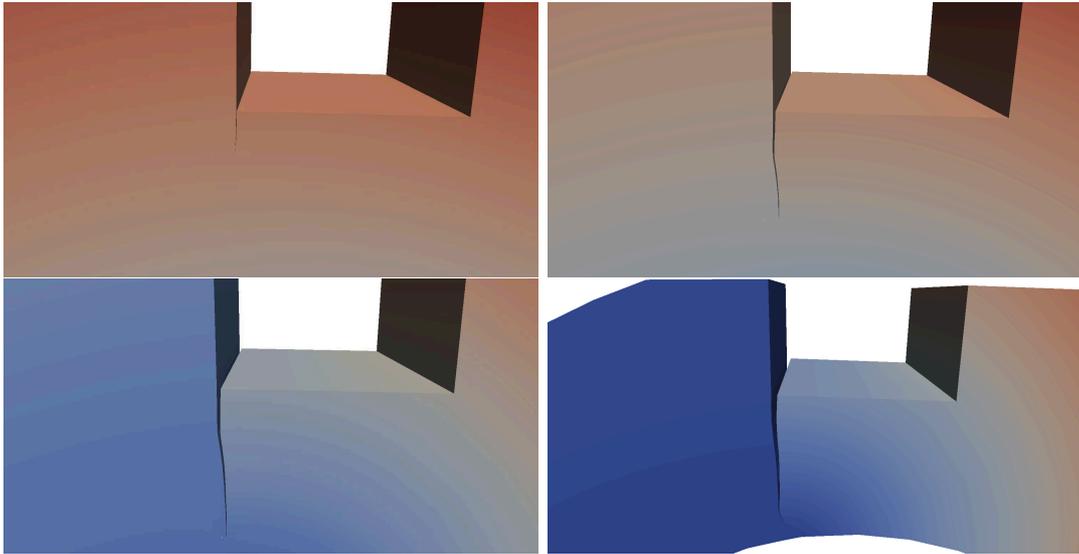


FIGURE 2.33 – Propagation de la fissure, en partant de la fissure à front droit.

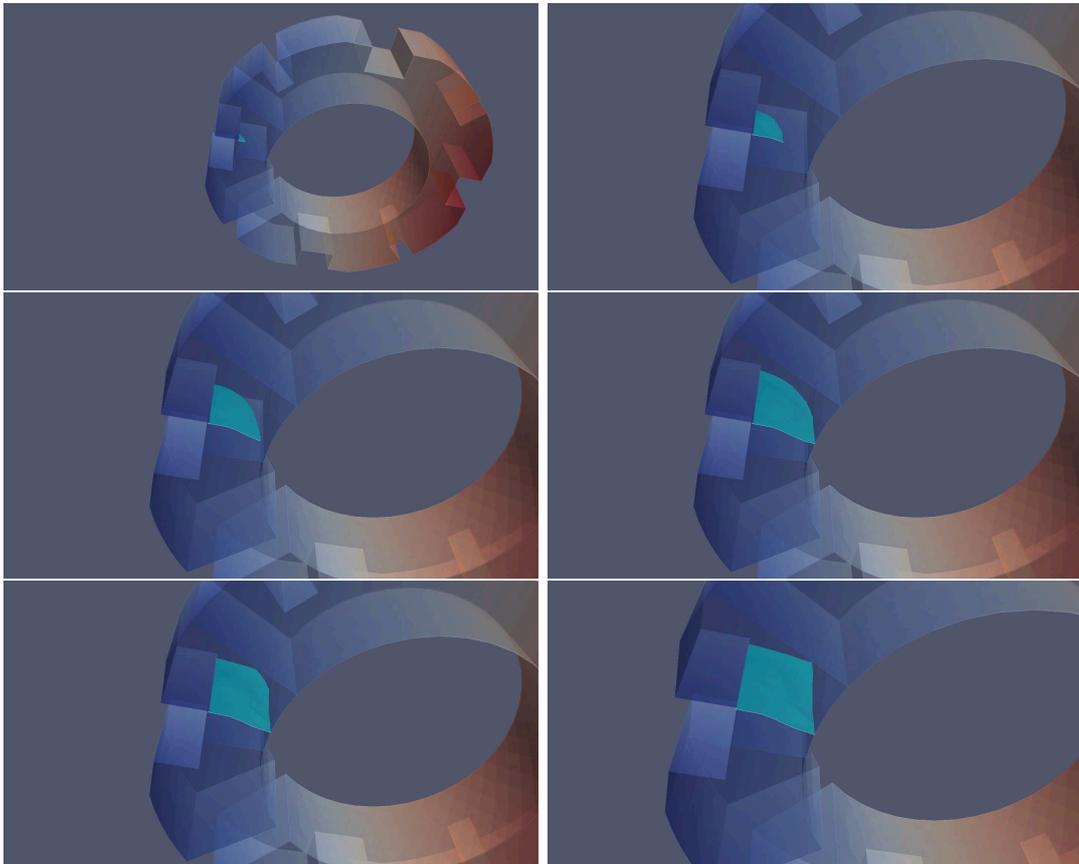
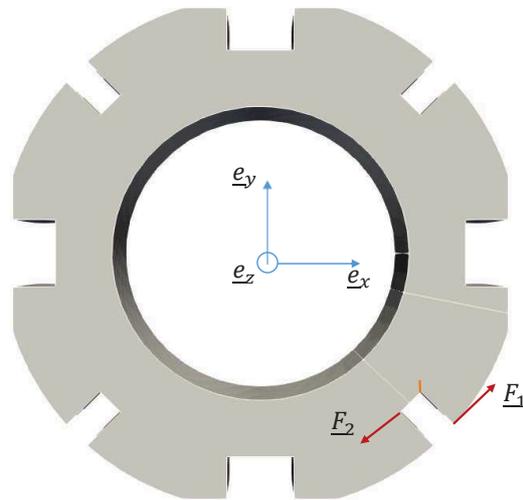
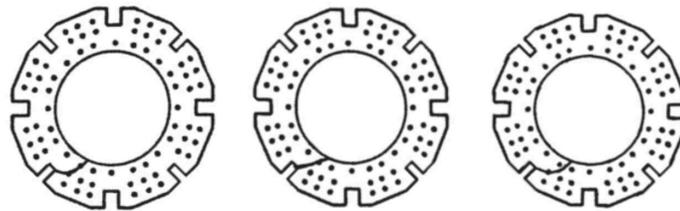


FIGURE 2.34 – Propagation d’une fissure, en partant de la fissure de forme circulaire.



(a) Design de la brique et chargements.



(b) Chemin de fissure expérimentale [Vo15].

FIGURE 2.35 – Étude de la fissuration non-plane dans la brique de graphite.

### 2.5.3.2 Propagation d'une fissure non-plane dans une tranche de brique de graphite

On simule ici une propagation de fissure dans une brique de graphite en utilisant les mêmes paramètres matériau que dans le test précédent. Les forces linéiques sont appliquées dans l'épaisseur telles que  $\underline{F}_1 = (2.8\text{N}, 3.2\text{N})$  et  $\underline{F}_2 = (-1.4\text{N}, -1.1\text{N})$ , voir figure 2.35(a). La fissure subit une déviation comme celle observée expérimentalement et présentée sur la figure 2.35(b) pour différents essais. On vérifie que la trajectoire obtenue numériquement est proche de celle des résultats expérimentaux, et que la simulation permet de propager la fissure jusqu'à l'autre bord de la pièce, voir figure 2.36.

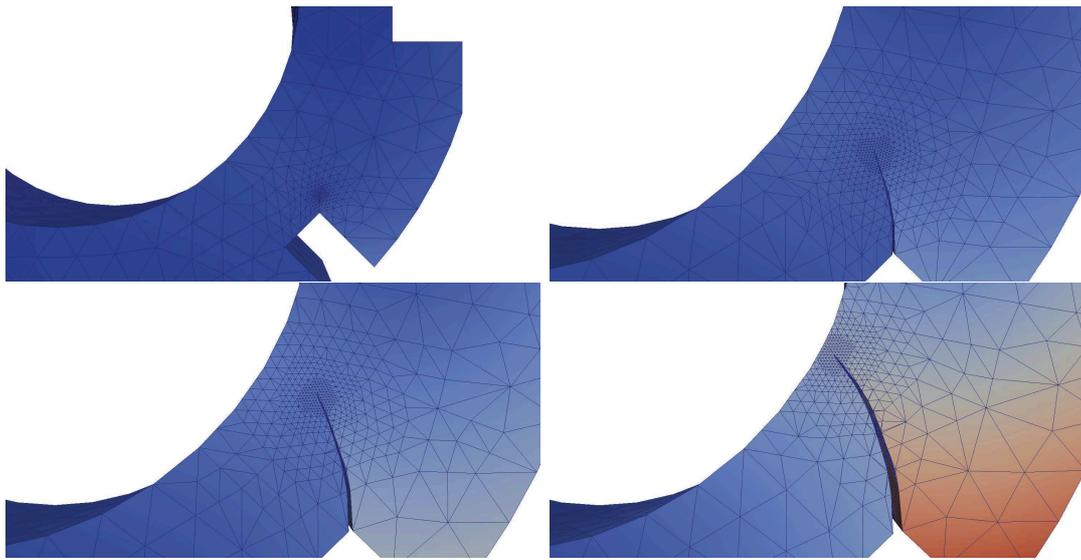


FIGURE 2.36 – Propagation d’une fissure non-plane dans la brique de graphite.

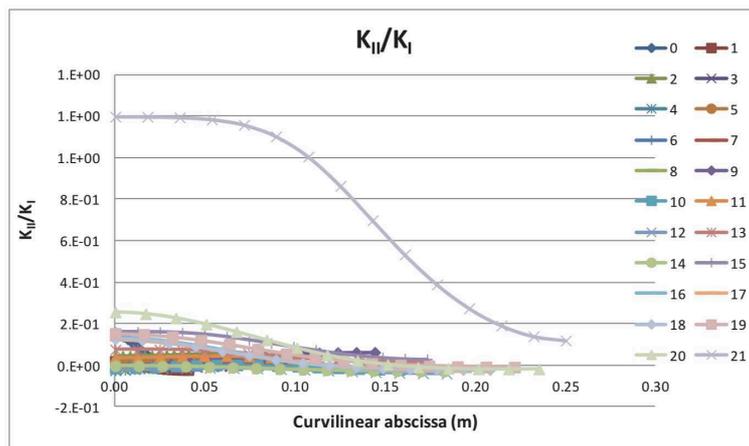
## 2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons mis en place deux méthodes de réinitialisation des *level sets* fondées sur la *fast marching method*. La première méthode utilise les différences finies pour calculer les valeurs de la *level set* sur un maillage structuré. Son utilisation est possible sur maillage non structuré, à condition d’utiliser un maillage auxiliaire pour effectuer les calculs. De plus, sa validation sur différents tests a permis de constater son efficacité et sa robustesse. La deuxième méthode utilise un processus géométrique pour calculer les valeurs de la *level set* dans un élément simplexe. Son utilisation a été étendue à tous types de mailles linéaires et quadratiques, ce qui la rend utilisable avec toutes les modélisations disponibles dans `code_aster`. Les deux méthodes ont été implémentées dans le `code_aster` à la place des méthodes *upwind* et « simplexe ». La restitution d’une méthode numérique dans un code industriel est un processus compliqué, où les contraintes en termes d’architecture et de validation prennent un temps important mais sont nécessaires à la pérennisation du code. Les méthodes sont disponibles et utilisables par l’ingénierie et ont permis d’améliorer les études de propagation de fissures dans les briques de graphite avec l’utilisation de la méthode X-FEM. En effet, au début de ce travail, l’utilisation de la méthode X-FEM pour simuler la propagation de fissures dans les briques de graphite n’était pas robuste et certaines études échouaient du fait que les *level set* se dégradent après quelques pas de propagation dans cette géométrie complexe et engendraient des erreurs numériques qui stoppaient le calcul prématurément. Les nouveaux développements fondés sur la *fast marching method* ont permis d’aller plus loin dans les études sur le graphite et les retours sur la méthode sont positifs. On peut noter, dans un rapport du UKC (*cf.*[Vo]), que la *fast marching method* a permis

de lever certains des problèmes de robustesse rencontrés avec la méthode géométrique. De plus, elle permet également la propagation à partir d'une fissure initiale de petite taille et les irrégularités sont réduites sur le profil en amont de la fissure. En revanche, d'autres études menées au UKC ont permis de constater des problèmes sur des structures très allongées. En reprenant l'étude de propagation de fissure plane présentée sur la figure 2.31(a), pour une brique d'épaisseur de 82,5 cm au lieu de 10 cm, le calcul s'arrête prématurément suite à une mauvaise évaluation des facteurs d'intensité de contrainte, qui entraîne une déviation de la fissure, voir figure 2.37(a). En regardant l'évolution du rapport  $\frac{K_{II}}{K_I}$  présentée sur la figure 2.37(b), on constate qu'il augmente au cours de la propagation. Quand ce rapport augmente, l'angle de bifurcation de la fissure augmente et la fissure dévie de son plan. Dans cette étude, le calcul du fait du chargement appliquée devrait donner une propagation plane avec seulement un mode I actif. Or, on remarque qu'un mode II parasite apparaît et entraîne une déviation non physique de la fissure. En revanche si on impose l'angle de bifurcation à zéro durant tout le processus, on simule parfaitement la propagation plane de la fissure sur toute la tranche de la brique, voir figure 2.37(c). On en conclut que dans le cas où un nombre important de pas de propagation sont effectués, une centaine pour cette étude, le cumul d'erreurs impacte l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte. Pour contrôler ce phénomène, il est primordial de disposer d'une méthode robuste et précise. Ce constat nous a amené à travailler sur les méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte disponibles et notamment la méthode  $G - \theta$  afin de proposer des améliorations dans l'optique de rendre les calculs plus robustes et précis.



(a) Propagation de fissure où l'angle  $\beta$  est calculé par le *maximum hoop stress criterion*.



(b) Évolution du rapport  $\frac{K_{II}}{K_I}$  en fonction de la longueur de la fissure, pour certaines étapes de propagation dans un brique de graphite complète.



(c) Propagation de fissure à angle  $\beta$  imposé à zéro.

FIGURE 2.37 – Étude de la propagation de fissure dans une brique allongée [Vo15 ; Vo].

# Méthode de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthode <math>G-\theta</math></b> . . . . .	<b>89</b>
3.1.1	Cas bidimensionnel . . . . .	90
3.1.2	Cas tridimensionnel . . . . .	93
3.1.3	Calcul du taux de restitution d'énergie sur un exemple de fissure droite en 3D . . . . .	99
3.1.4	Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode X-FEM108	
<b>3.2</b>	<b>Calcul numérique des facteurs d'intensité de contrainte</b> .	<b>111</b>
3.2.1	Forme bilinéaire du taux de restitution d'énergie . . . . .	113
3.2.2	Calcul des facteurs d'intensité de contraintes sur un problème de fissure droite 3D . . . . .	115
<b>3.3</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>118</b>

---

Le chapitre précédent a permis de rendre les calculs de propagation de fissures plus robustes avec la méthode X-FEM en améliorant la mise à jour des *level sets*, qui permettent de représenter la fissure de manière implicite dans le maillage. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au calcul du taux de restitution  $G$  et des facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Cette étape est très importante. En effet, d'une part, elle permet de réaliser une analyse de nocivité pour une fissure, en appliquant le critère de Griffith (*i.e.*  $G \leq G_c$ ) ou le critère d'Irwin (*i.e.*  $K_I \leq K_{Ic}$ , où  $K_{Ic}$  est la ténacité du matériau). Et d'autre part, lorsque la fissure se propage, elle permet de calculer les grandeurs qui servent à déterminer la vitesse et la direction de propagation de la fissure. Il est donc important d'obtenir une évaluation précise du taux de restitution d'énergie  $G$  et des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  pour simuler de manière rigoureuse la propagation de fissure. Et même si des solutions analytiques ou semi-analytiques, écrites pour un milieu infini sont disponibles dans [Tad00] et [Mur86], ces solutions ne sont applicables qu'à des géométries simples. Toutefois, ces géométries sont utilisées dans les calculs normatifs du RSE-M (Règles de Surveillance en Exploitation des Matériels Mécaniques des Ilots Nucléaires REP). Pour des géométries plus complexes, il faut donc avoir recours aux méthodes numériques pour calculer  $G$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Dans `code_aster`, deux approches sont utilisées pour calculer ces quantités. La première, qui a été présentée de manière succincte dans la section 1.1.4.3 est fondée sur l'exploitation des déplacements nodaux proches du front de fissure dans le but de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte. On peut ainsi déterminer le taux de restitution d'énergie  $G$  par l'application de la formule d'Irwin. Cette méthode a l'avantage d'être simple à implémenter dans un code de calcul mais elle s'avère aussi beaucoup moins précise que les méthodes énergétiques d'après les références suivantes [Zhu95; Ban10]. Elle nécessite aussi un maillage très fin au voisinage de la pointe de fissure, car les champs de déplacement ou de contraintes près de cette zone sont particulièrement difficiles à représenter du fait de la singularité des champs en front de fissure. De plus, travailler uniquement sur les facteurs d'intensité de contrainte restreint l'analyse aux structures élastiques, alors que le taux de restitution d'énergie est un concept plus général [Lor00] qui recouvre un plus large éventail d'applications d'intérêt pour EDF.

Dans ce chapitre, nous proposons dans un premier temps de présenter la méthode  $G-\theta$  et de l'appliquer sur un cas simple, mais pour lequel la solution analytique est connue. Les résultats obtenus avec cette méthode sont analysés afin d'évaluer la précision de la méthode pour calculer le taux de restitution d'énergie. Nous procédons à la même analyse pour le calcul de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  avec la méthode des intégrales d'interaction, introduite par Stern *et al.* [Ste76] pour extraire les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte sur des fissures bidimensionnelles, et étendue aux fissures tridimensionnelles

par Gosz *et al.* [Gos02].

### 3.1 Méthode G- $\theta$

On considère le problème mécanique défini dans la section 1.1.3.1 où :

- $\underline{u}$  est le champ de déplacement,
- $\underline{F}$  le champ de forces surfaciques appliquées sur  $\Gamma_N \in \partial\Omega$ ,
- $\underline{u}_D$  le champ de déplacements imposés sur  $\Gamma_D \in \partial\Omega$ .

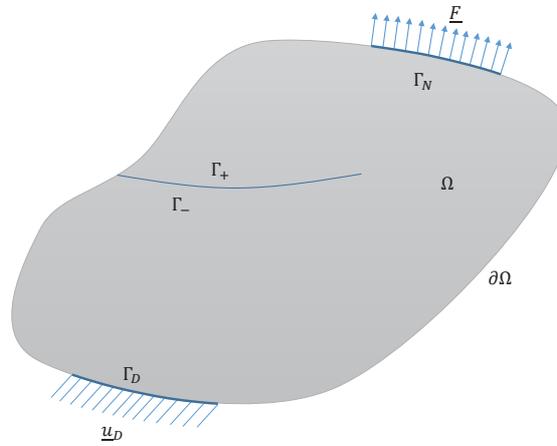


FIGURE 3.1 – Domaine fissuré.

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit : trouver  $\underline{u}$ , tel que  $\underline{u} = \underline{u}_D$  sur  $\Gamma_D$ , qui minimise l'énergie potentielle

$$W(\Omega, \underline{u}) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{F} \cdot \underline{u} \, d\Gamma, \quad (3.1)$$

où  $\Psi$  est la densité d'énergie libre.

Destuynder *et al.* [Des81] ont introduit la méthode G- $\theta$  pour calculer le taux de restitution d'énergie.

L'idée est de définir une famille de transformations  $\mathcal{F}^\eta$  du domaine  $\Omega$  qui modélisent le déplacement fictif de tous les points du domaine  $\Omega$ . La fonction  $\mathcal{F}^\eta$  est définie par :

$$\forall M \in \Omega, \mathcal{F}^\eta(M) = M + \eta \underline{\theta}(M), \quad \eta > 0, \quad (3.2)$$

où  $\underline{\theta}$  est un champ de vecteurs définis sur un sous-domaine de  $\Omega$  entourant la pointe de la fissure. Soit  $\Omega^\eta$  l'image du domaine  $\Omega$  par la transformation  $\mathcal{F}^\eta$ . La transformation  $\mathcal{F}^\eta$  est choisie de sorte que la fissure dans le domaine  $\Omega^\eta$  soit plus grande que la fissure dans le domaine  $\Omega$  (*cf.* figure 3.2). Le champ  $\underline{\theta}$  possède les propriétés suivantes :

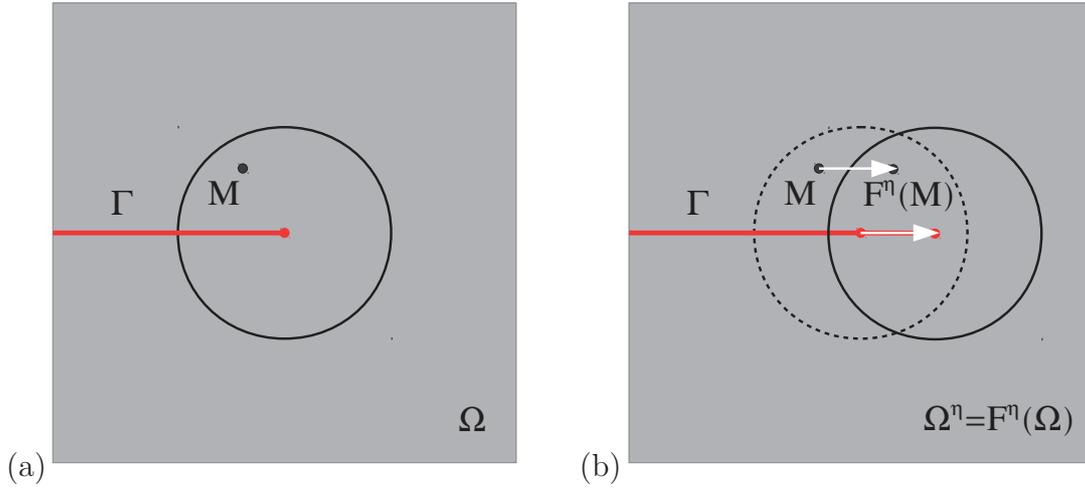


FIGURE 3.2 – Illustration d'une fonction  $\mathcal{F}^\eta$  : (a) domaine fissuré  $\Omega$  et (b) domaine  $\Omega^\eta$ , image de  $\Omega$  par la transformation  $\mathcal{F}^\eta$ .

- le champ  $\underline{\theta}$  est tangent au bord du domaine, c'est à dire  $\underline{\theta} \cdot \underline{n} = 0$ , où  $\underline{n}$  est la normale extérieure au domaine  $\Omega$ . Cette condition assure que la frontière du domaine est conservée. Aucune variation de volume n'est possible et la configuration initiale de la fissure n'est pas modifiée,
- le champ  $\underline{\theta}$  est suffisamment régulier.

Dans [Des81], Destuynder *et al.* ont défini la dérivée de l'énergie potentielle du système par rapport à l'évolution du domaine pour la transformation  $\mathcal{F}^\eta$  par :

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W(\underline{u}^\eta, \Omega^\eta) - W(\underline{u}, \Omega)}{\eta}. \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Cas bidimensionnel

Afin de limiter les risques de confusion et pour faire apparaître la dépendance de la dérivée de l'énergie potentielle du système par rapport à l'évolution du domaine  $\Omega$  et au champ de déplacement  $\underline{u}$ , on pose :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}) = -\frac{\partial W}{\partial \Omega}. \quad (3.4)$$

Dans [Des81], Destuynder et Djaoua ont établi que la dérivée de l'énergie potentielle du système par rapport à l'évolution du domaine (3.3) est égale à l'opposé du taux de restitution d'énergie, soit :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial \Omega} \equiv \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}). \quad (3.5)$$

En supposant que le champ  $\underline{\theta}$  est nul sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ , Destuynder et Djaoua ont obtenu l'expression suivante :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_{\Omega} \left[ \text{tr} \left( \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta \right) - \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) \text{div} \underline{\theta} \right] d\Omega. \quad (3.6)$$

En pratique, dans le cas bidimensionnel, le champ  $\underline{\theta}$  est porté par le vecteur  $\underline{N}$ , qui représente la direction normale au front de fissure, dans le plan de la fissure, et est nul loin du front de fissure, voir figure 3.3. Plus généralement, on choisit :

$$\underline{\theta}(M) = \Theta(r) \underline{N}, \quad (3.7)$$

où  $r$  est la distance du nœud  $M$  au front de fissure et  $\Theta$  une fonction de  $r$  permettant de restreindre la zone où le champ  $\underline{\theta}$  est défini. La fonction  $\Theta$  est définie comme suit :

$$\Theta(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } r \leq R_I, \\ \frac{R_S - r}{R_S - R_I}, & \text{si } R_I \leq r \leq R_S, \\ 0, & \text{si } r \geq R_S. \end{cases} \quad (3.8)$$

$R_S$  est la distance au fond de fissure au delà de laquelle le champ  $\underline{\theta}$  est nul.  $R_I$  permet de définir une zone, au voisinage du fond de fissure, dans laquelle le gradient de  $\underline{\theta}$  est nul. Cette zone, dans laquelle les contraintes sont mal évaluées, ne contribuera donc pas au calcul de l'intégrale  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$ . La figure 3.4 représente le graphe de la fonction  $\Theta$ . Dans [Shi86], les auteurs ont comparé les résultats obtenus en utilisant différentes forme pour la fonction qui restreint le domaine dans lequel le champ  $\underline{\theta}$  n'est pas nul. Ils ont conclu que les valeurs de  $G$  obtenues sont insensibles à la forme de cette fonction. Dans [Nik87b], les auteurs ont mené une étude similaire et ont tiré la même conclusion.

Il est à noter que la dérivée de la fonction  $\Theta$  est discontinue en  $r = R_I$  et en  $r = R_S$ . En conséquence, pour un maillage quelconque, le gradient de la fonction  $\underline{\theta}$  définie précédemment peut être discontinue à travers un élément. En pratique, pour évaluer  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$ , on remplace  $\underline{\theta}$  par son interpolée :

$$\mathcal{I}\underline{\theta}(M) = \mathcal{I}(\Theta \underline{N})(M), \quad (3.9)$$

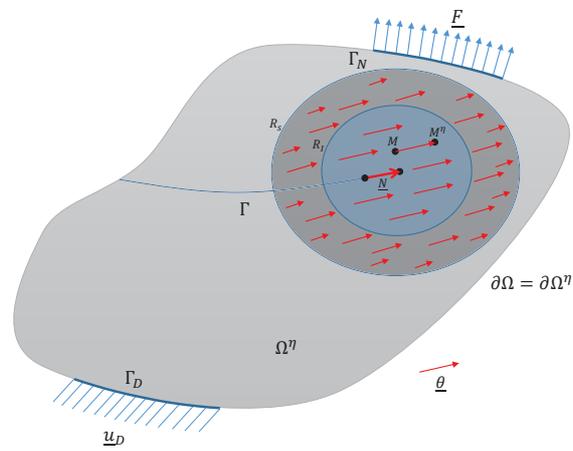


FIGURE 3.3 – Domaine de définition du champ  $\theta$ .

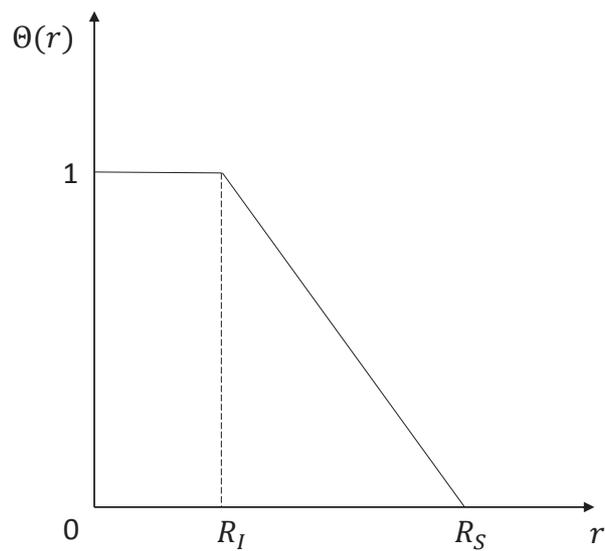


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction  $\Theta$ .

où l'opérateur  $\mathcal{I}$  est l'opérateur d'interpolation éléments finis qui permet d'évaluer l'interpolée d'une fonction  $f$  en un point  $M$ . L'opérateur  $\mathcal{I}$  est défini par :

$$\mathcal{I}f(M) = \sum_{k \in I} N_k(M) f_k, \quad (3.10)$$

où  $I$  est l'ensemble nœuds du maillage,  $f_k$  la valeur de  $f$  évaluée au nœud  $k$  et  $N_k$  la fonction de forme de l'élément associée au nœud  $k$ .

### 3.1.2 Cas tridimensionnel

Le cas tridimensionnel est plus complexe car le front de fissure n'est plus un point mais une courbe. De plus, la fissure peut déboucher sur les bords du domaine. En conséquence, afin de pouvoir attribuer une valeur de  $G$  à tous les points du front de fissure, il est nécessaire de lever l'hypothèse  $\underline{\theta} = \underline{0}$  sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  et de prendre en compte des intégrales de surface dans le calcul de  $\mathcal{G}$ . À notre connaissance, ces termes supplémentaires sont peu discutés et peu référencés dans la littérature. Ils sont abordés pour la première fois dans une annexe de [Shi86] et sont explicités dans [Bro94].

Dans [Li85], Li *et al.* ont introduit la méthode d'intégrale de domaine qui peut être vue comme une extension de la méthode G- $\theta$  au cas tridimensionnel. Soit un champ vectoriel  $\underline{\theta}$  défini dans le domaine tridimensionnel  $\Omega$ , tangent au bord de  $\Omega$  et suffisamment régulier. Nous rappelons que la divergence de la transposée du tenseur d'Eshelby  $\underline{E}$  est nulle presque partout dans le domaine  $\Omega$ . En multipliant (au sens du produit contracté) la relation  $\text{div}(\underline{E}^T) = \underline{0}$  membre à membre par  $\underline{\theta}$  et en utilisant le théorème de la divergence, les auteurs ont établi la relation suivante :

$$\mathcal{G}(u, \theta) = - \int_{\Omega} \text{tr}(\underline{E} \cdot \underline{\nabla} \theta) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{\theta} \, dS. \quad (3.11)$$

En injectant l'expression du tenseur d'Eshelby dans l'équation précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u, \theta) = \int_{\Omega} \left[ \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} \theta) - \Psi(\underline{\varepsilon}) \text{div} \theta \right] \, d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} \left( \Psi(\underline{\varepsilon}) \underline{n} \cdot \underline{\theta} - \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\theta} \right) \, dS. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le champ  $\theta$  est tangent au bord du domaine. On a donc  $\underline{n} \cdot \underline{\theta} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . D'où :

$$\mathcal{G}(u, \theta) = \int_{\Omega} \left[ \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} \theta) - \Psi(\underline{\varepsilon}) \text{div} \theta \right] \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\theta} \, dS. \quad (3.13)$$

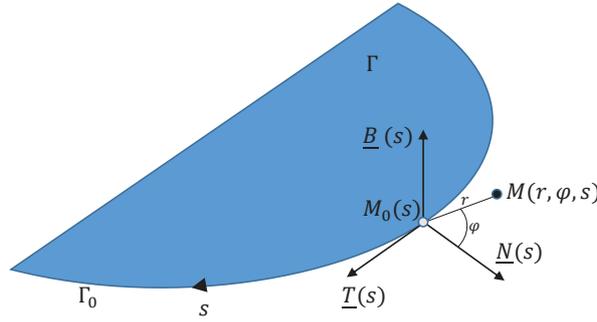


FIGURE 3.5 – Base locale pour un point  $M_0$  du front de fissure, d'abscisse curviligne  $s$ .

Finalement, en utilisant les conditions aux limites du problème, on obtient :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_{\Omega} \left[ \text{tr} \left( \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} \theta \right) - \Psi(\underline{\varepsilon}) \text{div} \underline{\theta} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{F} \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\theta} dS - \int_{\Gamma_D} \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u_D \cdot \underline{\theta} dS. \quad (3.14)$$

Il est à noter qu'en choisissant un champ  $\underline{\theta}$  nul sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ , l'expression précédente correspond au résultat obtenu par Destuynder et Djaoua dans le cas bidimensionnel. La figure 3.5 représente le front de fissure  $\Gamma_0$ . Un point  $M_0$  du front de fissure  $\Gamma_0$  est repéré son abscisse curviligne  $s$ . L'abscisse curviligne  $s$  parcourt le segment  $[0, |\Gamma_0|]$ , où  $|\Gamma_0|$  est la longueur du front de fissure. Soit  $(\underline{T}(s), \underline{N}(s), \underline{B}(s))$  le repère local associé au point  $M_0$ . Le taux de restitution d'énergie  $G$  et la direction de propagation de la fissure  $\underline{N}$ , dans le plan de la fissure sont des fonctions de  $s$ . Soit  $M$  un point du plan généré par les vecteurs  $\underline{N}$  et  $\underline{B}$  et passant par le point  $M_0$ . Le point  $M$  est repéré par les coordonnées polaires  $r$  et  $\varphi$ . La coordonnée  $r$  représente la distance du point  $M$  au front de fissure. D'après [Li85 ; Mia88],  $G$  vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\Gamma_0} G(s) (\underline{\theta}(r=0, s) \cdot \underline{N}(s)) ds = \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}). \quad (3.15)$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est décomposé sur une base de fonctions (cf. [Li85],[Raj00]) et on a :

$$G(s) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_p} G_j f_j(s), \quad (3.16)$$

où  $(f_j)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_p}$  est la base de fonctions utilisées,  $\mathcal{N}_p$  le nombre de fonctions dans la base et  $G_j$  le coefficient associé à la fonction  $f_j$ . Soit  $i \in \llbracket 0, \mathcal{N}_p \rrbracket$  et soit  $\underline{\theta}_i$  un champ tel que :  $\forall s \in [0, |\Gamma_0|], \underline{\theta}_i(r=0, s) \cdot \underline{N}(s) = f_i(s)$ . En choisissant  $\underline{\theta} = \underline{\theta}_i$  l'équation (3.15) donne :

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_p} \left( \int_{\Gamma_0} f_i(s) f_j(s) ds \right) G_j = \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i). \quad (3.17)$$

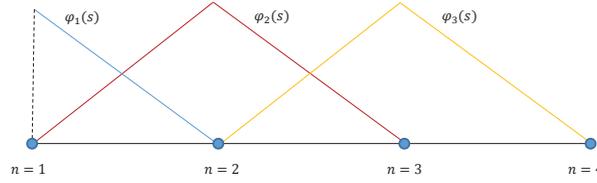


FIGURE 3.6 – Fonctions de forme linéaires de type Lagrange.

En répétant ce processus pour chaque fonction  $f_i$  de la base, on aboutit au système linéaire suivant :

$$[\mathcal{M}]\{G\} = \{G\}, \quad (3.18)$$

où on a posé :

$$[\mathcal{M}] = \left( \int_{\Gamma_0} f_i(s) f_j(s) ds \right)_{1 \leq i, j \leq \mathcal{N}_p}, \quad (3.19)$$

$$\{G\} = (G_j)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_p}, \quad (3.20)$$

$$\{G\} = (\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i))_{1 \leq i \leq \mathcal{N}_p}. \quad (3.21)$$

En pratique, afin de réduire le domaine d'intégration, on associe à une fonction  $f_i$  de la base le champ  $\underline{\theta}_i$  défini par :

$$\underline{\theta}_i(M) = f_i(s) \Theta(r) \underline{N}(s). \quad (3.22)$$

On rappelle que la dérivée de la fonction  $\Theta$  est discontinue en  $r = R_I$  et en  $r = R_S$ . En conséquence, pour un maillage quelconque, le gradient de la fonction  $\underline{\theta}_i$  définie précédemment peut être discontinu à travers un élément. En pratique, pour évaluer  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i)$ , on remplace  $\underline{\theta}_i$  par son interpolée (cf. [Li85]) afin d'éviter ce problème :

$$\mathcal{I}\underline{\theta}_i(M) = \mathcal{I}(f_i \Theta \underline{N})(M). \quad (3.23)$$

Nous reviendrons plus précisément sur ce choix d'interpolation dans la section 3.1.3.4.

Il reste à discuter le choix de la base sur laquelle on décompose  $G$ . Les choix adoptés dans le code `_aster` sont de deux types :

- les fonctions de forme éléments finis de type Lagrange, définies à partir de l'ensemble des segments qui discrétisent le front de fissure (voir figure 3.6). Ce sont des fonctions à support compact (constitué de deux segments consécutifs) qui vérifient la partition de l'unité. L'usage de ces fonctions remonte aux origines de la méthode (cf. [Li85]).
- les polynômes de Legendre (voir figure 3.7). Les polynômes de Legendre sont

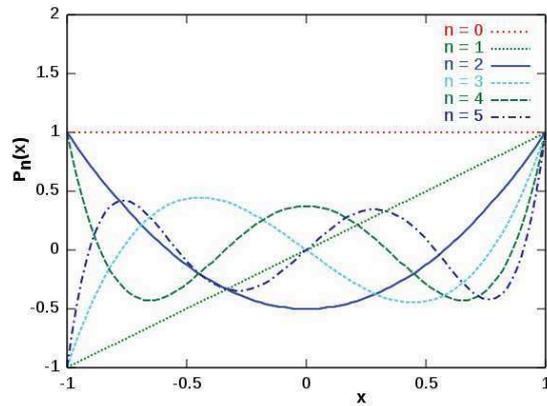


FIGURE 3.7 – Représentation des six premiers polynômes de Legendre. Sur ce graphe  $P_n$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $n$ .

classiquement définis sur le segment  $[-1, 1]$ . Ils sont orthogonaux entre eux aux sens du produit scalaire dans  $L^2([-1, 1])$ . Afin de construire une base de fonctions capable de représenter le taux de restitution d'énergie  $G$  comme une fonction de l'abscisse curviligne  $s$ , il faut faire correspondre à une abscisse curviligne  $s$  une valeur dans  $[-1, 1]$ . On applique pour cela la transformation  $s \mapsto \frac{2s - |\Gamma_0|}{|\Gamma_0|}$ . Finalement, la base de fonctions  $(p_j)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_p}$  construite à partir des polynômes de Legendre utilisée dans `code_aster` vérifie :

$$\int_{\Gamma_0} p_i(s)p_j(s) \, ds = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.24)$$

Le premier polynôme de Legendre est la fonction constante égale à 1. La fonction  $p_1$  est donc également une fonction constante et on remarque que :

$$\forall i \in \llbracket 2, \mathcal{N}_p \rrbracket, \int_{\Gamma_0} p_j(s) \, ds = 0. \quad (3.25)$$

**Remarque.** *Il est à noter que dans `code_aster` seuls les huit premiers polynômes de Legendre sont disponibles. Cela signifie que la base de polynôme de Legendre permet de représenter une fonction de degré sept au plus.*

Dans un souci de simplicité, et sans confusion possible, nous appelons dans la suite de ce manuscrit polynômes de Legendre les fonctions de la base de fonctions construite à partir des polynômes de Legendre. De même, nous appelons polynômes de Lagrange les fonctions de la base de fonctions construites à partir des fonctions de forme éléments finis de type Lagrange.

Dans la pratique, les résultats obtenus avec les deux discrétisations sont très différents.

Les polynômes de Lagrange constituent une approche locale en utilisant des fonctions à support compact, alors que les polynômes de Legendre ont un caractère plus global car leur support s'étend sur tout le front de fissure. En FEM et pour un maillage réglé, la discrétisation du front de fissure s'appuie sur des nœuds du maillage et elle est conforme aux éléments. Considérons la fonction d'indice  $i$  de la base de Lagrange. L'interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$ , obtenue en utilisant les fonctions de forme éléments finis, préserve les propriétés des polynômes de Lagrange définis sur le front de fissure. Le support du champ  $\mathcal{I}\underline{\theta}_i$  s'étend, dans tout le domaine d'intégration, sur deux couches d'éléments, situés de part et d'autre du plan normal au front de fissure et qui passe par le nœud associé à la fonction d'indice  $i$ . Cette propriété assure la qualité des taux de restitution d'énergie obtenus en appliquant la méthode d'intégrale de domaine et en utilisant des maillages réglés. Dans [Raj00], les auteurs ont étudié la qualité des taux de restitution d'énergie calculés en appliquant la méthode d'intégrale de domaine à des maillages libre constitués de tétraèdres et en utilisant des polynômes de Lagrange. Ils ont observé que le graphe représentant l'évolution de  $G$  en fonction de la position du point sur le front de fissure présentait des oscillations parasites. Ils ont également constaté que l'amplitude de ces oscillations était dépendante du maillage utilisé. La raison de la présence de ces oscillations tient au fait que dans le cas d'un maillage libre, le support du champ  $\mathcal{I}\underline{\theta}_i$  n'est plus maîtrisé et dépend du maillage utilisé. Le même type d'oscillations apparaît quand on utilise la méthode X-FEM. Dans ce cas, la fissure n'est *a priori* pas conforme au maillage et le support du champ  $\mathcal{I}\underline{\theta}_i$  dépend cette fois de la position du front de fissure dans le maillage. Dans [Raj00] les auteurs proposent d'étendre le support des fonctions de Lagrange sur quatre éléments. Ils ont constaté que cette méthode permettait d'atténuer les oscillations dans les études qu'ils ont menées. Cette solution a été adaptée par [Gal07] dans code\_aster. Elle permet dans certaines situations d'atténuer les oscillations mais ne fournit pas toujours la précision attendue sur le taux de restitution d'énergie pour des maillages non structurés, comme le montre les résultats de l'étude d'un tube fissuré présenté dans [Gal07]. L'idée d'étendre le support des fonctions de forme de Lagrange ayant pour effet de diminuer les oscillations, une approche consistant à définir un nombre de points uniformément répartis le long du front de fissure a été développée dans code\_aster. La figure 3.8 présente les résultats obtenus par cette méthode pour un calcul FEM réalisé en utilisant un maillage libre constitué d'éléments tétraédriques. Le problème étudié dans cette analyse est une fissure plane à front droit sollicitée en mode I. On observe que l'écart entre les résultats du calcul et la solution analytique, constante dans ce cas, diminue quand on réduit le nombre de points du front de fissure. En revanche, les oscillations sont toujours présentes et rendent difficile l'exploitation des résultats.

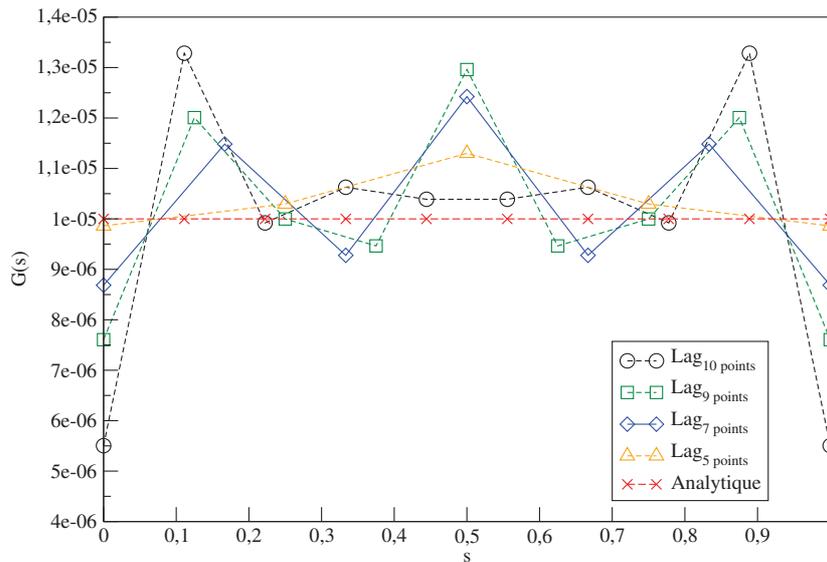


FIGURE 3.8 – Calcul de  $G$  avec une représentation par les fonctions de forme de Lagrange, pour différents choix de discrétisation du front de fissure.

Dans [Oze12], les auteurs proposent une méthode d'intégrale de domaine pour calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  à partir de la solution d'un calcul réalisé avec la méthode G-FEM, et en utilisant des éléments d'ordre élevé. Ils choisissent de discrétiser  $G$  sur une base de polynômes de Legendre. Ils montrent que le choix de cette base est adapté pour une fissure à fond fermé, en étudiant une fissure circulaire. En revanche, ils montrent qu'il est difficile de capter l'évolution de  $G$  le long d'une fissure dont les extrémités débouchent sur une surface libre. En effet, la solution attendue est uniforme à coeur et diminue brutalement près des bords. Ils observent que les polynômes de degré les plus élevés captent la décroissance près des bords mais induisent des oscillations au centre. Ils proposent donc de ne pas utiliser une seule base pour représenter  $G$  tout le long du front de fissure. Au contraire, ils proposent de partitionner le front de fissure de sorte à pouvoir utiliser des polynômes d'ordre élevé près des bords et d'ordre plus faible à coeur. Ils montrent que cette approche permet de capter à la fois le comportement uniforme à coeur et la décroissance à l'approche des points débouchants.

Dans la suite de ce mémoire, nous choisissons d'imposer des conditions aux limites sur toutes les surfaces d'un domaine pour contourner les difficultés liées aux fissures qui débouchent sur une surface libre de chargement. De plus, nous travaillerons exclusivement avec les polynômes de Legendre, en utilisant une seule base pour représenter  $G$  tout le long du front de fissure. Nous nous limiterons à l'utilisation des six premiers polynômes (qui permettent de représenter un polynôme d'ordre cinq au plus). Ce choix correspond aux pratiques recommandées à l'ingénierie d'EDF.

### 3.1.3 Calcul du taux de restitution d'énergie sur un exemple de fissure droite en 3D

Afin de mesurer la capacité des polynômes de Legendre à représenter l'évolution de  $G$  le long du front de fissure, on présente un test de fissure plane à front droit pour lequel on connaît la solution analytique et qui nous permet de vérifier que les résultats numériques sont précis. Le calcul de  $G$  est à la fois utilisé pour réaliser des études de nocivité fondées sur un calcul FEM et des études de propagation basées sur un calcul X-FEM. Le calcul de  $G$  est donc une étape de post-traitement du calcul mécanique. Nous présenterons donc un premier cas FEM utilisant un maillage structuré puis un cas X-FEM, utilisant un maillage non-structuré.

#### 3.1.3.1 Définition du problème

On considère un cube fissuré, où la fissure est plane et à front droit, dans le cas d'un chargement en mode I, où  $K_I = 1 \text{ Pa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ . Le maillage est composé de mailles hexaédriques et la fissure est conforme au maillage. Les paramètres matériau sont  $E = 0.1 \text{ MPa}$  et  $\nu = 0$ . Ceci implique que le tenseur des contraintes est identique sous l'hypothèse des déformations planes et sous l'hypothèse des contraintes planes. Nous posons un problème dont la solution est le champ asymptotique associé au mode I pur. Les conditions aux limites sont :

- $\underline{u}_D = \underline{u}^I$  sur  $\Gamma_D$ , où  $\Gamma_D$  est représenté par la face bleue du cube sur la figure 3.9.
- $\underline{F} = \underline{\sigma}^I \cdot \underline{n}$  sur  $\Gamma_N$ , où  $\Gamma_N$  est constitué des cinq faces du cube restantes, représentées en jaune sur la figure 3.9.

Nous rappelons que  $\underline{u}^I$  et  $\underline{\sigma}^I$  sont définis comme les champs asymptotiques des déplacements et des contraintes du mode I, voir section 1.1.2.

Le modèle considéré ne comporte pas de bord libre et permet de retrouver la solution correspondant à un milieu infini, dans un domaine fini. La solution attendue correspond donc à un taux de restitution d'énergie  $G$  uniforme le long du front de fissure. L'absence de bords libres nous permet de nous affranchir des difficultés liées au fait que la singularité n'est plus d'ordre  $1/2$  au voisinage d'un point débouchant sur une surface libre [Vu15]. Il est à noter que choisir un coefficient de Poisson nul permet de simplifier les calculs, mais que le taux de restitution d'énergie serait également uniforme le long du front de fissure si on avait choisi  $\nu \neq 0$ .

Afin de réaliser une étude de convergence, nous introduisons les erreurs relatives suivantes :

- l'erreur en termes de la norme  $L^2$  du déplacement, qui permet d'estimer l'écart entre le champ de déplacement obtenu par éléments finis  $\underline{u}_h$  et le champ analytique

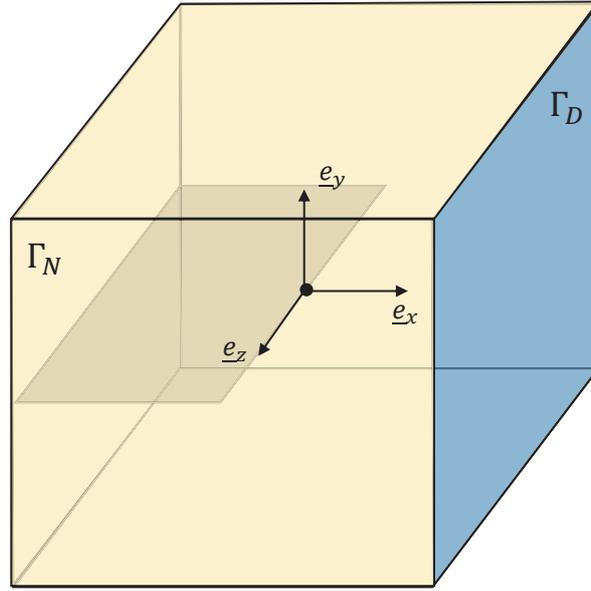


FIGURE 3.9 – Conditions aux limites du problème de référence.

$\underline{u}$  et qui est définie par :

$$e_u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \|\underline{u} - \underline{u}_h\|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} \|\underline{u}\|^2 d\Omega}}, \quad (3.26)$$

- l'erreur en termes de la norme en énergie, qui permet d'estimer l'écart entre le champ de contrainte éléments finis  $\underline{\sigma}_h$  et le champ analytique  $\underline{\sigma}$  et qui est définie par :

$$e_{\sigma} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\underline{\sigma}_h - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1} : (\underline{\sigma}_h - \underline{\sigma}) d\Omega}{\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1} : \underline{\sigma} d\Omega}}, \quad (3.27)$$

où  $\underline{\underline{\underline{C}}}$  est le tenseur de Hooke.

Soit  $h$  la taille d'élément adimensionnée. Pour la méthode des éléments finis avec des éléments linéaires, on a :

$$e_u = \mathcal{O}(h), \quad (3.28)$$

$$e_{\sigma} = \mathcal{O}(h^{1/2}). \quad (3.29)$$

Pour la méthode X-FEM avec des éléments linéaires, on a, si on utilise un enrichissement géométrique :

$$e_u = \mathcal{O}(h^2), \quad (3.30)$$

$$e_{\sigma} = \mathcal{O}(h). \quad (3.31)$$

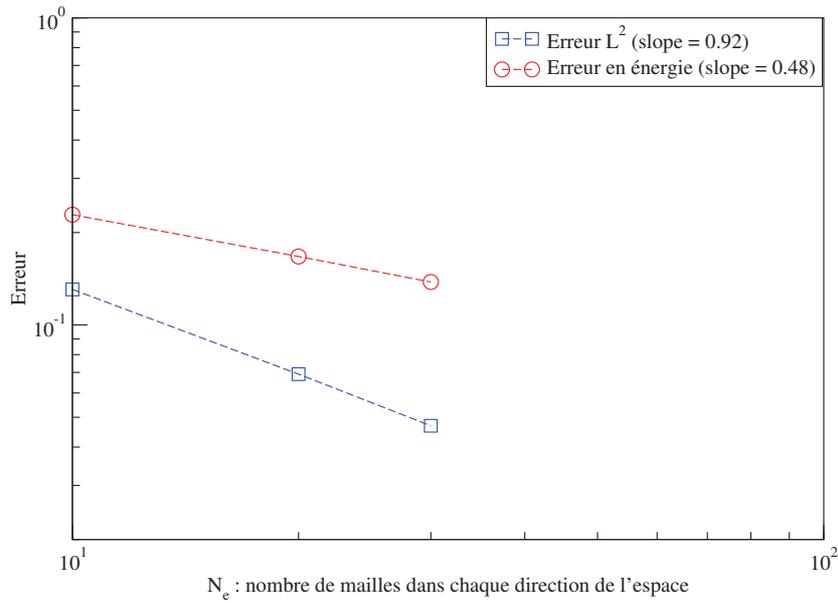


FIGURE 3.10 – Erreur relative en termes de la norme  $L^2$  du déplacement et de la norme en énergie, en fonction du raffinement du maillage.

On peut souligner l'intérêt de la méthode X-FEM qui permet d'obtenir les ordres de convergence optimaux, c'est-à-dire 2 pour l'erreur en norme  $L^2$  et 1 pour l'erreur en énergie. Le lecteur intéressé pourra se référer aux nombreuses références sur le sujet (cf. [Mel96 ; Lab05]).

Pour le modèle étudié, on a réalisé trois calculs avec trois maillages différents. Soit  $N_e$  le nombre d'éléments dans chaque direction de l'espace. La taille de maille est  $h = \frac{1}{N_e}$ . On choisit les maillages correspondants à  $N_e = \{10, 20, 30\}$ . Les résultats de l'étude de convergence sont présentés sur la figure 3.10. La figure 3.11 représente le champ de déplacement sur le maillage déformé pour  $N_e = 30$ .

### 3.1.3.2 Calcul analytique du taux de restitution d'énergie et identification au cas 2D

En 2D, le champ  $\underline{\theta}$  est défini par  $\underline{\theta}_{2D} = \Theta(r)\underline{N}$ . Dans le cas 3D, les champs  $\underline{\theta}_i$  sont dépendants de la base des polynômes de Legendre :

$$\underline{\theta}_i(\underline{M}) = p_i(s)\Theta(r)\underline{N}(s), \quad (3.32)$$

où  $p_i$  est  $i$ -ème polynôme de Legendre,  $\Theta$  est la fonction définie par l'équation (3.8) et  $\underline{N}$  est le vecteur normal au front de fissure, dans le plan de la fissure.

Pour calculer le système linéaire et obtenir la valeur de  $G$  associée à chaque point du front de fissure, il faut évaluer les intégrales qui composent le second membre du système

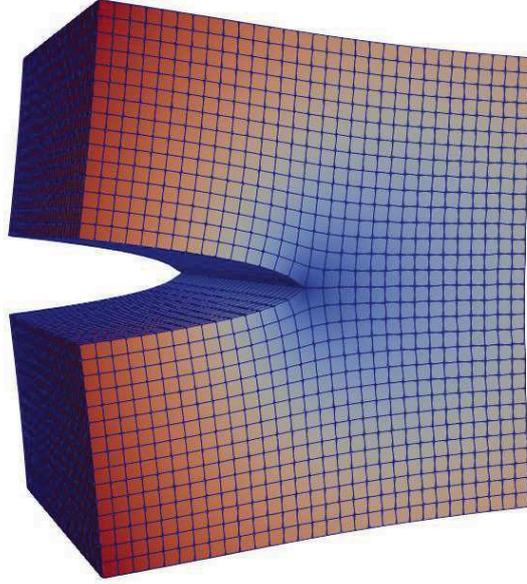


FIGURE 3.11 – Visualisation du champ de déplacement, pour un maillage FEM.

linéaire :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta_i \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{F} \cdot \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\theta}_i dS - \int_{\Gamma_D} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} u_D \cdot \underline{\theta}_i dS. \quad (3.33)$$

Dans le cas du modèle considéré, seul le terme de volume est non nul.

*Preuve.* Soit  $T$ , le cylindre de rayon  $R_S$  et dont l'axe est positionné sur le front de fissure, à l'intérieur duquel  $\underline{\theta}_i$  est non nul (voir figure 3.12). Les domaines  $\Gamma_D$  et  $T$  sont disjoints, ce qui implique que l'intégrale sur  $\Gamma_D$  est nulle. De plus, on a :  $\Gamma_N \cap T = T_+ \cup T_-$ , où  $T_+$  et  $T_-$  sont les intersections entre  $T$  et les faces du cube. On remarque que  $\underline{F}$  est nulle sur  $T_+$  et sur  $T_-$  car :

$$\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}}^I \cdot \underline{n} = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^I \cdot \underline{e}_z = 0 \text{ sur } T_+, \\ \underline{\underline{\sigma}}^I \cdot (-\underline{e}_z) = 0 \text{ sur } T_-. \end{cases} \quad (3.34)$$

□

L'intérêt principal de ce test est que le modèle 3D est obtenu par extrusion du modèle 2D, ce qui confère deux propriétés importantes :

- $G(s)$  est uniforme le long du front de fissure,
- on a la relation suivante :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = \begin{cases} \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D}) \text{ si } i = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.35)$$

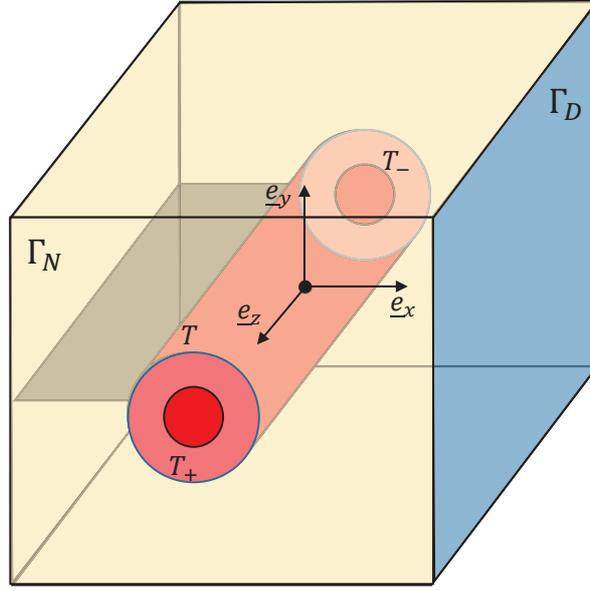


FIGURE 3.12 – Représentation des surfaces et volumes nécessaires pour exprimer les intégrales intervenant dans la méthode  $G-\theta$ .

où  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D})$  est l'intégrale calculée pour le modèle 2D.

*Preuve.* Pour démontrer ces deux propriétés, on développe l'intégrale (3.33). On rappelle que dans le cas considéré, on a  $\underline{u} = \underline{u}^I$  et  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^I$ .

On a démontré que les intégrales de surface apparaissant dans (3.33) sont nulles. On a donc :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta_i \right) d\Omega. \quad (3.36)$$

On injecte l'expression du tenseur d'Eshelby et on développe les termes, en rappelant que dans le cas considéré, on a  $\underline{\theta}_i = p_i(s)\Theta(r)\underline{N}$ , où  $p_i$  est  $i$ -ème polynôme de Legendre,  $\Theta$  est la fonction définie par l'équation (3.8) et  $\underline{N}$  est le vecteur normal au front de fissure, dans le plan de la fissure. Il est à noter que dans notre cas,  $\underline{N} = \underline{e}_x$  est uniforme. On obtient (*cf.* annexe A) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = - \int_{\Omega} & \left[ \Psi p_i \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} - \sigma_{NN}^I \left( p_i \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. - \sigma_{NB}^I \left( p_i \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} + p_i \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) - \sigma_{BB}^I \left( p_i \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

On définit le modèle 2D, dans lequel le domaine est un carré  $\mathcal{P}$  qui, par extrusion dans la direction  $\underline{e}_z$ , génère le domaine  $\Omega$ . En remarquant que seul le polynôme de Legendre  $p_i$  dépend de l'abscisse curviligne  $s$ , on peut séparer les variables du problème et obtenir

le résultat suivant :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = - \left( \int_0^{|\Gamma_0|} p_i ds \right) \int_{\mathcal{P}} \left[ \Psi \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} - \sigma_{NN}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) - \sigma_{NB}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} + \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) - \sigma_{BB}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} \right) \right] d\mathcal{P}, \quad (3.38)$$

où  $|\Gamma_0|$  est la longueur du front de fissure. On remarque que cette dernière expression fait apparaître l'intégrale  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D})$ , définie pour le modèle 2D :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D}) = - \int_{\mathcal{P}} \left[ \Psi \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} - \sigma_{NN}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) - \sigma_{NB}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} + \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) - \sigma_{BB}^I \left( \Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} \right) \right] d\mathcal{P}. \quad (3.39)$$

Finalement on obtient le résultat suivant :

$$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = \left( \int_0^{|\Gamma_0|} p_i ds \right) \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D}). \quad (3.40)$$

De plus, comme l'intégration des polynôme de Legendre entraîne que  $\int_0^{|\Gamma_0|} p_i ds = 0$  si  $i \geq 2$ , on a :

$$G_i = \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = \begin{cases} \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D}) & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.41)$$

On rappelle que les polynômes de Legendre forment une base orthonormée au sens du produit scalaire dans  $L^2([0, |\Gamma_0|])$ , ce qui implique :

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Gamma_0} p_i(s) p_j(s) ds = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.42)$$

et donc la résolution du système linéaire  $[\mathcal{M}]\{G\} = \{G\}$  aboutit au résultat suivant :

$$G(s) = G_1 = \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D}), \quad \forall s \in [0, |\Gamma_0|]. \quad (3.43)$$

□

Rappelons qu'en pratique, le champ  $\underline{\theta}_i$  est remplacé par  $\mathcal{I}\underline{\theta}_i$  pour le calcul de  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i)$  et que le champ  $\underline{\theta}_{2D}$  est remplacé par le champ  $\mathcal{I}\underline{\theta}_{2D}$  pour le calcul de  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_{2D})$ . Donc, en toute rigueur, la démonstration précédente est valable seulement dans le cas où l'interpolation élément fini ne modifie pas les champs  $\theta_i$  et  $\theta_{2D}$ . On peut par exemple

considérer un maillage rayonnant autour du front de fissure et choisir les rayons  $R_I$  et  $R_S$  de sorte à ce que les cylindres de rayons  $R_I$  et  $R_S$ , centrés sur le front de fissure, se placent à l'interface entre deux couches d'éléments. Cependant, la propriété d'indépendance des variables  $r$  et  $s$  suffit pour obtenir le résultat (3.43), y compris dans un cas où la dérivée de  $\Theta$  par rapport à  $r$  ne peut plus être explicitée, du fait de l'interpolation élément fini (*e.g.* un maillage réglé).

### 3.1.3.3 Calculs numériques du taux de restitution d'énergie

Dans la section précédente, l'analyse a permis de conclure que le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$  est identique pour le modèle 2D et pour le modèle 3D. Afin de comparer les résultats obtenus numériquement aux résultats analytiques, on procède à un calcul de  $G$  par la méthode  $G-\theta$ . Un calcul en 2D sur trois maillages différents avec  $N_e = \{10, 20, 30\}$ , où  $N_e$  est le nombre d'éléments dans chaque direction de l'espace, et un calcul en 3D pour les mêmes tailles de mailles successives.

On définit l'erreur en termes du taux de restitution d'énergie  $G$  par :

$$e = \frac{\|G_h - G\|_\infty}{\|G\|_\infty}, \quad (3.44)$$

où  $G_h$  est la valeur du taux de restitution d'énergie estimée par la méthode  $G-\theta$  et  $G = \frac{1}{E}K_I^2 = 10^{-5} \text{ J/m}^2$ , d'après la formule d'Irwin et car  $\nu = 0$ . L'évolution de l'erreur relative en termes du taux de restitution d'énergie  $G$  définie par (3.44), en 2D et en 3D, en fonction de  $N_e$  est représentée sur la figure 3.13(a).

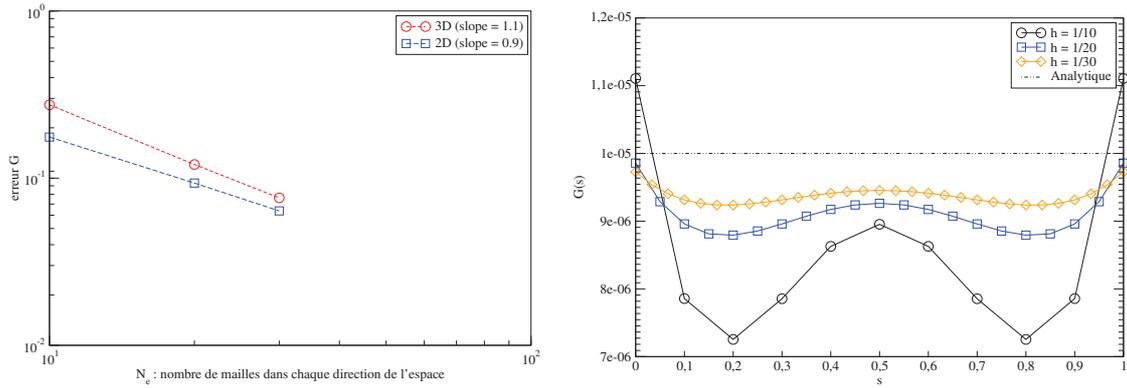
On remarque que l'erreur dans le cas 3D est supérieure à celle du cas 2D ce qui contredit l'équation (3.43). De plus, sur la figure 3.13(b), qui représente l'évolution de  $G$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  le long du front de fissure, on constate des oscillations qui contredisent le fait que  $G$  est uniforme le long du front de fissure.

### 3.1.3.4 Interpolation du champ $\theta$

Dans le but de retrouver des résultats cohérents entre l'analyse théorique et le calcul numérique, nous avons examiné les différences qui existent entre un calcul 2D et un calcul 3D. Dans le cas bidimensionnel, le champ  $\underline{\theta}$  est remplacé par son interpolé pour évaluer  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$ . Le champ  $\underline{\theta}$  évalué au point de Gauss de coordonnées  $\underline{x}_g$  d'un élément s'écrit :

$$\mathcal{I}\underline{\theta}(\underline{x}_g) = \mathcal{I}(\underline{\theta}\underline{N})(\underline{x}_g) = \mathcal{I}\underline{\theta}(\underline{x}_g)\underline{N}. \quad (3.45)$$

Il est à noter que dans le cas 2D, la direction de propagation  $\underline{N}$  est uniforme, ce qui n'est plus le cas en 3D, pour une fissure courbe. Considérons le polynôme de Legendre



(a) Erreur en termes de l'erreur relative sur  $G$  en fonction du raffinement du maillage. (b) Évolution de  $G$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  pour différentes tailles de maille.

FIGURE 3.13 – Comparaison des résultats du calcul de  $G$  par la méthode  $G - \theta$  entre le modèle 2D et le modèle 3D.

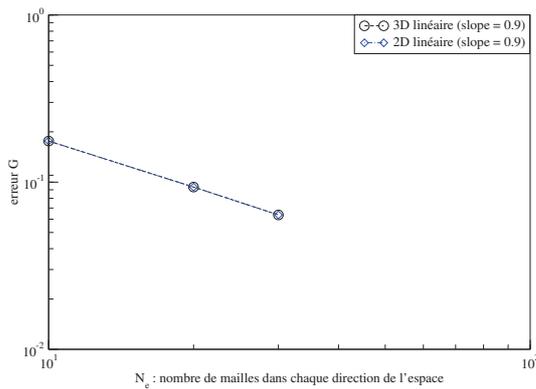
d'indice  $i$ . Le calcul de l'intégrale de  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i)$  fait intervenir l'interpolée du champ  $\underline{\theta}_i$ , qui s'écrit au point de Gauss de coordonnées  $\underline{x}_g$  :

$$\mathcal{I}\theta_i(\underline{x}_g) = \mathcal{I}(P_i\Theta\underline{N})(\underline{x}_g). \quad (3.46)$$

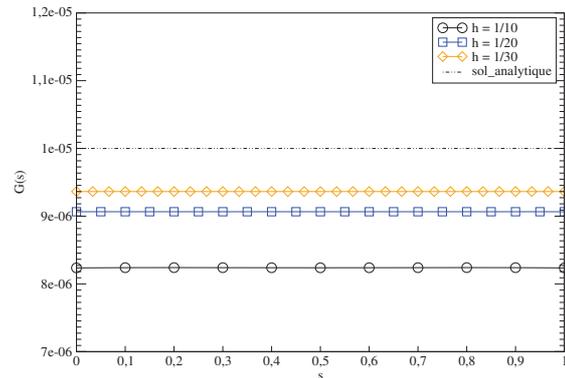
On évalue donc  $\underline{\nabla}\theta_i$  comme le gradient de l'interpolation du produit  $P_i\Theta\underline{N}$  en utilisant les dérivées des fonctions de forme. Malheureusement, interpoler le gradient de cette manière ne permet plus de retrouver le résultat démontré précédemment  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i) = \left(\int_0^{|\Gamma_0|} P_i ds\right) \mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$  car l'interpolation d'un produit n'est pas égale au produit des interpolations. De plus, l'interpolation des polynômes de Legendre n'est pas nécessaire et peut même entraîner des résultats moins précis car  $\mathcal{I}P_i \neq P_i$  pour  $i - 1 > m$  où  $m$  est l'ordre des éléments ( $m = 1$  dans notre cas). En effet, par définition, le degré du polynôme de Legendre  $P_i$  est  $i - 1$ . Donc  $\int_0^{|\Gamma_0|} \mathcal{I}P_i ds = 0$  n'est plus garanti pour  $i \geq 2$ . Partant de ce constat, on propose d'interpoler la fonction  $\Theta$  et d'évaluer directement les polynômes de Legendre aux points de Gauss. L'interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$  au point de Gauss de coordonnées  $\underline{x}_g$ , s'écrit à présent sous la forme suivante :

$$\mathcal{I}\theta_i(\underline{x}_g) = \mathcal{I}\Theta(\underline{x}_g)P_i(\mathcal{I}s(\underline{x}_g))\mathcal{I}\underline{N}(\underline{x}_g). \quad (3.47)$$

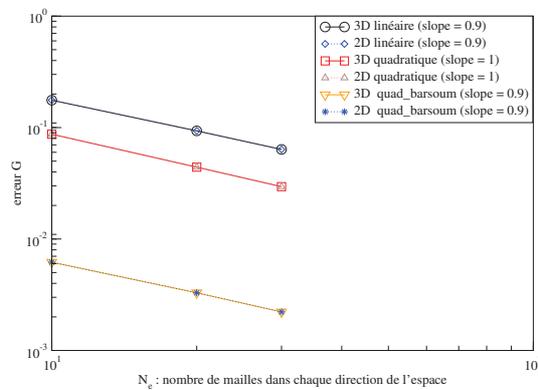
La nouvelle interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$  a été mise en œuvre dans code\_aster et nous permet de retrouver les résultats escomptés. Celle-ci est en accord avec les travaux de [Oze12], qui soulève aussi la difficulté d'évaluer  $G$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  dans des problèmes tridimensionnels. Dans [Oze12], les auteurs proposent de calculer l'abscisse curviligne  $s$  et la direction  $\underline{N}$  associées à chaque point de Gauss en projetant celui-ci sur le front de fissure. Dans notre approche, l'abscisse curviligne et la direction associées à un point



(a) Erreur relative de  $G$  en fonction du raffinement pour les modèles 2D et 3D (éléments linéaires).



(b) Évolution de  $G(s)$  en fonction de l'abscisse curviligne pour différentes tailles de maille.



(c) Erreur relative de  $G$  en fonction du raffinement, pour les modèle 2D et 3D, obtenue en utilisant des éléments linéaires, des éléments quadratiques, et des éléments de Barsoum.

FIGURE 3.14 – Résultats du calcul de  $G$  avec la nouvelle interpolation du champ  $\theta_i$ .

de Gauss sont obtenues, respectivement, par interpolation des abscisses curvilignes et des directions étendues aux nœuds, suivant le même type de procédure que l'extension du champ de vitesse présentée en section 1.2.5.2. Ceci permet de réduire le temps de calcul en s'affranchissant de la coûteuse étape de projection de chaque point de Gauss sur le front de fissure. En reprenant l'étude précédente du calcul de  $G$  pour une fissure plane à front droit sollicitée en mode I et en observant les résultats entre le cas 2D et le cas 3D pour lesquels le champ  $\theta_i$  est défini par l'interpolation (3.47), on observe sur la figure 3.14(a) que les courbes représentant l'erreur relative en termes de taux de restitution d'énergie, pour les cas 2D et 3D sont à présent superposées. Par ailleurs, la figure 3.14(b), montre que  $G$  est uniforme le long du front de fissure, en accord avec (3.43). L'utilisation des éléments quadratiques et des éléments de Barsoum confirme les résultats observés sur des éléments linéaires, voir figure 3.14(c).

### 3.1.4 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode X-FEM

Les résultats obtenus sur un maillage structuré hexaédrique sont corrects mais ne permettent pas de valider l'intérêt des polynômes de Legendre par rapport aux polynômes de Lagrange. En effet, sur un maillage structuré et conforme à la fissure, ces derniers sont très efficaces. L'intérêt des polynômes de Legendre réside dans l'utilisation d'un maillage non structuré où la fissure n'est plus conforme aux éléments. La méthode X-FEM est conçue pour traiter ce type de situation car son intérêt est justement de pouvoir insérer une fissure, indépendamment du maillage. On présente donc deux cas qui permettent de valider la robustesse et la précision du calcul de  $G$  pour une fissure non-conforme au maillage. Dans le premier cas, on utilise un maillage structuré composé d'hexaèdres. La différence est que la fissure n'est plus conforme au maillage car on l'incline d'un angle  $\alpha_0$  dans son plan, voir figure 3.15(a). Le deuxième exemple utilise un maillage non structuré composé de tétraèdres, dans lequel on introduit une fissure plane à front droit débouchant de façon normale aux bords (soit  $\alpha_0 = 0$ ).

#### 3.1.4.1 Fissure plane à front droit incliné dans un maillage structuré

On considère une fissure à front droit incliné d'un angle  $\alpha_0$  dans son plan et sollicitée en mode I, voir figure 3.15(a). Ce cas permet de valider le calcul des intégrales de surface associées aux conditions de Neumann car le front ne débouche pas de façon normale aux bords. Le maillage est composé de mailles hexaèdres. Les paramètres matériau sont  $E = 0.1$  MPa et  $\nu = 0$ . On pose  $K_I = 1$  Pa. $\sqrt{\text{m}}$ . On veut que la solution du problème soit la solution du mode I. Les conditions aux limites sont donc :

- $\underline{u}_D = \underline{u}^I$  sur  $\Gamma_D$ , où  $\Gamma_D$  représente la face bleue de la figure 3.15(a),
- $\underline{F} = \underline{\underline{\sigma}}^I \cdot \underline{n}$  sur  $\Gamma_N$ , où  $\Gamma_N$  représente les faces jaunes sur la figure 3.15(a).

On souhaite tout exprimer dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . Pour ce faire, il faut prendre en compte l'angle  $\alpha_0$  car les champs de déplacement et de contraintes sont définis dans la base locale  $(\underline{N}, \underline{B}, \underline{T})$ , on a par définition :

$$\begin{aligned}\underline{N} &= \sin(\alpha_0)\underline{e}_z + \cos(\alpha_0)\underline{e}_x, \\ \underline{T} &= \cos(\alpha_0)\underline{e}_z - \sin(\alpha_0)\underline{e}_x, \\ \underline{B} &= \underline{e}_y.\end{aligned}$$

Finalement dans le repère du maillage  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , on obtient pour le champ de déplacement  $\underline{u}^I$  :

$$\underline{u}^I = \cos(\alpha_0)u_N^I \underline{e}_x + \sin(\alpha_0)u_N^I \underline{e}_z + u_B^I \underline{e}_y. \quad (3.48)$$

Pour le champ de contrainte, on obtient :

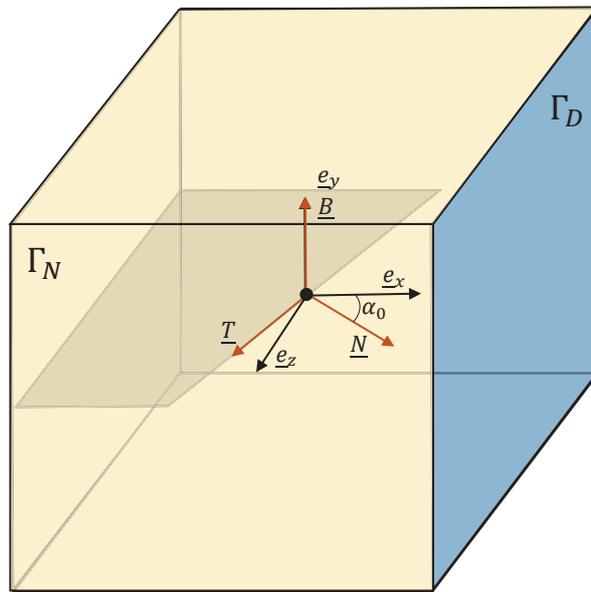
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^I = & \sigma_{NN}^I \cos^2(\alpha_0) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{BB}^I \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_{NN}^I \sin^2(\alpha_0) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ & + \sigma_{NB}^I \cos(\alpha_0) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ & + \sigma_{NN}^I \cos(\alpha_0)\sin(\alpha_0) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) \\ & + \sigma_{NB}^I \sin(\alpha_0) (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y). \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'étude de convergence, voir figure 3.15(b), permet de vérifier que l'on retrouve les ordres théoriques pour des éléments X-FEM linéaire avec un enrichissement géométrique, c'est-à-dire 1 pour l'erreur en termes de la norme en énergie et 2 pour l'erreur en termes de la norme  $L^2$  du déplacement (cf. [Lab05]). On constate même une sur-convergence de l'erreur en termes de la norme  $L^2$  du déplacement. Il est à noter que du fait de l'inclinaison de la fissure, on a  $\underline{\underline{\sigma}}^I \cdot \underline{n} \neq 0$  sur  $\Gamma_N$ . Ceci implique que la contribution de l'intégrale sur  $\Gamma_N$  à  $\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta}_i)$  n'est plus nulle dans ce cas.

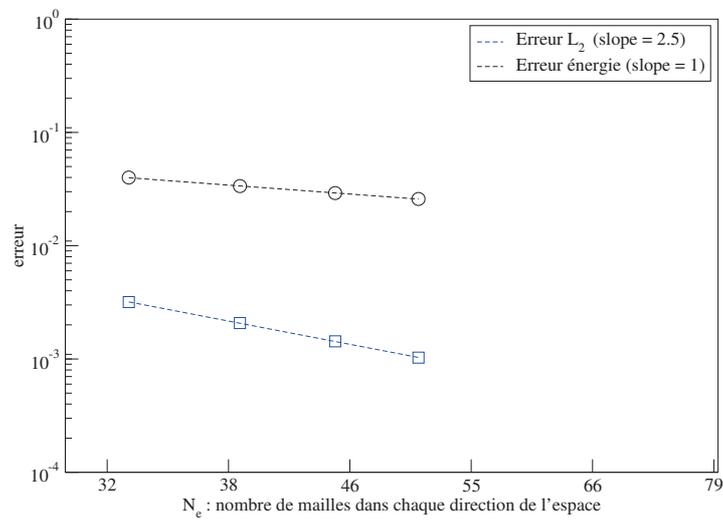
On compare les erreurs en termes du taux de restitution d'énergie obtenues pour les deux cas suivants : l'interpolation initiale du champ  $\underline{\theta}_i$  et la nouvelle interpolation définie par (3.47). La figure 3.16 montre les résultats obtenus pour ces deux choix d'interpolation. L'erreur obtenue est plus faible avec l'interpolation (3.47). De plus, on retrouve l'ordre théorique de convergence pour l'erreur en termes du taux de restitution d'énergie, qui vaut deux fois l'ordre de l'erreur en termes de la norme en énergie, soit 2 pour des éléments X-FEM linéaires avec un enrichissement géométrique [Chi15].

### 3.1.4.2 Fissure plane à front droit dans un maillage libre tétraédrique

Le problème présenté est identique à celui de la section 3.1.3 : la fissure est plane à front droit débouchant de façon normale aux bords ( $\alpha_0 = 0$ ). Ce test permet donc d'analyser la précision de la méthode afin de calculer le taux de restitution d'énergie le long du front de fissure sur un maillage non-structuré, voir figure 3.17(a). La méthode X-FEM permet très facilement d'introduire la fissure par l'usage des *level sets*. Sur la figure 3.17(b), qui représente l'évolution de  $G$  en fonction de l'abscisse curviligne, on constate que le calcul de  $G$  avec la nouvelle l'interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$  (3.47) permet de retrouver un résultat précis puisque l'on passe de  $\sim 6\%$  à moins de  $1\%$  d'erreur sur le calcul de  $G$ .



(a) Problème de référence et base locale associée au front de fissure.



(b) Étude de convergence sur l'erreur en norme  $L^2$  et l'erreur en énergie.

FIGURE 3.15 – Étude d'une fissure plane à front droit incliné.

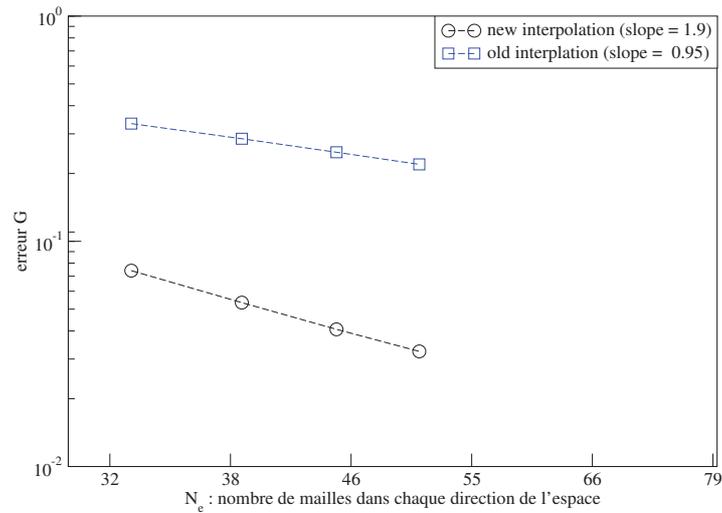
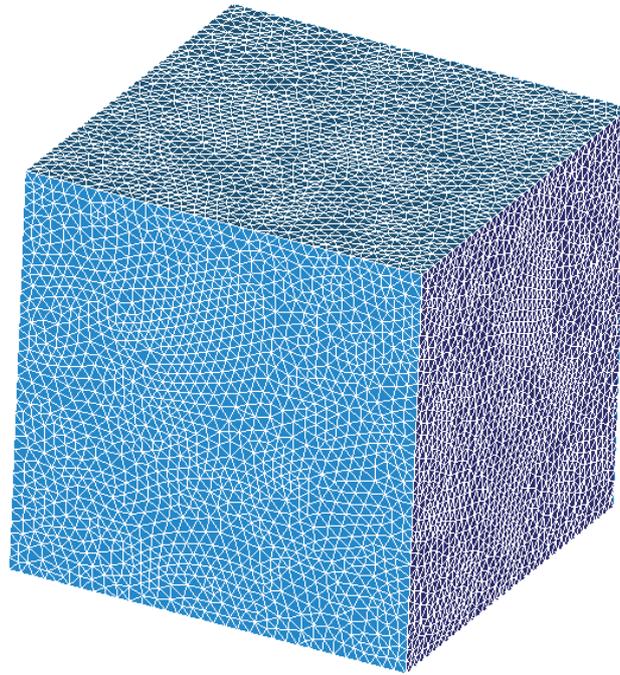


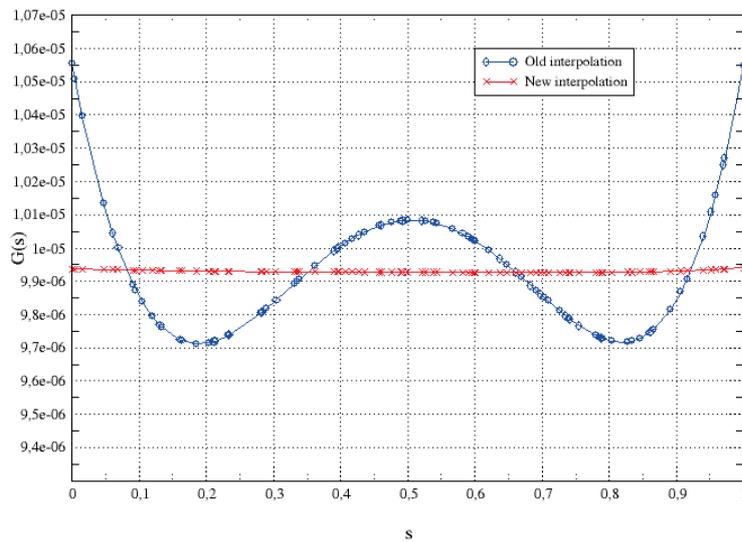
FIGURE 3.16 – Erreur relative de  $G$  en fonction du raffinement pour les deux choix d'interpolations du champ  $\theta_i$ .

## 3.2 Calcul numérique des facteurs d'intensité de contrainte

L'estimation des facteurs d'intensité des contraintes, calculés en élasticité linéaire, permet de définir la vitesse de propagation et l'angle de bifurcation de la fissure. Dans la section 1.1.3.3, on a vu que la formule d'Irwin permettait de relier le taux de restitution d'énergie  $G$  aux facteurs d'intensité de contrainte. Cette formule permet à partir du calcul de  $G$  d'obtenir le seul facteur d'intensité de contrainte non nul si le problème considéré ne fait intervenir qu'un seul mode. Par exemple pour un mode I,  $K_I$  s'exprime directement en fonction de  $G$ . La limite de cette approche est atteinte si on considère un mode mixte. En effet, on ne peut pas découpler les facteurs d'intensité de contrainte dans la formule d'Irwin et il faut donc avoir recours à d'autres méthodes. Une des approches les plus classiques de la littérature est la méthode d'intégrale d'interaction introduite par [Ste76] pour des fissures bidimensionnelles et étendue au tridimensionnel par [Nak89; Nak91]. La méthode s'appuie sur une réécriture de l'intégrale  $J$  qui permet d'introduire des champs auxiliaires. Ces champs auxiliaires permettent de découpler les différents modes et d'extraire les facteurs d'intensité de contrainte. L'intégrale peut être exprimée sous forme d'une intégrale de domaine et évaluée comme une étape de post-traitement du problème mécanique.



(a) Maillage non-structuré composé de tétraèdres.



(b) Calcul de  $G$  le long du front de fissure.

FIGURE 3.17 – Taux de restitution  $G$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ .

### 3.2.1 Forme bilinéaire du taux de restitution d'énergie

$\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{\theta})$  est une fonction quadratique du champ de déplacement  $\underline{u}$ . La forme bilinéaire  $g$  associée à  $\mathcal{G}$  est définie par :

$$g(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta}) = \frac{1}{4} (\mathcal{G}(\underline{u} + \underline{v}, \underline{\theta}) - \mathcal{G}(\underline{u} - \underline{v}, \underline{\theta})), \quad (3.50)$$

où  $\underline{v}$  est un champ de déplacement associé à un champ de contrainte à l'équilibre, appelé champ de déplacement auxiliaire.

Soit  $\underline{v}$  la solution du problème : trouver  $\underline{v}$ , tel que  $\underline{v} = \underline{v}_D$  sur  $\Gamma_D$ , qui minimise l'énergie potentielle :

$$W(\Omega, \underline{v}) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{F}^v \cdot \underline{v} \, d\Gamma. \quad (3.51)$$

On montre que  $g(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta})$  s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} g(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} \left[ \left( (\underline{\sigma}(\underline{u}) \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{\nabla} \underline{u}) \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta} \right) \right. \\ & - \frac{1}{2} \left( \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) + \underline{\sigma}(\underline{v}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \right) \text{div} \underline{\theta} \left. \right] d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \left( \underline{F} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{F}^v \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) \cdot \underline{\theta} \, dS \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} \underline{n} \cdot \left( \underline{\sigma}(\underline{u}) \cdot \underline{\nabla} \underline{v}_D + \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{\nabla} \underline{u}_D \right) \cdot \underline{\theta} \, dS. \end{aligned} \quad (3.52)$$

**Remarque.** Une attention particulière est portée aux termes de surface, car des résultats incorrects peuvent être obtenus s'ils ne sont pas pris en compte dans le calcul.

Le champ de déplacement  $\underline{u}$  s'écrit comme la somme d'une partie régulière  $\underline{u}_R$  et d'une partie singulière [Bui78] :

$$\underline{u} = \underline{u}_R + K_I \underline{u}^I + K_{II} \underline{u}^{II} + K_{III} \underline{u}^{III}, \quad (3.53)$$

où  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte et  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^{II}$  et  $\underline{u}^{III}$ , les champs asymptotiques définis dans la section 1.1.2. L'injection de (3.53) dans la forme bilinéaire  $g$ , permet d'obtenir les résultats suivant [Bui83 ; Gos02] :

$$g(\underline{u}, \underline{u}^I, \underline{\theta}) = K_I g(\underline{u}^I, \underline{u}^I, \underline{\theta}), \quad (3.54)$$

$$g(\underline{u}, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}) = K_{II} g(\underline{u}^{II}, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}), \quad (3.55)$$

$$g(\underline{u}, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}) = K_{III} g(\underline{u}^{III}, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}). \quad (3.56)$$

Ce résultat est obtenu en exploitant les propriétés de la forme bilinéaire  $g$  :

$$g(\underline{u}_R, \underline{u}^I, \underline{\theta}) = g(\underline{u}_R, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}) = g(\underline{u}_R, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}) = 0, \quad (3.57)$$

$$g(\underline{u}^I, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}) = g(\underline{u}^I, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}) = g(\underline{u}^{II}, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}) = 0. \quad (3.58)$$

De plus, l'application de la formule d'Irwin permet d'écrire :

$$g(\underline{u}^I, \underline{u}^I, \underline{\theta}) = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad (3.59)$$

$$g(\underline{u}^{II}, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}) = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad (3.60)$$

$$g(\underline{u}^{III}, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}) = \frac{1}{2\mu}. \quad (3.61)$$

Finalement, on peut exprimer les facteurs d'intensité de contrainte :

$$K_I = \frac{E}{1 - \nu^2} g(\underline{u}, \underline{u}^I, \underline{\theta}), \quad (3.62)$$

$$K_{II} = \frac{E}{1 - \nu^2} g(\underline{u}, \underline{u}^{II}, \underline{\theta}), \quad (3.63)$$

$$K_{III} = 2\mu g(\underline{u}, \underline{u}^{III}, \underline{\theta}). \quad (3.64)$$

Si on note  $s$  l'abscisse curviligne le long du front de fissure, on choisit de calculer les facteurs d'intensité de contrainte en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  par :

$$K_\alpha(s) = \sum_{j=1}^{N_p} K_\alpha^j p_j(s), \quad \forall \alpha \in \{I, II, III\}. \quad (3.65)$$

Pour calculer  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ , on résout les systèmes linéaires suivants, qui permettent d'obtenir les facteurs d'intensité de contrainte associés à chaque point du front de fissure :

$$[\mathcal{M}]\{K_I\} = \frac{E}{1 - \nu^2} \{g(\underline{u}, \underline{u}^I)\}, \quad (3.66)$$

$$[\mathcal{M}]\{K_{II}\} = \frac{E}{1 - \nu^2} \{g(\underline{u}, \underline{u}^{II})\}, \quad (3.67)$$

$$[\mathcal{M}]\{K_{III}\} = 2\mu \{g(\underline{u}, \underline{u}^{III})\}, \quad (3.68)$$

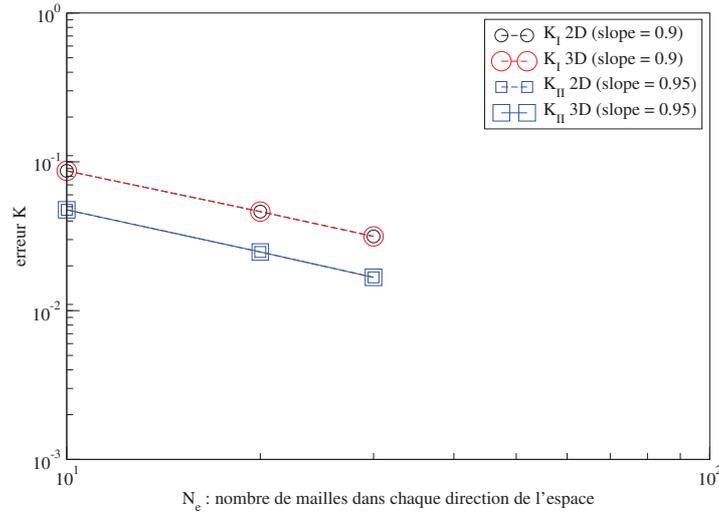


FIGURE 3.18 – Erreur relative sur  $K_I$  pour un mode I et erreur relative sur  $K_{II}$  pour un mode II, en fonction du raffinement de maillage.

où

$$[\mathcal{M}] = \left( \int_{\Gamma_0} p_i(s) p_j(s) ds \right)_{1 \leq i, j \leq \mathcal{N}_p}, \quad (3.69)$$

$$\{K_\alpha\} = \left( K_\alpha^j \right)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_p}, \text{ pour } \alpha \in \{I, II, III\}, \quad (3.70)$$

$$\{g(\underline{u}, \underline{u}^\alpha)\} = \left( g(\underline{u}, \underline{u}^\alpha, \underline{\theta}_i) \right)_{1 \leq i \leq \mathcal{N}_p}, \text{ pour } \delta \in \{I, II, III\}. \quad (3.71)$$

### 3.2.2 Calcul des facteurs d'intensité de contraintes sur un problème de fissure droite 3D

On considère de nouveau le problème de fissure droite décrit dans la section 3.1.3.1 pour un calcul éléments finis. La figure 3.18 présente les résultats obtenus en termes de l'erreur relative sur  $K_I$  pour un mode I et de l'erreur relative sur  $K_{II}$  pour un mode II. Ces résultats sont obtenus pour un modèle 2D et un modèle 3D en utilisant la nouvelle interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$ . On observe pour chaque problème que les résultats obtenus en 2D et en 3D se superposent. De plus l'ordre de convergence théorique de 1 est retrouvé.

#### 3.2.2.1 Analyse d'un mode II

Intéressons-nous à présent au cas d'un mode II. Nous posons un problème dont la solution est celle d'un mode II pur. Les conditions aux limites sont :

- $\underline{u}_D = \underline{u}^{II}$  sur  $\Gamma_D$ ,
- $\underline{F} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma}^{II}$  sur  $\Gamma_N$ .

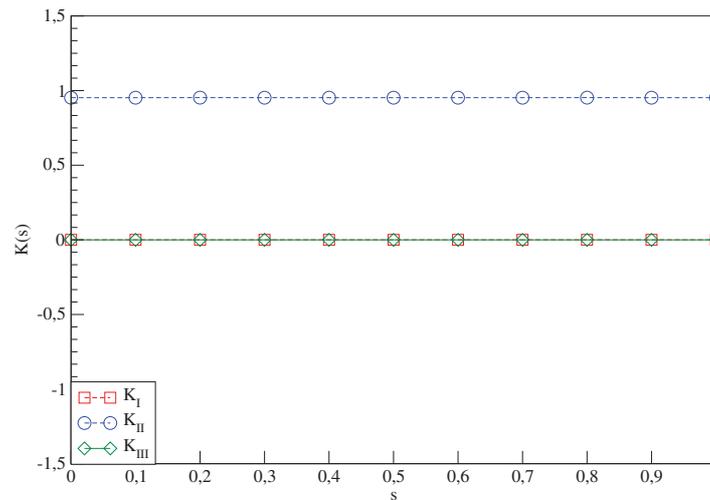


FIGURE 3.19 – Évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  pour une fissure sollicitée en mode II. Cette figure représente le cas où les intégrales de surface sont prises en compte dans le calcul.

On cherche à déterminer les facteurs d'intensité de contrainte, qui théoriquement, valent  $K_I = 0$ ,  $K_{II} = 1$  et  $K_{III} = 0$ . Remarquons qu'il est important pour la propagation de fissure de déterminer de manière précise ces quantités car elles sont utilisées par la suite pour déterminer la norme de la vitesse et la direction de propagation de la fissure. En prenant en compte les intégrales de surface de la forme bilinéaire  $g$ , qui au début de cette thèse n'était pas développées, on retrouve les résultats escomptés. En effet, sur la figure 3.19, qui représente l'évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ , on retrouve les résultats attendus, ce qui n'est pas le cas lorsque ces termes sont omis, voir figure 3.20.

### 3.2.2.2 Calcul des intégrales surfaciques

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure sollicitée en mode II soulève un problème lié au calcul des termes de surface associés à la forme bilinéaire  $g$ . En effet, dans cette thèse on s'intéresse à comprendre les résultats, parfois peu précis, obtenus avec la méthode  $G-\theta$  pour des situations tridimensionnelles. Dans la littérature le terme de volume est souvent discuté mais il est peu courant de trouver des références où les termes de surfaces sont étudiés. Si on s'intéresse aux contributions des termes de surface dans le cas considéré, on remarque que :

- les champs  $\underline{\theta}_i$  sont nuls sur  $\Gamma_D$  car  $\Theta = 0$  en dehors de  $T$ , voir figure 3.12. Par conséquent, l'intégrale de surface  $\Gamma_D$  est nulle.

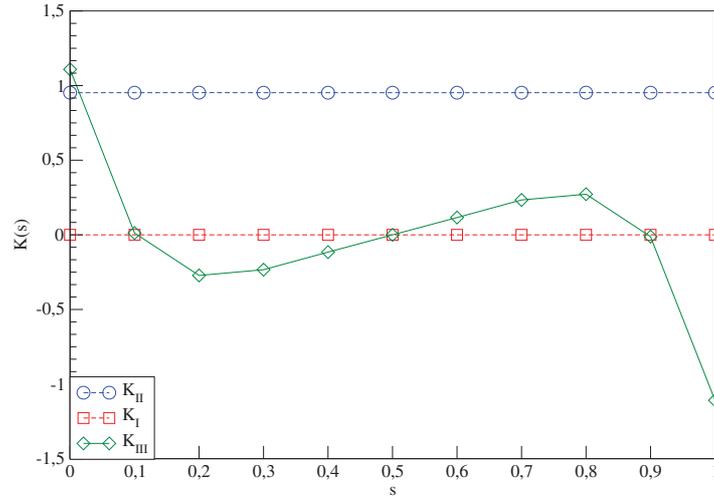


FIGURE 3.20 – Évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  pour une fissure sollicitée en mode II. Cette figure représente le cas où les intégrales de surface ne sont pas prises en compte dans le calcul.

- on a  $\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^I = \underline{0}$  et  $\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^{II} = \underline{0}$  sur  $T_+ \cup T_-$ , voir (1.11) et (1.19), ce qui implique :

$$\int_{\Gamma_N} (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^I \cdot \underline{\nabla} \underline{u}^{II}) \cdot \underline{\theta} \, dS = 0, \quad (3.72)$$

$$\int_{\Gamma_N} (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^{II} \cdot \underline{\nabla} \underline{u}^I) \cdot \underline{\theta} \, dS = 0. \quad (3.73)$$

On en déduit que le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  fait intervenir uniquement l'intégrale de volume dans l'expression de  $g(\underline{u}^I, \underline{u}^{II}, \underline{\theta})$  donnée par (3.52). En revanche, pour le calcul de  $K_{III}$ , on montre que l'intégrale de surface  $\int_{\Gamma_N} (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^{III} \cdot \underline{\nabla} \underline{u}^{II}) \cdot \underline{\theta} \, dS$  n'est pas nulle, voir (1.23). Ce terme doit être pris en considération dans le calcul pour compenser la contribution de l'intégrale de volume, qui elle non plus n'est pas nulle, afin d'obtenir  $K_{III} = 0$ . Dans le cas où l'intégrale de surface n'est pas prise en compte dans le calcul, on constate que  $K_{III}$  oscille et peut devenir plus grand que  $K_{II}$  comme observé sur la figure 3.20.

### 3.2.2.3 Remarque concernant les modèles comportant des surfaces libres de chargement

La contribution des intégrales de surface sur  $\Gamma_N$  s'écrit :

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (\underline{F} \cdot \underline{\nabla} v + \underline{F}^v \cdot \underline{\nabla} u) \cdot \underline{\theta} \, dS. \quad (3.74)$$

Pour une surface libre de chargement,  $\underline{F} = 0$  et il reste à calculer :

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} \underline{F}^v \cdot \underline{\nabla} u \cdot \underline{\theta} \, dS, \quad (3.75)$$

où  $\underline{F}^v = \underline{n} \cdot \underline{\sigma}^\alpha$ , où  $\alpha \in \{I, II, III\}$  désigne le mode associé au facteur d'intensité de contrainte à calculer. Malheureusement, le logiciel `code_aster` ne calcule cette intégrale que si un chargement est défini sur la surface  $\Gamma_N$ , ce qui n'est pas le cas pour une surface libre de chargement. Le risque de calculer des facteurs d'intensité de contrainte faux est donc élevé en présence de surfaces libre de chargement, pour un utilisateur non averti. En l'état actuel du code, l'utilisateur doit donc imposer explicitement la condition naturelle  $\underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{0}$  sur les surfaces libres de chargement, ce qui n'est pas la pratique usuelle des ingénieurs de calcul.

### 3.3 Conclusions

Ce chapitre a permis d'introduire la méthode  $G-\theta$  pour le calcul du taux de restitution d'énergie et son extension pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Cette méthode fournissait des résultats peu précis dans certaines situations. Nous avons donc cherché à comprendre plus finement les sources d'erreurs possibles. La méthode étant bien maîtrisée en 2D, nous avons cherché à identifier les résultats d'un problème 3D par comparaison avec les résultats d'un problème 2D. Cette étape a permis d'identifier plusieurs verrous propres au 3D : le choix d'une base appropriée qui permet de discrétiser le front de fissure, l'interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$  pour l'intégration numérique dans le code de calcul et la contribution des intégrales de surface pour lesquelles il est important de définir correctement le problème et les conditions aux limites sous peine d'obtenir des résultats faux. Nous avons montré, pour les polynômes de Legendre, qu'un choix pertinent d'interpolation du champ  $\underline{\theta}_i$  permettait d'améliorer significativement la solution pour un problème de fissure plane à front droit. De plus, la contribution des intégrales surfaciques dans le calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contraintes a été analysée et leur évaluation a été corrigée. Pour finir, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte a permis de constater l'importance du calcul des différents termes de surface et notamment ceux provenant du champ auxiliaire afin d'obtenir des résultats corrects. Ce dernier point pose un problème dans le cas d'une structure comportant des surfaces libres de chargement, car actuellement `code_aster` ne peut pas calculer les contributions provenant d'une partie de la frontière du domaine qui n'est pas explicitement chargée, ce qui expose au risque de calculer des facteurs d'intensité de contrainte incorrects. Une parade possible consiste à imposer explicitement la condition naturelle sur les surfaces libres de chargement.

# Prise en compte de la courbure pour l'estimation des facteurs d'intensité de contrainte

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Champ à l'équilibre dans le repère local . . . . .</b>	<b>121</b>
4.1.1	Analyse numérique de l'équilibre pour une solution axisymétrique . . . . .	123
4.1.2	Calcul du taux de restitution d'énergie pour une fissure plane à front courbe . . . . .	125
<b>4.2</b>	<b>Construction d'un champ de déplacement avec une prise en compte de la courbure . . . . .</b>	<b>127</b>
4.2.1	Analyse numérique du calcul du taux de restitution d'énergie	129
<b>4.3</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>130</b>
4.3.1	Fissure circulaire représentée dans un maillage bidimensionnel	130
4.3.2	Fissure circulaire représentée dans un maillage tridimensionnel	132
4.3.3	Fissure elliptique représentée dans un maillage tridimensionnel	133
<b>4.4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>135</b>

---

Le calcul des facteurs d’intensité de contrainte dans le cas tridimensionnel est un problème complexe car le passage au 3D pose plusieurs complications dues au fait que la fissure est une surface et que le front de fissure est une courbe. Ceci implique que les hypothèses de déformations planes ne sont plus vérifiées à cause de la courbure éventuelle du front de fissure et de l’intersection entre le front de fissure et la surface libre si la fissure est débouchante. Dans les cas pratiques, on considère que l’hypothèse des déformations planes constitue une bonne approximation loin des bords libres [Bui78]. Comme on l’a vu précédemment, les intégrales d’interaction permettent d’extraire les facteurs d’intensité de contrainte en utilisant comme champ auxiliaire les champs asymptotiques  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^{II}$  et  $\underline{u}^{III}$ . Cependant, quand la fissure devient courbe, ces champs obtenus en faisant l’hypothèse d’une fissure semi-infinie immergée dans un espace infini ne respectent plus l’équilibre et la compatibilité entre les contraintes et les déplacements [Gos02]. Dans le cas des fissures planes à front droit, l’influence de la courbure n’existe pas et les champs auxiliaires définis dans la base locale pour un point du front de fissure permettent une bonne approximation de la solution [Gos98]. Pour les fissures non-planes où à front courbes, Gosz *et al.* [Gos02] proposent de définir les déformations auxiliaires en termes de contraintes auxiliaires par la loi de Hooke et non en termes de gradients de déplacement. Cette approche est utilisée par Moës *et al.* [Moë02] et fournit des résultats satisfaisants. Plus récemment, González *et al.* [Gon13a; Gon13b], constatent que le calcul du champ de déformation obtenu par le champ de contrainte avec la loi de Hooke ou par les gradients du champ de déplacement ne permet pas de vérifier simultanément la compatibilité et les relations d’équilibre interne pour les champs auxiliaires. González *et al.* proposent de calculer deux champs de déformations, à partir des deux choix possibles, et d’en prendre la moyenne. L’objectif est de satisfaire une condition moyenne entre la compatibilité et la relation d’équilibre interne. Dans la section 1.1.2, on a défini les champs mécaniques au voisinage d’une fissure 2D par un développement en série de Williams :

$$\underline{u}(r, \varphi) = \sum_{p=I}^{III} \sum_n K_p^n \underline{g}^{p,n}(\varphi) r^{n/2}. \quad (4.1)$$

Les termes  $n \leq -1$ , sont dit « super-singuliers » et agissent très localement en point de fissure, les termes  $n > 1$  sont dit « sub-singuliers » et ont une influence dans les zones plus éloignées et le cas  $n = 1$  représente le terme singulier classique. Différentes techniques permettent d’exploiter la série pour extraire les facteurs d’intensité de contrainte. Lachambre *et al.* [Lac14] propose une méthode où le champ de déplacements est obtenu par corrélation numérique d’images 3D, ce champ étant ensuite projeté sur les séries de Williams où la courbure est prise en compte, suite aux travaux de Leblond *et al.* [Leb92]. Plus récemment, la méthode DEK-FEM introduite en 2D par Passiaux *et al.*

[Pas11], a été étendue au cas 3D par Roux-Langlois *et al.* [Rou15]. Le principe de la méthode découle d'une décomposition de domaine où un premier domaine entourant le front de fissure est traité avec une approximation 3D des développements en série des champs asymptotiques et un autre domaine, ne contenant pas la fissure, est traité par la méthode X-FEM, sans prise en compte de l'enrichissement singulier. Le passage au 3D implique l'utilisation des développements en série qui sont connus en 2D mais pas en 3D pour une géométrie quelconque. Roux-langlois *et al.*[Rou15] proposent alors d'utiliser une approximation du développement en série 3D fondée sur celui connu en 2D.

En 3D, les développements en série des champs asymptotiques sont disponibles pour des cas particuliers et des géométries simples [Yos11].

Dans la suite de ce chapitre, on se limitera à l'étude des fissures planes à front courbe sollicitées en mode I pur. Le mode I est le plus fréquent et aussi le plus néfaste dans les applications industrielles nucléaires. Pour EDF, les défauts à front circulaire ou elliptique, qui apparaissent dans un coin d'une structure, où l'on trouve de fortes concentrations de contrainte, sont un problème majeur. Il faut pouvoir étudier ces défauts de manière précise afin de répondre aux normes très exigeantes auxquelles EDF est soumise par l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN).

## 4.1 Champ à l'équilibre dans le repère local

Le post-traitement du problème mécanique utilise comme champs auxiliaires les champs asymptotiques  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^{II}$  et  $\underline{u}^{III}$  définis dans la section 1.1.2. Ces champs sont introduits pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte en utilisant les intégrales d'interaction. Dans le chapitre précédent, on a constaté, dans le cas des déformations planes pour une fissure à front droit, que les résultats obtenus étaient très corrects. En effet dans cette situation, les hypothèses de déformations planes s'appliquent également au problème 3D. La difficulté vient donc de la courbure le long du front de fissure.

Considérons une fissure plane à front courbe. En trois dimensions, à chaque point  $M_0(s)$  du front de fissure, repéré par son abscisse curviligne  $s$ , correspond une base locale  $(\underline{N}(s), \underline{B}(s), \underline{T}(s))$  qui vérifie les relations suivantes :

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial s} = \gamma \underline{T}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial s} = -\gamma \underline{N}, \quad (4.3)$$

où  $\gamma$  est la courbure locale au point  $M_0(s)$ . Il est à noter que pour une fissure plane,  $\underline{B}$  est uniforme. Pour un point  $M$  situé dans le plan  $(\underline{B}, \underline{N})$ , on définit la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$

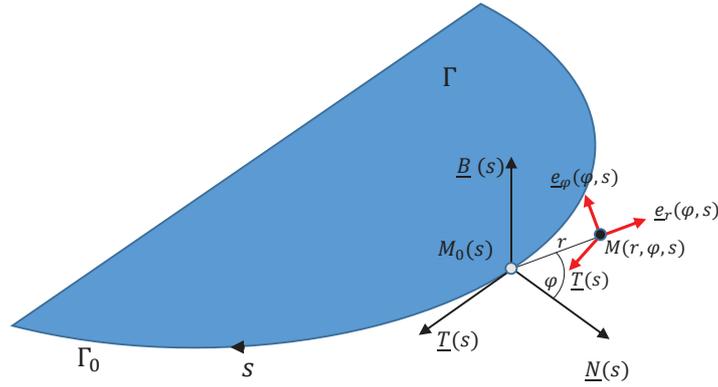


FIGURE 4.1 – Base locale dans le plan perpendiculaire au front de fissure.

associée aux coordonnées polaires  $r$  et  $\varphi$ , voir figure 4.1.

Le champ de déplacement  $\underline{u}$  s'écrit dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{T})$  :

$$\underline{u} = u_r(r, \varphi)\underline{e}_r(\varphi, s) + u_\varphi(r, \varphi)\underline{e}_\varphi(\varphi, s). \quad (4.4)$$

On a par définition :

$$\underline{e}_r = \cos\varphi \underline{N} + \sin\varphi \underline{B}, \quad \underline{e}_\varphi = -\sin\varphi \underline{N} + \cos\varphi \underline{B}. \quad (4.5)$$

Les vecteurs  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$  varient avec le point  $M(r, \varphi, s)$  et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} &= \underline{e}_\varphi, & \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial s} &= \gamma \cos\varphi \underline{T}, \\ \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\underline{e}_r, & \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial s} &= -\gamma \sin\varphi \underline{T}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour un point  $\underline{M}$  tel que  $\underline{M} = \underline{M}_0(s) + r\underline{e}_r(\varphi, s)$ , on a :

$$d\underline{M} = \underline{T}ds + \underline{e}_r dr + \underline{e}_\varphi r d\varphi + \gamma r \cos\varphi \underline{T}ds, \quad (4.7)$$

soit :

$$d\underline{M} = \underline{e}_r dr + \underline{e}_\varphi r d\varphi + (1 + \gamma r \cos\varphi) \underline{T}ds. \quad (4.8)$$

De plus, on peut expliciter la différentielle de  $\underline{u}$  dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{T})$  :

$$\begin{aligned} d\underline{u} &= \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} dr + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} d\varphi \right) \underline{e}_r + \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \underline{e}_\varphi \\ &\quad + u_r (\underline{e}_\varphi d\varphi + \gamma \cos\varphi \underline{T}ds) - u_\varphi (\underline{e}_r d\varphi + \gamma \sin\varphi \underline{T}ds). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le gradient de  $\underline{u}$  vérifie la relation  $d\underline{u} = \underline{\nabla}u \cdot d\underline{M}$ . Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}u = & \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi \\ & + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \\ & - \frac{u_\varphi \gamma \sin \varphi - u_r \gamma \cos \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} \underline{T} \otimes \underline{T}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

On remarque que le gradient du champ de déplacement fait intervenir la courbure. Le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  s'écrit dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{T})$  :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi + \sigma_{r\varphi} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r) + \sigma_{TT} \underline{T} \otimes \underline{T}. \quad (4.11)$$

L'expression de la divergence d'un tenseur d'ordre deux, en faisant l'hypothèse d'un champ axisymétrique, est donnée dans l'annexe B. Pour le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , qui est un tenseur symétrique, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{div} \underline{\sigma} = & \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\gamma (\sigma_{rr} - \sigma_{TT}) \cos \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} - \frac{\gamma \sigma_{r\varphi} \sin \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} \right) \underline{e}_r \\ & + \left( \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{\gamma (\sigma_{TT} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sin \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} + \frac{\gamma \sigma_{r\varphi} \cos \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} \right) \underline{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

On remarque que la divergence du tenseur des contraintes fait également intervenir la courbure. On en déduit que les champs de contraintes asymptotiques  $\underline{\sigma}^I$ ,  $\underline{\sigma}^{II}$  et  $\underline{\sigma}^{III}$  ne satisfont pas les conditions d'équilibre exprimées dans un système de coordonnées curvilignes. Nous retrouvons ainsi le résultat montré par Gosz *et al.* dans [Gos02].

#### 4.1.1 Analyse numérique de l'équilibre pour une solution axisymétrique

Les relations obtenues précédemment permettent d'identifier les termes dus à la courbure qui expliquent que les champs de contraintes asymptotiques  $\underline{\sigma}^I$ ,  $\underline{\sigma}^{II}$  et  $\underline{\sigma}^{III}$  ne soient pas à l'équilibre. Pour observer numériquement ce comportement et comprendre l'influence de la courbure du front de fissure, un test axisymétrique FEM est mis en place dans lequel on impose la solution en déplacement obtenue sous l'hypothèse des déformations planes comme condition aux limites sur tous les bords du domaine  $\partial\Omega$ , voir figure 4.2. Dans le domaine  $\Omega$  considéré initialement,  $L_x = L_y = 2$  et  $a = 1$ , la longueur de la fissure. Les paramètres matériau sont fixés à  $E = 0.1$  MPa et  $\nu = 0$ . Comme on impose la solution analytique sur tous les bords du domaine, on

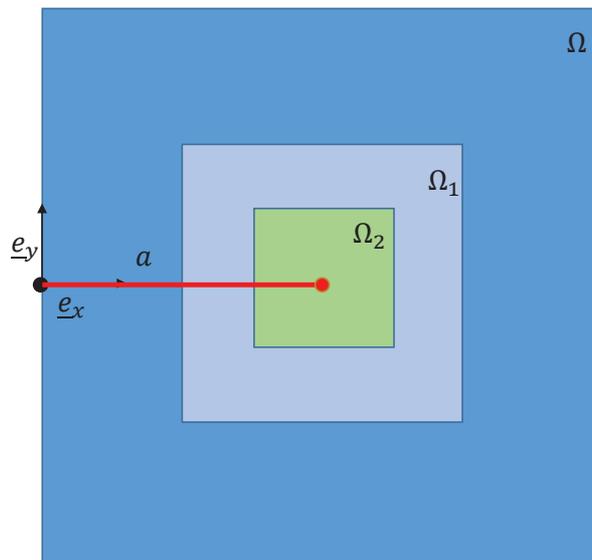


FIGURE 4.2 – Domaines  $\Omega_i$  entourant la pointe de la fissure.

peut considérer une série de domaines  $\Omega_i$  entourant le front de fissure, dont le rapport  $\frac{L_x^i}{a} = \frac{L_y^i}{a}$  diminue. Notons que pour un modèle axisymétrique, la longueur de la fissure  $a$  est égale au rayon de courbure  $R_c$ , qui est égal à l'inverse de la courbure, et on a donc :  $\gamma = \frac{1}{a} = \frac{1}{R_c}$ . On peut mener une étude de convergence en gardant le même nombre d'éléments dans chaque domaine  $\Omega_i$  pour différents raffinements successifs. Cet artifice permet de faire varier la taille de la zone autour du front de fissure sans modifier le nombre d'éléments, ni augmenter le temps CPU. Sur la figure 4.3, on constate que pour un domaine suffisamment petit (*ie.*  $\frac{r}{a}$ ), on retrouve les ordres de convergence attendus pour l'erreur relative en termes de la norme  $L^2$  du déplacement et l'erreur en termes de la norme en énergie, pour des éléments FEM. Ceci s'explique par le fait que dans une zone très localisée autour du front de fissure, la courbure n'a plus d'influence : localement le front de fissure devient droit et l'hypothèse d'une fissure semi-infinie immergée dans un espace infini redevient licite. Dans les applications industrielles, le domaine pour le calcul de  $G$  et des facteurs d'intensité de contrainte est choisi très petit par rapport au rayon de courbure. Ce choix permet de limiter les erreurs commises sur le calcul des facteurs d'intensité de contrainte avec l'utilisation des champs auxiliaires définis sous l'hypothèse des déformations planes. En revanche, ce choix impose un raffinement important au voisinage du front de fissure, ce qui n'est jamais la solution la plus pertinente pour l'industriel, car elle augmente considérablement les temps de calcul.

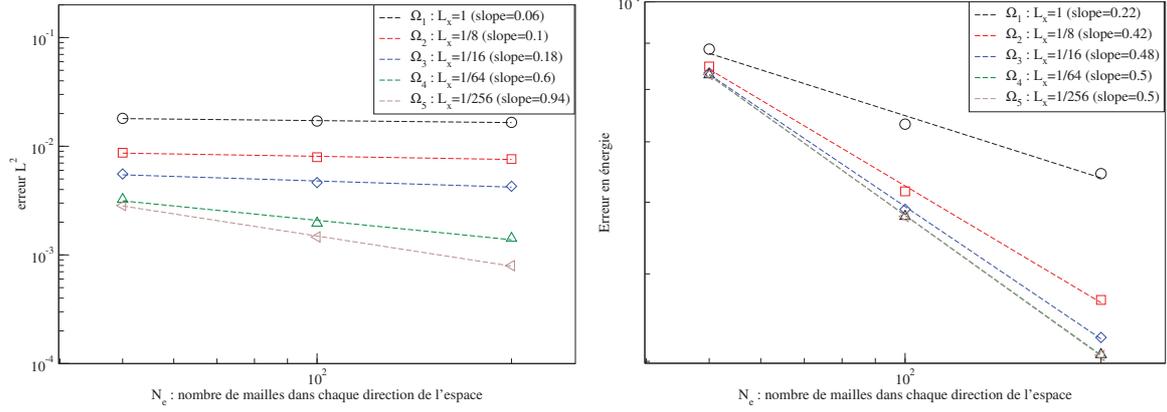


FIGURE 4.3 – Étude de convergence en norme  $L^2$  et en énergie pour différentes tailles de domaines  $\Omega_i$  entourant la pointe de fissure.

#### 4.1.2 Calcul du taux de restitution d'énergie pour une fissure plane à front courbe

On rappelle que l'intégrale  $J$  de Rice, s'écrit en utilisant le tenseur d'Eshelby sous la forme suivante :

$$J = \int_C \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} dS, \quad (4.13)$$

où  $\underline{n}$  est la normale au contour  $C$ ,  $\underline{N}$  est le vecteur normal au front de fissure et constant dans  $C$  et  $\underline{E}$  est le tenseur d'Eshelby défini par  $\underline{E} = \Psi(\underline{\varepsilon})\underline{I} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla}u$  et qui vérifie  $\text{div}\underline{E}^T = 0$ .

Pour retrouver ce résultat, on considère une fissure plane à front droit, ce qui implique que  $\gamma = 0$  et on définit deux surfaces  $A_1$  et  $A_2$  entourant le front de fissure dans un plan orthogonal au front de fissure et telles que  $A_2 \subset A_1$ , voir figure 4.4. On a d'après la propriété du tenseur d'Eshelby :

$$\int_{A_1/A_2} \text{div}\underline{E}^T \cdot \underline{N} dA = 0. \quad (4.14)$$

Le théorème de la divergence permet de retrouver les intégrales de contour :

$$\int_{A_1/A_2} \text{div}\underline{E}^T \cdot \underline{N} dA = \int_{\partial A_1} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} dS - \int_{\partial A_2} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} dS. \quad (4.15)$$

On a donc :

$$\int_{\partial A_1} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} dS - \int_{\partial A_2} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} dS = 0. \quad (4.16)$$

En faisant tendre contour  $\partial A_2$  vers un contour de mesure nulle, on retrouve l'expression de l'intégrale  $J$  :

$$J = \lim_{|\partial A_2| \rightarrow 0} \int_{\partial A_2} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} \, dS = \int_{\partial A_1} \underline{n} \cdot \underline{E} \cdot \underline{N} \, dS. \quad (4.17)$$

On peut également intégrer la conservation de l'énergie par pondération avec une fonction  $\underline{\theta}$  bien choisie :

$$\int_{A_1/A_2} \operatorname{div} \underline{E}^T \cdot \underline{\theta} \, dA = 0, \quad (4.18)$$

qui permet d'aboutir au calcul de  $G$  sous la forme d'une intégrale de domaine en supposant  $\underline{\theta} = 0$  sur  $\partial A_1$  et  $\underline{\theta} = \underline{N}$  sur  $\partial A_2$  :

$$G = - \int_{A_1} \operatorname{tr} \left( \underline{E} \cdot \underline{\nabla} \theta \right) \, dA. \quad (4.19)$$

La relation qui permet de définir l'intégrale de contour  $J$  ou l'intégrale de domaine  $G$  découle du fait que la transposée du tenseur d'Eshelby, reliée au tenseur des contraintes, est nulle.

Dans le cas d'un front de fissure courbe, on a montré que les champs ne sont plus à l'équilibre, ce qui implique des valeurs approchées des intégrales  $J$  et  $G$ . En injectant le champ de contrainte asymptotique  $\underline{\sigma}^I$  dans les équations d'équilibre, et en posant  $\eta = r\gamma = \frac{r}{R_c} = \frac{r}{a}$ , où  $a$  est le rayon de courbure, uniforme dans le cas d'une fissure circulaire, on observe un écart à l'équilibre de la forme (*cf.* [Sto18]) :

$$\operatorname{div} \left( \underline{\sigma}^I \right) = \eta \underline{\alpha}_1(r, \varphi) + \underline{\alpha}(\eta). \quad (4.20)$$

Le tenseur d'Eshelby associé à ce champ a un comportement similaire :

$$\operatorname{div} \left( \underline{E}^T \right) = \eta \underline{\beta}_1(r, \varphi) + \underline{\beta}(\eta). \quad (4.21)$$

Ces résultats aboutissent à des valeurs approchées des intégrales  $J$  et  $G$ . Soit  $R$  la distance du point du domaine d'intégration le plus éloigné du front, on a :  $\eta \leq \frac{R}{a}$ . Si on injecte le tenseur d'Eshelby dans l'expression de l'intégrale  $J$  ou de  $G$  et qu'on fait la différence entre la valeur obtenue et la valeur théorique, elle-même obtenue par application de la formule d'Irwin ( $K_I = 1 \text{ Pa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ ), on mesure à nouveau un écart lié à la courbure :

$$J - J_{th} = J_1 \frac{R}{a} + o\left(\frac{R}{a}\right), \quad (4.22)$$

$$G - G_{th} = G_1 \frac{R}{a} + o\left(\frac{R}{a}\right), \quad (4.23)$$

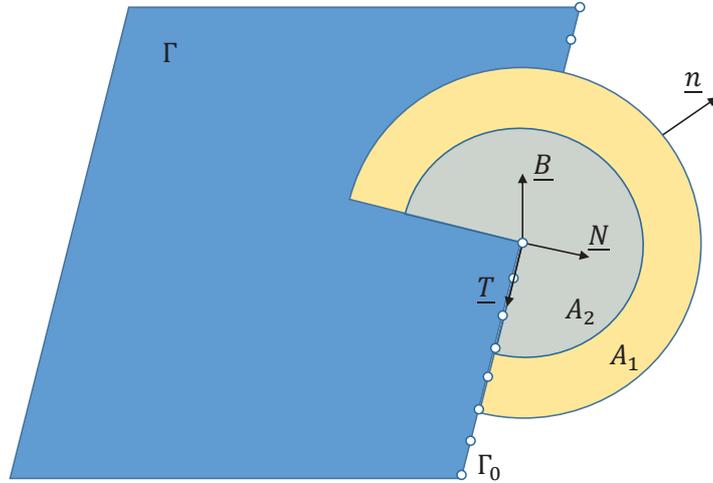


FIGURE 4.4 – Surfaces entourant le front de fissure dans un plan orthogonal.

où  $J_1$  et  $G_1$  sont des constantes qui dépendent de la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$ .

## 4.2 Construction d'un champ de déplacement avec une prise en compte de la courbure

Dans l'optique d'améliorer la précision du calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode  $G-\theta$ , il convient de déterminer des champs de déplacement permettant de réduire l'erreur liée à la courbure. Pour ce faire, une idée originale de Stolz [Sto18] est de construire, à partir des équations d'équilibre, un champ de déplacement en fonction de la courbure  $\gamma$ , asymptotiquement admissible en déformation plane et qui fournit des contraintes à divergence nulles ainsi qu'un tenseur d'Eshelby  $\underline{\underline{E}}$  qui satisfait  $\text{div}(\underline{\underline{E}}^T) = 0$ . Le problème axisymétrique est un bon point de départ pour valider les résultats car il permet des simplifications tout en conservant l'aspect tridimensionnel du problème. On cherche donc à construire un champ de déplacement faisant intervenir la courbure et corrigeant l'écart à l'équilibre. Dans [Sto18], Stolz a construit trois champs de déplacement  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$  :

$$\underline{u}_1 = \left( \frac{\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \right) [f_1(\varphi)], \quad (4.24)$$

$$\underline{u}_2 = \left( \frac{\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \right) [f_1(\varphi) + \eta f_2(\varphi)], \quad (4.25)$$

$$\underline{u}_3 = \left( \frac{\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \right) [f_1(\varphi) + \eta f_2(\varphi) + \eta^2 f_3(\varphi)], \quad (4.26)$$

où :

$$\underline{f}_1(\varphi) = \left( a_1 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_r + \left( b_1 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_\varphi, \quad (4.27)$$

$$\underline{f}_2(\varphi) = \left( a_2 \cos \frac{3\varphi}{2} + b_2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_r + \left( c_2 \sin \frac{3\varphi}{2} + d_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_\varphi, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_3(\varphi) = & \left( a_3 \cos \frac{5\varphi}{2} + b_3 \cos \frac{3\varphi}{2} + c_3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_r \\ & + \left( d_3 \sin \frac{5\varphi}{2} + e_3 \cos \frac{3\varphi}{2} + f_3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les paramètres  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  sont explicités dans l'annexe C.  $\underline{u}_1$  correspond à une écriture de la solution de Westergaard dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$ , et  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$  sont déterminés par les équations d'équilibre. La fonction  $\underline{f}_2(\varphi)$  est choisie de sorte à compenser les termes en  $\eta$  de la divergence du tenseur des contraintes associée à  $\underline{u}_1$ . La fonction  $\underline{f}_3(\varphi)$  est définie de façon à compenser les termes d'ordre  $\eta^2$  de la divergence du tenseur des contraintes associé à  $\underline{u}_2$ . Les contraintes associées aux champs de déplacement  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$  présentent un écart à l'équilibre inférieur à celles associées au champ  $\underline{u}_1$ . De même, l'erreur sur l'intégrale  $J$  et le taux de restitution d'énergie  $G$  est plus petite en considérant les champs de déplacement  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$  qu'en considérant le champ de déplacement  $\underline{u}_1$ .

- Si  $\underline{u} = \underline{u}_2$ , on a :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \eta^2 \underline{\alpha}_2(r, \varphi) + \underline{o}(\eta^2), \quad (4.30)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{E}}^T) = \eta^2 \underline{\beta}_2(r, \varphi) + \underline{o}(\eta^2), \quad (4.31)$$

$$J - J_{th} = J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 + o \left( \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right), \quad (4.32)$$

$$G - G_{th} = G_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 + o \left( \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right). \quad (4.33)$$

- Si  $\underline{u} = \underline{u}_3$ , on a :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \eta^3 \underline{\alpha}_3(r, \varphi) + \underline{o}(\eta^3), \quad (4.34)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{E}}^T) = \eta^3 \underline{\beta}_3 + \underline{o}(\eta^3), \quad (4.35)$$

$$J - J_{th} = J_3 \left( \frac{R}{a} \right)^3 + o \left( \left( \frac{R}{a} \right)^3 \right), \quad (4.36)$$

$$G - G_{th} = G_3 \left( \frac{R}{a} \right)^3 + o \left( \left( \frac{R}{a} \right)^3 \right). \quad (4.37)$$

**Remarque.** Plus le domaine d'intégration est petit devant la courbure (i.e  $R$  petit devant  $a$ ), plus l'erreur commise sur  $G$  ou l'intégrale  $J$  sera petite.

### 4.2.1 Analyse numérique du calcul du taux de restitution d'énergie

En reprenant le test axisymétrique de la section 4.1.1, on effectue une analyse de convergence, pour le domaine  $\Omega_2$ , en utilisant successivement les trois champs de déplacement, c'est-à-dire les champs  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$ . La figure 4.5, qui présente l'erreur relative en termes de la norme  $L^2$  du déplacement, montre l'intérêt de la prise en compte de la courbure dans le champ de déplacement. En effet, pour le champ  $\underline{u}_3$ , on retrouve l'ordre de convergence théorique, alors que le champ  $\underline{u}_1$  converge très lentement, à l'ordre 0.1. La prise en compte de la courbure dans le champ de déplacement permet donc d'obtenir des résultats plus précis sans pour autant diminuer la taille du domaine d'intégration en raffinant le maillage.

Intéressons-nous à présent au modèle axisymétrique, et évaluons le calcul de  $G$  par la méthode  $G-\theta$  où les champs d'entrée de la méthode sont les champs  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$ . Les équations (4.23), (4.33) et (4.37) montrent que l'écart entre la valeur de  $G$  obtenue en considérant  $\underline{u} = \underline{u}_1$ ,  $\underline{u} = \underline{u}_2$  ou  $\underline{u} = \underline{u}_3$ , et la valeur théorique de  $G$  dépend de façon linéaire, quadratique ou cubique de  $\frac{R}{a}$ . On veut étudier la dépendance de  $G$  au paramètre  $\frac{R}{a}$  pour une finesse de maillage fixée. On considère différents domaines  $\Omega_i$  entourant la pointe de la fissure. Plus le domaine  $\Omega_i$  est petit, plus  $R$  est petit. La taille des mailles  $\Delta x$  dans chaque domaine  $\Omega_i$  est choisie de sorte à ce que la taille de maille adimensionnelle  $h = \frac{\Delta x}{R}$  soit la même pour chaque domaine. De façon contre intuitive, bien que les domaines soit de plus en plus petit, l'erreur due à la discrétisation est fixée. Dans la méthode d'intégrale de domaine, on fixe  $R_S = R = 4\Delta x$  et on trace pour différents domaines  $\Omega_i$ , entourant la pointe de la fissure, l'erreur relative en termes de  $G$  en fonction du rapport  $\frac{R}{a}$ . Les courbes obtenues sont présentées sur la figure 4.6. Ces courbes illustrent le fait que l'écart entre la valeur de  $G$  obtenue par la méthode  $G-\theta$  et la valeur théorique de  $G$  varie comme  $\frac{R}{a}$ , pour  $\underline{u} = \underline{u}_1$ , le carré de  $\frac{R}{a}$ , pour  $\underline{u} = \underline{u}_2$ , et le cube de  $\frac{R}{a}$ , pour  $\underline{u} = \underline{u}_3$ . Les trois courbes tendent vers une asymptote qui correspond à l'erreur relative obtenue pour une problème de fissure à front droit et la finesse de maillage fixée. Considérer le champ de déplacement  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  ou  $\underline{u}_3$  permet d'obtenir la valeur théorique de  $G$  avec une précision donnée, à condition que  $\frac{R}{a}$  soit suffisamment petit. En revanche, la valeur du paramètre  $\frac{R}{a}$  permettant d'obtenir cette précision avec  $\underline{u}_3$  est plus grande que celle permettant d'obtenir la même précision avec  $\underline{u}_2$ , elle-même étant plus grande que celle permettant d'obtenir la même précision avec  $\underline{u}_1$ . On en conclut qu'utiliser  $\underline{u}_2$  ou  $\underline{u}_3$  comme champ auxiliaire à la place de  $\underline{u}_1$ , dans une méthode d'intégrale d'interaction, permettra d'obtenir une solution plus précise pour

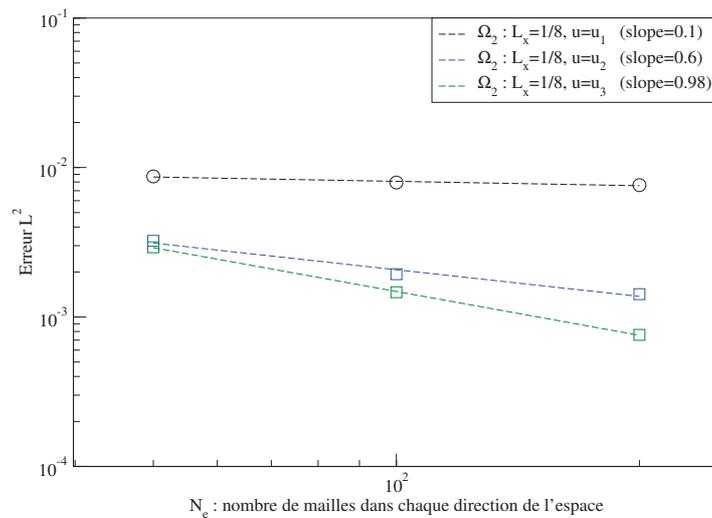


FIGURE 4.5 – Analyse de convergence en norme  $L^2$  pour un domaine  $\Omega_i$  fixé, obtenue avec les champs de déplacement  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$ .

un même niveau de raffinement.

## 4.3 Résultats numériques

On présente dans cette section plusieurs problèmes de fissures planes à front courbe afin de mesurer l'amélioration sur le calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte. On étudiera dans un premier temps un modèle axisymétrique d'une fissure circulaire soumise à un chargement normal appliqué aux lèvres de la fissure pour lequel on dispose d'une solution analytique complète. Une analyse de convergence peut donc être effectuée. On présentera pour finir deux tests tridimensionnels : une fissure circulaire 3D et une fissure elliptique pour laquelle la courbure n'est plus constante le long du front de fissure. Le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte sont obtenus par la méthode  $G-\theta$ .

### 4.3.1 Fissure circulaire représentée dans un maillage bidimensionnel

Le problème de fissure circulaire est bien connu dans la littérature, notamment pour tester la précision et la robustesse des méthodes numériques par le calcul de  $G$  et des facteurs d'intensité de contrainte. L'intérêt de ce problème est qu'une solution analytique est connue. Sneddon [Sne46] propose une solution analytique en termes de déplacement et de contrainte pour un chargement en traction uniforme, et Kassir *et al.* [Kas46] étendent la solution en termes de facteurs d'intensité de contrainte au cas

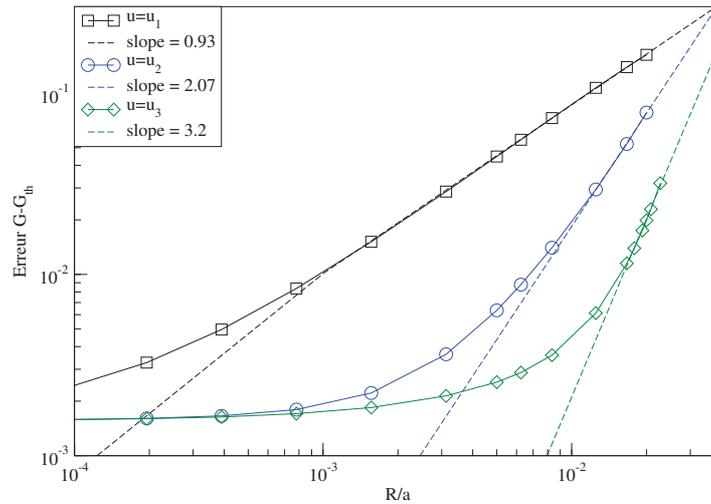


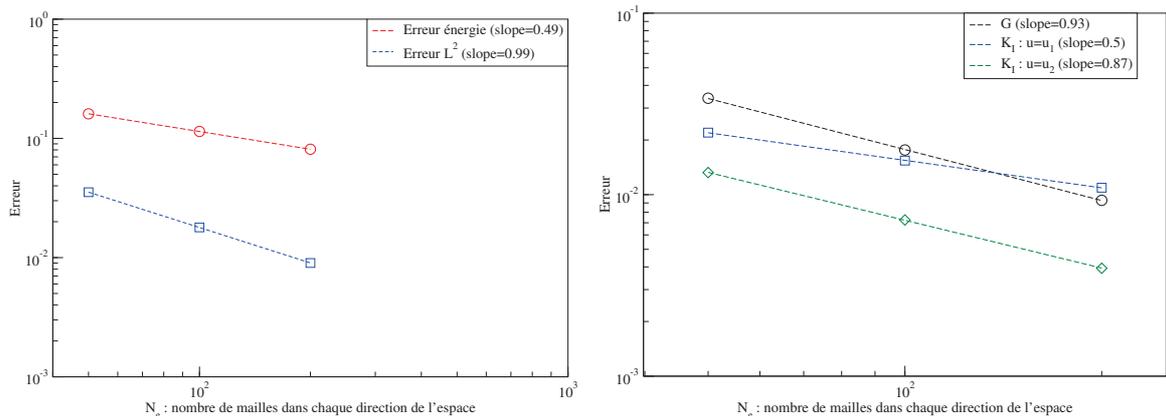
FIGURE 4.6 – Calcul de l’erreur relative en termes de  $G$  en fonction de  $\frac{R}{a}$  pour une finesse de maille fixée et pour les champs de déplacement  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  et  $\underline{u}_3$ .

du cisaillement uniforme. Plus tard, Fabrikant [Fab88; Fab89] obtient une solution analytique en déplacement, contraintes et facteurs d’intensité de contrainte pour un chargement en traction uniforme et cisaillement uniforme.

La fissure étant circulaire, on utilise un modèle axisymétrique sur un maillage 2D, comme défini dans la section 4.1.1. La solution analytique de Fabrikant [Fab88] est imposée comme condition aux limites sur tous les bords du domaine  $\Omega$ , voir figure 4.2. La figure 4.7(a) présente l’erreur relative en termes de la norme  $L^2$  du déplacement et l’erreur relative en termes de la norme en énergie en fonction du nombre d’éléments dans chaque direction de l’espace  $N_e$ . Les ordres de convergences attendus pour un calcul éléments finis sont retrouvés. De plus, on utilise la méthode  $G-\theta$  pour calculer  $G$  et  $K_I$ . Pour le problème considéré, l’expression analytique de  $K_I$  est donnée par la formule suivante (cf. [Tad00]) :

$$K_I = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}}, \quad (4.38)$$

où  $\sigma_0$  est la force normale uniforme appliquée sur les lèvres de la fissure. Le calcul de  $G$  par la méthode  $G-\theta$  fait intervenir uniquement la solution du problème éléments finis qui est à l’équilibre, au sens discret. Cette méthode permet donc d’obtenir l’ordre de convergence théorique de 1 pour l’erreur relative de  $G$  voir figure 4.7(b). En revanche, l’extraction de  $K_I$  avec cette méthode fait intervenir également un champ auxiliaire. Le choix classique de la solution de Westergaard, qui n’est pas à l’équilibre, donne accès à des valeurs de  $K_I$  entachées d’une erreur importante et l’ordre de convergence observé pour l’erreur relative sur  $K_I$  (0.5) est inférieure à la valeur théorique attendue (1), voir figure 4.7(b). L’utilisation du champ  $\underline{u}_2$  comme champ auxiliaire permet d’atteindre un niveau d’erreur plus faible et permet de retrouver l’ordre de convergence théorique.



(a) Étude de convergence en norme  $L^2$  et en énergie. (b) Erreur en termes de l'erreur relative de  $G$  et de  $K_I$ , en fonction du raffinement du maillage.

FIGURE 4.7 – Étude d'un modèle axisymétrique.

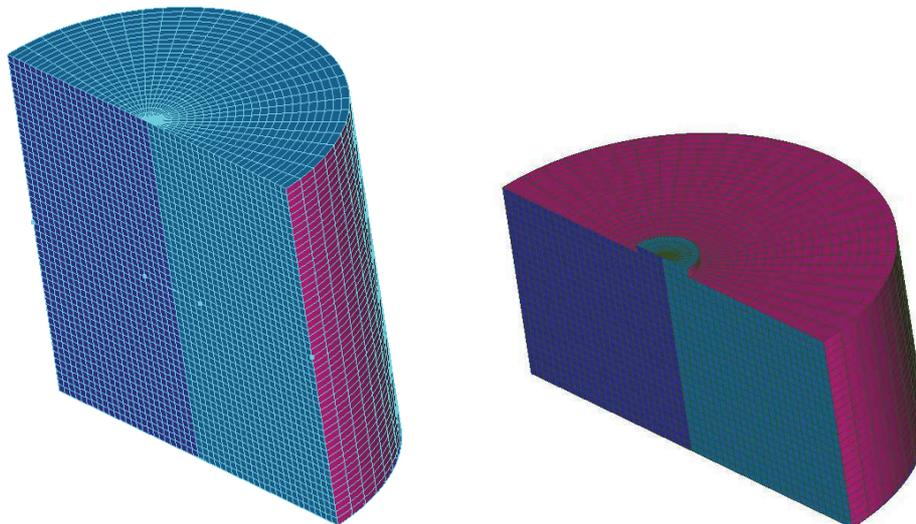
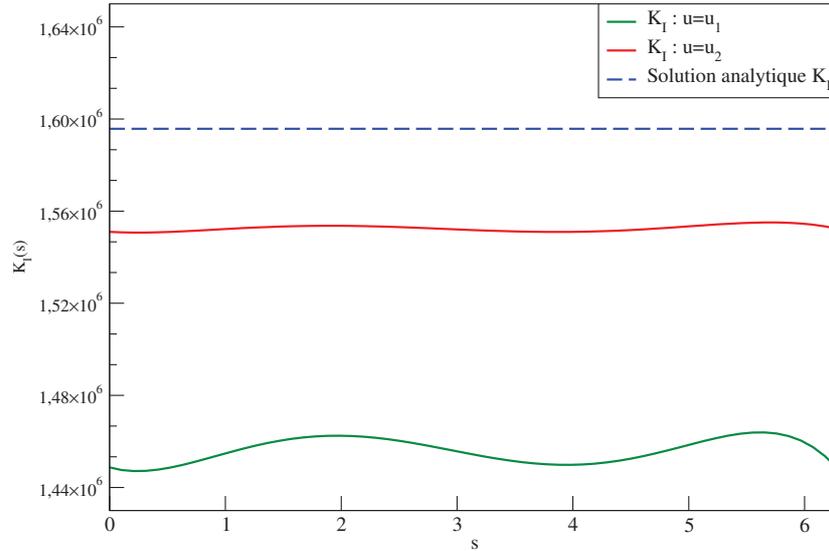


FIGURE 4.8 – Fissure circulaire 3D.

Il est à noter que Agathos *et al.* [Aga15] avaient déjà constaté le problème de convergence des facteurs d'intensité de contrainte sur un test de fissure circulaire avec l'utilisation de la solution de Westergaard comme champ auxiliaire dans les intégrales d'interaction. Ils remarquent notamment que l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte ne diminue que très légèrement quand on raffine le maillage.

### 4.3.2 Fissure circulaire représentée dans un maillage tridimensionnel

On considère une fissure plane à front circulaire de rayon  $a = 2$  dans un demi-cylindre de hauteur  $L = 10a$ , ce qui permet de considérer que les chargements imposés

FIGURE 4.9 – Évolution de  $K_I$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ .

sur les faces supérieures et inférieures sont rejetés à l'infini, voir figure 4.8. Une charge uniforme  $\sigma_0 = 1$  MPa est appliquée sur la face supérieure et sur la face inférieure de la structure dans la direction normale aux lèvres de la fissure. Le problème est axisymétrique et la valeur du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ , pour cette fissure et ce chargement, est :

$$K_I = 2\sigma_0\sqrt{\frac{a}{\pi}} = 1595769 \text{ Pa}\cdot\sqrt{\text{m}}. \quad (4.39)$$

Les courbes représentant  $K_I$  en fonction de l'abscisse curviligne obtenues en choisissant comme champs auxiliaires  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  sont représentées sur la figure 4.9. L'utilisation du champ  $\underline{u}_2$  permet de diminuer l'erreur relative de  $\sim 10\%$  à  $\sim 2.5\%$ . De plus, l'amplitude des oscillations le long du front de fissure diminue.

### 4.3.3 Fissure elliptique représentée dans un maillage tridimensionnel

Analysons à présent le calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure plane à front elliptique, de grand axe  $a = 1$  et de petit axe  $b = 0.5$ . La structure est soumise à une charge uniforme  $\sigma_0 = 1$  MPa sur sa face supérieure et dans la direction normale à la lèvre de la fissure. Les paramètres matériau sont  $E = 200000$  MPa et  $\nu = 0.3$ . On représente  $1/8$  de la structure en exploitant les symétries, voir figure 4.10. Pour le problème considéré, l'expression analytique de  $K_I$  est donnée par la formule

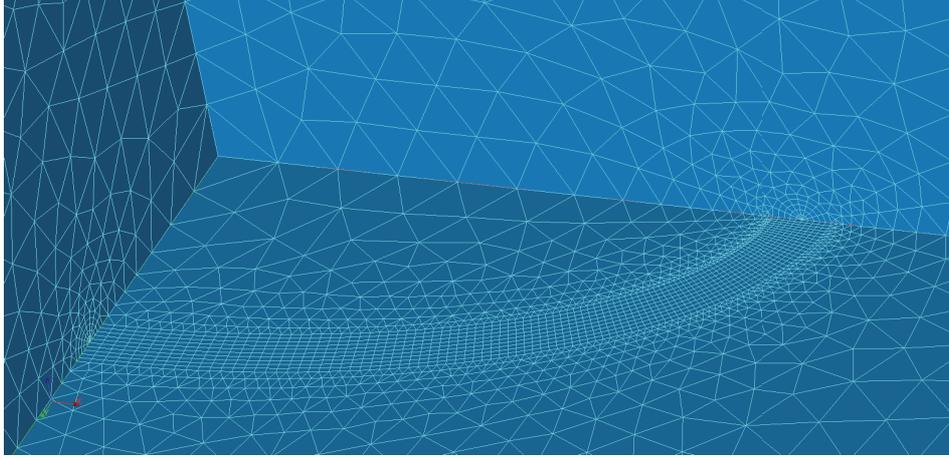


FIGURE 4.10 – Fissure elliptique 3D.

suivante (cf. [Tad00]) :

$$K_I = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi b}}{V(k)} \left( \sin^2 \psi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \psi \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.40)$$

où l'angle  $\psi$  repère un point sur le front de fissure et  $V(k)$  est une intégrale elliptique de deuxième espèce qu'il faut évaluer numériquement. Un point du front de fissure de coordonnées  $(x, y, z)$  vérifie  $x = a \cos \psi$ ,  $y = b \sin \psi$  et  $z = 0$ , avec  $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . L'expression de  $V(k)$  est :

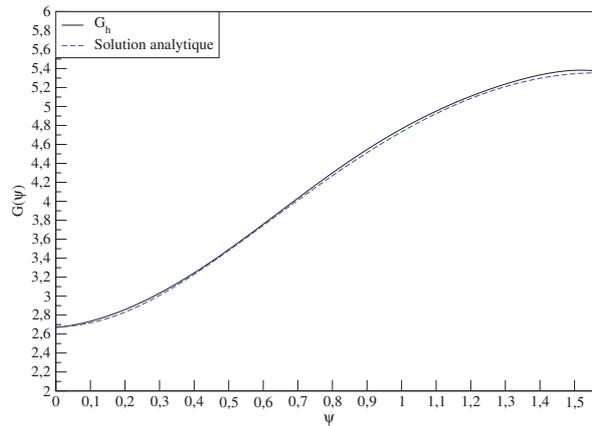
$$V(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \rho} \, d\rho, \quad (4.41)$$

où  $k$  est l'excentricité, définie par  $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ .

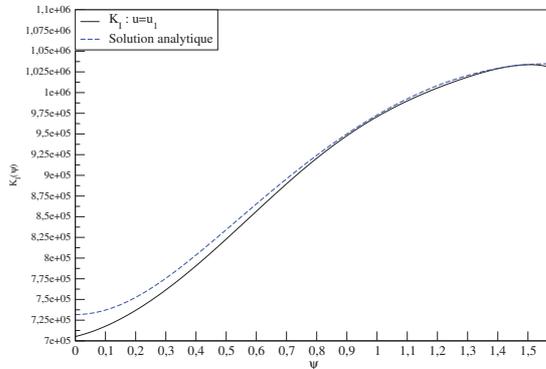
Pour une fissure elliptique, la courbure n'est plus constante le long du front de fissure et il faut la prendre en compte. Pour ce faire, on calcule la courbure locale. Pour une fissure elliptique, on a :

$$\gamma = \frac{1}{R_c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}^3}. \quad (4.42)$$

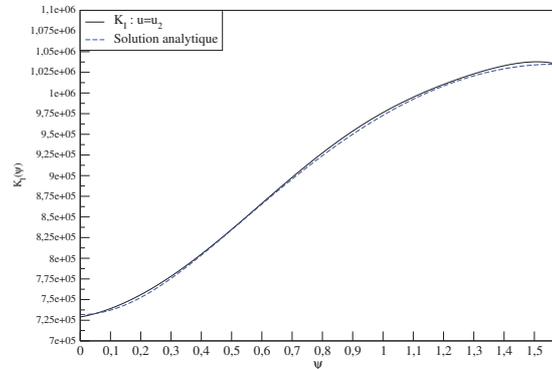
La figure 4.11(a) présente l'évolution du taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction de l'angle  $\psi$  qui repère un point du front de fissure. Le maillage utilisé permet de capter correctement la solution analytique. La figure 4.11(b) présente l'évolution du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  en fonction de l'angle  $\psi$  obtenue en utilisant  $\underline{u}_1$  comme champ auxiliaire. L'écart observé entre la solution éléments finis et la solution



(a) Évolution de  $G$  en fonction de l'angle  $\psi$  qui repère un point du front de fissure.



(b) Évolution de  $K_I$  en fonction de l'angle  $\psi$  qui repère un point du front de fissure. Ce résultat est obtenu en prenant  $\underline{u}_1$  comme champ auxiliaire.



(c) Évolution de  $K_I$  en fonction de l'angle  $\psi$  qui repère un point du front de fissure. Ce résultat est obtenu en prenant  $\underline{u}_2$  comme champ auxiliaire.

FIGURE 4.11 – Calcul de  $G$  et de  $K_I$  pour une fissure plane à front elliptique.

analytique est d'autant plus élevé que la courbure est grande. La figure 4.11(c) présente l'évolution de  $K_I$  en fonction de  $\psi$  obtenue en utilisant  $\underline{u}_2$  comme champ auxiliaire. Cette fois, l'écart observé entre la solution éléments finis et la solution analytique est uniforme et ne dépend donc plus de la courbure.

## 4.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'observer les difficultés liées à la courbure du front de fissure et notamment à l'utilisation des champs asymptotiques  $\underline{u}^I$ ,  $\underline{u}^{II}$  et  $\underline{u}^{III}$  comme champs auxiliaires dans les intégrales d'interactions. L'hypothèse des déformations planes utilisée pour obtenir la solution de Westergaard, n'est plus adaptée pour ces géométries de fissure et il faut prendre en compte la courbure locale pour retrouver une solution à l'équilibre. Pour ce faire, nous avons proposé, dans le cas d'une fissure plane à front

courbe sollicitée en mode I, de construire de nouveaux champs auxiliaires dans le but de prendre en compte la courbure et ainsi diminuer l'écart à l'équilibre qui explique les résultats présentés sur la figure 4.3. L'implémentation de ces champs dans un code éléments finis permet de pouvoir considérer des domaines d'intégration plus grands et donc d'éviter d'augmenter le raffinement au voisinage du front de fissure. Les cas proposés ont permis de démontrer l'intérêt de ces nouveaux champs auxiliaires.

# Conclusion générale et perspectives

---

Les études effectuées par le UKC sur la propagation de fissures dans les briques de graphite ont soulevé des problèmes qui nécessitent des solutions afin de pouvoir réaliser des études 3D de propagation de défauts de manière robuste. À ce titre, une analyse fine des phénomènes a été menée afin de mieux comprendre et identifier les verrous théoriques et numériques.

Dans la première partie de ces travaux de thèse, on a choisi de travailler avec la méthode X-FEM. Cette méthode permet de représenter une discontinuité, de type fissure, dans la structure sans modifier le maillage, ce qui offre une grande souplesse à l'usage puisque l'utilisateur peut facilement introduire la forme de la fissure souhaitée dans le maillage. En revanche les *level sets* qui sont utilisées pour représenter la fissure doivent être en mesure de conserver toutes leurs propriétés durant la propagation de la fissure. Dans ce mémoire, on a exposé différentes méthodes qui permettent de reconstruire les *level sets* après chaque pas de propagation pour retrouver les propriétés de fonction distance signée et d'orthogonalité. On a constaté, à travers différents cas d'études, que ces méthodes ne sont pas toujours précises pour obtenir une *level set* correctement définie et régulière. Nous avons donc proposé deux méthodes fondées sur la *fast marching method* : une utilisant un schéma aux différences finies qui est applicable à un maillage structuré, et une autre applicable uniquement à un maillage composé d'éléments simplexes. Pour ne pas être restreint dans l'application de la méthode, nous avons proposé d'étendre la seconde méthode à tous types de mailles, en utilisant un découpage des éléments en éléments simplexes, pour des éléments linéaires et des éléments quadratiques. Ces méthodes ont été validées sur différents tests en comparaison avec d'autres méthodes et les résultats obtenus ont permis de constater le réel intérêt de cette approche. La simulation de la propagation de fissures, à angle imposé, dans la brique de graphite entière de 82,5 cm montre que la méthode est adaptée au cas industriel visé. Les méthodes ont été implémentées dans `code_aster` et sont mises à disposition de l'ingénierie pour réaliser des calculs de propagation de fissures avec la méthode X-FEM.

Dans la deuxième partie de ce travail, on s'est intéressé plus précisément au calcul

du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte en pointe de fissure afin d'identifier l'origine des écarts parfois importants entre la solution numérique obtenue et la solution attendue. On a montré pourquoi il est nécessaire de calculer précisément le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte pour simuler correctement la propagation d'une fissure. En effet, dans les études sur les briques de graphite, où le nombre de pas de propagation est important, on a constaté une déviation de la fissure due à une accumulation d'erreurs numériques au cours de l'avancée de la fissure. Nous avons mené une analyse fine d'une méthode d'intégrale de domaine, ce qui nous a permis de mieux appréhender les difficultés liées à la discrétisation, le long du front de fissure, du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte dans le cas tridimensionnel. Plusieurs solutions ont été proposées afin d'améliorer la méthode dans le cas où les polynômes de Legendre sont utilisés pour discrétiser le taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte. Nous avons, notamment proposé une nouvelle interpolation du champ représentant l'avancée virtuelle de la fissure. Nous avons explicité l'ensemble des termes de surface qu'il est nécessaire de prendre en compte pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte. Nous avons démontré que seul le calcul exhaustif de tous ces termes permet d'obtenir des valeurs du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte qui satisfont la formule d'Irwin. L'ensemble des solutions proposées permet de réaliser un calcul de propagation de fissure, initialement à front droit, plus fiable qu'auparavant. Nous avons aussi constaté que si l'utilisateur ne définit pas explicitement une traction nulle sur une surface libre de chargement, sur laquelle la fissure débouche, l'évaluation de tous les termes de surface n'était pas effectuée par `code_aster`. La meilleure solution pour résoudre ce problème serait de rendre `code_aster` capable de calculer ces termes même en l'absence de définition de chargement. En attendant que cette solution soit mise en oeuvre, l'ingénieur doit être précautionneux dans la mise en données de son étude. Enfin, il serait intéressant d'adapter les solutions mises en oeuvre pour les polynômes de Legendre aux polynômes de Lagrange dans le but de disposer de deux discrétisations permettant un calcul précis du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte.

Le dernier chapitre a permis de mettre en évidence les limites de l'utilisation des solutions asymptotiques de Westergaard, en déformations ou contraintes planes, comme champs de déplacement auxiliaires d'une méthode d'intégrale d'interaction. On remarque que pour atténuer l'erreur commise en choisissant ces champs auxiliaires qui ne prennent pas en compte la courbure de la fissure, il est nécessaire d'obtenir un rapport très petit entre le rayon du domaine d'intégration utilisé dans la méthode et le rayon de courbure. Ceci est possible uniquement en raffinant le maillage autour du front de

---

fissure pour ainsi pouvoir diminuer le rayon du domaine d'intégration. En pratique, il faudrait raffiner autour du front de fissure de manière automatique en fonction du rayon de courbure pour optimiser le processus. Néanmoins, le raffinement de maillage dans des structures industrielles peut augmenter considérablement le temps de calcul. Nous avons donc proposé d'introduire directement la courbure dans le champ de déplacement afin de réduire l'erreur commise quand le front de fissure est courbe. Les champs de déplacement proposés ont été développés dans `code_aster` et ont été validés sur différents cas test. À maillage donné, l'utilisation de ces champs a permis d'obtenir des valeurs du facteur d'intensité de contrainte associé au mode I plus précises qu'en utilisant les solutions asymptotiques de Westergaard. L'utilisation de ces nouveaux champs auxiliaires permet de réaliser un calcul de propagation de fissure, initialement à front courbe, plus fiable qu'auparavant. Pour aller plus loin dans cette analyse, il serait intéressant, dans un premier temps, d'obtenir les champs de déplacement associés aux modes de rupture II et III afin d'extraire les facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure plane à front courbe sollicitée en mode mixte. Une fois cette étape réalisée, la prise en compte de la seconde courbure permettrait de traiter toutes les situations possibles.

Ce travail de thèse visant à rendre robuste la propagation de fissure dans une structure tridimensionnelle a finalement permis de rendre plus précis le calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte. Ceci a pour conséquence d'améliorer les résultats d'un calcul de nocivité réalisé dans le but de justifier à l'ASN de la tenue mécanique d'un composant non remplaçable. Cette amélioration du calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte est donc une contribution importante pour EDF.



# Gradient du champ thêta

---

Dans le cas considéré, on a :

$$\underline{\theta}_i = p_i(s)\Theta(r)\underline{N}$$

où  $p_i$  est  $i$ -ème polynôme de Legendre,  $\Theta$  est la fonction définie par l'équation (3.8) et  $\underline{N}$  est le vecteur normal au front de fissure, dans le plan de la fissure. Dans notre cas,  $\underline{N} = \underline{e}_x$  est uniforme. On a donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} s &= z + \frac{1}{2} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Soit un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  exprimées dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . Le gradient de  $\underline{\theta}_i(M)$  est :

$$\underline{\nabla}\underline{\theta}_i(M) = p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + p_i'\Theta \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z.$$

En considérant  $\underline{u} = \underline{u}^I$  et  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^I$ , on obtient que :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta}_i \right) &= \sigma_{NN}^I \left( p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) + \sigma_{NB}^I \left( p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} + p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_N^I}{\partial x} \right) \\ &\quad + \sigma_{BB}^I \left( p_i\Theta' \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u_B^I}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

# Divergence d'un tenseur d'ordre deux

Soit le tenseur  $\underline{\underline{P}}$  d'ordre deux défini dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{T})$  par :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{P}} &= P_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + P_{r\varphi} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi + P_{rT} \underline{e}_r \otimes \underline{T} \\ &+ P_{\varphi r} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r + P_{\varphi\varphi} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi + P_{\varphi T} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{T} \\ &+ P_{Tr} \underline{T} \otimes \underline{e}_r + P_{T\varphi} \underline{T} \otimes \underline{e}_\varphi + P_{TT} \underline{T} \otimes \underline{T}\end{aligned}$$

La différentielle de  $\underline{\underline{P}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}d\underline{\underline{P}} &= dP_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + dP_{r\varphi} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi + dP_{rT} \underline{e}_r \otimes \underline{T} \\ &+ dP_{\varphi r} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r + dP_{\varphi\varphi} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi + dP_{\varphi T} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{T} \\ &+ dP_{Tr} \underline{T} \otimes \underline{e}_r + dP_{T\varphi} \underline{T} \otimes \underline{e}_\varphi + dP_{TT} \underline{T} \otimes \underline{T} \\ &+ P_{rr} d(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + P_{r\varphi} d(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi) + P_{rT} d(\underline{e}_r \otimes \underline{T}) \\ &+ P_{\varphi r} d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r) + P_{\varphi\varphi} d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) + P_{\varphi T} d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{T}) \\ &+ P_{Tr} d(\underline{T} \otimes \underline{e}_r) + P_{T\varphi} d(\underline{T} \otimes \underline{e}_\varphi) + P_{TT} d(\underline{T} \otimes \underline{T})\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}d(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) &= (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_r \otimes (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\varphi) &= (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{e}_\varphi + \underline{e}_r \otimes (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{e}_r \otimes \underline{T}) &= (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{T} + \underline{e}_r \otimes ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds) \\ d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_r) &= (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\varphi \otimes (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) &= (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{e}_\varphi + \underline{e}_\varphi \otimes (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{e}_\varphi \otimes \underline{T}) &= (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \otimes \underline{T} + \underline{e}_\varphi \otimes ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds) \\ d(\underline{T} \otimes \underline{e}_r) &= ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds) \otimes \underline{e}_r + \underline{T} \otimes (\underline{e}_\varphi d\varphi + \cos \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{T} \otimes \underline{e}_\varphi) &= ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds) \otimes \underline{e}_\varphi + \underline{T} \otimes (-\underline{e}_r d\varphi - \sin \varphi \gamma \underline{T} ds) \\ d(\underline{T} \otimes \underline{T}) &= ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds) \otimes \underline{T} + \underline{T} \otimes ((\gamma \sin \varphi \underline{e}_\varphi - \gamma \cos \varphi \underline{e}_r) ds)\end{aligned}$$

Le gradient de  $\underline{\underline{P}}$  vérifie la relation  $d\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\nabla}}P \cdot d\underline{\underline{M}}$ . En notation indicielle, le gradient de  $\underline{\underline{P}}$  s'écrit  $P_{ij,k}$  et la divergence s'écrit  $P_{ij,j}$ . La divergence de  $\underline{\underline{P}}$  dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{T})$  est finalement :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{P}} &= \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{r\varphi}}{\partial \varphi} \underline{e}_r + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{rT}}{\partial s} \underline{e}_r \\
&+ \frac{\partial P_{\varphi r}}{\partial r} \underline{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{\varphi T}}{\partial s} \underline{e}_\varphi \\
&+ \frac{\partial P_{Tr}}{\partial r} \underline{T} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{T\varphi}}{\partial \varphi} \underline{T} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{TT}}{\partial s} \underline{T} \\
&+ P_{rr} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \right) \underline{e}_r + P_{r\varphi} \left( \frac{1}{r} \underline{e}_\varphi - \frac{\sin \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \underline{e}_r \right) + P_{rT} \frac{\cos \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \underline{T} \\
&+ P_{\varphi r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \right) \underline{e}_\varphi + P_{\varphi\varphi} \left( -\frac{1}{r} \underline{e}_r - \frac{\sin \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \underline{e}_\varphi \right) - P_{\varphi T} \frac{\sin \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \underline{T} \\
&+ P_{Tr} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \right) \underline{T} + P_{T\varphi} \left( -\frac{\sin \varphi \gamma}{1 + r\gamma \cos \varphi} \underline{T} \right) + P_{TT} \gamma \frac{(-\cos \varphi \underline{e}_r + \sin \varphi \underline{e}_\varphi)}{1 + r\gamma \cos \varphi}
\end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse d'un champ axisymétrique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{P}} &= \left( \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\gamma(P_{rr} - P_{TT}) \cos \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} - \frac{\gamma P_{r\varphi} \sin \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} \right) \underline{e}_r \\
&+ \left( \frac{\partial P_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{P_{r\varphi} + P_{\varphi r}}{r} + \frac{\gamma(P_{TT} - P_{\varphi\varphi}) \sin \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} + \frac{\gamma P_{\varphi r} \cos \varphi}{1 + \gamma r \cos \varphi} \right) \underline{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

# Coefficients des termes d'ordre supérieur

---

Les champs de déplacement qui prennent en compte la courbure s'écrivent [Sto18] :

Pour le terme  $\underline{u}_2$  :

$$\underline{u}_2 = \left( \frac{\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \right) [\underline{f}_1(\varphi) + \eta \underline{f}_2(\varphi)],$$

avec :

$$\underline{f}_2(\varphi) = \left( a_2 \cos \frac{3\varphi}{2} + b_2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_r + \left( c_2 \sin \frac{3\varphi}{2} + d_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_\varphi,$$

où :

$$a_2 = \frac{8\nu - 3}{8}, \quad b_2 = \frac{128\nu^2 - 96\nu + 13}{24},$$

$$c_2 = -\frac{8\nu - 5}{8}, \quad d_2 = \frac{128\nu^2 - 192\nu + 55}{24}.$$

Pour le terme  $\underline{u}_3$  :

$$\underline{u}_3 = \left( \frac{\sqrt{r}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \right) [\underline{f}_1(\varphi) + \eta \underline{f}_2(\varphi) + \eta^2 \underline{f}_3(\varphi)],$$

avec :

$$\underline{f}_3(\varphi) = \left( a_3 \cos \frac{5\varphi}{2} + b_3 \cos \frac{3\varphi}{2} + c_3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_r$$

$$+ \left( d_3 \sin \frac{5\varphi}{2} + e_3 \cos \frac{3\varphi}{2} + f_3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \underline{e}_\varphi,$$

---

où :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{3 - 24\nu}{64} & b_3 &= \frac{512\nu^3 + 64\nu^2 + 80\nu + 53}{360} & c_3 &= \frac{67 - 256\nu^2}{192} \\ d_3 &= \frac{24 - 9\nu}{64} & e_3 &= -\frac{512\nu^3 - 704\nu^2 - 80\nu + 137}{360} & f_3 &= \frac{256\nu^2 - 192\nu - 37}{192} \end{aligned}$$



# Bibliographie

---

- [Ada94] D. ADALSTEINSSON et J. A. SETHIAN, « A fast level set method for propagating interfaces », *Journal of Computational Physics* 118 (1994), p. 269–277.
- [Aga15] K. AGATHOS, E. CHATZI, S. BORDAS et D. TALASLIDIS, « A well-conditioned and optimally convergent XFEM for 3D linear elastic fracture », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 105 (2015), p. 643–677.
- [Bab97] I. BABUSKA et J. M. MELENK, « The partition of unity method », *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), p. 727–758.
- [Ban10] L. BANKS-SILLS, « Update-Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics », *Applied mechanics reviews* 63 (2010).
- [Bar96] B. I. G. BARR et D. R. BROKENSHIRE, « Brokenshire. Torsion fracture tests », *BRE Digest* (1996).
- [Bar98] T. J BARTH et J. A. SETHIAN, « Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set equations on triangulated domains », *Journal of Computational Physics* 145 (1998), p. 1–40.
- [Bar77] R. S. BARSOUM, « Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), p. 85–98.
- [Bar94] G. BARLES, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, 1994.
- [Bay12] M. BAYDOUN et T. P. FRIES, « Crack propagation criteria in three dimensions using the xfem and an explicit–implicit crack description », *International Journal of Fracture* 178 (2012), p. 51–70.
- [Baz79] Z. BAZANT et M. JIRASEK, « Surface singularity and crack propagation », *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), p. 405–426.
- [Bec05] E. BECHET, H. MINNEBO, N. MOËS et B. BURGARDT, « Convergence and conditioning issues with X-FEM in fractures mechanics », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (2005), p. 1033–1056.

- 
- [Bel99] T. BELYTSCHKO et T. BLACK, « Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing », *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), p. 601–620.
- [Bro07a] A. M BRONSTEIN, M. M. BRONSTEIN et R. KIMMEL, « Weighted distance maps computation on parametric three-dimensional manifolds », *Journal of Computational Physics* 225 (2007), p. 771–245.
- [Bro07b] A. BRONSTEIN, M. BRONSTEIN et R. KIMMEL, *Numerical geometry of non-rigid shapes*, Springer, 2007.
- [Bro94] J. BROCHART, T. CHARRAS, A. COMBESURE, X. Z. SUO et D. UHLMANN, « Numerical evaluation of the energy release rate for nonlinear fracture mechanics formulation of  $G_\theta$  method and application with CASTEM 2000 », *In SISSI 94 2* (1994), p. 211–215.
- [Bro82] D. BROEK, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- [Bro96] D. R. BROKENSHIRE, « A Study of Torsion Fracture Tests », thèse de doct., Cardiff University, 1996.
- [Bui85] H. D. BUI et J. M. PROIX, « Découplage des modes mixtes de rupture en thermo-élasticité par des intégrales indépendantes du contour », *Actes du troisième colloque - tendances actuelles en calcul de structure* (1985), p. 631–643.
- [Bui78] H. BUI, *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, 1978.
- [Bui83] H. D. BUI, « Associated path independent J-integrals for separating mixed modes. », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31 (1983), p. 439–448.
- [Car08] E. CARLINI, E. CRISTIANI, N. FORCADEL et R. MONNEAU, « Convergence of a generalized fast marching method for a non-convex eikonal equation. submitted », *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (2008), p. 2920–2952.
- [Che13] N. CHEVAUGEON, N. MOËS et H. MINNEBO, « Improved crack tip enrichment functions and integration for crack modeling using the extended finite element method », *Journal for multiscale computational Engineering* 11 (2013), p. 597–631.
- [Chi10] V. CHIARUTTINI, F. FEYEL et J.L. CHABOCHE, « A robust meshing algorithm for complex 3D crack growth simulation », *ECCM* (2010).

- 
- [Chi15] M. M. CHIARAMONTE, Y. SHEN, L. M. KEER et A. J. LEW, « Computing stress intensity factors for curvilinear cracks », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 104 (2015), p. 260–296.
- [Cho01] D. L. CHOPP, « Some improvements of the fast marching method », *SIAM Journal on Scientific Computing* 23 (2001), p. 230–244.
- [Cit08] R. CITARELLA et F. G. BUCHHLOZ, « Comparison of crack growth simulation by dbem and fem for sen-specimen undergoing torsion or bending loading », *Engineering fracture mechanics* 75 (2008), p. 489–509.
- [Cod] CODE\_ASTER, *Outil de raffinement local en front de fissure*, <http://www.code-aster.org/outils/homard>.
- [Cod11a] CODE\_ASTER, *SSLV314 – Propagation plane d’une fissure débouchante avec X-FEM*, Code\_Aster, 2011.
- [Cod11b] CODE\_ASTER, *SSLV315 – Propagation non plane d’une fissure débouchante avec X-FEM*, Code\_Aster, 2011.
- [Cod15] CODE\_ASTER, *SSLP320 - Propagation d’une fissure X-FEM débouchante sollicitée en Mode I*, Code\_Aster, 2015.
- [Col11] D. COLOMBO et P. MASSIN, « Fast and robust level set update for 3D non-planar X-FEM crack propagation modelling », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), p. 2160–2180.
- [Col12a] D. COLOMBO, « An implicit geometrical approach to level sets update for 3D non planar X-FEM crack propagation », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 237–240 (2012), p. 39–50.
- [Col12b] D. COLOMBO, *Une nouvelle méthode de propagation de fissure X-FEM fiable, robuste et performante*, <https://www.code-aster.org/V2/spip.php?article548>, mar. 2012.
- [Col15] D. COLOMBO, *SSLV320-Propagation plane d’une fissure 3D se divisant et fusionnant avec X-FEM*, Code\_Aster, 2015.
- [Cra92] M. G. CRANDALL, H. ISHII et P. L. LIONS, « User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations », *Bulletin of the American Mathematical Society* 27 (1992), p. 1–67.
- [Deg16] R. DEGEILH et P. MARTINUZZI, *Propagation de fissure dans les briques de graphite par remaillage conforme*, EDF energy, 2016.
- [Del85] H. D. DELORENZI, « Energy release rate calculations by the finite element method », *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1985), p. 129–143.

- 
- [Des81] P. DESTUYNDER et M. DJAOUA, « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », *Engineering Fracture Mechanics* 3 (1981), p. 70–87.
- [Des83] P. DESTUYNDER, « Quelques remarques sur la mécanique de la rupture », *Journal de mécanique théorique et appliquée* 2 (1983), p. 113–135.
- [Dol00] J. DOLBOW, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, « Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method », *Finite Elements in Analysis and Design* 36 (2000), p. 235–260.
- [Dua00] C. A DUARTE, I. BABUSKA et J. T. ODEN, « Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems », *Computers & Structures* 77 (2000), p. 215–232.
- [Duf07] M. DUFLOT, « A study of the representation of cracks with level sets », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), p. 1261–1302.
- [Eis91] U. EISELE et E. ROOS, « Evaluation of different fracture-mechanical J-integral initiation values with regard to their usability in the safety assessment of components », *Nuclear Engineering and Design* 130 (1991), p. 237–247.
- [Erd63] F. ERDOGAN et G. C. SIH, « On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear », *Journal of Basic Engineering* 85 (1963), p. 519–525.
- [Esh56] J. D. ESHELBY, « The continuum theory of lattice defects », *Solid state physics* 3 (1956).
- [Fab88] V. I FABRIKANT, « Greens's functions for a penny-shaped crack under normal loading », *Engineering fracture mechanics* 30 (1988), p. 87–104.
- [Fab89] V. I FABRIKANT, « Flat crack under shear loading », *acta mechanica* 78 (1989), p. 1–31.
- [Fer14] G. FERTÉ, « Développement de l'approche X-FEM cohésive pour la modélisation de fissures et d'interfaces avec le logiciel libre EDF Code\_Aster », thèse de doct., Ecole centrale de Nantes, 2014.
- [Gal07] E GALENNE, *Application de la méthode X-FEM sur un coude fissure - Implémentation d'une nouvelle méthode de lissage pour le calcul de  $K_I$  local*, Note EDF R&D, 2007.

- 
- [Gas05] T. C. GASSER et A. H. GERHARD, « 3D Crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths », *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195 (2005), p. 5198–5219.
- [Gen07] S. GENIAUT, P. MASSIN et N. MOËS, « A stable 3D contact formulation using X-FEM », *European Journal of Computational Mechanics* 16 (2007), p. 259–275.
- [Gen06] S. GENIAUT, « Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles », thèse de doct., Ecole centrale de Nantes, 2006.
- [Gon13a] V .F. GONZÁLEZ-ALBUIXECH, E. GINER, J. E. TARANCON, F. J. FUENMAYOR et A. GRAVOUIL, « Convergence of domain integrals for stress intensity factor extraction in 2-D curved cracks problems with the extended finite element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94 (2013), p. 740–757.
- [Gon13b] V. F. GONZÁLEZ-ALBUIXECH, E. GINER, J. E. TARANCON, F. J. FUENMAYOR et A. GRAVOUIL, « Domain integral formulation for 3-D curved and non-planar cracks with the extended finite element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 264 (2013), p. 129–144.
- [Gos02] M. GOSZ et B. MORAN, « An interaction energy integral method for the computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions », *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), p. 299–319.
- [Gos98] M. GOSZ, J. DOLBOW et B. MORAN, « Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks », *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), p. 1763–1783.
- [Gra02] A. GRAVOUIL, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets–Part II : Level set update », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), p. 2569–2586.
- [Gri21] A. A. GRIFFITH, « The phenomena of rupture and flow in solids », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 221 (1921), p. 163–198.
- [Hab12] D. HABOUSSA, « Modélisation de la transition traction-cisaillement des métaux sous choc par la X-FEM », thèse de doct., Insa Lyon, 2012.

- 
- [Irw57] G. IRWIN, « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), p. 361–364.
- [Jef04] A. D. JEFFERSON, B. I. G. BARR, T. BENNETT et S. C. HEE, « Three dimensional finite element simulations of fracture tests using the Craft concrete model », *Computers and Concrete* 1 (2004), p. 261–284.
- [Joh90] R. JOHN et S. P. SHAH, « mixed-mode fracture of concrete subjected to impact loading », *Journal of Structural Engineering* 116 (1990), p. 585–602.
- [Kac14] L. KACZMARCZYK, M. MOUSAVI et C PEARCE, « Three-dimensional brittle fracture : configurational-force-driven crack propagation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 97 (2014), p. 531–550.
- [Kas46] M. K. KASSIR et G. C. SIH, « Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading », *Journal of Applied Mechanics* 33 (1946), p. 601–611.
- [Kim98] R. KIMMEL et J. SETHIAN, « Computing Geodesic Paths on Manifolds », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 95 (1998), p. 8431–8435.
- [Lab05] P. LABORDE, J. POMMIER, Y. RENARD et M. SALAUN, « High order extended finite element method for cracked domains », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (2005), p. 354–381.
- [Lac14] J. LACHAMBRE, J. RÉTHORÉ, A. WECK et J. Y BUFFIERE, « Extraction of stress intensity factors for 3D small fatigue cracks using digital volume correlation and X-ray tomography », *International Journal of Fatigue* (2014).
- [Laz08] V. LAZARUS, F. G. BUCHHOLZ, M. FULLAND et J. WIEBESIEK, « Comparison of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments », *International Journal of Fracture* 153 (2008), p. 141–151.
- [Leb85] J. B. LEBLOND et M. AMESTOY, « Sur l’universalité de la relation liant les facteurs d’intensité bde contrainte d’une fissure juste avant et juste après un changement de direction », *Compte Rendu de l’Académie des sciences - Série II* 300 (1985), p. 643–646.
- [Leb92] J. B. LEBLOND et O. TORLAI, « The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in a three-dimensional elastic body », *Journal of Elasticity* 29 (1992), p. 97–131.

- 
- [Lev13] V. A. LEVIN, K. ZINGERMAN, A. VERSHININ, E. I. FREIMAN et A. V. YANGIROVA, « Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains », *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), p. 3119–3135.
- [Li85] F. Z. LI, C. F. SHIH et A. NEEDLEMAN, « A comparison of methods for calculating energy release rates », *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1985), p. 405–429.
- [Lor00] E. LORENTZ, Y. WADIER et G. DEBRUYNE, « Brittle fracture in a plastic medium : definition of an energy release rate », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series II* 328 (2000), p. 657–662.
- [Mal96] R. MALLADI et J. A. SETHIAN, « An  $O(N \log N)$  algorithm for shape modeling », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 93 (1996), p. 9389–9392.
- [Mar03] S. MARIANI et U. PEREGO, « Extended finite element method for quasi-brittle fracture », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), p. 103–126.
- [Mel96] J. M. MELENK et I. BABUSKA, « The partition of unity finite element method : basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 39 (1996), p. 289–314.
- [Mia88] P. MIALON, « Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta », *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherche à EDF* (1988).
- [Moë02] N. MOËS, A. GRAVOUIL et T. BELYTSCHKO, « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I : Mechanical model », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), p. 2549–2568.
- [Moë99] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO, « A finite element method without remeshing, International Journal of Numerical Methods in Engineering », *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), p. 131–150.
- [Mor87] B. MORAN et C. F. SHIH, « Crack tip and associated domain integral from momentum and energy balance », *Engineering Fracture Mechanics* 27 (1987), p. 615–642.
- [Mur86] Y. MURAKAMI, *Stress intensity factors handbook*, Pergamon Press : Oxford, 1986.

- 
- [Nak89] T. NAKAMURA et D. M. PARKS, « Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate », *International Journal of Solids and Structures* 12 (1989), p. 1411–1426.
- [Nak91] T. NAKAMURA, « Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks », *Journal of Applied Mechanics* 58 (1991), p. 939–946.
- [Nde17] M. NDEFFO, P. MASSIN, N. MOËS, A. MARTIN et S. GOPALAKRISHNAN, « On the construction of approximation space to model discontinuities and cracks with linear and quadratic extended finite elements », *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 4 (2017), p. 6.
- [Nde15] M. NDEFFO, « Modélisation numérique de la propagation de fissures avec éléments X-FEM 2D-3D quadratiques », thèse de doct., Ecole centrale de Nantes, 2015.
- [Nik87a] G. P. NIKISHKOV et S. N. ATLURI, « An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture », *Engineering Fracture Mechanics* 26 (1987), p. 851–867.
- [Nik87b] G. P. NIKISHKOV et S. N. ATLURI, « Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the ‘equivalent domain integral’ method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), p. 1801–1821.
- [Nui75] R. NUISMER, « An energy release rate criterion for mixed mode fracture », *International Journal of Fracture* 11 (1975), p. 245–250.
- [Oro48] E. OROWAN, « Fracture and strength of solids », *Reports on Progress in Physics* 12 (1948), p. 185–232.
- [Osh88] S. OSHER et J. A. SETHIAN, « Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations », *Journal of Computational Physics* 79 (1988), p. 12–49.
- [Oze12] H. OZER, C. A. DUARTE et A. L. AL-QADI, « Formulation and Implementation of a High-Order 3D Domain Integral Method for the Extraction of Energy Release Rates », *Computational Mechanics* 49 (2012), p. 459–476.
- [Par65] P. C. PARIS et G. C. SIH, « Stress analysis of cracks », *In fracture toughness testing and its applications* (1965), p. 30–83.

- 
- [Pas11] J. C. PASSIEUX, A. GRAVOUIL, J. RÉTHORÉ et M. C. BAIETTO, « Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid X-FEM », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 85 (2011), p. 1648–1666.
- [Pen99] D. PENG, S. MERRIMAN, S. OSHER, H. ZHAO et M. KANG, « A PDE-based fast local level set method », *Journal of Computational Physics* 155 (1999), p. 410–438.
- [Pom09] S. POMMIER, A. GRAVOUIL, N. MOËS et A. COMBESCURE, *La simulation numérique de la propagation des fissures : Milieux tridimensionnels, fonctions de niveau, éléments finis étendus et critères énergétiques*. Lavoisier, 2009.
- [Pra09] B. PRABEL, A. COMBESCURE, A. GRAVOUIL et S. MARIE, « Level set X-FEM non matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78 (2009), p. 1407–1435.
- [Raj00] H. RAJARAM, S. SOCRATE et P. M. PARKS, « Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors », *Engineering Fracture Mechanics* 66 (2000), p. 455–492.
- [Rét04] J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL et A. COMBESCURE, « A stable numerical scheme for finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), p. 4493–4510.
- [Ric68] J. RICE, « A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks », *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), p. 379–386.
- [Rou15] C. ROUX-LANGLOIS, A. GRAVOUIL, M. C. BAIETTO et J. RÉTHORÉ, « Three-dimensional simulation of crack with curved front with direct estimation of stress intensity factors », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 101 (2015), p. 635–652.
- [Set96] J. A. SETHIAN et A. POPOVICI, « Three dimensional traveltimes computation using the fast marching method », *Geophysics* 64 (1996), p. 516–523.
- [Set96] J. A. SETHIAN, « A Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 93 (1996), p. 1591–1595.

- 
- [Set99] J. A. SETHIAN, « Fast marching methods », *SIAM review* 41 (1999), p. 199–235.
- [Shi10] J. SHI, D. CHOPP, J. LUA, N SUKUMAR et T. BELYTSCHKO, « Abaqus implementation of extended finite element method using a level representation of three-dimensional fatigue crack growth and life predictions », *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), p. 2840–2863.
- [Shi86] C. F. SHIH, B. MORAN et T. NAKAMURA, « Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body », *International Journal of Fracture* 30 (1986), p. 79–102.
- [Shi88] C. F. SHIH et R. J. ASARO, « Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces part I - scale yielding », *Journal of applied mechanics* 55 (1988), p. 299–316.
- [Sia13] M. SIAVELIS, M. L. E. GUITON, P. MASSIN et N. MOËS, « Large sliding contact along branched discontinuities with X-FEM », *Computational Mechanics* 52 (2013), p. 201–219.
- [Sia11] M. SIAVELIS, « Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités », thèse de doct., Ecole centrale de Nantes, 2011.
- [Sih74] G. SIH, « Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems », *International Journal of Fracture* 10 (1974), p. 305–321.
- [Sne46] I. N SNEDDON, « The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in a elastic solid », *Proceedings of the Royal Society of London* 187 (1946), p. 229–260.
- [Ste76] M. STERN, E. B. BECKER et R. S. DUNHAM, « A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors », *International Journal of Fracture* 12 (1976), p. 359–368.
- [Sto01] M. STOLARSKA, D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, « Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), p. 943–960.
- [Sto18] C. STOLZ, « Prise en compte de la courbure dans les champs de déplacement asymptotiques », communication personnelle, 2018.
- [Suk00] N. SUKUMAR, N. MOËS, T. BELYTSCHKO et B. MORAN, « Extended finite element method for three-dimensional crack modeling », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), p. 1549–1570.

- 
- [Suk01] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), p. 6183–6200.
- [Suk03] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP et B. MORAN, « Extended finite element method and fast marching method for tree-dimensional fatigue crack propagation », *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), p. 29–48.
- [Suk08] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP, E. BÉCHET et N. MOËS, « Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), p. 727–748.
- [Tad00] H. TADA, P. PARIS et G. IRWIN, *The stress analysis of cracks handbook*, Wiley-Blackwell, 2000.
- [Tii16] T. THIRATS, *Fast Marching Method With Quadratic elements*, Code\_Aster Report, 2016.
- [Ven03] G. VENTURA, E. BUDYN et T. BELYTSCHKO, « Vector level sets for description of propagating cracks in finite element », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), p. 1571–1592.
- [Vo] T. T. G. VO et P. MARTINUZZI, *Improvement of crack propagation tools - pre-diffusion*, EDF energy.
- [Vo15] T. T. G. VO, P. MARTINUZZI et V. X. TRAN, « Modelling 3D crack propagation in ageing graphite bricks of Advanced Gas-cooled Reactor power plant », *Frattura ed Integrità Strutturale* 34 (2015), p. 237–245.
- [Vu15] M. N. VU, S. GENIAUT, P. MASSIN et J. J. MARIGO, « Numerical investigation on corner singularities in cracked plates using the G-theta method with an adapted theta field », *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 77 (2015), p. 59–68.
- [Wes39] H. M. WESTERGAARD, « Bearing Pressures and Cracks », *Journal of Applied Mechanics* 6 (1939), p. 49–53.
- [Wil57] M. L. WILLIAMS, « On the stress distribution at the base of a stationary crack », *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), p. 109–114.
- [Yos11] Z. YOSIBASH, S. SHANNON, M. DAUGE et M. COSTABEL, « Circular edge singularities for the Laplace equation and the elasticity system in 3-D domains », *International Journal of Fracture* 168 (2011), p. 31–52.

- 
- [Zhu95] W. X. ZHU et D. J SMITH, « On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors », *Engineering Fracture Mechanics* 51 (1995), p. 391–400.

**Titre :** Propagation robuste de défauts en 3D

**Mots clés :** X-FEM, rupture fragile, taux de restitution d'énergie, facteurs d'intensité de contrainte

**Résumé :** Afin d'assurer le contrôle de son parc de production d'électricité, EDF doit maîtriser le vieillissement de ses installations pour en garantir le bon fonctionnement dans la durée. Dans ce but, il est nécessaire de disposer d'outils performants pour modéliser et simuler la propagation des défauts dans les structures.

Dans ces travaux de thèse, on s'intéresse à la propagation de fissures avec la méthode X-FEM et notamment à l'étape de localisation de la fissure par une technique de courbes de niveau. Nous avons proposé une approche fondée sur une méthode de propagation d'information de distance dite *fast marching method* pour rendre cette étape plus robuste. Elle est applicable à tous types de mailles, linéaires ou quadratiques.

De plus, le calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte en pointe de fissure doit être suffisamment précis pour permettre

de calculer la direction et l'avancée de la fissure. Dans ce but, nous avons proposé d'étudier une méthode d'intégrale de domaine, pour laquelle on soulève plusieurs difficultés liées à la représentation de la fissure dans un espace tridimensionnel. Plusieurs améliorations sont proposées pour rendre les calculs plus précis et plus robustes.

Dans le cas des fissures à front courbe, nous avons identifié les limites de l'utilisation des champs asymptotiques obtenus en pointe de fissure sous l'hypothèse des déformations planes comme champs auxiliaires d'une méthode d'intégrale d'interaction et nous avons proposé de nouveaux champs de déplacements auxiliaires qui prennent en compte la courbure du front de fissure.

Toutes ces approches sont développées et validées dans le logiciel code\_aster.

**Title :** Robust 3D crack propagation

**Keywords :** X-FEM, brittle fracture, energy release rate, stress intensity factors

**Abstract :** In order to ensure the control of its nuclear power plants, EDF must guarantee that they function effectively over the long term. For this purpose, it is necessary to have efficient tools to model and simulate crack propagation in structures. In this PhD work, we are interested in the propagation of cracks with the X-FEM method which allows using the same mesh as for a structure without default. We target especially the reconstruction of the level sets that characterize the position of the crack after propagation. We have proposed a fast marching method approach based on the propagation of distance information from the crack surface to the whole structure to make this step more robust in the X-FEM propagation process. It is applicable to all types of meshes, linear or quadratic.

The calculation of information characteristic of the crack status such as the energy release rate and the

stress intensity factors must be accurate enough to obtain the direction and advance of the crack front at each propagation step. For this purpose, we proposed to study a domain integral method, for which several difficulties related to the representation of the crack in a three-dimensional space are identified. Several improvements are proposed to make the calculations more accurate and more robust. In the case of curved cracks front, we have identified the limitations of using asymptotic fields obtained under the plane deformation hypothesis as auxiliary fields of an interaction integral method and we have proposed new auxiliary displacement fields that take into account the curvature of the crack front. All these methods are developed and validated with EDF software code\_aster.