



HAL
open science

Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.

Sonia Prébiski

► **To cite this version:**

Sonia Prébiski. Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.. Mathématiques générales [math.GM]. Université Montpellier, 2018. Français. NNT : 2018MONT083 . tel-01956661v2

HAL Id: tel-01956661

<https://theses.hal.science/tel-01956661v2>

Submitted on 18 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale Informations Structures Systèmes

Unité de recherche IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.

Présentée par Sonia Yvain-Prébiski

Le 19 novembre 2018

Sous la direction de Viviane Durand-Guerrier, co-encadrée par Aurélie Chesnais

Devant le jury composé de

Michèle Artigue, PU Emérite, Université Paris Diderot

Cécile Ouvrier-Bufferet, PU, CNU 26, Université de Paris - Est Créteil

Floriane Wozniak, MCF, CNU 26, Université de Montpellier

Nicolas Grenier-Boley, MCF, CNU 26, Université de Rouen

Marie-Line Gardes, MCF, CNU 26, Université Lyon 1

Olivier Perru, PU, CNU 72, Université Lyon 1

Viviane Durand-Guerrier, PU, CNU 26, Université de Montpellier

Aurélie Chesnais, MCF, CNU 26, Université de Montpellier

Rapporteure

Rapporteure-Présidente du jury

Examinatrice

Examineur

Examinatrice

Examineur

Directrice

Co-encadrante



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Remerciements

Rien dans ce monde n'arrive par hasard (Paulo Coelho)

Ce travail de thèse n'aurait jamais débuté sans cette rencontre avec Viviane Durand-Guerrier qui s'est intéressée à mes questionnements professionnels autour de la modélisation mathématique et qui a su patiemment me convaincre que je pouvais les faire cheminer vers une problématique de recherche. Merci Viviane d'avoir accepté d'être la directrice de cette thèse en m'accordant ta confiance et en me donnant une grande autonomie de travail tout en orientant mes recherches et en m'apportant de nombreux précieux conseils.

Je remercie également Aurélie Chesnais d'avoir accepté de co-encadrer cette thèse. Tes conseils m'ont guidée tout au long de mon travail et m'ont appris en particulier à me positionner avec toujours plus de précisions et à oser exprimer ce que je pense.

Ce Co-encadrement dont j'ai bénéficié a largement contribué à développer et à accroître mes connaissances scientifiques dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques tout en confirmant mon envie de faire de la recherche. Merci !

Je remercie Michèle Artigue et Cécile Ouvrier-Bufferet de l'intérêt qu'elles ont porté à ma thèse en acceptant d'en être les rapporteuses.

Je remercie tous les membres du jury de ma soutenance. Nul doute que leurs questions, remarques, critiques et suggestions enrichiront mes perspectives de recherche.

Je remercie tous les chercheurs interviewés qui ont porté un intérêt à mon travail en acceptant de me consacrer du temps pour répondre à mes questions.

Un grand merci à tous les enseignants et élèves qui ont participé à mes différentes expérimentations. Leur investissement a participé à rendre mon corpus extrêmement riche et intéressant à analyser.

Je tiens chaleureusement à remercier Simon, Mireille, Sébastien et Julien qui sont de précieux membres du groupe ResCo et qui m'ont largement soutenue, encouragée et motivée tout au long de ce travail de thèse.

Merci à tous mes amis, et à ma famille qui ont fait preuve de compréhension, de patience en me soutenant tout au long de ces cinq années, chacun à sa façon.

Merci aux gazelles qui m'ont permis de me vider la tête tous les jeudis soir et ont fait preuve d'un soutien sans faille envers leur coach-gazelle souvent débordée !

Merci à Nicolas et Chloé de n'avoir jamais reproché à leur maman de trop travailler et de s'être toujours adaptés aux différentes organisations liées à mon manque de disponibilité.

Pour finir, je dédie cette thèse à Bruno, mon pilier, mon indéfectible soutien dans la vie. Te remercier me semble bien peu pour exprimer toute ma reconnaissance d'avoir vécu à 400% cette aventure à mes côtés. Parfois les mots ne suffisent plus pour exprimer ce que le cœur n'arrive pas à chuchoter...

Résumé

Dans cette thèse en didactique des mathématiques, nous étudions une possible transposition à la classe de pratiques de chercheurs utilisant la modélisation mathématique en nous intéressant à la dévolution aux élèves du secondaire (de 11 à 18 ans) du travail de mathématisation horizontale nécessaire pour envisager un traitement mathématique d'une situation ancrée dans le réel. Nous inscrivons notre travail dans la méthodologie de l'ingénierie didactique, en y intégrant, en outre, des problématiques liées aux pratiques enseignantes, présentant, en cela, certaines similitudes avec la démarche de l'ingénierie didactique de deuxième génération. Nous avons conduit une étude d'épistémologie contemporaine visant à identifier des éléments invariants dans les pratiques de chercheurs relevant de la mathématisation horizontale, en sciences du vivant. En appui sur ces résultats, nous avons caractérisé un énoncé de type fiction réaliste relevant d'une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation et avons élaboré un tel énoncé pour la classe autour de la prévision de la croissance dans un arbre. Nous avons mené des expérimentations dans des classes du secondaire, au sein d'un dispositif de formation continue de résolution collaborative de problèmes comportant une phase initiale de questions-réponses. Nous soutenons l'hypothèse que, les caractéristiques d'une fiction réaliste conçue comme une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation, et sa mise en œuvre dans les classes avec une phase de questions-réponses entre pairs pour débiter sa résolution, favorisent la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Les analyses didactiques des données recueillies ont été conduites en appui sur les résultats issus de l'étude épistémologique. Elles ont mis en évidence la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale et des traces de transposition des pratiques invariantes identifiées dans l'étude épistémologique. En appui sur le choix du cadre de la double approche didactique et ergonomique et sur une étude des obstacles à l'enseignement de la modélisation mathématique à travers la littérature en éducation mathématique, nous avons émis des hypothèses de travail sur les obstacles et les conditions à propos des pratiques enseignantes relevant de l'enseignement de la mathématisation horizontale. Nous avons utilisé l'effet de loupe potentiel offert par le dispositif de formation continue pour émettre et mettre à l'épreuve des hypothèses portant sur des leviers potentiels internes à la logique de ce dispositif, répondant, dans une certaine mesure, aux hypothèses concernant les obstacles et les conditions. L'étude de la portée générale de nos résultats à propos des pratiques ordinaires reste à faire.

Abstract

In this thesis in didactics of mathematics, we study a possible transposition to the classroom of practices of researchers using mathematical modelling. We are focusing on the devolution to secondary pupils (11 years to 18 years) of the work of horizontal mathematization necessary to make a situation rooted in reality accessible to a mathematical treatment. We frame our work in the methodology of didactic engineering. We also include issues related to teaching practices and also we have some similarities with the approach of second-generation didactic engineering. Our epistemological analyses allowed us to identify invariant practices of researchers in life sciences concerning horizontal mathematization. We then relied on these analyses to characterize, develop and analyse a realistic fiction designed as an adaptation of a professional problem of modelling on the prediction of growth of a tree. We conducted our experiments in a training device of collaborative problem solving with an initial phase of questions and answers. We support the hypothesis that the characteristics of a realistic fiction designed as an adaptation of a professional problem of modelling with an initial phase of questions-answers between peers are likely to favour the devolution of horizontal mathematization to pupils. The didactic analyses of the collected data were conducted based on the results of the epistemological study. They highlighted the devolution to students of horizontal mathematization. In addition, some traces of transposition of the invariant practices identified in the epistemological study were attested. Relying on the framework of the didactic and ergonomic double approach and on a study of literature in mathematics education on possible obstacles to the teaching of mathematical modelling, we have made hypotheses on the obstacles and conditions about teaching practices related to the teaching of horizontal mathematization. We used the potential magnifying effect offered by the in-service teachers' training device to emit and test hypotheses about potential internal levers within this device, in respect to a certain extent, to possible obstacles and conditions. The study of the general scope of our results concerning ordinary teaching practices is still to be done.

Table des matières

REMERCIEMENTS	2
RESUME	4
TABLE DES MATIERES	5
INTRODUCTION GENERALE	10
PARTIE 1 CHEMINEMENT VERS LA PROBLEMATIQUE DE LA THESE	14
Sommaire de la partie 1	15
Chapitre 1 : Questionnement professionnel et problématique	16
1-1 Origine du projet de recherche	16
1-2 Le travail du groupe ResCo	19
1-2-1 Caractéristiques des énoncés proposés par le groupe ResCo	20
1-2-2 Explicitation des différentes phases du dispositif ResCo	22
1-3 Vers l'élaboration d'un questionnement de recherche	33
Chapitre 2 : Questions de recherche Ancrages théoriques et méthodologie de la recherche	35
2-1 Problématique et questions de recherche	35
2-2 Méthodologie de recherche et cadre théorique	37
2-2-1 L'ingénierie didactique	37
2-2-2 Concepts spécifiquement étudiés	40
LE CONCEPT DE DEVOLUTION	40
THEORIE DE LA TRANSPOSITION DE PRATIQUES SOCIALES DE REFERENCE	40
LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE	41
2-3 Structure du manuscrit	42
2-4 Architecture de la thèse	44
Chapitre 3 : La modélisation mathématique	45
3-1 L'enjeu d'apprentissage de la modélisation mathématique au sein de l'ICTMA	45
3-2 Une classification du type de schémas représentant le processus de modélisation	51
3-2-1 Le premier groupe	51
3-2-2 Le deuxième groupe	53
3-2-3 Les troisième et quatrième groupes	61
Conclusions de la partie 1	64
PARTIE 2 ETUDE D'EPISTEMOLOGIE CONTEMPORAINE	66
Sommaire de la partie 2	67
Chapitre 4 Mathématisation horizontale et verticale	68
4-1 La modélisation mathématique, une nouvelle forme de mathématisation (Israël G.)	69
	5

4-2	La mathématisation horizontale et verticale dans la RME	71
4-2-1	Les travaux de la Realistic Mathematics Education	71
4-2-2	La mathématisation selon Freudenthal	72
4-2-3	Mathématisation horizontale et mathématisation verticale dans la RME	72
4-3	Trois exemples de travaux faisant référence aux aspects horizontal et vertical de la mathématisation	74
4-3-1	Dans les travaux de Barnes	74
4-3-2	Dans les travaux de Rasmussen & al.	75
4-3-3	Dans les travaux d'Ouvrier-Bufferet (2013)	76
4-3-4	Dans les travaux de Pisa	77
4-4	La mathématisation horizontale dans notre recherche	79
4-4-1	Les définitions retenues dans notre travail	79
4-4-2	Les formes de la mathématisation horizontale dans notre étude	80
4-4-3	Les formes de la mathématisation verticale dans notre étude	80
4-5	Ebauche du schéma du processus de modélisation pour notre étude	81
Chapitre 5 : Eléments d'enquête sur les pratiques expertes associées à une activité de modélisation mathématique		83
5-1	Caractérisations de l'activité de recherche en mathématique à partir de deux exemples	84
5-1-1	Caractérisations de l'activité de recherche en mathématique dans le cadre des SiRC	84
5-1-2	Caractérisations de l'activité de recherche en mathématique à partir d'une enquête d'épistémologie contemporaine sur les pratiques expertes	87
5-2	Les modalités de notre enquête d'épistémologie contemporaine sur les pratiques expertes en modélisation mathématique dans les sciences du vivant	88
5-3	La modélisation mathématique dans les sciences du vivant	89
5-3-1	Evolution de la modélisation dans les sciences du vivant	89
5-3-2	Les fonctions principales des modèles dans les sciences du vivant	91
Chapitre 6 : Entretien avec des chercheurs dans le domaine des sciences du vivant		93
6-1	Choix de l'étude par des entretiens	93
6-1-1	Pourquoi des entretiens ?	93
6-1-2	Le panel des chercheurs interviewés	94
6-2	Méthodologie des entretiens : l'entretien de type compréhensif	95
6-3	Présentation de la grille d'entretien	96
6-4	Analyse des entretiens	99
6-5	Présentation de nos résultats	106
6-5-1	Caractéristiques des pratiques retenues pour notre recherche	106
6-5-2	Schéma du processus de modélisation retenu pour notre étude	107
Conclusions de la partie 2		109
PARTIE 3 ETUDE DIDACTIQUE		113
Chapitre 7 : Etude préliminaire		115
7-1	Premiers éléments à partir du mémoire de Ray (2013)	115
7-1-1	La fiction réaliste proposée	115
7-1-2	Synthèse des analyses et des résultats obtenus	118
7-1-3	Ce que nous en retenons pour notre étude	119
7-2	Notre pré expérimentation en 2013-2014	120
7-2-1	Premiers résultats sur la dévolution de la mathématisation horizontale	121
7-2-2	Ce que nous en retenons pour notre étude	126

VOLET 1 : LA DEVOLUTION DE LA MATHEMATISATION HORIZONTALE AUX ELEVES	128
Sommaire du volet 1 de la partie 3	129
Présentation du volet 1	130
Chapitre 8 : Elaboration et analyse a priori de la fiction réaliste « L'arbre »du point de vue de la mathématisation horizontale	132
8-1 Les caractéristiques d'une fiction réaliste selon notre étude	132
8-2 Genèse de l'élaboration de la situation de la fiction réaliste « L'arbre »	135
8-3 Catégorisation a priori des questions	143
8-4 Eléments d'analyse a priori du travail de mathématisation verticale lors de la phase des questions-réponses	147
8-5 Indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves	148
8-5-1 Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase de l'élaboration des questions	148
8-5-2 Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase de l'élaboration des réponses	154
Chapitre 9 : Analyse a posteriori de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale	158
9-1 Analyse a posteriori des questions des élèves	158
9-1-1 Au regard des catégories des questions définies a priori	159
Questions relatives au Groupe « modèle » :	160
Questions relatives au Groupe « paramètres extérieurs » :	163
Questions relatives au Groupe « Serre » :	165
Questions relatives au Groupe « Précisions » :	167
SYNTHESE DES RESULTATS	168
9-1-2 Au regard des indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale	169
9-1-3 Synthèse	175
9-2 Analyse a posteriori des réponses des élèves	175
9-2-1 Analyse a posteriori de la dévolution de la mathématisation horizontale dans les productions des réponses	176
9-2-2 Synthèse des résultats	199
Conclusions du volet 1 de la partie 3	201
VOLET 2 : OBSTACLES ET LEVIERS RELATIFS AUX PRATIQUES ENSEIGNANTES POUR UNE DEVOLUTION DE LA MATHEMATISATION HORIZONTALE AUX ELEVES	204
Sommaire du volet 2 de la partie 3	205
Présentation du volet 2	206
Chapitre 10 : Problématique, cadre théorique et hypothèses de recherche sur les pratiques des enseignants à propos de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale -Méthodologie de recherche associée.	208
10-1 Problématique sur les pratiques enseignantes liées à l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale et cadre théorique retenu	209
10-2 La mathématisation horizontale et les programmes français de mathématiques dans le secondaire	211
10-2-1 La mathématisation horizontale et la compétence Modéliser en cycle 4	213

10-2-2	La mathématisation horizontale et les autres compétences mathématiques en cycle 4	216
10-2-3	La mathématisation horizontale dans les programmes du lycée général	219
10-2-4	Synthèse de notre analyse des programmes du secondaire	224
10-3	Des obstacles liés à l'enseignement de la modélisation mathématique	226
10-4	Hypothèses de recherche sur les pratiques enseignantes relevant de l'apprentissage de la mathématisation horizontale	228
10-5	Description et méthodologie	232
Chapitre 11 Mise à l'épreuve des hypothèses de recherche- Analyses et résultats		238
11-1	Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo1	239
11-1-1	Selon l'indicateur 1-ResCo1	239
11-1-2	Selon l'indicateur 2-ResCo1	252
11-1-3	Selon l'indicateur 3-ResCo1	254
11-1-4	Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCo1	258
11-2	Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo2	259
11-2-1	Analyses à partir des trois vidéos	260
11-2-2	Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCo2	268
11-3	Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo3	270
11-3-1	Selon l'indicateur 1-ResCo3	270
11-3-2	Selon l'indicateur 2-ResCo3	271
11-3-3	Selon l'indicateur 3-ResCo3	273
11-3-4	Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCo3	275
11-4	Synthèse	276
Conclusions du volet 2		278
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES		280
	Éléments de réponse apportés aux questions QR ₁ QR ₂ , QR ₃	280
	Éléments de réponse apportés aux questions QR ₄ et QR ₅	282
	Éléments de réponse apportés à la question QR ₆	284
	Questions ouvertes	287
	Perspectives de recherche	287
Annexes		291
PARTIE 1		292
	Annexe 1 : Fiche de préparation de la situation du pétrolier	292
PARTIE 2		295
	Annexe 2 : Entretien avec le chercheur B ₁	295
	Annexe 3 : Entretien avec le chercheur B ₂	314
	Annexe 4 : Entretien avec le chercheur B ₃	322
	Annexe 5 : Entretien avec le chercheur B ₄	336
	Annexe 6 : Entretien avec le chercheur B ₅	356
PARTIE 3 VOLET 1		370
	Annexe 7 Éléments de solution relatifs à la fiction réaliste « Les fuites à Fukushima »	371
	Annexe 8 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « modèle »	377

Annexe 9 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « paramètres extérieurs »	388
Annexe 10 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « serre »	391
Annexe 11 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « précisions »	393
Annexe 12 Classement des questions selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale	395
Annexe 13 Classement des questions selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale et réponses associées	409
Annexe 14 Classement des réponses selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale selon chaque catégorie de questions	458
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE	463
Annexe 15 Enoncé de la FRAPPM « L'entrepôt »	463
Annexe 16 Fiction réaliste relancée « L'arbre »	464
REFERENCES	465
TABLE DES FIGURES	471

Introduction générale

De nombreux travaux de recherche ont mis en évidence les apports pour les apprentissages mathématiques de la résolution de problème de recherche en mettant en avant la dimension expérimentale des mathématiques (Dias, 2008 ; Giroud, 2011 ; Gardes, 2013) ou la modélisation de problèmes posés dans un contexte non mathématique (Kuzniak et Vivier, 2011). Dans notre étude, nous nous intéressons à la *mathématisation horizontale* dans le cadre de résolution de problèmes posés dans un contexte hors mathématique. Nous suivons en cela Treffers (1978) qui distingue deux types de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation en mathématique : la *mathématisation horizontale* qui « *part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles* » et la *mathématisation verticale* qui « *se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles* ». Dans la plupart des recherches en didactique des mathématiques autour de la modélisation mathématique, c'est principalement l'aspect vertical de la mathématisation qui est mis à l'étude ; le travail reste encore à faire pour les problèmes posés dans un cadre non mathématique c'est à dire s'intéresser spécifiquement à la *mathématisation horizontale*.

Pour conduire cette étude, nous nous sommes intéressées aux pratiques expertes de chercheurs relevant de la mathématisation horizontale, dans les sciences du vivant. Notre objectif est double : nous visons à étudier la transposition à la classe de ces pratiques et, à analyser les conditions de la dévolution aux élèves du secondaire de la mathématisation horizontale, tout en prenant en compte les conditions et les contraintes qui pèsent sur les enseignants.

Nous inscrivons notre travail dans la méthodologie de l'ingénierie didactique, en y intégrant, en outre, des problématiques liées aux pratiques enseignantes, présentant en cela certaines similitudes avec la démarche de l'ingénierie didactique de deuxième génération. Conformément à cette méthodologie, après avoir réalisé une étude épistémologique circonscrite visant à clarifier les relations entre modélisation et mathématisation, nous conduisons une étude d'épistémologie contemporaine, dans le contexte des sciences du vivant, visant à identifier précisément des éléments des pratiques de références des chercheurs relevant de la mathématisation horizontale, potentiellement transposables à la classe.

En appui sur les résultats de nos analyses épistémologiques, nous avons élaboré un schéma du processus de modélisation mathématique intégrant les formes de la mathématisation horizontale

dans l'objectif de développer une ingénierie didactique permettant de faire vivre en classe ce processus.

Pour mettre à l'étude notre question didactique sur la possibilité d'implémenter en classe des situations didactiques permettant de faire vivre la mathématisation horizontale aux élèves, nous avons mené nos expérimentations au sein d'un dispositif de formation continue de résolution collaborative de problèmes (ResCo) de l'IREM¹ de Montpellier. Les études antérieures conduites dans le groupe ResCo (Sauter 2008, Ray 2013, Aldon & al. 2014) ont mis en évidence l'intérêt potentiel d'un questionnement explicite par les élèves sur le problème initial afin d'envisager un traitement mathématique du problème, ce qui participe selon nous de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale. Nous avons retenu la modalité de la phase de questions-réponses pour faire vivre cette mathématisation dans les classes, selon les différentes étapes de notre processus de modélisation. Notre recherche vise d'une part, à étudier les conditions et les contraintes de la viabilité de ce type de travail et d'autre part, à interroger les conditions, les contraintes et les marges de manœuvre quant aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale au sein d'une activité de modélisation mathématique.

En appui sur les éléments des pratiques expertes relevant de la mathématisation horizontale, identifiés dans notre étude d'épistémologie contemporaine, nous avons caractérisé une situation porteuse de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves et d'une possible transposition de ces éléments. Nous avons élaboré une *fiction réaliste relevant d'une adaptation d'une problématique de modélisation professionnelle (FRAPPM)* dans les sciences du vivant, portant sur la prévision de la croissance d'un arbre. Cette situation a été mise en œuvre, en 2015-2016, dans des classes du secondaire (élèves de 11 à 18 ans), au sein du dispositif ResCo. Nous présentons les analyses a posteriori de cette expérimentation, du point de vue de la dévolution de la mathématisation horizontale et de la transposition à la classe des pratiques expertes identifiées.

Le manuscrit se compose de trois parties articulées de la manière suivante :

La partie 1 (chapitre 1 à 3) de la thèse vise à expliciter le cheminement de notre questionnement professionnel vers une problématique de recherche. Dans le chapitre 1, nous montrons comment ce cheminement s'est appuyé sur les travaux du groupe ResCo et y décrivons les modalités de

¹ Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques

travail de ce groupe. Le chapitre 2 a pour objet la présentation de nos questions de recherche, celle de la méthodologie générale de notre thèse et celle des cadres théoriques didactiques dans lesquels nous nous inscrivons. Le chapitre 3 présente plus spécifiquement des travaux en didactique des mathématiques montrant en quoi la diversité des schémas d'un processus de modélisation est corrélée à celle des modalités de mise en œuvre des activités de modélisation dans les classes.

La partie 2 (chapitre 4 à 6) présente notre étude d'épistémologie contemporaine. Le chapitre 4 a pour objectif de clarifier ce que l'on entend par modélisation, mathématisation horizontale et mathématisation verticale à travers une étude de la littérature (Israël 1996, Treffers 1978, Freudenthal 1991). Dans le chapitre 5, nous précisons les modalités de l'enquête épistémologique contemporaine que nous avons menée, concernant les pratiques expertes relevant de la modélisation mathématique dans un contexte des sciences du vivant. Nous avons fait le choix de mener des entretiens pour l'étude de ces pratiques. Le chapitre 6 est consacré à la présentation de la méthodologie de l'entretien de type compréhensif et de l'élaboration de la grille d'entretien et à l'analyse des entretiens. Nous concluons ce chapitre en explicitant les caractéristiques des pratiques expertes relevant de la mathématisation horizontale, retenues pour notre recherche, et le choix du schéma du processus de modélisation, sur lequel prendront appui nos analyses didactiques.

La partie 3 (chapitre 7 à 11) contient la présentation et les analyses de notre étude didactique. Nous nous sommes appuyées sur les résultats de notre étude épistémologique et sur une étude préliminaire que nous présentons au chapitre 7 pour conduire une étude didactique que nous structurons sous la forme de deux volets composés chacun de deux chapitres :

- Le volet 1 (chapitres 8 et 9) fait l'objet de l'étude de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale lors de la mise en œuvre dans des classes, via le dispositif ResCo, de la situation que nous avons élaborée, tout en étudiant les potentielles traces de transposition à la classe des pratiques relevant de cet aspect de la mathématisation, identifiées en partie 2.
- Le volet 2 (chapitres 10 et 11) est consacré à l'étude des obstacles et leviers relevant des pratiques enseignantes, relatifs à l'enseignement de la mathématisation horizontale.

Dans le chapitre 8, nous montrons comment nous avons fait évoluer les caractéristiques d'une fiction réaliste (Ray 2013) afin de les adapter à des situations construites à partir d'une

adaptation de problématique professionnelle en modélisation dans le but de favoriser la transposition des pratiques expertes invariantes identifiées en partie 2. Nous présentons l'élaboration de notre fiction réaliste de type FRAPPM autour de la prévision de la croissance d'un arbre puis l'analyse a priori sur le travail de la mathématisation horizontale lors d'une phase de questions-réponses à propos de cet énoncé. Dans le chapitre 9, nous présentons l'analyse a posteriori de notre expérimentation réalisée lors de la session collaborative ResCo en 2015-2016 et en dégageons les principaux résultats.

Le chapitre 10 précise la problématique relative aux pratiques enseignantes relatives à l'enseignement de la mathématisation horizontale et le cadre théorique retenu pour nos analyses. Nous y interrogeons la place de la mathématisation horizontale en tant qu'enjeu d'apprentissage mathématique dans l'éducation secondaire, en France, à partir d'une analyse écologique des programmes français en mathématiques dans l'enseignement secondaire (11 ans à 18 ans). À partir d'une étude de la littérature, nous identifions les obstacles potentiels à l'enseignement de la mathématisation horizontale. Puis nous explicitons nos hypothèses de travail sur les obstacles et les conditions relatifs aux pratiques enseignantes relevant de cet aspect de la mathématisation. Nous montrons en quoi ces hypothèses sont des préalables à penser des hypothèses de recherche sur des leviers potentiels pour enrichir les pratiques enseignantes, en considérant des leviers internes à la logique du dispositif ResCo. Nous terminons ce chapitre en précisant la méthodologie d'analyse des données recueillies retenue afin de mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherche. Le chapitre 11 est consacré à la présentation des analyses et des résultats relatifs aux pratiques enseignantes de nos expérimentations menées au sein du dispositif du groupe ResCo.

Nous terminons par les conclusions de ce travail et la présentation de perspectives de poursuite de notre recherche.

Partie 1 Cheminement vers la problématique de la thèse

Dans cette partie, nous présentons les questions professionnelles à l'origine de notre thèse en montrant comment ce questionnement professionnel a croisé les problématiques de recherche-développement du groupe de Résolution Collaborative de problèmes de l'IREM² de Montpellier et a débouché sur le projet de thèse dont ce manuscrit rend compte.

Dans le premier chapitre, nous décrivons le cheminement de ce questionnement vers la problématique de recherche de la thèse. Dans le deuxième chapitre, nous précisons nos questions de recherche ainsi que le choix des ancrages théoriques que nous avons retenus pour notre étude. Dans le dernier chapitre, nous justifions à travers une étude de la littérature en didactique des mathématiques l'importance de l'enjeu de la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques et décrivons des schémas de processus de modélisation selon leur appartenance aux groupes définis dans la classification de Rodriguez (2007) en nous attachant aux étapes susceptibles de proposer un travail relevant de la mathématisation horizontale. Cette étude vise à nourrir nos réflexions sur le choix du schéma du processus de modélisation pour notre travail. Nous montrons comment ce questionnement nous a menées vers un questionnement relevant de l'épistémologie contemporaine que nous mettrons à l'étude dans la partie 2.

² Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques

Sommaire de la partie 1

Chapitre 1 Questionnement professionnel et problématique

Chapitre 2 Questions de recherche - Ancrages théoriques et méthodologie de recherche

Chapitre 3 La modélisation mathématique

Conclusions de la partie 1

Chapitre 1 : Questionnement professionnel et problématique

Dans ce chapitre nous explicitons le cheminement de notre questionnement professionnel d'enseignante vers une problématique de recherche, en montrant comment ce cheminement a croisé les travaux d'un groupe de travail de l'IREM de Montpellier.

1-1 Origine du projet de recherche

Enseignante en mathématiques dans le second degré de 2001 à 2014, j'ai intégré dans mes pratiques ordinaires l'enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes, en particulier en proposant régulièrement des problèmes ouverts selon la mise en œuvre préconisée par Arsac & Mante (2007) à savoir :

- Un problème ouvert : Un énoncé court choisi de façon à ce que tous les élèves puissent s'engager dans une résolution, avec leurs connaissances. L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire ni de questions du type "montrer que")
- Une modalité de mise œuvre : un temps court de recherche individuelle, un temps de recherche en groupes, un bilan intermédiaire pour éventuellement relancer les recherches, un deuxième temps de recherche en groupe, une mise en commun pour débattre de la validité des différentes procédures produites par les élèves, puis une institutionnalisation des connaissances mathématiques apparues lors du débat.

Les instructions officielles des programmes 2008 préconisaient de proposer aux élèves des problèmes issus de la réalité en lien avec d'autres disciplines pour donner du sens à l'activité mathématique :

« Les méthodes mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles ont cependant leur autonomie propre et, l'efficacité des concepts qu'elles étudient, due à leur universalité, leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la Terre, la technologie, la géographie... Certaines de ces disciplines entretiennent des liens très étroits avec la discipline mathématique qui leur apporte l'efficacité de ses outils et, en retour, nourrit sa réflexion des problèmes qu'elles lui soumettent.

L'enseignement tend à la fois à développer la prise de conscience de cette autonomie par les élèves et à montrer que l'éventail des utilisations est très largement ouvert. » (MEN, 2008, p.10)

En appui sur ces instructions, j'ai souhaité proposer des problèmes davantage ancrés dans la réalité. Il m'a été plus difficile de trouver des énoncés de ce type dans les manuels, m'amenant à essayer d'en élaborer par moi-même. J'ai utilisé des données sur le problème écologique du naufrage du pétrolier Erika, que j'ai adapté pour construire la situation « du pétrolier » (voir la fiche de préparation en annexe 1) proposée en 2009 à des classes de quatrième (élèves de 13-14 ans) :

Le 12 décembre 1999, le pétrolier ERIKA, navire à coque unique âgé de 25 ans et sous pavillon maltais, s'est brisé en deux au large des côtes de la Bretagne. Environ 37 000 tonnes de pétrole lourd ont été répandues dans la mer, polluant 400 kilomètres de côte, endommageant gravement la flore et la faune, et provoquant de graves répercussions pour la pêche et le tourisme. (Le nombre d'oiseaux morts est estimé entre 150 000 et 300 000, le poids des déchets est estimé à 250 000 tonnes). Cette catastrophe a révélé la nécessité de disposer d'un contrôle amélioré du transport pétrolier au niveau européen. (Extraits d'articles issus du site Univers-Nature)



Source: xxi.ac-reims.fr/.../image_erika

Figure 1 : Le problème du pétrolier

Le problème proposé consistait à déterminer l'aire de la surface de mer occupée par la nappe de pétrole déversée dans la mer.

Pour ce faire, les élèves sont d'abord amenés à choisir le solide qui peut représenter la nappe de pétrole afin de pouvoir ensuite en calculer le volume à partir des données des valeurs numériques de la masse de pétrole déversée et de la masse volumique du pétrole (que je leur ai

fournies). Puis à partir de la donnée de la valeur numérique de l'épaisseur de la nappe de pétrole (que j'ai choisie), ils peuvent calculer l'aire demandée.

En élaborant cette situation, je me suis trouvée confrontée à la question professionnelle suivante :

Comment permettre aux élèves de comprendre les relations entre les mathématiques et la réalité ?

Dans la situation du pétrolier, les élèves ont questionné les choix possibles de solides se heurtant à leur pertinence vis-à-vis de la réalité. Ils ont aussi questionné mon choix de la valeur numérique de l'épaisseur de pétrole. J'ai réalisé que cette activité de modélisation mobilisait d'autres compétences mathématiques avant de pouvoir envisager son traitement mathématique (que j'avais très largement guidé, voir annexe 1). Ceci m'a conduite à m'interroger sur l'élaboration de situations porteuses d'un travail de modélisation mathématique dans le temps contraint de la classe et sur les conditions et les contraintes de leur mise en œuvre dans les classes.

En 2010, j'ai participé à une formation proposée par le groupe ResCo (Résolution Collaborative de problèmes) de l'IREM de Montpellier. A l'issue de cette formation, les membres du groupe m'ont invitée à intégrer leur équipe. J'ai découvert un groupe qui élabore des énoncés en vue de travailler la modélisation mathématique à partir de situations posées hors du champ des mathématiques, et propose, dans le cadre d'un stage de formation continue, un dispositif de mise en œuvre de résolution de ces problèmes en classe. J'ai pu partager mes questionnements et les nourrir en travaillant avec le groupe ResCo. Au sein de ce groupe ont émergé des questions vives : *Comment élaborer des situations porteuses de l'activité de modélisation mathématique ? Comment les mettre en œuvre pour favoriser l'apprentissage de la modélisation mathématique ?* Ces questions s'étant révélées suffisamment riches et le groupe ResCo étant dans une logique d'action, j'ai ressenti un besoin du groupe de pouvoir prendre du recul et de se détacher du temps contraint de l'action pour étudier ces questions. Ceci a nourri la démarche de nous engager dans un travail de recherche dont le fruit est cette thèse.

Nous présentons dans la suite les travaux du groupe ResCo à partir desquels nous avons construit notre problématique de thèse.

1-2 Le travail du groupe ResCo

Les écrits de ce paragraphe sont repris d'une publication que nous avons coécrite avec le groupe ResCo pour la revue Repères IREM pour un numéro spécial autour des démarches d'investigation en juillet 2014. (ResCo, 2014)

Le groupe ResCo est un groupe de l'IREM de Montpellier qui existe depuis le début des années 2000. Comme la plupart des groupes de l'IREM de Montpellier, il est composé d'enseignants du secondaire et d'au moins un enseignant chercheur en mathématiques dont certains conduisent des recherches en didactique des mathématiques. Ce groupe vise à favoriser la mise en œuvre dans les classes de véritables activités de recherche. Il propose aux enseignants du secondaire un dispositif de résolution de problèmes qui lie travail collaboratif et démarche d'investigation. Chaque année, il organise dans le cadre du PAF (Plan Académique de formation) un stage de formation continue comportant une session de résolution collaborative de problèmes.

En observant les évolutions de postures des stagiaires, les travaux effectués dans les classes, les modifications de comportement des élèves face aux mathématiques, les membres du groupe ResCo ont formulé les hypothèses suivantes autour de la démarche d'investigation (ResCo 2014, p.74) :

- Sur la base des travaux de Wenger (1998), l'évolution des pratiques des enseignants vis-à-vis de la résolution de problèmes de recherche en classe ne peut se faire qu'avec un accompagnement, au sein d'une communauté ; ce point de vue a été développé dans un article de la revue Repères-Irem (Sauter 2008).
- Pour qu'une démarche d'investigation vive dans les classes, il faut lui donner du temps.
- Le choix de problèmes favorisant la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est essentiel. Dans cette optique, le groupe ResCo a choisi de poser des problèmes dont les énoncés ne sont pas exprimés en termes mathématiques, afin que les élèves perçoivent les mathématiques non comme un objet d'étude mais comme un outil de réflexion et de modélisation du réel.

Pour une situation donnée, les objectifs principaux du groupe sont de permettre aux élèves d'explorer cette situation, de faire des choix permettant un traitement mathématique du

problème, d'utiliser ou d'élaborer des concepts mathématiques pour modéliser les objets concernés par cette situation, de mettre au point des procédures de résolution et de validation, et de vérifier la vraisemblance et la cohérence des solutions.

Nous proposons dans la suite d'explicitier les caractéristiques des énoncés du groupe ResCo avant de revenir sur les choix d'organisation des activités.

1-2-1 Caractéristiques des énoncés proposés par le groupe ResCo³

Considérant que la mathématisation de problèmes réels (tels que l'on peut les rencontrer au niveau de la recherche) étant généralement beaucoup trop complexe pour être prise en charge au niveau de l'enseignement secondaire, les membres du groupe ResCo élaborent puis proposent pour une session de résolution collaborative des énoncés qui ne sont pas directement issus de la réalité mais qui se réfèrent à des situations du monde réel et sont posés hors du cadre mathématique. Ces énoncés sont des contextualisations « réalistes⁴ » de problèmes mathématiques proposés par le chercheur mathématicien du groupe, que Ray⁵ qualifie dans son mémoire de master de «*fictionnalités réalistes*» (Ray, 2013).

Le problème mathématique sous-jacent à la fiction réaliste doit satisfaire le maximum des conditions suivantes :

- Être suffisamment contextualisé pour ne pas être directement identifié par les élèves.
- Être dans un contexte suffisamment réaliste pour justifier un questionnement authentique.
- Être tel que la phase de modélisation puisse renvoyer à l'une ou l'autre des variantes du problème mathématique initial selon les choix faits.

³ Cette partie s'appuie sur deux exemples d'énoncé du groupe ResCo pour en présenter les caractéristiques mais le lecteur pourra trouver d'autres exemples sur le forum du groupe à l'adresse suivante : <http://forum.math.univ-montp2.fr/>

⁴ Au sens habituel du terme c'est à dire des contextualisations qui pourraient être interprétées comme une situation du monde réel

⁵ Co-responsable du groupe ResCo de 2008 à 2012

Nous proposons de mieux comprendre comment ces caractéristiques se traduisent dans le choix des énoncés élaborés par le groupe ResCo à travers l'exemple suivant : Il s'agit de la fiction réaliste proposée en 2009-2010 dans le cadre de la résolution collaborative.

Nous empruntons dans la suite, des éléments de notre publication coécrite avec les membres du groupe ResCo (ResCo, 2012). Nous précisons que cet énoncé a fait l'objet d'étude du mémoire de Ray (2013). Nous y reviendrons au chapitre 9.

Ce problème a été cherché dans 35 classes sous la forme suivante :

Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente.

Figure 2 : Enoncé du problème de l'artiste (2009-2010)

Il s'agit d'une « *contextualisation réaliste* » du problème classique des cordes paru entre autres sur le site de l'IREM de Lyon dans *La feuille à problèmes*⁶ :

On place n points sur un cercle. Combien de régions détermine-t-on à l'intérieur de ce cercle en joignant les points deux à deux ?

Ce problème de dénombrement posé dans un contexte de réalisation d'une œuvre contemporaine vérifie les contraintes évoquées auparavant. En particulier,

- le problème des cordes n'est pas immédiatement reconnaissable par les élèves.
- le choix du contexte permet un questionnement authentique dans le sens où il justifie un riche travail autour de la modélisation du réel par les mathématiques et des choix subordonnés (modélisation des clous par des points, des fils par des segments, des zones par des surfaces...) et une réflexion sur cette modélisation (la taille des objets, qui n'intervient pas dans le problème mathématique, pourrait se révéler cruciale dans la réalité).
- selon les choix faits par les élèves, la modélisation de ce problème renvoie (ou peut renvoyer) au problème mathématique de départ ou à l'une de ses variantes. (par exemple, selon le choix de placer les clous de manière régulière ou pas).

⁶ <http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/>

Les caractéristiques des énoncés de ResCo sont porteuses des intentions de ce groupe de proposer aux élèves une situation pour laquelle plusieurs modèles mathématiques sont envisageables les amenant à faire des choix pour traiter mathématiquement la situation. Le choix d'un énoncé étant indissociable de celui du choix de sa mise en œuvre dans les classes, nous explicitons dans la suite l'organisation spécifique de l'activité des élèves proposée par le groupe ResCo.

1-2-2 Explicitation des différentes phases du dispositif ResCo

Le dispositif de résolution collaborative de problèmes repose sur des échanges entre des classes, regroupées par groupes de trois⁷, qui travaillent sur le même problème de recherche. Tous les niveaux du secondaire de la 6^{ème} à la Terminale⁸ (de 11 à 18 ans) sont potentiellement concernés, rajoutant en cela une contrainte sur le choix du problème à proposer.

Par ailleurs, le dispositif s'étale sur cinq semaines (à raison d'une séance par semaine), durant lesquelles une collaboration entre les classes est organisée. Cela implique que le problème proposé par le groupe ResCo doit ne pas être repérable sur un moteur de recherche sur internet, amenant le groupe à le formuler sous une forme inédite.

Le schéma suivant rend compte des différentes phases de l'organisation du dispositif ResCo sur lesquelles nous revenons spécifiquement dans la suite en illustrant les différentes phases dans le cas de la fiction réaliste proposée en 2012-2013.

⁷ Ces trois classes (parfois deux) sont de niveaux scolaires identiques ou voisins (c'est-à-dire avec généralement un niveau d'écart curriculaire)

⁸ Au lycée, le dispositif s'adresse à toutes les filières sous réserve qu'il y ait un enseignement de mathématiques.

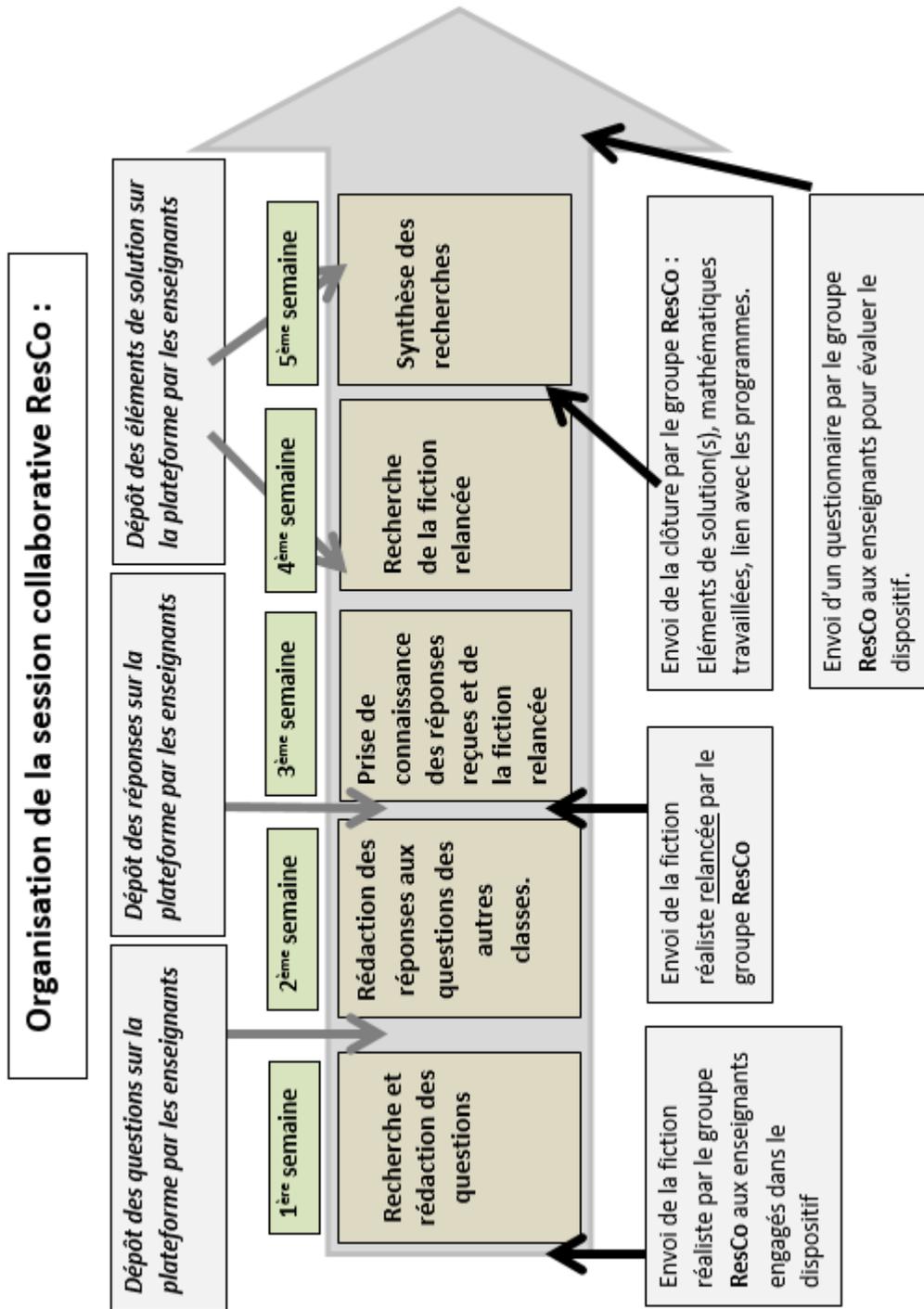


Figure 3 : Organisation du dispositif ResCo

Les phases de questions-réponses

La première séance proposée dans le dispositif ResCo vise à faire découvrir la fiction réaliste par les élèves et à leur faire formuler les questions qu'ils se posent lors de leurs premières recherches. Il s'agit de faire émerger par les élèves un questionnement sur les différents choix possibles permettant un traitement mathématique du problème⁹. Les questions élaborées par les élèves sont adressées aux deux classes avec lesquelles leur classe est associée, par l'enseignant, via le forum ResCo.

Lors de la deuxième séance, les élèves reçoivent des questions émanant des autres classes de leur groupe. Certaines questions reçues étant communes aux leurs, les amènent parfois à répondre à leurs propres questions. C'est dans la phase de l'élaboration des réponses par les élèves que, d'une part, les questions pertinentes pour la résolution du problème vont se dégager et que, d'autre part, vont apparaître des différents choix possibles de modélisation. Lors de cette séance dédiée aux réponses, les questions reçues amènent des discussions qui permettent aux élèves de prendre conscience de la nécessité de faire des choix pour traiter mathématiquement le problème, notamment autour de l'identification des grandeurs pertinentes.

Nous proposons d'illustrer cette phase de questions-réponses par des productions d'élèves lors de la session collaborative de 2012-2013 autour de la fiction réaliste « La dalle d'Anubis » dont voici l'énoncé :

L'archéologue Howard Carter a découvert le 4 novembre 1922 dans le tombeau de Toutankhamon les règles d'un jeu utilisé pour découvrir lequel de ses conseillers était le plus habile. Deux joueurs sont dans une pièce avec des dalles au sol. Sur la dalle dans l'angle Nord-Est se trouve la statue d'Anubis : celui qui s'arrête sur cette dalle va dans le monde des morts et perd. Le premier joueur se met sur la dalle qu'il veut. Puis le second joueur se met également sur une dalle de son choix. Les joueurs jouent à tour de rôle. Celui qui joue quitte sa dalle, qui alors s'effondre, entraînant avec elle toutes les dalles situées au sud, à l'ouest et au sud-ouest. Il se place sur une dalle restante. Saurez-vous être le plus habile ?

Figure 4 : Enoncé du problème de la dalle d'Anubis (2012-2013)

⁹ Nous décrivons les intentions du groupe ResCo sans préjuger pour l'instant de la manière dont les enseignants font vivre cette séance dans la classe. Nous verrons dans la partie 3 du manuscrit que la mise en œuvre effective du dispositif ResCo dans les classes dépend de la façon dont les enseignants interprètent les attendus des différentes phases de ce dispositif.

Voici quelques questions d'élèves à propos de cette fiction réaliste :

- Q1 - Que représente la statue d'Anubis ? Qui est Anubis ?
- Q2 - Que signifie saurez-vous être le plus habile ? Le gagnant fait comment pour sortir de là quand c'est fini ?
- Q3 - Le joueur peut-il avancer de plusieurs dalles à la fois ?
- Q4 - Quelle est la forme de la pièce sachant que comme il y a un angle, ça ne peut pas être un disque ? Combien y a-t-il d'angles dans cette salle ?
- Q5 - Que devient le gagnant ? Comment fait-il pour sortir du jeu ? A quoi ça sert de gagner si on reste bloqué dans la pièce ?

Figure 5 : Questions d'élèves à propos du problème de la dalle d'Anubis

Leurs questions sont réalistes et pragmatiques. Elles relèvent de la culture (Q1), du sens des mots (Q2) et de la modélisation du problème (Q3-4-5). Elles amènent des discussions qui permettent aux élèves de s'approprier la situation et de faire des choix argumentés comme l'illustrent les réponses suivantes qui ont été apportées par des élèves relativement aux questions ci-dessus :

- R1 - Anubis, un homme à tête de chacal - Le dieu de la mort chez les égyptiens
- R2 - Saurez-vous gagner.
- R3 - On ne peut avancer que d'une dalle sinon le premier a gagné en un coup
- R4 - On ne sait pas. Si la pièce pas rectangle alors pas d'angle
- R5 - Cela n'a pas d'importance pour trouver la stratégie. Le vainqueur sera récupéré par le pharaon de toute façon.

Figure 6 : Réponses d'élèves à propos du problème de la dalle d'Anubis

Par exemple, R3 est une réponse motivée par la nécessité que le jeu soit possible.

La première partie de la réponse R5 peut être interprétée comme une première étape de détachement du contexte, pour se centrer sur la stratégie, la deuxième partie revenant sur le contexte.

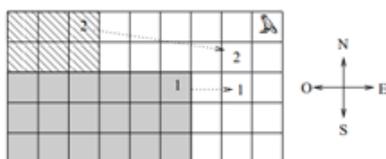
La relance

La relance élaborée par les membres du groupe et signée par l'enseignant-chercheur du groupe ResCo, fixe des choix en les motivant et vise à orienter la recherche vers un problème mathématique commun. En prenant en compte les échanges de questions-réponses des élèves (accessibles sur le forum), le groupe ResCo adapte les choix de modélisation possibles réfléchis en amont lors de leur analyse préalable réalisée pendant l'élaboration de la fiction réaliste. La relance permet d'explicitier les choix faits parmi ceux envisagés par les élèves lors de la phase des questions-réponses. Les intentions du groupe ResCo sont de rendre visible pour les élèves la nécessité de faire des choix pour résoudre le problème. Lors de la séance 4, les élèves poursuivent la recherche de ce même problème mathématique, issu des choix de modélisation fixés par la relance de l'équipe ResCo.

Voici par exemple, la relance élaborée par le groupe ResCo pour le problème de la dalle d'Anubis :

Vous avez bien cherché le problème la dalle d'Anubis dans plus de 60 classes (environ 1 800 élèves). Vous vous êtes posé beaucoup de questions intéressantes. Pour traiter mathématiquement le problème, nous devons faire des choix. On supposera que :

- (1) La pièce est rectangulaire et les dalles sont des carrés identiques. Les points cardinaux sont indiqués dans la pièce.
- (2) Les deux joueurs ne peuvent pas être sur la même dalle.
- (3) Si un joueur est sur une case qui s'effondre, il perd. On ne peut pas marcher ni sauter au-dessus d'une dalle effondrée. Ainsi, un joueur peut perdre de 2 manières différentes : soit il s'arrête sur la dalle d'Anubis soit il se trouve sur une dalle qui s'effondre.
- (4) Chaque joueur peut se déplacer d'autant de dalles qu'il veut tant qu'il marche sur des dalles non effondrées.
- (5) On peut passer sur la dalle d'Anubis mais celui qui s'y arrête a perdu.
- (6) Quand un joueur s'arrête sur la dalle d'Anubis, il perd et aucune dalle ne s'effondre. De plus toutes les dalles effondrées remontent, ce qui permet au gagnant de sortir.
- (7) On ne peut pas passer son tour, on est obligé de se déplacer. On dispose d'autant de temps que l'on souhaite pour réfléchir.
- (8) On joue tant qu'un joueur n'a pas perdu. La question qui a été le plus posée est : « quelles dalles s'effondrent ? » Voici un petit dessin pour illustrer la règle. On prend l'exemple d'une pièce rectangulaire de largeur 5 et longueur 9 (mais la pièce pourrait avoir d'autres dimensions). Le premier joueur, indiqué par 1, et le second joueur, indiqué par 2, se placent comme sur la figure ci-dessous. Quand le premier joueur se déplace pour aller sur sa nouvelle dalle, les dalles grisées s'effondrent. De même quand le joueur se déplace pour aller sur sa nouvelle dalle, les dalles hachurées s'effondrent.



Comme dans tout problème mathématique, je vous encourage à chercher une stratégie gagnante dans des cas plus simples. Par exemple, si la pièce n'a qu'une seule rangée de dalles, ou si elle est de forme carrée, ou encore si elle n'a que deux rangées de dalles. Vous pouvez imaginer d'autres cas et les traiter complètement avant de chercher le cas général. Vous pourrez aussi vous poser des questions annexes : combien y a-t-il de configurations de jeu possibles si l'on se fixe les dimensions du rectangle ? Bonne recherche. J'attends avec impatience vos nouvelles stratégies.

Etienne Mann-Maître de conférences à l'université de Montpellier 2

Figure 7 : Relance du problème de la dalle d'Anubis

L'explicitation des choix dans la relance répond à un certain nombre de questions des élèves.

Par exemple, le point 1) de la relance vise à fixer le choix de la forme de la pièce (question Q4 vue précédemment), le point 4) quant à lui répond à la question Q3 (nombre de dalles sur lesquelles le joueur peut avancer).

Le point 6) a été motivé par une question sur une stratégie proposée par des élèves qui n'avait pas été anticipée a priori par le groupe ResCo : Un certain nombre d'élèves ont posé la question « *Les deux adversaires peuvent-ils mourir simultanément (le 1er arrivant sur la dalle d'Anubis entraîne l'autre) ?* » Cette question est relative à la stratégie suivante : Se placer sur la dalle d'Anubis pour entraîner dans sa chute l'autre joueur. Le groupe ResCo a rédigé le point 6) pour éliminer cette stratégie.

A l'issue de la prise de connaissance de la relance, les élèves se sont engagés dans la résolution du problème, faisant preuve pour certains et certaines de prises d'initiatives. On voit par exemple dans l'exemple ci-dessous une solution proposée par des élèves pour le cas du carré 2x2 :

Brouillon des élèves

Leur production finale

Légende :

J₁ = Joueur 1
 J₂ = Joueur 2
 ▣ = Case effondrée
 A = Dalle d'Anubis

Stratégie gagnante pour les carrés 2x2 :

Si J₁ se met en diagonale de la case d'Anubis (A) n'importe où se met J₂ il gagne

a)

J ₁	A
J ₂	J ₂

 b)

J ₂	A
J ₁	J ₁

Figure 8 : Exemples de productions d'élèves autour du problème de la dalle d'Anubis

On y voit l'invention par les élèves de notations et de codage pour expliciter leur solution. Le fait de disposer à la fois du brouillon et de la production finale permet de voir leur cheminement vers le choix du codage final. On ne s'attachera pas dans la suite de la thèse à discuter les phases de résolution ni les enjeux de représentation et de communication qui sont en jeu mais cela pourrait constituer des perspectives de recherche.

La clôture du problème

Les intentions du groupe ResCo pour la cinquième et dernière séance sont d'inviter les enseignants à réaliser un bilan avec leurs élèves pour clore la session. Le groupe réalise à partir de toutes les productions d'élèves déposées sur le forum, un bilan des notions et compétences mathématiques travaillées¹⁰ que le problème a permis de mettre en œuvre, un bilan des compétences heuristiques développées et des éléments de solution mathématique du problème. Ces différents documents sont déposés sur le forum, les enseignants sont libres de les utiliser ou pas. L'objectif du groupe ResCo est de les accompagner dans la mise en œuvre de leur bilan avec les élèves¹¹.

Impact du dispositif ResCo

A la fin de chaque session, le groupe ResCo envoie un questionnaire sur chacune des phases du dispositif à destination des enseignants qui ont participé à la session. L'objectif est de recueillir l'avis des enseignants à la fois sur l'organisation du dispositif et sur les apprentissages mathématiques potentiellement générés par ce dispositif. Par exemple, pour la session collaborative sur la dalle d'Anubis, le questionnaire était le suivant :

¹⁰ En différenciant celles qui relèvent du cycle3, du cycle 4, du lycée général et du lycée professionnel.

¹¹ L'étude de la manière dont les enseignants mettent en œuvre cette phase de bilan dans les classes lors de la cinquième semaine du dispositif, constitue une perspective de recherche envisageable à l'issue de notre travail de thèse.

Stage résolution collaborative de problèmes 2012 – 2013

Vous avez fait chercher « La dalle d’Anubis » par une ou plusieurs classes dans le cadre d’une session de résolution collaborative de problème proposée par le groupe ResCo de l’IREM de Montpellier. Afin d’évaluer le dispositif de recherche, nous souhaitons recueillir vos réponses au questionnaire ci-dessous. D’avance merci pour votre collaboration.

Nom

Prénom Classe(s) engagée(s) et effectif(s)

PREMIERE QUESTION : LES DEUX PREMIERES SEANCES

Le problème tel qu’il a été posé aux élèves nécessitait un premier travail d’exploration devant permettre de comprendre que des choix devaient être faits concernant la situation.

Pensez-vous que l’organisation de la situation a permis à vos élèves d’entrer dans une démarche d’investigation ?

Pensez-vous que cette situation a favorisé l’entrée de vos élèves dans la recherche du problème mathématique ?

DEUXIEME QUESTION : LA RELANCE

A l’issue des deux premières séances, Etienne Mann a envoyé aux classes un courrier proposant de faire certains choix afin de permettre que tous les groupes résolvent le même problème mathématique.

Cette relance vous a-t-elle semblé répondre à un besoin de vos élèves ?

A-t-elle permis une relance de la recherche, ou au contraire a-t-elle inhibé une recherche déjà engagée ?

Avez-vous proposé à vos élèves l’un des prolongements possible à la recherche ?

TROISIEME QUESTION : LA RECHERCHE DU PROBLEME MATHEMATIQUE

Au cours de la recherche du problème mathématique (troisième et quatrième séance),

Quelle organisation de la classe avez-vous mise en place (travail en groupe, en binôme, travail individuel ; organisation pour la mise en commun) ?

Avez-vous rencontré des difficultés inhabituelles dans la gestion de la classe ?

Pensez-vous que le fait d’avoir déjà fait chercher un (ou des) problème(s) ouvert(s) par vos élèves a facilité votre gestion de cette phase de la recherche ?

Avez-vous mis du matériel à la disposition de vos élèves ? Si oui, précisez quel matériel et sous quelle forme (distribué à tous, ou à disposition sur demande, ou à libre disposition). Si non, feriez-vous un autre choix a posteriori ?

Quelles sont les connaissances mathématiques qui ont été mobilisées par vos élèves

Avez-vous repéré des stratégies de résolution qui vous ont surpris ?

QUATRIÈME QUESTION : PLACE DU PROBLÈME DANS LE COURS HABITUEL DE LA CLASSE

a) Avez-vous observé des différences d'attitude par rapport au travail habituel en classe chez certains de vos élèves ?

b) Envisagez-vous de proposer d'autres problèmes de recherche à vos élèves au cours de la présente année scolaire ? Au cours d'autres années ? c) Pensez-vous que la mise en activité des élèves sur ce type de problèmes puisse influencer leur approche des mathématiques ? Changer l'approche des mathématiques ?

CINQUIÈME QUESTION : LE TRAVAIL COLLABORATIF

a) Quel regard portez-vous sur le travail collaboratif proposé (points positifs, points négatifs) ?

b) Le travail collaboratif demande-t-il un investissement différent en termes de temps pour le professeur (temps de préparation avant la recherche, temps de préparation entre les séances, temps de correction, etc.) ?

Souhaitez-vous ajouter quelque chose ?

Figure 9 : Questionnaire pour les enseignants autour du problème de la dalle d'Anubis

A travers les réponses recueillies, nous notons deux éléments saillants qui vont nourrir nos hypothèses de recherche :

- Le choix de l'énoncé et la phase de questions-réponses semblent pertinents pour que les élèves s'engagent dans la résolution du problème comme l'illustrent les réponses dans les deux exemples suivants :

EXEMPLE 1 :

« Première question : les deux premières séances

Le problème tel qu'il a été posé aux élèves nécessitait un premier travail d'exploration devant permettre de comprendre que des choix devaient être faits concernant la situation.

Pensez-vous que l'organisation de la situation a permis à vos élèves d'entrer dans une démarche d'investigation ?

Oui, l'énoncé a permis à tous les élèves d'amener des questions pour clarifier la question posée ou le problème de manière plus générale. La situation concrète d'un jeu sur des dalles a fait sens dès le début pour tous les élèves et a clairement permis d'éviter l'écueil du problème mathématique trop abstrait.

Pensez-vous que cette situation a favorisé l'entrée de vos élèves dans la recherche du problème mathématique ?

Oui. Le contexte « réaliste et ludique » leur a probablement donné à tous le sentiment d'être capable de répondre à ce type de question. Ils sont donc tous rentrés dans une démarche de réflexion sur le sens à donner à cet énoncé. »

EXEMPLE 2 :

« Première question : les deux premières séances

Le problème tel qu'il a été posé aux élèves nécessitait un premier travail d'exploration devant permettre de comprendre que des choix devaient être faits concernant la situation.

Pensez-vous que l'organisation de la situation a permis à vos élèves d'entrer dans une démarche d'investigation ?

Cette première partie est particulièrement intéressante. Les élèves sont surpris de devoir explorer en se posant des questions et en délimitant un champ de questions. Dans un premier temps, ils rejettent le problème en disant que ce n'est pas possible de le résoudre. Dans un deuxième temps, ils commencent à écrire des questions en essayant d'être le plus « farfelu » possible et dans un troisième temps-le temps de la mise en commun-ils comprennent l'intérêt du travail et les questions qu'il faut vraiment se poser.

Pensez-vous que cette situation a favorisé l'entrée de vos élèves dans la recherche du problème mathématique ?

Absolument. Les élèves abdiquent très vite devant une recherche et là ils ont pu mesurer le champ d'investigation. »

- Une participation active des élèves est soulignée par les enseignants, même de ceux qui, habituellement en difficulté, ne sont guère productifs comme en témoignent les réponses ci-dessous :

« Quatrième question : place du problème dans le cours habituel de la classe

- a) Avez-vous observé des différences d'attitude par rapport au travail habituel en classe chez certains de vos élèves ?

Certains élèves en difficulté se sont engagés (presque obsessionnellement) dans ce problème, et se sont vraiment investis dans sa recherche. Les « bons » n'ont pas été déroutés par ce type d'activité. »

« Quatrième question : place du problème dans le cours habituel de la classe

- a) Avez-vous observé des différences d'attitude par rapport au travail habituel en classe chez certains de vos élèves ?

Beaucoup d'enthousiasme. Les élèves les plus en difficulté scolairement ont bien adhéré à la recherche.»

1-3 Vers l'élaboration d'un questionnement de recherche

Le groupe ResCo a apporté des éléments de réponse aux questions professionnelles initiales tant au niveau de l'élaboration de situations porteuses d'une activité de modélisation qu'au niveau de la mise en œuvre d'une telle situation.

La phase de questions-réponses du dispositif a retenu notre attention : les élèves semblent avoir la responsabilité de faire des choix et prendre conscience de la nécessité d'en faire afin d'envisager un traitement mathématique pour répondre à la question posée. Les problèmes proposés par le groupe ResCo étant des contextualisations « *réalistes* » de problèmes mathématiques, les choix que sont amenés à faire les élèves relèvent de choix de modélisation pour se ramener à un problème mathématique à résoudre. La phase de questions-réponses pour un problème donné, qui n'est pas indépendante du reste de la résolution de ce problème, semble favoriser l'entrée dans la mathématisation¹² du problème. Dans les travaux autour du groupe ResCo, il n'y a pas eu d'étude de cette phase du point de vue de son enjeu dans un processus de modélisation. Nous proposons d'étudier cet enjeu du point de vue de la recherche à partir d'autres types d'énoncés relevant d'adaptations de problèmes issus de la réalité afin d'étudier la mathématisation qui se joue lors de la phase de questions-réponses. Ces énoncés devront remplir les conditions qui spécifient une fiction réaliste et nous réfléchirons aux éventuelles autres conditions associées.

Nous formulons l'hypothèse de recherche suivante :

Le dispositif proposé par le groupe ResCo favorise la dévolution aux élèves de la mathématisation lors de la phase de questions-réponses.

Pour mettre à l'étude cette hypothèse, nos réflexions s'orientent sur plusieurs axes :

- la nécessité de clarifier ce que l'on entend par modélisation et mathématisation.
- la nécessité d'identifier les enjeux d'apprentissages mathématiques lors de la phase de questions-réponses.
- l'intérêt de questionner les pratiques professionnelles de chercheurs utilisant la modélisation mathématique et mieux identifier les mathématiques et leurs

¹² Au sens de traduire un problème réaliste en un problème mathématique. Nous y reviendrons plus loin.

interactions dans leurs champs d'application, dans la perspective de penser leur transposition à la classe.

- l'identification des conditions et des contraintes pour la construction d'énoncés propices à la dévolution de la mathématisation aux élèves.
- la caractérisation des modalités de mise en œuvre favorisant l'engagement des élèves dans le processus de mathématisation de situations posées en dehors des mathématiques
- l'identification des conditions et des contraintes pour que les enseignants fassent vivre la phase de questions-réponses dans la classe en cohérence avec les objectifs du groupe ResCo visés pour cette phase. Malgré les retours positifs au fil des ans de la majorité des enseignants mettant en œuvre une session collaborative ResCo, on peut faire l'hypothèse que les enjeux et les ressorts de cette phase de questions- réponses du point de vue du processus de modélisation ne sont pas toujours très bien identifiés par les enseignants.

Chapitre 2 : Questions de recherche

Ancrages théoriques et méthodologie de la recherche

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous précisons notre problématique et nos questions de recherche. Au regard de ces questions, nous justifions le choix de la méthodologie de notre recherche et précisons le cadre théorique de la recherche qui emprunte des éléments de différentes théories. Ensuite, nous donnons la structure de la thèse en montrant comment nous articulons notre étude didactique et notre étude épistémologique. En particulier nous explicitons comment l'une nourrit l'autre et réciproquement. Nous terminons en donnant l'architecture de la thèse.

2-1 Problématique et questions de recherche

Les études conduites dans le groupe ResCo ont mis en évidence l'intérêt potentiel d'un questionnement explicite par les élèves sur un problème initial de type « fiction réaliste » afin d'envisager de traiter le problème avec des outils mathématiques. Cette phase dans le processus de modélisation nécessite « une mathématisation » qui permet de passer de la situation réelle au monde mathématique menant à la construction de modèle pour résoudre le problème. Afin de distinguer, dans notre étude, cette mathématisation de celle en jeu lors du traitement mathématique à l'intérieur du modèle mathématique, nous empruntons à Treffers (1978, p.78-79, notre traduction) la terminologie suivante définie pour des recherches en éducation mathématique : « *La mathématisation horizontale [qui] part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles.* » « *La mathématisation verticale [qui] se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles.* ». Cette terminologie a été reprise et discutée dans la Realistic Mathematics Education (RME). Nous y reviendrons dans la partie 2.

Dans tout le manuscrit, lorsque nous utiliserons le terme « *mathématisation* », nous le considérerons comme un processus, en cohérence avec la définition de Treffers.

Certains chercheurs francophones ont également repris la distinction entre mathématisation horizontale et verticale dans leurs travaux de recherche comme Ouvrier-Buffet (2013), même si du point de vue de la recherche, la mathématisation horizontale a été peu étudiée en tant que

telle dans l'activité de modélisation. La question d'étude des pratiques de chercheurs dans une activité de modélisation concernant des problèmes posés directement dans un cadre mathématique a été étudiée par exemple dans les travaux de Gardes (2013) et de Giroud (2011). Dans ces travaux, c'est l'aspect vertical de la mathématisation qui est mis à l'étude ; le travail reste encore à faire pour les problèmes posés dans un cadre non mathématique c'est à dire s'intéresser spécifiquement à la mathématisation horizontale.

Pour modéliser une situation posée hors champ mathématique, un travail relevant de la mathématisation horizontale est nécessaire afin d'élaborer un modèle mathématique. Ceci nous mène à notre principale question de recherche :

- QR₁ Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique?

Nous nous interrogeons sur les pratiques expertes inhérentes au passage du monde réel au monde mathématique. C'est pourquoi dans notre thèse, nous envisageons d'étudier la question de la transposition à la classe à partir d'une étude d'épistémologie contemporaine pilotée par les questions de recherche suivantes :

- QR₂ Quelles sont les pratiques des chercheurs experts en modélisation relevant de la mathématisation horizontale ?
- QR₃ Quelles pratiques de référence de ces experts peut-on transposer dans les classes ?

Pour conduire notre étude, nous avons choisi de nous placer dans le contexte des sciences du vivant pour des raisons essentiellement pragmatiques : nécessité de circonscrire un domaine – contacts préexistants avec des chercheurs du domaine.

Cette étude d'épistémologie contemporaine est axée sur les pratiques associées à un travail relevant de la mathématisation horizontale, et vise à nourrir notre questionnement didactique dont la question de recherche principale est la suivante :

- QR₄ Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée (11 ans à 18 ans) dans le cadre d'une activité de modélisation?

En particulier, en appui sur notre étude épistémologique, nous essaierons de répondre à la question de recherche suivante :

- QR₅ Quelles sont les caractéristiques des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation ?

Pour cette question, sur la base des travaux de ResCo, il s'agit de questionner la cohérence des spécificités d' « une fiction réaliste » avec la visée de transposition des pratiques expertes en modélisation et d'étudier en quoi ces spécificités pensées au sein de ResCo pour favoriser la nécessité de faire des choix, sont porteuses de l'enjeu de la mathématisation horizontale. C'est pourquoi, contrairement aux fictions réalistes habituellement proposées par ResCo qui relèvent de *contextualisations réalistes*, nous envisageons d'élaborer un énoncé qui relève d'*une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation mathématique dans les sciences du vivant* tout en s'assurant que cet énoncé respecte les conditions d'une fiction réaliste telles que posées dans les travaux autour du groupe ResCo. Il s'agira d'étayer et d'affiner ces conditions par l'étude d'épistémologie contemporaine dans une double perspective, - transposer des pratiques expertes en modélisation mathématique relevant de la mathématisation horizontale et - favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

Enfin, la question de recherche QR₄ est étroitement liée à la question de l'étude de la possibilité d'implémenter en classe des situations permettant de faire vivre cette étape aux élèves tout en prenant en compte les conditions et les contraintes qui pèsent sur les enseignants, ce qui nous conduit à la question de recherche QR₆ suivante :

- QR₆ Quels sont les contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la mathématisation horizontale ?

2-2 Méthodologie de recherche et cadre théorique

2-2-1 L'ingénierie didactique

Cette thèse vise à analyser les conditions de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale et à étudier la question de l'appropriation de l'enjeu de l'enseignement de cette mathématisation par les enseignants, dans leurs pratiques ordinaires. Cela nous amène à nous questionner à la fois sur l'élaboration d'une situation porteuse du travail de mathématisation horizontale et sur les conditions et contraintes pour les enseignants pour la mise en œuvre de cette situation dans les classes. De par ce questionnement, notre travail s'inscrit dans une

méthodologie de type « *ingénierie didactique* », défini par Artigue (1988) comme « *un schéma expérimental basé sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation et l'analyse de séquences d'enseignement.* » (Ibid., p. 285-286).

Bessot (2011) distingue (p.30) :

« *L'ingénierie de production et de développement qui vise uniquement un enseignement* »
« *L'ingénierie phénoménotechnique qui a pour objet de permettre l'étude des phénomènes didactiques, dans des circonstances compatibles avec l'éthique de l'enseignement.* »

Dans notre recherche, nous nous intéressons à ces deux types d'ingénierie « *dans la mesure où l'ingénierie phénoménotechnique produit des situations de classe qui diffusent dans l'enseignement ordinaire* » (via la formation et la session collaborative de résolution de problèmes proposés par ResCo) et « *où l'ingénierie de production et de développement peut ne pas viser uniquement un enseignement mais s'intégrer à une recherche* » qui étudie aussi, dans notre cas, les conditions d'utilisation de cette production par les enseignants du secondaire.

Comme Perrin-Glorian (2011), nous avons choisi cette méthodologie de l'ingénierie didactique parce qu'elle est « *dans la recherche, un des moyens privilégiés de confronter l'élaboration théorique à la contingence* » (Perrin-Glorian, 2011, p.57)

Dans notre travail de thèse, dont un objectif est l'étude de l'appropriation par les enseignants de l'enjeu de la mathématisation horizontale, nous envisageons d'élaborer une situation et de la mettre en œuvre dans le cadre du dispositif de formation du groupe ResCo, dans une perspective d'étude des conditions d'adaptabilité aux pratiques ordinaires. Notre questionnement est piloté par des questions qui se posent également dans le cadre de « *l'ingénierie didactique de deuxième génération* » (Perrin-Glorian, 2011) même si dans notre étude, nous n'en retiendrons pas la logique de développement de ressources qui amène à des allers retours avec le terrain.

Perrin-Glorian (2011) introduit le concept d'ingénierie didactique de deuxième génération en remarquant que « *quand une ingénierie est validée du point de vue de la recherche avec un bon contrôle des variables, comme permettant de faire émerger certaines connaissances chez les élèves, elle n'est pas forcément validée pour sa diffusion dans l'enseignement ordinaire* » (Ibid., p.68).

Elle prévoit au moins deux niveaux d'ingénierie avec des objectifs différents :

- premier niveau : l'ingénierie didactique « classique » qui sert à dégager une situation et à la caractériser

- deuxième niveau : pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire.

Pour le premier niveau, Artigue (1988) distingue quatre phases pour décrire la méthodologie de l'ingénierie didactique :

- 1 - la phase des analyses préalables
- 2 - la phase de la conception et de l'analyse a priori
- 3 - la phase de l'expérimentation
- 4 - la phase de l'analyse a posteriori et de l'évaluation

Le schéma suivant décrit ces quatre phases dans le cadre de notre recherche :

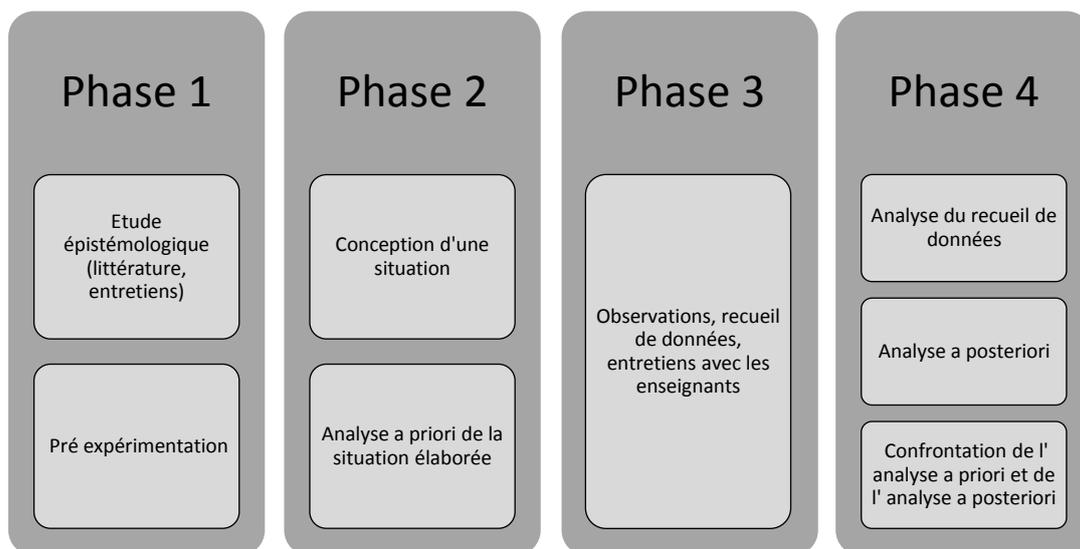


Figure 10 : Les quatre phases de notre étude dans le cadre de la méthodologie de l'ingénierie didactique

Nous utilisons le dispositif et la formation du groupe ResCo comme terrain d'expérimentation pour mener nos analyses, ce qui sera essentiellement l'objet de la partie 3.

Pour le deuxième niveau, nous avons analysé des vidéos d'enseignants participant à la résolution collaborative de problème 2015-2016, une vidéo du stage PAF 2015-2016 organisé

par ResCo et nous sommes appuyées sur les questionnaires à destination des enseignants qui ont participé au dispositif ResCo cette même année et/ou les années précédentes ou suivantes.

2-2-2 Concepts spécifiquement étudiés

LE CONCEPT DE DEVOLUTION

Nous empruntons à la théorie des situations didactiques le concept de dévolution, que Brousseau (1998) définit ainsi :

« La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève, la responsabilité d'une situation (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert » (Brousseau, 1998, p.303)

Nous nous proposons d'étudier les conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves c'est-à-dire les conditions didactiques du transfert à l'élève de la responsabilité du travail mathématique qui permet de passer du contexte réaliste dans lequel est posé le problème à résoudre, à un modèle mathématique pertinent vis-à-vis de la question posée. Nous faisons l'hypothèse que ce transfert de responsabilité sur les apprentissages relevant de la mathématisation horizontale est en partie pris en charge par le dispositif ResCo, ce qui nous amène à utiliser également la notion de contrat didactique (Brousseau 1998¹³) pour étudier en particulier en quoi et comment la phase de questions-réponses du dispositif ResCo modifie le contrat didactique habituel de la classe.

THEORIE DE LA TRANSPOSITION DE PRATIQUES SOCIALES DE REFERENCE

Nous empruntons à Martinand (1986) la notion de pratiques sociales de référence.

Les pratiques sociales de référence sont des activités par rapport auxquelles un apprentissage prend du sens pour un apprenant ; l'activité ne se réduit pas à un rapport individuel au savoir et se définit comme étant ce que met en jeu le sujet pour satisfaire aux exigences de la tâche. Dans ce cadre, *« l'idée de référence ne signifie pas que les activités scolaires doivent être identiques à celles des pratiques invoquées » (Martinand, 1986, p.104)* d'où l'idée de transposition. Dans notre étude, à partir des pratiques expertes identifiées relevant de la mathématisation horizontale, nous envisageons leur transposition dans les classes dans une activité de modélisation en nous

¹³ *« Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mise en scène » (Brousseau, 1998, p.60)*

appuyant sur ces pratiques, d'une part, pour élaborer la situation à proposer dans les classes, d'autre part pour le choix des modalités de sa mise œuvre.

LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE

Dans le volet 2 de la partie 3, nous interrogeons les conditions, les contraintes et les marges de manœuvre quant aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale au sein d'une activité de modélisation mathématique.

Pour ces analyses, nous nous plaçons dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique développée par Robert et Rogalski (2002 ; 2005).

Nous le justifions et précisons les éléments retenus pour notre étude dans le chapitre 10 de la partie 3.

Nous posons comme prémices l'hypothèse de travail suivante :

Il est important de faire vivre dans la classe un travail relevant de la mathématisation horizontale dans un processus de modélisation.

Notre questionnement didactique autour de la mathématisation horizontale nous amène à nos questions de recherche épistémologiques QR₁₋₂₋₃ dont l'étude viendra renforcer en retour l'étude didactique de nos questions QR₄₋₅₋₆.

Ainsi, notre thèse se structure en deux temps : Une étude d'épistémologie contemporaine émanant de notre questionnement didactique d'une part, qui nourrit en retour notre étude didactique d'autre part.

2-3 Structure du manuscrit

Le schéma à la page suivante résume la structure du manuscrit au regard de nos questions de recherche que nous rappelons ici :

- QR₁ Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique ?
 - QR₂ Quelles sont les pratiques des chercheurs experts en modélisation relevant de la mathématisation horizontale ?
 - QR₃ Quelles pratiques de référence de ces experts peut-on transposer dans les classes ?
- QR₄ Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation?
- QR₅ Quelles sont les caractéristiques des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation ?
- QR₆ Quels sont les contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la mathématisation horizontale ?

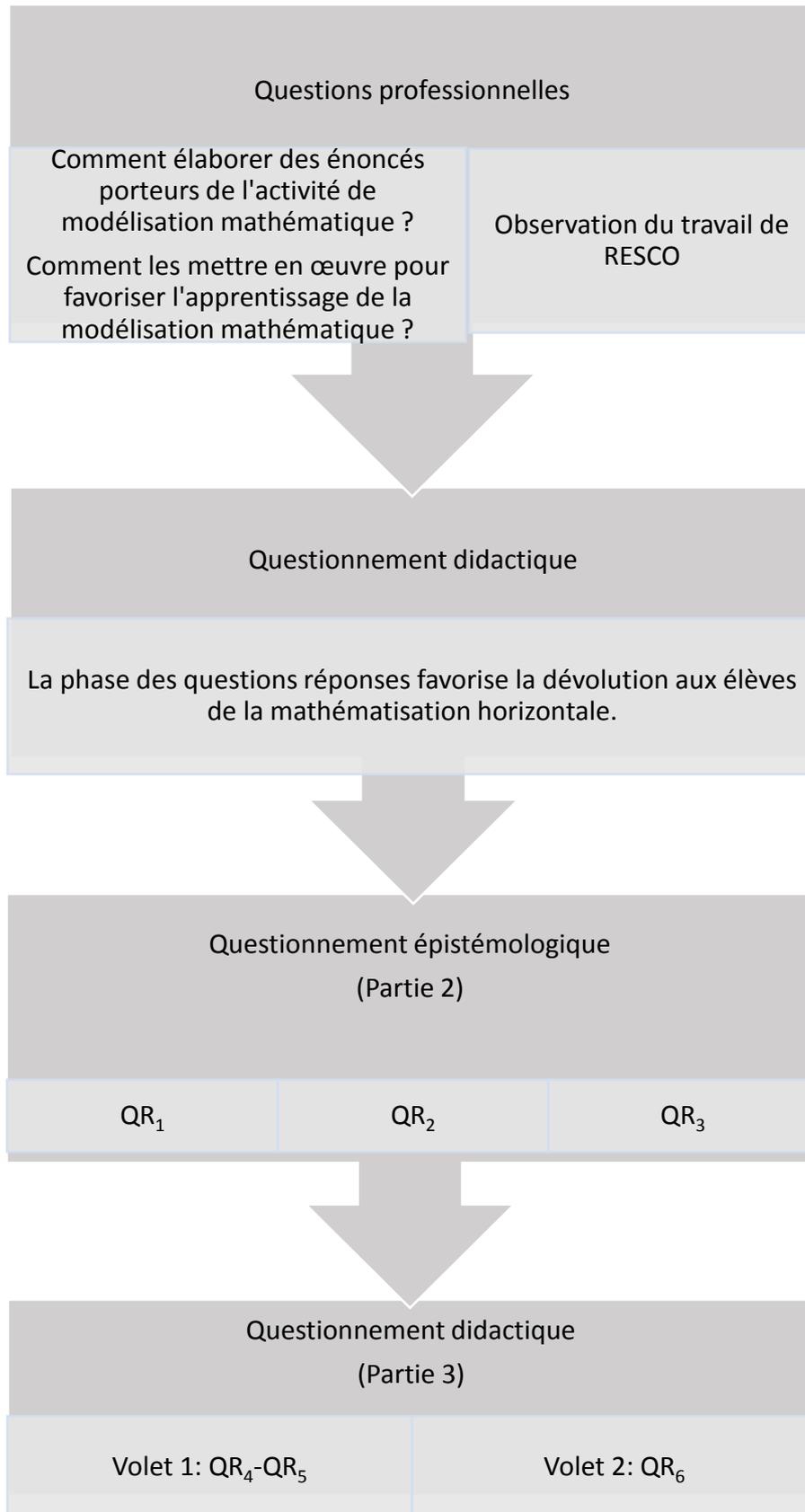


Figure 11 : Structure de la thèse

2-4 Architecture de la thèse

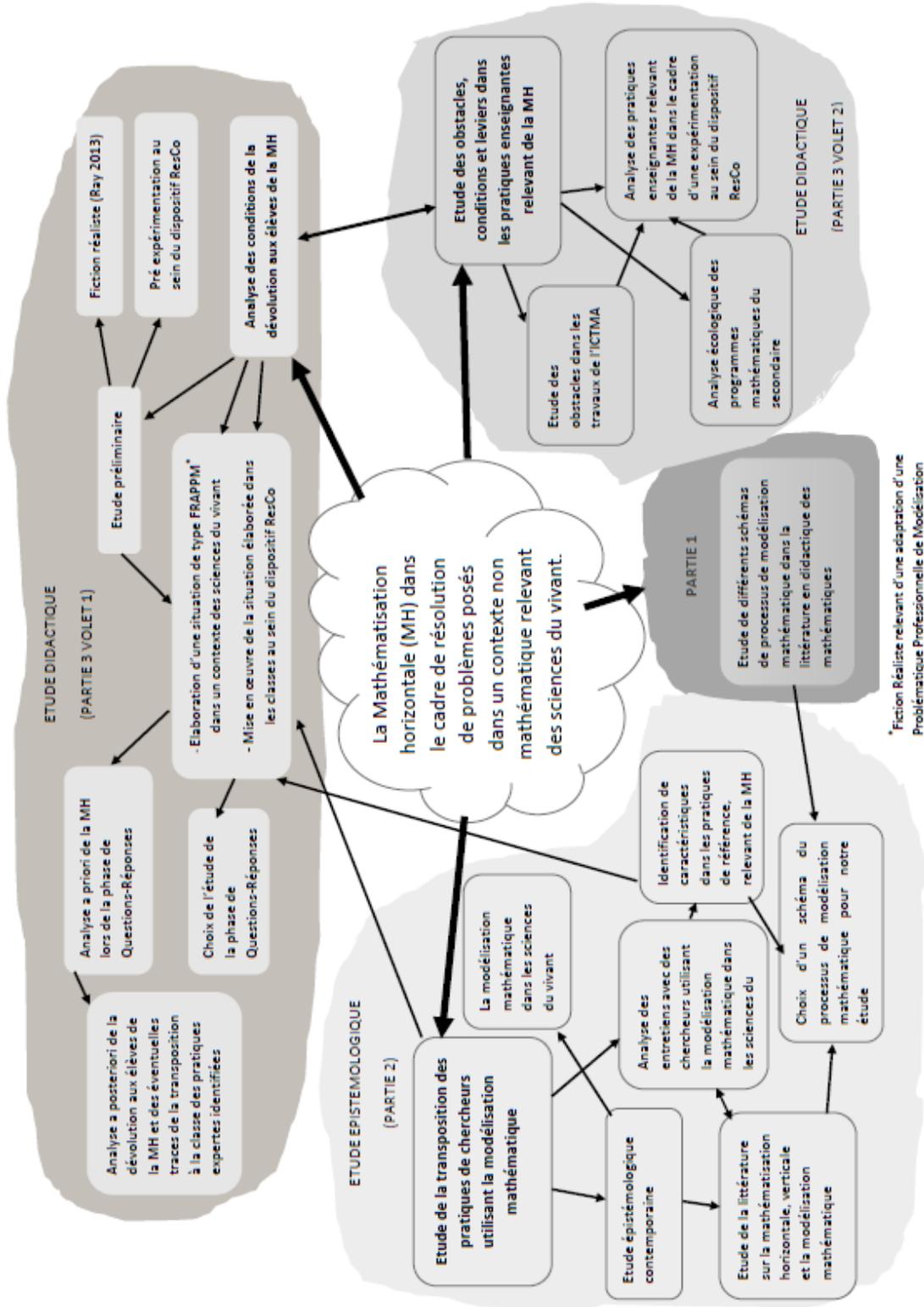


Figure 12: Architecture de la thèse

Chapitre 3 : La modélisation mathématique

Dans la littérature de recherche en éducation mathématique, pour certains auteurs comme Maaß (2006), intégrer des activités de modélisation dans les pratiques ordinaires est un objectif central.

*« The aim is to integrate modelling and applications into daily school routine. »
(Maaß, 2006, p.113)*

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous illustrons l'enjeu de la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques en nous appuyant sur les travaux de l'ICTMA¹⁴.

Maaß (2006) souligne la diversité des propositions de schémas visant à illustrer le processus de modélisation dans la littérature. De l'étude de l'auteur visant à en étudier les raisons, il ressort principalement que cette diversité de propositions est essentiellement corrélée aux objectifs d'apprentissage et au choix des compétences à développer visées par les auteurs. Afin d'éclairer cette corrélation nous proposons dans un second temps, de présenter une classification possible des différentes représentations du processus de modélisation empruntée à Rodriguez (2007). Pour chaque groupe de schémas, nous donnons et décrivons des exemples de schémas du processus de modélisation en nous attachant aux étapes susceptibles de proposer un travail relevant de la mathématisation horizontale. Cette étude didactique est un préalable à nourrir nos réflexions sur le choix du schéma du processus de modélisation pour notre recherche.

3-1 L'enjeu d'apprentissage de la modélisation mathématique au sein de l'ICTMA

L'activité de modélisation en mathématiques, son apprentissage et son enseignement dans les classes du secondaire à l'université étant un sujet de premier plan au cours des dernières décennies dans les travaux de la commission internationale de l'enseignement mathématique (ICMI), nous avons fait le choix d'analyser dans ces travaux en quoi et comment

¹⁴ Groupe d'étude international pour la modélisation et les applications mathématiques

l'enseignement de la modélisation mathématique s'inscrit dans l'enseignement des mathématiques.

Depuis 1983, « *Le Groupe d'étude international pour la modélisation et les applications mathématiques* (ICTMA) » affilié à la commission internationale de l'enseignement mathématique (ICMI) promeut les applications et la modélisation (A&M). Lors de réunions biennales, une série de conférences propose de discuter de tous les aspects des applications pédagogiques de la modélisation dans tous les domaines et à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques - écoles primaires et secondaires, collèges et universités. Pour préciser l'enjeu de l'enseignement de la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques, nous avons choisi d'analyser l'évolution des enjeux de la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques de 1983 à nos jours.

Dans les travaux de ICTMA 1 (1983) à ICTMA 3 (1987), l'accent est mis sur le développement de nouvelles façons de concevoir des cours de modélisation, en particulier en créant de nouveaux exemples et en élargissant des thèmes mathématiques à aborder avec un esprit de modélisation (voir par exemple Berry (1984, 1986, 1987) ; Blum (1985)). Des travaux de recherche s'intéressent alors aux difficultés rencontrées par les élèves pour mobiliser et construire ces compétences, comme par exemple les travaux de Kaiser-Meißner (1986). Dans ses recherches elle distingue dans une résolution d'un problème du monde réel :

- d'une part, les capacités nécessaires pour appliquer des mathématiques connues comme le développement de stratégies heuristiques
- d'autre part, des capacités en modélisation, comme les aptitudes à construire des modèles, qui font référence aux différentes étapes d'un processus de modélisation, décrit comme un cycle à partir du monde réel allant au monde mathématique et revenant au monde réel.

S'en suivent à partir des travaux de l'ICTMA 4 (1989) des réflexions sur les compétences associées à la modélisation, un thème de discussion encore très important dans les travaux actuels. En particulier, est affinée la distinction des différents types de capacités nécessaires dans un processus de modélisation en distinguant les compétences techniques et stratégiques des autres compétences nécessaires comme sélectionner des variables pertinentes, identifier les questions à se poser, générer des relations entre les variables et choisir des relations pertinentes. De nombreux travaux s'orientent vers la clarification entre les relations qui devraient exister entre le développement de concepts en mathématiques et le développement des compétences

en résolution de problèmes débouchant entre autre sur le concept de métacognition.¹⁵ Les travaux de recherche à partir de l'ICTMA 6 (1993) s'ouvrent sur l'étude du rôle de la métacognition dans l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation en particulier dans la phase du passage du monde réel au monde mathématique (Matos & Carreira, 1995).

Se pose alors la question : pourquoi enseigner la modélisation en mathématique ?

Lors de l'ICTMA 7 (1995), Blum (1995, p.6) donne quatre principaux arguments :

- Un argument pragmatique : cela permet aux élèves de comprendre et de faire face aux situations du monde réel en les préparant ainsi à leur future vie en tant que citoyens responsables et travailleurs compétents.
- Un argument formatif : Permettre aux élèves d'acquérir la capacité à communiquer ou coopérer avec d'autres, et développer chez eux la volonté d'entrer dans des situations nouvelles.
- Un argument culturel : en proposant de véritables activités de modélisation en classe, les mathématiques apparaissent pour les élèves comme une source de réflexion générant ainsi une image des mathématiques aussi complète et équilibrée que possible, en tant que science et en tant que partie de la culture humaine.
- Un argument psychologique : Contribuer à modifier l'attitude des élèves vis-à-vis des mathématiques, en particulier les interprétations du monde réel peuvent favoriser la compréhension des concepts mathématiques, ainsi que fournir des contextes appropriés pour raisonner mathématiquement. Souvent pour les élèves faire des mathématiques relève d'activités mécaniques avec de la manipulation de symboles sans réelle signification. A&M [que nous traduisons par Application et Modélisation] est une façon de rendre l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques plus pertinents.

De l'ICTMA 8 à 18 (de 1997 à 2017), nous retrouvons des travaux autour de l'enseignement de la modélisation mathématique mettant l'accent sur le travail mathématique induit par l'activité de modélisation.

¹⁵ Selon Tanner and Jones (1995), la métacognition implique la conscience et le contrôle de sa propre pensée : *"Metacognition involves awareness and control of one's own thinking"* (Ibid. p. 61)

Par exemple, dans les travaux de l'ICTMA 12 (2005), tout un chapitre est consacré à l'étude des compétences nécessaires dans une activité de modélisation mathématique. Cette étude est reprise dans les travaux de Maaß (2007, p.76) lors de l'ICTMA 13 (2007).

Maaß (Ibidem) ajoute aux compétences identifiées par Blum (citées précédemment), les compétences suivantes :

- Des compétences métacognitives
- Des compétences pour structurer la situation réelle
- Des compétences pour mettre les variables en relation en argumentant
- Des compétences pour voir les possibilités offertes par les mathématiques pour la solution des problèmes du monde réel et pour considérer ces possibilités comme positives

Ces nouvelles compétences montrent l'importance dans les travaux de l'ICTMA de la prise en compte de la modélisation mathématique comme un véritable enjeu d'enseignement en mathématique. Dans la résolution de problème est davantage prise en compte l'activité mathématique liée à l'appréhension du réel :

« Modelling competencies include, in contrast to modelling abilities, not only the ability but also the willingness to work out problems, with mathematical aspects taken from reality, through mathematical modelling » (Kaiser 2007, p.110)

Des recherches se sont orientées vers l'étude du développement de concepts mathématiques dans la résolution de problèmes.

« These studies have shown that concept development and the development of problem solving processes are closely and synergistically related ». (English & al, 2008a, p.6)

Ce type de recherche dans les travaux de l'ICTMA relève de la MMP (Models and Modeling Perspective) comme par exemple, ceux d'English & al, 2008 :

« These processes are the rudiments of mathematical modeling. Seeing problem solving from a models and modeling perspective (MMP) contrasts with the traditional definition of problem solving as searching for a way to progress from the "givens" to the "goals." Rather, from a models and modeling perspective, problem solving involves iterative cycles of understanding the givens and the goals of a problem. » (Ibid., p.8-9)

Les auteurs se sont questionnés sur comment permettre aux élèves d'utiliser ce qu'ils ont appris en mathématique dans des situations de la vie réelle.

« Knowing when to do things is as important as knowing how to do them » (Ibid., p.7)

Les résultats de cette étude ont permis de préciser que les deux questions suivantes sont significativement différentes (Ibid., p.6) :

« What should students do when they are stuck (i.e., when they are not aware of any relevant concepts or processes)?

What additional levels or types of understanding do students need to develop in order to be able to use concepts and abilities which: (a) are recognized as being relevant to a given problem solving situation, (b) are at intermediate stages of development, and (c) need to be adapted significantly to be useful in current circumstances? »

La MMP a éclairé la nature des connaissances mobilisées par les élèves lors de la résolution de problèmes posés dans un contexte réel, comme l'illustre Brady & al (2015) lors de l'ICTMA 16 (2013) en en donnant trois dimensions :

- Dimension 1 : Les connaissances en tant que systèmes d'interprétation

Les actions des élèves sont guidées par un savoir pratique entendu comme un système d'interprétation pour donner du sens aux phénomènes étudiés.

« In particular, this means that in realistic problem settings, experts distinguish themselves from non-experts not only by what they do but also by what they see in such situations. » (Ibid. p.56).

Les connaissances mobilisées ne sont analysées que par la suite mais pour autant résultent d'une réflexion de la part des élèves.

- Dimension 2 : Faire des connections

Les connaissances mobilisées par les élèves sont non seulement des connaissances déjà rencontrées mais aussi résultent de la compréhension qu'ils en ont.

« Knowledge is constituted as much by connections forged by the learner among big ideas of the domain and between these ideas and prototype situations, as by an 'intrinsic' understanding of the big ideas themselves. » (Ibid. p.56)

- Dimension 3 : Construire et utiliser des aptitudes à la résolution de problèmes

Les connaissances mobilisées sont caractérisées par la capacité des élèves de voir les situations d'une certaine manière ou par la compétence d'agir d'une certaine manière. La maîtrise de ce type de connaissance consiste pour l'élève à savoir quand et où l'appliquer en tant qu'outil conceptuel parmi son répertoire de connaissances.

« Expertise in this dimension involves recognizing that no single behavior, technique, or heuristic is valuable independent of context. » (Ibid. p.57)

C'est la prise de conscience croissante de la complexité et de la diversité des connaissances émergentes des apprenants dans la dimension 1 qui a été l'élément déclencheur de l'élaboration d'activités de recherche connues sous le nom d'activités MEA (Model-Eliciting Activities) (Brady & al 2015).

Chaque élément de la conception des MEA, à la fois les activités elles-mêmes et leur mise en œuvre dans les classes, est guidé par l'objectif d'optimiser les processus de développement d'idées et d'améliorer la vision des modèles et des processus de modélisation émanant des élèves.

« As their name suggest, MEA's are activities in which students' develop a model - or an artifact or a tool which explicitly embodies an important conceptual system (explanation, interpretation, design) that the researcher wants to investigate. » (English & al 2008, p.9)

Dans les MEA, les processus heuristiques et métacognitifs n'ont pas seulement la fonction d'aider les élèves à savoir ce qu'il faut faire ensuite ; ils ont pour fonction de les aider à interpréter la situation donnée visant ainsi le développement de modèles pertinents.

Comme souligné lors de l'ICTMA 16 (2013), un site web est en cours de construction à propos des MEA, s'appuyant sur la recherche MMP.

« We are in the process of assembling and testing a web-based research repository, dedicated to the creation and refinement of a suite of research tools to study the interacting and continually evolving modelling processes of students and teachers, in the context of a course-sized collection of curricular materials dealing with Quantification and Data Modelling. Our motivation and rationale for building this site resonates strongly with currents in the international research community, as seen at ICTMA 16. » (Brady & al 2015, p.54)

Des travaux se poursuivent selon la MEA, comme par exemple, lors de l'ICTMA 17 (2015), la communication d'Albarracin L. à propos de l'étude d'une activité de type MEA basée sur l'interprétation de données statistiques. « *Modelling with statistical data : characterisation of models produced by students* » ou celle de Wessels D. « *Using the six instructional design principles for assessing modelling capabilities of students in mathematics classroom* » ou encore celle de Illanes L. « *Difficulties in designing an MEA : experience in a teaching strategies course* ».

Maaß (2006) souligne la diversité des propositions de schémas visant à illustrer le processus de modélisation dans la littérature. De l'étude de l'auteur visant à en étudier les raisons, il ressort principalement que cette diversité de propositions est essentiellement corrélée aux objectifs d'apprentissage et au choix des compétences à développer visées par les auteurs.

« There is strong connection between the conception of the modelling process and modelling competencies » (Ibid. p.114)

Maaß montre dans son étude que le choix de la situation à proposer dans une activité de modélisation est piloté par celui du schéma du processus de modélisation dans la mesure où ce schéma vise des apprentissages associés à la modélisation dont la situation doit être porteuse.

« According to the perspectives on the modelling process, opinions on the relevance of the content differ. » (Ibid. p.115)

Nous proposons dans la suite de présenter une classification possible des différentes représentations du processus de modélisation avec des exemples de schémas du processus de modélisation relativement à cette classification.

3-2 Une classification du type de schémas représentant le processus de modélisation

Nous empruntons la classification de Rodriguez (2007). Dans sa thèse, Rodriguez s'appuie sur les travaux de classification de Borromeo (2006) et distingue quatre grands groupes de cycles de modélisation proposés dans la littérature dans lesquels les compétences de modélisation principalement visées n'ont pas la même importance. Nous proposons, dans la suite, de décrire des exemples de schémas du processus de modélisation selon cette classification en nous attachant aux étapes qui relèvent selon Treffers (1978) de la mathématisation horizontale, c'est-à-dire d'un travail permettant de passer du monde réel au monde mathématique.

3-2-1 *Le premier groupe*

Le premier groupe est constitué des schémas qui représentent le processus de modélisation uniquement comme passage de la situation du monde réel au modèle mathématique sans description d'étape intermédiaire. Rodriguez précise que les compétences visées dans ce groupe sont principalement celles du courant *problem-solving*, à savoir :

- Maîtriser les concepts pertinents
- Maîtriser les solutions heuristiques, les stratégies, ou les processus pertinents en matière de résolution de problèmes,
- Apprendre à mettre ces concepts et processus ensemble pour résoudre les problèmes.

Nous donnons dans la suite deux exemples de schéma du processus de modélisation qui relèvent de ce groupe.

LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION DANS LE LEMA PROJECT

LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications) est un projet européen qui soutient les enseignants qui pratiquent un enseignement des mathématiques à

travers la résolution de problèmes de la vie courante ou utilisant les mathématiques. Le schéma du processus de modélisation retenu dans ce projet est le suivant :

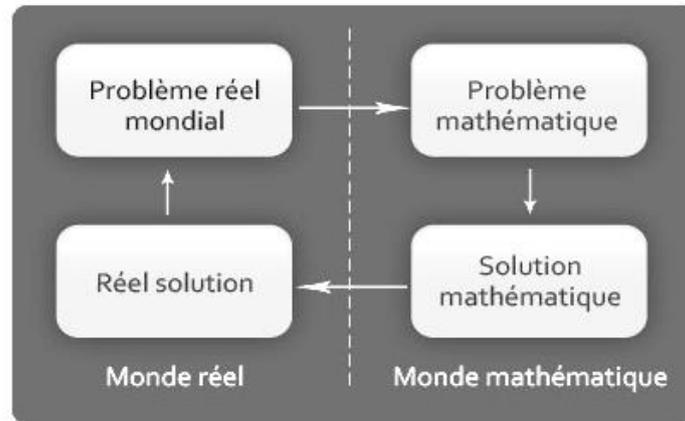


Figure 13: Le schéma du processus de modélisation dans le LEMA Project

Source : <http://www.lemma-project.org>

Sur ce schéma, il n'y a pas d'étape intermédiaire explicitant comment passer du monde réel au monde mathématique.

LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION DE PISA

Le schéma est le suivant :

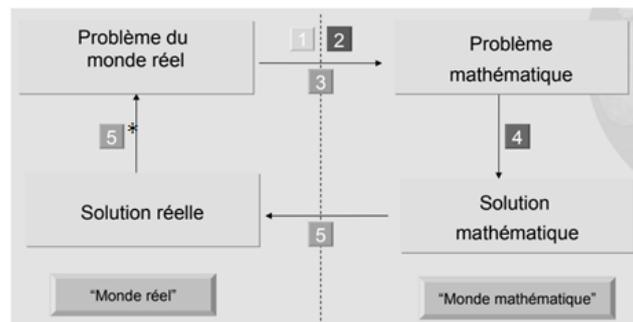


Figure 14: Le cycle de modélisation dans PISA (OECD, 2013, p.38)

*Cette phase aurait dû être numérotée «6».

Dans ce choix de schéma, il n'y a pas d'étape intermédiaire apparente entre le monde réel et le monde mathématique. Les étapes sont décrites de la manière suivante :

Etape 1 : Démarrer avec un problème situé dans la réalité.

Etape 2 : L'organiser selon des concepts mathématiques et identifier les connaissances mathématiques concernées.

Etape 3 (qui regroupe sur le schéma les étapes 1 et 2) : Décomposer graduellement la réalité par des processus comme la formulation d'hypothèses, la généralisation et la formalisation qui mettent en avant les caractéristiques mathématiques de la situation et transforment le problème du monde réel en un problème mathématique qui représente « fidèlement » la situation.

Etape 4 : Résoudre le problème mathématique.

Etape 5 et 6 : Examiner le sens de la solution mathématique en termes de situation réelle.

L'étape 3, qui comprend les étapes 1 et 2, caractérise le passage du monde réel au monde mathématique sans préciser comment identifier les caractéristiques mathématiques de la situation réelle.

3-2-2 *Le deuxième groupe*

Le deuxième groupe comprend les schémas qui ajoutent une étape intermédiaire pour passer du monde réel au modèle mathématique. Cette étape relève de la mathématisation horizontale dans la mesure où elle permet de passer « *du monde de la vie au monde des symboles* ». Nous nous sommes alors intéressées à la représentation de cette étape intermédiaire sur des schémas du processus de modélisation proposés dans des travaux de recherche.

LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DE BLUM (1996)

Blum (1995) introduit l'expression « *Applications and modelling* » (abrégée A&M) qui englobe plusieurs aspects :

« A real-world situation can be called an application, and any connection between mathematics and reality can be denoted an application of mathematics. The term (mathematical) modelling may mean the process of model building, leading from a real situation to a mathematical model, or the whole applied problem solving process, or sometimes any manner of connecting the real world with mathematics.[...] As an all-comprising for these various meanings, concerning both objects and processes, i will use the composite term applications and modelling (abbreviate A&M) » (Blum, 1995, p.5)

Blum (1996) propose un schéma du processus de modélisation à partir de situation du monde réel en caractérisant une étape intermédiaire appelée « *real model* » :

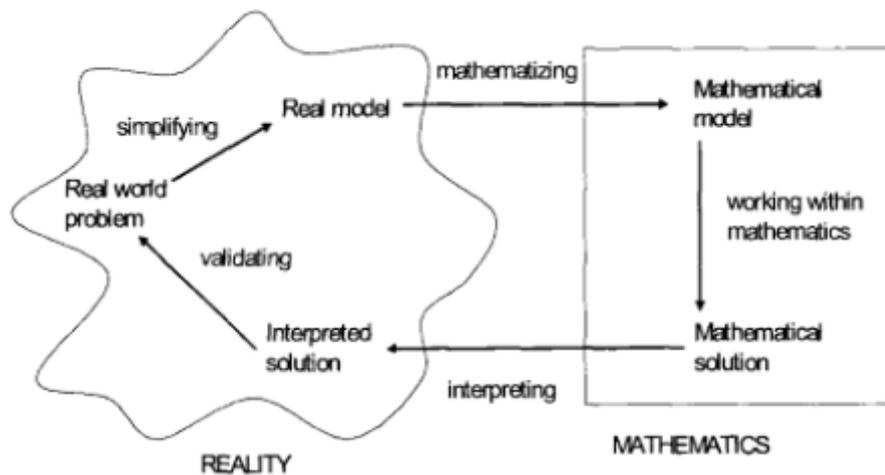


Figure 15: Processus de modélisation selon Blum (1996)

Plusieurs compétences de modélisation sont à mobiliser (Blum & Kaiser 1997) :

- Des compétences pour comprendre la situation réelle et pour élaborer un modèle basé sur la réalité
- Des compétences pour élaborer un modèle mathématique à partir du modèle réel
- Des compétences pour résoudre les questions mathématiques à l'intérieur du modèle mathématique
- Des compétences pour interpréter les résultats obtenus dans le travail mathématique, dans la situation réelle
- Des compétences pour valider la solution

Notre étude portant sur la mathématisation horizontale, nous nous intéressons principalement aux étapes permettant d'arriver au monde mathématique, à savoir les étapes permettant de passer du « *real world problem* » au « *mathematical model* ». La description de ces étapes par Blum est la suivante :

Étape 1 : Passage de la situation réelle au « *real model* »

- Comprendre la situation réelle et élaborer un modèle basé sur la réalité

Étape 2 : Passage du « *real model* » au « *mathematical model* »

- Élaborer un modèle mathématique à partir du modèle réel

La caractérisation de l'étape « *real model* » met en évidence la nécessité d'un travail mathématique préalable à la construction d'un modèle mathématique.

LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DE CHEVALLARD (1989)

Dans les travaux de Chevallard (1989), l'étape intermédiaire est appelée « *modèle du système* » dans la description du schéma du processus de modélisation que nous présentons ci-dessous :

Etape 1 : « *On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.* » (Ibid. p. 53)

Etape 2 : « *La construction du modèle en établissant un certain nombre de relations entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système étant l'ensemble de ces relations.* » (Ibidem)

Etape 3 : « *On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.* » (Ibidem)

L'étape 1 permet de passer de la situation réelle au modèle du système, l'étape 2 permet le passage du modèle du système au modèle mathématique et l'étape 3 correspond au travail mathématique à l'intérieur du modèle mathématique. Les étapes 1 et 2 permettant de passer de la situation réelle au monde mathématique, relèvent de la mathématisation horizontale.

LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION D' HENRY (1997, 2001)

Dans les travaux d'Henry, un modèle est « *une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issu d'une description de la réalité* ». (Henry, 1997. p.151). L'étape intermédiaire pour passer de la situation réelle au monde mathématique est appelée « *modèle pseudo-concret* » dans la description de son schéma du processus de modélisation que nous présentons ci-dessous :

Etape 1 : « *Réalité : Description simplifiée des éléments pertinents pour le problème posé* » (Henry, 2001, p. 156)

Etape 2 : « *Modèle pseudo-concret : Présentation du modèle en termes courants ou schématique, validation rhétorique de l'analogie avec la description précédente. Hypothèses de modèles implicites en général et/ou explicites pour le contexte particulier. Confrontation des hypothèses de modèle avec les éléments correspondants de la description. Conjectures sur les propriétés du modèle répondant à la question.* » (Ibidem)

Étape 3 : « *Modèle mathématique : Ensemble d'équations ou de formalisation mathématique représentant les propriétés du modèle et les hypothèses retenues. A partir des lois du phénomène étudié et des connaissances théoriques du modèle pseudo-concret, écriture mathématique des relations repérées entre variables dans un cadre théorique déterminé. Formulation dans ce cadre de la question posée.* » (Ibidem)

Étape 4 : « *Etude mathématique : Démonstration de résultats théoriques internes au modèle mathématique. Énoncé formel d'une réponse au problème mathématique posé.* » (Ibidem)

Étape 5 : « *Confrontation Modèle-Réalité : Formulation en termes concrets des résultats obtenus. Recontextualisation. Confrontation du modèle complété de ces résultats avec les informations accessibles de la réalité.* » (Ibid. p.157)

Étape 6 : « *Généralisation et prévisions: Extension du modèle validé à d'autres situations analogues, conditions de généralisation. Prévisions et résultats attendus dans ces nouvelles situations* » (Ibidem)

Les étapes 1-2-3 caractérisent le passage de la situation réelle au monde mathématique et relèvent ainsi de la mathématisation horizontale. Le *modèle pseudo-concret* d'Henry représente une traduction de la description de la réalité en « *un système simplifié et structuré* » (Ibid. p.154) à partir de laquelle s'appuie la construction d'un modèle mathématique.

LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DE COULANGE (1997)

Comme Henry, dans son travail de mémoire, Coulange (1997) utilise l'étape intermédiaire du *modèle pseudo-concret* dans son schéma du processus de modélisation :

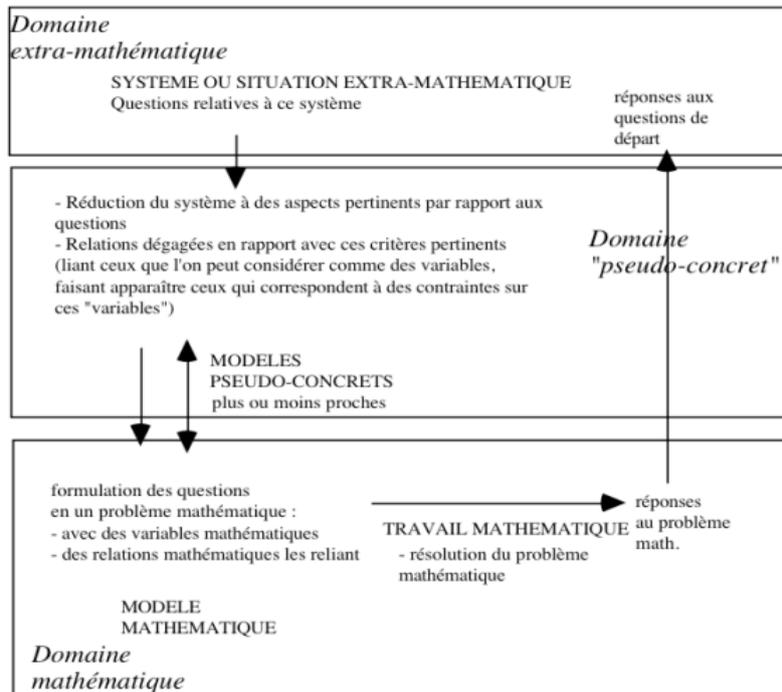


Figure 16 : Le schéma du processus de modélisation Coulange (1997)

Elle définit le modèle pseudo-concret comme « *une interprétation du système étudié en termes de langage naturel mais où la structure mathématique qui va être utilisée dans le modèle mathématique associé est plus ou moins sous-jacente.* » (Ibid. p.6).

Dans ce schéma, le passage du monde réel au monde mathématique comprend une phase de questions en rapport avec la situation réelle puis une phase « *d'interprétation du système étudié* » qui conduit à la construction du *modèle pseudo-concret*. Ces deux étapes relèvent de la mathématisation horizontale dans la mesure où elles permettent de passer dans le monde mathématique.

Ces différents schémas du processus de modélisation relevant du deuxième groupe (d'après Rodriguez (2007)) mettent en évidence le travail à réaliser pour passer du monde réel au monde mathématique. Une étape intermédiaire semble nécessaire (« *real model* » ou « *modèle du système* » ou « *pseudo-modèle* » pour penser l'élaboration d'un modèle mathématique. Cette étape relève de la mathématisation horizontale au sens de Treffers. Nous retenons en particulier l'étape 1 du schéma de Coulange qui consiste à se poser des questions sur la situation réelle en vue d'en dégager les aspects pertinents pour envisager la construction d'un modèle mathématique. Cette phase de questionnement fait résonance dans une certaine mesure à la

phase de questions-réponses proposé par le dispositif ResCo. Coulange ne propose pas de modalités spécifiques de mise en œuvre de ce questionnement ni de situation porteuse de ce type de tâches. Dans ses travaux (1998) portant sur la modélisation mathématique de problèmes concrets via un système d'équations linéaires en classe de seconde (élèves de 15 à 16 ans), elle montre cependant que la plupart des énoncés des problèmes concrets ne permettent pas de faire vivre cette phase de questionnement :

« En utilisant un schéma de la démarche de modélisation qui résume notre point de vue [voir figure 16], nous sommes arrivé à la conclusion que les activités de « mise en équation » ne représentent pas vraiment une activité de construction de modèles mathématiques à partir de situations réelles : mes énoncés de problèmes « concrets » proposés aux élèves sont en fait des modèles « pseudo-concrets » quasi-mathématiques de telles situations. La seule tâche laissée à la responsabilité de l'élève et, en rapport avec la modélisation mathématique, est de procéder à l'écriture d'un « bon » système linéaire à partir de l'énoncé. » (Coulange, 1998, p.50)

Nous donnons ci-dessous un exemple de ce type d'énoncé étudié dans les travaux de Coulange :

On dispose d'une table et de deux blocs placés comme sur la figure 1. On trouve que la longueur r est de 32 pouces. Après avoir réarrangé les deux blocs comme sur la figure 2, on trouve que la longueur s est de 28 pouces.
Quelle est la hauteur de la table ?

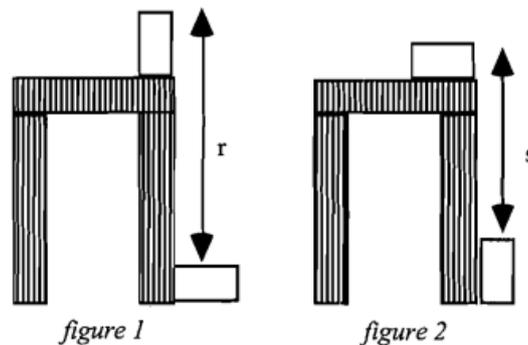


Figure 17 : La situation de la table (Coulange, 1998)

De par les schémas proposés dans l'énoncé qui représentent « une table et deux blocs agencés de deux manières différentes », cette situation représente un modèle pseudo-concret quasi mathématique de la situation réelle ne favorisant pas l'étape 1 de questionnement sur la situation réelle à modéliser.

Nous pointons avec intérêt pour notre étude l'utilisation du schéma du processus de modélisation comme outil d'analyse pour décrire et analyser le travail des élèves lors d'une activité de modélisation. Nous retrouvons cette méthode d'analyse dans les travaux de Wozniak (2012) à propos de la mise en œuvre dans une classe de CM2 (élèves de 9 à 10 ans) d'une situation issue des travaux du Lema Project. Cette situation est la suivante :

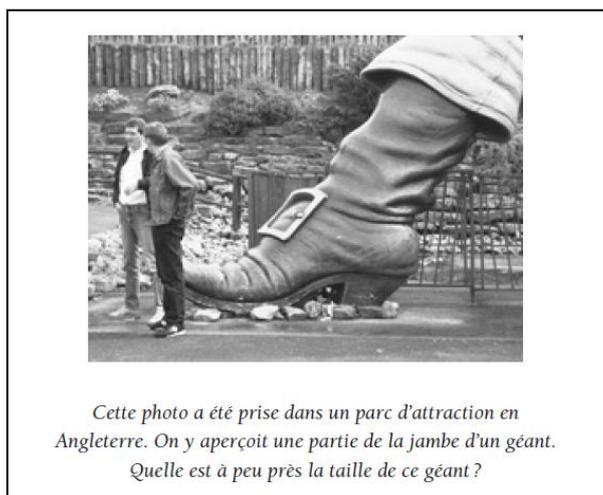


Figure 18 : La situation du géant du Lema Project

Lors de la mise en œuvre de cette situation dans une classe de CM2, Wozniak (2012) propose d'analyser les praxéologies de modélisation en se basant sur le schéma du processus de modélisation de Chevallard (1989). Les conclusions de l'auteure mettent en évidence « *une organisation mathématique fondée sur le travail dans le modèle plutôt que sur la construction du modèle révélée par la confusion entre hypothèses* » (Ibid. p.82).

Avant de passer aux troisième et quatrième groupes de la classification issue de Rodriguez (2007), nous proposons d'analyser un autre schéma de processus de modélisation qui propose, sans la nommer explicitement, une étape intermédiaire relevant de l'organisation de la réalité avant d'élaborer un modèle mathématique. Il s'agit du schéma d'Anhalt & al (2017).

LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DE D'ANHALT & AL (2017)

Dans les travaux Anhalt & al. le schéma du processus de modélisation est le suivant :

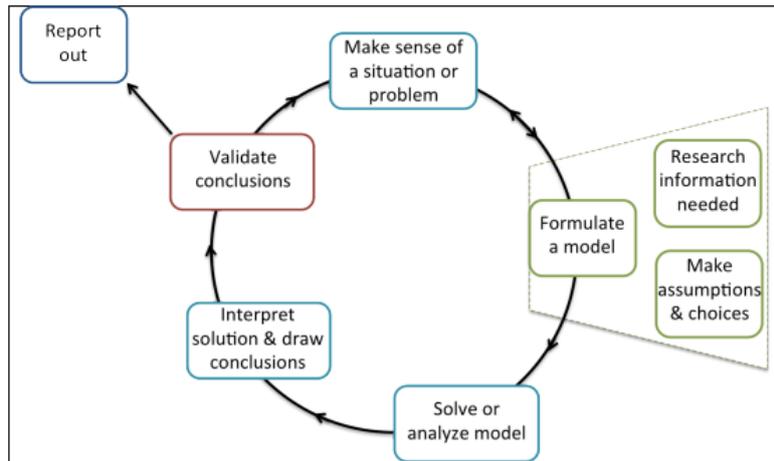


Figure 19 : Le schéma du processus de modélisation d'Anhalt & al. (2017)

Anhalt & al. décrivent ce schéma comme suit (Ibid. p.8) :

- La première étape est de comprendre la situation donnée et de choisir les questions qui ont besoin de réponses,
- La seconde étape est la formulation d'un modèle, qui consiste à formuler un problème mathématique qui représente une version simplifiée de la situation initiale. Cette étape peut impliquer des sous-étapes telles que la détermination des variables pertinentes, des hypothèses concernant toute information manquante et des choix mathématiques appropriés
- Une fois que le modèle est formulé, c'est l'étape de résolution de problèmes qui conduit à une solution mathématique qui doit être interprétée dans le contexte initial.
- Les conclusions sur la situation initiale proviennent de cette interprétation et doivent être évaluées dans une phase de validation afin de déterminer si elles ont un sens dans la situation initiale. Puisque la réponse mathématique est influencée par les hypothèses et les choix effectués plus tôt, les conclusions peuvent ne pas être satisfaisantes. Si tel est le cas, les hypothèses et les choix sont révisés en vue de modifier le premier modèle.
- Le cycle peut être répété une ou plusieurs fois jusqu'à ce que les conclusions soient satisfaisantes.

De notre point de vue, la première étape qui relève d'identifier des questions dont les réponses pourraient aider à l'élaboration d'un modèle mathématique constitue une étape intermédiaire. Nous supposons que cette étape est susceptible de faire émerger des hypothèses sur l'identification des variables pertinentes. L'objectif de cette phase de questions-réponses diffère de celui du groupe ResCo dans la mesure où pour Anhalt & al. cette phase a pour objectif principal d'émettre des hypothèses sur les informations manquantes dans l'énoncé de la situation réelle. Nous rappelons que dans le cadre du dispositif ResCo, la phase de questions-réponses vise à mettre en évidence pour les élèves la nécessité de faire des choix pour traiter mathématiquement le problème donné et que selon ces choix plusieurs modèles sont possibles. Cependant, cette première étape du schéma étudié permet de passer du monde réel au monde mathématique et relève en cela d'un possible travail de mathématisation horizontale.

3-2-3 *Les troisième et quatrième groupes*

Les troisième et quatrième groupes de la classification de Rodriguez sont constitués des schémas du processus de modélisation qui affinent l'étape intermédiaire entre la situation réelle et le monde mathématique en vue d'étudier les processus cognitifs des élèves pendant le processus de modélisation. Ces groupes s'appuient sur les travaux de Borromeo (2006) qui ont mis en évidence la nécessité d'une phase de représentation mentale de la situation réelle conduisant à la construction d'un modèle de la situation. Le troisième groupe contient les schémas qui mettent en évidence une étape intermédiaire qui relève à la fois du deuxième groupe et de la construction d'un modèle de situation. *Le quatrième groupe* regroupe les schémas qui caractérisent deux étapes intermédiaires entre la situation réelle et le modèle mathématique : - une étape de construction du modèle de situation et - une étape de type « *real model* » ou « *modèle pseudo-concret* », comme par exemple le schéma du processus de modélisation de Blum et Leiss (2005).

LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION DE BLUM ET LEISS (2005)

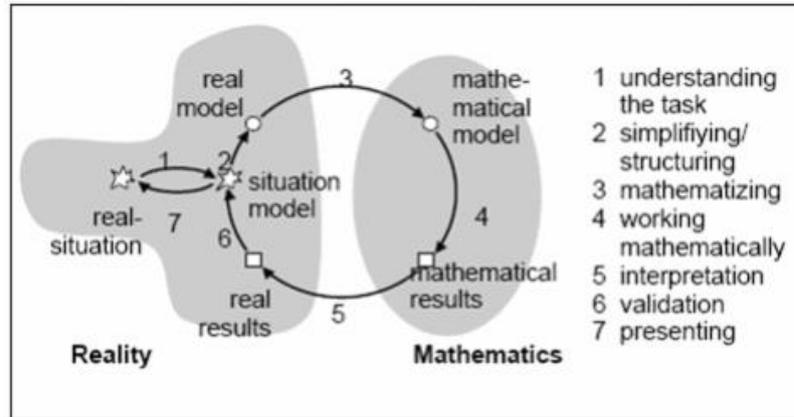


Figure 20: Le schéma du processus de modélisation de Blum et Leiss (2005)

Les auteurs en donnent la description suivante :

Etape 1 : Passage de la situation réelle à la « *situation model* »

- Faire des hypothèses pour le problème et simplifier la situation
- Trier les informations pertinentes

Etape 2 : Passage de la « *situation model* » au « *real model* »

- Reconnaître les variables qui influent sur la situation réelle, les nommer, les identifier
- Construire des relations entre ces variables

Etape 3 : Passage du « *real model* » au modèle mathématique

- Mathématiser les variables pertinentes et leurs relations
- Simplifier les variables pertinentes et leurs relations si nécessaire et en réduire le nombre et leur complexité
- Choisir les mathématiques appropriées ainsi que leurs notations pour représenter la situation

Etape 4 : Travail dans le modèle mathématique

- Utiliser des stratégies heuristiques telles que la division du problème en sous problèmes, établir des relations avec des problèmes analogues, reformuler le problème,
- Utiliser des connaissances mathématiques pour résoudre le problème

Etape 5 : Interprétation des résultats mathématiques dans le modèle de situation

Etape 6 : Validation ou invalidation de ces résultats dans le modèle de situation (dans le cas d'une invalidation, retour à l'étape 2)

Etape 7 : Communication des solutions dans la situation réelle

Le travail proposé dans les étapes 1,2 et 3 relève de la mathématisation horizontale. L'étape supplémentaire de « *modèle de situation* » met en évidence la nécessité de poser des hypothèses simplificatrices sur la situation réelle avant d'émettre des hypothèses sur l'identification des variables qui influent sur la situation réelle puis de les mettre en relation (*real model*).

Un schéma du quatrième groupe, mettant davantage en évidence les étapes nécessaires pour passer du monde réel au monde mathématique, se rapproche a priori du schéma du processus de modélisation que nous souhaitons élaborer pour notre étude. À ce moment de notre travail nous nous interrogeons sur la nature de la mathématisation qui se joue lors de ces étapes intermédiaires. Afin de construire notre schéma, nous proposons de compléter l'étude de la littérature didactique par une étude épistémologique pour clarifier d'une part ce que l'on entend par modélisation mathématique et d'autre part pour identifier le travail de mathématisation horizontale en jeu lors du passage d'une situation réelle à l'élaboration d'un modèle mathématique.

Conclusions de la partie 1

Dans les trois chapitres qui composent cette partie, nous avons montré l'évolution de notre questionnement professionnel autour de l'enseignement de la modélisation vers des questions de recherche (rappelées ci-dessous) qui sont au cœur de ce travail de thèse et que nous allons mettre à l'étude dans les parties suivantes.

- QR₁ *Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique ?*
- QR₂ *Quelles sont les pratiques des chercheurs experts en modélisation relevant de la mathématisation horizontale ?*
- QR₃ *Quelles pratiques de référence de ces experts peut-on transposer dans les classes ?*
- QR₄ *Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation ?*
- QR₅ *Quelles sont les caractéristiques des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation ?*
- QR₆ *Quels sont les contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la mathématisation horizontale ?*

Dans le travail de recherche dont nous rendons compte dans ce manuscrit, nous avons arrêté les choix suivants:

- la situation de départ est une situation du monde réel dans un contexte des sciences du vivant
- nous mettons à l'étude le travail de mathématisation horizontale (permettant de passer de la situation réelle au monde mathématique)

Nous retenons les définitions suivantes pour la suite de notre travail :

- Nous entendons par *modélisation mathématique* une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier.
- Nous prenons comme définition de *modèle*, la définition d' Henry (1997)

« Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issu d'une description de la réalité. (Op.cit. p.151)

- Nous définissons le *processus de modélisation* comme l'ensemble des étapes nécessaires dans la résolution de problèmes posés dans un contexte réel nécessitant une modélisation mathématique.

L'étude d'exemples de schémas du processus de modélisation proposés dans la littérature en didactique des mathématiques, a montré dans le cadre de la recherche, que le processus de modélisation choisi est étroitement lié aux objectifs d'apprentissage visés concernant la modélisation mathématique. Nous avons retenu que des schémas mettant en évidence des étapes intermédiaires entre « la situation réelle » et « le modèle mathématique » sont a priori des schémas susceptibles de mettre en évidence la mathématisation horizontale en jeu lors d'un processus de modélisation. Nous avons également retenu pour notre étude que ces schémas peuvent servir d'outils d'analyse dans la mise en œuvre d'une activité de modélisation mathématique. Afin de compléter cette étude didactique, dans la perspective de s'appuyer sur le schéma du processus de modélisation pour étudier d'éventuelles traces de la transposition de pratiques expertes en modélisation mathématique relevant de la mathématisation horizontale, nous faisons le choix de mener une étude épistémologique sur la mathématisation horizontale et sur les pratiques expertes en modélisation mathématique.

Menée dans un contexte des sciences du vivant, l'étude épistémologique de la partie 2 vise également à identifier les caractéristiques des pratiques de chercheurs engagés dans un processus de modélisation mathématique en vue d'une éventuelle transposition dans les classes, et, en appui sur ces caractéristiques, à élaborer une situation à mettre en œuvre dans les classes dans le cadre du dispositif du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier (Partie 3 volet 1) . Ce travail est indissociable d'une réflexion à mener sur la mise en œuvre de l'activité de modélisation mathématique en prenant en compte les conditions et les contraintes qui pèsent sur les pratiques enseignantes (Partie 3 volet 2).

Partie 2 Etude d'épistémologie contemporaine

L'objectif central de cette étude épistémologique est d'identifier des éléments invariants dans les pratiques de chercheurs utilisant les mathématiques dans un travail de modélisation en vue d'en envisager la transposition. Cette étude relève de l'épistémologie dite contemporaine de par la méthodologie que nous utilisons, à savoir : nous commençons par une étude de la littérature visant à clarifier ce qu'on entend par modélisation, mathématisation horizontale et verticale présentée dans le chapitre 4. A la fin de chapitre, nous ébauchons notre schéma de processus de modélisation en appui -sur les définitions et les formes des mathématisations horizontale et verticale retenues pour notre étude et -sur l'étude de la modélisation mathématique dans la littérature en didactique des mathématiques du chapitre 3.

Puis, dans le chapitre 5, nous précisons les modalités et les éléments de notre enquête épistémologique sur les pratiques expertes associées à une activité de modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Le chapitre 6 est consacré aux entretiens réalisés auprès de chercheurs travaillant dans ce domaine. Nous y présentons notre méthodologie, l'élaboration de notre grille d'entretiens et les caractéristiques invariantes des pratiques retenues relevant de la mathématisation horizontale retenues à partir de l'analyse des entretiens. A partir des résultats de cette étude, nous finalisons et présentons le choix du processus de modélisation retenu pour l'étude didactique de la partie 3.

Sommaire de la partie 2

Chapitre 4 Mathématisation horizontale et verticale

Chapitre 5 Éléments d'enquête sur les pratiques expertes associées à une activité de modélisation mathématique

Chapitre 6 Entretiens avec des chercheurs dans le domaine des sciences du vivant

Conclusions de la partie 2

Chapitre 4 Mathématisation horizontale et verticale

La mathématisation est un concept présent dans les questions vives des travaux de la CIEAEM depuis plus d'un demi-siècle comme le montre, par exemple, le thème de la CIEAEM₃₂ (1980) : « *Processus de mathématisation et d'application de la mathématique : aspects mathématiques et pédagogiques* »

Dans ces travaux, la mathématisation est utilisée dans un sens très large comme précisé dans le document de discussion de la CIEAEM₆₉¹⁶ (2017):

« Elle [La mathématisation] peut ainsi inclure l'utilisation de toute forme de mathématiques, par exemple l'interprétation mathématique de notions du monde (incluant des objets mathématiques), ou bien exprimer des idées d'une façon mathématique. Il peut aussi inclure la façon dont on peut rencontrer les mathématiques comme étant utilisées "sur" elles et dans leur contexte, par exemple les mathématiques au cœur de la description d'activités humaines, de la prise de décisions éclairée par les mathématiques. » (p.1)

Lors de la dernière conférence CIEAEM₆₉, qui s'est déroulée à Berlin, lors de laquelle nous avons présenté une communication (Yvain 2018) et un atelier co animé avec S. Modeste (Yvain & Modeste 2018), la mathématisation est étudiée sous deux angles :

- En tant que processus social
- En tant que principe didactique

Pour ces deux aspects, une intention particulière est portée sur les relations entre les mathématiques et la vie quotidienne.

« [...] les situations de la vie quotidienne sont appréciées surtout pour leur potentiel didactique comme point de départ de la mathématisation » (Op.cit. p.3)

Dans nos travaux, nous nous intéressons à la mathématisation en tant que principe didactique au sein d'expérimentations dans des classes, à différents niveaux, à la fois en tant qu'objet de recherche et de pratiques de classe. Nos analyses portent à la fois sur les apprentissages mathématiques visés, les compétences à mobiliser et sur les pratiques des enseignants associées.

¹⁶http://www.ewi-psy.fu-berlin.de/en/einrichtungen/arbeitsbereiche/grundschulpaed/3_mathematik/CIEAEM69_n/Discussion-Papers/Document_de_discussion_CIEAEM69.pdf

Toutefois, en proposant de véritables activités de modélisation en classe, nous visons également à faire apparaître la mathématisation en tant que processus social qui génère pour les élèves une image des mathématiques plus complète et nous faisons l'hypothèse que ceci est de nature à modifier leur attitude vis-à-vis des mathématiques.

Dans notre thèse nous empruntons à Treffers la terminologie de mathématisation horizontale et verticale. Cette terminologie s'appuie sur les travaux de la Realistic Mathematics Education (RME) dont Freudenthal (1973,1991) est un pionnier.

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous proposons de clarifier ce que recouvrent les termes de modélisation et de mathématisation dans le cadre de l'activité mathématique. Puis, dans un second temps, nous étudions les évolutions des travaux autour de la mathématisation dans la RME. Nous souhaitons montrer que notre thèse s'inscrit dans le prolongement de ces travaux. Après avoir dégagé les définitions et les formes des mathématisations horizontale et verticale retenues pour notre étude, nous ébauchons notre schéma de processus de modélisation en nous appuyant également sur l'étude de la modélisation mathématique dans la littérature en didactique des mathématiques du chapitre 3.

4-1 La modélisation mathématique, une nouvelle forme de mathématisation (Israël G.)

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons largement sur notre publication dans l'ouvrage *Epistémologie & didactique* (Yvain, 2017, p. 235-249)

Dans la littérature, on trouve davantage de définitions de la modélisation que de la mathématisation. Souvent, les termes *Mathématiser* ou *Mathématisation* sont utilisés sans être au préalable définis. Ils font généralement référence à l'utilisation des mathématiques pour comprendre, expliquer ou étudier un phénomène. Nous avons vu que dans un processus de modélisation à partir de contexte réel, la mathématisation horizontale entre en jeu lors du passage de la situation réelle au modèle mathématique. Cette étape de mathématisation est indispensable pour l'élaboration du modèle mathématique.

Cette mathématisation fait-elle partie de la modélisation mathématique ou définit-elle la modélisation mathématique ? En d'autres termes, comment définir la modélisation mathématique ?

Selon Israël (1996), la modélisation relève tout d'abord dans l'histoire, d'un point de vue strictement déterministe et mécaniste : une description mécanique et réductionniste unifiée du monde avec « le recours spontané » à l'analogie mécanique, car la mécanique a été, « tant du point de vue historique que du point de vue conceptuel, le noyau de formation de la physique » (op.cit. p.11). Le terme de modèle a longtemps désigné ce type de modèle physique. Les mathématiques interviennent dans cette modélisation car « Dans la formation de la mécanique et plus généralement de la physique, les mathématiques ont eu un rôle constitutif. On comprend ainsi non seulement que la physique est liée d'une façon indissoluble aux images mathématiques, mais qu'en outre, dans les descriptions mathématiques des phénomènes, les images physiques sont les images privilégiées et, pour ainsi dire, "naturelles". » (Op. cit. p.11). Vers la fin du 19^{ème} siècle, la crise des représentations mécanistiques en électromagnétisme (cf. les travaux en théorie des gaz de Maxwell (1864), les travaux en théorie cinétique des gaz de Boltzmann (1872) ou encore les travaux sur l'électromagnétisme de Hertz (1879)) puis l'application des mathématiques à l'extérieur du cercle de la physique vont faire évoluer la définition du mot modèle (Israël 1996, Bouleau 1999, Varenne 2008).

« Le réalisme ou la ressemblance du modèle avec la réalité physique n'est plus du tout ce qui est recherché : au contraire, le modèle doit être un pur outil mathématique pour être un bon instrument d'interrogation des expérimentations complexes, complexes au sens où elles font intervenir un grand nombre de facteurs interdépendants » (Varenne, 2008, p.6).

Au début du 20^{ème} siècle, on assiste à l'essor du développement de la mathématisation en dehors des sciences physiques, en particulier en sciences du vivant et en économie.

Israël (1996) qualifie cette mathématisation de modélisation mathématique et définit la notion de modèle mathématique comme « fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité » (Op.cit. p.11). Il ajoute que « non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents. » (Op.cit. p.11), montrant ainsi le renoncement au 20^{ème} siècle à toute tentative d'aboutir à une image unifiée de la nature.

La modélisation mathématique est donc d'abord dans l'histoire, au sens épistémologique, une forme de mathématisation qui permet d'appréhender le réel en le traduisant dans un langage mathématique, autrement dit qui permet le passage du monde réel au monde mathématique. Le

modèle mathématique obtenu s'apparente à un problème mathématique qui représente un fragment du problème réel.

Cette modélisation mathématique diffère du mot *modélisation* dans le sens que pour une modélisation mathématique le langage utilisé pour exprimer le modèle est celui des mathématiques (ce qui n'est pas nécessairement le cas pour le mot modélisation). Dans le cadre de notre recherche, lorsque nous parlons de modélisation, il faut entendre "modélisation mathématique".

Pour Israël, la modélisation mathématique est *une nouvelle forme de mathématisation*.

4-2 La mathématisation horizontale et verticale dans la RME

« Il n'y a pas de mathématiques sans mathématisation » (Freudenthal, 1973, p.134)

4-2-1 Les travaux de la Realistic Mathematics Education

La Realistic Mathematics Education (RME) a été développée aux Pays-Bas en 1970 par l'institut Freudenthal. Elle désigne une pratique d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques basée sur le point de vue de Freudenthal suivant : les mathématiques sont une activité humaine et doivent être connectées à la réalité. Cette théorie est partagée par l'ensemble des chercheurs de cet institut comme par exemple, Treffers (1986), Van Den Heuvel-Panhuizen (2000), ou encore Gravemeijer (2009), et également par des chercheurs d'autres pays comme Barnes (2005) en Afrique du Sud ou Rasmussen (2005) aux Etats-Unis.

« He [Freudenthal] felt mathematics must be connected to reality, stay close to children's experience and be relevant to society, in order to be of human value. Instead of seeing mathematics as a subject to be transmitted, Freudenthal stressed the idea of mathematics as a human activity » (Van den Heuvel-Panhuizen, M. ; 2000)

Dans son livre *Mathematics as an Educational Task* (1973) Freudenthal s'intéresse particulièrement à la mathématisation. Pour lui, « There is no mathematics without mathematizing. (...) This means teaching or even learning mathematics as mathematization [...], it begins with rich, context-laden problems upon which students reflect, gradually progressing from concrete to operational to abstract. » (Freudenthal, 1973, p. 134)

Il ressort que non seulement le contexte de la situation doit être réaliste pour les élèves mais aussi que la première mathématisation à opérer relève du passage du problème « *realistic* » au problème mathématique.

4-2-2 *La mathématisation selon Freudenthal*

Freudenthal utilise le mot «*mathématiser*» (en anglais) dans un sens large: *Mathématiser* apparaît comme une forme *d'organisation* qui intègre complètement la discipline mathématique. En choisissant le terme «*organized*», il indique aussi que, pour lui, mathématiser n'est pas strictement une traduction dans un système structuré par des symboles. C'est l'organisation elle-même de la situation qui est au centre de la conception de la mathématisation de Freudenthal.

« *According to this idea, students should be given the opportunity to learn mathematics by mathematizing, which includes mathematizing everyday life subject matter as well as mathematizing their own mathematical activity. It is important that students perceive the starting point for this activity as experientially real.* » (Gravemeijer & al, 2009)

Apprendre les mathématiques revient à mathématiser une situation qui doit paraître réaliste aux élèves même si dans la RME, elle n'est pas nécessairement posée dans un contexte ancré dans le réel.

« *I prefer to apply the term 'reality' to what at a certain stage common sense experiences as real.* » (Freudenthal, 1991, p.17)

Les situations de départ peuvent être intra mathématiques sous réserve qu'elles nécessitent une organisation des connaissances mathématiques à mobiliser : « *It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.* » (Freudenthal in Gravemeijer, 2000 p.781)

4-2-3 *Mathématisation horizontale et mathématisation verticale dans la RME*

Prenant appui sur les travaux de Freudenthal, Treffers (1978) caractérise différentes formes de la mathématisation : généraliser, chercher des analogies, classifier, structurer, justifier, prouver, élaborer et tester des conjectures, modéliser, symboliser, définir, schématiser, élaborer des procédures etc.

Dans un contexte d'enseignement, il distingue deux types de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation en mathématiques : la mathématisation *horizontale* qui relève de la

modélisation mathématique pour passer de la situation réelle au monde mathématique et la mathématisation *verticale* qui relève du traitement mathématique d'un problème mathématique.

Freudenthal (1991) reprend cette distinction sous la forme suivante :

« Horizontal mathematization leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly: this is vertical mathematization. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is a symbol world with regard to abstraction. » (Op.cit. p.41-42)

Nous soulignons cependant qu'au départ Freudenthal était assez réticent à une telle classification :

« Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematizing not sharply but with due reservations: Horizontal mathematizing, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematizing, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. For a long time I have hesitated to accept this distinction » (Ibid, p.40)

En effet, il craignait qu'une telle distinction nuise à l'apprentissage des mathématiques :

« I was concerned about the theoretical equivalence of both kinds of activities and, as a consequence, their equal status in practice, which I was afraid would be endangered by this distinction. How often haven't I been disappointed by mathematicians interested in education who narrowed mathematizing to its vertical component, as well as by educationalists turning to mathematics instruction who restricted it to the horizontal one (to use Treffers' terminology)! » (Ibid p.41)

Ses craintes résident principalement dans l'utilisation des deux aspects de la mathématisation dans l'enseignement des mathématiques. Les distinguer ne signifie pas les travailler indépendamment. Ces deux aspects permettent d'identifier la nature de la mathématisation mobilisée par les élèves.

Dans la mathématisation horizontale, le travail effectué permet d'envisager un traitement mathématique de situations réalistes en vue de construire un modèle mathématique. Cela implique de passer du monde « de la vie » à celui des symboles. Les activités suivantes sont des exemples dans les travaux de la RME de mathématisation horizontale :

- identifier ou décrire les mathématiques spécifiques dans un contexte général,
- schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes manières,
- découvrir des relations, découvrir des régularités,
- reconnaître l'aspect isomorphe de différents problèmes,
- transférer un problème du monde réel à un problème mathématique

La mathématisation verticale se réfère au processus de réorganisation dans le système mathématique en utilisant des connexions entre les concepts et les stratégies. Il s'agit de se déplacer dans le monde abstrait des symboles. Dans les travaux de la RME, les activités suivantes sont des exemples de mathématisation verticale :

- représenter une relation dans une formule,
- prouver des régularités,
- affiner et ajuster des modèles,
- utiliser différents modèles, combiner et intégrer des modèles,
- formuler un modèle mathématique et généraliser.

4-3 Trois exemples de travaux faisant référence aux aspects horizontal et vertical de la mathématisation

4-3-1 Dans les travaux de Barnes

Dans ses travaux, Barnes (2005), qui conduit ses recherches en Afrique du Sud, s'appuie sur les travaux de l'institut Freudenthal. Le schéma ci-dessous présente les phases de mathématisation horizontale et verticale pour une situation posée dans un contexte réaliste :

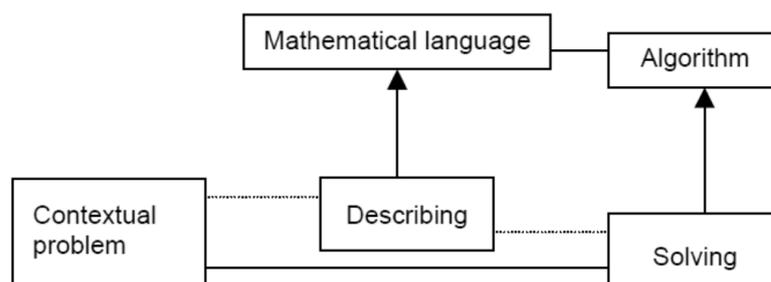


Figure 1 Representation of horizontal and vertical mathematization
 Horizontal mathematization (.....); Vertical mathematization (————→)
 Source: Adapted from Gravemeijer, 1994.

Figure 21 : Représentation de la mathématisation horizontale et verticale de Barnes (2005)

Barnes commente ainsi ce schéma :

« Horizontal mathematization is when learners use their informal strategies to describe and solve a contextual problem and vertical mathematization occurs when the learners' informal strategies lead them to solve the problem using mathematical language or to find a suitable algorithm (Treffers,1986). For example, in what we would typically refer to as a "word sum", the process of extracting the important information required and using an informal strategy such as trial and error to solve the problem, would be the horizontal mathematizing. Translating the problem into mathematical language through using symbols and later progressing to selecting an algorithm such as an equation could be considered vertical mathematization, as it involves working with the problem on different levels. » (Barnes 2005)

L'auteur décrit le travail de mathématisation horizontale comme relevant de la description de la situation réelle et de la sélection des informations importantes dans la réalité qu'il schématise par « *describing* ». Le travail de la mathématisation verticale relève pour l'auteur de la traduction des aspects retenus du problème en langage mathématique et du traitement mathématique.

4-3-2 Dans les travaux de Rasmussen & al.

Les travaux de Rasmussen & al. (2005), s'appuient également sur les deux aspects de la mathématisation distingués dans la RME dans l'objectif de donner un cadre pour analyser une progression dans la mathématisation en adaptant les notions de mathématisation horizontale et verticale pour la résolution de problèmes intra mathématiques.

« Horizontal mathematizing refers to formulating a problem situation in such a way that it is amenable to further mathematical analysis. Thus, horizontal mathematizing might include, but not be limited to, activities such as experimenting, pattern spotting, classifying, conjecturing, and organizing. » (Rasmussen & al. 2005, p.54)

« Vertical mathematizing consists of those activities that are grounded in and built on horizontal activities. Thus, vertical mathematizing might include activities such as reasoning about abstract structures, generalizing, and formalizing. » (Ibidem)

Rasmussen & al. utilisent les notions de mathématisation horizontale et verticale comme un moyen de développer l'idée de faire progresser l'activité mathématique. Dans leur article, ils décrivent les activités qui relèvent de ces deux aspects.

« We further put forward the notion of progressive mathematization, composed of horizontal and vertical mathematizing activities, as a means to develop the idea of advancing mathematical activity » (Op.cit p.70)

Dans le cas des trois pratiques *symboliser*, *algorithmiser* et *définir*, ils décrivent les activités mathématiques pour chacune d'entre elles en distinguant celles qui relèvent de l'aspect horizontal de celui vertical.

- pour la pratique *symboliser*,

Le travail de mathématisation horizontale est associé à la formulation d'un modèle et à sa représentation, tandis que le travail de mathématisation verticale est associé à la mise en relation dynamique de la symbolisation issue de la mathématisation horizontale.

- pour la pratique *algorithmiser*,

Le travail de mathématisation horizontale est associé à la création de procédures aidant à l'organisation du problème et répondant à des sous-questions qu'ils se posent, tandis que le travail de mathématisation verticale est associé à la généralisation et au développement des procédures précédemment créées.

- pour la pratique *définir*,

Le travail de mathématisation horizontale est associé à l'utilisation de définition d'objets mathématiques déjà connus, tandis que le travail de mathématisation verticale est associé à la construction de nouveaux concepts, et à l'étude des relations entre ces concepts en posant la question de leur généralisation.

De l'analyse de ces trois pratiques dans le cadre de la distinction des activités qui relèvent des aspects horizontal et vertical ressort l'importance de l'interaction entre créer et utiliser, interaction présente dans ces deux aspects.

« The emphasis on activity, that involves both doing and thinking, resonates with a view of learning as participating in different practices that engage particular goals and purposes of those involved. Essential to the classroom teaching experiments from which we developed the construct of advancing mathematical activity was the fact that explicit attention was paid to explanation and justification. In particular, it became normative for students to routinely explain their thinking in whole class discussions, attempt to make sense of other students' thinking, and indicate agreement or disagreement with other students' mathematical ideas, interpretations, and conclusions. » (Rasmussen & al., 2005, p.70)

4-3-3 Dans les travaux d'Ouvrier-Buffet (2013)

Dans son habilitation à diriger des recherches, C. Ouvrier-Buffet (2013) propose différentes voies pour modéliser l'activité de modélisation dont une distingue les aspects horizontal et vertical de la mathématisation en appui sur les travaux de Rasmussen & al. (2005). Les conclusions de l'auteure sont les suivantes :

« En définitive, distinguer les niveaux horizontal et vertical dans le cas d'une activité de définition peut permettre schématiquement de dissocier ce qui relève de la formulation de définitions de ce qui relève du processus heuristique de construction de définitions, et fait ressortir la dimension « familiarité » avec les objets et concepts, qui a une place particulière dans l'activité de définition » (Ibid. p.48-49)

4-3-4 Dans les travaux de Pisa

Les travaux de Pisa¹⁷ prennent explicitement appui sur Treffers (1986), on y retrouve la distinction entre les activités de mathématisation horizontale et de mathématisation verticale, permettant de mettre en évidence la progression dans la mathématisation des problèmes. Nous en donnons un exemple dans l'extrait issu de « *Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation.* » (OCDE, 1999, p.55).

¹⁷ Programme international pour le suivi des acquis des élèves

« La mathématisation, telle qu'elle est utilisée dans le cadre de PISA, est le processus qui permet d'organiser la réalité à l'aide d'idées et de concepts mathématiques. C'est une activité organisatrice dans laquelle sont mises en œuvre des connaissances acquises et des capacités pour découvrir des régularités inconnues, des relations et des structures (Treffers et Goffree, 1985). Ce processus est parfois qualifié de mathématisation horizontale (Treffers, 1986). Il fait appel à des activités telles que :

- Identifier, dans un contexte général, les éléments spécifiquement mathématiques :
- Schématiser
- Formuler et visualiser le problème :
- Découvrir des relations et des régularités :
- Reconnaître des similitudes dans des problèmes différents (De Lange, 1989)

A partir du moment où le problème a été transformé en un problème mathématique, il peut être résolu au moyen d'outils mathématiques. En d'autres termes, on peut utiliser des outils mathématiques pour manipuler et affiner le modèle mathématique du problème réel. On parle alors d'un processus de mathématisation verticale, qui se distingue par les activités suivantes :

- Représenter une relation par une formule
- Démontrer des régularités
- Affiner et ajuster des modèles
- Combiner et intégrer des modèles : ainsi que
- Généraliser

Le processus de mathématisation se joue ainsi en deux phases différentes : la mathématisation horizontale, processus qui traduit le monde réel en monde mathématique ; la mathématisation verticale, processus de traitement du problème au sein des mathématiques à l'aide d'outils mathématiques, en vue de résoudre le problème. Réfléchir sur la solution trouvée au regard du problème original est une étape essentielle dans le processus de mathématisation qui bien souvent ne bénéficie pas de l'attention nécessaire.

On pourrait évidemment soutenir que le processus de mathématisation intervient dans toutes les classes de compétences* puisque, dans tout problème contextualisé, on doit forcément identifier les mathématiques pertinentes. Toutefois, dans le cadre du projet OCDE/PISA, on donne une importance particulière au type de mathématisation sollicité dans la classe 3. C'est cette forme de mathématisation qui dépasse la simple reconnaissance de problèmes connus. »

*Trois classes de compétences sont proposées dans les travaux de PISA (Ibid.p.55) :

La classe 1 : Reproduction, définitions, calculs

La classe 2 : Mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes

La classe 3 : Mathématisation, généralisation et compréhension en profondeur

On y retrouve l'idée d'organisation de la situation réelle de Freudenthal. Dans cet extrait, on peut noter que n'est pas explicitement mis en évidence l'aspect non linéaire des phases de

mathématisation horizontale et verticale ce qui pourrait rejoindre la crainte de Freudenthal de les travailler indépendamment.

4-4 La mathématisation horizontale dans notre recherche

« Aujourd'hui, la plupart d'entre nous serons d'accord pour dire que les étudiants devraient aussi apprendre la mathématisation de questions non mathématiques (ou insuffisamment mathématiques), c'est à dire, d'apprendre à les organiser dans des structures accessibles à des traitements mathématiques. » (Freudenthal 1973, p. 133, traduit par nous)

4-4-1 *Les définitions retenues dans notre travail*

Dans notre étude, l'activité de modélisation mathématique est proposée à partir de situations posées dans un contexte réaliste. Comme dans les travaux de Treffers (1978) et Freudenthal (1973,1991), nous distinguons le travail de mathématisation nécessaire pour passer du réel au monde mathématique de celui de la mathématisation du problème mathématique obtenu, en utilisant les expressions *mathématisation horizontale* et *mathématisation verticale* issues du cadre de la RME.

Nous retenons des travaux d'Israël (1996) qu'un modèle rend compte non pas de la réalité mais de certains aspects de cette réalité et définissons un modèle mathématique comme « *un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité* ». Nous faisons l'hypothèse que lors d'une activité de modélisation d'une situation réelle, il est nécessaire de « *choisir un fragment de réalité sur lequel on va se questionner pour construire un modèle en vue de répondre à la question posée* ».

Nous retenons des travaux de Treffers (1978) et de Freudenthal (1991) que pour passer d'une situation réelle au monde mathématique, un travail de mathématisation horizontale est nécessaire pour identifier et choisir des aspects pertinents de la situation réelle qui vont permettre d'envisager un traitement mathématique avant d'envisager l'élaboration d'un modèle mathématique.

Ainsi, pour notre étude, nous définissons la mathématisation horizontale comme suit :

- *La mathématisation horizontale* relève du choix d'un fragment de réalité, de l'identification et du choix de certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique.

Pour définir la mathématisation verticale, nous retenons la définition de Treffers (1978) :

- *La mathématisation verticale* relève du travail mathématique à l'intérieur « du monde des symboles », c'est-à-dire du traitement mathématique d'un problème mathématique.

A partir de ces définitions et en appui sur les travaux que nous avons cités précédemment, nous présentons dans ce qui suit les différentes formes de la mathématisation horizontale et de la mathématisation verticale, que nous utiliserons dans notre étude.

4-4-2 *Les formes de la mathématisation horizontale dans notre étude*

- Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée
- Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique
- Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique

En appui sur les travaux de Chabot & Roux (2011), nous rajoutons une forme :

- La quantification

Selon les auteurs, la quantification est une forme de mathématisation qui définit « *très généralement la manière dont certaines propriétés sont associées à des quantités.* » (Chabot & Roux, 2011, p.13)

« Cette association peut se faire par un décompte élémentaire sans instrument (on compte les centimètres de pluie tombés chaque année, on mesure la taille des conscrits, etc.) ou supposer l'intervention de procédures plus complexes de mesure, avec dans certains cas des appareillages plus complexes (on ne mesure pas l'intensité d'un courant électrique ou la vitesse d'une particule à l'œil nu). » (Ibid. p.13)

Nous faisons l'hypothèse que cette forme de mathématisation permet d'envisager un traitement mathématique et en cela nous la considérons comme relevant de la mathématisation horizontale.

4-4-3 *Les formes de la mathématisation verticale dans notre étude*

Notre étude porte sur la mathématisation horizontale mais nous avons vu précédemment que les aspects horizontaux et verticaux de la mathématisation ne doivent pas être considérés de

manière indépendante; il est nécessaire de prendre en compte leurs articulations au sein du processus de modélisation. Par conséquent, en appui sur Freudenthal (1991) et Rasmussen & al (2005), nous dégagons des formes de la mathématisation verticale susceptibles de s'articuler avec le travail de mathématisation horizontale :

- La traduction mathématique de la mise en relation des grandeurs pertinentes choisies
- Le traitement mathématique à partir de cette traduction

4-5 Ebauche du schéma du processus de modélisation pour notre étude

Dans le chapitre 3, nous avons fait le choix de choisir un schéma du quatrième groupe selon Rodriguez (2007) afin de mettre davantage en évidence les étapes nécessaires pour passer du monde réel au monde mathématique. De notre étude sur la mathématisation horizontale se dégagent trois étapes intermédiaires pour passer de la situation réelle au modèle mathématique :

- Le choix d'un fragment de réalité à partir duquel on va se questionner, et le choix sur les aspects pertinents du fragment de réalité pour envisager un traitement mathématique conduisant à un problème susceptible d'un traitement mathématique (PSTM)
- La mise en relation des aspects pertinents retenus conduisant au problème mathématique qui va être étudié
- La traduction mathématique de ce problème mathématique conduisant au modèle mathématique

Selon les formes de mathématisation retenues, les deux premières étapes relèvent de la mathématisation horizontale (MH) et la dernière de la mathématisation verticale (MV).

Nous présentons ci-dessous une ébauche du schéma du processus de modélisation prenant en compte ces trois étapes :

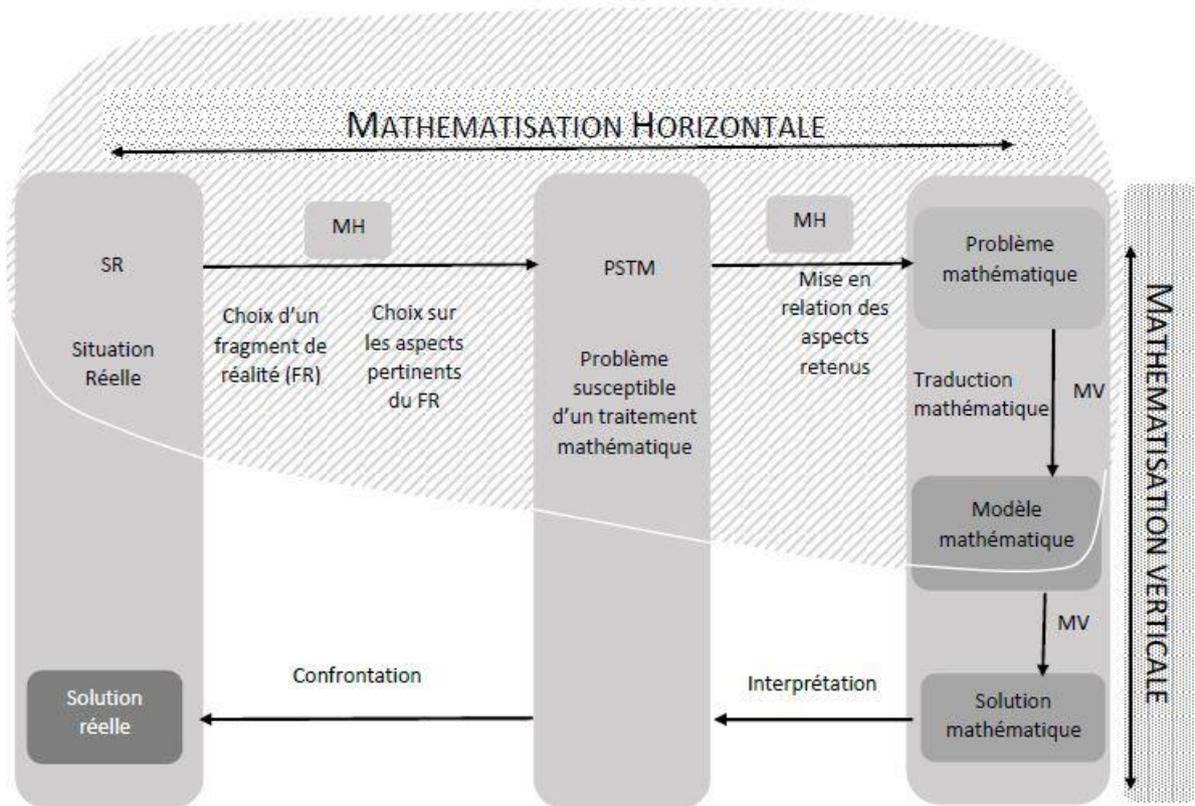


Figure 22 : Ebauche du schéma du processus de modélisation mathématique pour notre étude

Nous avons hachuré la partie du schéma correspondant à notre étude. Nous compléterons et/ou modifierons notre proposition de schéma à partir de nos résultats sur les caractéristiques des pratiques invariantes relevant de la MH identifiées auprès de chercheurs utilisant la modélisation mathématique dans les sciences du vivant.

Chapitre 5 : Éléments d'enquête sur les pratiques expertes associées à une activité de modélisation mathématique

Depuis les années 1990, des dispositifs innovants visent à mettre les élèves « en position de chercheur », certains sont proposés en dehors du cours ordinaire de la classe (MATH.en.JEANS, Maths à modeler, Hippocampe), d'autres sont proposés au sein des classes (Problème ouvert en mathématiques¹⁸, Main à la pâte (<http://www.fondation-lamap.org>), les SiRC¹⁹, Grenier & Payan, 2003). La question de clarifier ce que l'on entend par mettre l'élève dans la position du chercheur a été étudiée en didactique des mathématiques en particulier dans le travail de thèse de M.-L. Gardes (2013) qui a mis en perspective les processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans l'étude d'un même problème de recherche dans le domaine de la théorie des nombres.

Dans ce chapitre, nous proposons dans un premier temps, d'étudier les travaux de recherche en didactique des mathématiques dans le cadre des SiRC (Godot 2005) qui se réfèrent explicitement aux pratiques expertes de chercheurs en mathématiques. Notre objectif est de montrer en quoi certaines caractérisations de l'activité de recherche en mathématique en vue d'une transposition dans les classes, définies dans ces travaux, peuvent être interprétées comme relevant de la mathématisation horizontale.

Puis, dans un deuxième temps, à la lueur des travaux de M-L Gardes (2013), nous montrons la pertinence d'une enquête épistémologique sur les pratiques expertes de chercheurs mathématiciens pour caractériser des aspects de l'activité mathématique et précisons les modalités de l'enquête épistémologique que nous envisageons.

Ces modalités retenues, nous terminons ce chapitre par une étude, à partir de la littérature, des pratiques des chercheurs en modélisation dans les sciences du vivant.

¹⁸ Voir par exemple la brochure « *Autour des problèmes ouverts en classe de mathématiques* » (IREM Paris 7, 2015)

¹⁹ Situations de recherche pour la classe

5-1 Caractérisations de l’activité de recherche en mathématique à partir de deux exemples

Nous présentons deux exemples de travaux en didactique des mathématiques qui s’appuient sur les pratiques expertes des chercheurs en mathématiques : les SiRC (Grenier & Payan, 2003, Grenier, 2015 ; Godot, 2005 ; Colipan, 2014) et le travail de thèse de M-L Gardes (2013).

Ces travaux visent à transposer à la classe l’activité du chercheur en mathématiques. Dans la mesure où ces travaux proposent des situations intra-mathématiques, ils ne se réfèrent pas explicitement à la mathématisation horizontale telle que nous l’avons définie au paragraphe 4-4-1. Toutefois, nous montrons que l’on peut y reconnaître de la mathématisation horizontale au sens de Rasmussen & al. (2005).

5-1-1 Caractérisations de l’activité de recherche en mathématique dans le cadre des SiRC

L’objectif des travaux dans ce cadre, est de transposer à la classe l’activité du chercheur en mathématique en proposant des « Situations de recherche pour la classe » (SiRC). Les situations sont généralement introduites à l’aide d’un support matériel, comme par exemple :

- La situation du pavage de polyminos carrés avec des dominos de Grenier & Payan (2003)

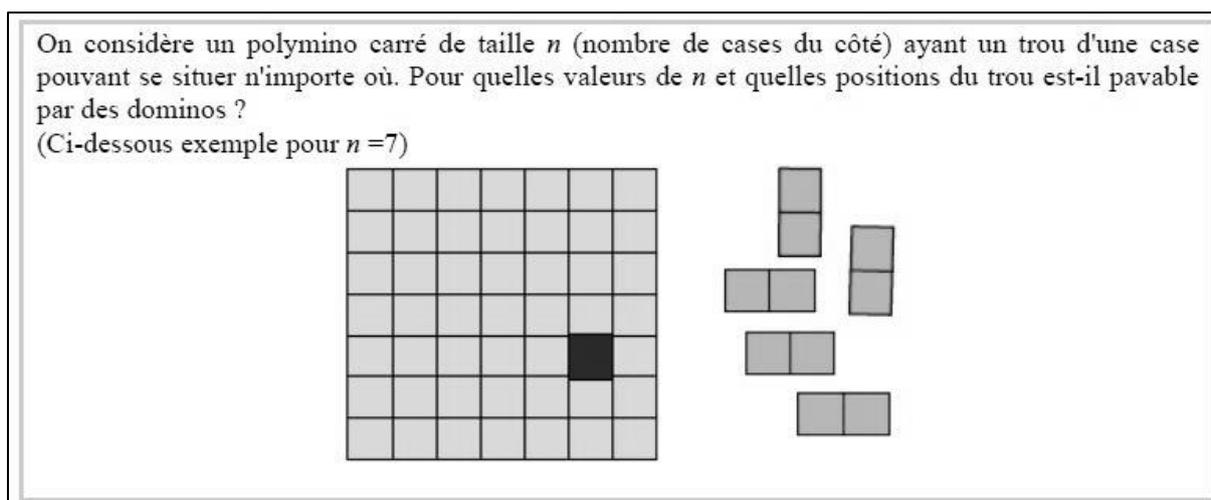


Figure 23 : La situation du pavage de polyminos carrés avec des dominos de Grenier & Payan

- La situation de la roue des couleurs de Godot (2005)

Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.

Principe du jeu!

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.

On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque.

Comment le joueur doit-il choisir et disposer ses pions pour gagner!?



Figure 24 : La situation de la roue des couleurs de Godot (2005)

- La situation du « jeu du chocolat » de Colipan (2014)

Jeu à deux (équipes de) joueurs.

Chaque joueur doit à tour de rôle « couper » la tablette (restante) dans une seule de ses dimensions et choisir de garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carré de savon (en gris sur le dessin) doit le manger et il a perdu.

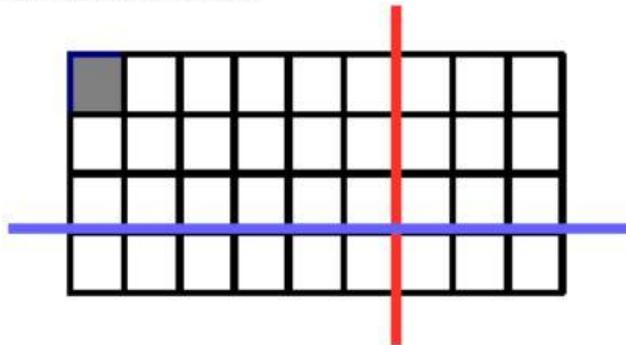


Figure 25 : La situation du « jeu du chocolat » de Colipan (2014)

Dans Grenier & Payan (2003), les auteurs définissent les caractéristiques des SiRC de la manière suivante :

- La situation s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle (1)

- Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation qui doit amener l'élève à l'intérieur des mathématiques. (2)
- Des stratégies initiales existent sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. (3)
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles. (4)
- Une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question. (5)

Godot (2005) ajoute dans son travail de thèse, la caractéristique suivante :

- « Il [l'élève] ne sait pas à l'avance où vont le mener ses recherches, le résultat de ses recherches n'est pas une solution unique, il peut suivre plusieurs pistes et a à sa charge le choix de certaines variables » (Ibid., p.29) (6)

Nous avons numérotées ces caractéristiques afin de pouvoir nous y référer dans la suite.

Bien que les situations proposées dans le cadre des SiRC ne soient pas posées dans un contexte réel au sens qu'elles n'impliquent pas de choisir un fragment de la réalité sur lequel on se questionne, la dimension « matérielle » des supports de jeu ancre le problème proposé dans le monde réel au sens de Treffers. Nous interprétons les caractéristiques (2), (4) et (6) comme pouvant relever de la mathématisation horizontale.

Pour illustrer ce point de vue, nous nous appuyons sur des éléments de l'analyse didactique qu'a réalisée Godot (2005) à propos des travaux d'étudiants de DEUG lors de la résolution de la situation de la roue des couleurs.

Dans cette analyse, Godot utilise le processus de modélisation de Coulange (cf. Figure 13). La distinction entre modèle pseudo-concret et modèle mathématique lui permet de différencier dans les productions des étudiants, ceux qui restent au stade du jeu de ceux qui rentrent dans une recherche mathématique. Elle met en évidence que pour la plupart, ils ont acté que la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, et que seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent. De plus, elle montre que les étudiants ont eu recours à diverses représentations mathématiques pour se détacher de la représentation matérielle de la roue, leur permettant en cela d'aller vers une mathématisation de la situation. Par exemple, elle indique que la majorité des élèves ont fait le choix de remplacer les couleurs par des nombres (choix nommé C_{num} dans la thèse), choix qui sera proposé à l'ensemble des élèves lors de la

séance 2. Ces éléments d'analyse nous montrent que les étudiants ont identifié et choisi des grandeurs pertinentes afin d'envisager un traitement mathématique, ce qui est une forme de la mathématisation horizontale que nous avons définie au chapitre 4.

5-1-2 Caractérisations de l'activité de recherche en mathématique à partir d'une enquête d'épistémologie contemporaine sur les pratiques expertes

Dans son travail de thèse, M-L Gardes (2013) s'est intéressée plus spécifiquement à l'activité effective de recherche du chercheur lorsqu'il cherche un problème mathématique. Son enquête est basée sur une étude épistémologique du travail des mathématiciens à partir de textes historiques couplée avec le suivi dans la durée du travail de deux chercheurs mathématiciens sur la résolution de la conjecture d'Erdős-Strauss²⁰. Cette étude relève de l'épistémologie contemporaine au sens où, comme l'écrit M-L Gardes (2017, p. 178), l'adjectif contemporain renvoie à cette méthodologie particulière.

A partir de cette enquête épistémologique sur les pratiques expertes dans une activité de recherche d'un problème mathématique, M-L Gardes a utilisé la notion de gestes empruntée à la philosophie des mathématiques pour analyser les pratiques des chercheurs en mathématiques qu'elle définit ainsi :

« Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. » (Gardes, 2013, p.155)

Dans son étude, la notion de geste est un outil pour décrire et analyser le travail mathématique effectif d'un sujet dans la recherche d'un problème mathématique permettant de mettre en évidence non seulement certains aspects du travail du chercheur mais aussi la manière dont un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans son étude.

Dans l'analyse des processus de recherche mis en œuvre par des élèves cherchant la conjecture d'Erdős-Strauss, M-L Gardes identifie sept gestes :

- Désigner des objets
- Réduire le problème aux nombres premiers

²⁰ Pour tout n au moins égal à 2, on peut trouver des entiers (non nécessairement distincts) tels que :

$$4/n = 1/x + 1/y + 1/z$$

- Introduire un paramètre
- Construire des exemples et les questionner
- Effectuer des contrôles locaux
- Transformer l'équation initiale
- Implémenter un algorithme

Pour notre étude, nous retenons d'une part, la pertinence d'une enquête épistémologique sur les pratiques expertes en vue d'en étudier une possible transposition dans les classes, d'autre part, l'idée « d'invariant » qui peut se dégager de cette enquête.

5-2 Les modalités de notre enquête d'épistémologie contemporaine sur les pratiques expertes en modélisation mathématique dans les sciences du vivant

Nous suivons les modalités de Gardes (2013) décrites précédemment en les adaptant à notre objet d'étude et à nos contraintes.

Tout d'abord, ne pouvant pas suivre le travail effectif de plusieurs chercheurs (organisation trop coûteuse en temps et difficile à mettre en œuvre), nous faisons le choix de mener notre enquête d'épistémologie contemporaine à partir d'entretiens individuels (cf. chapitre 6). Cette étude portant spécifiquement sur la mathématisation horizontale, nous avons fait le choix de nous entretenir avec des chercheurs dont le domaine de recherche est en lien avec le contexte du problème au cœur de notre ingénierie didactique.

Ce contexte étant celui des sciences du vivant, avant de mener les entretiens selon la méthodologie d'enquête retenue, nous proposons un bref état de l'art sur la modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Nous nous appuyerons sur cette étude épistémologique pour élaborer notre grille d'entretien.

En ce qui concerne la notion de gestes, nous avons fait le choix de ne pas retenir explicitement cet outil dans la mesure où nous cherchons à identifier des pratiques invariantes de chercheurs utilisant la modélisation mathématique. Le mot pratique renvoie à la dimension sociale, institutionnelle et technique du contexte dans lequel le fait d'agir a lieu et de ce fait ne se réduit

pas aux gestes, ces derniers étant des éléments constitutifs de la pratique. Nous portons notre attention sur le fonctionnement en contexte des pratiques en modélisation mathématique pour montrer l'existence éventuelle en acte d'une régularité d'un travail de mathématisation horizontale et étudier comment ce travail peut se traduire en action au sein d'une communauté de chercheurs en biologie utilisant la modélisation mathématique. Nous empruntons à Catinaud ²¹(2016) la définition suivante du mot « pratique » en l'adaptant à notre contexte d'étude :

« Une pratique représente un ensemble d'actions concrètes, que les individus réalisent dans leur quotidien [ici professionnel] de manière ordinaire et répétée et qui sont pourvus d'un sens particulier en fonction de l'espace social [professionnel] où elles apparaissent ». (Op.cit. p.31)

5-3 La modélisation mathématique dans les sciences du vivant

Dans ce qui suit, nous présentons un bref aperçu des relations entre mathématisation et modélisation dans les sciences du vivant.

5-3-1 Evolution de la modélisation dans les sciences du vivant

Selon Israël (1996) la mathématisation qui se développe au vingtième siècle dans les sciences du vivant renonce à toute tentative d'aboutir à une image unifiée de la nature. En raison de la complexité de la réalité dans les sciences du vivant, le processus de modélisation mathématique nécessite un découpage de la réalité en plusieurs parties plus petites et plus simples, ce qui peut s'apparenter à une forme de réductionnisme.

« Le modèle est un intermédiaire à qui nous déléguons la fonction de connaissance, plus précisément de réduction de l'encore-énigmatique, en présence d'un champ d'étude dont l'accès, pour des raisons diverses, nous est difficile. » (Bachelard, 1979, p.3)

Dans les actes du colloque «*Elaboration et justification des modèles, applications en biologie* » de 1979, nous pouvons constater qu'est vivement discutée la question de l'évolution de la modélisation en biologie. Il y apparaît que le modèle n'est en aucun cas une imitation des phénomènes mais qu'il revêt une fonction d'abstraction par rapport au réel :

²¹ Catinaud est un chercheur en philosophie, épistémologie, histoire des sciences et des techniques dont le travail de thèse a porté sur « *Comment définir une pratique ?* ».

« Il (le modèle) représente non pas les propriétés du réel, mais seulement certaines propriétés. Il a une fonction sélective des données ou pseudo données de l'expérience ; il sépare le pertinent du non pertinent par rapport à la problématique considérée. En ce sens le modèle est un fictif réalisé. » (Bachelard, 1979, p.9)

Cette caractérisation du modèle et la conceptualisation de modélisation qui y prend appui montre que lors d'une activité de modélisation d'une situation réelle, « choisir un fragment de réalité sur lequel on va se questionner pour construire un modèle en vue de répondre à la question posée », qui relève de la mathématisation horizontale, fait partie des pratiques expertes en modélisation dans les sciences du vivant.

Dans les actes de ce colloque, les discussions autour de la justification des modèles, en particulier celles de Delattre (p.97-128), mettent en évidence l'importance de la cohérence des transcriptions faites entre les objets ou phénomènes perçus et leur traduction dans le langage théorique choisi.

« [Ce qui vient d'être dit suffit à montrer qu'] on ne peut parler de cohérence rationnelle sans une analyse précise du langage théorique utilisé, à la fois dans sa structure interne et dans les règles de correspondance qui permettent de s'en servir pour décrire le réel. »(Delattre, 1979, p.98)

Il ressort de ces discussions que justifier un modèle nécessite de travailler dans le cadre d'un langage bien spécifié.

« On ne peut en toute rigueur parler de justification des modèles que dans un cadre théorique bien spécifié, qui constitue alors le langage canonique de description choisi. » (Ibid. p.99)

Lorsque ce langage est celui des mathématiques, il s'agit bien de modélisation mathématique au sein des pratiques des experts en modélisation.

Dans les sciences du vivant, comme le précise Delattre, il convient de s'assurer du domaine d'applicabilité du langage choisi et donc en cela émettre une hypothèse qui sera elle-même mise à l'épreuve dans une étape ultérieure. Delattre préfère désigner cette hypothèse par le mot « choix » et parler par la suite de « validité » de ce choix. Il justifie ces choix de termes par le fait qu'il n'y a pas unicité du langage choisi.

Dans les réflexions autour de l'élaboration des modèles, il apparaît, dans les actes de ce colloque, qu'un modèle a toujours pour fonction de rendre compte de données expérimentales plus ou moins nombreuses et variées. Rendre compte peut signifier, dans ces actes, aussi bien décrire qu'expliquer, les aspects descriptifs et explicatifs s'entremêlant.

« Le simple choix des phénomènes que l'on décide d'observer contient déjà, de façon malheureusement implicite dans de nombreux cas, certaines idées préconçues sur ce que doit être leur explication. » (Ibid. p.114)

Ainsi ressort l'importance du choix des variables pertinentes sur l'interprétation d'un phénomène dans une activité de modélisation. Il faut ensuite écrire des relations entre les variables pour rendre compte des phénomènes. Si le langage choisi est mathématique, on retrouve dans ces pratiques expertes en modélisation des sciences du vivant, les deux aspects de la mathématisation que nous avons précédemment décrits : la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale.

Dans *son discours sur la méthode*, J-M Legay (1997) discute la place méthodologique du modèle dans les sciences de la vie et définit le modèle comme un instrument :

« Le modèle est un outil du travail scientifique qui sert à explorer la réalité et qui avance avec ses compagnons que sont la théorie et l'expérience. » (Legay, 1997, p.59)

Le modèle apparaît donc comme complémentaire à l'expérience et est considéré comme à part entière dans la démarche scientifique en sciences de la vie, vision partagée par A-F Schmid.

« Les travaux récents en modélisation nous enseignent que l'on peut penser une certaine autonomie des modèles par rapport à la théorie, et les considérer comme un ingrédient de la démarche scientifique en tant que tel. » (Schmid, 2009, p.185)

La modélisation mathématique dans les sciences du vivant conduit à ce que Varenne (2008) qualifie de modèle formel, à savoir :

« Type de construit formel (logique ou mathématique), possédant une unité et une homogénéité. Cette unité et cette homogénéité sont choisies de telle manière qu'elles permettent à ce modèle de répondre à certaines questions ou de remplir certaines fonctions précises – de compréhension, d'action, de communication, de gestion ou de décision – en rapport avec un objet, un système, un phénomène ou une situation observable, concevable ou imaginable » (op. cit. p.2)

Les travaux de Varennes (2003 ; 2007) à partir de ceux de Philippe Reffye, conduisent à ajouter aux côtés de l'expérience et de la théorie, la simulation informatique qu'il appelle « *expérimentation virtuelle* ». On parle alors d'une multiplicité des démarches de modélisation en sciences de la vie, la modélisation permettant « *de plus en plus une complémentarité opérationnelle des différentes fonctions des modèles* » (Varenne, 2016).

5-3-2 *Les fonctions principales des modèles dans les sciences du vivant*

Dans le e-ouvrage regroupant les actes du colloque « *Modélisation- succès et limites* » organisé en décembre 2016 par le CNRS et l'académie des technologies, Varenne définit la fonction générale du modèle comme suit : « On recourt au modèle quand le questionnement ne peut être

direct : il y faut une médiation. ». De cette définition découlent cinq grandes fonctions du modèle (un modèle pouvant avoir plusieurs de ces fonctions) :

- Faciliter une observation, une expérimentation
- Faciliter une présentation intelligible
- Faciliter une théorisation
- Faciliter la médiation entre discours
- Faciliter la médiation entre représentation et action

La modélisation apparaît comme un processus facilitateur à différents niveaux. Varenne aborde deux pratiques en modélisation dans les sciences du vivant :

- Partir d'un modèle simple
- Partir d'un modèle complexe

Ce compromis entre simplicité et complexité des modèles a été repris par de nombreux orateurs lors du colloque sus-cité. Par exemple, pour Hubert (2016) « Il s'agit de choisir entre l'élaboration de modèles complexes intégrant de nombreux paramètres en interaction pour modéliser les phénomènes au plus près du réalisme physique des objets avec le risque de perdre la maîtrise du comportement du modèle, ou au contraire d'élaborer des modèles simples pour contrôler le fonctionnement global du système et en étudier ses propriétés émergentes au risque de perdre le réalisme physique des objets modélisés. » (Ibid. p.83)

Dans les deux cas, nous notons que les chercheurs en modélisation dans les sciences du vivant sont amenés à faire des choix à propos du fragment de réalité qu'ils vont modéliser tout en anticipant sur le traitement possible du modèle élaboré.

Chapitre 6 : Entretiens avec des chercheurs dans le domaine des sciences du vivant

Dans ce chapitre nous justifions le choix de l'étude par des entretiens pour l'étude des pratiques en modélisation mathématique. Nous précisons la pertinence du panel des chercheurs sélectionnés au regard de notre objectif, à savoir essayer d'identifier des pratiques invariantes en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Après avoir précisé la méthodologie de la construction et de la passation de ces entretiens, nous analysons les données recueillies en vue d'identifier des pratiques invariantes chez les chercheurs interviewés que nous illustrons par des citations issues des verbatims des entretiens. A partir de cette identification, en nous appuyant sur l'étude de la littérature autour des pratiques lors d'une activité de modélisation (cf. 5-3-1 et 5-3-2) et sur les formes de la mathématisation horizontale (cf.4-4-2) nous caractérisons les pratiques invariantes relevant de la mathématisation horizontale, dont la transposition dans les classes nous semble envisageable. En appui sur les résultats obtenus, nous terminons ce chapitre par la finalisation de la construction de notre schéma du processus de modélisation.

6-1 Choix de l'étude par des entretiens

Dans ce paragraphe, nous justifions le choix de l'étude par des entretiens ainsi que le choix du panel des chercheurs interviewés.

6-1-1 Pourquoi des entretiens ?

Dans le cadre de notre étude, il n'était pas possible d'envisager de suivre au long cours le travail de chercheurs mettant en œuvre la modélisation mathématique dans leurs travaux.

Afin d'avoir accès aux pratiques de modélisation de chercheurs experts, nous avons fait le choix de conduire des entretiens dont les questions ne seront pas explicitement sur ces pratiques mais porteront sur le travail du chercheur en général. Nous ne préciserons pas aux chercheurs

l'objectif de notre étude et leur présenterons ces entretiens comme une discussion autour de leurs projets de recherche. L'expression libre permise par les entretiens nous semble en cela importante, comme pour Modeste (2012) ou encore Burton (2004) qui ont fait le choix de l'étude par des entretiens dans leurs recherches pour accéder aux représentations et conceptions de chercheurs en mathématiques et en informatique.

Nous faisons l'hypothèse que bien qu'un entretien ne donne a priori accès qu'aux pratiques déclarées des chercheurs, il est possible de choisir des modalités qui permettent néanmoins d'avoir un éclairage sur les pratiques effectives, suivant en cela Burton (2004) et Modeste (2012). Les entretiens devraient nous permettre, au sein du discours des chercheurs, d'avoir un éclairage sur leurs pratiques.

« En effet, interroger en face à face les chercheurs devrait permettre de toucher à leur rapport au concept en permettant une expression plus libre qu'elle ne le serait par écrit. » (Modeste, 2012, p.76)

Envisageant d'élaborer un problème posé dans un contexte relevant des sciences du vivant, nous avons choisi d'explorer les pratiques de chercheurs dont le travail se situe dans ce domaine sous réserve qu'il relève de la modélisation mathématique dont nous rappelons ci-dessous la définition retenue dans la partie 1 :

- Nous entendons par *modélisation mathématique* une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier.

6-1-2 Le panel des chercheurs interviewés

Souhaitant repérer des invariants dans les pratiques, pour sélectionner les interviewés, nous avons choisi une population contenant une certaine variabilité dans les domaines de recherche. Leur point commun est qu'ils utilisent les mathématiques dans leur activité de modélisation en sciences du vivant. Nous faisons l'hypothèse que les chercheurs sélectionnés sont, dans une certaine mesure, représentatifs de leur champ de recherche.

Nous présentons ci-dessous les cinq chercheurs interrogés :

Le chercheur B₁ est un chercheur « en biologie de l'évolution » au CNRS chargé de recherches dans une section qui englobe la biologie des populations, l'écologie et l'évolution;

Le chercheur B₂ est un chercheur « en électrophysiologie » qui travaille pour des entreprises pharmaceutiques ;

Le chercheur B₃ est un chercheur « en génétique » au CNRS qui travaille sur la régulation génétique ;

Le chercheur B₄ est un chercheur « en biologie moléculaire » au CNRS et travaille sur la mutation des génomes.

Le chercheur B₅ est un chercheur « en mécanique des fluides » au CNRS, détaché dans un laboratoire de mathématiques, qui travaille sur la simulation numérique en mécanique des fluides appliquée à des écoulements biologiques.

Ces cinq chercheurs travaillent sur le site de Montpellier. Les chercheurs B₃ et B₄ travaillent dans la même équipe de recherche.

6-2 Méthodologie des entretiens : l'entretien de type compréhensif

Pour accéder de manière satisfaisante à ce que nous cherchons, nous avons fait le choix du cadre de « l'entretien *compréhensif* ». Dans ce paragraphe, nous décrivons rapidement les différents aspects de ce cadre.

« Celui qui parle ne se limite pas à livrer des informations : en s'engageant, il entre dans un travail sur lui-même [...]. L'entretien compréhensif constitue une sorte de situation expérimentale » (Kaufmann, 1996, p.60- 61)

Cette « *sorte de situation expérimentale* » nous apparaît pertinente dans la mesure où, dans notre étude, c'est à travers un discours sur le travail du chercheur que nous essayons de mettre en évidence des pratiques. Nous demandons au chercheur de décrire son travail dans le cadre d'un projet de recherche, en cela il est amené à analyser lui-même son travail pour répondre aux questions.

« L'entretien de type compréhensif est une configuration où une personne sollicite la parole d'une autre à propos d'un sujet donné, en lui reconnaissant un droit à l'intersubjectivité, c'est-à-dire un droit à une subjectivité autonome. Ce droit à une subjectivité autonome implique une attitude générale du chercheur. Il s'agit de considérer que l'entretien est susceptible de produire un matériau heuristique à la seule condition que celui qui enquête renonce à un statut d'expert, pour se mettre à disposition de celui qui parle. Son rôle est de favoriser une prise de parole. En énonçant une consigne vague. En accompagnant cette parole par des relances, parfois silencieuses, parfois non verbales. La première implication de cette mise à disposition de soi consiste donc dans le renoncement à la directivité des questions. » (Matthey, 2005, p.3)

Nous précisons que dans le cas de la conduite de nos entretiens, nous n'avons pas le statut d'expert dans la mesure où nous ne faisons pas de mathématiques appliquées aux sciences du vivant.

L'entretien compréhensif ne s'oppose pas à l'entretien semi-directif mais en diffère par deux aspects :

- Il ne s'adresse pas à un « *enquêté* » dans l'unique but de recueillir ses représentations mais à un informateur, susceptible d'exposer ses raisons concernant ses représentations.
- L'interrogé est amené à utiliser la situation d'entretien pour s'interroger sur ses choix, et par là même à les expliciter.
- L'enquêteur doit s'engager activement dans l'entretien pour provoquer l'engagement de l'interrogé : allers et retours permanents « *entre compréhension, écoute attentive et prise de distance, analyse critique* » (Kaufmann, 1996, p.22).

La conduite de l'entretien compréhensif s'approche du cadre d'une conversation mais déstructure la prise d'informations. Ainsi, la grille de l'entretien doit prendre la forme d'un ensemble de pistes de recherche et non pas d'une liste de questions formatées.

« *La meilleure question n'est pas donnée par la grille : elle est à trouver à partir de ce qui vient d'être dit par l'informateur.* » (Ibid., p.48)

Nous avons donc construit une grille souple permettant des relances répétées au cœur de l'entretien.

6-3 Présentation de la grille d'entretien

L'une des questions essentielles sur lesquelles reposent nos entretiens est celle où nous demandons au chercheur de décrire un projet de recherche dans lequel sont intervenues les mathématiques : « *Pouvez-vous décrire un projet de recherche (du début à la fin) dans lequel les mathématiques sont intervenues ?* » Cela engage une conversation qui fournit un support à un discours sur les pratiques qui, de notre point de vue, permet de réduire la distance entre le discours sur les pratiques et les pratiques effectives.

Dans le cadre de l'entretien compréhensif, nous avons prévu des questions intermédiaires pour faire développer certains points de la description ou l'enrichir, mais suffisamment factuelles pour ne pas induire une focalisation sur les aspects qui nous intéressent directement. Nous avons

notamment fait le choix délibéré de ne pas prononcer nous-mêmes ni le mot « modèle » ni le mot « modélisation » dans le début de notre entretien. Nous faisons l'hypothèse que leur introduction par le chercheur lui-même sera plus révélatrice de sa propre conception du sens de ces mots et sera ainsi plus à même de nous éclairer sur ses pratiques.

Notre grille est construite selon trois axes :

Axe 1

Les premières questions de notre grille fournissent des informations sur le parcours personnel du chercheur et sur sa formation mathématique.

Axe 2

Ensuite, nous posons des questions relatives à ses projets de recherche pour lesquelles le chercheur devrait, dans ses réponses, être amené à décrire ses pratiques. Pour ces questions, dans le cadre d'un entretien compréhensif, des sous questions sont prévues afin d'obtenir des éléments plus précis dans la description. Elles ne seront pas nécessairement toutes posées, ni posées dans l'ordre où elles sont écrites. Au regard de nos questions de recherche, nous centrons dès le départ nos questions autour des mathématiques : les questions de cet axe invitent dans un premier temps le chercheur à expliciter en quoi et comment les mathématiques interviennent dans le projet de recherche et, en particulier, sur comment il opère les choix qui relèvent des mathématiques. Puis, les questions sont centrées autour de la construction des problématiques de recherche des chercheurs et sur la validation des résultats obtenus. Deux questions plus ouvertes (sur l'échec et les difficultés dans leur activité) devraient amener le chercheur à décrire son activité de modélisation en mettant en évidence les points saillants de son travail, éventuellement en généralisant ses propos.

Axe 3

Dans cet axe, une seule question est posée. Elle consiste à demander au chercheur de définir « un processus de modélisation ». Cette question est dans sa formulation déconnectée du projet de recherche du chercheur. Nous faisons l'hypothèse que le chercheur s'appuiera sur la description du projet de recherche donnée dans les questions précédentes pour synthétiser lui-même les éléments qui pourraient constituer le processus de modélisation dans son travail.

La trame de la grille d'entretien est la suivante, tout en nous autorisant à reformuler, ajouter ou retirer des questions et à en respecter plus ou moins l'ordre. Nous précisons que les sous-questions prévues apparaissent en retrait dans la grille.

<p>Axe 1</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Quel est votre parcours universitaire ? ➤ Quel est votre parcours professionnel ? ➤ Qu'est-ce que de votre point de vue faire des mathématiques ? ➤ Avez-vous fait beaucoup de mathématiques dans votre formation ? <p>Axe 2</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Pouvez-vous décrire un projet de recherche (du début à la fin) dans lequel les mathématiques sont intervenues ? <ul style="list-style-type: none"> - Comment a commencé le projet ? Qu'est ce qui a initié ce projet. A quelle échelle est ce projet ? Quelle est la question de départ ? - Quels choix (mathématiques et expérimentaux) ont été faits pour mener à bien ce projet ? - Comment avez-vous choisi vos outils mathématiques ? Quels outils ? Pour quelles raisons ? Sous quelle forme ? - A quels renoncements avez dû vous faire face ? Quelle est la part de créativité dans vos travaux ? - En quoi les mathématiques vous ont été indispensables dans ce projet ? Estimer le degré d'intervention des mathématiques. - Y a-t-il un texte de dépôt, un article qui relate ce projet ? ➤ Y-a-t-il d'autres disciplines qui interviennent dans votre travail ? <ul style="list-style-type: none"> - Comment se passe la collaboration avec les mathématiciens, le cas échéant, comment est-elle mise en place ? Comment les outils sont-ils choisis dans ce contexte ? - sur quoi, pourquoi ? ➤ Êtes-vous amené à reformuler et/ ou reconstruire vos problématiques ? ➤ Comment validez-vous vos résultats ? <ul style="list-style-type: none"> - Comment testez-vous la fiabilité de vos modèles ? - Qu'appellez-vous échec dans votre activité ? ➤ Dans le type de recherche que vous avez décrit, qu'est-ce qui est le plus difficile ? <p>Axe 3</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Pourriez-vous définir « processus de modélisation » ?
--

Figure 26 : Grille des entretiens

6-4 Analyse des entretiens

Les entretiens avec les cinq chercheurs B₁ à B₅ ont été réalisés entre décembre 2014 et juin 2015. Chaque entretien a été filmé et retranscrits (Le lecteur en trouvera les verbatims en annexe n°2 à n°6).

Notre méthode d'analyse est de repérer dans ces entretiens les éléments qui semblent partagés par ces chercheurs et qui pourraient potentiellement constituer des invariants dans les pratiques de modélisation.

Nous proposons de lister ces éléments retenus en les illustrant par des extraits des interviews des chercheurs interrogés.

- Le chercheur fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

(B₁) « Et c'est beaucoup mon travail, c'est surtout l'interaction entre une situation réelle, sa simplification en prenant les hypothèses simplificatrices, après l'écriture en équation, après la solution de ces équations ou pas, donc où est-ce qu'il faut approximer pour solver et après le retour c'est-à-dire qu'est-ce que veulent dire les paramètres, qu'est-ce que ça traduit biologiquement comme dynamique quoi. »

(B₃) « On va faire ça [des hypothèses simplificatrices], et puis aussi, modéliser même si on n'est plus connecté avec la biologie réelle »

« Je veux mesurer, compter, mais quoi, comment, on ne peut pas tout regarder, enfin voilà. »

(B₅) « On sait que, en gros, le sang a une viscosité apparente qui diminue en fait en fonction du vaisseau sanguin dans lequel il est, il va circuler. Donc, plus le diamètre d'un vaisseau est faible, en fait, plus la viscosité est faible jusqu'à un point plus bas quoi. En tout cas, ça change. Si on prend un mauvais modèle, pour un fluide, par exemple, un modèle qui est le modèle de l'eau, bon un peu adapté, on ne va pas reproduire ça. Voilà ! Tout simplement, on a une observation qui est voilà, d'expériences ou de médecine ou des choses comme ça et puis un mauvais modèle, c'est un modèle qui ne va pas reproduire cette observation-là. Donc, c'est un modèle, qui, alors il y a pas de mauvais modèles dans l'absolu, c'est-à-dire que le même modèle en fait va peut-être être très bon pour représenter l'écoulement dans le cœur ou même si c'est du sang parce que les effets en fait qui sont

cruciaux quand on va atteindre les petits vaisseaux, les petits capillaires, ne vont pas être importants dans les gros vaisseaux.»

(B₅) « Quelque chose que j'aime bien faire et donc je vais essayer de reproduire le plus souvent possible à l'avenir, c'est effectivement, de commencer par, ne pas se précipiter sur les manips, mais de commencer par bien réfléchir à la question, éventuellement bon, évidemment lire la littérature sur le sujet et puis éventuellement faire quelques, quelques analyses informatiques préliminaires pour délimiter bien clairement l'hypothèse qu'on va tester, pour se faire vraiment une idée précise de la manip qu'il faut faire, qui va répondre à la question, plutôt que de se lancer dare-dare en disant on essaye ça, on essaye ça. »

On note dans ces propos, l'importance de la considération du fragment de réalité à modéliser. Ce choix implique des hypothèses simplificatrices de la réalité à partir desquelles les chercheurs vont construire un modèle.

Dans les propos des chercheurs interrogés, il ressort que le modèle a une fonction prédicative. Au regard de cette fonction, plusieurs pratiques semblent invariantes :

- Le chercheur choisit un modèle qui doit lui permettre un traitement mathématique afin de recueillir des observables. Il choisit dans un premier temps un modèle déjà éprouvé qu'il connaît ou peut connaître facilement et dont les méthodes de résolution associées lui sont accessibles.

(B₁) « Donc ça, ça va être, voilà, peut-être être les deux entrées pour démarrer un processus de modélisation ; améliorer un modèle existant ou créer entre guillemets un modèle qui existe pas de ça parce qu'on a vu un truc particulier dans les données mais pour le créer on va prendre des modèles existants qu'on va raffiner »

(B₂) « En fait, c'est simple on part d'un modèle qui est plus ou moins complet mais qui est connu de la littérature, on a une question mais y a des choses qui sont connues sur le modèle qu'on va étudier »

(B₃) « Moi ce que je vais faire c'est juste muter la séquence qui reconnaît les ARN car normalement, en mutant juste cette séquence je devrais avoir le même phénotype [...] puisque le modèle dit que c'est comme ça que « bantam²² » exerce son action [...], ça c'est une prédiction qu'on va tester. »

(B₄) « Donc, en général, on part d'un modèle existant dont on connaît les capacités, qui va être capable de traiter une certaine partie, en fait des applications souhaitées. Et puis à un moment, on

²² Micro-ARN particulier de la drosophile

essaye de l'améliorer, on change un peu, on rajoute des ingrédients pour traiter les nouveaux aspects. »

(B₅) « Oui, alors, en général, ben là, pour ce qu'on fait en biologie moléculaire, le choix du modèle, ça se restreint souvent à dire : « est-ce que les données suivent une loi normale ou pas ? Est-ce que je peux utiliser l'outil test ou pas ? » »

« Quand on cherche à se placer à une plus grande échelle, on a des méthodes d'homogénéisation ou des choses comme ça qui vont créer des nouveaux modèles à partir de de modèles existants. »

« Le modèle de base sera choisi aussi en ayant en tête les contraintes qu'on aura sur la partie méthode numérique et mathématique »

- Le chercheur utilise la simulation informatique pour obtenir des résultats avec le modèle choisi. Souvent c'est avec la simulation informatique qu'il va tester si son choix du fragment de réalité associé au modèle qu'il induit est en cohérence avec les observations issues de l'expérience ou de l'expérience simulée.

(B₁) « Et après les maths parce que les stats après, y a des stats pour tester. »

(B₂) « Alors les mathématiques alors comme je te l'ai déjà dit, c'est surtout toutes les statistiques. C'est primordial mais c'est aussi du coup... ça dépend des techniques, mais là, celles que j'utilise, y'a la notion d'électronique, de mesures, de mesure de courant électrique donc bien sûr il y a des mathématiques dedans pour faire des calculs, etc. Et une manière aussi de présenter les résultats avec des graphiques des histogrammes cumulés, des choses comme cela ... »

(B₃) « Les mathématiques sont, ben elles interviennent tout le temps après alors, on fait beaucoup de statistiques. »

« Je vais choisir des cibles prédites par l'ordinateur et les muter de la manière dont je veux. »

(B₄) « Donc après, on a toute une phase de déformation d'images qui interviennent par des méthodes statistiques en fait. Donc là, il y a des méthodes statistiques qui sont voilà, utilisées pour reproduire en fait les mouvements les plus probables de géométrie, puisqu'en fait, le cœur bouge. »

(B₅) « De toute façon, à partir du moment où on fait des sciences expérimentales, il faut faire des statistiques puisque voilà, comme je le disais, de toute façon, la réponse expérimentale, elle est, par essence, elle est non reproductible, donc il faut avoir une idée de la reproductibilité de la mesure. »

- Le chercheur choisit un modèle en anticipant la faisabilité de réaliser une expérience qui permettrait de confronter les résultats obtenus par le modèle avec ceux obtenus expérimentalement. Il y a de véritables allers retours entre le fragment de réalité, le modèle envisagé, les premiers résultats obtenus avec les modèles et les données expérimentales. Cette pratique relève de la validation du choix du modèle par les chercheurs.

(B₁) « Le début, l'entrée c'est le modèle dont j'ai besoin pour mes questions de bio, après c'est l'outil, et après, l'outil et les questions se répondent quoi »

(B₃) « Il faut poser des questions qui peuvent avoir des réponses »

« Il faut imaginer des expériences qui de toutes façons donnent un résultat qui permette d'avancer. »

(B₁) « Je voyais que j'avais pas tous les cas [...] donc dans ce cas-là j'ai cherché à nouveau. C'est l'aller-retour. »

« Ça va être l'étape 1, l'entrée dans la question, et après ça va être ok, caractériser l'objet mathématique qui va décrire le truc qu'on a choisi d'utiliser. Donc déjà le dériver bien c'est-à-dire sous les hypothèses physiques entre guillemets, biologiques du truc, il se passe ça, j'ai un objet par exemple une matrice aléatoire ou une EDP donc caractériser bien, écrire cet objet en format mathématique, que je peux aller sur Google ou avec un matheux parler de cet objet, et ensuite, ben du coup, dérouler l'objet, là on est dans, comme en physique, le déroulé ça va être faire des choix d'approximation donc y a encore des choix dans ce processus-là, se dire ok, ça, ça doit être petit, ça non, alors voyons voir, ah si ça par contre c'est grand, voyons voir, ça c'est, c'est pas mal du tout[...] la fin du truc c'est le retour aux données. »

(B₃) « Et tant qu'on n'a pas pu démontrer, faire des manips, des expériences pour montrer que vraiment ce logiciel-là est mieux parce que les cibles qu'il a prédites, ben on arrive à montrer qu'elles ont vraiment une signification biologique, ben on peut, là, on ne peut pas savoir. »

(B₄) « Quand les prédictions ne se réalisent pas, ça ouvre souvent la voie à des choses nouvelles et excitantes. »

« Et pour vérifier le modèle, on va plutôt le comparer à des observations expérimentales. »

« Quand on valide les modèles, on les valide contre des expériences en laboratoire. »

(B₅) « [...]et là un problème qui se pose, c'est d'avoir, de bien trouver, enfin, quand on simule, voilà, il faut simuler par quelque chose qui est censé récapituler un peu les caractéristiques du jeu de données réelles et, c'est pas toujours, pas toujours évident de trouver »

« Même si vous avez plein de méthodes mathématiques pour résoudre des problèmes des mécaniques des fluides, tant qu'il y a pas un bon modèle, il y aura pas des bons résultats quoi. »

- Les allers retours mettent la plupart du temps en jeu des données quantitatives que les chercheurs étudient pour vérifier la fiabilité de leur modèle et le cas échéant affiner le modèle et/ou revoir les données sélectionnées pour la question de départ. Si le résultat obtenu avec le modèle est cohérent avec les données de la réalité, le chercheur valide le choix du modèle.

(B₁) « Tout le jeu, c'est de tordre le modèle pour qu'il s'exprime en terme de quantités que je sais mesurer dans mes expériences. »

« [...] on a fait un modèle qui arrive à des, qui à l'intérieur du modèle si il est bien fait, si il n'y a pas d'échecs dans cette phase-là, euh, arrive à quelque chose qui colle aux simulations donc on a clarifié ce qu'on avait mis comme simplifications de la nature au départ, on a réussi à en tirer quelque chose de mesurable et donc comparable à des données mesurées, et après on a comparé les deux. Quand ça rejette, il y a une information, quand ça accepte il y a une information, on tire toujours quelque chose du truc quoi ! Donc, c'est toujours utile. »

« Et le tout c'est la sortie de ma loi exponentielle de paramètre 0,4. Et je peux m'être planté en ayant choisi une exponentielle comme une limite d'un truc et en fait je me suis trompé parce que le truc il ne tend pas vers cette limite et tout ça, et je peux aussi m'être planté dans le 0,4 et je peux aussi m'être planté parce que j'ai inféré correctement le 0,4 mais en fait ma mesure empirique qui permettait de paramétrer le truc qui était fausse, donc il y a plein de niveaux où ça peut se planter ! »

« Et puis après pour la validation empirique, donc là c'est pour moi beaucoup plus important évidemment, là c'est qu'on va dire en simulant ce truc-là déjà, j'ai fait des hypothèses sur comment le système biologique marchait, donc là le but c'est d'obtenir une sortie quantitative, donc soit par exemple une trajectoire au cours du temps, euh par exemple typiquement de taille de population, ou des distributions, moi c'est beaucoup par les distributions que je valide, donc je vais avoir une distribution théorique attendue, par exemple qui découle de ce que je vous disais sur des trucs uniformément distribués sur une hyper sphère, c'est en général une distribution d'un truc, et puis je vais comparer avec une distribution expérimentale d'une quantité »

(B₂) « Disons qu'on a un modèle qui est assez de base, avec des questions assez descriptives, est ce que le récepteur est intégré ?, voilà, est ce qu'il va moduler juste en potentialisant ou en déprimant la réponse ? Ça reste très très qualitatif. Donc on utilise une technique électro-physiologique qui va

utiliser et générer beaucoup de données qui seront traitées par les mathématiques et après on aura la réponse à la question »

« On remettrait plutôt en cause les modèles. C'est à dire que la question posée n'était pas la bonne ou la molécule n'agit pas là où on pensait ; mais il peut y avoir des tas de raisons, les conditions de l'expérience, les aléas en biologie.»

(B₃) « On compte des choses, on mesure des paramètres et ensuite on essaye de comparer euh une population témoin avec la population euh à laquelle on s'intéresse dans le cadre de l'expérience »

« Euh donc, il va falloir mesurer, mesurer des cellules, mesurer des mouches, quantifier des quantités d'adultes qui arrivent à émergence ou pas.»

« Je pense que les mathématiques permettent d'une certaine manière de s'affranchir d'une certaine subjectivité, mais /// et parfois euh /// d'ailleurs, parfois en analysant les chiffres qui sont issus de nos expériences, on voit des choses, qui nous échappent bien sûr, mais si on les analyse mathématiquement, vous voyez ? [...] y a qu'en modélisant justement qu'on peut arriver à comprendre comment ça marche. Sinon, on ne va pas comprendre comment ça marche on va décrire.»

(B₄) « C'est-à-dire qu'avant on faisait de la simulation numérique en disant, en donnant une condition de fonctionnement, mais on gardait le résultat. Et maintenant, de plus en plus, on s'intéresse à, non pas une seule condition de fonctionnement, mais une condition de fonctionnement plus des marges de tolérance, en gros des marges de d'erreurs quoi, et on regarde la conséquence, donc marges d'erreurs sur nos paramètres, une gamme d'erreurs sur nos paramètres, euh ou d'incertitudes, disons, et les conséquences sur les résultats. »

(B₅) « Et toute la question après c'est, c'est de savoir si cette différence qu'on mesure, si elle est intrinsèque à la variabilité du système, c'est-à-dire si on faisait 2 fois dans les mêmes conditions, on aurait la même variabilité ou si elle est vraiment due aux facteurs dont on veut étudier les faits. Euh donc, c'est pour ça que du coup, il faut faire plusieurs réplicats de la mesure dans une certaine condition, plusieurs réplicats de la mesure dans l'autre condition, et après donc, on utilise des tests statistiques qui nous permettent de dire si la variabilité à l'intérieur de chaque groupe suffit à expliquer les différences qu'on observe entre les 2 groupes ou si, au contraire, la différence entre les deux groupes est telle qu'il est vraiment très peu probable que la différence mesurée est due à cette variabilité euh de la mesure »

« Je sais que par exemple, en astrophysique quand ils font des accumulations de mesures, on voit vraiment, quand par exemple, ils veulent « fiter » sur les sinusoides, on voit vraiment un nuage de points et puis on voit vraiment une sinusoides qui passe au milieu de, au milieu de milliers de points euh en biologie, on a rarement la possibilité de faire des milliers de fois la même mesure. »

- Dans l'idéal, le chercheur espère obtenir un résultat qui se généralise et qui deviendrait alors lui-même un nouveau modèle.

(B₁) « C'est un peu plus le modèle que l'application que je vise. »

(B₃) « Réussir une expérience, c'est toujours sympa sur le coup, mais c'est comme jouer à un jeu, ça, ce n'est pas... non arriver à élaborer un modèle je pense que c'est le plus grand accomplissement quand même, pour un chercheur, vous voyez, c'est ///. Oui, c'est qu'on a réussi à faire plusieurs petites choses qui aboutissent à une construction, et après, on va être cité plus pour ce modèle que pour des petites expériences »

(B₅) « Et effectivement, enfin, j'imagine volontiers que ce genre de concepts sur lesquels on travaille, peuvent se généraliser à d'autres facteurs, et on le propose des fois, quand on écrit des trucs ou moi, en séminaire, des fois quand j'en parle, mais pour le moment ça reste spéculatif quoi, on se contente de le proposer. Euh c'est vrai que dans le futur, j'aimerais bien tester ça, je ne sais pas si on va le pouvoir, si y a ce même genre de phénomène, c'est-à-dire des conséquences tamponnées pour l'un des 2 partenaires et pas tamponnées pour l'autre, donc si on peut voir ça, c'est avec d'autres types d'interactions quoi. »

SYNTHESE

Parmi les chercheurs interrogés, nous avons repéré des pratiques qui semblent invariantes lors du passage du monde réel (ici dans un contexte des sciences du vivant) au monde mathématique, c'est-à-dire relevant de la mathématisation horizontale.

Il ressort que les chercheurs sont amenés à faire des hypothèses simplificatrices pour choisir le fragment de réalité à modéliser. Le chercheur commence par choisir un modèle existant en cohérence avec l'identification préalable des variables pertinentes et de leur mise en relation. Cette phase relève d'un travail de mathématisation horizontale. Nous considérons que, au sens de Treffers, le chercheur réfléchit dès cette phase au modèle mathématique qui pourrait être utilisé à partir de ce choix et il choisit un modèle qui doit lui permettre un traitement mathématique (mathématisation verticale) afin de recueillir des observables.

On retrouve l'idée que les deux aspects de mathématisation sont interconnectés, la mathématisation horizontale prenant en compte les possibles au niveau du travail de la mathématisation verticale qu'elle va induire.

Pour valider le choix de modèle, les chercheurs confrontent les résultats obtenus (souvent via une simulation informatique) au sein du modèle mathématique à ceux obtenus expérimentalement. Cette phase matérialise des allers retours entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale. De cette confrontation, les chercheurs sont amenés à revoir soit le choix du fragment de réalité, soit les grandeurs pertinentes retenues pour le modèle ou leur mise en relation, soit les conditions et/ou le protocole de l'expérience réalisée. Il ressort que si la quantification de l'objet d'étude semble un incontournable des pratiques de ces chercheurs, il leur faut en amont essayer de comprendre le fonctionnement de l'objet tout comme l'affirme Philippe de Reffye dans Schmid (2009, p.106) :

« Avant de faire des mesures sur un objet, il faut essayer de comprendre comment il fonctionne et effectivement c'est quelque chose de très complexe. »

6-5 Présentation de nos résultats

Nous présentons nos résultats sur les pratiques expertes invariantes relevant de la mathématisation horizontale. Puis nous montrons comment nous avons complété et finalisé le schéma du processus de modélisation retenu pour notre étude.

6-5-1 Caractéristiques des pratiques retenues pour notre recherche

Notre recherche étant axée sur le travail de mathématisation horizontale, nous faisons le choix de retenir de notre enquête d'épistémologie contemporaine, des pratiques a priori invariantes qui relèvent de la mathématisation horizontale ou qui lui sont interconnectées, c'est-à-dire des pratiques mobilisées pour permettre de passer de la situation réelle au monde mathématique, en envisageant un traitement mathématique pour répondre au problème étudié.²³

Anticipant une possible transposition de ces pratiques dans les classes à partir de l'élaboration d'une fiction réaliste et de sa mise en œuvre selon le dispositif ResCo (Partie 3), nous retenons les 3 caractéristiques suivantes :

²³ Une perspective de recherche serait de caractériser dans les pratiques invariantes identifiées chez les chercheurs interrogés ce qui relève de la mathématisation verticale et de la validation du modèle.

P_{i1} Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

P_{i2} Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P_{i1}**.

P_{i3} La « *quantification* » telle que décrite par Chabot & Roux (2011) est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur (ou de l'apprenti chercheur) pour légitimer le choix du modèle utilisé dans le sens où elle permet de confronter les résultats obtenus avec le modèle avec les données réelles.

Nous pointons principalement deux limites à notre étude :

- La représentativité des chercheurs interviewés
- Notre présentation ne montre pas la variabilité dans les pratiques des chercheurs interrogés

6-5-2 Schéma du processus de modélisation retenu pour notre étude

La pratique **P_{i1}** relève explicitement des formes de la mathématisation horizontale définies au paragraphe 4-4-2 que nous trouvons sur le premier axe horizontal de l'ébauche du schéma du processus de modélisation (voir ci-dessous).

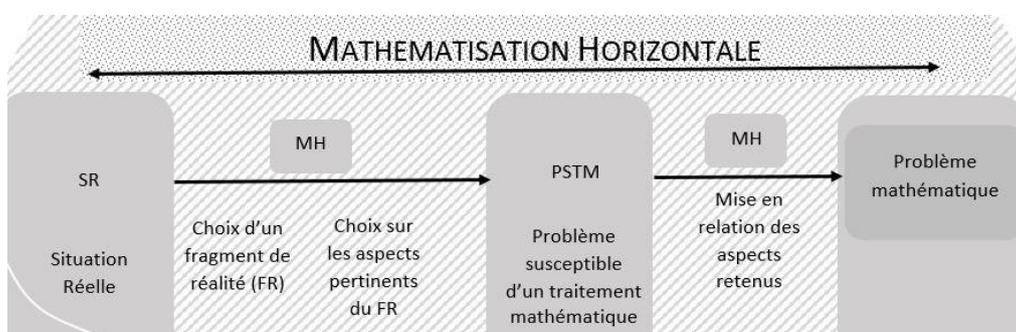


Figure 27 : Axe de la mathématisation horizontale du schéma du processus de modélisation mathématique pour notre étude

La pratique P_{i2} montre que le travail de mathématisation horizontale est interconnecté avec celui de la mathématisation verticale. Pour le mettre en évidence sur notre schéma, nous complétons notre ébauche en ajoutant des doubles flèches à partir de modèle mathématique vers « la situation réelle » et vers « le problème susceptible d'un traitement mathématique ». Nous obtenons le schéma du processus de modélisation mathématique retenu pour notre étude²⁴ ci-dessous :

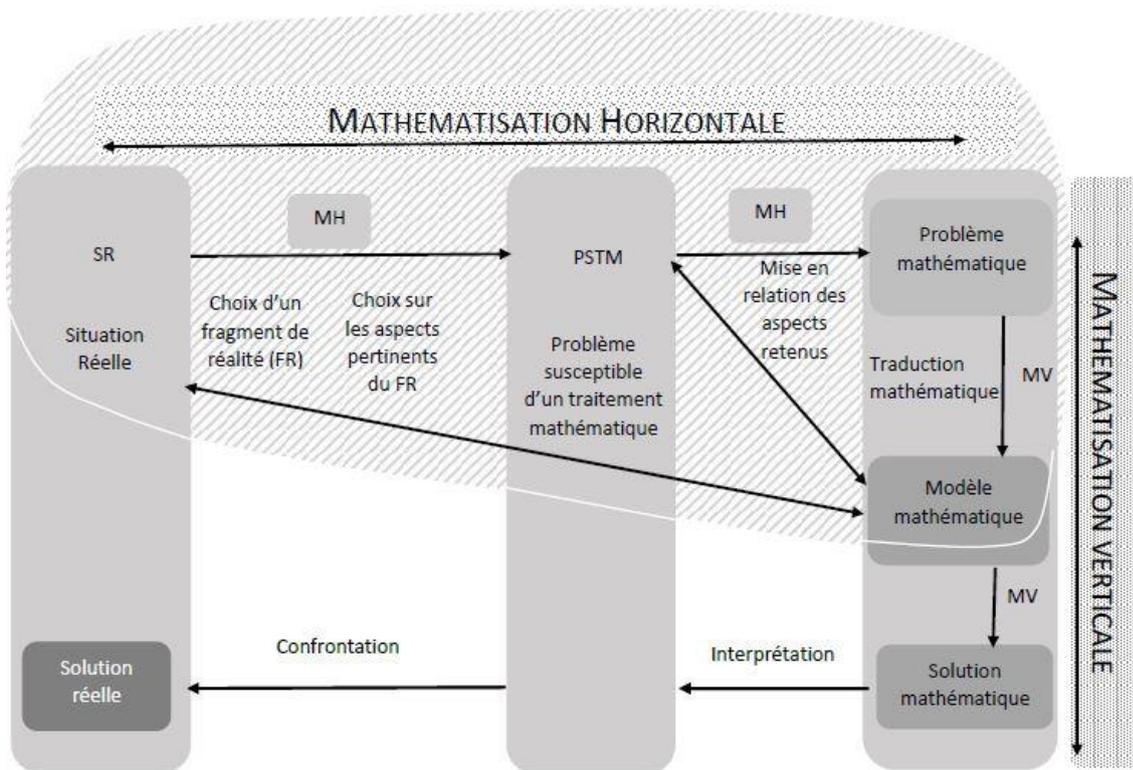


Figure 28 : Schéma du processus de modélisation mathématique retenu pour notre étude

²⁴ Nous avons hachuré la partie du processus de modélisation correspondant à notre étude.

Conclusions de la partie 2

Dans cette partie nous avons étudié d'un point de vue épistémologique la question de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique relevant de la mathématisation horizontale, c'est-à-dire la mathématisation qui se joue lors du passage du monde réel au monde mathématique (QR₁).

A partir des travaux de Treffers (1978), d'Israël (1996) et de Freudenthal (1991), nous avons défini la mathématisation horizontale comme suit :

- *La mathématisation horizontale* relève du choix d'un fragment de réalité, de l'identification et du choix de certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique.

En appui sur cette définition, d'une part nous avons ébauché le schéma du processus de modélisation mathématique pour notre recherche, d'autre part, nous nous sommes interrogées sur les pratiques des chercheurs utilisant la modélisation mathématique dans le contexte des sciences du vivant pouvant relever de la mathématisation horizontale (QR₂) dans l'objectif de caractériser des invariants dans ces pratiques potentiellement transposables dans les classes (QR₃).

Les analyses des entretiens menés auprès de cinq chercheurs ont permis de dégager six pratiques invariantes relevant de la modélisation mathématique dans les sciences du vivant que nous précisons ci-dessous :

➤ Le chercheur fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

➤ Le chercheur choisit un modèle qui doit lui permettre un traitement mathématique afin de recueillir des observables. Il choisit dans un premier temps un modèle déjà éprouvé qu'il connaît ou peut connaître facilement et dont les méthodes de résolution associées lui sont accessibles.

➤ Le chercheur utilise la simulation informatique pour obtenir des résultats avec le modèle choisi. Souvent c'est avec la simulation informatique qu'il va tester si son choix du fragment de réalité associé au modèle qu'il induit est en cohérence avec les observations issues de l'expérience ou de l'expérience simulée.

➤ Le chercheur choisit un modèle en anticipant la faisabilité de réaliser une expérience qui permettrait de confronter les résultats obtenus par le modèle avec ceux obtenus expérimentalement. Il y a de véritables allers retours entre le fragment de réalité, le modèle envisagé, les premiers résultats obtenus avec les modèles et les données expérimentales. Cette pratique relève de la validation du choix du modèle par les chercheurs.

➤ Les allers retours mettent la plupart du temps en jeu des données quantitatives que les chercheurs étudient pour vérifier la fiabilité de leur modèle et le cas échéant affiner le modèle et/ou revoir les données sélectionnées pour la question de départ. Si le résultat obtenu avec le modèle est cohérent avec les données de la réalité, le chercheur valide le choix du modèle.

➤ Dans l'idéal, le chercheur espère obtenir un résultat qui se généralise et qui deviendrait alors lui-même un nouveau modèle.

De ces six pratiques de référence chez les chercheurs interrogés, nous n'en avons retenu que les caractéristiques relevant de la mathématisation horizontale sur lesquelles nous nous sommes appuyées pour compléter et construire notre schéma du processus de modélisation mathématique.

Les résultats de la partie 2 sont les suivants :

RESULTAT 1

Dans un contexte des sciences du vivant, lors du passage d'une situation réelle au monde mathématique, trois éléments des pratiques expertes semblent invariants et potentiellement transposables à la classe à savoir :

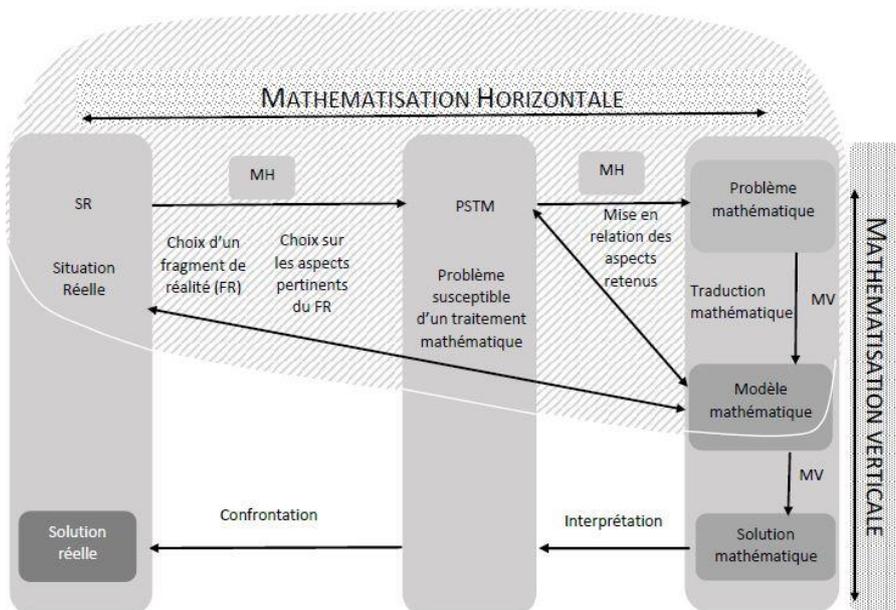
P₁₁ Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

P₁₂ Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P₁₁**.

P₁₃ La « *quantification* » telle que décrite par Chabot & Roux (2011) est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur (ou de l'apprenti chercheur) pour légitimer le choix du modèle utilisé dans le sens où elle permet de confronter les résultats obtenus avec le modèle, avec les données réelles.

RESULTAT 2

Le schéma du processus de modélisation mathématique suivant (Figure 28) met en évidence le travail de mathématisation horizontale et les articulations entre les aspects horizontal et vertical de la mathématisation, et favorise la transposition des pratiques expertes en modélisation dans les sciences du vivant :



Notre étude d'épistémologie contemporaine a permis de mieux cerner la forme et le rôle de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation mathématique. Dans la partie 3, nous nous appuyons sur les résultats pour élaborer et analyser une ingénierie didactique permettant, de favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale dans les travaux d'élèves et, d'étudier des traces de transposition éventuelles dans les classes des pratiques invariantes identifiées.

Partie 3 Etude didactique

Dans cette partie, nous mettons à l'étude les trois questions de recherche suivantes :

- QR₄ Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation?
- QR₅ Quelles sont les caractéristiques des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation ?
- QR₆ Quels sont les contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la mathématisation horizontale ?

Le chapitre 7 est consacré à une étude préliminaire qui vise d'une part, à identifier des premiers éléments sur les caractéristiques d'une situation porteuse de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, d'autre part, à retenir une modalité de mise en œuvre favorisant cette dévolution. Puis, nous partageons notre étude didactique en deux volets :

Dans le volet 1, en appui sur cette étude et sur les résultats de l'étude épistémologique, dans le chapitre 8, nous caractérisons une situation porteuse de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves et d'une possible transposition des pratiques expertes invariantes dégagées en partie 2. Puis, nous montrons comment nous avons élaboré une telle situation dans le contexte des sciences du vivant. Nous proposons, ensuite, l'analyse a priori de cette situation du point de vue du travail de la mathématisation horizontale et définissons des indicateurs de dévolution de cette mathématisation. Cette situation a été mise en œuvre dans les classes en 2015-2016, au sein du dispositif ResCo. Dans le chapitre 9, nous présentons les analyses a posteriori de cette expérimentation, du point de vue de la dévolution de la mathématisation horizontale et de la transposition des pratiques expertes. Nous terminons le volet 1 en présentant les résultats obtenus relatifs aux questions QR₄ et QR₅.

Le volet 2 est consacré à l'étude des conditions, contraintes et marges de manœuvre quant aux pratiques enseignantes relevant de la mathématisation horizontale. Dans le chapitre 10, nous précisons notre problématique relative à ces pratiques et présentons le cadre théorique retenu pour notre étude. Nous présentons une analyse écologique des programmes français en mathématiques dans l'enseignement secondaire (11 ans à 18 ans) afin d'interroger la place de

la mathématisation horizontale en tant qu'enjeu d'apprentissage mathématique dans l'éducation secondaire ainsi qu'une étude à partir de la littérature portant sur l'identification d'obstacles à l'enseignement de la modélisation mathématique. Puis, nous formulons nos hypothèses de recherche au regard de la problématique et précisons la méthodologie d'analyse des données recueillies lors de notre expérimentation en 2015-2016 réalisée au sein du dispositif ResCo. Dans le chapitre 11, nous présentons les analyses de notre expérimentation et donnons les résultats obtenus relatifs à QR_6 .

Chapitre 7 : Etude préliminaire

Dans ce chapitre, nous présentons une étude préliminaire sur les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée (11 ans à 18 ans) engagés dans une activité de modélisation. Cette étude se décline en deux temps : une étude menée à partir du travail de mémoire de Ray (2013), ancien membre du groupe ResCo qui s'est intéressé à l'étude de la dévolution de la mathématisation dans le dispositif ResCo à partir d'une fiction réaliste relevant d'une contextualisation réaliste d'un problème mathématique, puis l'étude d'une pré expérimentation menée au sein du dispositif ResCo en 2013-2014. Nous mettrons en évidence en quoi ces deux études ont été un préalable à l'élaboration des expérimentations présentées et analysées dans les volets 1 et 2 qui suivront.

7-1 Premiers éléments à partir du mémoire de Ray (2013)

Dans son mémoire de Master (non publié), Ray (2013) présente une étude d'échanges de questions et de réponses lors de deux sessions de résolution collaborative d'un problème posé sous la forme d'une fiction réaliste en 2009 et en 2010. Trente-huit classes se sont engagées en tout (les deux sessions confondues).

Dans ce mémoire, le processus de mathématisation est défini comme une partie du cycle de modélisation qui comporte les étapes nécessaires pour aller de la situation de départ jusqu'à un (ou des) problème(s) mathématiques.

Nous présentons la fiction réaliste proposée ainsi qu'une synthèse des analyses et résultats obtenus et renvoyons le lecteur à la lecture de l'article de Aldon, Durand-Guerrier et Ray (2014) pour plus de détails.

7-1-1 La fiction réaliste proposée

Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente.

De combien de couleurs aura-t-il besoin ?

Figure 29 : Le problème de L'artiste

Nous rappelons au lecteur, ci-après, en quoi cet énoncé satisfait les caractéristiques d'une fiction réaliste en citant Aldon & al (2014, p.148-149) en précisant que ces critères sont pensés pour des énoncés relevant de *contextualisations réalistes* d'un problème mathématique :

- Les auteurs définissent dans un premier temps les critères caractérisant une fiction réaliste dans le cadre du dispositif ResCo :

« 1. La contextualisation doit dissimuler suffisamment le problème mathématique pour qu'il ne soit pas identifié immédiatement par les élèves (autrement dit, on ne va pas se contenter d'un simple habillage du problème).

2. Une exploration par un moteur de recherche classique ne doit pas conduire immédiatement au problème ; le problème doit donc être énoncé sous une forme originale.

3. Le problème doit pouvoir être posé avec profit à des élèves dès le début du collège jusqu'à la fin du lycée.

4. Le champ des possibles pour la mathématisation du problème est suffisamment ouvert pour que le jeu des questions réponses soit riche et pertinent ; autrement dit, différents problèmes mathématiques peuvent émerger, que les élèves peuvent tous envisager selon le niveau de classe.

5. La relance doit pouvoir être comprise par les élèves comme répondant à certaines de leurs questions et comme fixant de manière non artificielle certains des éléments du problème. »

- Dans un second temps, les auteurs explicitent en quoi le problème de l'artiste remplit les contraintes identifiées ci-dessus :

« Les élèves ne reconnaissent pas immédiatement le problème mathématique sous-jacent (critère 1) ;

Nous nous sommes assurés que la recherche sur Internet ne renvoyait pas à ce problème (critère 2) ;

Il peut être proposé de la 6^{ème} à la Terminale (critère 3) voire même au-delà.

En outre, le champ des possibles pour la mathématisation est suffisamment ouvert et le jeu de questions réponses est consistant (critère 4) ; par exemple :

a) le support est un disque, ou un autre objet rond (sphère, tore etc.)

b) on choisit ou pas de négliger la taille des objets (les clous sont assimilés à des points, les fils tendus sont des segments de droite, ou pas).

c) chaque clou est relié à tous les autres, ou pas

d) les clous sont placés de manière régulière sur le bord du disque ou non
 e) il existe ou il n'existe pas de points communs à plus de deux cordes etc.
 Selon les valeurs prises par les variables indiquées, on aboutit à des problèmes mathématiques différents ; toutes ces variables ont donné lieu à des questions pertinentes d'élèves. »

Comme explicité au paragraphe 1-2-2, prenant en compte les échanges de questions-réponses des élèves (accessibles sur un forum) et l'analyse préalable des choix de mathématisation possibles, une relance est élaborée par les membres du groupe et signée par l'enseignant-chercheur du groupe ResCo, dans le but de fixer des choix en les motivant et d'orienter la recherche vers un problème mathématique commun. Voici la relance élaborée par le groupe ResCo pour le problème de *L'artiste* :

Montpellier, le 24 janvier 2010
 Le problème de l'Artiste

Pistes pour poursuivre la recherche
 Bonjour à tous et à toutes,
 Dans toutes les classes, vous avez déjà bien travaillé sur le problème de l'Artiste que nous vous avons proposé et plusieurs pistes possibles ont été envisagées.
 On voudrait pouvoir donner une réponse précise à l'Artiste afin de l'aider à faire ses choix pour réaliser son œuvre.
 Pour cela, on se propose de traiter mathématiquement le Problème de l'Artiste.
 Dans ce but, je vous propose de considérer que :

1. Le nombre de couleurs est le nombre de zones.
2. On cherche une solution générale, c'est-à-dire qu'on cherche le nombre maximum de zones en fonction du nombre de clous.
3. Le support de l'œuvre est un disque et les clous sont répartis sur sa circonférence.
4. La taille du support est suffisante pour que l'on puisse négliger la taille des clous et l'épaisseur des fils. Par conséquent, on assimile les clous à des points, et les fils tendus à des segments de droite.

Je vous souhaite à tous et à toutes une très bonne poursuite de la recherche.
 Viviane DURAND-GUERRIER
 Université Montpellier 2-Département de Mathématiques

Figure 30 Relance du problème de *L'artiste*

Comme le précisent les auteurs, cette relance « a fixé les valeurs de ces variables afin de conduire au problème classique de régionnement du disque (on cherche le nombre maximal de zones), ceci de manière non artificielle (critère 5). » (Ibidem)

Au regard de notre problématique, nous nous sommes intéressés à l'analyse des échanges de questions et de réponses détaillée dans Ray (2013) à partir de cette fiction réaliste.

7-1-2 Synthèse des analyses et des résultats obtenus

Dans son mémoire, Ray (2013) propose de repérer la dévolution du processus de mathématisation dans la phase de questions-réponses. Nous rappelons que cette phase comprend une séance lors de laquelle une classe rédige à destination des autres classes de son groupe²⁵ les questions qu'elle se pose à propos de la fiction réaliste à résoudre. Puis lors de la deuxième séance, chaque classe répond aux questions reçues et envoie ses réponses aux classes concernées.

Pour témoigner de la dévolution aux élèves de la mathématisation, Ray analyse les réponses produites par les élèves aux questions émanant d'autres élèves à partir des indicateurs suivants :

- i1 l'élément est jugé non pertinent en regard du problème mathématique : la réponse à cette question n'a pas d'influence sur le problème.
- i2 l'élément non numérique est jugé pertinent en regard du problème mathématique : la réponse à cette question a une influence sur le problème
- i3 l'élément numérique est jugé pertinent et est retenu comme variable mathématique : le nombre dont il est question est une variable.
- i4 l'élément est jugé pertinent et est retenu comme une constante ou un invariant du problème : les élèves prennent des décisions et soumettent des choix.
- i5 les élèves ne se prononcent pas

L'expression « *élément non numérique* » réfère soit à un élément de contexte, soit à une propriété ou des relations topologiques évoquées dans la question à laquelle l'élève doit répondre, comme par exemple la position des clous, la forme du support.

L'expression « *élément numérique* » réfère quant à elle à une valeur numérique d'une grandeur considérée dans la question reçue, comme par exemple le nombre de clous ou la taille du support. L'auteur récapitule les résultats obtenus dans le tableau suivant :

²⁵ Un groupe est constitué de deux ou trois classes.

Thème	élément jugé non pertinent	élément jugé pertinent			pas de décision
		non numérique	numérique variable	constant invariant	
Métrie : taille des objets	34 %	12 %	15 %		39 %
Topologie : position des objets	5 %	7 %		51 %	44 %
Forme des objets				89 %	11 %
Confection de l'œuvre	5 %			67 %	29 %
Variables : données numériques			69 %		31 %

Figure 31 : Extrait de l'analyse de résultats de Ray (2013)

De l'analyse de ces résultats, il résulte pour l'auteur qu'une dévolution du processus de mathématisation a eu lieu lors de la phase d'échanges de questions et de réponses. Il s'appuie en particulier sur le fait que les résultats montrent que les élèves ont pris des décisions concernant les éléments retenus comme pertinents et jugés soit constants, soit sans influence sur le problème.

« Sans qu'un modèle ne soit imposé, un travail sur la représentation des objets réels a fait émerger plusieurs candidats-modèles (même s'ils restent incomplets et pour la plupart implicites). »(Ray, 2013, p.39)

7-1-3 Ce que nous en retenons pour notre étude

Les indicateurs choisis dans cette étude montrent que l'élève questionne la pertinence du fragment de réalité choisi par d'autres élèves, ce fragment de réalité pouvant renvoyer soit à un élément de contexte, soit à des relations métriques ou topologiques. Nous considérons que ces questionnements permettent d'envisager un traitement mathématique, et par conséquent, que les indicateurs choisis permettent de mettre en évidence la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale. (cf. la définition de la mathématisation horizontale au paragraphe 4-4-1). Nous retenons pour notre étude que la phase des questions-réponses permet de passer d'une fiction réaliste à un problème susceptible d'un traitement mathématique en vue de la construction d'un modèle mathématique.

Nous retenons également la pertinence de s'appuyer sur des indicateurs montrant que les élèves choisissent des fragments de réalité sur lesquels ils se questionnent pour envisager un traitement mathématique. De tels indicateurs nous semblent utilisables dès l'analyse de la phase de la rédaction des questions. Par exemple, une question du type « *Quelle est la taille du support ?* »

montre un travail de mathématisation horizontale dans la mesure où elle traduit un choix de fragment de réalité par l'élève. Ainsi, nous envisageons d'analyser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves, dans un premier temps à partir des questions produites par les élèves et dans un second temps à partir de la production de leurs réponses.

Il nous semble également important que les indicateurs pour les réponses ne se réduisent pas à révéler une dévolution aux élèves d'un travail relevant uniquement de la mathématisation horizontale. En effet, notre étude épistémologique a montré que distinguer ces deux aspects de la mathématisation n'implique pas de les travailler indépendamment. Nous pensons pertinent d'ajouter un indicateur pour les réponses produites portant explicitement sur la mathématisation verticale afin de mieux prendre en compte le travail des élèves lors des allers retours éventuels entre ces deux mathématisations.

La phase de questions-réponses semble une modalité de mise en œuvre qui va nous permettre de faire vivre le premier axe horizontal de notre schéma du processus de modélisation que nous rappelons ci-après. La définition d'indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale et verticale pour la phase de questions puis pour la phase de réponses devraient nous permettre d'analyser les conditions de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

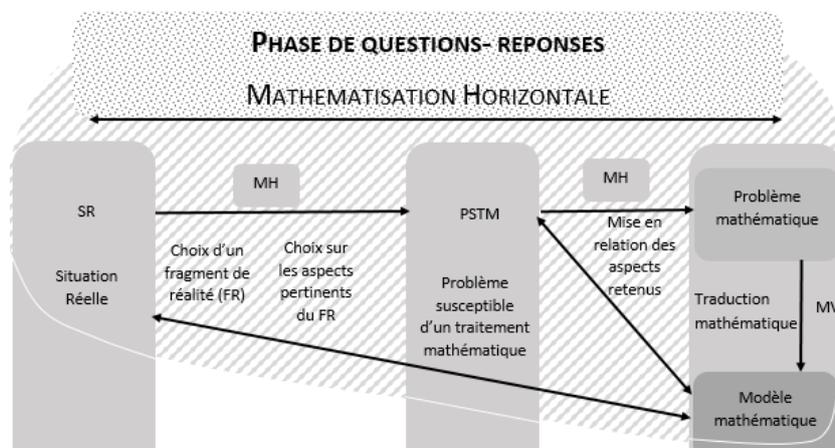


Figure 32 : Lien entre la modalité de la phase de questions-réponses et le schéma du processus de modélisation mathématique

7-2 Notre pré expérimentation en 2013-2014

Dans le cadre de la session ResCo de 2013-2014, nous avons mis à profit la situation proposée par ResCo et mise en œuvre au sein de leur dispositif pour en faire une étude du point de vue

de notre problématique de recherche. Ceci a joué pour nous le rôle de pré-expérimentation visant à nourrir les analyses a priori de la situation que nous envisageons d’élaborer afin de la proposer au groupe ResCo pour la session collaborative de l’année suivante. Dans ce paragraphe, nous empruntons des éléments de notre publication dans les actes de la CIEAEM₆₆ (Yvain & Gardes 2014) et de notre publication dans les actes de la 18^{ème} école d’été de didactique des mathématiques (Yvain, 2016).

*7-2-1 Premiers résultats sur la dévolution de la
mathématisation horizontale*

Le problème « *les fuites à Fukushima* » a été proposé à plus de 2000 élèves (du collège au lycée) en 2014 dans le cadre du dispositif ResCo.

L’énoncé est le suivant



IREM 2013-2014
Résolution de problèmes
Etienne Mann
etienne.mann@math.univ-montp2.fr

Fuites à Fukushima

Sous la piscine de refroidissement du réacteur 4 de la centrale nucléaire de Fukushima, des ingénieurs de Tepco dirigés par Toshio Nishizawa, constatent l’existence de micro-fuites d’eau contaminée par du césium 137 hautement radioactif. Ils décident alors d’envoyer un robot pour aspirer ces gouttes radioactives. Hélas, son module de guidage a été endommagé par la radioactivité présente dans ce lieu, il avance alors par déplacements de 10 cm dans les directions Est, Ouest, Nord ou Sud qu’il choisit au hasard. Les ingénieurs ont seulement la certitude que le robot démarre de sa base de chargement et qu’en raison de son autonomie, il ne pourra faire qu’un nombre limité de déplacements. Quelles sont les zones qui seront nettoyées ?

Figure 33 : Enoncé de la fiction réaliste “Fuites à Fukushima”

UNE FICTION REALISTE

Le problème mathématique sous-jacent est celui « des marches aléatoires » (Le lecteur trouvera en annexe 7 des éléments de solutions du traitement mathématique de la situation, rédigés par Etienne Mann, le chercheur mathématicien associé au groupe ResCo en 2013-2014).

Ce problème évoque une situation concrète qui pourrait se produire dans le monde réel, bien que ce ne soit pas un problème réel. L’énoncé ne fait pas référence à un cadre mathématique et plusieurs modèles mathématiques sont envisageables. L’analyse a priori conduite au sein du

groupe ResCo a mis en évidence le fait que le champ des possibles pour la mathématisation est suffisamment ouvert et que le jeu des questions/réponses est a priori consistant ce qui est confirmé par les observables recueillis (voir ci-après). Par exemple, la piscine est rectangulaire ou d'une autre forme (circulaire, elliptique, etc.), les gouttes radioactives sont réparties uniformément sur la surface de la piscine, ou davantage concentrées à certains endroits, le robot se déplace aléatoirement ou avec un schéma précis à partir de sa base, etc. Selon les valeurs prises par ces paramètres, on aboutit à des problèmes mathématiques différents. Ceci nous permet de considérer que le problème remplit les critères d'une fiction réaliste rappelés au paragraphe 7-1-1.

UNE ACTIVITE EFFECTIVE DE MATHEMATISATION HORIZONTALE DANS LES ECHANGES ENTRE ELEVES

Lors de la phase des questions et des réponses, les élèves peuvent identifier les grandeurs pertinentes, s'interroger sur l'influence de certains paramètres sur les candidats-modèles, et éventuellement, faire des choix parmi les modèles identifiés comme possibles. Nous présentons ci-dessous quelques exemples de questions et réponses d'élèves qui témoignent d'une certaine dévolution de la mathématisation horizontale.

Exemple 1 (élèves de quatrième)

Question : Est-ce que cela refuit après son passage et en combien de temps ?

Réponse : On suppose qu'une zone ne peut pas être contaminée de nouveau après nettoyage : d'ailleurs la question du sujet suggère cela très fortement. Si les zones étaient contaminées de nouveau, la résolution du problème serait impossible.

La question posée a pour objectif de préciser l'énoncé et est jugée nécessaire par les élèves pour s'engager dans la résolution du problème. Pour répondre à la question, les élèves font un choix (« *on suppose* ») en s'appuyant sur l'énoncé du problème, la formulation de la question et leur propre représentation du problème. Ils se projettent dans la résolution du problème et jugent que sans ce choix, il serait impossible à résoudre, ce qui nous semble pouvoir être interpréter soit comme un effet de contrat didactique relevant du fait qu'en contexte scolaire, pour un élève,

on ne peut pas rencontrer des problèmes qu'on ne sait pas résoudre, soit comme une hypothèse simplificatrice pour poursuivre la recherche, pratique s'apparentant à P_{11} .²⁶

Exemple 2 (élèves de sixième)

Questions : Quelle est la forme de la piscine ? Quelles sont les dimensions ?

Réponse : On peut supposer que la piscine est de forme rectangulaire, de grande taille et profonde comme on a vu sur Internet (une très grande piscine municipale).

Les élèves posent une question sur des paramètres (forme et dimensions de la piscine) qui sont des variables mathématiques du problème. La réponse des élèves consiste à faire un choix de mathématisation pour modéliser la piscine, en fixant la forme de la piscine (un rectangle) et en apportant quelques éléments sur ses dimensions sans toutefois les fixer.

Exemple 3 (élèves de terminale)

Question : Où se situe la base de chargement par rapport à la forme et à la taille de la zone ?

Réponse : On considère que la zone est rectangulaire de longueur 30m et de largeur 15m (suite à des recherches sur la taille d'une piscine de refroidissement) et que la base de chargement est située au centre de celle-ci : ce choix nous arrange pour la suite de la recherche. Le robot serait un carré surmonté d'un réservoir permettant le stockage des gouttes.

La question posée est relative à un paramètre (lieu de la base de chargement) qui est une variable mathématique du problème. La réponse appelle à faire un choix de mathématisation qui a une influence sur la modélisation du déplacement du robot. Dans leur réponse, les élèves font de véritables choix (« *on considère* ») en fixant la forme et les dimensions de la piscine puis le lieu de la base de chargement. Ces choix sont pris, d'une part à partir d'éléments réels sur la taille d'une piscine de refroidissement (trouvés grâce à un moteur de recherche), d'autre part à partir de leur représentation du problème.

²⁶ P_{11} Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

*PREMIERS RESULTATS SUR LA DEVOLUTION DE LA MATHEMATISATION HORIZONTALE*²⁷

La place de la phase de questions-réponses dans le dispositif déclenche le travail de mathématisation horizontale. Lors de la phase des questions, les élèves commencent à choisir des fragments de réalité sur lesquels ils se questionnent. Ces choix de segments de réalité puis leur description sont sous la responsabilité des élèves et relèvent de la mathématisation horizontale. Certaines questions qui émergent ne sont pas nécessairement mathématiques, mais leur étude dans la phase des réponses engendre des questions mathématiques sous la responsabilité des élèves les amenant non seulement à comprendre la nécessité de faire des choix, mais aussi à opérer des choix.

Formuler des réponses aux questions semble permettre aux élèves de mieux identifier les grandeurs pertinentes et les éléments de contexte à prendre en compte pour élaborer un modèle mathématique.

L'analyse de ces quelques échanges de questions et de réponses montre qu'une dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale a effectivement eu lieu lors de cette première phase de recherche.

Lors de cette pré expérimentation nous avons suivi une jeune professeure de mathématiques enseignant en collège lors de la mise en œuvre de la phase de questions-réponses dans une classe de troisième. Cette enseignante n'avait pas suivi la formation ResCo inscrite au Plan Académique de Formation. Nous lui avons cependant proposé de participer à la session collaborative de ResCo en 2013-2014 et lui avons remis les documents support du stage ResCo. L'enseignante observée, a organisé la séance consacrée aux questions de la manière suivante :

- Lecture individuelle de l'énoncé (« *Les fuites à Fukushima* » Figure 33) puis faire noter les questions que chacun élève se pose.
- En groupes de 4, sélectionner deux questions à envoyer aux autres classes en argumentant les choix.
- Chaque groupe donne les deux questions choisies. Les autres peuvent donner leur avis sur ces choix. L'enseignante écrit sur le forum les questions sélectionnées.

Pour la séance relative à la rédaction des réponses, l'enseignante a proposé un travail de groupe dans lequel chaque groupe devait répondre à deux questions reçues. La mise en commun a

²⁷ En faisant l'hypothèse que l'enseignant de la classe laisse la responsabilité aux élèves de la phase de questions-réponses.

consisté à écrire sur le forum les réponses apportées par les groupes en demandant l'avis de la classe à chaque fois.

Nous avons relevé plusieurs obstacles potentiels pour cette enseignante à la mise en œuvre de la phase de questions-réponses :

- La gestion du temps :

Le dispositif ResCo contraint l'enseignante à envoyer lors de la première séance les questions posées par sa classe à destination des deux autres classes avec lesquelles elle travaille (via un forum) et la deuxième semaine, à répondre à celles reçues.

A plusieurs reprises, l'enseignante demande à la classe de « se dépêcher » en utilisant des expressions du type « allez vite », « vite dépêchez-vous », « dépêchez-vous il vous reste 10 minutes » Lors d'un entretien à l'issue de cette phase de questions-réponses, l'enseignante s'est déclarée « satisfaite » principalement en raison de sa bonne gestion de temps :

« L'organisation c'était plutôt pas mal, on a eu le temps de faire tout ce qu'on voulait [...] au final on a fini comme il fallait, donc je suis plutôt contente »

De même lors d'un entretien à l'issue de la troisième séance qui consiste à prendre connaissance des réponses envoyées par les deux autres aux questions posées lors de la séance 1 et à prendre connaissance de la relance envoyée par ResCo, l'enseignante exprimera son insatisfaction en raison d'un manque de temps :

« Ça a pris un peu de temps pour lire les réponses des autres classes et la relance qui est assez longue »

L'enseignante ne semble pas s'être appropriée, voire méconnaît l'enjeu de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation. Par exemple, lors de la réception des réponses des autres classes, elle demande aux élèves de lire chaque réponse et éventuellement de faire des commentaires si les élèves « trouvent des réponses bizarres », ou encore lorsqu'un élève dit « mais pourquoi on a posé ces questions si après on les contredit, c'est pas logique ! », l'enseignante éludera la question laissant les élèves plutôt perplexes. De même lorsqu'un élève prend la parole pour dire que la réponse reçue est fautive, l'enseignante répond par « ah, bon on va voir ce que vont dire les autres [fait référence aux réponses de l'autre classe], question suivante ! ». Nous n'entendons pas l'enseignante mettre en évidence la nécessité de faire des choix pour élaborer un modèle mathématique... Lors d'un entretien avec elle après la troisième séance, elle déclare que « les réponses des autres classes, c'était pas sûr, y avait rien, enfin on ne s'en est pas resservi

après, donc bon, c'était...[silence] ». L'enseignante ne proposera pas aux élèves de bilan sur l'intérêt et le rôle de la phase de questions-réponses pour la résolution de la situation.

Elle aurait peut-être pu utiliser les réponses reçues suivantes à certaines questions de ses élèves pour mettre en évidence la pertinence du fragment de réalité choisi (exemple 1) ou pour montrer la nécessité de faire des choix pour envisager un traitement mathématique de la situation (exemple 2) :

Exemple 1 :

Question envoyée par la classe de l'enseignante : *Combien de temps dure l'autonomie du robot ?*

Réponse reçue : *On ne peut pas savoir, cela dépend du temps de chargement. Le temps de déplacement n'est pas important ce qui importe c'est le nombre de déplacements.*

Exemple 2 :

Question envoyée par la classe de l'enseignante : *Quelle est la forme de la base du robot ?*

Réponse reçue : *Nous ne sommes pas d'accord, carré, rectangulaire ou ronde !*

7-2-2 Ce que nous en retenons pour notre étude

Cette pré expérimentation conduite au sein du dispositif ResCo a mis en évidence l'intérêt potentiel d'un questionnement explicite par les élèves sur le problème initial afin d'envisager de pouvoir traiter le problème avec des outils mathématiques. L'analyse des productions des élèves lors de la phase de questions-réponses montre des traces de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale sous l'hypothèse que l'enseignant de la classe laisse la responsabilité aux élèves de la phase de questions-réponses. Le suivi de l'enseignante engagée dans le dispositif ResCo nous a interrogées quant aux obstacles liés à l'enseignement de la mathématisation horizontale. Le dispositif semble dans une certaine mesure jouer le rôle de levier en prenant en charge la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour cette enseignante.

Cette pré expérimentation nous a confirmé que la phase de questions-réponses favorise la dévolution de la mathématisation horizontale, le dispositif ResCo semblant jouer le rôle de levier permettant de lever des obstacles potentiels liés aux pratiques enseignantes ordinaires.

Il nous semble pertinent d'envisager deux volets pour notre étude.

Dans un premier volet, nous proposons une étude spécifique sur les conditions et les contraintes sur la situation et le dispositif à proposer dans les classes afin de permettre la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, en ajoutant la perspective d'une éventuelle transposition des pratiques expertes dégagées en partie 2.

Dans un deuxième volet, le rôle de l'enseignant étant essentiel pour que la richesse potentielle d'un dispositif didactique soit actualisée dans la classe, nous identifierons d'une part des obstacles et des conditions, d'autre part des leviers quant aux pratiques enseignantes relevant de l'enseignement de la mathématisation horizontale.

Volet 1 : La dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves

Sommaire du volet 1 de la partie 3

Présentation du volet 1

Chapitre 8 Elaboration et analyse a priori de la fiction réaliste « L'arbre » du point de vue de la mathématisation horizontale

Chapitre 9 Analyse a posteriori de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale

Conclusions du volet 1 de la partie 3

Présentation du volet 1

En appui sur l'étude préliminaire, nous faisons l'hypothèse que le type de fictions réalistes proposées par le groupe ResCo favorise la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale. Néanmoins, dans la perspective de favoriser la transposition des pratiques expertes dégagées dans la partie 2, nous avons choisi pour l'expérimentation dans le cadre de notre thèse, d'élaborer une situation autour de l'adaptation d'une problématique de modélisation professionnelle dans le domaine des sciences du vivant. Ce choix a été retenu par les membres du groupe ResCo pour la session 2015-2016. En d'autres termes, un problème mathématique (et ses variantes) sous-jacent à la fiction réaliste ne guidera pas l'élaboration de l'énoncé.

Le chapitre 8 fait l'objet de l'analyse de cette élaboration. Nous montrons comment nous avons fait évoluer les caractéristiques d'une fiction réaliste (Ray 2013) afin de les adapter à des situations construites à partir d'une adaptation d'une problématique professionnelle en modélisation (l'étude de la croissance des arbres, dans notre cas). Nous présentons l'énoncé et son analyse a priori du point de vue de la mathématisation horizontale, ainsi que les indicateurs de dévolution de cette mathématisation que nous avons élaborés en appui sur l'étude épistémologique et l'étude préliminaire.

Cependant, le fait de faire travailler des élèves sur une fiction réaliste n'est pas suffisant pour garantir la dévolution de la mathématisation horizontale. La manière dont on va faire vivre aux élèves l'activité de modélisation y joue un rôle majeur. Nous avons déjà vu, dans l'étude préliminaire, que la phase de questions-réponses du dispositif ResCo est une modalité de mise en œuvre permettant de faire vivre le premier axe horizontal de notre schéma du processus de modélisation. Les autres modalités de mise en œuvre du dispositif peuvent s'articuler avec notre schéma de la manière suivante :

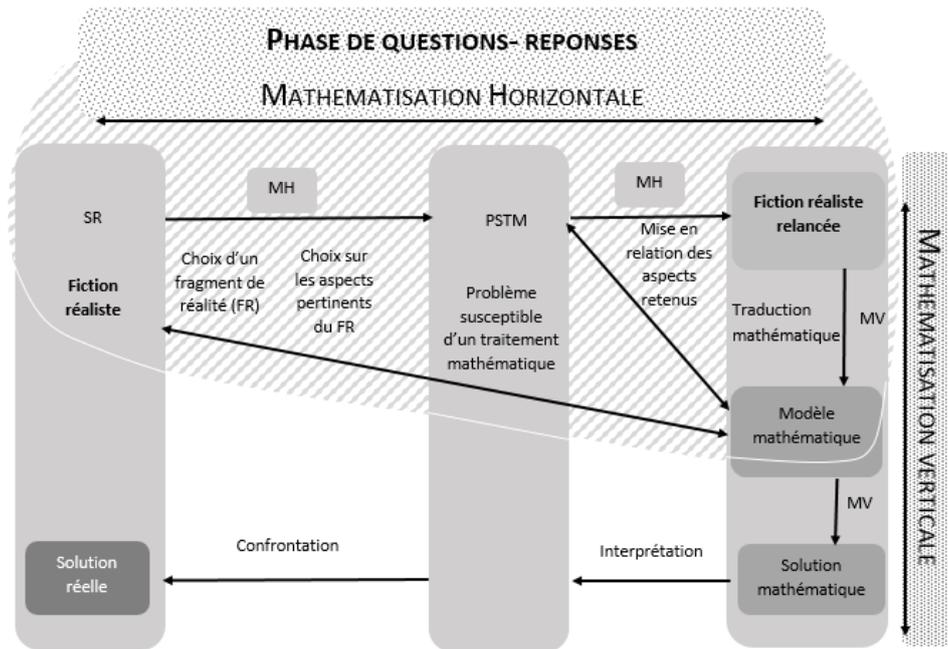


Figure 34 : Articulation entre les modalités de mise en œuvre ResCo et le schéma du processus de modélisation mathématique

En considérant les observations naturalistes faites depuis plusieurs années au sein du groupe ResCo, et l'étude préliminaire, nous faisons l'hypothèse que la phase de questions-réponses favorise la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves leur permettant de comprendre la nécessité de faire des choix pour pouvoir s'engager dans un traitement mathématique du problème proposé en vue d'élaborer un modèle mathématique. Via la plateforme du groupe ResCo, nous avons recueilli les productions des soixante classes participant à cette session. Dans le cadre de la méthodologie de l'ingénierie didactique, nous proposons, au chapitre 9 une analyse a posteriori de la phase de questions-réponses et en dégageons des résultats.

Chapitre 8 : Elaboration et analyse a priori de la fiction réaliste

« L'arbre » du point de vue de la mathématisation horizontale

Nous envisageons d'élaborer une fiction réaliste, dans le contexte des sciences du vivant, qui relève d'une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation (FRAPPM) dans la perspective de favoriser la transposition à la classe des pratiques expertes invariantes relevant de la mathématisation horizontale (cf. 6-5-1). Dans ce chapitre nous montrons en quoi et comment, cela nous a mené à faire évoluer les caractéristiques d'une fiction réaliste au sens de Ray (2013), précisées dans l'étude préliminaire. À partir de la genèse de l'élaboration de notre FRAPPM, nous explicitons comment les caractéristiques que nous avons définies pour une telle situation, ont piloté les évolutions du texte de l'énoncé de la FRAPPM. Puis, pour la version finale de cet énoncé, nous explicitons et motivons le choix des variables didactiques et de leurs valeurs. Pour terminer ce chapitre, nous proposons une analyse a priori de la FRAPPM élaborée, du point de vue de la mathématisation horizontale, en trois étapes :

- une catégorisation a priori des questions et réponses possibles que des élèves pourraient produire en résolvant cette FRAPPM.
- une proposition d'indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase d'élaboration des questions.
- une proposition d'indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase d'élaboration des réponses.

8-1 Les caractéristiques d'une fiction réaliste selon notre étude

Dans la partie 2, nous avons étudié d'un point de vue épistémologique la question de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique relevant de la mathématisation horizontale. Dans un contexte des sciences du vivant, lors du passage d'une

situation réelle au monde mathématique, nous avons dégagé trois pratiques expertes invariantes dont nous envisageons la transposition à la classe. Ces pratiques relèvent principalement de la nécessité de faire des choix pour envisager un traitement mathématique d'une situation relevant d'une problématique de modélisation dans les sciences du vivant. Nous avons acté qu'une phase de questions-réponses est une modalité favorisant le passage d'une situation réelle (SR) à un problème mathématique via l'étape intermédiaire « problème susceptible d'un traitement mathématique (PSTM) ». Nous avons montré que ces étapes intermédiaires qui relèvent de la mathématisation horizontale, sont susceptibles de permettre la transposition des pratiques expertes invariantes identifiées. Ainsi, en appui sur notre schéma du processus de modélisation (Figure 28, p.108), une FRAPPM doit permettre aux élèves de reconnaître la nécessité de recourir à une modélisation pour répondre au problème posé et de se questionner sur le système à modéliser. Elle doit permettre aux élèves de prendre conscience de la nécessité de faire des choix pour envisager un traitement mathématique (passage de la situation réelle au PSTM). Les élèves doivent ensuite prendre en compte la question posée dans la FRAPPM pour passer du PSTM au problème mathématique à partir duquel ils vont construire un modèle mathématique. Ils doivent prendre conscience de la nécessité d'un travail mathématique au sein du modèle choisi pour obtenir des éléments de réponses aux questions qui ont émergé lors des différentes étapes intermédiaires dans la perspective d'aboutir à une solution ou des éléments de solution dans la SR.

En résumé, une FRAPPM doit répondre au maximum aux critères suivants que nous avons présentés lors d'une communication à la CIEAEM⁶⁹ (Yvain 2018, p.124):

- amener les élèves à se questionner sur le système à modéliser - C₀
- Faire prendre conscience aux élèves:
 - de la nécessité de recourir à une modélisation pour répondre au problème - C₁
 - de la nécessité de faire des choix pour envisager un traitement mathématique - C₂
 - de l'importance de la question posée dans la construction du modèle - C₃
 - que le travail de modélisation nécessite un travail mathématique au sein du modèle choisi pour apporter des réponses aux questions posées - C₄

Souhaitant proposer notre FRAPPM au sein du dispositif ResCo, nous nous sommes assurées qu'un énoncé remplissant les critères C₀-C₁-C₂-C₃-C₄ satisfaisait également les spécificités d'une fiction réaliste telles que posées par Ray (2013) et repris par Aldon & al. (2014), que nous avons explicitée dans l'étude préliminaire et que nous rappelons ci-dessous afin de s'y référer explicitement dans la suite :

- « 1. La contextualisation doit dissimuler suffisamment le problème mathématique pour qu'il ne soit pas identifié immédiatement par les élèves (autrement dit, on ne va pas se contenter d'un simple habillage du problème).
 2. Une exploration par un moteur de recherche classique ne doit pas conduire immédiatement au problème ; le problème doit donc être énoncé sous une forme originale.
 3. Le problème doit pouvoir être posé avec profit à des élèves dès le début du collège jusqu'à la fin du lycée.
 4. Le champ des possibles pour la mathématisation du problème est suffisamment ouvert pour que le jeu des questions réponses soit riche et pertinent ; autrement dit, différents problèmes mathématiques peuvent émerger, que les élèves peuvent tous envisager selon le niveau de classe.
 5. La relance doit pouvoir être comprise par les élèves comme répondant à certaines de leurs questions et comme fixant de manière non artificielle certains des éléments du problème. » (Ibid p.5)

Envisageant d'élaborer une FRAPPM,

- pour amener les élèves à se questionner sur le système à modéliser - C₀ et leur faire prendre conscience de la nécessité de recourir à une modélisation pour répondre au problème - C₁, nous considérons qu'une FRAPPM répond au critère 1 d'Aldon & al.
- pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de faire des choix lors de la modélisation - C₂ et de l'importance de la question posée dans la construction du modèle - C₃, nous considérons qu'une FRAPPM satisfait le critère 4 d'Aldon & al.
- en adaptant une problématique de modélisation professionnelle sous une forme inédite accessible dès la sixième (11 ans), nous considérons qu'une FRAPPM satisfait les critères 2 et 3 d'Aldon & al.
- pour favoriser la mathématisation horizontale, le jeu de questions –réponses devrait être suffisamment consistant pour donner lieu à une relance (voir paragraphe 1-2-2) au sein du dispositif ResCo, ce qui nous amène à considérer que le critère 5 est satisfait.

En conclusion, une FRAPPM répondant aux caractéristiques C₀-C₁-C₂-C₃-C₄ satisfait également les critères d'une fiction réaliste définis par Aldon & al.

La spécificité de notre proposition réside dans le choix de concevoir une fiction réaliste comme une adaptation d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles et dans le choix de variables didactiques favorisant la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale afin de privilégier a priori la transposition à la classe des pratiques invariantes que nous avons identifiées au chapitre 6.

En résumé, nous caractérisons une fiction réaliste qui relève d'une problématique de modélisation professionnelle de la manière suivante (Yvain & Modeste 2018, p.292-293) :

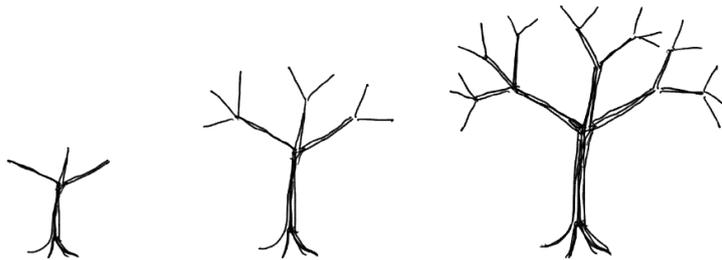
- F₁ : une situation a priori non mathématique,
- F₂ : un contexte fictif mais réaliste
- F₃ : la nécessité d'une phase de modélisation pour une prise en charge efficace de la situation
- F₄ : la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits
- F₅ : la fiction réaliste est conçue comme une adaptation d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles
- F₆ : les variables didactiques (Brousseau, 1998) de la fiction réaliste sont choisies de manière à favoriser l'entrée dans la mathématisation horizontale.

Figure 35 : Les caractéristiques d'une FRAPPM

8-2 Genèse de l'élaboration de la situation de la fiction réaliste « L'arbre »

Nous avons fait le choix d'adapter une problématique de modélisation historiquement et épistémologiquement importante dans les sciences du vivant : La modélisation de la croissance des végétaux (Varenne, 2007). Nous avons écrit un premier énoncé : il s'agit de prédire la croissance d'un arbre à partir d'informations sur ses premières années de croissance données par des schémas.

Au jardin des plantes, des scientifiques ont planté un arbre exotique inconnu. Pour l'étudier, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015

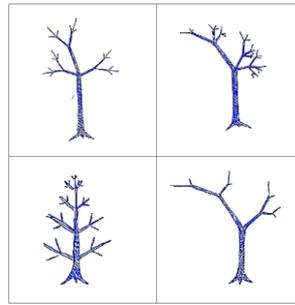
Les botanistes aimeraient anticiper la croissance de l'arbre dans 10 ans pour savoir si la serre sera assez grande ; cette serre, en verre, est un cube de 8 m de côté. Aidez-les à prévoir ce qui se passera dans 10 ans.

Figure 36 : Première version de la fiction réaliste « L'arbre »

Les principales variables didactiques de cette version sont :

- V1 : Schéma en 2D versus 3D
- V2 : Nombre de schémas
- V3 : Forme de l'arbre
- V4 : Nombre de branches
- V5: Choix de croissance régulière ou non
- V6 : Dimensions de l'arbre
- V7 : Forme de la serre

Nous avons fait le choix de proposer des dessins d'arbres en 2D. Il s'agit là d'un choix important de variable didactique (V1), qui maintient, à notre avis le problème dans un cadre suffisamment réaliste tout en permettant une activité de modélisation de la sixième à la terminale. Le nombre de schémas retenus (V2) est de trois. De notre point de vue, ce nombre est suffisant pour permettre aux élèves de faire des choix sur les règles de croissance des différents éléments de l'arbre. Nous avons réfléchi à différentes propositions de formes de l'arbre (V3) en étudiant leurs influences sur les hypothèses potentielles de modélisation, comme par exemple :



Notre choix s'est arrêté sur une forme qui ne ressemble pas à une forme d'un arbre connu (ou facilement reconnaissable) pour éviter une éventuelle recherche sur un moteur de recherche (ou autre) sur la croissance de l'arbre potentiellement reconnu. La forme choisie présente une croissance asymétrique pour favoriser le questionnement des élèves autour de la prévision de la croissance de l'arbre. Le choix de faire apparaître deux ou trois nouvelles branches (V4) favorise de notre point de vue l'élaboration de choix par les élèves au niveau de la croissance de l'arbre. Les longueurs des troncs et branches (V5) ont été choisies pour questionner un éventuel choix d'un modèle de croissance régulière. Après analyse de cette première version, dans un premier temps, nous avons décidé qu'il serait opportun de donner des informations sur la valeur de la variable didactique V6 « dimensions de l'arbre » dans la mesure où, le manque de données de mesures sur les schémas pourrait engendrer des questions, certes justifiées, sur les dimensions de l'arbre mais ne privilégierait la mobilisation de la pratique P_{13} ²⁸, ne favorisant pas en cela, l'appropriation rapide du système à modéliser (critère C_0 ²⁹). La donnée d'une échelle nous semble alors pertinente.

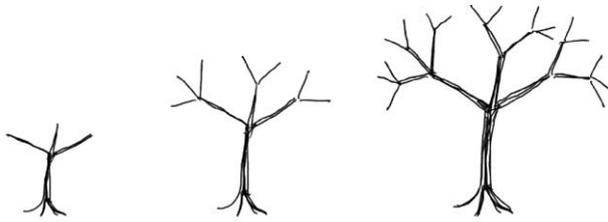
Dans un second temps, nous avons considéré la variable didactique V7 « forme de la serre » ainsi que la donnée d'une valeur numérique sur cette variable comme non pertinentes, dans le sens où, bien qu'elles favorisent une entrée rapide dans la mathématisation verticale à propos de la serre, elles ne favorisent pas un travail de mathématisation horizontale sur la croissance de l'arbre mais plutôt sur la serre. Les élèves seraient amenés à sélectionner le fragment de réalité « serre » sur lequel ils se questionneraient au dépend d'un questionnement portant sur la prévision de la croissance de l'arbre.

Ces considérations nous ont menées à l'élaboration de la proposition 2 suivante:

²⁸ La pratique P_{13} relève de la quantification à savoir associer des propriétés à des mesures

²⁹ C_0 : amener les élèves à se questionner sur le système à modéliser

Au jardin des plantes, des scientifiques ont planté un arbre exotique inconnu. Pour l'étudier, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015, le tronc en 2013 mesure 1m

Les botanistes aimeraient anticiper la croissance de l'arbre dans 10 ans car ils veulent construire une serre en verre assez grande pour le contenir. Aidez les botanistes à la construction de cette serre.

Figure 37: Deuxième version de la fiction réaliste « L'arbre »

Dans cette proposition nous avons ajouté la variable didactique V8 « donnée d'une échelle » et retiré V7 comme expliqué plus haut.

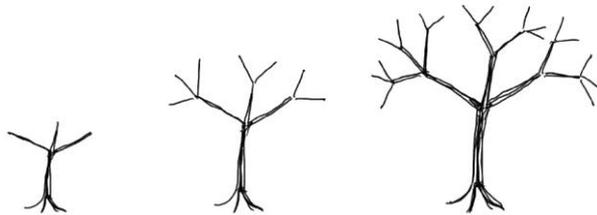
Nous nous sommes interrogées sur la formulation de la question : ainsi posée, la question pourrait orienter le questionnement des élèves sur la serre et ainsi les éloigner dans un premier temps de la question sur la modélisation de la croissance de l'arbre. Notre objectif étant de transposer une problématique professionnelle sur la croissance des végétaux, il nous est apparu important de modifier la question posée afin de satisfaire davantage le critère C_3 ³⁰.

Ainsi, nous avons élaboré la proposition 3 suivante :

³⁰ C_3 : Faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de l'importance de la question posée dans la construction du modèle

Dans une serre du jardin des plantes, les scientifiques ont planté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce, pour l'étudier.

Les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015 (1 cm sur le dessin correspond à 0,5 m)

Les botanistes aimeraient anticiper la croissance de l'arbre dans 10 ans pour savoir si la serre sera assez grande. Comment peut-on prévoir la taille de l'arbre, sa forme, ses dimensions ? Que prévoyez-vous ?

Figure 38 : Troisième version de la fiction réaliste « L'arbre »

Dans cette proposition nous avons modifié

- la manière d'introduire la variable didactique V8 « la donnée d'une l'échelle » :

La raison principale est que telle que nous l'avions introduite dans la proposition 2 (*le tronc en 2013 mesure 1 m*) cela sélectionnait de fait une partie de l'arbre (le tronc) et en cela un fragment de réalité. Souhaitant favoriser au maximum la dévolution aux élèves du choix du/des fragment/s de réalité à considérer au regard de la question posée, il nous a semblé plus pertinent de donner une échelle globale pour les schémas sous la forme 1 cm représente 0,5 m. Cependant, nous avons trouvé un obstacle à cette formulation : les enseignants ne feront peut-être pas des photocopies dans un même format. Or, la résolution étant collaborative, cela pourrait engendrer des difficultés de communication entre les classes en raison des valeurs numériques des dimensions calculées à partir de mesures prises sur les schémas. Nous avons donc décidé de réfléchir à formuler la donnée de l'échelle de manière à contourner cet obstacle.

- La teneur de la question posée

Pour les raisons évoquées dans notre analyse de la proposition 2, nous avons choisi de poser une question qui favoriserait un questionnement de l'élève sur la croissance de l'arbre. Mais,

ainsi écrite, cette proposition orientait trop directement les élèves sur les grandeurs pertinentes à identifier pour modéliser la croissance de l'arbre dans la mesure où nous avons écrit explicitement les mots taille, forme et dimensions (de l'arbre), ne favorisant pas en cela la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Afin de respecter davantage notre critère C₃, nous avons retravaillé la nature de la question à poser.

A partir de ces analyses nous avons modifié la proposition 3 de la manière suivante :

L'arbre

Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ?

Figure 39 : Version finale de la fiction réaliste de type FRAPPM « L'arbre »

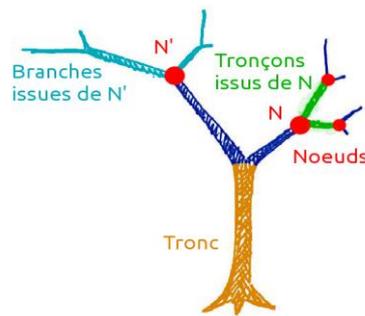
Cette proposition conçue comme une adaptation d'un problème de modélisation de la croissance des végétaux en sciences de la vie, est l'énoncé retenu pour notre fiction réaliste. Nous montrons dans la suite en quoi elle répond à nos critères C₀-C₁- C₂-C₃- C₄.

Pour faire cette analyse, nous commençons par quelques définitions qui ne relèvent pas d'un vocabulaire officiel ou à donner aux élèves, mais qui sont simplement nécessaires à la clarté de la présentation de l'analyse présentée.

- Nous appelons *tronçon* une partie de l'arbre rectiligne et sans bifurcation à ses extrémités ou sur sa longueur (à un moment donné en tout cas).
- Nous appelons *nœud* les endroits de l'arbre d'où des tronçons se séparent. Dans ce cas, on dira qu'un tronçon *produit* d'autres tronçons (ou *se sépare*) s'il se partage alors que

l'on s'éloigne du point d'enracinement de l'arbre. Le *tronc* est le tronçon issu du point d'enracinement de l'arbre.

- Les *tronçons issus d'un nœud* sont les tronçons se situant justes après le nœud quand on s'éloigne du point d'enracinement de l'arbre.
- Une *branche issue d'un tronçon T* est l'ensemble des tronçons se trouvant à la suite de T (T y compris) en s'éloignant du point d'enracinement. Les *branches issues d'un nœud N* sont les branches issues des tronçons issus de N.



Nous précisons que lorsque nous parlons de « l'arbre » dans notre analyse, il s'agit de l'arbre du système modélisé par les schémas.

- L'échelle de temps lent de croissance de l'arbre et la trop grande complexité du système motivent le besoin de prévision et la nécessité de produire un modèle. (C₀-C₁)
- Plusieurs hypothèses sur la croissance de l'arbre peuvent être faites ce qui donne lieu à différentes modélisations. Il est donc nécessaire de faire des choix lors du processus de modélisation. (C₂-C₃), comme par exemple, des choix sur le nombre de tronçons issus d'un tronçon d'une année sur l'autre, sur l'angle de croissance par rapport au tronçon précédent, sur la longueur des tronçons qui poussent au même moment, sur le type de nœud dans l'arbre (doubles, triples, mixtes).
- Les choix dépendront des outils mathématiques disponibles des élèves (ou la conception qu'ils en ont). (C₃-C₄). Par exemple les élèves peuvent envisager un modèle probabiliste pour les règles de croissance des branches issues d'un nœud, ils peuvent choisir un modèle de proportionnalité pour prévoir la longueur du tronc et des branches par exemple.

En résumé, pour favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, les variables didactiques et leurs valeurs choisies sont les suivantes :

- V1 : Des schémas en 2D pour proposer un cadre suffisamment réaliste tout en permettant une activité de modélisation de la 6^{ème} à la terminale.
- V2 : Le nombre de schémas : nous en avons proposé trois. De notre point de vue, ce nombre est suffisant pour permettre aux élèves de faire des choix sur les règles de croissance des différents éléments de l'arbre.
- V3 : La forme de l'arbre (symétrique versus asymétrique): nous avons choisi une croissance asymétrique pour favoriser le questionnement des élèves autour de la prévision de la croissance de l'arbre.
- V4 : Le nombre de nouvelles branches apparaissant chaque année : nous avons choisi de faire apparaître deux ou trois nouvelles branches pour amener rapidement les élèves à faire des choix au niveau de la croissance de l'arbre.
- V5 : Les longueurs des troncs et branches : elles ont été choisies pour questionner un éventuel choix d'un modèle de croissance régulière.
- V6 : La donnée d'une échelle : afin de permettre des mesures et une prise d'information instrumentée sur les dessins.

Ces choix devraient favoriser la transposition - de la pratique **P₁₁** dans la mesure où des hypothèses simplificatrices et une identification des variables pertinentes qui influent sur la situation réelle sont nécessaires pour envisager un traitement mathématique du problème donné, - de la pratique **P₁₂** dans la mesure où le choix d'un modèle de croissance de départ peut être un modèle mathématique connu (proportionnalité) qui peut permettre aux élèves un travail de mathématisation verticale en vue de les éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P₁₁**, - de la pratique **P₁₃** étant donné que la prise d'informations instrumentée et la donnée d'une l'échelle peuvent permettre aux élèves de légitimer le choix du modèle utilisé dans le sens où cela permet une confrontation des résultats obtenus à partir de leur choix d'un modèle avec les données réelles.

8-3 Catégorisation a priori des questions

Prenant en compte que :

- la question posée dans la fiction réaliste de type FRAPPM, « Pour les aider, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 » porte sur la croissance de l'arbre,
- dans le contexte de cette fiction réaliste, il est question d'une construction d'une serre (qui motive la question posée),
- la fiction est posée dans un contexte des sciences du vivant où plusieurs paramètres peuvent entrer en jeu dans la croissance de l'arbre,

nous catégorisons a priori les questions des élèves en quatre groupes :

Groupe « modèle » : Des questions relevant d'une recherche d'un modèle de croissance de l'arbre ou d'une partie de l'arbre (tronc, branches etc.)

Groupe « paramètres extérieurs » : Des questions relevant de la recherche de facteurs extérieurs qui peuvent influencer la croissance de l'arbre et leur prise en compte dans un modèle

Groupe « Serre » : Des questions relevant de la recherche sur la serre

Groupe « Précisions » : Des questions portant sur des précisions de vocabulaire ou des demandes de précisions sur l'espèce de l'arbre.

Nous subdivisons chacun de ces groupes en sous catégories, définies à partir de la nature des questions potentielles des élèves, en nous appuyant sur les variables didactiques retenues pour élaborer la FRAPPM (cf. 8-2) et sur les pratiques invariantes relevant de la mathématisation horizontale identifiées au chapitre 6.

POUR LE GROUPE « MODELE » :

Pour ce groupe, nous définissons huit sous catégories que nous présentons ci-dessous en donnant un exemple a priori pour chacune d'entre elles :

- Catégorie 1 : La question porte sur les schémas de l'énoncé (Variable didactique V1 et V2)
Qschéma-modèle : Est-ce qu'on doit travailler en 2D ou en 3D ?

- Catégorie 2 : La question porte sur la règle de formation des branches (Variables didactiques V3 et V4)
 $Q_{\text{formation}_{\text{branches}}}$ - modèle: Comment savoir, combien de nouvelles branches apparaissent chaque année ?

- Catégorie 3 : La question porte sur le nombre de branches (Variable didactique V4)
 $Q_{\text{nombre}_{\text{branches}}}$ - modèle: Pousse-t-il toujours le même nombre de branches chaque année ?

- Catégorie 4 : La question porte sur la mesure des branches (en lien avec la pratique P_{i3} qui relève de la quantification et la variable didactique V5)
 $Q_{\text{longueur}_{\text{branches}}}$ -modèle : Comment peut-on déterminer la longueur des branches qui poussent chaque année ?

- Catégorie 5 : La question porte sur l'échelle (Variable didactique V6)
 $Q_{\text{échelle}}$ -modèle : A quoi peut servir la donnée de l'échelle ?

- Catégorie 6 : La question porte sur les dimensions de l'arbre ou d'une partie de l'arbre ou sur sa croissance (En appui sur P_{i1} , les élèves peuvent sélectionner une partie de l'arbre (tronc, largeur de l'arbre etc. et se questionner sur leurs dimensions)
 Q_{arbre} -modèle : Comment peut-on déterminer le diamètre du tronc ?

- Catégorie 7 : La question porte sur la recherche d'un modèle proportionnalité (Modèle connu a priori des élèves, susceptible d'être mobilisé selon P_{i2})
 $Q_{\text{proportionnalité}}$ -modèle : Est-ce que la croissance de l'arbre est proportionnelle ?

- Catégorie 8 : La question porte sur l'angle formé entre deux branches (en lien avec la pratique P_{i3} , les élèves pourraient chercher à mesurer cet angle même si nous n'avons pas retenu cette variable didactique dans notre élaboration)

Qangle-modèle : Comment peut-on déterminer l'angle formé par deux branches ?

POUR LE GROUPE « PARAMETRES EXTERIEURS » :

En appui sur la pratique P_{i1} , nous faisons l'hypothèse que les élèves peuvent se questionner sur les aspects du contexte réel à prendre en compte pour envisager un traitement mathématique du problème. Nous envisageons trois sous catégories a priori :

- Catégorie 1-PE : La question porte sur un feuillage potentiel (ou des fruits) dans l'arbre

Qf-PE : L'arbre peut-il avoir des feuilles ?

- Catégorie 2-PE : La question porte sur des besoins spécifiques de l'arbre (arrosage, engrais, soleil, le fait de tailler l'arbre, etc.) qui peuvent influencer la croissance de l'arbre

Qbesoins-PE : Est-ce qu'on utilise de l'engrais ?

- Catégorie 3-PE : La question porte sur un facteur extérieur qui peut influencer la croissance de l'arbre

Qfactext-PE : L'arbre est-il protégé des maladies ?

Ces questions qui relèvent de la recherche d'éléments extérieurs qui peuvent influencer la croissance de l'arbre et leur prise en compte dans un modèle devraient engendrer des réponses montrant soit un choix de les négliger (orientation, ensoleillement, murs, engrais, apports en eau, etc.) soit un choix d'en prendre certains en considération pour envisager un traitement mathématique. Dans ce dernier cas, nous faisons l'hypothèse que la complexité de l'élaboration du modèle avec ces éventuels paramètres devraient amener les élèves à reconsidérer ce choix.

POUR LE GROUPE « SERRE » :

En appui sur la pratique P_{11} , nous faisons l'hypothèse que les élèves peuvent se questionner sur plusieurs aspects du fragment de réalité « la serre ». Nous envisageons quatre sous catégories pour ce groupe :

- Catégorie 1-serre : La question porte sur la forme de la serre
 $Q_{\text{forme-serre}}$: Quelle est la forme de la serre ?
- Catégorie 2-serre : La question porte sur marges entre la serre et l'arbre
 $Q_{\text{marges-serre}}$: Quelle distance doit-on prévoir entre la serre et l'arbre ?
- Catégorie 3-serre : La question porte sur les dimensions de la serre
 $Q_{\text{dimensions-serre}}$: Comment peut-on calculer les dimensions de la serre ?
- Catégorie 4-serre : La question porte sur la pertinence du choix de se questionner sur la serre (c'est-à-dire sur la pertinence du choix de fragment de réalité « la serre », ce qui relève de P_{11})
 $Q_{\text{pertinence-serre}}$: Doit-on trouver les dimensions de la serre ?

POUR LE GROUPE « PRECISIONS » :

Les questions de ce groupe portent sur des précisions de vocabulaire, sur des précisions sur l'énoncé, ou des demandes de précisions sur l'espèce de l'arbre potentiellement en vue de sélectionner des aspects pertinents d'un fragment de réalité (P_{11}). Nous envisageons trois sous catégories pour ce groupe :

- Catégorie 1 : La question porte sur des demandes de précisions de vocabulaire
 $Q_{\text{voca-précisions}}$: Qu'est-ce qu'un botaniste ?
- Catégorie 2 : La question porte sur des demandes de précisions sur l'énoncé
 $Q_{\text{énoncé-précisions}}$: Comment peut-on savoir que la maturité de l'arbre est en 2023 ?
- Catégorie 3 : La question porte sur des demandes de précisions sur l'arbre (l'origine ou la provenance de l'arbre)
 $Q_{\text{arbre-précisions}}$: D'où vient cet arbre ?

8-4 Eléments d'analyse a priori du travail de mathématisation verticale lors de la phase des questions-réponses

Notre travail de thèse portant sur la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, nous ne proposons pas d'analyse a posteriori du travail de mathématisation verticale dans la résolution de la fiction réaliste « L'arbre ». Cependant notre étude épistémologique nous a montré que des allers retours entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale dans le travail des élèves peuvent être envisagés, en particulier si :

- Les élèves simplifient leur modèle pour pouvoir le manipuler et le simuler
- Les élèves complexifient leur modèle lorsqu'ils auront trouvé des premiers résultats.

Il nous semble pertinent de lister, dès la phase de questions-réponses, de manière non exhaustive, les cadres mathématiques pouvant être mobilisés éventuellement par les élèves dans un travail relevant de la mathématisation verticale :

- La combinatoire (règle de formation des branches)
- La trigonométrie (angles entre les branches)
- Les suites (pour calculer une hauteur)
- Simulation géométrique des règles : tracer de segments, d'angles etc.
- Simulation avec tableur, avec un programme
- Encadrement par les longueurs totales de branches
- Expression des règles en langage mathématique
- Calculs avec les probabilités, simulations et statistiques sur les simulations
- Simulations avec des choix au hasard, pile ou face ou dés et statistiques
- Proportionnalité
- Gestion de données (tableaux, représentations graphiques)
- ...

Nous regarderons si l'on peut déjà en voir des traces dans la phase de questions-réponses lors de notre analyse a posteriori.

8-5 Indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves

En appui sur nos choix retenus à l'issue de l'étude préliminaire et sur la définition de la mathématisation horizontale et de ses formes (cf. paragraphes 4-4), nous définissons des indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale pour les questions et pour les réponses et proposons de les expliciter en montrant comment notre étude épistémologique a nourri notre travail didactique dans l'analyse a priori du travail de mathématisation horizontale lors de la phase de questions-réponses à partir de la fiction réaliste « L'arbre ».

8-5-1 Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase de l'élaboration des questions

Nous affinons notre catégorisation a priori précédente pour la phase de l'élaboration des questions, en définissant les trois indicateurs de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale suivants :

- La question montre la recherche d'un modèle permettant de traiter la situation proposée ($Q_{\text{modèle}}$)
- La question porte sur l'identification de grandeurs pertinentes pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique ($Q_{\text{grandeurs}}$)
- La question porte sur le choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique (Q_{contexte})

Les indicateurs $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} mettent en évidence le travail de mathématisation horizontale que nous avons représenté sur le premier axe horizontal du schéma du processus de modélisation (figure 27) rappelé ci-après :

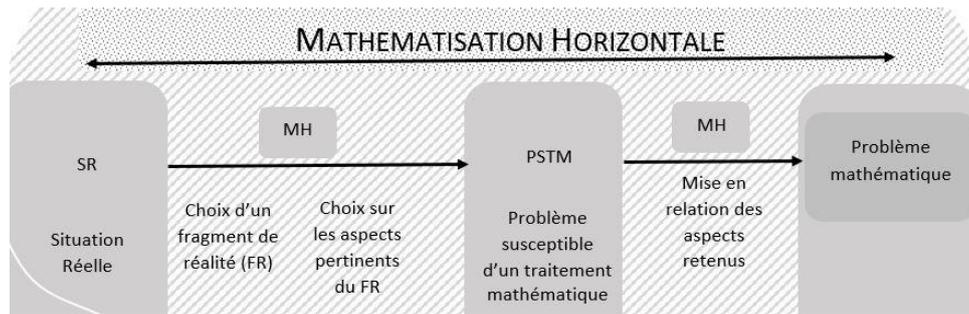


Figure 27 : Axe de la mathématisation horizontale du schéma du processus de modélisation pour notre étude

Nous avons vu au chapitre 6, que la pratique P_{i1} ³¹ est mobilisée essentiellement sur cet axe. L'indicateur Q_{contexte} relève du questionnement sur la pertinence du fragment de réalité choisi par rapport aux choix d'éléments de contexte à prendre en compte. L'indicateur $Q_{\text{grandeurs}}$ porte sur l'identification de grandeurs pertinentes lors du passage de « la situation réelle » au « PSTM » et sur la mise en relation des grandeurs choisies (passage du « PSTM » au problème mathématique).

L'indicateur $Q_{\text{modèle}}$ met en évidence un travail de mathématisation horizontale dans la mesure où la recherche du modèle induit au préalable des choix par l'élève, d'un ou de fragment(s) de réalité et de certains de leur(s) aspects, sur lesquels il se questionne pour construire un modèle mathématique en vue de répondre à la question posée. Cette pratique relève essentiellement de P_{i2} : Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ici l'élève) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique P_{i1} .

L'indicateur $Q_{\text{modèle}}$ traduit essentiellement l'interconnexion entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale lors du passage de la SR au modèle mathématique, représentée par les doubles flèches sur le schéma du processus de modélisation (Figure 28, p.108).

³¹ P_{i1} Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

Pour chacun de ces indicateurs, nous définissons des sous catégories afin d'identifier plus précisément des traces de mathématisation horizontale dans les productions des élèves. Nous précisons pour chaque catégorie, les indicateurs langagiers³² que nous avons choisis afin de décider du classement des questions produites par les élèves.

POUR L'INDICATEUR Q_{MODELE}

Cet indicateur permet d'identifier le travail de mathématisation horizontale qui relève de la recherche d'une mise en relation de grandeurs en particulier via la schématisation. Nous mettons en évidence dans la suite en quoi cet indicateur peut être porteur de traces de transposition des pratiques expertes P_{i1} , P_{i2} et P_{i3} .

Pour classer les questions selon cet indicateur, nous anticipons les catégories suivantes :

- Recherche d'un modèle de proportionnalité : La justification de ce choix s'appuie sur la pratique invariante P_{i2} qui consiste à « partir d'un modèle connu par le chercheur et le mettre à l'épreuve ». Le modèle de proportionnalité est connu a priori des élèves dès la sixième. Nous faisons l'hypothèse qu'une transposition de P_{i2} pourrait se traduire par le choix et la mise à l'épreuve de ce modèle par les élèves. ($Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$)
- Recherche d'un modèle (autre que de proportionnalité) ($Q_{\text{modèle-modèle}}$) : ce choix est associé directement à la recherche d'une mise en relation de grandeurs choisies par les élèves à partir de leurs connaissances mathématiques. Il pourrait manifester en cela des traces de la transposition de la pratique experte P_{i1} .
- Recherche sur la forme de la serre ($Q_{\text{modèle-serre}}$) : ce choix est lié au fait que dans la fiction réaliste, pour motiver la recherche sur l'arbre, il est écrit que les botanistes veulent construire une serre. A priori, des élèves peuvent partir de cette motivation avant de s'intéresser à la croissance de l'arbre. Le choix du fragment réalité ici « la serre » relève de la pratique experte P_{i1} .
- Recherche à partir de la schématisation ($Q_{\text{modèle-schéma}}$) : ce choix est une forme de la mathématisation horizontale qui consiste à mettre en relation des aspects d'un

³² Nous précisons que nous considérerons également tous les mots de la même famille que ceux définis dans les indicateurs langagiers ainsi que leurs synonymes.

fragment de réalité via une représentation d'un fragment de la réalité retenu. Nous mettons également dans cette catégorie les questions des élèves à propos de la fiabilité des mesures prises directement sur les schémas proposés dans l'énoncé. Ce type de questions relevant de la quantification est porteur de traces de la transposition de la pratique P_{i3} .

Nous faisons le choix d'indicateurs langagiers précisés dans le tableau suivant :

Indicateur $Q_{\text{modèle}}$	Indicateurs langagiers
$Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$	Proportionnel, régulier
$Q_{\text{modèle-modèle}}$	Comment grandit... ? Comment pousse... ? Est-ce que ... augmente/diminue ?
$Q_{\text{modèle-serre}}$	Forme de la serre, comment est la serre ?
$Q_{\text{modèle-schéma}}$	Dessin, 2D, 3D, graphique, schéma

POUR L'INDICATEUR $Q_{\text{GRANDEURS}}$

Cet indicateur est étroitement associé à la forme de mathématisation horizontale « Identifier les grandeurs pertinentes pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle ». Il semble pertinent pour mettre en évidence une transposition de la pratique P_{i1} et P_{i3} comme nous le développons dans la suite.

Nous anticipons trois types de questions à ce propos :

- Des questions portant sur l'identification de grandeurs pertinentes ($Q_{\text{grandeurs}_I}$) c'est-à-dire des questions explicites, relevant de P_{i1} , sur le choix des grandeurs à prendre en compte pour résoudre le problème.
- Des questions portant sur la mesure d'une grandeur a priori identifiée par les élèves ($Q_{\text{grandeurs}_M}$) c'est-à-dire des questions qui demandent directement la valeur à affecter à une grandeur choisie. Ces questions pourraient être associées à des prises instrumentées de mesure sur les schémas relevant en cela de la pratique P_{i3} tout en relevant de P_{i1} dans la mesure où elles manifestent également un choix de grandeurs pertinentes.

- Des questions portant sur l'échelle ($Q_{\text{grandeurs_E}}$), la notion d'échelle étant par définition un rapport de grandeurs. Une échelle étant donnée dans l'énoncé de la fiction réaliste, les élèves peuvent s'interroger à la fois sur son sens et sur son intérêt pour la résolution du problème. Ces questions relevant à la fois de l'identification de grandeurs pertinentes et d'éventuelles prises de mesures pourraient traduire une transposition des pratiques P_{11} et P_{13} .

Nous faisons le choix d'indicateurs langagiers précisés dans le tableau suivant :

Indicateur $Q_{\text{grandeurs}}$	Indicateurs langagiers
$Q_{\text{grandeurs_I}}$	Dimension, taille, grandir, rétrécir, croissance, longueur, largeur, hauteur, angle, volume, prendre en compte, branches, troncs, doit-on mesurer/calculer... ? Faut-il mesurer/calculer... ?
$Q_{\text{grandeurs_M}}$	Combien mesure ... ? Combien y a-t-il de ... ? Quelle est la taille de ... ? De combien est ... ? De quelle hauteur-largeur-longueur est... ?
$Q_{\text{grandeurs_E}}$	Echelle, mesure, que représente le « 1m » ?

POUR L'INDICATEUR Q_{CONTEXTE}

Nous avons vu que cet indicateur permet d'identifier le travail de mathématisation qui relève directement de la prise en compte d'éléments de contexte pertinents pour la résolution du problème, autrement dit du choix de fragment de réalité à modéliser. Ces questions posées dans le contexte de la fiction réaliste permettent de montrer la nécessité de faire des choix dans la situation qui ne relèvent pas directement des mathématiques avant l'élaboration d'un modèle mathématique. En cela cet indicateur met en évidence une transposition de la pratique P_{11} .

En considérant que les éléments de contexte principaux donnés dans la fiction réaliste sont : l'arbre (exotique), les branches (nues sur les schémas), la maturité (fixée en 2023), les

botanistes (acteurs fictifs), l'environnement de l'arbre (le jardin des plantes), nous avons défini a priori 5 catégories de questions pouvant relever de l'indicateur Q_{contexte} .

- Des questions portant sur les feuilles, fruits, fleurs etc. éventuels de l'arbre ($Q_{\text{contexte-F}}$)
- Des questions portant sur des demandes de précisions sur l'arbre (âge, nom de l'espèce, etc.) ($Q_{\text{contexte-Arbre}}$)
- Des questions sur les besoins spécifiques de l'arbre (climat, engrais, son environnement, etc.) ($Q_{\text{contexte-Besoins}}$)
- Des questions portant sur le sens et la compréhension du mot maturité. ($Q_{\text{contexte-Maturité}}$)
- Des questions sur l'activité des botanistes ($Q_{\text{contexte-Botaniste}}$)

Les questions du type $Q_{\text{contexte-Maturité}}$ et $Q_{\text{contexte-Botaniste}}$ ne sont pas exactement de même nature que les trois autres dans la mesure où elles portent davantage sur des précisions de vocabulaire associé au contexte de la situation que sur des choix des aspects de la réalité à prendre en compte pour l'élaboration d'un modèle mathématique.

Nous faisons le choix d'indicateurs langagiers précisés dans le tableau suivant :

Indicateur Q_{contexte}	Indicateurs langagiers
$Q_{\text{contexte-F}}$	L'arbre a-t-il des feuilles/fruits/fleurs ... ?
$Q_{\text{contexte-Arbre}}$	Provenance, âge, nature de l'arbre
$Q_{\text{contexte-Besoins}}$	Climat, engrais, arrosage, soleil, environnement
$Q_{\text{contexte-Maturité}}$	Maturité
$Q_{\text{contexte-Botaniste}}$	Botaniste

Pour l'ensemble de ces trois types d'indicateurs, outre les indicateurs langagiers, nous serons attentives au sens de la question produite par l'élève. Nous faisons l'hypothèse que dans certains

cas, une question pourrait être classée dans des catégories de deux indicateurs différents. Le cas échéant, nous le signalerons en note de bas de page.

Le schéma suivant résume les indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale choisis pour la phase de l'élaboration de questions (*abrégé indicateurs de dévolution MH-questions* dans le schéma) en précisant « entre parenthèses » les pratiques expertes dont ils sont susceptibles d'en montrer des traces de transposition à la classe.

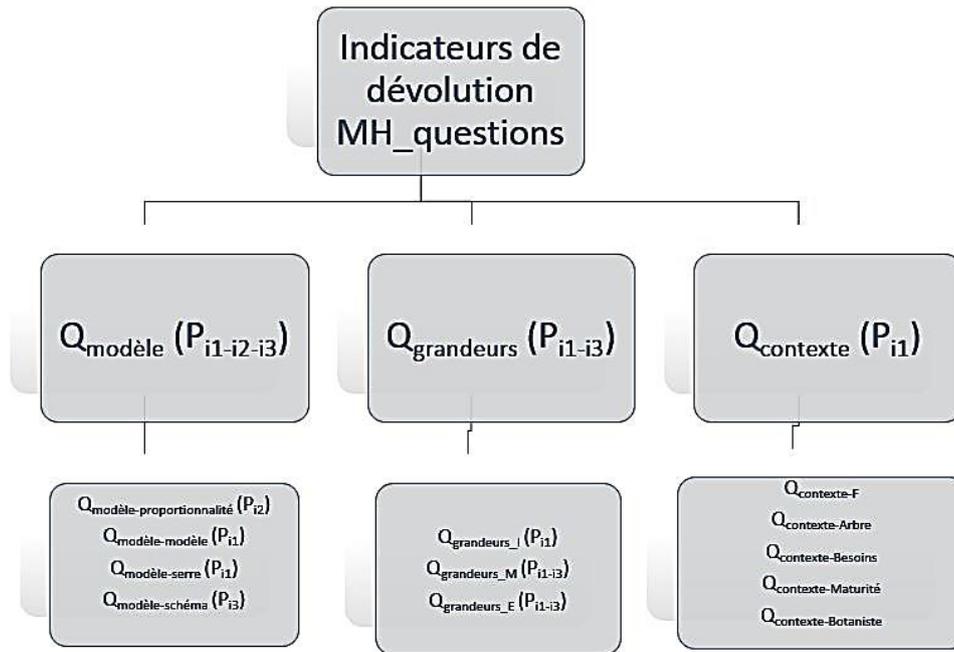


Figure 40 : Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale dans la phase d'élaboration des questions

8-5-2 Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase de l'élaboration des réponses

Pour la phase de l'élaboration des réponses, en cohérence avec les indicateurs précédents définis pour la phase de l'élaboration des questions, nous avons gardé les indicateurs *modèle-grandeur* et *contexte* en les associant de la même manière que précédemment aux pratiques expertes $P_{i1-i2-i3}$. Pour ce faire, nous avons repris les indicateurs langagiers de $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} respectivement pour $R_{\text{modèle}}$, $R_{\text{grandeurs}}$, R_{contexte} . Ces types de réponses sont révélateurs d'un travail de mathématisation horizontale pour les mêmes raisons évoquées à propos des indicateurs $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} .

Considérant que les élèves peuvent s’interroger sur la pertinence des questions reçues au vu du problème à résoudre, nous ajoutons également un indicateur pour ce type de réponse ($R_{\text{pertinence}}$). Nous faisons l’hypothèse que des réponses de cette nature relèvent essentiellement de l’analyse par les élèves de la *pertinence* ou *non pertinence* du choix de fragment de réalité ou de grandeurs ou d’éléments de contexte évoqués dans la question reçue vis-à-vis du problème à résoudre, et est susceptible de montrer explicitement des choix opérés par les élèves au regard du problème. Pour cet indicateur nous avons défini comme indicateurs langagiers : *négliger, a ou n’a pas d’importance, sert ou ne sert pas, utile ou pas utile*.

Ce type de réponse peut mettre en évidence des hypothèses simplificatrices choisies par les élèves en mettant en lumière leurs choix, en particulier par leurs explicitations éventuelles sur la pertinence d’un choix vis-à-vis de la complexité et de la faisabilité du traitement mathématique qu’il implique, constituant en cela des possibles traces de transposition de la pratique P_{i1} .

Nous utilisons donc les quatre indicateurs de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale suivants selon que la réponse produite par les élèves, porte :

- sur la recherche d’un modèle permettant de traiter la situation proposée ($R_{\text{modèle}}$)
- sur des choix de grandeurs pertinentes pour permettre un traitement mathématique ($R_{\text{grandeurs}}$)
- sur des choix d’éléments de contexte à prendre en compte pour l’élaboration d’un modèle (R_{contexte})
- sur l’analyse par les élèves de la pertinence de la question reçue au regard de la question à traiter dans le problème ($R_{\text{pertinence}}$)
- sur un travail mathématique par les élèves pour répondre à la question reçue. ($R_{\text{choix-maths}}$)

Le travail de mathématisation horizontale visant à passer du monde réel au monde mathématique, il nous semble pertinent d’introduire des sous-indicateurs permettant de percevoir si le travail de l’élève lors de l’élaboration des réponses se situe dans « le monde de la fiction réaliste » ou « dans le monde mathématique » ce qui se réfère à notre premier axe horizontal de notre schéma (figure 37). Ce qui nous semble important est de montrer comment les élèves lors de la phase des réponses font des choix pour élaborer un modèle mathématique.

Les caractéristiques de la fiction réaliste définies pour une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation (cf.8-1) favorisant la transposition des pratiques $P_{11-i2-i3}$, permettent aux élèves d'opérer des choix soit à partir du réel (P_{i1}), soit à partir d'un traitement mathématique associé à une prise de mesures (P_{i3}) ou bien à partir de leurs connaissances de modèles existants qu'ils envisagent de mettre à l'épreuve (P_{i2}). Par conséquent, nous ajoutons trois sous-indicateurs pour les indicateurs $R_{grandeurs}$, $R_{modèle}$ et $R_{pertinence}$:

$R_{choix-réel}$: le choix d'un modèle ou de grandeurs pertinentes est basé sur des considérations ancrées dans le contexte réel de la fiction réaliste.

Cet indicateur rejoint celui de $R_{contexte}$ dans la mesure où ce dernier porte sur des choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour l'élaboration d'un modèle. Nous faisons le choix de garder le sous-indicateur $R_{choix-réel}$ et de ne pas utiliser $R_{contexte}$.

$R_{choix-a priori}$: le choix est basé sur un modèle connu par l'élève en vue de le mettre à l'épreuve ou le choix d'une grandeur est acté sans considérer le contexte réel et sans autre justification.

$R_{choix-maths}$: le choix d'un modèle ou de grandeurs pertinentes est constitutif d'un travail relevant de la mathématisation verticale ou peut relever de considérations basées sur les schémas de l'énoncé.

En appui sur l'étude épistémologique mettant en évidence les allers retours entre les aspects horizontal et vertical de la mathématisation, des réponses relevant de $R_{choix-maths}$ montreraient que dès le travail de mathématisation horizontale (production de la question) les élèves peuvent mobiliser des cadres mathématiques (cf. 8-4) en entrant dans un travail de mathématisation verticale. Autrement dit, une réponse de ce type est porteuse de traces de la transposition de la pratique P_{i2} dans la mesure où elle peut mettre en évidence que

- soit le travail de mathématisation horizontale déclenche un travail de mathématisation verticale,
- soit que le travail de mathématisation horizontale est interconnecté à celui de mathématisation verticale au sens que les choix sont pensés en anticipant la faisabilité ou la complexité du traitement mathématique qui en découlerait.

L'ensemble de nos indicateurs pour la phase de l'élaboration des réponses devraient permettre à la fois : - de mieux comprendre comment la fiction réaliste et la phase de réponses amènent les élèves à faire des choix pour envisager un traitement mathématique du problème, - de mettre

en évidence une éventuelle transposition des pratiques expertes définies au paragraphe 6-5 et - de mettre en évidence une possible dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Le schéma suivant résume les indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale retenus pour la phase de l'élaboration des réponses (abrégé *indicateurs de dévolution MH-réponses* dans le schéma) :

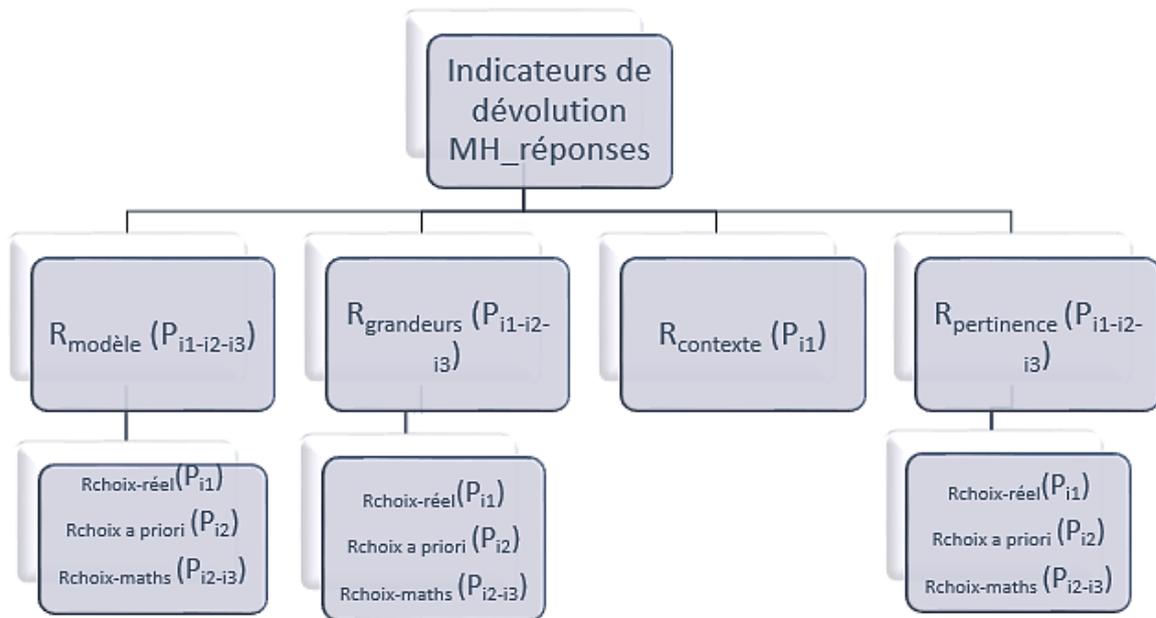


Figure 41 : Indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale dans la phase d'élaboration des réponses

Chapitre 9 : Analyse a posteriori de la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale

Dans ce chapitre, nous proposons de présenter et d'analyser les productions, lors de la phase de questions-réponses, des élèves engagés dans la résolution collaborative ResCo 2015-2016, autour de la fiction réaliste « L'arbre ».

Dans un premier temps nous proposons l'analyse a posteriori des questions produites par les élèves en deux étapes : une analyse quantitative en appui sur notre catégorisation a priori du paragraphe 8-3, puis une analyse à partir des indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale définis au paragraphe 8-5-1. Nous en dégageons des premiers résultats au regard de la transposition à la classe des pratiques expertes et de cette dévolution.

Dans un second temps, nous présentons l'analyse a posteriori des réponses rédigées par les élèves selon les indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale définis en 8-5-2. Nous montrons en quoi, les caractéristiques d'une FRAPPM, ici « L'arbre » ont favorisé cette dévolution en mettant en évidence des traces de transposition à la classe des pratiques expertes. Nous concluons par une synthèse de nos résultats.

9-1 Analyse a posteriori des questions des élèves

Nous avons recueilli, sur le forum du groupe ResCo, l'ensemble des questions produites par les soixante classes participant à la session collaborative, soit 562 questions qui sont données en annexe 8, 9, 10, 11. Nous commençons par la présentation de l'analyse quantitative de ces questions relativement aux catégories définies a priori au paragraphe 8-3. Puis, nous présentons une analyse à partir de nos indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale afin d'identifier les formes de la mathématisation horizontale utilisées par ces élèves lors de la phase de questions, tout étudiant la transposition à la classe des pratiques expertes Pi1-2-3.

9-1-1 Au regard des catégories des questions définies a priori

La répartition de ces questions, selon ces catégories, est la suivante :

Groupe « modèle »	Groupe « paramètres extérieurs »	Groupe « serre »	Groupe « Précisions »
373	85	36	68
66%	15%	7%	12%

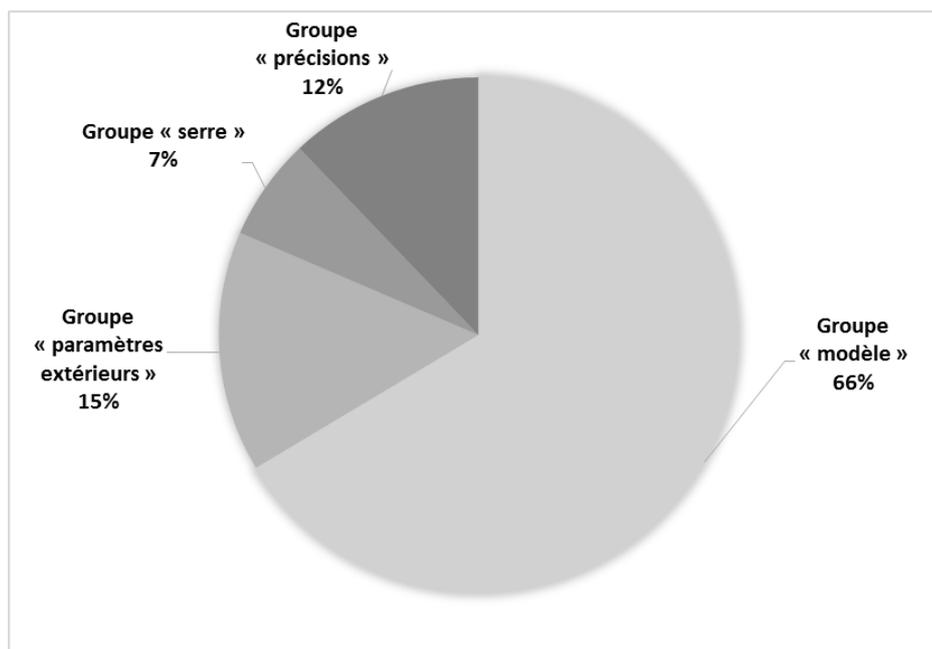


Figure 42 : Répartition des questions produites par les élèves selon les catégories définies a priori

Majoritairement, les questions des élèves concernent la recherche d'un modèle en vue de résoudre le problème. Ceci conforte notre hypothèse qu'une FRAPPM met en évidence pour les élèves, la nécessité d'une phase de modélisation pour une prise en charge efficace de la situation (Caractéristique F₃, cf. 8-1). Nous avons vu, dans la genèse de l'élaboration de la situation (cf. 8-2), que nous avons privilégié un questionnement sur l'arbre plutôt que sur la serre. Le faible pourcentage de questions d'élèves à propos de la serre (7%) reflète ce choix.

Pour chacun de ces groupes, nous avons analysé la nature des questions formulées par les élèves en appui sur les sous catégories définies a priori au paragraphe 8-3 en illustrant nos propos par des exemples. L'ensemble des questions est présenté en annexes 8-9-10-11. Nous précisons que nous avons indiqué, le cas échéant :

- le nombre de fois où une même question a été exactement proposée et formulée de la même manière.
- qu'une question aurait pu être classée dans une autre sous-catégorie en le signalant en note de bas de page.

Questions relatives au Groupe « modèle » :

Nous avons analysé quantitativement les questions de ce groupe selon les huit sous catégories définies a priori que nous rappelons ci-dessous en donnant des exemples de questions d'élèves recueillies lors de notre expérimentation.

-Qschéma-modèle

Toutes les branches sont inscrites dans des cercles qui se coupent au sommet du tronc. Comment mesurer le rayon ou le diamètre de ces cercles ?
 L'arbre entier rentre dans un cercle, centré au sommet du tronc, de rayon 6,8cm pour 2014 et 9cm pour 2015, que peut-on en déduire ?
 Peut-on mesurer avec une règle ?
 Doit-on travailler en 2D ? Ou en 3D ?
 L'arbre est-il plat ou en 3D ?

Figure 43 : Exemples de questions autour des schémas de l'énoncé

- Qformation_{branches}- modèle

Est-ce que chaque branche donne toujours naissance à d'autres branches et combien ?
 Est-ce que les branches peuvent ne pas donner d'autres branches ?
 Est-ce que les branches se construisent suivant un schéma précis ?
 En combien de branches se divise chaque branche chaque année ? Est-ce toujours en deux ou trois branches ?

Figure 44 : Exemples de questions autour de la règle de formation des nouvelles branches

- Qnombre_{branches}- modèle

Combien de branches poussent par an ?
 Combien y a t il de branches qui poussent chaque année et est-ce que c'est toujours la même chose ?
 Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?
 Le nombre de branches augmente-t-il chaque année ?

Figure 45 : Exemples de questions autour du nombre de branches

- Qlongueur_{branches}-modèle

Faut-il mesurer les branches ?
 Combien mesure chaque branche ?
 Est-ce que les branches font toutes la même longueur ?
 De combien de centimètres les branches poussent-elles par an ?

Figure 46 : Exemples de questions autour de la longueur des branches

- Qéchelle-modèle

Les trois croquis sont-ils à la même échelle ?
 Par combien faut-il multiplier les dimensions, en centimètre, pour obtenir les dimensions en mètre ?
 Peut-on utiliser le segment "1 m" pour prendre des mesures sur les trois arbres, ou signifie-t-il simplement que la largeur de l'arbre en 2013 était 1 m ?
 1cm du dessin= combien de mètres en vrai ?

Figure 47 : Exemples de questions autour de l'échelle

- Qarbre-modèle

Pour cette sous-catégorie, nous avons obtenu des questions autour de l'évolution de la taille du tronc, des questions autour de la taille de l'arbre et de sa croissance, du type « Comment ? » (C'est-à-dire, du type, comment évolue la taille de l'arbre ?) ou « Combien ? » (C'est-à-dire, du type, combien mesure l'arbre ?)

Est-ce que le tronc va grossir au même rythme que les branches ?
 Est-ce que le tronc de l'arbre grandit toujours en hauteur et largeur ?
 Est-ce que le tronc augmente de taille en hauteur et aussi en diamètre ?

Figure 48 : Exemples de questions autour de l'évolution de la taille du tronc (Qarbre-modèle)

Quelle est la largeur de l'arbre ?
 Quelle est la hauteur de l'arbre ?
 De combien de mètre l'arbre va-t-il grandir chaque année ?
 Quelle est sa croissance moyenne annuelle ?

Figure 49 : Exemples de questions autour de la taille de l'arbre, de type « combien »
 (Qarbre- modèle)

Sait-on comment il grandit en un an ?
 Faut-il mesurer la longueur et/ou la largeur ou faut-il mesurer la totalité de l'arbre (branches, tronc...) ?
 Existe-t-il une formule mathématique qui permette de calculer la taille de l'arbre en 2023 ?
 Comment s'y prendre pour trouver la taille en 2023 ?

Figure 50 : Exemples de questions autour de l'évolution de la taille de l'arbre, de type
 « comment » (Qarbre- modèle)

- Qproportionnalité- modèle

Est-ce-que l'arbre pousse de manière régulière ?
 L'arbre grandit-il proportionnellement?
 La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité?
 Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?
 La croissance de l'arbre est-elle régulière?
 L'arbre pousse-t-il proportionnellement ?

Figure 51 : Exemples de questions autour d'un modèle proportionnel

- Qangle-modèle

Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?
 L'écart des branches est-il toujours le même ? (les angles entre les branches)
 Combien mesure l'angle de chaque branche ?
 Quelles sont les mesures possibles pour un angle formé par deux branches ?

Figure 52 : Exemples de questions autour de la mesure d'angles entre les branches

Nous avons également relevé des questions sur des demandes de précisions autour du sens de la question posée dans l'énoncé, que nous avons regroupées dans une nouvelle sous-catégorie « sens-modèle », comme par exemple :

Qu'est-ce qu'on entend par hauteur et largeur de l'arbre?
 Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?
 Pouvons-nous avoir des indications sur l'évolution de l'arbre ?
 Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?
 Qu'entend-on par "prévoir comment sera l'arbre"?
 Faut-il calculer la hauteur du tronc et des branches séparément ou tout ensemble ?
 Doit-on étudier le volume ?
 Y a-t-il un rapport avec les suites ou les fractales ?

Figure 53 : Exemples de questions autour du sens de la question de l'énoncé

L'intégralité des questions produites par les élèves relatives au groupe « modèle » est présentée en annexe 8.

Nous résumons les résultats obtenus dans le graphique suivant :

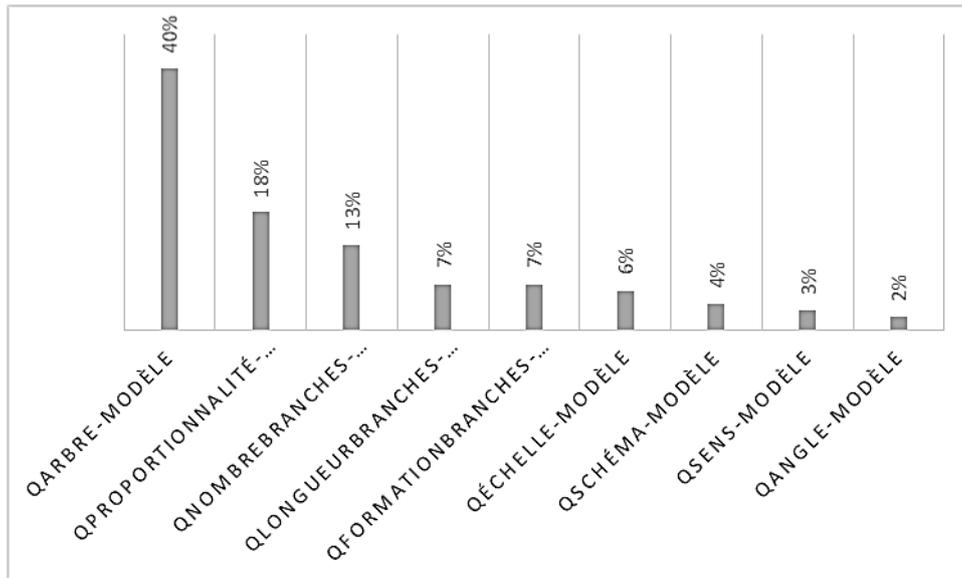


Figure 54 : Répartition des questions du groupe *Modèle*

L'analyse des questions du groupe *Modèle* montrent que les élèves envisagent principalement un traitement mathématique à partir de recherches portant sur l'arbre (ou sur une partie de l'arbre) (40% des questions) et sur les branches (règle de formation, angle, nombre et longueur) (29% des questions). Le choix des valeurs des variables didactiques retenues pour notre situation sur la forme de l'arbre (V3), le nombre de nouvelles branches (V4) et la longueur des troncs et des branches (V5) semblent avoir joué un rôle prépondérant dans la production des questions des élèves (Caractéristique F_6 d'une FRAPPM).

La pratique P_{12} qui consiste à partir d'un modèle connu est mobilisée par certains élèves, comme le montrent les questions autour du choix d'un modèle de proportionnalité (19%).

Questions relatives au Groupe « paramètres extérieurs » :

Nous avons analysé quantitativement les questions de ce groupe selon les trois sous catégories définies a priori que nous rappelons ci-dessous, en donnant des exemples de questions d'élèves recueillies lors de notre expérimentation :

- Q f-PE : La question porte sur un feuillage potentiel (ou des fruits) dans l'arbre

Est-ce que l'arbre a des feuilles ?
 L'arbre a-t-il des feuilles et faut-il prendre les feuilles en compte ?
 Est-ce que l'arbre va fleurir ?
 Est-ce que cet arbre est un arbre fruitier ?

Figure 55 : Exemples de questions autour des fleurs, fruits ou feuilles éventuelles de l'arbre

- Qbesoins-PE : La question porte sur des besoins spécifiques de l'arbre qui peuvent influencer la croissance de l'arbre

Les conditions climatiques de la serre sont-elles les même que celles de son pays d'origine ?
 L'arbre a-t-il des besoins particuliers (terre spéciale, apport en eau ...)?
 Si on arrose l'arbre et que l'on le met au soleil : est ce qu'il poussera plus vite ? Et en hiver ?
 Est-ce qu'on mettra de l'engrais ?
 Est-ce que les botanistes taillent l'arbre ?

Figure 56 : Exemples de questions autour des besoins spécifiques de l'arbre

- Qfactext-PE : La question porte sur un facteur extérieur qui peut influencer la croissance de l'arbre

Est-ce que l'arbre peut mourir avant ?
 Est-ce que l'arbre peut mourir au cours des années ?
 L'arbre peut-il être malade ? (et est-ce-que la maladie peut influencer sur sa croissance ?)
 Ne risquerait-il pas de mourir avant 2023 ? (Adaptation d'un arbre exotique au climat méditerranéen?)

Figure 57 : Exemples de questions autour des facteurs extérieurs

Nous avons regroupé dans une nouvelle sous-catégorie « Comparaison avec un autre arbre » les questions des élèves portant sur le fait d'envisager une comparaison de l'arbre avec un autre arbre connu, comme par exemple :

Peut-on faire une comparaison avec une espèce d'arbre connue?
 Connaît-on des espèces d'arbres semblables et qui pourraient nous servir d'élément de comparaison ?
 Cet arbre a-t-il des points communs avec des arbres exotiques déjà connus ?

Figure 58 : Exemples de questions autour de la comparaison avec un autre arbre

Selon ces 4 sous catégories, nous obtenons la répartition suivante :

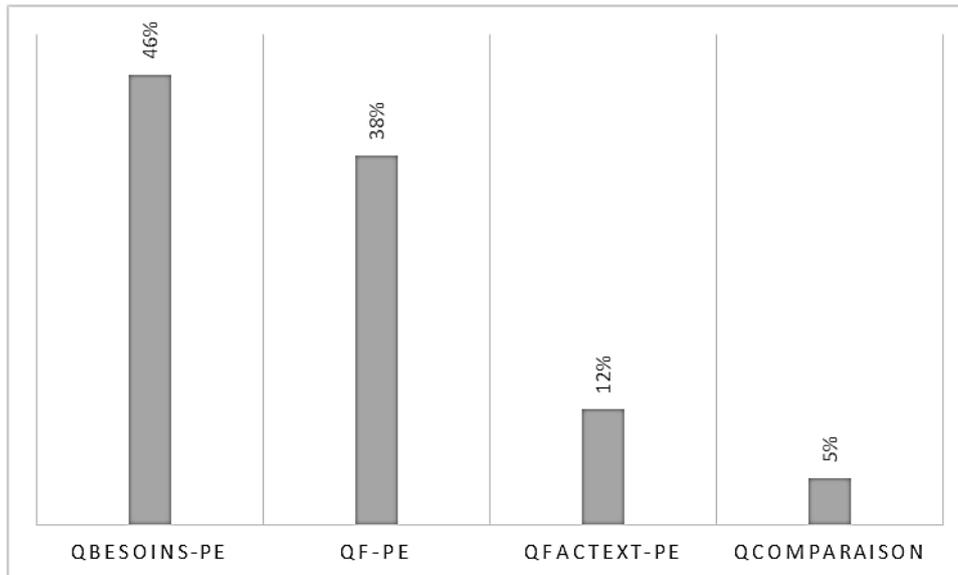


Figure 59 : Répartition des questions du groupe « paramètres extérieurs »

Les productions des élèves relatives à ce groupe de questions sont en annexe 9.

Cette répartition traduit la recherche par les élèves d'éléments de contexte pouvant influencer la croissance de l'arbre. Les résultats obtenus montrent que le contexte de la FRAPPM est suffisamment réaliste pour susciter un tel questionnement (Caractéristique F₂ d'une FRAPPM).

Questions relatives au Groupe « Serre » :

Nous avons analysé quantitativement les questions de ce groupe selon les quatre sous catégories définies a priori que nous rappelons ci-dessous en donnant des exemples de questions d'élèves recueillies lors de notre expérimentation :

- Qforme-serre : La question porte sur la forme de la serre

A-t-on une forme obligatoire pour la serre ? Ronde, carrée, autre ?
 Quelle forme doit prendre la serre ?
 La forme de la serre est-elle imposée ? (Base carrée, circulaire, rectangulaire?)
 À quoi va ressembler la serre (dôme ou cube ou autre) ?

Figure 60: Exemples de questions autour de la forme de la serre

- Qdimensions-serre : La question porte sur les dimensions de la serre

Pourquoi ne pas construire une serre assez grande de 75 m, pour être sûr que ça rentre ?
Existe-t-il une taille maximale pour la serre ?
Quelle doit-être la hauteur de la serre ?

Figure 61: Exemples de questions autour des dimensions de la serre

- Qmarges-serre : La question porte sur marges entre la serre et l'arbre

Quel doit être l'écart entre l'arbre et la serre ?
Est-ce qu'on prend une marge pour les dimensions de la serre ou on la fait pile à la taille de l'arbre ?
Quelles est la distance à respecter entre la serre et l'arbre ?
Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?

Figure 62 : Exemples de questions autour des marges entre la serre et l'arbre

- Qpertinence-serre : La question porte sur la pertinence du choix de se questionner sur la serre (c'est-à-dire sur la pertinence du choix de fragment de réalité « la serre », ce qui relève de P_{11})

Doit-on trouver les dimensions de la serre ?
La présence de la serre va-t-elle avoir une influence sur la croissance ?
L'orientation de la serre est-elle importante ?
Le matériau de la serre ou sa couleur influencent-ils la pousse de l'arbre (favorisation de la photosynthèse, maintien d'une température optimale,...)

Figure 63 : Exemples de questions Qpertinence-serre

Selon ces quatre sous catégories, nous avons obtenu la répartition suivante :



Figure 64 : Répartition des questions du groupe « Serre »

Les productions des élèves relatives à ce groupe de questions sont en annexe 10.

Les élèves se sont essentiellement questionner sur le choix de la forme de la serre. Les questions Qmarges-serre montrent que le questionnement de certains élèves sur le fragment de réalité « serre » prend en compte l'arbre. Pour ces élèves, la construction de la serre semble pouvoir justifier la nécessité de la question sur la prévision de la croissance de l'arbre (Caractéristique F₃ d'une FRAPPM).

Questions relatives au Groupe « Précisions » :

Nous avons analysé quantitativement les questions de ce groupe selon les trois sous catégories définies a priori que nous rappelons ci-dessous en donnant des exemples de questions d'élèves recueillies lors de notre expérimentation :

- Qvoca-précisions : La question porte sur des précisions de vocabulaire

Qu'est-ce qu'un botaniste ? Que veut dire la maturité pour un arbre ? Qu'est-ce qu'une serre ?
--

Figure 65 : Exemples de questions autour des précisions de vocabulaire

- Qénoncé-précisions : La question porte sur des précisions sur l'énoncé

Comment les botanistes savent-ils que l'arbre sera mature en 2023 ? Que veulent construire les botanistes ? Sur quoi se basent les botanistes pour estimer la maturité en 2023? Où pourrait-on voir le vrai arbre? Dans quelle terre pousse l'arbre ?

Figure 66 : Exemples de questions autour des précisions sur l'énoncé

- Qarbre-précisions : La question porte sur l'origine ou la provenance de l'arbre

D'où vient-il ? Quelle est la nature de l'arbre ? De quelle espèce est l'arbre? Comment s'appelle cette espèce d'arbre ?

Figure 67 : Exemples de questions autour de la provenance et de l'espèce de l'arbre

Selon ces trois sous catégories, nous avons obtenu la répartition suivante :

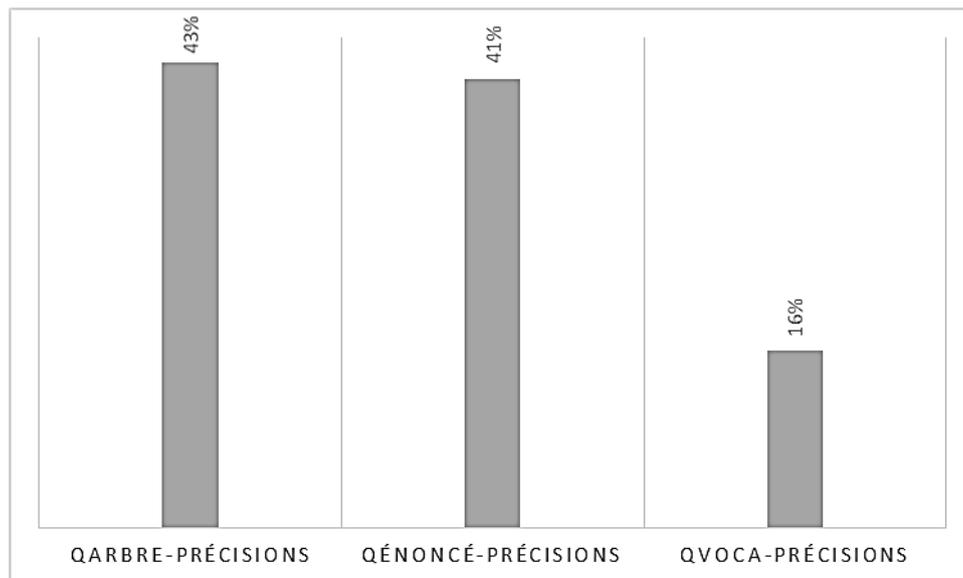


Figure 68 : Répartition des questions du groupe « précisions »

Le contexte réaliste a amené certains élèves à questionner la nature de l'arbre à étudier (sa provenance, son espèce). L'adaptation de la problématique professionnelle de la prévision de la croissance d'un arbre (Caractéristique F₅ d'une FRAPPM) a conduit certains élèves à s'interroger sur comment les scientifiques peuvent garantir la maturité de l'arbre en 2023. Les questions de vocabulaire concernent principalement la serre, les botanistes et la maturité.

Les questions des élèves relatives à ce groupe sont en [annexe 11](#).

SYNTHESE DES RESULTATS

Dans le chapitre 8, nous avons défini les caractéristiques d'une FRAPPM qui ont piloté l'élaboration de la situation de « L'arbre ». Notre objectif était de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale (MH) lors de la phase de questions-réponses et de transposer à la classe les pratiques expertes relevant de la MH identifiées au chapitre 6. Les analyses précédentes qui concernent la phase de questions, ont montré que le choix des variables didactiques et de leurs valeurs, en particulier les schémas et la formulation de la question portant explicitant sur l'arbre (cf. 8-2) ont favorisé pour les élèves, un questionnement sur l'arbre ou une partie de l'arbre donnant lieu à des questions sur des grandeurs pertinentes, sur des éléments de contexte à prendre en compte ou sur un choix de modèle, en vue de prévoir la croissance de l'arbre.

L'analyse des questions a montré que les élèves semblent avoir perçu la nécessité de faire des choix afin d'envisager un traitement mathématique du problème. Ces choix portent

principalement sur la sélection d'un fragment de réalité et sur l'identification des aspects pertinents de ce fragment. Nous considérons ce résultat comme une trace de la transposition de la pratique P_{i1} .

Dans l'analyse des questions du groupe *modèle*, nous avons mis en évidence des traces de transposition de la pratique P_{i2} qui consiste dans les pratiques expertes à choisir un modèle mathématique connu (le modèle de proportionnalité dans le cas des élèves) et de le mettre à l'épreuve.

Nous avons également relevé des questions d'élèves portant sur les mesures de certaines grandeurs dont l'analyse montre que les élèves cherchent à quantifier leurs données afin d'envisager un traitement mathématique de la situation, ce que nous considérons comme une trace de la pratique P_{i3} .

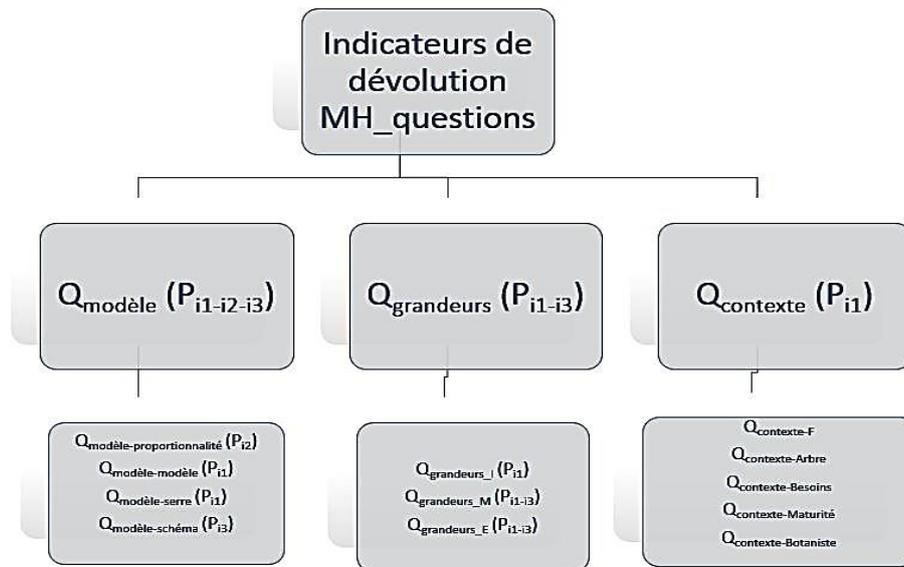
On note également dès cette phase de questions, certaines mobilisations de cadres mathématiques comme notamment les suites, la géométrie plane, la proportionnalité ce que nous avons envisagé a priori. Cela met en évidence que la mathématisation verticale peut être envisagée dès cette phase.

Globalement, l'ensemble des questions montre que les élèves cherchent soit à sélectionner un fragment de réalité, soit à identifier des grandeurs pertinentes (ou leurs mesures), soit à interroger l'influence des paramètres extérieurs, soit à évaluer la pertinence à tester un modèle connu. Nous en concluons que les caractéristiques d'une FRAPPM et la phase de questions ont favorisé la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale et la transposition à la classe des pratiques P_{i1} , P_{i2} et P_{i3} .

Dans la suite, pour mettre en évidence les formes de la mathématisation horizontale mobilisées par les élèves, nous analysons les productions des élèves relatives à la phase de questions au regard des indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale que nous avons explicités au paragraphe 8-5-1 (Figure 40).

9-1-2 Au regard des indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale

Nous rappelons ci-dessous les indicateurs de dévolution définis pour la phase de questions, selon lesquels nous avons classé les 562 questions d'élèves recueillies.



Notre objectif est d'identifier les formes de la mathématisation horizontale utilisées par les élèves lors de la phase de questions tout en poursuivant notre étude sur la transposition à la classe des pratiques expertes P_{i1-2-3} .

Nous présentons en annexe 12 les 562 questions des élèves classées relativement à chaque indicateur $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} .

Nous rappelons ci-dessous le sens des abréviations utilisées pour désigner chaque sous-catégorie :

Indicateur $Q_{\text{modèle}}$	Questions portant sur :
$Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$	La recherche d'un modèle de proportionnalité
$Q_{\text{modèle-modèle}}$	La recherche d'un modèle (autre que celui de proportionnalité)
$Q_{\text{modèle-serre}}$	La recherche de la forme de la serre,
$Q_{\text{modèle-schéma}}$	La recherche d'un modèle via la schématisation

Indicateur $Q_{\text{grandeurs}}$	Questions portant sur :
$Q_{\text{grandeurs_I}}$	Le choix des grandeurs à prendre en compte
$Q_{\text{grandeurs_M}}$	La mesure d'une grandeur
$Q_{\text{grandeurs_E}}$	L'échelle (donnée dans l'énoncé)

Indicateur Q_{contexte}	Questions portant sur :
$Q_{\text{contexte-F}}$	Une présence éventuelle de feuilles/fruits/fleurs dans l'arbre
$Q_{\text{contexte-Arbre}}$	Des demandes de précisions sur l'arbre (provenance, âge, nature de l'arbre...)
$Q_{\text{contexte-Besoins}}$	Des besoins spécifiques de l'arbre (climat, engrais, arrosage, soleil, environnement...)
$Q_{\text{contexte-Maturité}}$	Le sens et la compréhension du mot maturité
$Q_{\text{contexte-Botaniste}}$	L'activité d'un botaniste
$Q_{\text{contexte-vocabulaire}}$	Des demandes de vocabulaire relatives au contexte de l'énoncé

Pour visualiser la répartition de ces questions selon les indicateurs de dévolution MH-questions et à l'intérieur de chacun d'entre eux, nous avons réalisé le graphique suivant que nous analysons dans la suite :

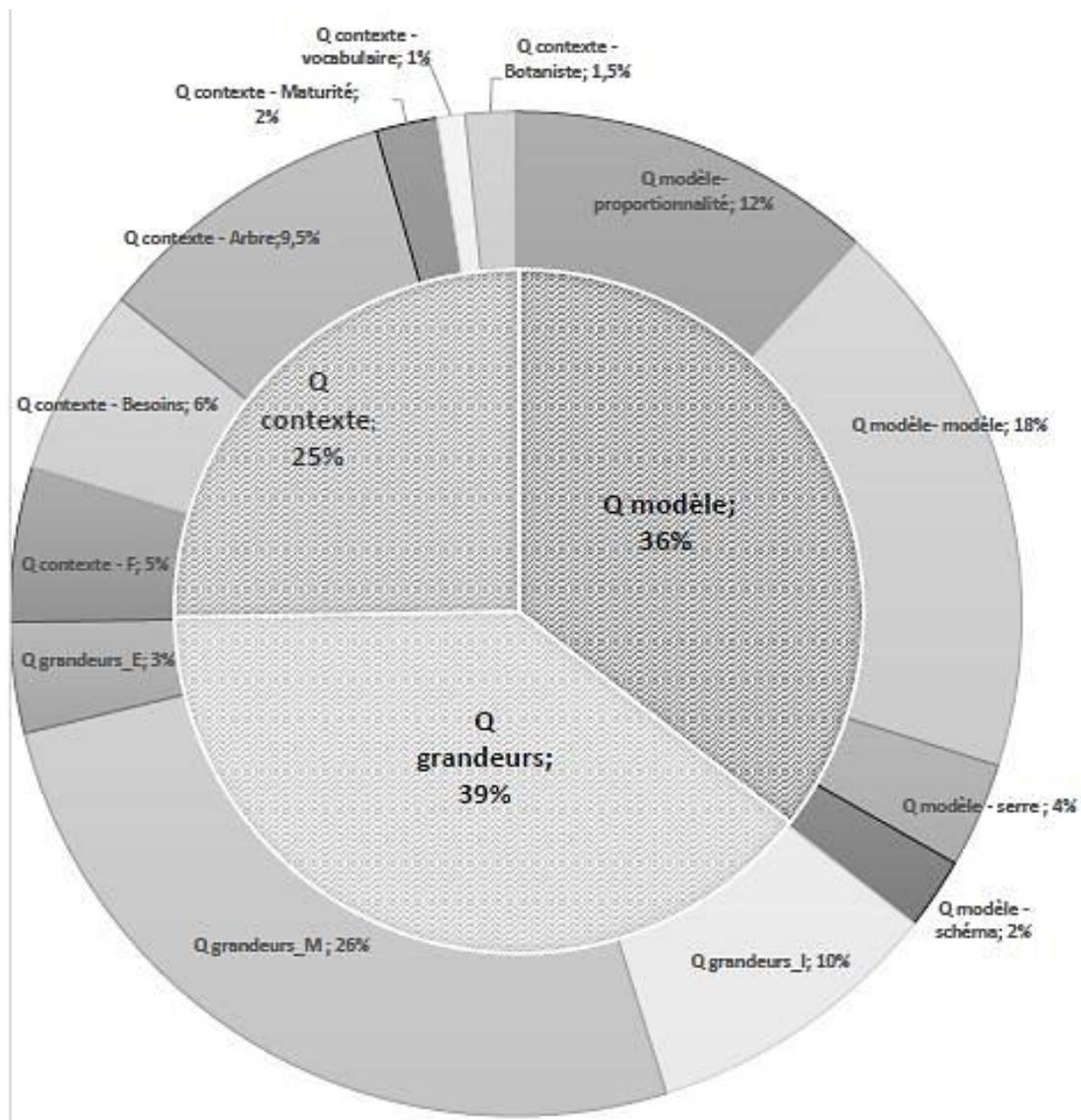


Figure 70 : Répartition des questions des élèves selon les indicateurs de dévolution
MH- Questions

Sur les 562 questions produites par les élèves, nous avons pu en classer 557 selon nos indicateurs ce qui montre que lors de cette phase de questions le travail des élèves relève de la mathématisation horizontale dans le sens où les élèves ont mobilisé une ou plusieurs des formes de cette mathématisation. Les cinq questions non classées portant sur des demandes de vocabulaire relativement au contexte, nous avons fait le choix de les faire apparaître dans une sous-catégorie de la classe « Contexte » que nous avons nommé Qcontexte-vocabulaire.

Dans les trois quarts des questions recueillies, les élèves s'interrogent sur comment mathématiser le problème soit en recherchant des grandeurs pertinentes soit en recherchant un modèle susceptible de leur permettre de traiter mathématiquement le problème, comme l'illustrent les questions des élèves suivantes :

Q24- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: *Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ?*

Q30- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: *Est-ce que la taille des nouvelles branches est proportionnelle à la taille des anciennes branches ?*

Q8- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Est-ce que c'est symétrique ?*

Q15- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Les branches se multiplient- elles seulement par 2 ou par 3 ?*

Q23 - $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?*

Q5- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: *L'arbre a-t-il des feuilles et faut-il prendre les feuilles en compte ?*

Q43- $Q_{\text{grandeurs}_M}$: *Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?*

Les questions relatives à la recherche d'un modèle montrent que les élèves ont sélectionné un fragment de réalité à partir duquel ils envisagent un traitement mathématique. Par exemple, on relève le choix des fragments de réalité suivants :

- « les branches »

Q33- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Les branches nouvelles étant de plus en plus petites chaque année, comment calculer leur taille pour chaque année ?*

- « le tronc »

Q43- $Q_{\text{modèle-proportionnalité}}$: *Le diamètre du tronc double-t-il chaque année ?*

- « la manière dont pousse l'arbre »

Q30- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *L'arbre grandit il de la même manière en largeur et en hauteur ?*

- La forme de l'arbre

Q8- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Est-ce que c'est symétrique ?*

On peut relever que les questions des élèves portant sur les grandeurs concernent principalement la recherche de mesures d'une partie de l'arbre (largeur du tronc, nombre de branches, la longueur des branches etc.). On peut faire l'hypothèse que les élèves recherchent

à quantifier certaines grandeurs de la réalité afin d'envisager un traitement mathématique de la situation. Nous donnons quelques exemples de ce type de questions :

Q39- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: *Combien de centimètres prennent les branches chaque année ?*

Q127- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: *De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?*

La part de recherche d'éléments de contexte à prendre en compte n'est pas négligeable (25%) et peut montrer que les élèves s'approprient le contexte réel de la fiction réaliste tout en réfléchissant aux choix à opérer pour passer dans le monde mathématique afin de résoudre le problème. Ce travail témoigne de la transposition de la pratique P_{i1} , comme par exemple dans les exemples suivants :

Q4- $Q_{\text{contexte-besoins}}$: *L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?*

Q17- $Q_{\text{contexte-Arbre}}$: *Connaît-on des espèces d'arbres semblables et qui pourraient nous servir d'élément de comparaison ?*

Dans certaines questions des élèves, nous notons des traces de la transposition de P_{i3} dans le travail des élèves qui relève de la prise instrumentée de mesures sur les schémas, comme par exemple :

Q50- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *De 2013 à 2014 d'après l'échelle on remarque que l'arbre a grandi de 1,40 m, et l'année suivante de 70 cm, qui est la moitié de 1,40mètres. Sa croissance sera-t-elle divisée par 2 à chaque fois ?*

Dès cette phase de questions, on peut noter un travail relevant de la mathématisation verticale comme par exemple ; Q58- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *L'arbre entier rentre dans un cercle, centré au sommet du tronc, de rayon 6,8 cm pour 2014 et 9 cm pour 2015, que peut-on en déduire ?*

Ou bien, certaines formulations de questions portant sur le choix d'une grandeur ou d'un modèle, et relevant en cela de la mathématisation horizontale semblent a priori porteuses d'un travail relevant de la mathématisation verticale lors de l'élaboration des réponses associées, comme par exemple les questions suivantes :

Q18- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Quelle est la probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches ?*

Q29- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: *Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?*

Ainsi, la phase de questions semble favoriser des allers retours entre les deux aspects de la mathématisation ce que l'analyse a posteriori des réponses recueillies devrait potentiellement mettre en lumière dans la suite (cf. 9-2).

9-1-3 Synthèse

De ces différentes analyses a posteriori des questions des élèves, nous dégageons les résultats suivants :

- Résultat 1 : Les caractéristiques d'une FRAPPM et la mise en œuvre d'une phase de questions à partir d'une FRAPPM favorisent la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, en leur permettant de mobiliser les formes de cette mathématisation que nous avons définies au paragraphe 4-4-4 et que nous retrouvons sur le premier axe horizontal de notre schéma du processus de modélisation.
- Résultat 2 : Les caractéristiques d'une FRAPPM et la mise en œuvre d'une phase de questions à partir d'une FRAPPM favorisent la transposition à la classe des pratiques expertes relevant de la mathématisation horizontale, identifiées au paragraphe 6-5-1.

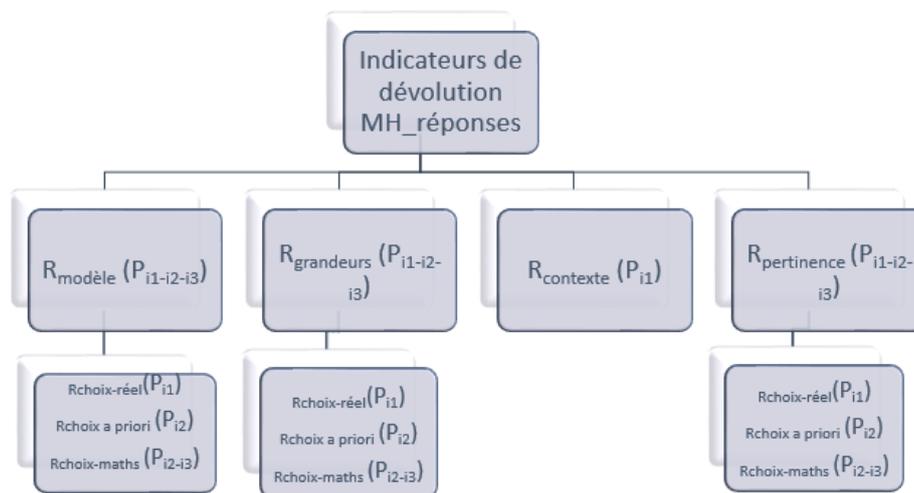
9-2 Analyse a posteriori des réponses des élèves

Nous avons recueilli sur le forum de ResCo l'ensemble des questions-réponses produites par les élèves engagés dans le dispositif 2015-2016.

Il nous faut préciser les points suivants :

- Les élèves n'apportent pas nécessairement des réponses à chaque question posée.
- Nous avons relevé 481 questions pour lesquelles au moins une réponse a été produite.
- Nous n'avons regroupé les réponses pour une même question que lorsque celle-ci était exactement formulée de la même manière.

Pour conduire l'analyse des réponses produites par les élèves, nous avons travaillé dans chaque catégorie des questions vues précédemment. Pour chaque catégorie, nous avons classé les réponses selon les indicateurs présentés en figure 41, que nous rappelons ci-dessous :



9-2-1 Analyse a posteriori de la dévolution de la mathématisation horizontale dans les productions des réponses

Nous présentons, en annexe 13, les 481 questions classées relativement à chaque indicateur $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} en précisant pour chaque question, les réponses données par les élèves. Nous rappelons que dans la mise en œuvre de la phase de questions-réponses, chaque classe travaille avec deux autres classes. Les élèves d'une même classe sont donc amenés à répondre à deux jeux de questions, par conséquent, parfois, ils formulent la même réponse pour des questions formulées différemment par les deux classes, mais interprétées par les élèves comme ayant le même sens.

Nous avons obtenu 812 réponses. Afin de ne pas alourdir nos écrits, nous désignons par R_i , $n^{\circ}x$ la réponse i à la question $n^{\circ}x$ produite par les élèves dont nous avons la liste en annexe 13. Pour chaque indicateur relatif aux réponses, nous dressons un tableau répertoriant les réponses s'y afférant par catégorie de questions. Nous précisons que certaines réponses n'ont pas pu être classées selon ces indicateurs quand la réponse donnée par les élèves ne permet pas de distinguer le travail réalisé, comme par exemple des réponses du type « Non », « Oui », « On ne sait pas ». Pour chaque catégorie et sous-catégorie des questions produites, nous proposons dans la suite de quantifier et d'analyser les réponses obtenues dans l'objectif d'obtenir des

résultats sur la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale et sur des traces éventuelles de transposition à la classe des pratiques $P_{i1-i2-i3}$.

Le lecteur trouvera en annexe 14 l'ensemble des classements réalisés.

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{MODELE-PROPORTIONNALITE}}$

Pour les réponses aux questions relevant de $Q_{\text{modèle-proportionnalité}}$, nous obtenons la répartition suivante que nous commentons dans la suite :

$Q_{\text{modèle-proportionnalité}}$	sur 79 réponses classées	Rchoix-réel	Rchoix- a priori	Rchoix- maths
$R_{\text{modèle}}$	82%	22%	23%	38%
$R_{\text{grandeurs}}$	14%	1%	8%	5%
$R_{\text{pertinence}}$	4%	0%	3%	1%

Figure 71 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type $Q_{\text{modèle-proportionnalité}}$

Il apparaît qu'une forte proportion des réponses relatives aux questions (82%) portant sur la recherche d'un modèle de proportionnalité relève d'une réponse de type $R_{\text{modèle}}$.

Les élèves ont majoritairement fait des choix à partir d'un travail mathématique essentiellement basé sur des prises de mesures pour vérifier après calculs, si le modèle de proportionnalité peut être choisi :

Q12- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Y-a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?

« En utilisant l'échelle 3 cm sur le dessin = 1 m en réalité, on peut mesurer l'arbre chaque année, et on voit que le coefficient pour passer d'une année à une autre n'est pas constant, donc il n'y a pas proportionnalité. » (R1, 12)

Plus à la marge, des réponses réfutent le choix du modèle de proportionnalité ou recherchent la légitimité d'un modèle de proportionnalité en mobilisant différents cadres (au sens de Douady 1986). Nous donnons des exemples dans la suite montrant la mobilisation par les élèves de différents cadres, en précisant à quelle question se réfère la réponse donnée.

- Cadre géométrique :

Q15- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Est-ce proportionnel ?

« La taille de l'arbre n'est pas proportionnelle à son âge, nous avons mesuré l'arbre chaque année en l'encadrant dans un rectangle, et les dimensions du rectangle chaque année ne sont pas proportionnelles (il tend à devenir un carré) » (R4, 15)

Q14- Q_{modèle-Proportionnalité} : Peut-on inscrire le dessin de l'arbre dans un cercle ou le branchage dans un demi-cercle ? Où est le centre ? Est-ce que le diamètre de ce cercle grandit de façon proportionnelle ? Faudrait-il calculer son aire ?

« Certains ont essayé avec un demi-cercle pour les branches, le centre du cercle étant le point de ramification des premières branches. Certains ont essayé d'englober l'arbre total d'un cercle complet, mais le centre du cercle évolue chaque année. On n'a pas testé la proportionnalité du rayon. » (R1, 14)

- Cadre algébrique :

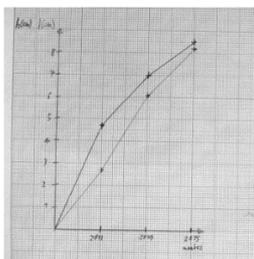
Q13- Q_{modèle-Proportionnalité} : Comment on fait si ce n'est pas proportionnel ?

« On cherche autre chose : on part du principe qu'il doit y avoir une suite logique. (Les lères ont pensé à une fonction). Nombre de branches à ajouter chaque année : on pense qu'il faut additionner le nombre de branches en plus de l'avant-dernière année avec 2 fois celles de l'année précédente. Formule : $a+2b=c$ (a année 2013, b année 2014, c année 2015). Taille des branches : on a trouvé une formule : $a+b=c$ (taille en cm) » (R2, 13)

- Graphiques :

Q17- Q_{modèle-Proportionnalité} : L'arbre grandit-il proportionnellement chaque année ?

« Nous pensons que l'arbre ne grandit pas proportionnellement à son âge, car quand il aura atteint sa maturité, il grandira moins vite qu'avant (dans ses premières années). Nous avons pensé faire une analogie avec la croissance d'un être humain. Certains élèves l'ont prouvé en dessinant un graphique :



» (R2, 17)

Environ un cinquième des réponses montre des choix basés sur les connaissances du réel pour acter que le modèle de proportionnalité ne peut pas s'appliquer dans le cas de la croissance de l'arbre en confrontant les résultats obtenus dans le modèle aux données empiriques dans le monde réel :

Q44- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: La mesure de l'arbre double-t-elle chaque année?

« *La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année parce que sinon il atteindrait vite des hauteurs démentielles.* » (R5, 44)

Q24- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ?

« *Il n'y a pas proportionnalité, si les branches poussaient toutes avec les mêmes proportions qu'au départ un programme nous a permis de déterminer qu'on pourrait avoir des branches de plus d'un kilomètre, donc la croissance des branches n'est pas la même chaque année.* » (R2, 24)

D'autres réponses stipulent que même si ce n'est pas possible dans la réalité, faire le choix d'un modèle de proportionnalité simplifie la résolution mathématique. Ceci nous montre que lors du passage au monde réel au monde mathématique, les élèves opèrent des choix dans le réel pour pouvoir choisir un modèle mathématique (ici de proportionnalité) appartenant à leurs connaissances mathématiques afin d'anticiper la faisabilité et le degré de complexité du traitement mathématique dépendant de ce choix, ce qui met en évidence des traces de la transposition P_{i2} .

Q7- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Est ce que les arbres évoluent de manière proportionnelle ?

« *Compte-tenu du contexte naturel les arbres n'évoluent pas de manière proportionnelle, mais pour la résolution on va considérer que oui.* » (R1, 7)

Q15- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Est-ce proportionnel ?

« *Oui c'est proportionnel car sinon on ne peut pas répondre au problème.* » (R3, 15)

On note également 23% de réponses relevant de choix d'un modèle ou de grandeur sans justification visible, comme l'illustrent les réponses suivantes :

Q2- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ?

« *Nous pensons que l'arbre croît de manière linéaire* » R(2,2)

Q12- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: Y-a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?

« *Non il n'y a pas proportionnalité.* » (R2, 12)

Q2- $Q_{\text{modèle-Proportionnalité}}$: La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ?

« *La largeur est proportionnelle en revanche la hauteur ne l'est pas.* » (R4, 2)

L'absence de justification visible dans les réponses produites ne permet pas de savoir si réellement les élèves ont acté ces choix a priori, sans les justifier lors de leur travail en classe. De telles réponses pourraient relever d'hypothèses simplificatrices émises par les élèves. Dans le cas des trois exemples ci-dessus il est difficile d'en juger.

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{MODELE-MODELE}}$

On obtient la répartition suivante pour les réponses classées dans la catégorie $Q_{\text{modèle-modèle}}$:

$Q_{\text{modèle-modèle}}$	sur 128 réponses classées	Rchoix-réel	Rchoix-a priori	Rchoix-maths
$R_{\text{modèle}}$	88%	22%	28%	38%
$R_{\text{grandeurs}}$	9%	2%	2%	5%
$R_{\text{pertinence}}$	3%	0%	2%	1%

Figure 72 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type $Q_{\text{modèle-modèle}}$

Très majoritairement les réponses relèvent de la recherche d'un modèle sans doute en raison de la nature de questions de type modèle-modèle c'est-à-dire qui questionnent la recherche d'un modèle pour résoudre le problème autre que celui de proportionnalité.

Environ un cinquième des réponses relève d'un choix de modèle à partir de considérations ancrées dans le réel montrant que certains élèves élaborent des choix dans le contexte réel de la fiction réaliste mettant ainsi en évidence des traces de la transposition de la pratique P_{i1} .

Nous donnons quelques exemples de ces choix ci-dessous :

Q3- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Comment s'étendent ses racines et ses branches ?

« *Les racines et les branches poussent de façon très droite tout autour de l'arbre.* »

(R2, 3)

Q28- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ?

« *La taille des branches diminue car elles sont plus nombreuses et qu'il y a moins de place.* » (R2, 28)

Q43- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Quand on compte les branches, doit-on compter toutes les branches (avec celles du milieu) ou seulement les nouvelles branches ?

« Les anciennes branches ne cessent de pousser, il faudrait donc continuer à les considérer. » (R2, 43)

Q72- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: L'arbre penchera-t-il ?

« On ne peut pas savoir mais on peut supposer que l'on mettra des tuteurs pour qu'il reste droit ! » (R1, 72)

Q78- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Ne va-t-il pas mourir avant ?

« Il peut mourir s'il n'a pas assez d'eau ou qu'il est mal entretenu. » (R2, 78)

Les réponses du type $R_{\text{choix-maths}}$ concernent majoritairement le dénombrement des branches. Principalement, les élèves utilisent l'outil mathématique évoqué dans la question à laquelle ils répondent ou bien choisissent un outil mathématique pour répondre à la question. Parmi ces outils, on note :

- Des calculs à partir de données prises sur les schémas

Q1- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: La croissance de l'arbre diminue-t-elle ?

« Nous pensons que la croissance va diminuer au fil des ans car l'épaisseur du tronc a augmenté de 33% la 1^{re} année et de 25% la 2^e. Il devrait augmenter que de 10% la dernière année. » (R2, 1)

Q71- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Comment compte-t-on le nombre de branches ?

« On compte les branches à partir de 3 branches, 7 apparaissent, puis 17 et ainsi de suite ce qui donne un coefficient de proportionnalité de 2,4 et donc en 2023 il y aura 18938 branches. » (R1, 71)

- Les probabilités

Q21- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Quelle est la probabilité que d'une branche naissent 3 branches ?

« Probabilité de $\frac{8}{21}$ d'obtenir 3 branches et probabilité de $\frac{13}{21}$ d'obtenir 2 branches. » (R2, 21)

Q18- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Quelle est la probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches ?

« La probabilité qu'une branche se divise en 2 est de $\frac{2}{3}$ et en 3 est de $\frac{1}{3}$. » (R2, 18)

- La géométrie

Q8- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Est-ce que c'est symétrique ?

« Non, on ne peut pas tracer d'axe de symétrie. » (R2, 8)

Q63- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Comment et de quelle manière pousse l'arbre chaque année ?

« Nous avons mesuré la plus grande longueur et la plus grande largeur en mettant l'arbre dans un rectangle. Ce rectangle ne grandit pas régulièrement. » (R1, 63)

Q70- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?

« Les angles ont l'air de varier entre 60 et 80° » (R2, 70)

- Les suites

Q29- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?

« Non il suffit de regarder le nombre de branches sur les trois premiers dessins pour se rendre compte que le nombre de branches à une année n'est pas la somme du nombre de branches des deux précédentes. » (R2, 29)

Q40- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Est-ce que le tronc grossit en fonction des années ?

« Le tronc grandit proportionnellement jusqu'à la 5ème année pour atteindre 1,3m de largeur. Il grandit comme une suite géométrique. » (R3, 40)

Nous avons également classé les réponses relevant de l'indicateur $R_{\text{choix-modèle}}$ qui concernent le choix d'un modèle de croissance des branches basé sur l'observation des dessins donnés dans la fiction réaliste. Ces réponses qui relèvent de la quantification de grandeurs témoignent de la transposition à la classe, d'éléments de la pratique P_{i3} .

Q24- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Est-ce que la séparation des branches est régulière?

« La séparation des branches semble être régulière. Sur les 3 schémas, si une branche donne 3 branches alors dans ces trois branches, il y aura 2 branches à 2 rameaux et 1 branche à 3 rameaux. Et si une branche donne 2 branches, ces deux branches donneront l'une deux rameaux et l'autre 3 rameaux. Mais on ne sait pas si cette loi est vérifiée par la suite. » (R2, 24)

Q27- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Est-ce que les branches se construisent suivant un schéma précis ?

« C'est logique. À chaque fois que les branches se divisent en 3 deux se divisent en 2 et une en 3. À chaque fois que les branches se divisent en 2, une se divisera en 2, l'autre en 3. » (R2, 27)

Il est intéressant de noter que parfois les valeurs obtenues sont confrontées à leur vraisemblance dans la réalité, comme par exemple :

Q32- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: La proposition « on multiplie toutes les épaisseurs du tronc précédentes entre elles » est-elle valide ? (exemple année 4 : $2 \times 3 \times 6$ mm).

« Nous pensons que cette proposition n'est pas valide, l'épaisseur du tronc dépasserait 1 m en 2016. » (R2, 32)

Ceci met en évidence l'importance des allers retours entre le travail de mathématisation horizontale et celui de la mathématisation verticale pour la validation de certains choix.

Certaines réponses relevant de $R_{\text{choix-a priori}}$ c'est-à-dire sans un travail préalable visible par les élèves nous semblent davantage relever d'hypothèses simplificatrices que pour l'indicateur $R_{\text{modèle-proportionnalité}}$ de par le choix des verbes « supposer » ou « considérer » utilisés par les élèves, comme par exemple :

Q19- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Une branche peut-elle se diviser en plus de 3 branches?

« Pour le moment on peut supposer qu'une branche ne se divise pas en plus de 3 branches. » (R1, 19)

Q23- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?

« On suppose que le nombre de branches double chaque année. » (R1, 23)

Q28- $Q_{\text{modèle-modèle}}$: Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ?

« À partir du moment où la branche se divise, elle arrête de grandir. On considère qu'elles se divisent chaque année » (R3, 28)

Dans l'ensemble des réponses de la catégorie $Q_{\text{modèle-modèle}}$, la dévolution de la mathématisation horizontale ainsi que des traces de la transposition de P_{11} et P_{13} s'expriment par le fait que les élèves opèrent des choix soit à partir de leurs connaissances du réel, soit en fixant un modèle mathématique, soit en utilisant des outils mathématiques pour obtenir des valeurs numériques de certaines grandeurs.

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{MODELE-SERRE}}$

Pour les réponses relatives à $Q_{\text{modèle-serre}}$, nous obtenons la répartition suivante que nous commentons dans la suite :

Q _{modèle-serre}	sur 33 réponses classées	R _{choix-réel}	R _{choix-a priori}	R _{choix-maths}
$R_{\text{modèle}}$	85%	33%	46%	6%
$R_{\text{grandeurs}}$	0%	0%	0%	0%
$R_{\text{pertinence}}$	15%	9%	3%	3%

Figure 73 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type Q_{modèle-serre}

Dans les réponses de la catégorie Q_{modèle-serre}, c'est-à-dire essentiellement relatives à des questions sur la forme de la serre, très peu de réponses relève d'un travail mathématique. Nous pouvons l'expliquer par le fait que nous avons vu que les questions sur la serre portent essentiellement sur le choix de la forme de la serre.

Nous obtenons environ un tiers des réponses montrant des choix opérés à partir de considérations ancrées dans le réel, comme l'illustrent les exemples suivants :

Q1- Q_{modèle-serre} : Quelle forme doit prendre la serre ?

« *Plutôt ronde pour le soleil* » (R3, 1)

Q10- Q_{modèle-serre} : A quoi va ressembler la serre (dôme ou cube ou autre) ?

« *On pense plutôt à un dôme car la plupart des serres ont cette forme. Certains d'entre nous pensent que ça ne change rien, d'autres pensent à un cube car les branches poussent mieux.* » (R1, 10)

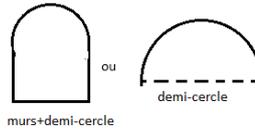
Q13- Q_{modèle-serre} : De quelle forme doit-être la serre ?

« *Cela dépend des matériaux utilisés, mais un cube est plus simple ou un pavé* » (R1, 13)

Un peu moins de la moitié des réponses relèvent de choix a priori dans le sens qu'aucune justification n'est visible. Ces réponses pourraient relever de choix par les élèves jouant le rôle d'hypothèses simplificatrices cependant nous ne pouvons l'affirmer. Comme le montrent les exemples suivants, les élèves s'appuient sur leurs connaissances mathématiques pour acter d'une forme de la serre :

Q12- Q_{modèle-serre} : Quelle est la forme de la serre ?

« *Nous pensons à un demi-cylindre ou encore un tétraèdre.* » (R2, 12)



Q4- $Q_{\text{modèle-serre}}$: La forme de la serre ?

« On préfère un mur plus un demi-cercle, par rapport au demi-cercle complet. »
(R1, 4)

Q11- $Q_{\text{modèle-serre}}$: De quelle forme pourra être la serre ?

« La serre aura la forme d'un cube. » (R1, 11)

Il a été parfois moins évident de décider de la catégorie d'une réponse dans le sens que nous avons dû interpréter dans la formulation de la réponse si le choix des élèves partait d'un modèle mathématique ou du réel. Comme par exemple, la réponse (R1, 9) produite pour la question « Quelle doit être la forme de la serre ? » :

« Nous avons plusieurs idées : d'abord une serre ronde (sphérique), puis une serre rectangulaire (en pavé droit), puis aussi un mélange des deux : une base rectangulaire surmontée d'une demi-sphère. Chaque forme peut servir en fonction de la façon dont l'arbre pousse : s'il pousse autant en hauteur qu'en largeur, la serre ronde est bien. S'il pousse plus en largeur qu'en hauteur, la serre rectangulaire est bien. S'il pousse plus en hauteur qu'en largeur, la serre avec un dôme est mieux. »

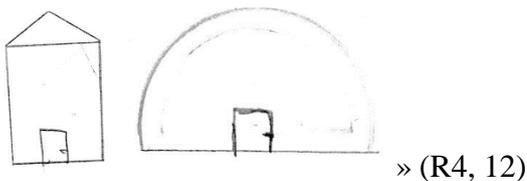
Cette réponse peut être interprétée comme un choix mathématique ($R_{\text{choix-maths}}$) dont on teste la cohérence avec la réalité ou bien d'un choix dans le réel ($R_{\text{choix-réel}}$) qui va induire un choix mathématique. Nous avons choisi de la classer dans la catégorie $R_{\text{choix-réel}}$.

Comme lors des analyses précédentes, certaines réponses montrent des allers retours entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation, comme l'illustrent les réponses suivantes :

- Dans le sens de la mathématisation horizontale à la mathématisation verticale :

Q12- $Q_{\text{modèle-serre}}$: Quelle est la forme de la serre ?

« Nous avons cherché sur internet pour voir la forme normale d'une serre. La serre doit être en forme de maison ou de demi-cercle :



» (R4, 12)

- Dans le sens de la mathématisation verticale à la mathématisation horizontale :

Q3- $Q_{\text{modèle-serre}}$: Quelle sera la forme de la serre ?

« *On ne sait pas on peut imaginer une sphère mais ce serait plus simple avec un pavé pour la construction !* » (R3, 3)

L'analyse de l'ensemble des réponses produites relatives aux questions $Q_{\text{modèle-serre}}$ mettent en évidence des traces de transposition à la classe des pratiques P_{i1} et P_{i2} en montrant des hypothèses simplificatrices émises par les élèves pour traiter le problème, et des choix mathématiques réalisés par les élèves à partir de leurs connaissances mathématiques afin d'envisager la faisabilité du traitement mathématique qui en découlerait. La recherche d'un modèle mathématique par les élèves pour représenter la serre, fragment de réalité évoqué dans les questions met en évidence une dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{MODELE-SCHEMA}}$

Pour cette catégorie, les questions relèvent de la forme « mise en relation des aspects pertinents retenus en vue d'élaborer un modèle » de la mathématisation horizontale. Les réponses produites relèvent également de cette même forme, par conséquent, il ne nous semble pas pertinent de les classer selon nos indicateurs.

Globalement les réponses données nous montrent que les élèves s'interrogent sur le fait que les dessins donnés dans la fiction réaliste puissent représenter exactement ou pas la réalité. Les choix opérés par les élèves sont partagés : sur les 19 réponses obtenues, 58% pensent que les dessins peuvent être une représentation acceptable de la réalité, 37% ne le pensent pas (en particulier en évoquant qu'une représentation en 3D serait plus réaliste) et 5% ne se prononcent pas. La transposition de la pratique experte qui consiste à simplifier la réalité (P_{i1}) ici via sa représentation, pour élaborer un modèle semble en partie effective lors de la phase de questions-réponses. Nous faisons l'hypothèse que le choix de schémas dans l'élaboration de la fiction réaliste pourrait en être une raison.

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{GRANDEURS-I}}$

On obtient la répartition suivante pour les réponses classées dans cette catégorie regroupant les questions portant sur l'identification de grandeurs pertinentes :

Qgrandeurs_I	sur 67 réponses classées	Rchoix-réel	Rchoix-a priori	Rchoix-maths
$R_{\text{modèle}}$	24%	11%	9%	4%
$R_{\text{grandeurs}}$	52%	23%	25%	4%
$R_{\text{pertinence}}$	24%	15%	4%	4%

Figure 74 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type $Q_{\text{grandeurs}_I}$

Majoritairement, les réponses concernent l'identification de grandeurs pertinentes ce qui pourrait être lié au fait que les questions portent explicitement sur cette identification. Les choix opérés relèvent pratiquement d'autant de considérations ancrées dans le réel que de choix a priori montrant en cela des traces de transposition de P_{i1} et P_{i2} . Nous donnons dans la suite quelques exemples :

- à partir de considérations issues du réel (P_{i1}) :

Q35- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Est-ce que le tronc de l'arbre s'arrête de grandir avant 2023 ?

« Nous pensons que non, puisqu'on peut lire l'âge d'un arbre lorsqu'on le coupe c'est que le tronc continue de grandir. » (R1, 35)

Q6- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Existe-t-il une longueur maximale pour une branche ?

« C'est une nouvelle espèce, donc on ne connaît pas ses caractéristiques. » (R2, 6)

Q27- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Doit-on prendre en compte que la hauteur ou aussi la largeur ?

« On doit prendre en compte les 2, car la serre devra avoir un toit (hauteur) et des murs (largeur) » (R1, 27)

- Soit en actant du choix d'une grandeur sans justification explicite (P_{i2})

Q34- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Quelles mesures devons-nous traiter sa taille en largeur ou en hauteur ?

« Nous pensons qu'il faut considérer sa largeur et sa hauteur maximale. » (R2, 34)

Q14- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Est-ce que l'on compte les branches dans la taille de l'arbre ?

« Ce qui nous intéresse c'est la hauteur pas le nombre de branches. » (R2, 14)

Q9- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?

« On pense qu'il faut étudier les 3 : grandeur, grosseur et nombre de branches » (R2, 9)

Le seul travail relevant de la mathématisation verticale observé relève du calcul pour dénombrer les branches ou l'utilisation d'un modèle fonctionnel :

Q11- $Q_{\text{grandeurs}_I}$: Est-ce qu'on compte que les nouvelles branches ou toutes les branches ?

« On a choisi de les compter toutes, les nouvelles et les vieilles, ça revient au même. Un groupe a calculé le nombre de branches en 2013 puis a trouvé une technique pour calculer le nombre de branches à chaque année :

2013 : 3 ; 2014 : $3*2 + 1 = 7$; 2015 : $7*2 + 3 = 17$

2016 : $17*2 + 7 = 41$ 2023 : il trouve 19601 branches » (R1, 11)

On note également des allers retours entre le monde mathématique et le monde réel qui montrent que l'élève prend conscience de la nécessité de faire des choix pour traiter mathématiquement le problème. Ces réflexions conduisent parfois les élèves à proposer des hypothèses simplificatrices sur des éléments de la réalité pour simplifier l'élaboration du modèle mettant en évidence une transposition des pratiques P_{11} et P_{12} comme le montre le choix des mots « on considère », « on pense que » ou encore « simplifier » et « négliger » dans les exemples suivants :

Q39-Qgrandeurs_I : Est-ce que durant les années, on a taillé l'arbre ?

« On ne peut pas savoir mais on va considérer que non. On va négliger ces informations pour la résolution du problème. » (R1, 39)

Q38-Qgrandeurs_I : Taille-t-on l'arbre ?

« Il faut supposer que non pour se simplifier la tâche. » (R1, 38)

Q37-Qgrandeurs_I : Y aura-t-il une période de stagnation entre 2013 et 2023 ?

« Nous pensons qu'il est préférable de dire que non. » (R1, 37)

D'autres hypothèses simplificatrices émises par les élèves montrent que les élèves prennent en compte des éléments du contexte réel et font le choix de les négliger par manque d'informations à leurs sujets. Les élèves semblent conscients que plusieurs choix sont envisageables comme le montre l'exemple ci-dessous :

Q10-Qgrandeurs_I : Faut-il mesurer la longueur et/ou la largeur ou faut-il mesurer la totalité de l'arbre (branches, tronc...) ?

« Nous avons fait le choix de mesurer la largeur, la hauteur et le tronc de cet arbre. On trouve que c'est aussi important de compter le nombre de branches. On ne sait rien sur les feuilles, les fruits, donc on a choisi de ne pas les compter dans la taille de l'arbre. On a partagé l'arbre en 3 parties : le tronc, les vieilles branches et les nouvelles branches de l'année en cours. On a choisi de ne pas mesurer la largeur du tronc, mais ça pourrait être faisable. »

D'autres choix sur l'identification des grandeurs relèvent de la recherche d'un modèle mathématique. Ces choix sont principalement opérés par des considérations sur le réel et dans une moindre mesure par des choix non justifiés dans la réponse. Il semble que certains élèves s'appuient sur le contexte réel pour envisager l'élaboration de leur modèle, comme l'illustrent les exemples suivants :

Q28-Qgrandeurs_I : Y a-t-il des branches qui meurent et qui tombent ?

« *Oui, c'est un phénomène naturel* » (R1, 28)

Q6-Qgrandeurs_I : Existe-t-il une longueur maximale pour une branche ?

« *Il existe une longueur maximale pour une branche car plus les années passent moins les branches grandissent* » (R4, 6)

Quant aux choix a priori, certains semblent avoir le statut d'hypothèses simplificatrices de par le choix d'expression tels que « on a pensé », « on suppose » comme l'illustrent les exemples suivants :

Q30-Qgrandeurs_I : Est-ce que les branches continuent de pousser ?

« *Nous on a pensé que oui, elles grandissent chaque année jusqu'en 2023.* » (R3, 30)

Q31-Qgrandeurs_I : Faudra-t-il couper des branches ?

« *Il nous semble que non.* » (R2, 31)

Q15-Qgrandeurs_I : Est-ce que les branches grandissent chaque année ?

« *On peut supposer que oui.* » (R1, 15)

L'analyse des réponses de la catégorie $G_{\text{grandeurs-I}}$ montre que la dévolution de la mathématisation se fait essentiellement à partir du questionnement par les élèves de choix de grandeurs pertinentes à prendre en compte en vue d'élaborer un modèle essentiellement à partir de considérations ancrées dans le réel, rejoignant en cela la pratique experte P_{i1} .

POUR LA CATEGORIE $Q_{\text{GRANDEURS-M}}$

Nous rappelons que les questions de cette catégorie portent sur la mesure d'une grandeur a priori identifiée par les élèves. On obtient la répartition suivante pour les réponses classées (soit 77% des réponses produites dans la catégorie $G_{\text{grandeurs-M}}$), la majorité des réponses non classées étant du type « *on ne sait pas* »

Qgrandeurs_M	sur 142 réponses classées	Rchoix-réel	Rchoix-a priori	Rchoix-maths
$R_{\text{modèle}}$	37%	3%	19%	15%
$R_{\text{grandeurs}}$	53%	6%	13%	34%
$R_{\text{pertinence}}$	10%	7%	3%	0%

Figure 75 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type $Q_{\text{grandeurs_M}}$

Globalement la moitié des réponses portent sur les grandeurs ce qui peut s'expliquer par le fait que les questions relatives à ces réponses portent explicitement sur la recherche de mesures de certaines grandeurs. Pour répondre à ces questions, les élèves ont majoritairement utilisés des outils mathématiques comme nous l'illustrons dans les exemples suivants :

- La proportionnalité :

Q5- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: Quelle est la taille de l'arbre à sa maturité ?

« Entre 2013 et 2014 : + 2,4cm sur le dessin entre 2014 et 2015 : +1,5 cm moyenne de l'accroissement = 1,95 si la croissance reste régulière entre 2015 et 2023 : 8 ans donc $8 \times 1,95 = 15,6$ cm de plus sur le dessin. Mais il y a des chances que la croissance baisse dans les années qui suivent. » (R2, 5)

Q38- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: Quel est le diamètre du tronc chaque année ?

« Nous ne savons pas car il n'y a pas de généralité pour l'évolution du diamètre de l'arbre. Nous avons effectué un produit en croix après avoir mesuré le diamètre en 2013. » (R2, 38)

- La géométrie :

Q34- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: Quelle sera la hauteur de l'arbre en 2023 ?

« Nous n'étions pas d'accord dans la classe : nous avons mesuré en faisant des rectangles autour des arbres. Certains ont trouvé que l'arbre grandit de 50 cm par année, d'autres que l'arbre grandit de 1 m chaque année et on dit qu'en 2023 il mesurera 11 m. » (R1, 34)

- Les suites :

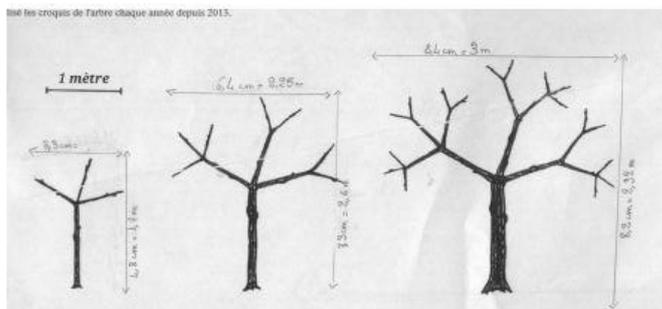
Q60- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il à la toute fin ?

« En 1 an : 7 et à la fin : 19 601 (selon suite de Fibonacci). » (R1, 60)

- Des mesures sur les dessins de la fiction réaliste

Q37- $Q_{\text{grandeurs_M}}$: Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?

« Pour trouver la taille de l'arbre chaque année, il faut prendre des mesures sur les croquis et essayer d'établir un lien entre les anciennes branches et les nouvelles.



» (R2, 37)

Q83-Qgrandeurs_M : Combien faut-il de branches en 2016 ?

« Il y aura 68 branches en 2016. J'ai additionné les branches. Chaque année, il y a 3 branches qui poussent et le reste c'est 2 branches. » (R1, 83)

Q69-Qgrandeurs_M : De combien de mètres ou centimètres pousse l'arbre par an ?

« Sur le dessin :

-	2013	2014	2015
Epaisseur du tronc	2 mm	3 mm	6 mm
Hauteur du tronc	3 cm	3,7 cm	4 cm

» (R1, 69)

- Des calculs en utilisant l'échelle

Q16-Qgrandeurs_M : Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?

« On mesure le diamètre sur le dessin, et on trouve 1mm la 1ère année, on convertit en grandeur réelle grâce à l'échelle : 1 m est représenté par 2,8 cm, donc 1 mm représente 3,57 cm. On multiplie par pi pour obtenir la circonférence, ce qui donne :

En 2013 : 11,21 cm ; en 2014 : 22,43 cm ; en 2015 : 33,64 cm » (R1, 16)

Q90-Qgrandeurs_M : Combien mesure le premier arbre ?

« D'après l'échelle, 1 mètre est représenté par 2,8 cm, donc on fait un produit en croix pour trouver combien représente 1 cm : $1 \times 1 : 2,8 = 0,357$ donc 1 cm représente 0,357 m soit 35,7 cm dans la réalité. Le premier arbre mesure environ 1,70 mètres de hauteur » (R1, 90)

Les éléments d'analyse suivants illustrent la dévolution de la mathématisation horizontale dans la mesure où :

– En ce qui concerne le choix d'un modèle, les réponses des élèves montrent :

- Soit une identification de la nécessité de faire des choix

Q9-Qgrandeurs_M : Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?

« On a cherché à partir des dessins si on pouvait trouver une relation de proportionnalité pour déterminer le nombre de branches qui poussaient chaque année mais on n'en a pas trouvé, il faudrait faire des hypothèses. » (R1, 9)

Q26-Qgrandeurs_M : Est-ce que le tronc grandit de 1 mm en largeur chaque année (sur le dessin) ?

« Le tronc fonctionne pareil que les branches (il grandit pareil). (Règle fixée) » (R2, 26)

Q77-Qgrandeurs_M : Est-ce que l'arbre grandira régulièrement ? De combien l'arbre grandit-il chaque année ?

« On ne sait pas directement, il va falloir faire des observations et des suppositions pour savoir comment grandira l'arbre. On est tout de même obligé de supposer que ce qui est observé sur les 3 schémas restera vrai après. » (R1, 77)

Q78-Qgrandeurs_M : Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?

« Nous n'avons pas vraiment cherché le nombre de branches. Mais on doit supposer que le développement des branches est identique chaque année, sinon on ne peut rien prévoir. » (R1, 78)

- Soit le choix d'un modèle de croissance d'un élément de l'arbre

Q4-Qgrandeurs_M : Combien de branches poussent par an ?

« On suppose que le nombre de branches double chaque année. » (R1, 4)

Q9-Qgrandeurs_M : Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?

« On suppose que chaque année il y a 2 branches qui poussent par branche déjà existante, il y aura donc 4352 branches en 2023. » (R3, 9)

Q11-Qgrandeurs_M : De quelle hauteur l'arbre augmente chaque année ?

« On suppose que d'après les schémas l'arbre grandit de 1 m chaque année. En 2023 l'arbre fera 10m de plus. » (R2, 11)

- Les choix effectués sont parfois justifiés à l'intérieur du contexte réel de la fiction réaliste en particulier montrant en cela que les élèves réfléchissent à l'élaboration d'un modèle mathématique tout en prenant en compte sa cohérence avec la réalité :

Q35-Qgrandeurs_M : La serre doit être plus grande que l'arbre, de combien de mètres ?

« Il faut que la serre soit plus grande, sinon l'arbre ne rentrera pas ! Nous pensons qu'il faut au moins 2 m de plus, mais 5 m de plus ça serait mieux. Nous avons regardé le plafond de notre salle de classe pour essayer de donner un nombre. » (R1, 35)

Q50-Qgrandeurs_M : Combien de mètres faut-il entre l'arbre et la serre ?

« Au niveau de la largeur, on pense qu'il faut plusieurs mètres, pour qu'un tracteur puisse passer par exemple. Au niveau de la hauteur, on pense qu'il faut également plusieurs mètres, pour que le soleil ne brûle pas les feuilles par exemple. » (R1, 50)

Q89-Qgrandeurs_M : Pourquoi ne pas construire une serre assez grande de 75m pour être sûr que ça rentre ?

« On ne pourrait pas car ce serait trop cher et inutile. » (R1, 89)

- La pertinence de certains choix est évaluée en fonction du sens de la question posée dans la fiction réaliste ; en particulier, dans les réponses suivantes, les élèves mettent en évidence que le problème à résoudre concerne la croissance de l'arbre et non pas directement les dimensions de la serre :

Q44-Qgrandeurs_M : Quelle est la distance à respecter entre la serre et l'arbre ?

« On doit simplement connaître la taille de l'arbre en 2023, on n'a donc pas besoin de savoir la distance entre la serre et l'arbre. » (R1, 44)

Q49-Qgrandeurs_M : Quelle est la hauteur de l'arbre en 2023 ?

« Cela fait partie du problème à résoudre car la hauteur obtenue nous donnera la hauteur de la serre à construire. » (R2, 49)

La pertinence du choix de certaines grandeurs est également évaluée par les élèves dans certaines réponses, comme par exemple le fait de ne pas s'intéresser au diamètre du tronc ou de

prendre en compte la forme des feuilles, ou encore de négliger les racines comme le montrent respectivement les exemples suivants :

Q19-Qgrandeurs_M : En 2013, combien mesure le tronc de l'arbre?

« 1,1 m en hauteur grâce à l'Échelle, Pas besoin de calculer le diamètre de l'arbre à cause des branches ! » (R1, 19)

Q75-Qgrandeurs_M : Quelle forme ont les feuilles? Quelle taille ?

« On ne sait pas mais ça peut être important (exemple du palmier) » (R1, 75)

Q94-Qgrandeurs_M : Ses racines grandissent de combien par année ?

« Cela n'a pas d'importance, car les racines poussent sous terre et donc elles ne posent pas de soucis pour la serre. » R(1,94)

Certaines réponses mettent en évidence que les élèves fixent certains choix de modèle soit a priori, soit en anticipant la faisabilité du traitement mathématique qui en découlerait :

- Choix de modèles fixés a priori:

Q63-Qgrandeurs_M : Combien de branches s'ajoutent à chaque fois ?

« Chaque branche se divise en seulement 2 ou 3 et de façon aléatoire. » (R2, 63)

- Choix de modèle fixé en anticipant un possible traitement mathématique

Q78-Qgrandeurs_M : Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?

« Nous n'avons pas vraiment cherché le nombre de branches. Mais on doit supposer que le développement des branches est identique chaque année, sinon on ne peut rien prévoir. » (R1, 78)

D'autres réponses mettent en évidence des premiers choix de mise en relation entre les grandeurs choisies comme par exemple pour dénombrer le nombre de branches comme l'illustre l'exemple suivant :

Q60-Qgrandeurs_M : Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il à la toute fin ?

« Les branches issues de même sommet donne un triplet de branches et les autres sont doubles. Nombre de branches par an : $(3x)^n + (2y)^k$. » (R3, 60)

De par les hypothèses simplificatrices, les choix de modèle ou de grandeurs pertinentes à partir de considérations ancrées dans le réel, mises en évidence dans nos analyses précédentes, nous

avons montré des traces de transposition de la pratique P_{11} , les recherches des élèves sur la quantification de certaines grandeurs montrant quant à elles des traces de transposition de P_{13} .

Il nous semble que les réponses dans lesquelles les élèves déclarent « ne pas savoir » parce que le modèle de proportionnalité ne s'applique pas à la situation de l'arbre pourraient constituer des traces de transposition de P_{12} dans le sens où elles pourraient être interprétées comme le fait que les élèves ont eu comme première intention de mettre à l'épreuve un modèle connu, celui de proportionnalité. Les exemples suivants relèvent de ce type de réponses :

Q59-Qgrandeurs_M : Combien de cm prend-t-il chaque année ?

« Nous ne pouvons pas répondre à cette question car la croissance est irrégulière. »
(R1, 59)

Q60-Qgrandeurs_M : Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il à la toute fin ?

« On ne sait pas, l'évolution n'est pas proportionnelle. » (R2, 60)

Q61-Qgrandeurs_M : De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?

« On ne peut pas savoir car ce n'est pas proportionnel et on n'a pas plus d'informations. » (R1, 61)

POUR LA CATEGORIE Q_{GRANDEURS-E}

Pour les 27 réponses obtenues pour cette catégorie de questions qui portent sur l'échelle, majoritairement les élèves ont acté que les dessins donnés dans la fiction réaliste étaient à l'échelle. Il ne nous a pas semblé que le classement de ces réponses selon nos indicateurs soit utile pour nourrir nos analyses dans la mesure où nous avons identifié que la nature des justifications relevait des trois ordres suivants :

- De l'ordre de l'hypothèse pour simplifier la résolution

Q16-Qgrandeurs_E : Le schéma est-il à l'échelle ?

« La plupart d'entre nous a pensé qu'il fallait supposer que oui ! » (R1, 16)

- De l'ordre d'un argument à partir du contexte réel de la fiction réaliste

Q15-Qgrandeurs_E : Les trois croquis sont-ils à la même échelle?

« Les 3 croquis sont à la même échelle car ce serait contre-productif pour une étude scientifique, de produire des schémas à des échelles différentes. » (R3, 15)

- De l'ordre d'un choix a priori

Q14-Qgrandeurs_E : Les croquis sont-ils à l'échelle ?

« *Les croquis sont à l'échelle: 1 mètre = 2,9 cm* » (R3, 14)

Nous faisons l'hypothèse que les élèves font le choix de s'autoriser à mesurer sur les schémas de l'énoncé de la fiction réaliste afin de pouvoir quantifier certaines grandeurs pour envisager un traitement mathématique, en d'autres termes ils se donnent la possibilité de mobiliser la pratique P₁₃.

POUR LA CATEGORIE Q_{CONTEXTE}

Les questions, auxquelles les élèves doivent répondre, concernent toutes la prise en compte d'éléments de contexte du réel pour résoudre le problème. Nous rappelons les sous catégories de ce groupe de questions :

- Des questions portant sur les feuilles, fruits, fleurs etc. éventuels de l'arbre (Q_{contexte-F})
- Des questions portant sur des demandes de précisions sur l'arbre (âge, nom de l'espèce, etc.) (Q_{contexte-Arbre})
- Des questions sur les besoins spécifiques de l'arbre (climat, engrais, son environnement, etc.) (Q_{contexte-Besoins})
- Des questions portant sur le sens et la compréhension du mot maturité. (Q_{contexte-Maturité})
- Des questions sur l'activité des botanistes (Q_{contexte-Botaniste})

A priori la majorité des réponses va concerner le choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour résoudre le problème. Pour analyser les réponses aux questions de type Q_{contexte}, nous faisons le choix d'utiliser les indicateurs R_{choix-réel}, R_{choix-maths}, R_{modèle-a priori} et R_{pertinence}, afin de mettre en évidence dans les réponses des élèves, -des choix sur les éléments de contexte : à partir de considérations ancrées dans le réel (R_{choix-réel}), à partir d'un travail mathématique (R_{choix-maths}), à partir de choix d'un modèle a priori (R_{modèle-a priori}) ou – des éléments relevant de la pertinence du choix du fragment de réalité considéré dans la question (R_{pertinence}).

Nous faisons l'hypothèse que la nature de l'élément du contexte considéré dans les questions, n'influe pas sur la manière dont les élèves vont opérer des choix à partir de questions sur des éléments de contexte. C'est pourquoi, nous n'utilisons pas les sous catégories du groupe Q_{contexte} dans lesquelles nous avons isolé la nature de l'élément réel considéré dans la question (feuilles, besoins, arbre, maturité, botaniste).

A la lecture des réponses recueillies, nous avons relevé un assez grand nombre de réponses (34%) du type « oui », « non » « on ne sait pas ». Nous l'expliquons par le fait que, les questions concernant des éléments du contexte réel, beaucoup d'élèves n'ayant pas d'informations dans l'énoncé à leurs sujets ne se sont pas prononcés. Comme par exemple,

Q13- $Q_{\text{contexte-F}}$: *L'arbre est-il un arbre fruitier ?* « Nous l'ignorons. » R(1,13)

Ou

Q4- $Q_{\text{contexte-besoins}}$: *L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?*

« Nous ne savons pas. » (R2, 4)

Nous n'avons pas classé les réponses de ce type dans la répartition suivante.

141 réponses	R _{choix-réel}	R _{choix-maths}	R _{choix-modèle}	R _{pertinence}
Q_{contexte}	70%	3%	12%	15%

Figure 76 : Répartition des réponses des élèves pour les questions de type Q_{contexte}

Majoritairement, les élèves ont produit des réponses à partir de considérations ancrées dans le contexte réel. Ces réponses montrent que les élèves n'ont pas encore fait de choix pour « passer du monde réel » au « monde mathématique ». Pour certaines, elles permettent parfois aux élèves de donner une légitimité à la question posée :

Q7- $Q_{\text{contexte-Botaniste}}$: Si les chercheurs ont laissé l'arbre dehors tout le temps, comment pouvaient-ils savoir qu'un changement brusque de température n'allait pas tuer l'arbre ou lui implanter des maladies ?

R1 : « Justement, ils construisent une serre pour pouvoir contrôler la température et éviter les maladies. »

Q4- $Q_{\text{contexte-Arbre}}$: Pourquoi l'arbre est-il schématisé en novembre?

R2 « *L'arbre est schématisé en novembre car il a été découvert ce mois-là. On suppose que l'arbre est un feuillu est qu'il perd ces feuilles. Il est donc plus facile de l'observer et de le schématiser sans ces feuilles. L'arbre est schématisé en novembre car c'est à cette période de l'année qu'il pousse.* »

On retrouve cette idée de légitimité dans les réponses des élèves de la catégorie $R_{\text{pertinence}}$ lorsque les élèves font référence au fait de « croire » l'énoncé :

Q24- $Q_{\text{contexte-F}}$: L'arbre pousse-t-il dans l'hémisphère nord ou sud, autrement dit, possède-t-il des feuilles, des aiguilles?

R2 : « *L'arbre pousse dans l'hémisphère sud car dans l'énoncé il y a écrit que l'arbre est exotique, on en déduit donc qu'il possède des feuilles.* »

Q41- $Q_{\text{contexte-arbre}}$: Quelle est la nature de l'arbre ?

R1 : « *Inconnue, c'est dit dans l'énoncé.* »

Q4- $Q_{\text{contexte-Besoins}}$: *L'exposition* au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?

R1 : « *Nous pensons que non, sinon l'énoncé comporterait davantage d'informations sur ce sujet.* »

Peu d'élèves font des choix sans considérer visiblement le contexte réel ($R_{\text{modèle-a priori}}$) en vue d'élaborer un modèle (12%), et 15% des réponses relèvent de la pertinence de la question reçue au regard de la question posée dans la fiction réaliste ($R_{\text{pertinence}}$). Cependant, si on réunit ces deux catégories de réponses, on obtient que, presque un tiers des élèves font des choix qui permettent de passer du monde réel au monde mathématique, montrant en cela une dévolution de la mathématisation horizontale :

Q37- $Q_{\text{contexte-arbre}}$: Dans quelle terre pousse l'arbre?

R1 : « *On ne considère pas cette information importante pour établir le volume de la serre.* »

Q34- $Q_{\text{contexte-arbre}}$: D'où vient l'arbre ?

R4 : « *On ne sait pas mais cela ne nous semble pas important* »

Q33- $Q_{\text{contexte-arbre}}$: Quel genre de graine a-t-on planté?

R1 : « *On ne considère pas cette information importante pour établir le volume de la serre.* »

Q31- Q_{contexte-arbre} : Comment s'appelle cette espèce d'arbre ?

R2 : « *On ne sait pas mais ça ne sert à rien pour le problème* »

Q26- Q_{contexte-arbre} : L'arbre en 2013 a quel âge ?

R1 : « *Nous ne pouvons point répondre à cette question car il n'y a aucune information qui nous permette de répondre. L'âge de l'arbre ne nous préoccupe pas pour répondre au problème. Idée : on peut partir du principe qu'en 2013, il a 1 an. Cela permet de numéroter les années.* »

Q15- Q_{contexte-Besoins} : L'orientation de la serre est-elle importante ?

R1 : « *Oui pour que l'arbre pousse bien mais pas pour répondre au problème.* »

L'analyse des réponses montre que les élèves n'hésitent pas à répondre soit qu'ils ne savent pas traiter la question reçue tout en explicitant que ce n'est pas important pour la résolution du problème (Q31- Q_{contexte-arbre}) soit en donnant une réponse ancrée dans le réel mais en précisant ne pas en tenir compte dans la résolution (Q15- Q_{contexte-Besoins}). Leurs choix d'éléments de contexte contribuent à la sélection de fragments de réalité à considérer pour traiter mathématiquement le problème, ce qui est une trace de transposition de la pratique P_{i1}.

9-2-2 Synthèse des résultats

Les analyses du corpus des questions-réponses sur la fiction réaliste ont montré que les élèves ont fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème en sélectionnant un ou des fragments de réalité en s'intéressant aux branches, à la serre, aux feuilles, etc. Ils ont identifié des variables pertinentes qui influent sur la situation réelle (le nombre de branches par exemple) ainsi que des variables ou des éléments de contexte non pertinents au vu du problème à résoudre (engrais, feuille, hauteur de l'arbre etc.) et ont choisi des relations pertinentes entre les variables sélectionnées en mobilisant des cadres mathématiques (fonctionnel, proportionnalité, géométrique par exemple). Ces différentes actions témoignent de la transposition à la classe de la pratique P_{i1}.

Les élèves ont identifié la nécessité de modéliser la situation pour prévoir la croissance de l'arbre dans le but de construire une serre. Le choix des variables didactiques (les schémas de l'arbre, la forme asymétrique de l'arbre, le nombre de nouvelles branches, les longueurs du tronc et des branches, la donnée d'une échelle) ont permis un questionnement authentique de la part des élèves sur les grandeurs à identifier et à mettre en relation pour envisager un traitement

mathématique du problème. Le cadre suffisamment réaliste de la fiction a favorisé des réflexions sur les éléments de contexte à prendre en compte amenant les élèves à réaliser que certaines informations sur le contexte réel n'étaient pas nécessairement utiles à la résolution du problème ou bien qu'il était préférable de les négliger pour ne pas complexifier la construction du modèle.

Les analyses ont montré que les élèves ont majoritairement essayé de mettre à l'épreuve un modèle connu, le modèle de proportionnalité, qu'ils ont parfois rejeté en confrontant les résultats obtenus dans ce modèle à la contingence, les amenant alors à reconsidérer leur choix, ce qui témoigne de la transposition de la pratique P_{i2} .

La donnée d'une échelle dans l'énoncé de la fiction réaliste a ouvert la possibilité de réaliser des mesures instrumentées, ce qui a permis aux élèves de quantifier certaines grandeurs et de les confronter avec les données réelles, ce qui témoigne de la transposition de P_{i3} .

Les caractéristiques de la fiction réaliste et la phase de questions-réponses ont favorisé la mobilisation de ces trois pratiques par les élèves qui traduit un travail sous leur responsabilité (sous réserve que l'enseignant le permette, ce que nous mettons à l'étude dans le volet 2), permettant de passer du monde réel (celui de la fiction réaliste) au monde mathématique, c'est-à-dire une dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

Les allers retours entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation pointés à plusieurs reprises dans nos analyses confortent notre hypothèse que la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale sont interconnectées dans une activité de modélisation mathématique de ce type, en classe.

La phase de questions-réponses à partir d'une FRAPPM est une modalité qui a permis aux élèves de vivre les différentes étapes intermédiaires du premier axe horizontal de notre schéma du processus de modélisation (Figure 27).

Conclusions du volet 1 de la partie 3

Nos analyses nous conduisent aux cinq résultats suivants :

Résultat 1 : Les caractéristiques d'une fiction réaliste, conçue comme une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation (FRAPPM), permettent un travail de mathématisation horizontale.

Caractéristiques d'une FRAPPM :

F₁ : une situation a priori non mathématique

F₂ : un contexte fictif mais réaliste

F₃ : la nécessité d'une phase de modélisation pour une prise en charge efficace de la situation

F₄ : la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits

F₅ : la fiction réaliste est conçue comme une adaptation d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles

F₆ : les variables didactiques (Brousseau, 1998) de la fiction réaliste sont choisies de manière à favoriser l'entrée dans la mathématisation horizontale.

Résultat 2 : Une phase de questions-réponses sur une FRAPPM, sous la responsabilité des élèves, permet la dévolution de la mathématisation horizontale.

Résultat 3 : Une FRAPPM et une phase de questions-réponses permettent de transposer à la classe des éléments des trois pratiques invariantes relevant de la mathématisation horizontale, identifiées chez des chercheurs dont le domaine de recherche relève de la modélisation mathématique dans les sciences du vivant, que nous rappelons ci-dessous.

- **P₁₁** Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.
- **P₁₂** Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P₁₁**.
- **P₁₃** La forme de mathématisation « quantification » telle que décrite par Chabot & Roux (2011) est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur (ou de l'apprenti chercheur) pour légitimer le choix du modèle utilisé dans le sens où elle permet de confronter les résultats obtenus avec le modèle avec les données réelles.

Résultat 4 : Une FRAPPM et une phase de questions-réponses favorisent des allers retours entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale.

Résultat 5 : Une FRAPPM et une phase de questions-réponses permettent de faire vivre la partie hachurée du schéma du processus de modélisation (Figure 34) représentée ci-dessous.

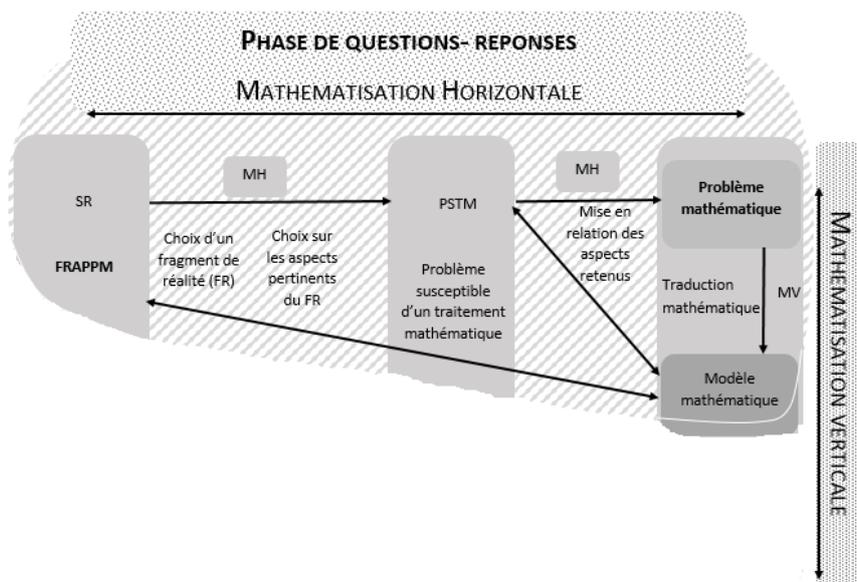


Figure 77 : Partie du schéma du processus de modélisation mathématique mis en œuvre dans les classes à partir d'une FRAPPM et d'une phase de questions-réponses

Dans nos analyses, nous avons précisé que dans ce volet 1, nous n'avons pas pris en considération le rôle de l'enseignant dans la mise en œuvre de la situation. Le suivi de l'enseignante engagée dans le dispositif ResCo lors de notre pré expérimentation nous a interrogées quant aux obstacles potentiels dans les pratiques enseignantes liées à l'enseignement de la mathématisation horizontale. La phase de questions-réponses semble, dans une certaine mesure, jouer le rôle de levier en prenant en charge la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour cette enseignante. Le rôle de l'enseignant est essentiel pour que la richesse potentielle d'un dispositif didactique soit actualisée dans la classe, c'est-à-dire pour qu'au-delà de l'activité des élèves lors de la phase de questions-réponses, il en résulte des apprentissages relevant de la mathématisation horizontale. Le volet 2 fait l'objet de la présentation de nos analyses quant aux conditions, aux contraintes et aux marges de manœuvre relatives aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale au sein d'une activité de modélisation mathématique.

**Volet 2 : Obstacles et leviers
relatifs aux pratiques
enseignantes pour une
dévolution de la
mathématisation horizontale
aux élèves**

Sommaire du volet 2 de la partie 3

Chapitre 10 Problématique, cadre théorique et hypothèses de recherche sur les pratiques des enseignants à propos de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale - Méthodologie de recherche associée

Chapitre 11 : Mise à l'épreuve des hypothèses de recherche – Analyses - Résultats

Conclusions du volet 2

Présentation du volet 2

La modélisation mathématique est un enjeu majeur en mathématiques et la modélisation mathématique est de plus en plus mise en avant dans les curricula, comme le confirme Artigue dès 2009 :

« De plus en plus, les curricula mettent l'accent sur la nécessité de connecter l'enseignement des mathématiques à celui des autres disciplines scientifiques et à des situations de la vie réelle, et par voie de conséquence sur la modélisation. (Artigue & al., 2009, p.1) »

Dans notre étude épistémologique, nous avons montré l'importance de la mathématisation horizontale dans le processus de modélisation mathématique, et nous avons mis en évidence, dans le volet 1 de la partie 3, la contribution potentielle aux apprentissages mathématiques de la mise en œuvre de situations incluant ce processus.

La question générale que nous nous posons à ce stade de notre travail est celle de la possibilité de faire vivre en classe, la mathématisation horizontale dans le cadre du cours ordinaire de la classe de mathématiques.

Les résultats de l'expérimentation conduite dans le cadre du dispositif ResCo (volet 1) montrent que la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale est possible et féconde en termes d'apprentissages mathématiques.

Dans ce volet 2, nous nous interrogeons sur les conditions, les contraintes et les marges de manœuvre quant aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale au sein d'une activité de modélisation mathématique, en nous appuyant sur les mises en œuvre en classe d'une phase de questions-réponses, dans le cadre du dispositif ResCo.

Le chapitre 10 précise notre problématique quant aux pratiques enseignantes associées au fait de faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes et le cadre théorique retenu pour nos analyses. Nous y présentons une analyse écologique des programmes français en mathématiques dans l'enseignement secondaire (11 ans à 18 ans) afin d'interroger la place de la mathématisation horizontale en tant qu'enjeu d'apprentissage mathématique dans l'éducation secondaire ainsi qu'une étude à partir de la littérature portant sur l'identification d'obstacles à l'enseignement de la modélisation mathématique. Nous faisons en effet l'hypothèse que certains de ces obstacles pourraient s'appliquer, au moins en partie, à l'enseignement de la mathématisation horizontale. Nous montrons comment nous nous sommes appuyées sur le

choix du cadre de la double approche didactique et ergonomique et sur notre étude des obstacles à l'enseignement de la modélisation mathématique à travers la littérature, pour émettre des hypothèses de travail sur les obstacles et les conditions sur les pratiques enseignantes au regard de notre problématique. Nous explicitons en quoi ces hypothèses sont des préalables à penser des leviers potentiels internes à la logique du dispositif ResCo qui répondent dans une certaine mesure aux hypothèses concernant les obstacles et les conditions. Afin de répondre à notre question générale, une perspective de recherche serait d'élargir notre étude pour mesurer en quoi le dispositif ResCo est susceptible de faire évoluer les pratiques enseignantes dans le cadre ordinaire de la classe mais cela dépasse le cadre de ce travail.

Nous terminons ce chapitre en précisant la méthodologie d'analyse des données recueillies retenue afin de mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherche.

Le chapitre 11 est consacré à la présentation des analyses et des résultats relatifs aux pratiques enseignantes de nos expérimentations menées au sein du dispositif du groupe ResCo.

Chapitre 10 : Problématique, cadre théorique et hypothèses de recherche sur les pratiques des enseignants à propos de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale - Méthodologie de recherche associée.

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous précisons notre problématique sur les pratiques des enseignants au regard de l'enseignement de la mathématisation horizontale et explicitons le choix du cadre de la double approche didactique et ergonomique. Puis, dans ce cadre, nous intéressant d'abord à la composante institutionnelle des pratiques, nous menons une analyse écologique des programmes mathématiques français du secondaire. Notre objectif est de déterminer, dans les instructions officielles, les conditions de vie de la mathématisation horizontale. Dans un deuxième temps, nous nous proposons d'identifier les principaux obstacles potentiels à l'enseignement de la modélisation mathématique dans la littérature en didactique des mathématiques pour nourrir nos hypothèses sur les freins à l'enseignement de la mathématisation horizontale. Nous faisons en effet l'hypothèse que, la mathématisation horizontale étant constitutive de la modélisation mathématique, certains obstacles liés à l'enseignement de la modélisation mathématique, peuvent s'appliquer, au moins en partie, à l'enseignement de la mathématisation horizontale. Nous poursuivons en formulant et étayant nos hypothèses de recherche quant aux obstacles et conditions pour les pratiques enseignantes liées à cet enseignement. Notre objectif est de cerner ces obstacles et ces conditions potentiels en vue d'identifier des leviers possibles quant aux pratiques enseignantes. Nous avons fait le choix de constituer notre corpus à partir d'expérimentations au sein du dispositif ResCo, ainsi, nous projetons des hypothèses sur des leviers internes à la logique de ce dispositif que nous

précisons. Nous terminons en explicitant la méthodologie de recherche utilisée pour les mettre à l'épreuve.

10-1 Problématique sur les pratiques enseignantes liées à l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale et cadre théorique retenu

Les résultats du volet 1 de la partie 3 ont montré qu'une FRAPPM³³ et une phase de questions-réponses favorisent la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

Dans cette perspective de dévolution, pour qu'au-delà de l'activité des élèves lors de la phase de questions-réponses il en résulte des apprentissages relevant de la mathématisation horizontale, il y a deux enjeux pour les enseignants :

- Percevoir la mathématisation horizontale comme un enjeu d'apprentissage mathématique
- Permettre la dévolution aux élèves de cet enjeu

Ces deux enjeux sont liés dans la mesure où pour favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves, les enseignants doivent s'approprier les enjeux de cette dévolution, le rôle de l'enseignant étant essentiel pour que la richesse potentielle d'un dispositif didactique soit actualisée dans la classe.

L'objectif de ce volet 2 est d'identifier des obstacles, des conditions et des marges de manœuvre quant aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale. Cette étude nous amenant à prendre en compte, du point de vue des enseignants, leurs logiques d'action, leurs libertés d'action, ainsi que les contraintes liées à leurs pratiques enseignantes, nous avons choisi de mobiliser le cadre de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (2002 ; 2005) que nous présentons succinctement dans la suite.

PRESENTATION DU CADRE DE LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE

³³ Fiction réaliste conçue comme une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation

Un des principes essentiels de la double approche est que les pratiques des professeurs ne sont pas pilotées uniquement par le fait qu'elles visent à faire apprendre les mathématiques aux élèves. Les pratiques des enseignants sont considérées comme une activité d'un individu, poussée par des mobiles qui lui sont propres. Elles regroupent « tout ce qu'il pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long, avant, pendant et après la classe » (Robert, 2008, p.59). La double approche propose une méthodologie pour étudier les activités des enseignants en classe et plus globalement les pratiques à partir de l'observation de séances de classe. Elle tient compte des apprentissages potentiels³⁴ des élèves (aspect didactique) et du travail de l'enseignant (aspect ergonomique). Pour rendre compte de ces différents aspects, un découpage en cinq composantes est proposé pour structurer l'analyse de l'activité d'un enseignant (Robert, 2012) qui sont ainsi présentées par Chesnais (2014) :

« Pour appréhender le système complexe des pratiques des enseignants, les pratiques sont décomposées en cinq composantes imbriquées, à recomposer ensuite pour appréhender le travail de l'enseignant : la composante personnelle sert à regrouper tout ce qui concerne les caractéristiques individuelles de l'enseignant (âge, formation, conceptions et connaissances des mathématiques et de leur enseignement, expérience, etc.) ; la composante sociale permet d'apprécier la prise en compte des facteurs liés à la composition sociale de l'établissement et des classes, aux collègues, etc. ; la composante institutionnelle permet de traduire la prise en compte des contraintes liées à l'institution (les programmes, horaires, ...) ; la composante cognitive donne à voir ce qui a trait aux contenus d'enseignement (le choix des exercices, le texte de leçon...) ; enfin la composante médiative concerne les choix que fait l'enseignant dans la gestion de la classe, notamment en termes d'improvisation (part respective et nature du travail individuel et collectif, gestion du temps ...) et le discours qu'il tient (particulièrement les aides au travail des élèves et les exploitations qu'il en fait). » (Chesnais, 2014, p.21-22)

Les composantes cognitive et médiative visent à caractériser les activités effectives que l'enseignant suscite parmi les élèves. La composante cognitive s'apprécie en étudiant les tâches prévues pour les élèves lors d'une séance, les connaissances qu'elles mettent en œuvre et la manière dont elles y sont mises en fonctionnement. La composante médiative englobe les choix d'organisation du travail des élèves dans la classe, l'accompagnement proposé par l'enseignant pendant le déroulement en classe (Robert, 2012). Cet accompagnement assure une fonction d'étayage qui se manifeste notamment par l'enrôlement dans la tâche, les aides apportées et l'identification du savoir mis en jeu (Rogalski, 2012).

³⁴ Les apprentissages ne sont pas nécessairement évalués : on infère un apprentissage possible, à travers les tâches proposées par l'enseignant et l'activité potentiellement développée par les élèves (Robert & Rogalski, 2002).

Les analyses du projet de séance et de son déroulement en classe ne suffisent pas pour accéder à l'intégralité des trois autres composantes, institutionnelle, sociale et personnelle. D'autres données peuvent être nécessaires telles que des entretiens, des questionnaires pour accéder aux raisons des choix de l'enseignant. La composante institutionnelle recouvre la prise en compte des programmes et des ressources institutionnels. La composante sociale caractérise la façon dont l'enseignant prend en compte les choix collectifs des collègues de l'établissement, les habitudes professionnelles des enseignants de mathématiques, les attendus des parents, des IPR, le milieu social des élèves, etc. La composante personnelle prend en compte les représentations de l'enseignant sur les mathématiques, ses convictions personnelles sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Ce cadre théorique nous amène à explorer à travers les cinq composantes, ce qui pourrait se prêter à des hypothèses de recherche sur les obstacles et les conditions pour les pratiques enseignantes relevant de l'apprentissage de la mathématisation horizontale.

Dans un premier temps, nous privilégions une étude de cet enjeu d'apprentissage du point de vue de la composante institutionnelle dont un des éléments principaux sont les programmes scolaires que nous analysons dans le paragraphe suivant.

10-2 La mathématisation horizontale et les programmes français de mathématiques dans le secondaire

Notre étude épistémologique précédente le confirme, dans une activité de modélisation mathématique, il y a des apprentissages mathématiques en jeu qui relèvent de la mathématisation horizontale. Du point de vue de la composante institutionnelle, nous proposons de déterminer les conditions actuelles de vie de la mathématisation horizontale dans les programmes de mathématiques français du secondaire à partir d'une analyse écologique (Artaud 1997, Ravel 2003) de ces programmes c'est-à-dire en outillant nos analyses des notions d' « *habitat* » et de « *niche écologique* » définies comme suit par Artaud :

« Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour de [lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve [cet objet] et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis, regarder en chacun de [ses] habitats, la niche écologique qu' [il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. » (Artaud 1997, p. 111)

La mathématisation horizontale n'étant pas un objet de savoir au sens propre du terme, nous ne nous attendons pas à trouver ce terme dans les programmes. Pour conduire notre étude écologique, nous nous appuyons sur l'étude épistémologique qui nous a permis de dégager les formes que revêt la mathématisation horizontale, afin de répondre aux questions suivantes:

Quels sont les habitats de la mathématisation horizontale dans les programmes mathématiques français du secondaire, c'est-à-dire les différents lieux possibles où l'on peut trouver la mathématisation horizontale ?

Dans ces habitats, quelles sont les différentes niches écologiques pour la mathématisation horizontale, c'est-à-dire les différentes fonctions potentielles occupées par la mathématisation horizontale ?

Pour apporter des éléments de réponses à ces questions nous avons choisi d'analyser les préconisations officielles françaises en vigueur pendant l'année scolaire 2017-2018, du cycle 4 (11 ans à 15 ans) et du lycée général (15 ans à 18 ans).

Prenant en compte que la mathématisation horizontale n'est pas un objet de savoir à proprement parlé, et en nous appuyant sur notre étude épistémologique qui a montré que cette mathématisation peut être apparentée à un objet d'apprentissage constitutif de l'activité de modélisation mathématique, nous envisageons dans un premier temps de déterminer les habitats de la mathématisation horizontale en relevant d'abord ceux de la modélisation. Puis, en utilisant les formes de la mathématisation horizontale définies au paragraphe 4-4-2, nous identifions les niches potentielles de la mathématisation horizontale dans les programmes. En particulier, nous recherchons dans les instructions officielles ce qui relève, pour construire un modèle - de choisir un fragment de réalité sur lequel se questionner ($Indic_{\text{fragment}}$), - d'identifier et choisir des grandeurs pertinentes ($Indic_{\text{grandeurs}}$), - de mettre en relation les grandeurs choisies en vue d'envisager un traitement mathématique ($Indic_{\text{relation}}$).

Les nouveaux programmes français issus de la réforme du collège en 2016 mentionnent six compétences mathématiques présentes du primaire au lycée (de 6 à 18 ans) : *Chercher, Raisonner, Calculer, Modéliser, Représenter, Communiquer*.

La mathématisation horizontale étant constitutive de la modélisation mathématique, nous faisons l'hypothèse que l'habitat principal se situe dans les préconisations officielles concernant la modélisation mathématique. Ce qui nous amène à analyser dans un premier temps les préconisations écrites pour la compétence Modéliser au cycle 4 (12 ans-15ans). Puis, nous

analysons au regard de nos indicateurs les autres compétences majeures, les programmes mathématiques du cycle 4 et du lycée dans l'objectif d'identifier des habitats potentiels avec leurs niches associées.

*10-2-1 La mathématisation horizontale et la compétence
Modéliser en cycle 4*

Comme anticipé a priori, nous n'avons pas trouvé d'occurrence du mot « *mathématisation* » et a fortiori de « *mathématisation horizontale* » dans ces instructions.

Dans le volet « Compétences travaillées » du programme mathématique en cycle 4, cette compétence est déclinée comme suit (MEN 2016)³⁵ :

- « *Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants. (1)*
- *Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques). (2)*
- *Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique. (3)*
- *Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire). (4) »*

Dans l'hypothèse où la situation à résoudre est posée dans le monde réel, au regard du cycle de modélisation retenue dans notre étude (Figure 22), les items (1) et (2) se situent sur l'axe horizontal (de la situation réelle au monde mathématique). Implicitement l'item (1) peut relever de $\text{Indic}_{\text{fragment}}$ et de $\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$ dans la mesure où pour « *reconnaître une situation de proportionnalité* », il convient d'identifier au préalable un fragment de réalité puis de choisir les grandeurs pertinentes relatives à ce fragment qui traduisent potentiellement une relation de proportionnalité. L'item (2) relève explicitement de $\text{Indic}_{\text{relation}}$. Toutefois, nous faisons l'hypothèse que le manque d'explicitation sur comment amener les élèves à « *traduire en langage mathématique une situation réelle* » peut constituer un frein à la mise en œuvre effective de cette préconisation.

L'item (4) se situe quant à lui sur l'axe du retour à la situation réelle puisqu'il mentionne la validation (ou invalidation) du modèle choisi sans toutefois préciser si ces dernières sont basées

³⁵ Nous avons numéroté les items pour s'y référer dans la suite.

sur des considérations ancrées dans le réel ou dans le monde mathématique. La préconisation « *comparer une situation à un modèle connu* » peut rejoindre dans une certaine mesure la pratique P_{i2} qui consiste à choisir dans un premier temps un modèle connu et le mettre à l'épreuve. Cependant, elle pourrait être également interprétée comme relevant de $\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$ et de $\text{Indic}_{\text{relation}}$ dans la mesure où cette comparaison nécessite d'avoir identifié et mis en relation des grandeurs pertinentes pour élaborer ce « *modèle connu* ». Notant à nouveau peu d'explicitation en ce qui concerne comment amener l'élève à réaliser de telles tâches, nous avons complété ces analyses en étudiant le document d'accompagnement Eduscol (2016a) dédié à cette compétence.

Dans ce document est indiqué qu'il convient d'accorder une place importante à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines, comme en témoigne l'extrait suivant :

« La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. [...] On peut en effet décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel. » (Ibid. p.1)

Dans cet extrait, au regard de notre schéma du processus de modélisation, nous retrouvons l'axe horizontal (du réel au monde mathématique) « *mise au point d'un modèle à partir du réel* », l'axe vertical (travail au sein du monde des mathématiques) « *le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques* » et celui du retour au réel (la validation du modèle) « *confrontation des résultats du modèle au réel* ». La mathématisation horizontale est de fait présente dans la mesure où il s'agit de partir du réel pour élaborer un modèle, comme l'illustre l'extrait suivant :

« La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée ». (Ibid. p.4)

Comme nous l'avons envisagé, la compétence « Modéliser » est un habitat potentiel de la mathématisation horizontale. Il ressort du texte qu'une fonction essentielle de cet habitat est de permettre de passer du monde réel au monde mathématique via une « *traduction en langage mathématique* » constituant en cela une niche pour la mathématisation horizontale au sein de cet habitat sous réserve que cette « *traduction* » ne soit pas prise en charge par l'enseignant. En particulier, nous ne trouvons pas d'éléments renvoyant explicitement à la forme de la

mathématisation horizontale qui consiste à identifier les grandeurs pertinentes et à les mettre en relation, fonction incontournable pour réaliser la traduction mathématique d'une situation réelle.

Après avoir ouvert la porte à des possibles, le document d'accompagnement Eduscol (2016a) anticipe sur les contraintes, ce qui conduit selon nous à une restriction de ces possibles. Deux écueils prévisibles y sont explicités : L'un étant « *le temps nécessaire pour laisser les élèves réfléchir, émettre et confronter des hypothèses peut dépasser le cadre de la séance* », l'autre « *les modèles mathématiques permettant de rendre compte de situations réelles peuvent apparaître comme hors de portée des élèves de collège* ».

Deux pistes sont proposées pour surmonter ces obstacles :

« La première piste consiste pour l'enseignant à prendre en charge une partie de la modélisation en présentant une situation déjà simplifiée, voire en partie modélisée. Cette possibilité a l'avantage de diminuer fortement le temps nécessaire pour appréhender la situation et de proposer un cadre où l'on sait que l'élève a les moyens d'effectuer un travail de modélisation » (Ibid. p.4)

Cette piste constitue une seconde niche occupée par la mathématisation dans la mesure où simplifier une situation revient à en sélectionner un ou des fragment(s) de réalité pour lequel on va élaborer un modèle mathématique (Indic_{fragment}). Cependant, on peut regretter la formulation de cette piste qui invite l'enseignant à prendre lui-même en charge une partie de la mathématisation horizontale. Une formulation du type « *l'enseignant veillera à laisser l'élève prendre en charge une partie de la modélisation* » pourrait favoriser davantage, dans les classes, la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves et en cela, pour les enseignants, mettre davantage l'accent sur l'enjeu d'apprentissage de cette mathématisation.

Nous soulignons cependant le point de vigilance suivant écrit également dans ce paragraphe :

« Il est donc important de présenter aux élèves les raisons qui ont présidé au choix du modèle, de les amener à le critiquer de manière argumentée, et d'évoquer lorsque cela est possible des outils et des concepts qu'ils rencontreront plus tard et qui permettront d'améliorer le modèle. »

Ce point de vigilance atténue l'écueil souligné précédemment sur l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale dans la mesure où il est explicitement demandé à l'enseignant de justifier les choix réalisés pour simplifier la situation réelle en vue d'élaborer un modèle mathématique et d'en débattre avec les élèves. Cette préconisation encourage à amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de faire des choix lors d'une activité de modélisation

mathématique même si nous pouvons encore regretter qu'il ne soit pas préconisé que ces choix soient sous leurs responsabilités.

La piste 2 évoquée pour surmonter les écueils mentionnés dans le document d'accompagnement est de « *garder l'idée de la confrontation à la complexité du réel en pariant sur le temps long du projet, que ce soit au sein du cours de mathématiques ou dans le cadre d'un Enseignement pratique interdisciplinaire (EPI)* », qui constitue ainsi une niche pour la mathématisation horizontale au sens où celle-ci contribue à l'appréhension de la complexité du réel. Le choix de cette niche peut se justifier par la possibilité dans le cadre d'un EPI de consacrer un temps plus long que lors d'un cours ordinaire pour travailler la modélisation mathématique et aussi par l'aspect interdisciplinaire que propose ce cadre. Cet aspect est propice à travailler la mathématisation horizontale puisque les situations proposées peuvent être posées dans un cadre non mathématique nécessitant en cela cette mathématisation pour passer dans le monde mathématique afin d'envisager un traitement mathématique de la situation. Dans cette niche, la mathématisation horizontale a pour fonction d'appréhender le réel, pouvant permettre aux élèves une réflexion sur le rôle des mathématiques dans les autres disciplines.

En résumé, dans l'habitat que constitue la compétence Modéliser au cycle 4, les préconisations officielles semblent générer trois niches occupées par la mathématisation horizontale :

- Traduire en langage mathématique une situation
- Rendre les élèves conscients de la nécessité de faire des choix dans une activité de modélisation
- Appréhender la complexité du réel dans le cadre de projets interdisciplinaires.

Toutefois, le peu d'instructions officielles relevant de nos indicateurs $\text{Indic}_{\text{fragment}}$, $\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$ pourrait constituer un frein à la dévolution aux élèves du choix du fragment de réalité et des grandeurs pertinentes en vue d'élaborer un modèle mathématique dans la mesure où ces choix pourraient ne pas relever du topos de l'élève.

10-2-2 La mathématisation horizontale et les autres compétences mathématiques en cycle 4

UN SECOND HABITAT : LA COMPÉTENCE « CHERCHER »

Le préambule du programme de mathématiques du cycle 4 illustre le premier sens de la compétence « Chercher » en précisant qu' on attend de l' élève qu' il sache « *extraire d' un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances* ». (MEN, 2015a p.365)

Un deuxième sens est également présent dans le volet « Compétences travaillées » du programme : il s' agit d' « *émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture* », mais aussi de « *tester, essayer plusieurs pistes de résolution, s' engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, décomposer un problème en sous-problèmes* » (Ibid. p.367)

Ce deuxième sens relève davantage des compétences travaillées relevant de la mathématisation horizontale, comme par exemple « se questionner » lors du passage d' une situation réelle au modèle mathématique (Indic_{fragment}). La compétence Chercher semble constituer un second habitat pour la mathématisation horizontale dont la niche est « *se questionner* ». On peut regretter que la nature des questionnements évoqués ne soit pas davantage explicitée. Il pourrait s' agir par exemple d' un questionnement sur les grandeurs pertinentes et/ou les éléments de contexte de la situation à modéliser à prendre en compte pour élaborer un modèle mathématique ce qui aurait relevé de Indic_{grandeurs}.

UN TROISIEME HABITAT : LA COMPETENCE « REPRESENTER »

La compétence Représenter dans le programme mathématique du cycle 4 est présentée comme suit :

« Le développement de la compétence « Représenter » au cycle 4 doit à la fois permettre à l' élève de progresser dans la vision du réel et dans l' appréhension des objets mathématiques abstraits » (Eduscol, 2016b, p. 1)

La préconisation « *permettre à l' élève de progresser dans la vision du réel* » nous amène à penser que certaines sous compétences travaillées de cette compétence pourraient relever de l' indicateur Indic_{relation} dans la mesure où l' élève peut être amené à mettre en relation des aspects d' un fragment de réalité en en proposant une schématisation. Dans le volet « Compétences travaillées » du programme, pour la compétence Représenter, nous pouvons lire :

- « *Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.*
- *Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.*

- *Représenter des données sous forme d'une série statistique.*
- *Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple, perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau). »*

Dans le cadre d'une activité de modélisation mathématique, cette description peut faire référence à la mise en relation de grandeurs pertinentes identifiées au préalable ($\text{Indic}_{\text{relation}}$). En particulier, la préconisation « *« Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique »* peut relever implicitement de $\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$ et $\text{Indic}_{\text{relation}}$ dans la mesure où l'élève est amené (sous réserve que cela reste à sa charge) à choisir des grandeurs pertinentes pour les représenter et les mettre en relation dans un cadre mathématique.

De notre point de vue, la compétence Représenter peut constituer un troisième habitat pour la mathématisation horizontale dont les niches pourraient être « schématiser un fragment de réalité pour mettre en relation des grandeurs identifiées »

Dans les parties sur les compétences Raisonner, calculer et communiquer, nous n'avons pas relevé d'éléments relevant de nos indicateurs.

UN QUATRIEME ET CINQUIEME HABITAT : THEMES A ET B DES PROGRAMMES

Dans le reste du programme, nous avons recherché les occurrences des mots « *modéliser* » ou « *modélisation* ». Nous précisons qu'aucune occurrence du mot « *mathématisation* » n'a été relevée pour déterminer des habitats potentiels. Nous n'avons trouvé aucune occurrence du mot « *modélisation* » et avons noté deux occurrences du mot « *modéliser* » :

- une occurrence dans le Thème A Nombres et Calculs :

« [Les élèves] *apprennent à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation ou d'une inéquation* » (MEN 2016 p. 372)

- une occurrence dans le Thème B Organisation et gestion de données, fonctions :

« *Modéliser des phénomènes continus par une fonction* » (MEN 2016 p. 374)

Ces deux occurrences relèvent de l'indicateur $\text{Indic}_{\text{relation}}$ dans un cadre algébrique pour l'une et fonctionnel pour l'autre. Toutefois le manque d'informations supplémentaires sur « comment » amener les élèves à modéliser ne permet pas d'affirmer qu'un travail de

mathématisation horizontale sera nécessairement effectif dans les classes, dans la mesure où aucune préconisation ne concerne la responsabilité des choix des grandeurs à mettre en relation. On peut toutefois faire l'hypothèse que les thèmes A et B sont des habitats possibles dont la niche écologique est d'identifier/reconnaître des situations pouvant se modéliser à l'aide du calcul littéral et/ou des fonctions.

UN SIXIEME HABITAT : LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LE SOCLE COMMUN DE CONNAISSANCES, DE COMPETENCES ET DE CULTURE

Nous avons également analysé les instructions officielles autour du travail de ces six compétences dans le décret relatif au socle commun de connaissances, de compétences et de culture d'avril 2015 (MEN, 2015b) :

« L'élève sait mener une démarche d'investigation. Pour cela, il décrit et questionne ses observations ; il prélève, organise et traite l'information utile ; il formule des hypothèses, les teste et les éprouve ; il manipule, explore plusieurs pistes, procède par essais et erreurs ; il modélise pour représenter une situation ; il analyse, argumente, mène différents types de raisonnements (par analogie, déduction logique...) ; il rend compte de sa démarche. Il exploite et communique les résultats de mesures ou de recherches en utilisant les langages scientifiques à bon escient. »

Nous notons ici quelques éléments qui pourraient relever de la mathématisation horizontale :

- « *Il décrit* », « *prélève* », « *organise et traite l'information utile* » peuvent être rapprochés des indicateurs $\text{Indic}_{\text{fragment}}$ et $\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$.
- « *Il modélise pour représenter une situation* » peut relever de l'indicateur $\text{Indic}_{\text{relation}}$.

Cette interprétation possible soutient notre hypothèse que la démarche d'investigation décrite dans le socle commun de connaissances, de compétences et de culture peut être considérée comme un sixième habitat de la mathématisation horizontale dont la niche est la mise en œuvre de l'ensemble des formes de cette mathématisation (que nous avons définies en partie 2), pour passer de la situation réelle au monde mathématique.

10-2-3 La mathématisation horizontale dans les programmes du lycée général

UN PREMIER HABITAT : LA COMPETENCE « MODELISER »

La modélisation occupe également une place significative dans les programmes du lycée général français, où dès la classe de seconde (Grade 10, programme 2009) on trouve explicitement dans les objectifs généraux : « *Modéliser et s'engager dans une activité de recherche* ». Dans ceux de la classe de première (Grade 11) S, ES ou L (2010) ou de la classe de terminale (Grade 12) S, ES ou L (2011), on peut lire (p.2) « *En Analyse, on traite des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets* » et plus généralement dans les programmes de mathématiques du lycée de la voie générale, on note l'objectif général « *chercher, expérimenter, modéliser* ».

Dans la continuité de la réforme des collèges de 2016, un aménagement du programme de mathématiques en seconde est proposé. Son entrée en vigueur est envisagée à la rentrée 2019.

Dans cet aménagement (MEN 2017), on retrouve les six compétences majeures décrites comme suit :

« *L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :*

- *chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;*
- *modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;*
- *représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;*
- *raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;*
- *calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;*
- *communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer oralement une démarche.*

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. » (Ibid. p.1)

Comme envisagé a priori, l'habitat de la mathématisation horizontale est donc situé dans les préconisations autour de la modélisation mathématique. Le manque d'explicitation autour des mots « chercher » et « modéliser » ne nous permet pas d'identifier explicitement des niches potentielles pour faire vivre la mathématisation horizontale selon nos indicateurs. L'interprétation du mot « modéliser » est étroitement liée à la définition que l'on donne à ce mot ce qui peut constituer un frein à faire vivre la mathématisation horizontale dans la mesure où les enseignants pourraient définir ce mot comme « *traduire une situation réelle en langage mathématique* » sans laisser à la charge de l'élève le choix du fragment de réalité, ni des grandeurs pertinentes en vue d'élaborer un modèle.

Une niche, potentiellement occupée par la mathématisation horizontale dans l’habitat « *modéliser* », est celle des Travaux Personnalisés Encadrés (TPE) en classe de première S, travaux pluridisciplinaires menés sur 18 semaines à raison de 2 heures hebdomadaires. Ce type de dispositif peut constituer une niche pour la mathématisation horizontale dans la mesure où celle-ci peut permettre de dépasser la vision fréquente des mathématiques comme fournissant des outils "prêts à l'emploi", ce qui tend à élargir leur contribution au sein d’un travail interdisciplinaire. Par exemple pour le thème national « *Transports et transferts* », la fiche pédagogique Eduscol associée³⁶ suggère aux enseignants de proposer des sujets (sans en donner) sur la modélisation de déplacements, de transferts énergétiques, de déformations... ou encore sur la modélisation des transferts, par exemple dans un réseau (bus, Wifi, LiFi, ...). On peut supposer que faire vivre la mathématisation horizontale dans le cadre de projets de ce type permet de renforcer la perception par les élèves des liens entre mathématiques et autres disciplines. Toutefois, on ne trouve pas de préconisations pour faire vivre ces situations. Comme précédemment, nous faisons l’hypothèse que selon la manière dont les enseignants se représentent la contribution des mathématiques à un travail de modélisation, la mathématisation horizontale pourrait ne pas vivre dans ce dispositif.

UN SECOND HABITAT : LES PARTIES « ALGÈBRE ET ANALYSE », « SUITES » ET « PROBABILITÉS » DANS LES PROGRAMMES MATHÉMATIQUES DE SECONDE

Nous n’avons trouvé aucune occurrence des mots « mathématiser » ou « mathématisation » dans l’organisation des programmes de mathématiques de la classe de seconde. Nous avons relevé une occurrence du mot « modélisation » dans la partie « Fonctions » du programme et deux occurrences du mot « modéliser », une dans la partie « Fonctions » et l’autre dans « Statistiques et probabilités » :

« *La modélisation de phénomènes continus par des fonctions* » (MEN 2017, p.3)

« *Modéliser un problème par une inéquation. (Ibid. p.5)* »

« *Dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables : • d’étudier et modéliser des expériences relevant de l’équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes)* » (Ibid.p.9)

Ces préconisations sont susceptibles d’amener les élèves à identifier des grandeurs pertinentes (Indic_{grandeurs}), et à mettre en relation les grandeurs choisies en vue d’envisager un traitement

³⁶ http://cache.media.eduscol.education.fr/file/TPE/57/3/Transports_et_transferts_804573.pdf

mathématique ($\text{Indic}_{\text{relation}}$). Ce qui nous conduit à faire l'hypothèse que « identifier une situation modélisable dans le cadre de l'algèbre et de l'analyse, des suites ou des probabilités constitue une niche potentiellement occupée par la mathématisation horizontale dans cet habitat.

UN QUATRIEME HABITAT : LES PARTIES « FONCTIONS » ET « PROBABILITES » DANS LES PROGRAMMES MATHÉMATIQUES DE PREMIERE S, ES ET L

Nous n'avons trouvé aucune occurrence des mots « mathématiser » ou « mathématisation » dans l'organisation des programmes de mathématiques de la classe de première. Nous avons relevé une occurrence du mot « modélisation » dans la partie « Algèbre et analyse » du programme et trois occurrences du mot « modéliser », une dans le contenu relatif aux « suites », et l'autre dans « Statistiques et probabilité » :

« Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets. » (MEN 2010, p.2)

« Modéliser et étudier une situation simple à l'aide de suites. » (Ibidem p.4)

« La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde. L'utilisation des arbres pondérés est développée pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes » (Ibid. p.5)

Ces préconisations sont susceptibles d'amener les élèves à identifier des grandeurs pertinentes ($\text{Indic}_{\text{grandeurs}}$), et à mettre en relation les grandeurs choisies en vue d'envisager un traitement mathématique ($\text{Indic}_{\text{relation}}$). Ce qui nous conduit à faire l'hypothèse que « identifier une situation modélisable dans un cadre fonctionnel, et/ou probabiliste » constitue une niche potentiellement occupée par la mathématisation horizontale dans cet habitat.

UN CINQUIEME HABITAT : LES PARTIES « ANALYSE » ET « PROBABILITES » DANS LES PROGRAMMES MATHÉMATIQUES DE TERMINALE ES ET L³⁷

Nous n'avons trouvé aucune occurrence des mots « mathématiser » ou « mathématisation » ou « modéliser » dans l'organisation des programmes de l'enseignement de spécialité de

³⁷ En enseignement de spécialité

mathématiques de la classe de terminale ES ou L. Nous avons relevé une occurrence du mot « modélisation » dans la partie « Analyse » du programme relatif à la terminale L :

« Un des objectifs de ce programme, comme en classe de première, est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets. » (MEN 2011, p.3)

Nous avons relevé deux occurrences de « modélisation » dans la présentation de l'enseignement de spécialité de mathématiques pour les classes de terminale ES, une dans la présentation générale, l'autre dans le contenu « Matrice » :

« L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche. » (Ibid. p.10)
« Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief). » (Ibidem)

Pour les mêmes raisons que pour l'habitat précédent, nous faisons l'hypothèse que « identifier une situation modélisable dans le cadre fonctionnel ou matriciel constitue une niche potentiellement occupée par la mathématisation horizontale dans cet habitat.

UN SIXIEME HABITAT : LES COMMENTAIRES NOTES \rightleftarrows DISTINGUANT DES THEMES POUVANT SE PRETER A DES OUVERTURES INTERDISCIPLINAIRES, EN CONCERTATION AVEC LES PROFESSEURS D'AUTRES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES.

Dans l'organisation des programmes mathématiques de terminale S, nous n'avons trouvé aucune occurrence des mots « mathématiser », « mathématisation », « modéliser ».

Nous avons trouvé une occurrence du mot « modélisation » dans la présentation de l'enseignement de spécialité de mathématiques :

« L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche. » (MEN 2011, p.18)

Néanmoins, dans ces programmes, sont indiqués par le symbole \rightleftarrows , les parties du programme susceptibles de se prêter à des ouvertures interdisciplinaires :

Dans la partie « Analyse » :

- dans le contenu « fonction sinus et cosinus » : « [SPC³⁸] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique » (Ibid. p.6)
- dans le contenu « Fonction logarithme népérien » : « [SI³⁹] Gain lié à une fonction de transfert. ' [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH. » (Ibid. p.7)
- dans le contenu « Intégration » : « [SPC] Mouvement uniformément accéléré. [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique. » (Ibid.p.8)

Dans la partie « Géométrie - nombres complexes » :

« [SI] Analyse fréquentielle d'un système. » (Ibid. p.9)

Dans la partie « Géométrie vectorielle » :

« [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique. » (Ibid. p.10)

Dans la partie « Probabilités et statistiques » :

« [SVT] Hérité, génétique, risque génétique. » (Ibidem)

Nous faisons l'hypothèse que ces commentaires sont susceptibles d'inviter les enseignants à mettre en œuvre dans les classes des activités de modélisation mathématique à partir de situations réelles (éventuellement dans le cadre de projets interdisciplinaires) et ainsi, constituent un habitat pour la mathématisation horizontale. Potentiellement, les élèves seraient amenés à sélectionner les grandeurs pertinentes ($Indic_{grandeurs}$) et à les mettre en relation en vue d'élaborer un modèle ($Indic_{relation}$), ce qui pourrait constituer la niche occupée par la mathématisation horizontale dans cet habitat.

10-2-4 Synthèse de notre analyse des programmes du secondaire

Les programmes français de l'enseignement secondaire accordent une place significative aux activités de modélisation. Au vu de notre étude épistémologique qui nous a outillées pour analyser les programmes, nous avons trouvé six habitats possibles dans les programmes mathématiques du cycle 4 et six habitats potentiels dans ceux du lycée général pour la

³⁸ Sciences Physiques et Chimie

³⁹ Sciences de l'Ingénieur

mathématisation horizontale. Nous pointons que la recherche de ces habitats et des niches écologiques associées nous a été permise davantage par une interprétation des préconisations officielles au regard de nos indicateurs qui sont des formes de la mathématisation horizontale dégagées dans notre partie 2, que par un relevé direct de préconisations portant explicitement sur ces indicateurs. Nous pouvons noter deux points communs entre nos analyses au collège et au lycée.

Le premier est que l'habitat principal est la compétence Modéliser (comme nous l'avons envisagé dans la mesure où la mathématisation horizontale est constitutive de l'activité de modélisation mathématique). Ce mot n'étant pas véritablement défini, il revient à l'enseignant d'en saisir le sens ce qui constitue, de notre point de vue, un obstacle potentiel pour faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes. Ce frein est d'autant plus grand que les programmes ne mentionnent pas, ou parfois seulement implicitement, la nécessité de faire des choix sur les grandeurs pertinentes afin de les mettre ensuite en relation pour élaborer un modèle. En d'autres termes, dans les programmes, cette forme de la mathématisation horizontale n'est pas évoquée explicitement bien qu'étant indispensable pour traduire mathématiquement une situation réelle. Par contre, cette traduction mathématique et la mise en relation des grandeurs figurent au programme. Ce paradoxe pourrait nuire aux conditions de vie de la mathématisation horizontale au sein de l'habitat « Modéliser ».

Le deuxième point commun relève à la fois de l'explicitation d'une contrainte liée à la mise en œuvre d'une activité de modélisation dans les classes qui relève de la composante médiative et d'une proposition de levier au regard de cette même contrainte. Il s'agit de la mise en avant de l'aspect chronophage de telles activités avec une proposition de les mettre en œuvre dans le cadre d'un travail interdisciplinaire sur un temps long (EPI et TPE). Cette proposition de levier montre que, dans les programmes, est intégré le fait qu'il peut y avoir des résistances des enseignants au niveau de la gestion du temps et en même temps que les activités de modélisation doivent vivre dans les classes.

Ces analyses soulèvent une question : les enseignants de mathématiques perçoivent-ils l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale dans les programmes mathématiques du secondaire ?

10-3 Des obstacles liés à l'enseignement de la modélisation mathématique

Les analyses précédentes du point de vue de la composante institutionnelle ont fait émerger des freins potentiels quant aux pratiques enseignantes liées à la mathématisation horizontale, en particulier par le manque de préconisations autour de la nécessité de faire des choix de fragments de réalités et de grandeurs pertinentes en vue d'élaborer un modèle mathématique. Afin d'explorer d'autres freins éventuels selon les autres composantes de la double approche didactique et ergonomique, nous proposons une étude de la littérature en didactique des mathématiques sur les obstacles liés à l'enseignement de la modélisation mathématique. Nous faisons l'hypothèse que sous une certaine forme, au moins une partie de ces obstacles peuvent potentiellement être des obstacles à l'enseignement de la mathématisation horizontale, et constituent en cela des prémisses pour nourrir nos hypothèses de recherche.

Cabassut & Ferrando (2017) qui s'intéressent aux difficultés rencontrées par les enseignants dans l'enseignement de la modélisation mathématique du primaire à l'université en France et en Espagne, pointent principalement comme obstacles : le temps pour préparer une séance d'apprentissage de modélisation mathématique, la difficulté à estimer la durée de cette séance, le fait que les enseignants ne savent pas comment élaborer des tâches de modélisation, le manque de ressources pour construire une activité de modélisation, la difficulté à aider les élèves à développer des compétences en modélisation et à surmonter leurs difficultés. Ces obstacles relatifs à la logique d'action de l'enseignant relèvent principalement des composantes médiative et cognitive.

L'étude de la littérature internationale en éducation mathématique (Schmidt (2011), Blum et al. (2005), Kaiser et al. (2011), Maaß and Gurlitt (2011), Ramirez (2017), Barquero et al. (2018)) permet de dégager plusieurs invariants quant aux freins à l'enseignement de la modélisation mathématique :

- Les professeurs de mathématiques ne jugent pas l'enseignement de la modélisation comme essentiel à la formation mathématique.
- Ils ne se sentent pas suffisamment compétents eux-mêmes en modélisation.

- Ils estiment difficile la gestion de la mise en œuvre de situations d’enseignement de la modélisation ; en particulier, la gestion des multiples solutions possibles et l’analyse des tâches liées à une activité de modélisation.
- Ils se sentent peu à l’aise dans le choix des situations à proposer, dans les interventions et rétroactions à prévoir lors d’une mise en œuvre d’une situation d’enseignement de la modélisation.
- Ils ne se sentent pas à l’aise dans la perspective d’identifier les difficultés des élèves et d’y remédier lors d’une situation d’enseignement de la modélisation.
- Ils déclarent manquer de temps pour organiser un tel enseignement.
- Ils éprouvent des difficultés à évaluer le travail des élèves

Ces études ne s’appliquent pas directement aux professeurs français de mathématiques, cependant notre expérience au sein de ResCo nous conduit à faire l’hypothèse que ces freins s’appliquent également à l’enseignement de la modélisation mathématique en France. Ces obstacles sont d’origines variées et relèvent essentiellement de la composante médiative (par exemple, gestion de la classe, gestion du temps) et de la composante personnelle (connaissances de l’enseignant).

Nous nous appuyons sur l’ensemble de ces obstacles afin d’étayer nos hypothèses de recherche quant aux pratiques enseignantes relevant de l’enseignement de la mathématisation horizontale.

10-4 Hypothèses de recherche sur les pratiques enseignantes relevant de l'apprentissage de la mathématisation horizontale

Notre problématique est double : il s'agit dans un premier temps de faire des hypothèses sur des obstacles et des conditions nécessaires pour que les enseignants puissent faire vivre en classe la mathématisation horizontale. Dans un second temps, nous nous appuyons sur ces hypothèses pour envisager des leviers permettant de les dépasser.

Nous envisageons en effet que nos hypothèses de recherche sur les obstacles et les conditions soient des préalables à penser les leviers, autrement dit que les leviers potentiels répondent dans une certaine mesure aux hypothèses concernant les obstacles et les conditions.

Ayant fait le choix de conduire notre étude au sein du dispositif ResCo, les leviers que nous projetons sont internes à la logique de ce dispositif.

Pourquoi ce choix ?

D'une part, notre analyse des programmes a mis en évidence que l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale est plutôt implicite dans les textes officiels du secondaire, ce qui nous conforte dans l'idée que, dans les pratiques ordinaires, la mathématisation horizontale est sans doute peu présente. Il nous semble de plus difficile d'observer des pratiques relevant de la mathématisation horizontale dans le quotidien des classes, dans la mesure où bien que des travaux soient conduits depuis plusieurs années pour développer des ressources pour la classe⁴⁰, les activités de modélisation (et a fortiori de mathématisation horizontale) sont peu présentes dans les manuels scolaires, ce qui nous amène à douter qu'elles soient très répandues dans les classes comme le soulignent les membres du groupe Modélisation (IREM Paris 7) :

« Pour nous, enseignants de mathématiques, c'est un réel défi car notre formation nous y a très rarement préparés, que les manuels ne nous en donnent à voir que de pâles ersatz, et aussi car il s'agit de pratiques dans lesquelles nous nous trouvons très vite confrontés aux limites de nos connaissances et à la difficulté d'exploiter celles que nous croyons pourtant bien maîtriser hors des contextes qui nous sont familiers »⁴¹.

⁴⁰ Par exemple le projet LEMA (<http://www.lemma-project.org/>), le Groupe Modélisation Irem Paris 7, le groupe ResCo de l'IREM de Montpellier.

⁴¹ Extrait d'un document (p.2) consulté le 28 octobre 2015 sur http://www.apmep.fr/IMG/pdf/86_Baroux_Artigue_Modelisation_interdisciplinarite.pdf

D'autre part, les résultats du volet 1 de la partie 3 ont montré que la phase de questions-réponses du dispositif ResCo permet de travailler la mathématisation horizontale et, de ce fait, est susceptible d'apporter des éléments de réponses à nos questions sur les pratiques.

Ce choix de terrain d'expérimentation nous amène à formuler des hypothèses sur le dispositif ResCo lui-même, susceptibles d'apporter des éléments de réponses à nos hypothèses de recherche concernant les obstacles et les conditions sur les pratiques enseignantes. Nous faisons l'hypothèse que le dispositif ResCo peut jouer le rôle de loupe révélatrice au moins pour certains leviers qui pourraient avoir une portée plus générale.

Ainsi, nos hypothèses de recherche sur les pratiques enseignantes concernant l'apprentissage de la mathématisation horizontale se situent à deux niveaux :

- Premier niveau :
 - des obstacles potentiels
 - des conditions potentielles favorisant cet enseignement
- Deuxième niveau
 - des leviers potentiels internes au dispositif ResCo

HYPOTHESES DE TRAVAIL RELATIVES AUX OBSTACLES - PREMIER NIVEAU :

Ces hypothèses découlent des freins explicités au paragraphe 10-3 concernant :

- l'enjeu d'apprentissage, lié à la composante personnelle

HTo1 : La mathématisation horizontale n'est pas un enjeu d'apprentissage identifié par les enseignants de mathématiques.

- la contrainte du temps, liée à la composante médiative

HTo2 : La mathématisation horizontale est un enjeu d'apprentissage identifié par les enseignants de mathématiques mais considéré par ces derniers comme trop chronophage.

- le choix ou l'élaboration de situations, liés à la composante cognitive

HTo3 : Il est difficile pour les enseignants de mathématiques d'élaborer ou d'identifier des situations à proposer dans les classes porteuses d'un travail relevant de la mathématisation horizontale.

- les difficultés de mise en œuvre, liées à la composante médiative

Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés sont en partie liées au changement de contrat didactique qu'induit un travail de mathématisation horizontale : les tâches à réaliser par les élèves ne sont pas ordinaires, comme identifier un fragment de réalité, identifier les aspects de ce fragment en vue de traiter mathématiquement le problème, et peuvent rendre les interventions et les rétroactions plus difficiles à anticiper par l'enseignant ; plusieurs choix sont possibles pour envisager le traitement mathématique de la fiction réaliste. Ceci nourrit l'hypothèse suivante :

HTo4 : Le contrat didactique habituel de la classe peut faire obstacle à la mise en œuvre d'un travail de mathématisation horizontale.

HYPOTHESES DE TRAVAIL RELATIVES AUX CONDITIONS - PREMIER NIVEAU :

Pour ces hypothèses, nous nous appuyons plus particulièrement sur notre expérience au sein de ResCo, sur les choix de ResCo relus avec un point de vue de chercheur et sur les obstacles identifiés précédemment dans la littérature.

Il semble nécessaire que les enseignants de mathématiques mesurent l'importance de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation mathématique en particulier lors du passage de la situation réelle au monde mathématique. Enrichir leurs connaissances via la formation à ce sujet nous semble incontournable.

HTc1 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques identifient que pour envisager un traitement mathématique d'une situation posée a priori hors champ mathématique, un travail (de mathématisation horizontale) est nécessaire.

Pour aider les enseignants à surmonter les difficultés à trouver des situations porteuses d'un travail de mathématisation horizontale et à choisir des modalités de mise en œuvre favorisant ce travail, il nous semble important de mettre à leur disposition non seulement de telles situations, mais aussi des dispositifs de mise en œuvre adaptés. Ce qui nous conduit aux deux hypothèses suivantes :

HTc2 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques disposent de dispositifs de mise en œuvre favorisant la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

HTc3 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques disposent d'exemples de situations favorisant la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

HYPOTHESES DE RECHERCHE :

Notre terrain d'expérimentation étant le dispositif ResCo, nous rappelons que nous avons pensé des leviers internes à ce dispositif dans le but d'obtenir des éléments de réponses à nos hypothèses de recherche. A posteriori, nous nous poserons la question de la portée plus générale de nos résultats.

Nous faisons l'hypothèse qu'un premier levier est de proposer aux enseignants des situations favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves en leur en explicitant les caractéristiques. Du point de vue des composantes institutionnelle et cognitive, cela pourrait enrichir les ressources disponibles pour l'enseignant et favoriser son autonomie à faire des choix, voire à élaborer des situations porteuses de la mathématisation horizontale.

On suppose qu'un deuxième levier, via la formation, est de proposer aux enseignants un dispositif porteur de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves et de les accompagner dans sa mise en œuvre. Cela pourrait leur montrer, du point de vue des composantes sociale et personnelle, la faisabilité opérationnelle en classe d'un tel travail et réduire éventuellement les incertitudes des enseignants générées par la mise en œuvre de ce type de travail. Le dispositif n'étant pas proposé par l'enseignant lui-même, nous supposons que cela peut modifier le contrat didactique de la classe dans la mesure où l'enseignant ne porte pas toutes les responsabilités de la mise en œuvre du travail proposé aux élèves. L'enseignant peut s'appuyer sur les organisateurs du dispositif pour justifier ses choix d'action et/ou de réponses auprès des élèves (composantes médiative et cognitive).

Nous faisons l'hypothèse qu'un troisième levier, via la formation, serait de rendre les enseignants acteurs d'un travail de mathématisation horizontale. Du point de vue de la composante institutionnelle, on peut supposer que cela apporte aux enseignants une meilleure visibilité de la place de la mathématisation horizontale dans la modélisation mathématique. Du point de vue de la composante cognitive, les enseignants pourraient mieux identifier les enjeux de l'enseignement de la mathématisation horizontale en le situant par rapport aux autres contenus et en l'associant à des tâches plus précises. Cela permettrait également de les rassurer d'une part, quant à leurs compétences à proposer un tel travail, d'autre part quant au fait qu'un tel travail génère des apprentissages mathématiques liés à la modélisation et en cela ne constitue pas une perte de temps et s'inscrit bien dans les préconisations institutionnelles.

Formulés dans le cadre du dispositif ResCo, ces trois leviers nous amènent aux hypothèses de recherche suivantes :

HRLevier-ResCo1 : Le dispositif ResCo est pertinent pour permettre aux enseignants de mieux s'appropriier l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale en enrichissant les composantes personnelle, cognitive et médiative de leurs pratiques.

HRLevier-ResCo2 : Le dispositif ResCo prend en charge un certain nombre d'obstacles liés à l'apprentissage de la mathématisation horizontale en proposant une situation et une phase de questions-réponses, favorisant la dévolution aux élèves de cette mathématisation.

HRLevier-ResCo3 : Le stage de formation et l'accompagnement proposé par le groupe ResCo installent des conditions favorables qui permettent à l'enseignant de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale.

10-5 Description et méthodologie

Afin de mettre nos hypothèses de recherche de type Levier-ResCo à l'épreuve, dans l'objectif d'identifier des conditions, des contraintes et des marges de manœuvre quant aux pratiques d'enseignement de la mathématisation horizontale, nous avons recueilli le corpus détaillé ci-après. Ce corpus ne prétend pas être représentatif des pratiques de tous les enseignants participants au dispositif ResCo mais il devrait permettre d'obtenir des premiers éléments de réponses à notre problématique qui pourraient donner lieu à des pistes de recherche pour une étude ultérieure plus fine et plus approfondie sur les pratiques enseignantes relevant de la mathématisation horizontale :

- Une captation vidéo, lors du stage PAF 2015-2016 de ResCo, de la phase de questions-réponses vécue par les stagiaires à partir de la fiction réaliste « L'arbre » sur laquelle nous nous appuyerons plus particulièrement pour HRLevier-ResCo1.
- des captations vidéo des séances dans les classes de 3 enseignants (réalisés par leurs soins) ayant participé au dispositif ResCo sur la fiction réaliste « L'arbre » en 2015-2016, sur lesquelles nous nous appuyerons plus particulièrement pour HRLevier-ResCo2 et HRLevier-ResCo3.

- Les réponses aux questionnaires destinés aux enseignants ayant participé au dispositif ResCo de 2013 à 2018. Nous précisons que selon les années, les formulations des questions du questionnaire peuvent différer quelque peu et que le nombre de réponses à ce questionnaire est respectivement de 4, 8, 15, 11, 18, pour les années 2013 (63 classes engagées), 2015 (55 classes engagées), 2016 (60 classes engagées), 2017(52 classes engagées), 2018 (66 classes engagées). (Il n’y a pas eu de questionnaire en 2014)

Pour chaque hypothèse, nous définissons, dans la suite, les indicateurs choisis pour analyser les données du corpus.

INDICATEURS POUR HRLEVIER-RESCO1 : Le dispositif ResCo est pertinent pour permettre aux enseignants de mieux s’appropriier l’enjeu d’apprentissage de la mathématisation horizontale.

Indicateur 1-ResCo1 : Le bilan éventuel à l’issue de la phase de questions-réponses

Nous faisons l’hypothèse que l’identification par les enseignants de l’enjeu d’apprentissage de la mathématisation horizontale pourrait se traduire par la proposition aux élèves, d’un bilan portant sur l’identification des connaissances mobilisées. Ainsi, le contenu d’un éventuel bilan des apprentissages générés par la phase de questions-réponses peut montrer dans quelle mesure l’enseignant s’est approprié les enjeux d’apprentissage de la mathématisation horizontale. (EAMH). L’absence d’un tel bilan peut montrer que l’enseignant n’identifie pas la mathématisation horizontale comme un enjeu d’apprentissage ou éventuellement que cet enseignant ne propose jamais de bilan, ou encore qu’il a manqué de temps pour le faire.

Nous utilisons les abréviations suivantes pour préciser le degré de l’appropriation par les enseignants de l’EAMH :

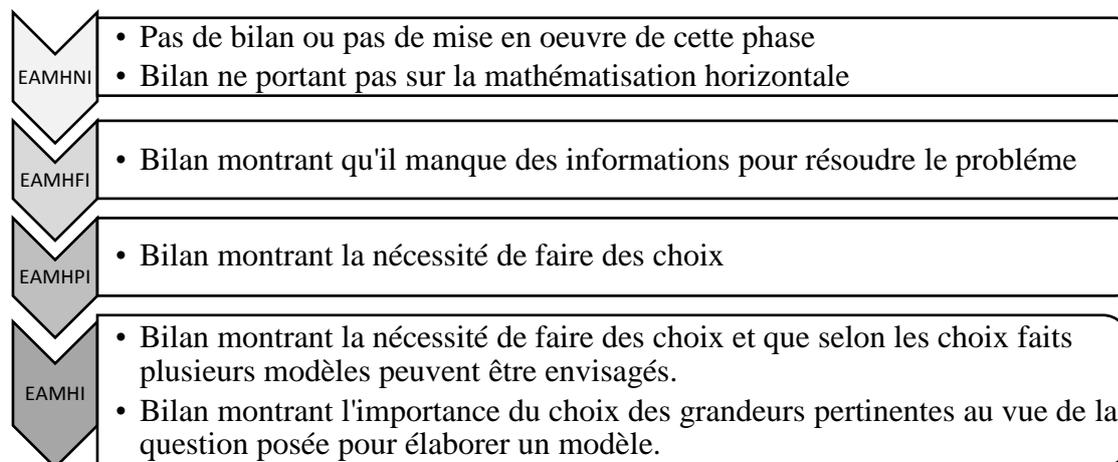
EAMHNI : Enjeu de l’appropriation de la mathématisation horizontale a priori non identifié

EAMHFI : Enjeu de l’appropriation de la mathématisation horizontale a priori faiblement identifié

EAMHPI : Enjeu de l’appropriation de la mathématisation horizontale a priori plutôt identifié

EAMHS : Enjeu de l’appropriation de la mathématisation horizontale a priori identifié

Nous proposons pour ce bilan après la phase de questions-réponses, les indicateurs suivants :



Nous analyserons comment les enseignants débudent les séances 1 et 2 en nous attachant aux éléments donnés dans l'introduction de ces séances pouvant amener les élèves à comprendre l'intérêt de ces phases de questions-réponses pour la résolution du problème. Nous utiliserons pour les propos donnés par l'enseignant, les indicateurs donnés ci-après, en utilisant les abréviations suivantes :

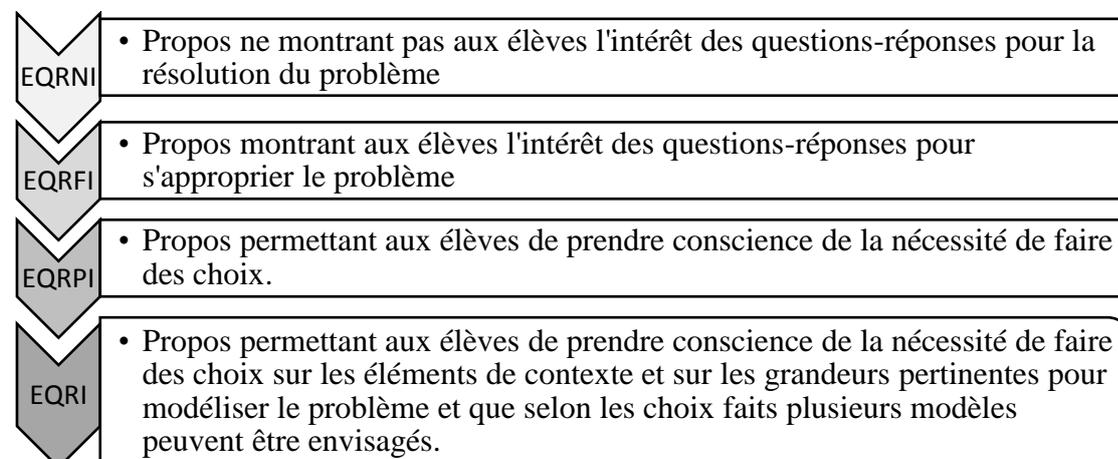
EQRNI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori non identifié

EQRFI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori faiblement identifié

EQRPI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori plutôt identifié

EQRI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori identifié

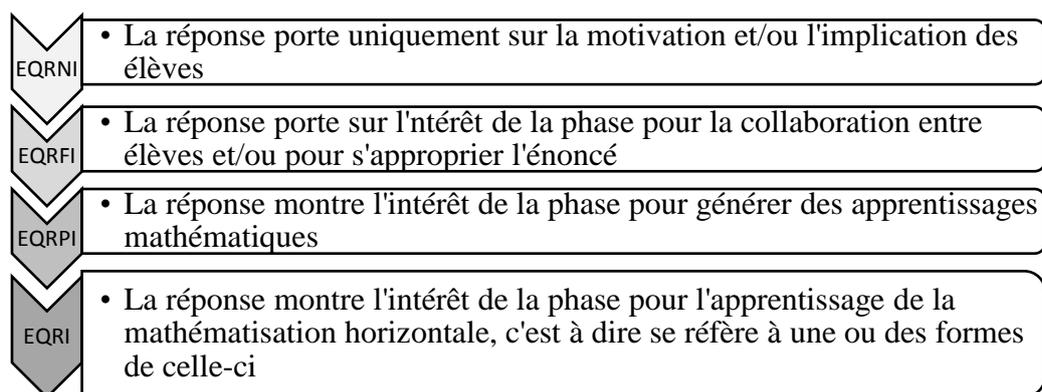
Indicateur 2-ResCo1 :



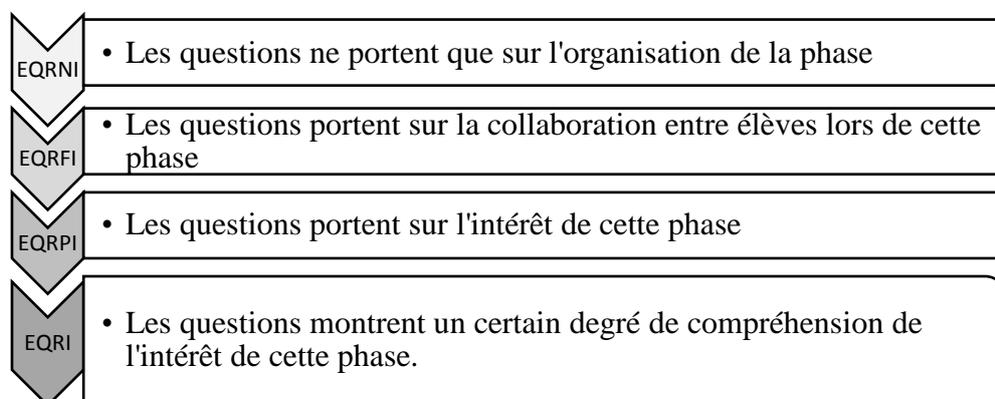
Pour cet indicateur, nous utiliserons les vidéos des trois enseignants participants au dispositif ResCo 2015-2016 avec la fiction réaliste « L'arbre ». Nous couplerons nos analyses avec celle des réponses aux questionnaires à destination des enseignants participants à ResCo (de 2013 à 2018) aux questions suivantes :

- La phase de questions-réponses a-t-elle favorisé l'entrée dans un travail de modélisation pour vos élèves ?
- En quoi la phase de questions-réponses a-t-elle favorisé l'entrée dans un travail de modélisation pour vos élèves ?
- Considérez-vous que la phase de questions-réponses est importante dans le dispositif. Pourquoi ?

Les réponses à ces questions seront analysées de la manière suivante :



Indicateur 3-ResCo1 : La nature des questions posées par les stagiaires lors de la présentation de la phase de questions-réponses pendant le stage de formation continue proposé par ResCo.



Pour cet indicateur, nous utiliserons la vidéo du stage PAF ResCo 2015-2016 et nous couplerons nos analyses avec les réponses aux questionnaires à destination des enseignants participants au dispositif ResCo (de 2013 à 2018) aux mêmes questions que celles choisies pour l'indicateur précédent.

INDICATEURS POUR HRLEVIER-RESCO2 : Le dispositif ResCo prend en charge un certain nombre d'obstacles liés à l'apprentissage de la mathématisation horizontale.

Indicateur-ResCo2 : Dans leurs propos, les enseignants se réfèrent explicitement à ResCo pour justifier leurs actions et/ou leurs réponses auprès des élèves.

Pour cet indicateur, nous utiliserons les vidéos des trois enseignants participants au dispositif ResCo 2015-2016 avec la fiction réaliste « L'arbre ».

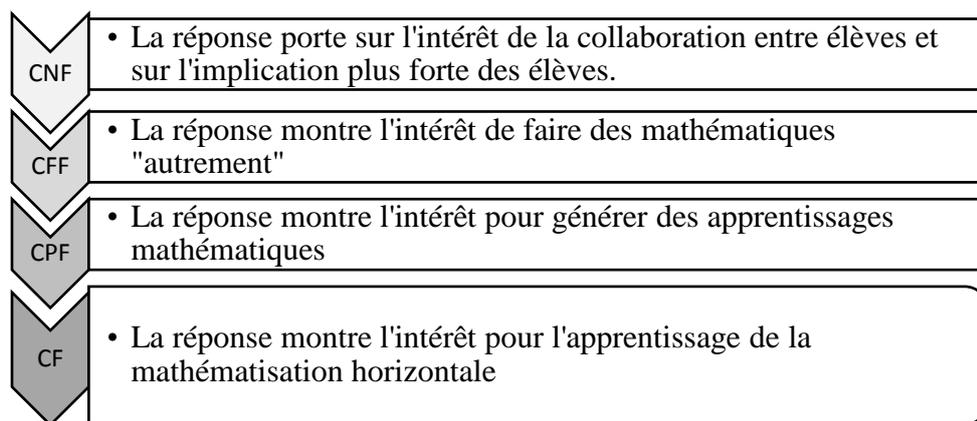
INDICATEURS POUR HRLEVIER-RESCO3 : Le stage de formation et l'accompagnement proposé par le groupe ResCo installent des conditions favorables qui permettent à l'enseignant de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale.

Indicateur 1-ResCo3 : Le taux d'abandons en cours de participation au dispositif ResCo en 2015-2016, 2016-2017 et 2017-2018.

Indicateur 2-ResCo3 : Nous utiliserons la réponse dans les questionnaires à la question suivante

- Lors de la mise en activité des élèves, quelle(s) influence(s) ce type de problème a-t-il eu sur leur approche des mathématiques ?

Nous analysons ces réponses de la manière suivante :



Les abréviations CNF, CFF, CPF et CF renvoient respectivement à : conditions a priori non favorables, conditions a priori faiblement favorables, conditions a priori plutôt favorables et conditions a priori favorables)

Indicateur 3-ResCo3 : Le taux de « oui » à la réponse à la question du questionnaire suivante :

- Envisageriez-vous d'utiliser le site de résolution collaborative avec d'autres collègues pour mettre en place des problèmes de recherche avec vos élèves en toute autonomie ?

Chapitre 11 Mise à l'épreuve des hypothèses de recherche- Analyses et résultats

Dans ce chapitre, nous mettons à l'épreuve les hypothèses de recherche de type Levier-ResCo en menant nos analyses à partir des indicateurs définis précédemment.

Nous structurons ce chapitre en découpant nos analyses et résultats selon chacune des hypothèses.

Trois enseignants ont accepté de filmer de manière autonome les cinq séances de la session collaborative ResCo autour de la fiction réaliste « L'arbre » en 2015-2016 dans leurs classes.

Le jeune professeur A n'a pas suivi la formation proposée au PAF par ResCo mais a eu l'occasion en tant que professeur stagiaire d'observer l'intégralité du dispositif ResCo dans la classe de son tuteur en 2013-2014. Le professeur B participait pour la troisième fois au dispositif ResCo. Il n'a pas suivi de stage ResCo mais a participé à des présentations du travail de ResCo lors d'animations d'atelier par l'équipe ResCo. Le professeur C a participé en 2013-2014 au stage ResCo.

Nous rappelons que le groupe ResCo établit des groupes de trois classes (parfois deux) qui vont travailler ensemble pendant cinq semaines en communiquant par le biais des enseignants sur une plate-forme. Selon le dispositif ResCo, la séance 1 est une séance d'élaboration de questions qui sont envoyées aux autres classes du groupe. La séance 2 consiste à répondre aux questions reçues et à envoyer ces réponses. La troisième séance est une séance consacrée d'une part à l'analyse des réponses reçues aux questions envoyées lors de la séance 1, d'autre part à la prise de connaissance de la relance rédigée par les membres du groupe ResCo et à la poursuite des recherches. Cette séance vise à favoriser l'identification par les élèves de la nécessité de faire des choix pour élaborer un modèle mathématique. Notre étude portant sur la phase de questions-réponses, nous n'analyserons pas spécifiquement les séances 4 et 5 qui consistent respectivement à poursuivre les recherches et à clôturer les recherches, mais nous nous sommes assurées des éléments qu'elles pouvaient apporter en réponse à nos questions.

11-1 Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo1

Dans la suite, nous mettons à l'épreuve l'hypothèse de recherche sur la pertinence du dispositif ResCo pour permettre aux enseignants de mieux s'approprier l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale d'une part en analysant le bilan éventuel réalisé par l'enseignant à l'issue de la phase de questions-réponses (Indicateur 1-ResCo1) et des éléments de réponses issus des questionnaires élaborés par ResCo à destination des enseignants ayant participé à leur dispositif (Indicateur 2-ResCo1), d'autre part en analysant la nature des interventions des enseignants participants au stage ResCo lors de la présentation de cette phase.(Indicateur 3-ResCo1). Nous faisons une synthèse des résultats obtenus à l'issue de ces trois temps d'analyse.

11-1-1 Selon l'indicateur 1-ResCo1

Selon l'indicateur 1-ResCo1, nous avons analysé dans un premier temps, pour chacun des enseignants, leurs propos dans l'introduction aux élèves des séances portant sur l'élaboration des questions (séance 1) et celle des réponses (séance 2) et, la nature du bilan éventuel effectué à l'issue de la phase de questions-réponses. En prenant en compte l'organisation du dispositif ResCo, il semble cohérent de penser que si ce bilan a lieu, il se situe a priori en séance 3. Dans la perspective que ce ne soit pas le cas, nous avons envisagé de visionner les vidéos concernant les séances 4 et 5 pour éventuellement en trouver une trace. Dans un second temps, nous avons analysé les réponses aux questionnaires à destination des enseignants envoyés par l'équipe ResCo à l'issue d'une session collaborative de 2013 à 2018 en nous attachant à trois questions spécifiques que nous repréciserons dans nos analyses.

LE PROFESSEUR A,

La consigne vidéo-projetée aux élèves pour la séance 1 par le professeur A est la suivante :

- Prendre connaissance du problème individuellement ; puis par groupe ;
- Formuler nos premiers questionnements après la lecture de l'énoncé ;
- Sélectionner et rédiger une dizaine de questions que nous enverrons aux autres classes de notre groupe.

L'enseignant complète la consigne en précisant :

« Il va falloir qu'on arrive à isoler dix questions que vous vous posez par rapport à cet exercice. Dix questions, en fait c'est un petit peu, s'il y a des informations que vous pensez manquer pour pouvoir arriver à la solution et bien il faut poser des questions qui correspondent. D'accord ? Alors ce qu'on va faire pour pas que vous ayez chacun à trouver 10 questions, on va demander 2 questions par groupe ok ? Donc vous regardez l'énoncé, vous vérifiez que vous avez tous compris la même chose, et ensuite vous essayez de donner vos idées si vous avez déjà des idées, et il faut arriver à isoler deux questions par groupe qui pourraient nous aider à avancer encore plus dans notre recherche. Est-ce que c'est clair ? »

La phase de questions à poser est présentée comme une possibilité pour les élèves d'obtenir des « informations » utiles à la « résolution » du problème. Le professeur A intègre cette phase comme inhérente à la résolution du problème mais sous-tend par sa consigne qu'il manque des informations pour avancer dans la résolution.

La consigne pour la séance 2 donnée par ce professeur est la suivante :

« Donc aujourd'hui, nous avons reçu les questions des deux autres classes, alors dans leurs questions vous allez voir qu'il y en a quelques-unes qui rappellent nos questions à nous. Il y en a quelques-unes qui étaient en commun entre les deux classes donc que je n'ai pas mis deux fois. Je vais vous les distribuer. Alors aujourd'hui on va regarder les questions qu'on a reçues, et on va essayer d'y répondre, j'ai bien dit essayer ! Donc chaque groupe choisira une ou deux questions de la liste que je vais vous distribuer, et essaiera de répondre à ces deux questions et après on fera un bilan pour envoyer nos réponses. Ok ? Alors des fois on n'aura pas forcément des réponses, euh, efficaces, hein, mais on peut quand même faire des commentaires. Par exemple s'il y a des questions qu'on ne trouve pas forcément utiles à la résolution du problème, on pourra le leur dire gentiment. »

L'enseignant insiste sur l'intérêt que doivent avoir les questions par rapport à la résolution du problème mais le rôle de la phase des réponses pour la résolution semble plus flou notamment via les expressions « on va essayer d'y répondre, j'ai bien dit essayer » ou « on n'aura pas forcément des réponses efficaces ».

Dans le déroulement de cette séance, on note des débats entre élèves autour de la nécessité de faire des choix pertinents pour résoudre la situation de « L'arbre », comme l'illustrent les verbatims de l'extrait suivant :

Prof A: La question suivante, c'était ? Quelle est la forme de la serre, sur cette question il y avait les groupes 6 et 7. Alors, allons-y [En s'adressant au groupe 6]

Le groupe 6 : Nous on a dit que la serre elle avait une base de pavé droit et elle avait un toit arrondi.

Prof A: Comme du pain de mie ?

Le groupe 6 : Oui, voilà !

[Rires]

Prof A: Vous voyez le croque-monsieur, et bien ça fait pareil !

Un élève : La serre a une forme de croque-monsieur !

Prof A : Mais non c'était pour vous expliquer ! Pourquoi ? [En s'adressant au groupe 6] S'il vous plaît on s'écoute ! Pourquoi ?

Le groupe 6 : Parce que la longueur

Prof A : Écoutons l'avis du groupe 7.

Le groupe 7 : La taille de la serre dépendra de la forme de l'arbre.

Un élève : Là tu parles de la forme pas de la serre.

Le groupe 6 : Mais Madame, de toute façon ce n'est pas demandé la forme de la serre !

Prof A : Mais si, quelle est la forme !

[Rires]

Le groupe 6 [En brandissant l'énoncé] : Non, mais on nous demande prévoyez comment sera l'arbre, pas comment sera la serre !

Un élève : Mais oui Madame.

Le groupe 6 : Non mais on peut leur dire que ce n'est pas important !

Prof A : Vous parlez tous en même temps, on ne comprend rien ! Donc [En s'adressant au groupe 6]

Le groupe 6 : On peut leur dire que ce n'est pas important, qu'on demande la taille de l'arbre et pas de la serre !

Un élève : C'est marqué qu'ils veulent construire une serre !

Le groupe 6 : On te demande prévoyez comment sera l'arbre ! En fait, leur question n'a pas de rapport avec la question du sujet !

[Un élève demande la parole]

Prof A : Donc on va leur dire, nous pensons que la forme de la serre dépendra de la forme de l'arbre. Mais la question du problème est de prévoir la taille de l'arbre, donc la forme de la serre ne nous semble pas importante. C'est ça ?

Les élèves : Oui.

Prof A : [Tape en même temps au clavier] Si nous devons choisir une forme, nous choisirions une forme de pavé droit pour la base du tronc et puis sphérique pour les branches de l'arbre. D'accord ? Donc les deux groupes, vous me dites si ça vous convient ce que j'ai écrit. Ça va ?

Les deux groupes : Oui

L'élève qui levait le doigt est interrogé.

L'élève : Ils ne nous disent pas que la serre doit être la plus petite possible !

Prof A : Non mais c'est leur idée, alors on propose mais on ne la gardera peut-être pas ! On n'acte rien là ! On propose !

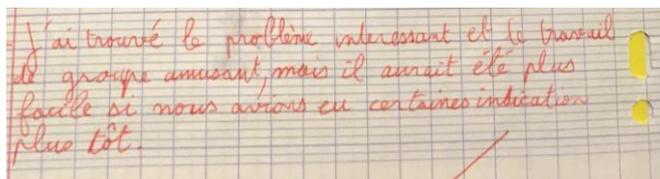
Dans cet extrait, les élèves s'interrogent sur la pertinence de la question posée au vue du problème. L'enseignant dit explicitement aux élèves que la réponse (qui sera envoyée aux autres classes du groupe auquel appartient sa classe) relève d' « *une proposition* » par la classe. Cela peut paraître ambigu pour les élèves mais dans la logique d'action du professeur A cela peut relever de la nécessité de faire un choix parmi des possibles d'où l'expression « *On n'acte rien là ! On propose !* »

Nous n'avons pas trouvé de trace de bilan portant sur la phase de questions-réponses. Lors de la séance 3, l'enseignant n'a pas montré aux élèves les réponses élaborées par les autres classes aux questions envoyées par sa classe. Il a de suite proposé aux élèves de prendre connaissance

de la relance et de poursuivre les recherches comme le montre la consigne suivante donnée par le professeur A en début de séance 3 :

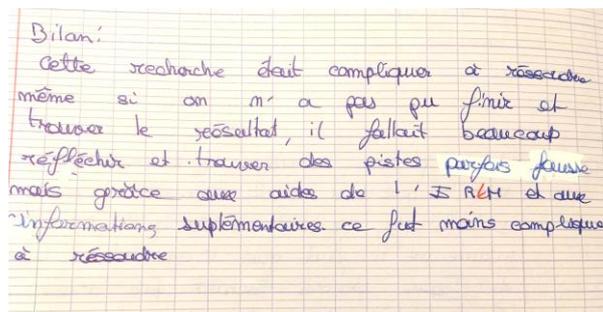
« Donc, pour cette semaine, on a reçu une relance de la part de l'IREM, qui a pris connaissance de toutes vos questions et de toutes vos réponses et qui ont choisi de vous faire passer un long message, en vous donnant plein de nouvelles indications. Le but du jeu était de recentrer toutes les classes sur le même problème, [S'interrompt parce qu'un élève s'agite] c'était de recentrer toutes les classes sur le même problème pour que tout le monde cherche la même chose et pour que vous ayez un peu plus d'informations pour avancer, ok ? Donc, je vous distribue la relance qui nous a été envoyée et que nous allons lire ensemble. »

Le visionnage des séances 4 et 5 n'a pas permis d'identifier un bilan autour de la nécessité de faire des choix. Les élèves n'ont pas nécessairement compris la pertinence de la phase de questions-réponses pour la résolution du problème comme l'illustrent certains extraits de leurs écrits lors de la séance 5 :



« J'ai trouvé le problème intéressant et le travail de groupe amusant, mais il aurait été plus facile si nous avions eu certaines indications plus tôt »

L'élève fait référence ici aux informations apportées par la relance. Nous rappelons que le texte de relance, rédigé par l'équipe ResCo (cf. 1-2-2), vise à fixer certains choix en se basant sur les productions des élèves lors des séances 1 et 2 afin de permettre la poursuite d'une résolution collaborative de la fiction réaliste. Sans accompagnement explicite par l'enseignant sur le fait que cette relance fixe des choix parmi des possibles, les élèves peuvent être amenés à penser que ce document donne des informations (ou indications) qui manquaient dans l'énoncé de départ de la fiction réaliste. L'exemple ci-dessus illustre le cas où un élève reprend le mot « indications » utilisé par le professeur A lors de l'introduction de la séance 1, pour qualifier les choix fixés par la relance. Dans l'exemple suivant, un élève utilise le mot « informations » supplémentaires pour qualifier les choix fixés par la relance, mot également employé par le professeur A, lors l'introduction de la séance 1.



Bilan:
 Cette recherche était compliquée à résoudre même si on n'a pas pu finir et trouver le résultat, il fallait beaucoup réfléchir et trouver des pistes parfois fausses mais grâce aux aides de l'IREM et aux informations supplémentaires, ce fut moins compliqué à résoudre.

« Bilan :

Cette recherche était compliquée à résoudre même si on n'a pas pu finir et trouver le résultat, il fallait beaucoup réfléchir et trouver des pistes parfois fausses mais grâce aux aides de l'IREM et aux informations supplémentaires, ce fut moins compliqué à résoudre. »

L'absence de bilan de la part de l'enseignant sur la nécessité de faire des choix, en vue d'envisager un traitement mathématique du problème, semble amener certains élèves à percevoir les choix de la relance comme « *une aide* » à la résolution. Globalement selon notre grille de l'indicateur, l'EAMH semble plutôt faiblement identifié par le professeur A.

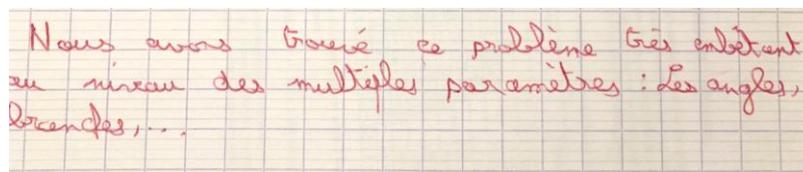
Nous faisons l'hypothèse que les élèves de la classe du professeur A n'ayant pas pris connaissance des réponses à leurs questions émanant des autres classes de leur groupe, n'ont pas eu l'occasion de voir que dans ces réponses certains choix ont pu être effectués par leurs pairs, comme par exemple :

- Quelle est la forme de la serre ? (question de la classe du professeur A)

Réponse 1 reçue : Cela dépend des matériaux utilisés, mais un cube est plus simple ou un pavé

Réponse 2 reçue : Nous pensons à un demi-cylindre ou un tétraèdre.

Malgré ce manque de bilan autour du travail effectué lors de la phase de questions-réponses certains élèves semblent avoir pris conscience de la présence de plusieurs grandeurs comme l'illustrent les propos suivants d'un élève :



Nous avons trouvé ce problème très embêtant au niveau des multiples paramètres : les angles, branches, ...

« *Nous avons trouvé ce problème très embêtant au niveau des multiples paramètres : les angles, branches... »*

Le mot « *embêtant* » laisse à penser que les élèves ont réalisé la multiplicité des grandeurs sans potentiellement s'autoriser à identifier celles les plus pertinentes pour résoudre la situation de l'arbre.

LE PROFESSEUR B,

La consigne du professeur B pour la séance 1 est la suivante :

« Vous allez voir que le problème que je vais vous proposer, on peut difficilement le résoudre tout de suite. On peut mais il y a peut-être des questions à se poser avant. D'accord ? Donc ce que je vais faire maintenant, c'est que je vais vous distribuer l'énoncé. Vous allez prendre 5 minutes pour le lire et pour réfléchir seul. Vraiment seul. Vous ne communiquez pas, d'accord ? Et vous essayez vraiment de vous plonger dedans. Essayez vraiment de comprendre. Ensuite, on passera en groupe, et une fois que vous serez en groupe, vous posez des questions : soit des questions sur la compréhension de vocabulaire, soit des questions « là on ne peut pas répondre, il nous manque des informations », ou qu'est-ce que ça veut dire que ça. Voilà, cherchez des informations en posant des questions, ok ? Et puis vous pouvez aussi commencer à faire des premières conjectures, c'est-à-dire « ah nous on pense que là il faudra plutôt faire ça, ou là ce n'est pas précisé mais on va faire ce choix-là », d'accord ? Bref. Et on mettra tout ça en commun à la fin, on rédigera un petit document et je le posterai sur le forum. Ok ? Les autres classes font pareil de leur côté. »

Le professeur B précise cette consigne après la lecture individuelle :

« Vous allez maintenant passer en groupe de trois ou quatre. Et votre boulot, c'est dans un premier temps de formuler des questions, des choses que vous n'avez pas comprises, des choses qui vous manquent, ok, là il nous manque des informations, on a besoin de savoir ça et ça pour essayer de répondre, ou pour préciser des choses, c'est vous qui décidez. Donc vous faites une série de questions à poser et puis peut-être une série de remarques : nous on pense qu'il y a ça, on pense qu'il y a ça aussi. Ok ? C'est clair pour tout le monde ? »

Ces consignes données aux élèves montrent que le professeur B intègre la phase de questions à la résolution du problème notamment en suggérant aux élèves de débiter la résolution en se posant des questions. Il propose aux élèves des catégories de questions possibles (compréhension de l'énoncé, informations manquantes pour résoudre) sans toutefois exclure des questions qui seraient d'un autre ordre. Lors de cette séance 1, les élèves ont essayé de résoudre le problème en « oubliant un peu » la consigne d'écrire des questions. La mise en commun a débouché davantage sur des premières conjectures élaborées en partie par des prises de mesures instrumentées comme l'illustre le document suivant qui a été déposé par le professeur B sur la plateforme d'échanges :

Les questions

L'échelle qualifie la hauteur ou la largeur ?

→ Certains d'entre nous pensent que c'est pour une longueur en général (hauteur et largeur)

Il faut répondre à quelle question ? Ça veut dire quoi « comment sera l'arbre ... »

→ Certains pensent que c'est la hauteur de l'arbre

L'arbre en 2013 a quel âge ?

Faut-il mesurer les branches ?

Les premières conjectures, pistes de recherche

On a mesuré l'échelle en taille réelle (2,8cm correspond à 1 mètre en taille réelle), puis on a mesuré la hauteur et la largeur... On a pas encore la réponse pour 2023.

On a remarqué qu'en 2013 il fait à peu près moins de 2 mètres, donc en 2023, il y a une dizaine de plus, il fera donc à peu près moins de 20 mètres.

On a remarqué qu'en 2013 l'arbre faisait 1 mètre de hauteur, en 2014 et 2015 c'est impossible qu'il fasse moins de 2 mètres.

On a tenté de dessiner l'arbre avec les branches après 2015 mais on ne sait pas trop comment faire.

Lors de la séance 2, le professeur B est revenu sur le travail effectué lors de cette séance 1 :

« Donc la semaine dernière, je rappelle rapidement, vous avez regardé le problème, posé des questions et commencé à réfléchir à des premières pistes de recherche. Moi j'ai envoyé tout ça sur le forum [il fait défiler le document vidéo projeté], ok. Et d'autres élèves ont posé aussi des questions. Voilà leurs questions »

Puis il a donné la consigne suivante :

« Ce que je vous propose c'est que dans un premier temps, de manière individuelle, vous allez les lire. Ensuite, le défi de la séance, essayez d'apporter des éléments de réponse. Est-ce que vous avez un avis, une réponse à apporter à leurs questions. Quel est votre point de vue ? Ok, et si vous deviez faire des choix, quels choix vous feriez ? Parce que à mon avis il va falloir faire des choix sinon on n'y arrivera jamais. [...]Le but c'est quoi ? C'est juste de dire dans quel cadre on va pouvoir travailler, qu'est-ce qu'on va pouvoir définir et quels choix on va pouvoir faire pour pouvoir travailler et après commencer à résoudre un petit peu le problème. »

De manière très explicite, le professeur B invite les élèves à faire des choix en justifiant sa demande par « à mon avis il va falloir faire des choix sinon on n'y arrivera jamais ». La nécessité de faire des choix semble plus imposée aux élèves que ressentie par les élèves d'autant plus que peu de questions avaient émergé lors de la séance 1. Dans la logique d'action du professeur B, la phase de questions-réponses semble permettre de faire des choix en vue de résoudre le problème.

Les élèves installés par groupes sont invités à répondre aux questions qu'ils souhaitent.

« Vous n'êtes pas obligés de répondre à toutes les questions, vous répondez aux questions que vous voulez. » (Prof B)

La mise en commun consistera à noter les réponses données par les groupes sans véritable discussion dans la classe comme en est représentatif l'extrait suivant :

Groupe A : On a répondu à « aura-t-il le même nombre de branches chaque année ? » Non.

Des élèves les interpellent : Pourquoi ?

Groupe A : On a compté, on a compté en 2013, 2014 et 2015.

Prof B [il tape la réponse au clavier] : Chut. Bien, ok, deuxième groupe.

Lors de la séance 3, le professeur B propose un bilan sur les deux séances précédentes. Nous proposons ci-dessous un extrait de ce moment :

Prof B: Qu'est- ce qu'on a fait pour l'instant lors des dernières séances, vous pouvez me le rappeler ?

Une dizaine de doigts se lèvent.

Une élève : On a répondu aux questions des autres classes.

Prof B: Oui on a répondu aux questions des autres classes. Pourquoi on a posé des questions ? Est-ce que nous on a posé des questions ?

Elèves : Oui

Prof B: Alors, pourquoi ? Pourquoi on a posé des questions et pourquoi eux ils nous ont posé des questions ?

Un élève : Pour savoir plus de trucs.

Prof B: Mais encore ?

Un élève : Pour avoir des indices.

Prof B: Pour avoir des indices, oui.

Un autre élève : Pour avoir plus d'informations.

Prof B: Pour être plus informés, oui.

Un autre élève : Pour nous aider à résoudre le problème.

Prof B: Pour nous aider à résoudre le problème.

Un autre élève : Parce que le problème n'est pas complet.

Prof B: Parce que le problème n'est pas complet.

Un autre élève : Pour chercher.

Prof B: Chercher, ok, pour avoir des pistes de recherches, ok, très bien. Alors ils ont répondu à nos questions. Eux ont répondu à nos questions, on va regarder ce qu'ils ont répondu et ensuite, je vous distribuerai un petit document qu'on lira ensemble, ok ? En fait, je vous ai fait, hein, il y a un chercheur qui nous a proposé ce problème-là. Et ce chercheur, il a regardé un petit peu, car vous êtes 60 classes à avoir cherché ce problème. Il a regardé un petit peu tout ce qui était faisable, tout ce, toutes les questions qui ont été échangées, toutes les pistes de recherche qui ont débuté. Et puis, ben il va nous expliquer deux trois petites choses, [un doigt se lève] notamment le fait de faire des choix.

Un élève : Monsieur ?

Prof : Et qu'est- ce qu'on va prendre pour vrai et qu'est- ce qu'on va prendre pour faux pour la suite, et commencer à approfondir les pistes de recherche qui ont été commencées en classe. Oui ? [Vers l'élève]

L'élève : Monsieur, le chercheur il a la réponse ?

Prof : Non, il s'est posé le problème, il se le pose comme nous, sauf qu'il nous guide.

Lors de ces échanges, le professeur B répète les réponses apportées par les élèves sans les mettre en discussion. Le rôle de la phase de questions-réponses semble résider pour les élèves dans le fait d'avoir des indices, des informations supplémentaires (« *le problème n'est pas complet* »), mais aussi dans le fait que cela est une aide pour la recherche et pour la résolution du problème.

Comme dans les séances précédentes, l'enseignant met en avant dans ses propos « *le fait de faire des choix* ». D'après notre grille d'analyse, il semble avoir identifié l'EAMH. Il propose à la classe de prendre connaissance des réponses apportées par les autres classes à leurs questions envoyées en séance 1. Il projette ces réponses au tableau et les lit en demandant aux élèves d'interagir :

« Dès que vous n'êtes pas d'accord avec leurs réponses, c'est leurs réponses à eux, ça ne veut pas dire forcément que c'est vrai, c'est leurs choix à eux, si vous n'êtes pas d'accord, n'hésitez pas on peut débattre. » (Prof B)

Lors de cette phase (qui durera dix minutes), nous ne notons aucune réaction de la part des élèves ce qui pourrait être interprété comme le fait qu'ils comprennent difficilement l'intérêt de cette phase pour la résolution du problème. Le professeur B conclut cette première étape de la séance 3 en insistant sur le fait que les réponses traduisent des choix faits par leurs pairs : « *Voilà leurs choix, eux ils ont pas mal avancé, pas mal de choses.* ». Puis il introduit dans la classe la relance élaborée par ResCo toujours en appuyant sur le fait que des choix ont été faits à partir de la phase de questions-réponses : « *Alors le chercheur a regardé tous les échanges pas seulement le nôtre, mais les échanges qu'il y a eu entre les 60 classes, et il a regardé les questions qui revenaient plusieurs fois et les choix qui ont été faits à plusieurs reprises, d'accord ? Alors je vais vous distribuer cette petite fiche-là [la relance ndlr] et on va lire ensemble. Allez ! [Il distribue le document en faisant « passer les fiches » et projette la relance au tableau].*

Les élèves travaillent en groupe à partir de la relance (nous ne disposons pas de vidéo de cette partie de la séance). Lors de la séance 4, le professeur B annonce à la classe comment il va les évaluer sur l'ensemble de leur travail réalisé depuis la séance 1. Ces propos prennent la forme d'un bilan explicite sur le sens du travail réalisé lors des séances précédentes de la manière suivante :

« Alors, comment je vais vous noter parce que je vais vous évaluer sur ça. En mathématiques, il y a plusieurs compétences qu'un mathématicien doit maîtriser. [...] Donc première chose j'ai déjà regardé si vous avez cherché, donc il y a chercher, est ce que vous êtes capables de chercher ça je vais l'évaluer. Est-ce que vous avez réussi à modéliser, modéliser c'est tout le travail qu'on a fait depuis le début, faire des choix, d'accord ? De dire ben comment je peux représenter moi le problème-là, le problème de l'arbre en ramenant un problème qui n'a rien de mathématique en un problème mathématique, est ce que ma méthode, mon modèle est cohérent ou pas. Est-ce que je sais aussi représenter les choses, c'est-à-dire est-ce que je suis capable de passer de la géométrie, car c'est un problème aussi qui peut être géométrique, à un problème de calculs en utilisant les nombres, et comment je peux faire des calculs avec un problème qui à la base est géométrique, comment je fais ça. Raisonner, c'est-à-dire est-ce que vous avez réussi à mener l'enquête, à creuser, à prendre en compte les avis des autres, à rebondir et à

avancer, ça c'est plus difficile pour certains. Calculer, est-ce que vous arrivez à calculer, un mathématicien doit aussi savoir opérer sur les nombres. Et surtout, ce qui est très important, ce que vous allez faire maintenant, c'est communiquer. C'est-à-dire que trouver des résultats c'est bien, mais si on n'est pas capable de les expliquer aux autres et de les communiquer à l'oral et à l'écrit, ben ça ne sert à rien. Donc ça c'est ce qu'on va évaluer maintenant. Donc vous voyez finalement que la place du résultat, elle n'est pas si importante que ça. D'accord ? Ce n'est pas ça qui nous intéresse particulièrement. Ok ? Ce n'est pas sur ça que je vais vous évaluer. C'est clair pour tout le monde ?

Pas de réaction des élèves.

Prof B: Bien. Tous les groupes sont prêts.

On n'entend des « Non ».

Prof B: Qui n'est pas prêt encore ? [3 groupes lèvent la main] Vous avez trois minutes [il regarde sa montre] mais vraiment 3 minutes, 3 minutes.

Les élèves se mettent activement au travail. Le professeur reste au bureau. »

Dans les propos du professeur, on note l'introduction du mot « modéliser ». Le professeur B explicite aux élèves que faire des choix est nécessaire pour modéliser le problème en revenant sur l'intérêt de la phase des questions. D'après notre grille d'analyse, ses propos montrent une bonne identification de l'EAMH de sa part et sa volonté de rendre les élèves conscients du travail mathématique réalisé : « ramener un problème qui n'a rien de mathématique en un problème mathématique ».

Ce travail relève explicitement de la mathématisation horizontale. Les formes associées à ce travail (identifier les grandeurs pertinentes, faire des choix) ne sont pas précisées aux élèves par l'enseignant. L'activité de modélisation mathématique est mise en évidence par l'enseignant. Le fait que plusieurs modèles peuvent être envisagés selon les choix faits sur les grandeurs pertinentes et sur les éléments de contexte ne sera pas explicité.

Les élèves ne réagissent pas aux propos du professeur B, et se mettent rapidement au travail. On peut faire l'hypothèse que la perspective d'être évalué motive leur implication active dans le travail demandé par le professeur.

Dans les logiques d'action du professeur B, selon notre grille d'analyse, la nature de l'ensemble des propos et des différents bilans montre que l'enseignant identifie l'EAMH ce qui s'est généralement traduit par des propos insistant sur le fait de faire des choix. Le peu de réactions de la part des élèves semble indiquer soit qu'ils identifient peu la nécessité de faire des choix pour modéliser la situation de l'arbre, soit qu'ils ne s'autorisent pas de le faire peut-être en raison du fait qu'ils n'ont jamais été confrontés à une telle tâche.

LE PROFESSEUR C,

Pour débiter la séance 1, le professeur C donne la consigne suivante :

« Des chercheurs se posent une question et demandent à de nombreux élèves de les aider dans leurs recherches. Nous sommes dans un groupe de trois classes et on va essayer de les aider dans leur mission. Je vous distribue le sujet. Lisez le bien attentivement quelques minutes et après on en discute ensemble. »

Au bout d'1'30'', une élève pose une question : « on le lit ou on essaie de le résoudre ?

Prof C : Vous lisez pendant quelques minutes et après on en parle tous ensemble. »

S'ensuivent des précisions de vocabulaire (botaniste, maturité, serre, estimer). Pour le professeur C, cette première étape semble relever de s'assurer de la bonne compréhension des sens des mots de l'énoncé.

Au bout de dix minutes, l'enseignant demande à la classe si elle a compris « sa mission ». Voici un extrait des verbatims de ce moment :

Prof C : Quelle est votre mission ?

Elèves : Prévoir comment sera l'arbre en 2023 ?

Prof C : Effectivement vous allez devoir répondre à cette question. Et du coup vous allez vous-mêmes vous poser des questions. Pour essayer de répondre à la question des botanistes, vous allez vous poser des questions. Sur votre cahier individuellement pour le moment, vous allez écrire les questions qui vous viennent si vous deviez résoudre cette question.

Un élève : Est-ce que c'est des questions de logiques ou ?

Prof C : Des questions qui se posent dans ta tête, Romane en aura d'autres, Dany et Lucas encore d'autres. Les questions qui te viennent quand t'essaies de répondre à cette mission. Je vous laisse 5 minutes et après on continue.

L'enseignant intègre la phase de questions à la résolution de problèmes dans la mesure où il précise aux élèves de noter les questions qu'ils se posent dans la perspective de résoudre le problème.

Une mise en commun des questions est proposée au bout de dix minutes. Chaque élève énonce à haute voix une question qu'il se pose. Le professeur C réagit uniquement par des « *d'accord* », « *pourquoi pas* », « *c'est une question* ». Puis il propose à la classe de se mettre en groupe afin de se mettre d'accord sur les questions importantes à se poser voire d'en élaborer d'autres. C'est lors de la mise en commun de ce travail que le professeur C précise aux élèves que leurs questions vont être envoyées à deux autres classes avec lesquelles ils travaillent. Les questions retenues par les élèves seront retranscrites au clavier et envoyées sur le forum. En raison d'un incident technique (au niveau de la caméra) nous ne disposons pas de la vidéo de cette mise en

commun ni de celle de la séance 2. Nous avons donc interrogé le professeur C qui nous a informées du déroulement de la séance 2 :

« J’ai montré ce qu’on a reçu comme questions en groupe classe et lu chaque question. Puis j’ai demandé à la classe ce qu’on répond. Les élèves se sont mis d’accord assez facilement. Des élèves à tour de rôle ont écrit les réponses au clavier sans fil. Les élèves ont réagi en disant souvent « on a posé la même », « on ne sait pas ». Certains choix ont été débattus puis tranchés. Je suis resté en retrait mais j’ai animé les débats. Ils ont travaillé en groupe classe et ont répondu à toutes les questions. On a envoyé le fichier réponses sur le forum. »

Nous n’avons pas trouvé de bilan sur la phase de questions-réponses dans la séance 3. Le professeur C a démarré cette séance en rappelant l’organisation du dispositif « *Alors vous vous souvenez, on avait écrit des questions, je les ai mises sur le forum. Sur ce forum on vous a répondu. Votre paquet de questions on l’avait découpé en deux petits paquets pour chaque classe avec lesquelles on échange. Ils vous ont répondu. Je vous montre* ». Puis durant cinq minutes, il a lu les réponses reçues. Les élèves ont sagement écouté sans interagir.

L’enseignant a alors introduit la relance dans la classe de la manière suivante :

« Alors vous vous rappelez on est nombreux à travailler la dessus. Alors pour que tout le monde soit avec le même travail et le même modèle mathématique, le chercheur Mr Simon Modeste à Montpellier a récupéré toutes les informations, vous vous rappelez je vous avais montré sur le forum là où il y avait tous les échanges, il a récupéré toutes les questions et toutes les réponses des 60 classes qui travaillent et il vous a préparé la relance. Je vous ai fait ça sur un petit papier comme le format de la fiction. Je l’ai en plus grand je vais vous le mettre au tableau. Je vous laisse le découvrir. »

Nous notons que le professeur C emploie les mots « *modèle mathématique* » et « *relance* » pour lesquels nous nous attendions à des demandes de la part des élèves sur le sens de ces mots. Ces demandes n’auront pas lieu. La séance se poursuit par une lecture à tour de rôle par les élèves avec des commentaires du professeur C qui insiste sur les choix faits par « *le chercheur* » en légitimant ces choix par le fait que ce chercheur qu’il qualifie de « *botaniste* » étant expert dans son domaine sait quels choix il convient de faire, comme l’illustre le commentaire suivant :

« Vous vous rappelez on avait plein de questions sur l’arbre : les feuilles, les fleurs, les graines. Donc on va faire confiance aux botanistes, nous on va essayer de faire le problème en mathématique et on va les laisser penser eux leur problème de botanique, de l’étude de l’arbre. On a peu de renseignements mais les botanistes on pense qu’ils ont pas mal d’expérience. Ils nous ont dit qu’il serait mature donc maturité en 2023, donc on va leur faire confiance. Les feuilles sont petites, est ce qu’on va les compter ? Non on ne s’en occupera pas. »

Les élèves ne discuteront pas ces choix. Nous faisons l'hypothèse que la dissociation entre le travail du botaniste et celui en mathématique (« *nous on va essayer de faire le problème en mathématique et on va les laisser penser eux leur problème de botanique* ») peut expliquer cette absence de discussion.

Le professeur C remet la responsabilité des choix des éléments de contexte aux « botanistes ». Se faisant, il met en évidence que des choix sont faits à ce niveau sans préciser toutefois la raison de cette nécessité par rapport à la résolution du problème :

« Vous vous rappelez on s'était posé la question, est-ce qu'on le coupe, est-ce qu'on ne le coupe pas ? Donc visiblement on le laisse pousser tout seul sans intervenir. [...] D'accord, donc 60 classes, plein de pistes de travail possibles différentes, donc on va faire un choix pour essayer de tous travailler avec le même modèle. »

Durant cette lecture de la relance, le professeur C s'attache à préciser le sens des mots comme « *pavé droit* », « *marge* », « *extrémités* ». A son initiative, il précise aux élèves au moment de la lecture sur le choix de ne pas tenir compte du diamètre du tronc et des branches que « *Si vous voulez continuer de le faire, je ne vous interdis pas de le faire. C'est votre choix, alors est-ce qu'on en tiendra compte à la fin pour la serre, je ne sais pas c'est vous qui décidez.* » Nous avons noté cette unique intervention relevant de l'explicitation de la multiplicité de choix possibles. Le professeur C semble s'être approprié l'EAMH sans toutefois amener les élèves à identifier la nécessité de faire des choix pour modéliser la situation de l'arbre. Le mot « *modéliser* » employé par l'enseignant ne fera étonnamment pas l'objet de questions sur son sens de la part des élèves qui semblent attendre les consignes du professeur C pour savoir ce qu'il attend d'eux. Dans la séance 4 (nous ne disposons pas de la vidéo de la séance 5), les élèves travaillent en groupe et cherchent à résoudre le problème. Les interventions du professeur C auront principalement comme visée d'encourager les élèves dans la poursuite de leurs recherches.

En nous basant sur les vidéos recueillies (qui ne couvrent pas l'intégralité des séances), les pratiques de cet enseignant semblent relever, selon notre grille d'analyse d'une faible appropriation de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale.

Les résultats du volet 1 ont montré la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, lors de la phase de questions-réponses. Des analyses précédentes, il semble ressortir que pour favoriser cette dévolution, les interventions des professeurs se situent principalement au niveau de la composante médiative de leurs pratiques. En effet, ces interventions tendent à ce que les

élèves respectent les tâches à réaliser (produire des questions puis des réponses en vue de résoudre le problème) et à encourager les élèves dans la réalisation de ces tâches. L'appropriation de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale par ces enseignants gagnerait à être renforcée, via la formation, pour permettre une meilleure identification de cet enjeu par les élèves.

11-1-2 Selon l'indicateur 2-ResCo1

LES REPONSES AUX QUESTIONNAIRES ENSEIGNANTS

Nous rappelons que selon les années, les formulations des questions du questionnaire peuvent différer quelque peu et que le nombre de réponses à ce questionnaire est respectivement de 4, 8, 15, 11, 18, pour les années 2013, 2015, 2016, 2017, 2018 (Il n'y a pas eu de questionnaire en 2014). Nous précisons également que les réponses aux questionnaires sont anonymes.

Nous analysons les réponses aux questions suivantes :

- La phase de questions-réponses a-t-elle favorisé l'entrée dans un travail de modélisation pour vos élèves ?
- En quoi la phase de questions-réponses a-t-elle favorisé l'entrée dans un travail de modélisation pour vos élèves ?
- Considérez-vous que la phase de questions-réponses est importante dans le dispositif. Pourquoi ?

Notre objectif est de mieux cerner la nature de l'intérêt que pourraient porter les enseignants à la phase de questions-réponses afin d'estimer le degré de leur identification de l'EAMH.

De par notre expérience au sein de ResCo, nous envisageons que les enseignants puissent porter un intérêt à la phase de questions-réponses dans la mesure où les élèves pourraient trouver cette phase « originale » et manifester une plus grande motivation qu'à l'ordinaire. Cet indicateur traduirait une priorité des enseignants, relevant de la composante médiative de leurs pratiques, à favoriser l'implication de leurs élèves, que nous interpréterons comme une « non identification » de l'EAMH.

La phase de questions-réponses ayant une dimension de travail collaborative, nous avons défini comme intérêt possible pour l'enseignant de mettre en œuvre un travail collaboratif dans sa classe sous une forme peu ordinaire puisqu'il s'agit de collaborer avec deux autres classes qui peuvent géographiquement être éloignées. Nous interprétons le fait de prioriser cet intérêt

comme une faible identification de l'EAMH dans la mesure où, les échanges collaboratifs sont propices à permettre aux élèves de réaliser que plusieurs choix sont possibles ou de questionner les choix d'autrui. Une identification moyenne de l'EAMH de notre point de vue relèverait du fait que les enseignants mettent prioritairement en avant que la phase de questions-réponses génère des apprentissages mathématiques, même s'il est possible que ces apprentissages ne soient pas tous de l'ordre de la mathématisation horizontale ou ne soient pas complètement explicites. Nous actons d'une identification de l'EAMH par l'enseignant lorsque dans les réponses des professeurs nous trouvons des éléments qui montrent un intérêt à la phase de questions-réponses pour travailler la modélisation mathématique. Ce choix s'appuie sur l'analyse des programmes qui a montré que la mathématisation horizontale se situe de manière implicite dans les préconisations autour de la compétence Modéliser.

Pour chaque enseignant ayant répondu à un questionnaire, nous avons analysé les réponses aux trois questions citées précédemment et avons défini de quel indicateur relevait l'intérêt de cet enseignant pour la phase de questions-réponses en prenant en compte la globalité des réponses apportées. Le questionnaire de l'année 2015-2016 ne nous permet pas d'obtenir des éléments sur l'intérêt des enseignants pour la phase de questions-réponses dans le sens où cette année-là la formulation de la question sur cette phase était seulement de nature à quantifier de 0 à 10 l'intérêt de cette phase pour entrer dans la résolution de la situation. Dans certains questionnaires, les enseignants n'ont pas répondu à toutes les questions posées. Au final, nous avons 37 réponses aux questionnaires permettant d'analyser, selon notre grille d'analyse, l'intérêt des enseignants pour la phase de questions-réponses. Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Implication Motivation (EQRNI)	Collaboration Appropriation (EQRFI)	Apprentissages Mathématiques (EQRPI)	Mathématisation horizontale (EQRI)	Aucun intérêt (EQRNI)
6	16	1	11	3
16%	43%	3%	30%	8%

Nous rappelons ci-dessous le sens des abréviations utilisées dans le tableau :

EQRNI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori non identifié

EQRFI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori faiblement identifié

EQRPI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori plutôt identifié

EQRNI : Enjeu de la phase de questions-réponses a priori identifié

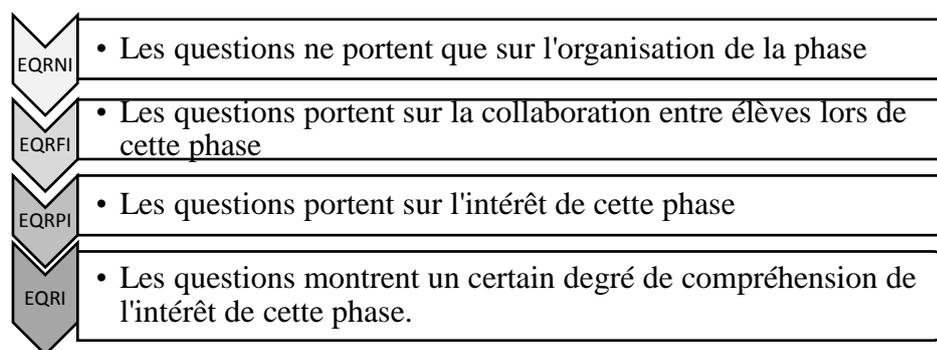
Il ressort que pour environ un tiers des enseignants ayant répondu aux questionnaires analysés, l'identification de l'enjeu de la phase de questions-réponses semble relever de l'indicateur EQRNI comme par exemple les réponses suivantes à la question « *En quoi la phase de questions-réponses a-t-elle favorisé l'entrée dans un travail de modélisation pour vos élèves ?* » :

- « *Ils [les élèves] ont fait des choix (gardés ou abandonnés plus tard) et ont construit des modèles mathématiques pour résoudre la fiction* »
- « *Par la confrontation à des choix différents ou en tout cas à des manières de questionner changeantes qui imposent de faire des choix pour continuer à réfléchir à une solution* »
- « *De découvrir qu'il y a beaucoup de paramètres à prendre en compte dans une modélisation et de s'investir dans une recherche collaborative* »

Dans ces réponses, ressort principalement l'importance de faire des choix. La nature de ces choix n'est pas explicitée par les enseignants (fragment de réalité, grandeurs, éléments de contexte), cependant on note qu'ils associent la nécessité d'en faire pour modéliser mathématiquement le problème mettant ainsi en évidence l'identification d'un travail de mathématisation horizontale.

Plus de la moitié d'entre eux donnent comme intérêt principal soit le fait que la phase de questions-réponses permet d'impliquer et de motiver davantage d'élèves, soit le fait qu'elle favorise l'appropriation de l'énoncé et/ou soit la dimension collaborative de la mise en œuvre de cette phase. D'après notre grille d'analyse, ce type de réponses relève de EQRNI ou EQRPI et pourrait montrer que l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale pour ces enseignants n'est pas ou peu identifié tout au moins dans leurs réponses. On peut également supposer que ces enseignants ont fourni une réponse en considérant la composante médiative de leurs pratiques, c'est-à-dire prioritairement en analysant l'intérêt de cette phase du point de vue de son déroulement, ce qui ne nous permet pas d'affirmer qu'ils n'ont pas perçu les enjeux d'apprentissage liés à cette phase.

Nous proposons dans la suite d'analyser la nature des interventions des participants lors de la présentation de la phase de questions-réponses durant le stage ResCo du 6 février 2016. Notre objectif est de mesurer le degré d'identification de l'intérêt de la phase de questions-réponses pour faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes pour les enseignants présents lors de ce stage à l'aide des indicateurs définis en 10-5 et rappelés ci-dessous :



Lors du stage, l'équipe ResCo propose aux enseignants de vivre la phase de questions-réponses sur la fiction réaliste qui est proposée lors de la session collaborative à venir (« L'arbre » dans notre cas). Ces enseignants ont la possibilité à l'issue du stage d'inscrire une ou des classes à la session collaborative ResCo qui débute environ 6 semaines plus tard. En proposant de faire vivre cette phase, la première intention de ResCo relève d'en explorer, avec les enseignants, les conditions favorables de sa mise en œuvre éventuelle dans les classes. La deuxième est de montrer en quoi cette phase de questions-réponses permet de faire des choix en vue d'envisager un traitement mathématique du problème (ce qui relève de la mathématisation horizontale).

Avant de présenter nos analyses qui portent ici sur cette seconde intention, nous précisons comment l'équipe ResCo organise dans son stage ce moment de formation.

Dans un premier temps, les participants sont invités en groupe à réfléchir aux questions que pourraient se poser des élèves sur la fiction réaliste, « L'arbre » pour notre cas. S'ensuit une mise en commun de ces questions, menée par un formateur ResCo. Dans un second temps, les participants réfléchissent en groupe aux réponses que pourraient donner des élèves à certaines de ces questions. Ensuite, ces réponses sont débattues collectivement.

Nous donnons, dans la suite, quelques exemples de questions proposées par les participants :

- A propos de ce qui pourrait expliquer une possible variation de la croissance :

Prof 4: Est-ce qu'on peut lui mettre de l'engrais à l'arbre pour le faire pousser plus vite ?

Prof 5 : Est-ce que la croissance peut ralentir ou accélérer ?

Formateur 1: Oui ça rejoint mais c'est une autre question. C'est intéressant car on voit que c'est le même sujet mais on voit que ça peut être des questions qui ne sont pas tout à fait les mêmes selon les élèves. C'est un peu la question de l'engrais ou est-ce qu'il y a des raisons que la croissance varie selon les années par exemple.

- A propos de ce qu'il faut étudier : la forme de la serre ou les dimensions de l'arbre

Prof 2 : Doit-on étudier combien il aura de branches en 2013 ou les dimensions de la serre qui contient l'arbreen 2023?

Prof 7 : Comment sera l'arbre ? Est-ce que c'est la forme ? Est-ce que c'est plutôt la taille ? On suppose que c'est plutôt la taille parce qu'on parle de la serre ou les deux ?

Formateur 1: Ca rejoint les questions est-ce que c'est le nombre de branches qui nous intéresse ou est-ce qu'il faut prendre en compte sa hauteur, sa largeur. Ça rejoint un peu cette famille de questions-là.⁴²

Plusieurs interventions des participants montrent qu'ils se questionnent sur les choix possibles pour modéliser le problème.

Prof R : Et est-ce que en fonction de la serre et de la croissance de l'arbre, à un moment donné, le tronc ne peut pas pencher et plier [rires]...on peut tout envisager !

Prof S : Ouais, doit on prévoir une serre ...euh pile à la taille en fait, en 2023 ou elle pourra être un peu large ?

Prof N : Est ce que l'on peut supposer qu'il a une et une seule branche qui donne trois branches pile ?

Prof R : Peut-être que c'est plus ou moins suggéré sur le dessin

Prof N : Parce que cette règle s'applique là, mais est-ce que c'est un hasard ? »

Plusieurs de ces choix possibles sont explicités par les enseignants lors de l'élaboration des réponses :

- Sur le nombre de branches poussant chaque année

Prof T : Nous par rapport aux nombres de branches par nœud on a mis deux ou 3

- Sur la forme de la serre

Prof 2 : On suppose que la forme de la serre soit donnée.

Formateur 1: D' accord par exemple ?

Prof 2 : Imposée

Prof G : Rectangulaire

Prof 2 : Et en plus quand on suppose que sa longueur égale sa largeur et donc simplement comme

⁴² Dans cet extrait et le précédent, les échanges montrent que les formateurs ResCo prennent soin de montrer aux enseignants que plusieurs questions, bien que formulées différemment, peuvent concerner la même identification soit d'une grandeur pertinente soit d'un élément de contexte à prendre en compte pour résoudre la situation.

Formateur 1: Comme un pavé. Qui a la même largeur que la longueur et après on ne s'inquiète plus que de la hauteur. La profondeur. Et qu'il y ait plus que deux dimensions

Prof 2 : Oui exactement et comme cela se simplifier la vie

Formateur 1: Y'a quelqu'un qu'a dit, juste je le note maintenant juste y a quelqu'un qui a dit « ou sphérique » pour la serre. Voilà on pourrait imaginer d'autres choses qu'on fixe pour la serre, avec un autre choix concernant la forme de la serre.

- Sur les marges des dimensions de la serre

Prof S : On peut prévoir je ne sais pas, 20 % de plus pour la serre. Laissez l'arbre respirer ou de la place .on peut fixer quelque chose

Formateur 1: Fixer une marge de manœuvre en gros,

Prof S : En %

Formateur 1: Une marge d'erreur ...fixée à l'avance

- Sur les éléments de contexte qui pourraient influencer la croissance de l'arbre

Prof 7 : Nous pour le développement harmonieux on a dit pour l'arbre en tout cas

Prof 11 : Moi je pensais que à la question est ce qu'il y a des branches qui meurent etc. le plus simple était de dire non et que les branches n'arrêtent jamais de pousser.

Prof 3 : On n'élague pas non plus.

Prof 11 : Ouais on ne coupe pas Il n y a pas d'intervention humaine et pas d'engrais non plus .Pas d'accélération

Prof M : Parfait

- Sur les angles entre les branches

Prof S : On avait une question concernant une notion d'angle entre les branches.

Formateur 1 : Et oui on en a pas parlé quels sont les angles entre les branches ?

Prof S : C'est une question qui peut être fixée

Formateur 1 : Cela peut être fixé comme étant les mêmes ou pas toujours les mêmes...

Aucune intervention des participants lors de la phase des questions ne porte sur les apprentissages potentiels relevant de la modélisation mathématique au niveau des élèves. Nous interprétons ce fait comme relevant de l'indicateur EQRPI, c'est-à-dire que les participants semblent prendre conscience du potentiel de cette phase pour faire des choix en vue de modéliser la situation sans toutefois le traduire en enjeu d'apprentissage pour les élèves.

A l'issue de cette mise en commun, nous notons que c'est un formateur ResCo qui amène par ses propos (voir les échanges ci-après) les enseignants à se projeter dans leurs classes en imaginant faire vivre cette phase des questions-réponses aux élèves.

Formateur 3 : Sur les questions, vous serez sans doute surpris, un peu étonnés, il peut y avoir des questions sur la botanique, vous vous êtes déjà rentrés un peu dans des modèles, dans euh, il y a déjà un peu de mathématique. Il faut s'attendre qu'il y ait des questions qui soient beaucoup plus générales sur l'arbre, est-ce qu'il y a des feuilles, pas de feuilles

etc. Ce sont des questions qui ne sont pas à censurer, il faut y répondre pour après rentrer dans les mathématiques. Attendez-vous à avoir beaucoup plus de questions hors champ mathématique. [...] Ils peuvent demander ce qu'est une serre en 6ème. La question du 3D et du 2D, je pense aussi que ça peut les interpeller, un arbre qui est aplati... C'est très intéressant de voir toutes ces questions qui arrivent et après n'envoyez pas trop de questions, cinq questions pour une classe, parce que quand vous recevez dix questions à répondre, ben voilà

Prof 2 : Parce que la fois d'après, on reçoit nous les mêmes questions

Formateur 1 : Les autres classes ont fait le même travail mais ce ne sont pas nécessairement les mêmes questions.

Prof 2 : Et on va répondre, on va donner notre réponse.

Faire vivre la phase de questions-réponses aux enseignants lors du stage semble enrichir la composante personnelle des pratiques des participants concernant les enjeux de la mathématisation horizontale, en leur permettant d'identifier la nécessité de faire des choix sur des grandeurs pertinentes ou des éléments de contexte dans une activité de modélisation mathématique et que, selon ces choix plusieurs modèles sont envisageables. Toutefois, en nous appuyant sur le peu d'interventions des enseignants à propos des apprentissages en jeu, cette phase ne semble pas à elle seule permettre aux stagiaires de s'approprier pleinement l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale.

11-1-4 Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCol

Pour cette synthèse, nous utilisons la distinction de deux niveaux dans la dévolution proposée par Perrin-Glorian (1997) :

« Un niveau local qui correspond à la dévolution du problème au sens usuel : appropriation par l'élève du problème et de ce qui va être une réponse au problème au problème, et la dévolution d'un enjeu d'apprentissage à plus long terme, d'une réutilisation des connaissances produites, de leur intégration dans les connaissances anciennes. » (Ibid. p.52)

L'impact sur la motivation des élèves, favorisée par la dimension collaborative de la phase de questions-réponses et par le fait que cette phase permet une meilleure appropriation de l'énoncé semble davantage relever de l'intérêt principal de cette phase pour les enseignants. Du point de vue de la composante médiative des pratiques, les analyses des différents déroulements en classe de cette phase ont montré que les enseignants s'assurent que les élèves respectent les tâches à réaliser (produire des questions puis des réponses en vue de résoudre le problème) et

encouragent les élèves dans la réalisation de ces tâches. Ces analyses croisées avec les résultats du volet 1 montrent une dévolution *locale* aux élèves de la mathématisation horizontale, lors de la phase de questions-réponses.

Toutefois, lors de cette phase, bien que les enseignants identifient la nécessité de faire des choix en vue de traiter mathématiquement le problème, ils ne semblent pas reconnaître cette nécessité comme un enjeu d'apprentissage, en particulier en ne proposant pas aux élèves de structuration des connaissances mobilisées relevant de la mathématisation horizontale. En nous basant sur les distinctions de niveaux dans la dévolution de Perrin-Glorian, nous en concluons que la dévolution aux élèves de l'enjeu d'apprentissage de cet aspect de la mathématisation semble peu effective.⁴³

11-2 Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo2

Nous avons émis l'hypothèse que le dispositif ResCo prend en charge un certain nombre d'obstacles inhérents aux pratiques enseignantes associées à l'apprentissage de la mathématisation horizontale. Comme nous l'avons vu au paragraphe 10-4, nos hypothèses sur les obstacles concernent les difficultés des enseignants de mathématiques à identifier et à s'approprier l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale (HTo1, HTo2), leurs difficultés à élaborer ou à identifier des situations à proposer dans les classes porteuses d'un travail relevant de la mathématisation horizontale (HTo3) et l'obstacle potentiel généré par le contrat didactique de la classe (HTo4).

Des résultats de notre analyse précédente, il ressort que le dispositif ResCo favorise dans une certaine mesure l'appropriation par les enseignants de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale de par le contenu de la formation proposée au PAF par l'équipe ResCo et de par la phase de questions-réponses proposée dans l'organisation du dispositif. En d'autres termes, le dispositif ResCo prend en charge en partie les obstacles associés à HTo1, HTo2.

La prise en charge par ResCo de l'obstacle lié à la difficulté pour des enseignants à élaborer ou à identifier des situations à proposer dans les classes porteuses d'un travail relevant de la

⁴³ Cette conclusion est basée sur les analyses permises par les données recueillies, sans présager d'un possible bilan donné ultérieurement par les enseignants.

mathématisation horizontale est constitutive de l'organisation même du dispositif. Chaque année, l'équipe ResCo élabore une fiction réaliste destinée à être mise en œuvre par des enseignants volontaires. Nous avons vu dans le volet 1 que les caractéristiques d'une fiction réaliste favorisent la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale. Les enseignants disposent via le forum de ResCo⁴⁴ des énoncés des fictions réalistes élaborées depuis 2008. De ce fait, le dispositif ResCo prend en charge l'obstacle lié à HTo3.

Nous faisons l'hypothèse que la dimension institutionnelle (IREM de Montpellier) de ce dispositif aide l'enseignant à imposer aux élèves des modalités de mise en œuvre, en le déchargeant d'une part de sa responsabilité dans la mesure où le choix de l'énoncé et des modalités de mise en œuvre sont imposés par le groupe ResCo modifiant en cela le contrat didactique de la classe. Nous proposons à partir des captations vidéo des trois enseignants participants à la session collaborative ResCo 2015-2016 de tester cette hypothèse en recherchant d'éventuelles interventions des enseignants montrant une référence explicite à ResCo lors de la justification d'actions et/ou de réponses auprès des élèves.

11-2-1 Analyses à partir des trois vidéos

LE PROFESSEUR A,

Dès l'introduction du travail aux élèves, le professeur A précise aux élèves que l'organisation de ce travail proposée est celle de l'IREM de Montpellier : « *Nous allons participer, pendant 5 semaines, à un travail de recherche organisé par l'IREM de Montpellier.* » Les travaux du groupe ResCo ne sont pas évoqués mais le partenariat avec l'IREM de Montpellier est mis en avant durant le début de la présentation. Puis l'enseignant indique aux élèves un attendu qui ne relève pas d'un choix imposé par ResCo sans toutefois le leur préciser explicitement :

*« Je vous explique. **On va tenir un journal de recherches**, d'accord. Ce qui veut dire qu'à chaque séance, il va y avoir un d'entre vous qui va écrire ce qui se fait dans le groupe comme si on était dans une **narration de recherche**. Il va y avoir 5 séances, donc déjà il peut y avoir à chaque séance, un élève différent qui écrit, comme ça tout le monde aura participé et à la 5^{ème} séance on verra. Pour les groupes qui sont 5, ça va très bien. Ok ? Un par séance. Vous allez écrire ce que vous faites, comme dans une narration de recherche, quelles sont vos idées, quelles sont les questions de la séance, ce qu'il faut faire, les objectifs, etc. etc., comme si c'était un journal de recherches. Ok ? Les papiers que je vous ai mis sur le bureau, c'est pour faire les pochettes du journal de recherches. Donc la feuille jaune vous allez la plier en deux, d'accord ? Et à chaque séance vous glisserez à l'intérieur*

⁴⁴ <http://forum.math.univ-montp2.fr/>

*les feuilles que vous aurez écrites concernant votre recherche. La feuille blanche, vous allez la coller par-dessus, vous allez écrire dessus votre numéro de groupe, et en dessous les noms des membres du groupe. C'est compris ? Et à chaque séance, vous glisserez à l'intérieur votre recherche. Le dossier reste en classe. Ça ne part pas à la maison, d'accord ? A la fin des 5 séances, **je mettrai une note sur 10** pour ça [montre le dossier] avec votre travail de recherche à l'intérieur, donc ça sera la même note pour tout le groupe, ok ? Et le reste sur 10 ça sera par rapport à votre travail de groupe en classe. Par rapport à votre comportement et à votre avancée. D'accord ? Donc comment ça va se passer pour l'autre partie sur 10 : actuellement je vous donne à tous un 7 sur 10, si vous me dérangez, ça baisse, je mettrai un point rouge à tout le groupe, chaque point rouge vous fait perdre 2 points. Par contre si quand je passe dans votre groupe je vois que vous cherchez, que vous avancez, que vous essayez, que vous tenez correctement votre journal de recherches, que vous faites des choses comme je l'ai demandé, vous gagnerez des points verts qui vous rapporteront 1 point. »*

Nous pouvons faire l'hypothèse qu'en présentant le travail à venir comme relevant de l'organisation de l'IREM, le professeur A s'affranchit d'une part de sa responsabilité du choix d'un attendu de cahier de recherches (qui sera évalué) auprès des élèves et qui constitue le premier attendu donné aux élèves. Aucun élève ne demandera d'explication quant aux exigences d'un travail de narration de recherche et quant aux modalités d'un travail en groupe, nous amenant à considérer que ce type et cette modalité de travail de travail ont déjà été proposés plusieurs fois aux élèves. Le professeur A semble s'approprier la mise en œuvre du dispositif en la rapprochant d'une de ses pratiques a priori déjà rôdée dans la classe tout en l'ayant introduite implicitement comme une proposition d'organisation venant de l'IREM de Montpellier.

Lors de la phase de l'élaboration des questions, on note dans les propos du professeur l'emploi du « on » et du « nous » qui pourrait être interprété comme un signe que l'enseignant « fait équipe » avec sa classe lors de cette première étape :

*« Ok. Ensuite ? Eh **on** ne va pas poser que quatre questions, allez-y ! Trouvez des questions ! »*

*« Et ensuite, dernière ? Vous êtes sûrs qu'il n'y a rien qui, **nous** manque, après ça sera trop tard, hein ! S'ils ne **nous** répondent pas, c'est foutu ! »*

En d'autres termes, les attendus peuvent sembler apparaître non pas comme une exigence du professeur A mais comme celles du dispositif ResCo pouvant montrer en cela que l'enseignant ne porte pas entièrement la responsabilité de la proposition de la tâche à réaliser.

On relève également des propos du professeur A montrant explicitement que l'énoncé de la fiction réaliste ne relève pas de son choix, comme par exemple lors de la phase des

réponses quand les élèves sont invités à donner leurs réponses à l'enseignant qui les tape au clavier pour les retransmettre sur le forum :

« Prof A : On est d'accord, ils disent la même chose, hein ? Donc on y va [Tape au clavier] Donc l'arbre grandit-il tous les ans, nous on répond oui. Donc là on va avancer deux arguments, le premier c'était le vôtre c'est que effectivement nous avons trois schémas et que sur ces trois schémas il a grandi, [Tape au clavier et reprend au but d'une minute], **L'énoncé il dit quoi ?** Que l'arbre n'atteindra, **comment c'est tourné l'énoncé ?**
 Un élève : Atteint sa maturité en 2023.
 Un élève : Ils estiment qu'il atteindra sa maturité en 2023. [Le prof A tape au clavier.] »

Lors de l'introduction de la séance 3, les propos du professeur A montrent à nouveau aux élèves la dimension institutionnelle du travail en cours en se référant à l' « IREM » :

« Donc, pour cette semaine, on a reçu une relance de la part de **l'IREM**, qui a pris connaissance de toutes vos questions et de toutes vos réponses et qui ont choisi de vous faire passer un long message, en vous donnant plein de nouvelles indications. Le but du jeu était de recentrer toutes les classes sur le même problème, [S'interrompt parce qu'un élève s'agite] c'était de recentrer toutes les classes sur le même problème pour que tout le monde cherche la même chose et pour que vous ayez un peu plus d'information pour avancer, ok ? Donc, je vous distribue la relance qui nous a été envoyée et que nous allons lire ensemble. »

De par l'organisation même du dispositif, il semble légitime d'introduire ce texte de relance comme émanant de l'IREM (il serait plus juste de dire de l'équipe ResCo de l'IREM de Montpellier), cependant les diverses interventions du professeur A lors de cette séance 3, mettent plutôt en évidence pour les élèves que le professeur A semble extérieur à la proposition du travail demandé ; comme par exemple lorsqu'un élève lui demande s'il a trouvé la solution au problème :

« L'élève : Vous avez trouvé vous madame ?
 Prof A : Ce n'est pas la question ?
 L'élève : Oui mais je veux savoir si vous avez trouvé !
 Prof A : Je n'ai pas cherché.
 L'élève : Ah d'accord ! »

L'élève en question semble accepter assez facilement le fait que son enseignant n'ait pas cherché le problème que la classe essaie de résoudre. Nous interprétons cela comme un signe montrant que les élèves ressentent que leur professeur n'a que partiellement la responsabilité du travail proposé. Cette interprétation peut être confortée lors du moment suivant dans le déroulement de la classe : Un groupe interpelle le professeur A pour avoir son avis sur leurs productions, l'enseignant répond « je ne sais pas » en tournant immédiatement les talons. Leur unique réaction sera un grand soupir collectif !

LE PROFESSEUR B,

Pour introduire le dispositif ResCo, le professeur B présente l'activité comme une activité non ordinaire par rapport au temps qu'elle va nécessiter, sans préciser que l'organisation est inhérente aux choix de l'équipe ResCo :

*« Alors le problème que je vais vous proposer est un problème qui est un petit peu long, un **petit peu différent de d'habitude**. Ça va nous prendre un peu de temps pour le résoudre. Un petit peu de temps ça veut dire jusqu'aux vacances de printemps avec à raison d'une heure ou peut-être de deux heures par semaine, ça dépendra de la vitesse à laquelle vous avancez, ok ? »*

Lors de la phase de l'élaboration des questions, les élèves l'interpellent souvent l'amenant à repréciser les exigences de la séance *« J'en vois plein qui me posent des questions. Toutes les questions que vous vous posez, mettez-les par écrit. Ce n'est pas à moi qu'il faut les poser. Mettez-les par écrit toutes les questions que vous vous posez ! »*

Peu de questions émergent de la classe lors de cette séance :

« Prof B : ok. Deuxième question. Ce groupe-là [il désigne un groupe]

Le groupe répond qu'il n'en a pas.

Prof B : Vous n'avez pas une question à poser ? Non ?

Il interroge un autre groupe.

*Ce groupe : C'est la **même question**.*

Prof B : C'est la même question, ok.

Il interroge un autre groupe.

*Ce groupe : **Non rien**.*

Prof B : Rien de plus.

Il interroge un autre groupe

*Ce groupe : C'est **la même question**.*

Prof B : D'accord.

Il interroge un autre groupe.

*Prof B : Notre question est « **on doit répondre à quelle question ?** »*

Il semblerait que les élèves soient un peu dans le flou quant aux attentes de l'enseignant qui se traduit dans la vidéo de cette séance par un manque d'implication de la classe. On peut faire l'hypothèse que le changement de contrat didactique induit par la phase de questions (poser des questions par écrit à propos d'un énoncé à destination d'autres élèves) n'est pas suffisamment négocié par l'enseignant. La classe résiste à accepter le travail demandé ou le réalise de manière superficielle :

« Un groupe (qui n'avait pas encore posé de question) interpelle le prof pour donner une question :

L'élève : Faut-il mesurer les branches ?

Le professeur B tape cette question au clavier et dit : Pour faire quoi ? Pourquoi tu poses cette question ?

L'élève : Ben je ne sais pas

Prof B: Non mais c'est intéressant mais pour quoi tu poses cette question ?

L'élève : Parce que Y. a mis des mesures sur l'arbre.

Prof B: D'accord. Est-ce qu'il a d'autres questions à poser ? Non ? Chut. »

Cet échange montre que l'enseignant essaie d'encourager les élèves à la réalisation de la tâche (« *c'est intéressant* »). La réponse de l'élève est de notre point de vue peu compréhensible par la classe (l'élève fait simplement référence au fait qu'un membre de son groupe ait inscrit des mesures au niveau des branches sur les schémas). Toutefois, le professeur B accepte cette réponse en ne demandant pas de précisions supplémentaires. On peut traduire cette attitude comme un signe relevant de la difficulté pour l'enseignant à s'adapter au changement de contrat didactique induit par la phase de questions.

Lors de cette séance 1, le professeur B ne s'appuie pas sur le dispositif ResCo pour justifier ses propositions et ses propos auprès des élèves.

Durant la séance 2 (élaboration des réponses aux questions reçues), on peut noter une ambiance de travail assez dilettante amenant le professeur B à sanctionner certains élèves ou à demander souvent le calme et une mise au travail plus sérieuse. Les élèves sont assez décontenancés par le travail demandé comme le souligne cette question d'un élève : « *Il y a des questions où on ne sait pas répondre ! Pourquoi ils posent des questions où on ne peut pas répondre ?* » L'enseignant n'apportera pas de réponse à cette demande ce qui ne favorisera pas l'implication du groupe de l'élève concerné. Ce même élève réagit à une question reçue sur un ton moqueur : « *oh la question, peut-on mesurer avec la règle ! [Avec un air de moquerie]* »

Cette fois-ci, le professeur B réagit : « *Eh moi j'aimerais qu'on se concentre sur le travail plutôt que de rester bloquer sur des questions qui sont un peu bêtement, qui sont un peu bizarres. Je trouve que tu fais beaucoup de commentaire pour pas trop d'utilité, là !* »

Nous faisons l'hypothèse que la qualification par l'enseignant des questions de « *un peu bizarres* » traduit à nouveau la difficulté pour l'enseignant à s'adapter au changement de contrat didactique induit ici, par la phase de réponses. Les interventions du professeur B lors de la mise en commun des réponses du type « *il faut vraiment que vous appreniez à vous écouter, parce que c'est compliqué là.* », « *Chuuut* », « *Chut ! Je n'ai pas entendu ! Je sens que je vais prendre aussi le carnet de A* », « *Chuuut, il faut écouter les autres ! Merci !* », ainsi que le brouhaha général durant cette phase, pourraient également être traduits comme des signes manifestant cette difficulté.

Tout comme lors de la séance 1, le professeur B ne s'appuie pas sur le dispositif ResCo pour justifier et ses propositions et ses propos auprès des élèves.

Comme expliqué en 11-1-1, lors de la séance 3 le professeur B fait un bilan sur les deux séances précédentes. Lors de ce bilan, on note qu'il s'appuie sur le dispositif ResCo pour introduire le travail de la séance 3 :

*« En fait, **je vous ai fait**, hein, **il y a un chercheur qui nous a proposé ce problème-là**. Et ce chercheur, il a regardé un petit peu, car vous êtes 60 classes à avoir cherché ce problème. Il a regardé un petit peu tout ce qui était faisable, tout ce, toutes les questions qui ont été échangées, toutes les pistes de recherche qui ont débuté. Et puis, ben il va **nous expliquer** deux trois petites choses, notamment le fait de faire des choix. »*

Dans ce propos, le professeur B précise que c'est « *un chercheur* » qui a proposé l'énoncé sur lequel la classe a travaillé, que ce même chercheur a eu accès aux productions des élèves et qu'il va leur donner (il s'agit de la relance) quelques explications. La réaction des élèves s'ensuit rapidement comme l'illustrent les échanges suivants :

« L'élève : Monsieur, le chercheur il a la réponse ?

Prof B : Non, il s'est posé le problème, il se le pose comme nous, sauf qu'il nous guide.

L'élève : Et c'est qui le chercheur ?

Prof B : Il s'appelle Simon Modeste, il travaille à l'université de Montpellier.

Un autre élève (Y.) : Ah oui !

Prof B : Tu le connais c'est un ami à toi ?

Y. : Oui [en souriant]

Prof B : [en souriant] ah ça ne m'étonne pas, écoute tu lui passeras le bonjour la prochaine fois que tu le verras, d'accord Y. ? Allez, on va regarder ce qu'ils ont répondu. [Il projette les réponses]

On peut noter l'intérêt de ces élèves pour ce chercheur et leur curiosité qui ne sera qu'en partie assouvie par le professeur B. Ce dernier ne leur précise pas dans quel cadre ce chercheur travaille avec la classe (ni le mot « *IREM* », ni « *ResCo* » ne seront prononcés).

Dans les séances 4 et 5 (tout au moins dans les captations vidéo d'une partie de ces séances dont nous disposons), au grand nombre de « *chut* » et de « *on s'écoute* », « *on se tait les autres* » de la part du professeur B, il semblerait que perdure la difficulté pour l'enseignant et pour les élèves à s'adapter au changement de contrat didactique inhérent à l'organisation du dispositif ResCo.

Lors de ces séances nous ne notons aucun propos du professeur B s'appuyant sur le dispositif ResCo. Par contre, lors de l'explication à la classe de leur travail, en séance 4, un groupe d'élèves (qui n'est pas celui de l'élève Y.) cite « *Simon Modeste* » :

« On a répondu à la question **du botaniste Simon Modeste**. On a cherché la forme de la serre. Elle a la forme d'un parallépipède rectangle. On s'est dit que si l'arbre il est plus large que long, ben la serre elle sera horizontale, et si l'arbre est plus long que large, elle sera verticale. Après on s'est plus concentré sur le tronc, et sur le tronc, on a constaté qu'en 2013, il faisait 3,1 cm, c'est sans les branches. En 2014, il faisait 3,8 et en 2015 il faisait 4,1. Donc du coup, de 2013 à 2014, il grandit de 0,7 et de 2014 à 2015 de 0,3. Et du coup, on a continué tout ça jusqu'en 2023, on a alterné entre 0,7 et 0,3, et on a trouvé qu'à la fin le tronc il faisait 8, 8 cm. On a trouvé autre chose aussi. Le tronc il augmente de 100% en 2023, donc on a le double de 3,1 et c'est 6,2 et en mètre »

Pour les élèves de ce groupe, la question posée est celle de *ce* chercheur (qu'ils qualifient de botaniste sans doute en raison du contexte de la fiction réaliste « L'arbre » et du fait qu'ils ne disposent pas d'informations sur ce chercheur qui est un chercheur en didactique des mathématiques). Il est à noter que la mémorisation de l'identité du chercheur est facilitée par le fait que le nom-prénom du chercheur apparaît explicitement sur le document de la relance. Malgré le peu d'appui de la part du professeur B sur le dispositif ResCo dans ses actions et/ou réponses aux élèves, ce groupe considère avoir cherché à résoudre le problème de S.Modeste.

LE PROFESSEUR C,

Nous rappelons qu'en raison d'un incident technique (au niveau de la caméra) nous ne disposons ni de la vidéo de l'intégralité de la séance 1 ni de celle de la séance 2.

Dès l'introduction de la séance 1, le professeur C indique aux élèves que le problème à résoudre émane de chercheurs qualifiant le travail à faire des élèves de « *mission* » :

« Des **chercheurs** se posent une question et demande à de nombreux élèves de les aider dans leurs recherches. Nous sommes dans un groupe de trois classes et on va essayer de les aider dans leur **mission**. »

Nous pourrions interpréter le choix du mot « *mission* » comme un élément explicitant une modification du contrat didactique ordinaire de la classe (dans l'hypothèse où ce mot n'est pas employé à l'ordinaire par le professeur pour désigner une situation de recherche).

Les propos de l'enseignant tels que « *Pour essayer de répondre à la question des botanistes, vous allez vous poser des questions.* » ou « *Les questions qui te viennent quand t'essaies de répondre à cette mission* » montrent une volonté de sa part de préciser le contexte de sa proposition de travail, s'appuyant en cela sur le dispositif ResCo et en particulier sur le contexte « fictif réaliste » du problème à résoudre. On peut supposer que pour le professeur C, c'est un moyen de motiver la

classe à la tâche tout en leur indiquant le caractère différent voire exceptionnel du travail à venir.

Lors de la séance 3, le professeur C insiste à nouveau sur le contexte du travail demandé aux élèves en s'appuyant sur le dispositif ResCo :

*« Alors vous vous rappelez on est nombreux à travailler la dessus. Alors pour que tout le monde soit avec le même travail et le même modèle mathématique, **le chercheur Mr Simon Modeste à Montpellier** a récupéré toutes les informations, vous vous rappelez je vous avais montré sur le forum là où il y avait tous les échanges, il a récupéré toutes les questions et toutes les réponses des 60 classes qui travaillent et il **vous a préparé** la relance. Je vous ai fait ça sur un petit papier comme le format de la fiction. Je l'ai en plus grand je vais vous le mettre au tableau. Je vous laisse le découvrir ».*

On peut noter que l'enseignant ne s'inclut pas complètement dans le travail de la classe, dans la mesure où dans ses propos il semble y avoir le chercheur et les élèves (*« il vous a préparé »*). Il semble transférer complètement la responsabilité des choix de la relance *« aux botanistes »* allant même jusqu'à différencier le travail qui relève d'experts en botanique de celui des mathématiciens :

« Vous vous rappelez on avait plein de questions sur l'arbre : les feuilles, les fleurs, les graines. Donc on va faire confiance aux botanistes, nous on va essayer de faire le problème en mathématique et on va les laisser penser eux leur problème de botanique, de l'étude de l'arbre. On a peu de renseignements mais les botanistes on pense qu'ils ont pas mal d'expérience. Ils nous ont dit qu'il serait mature dont maturité en 2023, donc on va leur faire confiance. Les feuilles sont petites, est ce qu'on va les compter ? Non on ne s'en occupera pas. »

Le professeur C étaye les choix de la relance aux élèves en arguant qu'il faut faire confiance aux experts en botanique. On peut faire l'hypothèse que de tels arguments en classe de mathématique ne facilitent pas une mise en discussion des choix dans la mesure où ils ne relèvent pas des mathématiques. D'ailleurs chaque choix de la relance sera acté par le professeur C comme un choix à respecter : *« Vous vous rappelez on s'était posé la question, est ce qu'on le coupe, est-ce qu'on ne le coupe pas ? Donc visiblement on le laisser pousser tout seul sans intervenir. »*

Cet enseignant justifie auprès des élèves sa proposition de mise en œuvre sur le dispositif ResCo (en modifiant toutefois le domaine d'expertise des membres de ResCo ; aucun membre n'est botaniste) en allant jusqu'à explicitement leur dire que les recherches des élèves sont attendus par S.Modeste : *« Voilà donc c'est Simon modeste, le chercheur à l'université de Montpellier. Il attend vos réponses. Aujourd'hui, donc il faut qu'on avance un petit peu. Aujourd'hui vous allez travailler par groupes. D'accord ? »*

Lors du travail de groupes, le professeur C circule dans les groupes sans donner d'explications mais en s'attachant à encourager les élèves à poursuivre leurs recherches. Nous pouvons interpréter ces non-interventions au niveau des explications d'une part comme un signe indiquant la volonté du professeur C de ne porter qu'en partie la responsabilité du travail, la laissant plutôt à la charge de ResCo, d'autre part comme une volonté de favoriser la dévolution aux élèves de la tâche en cours, comme l'illustrent les échanges suivants :

L'élève : S'ils [le « ils » fait référence au groupe ResCo qui a rédigé la relance mais pour l'élève ce « ils » désigne les botanistes] ont trouvé que chaque année ça grandit de 10% alors ils ont trouvé le résultat ! »

Prof C : Ils ont dit que la croissance de chaque partie de l'arbre était de 10%.

Une autre élève : C'est sûr ou ?

*Prof C : C'est ce qu'ils nous disent. **On peut leur faire confiance.** Vous vous rappelez que **les botanistes en savent plus que nous sur les arbres donc en va leur faire confiance.** Par contre nous, est ce qu'on nous dit de mesurer chaque branche ?*

Une élève : Non

*Prof C : Nous on aimerait savoir quelle sera la forme de l'arbre, les dimensions de l'arbre en 2023. Donc est ce que les **botanistes** ont la réponse ?*

Réponse collégiale : Non

Prof C : Non. C'est nous qui devons la ?

Les élèves : Résoudre

Pour ce professeur, les références explicites à ResCo pour justifier ses actions et ses réponses auprès des élèves sont présentes dès la séance 1 et perdurent amenant les élèves eux-mêmes à considérer le problème comme le problème de chercheurs (« botanistes » d'après leur enseignant) pour lequel on leur demande de l'aide. On peut supposer que pour le professeur C ce choix lui facilite l'appropriation de l'enjeu des cinq séances et favorise en cela l'implication de la classe (plutôt générale et dynamique au vu des vidéos).

11-2-2 Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCo2

Des analyses précédentes ressort que l'organisation imposée par le dispositif ResCo modifie le contrat didactique de la classe en influant principalement sur les composantes cognitive et médiative des pratiques des enseignants : la responsabilité du choix du problème et de sa mise en œuvre relève du groupe ResCo (composante cognitive), les enseignants peuvent faire le choix d'en informer les élèves (composante médiative). Par exemple, les professeurs A et C font ce choix, ce qui agit sur la composante médiative de leurs pratiques : Le professeur A justifie auprès des élèves sa mise en retrait en argumentant qu'il n'est décideur, ni du choix du

problème, ni du choix des différentes phases de travail proposé. Tout en semblant donner la responsabilité du contenu et du déroulement des séances, il propose un contrat didactique habituel (narration de recherche). Au niveau de la composante personnelle, ce choix peut relever de s'assurer de proposer aux élèves une tâche connue et a priori déjà expérimentée dans la classe afin de favoriser un bon déroulement des séances en terme de compréhension des attendus et d'implication.

Dans les logiques d'action du professeur C, la responsabilité du contenu et du déroulement incombe à l'équipe ResCo. La composante médiative de ses pratiques semble relever principalement de motiver, d'enrôler les élèves et de les accompagner tout en favorisant la dévolution aux élèves du travail demandé. Le professeur C négocie le changement de contrat didactique lié aux modalités de mises en œuvre du dispositif ResCo en donnant un rôle majeur au chercheur de l'équipe ResCo quitte à « dénaturer » son métier (botaniste au lieu de mathématicien). Le professeur C fait vivre la mathématisation horizontale dans la classe (avec une bonne implication des élèves) sans en porter la responsabilité, ce qui pourrait peut-être donner aux élèves un caractère trop exceptionnel du travail demandé et pourrait les amener à porter davantage leur attention sur « ce qu'il faut faire pour le chercheur » plutôt que sur les apprentissages visés par le travail donné.

Le professeur B, quant à lui, fait le choix d'assumer la responsabilité du contenu et du déroulement des séances. On note que ce choix semble modifier le contrat didactique de la classe dans la mesure où le caractère inhabituel des tâches demandées perturbe les élèves du point de vue de leur implication. Le professeur B essaie de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves en encourageant les élèves à prendre la responsabilité des tâches demandées mais se heurte aux résistances des élèves. On pourrait supposer que s'appuyer a minima sur l'organisation proposée par ResCo aurait peut-être permis à l'enseignant de mieux négocier le changement de contrat didactique en permettant aux élèves de mieux s'approprier les exigences et l'intérêt de la phase de questions-réponses sans toutefois préjuger qu'en conséquence se produise une modification significative de l'ambiance de travail.

En conclusion, la modification du contrat didactique de la classe induit par le dispositif ResCo implique une modification des composantes médiative et cognitive des pratiques de l'enseignant que ce dernier doit négocier. Nous faisons l'hypothèse que les contraintes calendaires du dispositif ResCo (respect du contenu des phases chaque semaine) influent

particulièrement sur la composante médiative des enseignants en les amenant à davantage prioriser le bon déroulement de ces phases (gestion du temps, implication des élèves), peut-être au détriment de l'apprentissage de la mathématisation horizontale.

11-3 Mise à l'épreuve de HRLevier-ResCo3

En proposant une situation et une phase de questions-réponses porteurs de ce travail, et un stage de formation, nous avons vu précédemment que le dispositif prend en charge un certain nombre d'obstacles inhérents aux pratiques enseignantes. Nous proposons d'analyser dans la suite, en quoi ces propositions peuvent constituer des conditions favorables installées par le dispositif ResCo, pour permettre aux enseignants de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale (HR-Levier-ResCo3), selon les trois indicateurs définis pour cette hypothèse de recherche au paragraphe 10-5.

11-3-1 Selon l'indicateur 1-ResCo3

Nous avons mesuré le taux d'abandon des enseignants qui ont cessé de collaborer avec les autres classes de leur groupe durant la phase de questions-réponses en 2015-2016, 2016-2017 et 2017-2018. Nous faisons l'hypothèse que plus ce taux est faible, plus les conditions installées par le dispositif ResCo sont favorables pour permettre aux enseignants de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale.

Nous rappelons que les contraintes du dispositif ResCo imposent à l'enseignant de déposer la première semaine de la session ResCo, des questions à destination des autres classes de leur groupe et de déposer les réponses aux questions reçues la deuxième semaine. Le groupe ResCo n'impose pas d'autres dépôts lors des semaines suivantes même s'il les recommande fortement pour maintenir la dimension collaborative du travail proposé.

Nous supposons que ne pas avoir réalisé ces dépôts peut être interprété comme un abandon de la part de l'enseignant au dispositif ResCo. Les résultats du volet 1 de la partie 3 ayant montré que ces deux étapes favorisent la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves, le fait de ne pas déposer de questions et/ou de réponses pourraient montrer que l'enseignant n'a pas fait vivre la mathématisation horizontale dans la classe. Toutefois, l'enseignant pourrait

avoir fait le choix de poursuivre la résolution du problème en proposant une dimension collaborative uniquement interne à la classe, information dont nous ne disposons pas.

A partir de la plateforme ResCo, nous avons recherché ce taux d'abandon en 2015-2016, 2016-2017 et 2017-2018 que nous présentons dans le tableau suivant :

2015-2016	2016-2017	2017-2018
43 enseignants ayant engagées une ou plusieurs classes	32 enseignants ayant engagées une ou plusieurs classes	46 enseignants ayant engagées une ou plusieurs classes
3 abandons	4 abandons	1 abandon

Le taux d'abandon est plutôt faible ce qui pourrait montrer que les conditions installées par le dispositif ResCo semblent favorables pour accompagner les enseignants dans la mise en œuvre dans les classes d'un travail relevant de la mathématisation horizontale. Nous faisons l'hypothèse que la dimension institutionnelle de ce dispositif venant de l'IREM favorise l'acceptation des enseignants à le mettre en œuvre dans les classes, les dédouanant en quelque sorte d'une part de la responsabilité de ce choix.

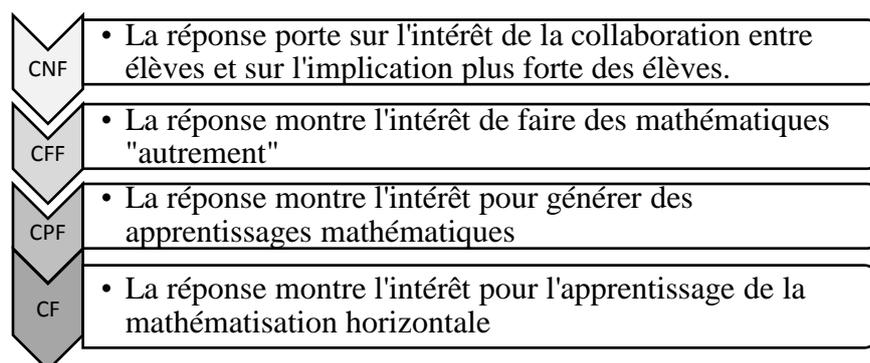
Afin de mieux cerner en quoi les conditions pourraient être favorables, nous prenons en compte, dans la suite, l'avis des enseignants sur l'impact du dispositif ResCo vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques.

11-3-2 Selon l'indicateur 2-ResCo3

Nous utilisons les réponses émises dans les questionnaires à destination des participants au dispositif ResCo de 2013 à 2018, à la question suivante :

- Lors de la mise en activité des élèves, quelle(s) influence(s) ce type de problème a-t-il eu sur leur approche des mathématiques ?

Nous rappelons la grille d'analyse retenue :



Les abréviations CNF, CFF, CPF et CF renvoient respectivement à : conditions a priori non favorables, conditions a priori faiblement favorables, conditions a priori plutôt favorables et conditions a priori favorables

Sur l'ensemble des réponses aux questionnaires, nous avons obtenu 40 réponses à la question étudiée dont nous présentons, selon notre grille, une analyse quantitative des résultats avant de les mettre en discussion.

CNF	CFF	CPF	CF	Oui/Non ⁴⁵
17,5%	30%	27,5%	12,5%	12,5%

Plus de la moitié des réponses mettent en évidence l'intérêt du dispositif ResCo pour faire des mathématiques autrement ou pour générer des apprentissages mathématiques.

En ce qui concerne « *faire des mathématiques autrement* » ressort principalement l'utilité des mathématiques pour résoudre un problème réel, comme par exemple :

« Principalement que les mathématiques servent pour faire tomber la question « à quoi ça sert ? ». Que les mathématiques servent et permettent d'avancer sérieusement quand les élèves sont confrontés à de tels problèmes. »

Au niveau des apprentissages mathématiques générés par le dispositif, les enseignants soulignent en particulier l'occasion pour les élèves de donner plus de sens à leurs connaissances :

« Cela développe les compétences chercher, représenter, modéliser, raisonner, calculer, communiquer...cela leur apprend à se servir des connaissances travaillées, à leur donner du sens. »

Il semblerait que ces réponses relèvent de la composante institutionnelle c'est-à-dire que les enseignants s'appuient sur les programmes mathématiques pour justifier la pertinence du dispositif. En appui sur cette hypothèse, il semble alors peu étonnant que peu de réponses

⁴⁵ Réponses uniquement en termes de « Oui » ou de « Non »

soulignent l'intérêt du dispositif pour enseigner la mathématisation horizontale dans la mesure où comme nous l'avons souligné lors de notre étude des programmes, les préconisations officielles sont implicites à ce niveau. Nous en avons néanmoins relevé quelques-unes. Elles mettent en évidence que l'intérêt du dispositif réside dans la nécessité de faire des choix pour résoudre le problème comme l'exemple suivant le souligne :

« Je pense que ça apprend à chercher, à se poser des questions et à envisager une ou plusieurs résolutions et aussi à choisir les bons « outils » mathématiques. Souvent, les problèmes qu'on leur donne sont guidés et ne laissent pas la place à la recherche et à leur prise d'initiative ; l'outil est déjà donné. »

Nous n'avons pas trouvé dans les réponses de référence à la nécessité de sélectionner un fragment de réalité, des grandeurs pertinentes puis de les mettre en relation. Toutefois, si nous revenons à nos résultats du volet 1, les élèves ont en acte réalisé de telles tâches pour envisager un traitement mathématique. On peut faire l'hypothèse que soit les enseignants n'ont pas identifié ce travail, ce qui relèverait d'une non identification de l'enjeu de la mathématisation horizontale, soit qu'ils n'ont pas priorisé cet intérêt dans leurs réponses dans les questionnaires.

11-3-3 Selon l'indicateur 3-ResCo3

Cet indicateur est le taux de « oui » à la réponse à la question suivante :

- *Envisageriez-vous d'utiliser le site de résolution collaborative avec d'autres collègues pour mettre en place des problèmes de recherche avec vos élèves en toute autonomie ?*

Nous faisons l'hypothèse que plus ce taux est élevé plus les conditions du dispositif pourraient être favorables à faire vivre la mathématisation horizontale, dans la mesure où envisager une session collaborative en autonomie pourrait montrer que le dispositif est un levier quant aux freins des enseignants à mener une telle activité dans les classes. En d'autres termes, nous interprétons ce taux comme un indicateur de l'évolution des pratiques des enseignants au regard de l'enseignement de la mathématisation horizontale au sein du dispositif ResCo. Une perspective de recherche serait d'étudier cette évolution au sein des pratiques ordinaires des enseignants.

Sur les 40 réponses obtenues, le taux de « Oui » est de 62,5%. Aucune de ces réponses ne sont justifiées⁴⁶. Néanmoins, on peut relever, dans ces réponses, l'impact du dispositif sur la composante sociale des pratiques de certains enseignants, comme l'illustrent les exemples suivants :

« Oui. Il reste à convaincre mes collègues que ce type de travail n'est pas du temps perdu...Je m'y emploie. »

« Oui, mais j'ai proposé à plusieurs collègues de participer cette année à ce type de problèmes...sans succès. »

« Oui, selon le mode de fonctionnement de cette activité. Comme j'essaie d'engager mon collègue dans ce type de travaux au travers du site du collège, cela rejoint ma réflexion. »

Il est intéressant de noter que certains enseignants ont répondu « Non » en proposant des justifications qui relèvent des différentes composantes des pratiques :

- Selon la composante cognitive : difficultés à élaborer une fiction réaliste

« Je ne me sens pas capable de produire un problème de la qualité de celui que nous avons reçu ! »

- Selon les composantes cognitive et sociale : difficultés à élaborer une fiction réaliste

« Je n'imagine pas pouvoir élaborer un problème qui puisse convenir même avec l'aide et des échanges de collègues. »

- Selon les composantes sociale et médiative : aspect chronophage du dispositif

« L'idée est séduisante, le temps manque... »

- Selon la composante personnelle :

« Non, mais je souhaiterai participer à nouveau en espérant de meilleurs résultats. »

Ces justifications montrent d'une part que disposer d'une fiction réaliste est un levier pour les enseignants pour faire vivre la mathématisation horizontale et d'autre part, que l'aspect « chronophage » ou « non prioritaire » d'une telle activité demeure encore un frein pour certains enseignants. Dans certaines réponses dans les questionnaires pour des questions que nous n'avons pas mises à l'étude, nous retrouvons que cette contrainte pèse sur les pratiques

⁴⁶ Dans deux des questionnaires analysés (sur quatre), la question posée était une question fermée proposant aux enseignants de cocher « oui » ou « non ».

enseignantes, comme l'illustrent les exemples de réponses suivants à la question « *Quels sont les points négatifs du travail collaboratif proposé ?* » :

- « *Chronophage* »
- « *Difficultés liées à l'avancée du programme de la classe* »
- « *Le temps ! Ça m'a pris 6h, ce qui m'a mis en retard sur le programme.* »

Comme nous l'avons vu au paragraphe 10-2, cet aspect chronophage est mentionné dans les programmes mathématiques en tant qu'obstacle à la mise en œuvre d'activité de modélisation dont un levier proposé est par exemple les Enseignements Pratiques Interdisciplinaires (EPI) au collège c'est-à-dire un temps long qui pourrait être dédié à la modélisation mathématique. Nous faisons l'hypothèse que le dispositif ResCo en est une autre alternative en proposant une résolution de problème étalée sur cinq semaines (à raison d'une séance par semaine).

11-3-4 Synthèse des résultats au regard de l'hypothèse HRLevier- ResCo3

D'après nos différentes analyses, un certain nombre de décisions, qui portent sur les contenus ou sur le déroulement en classe et qui influent sur les composantes cognitive et médiative des pratiques enseignantes, par exemple en imposant une phase de questions-réponses collaborative entre classes, tend à montrer que le dispositif ResCo installe des conditions plutôt favorables qui permettent à l'enseignant de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale. Du point de vue de la composante personnelle des pratiques, les enseignants qui pourraient être déroutés par le caractère original de cette proposition, semblent suffisamment accompagnés par l'équipe ResCo pour la mettre en œuvre dans leurs classes. Les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les pratiques enseignantes (notamment les programmes mathématiques) semblent toujours présentes, mais peut-être atténuées par le fait que le dispositif ResCo représente un collectif institutionnel venant de l'IREM, encourageant en cela, les enseignants à décider de mettre en œuvre ce type d'activité de modélisation mathématique. La résistance dans la composante institutionnelle des pratiques enseignantes serait peut-être plus faible avec des préconisations officielles moins implicites sur les apprentissages inhérents à la mathématisation horizontale.

11-4 Synthèse

Nos analyses au sein du dispositif ResCo ont mis en évidence qu'il semble nécessaire de palier au flou des préconisations officielles à propos de la mathématisation horizontale afin de « dévoluer » son enjeu d'apprentissage aux enseignants et ainsi d'en favoriser la dévolution aux élèves, c'est-à-dire de favoriser l'identification par les élèves des enjeux d'apprentissage liés à cet aspect de la mathématisation. Les leviers internes à la logique de ResCo relèvent d'une part de la formation des enseignants, d'autre part de la proposition d'une fiction réaliste et de sa mise en œuvre avec une phase de questions-réponses. Cette phase joue un rôle majeur pour faire vivre la mathématisation horizontale (comme nous l'avons montré dans le volet 1). Toutefois, cela engendre des modifications du point de vue de la composante médiative de leurs pratiques relativement à leurs décisions d'assumer complètement ou en partie la responsabilité des tâches proposées aux élèves. Cette négociation du contrat didactique de la classe se manifeste principalement dans les échanges avec la classe que chaque enseignant gère de manière singulière selon sa composante personnelle avec un objectif qui semble commun : favoriser la dévolution aux élèves du travail demandé en s'appuyant sur la dimension collaborative entre pairs du dispositif ResCo.

Il apparaît que selon le degré d'appropriation de l'EAMH par les enseignants, la dévolution des enjeux de la mathématisation horizontale aux élèves dans cette phase est plus ou moins favorisée dans la mesure où les élèves peuvent être amenés à réaliser les tâches demandées sans toutefois en saisir le sens vis-à-vis d'une activité de modélisation mathématique. Par exemple, le volet 1 a montré que les élèves font des choix en actes, de fragments de réalité, de grandeurs pertinentes en vue d'élaborer un modèle montrant une dévolution effective de la situation proposée. Afin de leur faire comprendre ce que, pour un problème particulier ancré dans le réel, cette démarche a de généralisable dans une activité de modélisation mathématique, il semble important que les enseignants les accompagnent à identifier ces tâches comme nécessaires pour passer de la situation réelle au monde mathématique en proposant par exemple un écrit structuré pour le mettre en évidence, ce qui est étroitement lié à leur degré d'appropriation de l'EAMH. Pour que le travail de mathématisation horizontale génère des apprentissages effectifs, nous faisons l'hypothèse que via la formation, il conviendrait de placer davantage la mathématisation horizontale au centre des débats en formation, pour permettre d'en faire saisir l'enjeu d'apprentissage par les enseignants. Par exemple, il serait opportun d'inviter les enseignants à

proposer aux élèves une structuration des connaissances mobilisées relevant de la mathématisation horizontale, comme la nécessité de faire des choix sur les grandeurs pertinentes et sur les éléments de contexte pour modéliser mathématiquement une situation posée dans un contexte réaliste, en précisant que selon les choix faits, plusieurs modèles sont envisageables. Les choix pourraient être motivés par l'anticipation du traitement mathématique qu'ils induisent c'est à dire en suggérant aux élèves de prendre en compte leurs connaissances mathématiques actuelles.

Nous faisons l'hypothèse que le manque d'instructions officielles dans les programmes sur la mathématisation horizontale tend à maintenir une résistance dans la composante institutionnelle des pratiques bien que nos analyses aient montré que la dimension institutionnelle venant de l'IREM du dispositif ResCo peut l'atténuer par un possible transfert de la responsabilité du contenu de l'enseignant vers l'équipe ResCo.

Conclusions du volet 2

Nos analyses nous conduisent au résultat suivant :

Résultat : Trois leviers internes à la logique du dispositif ResCo permettent, dans une certaine mesure, aux enseignants de faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes en favorisant la dévolution locale - au sens de Perrin-Glorian (1997) - aux élèves de cette mathématisation.

Levier-ResCo1 : Le dispositif ResCo est pertinent pour permettre aux enseignants de mieux s'appropriier, dans une certaine mesure, l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale en enrichissant les composantes personnelle, cognitive et médiative de leurs pratiques.

Levier-ResCo2 : Le dispositif ResCo prend en charge un certain nombre d'obstacles liés à l'apprentissage de la mathématisation horizontale en proposant une fiction réaliste et une phase de questions-réponses, favorisant la dévolution aux élèves de cette mathématisation.

Levier-ResCo3 : Le stage de formation et l'accompagnement proposé par le groupe ResCo installent des conditions favorables qui permettent à l'enseignant de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale.

Pour favoriser la dévolution aux élèves des enjeux d'apprentissage relevant de la mathématisation horizontale, il semblerait que via la formation, il serait important de mieux faire identifier aux enseignants ces enjeux, en les accompagnant par exemple, sur l'élaboration de bilans qui peuvent avoir une fonction de structuration des connaissances à mobiliser lors du passage d'une situation réelle au monde mathématique. Ces bilans pourraient mettre en évidence la nécessité de faire des choix de fragments de réalité, de grandeurs pertinentes et d'éléments de contexte afin d'envisager un traitement mathématique du problème, en vue d'élaborer un modèle mathématique, en précisant que selon les choix retenus, plusieurs modèles sont envisageables pour résoudre la fiction réaliste. Cet enrichissement des pratiques enseignantes doit prendre en compte de fournir une fiction réaliste et des exemples de dispositifs de mise en œuvre afin de lever des contraintes qui relèvent de l'exercice du métier de l'enseignant (temps de préparation, choix du déroulement et du contenu). On peut supposer

qu'une fois élargis la vision des possibles et l'intérêt de faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes, les enseignants pourraient le faire en autonomie. Cette hypothèse constitue une perspective de recherche quant à l'évolution des différentes composantes des pratiques de participants réguliers au dispositif ResCo dans le quotidien de la classe c'est-à-dire en dehors de ce dispositif.

Conclusions générales et perspectives

Notre travail de thèse porte sur l'étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant et sur l'analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Nous avons mis à l'étude les six questions de recherche suivantes :

QR₁ *Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique ?*

QR₂ *Quelles sont les pratiques des chercheurs experts en modélisation relevant de la mathématisation horizontale ?*

QR₃ *Quelles pratiques de référence de ces experts peut-on transposer dans les classes ?*

QR₄ *Quelles sont les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves de collège et de lycée engagés dans une activité de modélisation ?*

QR₅ *Quelles sont les caractéristiques des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation ?*

QR₆ *Quels sont les contraintes, les marges de manœuvre et les leviers potentiels associés à l'enseignement de la mathématisation horizontale ?*

Nous développons dans la suite les éléments de réponse apportés par l'étude épistémologique de la partie 2 aux questions QR₁ QR₂, QR₃, par l'étude didactique du volet 1 de la partie 3 aux questions QR₄ et QR₅, et par l'étude didactique du volet 2 de la partie 3 à la question QR₆.

Éléments de réponse apportés aux questions QR₁ QR₂, QR₃

Dans la deuxième partie de notre manuscrit, nous avons étudié d'un point de vue épistémologique la question de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en

modélisation mathématique relevant de la mathématisation horizontale, c'est-à-dire la mathématisation qui se joue lors « du passage du monde réel » au « monde mathématique » (QR₁).

Nous avons également montré comment notre thèse s'inscrit dans le prolongement des travaux de la Realistic Mathematics Education (Freudenthal 1973,1991). A partir des travaux de Treffers (1978), d'Israël (1996) et de Freudenthal (1991), nous avons défini la mathématisation horizontale et en avons identifié les formes :

- *La mathématisation horizontale* est le processus qui permet, à partir du choix d'un fragment de réalité, d'identifier certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique.
- *Les formes de la mathématisation horizontale*
 - Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée
 - Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique
 - Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique
 - Associer des propriétés à des quantités (la quantification)

En appui sur ces définitions, nous nous sommes interrogées sur les pratiques des chercheurs utilisant la modélisation mathématique, dans le contexte des sciences du vivant, pouvant relever de la mathématisation horizontale (QR₂), dans l'objectif de caractériser des invariants dans ces pratiques potentiellement transposables dans les classes (QR₃). Les analyses des entretiens menés auprès de cinq chercheurs ont permis de dégager six invariants des pratiques expertes relevant de la modélisation mathématique dans les sciences du vivant à partir desquels nous avons retenu des caractéristiques relevant de la mathématisation horizontale. En appui sur ces caractéristiques, nous avons complété et construit notre schéma du processus de modélisation mathématique et avons conduit les analyses didactiques dans l'étude des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Nous avons relevé des traces de transposition de ces caractéristiques dans les travaux des élèves.

Dans un contexte des sciences du vivant, lors du passage « d'une situation réelle » au « monde mathématique », trois éléments des pratiques expertes semblent invariants et potentiellement transposables à la classe à savoir :

P₁₁ Le chercheur (ou l'apprenti chercheur) fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.

P₁₂ Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique **P₁₁**.

P₁₃ La « *quantification* » telle que décrite par Chabot & Roux (2011) est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur (ou de l'apprenti chercheur) pour légitimer le choix du modèle utilisé dans le sens où elle permet de confronter aux données réelles les résultats obtenus avec le modèle.

L'étude d'épistémologie contemporaine a permis de mieux cerner la forme et le rôle de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation mathématique. Cela nous a permis d'élaborer un schéma du processus de modélisation suivant (Figure 28, page 108) qui intègre le travail de mathématisation horizontale et les articulations entre les aspects horizontal et vertical de la mathématisation.

Éléments de réponse apportés aux questions QR₄ et QR₅

Notre étude des travaux autour d'un dispositif de formation continue de résolution collaborative de problème (ResCo), de l'IREM de Montpellier, nous a conduites à formuler l'hypothèse de travail suivante :

Les situations proposées dans le dispositif ResCo, qualifiées de « fictions réalistes » (Ray, 2013) et la phase de questions-réponses incluse dans ce dispositif favorisent la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

Dans le volet 1 de la partie 3, nous avons défini les caractéristiques d'un énoncé propice à la transposition des pratiques invariantes identifiées en partie 2 et favorisant la dévolution aux

élèves de la mathématisation horizontale, que nous qualifions de « Fiction Réaliste, conçue comme une Adaptation d'une Problématique Professionnelle de Modélisation » (FRAPPM) :

Caractéristiques d'une FRAPPM :

F₁ : une situation a priori non mathématique

F₂ : un contexte fictif mais réaliste

F₃ : la nécessité d'une phase de modélisation pour une prise en charge efficace de la situation

F₄ : la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits

F₅ : la fiction réaliste est conçue comme une adaptation d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles

F₆ : les variables didactiques (Brousseau, 1998) de la fiction réaliste sont choisies de manière à favoriser l'entrée dans la mathématisation horizontale.

Nous avons élaboré la FRAPPM « L'arbre » dans laquelle il s'agit de prévoir la croissance d'un arbre (figure 39, page 140). Nous avons présenté l'analyse a priori de cette situation, du point de vue du travail de la mathématisation horizontale dans une phase de questions-réponses. Cette analyse prend essentiellement appui sur le choix des valeurs des variables didactiques retenues :

- V1 : Des schémas en 2D pour proposer un cadre suffisamment réaliste tout en permettant une activité de modélisation de la 6^{ème} à la terminale.
- V2 : Le nombre de schémas : nous en avons proposé trois. De notre point de vue, ce nombre est suffisant pour permettre aux élèves de faire des choix sur les règles de croissance des différents éléments de l'arbre.
- V3 : La forme de l'arbre (symétrique versus asymétrique): nous avons choisi une croissance asymétrique pour favoriser le questionnement des élèves autour de la prévision de la croissance de l'arbre.
- V4 : Le nombre de nouvelles branches apparaissant chaque année : nous avons choisi de faire apparaître deux ou trois nouvelles branches pour amener rapidement les élèves à faire des choix au niveau de la croissance de l'arbre.
- V5 : Les longueurs des troncs et branches : elles ont été choisies pour questionner un éventuel choix d'un modèle de croissance régulière.
- V6 : La donnée d'une échelle : afin de permettre des mesures et une prise d'information instrumentée sur les dessins.

Puis, nous avons défini des indicateurs de dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale pour la phase de questions (figure 40, page 154) et pour celle des réponses (figure 41, page 157).

La situation de « l'arbre » a été expérimentée en 2015-2016, au sein du dispositif ResCo. Soixante classes ont participé à cette expérimentation. Nous avons recueilli via la plateforme du groupe ResCo, 562 questions et 812 réponses élaborées par les élèves, que nous avons analysées à partir des indicateurs précédents. Dans ces analyses, nous avons mis en évidence les traces de transposition des pratiques expertes identifiées en partie 2.

Nous obtenons ainsi cinq résultats :

- Les caractéristiques d'une fiction réaliste, conçue comme une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation (FRAPPM), favorisent un travail de mathématisation horizontale.
- Une phase de questions-réponses sur une FRAPPM, sous la responsabilité des élèves, permet, dans une certaine mesure, la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.
- Une FRAPPM et une phase de questions-réponses permettent de transposer à la classe des éléments des trois pratiques invariantes relevant de la mathématisation horizontale, identifiées chez des chercheurs dont le domaine de recherche relève de la modélisation mathématique dans les sciences du vivant.
- Une FRAPPM et une phase de questions-réponses favorisent des allers retours entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale.
- Une FRAPPM et une phase de questions-réponses permettent de faire vivre la partie hachurée du schéma du processus de modélisation mathématique, c'est-à-dire les étapes permettant de passer de « la situation réelle » à « un problème susceptible d'un traitement mathématique », puis, de ce problème à « un problème mathématique » (voir figure 77, p.202).

Éléments de réponse apportés à la question QR₆

Dans le volet 2, nous avons étudié les conditions, contraintes et marges de manœuvre relatives aux pratiques enseignantes relevant de la mathématisation horizontale, dans le cadre de la

double approche didactique et ergonomique. Cette étude nous a conduites aux hypothèses de travail suivantes, en ce qui concernent les obstacles (HTo1 à HTo4) et les conditions (HTc1 à HTc3) :

HTo1 : La mathématisation horizontale n'est pas un enjeu d'apprentissage identifié par les enseignants de mathématiques.

HTo2 : La mathématisation horizontale est un enjeu d'apprentissage identifié par les enseignants de mathématiques mais considéré par ces derniers comme trop chronophage.

HTo3 : Il est difficile pour les enseignants de mathématiques d'élaborer ou d'identifier des situations à proposer dans les classes porteuses d'un travail relevant de la mathématisation horizontale.

HTo4 : Le contrat didactique habituel de la classe peut faire obstacle à la mise en œuvre d'un travail de mathématisation horizontale.

HTc1 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques identifient que pour envisager un traitement mathématique d'une situation posée a priori hors champ mathématique, un travail (de mathématisation horizontale) est nécessaire.

HTc2 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques disposent de dispositifs de mise en œuvre favorisant la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

HTc3 : Il est nécessaire que les enseignants de mathématiques disposent d'exemples de situations favorisant la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale.

Nous avons fait le choix de conduire notre expérimentation sur les pratiques enseignantes au sein du dispositif ResCo.

Nos hypothèses de recherche sur les obstacles et les conditions ont été réfléchies comme des préalables à penser des leviers internes à la logique du dispositif ResCo, en faisant l'hypothèse que cela nous renseigne plus largement, au moins dans une certaine mesure, sur les pratiques ordinaires :

- HRLevier-ResCo1 : Le dispositif ResCo semble pertinent pour permettre aux enseignants de mieux s'approprier l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale en enrichissant les composantes personnelle, cognitive et médiative de leurs pratiques.

- HRLevier-ResCo2 : Le dispositif ResCo prend en charge un certain nombre d'obstacles liés à l'apprentissage de la mathématisation horizontale en proposant une situation et une phase de questions-réponses, favorisant la dévolution aux élèves de cette mathématisation.
- HRLevier-ResCo3 : Le stage de formation et l'accompagnement proposé par le groupe ResCo installent des conditions favorables qui permettent à l'enseignant de proposer aux élèves un travail relevant de la mathématisation horizontale.

Nos analyses nous ont conduites au résultat suivant :

Les trois leviers précédents, internes à la logique du dispositif ResCo, permettent aux enseignants, dans une certaine mesure, de faire vivre la mathématisation horizontale dans les classes en favorisant la dévolution locale (au sens de Perrin-Glorian, 1997) aux élèves de cette mathématisation.

En outre, nos analyses ont montré que pour favoriser la dévolution aux élèves, au-delà de la dévolution locale, il semble nécessaire d'accompagner les enseignants dans l'identification des savoirs en jeu, liés au processus de mathématisation horizontale qui pourraient notamment faire l'objet d'institutionnalisation. Nous avons ainsi formulé une piste pour favoriser la dévolution aux élèves des enjeux d'apprentissage relevant de la mathématisation horizontale, via la formation : faire identifier aux enseignants ces enjeux, en les accompagnant par exemple, sur l'élaboration de bilans pour la classe qui peuvent avoir une fonction de structuration des connaissances à mobiliser lors du passage d'une situation réelle au monde mathématique. Ces bilans pourraient mettre en évidence la nécessité de faire des choix de fragments de réalité, de grandeurs pertinentes et d'éléments de contexte afin d'envisager un traitement mathématique du problème, en vue d'élaborer un modèle mathématique, en précisant que selon les choix retenus, plusieurs modèles sont envisageables pour résoudre la fiction réaliste.

Nous terminons ce manuscrit en présentant les questions qui restent ouvertes à la suite de notre travail et nos perspectives de recherche.

Questions ouvertes

Les pratiques identifiées, dans notre étude, sont-elles représentatives des pratiques des chercheurs utilisant la modélisation mathématique dans les sciences du vivant ?

Y a-t-il d'autres contextes que celui des sciences du vivant qui pourraient enrichir la transposition de pratiques liées à la mathématisation horizontale pour la classe et/ou fournir des situations propices pour la classe ?

La dimension collaborative entre classes, lors de la mise en œuvre de la phase de questions-réponses, dans le cadre du dispositif ResCo, joue-t-elle un rôle dans la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale ?

Les pratiques des enseignants que nous avons analysées sont-elles représentatives des pratiques des enseignants en mathématiques dans le secondaire ?

Perspectives de recherche

- Etude didactique à partir d'une autre FRAPPM

Nous avons élaboré une autre FRAPPM qui a été mise en œuvre au sein du dispositif ResCo.

La situation proposée, « *L'entrepôt* », relève d'une adaptation d'une problématique en logistique et a été expérimentée auprès de 63 classes du secondaire, en 2017-2018. Il s'agit d'optimiser l'emplacement d'un entrepôt (voir annexe 15). Pour cette expérimentation, nous disposons de l'ensemble des questions-réponses produites par les élèves et de captations vidéo de la mise en œuvre de cette phase par deux enseignants.

Notre perspective est d'identifier dans les pratiques expertes en logistique celles qui pourraient relever de la mathématisation horizontale et être transposables à la classe. Nous envisageons ensuite d'analyser, selon la méthodologie employée dans notre travail de thèse, les productions des élèves pour, d'une part, étudier en quoi les variables didactiques choisies pour cette FRAPPM ont favorisé la dévolution aux élèves de la mathématisation horizontale, et d'autre part, chercher à identifier des traces de transposition des pratiques expertes.

- Etude des autres étapes du schéma du processus de modélisation mathématique, retenu dans notre thèse

A partir du corpus de notre expérimentation de la situation de « L'arbre », nous projetons d'étudier les articulations entre la mathématisation horizontale et verticale lors du travail des élèves à partir d'une étude portant sur la totalité de notre schéma du processus de modélisation. En particulier, nous envisageons d'étudier le travail des élèves relevant de la validation du modèle. Nous avons déjà pointé dans notre travail de thèse que la pratique P_{12} relève en partie de cette validation. Les analyses ont montré que les élèves ont majoritairement essayé de mettre à l'épreuve un modèle connu, le modèle de proportionnalité, qu'ils ont parfois rejeté en confrontant les résultats obtenus dans ce modèle à la contingence, les amenant alors à reconsidérer leurs choix (Pratique P_{12}). Nous souhaitons étudier le rôle des résultats obtenus dans le travail de mathématisation verticale conduisant à une solution mathématique, dans le retour à la situation de départ. Il nous semble que cet enjeu essentiel pour la classe est un aspect peu pris en charge par le dispositif ResCo. Dans la partie 2, nous avons identifié deux pratiques invariantes auprès des chercheurs interviewés qui relèvent de la validation du modèle :

- Les allers retours mettent la plupart du temps en jeu des données quantitatives que les chercheurs étudient pour vérifier la fiabilité de leur modèle et le cas échéant affiner le modèle et/ou revoir les données sélectionnées pour la question de départ. Si le résultat obtenu avec le modèle est cohérent avec les données de la réalité, le chercheur valide le choix du modèle.
- Le chercheur utilise la simulation informatique pour obtenir des résultats avec le modèle choisi. Souvent c'est avec la simulation informatique qu'il va tester si son choix du fragment de réalité associé au modèle qu'il induit est en cohérence avec les observations issues de l'expérience ou de l'expérience simulée.

Nous pourrions mettre à l'étude, la transposition à la classe de ces pratiques.

Nous projetons également d'analyser l'effet de « la relance » envoyée par le groupe ResCo à l'issue de la phase de questions-réponses, vis-à-vis des articulations entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale. Nous faisons l'hypothèse que cette relance, que nous qualifions de « *fiction réaliste relancée* »⁴⁷, joue le rôle du « problème mathématique » indiqué sur notre schéma du processus de modélisation. Notre perspective de recherche est d'étudier le dispositif ResCo en termes de structuration du milieu (Margolinas 1995) pour nous mettre à l'étude les questions de recherche suivantes :

⁴⁷ Le lecteur trouvera en annexe 16, la fiction réaliste relancée « L'arbre ».

Quelles sont les contributions de la phase de questions-réponses et de la relance au milieu didactique ?

Quelles rétroactions du milieu influent sur les articulations entre les deux aspects de la mathématisation dans le travail des élèves ?

Comment les enseignants d'une part, les élèves d'autre part, s'en emparent pour poursuivre la résolution de la fiction réaliste initiale ?

Quelles difficultés potentielles de mise en œuvre pourraient avoir à surmonter les enseignants lors de la modification du milieu didactique par la fiction réaliste relancée ?

- Etude de l'évolution des pratiques enseignantes relevant de la mathématisation horizontale

Notre perspective de recherche est de mettre à l'étude la question suivante :

Le dispositif ResCo peut-il initier un développement des pratiques enseignantes relevant de la mathématisation horizontale en dehors du dispositif lui-même ?

Il s'agit de poser la question d'enjeux de formation plus largement, c'est-à-dire avec l'objectif de former les enseignants à travailler la mathématisation horizontale dans leurs classes en dehors du dispositif ResCo. Cette perspective vise à réfléchir aux conditions qui favoriseraient une réelle dévolution aux enseignants de cet enjeu d'apprentissage. Par exemple, faut-il leur fournir des situations, faut-il qu'ils travaillent de façon collaborative pour reproduire par exemple les échanges entre classes etc. ? Une première étape serait de voir quel est l'effet à plus long terme du dispositif ResCo sur l'évolution des pratiques enseignantes relevant de l'enseignement de la mathématisation horizontale.

Pour cette étude, nous envisageons de suivre une cohorte d'enseignants qui proposent chaque année de mettre en œuvre le dispositif ResCo dans leur(s) classe (s). Notre objectif serait d'analyser du point de vue de la composante personnelle de leurs pratiques, en quoi leurs participations régulières au dispositif ResCo a pu éventuellement faire évoluer leur degré d'appropriation de l'enjeu d'apprentissage de la mathématisation horizontale. Du point de vue des composantes cognitive et médiative, nous pourrions étudier dans le quotidien de leurs classes, comment se traduit cette potentielle évolution dans le choix des activités proposées aux élèves et, en quoi ces choix génèrent des apprentissages pour les élèves, relevant de la mathématisation horizontale.

Nous avons débuté l'élaboration d'un corpus en juin 2018 en réunissant huit enseignants ayant participé de deux à huit fois au dispositif ResCo. Pour l'instant, notre recueil de données est constitué d'une captation vidéo de cette réunion, lors de laquelle nous leur avons demandé :

- de lister les raisons qui les amènent à mettre en œuvre chaque année, dans leur(s) classe(s), le dispositif ResCo
- de comparer leurs scénarios a priori de la mise en œuvre en classe de chaque phase du dispositif avec ce qui s'est réellement passé lors des mises en œuvre effectives
- d'indiquer la nature des bilans éventuels proposés aux élèves

➤ Etude de la mise en œuvre à l'école primaire d'une FRAPPM

Nous avons vu dans notre travail de thèse que la compétence « *Modéliser* » est un habitat pour le travail de la mathématisation horizontale. Cette compétence figure dans les programmes de l'école élémentaire (élèves de 6 ans à 11 ans). L'étude épistémologique a montré le rôle et l'intérêt de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation mathématique. Nous envisageons de proposer la résolution d'une FRAPPM selon les modalités du dispositif ResCo à des élèves de CM1-CM2. Notre perspective de recherche est d'une part, d'analyser la dévolution à ces élèves de la mathématisation horizontale et d'identifier les apprentissages potentiellement générés, relevant de cette mathématisation horizontale. D'autre part, les enseignants de l'école primaire n'ayant pas nécessairement reçu une formation mathématique, les composantes personnelle et cognitive de leurs pratiques sont potentiellement différentes des enseignants de mathématiques du secondaire. Ainsi, mesurer leur degré d'appropriation de l'enjeu d'apprentissage de cet aspect de la mathématisation et étudier les obstacles et conditions relatifs à leurs pratiques dans l'enseignement de la mathématisation horizontale devraient nous aider à globalement mieux cerner les conditions, marges de manœuvre et leviers relevant des pratiques enseignantes qui permettraient de « faire vivre » en classe cet enjeu d'apprentissage à tous les niveaux de la scolarité.

Annexes

Partie 1

Annexe 1 : Fiche de préparation de la situation du pétrolier

Titre de l'activité : Le pétrolier Erika

Classe : 4^{ème}

Durée : 1h00-1h10

Thème de convergence : L'environnement

Autres disciplines sollicitées : SVT, géographie, éducation civique

Scénario : Extraits d'articles issus du site Univers-Nature :

Le 12 décembre 1999, le pétrolier ERIKA, navire à coque unique âgé de 25 ans et sous pavillon maltais, s'est brisé en deux au large des côtes de la Bretagne. Environ 37 000 tonnes de pétrole lourd ont été répandues dans la mer, polluant 400 kilomètres de côte, endommageant gravement la flore et la faune, et provoquant de graves répercussions pour la pêche et le tourisme. (Le nombre d'oiseaux morts est estimé entre 150 000 et 300 000, le poids des déchets est estimé à 250 000 tonnes). Cette catastrophe a révélé la nécessité de disposer d'un contrôle amélioré du transport pétrolier au niveau européen.

Quelle est l'aire de cette nappe de pétrole ?

Support de travail utilisé : PowerPoint, livre

Travail en îlots de 4 élèves

Consignes données aux élèves : Voici un article sur une catastrophe écologique de 1999, le naufrage du pétrolier Erika. 1^{ère} diapo 5min

Puis, Conséquences de cette catastrophe ? (débat collectif) 2^{ème} diapo 5-8 min

3^{ème} diapo Travail en groupe 5 min

4^{ème} diapo et 5^{ème} diapo : 10 min

Bilan des différents solides trouvés 5 min

Calcul de la surface : travail en groupes 15 min

6^{ème} 7^{ème} et 8^{ème} diapo : Synthèse des réponses 10-12 min

9^{ème} diapo : bilan 5-8min

Prérequis :

*Les solides de l'espace et calculs de volume

*La proportionnalité

*Les conversions et l'intérêt de l'écriture avec les puissances de 10.

Liens avec le socle commun :

Compétence 3 - Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique

PRATIQUER UNE DÉMARCHE SCIENTIFIQUE ET TECHNOLOGIQUE, RÉSOUDRE DES PROBLÈMES

Savoir mobiliser ses connaissances et ses compétences et conduire des raisonnements pour résoudre des problèmes et pratiquer une démarche scientifique ou technologique c'est

- Rechercher, extraire et organiser l'information utile,
- Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes,
- Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer,
- Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté

Organisation et gestions de données : situations de proportionnalité

Géométrie : Connaître et représenter des objets de l'espace

Grandeurs et mesures : calculer des volumes, utiliser différentes unités.

Compétence 7 :L'autonomie et l'initiative

Faire preuve d'initiative :

S'impliquer dans un projet individuel ou collectif

Savoir travailler en équipe

Manifester curiosité, créativité, motivation, à travers des activités conduites ou reconnues par l'établissement

Savoir prendre des initiatives et des décisions

Relances envisagées :

*pour les solides de l'espace : p.245

*pour les conversions : exercice 2 fiche "changement d'unités avec les puissances de 10"

Le diaporama :

La situation



Le 12 décembre 1999, le pétrolier ERIKA, navire à coque unique âgé de 25 ans et sous pavillon maltais, s'est brisé en deux au large des côtes de la Bretagne.

Environ **37 000 tonnes de pétrole** lourd ont été répandues dans la mer, polluant 400 kilomètres de côte,



Source: xaiac-reims.fr/...image_erika

Une catastrophe écologique



Graves répercussions

Faune Flore Pêche Tourisme

Entre 150 000 et 300 000 oiseaux morts

250 000 tonnes de déchets estimées

Cette catastrophe a révélé la nécessité de disposer d'un contrôle amélioré du transport pétrolier au niveau européen.

Source : mi-ac-reims.fr/...image_erika

On se propose de calculer la surface de la nappe de pétrole

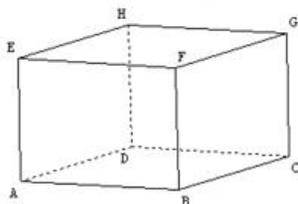
- 37 000 tonnes de pétrole lourd ont été répandues dans la mer.
- Sachant qu'un m^3 de

Les autorités maritimes mettent en place un barrage anti pollution autour de la nappe, en formant ainsi un rectangle à la surface.

Le pétrole est contenu dans un pavé droit .

$$\blacksquare V = 43\,023 \text{ m}^3$$

$$\blacksquare H = 10^{-2} \text{ cm}$$



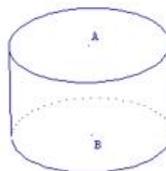
Calculer la surface du pétrole dans le barrage, en km^2 .

Consigne : Utiliser les puissances de 10 dans les conversions

Dans un cylindre de révolution

$$\blacksquare V = 43\,023 \text{ m}^3$$

$$\blacksquare H = 10^{-2} \text{ cm}$$



Consigne :
Utiliser les puissances de 10 dans les conversions

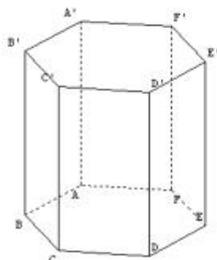
S =

Dans un prisme droit

Ici, à base hexagonale

$$\blacksquare V = 43\,023 \text{ m}^3$$

$$\blacksquare H = 10^{-2} \text{ cm}$$



Consigne : Utiliser les puissances de 10 dans les conversions

S =

Conclusion

- Quelque soit le solide choisi, on trouve :

$$S = V/e$$

Partie 2

Annexe 2 : Entretien avec le chercheur B₁

Les propos de l'intervieweur sont en gras.

Dans le cadre des travaux de ma thèse, je m'intéresse à des questions sur les mathématiques appliquées et j'ai besoin de mieux comprendre ce qu'il se passe dans les laboratoires de mathématiciens appliqués pour mieux comprendre ensuite ce qu'il se passe pour les élèves dans les classes. C'est pour cela que je vais essayer de m'entretenir avec plusieurs chercheurs en mathématiques appliquées ou en mathématiques pour essayer de voir s'il y a des invariants, des choses qui pourraient m'éclairer sur mes études dans les classes. Les données que je vais recueillir resteront anonymes. Pour les autorisations je vous les ferai passer ultérieurement et vous me direz si je peux utiliser les vidéos, l'audio et à quelles conditions.

En sachant que moi je ne suis pas mathématicien, je suis au CNRS dans une section biologie.

Oui

Mais j'utilise les maths comme un outil. Je ne développe pas de résultats mathématiques nouveaux ou rarement on va dire.

Oui. Alors ce qui va m'intéresser en fait justement c'est beaucoup de chercheurs dans les sciences du vivant. Pour la problématique d'étude que j'ai dans la classe je vais essentiellement conduire des entretiens avec des biologistes.

Je suis biologiste.

Donc au contraire c'est parfait pour moi.

Je vais vous poser une petite série de questions au départ, justement quel est votre parcours universitaire ?

J'ai fait une année de classe prépa maths sup, MPSI. Ensuite je suis allé en bio, prépa bio donc BCPST. Donc MPSI c'est le parcours où il y a, je crois, plus de maths par semaine donc là c'est assez poussé en maths mais c'est le niveau de base, le niveau L1 quoi. Et puis BCPST on a en gros dans les matières scientifiques 1/3 de bio, 1/3 de physique – chimie et 1/3 de maths. Donc à peu près 7 heures de maths et pareil à peu près niveau L1 de maths et puis moins de démonstrations et tout mais bon on utilise encore les maths quand même. Et puis ensuite j'ai fait une école d'ingénieur agronome à Paris où là, pour la partie maths, on faisait des mathématiques appliquées, systèmes dynamiques, équations différentielles, statistiques. Et puis après j'ai fait un DEA, donc Master 2 de Biologie d'évolution ici où il y a une part de modélisation.

D'accord. Et à l'issue, votre parcours professionnel ça s'est passé comment ?

Alors, j'ai fait une thèse ici, à la suite de mon DEA dans un labo de biologie d'évolution, pas celui-là, un peu au-dessus et après j'ai fait un post doctorat d'un an en Suisse (modélisation). Ma thèse, il y avait à la fois de la modélisation et de l'expérience. Mais c'est plus la modélisation et l'analyse de données qui ont produit des trucs que l'expérience malheureusement. Ensuite mon post doctorat, les deux, en fait j'ai fait un an et un an, dans deux endroits différents, donc en Suisse et après en France, ici et plus sur de la modélisation là pour le coup, il n'y avait pas d'expériences. Et depuis, voilà je suis chargé de recherches au CNRS ici, dans une section qui englobe la biologie des populations, écologie, évolution, pas une section maths.

C'est la numéro combien ?

C'est la section numéro 29. Et après, je travaille avec des gens qui pour le coup sont mathématiciens. J'ai quelques collaborateurs mathématiciens.

Et de votre point de vue, faire des maths c'est quoi ?

Alors, ça dépend si la question c'est ce que je pense de, que sont les gens qui font des maths, ou si c'est ce que moi je vois dans ce que je fais qui se rapproche des maths. Parce que pour moi je ne fais pas des maths, dans mon quotidien, dans mon travail. Ce qui fait que je pense que je ne fais pas des maths, c'est que pour moi faire des maths c'est produire, c'est étudier de nouveaux objets mathématiques, pour de la recherche en maths j'entends, c'est étudier de nouveaux objets mathématiques, éventuellement en définir de nouveaux objets et faire des preuves de leurs propriétés etc. C'est comme ça que je vois un peu plus faire des maths. Même en maths appliqués où l'on fait des preuves d'un comportement dans le processus. Alors, du coup, on pourrait un peu dire que je fais des maths appliquées puisque quand même il y a des moments dans mon travail pour le coup, où je vais modéliser une situation réelle, expérimentale ou un processus supposé dans la nature, en simplifiant par un ensemble de règles qui après se traduisent par des équations et ensuite je vais, de fait devoir étudier des approximations de ces systèmes ou étudier le comportement de ces équations donc là il y a un travail qui est vraiment dans les maths dans le sens où l'on résout des équations ou éventuellement des fois on vérifie que tel objet mathématique est bien la limite d'un processus que l'on ne sait pas décrire analytiquement. On va montrer qu'il converge vers un truc plus simple pour le résoudre. Donc là aussi il y a des démonstrations un peu, de montrer vers quelle limite ça tend, vers ce truc là et tout ça... mais le niveau de rigueur qui est requis est plus faible quand même au sens où moi dans ma pratique j'utilise beaucoup les simulations pour valider une approximation, plus qu'une limite explicite où l'on montre qu'on encadre par exemple le truc entre deux valeurs etc. c'est souvent pas évident, j'ai pas aussi le background qui le permet et mon but est de montrer que ça correspond à un truc, une simulation donc sur ordinateur numérique plus complexe euh... et que on converge vers cette euh, y'a pas de... souvent dans notre domaine, même dans la littérature, y'a des approximations qui ont été dérivées, et la convergence vers l'approximation n'a pas nécessairement été montrée hyper rigoureusement et parfois c'est un travail assez long des mathématiciens pour montrer que ça convergeait bien. Par exemple on a des trucs sur les équations diffusions où, en fait, ça a été assez long de proprement dériver la limite vers l'équation diffusion mais bon souvent y'a quand même voilà, c'est aussi par manque de culture que je ne fais pas des preuves parce que je préfère... j'ai besoin de plus de temps par contre pour découvrir des outils qui sont pas

importés dans mon domaine, donc ça me prend déjà du temps ça et savoir comment ils s'utilisent, c'est-à-dire quelle limite ils représentent. Donc après, prouver les convergences euh... ce n'est pas toujours... voilà .Donc la partie maths que je fais moi c'est plutôt de la math outil que de la démonstration. Et c'est beaucoup mon travail, c'est surtout l'interaction entre une situation réelle, sa simplification en prenant les hypothèses simplificatrices, après l'écriture en équation, après la solution de ces équations ou pas, donc où est-ce qu'il faut approximer pour solver et après le retour c'est-à-dire qu'est-ce que veulent dire les paramètres, qu'est-ce que ça traduit biologiquement comme dynamique quoi.

Donc, dans votre formation on peut dire que, de ce point de vue-là, vous avez fait beaucoup de maths ? Vous faites beaucoup de maths finalement.

De calculs ...

Si on enlève la preuve formelle

Oui c'est ça. Y'a une part de preuve un peu, parce que il y a des trucs où l'on va démontrer que des fois on a besoin. On a fait des fois des preuves mais c'est vrai que les reviewers de nos articles étant plus, soit physiciens ou des fois matheux mais, souvent pour prouver, par exemple quand on prend une limite particulière ça m'est arrivé d'utiliser des outils qui sont assez poussés, des papiers de 2011, euh... de maths quoi, donc là je vais pas du tout essayer de vérifier moi-même les preuves qui sont dedans. Je vais considérer que c'est publié donc validé, je vais, moi, simuler pour vérifier que, dans mon cas, ça s'applique et je vais citer l'article euh... donc là je ne vais pas dériver une preuve. Parfois j'ai besoin d'un truc particulier que je ne trouve pas dans la littérature, qui n'est pas trop dur, je vais écrire que ça, donc ça donc ça, mais ça ne va jamais être des trucs très longs. Enfin voilà... donc je fais des maths plutôt comme un physicien. C'est vraiment ce qui se rapproche le plus d'un physicien qu'un matheux quoi, ou un probabiliste. Enfin non, un probabiliste il fait des démonstrations [rires] si j'ai des potes probabilistes il me tomberait sur le [...] Enfin, non comme un utilisateur quoi, c'est plus comme un physicien je dirai.

Ah d'accord! Et en ce moment vous travaillez sur quoi où interviennent justement les mathématiques ?

Alors, euh... vous voulez dire les objets mathématiques que j'utilise ou plutôt les systèmes, les processus biologiques ?

Sur ce que vous travaillez en ce moment comment interviennent les mathématiques finalement ?

Alors, y'a plusieurs trucs, y'a des cas où j'étudie moi en évolution, on a beaucoup de systèmes dynamiques, on suit la dynamique de processus évolutifs où justement au cas où ça change, on suit la dynamique de ces changements, on suit les équilibres de ces trucs. Donc là ça va être plutôt des EDO et des EDP, équations dérivées ordinaires ou partielles. Donc là moi j'utilise pas mal les équations dérivées partielles en ce moment parce que j'ai un système où il y a, à la fois, une variable d'espace, mais qui n'est pas en espace physique, c'est une variable euh... c'est des fonctions génératrices de distribution, donc la variable elle est utilisée, euh... ce n'est pas un espace physique. Donc là, il y a des EDP pour ces variables puisque la distribution elle-même évolue au cours du temps donc on va suivre l'évolution de cette distribution par l'évolution de sa fonction génératrice. Donc on aura deux variables, le Z qui

est la variable qu'on appelle demi-variable je sais pas trop comment on dit, variable qui n'a pas de sens direct, et puis y'a le temps, donc là ça va être des EDP qui sont assez vite pas nécessairement simples parce qu'elles sont non locales euh... voilà donc là y'a une part où j'ai commencé d'abord par chercher moi des solutions parce que y'a des sites Internet qui donnent différentes formes d'EDP comme des solutions connues, on peut commencer à creuser un peu... ça m'aide pour savoir en fait, le genre d'approximation qu'il faut que je fasse pour arriver à des choses qui sont solvables. Mais je me pose très rarement la question de l'existence, par exemple, qui est un grand classique des EDPistes notamment. Parce que moi, toutes façons l'existence me suffirait pas et parce que je veux une solution donc quand j'en trouve une, c'est assez facile de montrer qu'elle est unique vu qu'on la trouve dans ces trucs-là par exemple je me les pose pas, mais alors là, sur cette partie-là qui est un peu plus récente, j'ai été chercher un collaborateur qui est lui mathématicien EDPiste, qui est à l'INRA d'Avignon donc qui est vraiment de formation de matheux et ça l'intéresse parce que l'objet mathématique est un peu exotique, c'est des équations non locales donc ça l'intéresse parce que ça s'applique, donc voilà... et puis alors l'autre gros outil on va dire que j'utilise c'est plutôt des distributions, l'étude de distribution, des distributions notamment euh, en fait c'est de la géométrie probabiliste en n-dimension, c'est-à-dire les distributions qui se répartissent dans des volumes, dans des hyper volumes et tout ça, donc on doit essayer de dériver la densité de probabilité, ce qui sert après pour fiter des données, des choses comme ça ou pour intégrer ça dans des modèles dynamiques puisque c'est les distributions qui nourrissent un peu les processus chez nous. C'est vraiment très distribué facilement. Et puis après l'autre partie que j'ai utilisé récemment, donc beaucoup de base, c'est beaucoup d'EDO, des systèmes dynamiques et des EDO, donc là les trucs les plus exotiques on va dire, c'est ça, les distributions, donc là j'utilise des fois les théorèmes de géométrie en n-dimension, et puis, il y a aussi des théorèmes que je prends quoi. Voilà, et puis après récemment j'ai fait des trucs sur les matrices aléatoires où j'ai utilisé les matrices aléatoires parce que j'avais pareil ces systèmes multi dimensionnels et en fait on essaie de simplifier le truc en prenant des limites où l'on n'a pas de connaissance de chaque interaction de toutes les dimensions. Donc, on essaie de trouver les limites quand la dimension devient grande, de distribution spectrale de matrice donc là ça va être plutôt de la... c'est des, ouais, c'est des. ça ressemble au théorème central limite mais appliqué à des matrices donc du coup-là pareil j'ai été cherché des théorèmes qui étaient sortis, et que j'ai pas du tout redémontrés, et là aussi j'ai fait des approx, et alors là pour le coup j'ai dû prendre des fonctions donc, un peu, j'ai un peu découvert ces trucs-là récemment car c'était pas trop dans mon domaine, y'a des fonctions génératrices de ces trucs là aussi, de ces distributions-là, donc là j'ai pris ça et j'ai fait des approximations pour mes cas avec ces fonctions-là, donc là aussi approximation puis retour vers vérifier que ça va. Un peu plus rigoureux là pour le coup puisque je montrais que ça tendait, comme c'est une fonction génératrice alors c'est très pratique car si on montre qu'elle tend vers une autre fonction génératrice alors on est sûr que la distribution tout oriente. Mais par contre les trucs de, par exemple, converger presque sûrement, sûrement, je ne sais même pas trop bien comment ça marche ça. [Hésitations] donc c'est quand même plus les simul qui valident ce que je fais que la limite elle-même, je la prends, c'est juste, qu'est-ce ça veut dire ? Donc voilà, c'est en gros, donc y'a un peu des voilà, des théories de valeurs extrêmes, tout ce qui est un peu proba en fait, théories des valeurs extrêmes y'a eu, toutes les limites de distribution, théorie des matrices aléatoires, EDP en gros et EDO.

D'accord. Et là je vais essayer, enfin si on peut, pensez à un projet de recherche particulier que vous auriez déjà mené à terme et je voudrais essayer qu'on puisse le décrire. Savoir comment il a commencé, par exemple, qu'est ce qui a initié ce projet en fait. Et je vais avoir plein de petites sous-questions comme ça qui vont diriger pour essayer de comprendre, décortiquer un projet. Alors je ne sais pas si vous en avez un...

Ben y'en a un qui est fini que j'ai publié l'an dernier en 2014...

On va penser à lui éventuellement.

Qui a un aspect maths assez important donc c'est pas mal.

Bon voilà

Donc ça c'était, à la base, donc moi dans ce que j'étudie dans l'évolution, c'est l'effet des mutations qui sont une entrée fondamentale dans le processus évolutif puisque c'est elles qui donnent la variation. La variation c'est ce qui nourrit l'évolution, en tout cas une partie. Et donc pour décrire l'effet des mutations, donc ce qui est important c'est de décrire leur effet sur une variable très intégrative d'un organisme qui est sa reproduction. Et alors les mutations elles affectent des trucs beaucoup plus basiques au départ. Elles changent un gène, à un endroit, puis en changeant ce gène-là elles vont changer l'expression d'enzymes qui percole etc. et via le développement, le métabolisme, tout ça, tout ça... se termine par un effet sur la reproduction. Par exemple, une bactérie qui résiste à un antibiotique, elle a une pompe quelque part qui pompe l'antibiotique, mais ça, ça affecte en même temps sur le métabolisme etc. et tout ça joue sur son taux de croissance. Mais c'est via des interactions assez compliquées et souvent qu'on ne peut pas détailler pour chaque [inaudible] d'une part on ne peut pas les détailler pour souvent, empiriquement pour une mutation donnée jusqu'à son effet sur le taux de croissance, d'autre part, je n'ai pas envie en fait de le détailler parce que sinon mon modèle est coincé dans le détail de ce truc-là. Donc avec autre chose, je dois prendre un autre modèle. Donc, du coup, là, l'approche c'était d'essayer de voir si je pouvais faire un modèle un peu général, et probabiliste de ces phénomènes-là, c'est à dire je modifie un petit truc au niveau basal d'un gène, ça percole dans un ensemble d'interactions que je ne connais pas et qu'est-ce que ça donne en sortie. Donc là, nécessairement on n'est pas déterministe, puisque chaque effet seul on ne peut pas le décrire, par contre on va essayer de décrire la distribution des effets que ça a. Une fois qu'on passe en distribution, en prenant une approche probabiliste, l'ensemble de toutes ces petites causes qui sont chacune vues comme déterministes, un peu, philosophiquement on pourrait dire, enfin philosophiquement je ne sais pas si c'est le mot, c'est un peu comme la physique statistique quoi, l'ensemble de ces trucs là on ne peut pas le prédire mais la distribution de sortie on peut la prédire et notamment quand, plus c'est compliqué, plus en fait on peut le prédire puisque, justement, on peut inférer, enfin on peut invoquer des théorèmes sans trop de limites etc. Donc, là, pour ça, j'avais besoin de choses qui décrivaient, justement, comment les interactions entre tous ces petits éléments allaient générer la distribution et ça, ça passait par des matrices très grandes qui décrivent, justement, toutes les interactions de tous les [inaudible] si vous voulez, par exemple, tous les métaboliques dans la cellule quand on en modifie un ça modifie tous les autres en chaîne et y'a une grande grande matrice qui décrit en premier ordre de façon linéaire ces interactions. Et c'est le spectre de cette matrice qui va être important. Donc ça c'est en écrivant le truc vraiment à la main que j'avais ça, et du coup, [il réfléchit] comment je

suis tombé sur une matrice aléatoire ? Je m'en souviens plus... pour être franc... souvent c'est Google qui m'aide beaucoup. C'est Google et...

Et ce projet il a été initié de votre part ou c'est ?///

Oui c'est moi. Ça, pour le coup c'est un article que j'ai écrit tout seul.

C'est vous. Et il y avait une question de départ ?

Ben c'était justement, avoir cette description de l'effet des mutations dans des modèles assez généraux parce que le problème c'est que la distribution de ces effets elle est hyper importante pour l'évolution après. C'est à dire s'il y a beaucoup d'effets bénéfiques, beaucoup d'effets délétères, ça va être des effets qui augmentent la reproduction, ou qui la réduisent, ça change complètement la capacité à s'adapter de l'organisme, enfin de la population et ça ben... justement, des modèles qui prédisent cette distribution là ce n'est pas évident parce que justement on a des phénomènes très complexes en-dessous. Donc, y'avait, c'était le point de départ, c'était ça, c'est un modèle que j'utilise, y a des modèles que j'utilise qui posent des hypothèses assez fortes sur comment se construisent ces phénotypes, ces traits à la fin, et j'essayais en fait de généraliser, de montrer que ce modèle qui empiriquement donne des prédictions assez bonnes, ça c'était un peu le travail de ma thèse, montrer pourquoi, en fait, finalement il ne faisait pas des hypothèses aussi fortes parce qu'il était la limite d'un modèle plus général. Un peu comme si on avait dit, bon on suppose une gaussienne et on dit ça ça ça... et après on se dit ok mais pourquoi on a la gaussienne et on va essayer de trouver un théorème central limite qui fait émerger la gaussienne au lieu de la poser au départ. Donc c'était vraiment ça le point de départ. Et l'autre point, c'est qu'il y a tout un corpus dans... en biologie où l'on s'est mis à connaître beaucoup de détails des métabolismes dans certaines bestioles modèles, dans des sucs y'a certaines bactéries qui nous donnent tel suc on connaît quasiment toutes les enzymes qui interagissent. Y'a une très grande complexité de ça et en fait des gens étudient ça de façon très mécaniste et disent souvent qu'on est vite perdu dans les /// et donc je voulais essayer de mêler ça mais en traitant de façon un peu générale, probabiliste pour retomber sur ce modèle plus simple mais en disant que c'est pas les hypothèses qu'il fait parce que ça émerge d'autres hypothèses plus larges. C'est ça l'origine du truc.

D'accord. Et donc là, en fait, le choix de vos outils mathématiques, donc on va dire des modèles là vous les choisissez comment, en fait, au départ ? C'est à dire, vous avez votre problématique...

Alors le modèle de départ, qui est ce modèle dont je vous parlais, qui fait des hypothèses assez fortes au départ, lui il date de Fisher, donc qui a été lui-même matheux et qui a fait des stats aussi mais qui était autant matheux que biologiste, il a vraiment développé beaucoup de choses dans la théorie de l'évolution, et il avait proposé un peu cette vision que l'adaptation ça consiste à maximiser une sorte de fonction qui a un optimum et qu'on arrive près d'un optimum de plusieurs traits ensemble qui sont ce qu'il y a de mieux dans l'environnement particulier, voire aussi la niche écologique, c'est un peu ça aussi si vous voulez, pile poil un petit peu dans la combinaison de traits qu'il faut, on est suffisamment grand mais pas trop, on est suffisamment gros mais pas trop, suffisamment... on respire suffisamment mais pas trop etc. bon, pour être dans un environnement donné à un moment donné à peu près optimal. Et donc lui il avait développé toute une théorie probabiliste pour décrire après les mutations

comme des petits changements dans cet espace de phénotypes. Il avait fait quelques hypothèses comme ça et c'est un modèle qui sert pas mal et qui est vu surtout comme heuristique plus pour intuitiver des phénomènes dits qualitatifs mais pas comme quantitatifs. Et moi, dans ma thèse j'ai pas mal essayé d'utiliser ce modèle pour dériver vraiment des prédictions testables quantitatives sur des distributions qu'on pouvait observer, les comparer etc. et ça marchait pas mal. Donc, l'origine c'est un peu ça. Donc, là, le modèle de base c'est vraiment Fisher, ça date de 1914, quoi 16.

Vous avez fait d'autres choix de modèles du coup ?

Alors après, pour pouvoir par contre dériver certaines de ces prédictions, il fallait utiliser des trucs de géométrie probabiliste ou des choses comme ça. Donc là, voilà, on est là, qu'est-ce que c'est la distribution de // du carré de /// qu'est-ce que la distribution des projections dans un plan, de de de points distribués uniformément sur une hyper sphère. Bon une fois qu'on a caractérisé ce que c'est ces mots-là, on les rentre dans Google on tombe dessus. Avec un peu de /// et on tombe sur des papiers qui citent d'autres papiers où normalement on voit ben voilà la distribution des projections c'est ça. C'est un peu de la navigation comme ça. Pareil pour les matrices aléatoires, c'était, ben voilà, j'essayais du coup-là de partir de choses plus larges en me disant bon je vais imaginer que j'ai une soupe compliquée avec des interactions de toutes sortes et comment ça va converger donc là aussi c'est en [il fait le geste de tapoter sur un clavier]. Vraiment Internet est une source forte. Parce que les mots-clefs permettent d'aller beaucoup plus vite. Dans une bibliothèque je ne crois pas que j'aurai pu.

Oui, et en même temps, c'est parce-que vous vous posez des questions aussi je trouve. C'est à dire qu'au départ il y a un modèle qui paraît pertinent...

Oui ce n'est pas l'outil qui oriente le... quand même pas non ! C'est plus, j'ai ce problème que je dois prédire la distribution de l'effet des mutations pour des prédictions d'évolution et des applications aussi... prédire l'adaptation face à un nouvel environnement, les résistances aux antibiotiques et toutes sortes de trucs et donc face à ça il me faut un modèle qui permette ce genre de prédiction. Le modèle qui existe en littérature il fait ses hypothèses fortes et les collègues ils sont choqués souvent et tout ça, donc on essaye de le généraliser pour voir si, en fait, il émerge pas d'un truc plus large et plus général pour poser les hypothèses qu'on va utiliser, du coup, plus larges, on part, là aussi, de données qui sont celles de ces données phénomiques très larges, où on a plein de métabolismes ensemble, plein de trucs. Donc, moi, ça faisait longtemps que je voulais regarder un peu les réseaux et tout ça, en biologie, parce qu'il y a beaucoup de réseaux. Donc c'était un peu de là que je suis parti, c'est des réseaux en fait d'interactions et ils ont des propriétés émergentes, small world et des trucs comme ça et c'est ça un peu ce qui me sert de base comme hypothèse, je dis on va prendre un réseau un peu général mais qui a cette propriété-là, small world... euh... qui se met... qui ont des échelles, des distributions des nœuds, des propriétés particulières, mais c'est beaucoup plus général ça comme hypothèse que les hypothèses du modèle de Fisher, donc de ce modèle d'avant et partant de là, ben en écrivant ça, après on écrit vraiment qu'est-ce que ça donne. Donc, ce n'est pas dur, c'est des... c'est de l'algèbre linéaire justement, c'est des matrices quoi ! Et c'est des matrices qu'on remplit de trucs aléatoires. Donc là on se retrouve à dire, ben voilà c'est des matrices mais elles sont aléatoires et on arrive dessus, pareil Google et tout ça, et on arrive à théoriser des matrices aléatoires. Alors après, y'a un aller-retour parce que on voit, ah en fait eux ils prédisent ça ça ça, enfin ils ont telles et telles propriétés de leur matrice. Donc ça

me dit ok alors moi y'a ce genre de quantité que je vais pouvoir avoir mais celui-là non, mais celui-là non. Donc j'ai commencé par faire ça, je suis tombé sur des premiers modèles de matrices aléatoires, des trucs qui datent pareil du début du siècle, euh... c'est un peu Wichard et tout ça, et puis du coup ça me faisait des premiers trucs mais après quand j'ai écrit mon modèle plus en détail, je voyais que j'avais pas tous les cas. Y'avais un cas... en fait, j'avais fait une hypothèse là je me disais est-ce que je peux le relâcher, qu'est-ce qu'il se passe ? Donc là je me retrouvais avec une autre matrice aléatoire qui rentrait pas dans les Wichard et tout. Donc dans ce cas-là j'ai cherché à nouveau. C'est l'aller-retour. Qu'est-ce qu'il se passe maintenant quand y'a cette matrice qui est en fait au lieu d'être en gros, au lieu de remplir la matrice par des variables qui sont IID, Indépendamment et identiquement distribuées, euh... on les remplit avec euh... déjà y'a des covariances puis souvent au lieu d'une moyenne nulle elles ont un biais. En fait, le biais ça fait des sauts qualitatifs. Ça moi je l'avais pas vu, et là c'est pour le coup en allant chercher dans la théorie de matrice aléatoire de papiers beaucoup plus récents, que j'ai vu qu'ils prédisaient tel machin, tel phénomène, on dit « ah alors en fait ça joue beaucoup plus que je croyais » et après moi j'ai pris le truc pour dériver ce que ça voulait dire pour mon modèle puis j'ai simulé ce truc là que j'avais pas simulé avant, j'ai vu en effet que ça faisait ce qui était prévu donc c'est un aller-retour. Mais le début, l'entrée c'est le modèle dont j'ai besoin pour mes questions de bio, après c'est l'outil, et après l'outil et les questions se répondent quoi.

Vous êtes amené en fait à reformuler vos problématiques au fur et à mesure de...

Ce n'est pas vraiment... enfin, est-ce que c'est reformuler ? Oui un peu, oui. Par exemple, y'a des bouts où je voyais, « bon alors là si je mets toutes mes variables elles sont indépendantes », d'accord, mais moi biologiquement ça me dérange, ce n'est pas, ça tient pas, donc il faut que je puisse généraliser ça. Donc je mets, ok maintenant j'ai de l'interdépendance, l'interdépendance je dois la reformuler en terme de matrice aléatoire. La structure de la matrice elle a telle forme, je dois reformuler pour que ça soit lisible dans une matrice, enfin, pour que ça rentre dans une classe particulière de matrice aléatoire. Donc là j'ai été chercher des outils pour décrire ces trucs-là etc. mais après c'est... donc ça y'a un peu peut être de reformulation.

Ce serait plus remodeliser autrement ?

Oui, c'est plutôt, je vais commencer par un truc un peu compliqué mais quand même de base un peu simple, prendre l'outil déjà pour ça, et après, une fois que j'ai l'outil, je vais voir tout ce qu'il sait faire lui et du coup ça peut re-élargir l'ensemble des possibles que je vais traiter au niveau biologique. Parce que je sais qu'en fait j'ai tout ça. Une fois que j'ai tiré un fil j'ai tous ces trucs là, mais ça je n'ai pas, donc je sais que je vais pouvoir traiter de ça et ça mais que ça non.

D'accord

Et que c'est un peu un aller-retour. Mais ça ne reformule pas les modèles. L'idée de base du truc elle n'a pas changé en l'occurrence.

Est-ce qu'il y a du renoncement ?

Euhhhh [il réfléchit] et ben s'il y en a, je ne m'en souviens pas donc ça me rend heureux ! [Rires]. [Il réfléchit] j'ai pas souvenir d'un renoncement, j'ai des trucs qui me coincent depuis perpète mais j'ai pas renoncé quoi.

Voilà, pas de renoncement

Non. En général je considère que ça m'est arrivé, que... c'est assez curieux, pour l'interaction avec les maths en tous cas parfois on se dit bon ça pppfff ça, ça va exister c'est sûr ça va être facile puis en fait, ils ont rien quoi. On se dit, zut alors. Et puis d'autres fois on se dit oh là là, et on découvre y'a tout ça qu'on peut dire. C'est vraiment assez curieux. Y'a des fois on est agréablement surpris et d'autres fois désagréablement. Donc voilà. Mais quand je suis coincé c'est plutôt là, en fait je passe beaucoup de temps d'abord seul avec le modèle et à discuter avec des collègues biologistes pour voir si j'ai modélisé le truc comme il faut. Ça ne sert à rien d'aller voir un matheux avec une équation si on n'est pas sûr de ce qu'elle veut dire. Après si je coince, bon d'abord j'ai tendance quand même à m'attaquer à l'équation moi-même, pour voir déjà les premières approximations de moi et savoir où je vais. Si je bloque à un moment et que je me dis ok par exemple y'a un modèle là, j'avais un truc, ce n'était pas une EDP. Et puis après je me dis il faut au moins que j'arrive à en faire une, j'ai fait une EDP. Et là du coup j'ai une EDP. EDP, ce n'est pas mon truc, j'ai jamais fait. EDO je me débrouille, EDP en plus c'est un monde un peu horrible, les choses très simples peuvent foutre une merde noire, je parle très mal. Donc c'est un peu... moi je croyais que c'était comme les EDO et en fait pas du tout. Il se passe des trucs vraiment bizarres avec les EDP. Donc je me suis dit, « hou là là on va aller voir un gars qui connaît » et là c'était très sympa parce que il a pu me dire « alors là c'est mal posé, ha là si c'est bon, alors là par contre ça fait un truc, est-ce qu'on ne pourrait pas dire ça, ha ça non par contre... » Là ça devient une interaction à deux avec le matheux. Donc, du coup voilà quand y'a renoncement c'est un peu ça : je vais chercher. Donc ça c'est pour le côté maths. Et renoncement expérimental ? Oui plus ! Parce que y'a des trucs, faut des compétences techniques assez fortes. Là aussi, je peux aller chercher les empiristes pour faire les trucs. Mais c'est pas nécessairement évident de convaincre un empiriste de, enfin moi-même je fais des expériences, j'essaie de faire pour moi. Dans ce cas-là je vais un peu plutôt aborder la question par un autre angle que d'essayer de faire cette manip. Ca ça m'est arrivé de faire des renoncements sur les manip, ça a commencé par ma thèse. Et plus dans l'expérience que la modélo, malheureusement.

Est-ce que on pourrait dire que les mathématiques sont indispensables finalement dans ce type de projets ?

Ah oui, complètement. Enfin pour moi dans ce que j'en fais. Parce que c'est quantitatif. Pour une raison simple : c'est qu'en fait moi je veux des prédictions quantitatives, quitte à être dans des situations un peu simples au niveau biologie, c'est-à-dire plus simple que d'autres, c'est-à-dire c'est pas en nature ce que je fais, je veux plus tester des lois de base dans des systèmes où il y a déjà la complexité d'un génome entier, des mutations aléatoires et tout ça, mais des bactéries connues dans un , dans un environnement simple qui ne change pas, mais y a déjà tout un génome qui mute au hasard et tout ça, donc , du coup ça parce que je veux des prédictions quantitatives ,donc je ne vais pas me mettre dans des situations complètement ingérables, faut que je puisse mesurer les paramètres d'entrée pour tester, pour avoir une prédiction quantitative, et pour tester cette prévision quantitative. Et comme elle est quantitative, nécessairement y a des maths. Et après, je dirai que même pour le qualitatif y a

des maths parce que on est très vite dans des systèmes complexes, bon c'est un peu un gros mot ce truc-là, mais là complexe au sens où plein d'interactions par exemple, donc dans le cadre du projet dont on parle, pleins de trucs qui interagissent, aléatoires, et très vite ça, ça veut dire des maths, donc même pour le qualitatif. Et après les maths parce que les stats après, y a des stats pour tester.

Y a d'autres disciplines qui interviennent dans votre travail ?

Y a la microbiologie puisque que moi mes manip c'est beaucoup, c'est que d'ailleurs des bactéries. Ma thèse ce n'était pas des bactéries mais y a de la microbiologie. Moi mes expériences c'est plus des cinétiques assez simples et tout ça, mais c'est quand même de la microbiologie pour faire pousser voilà, j'ai des techniques de microbiologie classiques, voilà, mais ce n'est pas poussé comme microbiologie, je suis un assez mauvais microbiologiste, mais j'essaie de progresser. Y a du coup un peu de biologie cellulaire parce que, la micro bio, très vite l'organisme c'est une cellule donc très vite la biocell c'est la physiologie d'une bactérie, quoi ! Euh, y a pas vraiment de chimie dans mon cas. J'utilise des antibiotiques etc. mais c'est quand même plus micro bio ce que je regarde que la chimie vraiment du truc. Y a un peu de physique parce que toutes les mesures qu'on fait c'est des mesures physiques sur les bactéries donc on mesure des densités optiques, des fluorescences, des luminescences, donc y a de la physique mais au sens puisqu'on utilise des appareils, on cherche un peu, si ! Alors oui là y a des trucs, ouais là je développe des souches où j'ai de la résonance de photons, de la luminescence vers la fluorescence, pour comprendre un peu la base de comment ce truc-là marche j'ai lu des trucs qui étaient de la biologie cellulaire qui est à mi-chemin avec la biophysique un peu mais voilà pas du tout poussé quoi !

Et comment vous validez vos résultats généralement ?

Alors pour la validation, moi les, donc, à l'intérieur du modèle y a déjà des validations, parce que en fait je vais poser, mettons une équation de base, et puis je vais dire, ça après je vais l'approximer, donc il va y avoir trois étapes : je vais supposer un modèle de ce qui se passe, donc là je peux le simuler, une simulation individu centrée on va appeler ça, c'est-à-dire on suit chaque individu de la population et on lui fait faire ça ça ça. On n'a pas nécessairement une équation qui décrit déjà exactement ce truc-là, donc on va avoir une équation, on va essayer de mettre en équation ce truc-là, il y a déjà une approximation pour le mettre en équation, donc y a un premier check entre une solution qui va être numérique de cette simulation, donc on va faire coller, enfin visuel, on prend une courbe, entre la simulation et l'équation, mais ça l'équation c'est pas une solution analytique, c'est une solution numérique, puis après pour pouvoir solver numériquement, afin analytiquement cette équation-là, on peut parfois être obligé elle-même de l'approximer pour avoir un, une analytique ou regarder des équilibres par exemple, donc là, la validation ça va être de valider l'analytique contre la solution numérique et le numérique contre la simulation, après le but c'est d'avoir l'analytique contre la simulation direct, donc la validation en théorie c'est beaucoup ça : simulation parce qu'on est dans des processus aléatoires donc on simule, versus analytique ou numérique. Le numérique pouvant valider l'équation puisqu'on peut très bien dire l'équation est valide mais je n'ai pas sa solution, mais ça permet déjà d'étudier plein de trucs, son comportement, sa solution. Et puis après pour la validation empirique, donc là c'est pour moi beaucoup plus important évidemment, là c'est qu'on va dire en simulant ce truc-là déjà, j'ai fait des hypothèses sur comment le système biologique marchait, donc là le but c'est d'obtenir une

sortie quantitative, donc soit par exemple une trajectoire au cours du temps, par exemple typiquement de taille de population, ou des distributions, moi c'est beaucoup par les distributions que je valide, donc je vais avoir une distribution théorique attendue, par exemple qui découle de ce que je vous disais sur des trucs uniformément distribués sur une hyper sphère, c'est en général une distribution d'un truc, et puis je vais comparer avec une distribution expérimentale d'une quantité, typiquement moi je regarde des valeurs sélectives, c'est-à-dire des avantages reproductifs par rapport à une référence, des distributions de taux de croissance, des choses comme ça. Donc là, je vais paramétrer la distribution, donc soit y a deux façons, pour moi c'est moins puissant mais c'est souvent ce qu'on est obligé de faire, on va « fiter » une distribution, donc ce n'est pas une validation directe, on va valider qualitativement que la forme de la distribution on arrive à la faire coller et à l'observer.

Cette forme c'est par rapport à un schéma ?

Alors le « fit » c'est par exemple, je prédis une loi exponentielle. Je vais mesurer un ensemble de taux de croissance, je vais avoir un histogramme de ces taux de croissance, ou plutôt une somme de valeurs mesurées, et je vais tester l'adéquation entre est ce que j'arrive à bien « fiter » la loi exponentielle sur cette distribution observée. Donc ça c'est un test de la loi exponentielle qualitativement, est ce que j'arrive à faire coller ma distribution à une loi exponentielle. Mais ce n'est pas une prédiction aussi forte que de dire c'est une loi exponentielle de paramètre 0,4. Donc là c'est du test plus direct, eu, où on va dire le paramètre je peux le prédire aussi sachant des mesures indépendantes sur ces bestioles et il doit valoir tant, donc là on va valider à la fois donc c'est une loi exponentielle et en plus son paramètre c'est ça. Ça c'est beaucoup plus puissant parce que ça se rejette plus facilement. Par exemple, la gaussienne c'est très nul comme théorie à tester parce qu'il y a plein plein de choses qui font des gaussiennes. Donc valider une gaussienne on est content, c'est cool, tout ne fait pas des gaussiennes mais valider une gaussienne ce n'est pas aussi puissant que de valider « j'ai observé une gaussienne de moyenne tant, de variance tant, parce que mes paramètres que j'avais mesuré indépendamment, pas « fiter » mais mesurer indépendamment me donne ça ». Donc voilà c'est ça les différents niveaux de validation. Moi j'essaie plus de faire quand je peux, des validations, j'ai une mesure qui prédit une distribution avec sa valeur de paramètre qui va valoir tant, donc ça m'oblige dans mes modèles évidemment à tordre le truc parce que les modèles c'est plus simples de les traiter en termes de c'est telle quantité telle quantité mais celle-là n'est pas mesurable. Donc tout le jeu c'est de tordre le modèle pour qu'il s'exprime en termes de quantités que je sais mesurer dans mes expériences. C'est ça qu'est marrant mais c'est ça qui n'est pas facile. C'est-à-dire par exemple dans le modèle que je vous parlez avant, j'aurai pu décider de décrire un modèle comme toutes ces interactions qu'ont lieu, elles font toutes ça, sauf que je ne sais pas les mesurer donc je dois tester un truc plus en aval, donc je dois tordre le modèle pour qu'il me sorte une prédiction pour que cette chose de sortie qui est les taux de croissance que elle je sais mesurer sur des bactéries.

Et la fiabilité des modèles vous la tester comment ?

Ben c'est un peu ça, c'est-à-dire, je ne sais ce qu'on appelle la fiabilité du coup ?

Dans le discours, j'ai l'impression que dans la validation des résultats, y a aussi la fiabilité des modèles dans ce que j'ai entendu, par exemple dans la collaboration avec les mathématiciens pour voir si il y a quelque chose de fiable dans vos choix.

Alors, ben justement c'est

Quand vous faites un choix de modèle dans un projet nouveau, comment êtes-vous sûr qu'il est fiable ?

Ben justement, ce qu'on appelle fiable c'est quoi ? Est-ce que le choix qualitatif d'avoir pris ce modèle-là est valide ? C'est quoi ?

Est-ce que il est fiable dans le sens qu'il va vraiment pouvoir donner un résultat sur lequel

Ca je ne le sais pas à l'avance, je me dis ce modèle approxime une situation que je pense réaliste, avec suffisamment de simplifications pour pouvoir en faire quelque chose, et le test à la fin, c'est le test de tout : le choix du modèle et les dérivations qu'on a en tirées. Et le tout c'est la sortie de ma loi exponentielle de paramètre 0,4. Et je peux m'être planté en ayant choisi une exponentielle comme une limite d'un truc et en fait je me suis trompé parce que le truc il ne tend pas vers cette limite et tout ça, et je peux aussi m'être planté dans le 0,4 et je peux aussi m'être planté parce que j'ai inféré correctement le 0,4 mais en fait ma mesure empirique qui permettait de paramétrer le truc qui était fausse, donc il y a plein de niveaux où ça peut se planter ! Par contre l'avantage du qualitatif, c'est que c'est rare que par hasard, un mauvais choix de modèle donne à la sortie la bonne quantité quand c'est quantitatif, ou qu'en me plantant sur le modèle, il faudrait qu'il y est une erreur empirique qui compense et qui fait pile poil 0,4 donc c'est moins probable.

Et ça arrive un mauvais choix de modèle ?

Ben je ne sais pas, c'est dur à dire, oui, oui on peut se rendre compte après coup. Alors moi je me suis rendu compte, j'avais un truc assez perturbant, dans un projet avant, où en fait j'avais construit un modèle que j'utilisais pour analyser un jeu de données, et en fait il y avait un truc dans le jeu de données qui faisait que ce n'était pas dans la logique de mon modèle, il valait mieux prendre une autre version de ce modèle. Et pourtant quand j'utilisais la version qui n'était pas la bonne, euh, ça collait assez bien, mais c'était justement un modèle avec des « fits » pas des prévisions quantitatives, enfin c'étaient des « fits » et on retombait un peu sur le problème qu'on peut « fiter » bien quelque chose mais pour les mauvaises raisons, alors que c'est plus dur de prédire une trajectoire avec telle valeur, pas la forme, mais la valeur de la trajectoire à chaque endroit ou une distribution (ça revient à une trajectoire en fait) pour des mauvaises raisons ; là justement c'était un cas où je « fitais », ça collait assez bien, y avait trucs cohérents mais en fait pour des mauvaises raisons . Justement ça c'est pas inintéressant parce que ça peut être parfois parce que on a mis, on a fait un modèle très contraint, qui donne un truc et en fait il est robuste c'est-à-dire en fait quand on se plante sur ça et ça on trouve encore la bonne chose, et ça c'est utile de le savoir parce que quand c'est robuste ça veut en fait qu'il y a beaucoup plus de classes de modèles qui génèrent la prédiction et ça c'est utile car ça veut dire qu'on n'a pas besoin de savoir autant de détails pour avoir une prédiction correcte, donc parfois ce n'est pas nécessairement mauvais. Et donc la fiabilité des modèles, je ne sais pas si on entend par là est ce que le modèle..., y a plusieurs sauts, y a : ce que j'imagine du processus, en fait ça va être un peu ce que je mets dans la simulation individu centrée, ce que je modélise mathématiquement du truc, c'est pas des maths avant, c'est de

la simul, un algorithme, après ce que je modélise de ce qui arrive, c'est-à-dire comment j'approxime cette situation simulée. Donc déjà, de là à là, il y a une validation à faire donc une fiabilité du truc pour faire, ben justement, est ce que la limite est bien la bonne, est ce que quand ce truc-là est petit, quand il y a beaucoup d'individus, ça tend bien vers la limite prévue, donc là on valide comme ça. Donc c'est validation, fiabilité je ne sais pas si c'est ...on vérifie que la limite est fiable, que ça converge bien vers ce qu'on veut, et puis en suite de là, on va avoir l'analytique donc là aussi on va vérifier que dans les sous cas on converge là où on croit et que éventuellement qu'on ne converge pas là où on ne croit pas, aussi pour voir si on ne se plante pas, on attend à se planter. Et après y a la dernière étape c'est contre les données, et contre les données en fait c'est toutes les étapes en même temps, qui vont devoir être correctes entre guillemets, correctes ça ne veut rien dire, mais est-ce une approximation suffisante pour coller, plus la mesure qu'on a utilisée pour paramétrer le truc, c'est-à-dire que si je veux faire en physique tomber une bille et vérifier que la bille tombe à la bonne vitesse, et qu'elle a fait la bonne trajectoire de chute, il faut d'une part que je ne me sois pas planté en mesurant la masse de cette bille, que je ne me sois pas planté sur dans quelle planète je suis quand je fais ma manip, en général ça je ne me plante pas trop mais bon, que je ne suis pas dans un truc qui est en train de tourner avec la force centrifuge qui se rajoute etc., tout ça peut arriver, et en plus faut que j'ai la bonne équation, que Newton ne se soit pas planté en pondant son équation, et en plus faut que j'ai la bonne solution analytique, vous voyez y a tout ça, et tout ça est validé d'un coup par la manipulation c'est un peu pareil ! Donc c'est un peu ça l'idée, c'est un assez comparable, j'espère, le but c'est un peu de rendre ça comparable à ce genre de problème.

Oui je vois. Et la collaboration avec les mathématiciens au niveau du choix du modèle si j'ai bien entendu tout à l'heure, c'est quand il y a un doute quelque part ?

Ce n'est pas dans le choix du modèle en fait, enfin moi.

Le choix il est déjà fait ?

Oui parce que moi mon boulot pour moi, là où je me sens compétent, c'est d'avoir une réalité que j'imagine un peu, le processus logique, la littérature que j'ai lue dessus, la façon dont ça a été modélisé par le passé, évidemment on part de modèles qu'on raffine, et sachant ça, on va dire la culture que j'ai d'évolutionniste quoi, en faire un modèle, un modèle au sens par exemple un modèle simulé déjà, puis ensuite, éventuellement c'est un peu au stade d'après, de ce modèle simulé savoir les approximations qui permettent d'en faire une équation, parce que moi j'aime pas mal bosser en analytique donc qui permette d'en faire une équation. Une fois que je suis face à cette équation ou à ce processus stochastique particulier, je vais voir un probabiliste ou un EDPiste, parfois, la plupart du temps, jusque-là j'essayais de me débrouiller, par exemple pour les matrices aléatoires j'ai fait seul, mais là y avait des trucs avec les EDP et tout donc j'ai rencontré des gens qui faisaient ça, j'ai vu que ça marchait bien, et donc, c'est vraiment une fois que l'équation est écrite d'aller voir les gens mais ça ne veut pas dire que ça ne vient pas des choix du modèle. En tous cas récemment y a eu de ça, je peux venir moi en ayant dégrossi des trucs, en gros il y a deux collaborateurs matheux principaux avec qui je bosse, un probabiliste processus aléatoire de Paris, et donc cet EDPiste à Avignon, et dans les deux cas je vais avoir un modèle, j'ai identifié que c'était un processus de Feller machin, donc suis pas juste à dire ça fait ça, j'ai identifié l'objet mathématique un peu que je veux utiliser dessus, et je vais le voir pour lui dire, le premier pas c'est moi qui le fais. Donc dans la

collaboration, le premier pas c'est moi qui le fais, donc j'ai un truc, une équation, un système, telle diffusion, la diffusion de Feller, qui a des telles propriétés machin, et je vais aller voir un collègue que j'ai rencontré, alors comment ?, c'est des gens qui sont déjà dans les maths bio, c'est pas des matheux purs, par exemple pour les matrices aléatoires, j'ai contacté des gars qui faisaient des, qui avaient écrit l'article, juste pour qu'ils me disent si la façon dont je l'utilisais comme ça vite fait, ils avaient l'impression que ça allait, c'était vraiment un matheux, maths appli mais spécialement en bio. Là par contre les deux personnes c'est des gens qui bossent déjà sur des problèmes de maths appliquées à la biologie donc eux je les ai vus en lisant des articles à eux, ou dans des colloques, dans des conférences donc on est pas à des millions de kilomètres de domaines, et du coup-là je vais leur expliquer mon truc, je leur dis voilà j'ai posé ça en équation comme ça, et après, ils voient ok, alors ça, je vois un peu quoi faire avec cet objet ou alors je ne vois pas trop quoi faire etc., Il va y avoir aussi une interaction sur la façon de poser le modèle, euh, pour le probabiliste beaucoup plus, car ils sont habitués à passer des simulations aux équations mais souvent en fait, moi mon vécu avec les matheux, c'est que eux ils ont l'habitude de l'exact et donc très souvent le système comme on le modélise dans l'algorithme là, ils ne savent rien faire parce que c'est horrible, l'exact on peut décrire ce que c'est mais c'est tout ce qu'on a fait, et comment faire après ? Donc le truc pas évident et que moi j'aime bien faire et j'aime bien voir des matheux qui sont ok avec ça, c'est de trouver le niveau où tu vas dire maintenant ça je ne peux rien en faire, des fois ils disent ok on peut faire quelque chose donc c'est royal, mais souvent je ne peux rien faire donc j'approxime qu'il y a ça et ça. Là ça aide déjà parce qu'ils m'obligent à clarifier ce que je veux, quelle limite c'est, qu'est ce qui est petit pas petit, et une fois qu'on est face à ce nouvel objet, là c'est un objet mathématique avec lequel ils savent jouer, et ils me disent ok, là maintenant moi je peux te dire tout ça, les distances machin, les distributions, à l'équilibre et tout ça. Donc c'est un peu ce jeu-là qui est marrant je trouve au départ. Et puis après on peut faire des allers retours. Donc là récemment le truc avec les EDP par exemple, j'avais des versions de modèles où j'écrivais d'une certaine manière, et ils me disaient l'équation est mal posée. Je commence à vaguement comprendre ce que ça veut dire une équation mal posée. Sur le coup j'étais là, comment ça elle est mal posée ? Elle est très bien mon équation ! Y a des trucs en physique où c'est mal posé, mais c'est pas grave on fait avec c'est juste que c'est pénible, ça veut pas dire que c'est juste mal, c'est pas nécessairement qu'on a pas décrit ce qu'on croit décrire, c'est que la façon dont c'est décrit fait qu'on peut pas faire par la solution expo de l'infini. Donc du coup j'ai reformulé le modèle, qui dit vraiment la même chose pour moi, y a pas eu de nouvelles approximations, juste il est tourné, on regarde autre chose, au lieu de regarder ça, on regarde ça, il y a une sorte de bijection entre les deux modèles, mais dit comme ça, là c'est bien posé. Ou en tous cas ce n'est pas mal posé, c'est plutôt ça ! Et ça c'est assez marrant parce que du coup je ne sais pas encore bien, parce que je découvre un peu cet aspect-là, c'est vraiment les EDP encore une fois, mal posé, y a en qu'en EDP qu'on a un truc pareil, mais je découvre le fait qu'on peut dire la même chose dit d'une manière ou d'une autre, on peut ou pas en parler quoi, c'est assez curieux ! Mais donc ça c'est assez marrant, et puis les collègues, c'est aussi des collègues qui savent déjà regarder justement les approximations et tout ça, ils sont pas « oh mon dieu, mais c'est plus ça, on peut rien faire ! ». Parce que parfois c'est la complexité du truc. Et après l'autre enjeu, c'est qu'il ait quand même un comportement suffisamment exotique pour un matheux, parce que eux ils ont quand même des enjeux aussi de nouveaux outils mathématiques, de comportements un peu exotiques où il y a des vraies questions, un challenge mathématique. Mais en général ça, souvent je viens

avec des trucs pénibles, parce que les trucs un peu basiques je me suis débrouillé on va dire, donc quand je viens, c'est le truc un peu sale, quoi. Après c'est marrant, là c'est vrai qu'on a eu un truc où on a eu un peu de chance parce que on pouvait quand même dire des trucs on était juste à la limite où c'est assez compliqué pour qu'il y est vraiment un truc à faire et en même temps on pouvait aller assez loin dans ce qu'on dérivait. Donc voilà c'est un peu ça, en fait là maintenant, j'ai mes deux petits matheux, je m'éclate, on s'entend bien, c'est des potes, et c'est sympa !

Les formes de mathématisations finalement dont vous avez besoin, c'est vous qui les choisissez au final ?

Ben y a le hasard de, sur lesquels je tombe, mais oui je ne demande pas conseil pour savoir si je dois faire une EDO ou une EDP, ça je choisis, euh, oui, ce que ça va être. C'est plutôt en lisant ce qui existe comme type d'objets, par exemple les matrices aléatoires on ne m'en a jamais parlées dans mes cours, donc c'est plutôt en recherchant, c'est vraiment des mots clés qui tombent sur des objets, puis je vois cet objet, c'est pas ce que je veux, mais je vais me dire : ah oui, y a ce point-là et alors une fois qu'on ouvre cette boîte là on voit qu'il y a tout un domaine, et on va chercher en surfant dans les papiers de maths, c'est une horreur je les lis en diagonale à toute vitesse, je lis l'intro, j'essaie de voir ce que c'est une mesure, ils disaient qu'une mesure c'était une distribution, ben ça allait beaucoup mieux parce que c'est pas un mot qu'on utilise mais je sais très bien ce que c'est qu'une distribution. Y a du vocabulaire à chopper comme ça. Alors c'est là aussi que les matheux c'est sympa parce que parfois on a du vocabulaire, une fois qu'ils nous le disent là on voit et eux ça les intéresse aussi de voir qu'on peut l'utiliser dans tel ou tel domaine. Et donc après voilà, le choix lui-même, c'est un peu moi tout seul, ou avec des collègues, ils peuvent dire, tiens on pourrait passer par là, mais des collègues biologistes et aussi la littérature, il ne faut pas oublier ! C'est-à-dire que la biologie de l'évolution c'est un domaine qui est né avec les maths, euh non Darwin n'en faisait pas, enfin y avait déjà Malthus, y avait déjà, en fait c'était déjà quantitatif quelque part même si ce n'était pas mathématisé et la synthèse qui a été faite au début du siècle, c'est des gens qui ont, qu'ils soient biologistes d'ailleurs ou pas de formation, y avait des biologistes, ils ont écrit vraiment en équation les choses assez tôt. Et même les statistiques, avec Fischer notamment, sont nées conjointement. Dans l'étude de population c'était vraiment utilisé au début pour l'évolution. La régression linéaire, c'est un évolutionniste qui a inventé le mot, alors ça c'est horrible le mot régression, son origine. La régression vers le moins bien...mais bon, du coup on a une longue littérature mathématisée quand même et dans un DEA de l'évolution y a nécessairement de la modélisation dans les cours de base, donc on a quand même tout un pan de maths, d'outils qu'on connaît comme les EDO, y en a plein, la diffusion, les équations de diffusions, le processus stochastiques, c'est des choses, les processus de branchements. Les processus stochastiques c'est né pour des applications. Le mec qui a fait le premier processus de branchement c'était pour de l'évolution. Donc on a quand même une discipline qui est vraiment jointe aux maths depuis longtemps ce qui est un peu à part dans la bio d'ailleurs je pense. La neurologie je pense qui est très matheuse maintenant, je ne sais pas si l'est depuis le début. Nous c'est consubstantiel.

Et ça vous arrive ou est-ce que ça doit arriver de créer du coup un modèle ?

De créer un objet mathématique ? Non, je n'ai pas créé les fractales ! [Rires]

Après, de trouver des résultats, notamment d'approximations que je n'avais pas trouvés dans la littérature, ça, ça m'est arrivé pour le projet matrice aléatoire dont je vous ai parlé, parce que il n'y avait pas, j'avais des matrices qui avaient certaines formes et la distribution spectrale de ces matrices là je n'avais pas vu de résultat dessus, du coup j'ai fait moi-même avec les fonctions génératrices une approximation qui marche bien, euh, que je n'ai pas vue dans la littérature. Mais je n'ai pas d'enjeu à être sûr qu'elle n'existe pas, parce que je ne vends pas de toute façon l'innovation mathématique dans mon papier, je vends son application. J'essaie de citer l'endroit en maths où c'est, alors j'ai cherché, j'ai demandé aux collègues matheux pour savoir, mais je n'ai pas d'enjeu à être sûr que cela n'a pas été dit par untel ; du coup c'est vrai je ne creuse pas la biblio à ce point-là.

Il y a une part de créativité quand même ?

Ah ben oui, même pour la mise en équation ! Créativité mathématique ? Euh surement oui, pour l'idée de passer par ça, par exemple, pour trouver ces approx, ben l'idée de passer par les fonctions génératrices et tout, c'est au sein des maths quoi l'idée.

Elle vient comment cette idée, puisque ce n'est pas écrit dans la littérature ?

Ben si, la fonction elle-même la fonction génératrice, la résistance, elle y est. Je l'ai utilisée pour ça, mais ça c'est toujours un peu comme en bricolant, c'est comme la bricole pour le coup, vraiment. C'est se dire ben je sais que qu'il y a cet outil-là, celui-là, celui-là dans ma caisse, bon, ah tiens, soudain on découvre qu'on a aussi le marteau piqueur, qu'est-ce que je pourrai faire avec ça, souvent moi j'ai un peu une orientation outil un peu ingénieur, quand je vois un outil j'ai plus tendance à aimer tirer sur les outils que avoir une grande question, et, c'est à cheval mais, donc ouais, ça c'est plus, non, ça c'est de la bricole, quoi. Ce n'est pas des éclairs de génie mais y a des moments on « tripe » oui ! On se dit « ah oui je peux faire comme ça » On essaie et quand ça marche on est content de soi ! Surtout les maths ont cet avantage, quand on a trouvé un truc dans le domaine mathématique, il a une assez grande généralité donc ça ouvre, la généralité c'est pratique. Nous, chez nous il y a plein de trucs qu'on ne sait pas mesurer, donc quand on peut dire un truc qui ne dépend des mesures, on est vraiment content, quoi ! Encore plus quand on fait des manips et qu'on sait comment c'est pénible, donc ça c'est assez agréable, c'est ce que j'aime dans les maths.

Et le plus difficile, c'est quoi ?

C'est faire les manips, c'est les manips ! Ce n'est pas les maths ! Parce que les maths, on peut les faire à n'importe quel moment. Alors après, parce que aussi, nécessairement je m'arrête au niveau où je me sens capable de faire ou alors où d'autres peuvent m'aider, donc si je vois que je n'ai pas le truc, en gros, je force parce que je sens que il y a peut-être moyen, donc là c'est un peu l'intuition d'avoir eu l'habitude de trucs qu'en simplifiant on arrive à approximer, c'est vraiment constamment approximer, et puis après si cela ne va pas, je fais ok, on va simplifier et prendre autre chose alors que la manip même dure faut l'obtenir, et puis surtout quand cela ne marche pas on n'a pas autant de contrôle. Parce que dans les maths quand ça ne marche pas on sait que c'est nous qui avons fait une connerie, quoi, et quand ça ne colle pas aux simulations on sait que c'est une approx qu'on a fait quelque part qui est fautive. Et donc on sait où la chercher alors qu'avec des expériences surtout moi qui fais de la micro bio sans être un microbiologiste fort en formation, je suis plus isolé, plus démuné.

Donc ce qu'on appellerait échec dans votre activité c'est plutôt un échec dans la manipulation finalement ?

Non, y a des échecs dans la modélo parce que je crois que telle approx elle va marcher, elle ne marche pas, parce que j'ai oublié qu'il y avait ça qui se passait.

Ça ne marche pas quand on fait l'aller-retour ?

Oui, c'est-à-dire quand je vais avoir une simulation je vais me dire ok ça je peux approximer ce truc là quand la taille est grande par ça, et en fait je me rends compte que non, parce que j'avais zappé que il y avait ça aussi, que la limite je n'avais pas le droit de la prendre ou quelque chose comme ça, un échec. Et l'autre échec qui arrive c'est, de là jusqu'aux données, et là c'est l'échec où on se dit « ah zut ». Alors là, moi, je ne passe pas énormément, enfin j'aime bien quand j'ai un truc testable, mais donc il y a quand même certains trucs où je prends des jeux de données existants aussi, et là, ben oui, on regarde et ce n'est pas un échec ça en fait, ça je ne le vois pas comme échec en fait, c'est ça qui est marrant, parce que ce n'est pas une erreur, c'est juste on a fait un modèle qui arrive à des, qui à l'intérieur du modèle si il est bien fait, si il n'y a pas d'échecs dans cette phase-là, euh, arrive à quelque chose qui colle aux simulations donc on a clarifié ce qu'on avait mis comme simplifications de la nature au départ, on a réussi à en tirer quelque chose de mesurable et donc comparable à des données mesurées, et après on a comparé les deux. Quand ça rejette, il y a une information, quand ça accepte il y a une information, on tire toujours quelque chose du truc quoi ! Donc ce n'est pas, c'est toujours utile. C'est comme si en stat on disait quand j'ai rejeté H_0 suis triste ou suis heureux, non, j'ai une info, donc l'enjeu c'est être d'arriver à pondre la vraisemblance des données sous H_0 et sous H_1 . Une fois qu'on a fait ça on n'a pas d'échec possible au sens, on peut être déçu parce qu'on a envie. Moi en gros, des déceptions j'en ai, mais des échecs c'est plus dans la modélisation ou dans le fait d'avoir mal fait les données, parce que ça foire, parce que en fait ma calibration elle ne marche pas, alors je n'arrive pas à produire des données fiables, les données doivent être fiables surtout en quantitatif. Mais c'est ce qui est bien, je trouve, dans les tests quantitatifs, c'est que ça oblige aussi à faire des bonnes données en fait, parce que on a envie de bonnes données car dès que ça déconne ça fait foirer la prédiction mais pas pour des bonnes raisons.

Ça commence toujours par les données ?

Moi j'aime bien savoir le genre de données qui existent parce que ça dit le genre de quantité qu'il faut que je prédise. Ça oui, j'aime bien savoir des techniques qui existent et tout, mais c'est à mi-chemin, mais ça commence un peu par les données, c'est vrai. Ben justement pour le projet dont je vous parlais, c'était le fait que ce modèle assez simpliste, « fitait » enfin collait avec pas mal de choses, ce qui était étonnant vu comme il était simpliste. Je me suis dit qu'il y a peut-être moyen de montrer que c'est parce qu'il est robuste que en fait, c'est comme les premiers gars qui ont mesuré qui ont vu plein de gaussiennes, on a envie de se dire pourquoi ça sort ces gaussiennes. Moi je pense que c'est dans l'autre sens parce que on avait déjà montré la gaussienne avant. Et voilà, c'est ces trucs-là. La déception par contre ça arrive, la déception c'est pas l'échec : c'est j'aimerais bien que ça marche, parce que s'il marche je peux en faire plein de choses ! S'il marche je peux prédire plein de trucs. Si ça ne marche pas, ben voilà ! Il va falloir trouver un truc plus compliqué. Il va falloir trouver des mesures plus dures à avoir donc c'est des mauvaises nouvelles pour les applications, quoi !

Et pour conclure, la modélisation est omniprésente dans vos projets, et de manière assez simple, si vous deviez définir pour vous, dans votre utilité, dans la façon où vous l'utilisez, un processus de modélisation, ça serait quoi? Ça pourrait se décrire comment, même si la question est difficile quand même

Alors, est-ce que processus de modélisation est entendu par le début d'un projet de recherche de modélisation ? C'est-à-dire une question qu'on se pose, 1

Oui, à partir, voilà, de la question, effectivement

Soit des questions qui sont dans la littérature qui n'ont pas été résolues, où on est déjà dans la théorie du coup, ça peut être ça. On est dans la théorie, dans la théorie ce qui traite de cette question en général en biologie de l'évolution, il y a un grand problème, on va dire l'évolution d'une niche écologique, voilà, comment les bestioles se répartissent dans la niche écologique. Donc ça c'est une question évidemment qui vient de la nature au départ mais là on est dans la façon dont on a conceptualisé ce truc-là, on est déjà dans ce cadre lui-même déjà conceptualisé et euh là, les gens ont fait tels et tels choix pour décrire le truc, et on se dit ah ! C'est quand même pénible, ce n'est pas, moi y a parallèlement tout ce que je sais sur d'autres trucs, d'autres données, qui font que ça ce n'est pas réaliste, moi je vais essayer de le rendre réaliste. Cet aspect-là le mettre dedans, parce que cette simplification-là n'est pas réaliste.

Faire d'autres choix en fait

Voilà, ou un choix plus large qui englobe l'autre mais qui n'est pas limité à celui-là. Ça, ça va être pas mal une entrée pour moi en tant que théoricien du coup. Donc là ça va être le début. Donc après on est déjà dans une trame qui est déjà mathématisée un peu, donc on voit comment remodifier ou alors on dit, je vais passer par un tout autre truc, c'est-à-dire au lieu d'étudier cette quantité-là, c'est la dynamique de celle-là, je vais passer, c'est comme je vais passer par une transformée de Laplace du truc par exemple, parce que ça va être mieux par là. Là c'est un peu un changement quand même, pas de paradigme du tout mais un changement de technique et donc de modèle, parce que on change, ou y a un truc qui décrit ce truc là mais c'est des systèmes dynamiques en fait il faut une EDP donc on change quand même d'objet, mais on n'est pas dans une construction nouvelle de façon de modéliser le truc. Après il va y avoir des cas où on démarre avec un jeu de données qui fait un truc qui n'est pas du tout pareil que les autres jeux de données habituels du même genre donc on dit y a un truc en particulier c'est encore une fois le jeu de données qui fait ça. Et là on se dit bon alors pourquoi ça a lieu, et là on part déjà direct du processus qu'est ce qui se passe et comment je peux le concevoir, on le conçoit mais à nouveau avec les outils de concepts qui existent d'avant. Donc voilà...Donc ça, ça va être, voilà, peut-être être les deux entrées pour démarrer un processus de modélisation ; améliorer un modèle existant ou créer entre guillemet un modèle qui existe pas de ça parce qu'on a vu un truc particulier dans les données mais pour le créer on va prendre des modèles existants qu'on va raffiner, on va jamais, enfin moi, suis pas, je n'invente pas les fractales, quoi voilà. Et après, donc ça ça va être l'étape 1, l'entrée dans la question, et après ça va être ok, caractériser l'objet mathématique qui va décrire le truc qu'on a choisi d'utiliser. Donc déjà le dériver bien c'est-à-dire sous les hypothèses physiques entre guillemet, biologiques du truc, il se passe ça, j'ai un objet par exemple une matrice aléatoire ou une EDP donc caractériser bien , écrire cet objet en format mathématique, que je peux aller sur Google ou avec un matheux parler de cet objet, et

ensuite, ben du coup, dérouler l'objet, là on est dans, comme en physique, le déroulé ça va être faire des choix d'approximation donc y a encore des choix dans ce processus-là, se dire ok, ça, ça doit être petit, ça non, alors voyons voir, ah si ça par contre c'est grand, voyons voir, ça c'est, c'est pas mal du tout.

Est-ce que pour vous le processus de modélisation, son résultat c'est le modèle ou c'est vos résultats ?

Qu'est-ce que ça veut dire pour moi le résultat c'est le modèle ?

Ben en fait, le processus de modélisation, il va, il conduit à modéliser.

Pardon, j'ai oublié la fin, la fin du truc c'est le retour aux données, euh, idéalement. C'est-à-dire une fois qu'on la construit le truc, regarder dans les données si ça marche, les stats à la fin. Donc pardon, mais est-ce que le résultat du processus de modélisation, c'est le modèle lui-même

C'est le modèle ou les résultats vraiment de la problématique du départ, par rapport aux données, ce que vous cherchez

Ah oui, ses conséquences biologiques, enfin ses conséquences dans mon domaine biologique etc., ou le modèle lui-même. Alors là, je ne suis pas un représentatif de mes collègues ...

De votre point de vue ?

Parce que moi, c'est un peu plus le modèle que l'application que je vise. Ça me fait presque plus marrer d'avoir eu .., en fait j'aime bien dire, comme on fait des légos, j'avais des pièces, des machins, j'ai fabriqué un truc, mon légo et ça c'est un outil, un nouvel outil quoi, enfin moi perso, mon plaisir est là, mais comme suis entouré de collègues qui n'ont pas nécessairement cette entrée-là, qui sont aussi théoriciens, biologistes, ben c'est sympa parce que justement, ils m'obligent à ; à faire le lien sur ce que ça implique. Après l'autre entrée quand même, pour moi c'est la prédiction, donc là c'est vraiment..., c'est pas l'implication conceptuelle de ///, même si j'ai choisi l'évolution pour le côté très conceptuel que j'aime beaucoup, une sorte de clé de lecture de la nature, un peu, c'est ce qui m'a fait marrer dans l'évolution en partie, aussi le côté mathématisé et biologique mais en fait, les grandes questions d'évolution me font moins rêver quelque part que d'autres collègues, je pense et les grandes réponses qualitatives par exemple me font moins rêver qu'un test quantitatif, et faire un peu rentrer la biologie de l'évolution vers un truc plus proche de la physique quoi, au sens des tests quantitatifs et des prédictions qui sont quantitatives qu'on peut utiliser, suis agronome un peu, quoi

Bien, je crois que j'ai fait le tour de toutes mes questions, merci

Merci à vous.

Annexe 3 : Entretien avec le chercheur B₂

Les propos de l'interviewer sont en gras.

D'abord je vais vous demander quel est votre parcours universitaire ?

J'avais commencé, avant la licence par faire un peu d'électronique, de physique et de mécanique, ce qui ne m'a pas plu. Je suis retourné en biologie assez rapidement et donc j'ai fait une licence en physiologie animale, le master, donc je suis parti directement en master recherche en endocrinologie et neurosciences. J'ai repris bon pendant ce master j'ai eu des expériences en, j'ai fait un stage en électrophysiologie ce qui m'a passionné en fait ; du coup j'ai trouvé une thèse et donc voilà j'ai trouvé une thèse de, j'ai eu 4 ans sur l'étude de la transmission synaptique au niveau du cerveau dans le cortex pré frontal que je me devais d'étudier avec cette méthode électrophysiologie et...et ça a pris 4 ans et voilà. Puis, j'ai trouvé un emploi dans une entreprise privée qui fait de la recherche à façon pour les industriels, pour les boîtes pharmaceutiques ou les fondations qui sous-traitent de la recherche à cette entreprise dans laquelle je suis, spécialisé en l'électrophysiologie.

D'accord

Et donc je suis ingénieur dans cette boîte.

Dans votre parcours donc, est ce que vous pensez avoir fait beaucoup de mathématiques ?

Alors j'ai fait plus de mathématiques dans ce que j'ai fait en électronique bon avant de passer en biologie. J'aime bien évoquer ce passage parce que cela m'a beaucoup servi surtout ça m'a beaucoup rapproché de ce que je fais aujourd'hui. IL y a l'électrophysiologie où il y a pas mal d'électronique et des mathématiques qui du coup, permettent d'expliquer pas mal de phénomènes. Enfin les mathématiques sont pour moi une base ; c'est une base importante qu'on n'a pas fait assez en biologie et pourtant dans chaque modèle expérimental il faut avoir quelques notions mathématiques pour pouvoir...il y a toujours des formules, des choses comme ça, qu'on ne maîtrise pas assez mais qu'il faudrait connaître pour bien être capable d'approfondir la technique expérimentale qu'on utilise.

Si je posais la question, faire des mathématiques, ça veut dire quoi pour vous ? Ça vous évoque quoi ?

Alors les mathématiques c'est surtout toutes les statistiques. C'est primordial mais c'est aussi du coup... ça dépend des techniques, mais là, celles que j'utilise, y'a la notion d'électronique, de mesures, de mesure de courant électrique donc bien sûr il y a des mathématiques dedans pour faire des calculs, etc. Et une manière aussi de présenter les résultats avec des graphiques des histogrammes cumulés, des choses comme cela ... donc c'est, y'a quelques notions.

Je vais rentrer dans un projet pour essayer de voir un peu dans la description, comment les mathématiques interviennent et si elles interviennent. Donc, je vais vous demander de me décrire un projet enfin même s'il n'est pas abouti ; un projet de recherche, et puis j'interromprai un petit peu pour essayer de voir ...enfin ça serait pour décrire un projet de recherche, si possible du début à la fin, s'il a été finalisé dans lesquels des mathématiques

sont intervenues pas nécessairement tout le long du projet mais à un moment donné ou constamment. Enfin je ne sais pas ... est-ce possible de répondre à cette question ou pas ?

Je vais évoquer mon projet de recherche en thèse, du coup. Il était question d'étudier comment était modulée la transmission synaptique au niveau d'une structure particulière entre, entre disons simplement, dans un circuit neuronal, une communication entre 2 neurones. Ici, dans mon cas, c'était des neurones du thalamus vers les neurones du cortex pré frontal et comment cette modulation de la transmission synaptique. Comment cette transmission synaptique était modulée par un récepteur assez spécifique, de la sérotonine, ce qu'on appelle du coup un neuro modulateur.

D'accord ? Et les mathématiques sont intervenues ...

A plusieurs niveaux, oui. Déjà du fait de la technique expérimentale, qu'on a utilisée. Aussi après la modélisation, c'est aussi mathématique. Moi, je le vois. La modélisation je ne la vois pas si mathématique que cela. Ma vision de la modélisation, c'est, ce qu'y a avant le projet de recherche quand on a essayé de limiter les expériences, de prévoir ce qu'on va avoir comme résultats. Et surtout à la fin, une fois qu'on a fait toutes les recherches et du coup finalement toutes ces expériences ont prouvé que c'était comme ci comme ça, comme ça et. J'vois pas du tout cela comme un schéma qui résume quelque chose.

D'accord. Et donc les choix du départ, là, pour votre projet sont plutôt... les mathématiques interviennent dès le départ ?

Non. C'est plutôt dans la technique et la méthode d'analyse. Alors, par exemple, y'a plusieurs manières d'étudier l'activité synaptique. Il y a en faisant des stimulations électriques, donc là, c'est...pas trop de mathématiques dedans. Dans la, le nombre des résultats qu'on fait, les statistiques les moyennes comme les... c'est tout. Sinon il y a aussi l'activité spontanée, là pour le coup, c'est étudier les signes qui arrivent de façon spontanée et qui justement sont très aléatoires et du coup, il va falloir normaliser ça, en terme de fréquence, en terme d'amplitude ; finalement il y a pas mal de mathématique mais ce n'est pas des mathématiques très poussées.

Et dans ces cas-là, les choix sont faits comment ? C'est-à-dire, il y a une analyse pour les choix mathématiques, c'est vous qui les prenez, il y a une collaboration ?

Les choix mathématiques ?

Même expérimentaux ! Pas forcément que mathématiques

Alors, dans ce genre de projet de recherche, souvent, c'est dicté par ce qui a été fait avant. Par la bibliographie, c'est des modèles expérimentaux qui sont largement éprouvés et du coup, où les méthodes d'analyse sont aussi assez éprouvées.

D'accord. Et du coup la validation de vos résultats sur la fiabilité du modèle qui a déjà été éprouvé mais par rapport à votre problématique de recherche, comment vous la testez ?

Par les statistiques

Par les statistiques ?

Oui, oui, on a un nombre de cellules minimum à enregistrer qu'on peut étendre et jusqu'à ce qu'on [inaudible] des généralement des méthodes statistiques, c'est des suites d'anti test. Un test opéré, comme la cellule aura son [inaudible] chaque cellule est enregistrée pendant un

certain temps ; on applique une drogue, on va la modifier, donc ce sont des tests qu'on fait. Du coup, chaque [inaudible] a son propre contrôle et donc juste en rajoutant son nombre de contrôle. Il y a un effet significatif, on le verra. Voilà.

Et, sinon, cela vous est arrivé de modifier des paramètres, par rapport à cette concentration des résultats statistiques. Et de vos données et de ce que vous vouliez obtenir. Par exemple, ça ne colle pas ?

Si ça colle pas, c'est qu'il y a pleins d'éléments ou que ce n'est pas ///

C'est quoi qui est remis en cause : les données de départ, votre choix, la réduction peut être des données, de certains paramètres ou plutôt le modèle ?

Euh, le modèle, plutôt le modèle. On remettrait plutôt en cause les modèles. C'est à dire que la question posée n'était pas la bonne ou la molécule n'agit pas là où on pensait ; il peut y avoir des tas de raisons. Oui, il y a aussi des aléas en biologie. Oui, ça, c'est autre chose. Ça ne marche pas toujours. Là, on ne sait pas pourquoi. Alors on réfléchit à pourquoi ça n'a pas marché. Qu'est-ce que c'étaient les conditions, l'environnement, c'est des prises de tête...et puis ça remarche, c'est mystérieux.

Il y a d'autres disciplines qui sont intervenues ? Au niveau collaboratif ?

Non, euh, non ! C'est resté dans le domaine de la biologie.

Et est-ce que vous pourriez me dire ce que serait un échec dans votre activité ? Peut-être il n'y en a pas eu dans ce projet mais si on l'imagine : qu'est-ce qu'on pourrait qualifier d'échec ?

Un échec ? Mm...ah ! C'est, je ne saurais pas définir un échec en biologie. Une absence de résultats, c'est un résultat. Il faut en tenir compte. Ce qui est bien en biologie, aussi, c'est, dans la plupart des modèles, c'est qu'il y a plusieurs façons de répondre à une question. Donc quand on a un échec, pour effectuer une expérience, on va essayer de contourner ça, de faire un contrôle, de faire une autre expérience qui devrait donner le même résultat, ce qui va permettre de valider cet échec ou et de dire que cet échec était dû à ça. Par exemple dans mon projet, j'étudiais la transmission synaptique glutamatergique qui repose sur plusieurs types de récepteurs glutamatergique, et du coup, j'avais eu une absence de modulation de cette transmission par la sérotonine et cette absence, il fallait être sûr qu'elle était valide.

Donc j'ai essayé d'étudier cette transmission de différentes façons. Et par ces 2 méthodes qui existaient pour faire ces enregistrements de courant LMDA, j'ai vu une différence entre les 2 méthodes d'acquisition des résultats. Et, en comprenant les différences entre les 2 méthodes d'enregistrement, on a révélé quelque chose auquel on ne s'attendait pas du tout, c'est-à-dire qu'on a identifié que la modulation de la para sérotonine n'avait pas lieu sur les récepteurs qu'on s'imaginait. Pour rentrer plus dans le détail, on n'avait pas une modulation post synaptique des récepteurs sérotonine qui sont sur le neurone qui reçoit l'information, qui sont connus pour être présents sur ce neurone, elle n'était pas en jeu dans la modulation que j'ai vu mais était contrairement au niveau pré- synaptique.

Et ça du coup ça a complètement réorienté mon projet et prouver que ces récepteurs existaient et comment cela marchait, etc.

Donc par cet échec, on a vu qu'on a fait les expériences contrôle qui ont montré un autre résultat et qui auraient orienté tout un projet et qu'il a fallu expliquer etc. Et il y a beaucoup d'autres expériences qu'on a fait prouver.

Ce qui permet de reconstruire finalement des problématiques, de reformuler même ?

Exactement et puis finalement cela a apporté quelque chose ; le modèle s'est vraiment enrichi de cette synapse et enrichi grâce à ce travail.

Et là peut-on dire même qu'on crée un modèle ?

Oui

Là, dans cette description de projet, j'entends des modèles qui pré existaient à votre recherche mais qui dans votre recherche, justement en confrontant ce que vous vouliez obtenir avec ce que vous avez obtenu, il y a création d'un modèle, à le modifier en tout cas ?

A rajouter un paramètre mais qui va quand même changer son utilisation quelque part. Ça va quand même faire des modifications. On peut dire qu'il y a une part de créativité.

Et, dans vos projets, on voit un processus de modélisation. Est-ce que vous avez appris à modéliser avant ou avez appris pendant ? Est-ce que vous avez un axe de pensée, faire comme cela, ou, je commence mon expérience et vous errez par l'expérience ? Existe-il une démarche ?

C'est ça. On part d'un travail déjà réalisé. Soit on étudie quelque chose plus ou moins connu et on va rajouter avec d'autres techniques, continuer le travail, soit on part d'un modèle complètement inconnu et, on va regarder ce qui s'est fait par exemple pour un autre modèle. Exemple, un nouveau récepteur jamais étudié, je vais voir comment les autres ont abordé la question sur un récepteur proche, similaire, comment ils ont fait le cheminement pour le caractériser et reproduire le même cheminement pour le nouveau récepteur.

Est-ce que vous pensez que dans vos descriptions, les modèles que vous utilisez, sont plutôt des modèles explicatifs ou descriptifs ? Dans la fonction, le modèle était plus vu comme un objet et non plus comme un outil ; l'objet modèle que vous utilisez, il a une action plutôt prédictive pour agir que pour décrire/ expliquer ?

Est-ce l'expérience ou le modèle qui va expliquer, qui va valider ?

Oui l'expérience est un outil pour valider un modèle ou une partie du modèle. Après on peut en tirer une généralité, une conclusion. En théorie, un bon scientifique ne cherchera pas à obtenir à tout prix ce qu'il pense. Ce n'est pas parce que cela ne marche pas qu'il faut vraiment trouver la méthode pour que cela arrive aux résultats qu'on cherchait.

Alors ce n'est peut-être pas forcément au niveau de la méthode mais par exemple en se reposant la question au départ sur les paramètres qu'on a choisi. Lorsqu'on modélise, on réduit la réalité, on fait des choix. Est-ce que le modèle va par lui-même faire que cela ne va pas correspondre ? Est-ce qu'on remet bien en cause, dans les sciences du vivant, le choix des paramètres pour que l'expérience puisse à un moment donné valider ou invalider complètement ou le choix du modèle, en tant qu'objet explicatif, va faire qu'on ne va pas

remettre en question ses choix de paramètres et il va vraiment lui-même expliquer quelque chose ?

Si quand on tombe sur un échec, on va commencer par se remettre en question et dire qu'est ce qui ne va pas. Est-ce que j'ai mal choisi le protocole expérimental, le modèle animal, des tas de raisons, des contrôles à faire ;

Dans votre projet que vous avez décrit, les maths sont-ils indispensables au processus de modélisation ?

Les maths sont un outil qui peut être maîtrisé par l'opérateur, le technicien mais pas forcément par le chercheur lui-même, qui peut juste avoir des résultats à analyser pour son modèle.

Pourrait-on dire qu'ils sont un cadre de travail ? Est-ce qu'elles permettent par exemple en simulation de faire un choix, en prenant un outil mathématique qui va poser un cadre de travail ?

J'ai envie de dire que les maths, c'était juste un outil pour analyser les datas et aussi les chiffres qu'on avait. C'était pas du tout... c'est sur les résultats qu'on interprète et qu'on fait les modèles. On génère beaucoup de chiffres et une fois qu'on a saisi la substance, la moyenne et les statistiques, on fait le modèle.

On le fait après en fait.

Oui, oui.

Est-ce qu'on peut dire qu'on mathématise, peut-être pas tout le temps mais dans ce projet, il y a une mathématisation qui va permettre de créer le modèle ? Ou est ce qu'il a le modèle et on mathématise après... ou est ce qu'il y a les deux, c'est-à-dire on mathématise avant on a le modèle on mathématise pendant ?

Euh non les maths c'est juste pour traiter le nombre de données. Le modèle n'est pas mathématique mais plutôt descriptif ou qualitatif.

Mais pour avoir un modèle descriptif, est ce qu'on n'utilise pas d'abord les maths ? Avant de générer ce modèle qui n'est pas mathématique ? Est-ce que les mathématiques ne vont pas intervenir en tant qu'outil pour faire ce choix de modèle ?

Je ne crois pas. Disons qu'on a un modèle qui est assez de base, avec des questions assez descriptives, « est ce que le récepteur est intégré ? » Voilà « est ce qu'il va moduler juste en potentialisant ou en déprimant la réponse ? » ; ça reste très très qualitatif. Donc on utilise une technique électro-physiologique qui va utiliser et générer beaucoup de données qui seront traitées par les mathématiques et après on aura la réponse à la question.

Donc en fait le modèle a été choisi par analogie de phénomènes isomorphes et pas du tout par analogie mathématique.

Oui les mathématiques n'interviennent qu'en tant qu'outil.

Est-ce que vous avez un texte ou un article de dépôt qui relate votre projet ?

Oui on a un article qui a été soumis qui est revenu qu'on va resoumettre encore et j'ai une thèse.

Tout ce qui est collaboration avec les mathématiciens, je passe parce que vous n'en avez pas eu.

Non, non

C'est plutôt l'outil mathématique et il n'y a pas eu de contexte qui vous a amené à trop travailler les mathématiques.

En tout cas pas dans notre labo, et pas dans notre situation. Je pense il y a des labos qui sont en collaboration avec des biologistes statisticiens, et des gens qui font beaucoup de mathématiques.

Là, vous n'en avez pas eu parce que je dis : Est-ce parce que votre validation est restée dans votre discipline, vous n'avez pas eu besoin de questionnement par rapport à l'outil que vous avez utilisé. On pourrait dire que vous n'avez pas eu besoin de rencontrer les mathématiciens pour votre projet.

Non

Et pour conclure, je vais revenir à une de mes questions. Parce qu'on a ///ensemble on voit que la modélisation, ce n'est pas forcément de la modélisation mathématique. On voit dans la description les mathématiques étant un outil, elles n'ont pas été au départ du choix du modèle, donc on n'a pas de modélisation mathématique par analogie mathématique et même pour vous. Donc dans votre situation, est ce que vous pouvez me décrire le processus de modélisation ? Ce que c'est ? Qui partirait comment, et finirait comment une fois mis en place dans votre projet ? Le processus est terminé quand ?

En fait c'est simple. On part d'un modèle qui est plus ou moins complet mais qui est connu dans la littérature. Donc...

On a une question d'abord ?

Oui, on a une question. On part d'une question, on a quand même une question mais y'a des choses qui sont connues sur le modèle qu'on va étudier. Par exemple là, c'était comment étudier comment la sérotonine va moduler la transmission synaptique glutamatergique. Je définirai les mots après. Donc en fait on a une synapse, une communication entre deux neurones et le neurone émetteur va libérer du glutamate qui sera du coup un neuro transmetteur qui va du coup inclure une réponse du neurone suivant appelé neurone post synaptique. Donc il a des récepteurs au glutamate et moi ce que j'ai étudié c'est comment un autre récepteur qui n'est pas récepteur au glutamate mais à la sérotonine va moduler cette transmission car les récepteurs peuvent avoir des interactions les uns avec les autres, par des messagers chimiques qui peuvent être intra cellulaires qui peuvent aller dans les cellules, modifier son activité, modifier ces cellules, avoir des réponses d'autres récepteurs.

Donc là on a une question sur un modèle connu

Oui c'est ça. Et donc il s'agissait de répondre à cette question comment la sérotonine va moduler la réponse au glutamate. Et, on fait l'expérience, on stimule le neurone récepteur, on enregistre la réponse glutamatergique et on fait la même expérience avec la sérotonine dans le milieu donc qui va activer les récepteurs glutamatergiques et on va voir s'il y a une

modification de cette réponse. Donc on s'est rendu compte par cet échec dont on parlait tout à l'heure qu'il y avait une absence d'effet dans une certaine condition expérimentale. Cette condition expérimentale n'avait pas, avait un inconvénient c'est qu'elle bloquait, qu'est-ce que j'allais dire, comment l'expliquer...

Juste dans le processus, on a la question sur le modèle, on fait l'expérience, on fait l'expérimentation, on se repose une question

Oui

Parce qu'il y a eu une analyse en fait ?

Oui

L'analyse de l'expérience ? Lors de l'analyse, on se repose des questions ?

Oui, oui donc en fait, ce qui se passe c'est qu'on a eu un échec sur ce protocole là et on fait un deuxième protocole, qui pourrait répondre à la même question et là on a une différence, et un très fort effet et du coup, qu'est qu'il y a eu comme différence entre les 2 protocoles et là ça tenait dans la méthode d'enregistrement dont une méthode contenait du magnésium dans le milieu et l'autre non et ça s'est connu dans le milieu électro physiologique où cela peut avoir des répercussions sur d'autres récepteurs, des récepteurs pré synaptiques et du coup on s'est posé la question s'il ne pouvait y avoir un effet pré synaptique et pas post synaptique. Parce que, les récepteurs séronergiques que j'étudiais étaient connus pour être principalement pré synaptiques. Donc qu'est-ce qui se passait, pourquoi on avait un effet pré synaptique ? Il a fallu faire des expériences pour montrer qu'il y avait bien un effet pré synaptique pour le valider, s'assurer que c'était bien un récepteur séronergique pré synaptique qui était en jeu ou si c'était un récepteur post synaptique qui relarguait et qui faisait un effet indirect sur la pré synapse, et ça pour le prouver il a fallu avoir recours à des souris transgéniques, qui n'expriment plus leur récepteurs séronergiques après leur avoir fait une injection virale localisée pour exprimer les récepteurs soit en post synapse soit en pré synapse et du coup on va retrouver en pré synaptique uniquement et ce qui nous a permis de prouver qu'il y avait bien des récepteurs séronergiques pré synaptiques qui étaient bien responsables de cet effet et donc le modèle en a été modifié parce qu'on sait maintenant qu'il y a des récepteurs à ce niveau-là.

Donc il y a vraiment une expérience de création de modèle à partir d'un modèle

Voilà

Et là dans la simulation on peut dire que l'outil mathématique qui comme on l'a dit tout à l'heure est dans la partie simulation et dans la dernière expérience aussi dans l'analyse ?

Pff

Dans la partie, on les situerait là ?

Elle est tout le long mais uniquement dans l'outil, uniquement dans les protocoles d'enregistrement en fait. On enregistre toujours des réponses synaptiques en stimulant les neurones et ses réponses sont chiffrées, faut les normaliser, il faut en faire des statistiques, ce sont des bases de données.

Et les statistiques utilisées, ce sont des statistiques pour lequel vous faites un choix lors de leur utilisation, avec ce mode de statistiques mathématiques, parce qu'il y a beaucoup de mode statistiques en maths ?

Oui il y en a beaucoup de modes

Et comment vous choisissez ?

J'avais suivi un module de statistiques pour bien comprendre le système et classiquement la plupart des scientifiques se contentent de prendre ce qui a déjà été utilisé pour le même type d'expériences.

Pour conclure, je vais revenir sur ce que vous avez dit un peu plus tôt, vous auriez préféré avoir un peu de formation mathématique au moment des choix, pour avoir des outils pour faire des choix, pour peut-être moins se contenter de ///

Oui j'aurai préféré avoir plus de mathématiques pour être plus autonome et moins faire confiance à la littérature même si malheureusement nous sommes obligés de faire comme ce qui a été fait pour que ce soit publié et éviter le « mais attention vous n'avez pas utilisé les mêmes outils, ça ne va pas ». Donc il faut d'un côté savoir ce qu'on fait et de l'autre on est un peu brimé par le fait que tout le monde a fait comme ça et ainsi produire les choses de la même façon et ainsi être publié, même si les choix qui ont été faits et publiés au départ ne sont pas forcément les meilleurs. Il y a une forme de rigidité qui oblige à faire comme ça était fait avant. Mais aujourd'hui du fait que la science devient de plus en plus internationale, qu'il y a de plus en plus de scientifiques de pays et d'origine et d'horizon différents, le problème commence à devenir qu'il y a beaucoup de publications qui ne sont pas vérifiables qui n'ont pas interprété tout simplement les résultats de la bonne façon ; et qu'au final il y a des résultats plus ou moins faux, directement ou indirectement publiés et pour nous en quelque sorte jeunes scientifiques c'est d'autant plus difficile de faire le tri si on n'a pas une connaissance minimum sur les statistiques, les bases de données. Les éditeurs sont aussi des journalistes et non des scientifiques qui sont à la recherche de gros titres, or la science n'est pas suffisamment validée. Ils font vérifier les recherches des autres par des collègues et dans le cas de mon projet, comme les résultats post synaptiques ne vont pas dans le sens de leurs précédentes publications, ils ne veulent pas changer le modèle. Un modèle modifié n'est pas commun et n'est pas facile à faire passer dans le monde de la science.

Merci beaucoup de votre collaboration.

Merci à vous

Annexe 4 : Entretien avec le chercheur B₃

Les propos de l'interviewer sont en gras.

Au départ, je voudrais connaître votre parcours universitaire.

D'accord. Alors moi, je suis vieille, donc j'ai fait un DEUG. Un DEUG B, voilà ! (rires). Après une licence, après une maîtrise, c'était à Clermont-Ferrand et c'était l'intitulé, je sais plus, mais ça devait s'appeler « biologie cellulaire mention génétique » peut-être ou il devait y avoir le mot génétique, mais ce n'était pas central, ouais, biologie cellulaire. (Souffle) Euh... après ça, j'ai fait un DEA, qui devait s'appeler aussi biologie cellulaire peut-être et moléculaire, je ne suis pas sûre, oh non biologie et physiologie cellulaire, voilà. Biologie et physiologie cellulaires. Après, j'ai fait une thèse, toujours à Clermont-Ferrand dans un labo de génétique. Donc cette fois, je faisais vraiment de la génétique euh sur la drosophile, et puis, après je suis partie en postdoc aux États-Unis, deux ans. J'ai passé le concours CNRS que j'ai eu la deuxième fois et puis après, je suis... j'ai été recrutée à Gif-sur-Yvette au centre de génétique moléculaire et puis après, euh on a le labo, toute l'équipe, dont je faisais partie, est venue à Montpellier et je suis à Montpellier depuis voilà. Où j'ai changé d'équipe. Moi, je ne suis pas directrice d'équipe, j'appartiens à une équipe qui varie selon...des tas de choses. (Rires)

C'est quelle section au CNRS ?

Alors, CNRS, c'est la 21. La 21, elle change de numéro régulièrement et c'est [hésitations] structure, fonction, régulation des génomes je crois.

D'accord. Et dans votre parcours, est-ce que vous avez fait beaucoup de mathématiques ?

Non ah non. Il y avait, il y avait des mathématiques en DEUG, en première et deuxième année, deuxième année, je ne suis pas sûre, mais après non.

Non. Et de votre point de vue, c'est quoi faire des mathématiques ?

Ah ! C'est une bonne question. Faire des mathématiques de mon point de vue ? (Soupirs) Faire des mathématiques ? Ah ben alors là je dirais que ça doit, c'est enfin, dans ma tête, je pense que je ne vois pas la même chose si je pense à quelqu'un qui fait de la recherche en mathématiques ou à quelqu'un euh qui utilise les mathématiques euh régulièrement, ben c'est compter, c'est compter, calculer pour le, pour moi, en tout cas, si j'en fais, c'est ça, c'est pas...Je pense que pour un chercheur c'est pas ça, mais pour moi c'est ça.

Et est-ce qu'on, donc on va partir maintenant avec plein de petites questions. On va partir, vous allez me proposer un projet de recherche. On va essayer de voir du début à la fin, comment il s'est déroulé, dans lequel les mathématiques sont intervenues. Vous en avez un...

Les mathématiques sont, ben elles interviennent tout le temps euh après alors, on fait beaucoup de statistiques. Euh... et sinon, les mathématiques, ben je ne sais pas moi, mais, chaque fois qu'on, on... c'est de la biologie moléculaire. Donc il y a beaucoup de petites réactions ou mettre des microlitres de choses ben (rires), chaque fois qu'on fait, chaque fois qu'on élabore une euh, une expérience, ben il y a les calculs de de quantité à mettre selon qu'on veut faire la réaction de 50 microlitres dans 250 microlitres, dans 300 microlitres. Ça, je ne sais pas si on compte ça comme des mathématiques. Après, il y a les analyses euh

(hésitations) les statistiques donc quand on compte, quand on observe des phénotypes qui sont quantifiables. On compte des choses, on mesure des paramètres et ensuite on essaye de comparer euh une population témoin avec la population euh à laquelle on s'intéresse dans le cadre de l'expérience et pour ça on, voilà. Donc les statistiques, alors, dire que ce sont des mathématiques euh je ce ça ce n'est pas à moi de le dire, je ne sais pas si c'est mathématique (rires).

Et on va prendre un projet, on peut ? On pense à un projet en particulier pour voir comment il a commencé. Comment commence un projet de recherche. Comment ça commence ?

Comment commence un projet de recherche ? Alors...

On va en prendre un, vous prenez un.

Un qui est fini ou pas ? Parce que je bon, je raconterai bien celui que je suis en train de faire maintenant. Ou c'est peut-être, mais je ne sais pas si c'est...

Si, on peut. Alors si on n'a pas la fin, on l'aura peut-être d'ici que moi je termine (rires)

Alors, donc ce que je fais tout de suite, comment on a commencé... Là, j'ai rejoint une équipe, il y a pas longtemps, il y a quelques mois, une nouvelle équipe. Donc c'est un jeune chef d'équipe, très jeune et euh... qui s'intéresse à, moi, je me suis toujours intéressée aux régulations génétiques. C'est vraiment ce qui m'intéresse euh et particulièrement, ça m'intéresse en fait dans la reproduction. Euh là, ce n'est pas exactement ce que je fais tout de suite chez lui, mais je pense que c'est ce que j'arriverai à faire au bout d'un moment. Euh donc les régulations, euh de l'expression des gènes euh alors c'est euh extrêmement complexe et beaucoup plus complexe que tout ce qu'on peut imaginer c'est-à-dire qu'on a une vision (soupir) un peu simpliste qui est, un gène exprimé fait une protéine et il l'est ou pas selon le contexte, selon le tissu, selon le moment, et donc il y a d'autres gènes régulateurs qui vont réguler son expression. Et en réalité dans un individu entier, ben évidemment c'est beaucoup plus complexe que ça parce que il y a beaucoup beaucoup de gènes, il y a beaucoup beaucoup de régulateurs, et des régulateurs régulent des gènes, qui eux-mêmes régulent les régulateurs, il y a des phénomènes de de titration, des choses comme ça. Enfin tout est vraiment compliqué. Et il y a une couche supplémentaire de complexité qui s'est rajoutée ces dernières années avec la découverte des petits ARN régulateurs. Et nous, on travaille, enfin l'équipe que j'ai rejointe travaille vraiment là-dessus, sur les petits ARN régulateurs. Alors là, je ne sais pas où vous en êtes en biologie, si vous pouvez comprendre, les petits ARN régulateurs, la séquence d'ADN, l'ADN ça vous parle ?

Oui.

Les petits ADN, les petits ARN régulateurs, ce sont des petites molécules d'ARN qui ne font pas de protéines, qui jouent, qui ont une fonction par eux-mêmes et qui ont la capacité de s'hybrider, de reconnaître les ARN messagers de certains gènes, et en reconnaissant, grâce à une courte séquence de 6 ou 7 nucléotides, et en reconnaissant ces ARN messagers, ils peuvent en réprimer la traduction. Donc il y a des gens qui ont mis au point des programmes informatiques pour reconnaître quand on a la séquence d'un micro, d'un petit ARN qui s'appelle le micro-ARN, alors les micro-ARN, pour reconnaître les gènes qui vont potentiellement être régulés par ces ARN. Donc là, le programme informatique dit voilà : « Celui-là, il a telle séquence donc, il y a tant de gènes qui ont cette séquence, donc il va pouvoir les reconnaître et tout ». Et puis les chercheurs, ce qu'ils font maintenant, c'est qu'ils

essayent de valider ces cibles prédites, c'est-à-dire, de voir si réellement dans la vraie vie euh il y a (rires) il y a une véritable signification biologique à cette régulation supposée et prédite par ordinateur. Donc moi, c'est chez la drosophile que je fais ça et pour le moment euh bien qu'il y ait des tonnes d'articles qui démontrent l'implication de micro ARN dans des tas de cancers, de maladies, de machins, de processus biologiques, en réalité, c'est jamais solide, c'est jamais robuste et euh... ça peut toujours être remis en question. Enfin on a l'impression qu'on n'arrive pas vraiment à toucher cette chose du doigt et en fait probablement, dû au fait, que ces régulations sont extrêmement complexes parce qu'un micro-ARN, il est jamais tout seul. Il y a, il régule des tas de gènes et bien sûr, les ARN qui sont régulés eux-mêmes vont pouvoir titrer ces micro-ARN et affecter leur fonction. Donc moi, ce que j'ai décidé de faire, par rapport à ça, c'est de choisir un micro-ARN particulier donc de la drosophile. Il s'appelle bantam. Je l'ai choisi parce que, on sait que les mutations de ce micro-ARN. On sait que quand on ne l'a pas, euh les mouches ne vont pas bien du tout. En fait, elles ont des problèmes de croissance et ça, à chaque étape de leur développement. Euh et ça fait des chaque, des larves plus petites, puis certaines vont jusqu'au stade pupal, les pulpes sont aussi plus petites. Si elles arrivent à l'âge adulte, ils sont aussi plus petits, euh tout ça va mal, tout ça est quantifiable. C'est là que les mathématiques (rires) peuvent être utilisées. Donc ça, c'est vraiment le problème qui se passe quand il n'y a pas bantam. Alors pourquoi est-ce qu'il y a ce problème quand il n'y a pas bantam ? Donc moi, ce que je vais essayer de faire c'est de d'identifier les gènes qui sont régulés par bantam qui sont importants et qui interviennent dans ce processus. Si ça se trouve, il y en aura pas, parce que si ça se trouve, c'est beaucoup plus on a et voilà ! Il y a une nouvelle technique qui vient de sortir, il y a à peu près deux ans, qui s'appelle le CRISPR et qui permet de faire des mutations à volonté dans le génome in vivo dans les individus. C'est une technique révolutionnaire en biologie, tout le monde fait ça maintenant.

C'est expérimental ?

C'est extraordinaire. C'est expérimental, mais je pense qu'il y a une volonté de l'utiliser aussi bien sûr pour soigner des maladies. Donc, c'est vraiment un truc qui explose. Par cette technologie, moi, je peux envisager de muter euh mon ARN bantam de la manière dont je veux le muter, c'est-à-dire pas seulement de l'inactiver, mais de le transformer en autre chose ou de d'en faire ce que je veux. Et je peux aussi choisir des cibles prédites par ordinateur et les muter aussi de la manière dont je veux. Et je peux par exemple les muter de manière à les transformer, à transformer leur séquence, de manière à ce qu'elles ne soient plus reconnues par le bantam endogène et qu'elles soient reconnues par un bantam que moi, j'aurai aussi muté. Donc je peux jouer avec ça. Du moins, c'est ce que je pense faire. Donc le chef d'équipe que j'ai rejoint là, c'est un grand spé, vraiment un spécialiste de la bio-informatique donc c'est quelqu'un qui est extrêmement compétent là-dedans aussi, il a aussi une grande compétence en biologie moléculaire. Et du coup, c'est quelque chose, moi qui suis absolument inculte en en bio-informatique voilà, c'est vraiment, je pense qu'on a une bonne association parfaite pour faire ça. Donc, voilà ce que je fais là. Donc, en quoi les mathématiques peuvent être utiles ? Ben le phénotype, donc le défaut quand bantam est muté, et ce que je regardais ben c'est des défauts de croissance tout le temps. Euh donc, il va falloir mesurer, mesurer des cellules, mesurer des mouches, quantifier des quantités d'adultes qui arrivent à émergence ou pas. Enfin tous ces trucs-là, des trucs bâtards, euh estimer euh (silence) euh si les différences qu'on observe chez les mutants bantams ou les mutants des cibles sont vraiment

significativement différentes de celles de, euh des sauvages, là, ça devient vraiment, c'est vraiment ça devient de la génétique quantitative parce que, il y a une variation énorme bien sûr d'un individu à l'autre même si les mouches sont peut-être moins variables que nous. Mais donc, c'est quelque chose qui, à moi, qui va me poser problème puisque forcément c'est, ça va pas être facile, je pense, d'avoir des... d'a -, d'avoir une certitude, ça va toujours être des certitudes statistiques. Voilà, donc c'est en ça que je vais utiliser les mathématiques. En comptant sur nos... Sur mon collègue qui est lui, encore une fois, une personne qui est...

Donc vous travaillez en collaboration ?

Ah complètement ! On travaille ensemble complètement. Et là, je pense que ça va être notre force.

Et c'est vraiment une collaboration, enfin une articulation entre son point enfin, son point de vue, ses compétences, et les vôtres en fait.

Oui, oui.

Ça s'articule ?

Oui, oui.

Ça peut aller ça peut aller jusqu'à modifier votre protocole ?

Ah oui. Je pense qu'on a la même idée de la science, de la biologie, de la pratique scientifique. Et juste pas du tout les mêmes cultures de base, et les mêmes compétences, et du coup, pour le moment, ça fait un peu moins d'un an qu'on travaille ensemble et c'est vraiment super super-enrichissant oui.

C'est de l'interdisciplinarité qui...

Autant prendre le risque (rires)

Oui je ne sais pas si on peut parler d'interdisciplinarité, je pense, surtout, ce qui est bien, c'est que les biologistes aujourd'hui font quasiment tous, sont tous obligés de faire des statistiques et ils ne savent pas faire. Ils ne comprennent même pas, enfin, ce qu'ils font. Et du coup, d'avoir une personne comme ça, aussi compétente, forcément euh, c'est que, c'est ça aide quoi.

Et est-ce que, du coup, dans les statistiques où ils n'ont pas les compétences forcément de comprendre ce qu'ils utilisent, il y a de la collaboration avec des mathématiciens ?

Oui, il y a de la collaboration avec des mathématiciens. Euh... euh il y en, moi, j'en ai eu parce que justement, il y a quelques années, j'avais un projet qui est, c'était très à la mode à l'époque, c'était d'utiliser des puces ADN pour estimer la... l'expression de gènes à grande échelle. Donc, dans deux conditions, on broie les tissus, on a le sauvage mutant par exemple et puis, euh, on essaye de voir s'il y a des gènes qui s'expriment différemment en le mettant sur des puces ADN. Alors, après, il y a tout un travail justement de statistiques à faire, d'analyses de ces puces qui présentent une variabilité, un bruit de fond, qui dépasse largement la variabilité (rires) attendue entre sauvage et mutant donc, c'est hyper compliqué. Et donc, il y a des mathématiciens au LIRMM en particulier, dont le travail, c'est vraiment ça. C'était, c'était à l'époque en tout cas, d'essayer d'imaginer des manières d'analyser des résultats de puces le plus, le plus cohérent possible. En fait, c'était difficile, je pense que... assez difficile pour un pur biologiste de collaborer avec un pur mathématicien parce que les

buts sont différents. Le mathématicien, il veut des choses qui soient mathématiquement euh correctes et bonnes et c'est... et il n'imagine pas, comment dire ? Alors, la difficulté, c'est que les super méthodes qu'ils nous sortaient euh n'étaient pas validées forcément euh expérimentalement. Parce qu'après, quand vous trouvez une collection de 80 gènes qui sont plus exprimés dans votre condition, ben il faut vous demander si c'est, si ça reflète vraiment quelque chose, une véritable réponse ou pas. Et du coup, faut faire des manips pour et si on commence à faire des manips pour, ben on s'aperçoit que sur les 80, ben il y en a au moins 30 qui vont pas du tout répondre en réalité, donc du coup, ça valide pas, donc on sait plus trop quoi faire. C'est un peu le même problème que quand on dit dans les cancers, que quand on a une mutation dans BRCA1, ben on a des cancers du sein. C'est vrai généralement, ce n'est pas vrai dans plein de cas, enfin voilà !

Et cette collaboration, des fois, elle amène à reconstruire les problématiques ?

Ah oui, oui. Par contre les discussions sont toujours enrichissantes. Je pense qu'au bout du compte, ça fait avancer les choses, mais sur un projet particulier je pense que les résultats ont généralement été décevants. Euh de toute façon, en biologie, en recherche, les projets sont à court terme. Les technologies changent très vite donc de toute façon, on ne passe pas 10 ans à analyser des trucs parce que ça n'a plus de sens au bout de 10 ans donc... Finalement, il faut se contenter d'avoir quelque chose qui est bricolé et qui ne correspond souvent pas à, à quelque chose de de vraiment tangible et qui peut-être souvent, ne fait pas forcément avancer tellement les choses.

Et quand, vous parlez, les méthodes que proposent les mathématiciens, est-ce qu'on ; pensez-vous à un modèle ?

Ah ben là, mais là, ça va être compliqué parce que c'était des trucs statistiques, le logiciel R, les choses comme ça euh. Ben je ne sais pas.

Ce n'est pas des ...

D'utiliser tel euh... telle, je ne sais pas quoi matrice ou, je ne comprends pas tout ça.

Et vous travaillez donc sur des, une question au départ, donc le projet, donc vous posez des questions finalement ?

(Acquiescement)

Vous utilisez l'expérience ?

Voilà ! L'expérience, c'est-à-dire qu'on se dit euh, alors moi ce que je me dis, c'est voilà : « Bantam, je sais que quand il est absent, les mouches ne vont pas et je vois très bien ce qui leur arrive quand il est absent puisqu'on, ça existe le mutant Bantam existe depuis très longtemps. Moi, ce que je vais faire, c'est que je vais muter juste la séquence qui reconnaît les ARN. Normalement, en mutant juste cette séquence, je devrais avoir le même phénotype. Ça devrait aller très mal, les mouches devraient être trop petites puisque le modèle dit que c'est comme ça que Bantam exerce son action, c'est en reconnaissant des ARN et en régulant leur traduction. Donc s'il ne reconnaît plus les ARN, là, forcément, on verra le phénotype ». Donc ça, c'est une prédiction qu'on va tester. Si ça se trouve, on ne va pas trouver que ça marche comme ça. C'est peu probable. Je pense qu'on va trouver que ça marche comme ça. Et si on trouve que ça marche comme ça, alors ce que je ferai, je verrai le même phénotype

de croissance dans le bantam qui est normal, qui est un micro-ARN, mais qui ne reconnaît plus ses cibles habituelles, ben je vais prendre les sites prédites par ordinateur. Alors les choisir, choisir les premières (rires) que je vais utiliser, là, il va falloir imaginer ou être chanceux et je vais les muter de manière à ce qu'elles soient reconnues par ce nouveau bantam que j'ai... que j'ai, que j'ai trafiqué pour voir si en notant une cible trafiquée, ben je peux retrouver euh une croissance normale. Là encore, ben je ne sais pas, je ne connais pas le résultat. Je sais que on prédit des choses euh dans mon cas, je sais que bien souvent quand les prédictions ne se réalisent pas, souvent, c'est ça ouvre la voie à des choses nouvelles et excitantes. Même si ça peut paraître des fois décevant comme ça, c'est voilà.

Ce n'est pas un échec ?

Ah ce n'est pas un échec ! Non, en fait...

Il n'y a pas d'échec ?

Ça, c'est vraiment important à voir, c'est que la science expérimentale, moi je pense qu'il faut essayer d'imaginer des expériences, qui de toute façon, donnent un résultat qui permet d'avancer. C'est-à-dire imaginer une expérience euh qui soit, donne le résultat, soit, ne peut pas être interprétable. Euh ça ne peut pas marcher, c'est un peu l'histoire du cygne noir et blanc là. Si on dit euh : « ah ben, je pense que tous les cygnes sont blancs, je vais essayer de voir si j'en trouve un noir ». Si vous n'en trouvez jamais un noir, votre expérience, elle est ratée et vous ne savez pas si ça peut exister un noir ou pas. Il faut faire des, il faut poser des questions qui peuvent avoir une réponse quoi. Sinon euh...

Et du coup les, par rapport à cette question, comment on sait si on peut avoir une réponse ?

Ben là, dans ce cas-là, je vais muter bantam donc moi, je vais voir que j'ai créé la mutation. D'accord. Je vais pouvoir faire des expériences de biologie moléculaire pour vraiment m'assurer que bantam est là ou qu'il est plus là ou qu'il est, ou qu'il a sa séquence ou pas. Et là, je verrai le phénotype de la mouche. La mouche, elle va être vivante ou pas d'ailleurs, mais je vais avoir quelque chose à observer et l'observation de cette chose-là, va me donner la réponse. Là, où ce serait un échec, ce serait que mes expériences, que je n'arrive pas à faire ces mutations bantams. Là, ce serait des échecs, mais technologiques. Donc là, quand on n'arrive pas à faire, ça peut arriver hein que.

On ne sait pas forcément.

Bizarrement, on ne comprend pas pourquoi ouais ça ne marche pas, on n'y arrive pas. Et ben si ça ne marche, je changerai de (rires) projet.

De ne pas marcher, c'est ne pas voir, observer quelque chose ?

Ou de techniques, ou de de micro-ARN voilà ! Oui oui. Ben il y a le... il y a la petite cuisine qu'on fait qui peut ne pas marcher ou vous faites une mayonnaise, elle ne monte jamais ben, faut changer hein, faut faire (Rires) une sauce hollandaise ou je ne sais pas. Et euh, mais une fois que vous avez fait votre mayonnaise, vous pouvez tester si elle bonne avec des œufs, avec des tomates, avec du crabe (rires)

Bon, l'expérience quoi.

Ça donne forcément une réponse.

Tout à fait. Et quand, vous dites, tout à l'heure, l'ordinateur va prédire quelque chose. Mais l'ordinateur, en fait c'est quoi qu'il y avait dedans ?

Euh c'est un logiciel. Alors là, c'est des logiciels donc là aussi, il faut être bien informaticien donc... Pour ce qui est des micro-RNA, (hésitation) euh le logiciel de prédiction des cibles, donc ce qu'il fait c'est qu'il prend le logiciel, il prend la séquence du micro-ARN là, il prend la séquence de tous les ARN prédits, faits par le génome de la drosophile, il cherche euh alors là, je sais pas comment ça marche hein, il cherche, je pense, étape par étape, enfin il fait glisser une petite fenêtre de six nucléotides tout le long et puis il en trouve un certain nombre. Une fois qu'il a fait ça, il ne s'arrête pas là en fait puisque maintenant les génomes sont séquencés, les génomes de plusieurs drosophiles euh de plusieurs espèces de drosophiles sont séquencés donc il va rechercher dans les gènes homologues de ces autres espèces s'il y a aussi la reconnaissance du micro-ARN homologue de ces autres espèces. S'il les trouve, il se dit : « ah c'est conservé au cours de l'évolution », c'est que ça doit avoir une signification biologique. Enfin, il se dit ça. C'est... (Rires). Il est réglé pour dire ça. Et du coup, il nous sort : voilà, les cibles prédites, ce sont les cibles qui ont ces 6 ou 8 nucléotides de reconnaissance et qui sont conservés au moins chez les espèces proches de drosophiles. Alors là, vraiment, c'est un pari parce que dans la cellule, un micro-ARN-là qui est là et qui regarde les gènes, il ne sait pas s'il a été conservé depuis bon... Voilà !

Ben oui, et vous, on ne remet jamais en question le résultat que donne ... ?

Si, alors si. Ben (soupirs) je dis jamais, alors c'est un peu à la fois oui et non, c'est-à-dire qu'il faut bien se baser sur quelque chose, donc on s'accroche à ces logiciels. Donc pour prédire les cibles, les micro-RNA, là, par exemple, il y a 3 ou 4 logiciels qui tournent, qui sont utilisés, donc chacun en préfère un. Moi je préfère, ça s'appelle TargetScan, je préfère celui-là, il est mieux, alors là je ne sais pas pourquoi il est mieux parce que chez, les gens que je connais l'utilisent. Mais d'autres peuvent en préférer d'autres. Et du coup euh...

C'est un choix qui reste le choix du chercheur ?

Oui. C'est un choix qui reste le choix du chercheur. Et tant qu'on n'a pas pu démontrer, faire des manips, des expériences pour montrer que vraiment ce logiciel-là est mieux parce que les cibles qu'il a prédites, ben on arrive à montrer qu'elles ont vraiment une signification biologique, ben on peut, là, on ne peut pas savoir.

Ces logiciels, ce sont des modèles en fait qui sont programmés ?

Oui, oui je pense que c'est... ouais. Moi, je suis... enfin, on pourra après aller voir les gens qui travaillent vraiment là-dessus, dans mon labo parce que eux, je pense qu'ils pourraient plus en parler. Je leur avais dit que t'aller venir sans doute et je pense qu'ils seraient prêts à répondre à des questions aussi.

Et il y en a qui fabriquent ces logiciels dans l'équipe où vous êtes ou ?

Ah oui, ils sont capables oui. Ils sont capables de les, en tout cas de les améliorer (hésitations) de les améliorer pour qu'ils soient utilisables par nous, comme on veut. Enfin oui donc...

C'est un outil pour avoir un modèle de disponible pour les autres ?

Oui, c'est-à-dire que moi, par exemple, je vais me dire bon : je vais muter bantam et puis je vais muter des cibles. Quelles cibles je vais choisir en premier ? Il y en a... enfin, dans le logiciel TargetScan, il y en a 70 qui sortent c'est-à-dire 70 ARN, 70 gènes qui ont au moins une petite séquence qui va être identique à bantam et qui est conservée au cours de l'évolution. Lequel je prends ? Lesquels je prends ? (Rires) Alors là, moi, un peu... Je commence, j'ai décidé de, il se trouve que ce logiciel n'a prédit qu'un seul site par ARN sauf pour un d'entre eux où il en a prédit 4. Donc j'ai pris celui-là, je me suis dit : il en a prédit 4, en plus c'en est un qui a déjà été étudié par des gens qui ont fait des expériences qui semblent indiquer que euh il est vraiment régulé par bantam. (Soupirs) euh sauf qu'il a aussi une régulation complexe aussi par d'autres gènes. Enfin bon et euh... après, donc moi je l'ai regardé à l'œil et moi avec mes yeux, j'ai recherché s'il y avait de l'homologie et là, j'ai trouvé 5 sites. Donc voilà ! Et je vais utiliser celui-là pour commencer après euh...

C'est un choix.

C'est un choix et puis selon euh... selon aussi je pense que ce serait sage par exemple, étant donné que le phénotype, c'est un défaut de croissance, ce serait pas mal que je regarde parmi ces 70 gènes ceux qui sont connus ou soupçonnés d'affecter la croissance. Mais là encore, ce n'est pas facile, c'est encore des choses qui sont prédites par des logiciels plus ou moins fiables, euh on n'est jamais sûr de rien en biologie. Euh un gène qui est accusé d'affecter la croissance, comment être sûr que c'est vrai ? Puisque il y a eu des expériences qui ont été faites, on a vu que le mutant, il y avait moins de croissances, mais ça peut être pour tout un tas de raisons, peut-être parce que la division cellulaire est moins bonne, ça peut être parce que les, la nourriture est moins assimilée, parce que, bon voilà on est...

Et c'est d'ailleurs une de mes questions, comment vous testez la fiabilité en fait ?

Voilà, en fait on est euh on est euh la fiabilité ou la viabilité ?

Non la fiabilité des modèles qui sont euh ben par ordinateur ?

Ben non, ça c'est, les modèles non ben (soupirs) ça c'est, ça c'est un gros problème. Pour moi, c'est un gros problème parce que moi, j'avais tendance, quand je suis arrivée là, à ne rien croire, les prédictions ordinateur, je ne crois rien, mais, on ne peut pas vivre comme ça. On est obligé de se baser sur quelque chose. Et je vois bien que les gens avec qui je travaille maintenant y croient beaucoup. Et d'un autre côté, il faut faire des manip parce que sinon...

Et du coup, vous validez vos, comment vous validez vos résultats ? Ben, il faut à un moment donné...

Alors après les résultats, ils sont petits. Après, ce sont des petites expériences avec des petits résultats dans un contexte particulier donc moi, je, je on va voir ce que ça va donner, mais je voudrais montrer que telle mutation produit ça, avec tel ARN, dans ces conditions-là, quand on fait comme ça, quand on nourrit la mouche comme ça, enfin, à telle température. Euh alors quand on fait ça, alors on voit ça, et c'est significativement différent et donc il y a un effet de veille et ça repart.

Mais c'est dû au choix du modèle quand même qui a été utilisé par la machine ?

Non je ne pense pas.

Non ?

Je pense que euh (soupirs) euh je ne pense pas que le choix du modèle va influencer là-dessus. Il va juste euh... ce logiciel, il me permet juste d'écrire dans un article « j'ai choisi cette cible parce que le logiciel m'a dit que s'en était une », plutôt que d'écrire « j'ai choisi cette cible au pif et je ne peux pas justifier mon choix ». Vous voyez (rires), il faut justifier son choix et c'est une manière de justifier pour moi, ce choix, ce logiciel. (Silence) Euh moi, j'aimerais mieux, il me semble, que le logiciel. J'aimerais mieux un logiciel qui me sorte toutes les homologues, puis, parmi ces homologues, qu'il me dise lesquelles sont conservées me semble-t-il, mais bon, ce n'est pas le choix qu'on fait les gens qui l'ont... J'ai demandé plusieurs fois parce que c'est un logiciel qui est amélioré chaque, tout le temps. En quoi il est amélioré ? Comment on sait qu'il est amélioré ? Ça je ne sais pas. Ça, ce n'est pas des choses que moi, je suis capable de comprendre.

Et qui c'est qui l'améliore, c'est quand même les biologistes ?

Ben c'est des gens qui l'ont, ah non, c'est des bio-informaticiens, c'est des bio-informaticiens. Et je pense que les bio-informaticiens, ils sont informaticiens au départ.

Ils disent les mathématiciens quand même dans leur...

Ben oui parce que je pense que leur formation c'est ça.

(Acquiescement) Oui il doit y en avoir je pense.

C'est plutôt euh mathématiques et puis ils se dirigent très vite vers l'informatique. Alors, il y a des formations maintenant où ils essayent, puisqu'il y a beaucoup de biologistes qui se disent : « tiens moi, je ferais bien de la bio-informatique ». Mais comme il, on n'a pas les bases en mathématiques, et je pense que ça, ce n'est pas aussi, ça craint... Je pense que là, il y a un vrai gros problème. Voilà !

Et là, dans vos, dans votre laboratoire, la modélisation se fait avec ces machines, c'est une vraie collaboration avec le ...

(Acquiescement)

L'outil informatique fait partie de votre processus ?

(Acquiescement) Complètement ! Ouais complètement, ouais. Surtout là où je suis maintenant oui avec les, voilà.

Et ça a toujours été comme ça dans vos projets bien avant ?

Ben on a, on a ressenti le besoin ouais. On a vraiment besoin depuis plusieurs années de l'outil informatique et on ne sait pas l'utiliser. Là, c'est simple. Donc parfois, il y avait un... dans les équipes où j'ai été, on a eu la chance d'avoir un, entre guillemets, « un geek », enfin en tout cas, quelqu'un qui était intéressé par les ordinateurs et qui essayait et qui a fait des choses. Sinon, il y a pas mal de choses sur Internet hein où on rentre ses séquences, on rentre ses choses et puis, Internet sort des résultats. Évidemment, si on ne comprend pas ce qu'on fait, ça ne peut pas être aussi bien que si on comprend et comme on ne comprend pas.

Et ça, ça ne met pas le doute sur quand même sur la fiabilité de ce qu'il donne comme résultats ?

Ah ben si, il y a toujours un doute. Si. Mais on ... comment dire, on est conscient que ce n'est pas fiable hein tout ce qu'on a. Ce qui est fiable, euh c'est les petites expériences euh ce qui est important, c'est de s'assurer euh qu'on a une fiabilité directe entre une petite chose qu'on

fait et le petit résultat qui arrive tout de suite. Mais, dans la globalité euh de ce qu'on fait, on ne peut pas enfin, personne ne cherche je pense euh...

Oui dans ce local, dans ce fragment ?

Enfin, on fait au mieux, mais, ouais on fait au mieux, mais il y a des... d'ailleurs il y a pas, il y a des choses-là qui sortent, il y a des articles qui en ce moment sortent, où les gens ré analysent justement des données puisque maintenant on peut séquencer les génomes, les ARN, les machins, les trucs tout est, il y a des big data pour tout. Donc les gens les analysent par ordinateur et donc il y a des gens qui arrivent derrière qui refont les analyses par exemple puisque toutes les données elles, elles sont toutes publiques euh, elles sont toutes déposées... en libre accès. Et du coup qui disent : « Ah ben, non, là, voyez, si on ré analyse comme ça, on ne trouve pas pareil » et puis finalement, on est loin de de la biologie en fait. Et puis on est loin euh (silence) de...

D'accord. Et dans ce type de de recherche que vous décrivez, c'est quoi le plus difficile ? Vous pourriez le, pour vous ?

Le plus difficile ?

Qu'est-ce qui est le plus difficile dans, ce genre de, dans ce projet, les projets que vous décrivez, ce qui est le plus dur ?

Alors, je pense que c'est la biologie quand même. Je pense que ça va être vraiment de savoir quoi observer, et de l'observer. Parce que ça, ça reste difficile parce que ce n'est pas une machine, c'est une mouche.

C'est le choix de départ ?

Oui. Et aussi qu'on observe ; comment dire ? On est subjectif, on ne voit que ce qu'on veut voir, et euh... et ça, c'est une source euh donc d'erreurs et d'errements (rires) énormes, et du coup, voilà je, j'aurai, je lance des croisements, je sais que je veux regarder euh ce le... l'aspect des descendants de ces croisements et je ne sais pas ce qu'il faut que je regarde, et du coup, je regarde des trucs, je sais pas si c'est important ou pas, voilà, c'est ça la grosse difficulté. Je veux mesurer, compter, mais quoi, comment, on ne peut pas tout regarder, enfin voilà. C'est trouver le la petite accroche, ah oui ça, c'est différent, mais ça, oui, ça il faut que je regarde, il faut que je compte, mais tant que je, qu'on n'a pas trouvé là je suis euh... ouais, c'est ça qui est le plus difficile.

C'est difficile. Et dans ces projets, donc les mathématiques, j'ai, je les vois dans tout ce qui est mesure, dans tout ce qui est analyse aussi.

(Acquiescement)

Un membre qui fait des mathématiques, mais bon y a des mathématiques dedans, c'est tout le long du projet où il y a des phases, où euh... les mathématiques vont être beaucoup plus présentes ?

Ben, je pense oui... y a des... ben pour eux oui, pour eux... analyser certains résultats

Plutôt sur la fin ? Donc, après l'expérience ? Pendant ?

Oui, forcément, ouais, forcément. Euh ce qu'on pourrait faire, c'est regarder un article par exemple, et puis voir dedans hein ?

Oui, je prendrais bien, oui, une référence d'un article, où un texte de dépôts euh... si vous, si vous avez une référence à me donner, je regarderai bien avant.

Oui ben j'en ai, j'en ai plein, faudrait voir euh...

Ou par mail si, quand vous aurez l'occasion vous m'envoyer ?

Oui, je vais je vais regarder un truc, ouais. Je vais t'envoyer un truc, oui.

Et dans, dans vos projets-là, enfin dans vos... dans vos recherches, y a de la modélisation ?

Ben je ne sais pas ce qu'on appelle modélisation, mais je pense qu'y en a toujours, parce que déjà. Déjà, on dit qu'on travaille sur la drosophile, c'est déjà un modèle. Puisque les drosophiles qu'on a dans les laboratoires, forcément enfin, c'est des mouches, on les reconnaît bien, elles sont exactement comme celles de la nature, mais en réalité, elles sont complètement différentes, parce qu'elles se heurtent pas à, au milieu naturel. Elles sont dans les labos, c'est presque des clones, parce que depuis le temps qu'on a les mêmes souches, qu'on maintient tout le temps, euh... donc, nous on les utilise comme modèle. C'est-à-dire que, bien souvent, moi, les gens me demandent, de ma famille, ils me demandent, « Ben, alors ces mouches, qu'est-ce qu'elles te, qu'est-ce que tu leur trouves à tes mouches », et en fait, je leur trouve rien, et je connais pas, les insectes, je n'y connais rien, je sais pas qu'est-ce que c'est une mouche, juste pour moi c'est euh... un outil de travail, voilà, c'est un outil de travail, c'est ce qui est l'enveloppe biologique qui me permet de faire de la biologie. Donc euh... déjà c'est un modèle, d'ailleurs on appelle ça un modèle. On a des modèles animaux, c'est la drosophile, c'est la souris, c'est le rat, c'est euh la levure, c'est des modèles en génétique, voilà ! Et on se dit que si on trouve un résultat chez la drosophile, chez la levure, chez la souris, on pense, on suppose que ça va avoir, être une sorte d'universalité, ça va être vrai, un peu partout. Ben par exemple, les micros ARN, il y en a chez tous les organismes, et euh... on sait déjà qu'ils fonctionnent un peu différemment dans chaque organisme, mais ils sont là, et ils régulent les gènes, et il y a quelque chose en commun, et du coup, les résultats qu'on peut avoir chez un organisme ont une certaine validité chez tous les organismes, même si euh... même si euh... des tas de choses changent, par exemple, nos membres nous servent à se mouvoir, les membres des drosophiles qui sont très différents des nôtres servent aussi à la même chose. Une fois qu'on a compris comment marche notre articulation, même si les drosophiles n'ont pas d'os ni rien, il y a quelque chose en commun. Enfin voilà.

Bon, c'est un peu pour ça que c'est un modèle. Voilà. Donc déjà, ces animaux sont des modèles, et puis après, je sais pas si, on se fait toujours des espèces de... de petites théories qu'on va tester en fait même si c'est euh... très petite échelle, chaque fois qu'on lance une petite expérience, on va faire une digestion, on va mettre sur un gel, voir ce que ça donne, on a imaginé euh... déjà le résultat, et on teste si notre modèle va être valide ou si c'est l'autre qui va marcher. C'est tout... tout est un peu comme ça.

Par l'expérience.

Oui. Ben nous, c'est expérimental hein. C'est vraiment... l'expérience est reine. Euh... donc ouais, c'est ça le truc. Et d'ailleurs, ça nous pose un problème puisque on a ça... on est élevé comme ça, c'est notre credo, la science est expérimentale. Et du coup, avec toutes ces big

data, et ces analyses informatiques, on s'éloigne de cette science expérimentale et oui, ça pose des difficultés quoi.

Et comment vous définiriez un processus de modélisation ?

Je ne sais pas. Le processus de modélisation ? Ah ben, c'est un truc intellectuel quoi. C'est euh...

Ce serait plus théorique ?

Oui, c'est qu'on essaye de se donner une explication euh... cohérente, soit de ce qu'on a observé, euh... soit de ce qu'on va tester, d'ailleurs les deux à la fois, souvent puisque c'est...

Il y a des allers retours.

Voilà, on a fait ça hein. Donc, on pense que c'est comme ça, maintenant on va voir si c'est comme ci ou comme ça, voilà.

(Acquiescement) puis vous en faites quand même ?

De ça ?

Oui.

On le fait tout le temps.

Tout le temps ?

On le fait tout le temps, oui. L'idéal, quand on écrit un article, d'ailleurs, c'est... c'est vers ça qu'on tend, c'est... On aime bien y arriver, c'est que la dernière figure soit le modèle, (rires) modèle proposé, il faut, et puis qu'on ait un beau schéma avec des flèches, des trucs et pas mal d'explications à proposer.

Il y a presque plus de plaisir d'avoir une, un modèle théorique ou euh le plaisir d'avoir réussi l'expérience vraiment ? Enfin Le résultat... le résultat le plus sympa, ça serait... c'est quoi, dans ces cas-là ? C'est le modèle ou c'est le résultat réel de ce qui est obtenu ?

Ah ! Ben je ne sais pas. Parce que sur le coup, euh /// réussir une expérience, c'est toujours sympa sur le coup, mais c'est comme jouer à un jeu, ça, c'est pas... non arriver à élaborer un modèle je pense que c'est le plus grand accomplissement quand même, pour un chercheur, vous voyez, c'est ///. Ouais, c'est qu'on a réussi à faire plusieurs petites choses qui aboutissent à une construction, et après, on va être cité plus pour ce modèle que pour des petites expériences, euh voilà j'imagine hein c'est. Mais, dit comme ça... (Rires)

J'ai presque fini, je crois avoir fait le tour de mes questions ...Comme c'était assez complet dans le, dans la description et je suis effectivement intéressée pour regarder un article.

Oui.

Pour revoir un petit peu tout ça. C'est, ça donne envie, en plus, d'en savoir plus (rires). Je retiens quand même, qu'on est dans un processus de modélisation, avec, vraiment, l'outil informatique dans votre laboratoire.

(Acquiescement)

L'outil informatique est vraiment utilisé dans le processus de modélisation.

C'est... enfin, c'est l'informatique qui est beaucoup utilisée.

Oui. Mais, je pense qu'on ne peut plus, dans notre domaine, en biologie moléculaire génétique euh... on, on ne peut pas faire autrement. Et on est vachement handicapé parce qu'on n'a pas les compétences, parce qu'on n'a pas fait des mathématiques. Franchement, il y a des gens, ça existe, des gens qui font des études de math et qui euh... au moment de la thèse ou se

disent, « tiens, je ferais bien de la bio » et ils arrivent très bien puisque c'est facile de se remettre au niveau de la biologie, y a très peu de chose à savoir, et il faut surtout se poser des questions en fait, il faut surtout être curieux ; après, on regarde dans les livres, mais même quand on fait de la biologie, y a plein de choses qu'on sait pas, tout ce qui ne nous intéresse pas, on le met de côté euh...

(Acquiescement)

On a une vision de la vie, pour moi la biologie c'est la vie c'est que... les gènes, l'ADN, l'ARN, voilà, le reste, j'ignore ; et y en a d'autres qui vont trouver que le plus important c'est les membranes et les échanges entre cellules, enfin vous voyez !

Avoir plus de bagages mathématiques, ça serait utile ?

Oh oui, ah oui. Mais en fait, on se rend compte, en plus, que les... il y a pas mal de jeunes qui sont attirés par la biologie, parce que justement, ils ont du mal en mathématique et en science, la biologie euh... avant, enfin moi quand j'ai commencé, on faisait, je me rappelle, on observait au microscope, on faisait beaucoup de dessins, c'était un, presque une science contemplative, on décrivait des choses, on dessinait, on regardait, c'était beau, les plantes, des fleurs, les petits animaux, tout ça. Mais maintenant, alors il y a toujours probablement des branches qui sont comme ça en zoologie, mais en biologie moléculaire, c'est plus du tout comme ça, c'est pas du tout comme ça. Et euh... c'est très technique, technologique, euh... donc les mathématiques, oui moi, euh je sais qu'on se mettrait à dos tous les étudiants, mais je pense qu'il faut faire des études de mathématiques.

Et elles vous aideraient où, par exemple, dans le projet, elles manquent quand ? Enfin, le bagage mathématique il manque quand... pour enfin à quel endroit ?

Ben justement, pour pouvoir, pour plus, pour pas être euh... pour ne pas dépendre des gens qui eux comprennent pour faire des choses, ah c'est, c'est plus technique qu'autre chose hein, mais c'est...

Et c'est vrai pour le choix du modèle, finalement ?

Par exemple, euh... pour l'analyse, la manière d'analyser les choses, parce que quand on dit « Ah, ben y a des mouches qui ont des yeux rouges, et puis y en a qui ont des yeux blancs, et puis on a l'impression qu'y en a quelques-unes qui ont les yeux oranges », ça a pas le même poids que quand on dit, y a tant de pour cent, on fait des beaux machins, des fromages, des bidules et on voit que c'est différent. Enfin, vous voyez, et on s'affranchit en fait, je pense que les mathématiques permettent d'une certaine manière de s'affranchir d'une certaine subjectivité, mais... et parfois d'ailleurs, parfois en analysant les chiffres qui sont issus de nos expériences, on voit des choses qui nous échappent bien sûr, mais si on les analyse mathématiquement, vous voyez ?

Oui. Ça permet d'avancer, d'affiner ? Enfin pas mal de choses.

Oui ça permet d'avancer, d'affiner, et puis de voir des fois arriver, émerger des choses qui n'émergent pas. Quand on analyse, la vie c'est complexe, la biologie c'est une cellule c'est complexe, vraiment dans le sens euh... je ne veux pas dire compliqué, je veux dire vraiment c'est un truc complexe et...Et y a que, il y a ouais, y a qu'en modélisant justement qu'on peut arriver à comprendre comment ça marche. Sinon, on ne va pas comprendre comment ça marche on va décrire. Ouais, c'est bien aussi !

Et modéliser veut dire quand même faire des hypothèses simplificatrices.

Voilà... alors, on va faire ça, et puis aussi, modéliser même si on n'est plus connecté avec la biologie réelle, ben on va partir peut-être en vrille, peut-être imaginer un monde complètement artificiel qui va plus être connecté donc, là, je sais pas, je sais pas comment garder euh... comment garder la connexion entre les modèles mathématiques complexes ; y a des gens qui font vraiment ça hein de la, juste des modèles mathématiques, c'est leur c'est leur travail quoi ! C'est leur... c'est comme ça qu'ils font de la biologie. Comment ils savent si c'est connecté au réel ou pas, est-ce que ça pose un problème, je ne sais pas du tout. Mais on peut, en biologie, en génétique du développement, donc développement des organismes à partir d'un embryon, donc le spermatozoïde, il a fécondé l'ovule, et à partir de là, il se passe des choses, y a des réarrangements, l'ovule se met... l'œuf se met à se diviser tout ça, et il se passe des choses euh... qui sont physiques et qui peuvent être modélisées par des modèles mathématiques et physiques, et les gens qui ont fait ce genre de modèles avec des gradients, des choses comme ça, eh ben, ils ont... comment dire ? Ils ont... leurs modèles ont permis, ensuite, de comprendre comment se passait vraiment la biologie. Les gradients, par exemple de l'œuf euh... a été modélisé avant d'être véritablement, expérimentalement démontré. Vous voyez, donc y a eu des choses.

C'est le modèle qui a permis de...

Voilà, voilà, voilà.

De proposer l'expérience pour voir.

Voilà, tout à fait. Donc, c'est important d'être capable de faire ce modèle, ben il faut être un mathéma, il faut être mathématicien, il faut avoir euh la formation pour, quoi. Donc, ouais, moi, moi je me trouve handicapée euh... de pas comprendre assez les mathématiques, et euh... je pense que je les aurais compris, j'étais bonne en math quoi j'étais jeune hein, euh... c'est qu'on n'a pas la formation du tout quoi ! On nous fait des mathématiques de... de...

De techniciens ?

De débiles, Ouais enfin bon. Et c'est vraiment dommage, voilà !

Merci.

Annexe 5 : Entretien avec le chercheur B₄

Les propos de l'interviewer sont en gras.

Merci déjà de m'accueillir, donc en fait, c'est dans le cadre des travaux de ma thèse en didactique pour mieux comprendre ce qui se passe dans les classes. J'ai besoin de comprendre sur des questions de mathématiques appliquées ce qui se passe dans les laboratoires de recherche en fait. Bon, les données recueillies donc restent anonymes, enfin, je le ferai passer après, je n'ai pas fait encore les chartes, etc. Donc pour commencer, j'aurai besoin de connaître votre parcours universitaire.

Euh donc alors ben, après le bac, j'ai fait une, une classe prépa BCPST, hein donc prépa bio, donc de 95 à 97 et puis je suis entré à l'ENS en 97, donc j'ai fait ma scolarité donc de 97 à 2001. Euh... j'ai commencé ma thèse en 2001, la rentrée 2001 à Toulouse, donc de 2001 jusqu'à l'automne 2004 euh donc une thèse en... en biologie moléculaire. Après avoir soutenu ma thèse, je suis resté 2-3 mois de plus dans mon labo, je suis parti en décembre. Et donc je suis allé aux États-Unis dans un, pour faire mon stage postdoctoral donc dans une, dans une université du Massachusetts. Et là, j'y ai passé 4 ans de janvier 2005 à janvier 2009. Et puis, et puis entre-temps donc en, au printemps 2008, j'ai passé le concours du CNRS, donc j'ai eu le poste en, donc en 2008, mais j'ai, j'ai retardé mon incorporation puisque j'avais des trucs à finir aux États-Unis donc je suis rentré en... en janvier 2009 aux États... Euh... en France.

Et après votre parcours professionnel ?

Et alors, donc du coup, quand je suis rentré en en en 2009, d'abord, j'ai, je suis rentré, en fait, dans l'institut où j'avais fait ma thèse à Toulouse et euh... j'ai, j'étais donc chargé de recherche, mais j'étais pas directeur d'équipe et euh, j'avais envie de, j'avais des projets assez gros, donc j'avais envie d'avoir un peu de monde pour m'aider donc du coup il fallait que j'ai une équipe et euh, ça n'a pas été possible dans mon institut de Toulouse, manque de place surtout. Et euh donc il a... il a fallu que je, que je cherche un nouvel endroit, donc ça c'est, c'est plus ou moins au printemps à l'été 2010 que, que ça s'est, que ça s'est clarifié. Donc du coup au printemps 2010 donc j'ai été en contact avec une université aux États-Unis à Salt Lake City, qui, qui m'avait fait une offre qu'on était en train de négocier et puis euh, mais bon, j'avais pas tellement envie de retourner aux États-Unis et euh, j'ai appris un peu accidentellement qu'y avait cet institut ici à Montpellier, qui allait aussi ouvrir, enfin, avait de la place pour accueillir une jeune équipe. Et donc, je me suis fait confirmer par les gens d'ici et donc j'ai candidaté ben, les candidatures, je crois, ils les prenaient pendant l'été 2010, donc après, il y a eu un entretien oral ici, à l'automne et donc j'ai eu le truc, donc, du coup, j'ai pu dire non aux Américains, puis, donc j'ai eu le poste ici, ouais, je l'ai appris en décembre 2010. Et pareil, il fallait que je finisse un peu des trucs là-bas à Toulouse avant de déménager, donc du coup je, je me suis installé ici à l'automne 2011. Voilà donc depuis, donc depuis je suis chef d'équipe ici, LGH.

Ah d'accord. Donc, j'imagine que vous avez fait des maths dans votre formation ?

Oui, enfin, ça fait, ça fait bien longtemps que ça s'est, que j'en fais plus trop, mais oui... donc oui en prépa et puis un chouïa à l'ENS peut-être. Oui.

Alors qu'est-ce... De votre point de vue, ça, comment, qu'est-ce que vous diriez à c'est quoi faire des mathématiques ?

Euh, ben, de mon point de vue à moi, c'est essentiellement ben le raisonnement, la démonstration pour, d'ailleurs y a un truc un peu marrant, c'est que les... quand y a des problèmes par exemple très calculatoires, les physiciens disent « oh, ça, c'est pas intéressant, c'est des maths », mais les mathématiciens disent « oh, ça, c'est pas intéressant, c'est des calculs appliqués, c'est de la physique quoi ! », euh du coup, ils diront : « Les maths, c'est beaucoup plus qu'un simple calcul », les additions et les soustractions c'est... et de démonstrations et des raisonnements par exemple, en algèbre, en géométrie des choses qui nécessitent pas forcément de manipuler des nombres, par exemple.

D'accord, moi pour mieux voir en fait quand interviennent des mathématiques dans vos pratiques, je vais vous demander si vous pouvez me décrire un projet de recherche en fait. Genre des choses de ce qu'on fait au laboratoire ?

Celui, voilà que... que vous avez déjà fait ou vous êtes en train de faire et... avec donc, comment il a commencé, qu'est-ce qui a été, qu'est-ce qui a initié ce projet, la question de départ et puis essayer de me le décrire, comme ça, je verrai comment interviennent les mathématiques.

D'accord, sachant, oui sachant qu'elles interviennent très peu quand même dans, dans ce qu'on fait au quotidien, il se trouve, mais là, c'est tout à fait accidentel, que ce matin justement, j'étais en train de faire un truc pour aider un collègue qui travaille dans une autre équipe dans le même institut, qui, qui avait un petit problème de de dénombrement, et ça, c'est en fait des probabilités de terminale et il est plus âgé que moi, donc sa terminale était encore plus ancienne que la mienne et donc (rires), du coup, c'est... c'est à moi qu'il a demandé donc. Et ça m'a pris un peu de temps pour résoudre le truc et c'est peut-être, c'est marrant que j'ai fait ça aujourd'hui puisque c'est peut-être... euh le, le problème sur lequel j'ai eu le plus à faire des maths, là, c'est uniquement des maths quoi, enfin, des maths de terminale. Donc, c'est, dans ce qu'on fait, dans ce qu'on fait après au quotidien au labo, ben, euh, on pose des questions biologiques hein, la question initiale c'est un paradoxe à résoudre en biologie ou enfin, ouais. Nous, on travaille surtout sur un paradoxe donné, mais sinon, les gens se posent une question en biologie, et après, il s'agit de trouver une méthode expérimentale qui permette de tester euh les hypothèses et puis euh, et après d'interpréter un résultat d'expérience et en général, c'est là qu'interviennent les maths quand on en fait. C'est, c'est dans l'interprétation des résultats expérimentaux, euh...

Mais pas dans les choix ? Là quand on a des questions de départ, il faut faire des choix et dans ces choix-là, est-ce qu'il y a des choix où les mathématiques peuvent intervenir ?

Là, je n'aurai pas d'exemple à vous donner. Non, pas dans ce qu'on fait nous ici et puis même si je pense plus généralement à ce qui se fait dans l'institut au niveau des équipes, je ne pense pas, euh...

Donc du coup, vos choix vous les, vous les faites par rapport à quoi ?

Euh... ben, je vais peut-être prendre un exemple parce que ça, c'est un petit peu abstrait, c'est euh... des, sur des choses qui ont été publiées, par exemple des données contradictoires entre elles, enfin, d'un point de vue biologique hein des, des choses qui d'après un, un certain type de raisonnement devraient aboutir à telles implications et on observe, on observe le contraire. Euh et euh et donc du coup, il s'agit de, de comprendre ce qui se passe et euh et donc... ben, là, dans le cas qui nous concerne tout particulièrement dans l'équipe, du coup on a, on a imaginé d'autres hypothèses qui pourraient expliquer donc le, les observations et qui ne font pas appel donc à l'hypothèse qui, avait été proposée précédemment. Et donc, dans notre cas, il s'agit de... d'expliquer pourquoi certaines régions du génome chez les animaux sont très conservées, c'est-à-dire que elles, les génomes mutent aléatoirement de manière pratiquement spontanée, enfin, il y a des mutations spontanées et puis d'autres qui seront induites par des, par des agressions extérieures. Et donc, de manière générale, les génomes tendent à diverger et il se trouve que les parties du génome qui sont fonctionnelles, qui codent des éléments importants, euh si elles sont mutées, du coup ben l'organisme, enfin, la bestiole qui a hérité de cette mutation va être moins efficace, va être moins viable, se reproduire moins et donc du coup, elle va tendre à être éliminée par la sélection naturelle, et donc, c'est ce qui fait que du coup dans les génomes, il y a des régions qui sont particulièrement conservées, c'est pas qu'elles ont moins muté que le reste, c'est qu'en fait, elles ont muté, sans doute, à la même fréquence, mais que les variants, ceux qui ont hérités de cette mutation, eux, ils sont éliminés de la population naturelle parce que ils sont moins aptes. Et euh et donc comme ça, on observe dans les génomes ben des pics de conservations et donc, on peut quantifier les conservations de différentes manières en mesurant un peu le taux de, le taux de mutation à part donc celui qui reste après sélection. Et donc, on voit des pics de conservation qui en général, témoignent de la fonctionnalité des éléments qui sont, et donc nous, le problème qui nous intéresse, c'est sur un certain type d'éléments qui sont, qu'on a toujours inter -, enfin leur conservation a toujours été interprétée de la même manière, c'est que c'était des, des éléments qui interagissaient avec d'autres molécules. Euh, mais on se rend compte que l'effet de ces autres molécules sur ces éléments est finalement très faible par rapport à ce qu'on connaît autrement de la, de la robustesse, de ces, de ces processus et donc ces molécules vont sans doute interagir, mais elles ne vont pas vraiment avoir d'effet sur le, la réponse macroscopique du système. Et donc, du coup, on cherche à comprendre pourquoi ces éléments ont été conservés, et donc, comme ça, on a, on a voulu, par exemple, évaluer la robustesse des voies biologiques vis-à-vis de ces petites perturbations, on a fait ça en mesurant les variabilités d'expressions des gènes entre individus sauvages, des individus qui n'ont pas de de défaut marqué, euh et on s'aperçoit que l'expression des gènes euh changent énormément. Par exemple, entre vous et moi, pour un type cellulaire donné, un gène donné, il va y avoir beaucoup de de variabilités d'expression alors que pourtant on se ressemble beaucoup, quoi : deux bras, deux jambes, etc. Donc il y a, y a beaucoup de choses en biologie comme ça, qui, qui sont robustes parce que les, toutes ces petites fluctuations à l'échelle microscopique sont en fait tamponnées avant de, d'aboutir à l'échelle macroscopique. Et donc, une manière d'évaluer cette robustesse, en fait, c'est de d'évaluer ben la variabilité entre individus qui eux, sont de de mêmes aspects et donc ça nous donne finalement un minérant de la robustesse des systèmes biologiques vis-à-vis des perturbations d'expression

des gènes. Donc ça, c'est une expérience qu'on a faite, une autre ben, c'est une analyse dont B. a été responsable, B. qui est assis derrière vous. Euh, c'était de voir si s'il y avait pas aussi des faux positifs dans ces... dans cette identification des éléments très conservés dans le génome. Et euh, il s'est aperçu qu'il y a des éléments, comme ça, qui sont très conservés dans le génome, jusqu'ici, on avait toujours cru qu'ils étaient conservés parce qu'ils avaient besoin d'interagir avec ces, enfin les autres molécules, en fait, B. s'est aperçu qu'il y avait d'autres nombreux exemples où l'élément est conservé, mais la molécule elle-même, n'est pas aussi bien conservée, c'est-à-dire que on trouve cet élément préservé également dans des espèces qui n'ont pas la molécule. Donc, clairement, ce n'est pas elle qui est responsable de la conservation. Donc là, là pour le coup ça a impliqué plutôt des approches de l'informatique, de comparaison des séquences des génomes, euh après, les des mathématiques à niveau très très basique, alors c'est du comptage, du dénombrement euh. Tu sais, c'est des choses vraiment très simples en général et puis euh, ben, un autre projet dont s'occupe plus particulièrement N., là, qui est... qui est derrière vous. Qui était de voir s'il ne doit pas y avoir une autre fonction et aussi dans le cas où, effectivement, les 2 molécules interagissent. Euh, une autre fonction que celle qu'on avait interprétée, qui était que la molécule vient réguler euh, la cible. En fait, euh, c'est la cible qui régule l'autre molécule. Finalement, la situation est peut-être asymétrique. Et donc, pour répondre à cette question, donc N. a fait des mesures de l'abondance dans les cellules des différents types de molécules pour voir qui était en excès, pour voir s'il ne pouvait pas y avoir une petite ration, donc une, un épongeage de l'une par l'autre, euh donc, là, ça se fait avec des méthodes de biologie moléculaire. Euh qu'il faut après calibrer parce qu'il y a toutes sortes de biais dans les, les manip expérimentales qui font qu'on va avoir tendance à surestimer ou sous-estimer certaines classes de molécules, euh des choses qui peuvent être aussi abondantes au départ, ne vont pas forcément donner le même signal après dans l'appareil de mesure parce que il y a plein de biais donc dans les mesures. Et donc N. a calibré ces mesures par des, avec des molécules synthétiques introduites en quantité contrôlée dans l'échantillon, de façon à pouvoir avoir une mesure comme ça de ces, de ces variations.

D'accord. Donc les mathématiques là, c'est plus un outil, en fait.

Oui, dans ce qu'on fait nous, c'est vraiment un outil, c'est, c'est rarement, c'est rarement à la base du problème qu'on se pose.

Donc les mathématiques n'interviennent pas au départ dans la modélisation ?

Dans ce qu'on fait nous, non.

Non ?

À moins d'avoir vraiment une définition très généreuse des mathématiques, qui est, raisonnement logique quoi, implication euh, ce genre de chose quoi. Pour lesquelles, bon, à partir du moment où c'est de la logique, on peut dire que c'est des maths et alors dans ce cas, effectivement nous, on fait appel beaucoup à la logique, effectivement.

Et pour tester la, la validité par exemple de vos résultats, donc, il y a le retour à l'expérience, mais, j'imagine que vous utilisez aussi de la simulation et des...

Euh, dans quelques rares cas, oui, effectivement, et là un problème qui se pose, c'est de d'avoir, de bien trouver, enfin, quand on simule, voilà, il faut simuler par quelque chose qui est censé récapituler un peu les caractéristiques du jeu de données réelles et, et ce n'est pas toujours euh, pas toujours évident de trouver. Après ça, je peux vous donner un exemple, c'était là, c'était en collaboration avec une équipe, une autre équipe de l'institut. On avait identifié des éléments, qui eux, les intéressaient dans le génome, vers le génome d'une nématode, donc la nématode, c'est un petit ver. Ils se sont dits : « ben est-ce que ces éléments du génome sont associés à certains autres éléments du génome ? » Par exemple, est-ce qu'ils se trouvent à proximité des gènes ? Est-ce qu'ils se trouvent avec des, à proximité de modification chimique de, de l'ADN ou des protéines associées à l'ADN ? Et euh et donc... quand on a fait l'analyse, on s'est aperçu qu'effectivement, assez souvent, ces, régions du génome tendaient à se trouver au même endroit que... à être enrichis en certaines modifications chimiques de, de protéines associées à l'ADN. Euh, mais, mais, là encore, il peut y avoir toute sorte de biais, par exemple dans la façon dont nous, on a identifié ces régions du génome, on les a, on les a identifiées avec une méthode qui va, par exemple, exclure certaines régions du génome, donc qui va, donc du coup, on va se retrouver enrichis dans certaines régions et de la même manière, les gens qui avaient analysé ces modifications chimiques des protéines associées à l'ADN ont aussi dû exclure certaines parties du génome, donc, finalement, peut-être qu'on a tous les 2 enrichis dans la même région et que du coup c'est peut-être un peu à cause de ça, qu' on retrouve des associations, en fait, qui seraient artéfactuelles. Et donc, on avait d'abord voulu faire une simulation avec des morceaux du génome pris aléatoirement donc piochés au hasard dans le génome, des éléments qui auraient la même taille que ceux qu'on avait effectivement trouvés par l'expérience et voir si, quand on les prend au hasard, ils tendent à se retrouver euh à peu près aux mêmes distances de ces autres modifications qui étaient connues ou s'ils sont plus loin, etc., etc. Et là, on s'était aperçu qu'il y avait vraiment un pic aussi sur ces éléments pris au hasard, qui tendaient aussi à être associés aux autres caractéristiques du génome. Euh on s'est, on s'est rapidement aperçu que c'était parce que les éléments qu'on avait identifiés dans certaines régions du génome étaient tellement denses, il y en avait tellement, que finalement, quand on prenait au hasard, bien souvent, on retombait sur les mêmes. Quand on piochait au hasard, finalement de piocher au hasard, c'est-à-dire, une séquence prise au hasard n'est pas forcément non fonctionnelle, en fait, une séquence prise au hasard peut être, peut avoir les mêmes caractéristiques que la vraie puisque, ça peut être la vraie juste par hasard. Et dans les régions où il y a beaucoup de vraies finalement, on est souvent tombé là-dessus. Et donc du coup, il a fallu qu'on refasse cette simulation-là, en excluant volontairement toutes les vraies séquences qu'on avait trouvées dans, dans le génome et en allant piocher au hasard dans les trous dans ce qu'il y avait entre. Et là, du coup, effectivement, ce pic avait tendance à disparaître. Donc, voilà ça c'est un cas de simulation qu'on a fait, là du coup c'était du tirage aléatoire dans le génome.

D'accord, et donc toujours avec l'informatique.... enfin, moi je ne sais pas, c'est pour ça que je vais le dire (rires), donc il y a des expériences, vous récoltez forcément des données.

Oui, oui.

Et vous les, vous ne les utilisez pas que par expérience ? À un moment donné il faut voir ce que ça peut généraliser ?

Oui, oui. Euh, tout à fait, et là on bénéficie d'un, d'une des avancées technologiques, là, dans le domaine de la biologie moléculaire qui est les séquençages des génomes. Les premiers génomes chez les animaux ont été séquencés, euh, ben autour de l'année 2000 quoi, enfin, la souris, le rat, l'homme, tout ça c'est apparu à peu près à cette époque-là. Depuis ça s'est beaucoup amplifié parce que les techniques de séquençage se sont améliorées et sont devenues moins cher aussi, et donc, du coup, ça devient vraiment beaucoup plus facile maintenant de séquencer les génomes de beaucoup d'espèces. Je parle des animaux, c'est pareil chez les bactéries, chez les plantes, chez les champignons. Euh et donc, maintenant, on a vraiment une vraie richesse comme ça, de séquences de de de génomes et c'est vrai que maintenant, c'est devenu très facile quand on a identifié un élément fonctionnel, on ajoute telle ou telle chose sur telle espèce, c'est très facile à aller après vérifier si la même chose existe dans d'autres espèces. Donc ça, c'est vrai, évidemment on a l'ordinateur, qui facilite beaucoup la vie parce qu'y a beaucoup d'expériences, par exemple, qui, il y a 30 ans, enfin, se faisaient expérimentalement c'est-à-dire à la paillasse. C'était par exemple, quand on voulait savoir si une certaine séquence existait dans un génome, on ne disposait pas de la séquence de génome donc il y avait des techniques à base de, de complémentarité de séquences entre les 2 brins d'ADN, il fallait en fait faire donc une sonde spécifique, donc un des brins d'ADN qui va aller pouvoir reconnaître l'autre, il fallait le marquer radioactivement donc c'est des manip, en plus, qui sont un petit peu dangereuses. Et puis ça donnait des signaux, qui des fois étaient un peu difficiles à interpréter si les signaux étaient un peu faibles, on ne pouvait pas être sûr de la spécificité de l'interaction entre la sonde et puis sa cible. Maintenant, chercher une séquence dans un génome, c'est beaucoup plus simple, c'est une recherche de chaîne de caractères dans un fichier, dans un fichier texte. Euh et ça a, en plus, l'avantage d'être très très rigoureusement défini. Euh par exemple, le A s'hybride avec le T, et le G avec le C, vous savez dans la double hélice d'ADN, quand vous avez une interaction un peu faible, ça peut être parce qu'il y a quelquefois le A qui est en face d'autre chose qu'un T ou le C ou... en face d'autre chose qu'un G. Et quand même vous allez avoir un petit signal alors que rechercher une chaîne de caractères dans un fichier informatique, et on peut vraiment dire, très précisément, je veux AGGCT et il va me trouver que les AGGCT et tous les AGGCT. Euh donc ça, c'est des choses qui ont vraiment révolutionné la pratique de la biologie, chercher comme ça des séquences dans des nouveaux génomes pour essayer de généraliser les découvertes euh maintenant, ça se fait au, ça se fait enfin en 2 minutes à l'ordinateur avec un résultat très clair, très, enfin très peu ambigu alors qu'avant, expérimentalement c'était très compliqué et puis très ambigu.

Et des statistiques, vous n'utilisez pas ?

Si, on est on est fatalement obligé de, d'en utiliser puisque, quand on fait des sciences expérimentales, en fait on sait très bien que quand on fait 2 fois la même expérience, même avec le meilleur soin du monde, si en fait, si on reproduit tous les gestes à l'identique entre, à partir du même échantillon, on obtiendra jamais le même résultat numérique avec tous les chiffres après la virgule, il y a toujours des petites fluctuations et des choses qui changent et euh et bien entendu, ça peut être un problème quand on veut comparer 2 conditions par

exemple, 2 conditions expérimentales on veut voir l'effet d'une condition sur la réponse du système biologique. On sait, de toute façon, qu'il y aura une différence puisque je vous disais même quand on fait 2 fois dans les mêmes conditions, on a toujours des petites différences, donc si on fait 2 fois dans des conditions différentes, a fortiori, on a les différences. Et toute la question après c'est de savoir si cette différence qu'on mesure, si elle est intrinsèque à la variabilité du système, c'est-à-dire si on faisait 2 fois dans les mêmes conditions, on aurait la même variabilité ou si elle est vraiment due aux facteurs dont on veut étudier les faits. Donc, c'est pour ça que du coup, il faut faire plusieurs réplicats de la mesure dans une certaine condition, plusieurs réplicats de la mesure dans l'autre condition, et après donc, on utilise des tests statistiques qui nous permettent de dire si la variabilité à l'intérieur de chaque groupe suffit à expliquer les différences qu'on observe entre les 2 groupes ou si, au contraire, la différence entre les deux groupes est telle qu'il est vraiment très peu probable que la différence mesurée est due à cette variabilité euh de la mesure, donc ça oui, ça...

Et là pour ces tests, vous êtes amené à faire des choix, des choix de tests.

Oui, bien sûr, parce qu'il y a des conditions d'application, bon dans le cas dont je viens de vous parler, par exemple, le cas le plus simple, on a un groupe de réplicats dans une condition, un groupe, de réplicats dans l'autre, donc on a une série de nombres à comparer avec une autre série de nombres. Euh et on veut savoir si la différence est due à un effet systématique du facteur ou si c'est dû au bruit de la manip, là le test le plus standard c'est d'utiliser l'outil test, mais l'outil test il a des conditions d'application, donc, dans sa version historique, le test, le students, il fallait, d'une part il faut que les données soient distribuées normalement, et d'autre part, il fallait aussi dans la version historique que les variants soient, on appelle ça homogène, enfin, un truc très similaire. Euh, c'est pas toujours vérifié en biologie déjà, parce qu'il y a des mesures qu'on fait en biologie ou par construction, finalement, ce qu'on mesure ce n'est pas la grandeur elle-même, mais c'est un logarithme de la grandeur. Ou au contraire, quelque chose qui est là, en puissance de la grandeur, donc du coup, ça va distordre la distribution. Et donc voilà, donc il faut vérifier ça donc après si les variants sont pas homogènes, mais que les données sont distribuées d'une façon normale, utiliser la, enfin, donc une version modifiée de l'outil test qui est la version donc à variance hétérogène. Et si les données ne suivent pas une voie normale, bon on peut essayer après, des transformations mathématiques qui peuvent des fois rendre les données normales, donc par exemple prendre le log des valeurs au lieu de prendre les valeurs elles-mêmes, ce qui arrive souvent, enfin, quand effectivement quand on travaille sur des puissances de la valeur, en fonction d'une, vu la façon dont les choses ont été mesurées. Du coup, de prendre le log, ça peut effectivement resserrer les valeurs parce que, de manière générale, ce qui éloigne souvent de la normalité c'est ce qu'on appelle en anglais les « outliers », donc des points qui sont vraiment très éloignés du reste de la distribution, pour toutes sortes de raisons. Peut-être qu'effectivement c'était un point qui était aberrant, il y a une erreur ou peut-être, c'est juste dans la variabilité intrinsèque de de l'échantillon. On essaye de prendre les logarithmes en général, ça va tendre à tout, tout rassembler puisque y a l'autre qui écrase les variations. Et donc, il n'est pas rare que de travailler sur les logarithmes des valeurs ou des valeurs elles-mêmes, on s'aperçoive, que là, du coup, les variances deviennent, enfin, pardon, que les données suivent à peu près une loi normale et là, du coup, on peut utiliser l'outil test. Évidemment, si l'outil test nous dit que les logs sont significativement différents, alors les valeurs non transformées le sont aussi,

simplement on évalue avec une meilleure précision, là ce qu'on appelle la P-value, donc la probabilité que la différence soit due juste à cette, à cette variabilité expérimentale.

Donc là les maths sont quand même indispensables, là pour la suite ?

Oui, mais bon, c'est des maths, enfin c'est des maths de niveau collège, quand même, c'est, enfin le lycée quoi, le logarithme. Oui absolument, ça, c'est sûr que les maths... De toute façon, à partir du moment où on fait des sciences expérimentales, il faut faire des statistiques puisque voilà, comme je le disais, de toute façon, la réponse expérimentale, elle est, par essence, elle est non reproductible, donc il faut avoir une idée de la, de la reproductivité de la mesure.

Et avec des choix de modèles finalement quand même, des choix de modèles mathématiques ?

Oui, alors, en général, ben là, pour ce qu'on fait en biologie moléculaire, le choix du modèle, ça se restreint souvent à dire : « est-ce que les données suivent une loi normale ou pas ? Est-ce que je peux utiliser l'outil test ou pas ? » L'outil test ou alors, des variantes un peu plus élaborées, tel que le test ANOVA, par exemple, quand on a plusieurs facteurs à tester. J'ai rarement vu, cela dit, ça arrive de temps en temps, d'être obligé de, par exemple, d'utiliser une loi de Poisson, par exemple, en fonction, effectivement, en fonction du scénario qu'on imagine du processus moléculaire derrière, est-ce qu'il faut imaginer des molécules qui, qui interagissent puis d'un coup qui se décrochent de façon de façon aléatoire, indépendantes les unes des autres, ...

Et du coup le choix quand il a été fait, comment vous testez sa fiabilité, du modèle qui a été choisi ?

Oui, oui. Bien euh... comme la plupart du temps, enfin, moi, tous les cas auxquels j'ai été confronté c'était la normalité, test de normalité ben, il y a des tests statistiques aussi qui évaluent, donc tests de Shapiro Wilk qui qui évalue la probabilité que ces données qu'on lui donne sont effectivement tirées d'une loi, d'une loi normale. Euh bien entendu, moins les réplicats sont nombreux, moins ce test sera fiable puisque le fondement en 3 réplicats qui se battent en duel, c'est difficile de dire si ça vient du logiciel ou toute sorte de trucs, de distribution. Et ça, c'est vrai que c'est un problème en en biologie moléculaire puisque souvent, les manips sont ///. On ne peut pas les faire en énormément de réplicats, les manips sont souvent coûteuses et puis, on fera aussi des quantités de matériels au départ, qui sont vraiment limitantes. Je sais que par exemple, en astrophysique quand ils font des accumulations de mesures, on voit vraiment, quand par exemple, ils veulent « fiter » sur les sinusoïdes, on voit vraiment un nuage de points et puis on voit vraiment une sinusoïde qui passe au milieu de, au milieu de milliers de points euh en biologie, on a rarement la possibilité de faire des milliers de fois la même mesure.

Et ça vous est arrivé par rapport à justement ces tests, qu'en utilisant les mathématiques, de redéfinir votre problématique, de revenir à une expérience en se disant ça, ça ne va pas, ce n'est pas cohérent ?

Euh enfin...

Ou vous changez plutôt de modèle du coup.

Ben, alors, je ne suis pas sûr de bien comprendre la question, c'est-à-dire, quand on voit par exemple, on veut, on veut tester, on a 2 groupes de valeurs, condition A, condition B, on veut voir si c'est significativement différent. On regarde la normalité de la distribution et si on a, si ces données ne sont pas distribuées normalement, et s'il y a pas moyen de s'en sortir avec une transformation de log, par exemple, si il y a une bonne raison de faire une transformation log, parce qu'il faut faire, en plus de la cuisine. Alors dans ce cas, on utilise le test de Wilcoxon, qui est un test non paramétrique, qui du coup, lui, est vraiment robuste sur déviation en normalité. Euh donc là, c'est juste trouver une autre manière de tester la significativité, mais les données, elles, on n'y touche plus parce que c'est le résultat de la manip. Après effectivement, le résultat du test peut nous dire différence, si la différence est significative ou si elle ne l'est pas. Après, ça nous aide à interpréter, interpréter le phénomène biologique sachant qu'il y a toujours aussi un truc qu'il faut vraiment bien garder à l'esprit, c'est que quand la différence est significative, ça, c'est un résultat positif, enfin, on peut le dire. Quand la différence n'est pas significative, ça ne veut pas dire qu'il n'y a pas une vraie différence inhérente, ça peut aussi vouloir dire que si on faisait davantage de réplicats, euh, elle finirait par ressortir, la différence significative. Donc, il faut toujours garder aussi des précautions quand on interprète, qu'on a une différence aussi significative, en général, c'est, je veux juste dire que c'est non conclusif, quoi, qu'on a échoué à avoir une, un effet du facteur.

D'accord, et est-ce que vous collaborez avec des mathématiciens ?

Des mathématiciens, non. Euh alors, après, est-ce qu'on peut appeler, est-ce qu'on peut le qualifier de mathématicien, donc là je, j'ai déposé avec un collègue qui travaille à Sophia antipolis, un projet, le gars il travaille, enfin, on peut dire que c'est la cybernétique, c'est l'étude des réseaux ou des réseaux de régulation, donc lui il s'était pas mal intéressé, donc, lui, il a une formation de, je crois, d'ingénieur des mines, il travaille à L'INRIA, donc à l'institut de recherche en informatique et automatisme et, il s'était pas mal intéressé, comme ça, oui au réseau de régulation donc, un gène qui régule tel autre aussi, etc. Puis il avait fait ça jusqu'ici beaucoup sur de l'écologie, donc des interactions comme ça, entre les acteurs, qui apparemment pouvaient être des espèces animales par exemple. Euh ou alors, des, des voies biolo -, enfin, des voies biologiques dans la réponse, dans des micro-organismes par exemple, il y a des choses qui peuvent affûter leur réponse vis-à-vis d'un certain stimulus. Nous, on se posait des questions un peu similaires, mais enfin, méthodologiquement, qui me semblaient assez similaires, mais sur un problème différent, qui était dans la cellule quand on affecte un gène, je vous disais toute à l'heure, des fois, la robustesse du système fait que même si on l'affecte, finalement, ça va être tamponné et au final pas de réponse macroscopique. Est-ce qu'on peut avoir un moyen d'estimer cette robustesse, de la mesurer ? Peut-être de la simuler et d'identifier éventuellement, juste à la lecture des données disponibles en biologie, quels seront les systèmes qui y répondront le mieux, quels seront ceux qui seront le plus atténués ? Et donc là, bon on a déposé le projet donc on n'est pas, il n'est pas encore financé, on va voir si on a, si on a les sous. Donc dans ce cas-là, on lancera ça, donc voilà, c'est vraiment des maths très appliquées ce qu'il fait. Euh je ne suis même pas sûr qu'on puisse le qualifier de mathématicien si tant est que, qu'il y ait une définition, oui, il fait, oui la cybernétique quoi, l'étude des réseaux, des interactions.

Et donc dans les types de recherches que vous nous décrivez, là qu'est-ce qui est le plus difficile ?

Ben, souvent, il faut bien reconnaître que nous, là en biologie, le, ce qui est limitant c'est plutôt l'expérience, en général on est plutôt frustré, par exemple, par le faible de nombre de réplicats, j'en parlais tout à l'heure. Ou... ou là, l'ambiguïté des résultats expérimentaux je vous disais quand il y a une bande sur un, sur une figure, une bande plus ou moins noire, des fois on est censé dire oui ou non en fonction de la noirceur de, d'une bande grise, qui est elle-même sur un fond, sur un bruit de fond qui est très gris aussi donc. En général le raisonnement, enfin, autant que je puisse en juger en en biologie le, les raisonnements sont rarement très très compliqués. Euh, je pense qu'ils seraient accessibles à des collégiens, par exemple et après c'est plutôt de tester ces raisonnements avec des protocoles qui seront suffisamment précis, clairs, reproductibles pour pouvoir vraiment répondre de façon claire à la question.

Dans le raisonnement, la question de départ, vous entendez.

Oui voilà, le temps, quand je vous disais tout à l'heure, par exemple, cet élément est conservé dans l'évolution. Euh, est-ce que c'est parce qu'il a interagi avec telle autre chose ou pas, par exemple, enfin c'est vraiment des choses qui sont très simples, mais après c'est vraiment pour le tester, mesurer les interactions entre des molécules, bon ben voilà. C'est ces choses qui sont pas évidentes donc, surtout, ce qui, ce qui limite la puissance, enfin au niveau découverte quoi, c'est, c'est pas tant la complexité des modèles qu'on pose avant ou c'est plutôt voilà, après mettre en évidence expérimentalement les différentes prédictions qu'on pouvait faire.

Ce qui pourrait conduire à des échecs, ce qui a pu déjà conduire à des échecs ?

Ah oui, bien sûr, oui, ça, c'est très fréquent, des choses, enfin des choses tout bêtes hein, par exemple, je sais pas, la souris, elle est morte dans la cage, on peut pas faire l'expérience. Enfin, vraiment, il y a des trucs, et des échecs des fois qui sont très, enfin, on peut avoir une idée géniale, mais si on n'arrive pas à la tester expérimentalement, donc oui oui. Euh moi il me semble, enfin, qu'il y a eu une expérience qui, ça fait une quinzaine d'années moi, que je suis dans la biologie moléculaire, que la plupart des échecs sont dus vraiment à des problèmes basiques, de la cuisine quoi, c'est vraiment de la manip qui, je sais pas, il y a eu trop de sel ou pas assez de sel dans la solution, ou des choses comme ça qui font que ça marche pas, mais euh, en général, la question, elle est assez simple. Puis c'est, disons, dans, bien souvent, la question qu'on pose en biologie si on avait un super microscope qui permettrait d'aller suivre les molécules et regarder ce qui se passe et tout, on pourrait y répondre simplement en regardant comme ça. On n'a pas ça, donc du coup, il faut imaginer des protocoles expérimentaux de détection, d'interaction moléculaire, etc. Et voilà, c'est ça qui est tellement alambiqué, tellement compliqué que souvent ça foire quoi.

Et là dans, je ressens bien l'activité expérience dans ce que vous faites. Mais alors concernant la modélisation, elle est présente ou pas ?

Alors, si vous voulez peut-être définir modélisation parce que suis pas sûr

C'est vrai c'était une de vos questions d'ailleurs (rires), définir un processus de modélisation finalement, enfin de votre point de vue est ce que vous pensez modéliser ?

Là, je, là, je ne saurais pas tellement répondre à la question puisque je, enfin, dans la mesure où, on peut dire oui dans la mesure où on a une hypothèse, qu'on cherche à tester donc l'hypothèse c'est un scénario que j'imagine dans ma tête, ah ça se passe comme ça, parce que y a ça qui s'est fait, etc. Et donc après on va tester des implications de cette hypothèse-là, donc on peut appeler ça un modèle et du coup donc c'est assez, c'est ce que vous appellerez modéliser ?

C'est vrai que la modélisation on peut, c'est un terme polysémique

Puis on là, ce que je vous, voilà ce que, ce que je vous décris là, c'est une approche très analytique, ce n'est pas synthétique, peut-être que modéliser vous vous entendiez quelque chose on resynthétise le processus.

Non, non ça va, c'est une, une définition à cette étape, moi j'ai pu voir, alors je me suis entretenue avec plusieurs chercheurs avec cette idée au départ peut-être, moins d'expérience, mais c'est un avantage de voir plusieurs personnes.

Oui bien sûr, oui ils auront plus de sujets très différents.

Exactement, de partir d'un modèle existant et d'essayer de faire un choix en se disant oui, ben ça m'intéresse pour les données que j'ai pour ce que j'étudie et d'essayer de l'affiner, de le tordre même parfois, l'expression a été utilisée, pour pouvoir l'utiliser dans son propre contexte de recherche.

Oui. Là, c'est vrai que j'aurais du mal à vous trouver un exemple concret dans ce qu'on fait, dans ce genre de démarche.

Donc c'est moins..., vous fonctionnez moins comme ça. Oui, et est-ce que par contre un de vos résultats, est-ce qu'à un moment donné, vous avez pu créer un modèle ?

Oui, je pense que dans la mesure, quand je vous disais toute à l'heure-là, quand on a cette, ces régions concernant le génome où, ça a toujours été interprété comme : c'est parce que ça, ça doit interagir avec ça pour être réguler, etc. Et de dire ben peut-être que ça, c'est dans l'autre sens que ça interagit, c'est enfin, une interaction asymétrique, mais que du coup, c'est celui-là qui est sensible à l'interaction, mais pas celui-là. D'un point de vue fonctionnel, c'est son activité biologique à lui qui va être affectée parce que celui-là sera tamponné. Euh... oui là, on peut dire que c'est un modèle qu'on a, qu'on a fait et puis du coup, euh, du coup, après on le teste en regardant ben les effets de fluctuations de l'expression de celui-là ou de celui-là, par exemple.

Et après vous avez, vous avez pu être amené à le réutiliser dans un, pour un autre projet ?

Euh, j'y pense pour un futur probablement assez lointain, c'est qu'en fait, ce genre de question peut sans doute se généraliser puisque là, tel que je vous le dis vraiment, enfin c'est avec 2 molécules. Là, nous, on s'intéresse à un certain type de molécules régulatrices, donc c'est ce qu'on appelle des micro-ARN, donc des petits ARN qui régulent l'expression d'autres gènes. Mais effectivement, enfin, tout ce que je vous dis là avec mes 2 mains, en fait, ça peut se généraliser à n'importe quel type de molécules avec n'importe quel autre type de molécules ou des protéines, n'importe quoi. Et effectivement, enfin, j'imagine volontiers que ce genre de concepts sur lesquels on travaille, peuvent se généraliser à d'autres facteurs, et on le propose des fois, quand on écrit des trucs ou moi, en séminaire, des fois quand j'en parle, mais pour le moment ça reste spéculatif quoi, on se contente de le proposer. Euh c'est vrai que dans le futur, j'aimerais bien tester ça, je ne sais pas si on va le pouvoir, si y a ce même genre de phénomène, c'est-à-dire des conséquences tamponnées pour l'un des 2 partenaires et pas tamponnées pour l'autre, donc si on peut voir ça, c'est avec d'autres types d'interactions quoi.

Oui et bon là, du coup, on partirait de ce modèle que vous avez créé, dans la modélisation et qu'on essaierait après de le mettre à l'épreuve quoi.

Oui voilà, voilà du coup, avec ces, ces définitions du modèle qui, voilà, un scénario explicatif, donc oui, on en serait là, oui tout à fait.

D'accord et est-ce que dans vos projets, vous pourriez définir des pratiques invariantes, quelque chose qui, quelle que soit la question de départ et l'objectif qui reste assez invariant et si possible dans l'ordre chronologique. Si ça existe.

Oui, oui, j'ai, pas encore énormément de recul, donc ça fait, oui donc ça fait 3 ans et demi là, que je dirige l'équipe et c'est, du coup on n'a pas encore lancé tant de projets que ça. Mais, en tout cas, quelque chose que j'aime bien faire et donc je vais essayer de reproduire le plus souvent possible à l'avenir, c'est effectivement, de commencer par, pas se précipiter sur les manip, mais de commencer par bien réfléchir à la question, éventuellement bon, évidemment lire la littérature sur le sujet et puis éventuellement faire quelques, quelques analyses informatiques préliminaires pour délimiter bien clairement l'hypothèse qu'on va, qu'on va tester, pour se faire vraiment une idée précise de la manip qu'il faut faire, qui va répondre à la question, plutôt que de se lancer dare-dare en disant on essaye ça, on essaye ça. Euh c'est vrai que, j'ai l'impression que souvent, en biologie moléculaire c'est un peu ça, les gens partent un peu, je veux dire on essaye ça, on modifie ci ou ça, moi, disons, quand j'étais moi-même à la paillasse quand j'étais en thèse, en postdoctorat, c'était pas l'approche qui me plaisait plus, moi, je devais d'abord réfléchir, un maximum à un truc puis après, aller faire les manip clés, ça avait quelque chose de plus satisfaisant intellectuellement, donc c'est quelque chose aussi que j'essaie de faire dans la pratique.

C'est le processus de modélisation.

Ouais, bon, ben voilà. Voilà, bon voilà alors oui, c'est quelque chose que j'essaie de faire...

Et du coup, comment faire ? Parce que, faire des analyses informatiques, ça nécessite de faire des choix, on les fait par rapport à quoi ?

Ah alors des fois, y a des choses où, déjà les données disponibles, elles-mêmes, sont un petit peu limitantes, mais bon, on n'a pas forcément le choix, on peut utiliser tout ce qui existe là, par exemple y a un sujet qu'on a dans l'équipe avec I., je crois que vous avez interrogé I.,

Oui, les mouches. (Rires)

Oui, voilà. C'est vrai qu'elle travaille avec les mouches. Et t là... on a, donc là son projet particulier à elle, c'est de voir en fait, bon elle travaille sur un micro-ARN en particulier, donc ces fameux, ces fameux régulateurs d'expression des gènes. C'est un micro-ARN pour lequel on sait, dans notre littérature, que quand il est muté, quand il est absent du génome, les mouches ont un problème de tailles, elles sont trop petites, un problème de fertilité aussi, elles ont des problèmes de croissance et de problèmes de fertilité. Et donc, on s'était dit, donc, et lui c'est un régulateur, donc il doit sans doute réguler des gènes et c'est ce que tout le monde a toujours cru jusqu'ici, qu'en fait, c'était, quand ce truc-là était absent, ce micro-ARN était absent que les cibles ne sont pas correctement régulées, que c'est ça qui provoque tous ses défauts. Et donc nous, notre question, c'était quelles sont les cibles dont, l'interaction avec ce micro-ARN, est responsable du contrôle de la croissance et de la fertilité ? Et t là, ben à nouveau, on en revient à, aux analyses comparatives des génomes, on s'était dit peut-être que à nouveau, si ce processus est important dans l'évolution, enfin est important dans la biologie, il doit être conservé dans l'évolution, notamment il y a des collègues barcelonais qui avaient publié il y a 2 ans, une étude de ce micro-ARN chez la drosophile, où ils disaient, au détour d'un paragraphe, ils disaient : « Ben tiens, y a un truc qui est marrant, c'est qu'y a un micro-ARN qui ressemble énormément chez le nématode ou chez ce ver, qui ressemble énormément à ce micro-ARN de drosophile et lui aussi, quand il est muté, ben le nématode a des problèmes de croissance, donc peut-être que effectivement, ce, ce contrôle de la croissance par ce micro-ARN est très ancien, date de plusieurs dizaines de millions d'années, peut-être de centaines de millions d'années. Et du coup, ça serait un phénomène qui est là depuis, depuis très longtemps et puis qu'on observe maintenant dans les, chez des espèces actuelles parce qu'il était préservé chez tout ce petit monde. Et donc, on s'est dit : « ben si effectivement c'est ça, ça veut dire que l'interaction entre le micro-ARN et ses cibles, celles qui sont importantes pour le contrôle de la croissance et tout ça, est probablement aussi conservée entre le nématode et la drosophile » et donc, du coup, là, l'idée, l'idée qu'on a eue, c'était de, d'abord de comparer les cibles prédites pour ce micro-ARN chez le nématode et chez la drosophile. Donc là, du coup, le modèle qu'on a voulu testé était contraint par, d'une part la disponibilité de ces génomes, la disponibilité du génome du nématode ou de la drosophile, d'autre part par la disponibilité de ces données, de ces gens qui avaient, qui avaient eu, qui avaient remarqué ça et, qu'effectivement, un micro-ARN très similaire semble avoir le même effet biologique chez ces deux espèces assez éloignées. Euh, un autre type de limitation, c'est aussi ce qui est faisable technologiquement, je vous disais toute à l'heure souvent les, les manip elles-mêmes, enfin c'est elles qui qui limitent quoi, enfin, c'est vraiment, on voudrait faire ça, on imagine bien un petit scénario avec les petites molécules qu'ils font, mais, on ne peut pas aller le vérifier et là il y a, il y a eu un, on peut appeler ça une révolution technologique en biologie ces 2-3 dernières années, quelque chose qui facilite énormément la modification des génomes, à volonté. Euh qu'y a même des implications éthiques parce que, on se rend compte que même pratiquement on pourrait peut-être modifier à volonté le génome humain, par exemple. Euh bon, on a toujours toutes sortes de problèmes, après on, même techniques hein, problèmes de biologie de la reproduction, même si on arrive à modifier le génome qu'on a introduit dans un embryon, etc. Mais en tout cas,

chez les organismes sur lesquels on travaille en laboratoire, chez la souris, la drosophile, tous ces trucs-là, ça marche avec une efficacité extraordinaire, donc, c'est euh c'est quelque chose qui est tout nouveau et qui nous permet vraiment d'aller poser des questions beaucoup plus précises que ce qu'on faisait précédemment, par exemple, toujours pour revenir au projet d'I., ce fameux micro-ARN qu'elle étudie jusqu'ici, en fait je vous disais que les gens avaient repéré des défauts quand un morceau du génome qui contient le gène de ce micro-ARN était absent, délaissé. Euh, mais, c'est un gros morceau en fait qui est énorme, qui enlève ce gène-là du micro-ARN et qui enlève potentiellement d'autres choses et peut-être qu'en fait les défauts qui ont été observés ne sont pas dus à l'absence de ce micro-ARN, mais à l'absence de ces autres choses inconnues qui pourraient exister dans la même région du génome et qu'on n'a pas encore annotées. Et là, du coup, ce que fait I. en ce moment, c'est de faire des mutations beaucoup plus propres, beaucoup plus précises de juste, le micro-ARN lui-même et ça, c'est maintenant possible grâce à cette technique et c'est possible, oui assez facilement, alors en quelques mois, elle a obtenu ça. Euh et donc ça, ça permet, ça permet vraiment d'aller poser les questions beaucoup plus précises. Euh donc, du coup, voilà ça c'est le genre de choses, enfin, qui nous en biologie, qui contraignent vraiment les modèles, enfin, pas les modèles qu'on peut formuler, mais les modèles qu'on peut tester quoi, qu'est-ce que, qu'est-ce qu'on va pouvoir faire derrière pour les tester ?

Et pour revenir donc, à ce que vous disiez tout à l'heure, donc vous dites ne pas partir directement sur l'expérience, essayer de réfléchir à, avec l'informatique, je reviens toujours à mes choix, finalement. Euh est-ce que là, il n'y aurait pas des mathématiques qui interviendraient ?

Si, si, je peux, ben je peux vous citer, par exemple, un exemple donc c'était quand j'étais post doctorant aux États-Unis ou, vraiment là c'était vraiment ouais, la façon de mener le projet qui m'avait beaucoup plu vraiment. Euh le, l'observation initiale, c'était que les micro-ARN donc leur séquence, donc c'est, vous savez l'ADN est constitué de ACGT, enfin, c'est des groupements chimiques, bon ACGT c'est des lettres, en fait, c'est l'initial des groupements chimiques donc Adénine, Cytosine, Guanine et Thymine, sur l'ARN en fait la Thymine est remplacée par l'Uracile donc c'est ACGU au lieu de ACGT. Bref, donc, quand on regarde les séquences de ces micro-ARN, ceux qui existe qu'on peut détecter dans la nature, très souvent ils commencent par un U. Le premier nucléotide, la première base c'est souvent un U. Et euh, et c'était et on ne savait pas pourquoi à l'époque, et euh en fait, il y avait quelque chose qui a été publié justement avant que je rejoigne ce labo, qui avait été publié par mon labo postdoc, où il s'était aperçu que souvent, les micro-ARN, leur première base est faiblement appariée à l'autre brin du, enfin de la double hélice. Il se trouve que AU ou AT dans l'ADN c'est moins stable que GC, il y a moins de liaisons hydrogènes. Et donc, ça pouvait assez bien expliquer pourquoi, en première position dans un micro-ARN, on aurait soit un A, soit un U, parce qu'il doit être moins stablement apparié que l'autre côté, mais seulement, ça devrait être aussi souvent un A que un U, alors, on observait vraiment un fort biais en faveur du U. Et donc du coup, j'avais fait toute sorte d'analyses pour en arriver à cette conclusion-là qu'effectivement, c'était bien souvent un U et pas U ou A, et euh et du coup, ben l'expérience que j'avais finalement imaginée, c'était de d'inverser donc le sens de cette paire AU, de faire UA au lieu de AU, donc juste, ce sera la même force d'interaction, mais simplement, le micro-ARN commence par un A au lieu de commencer par un U. Et donc, du coup, j'étais arrivé à l'idée

de cette expérience après pas mal d'analyses de stats sur les séquences des micro-ARN connus et il y en avait pas tant que ça à l'époque, c'était en 2005. Et du coup, moi, j'avais bien aimé la façon dont ça s'était passé parce que, j'avais eu ce petit problème que j'arrivais pas à résoudre, et je m'étais dit ben du coup, juste en inversant le truc, et après du coup, j'avais fait mes réactifs, ceux qui commencent par le A, ceux qui commencent par le U, j'avais testé, j'avais vu qu'effectivement ceux qui commençaient par un A étaient moins efficaces biologiquement que ceux qui commençaient par un U, donc il y avait visiblement quelque chose qui était pas seulement capable de d'aller ressentir la stabilité de l'interaction, mais aussi l'identité des, nucléotides U ou A. Et donc de ce point de vue-là, et bon, les mathématiques, c'était assez limité, mais c'était le comptage des liaisons hydrogènes entre 2, 2 contre 2 ou alors 2 contre 3 et se rendre compte que juste compter des liaisons hydrogènes donc comparer finalement, la stabilité prédite des deux extrémités de de l'appareillement, ne suffisait pas à expliquer cette différence d'activité biologique.

D'accord, donc là, pour, donc, comme invariant, si j'entends donc y a la question de départ, de toute façon qui irait souvent dans, enfin qui est dans le domaine de la biologie.

Oui, alors dans notre cas, oui toujours oui.

Après il y aurait donc cette analyse avant de faire l'expérience, essayer de de voir...

Voilà en tout cas, en tout cas voilà, c'est comme ça que j'aime bien travailler et je vois bon, l. par exemple, donc elle a rejoint l'équipe il y a pas si longtemps que ça fait 2 ans qu'elle est là. Et c'est vrai que c'est quelque chose, enfin, je crois que ça lui plaît bien aussi de travailler comme ça, c'est-à-dire, elle a l'idée, ou on a l'idée ensemble, tout ça, mais, je lui dis attends, bouge pas je vais faire les analyses et tout, puis après, je vais te dire voilà : Tels ou tels réactifs seront mieux pour telles ou telles raisons, telle région du génome sera plus intéressante que telle autre, etc. Et effectivement, enfin les retours que j'en ai, elle est aussi contente de travailler de cette manière-là, c'est-à-dire du coup, oui on réfléchit bien après on fait l'expérience clé un peu donc...

Donc oui, il y a le modèle avant l'expérience.

Voilà, voilà, voilà.

Ensuite ça permet d'avancer et donc d'être plus précis et plus ciblé aussi.

Ben voilà, et d'aller, de voir directement sur la question, vraiment, pendant que l'expérience vraiment importante, pourrait gaspiller du temps, de l'argent et des réactifs sur de, des questions qui sont des fois un peu annexes et finalement on peut se perdre, c'est assez facile aussi dans la question biologique ou c'est un peu un fouillis quoi, finalement. Des fois, on tire un bout de ficelle, ça nous emmène très loin, et finalement, on a perdu du vue la question initiale et puis on se retrouve à la fin quand on veut raconter tout ça, on se rend compte qu'en fait, c'est une histoire qui n'a plus ni queue ni tête quoi. Donc moi, j'aime bien avoir une question, oui un vrai paradoxe, un truc vraiment qui, qui est facile à expliquer et que

l'auditoire comprenne et puis, après, ils disent « ben oui comment, comment ça se fait ? » Et puis après on monte l'expérience.

Oui, vous, après l'analyse, la mise en en place du modèle on va dire, il y a l'expérience en fait pour essayer de voir. Et ensuite vous avez l'analyse de vos résultats...

Oui de voir oui. Oui l'analyse des résultats, donc voilà qui peut...

Et là ça, peut-être, c'est souvent pareil ou vous..., ou est-ce qu'on peut dire qu'il y a une forme d'invariance dans... ?

Oui, oui si c'est vrai que, in fine, ça revient souvent après à comparer des abondances d'un certain type de molécules ou d'un autre entre des échantillons de différentes origines biologiques et donc avec des trucs, outil test ou quoi, comme j'en ai parlé tout à l'heure. Pour voir si effectivement, puisque d'après le modèle qu'on avait au départ, telle intervention allait modifier l'abondance de telle molécule, on fait l'intervention, est-ce qu'on observe la différence et l'abondance à la fin ? C'est vrai que ça revient souvent ça, à la fin, en biologie moléculaire, c'est des questions de mesure, d'abondance de de molécule.

Et là, dans cette chronologie du coup, si les résultats ne nous donnent pas ce qu'on voulait, donc selon ce que vous dites, on ne refait pas plutôt l'expérience, donc est-ce qu'on va remonter à la limite de l'analyse du départ ?

Ben qu'on voulait... enfin. Enfin, ils ont, en fait on n'a pas de raison, a priori, de vouloir un résultat plus qu'un autre, c'est-à-dire en fait, on teste le modèle et puis, ben le modèle implique ça, ben si l'observa -, si l'observation n'est pas faite ça peut vouloir dire soit que le modèle est faux, soit que l'effet est tellement faible qu'avec les variabilités expérimentales dont on parlait tout à l'heure on a, on a pas su voir d'effets. Donc c'est non conclusif quoi, mais enfin, c'est difficile de dire que c'est ce qu'on ne voulait pas, enfin...

Oui, non, j'ai ressenti la fiabilité finalement des résultats, la validation des résultats, elle n'est pas si simple en biologie moléculaire.

Ah oui ça c'est sûr, ça, ça c'est vrai, comme on le dit, c'est le problème central.

C'est vrai que ça peut être lié à tellement de contraintes et de facteurs extérieurs que vous avez du mal à dire.

Tout à fait. Oui alors, c'est pour ça qu'en général, on s'arrange pour avoir ce qu'on appelle des contrôles internes, des choses dont on sait par des connaissances théoriques a priori, donc elles devraient changer, et, ah et du coup on essaye de trouver des conditions, donc on voit si la molécule qui nous intéresse au départ change ou pas, mais après, on vérifie que celle dont on sait qu'elle doit changer, va changer, que celle qui ne devrait pas changer, ne va pas changer par exemple. Euh ça, c'est vrai que c'est quelque chose qui est assez important par exemple, je vous disais tout à l'heure, il y a souvent des biais dans les mesures, qui vont, des fois, faire apparaître des différences qui n'existaient pas, ou faire disparaître des différences qui existaient et donc là, à nouveau là, on se base sur des connaissances, a priori, qui peuvent être éventuellement discutables et le cas se pose souvent parce que, par exemple, il y a des,

quand on veut mesurer des abondances de molécules, par exemple, des protéines ou des ARN, on fait ça par une technique qui se base sur l'électrophorèse donc on sépare sur un gel ou une matière gélatinée, on sépare les molécules en fonction de leur taille, après, on les transfère sur une membrane et on les révèle avec un réactif spécifique de molécules qui nous intéressent de façon à ne pas révéler toutes les, toutes les protéines ou tous les ARN de la cellule. Et euh et le problème, c'est que voilà, et après, on veut voir si par exemple, entre une piste, où on a déjà déposé par exemple, l'échantillon traité à 25 ° et l'autre traité à 37 °, si on voit une différence d'abondance par exemple, si on veut voir un effet de la température. Euh y a, y a une source d'erreurs possibles, c'est que juste quand on a déposé les échantillons sur le gel au départ, et ben on a mal pipoté et peut-être que là, on a mis 2 fois moins ou peut-être pas 2, mais enfin, on peut avoir, comme ça, des effets vraiment très basiques de ouais de pipotage. Et donc, dans ce cas-là, quelque chose qui peut être très utile, c'est de, d'aller, non pas seulement révéler la molécule qui nous intéresse, mais aussi d'autres pour lesquelles on a une raison a priori de croire qu'elle, elle ne va changer et si effectivement on n'avait pas déposé la même quantité, ben on devrait avoir le même rapport de, par exemple si on a déposé 2 fois moins dans la piste de gauche, et dans la piste de gauche, même s'il y a une molécule qui ne devrait pas changer, on en voit 2 fois moins que dans celle de droite. Euh donc ça, c'est ce qu'on appelle des contrôles internes puisque vraiment l'échantillon, c'est dans, c'était dans le même échantillon, les protéines ont migré ensemble et elles ont subi tout le même processus et à la fin, on voit, ou pas, si y a une différence. Et donc ça, c'est de la, bon c'est une pratique très courante en biologie de faire ce genre de chose avec des contrôles internes, bien entendu, la difficulté c'est de trouver quelque chose pour laquelle, on a vraiment des bonnes raisons de dire : « Ça, ça ne devrait pas changer », que l'abondance de telle protéine ne va pas être affectée qu'on fasse pousser nos mouches à 25 ou à 18 °, ce genre de choses.

Ces raisons elles viennent de quoi, de la théorie, des lectures, de..., des feelings ?

Oui alors, y a d'une part, une raison un peu théorique, c'est, par exemple, les gens prennent ce qu'on appelle des gènes de ménage, donc des gènes qui ont, dont on se doute qu'ils doivent être exprimés dans toutes les cellules, un peu quelles que soient les conditions, parce qu'ils sont vraiment indispensables à la survie basique de la cellule, indépendamment de si c'est une cellule du sang, euh de la de la peau, d'un neurone ou quoi. Toutes les cellules, par exemple, ont besoin de fabriquer les protéines. Et donc du coup, les protéines qui sont elles-mêmes impliquées dans la synthèse des protéines, elles doivent être présentes dans toutes les cellules par exemple. C'est vrai qu'il y a encore quelques exceptions, puisque, par exemple, les globules rouges, eux ils ont, ils fabriquent plus, ils expriment plus de gènes donc. Disons que dans le cas général, il y a, il y a des gènes pour lesquels on se doute qu'ils vont être exprimés partout à des taux, qu'on espère assez constants. Euh, y a des questions, des délimitations techniques aussi parce qu'en fait tous toutes ces, les protéines, par exemple, on les révèle avec des anticorps, donc, c'est ça qui permet de révéler de façon spécifique une protéine ou une autre. Il y a des anticorps qui sont meilleurs que d'autres, qui vont donner un signal plus clair que l'autre. Il y a des anticorps qui vont reconnaître, non pas une seule protéine, comme on voudrait, mais plusieurs protéines donc là, du coup, ça rend le résultat facilement interprétable. Donc du coup, on choisit en fonction de la disponibilité des bons anticorps, mais aussi en fonction de connaissances a priori qui vont fournir cette protéine, donc c'est une expression qui devrait être constante d'un tissu à l'autre. Le problème, c'est

que, très souvent, les gens font ça sur une protéine, ils en choisissent une et voilà ils s'en servent comme ça, pour comme ça contrôler les dépôts dans leur gel. Euh le problème, c'est que quand on s'amuse à en regarder plusieurs à la fois, donc chacune d'entre elles étant censée être constante, en fait il y a toujours des petites fluctuations, mais je veux dire, euh même le rapport des, de ces protéines normalement invariantes, le rapport de ces protéines entre elles aussi, des fois, fluctue. Donc, ce n'est pas juste qu'on a déposé moins de protéines parce que voilà le rapport, elles ne sont plus vraiment des pistes. Donc, ça, ça veut probablement dire que ces protéines dont on estime que c'est des, des protéines de ménages qui sont indispensables partout, il doit quand même y avoir des fluctuations dans leur, dans leur abondance dans la cellule et euh et du coup, euh ben si la protéine A varie par rapport à la protéine B, par rapport à quoi est-ce qu'on devrait tout normaliser à la fin, par rapport à A ou par rapport à B ? Peut-être par rapport à aucune des 2, en fait c'est ni A, ni B qui est bonne, c'est aucune des 2, que les 2 soient un peu un peu fausses dans un sens ou dans l'autre. Et donc, c'est quelque chose maintenant que j'essaie de faire, quand on fait ce genre de manip, c'est de ne pas normaliser avec un seul normalisateur comme ça, dont on estime a priori qu'il ne va pas changer, mais c'est d'en prendre le plus possible, des fois le plus possible ça va pas chercher bien loin, ça peut être une dizaine, par exemple, là, dans le cas des ARN qu'on détectait. Donc, des ARN qui sont impliqués dans des voies assez différentes, mais qui sont toutes centrales au métabolisme de la cellule et donc sur cette dizaine et ben après, ben on fait une régression linéaire en fait. Voilà, ils ne vont pas tous tomber pile sur la diagonale, mais, ils vont se répartir et puis, on prend la droite de régression linéaire et ça nous donne en plus, une petite idée de de la de la précision qu'on peut attendre de de gènes qui théoriquement ne devraient pas changer si on voit le même genre de, de, de fluctuation pour les gènes qui, dont on se demande s'ils vont changer, ben on pourra dire : « Ben cela, ils ne bougent pas plus que les autres qui sont des contrôles internes ». Donc ça, c'est quelque chose que, que maintenant je tâche de faire ou de faire faire et puis aussi de demander quand on me demande d'évaluer le travail de de collègues, de dire : « Attention, c'est très risqué de se baser sur un seul normalisateur parce que c'est...

Et là du coup, on utilise les maths dans leur pouvoir prédictif, parce que là si vous faites de la régression linéaire, c'est pour essayer de prévoir à partir de ...

Oui alors oui, vu comme ça oui.

Est-ce que, j'ai presque fait le tour oui, on était à l'analyse des résultats et puis après de toute façon quel que soit le résultat, ça donne une avancée.

Ben voilà, alors des fois, l'avancée ça peut être un peu sans, ça peut être l'avancée, c'est : « Ben, on ne peut pas conclure parce que l'expérience est trop crado pour conclure ». Et ça, c'est un peu le quotidien, et voilà, ça permet de savoir, exactement, ouais.

Et ça permet de savoir quand même (rires)

On fait de notre mieux, après ben on dit quand on publie le truc : « Ben voilà, on a réessayé ça, on n'a pas vu l'effet bon, ça pourrait indiquer qu'y a pas d'effet, ça pourrait indiquer aussi juste que l'effet est tellement minime et l'expérience tellement imprécise que on n'a rien vu ».

Est-ce que vous, enfin, je ne sais pas si c'est facile d'avoir les références tout de suite, vous me les envoyez si vous avez des références sur un texte de dépôt ou un article qui relate certains de vos projets ?

Euh, oui, ben disons, ben, y a cet article que j'ai publié là, qui proposait cette hypothèse où tout au départ, là, cette histoire de cibles qui sont finalement insensibles à l'effet de micro-ARN ou qui sont elles-mêmes, qui sont-elles mêmes finalement il y a déjà régulateur de micro-ARN. Euh ben je vous, peut-être, je vous l'enverrai par mail, j'ai un problème de...

Oui, merci, c'est impeccable. J'ai fait le tour de mes questions. Merci.

Annexe 6 : Entretien avec le chercheur B₅

Les propos de l'interviewer sont en gras.

Donc en fait, dans le cadre des travaux de ma thèse pour mieux comprendre ce qui se passe dans les classes. je m'entretiens avec des chercheurs qui sont engagés dans des projets en tant que biologistes dans les sciences du vivant et recherches appliquées aux sciences du vivant.

D'accord.

Donc pour commencer, est-ce que vous pouvez me dire quel est votre parcours universitaire ?

Oui. Alors, donc moi, je ne suis pas tout à fait mathématicien au sens, je ne fais pas de la recherche en mathématique. Euh donc voilà je vais expliquer. J'ai fait une école d'ingénieurs en fait en mécanique des fluides donc enfin, après les classes prépa. Donc voilà, il y a eu une école d'ingénieurs à Toulouse, qui s'appelle Enseeiht qui a une filière complètement dédiée à la mécanique des fluides.

Donc c'est une école qui a diverses spécialités, et l'une d'entre elles donc, c'est la mécanique des fluides. Euh après, donc, j'étais toujours à Toulouse, j'ai fait une thèse en aéronautique. Voilà et en aéronautique, à l'aide de simulations numériques. Donc en fait, on travaille uniquement, enfin moi, je travaillais uniquement sur ordinateur. Euh par, avec des logiciels qui font de la résolution des équations de la mécanique des fluides voilà, et puis donc on applique ces logiciels pour dire des choses en aéronautique. Après, je suis parti en postdoc aux États-Unis pendant un an. J'ai toujours travaillé en aéronautique, mais enfin un petit peu dans un contexte un peu différent et donc en 2009, il y avait le concours chercheur CNRS pour qui recrutait en fait un chargé de recherche en mécanique des fluides.

Mais détaché dans un labo de maths. Euh, donc voilà ! Ça fait partie des postes du CNRS d'échange entre sections pour augmenter un peu le voilà, l'interdisciplinarité et tout ça. Et donc, ça, le fait que ce soit un poste un peu bizarre un peu particulier, euh m'a fait présenter aussi un projet de recherche un peu particulier également. Donc qui est toujours en simulation numérique en mécanique des fluides, mais appliquée à des écoulements biologiques. Voilà, donc c'est appliqué à la médecine et aux écoulements de sang. C'est vraiment l'idée du projet, c'est donc de rester toujours en... sur des thèmes qui sont la physique, des méthodes mathématiques appliquées à la physique, mais pour résoudre cette fois des écoulements qui ont une importance biologique, donc avec des applications en bio, des applications médicales, voilà, et puis des applications aussi en, on va dire, en bio-ingénierie quoi, voilà.

D'accord. C'est ce qui vous a amené donc jusque-là.

Voilà le parcours détaillé.

Oui. Et alors, comment me définiriez-vous ce que c'est faire des mathématiques ?

Euh (souffle) comment (silence) ben (souffle) en fait, déjà pour moi, déjà la question est pas assez précise en fait parce que faire des maths, bon ben, quelque part, si on veut, moi, je fais des maths alors que je ne me considère pas mathématicien. Euh je fais des maths parce que j'en utilise tous les jours, j'en ai besoin, que s'il n'y a pas de maths euh je ne peux pas faire mon travail, en gros. Mais je ne fais pas, je ne suis pas chercheur en maths pour autant. Donc en gros, je suis un, moi je suis un, un très grand utilisateur de de mathématiques, de méthodes

mathématiques, de voilà, pour traiter d'autres problèmes donc voilà dans ce cadre-là, je suis un peu. Donc pour moi, faire des maths, c'est (souffle) je ne sais pas, c'est, ça veut dire euh, disons, passer une partie non-négligeable de son temps à travailler avec des outils mathématiques quels qu'ils soient. Voilà ! Après, il y a énormément de gens qui font des maths dont ce n'est le métier, enfin voilà ! Donc voilà ! Mais après, donc j'ai une réponse un peu bizarre peut-être parce que je suis dans un laboratoire de mathématiques où j'ai un rôle vraiment enfin un rôle, une situation très particulière par rapport à la plupart des autres gens qui eux, font des mathématiques en soi. Leur métier, c'est de créer des mathématiques quoi. Donc c'est vrai que voilà ! Ma réponse, c'est aussi par rapport à ce contexte-là. Je ne suis pas chercheur en maths. Voilà, je n'invente pas des nouvelles maths. Donc ! Mais j'en fais.

Du coup, ça revient un petit peu à ce que vous dites, c'est que : il y a les créateurs de mathématiques et les mathématiques appliquées.

(Rires) Ouais. Oui enfin, en fait, moi, je... on va définir, disons un peu les maths pures, les maths appliquées et puis l'application des maths en fait. Euh voilà moi, je les vois un peu différemment, c'est-à-dire, on peut faire des recherches en maths, mais en maths appliquées, c'est-à-dire qu'on va quand même développer des nouvelles maths pour traiter des problèmes. Moi, je ne vais pas développer des nouvelles maths, en général, je vais chercher dans les maths qui existent les outils dont j'ai besoin pour traiter mes problèmes. Voilà, donc !

Donc dans la troisième !

Voilà, plutôt moi, je suis en application des maths. Et c'est vrai que après, alors je vais... comme je suis dans un laboratoire de mathématiques, je vais essayer de travailler avec des mathématiciens qui, eux, sont intéressés par les maths appliquées disons. Et voilà, qui veulent bien discuter avec moi et éventuellement, nourrir en idées, en méthodes que, soit je ne connais pas, soit je ne suis pas capable de comprendre seul.

Oui. D'accord. Et en ce moment, vous travaillez sur quoi ? Un projet qui est en lien avec les sciences du vivant.

Alors on a, (souples) on va dire deux projets principaux, on a un projet qui est sur la simulation de la dynamique de globules rouges. Donc, on se place vraiment au niveau d'un globule rouge, voilà ! Alors un globule rouge, c'est tout petit hein. C'est quelques microns. La plupart du temps, on ne les voit pas, on regarde le sang, suivant que... Voilà ! Mais il y a plein de choses qui se passent, disons plein de phénomènes intéressants qui se passent au niveau des globules rouges seuls et donc, on essaye de développer les logiciels, les méthodes numériques pour aller prédire ce que fait un globule rouge dans ben n'importe quelle situation d'écoulement. Donc voilà, ça a les applications, une de nos applications importantes actuellement, c'est tout ce qui pour les prises de sang en fait. Quand on fait une prise de sang, on a un bilan hématologique. Et puis, il y a par exemple, un comptage des globules rouges, une mesure des volumes et donc on travaille avec des entreprises qui font ces automates d'hématologie. Et pour ben, simuler ce qui se passe dans leur système et essayer de les améliorer. Voilà ! Donc, donc la simulation des globules rouges, on a à la fois des applications très concrètes, industrielles, et puis des choses un peu plus fondamentales, c'est voilà ! Quand on sait, qu'il y a le globule rouge en écoulement fait des choses un peu bizarres, qu'on comprend plus ou moins bien. Voilà donc étudier ça, comprendre un petit peu le... comment est fait un globule rouge, essayer de voir pourquoi il est fait comme ça, quels avantages il a à être construit comme il est construit, etc. Euh deuxième gros projet, c'est à l'échelle des écoulements, disons

à grande échelle en fait. Donc là, on avait travaillé notamment sur la caractérisation de l'écoulement dans le cœur. Donc à partir d'images médicales, on se sert d'images médicales, et on veut utiliser les images médicales, pour dire ce que fait le sang dans le cœur, voilà par où il passe, comment il tourbillonne, voilà quelles sont les zones où il perd de l'énergie tout ça. Et, on est passé de questions un peu plus physiologiques à des questions un peu plus industrielles aussi et on essaye de travailler notamment avec des gens qui font des cœurs artificiels. Donc voilà ! Après directement là-dedans et puis essayer de prédire les problèmes qu'il peut y avoir parce que dans les objets artificiels, on peut avoir tous les problèmes de coagulation du sang hein. Donc, c'est pour ça qu'on met des gens sous anticoagulants après des opérations voilà ou de d'anémie à cause de destruction de globules rouges donc on essaye aussi de développer aussi des modèles pour représenter ça. Donc ça, c'est des choses qui sont assez, assez classiques euh disons.

D'accord. Et là pour la suite, en fait, je vais vous demander de, enfin, si vous pouvez me décrire un projet, que ça soit celui que vous êtes en train de faire ou un que vous avez déjà fait.

Oui.

Appliqué, enfin avec des mathématiques appliquées aux sciences du vivant, en essayant de me décrire quand est-ce que les mathématiques sont intervenues dans le déroulement de votre projet, par exemple, comment il a commencé ? Qui l'a initié ? La question de départ, et, à partir de son déroulement, en me précisant les phases de mathématiques... enfin comment les mathématiques interviennent finalement dans le projet ?

(Acquiescement) Oui, on peut donner comme exemple, en fait, le projet un petit peu qu'on a, disons, fini l'an dernier sur la simulation dans le cœur.

Oui.

Donc c'est un projet qui part de, d'images médicales qui sont des images morphologiques du cœur, donc on voit sa forme et qui vont jusqu'à la prédiction par simulation numérique de l'écoulement de sang. On n'a quasiment aucune info d'écoulements dans les images médicales. Mais en traitant les informations géométriques, on va en obtenir, disons, grâce à la simulation, à la résolution des équations de la mécanique des fluides. Alors, des maths, en fait, il y en a pour nous, il y en a à tous les niveaux. Euh c'est un... on part de d'images médicales, les images médicales, c'est des images de niveaux de gris. C'est des couleurs, enfin, c'est des niveaux de gris. Il y a des, certains tissus qui sont vus en gros en noirs, d'autres en blancs, d'autres en gris plus ou moins foncé, etc. Donc, traiter des images médicales, c'est traiter des niveaux de gris, faire des seuillages, des approximations, des lissages, des tout ça, c'est des méthodes mathématiques de traitement d'images, donc qui interviennent plus ou moins packagées, quoi, parce qu'on se sert de d'outils commerciaux en fait, qui font ce traitement d'images médicales. Mais qui ne sont que des traitements de chiffres quoi. Donc voilà, donc différentes méthodes mathématiques qui sont utilisées pour séparer les tissus les uns des autres, voilà les reconnaître, etc. Donc après, on a toute une phase de déformation d'images qui interviennent par des méthodes des méthodes statistiques en fait. Donc là, il y a des méthodes statistiques qui sont voilà, utilisées pour reproduire en fait les mouvements les plus probables de géométrie, puisqu'en fait, le cœur bouge. On a des images médicales, c'est des images qui se déplacent et, en fait, qui changent au cours du temps, au cours du cycle cardiaque. Et puis, on essaye de reproduire en fait la déformation. On a juste des photos, on

essaye de voir comment ça se déforme. Donc là, il y a à nouveau des maths pour traiter, qui font intervenir donc des méthodes probabilistes en fait. Puis euh, à nouveau plein de plein de maths là-dedans et une fois qu'on a ça, c'est des, après, c'est là où nous, on est intervenus plus directement avec en gros le passage de d'équations de la mécanique des fluides qui sont des équations établies à, des équations mathématiques qui sont établies il y a voilà quelques centaines d'années disons. Et qu'on est obligé en fait de de passer d'une forme mathématique analytique, quoi, à une forme qu'en principe par l'ordinateur, traitable par ordinateur. Voilà, donc, c'est ça, c'est fait par toutes les étapes de discrétisation en fait, c'est voilà, la même chose que quand on prend une photo. Quand on prend une photo, on a des petits pixels qui décrivent la photo et chaque pixel à une couleur. Ben voilà, c'est un petit peu le même type de principe en fait, on a besoin pour parler à l'ordinateur, pour faire faire à l'ordinateur des choses, de discrétiser l'espace, donc ça, à nouveau, voilà, il faut utiliser certaines méthodes mathématiques et ensuite, donc les équations discrétisées sont résolues avec différents types de de méthodes. Donc il y a, y a de de l'analyse, y a de l'algèbre, y a de la géométrie, c'est, c'est truffé de maths quoi. À tous les niveaux.

Et comment vous faites vos choix d'outils mathématiques ? Par exemple, pour passer, puisque vous dites pour que ce soit compréhensible par l'ordinateur. Vous êtes amené à faire des choix d'outils ?

Oui. Il y a vraiment, il y a une, une très grande variété de méthodes disponibles qui sont en perpétuel développement, c'est-à-dire qu'il y a des gens justement en mathématiques appliquées qui vont développer de nouvelles méthodes sans forcément aller jusqu'aux applications et après, il y a les gens qui veulent appliquer les maths qui vont faire leur marché quoi dans les méthodes qui existent. Et c'est vraiment la question d'adapter la méthode à son problème. On a des méthodes qui, par exemple, sont très coûteuses, mais très précises, on a des méthodes qui sont voilà, qui peuvent tourner plus vite, mais bon qui ne sont pas terribles. On a des méthodes qui, par exemple, étaient impensables. Il était impensable de les utiliser avant et maintenant avec le calcul parallèle, c'est des méthodes, qui gagnent beaucoup parce qu'elles ont une capacité à être parallélisées et à être traitées avec voilà, plusieurs processeurs en parallèle. Donc, il y a, en fait, il y a plein de choses disponibles. Il n'y a pas de méthodes miracles et donc en fait, on adapte à chaque fois et on est aussi en veille continue de nouvelles méthodes qui peuvent améliorer les résultats, la fiabilité, la précision, la rapidité, euh voilà !

Et comment vous validez en fait, une méthode qui pour vous, a été efficace, qui demande pas d'être, de revenir, d'en changer ou... Comment vous validez ça ?

Alors, on a, en gros, qu'est-ce qui fait qu'on s'arrête ? On a déjà donc des, tout ce qu'on appelle validation. Quand on fait de la simulation numérique, c'est enfin, énormément de travail sur en comparaison avec des solutions analytiques. Par exemple, on sait que dans un cas, on doit obtenir, mettons, pour telle solution du problème, une parabole, on va résoudre avec toute notre artillerie complète sans faire d'hypothèse et normalement, on doit retrouver une parabole à la fin. Euh voilà, si on ne la retrouve pas, c'est qu'il y a un problème. Donc on a un, on cherche toujours à définir un certain nombre de de cas. Les plus compliqués possibles, ceux qui font intervenir le plus d'ingrédients possibles de notre code numérique, mais dont on connaît la solution, dont on peut dériver la solution à la main quoi. Euh, donc voilà ! Donc on... enfin, je pense que le, énormément de codes numériques, en tout cas de de mécanique, de

physique, tout ça, doivent passer par ce type de cas test où donc, il y a toute une méthode numérique qui est mise en place avec des outils mathématiques voilà pour traiter n'importe quel problème. Mais quand on les applique à certains problèmes plus simples, et bien, on a la possibilité indépendamment de trouver la vraie solution, la seule solution et donc voilà, ça nous permet de valider quoi. Et donc ça, ça, c'est pour valider l'exactitude de notre méthode et après, quand est-ce qu'on cherche ? Quand on s'arrête, on s'arrête sur une méthode, on la garde quand, par exemple, elle est suffisamment rapide ou alors, disons que, elle est suffisamment euh, elle n'est pas handicapante par rapport au reste, c'est-à-dire que dans ... si je liste le nombre de méthodes numériques que j'utilise dans, pour prédire des globules rouges là pour faire... j'ai, j'en ai euh, je ne sais pas, une vingtaine différente à différents endroits pour faire différents trucs. Euh, donc voilà ! Une vingtaine de méthodes choisies et puis, il y en a, ce n'est pas les plus rapides du monde, mais je vais, je ne vais pas insister sur travailler dessus si en fait, ça me prend 0,5 % de mon temps total. Voilà ! On va chercher à améliorer surtout la méthode qui est la plus bloquante quoi dans notre... voilà !

D'accord.

Et pour les, voilà pour les précisions, c'est pareil en fait aussi. Donc on arrête, on ne cherche pas à optimiser en fait chaque méthode indépendamment, disons sans réfléchir aux restes c'est-à-dire que ça fait partie d'un ensemble très complexe et donc on va surtout s'intéresser à améliorer la partie la plus lente du code, la partie la moins précise. Euh voilà ! Même si on pourrait améliorer d'autres choses.

Et la méthode donc elle est choisie par rapport à quoi au départ ?

Différents types de contraintes, alors, par exemple, il y a certaines méthodes qui ont été développées spécifiquement pour les donc, donc je parle en mécanique des fluides, euh spécifiquement, pour des configurations dont on ne connaît pas la géométrie. C'est-à-dire que, imaginons qu'on fasse, on s'intéresse par exemple à l'écoulement d'air dans cette pièce. Si on suppose qu'on ne bouge pas, alors, il y a un certain type de méthodes numériques, mais si vous et moi, on se met à marcher dans cette pièce et qu'il faut savoir l'écoulement d'air là-dedans, il faut prendre en compte le fait que nous, on est en train de marcher, de se déplacer. Qu'ici, pour l'instant il y a de l'air, mais que si je me déplace, il y a plus d'air, il y a moins. Donc là, il faut des nouvelles méthodes qui se font voilà, qui doivent prendre en compte ça. Et donc on a des contraintes, en fait sur le type de phénomène qu'on veut qu'on veut représenter, quoi voilà !

Oui. Donc, en fait, « méthode » c'est plus de oui... c'est, ça a le même sens qu'un modèle ?

Oui. Euh, non, alors, pour moi, le modèle, ce sera le, les équations de base qui seront, qui décriront en fait la physique et qui sont indépendantes de la façon dont on les résout. Voilà, donc, c'est un modèle qu'est-ce que je peux donner comme exemple bête ? Euh, donc il y a tout ce qui est, par exemple, pour la mécanique en mécanique... On a, pour la mécanique le plus classique, le modèle qui est tout ce qui les équations newtoniennes, pour la mécanique newtonienne, qui nous donnent, en gros, l'accélération en fonction de force. Donc ça, c'est un modèle. Après, si on veut le résoudre pour un problème particulier, on va avoir des méthodes mathématiques pour résoudre ça. Par contre, un modèle différent, ça va être un modèle relativiste. Où on va prendre en compte des effets, donc on fait toujours de la mécanique, mais on dit attention, alors on ne peut pas oublier les effets voilà d'une les effets relativistes et donc, on va les rajouter à notre modèle. À ce moment-là, il va falloir, donc soit, on peut, par

chance, utiliser les mêmes méthodes numériques, mathématiques pour résoudre, soit et le nouveau modèle fait apparaître des nouvelles questions, des nouveaux problèmes en fait et il faut changer nos méthodes également ! Voilà, donc il y a, pour moi, il y a cette séparation-là.

Oui, il y a le modèle et pour vous les méthodes, c'est les outils mathématiques...

Voilà ! C'est les outils mathématiques.

... les méthodes qui permettent de...

Qui permettent de, voilà de les résoudre. Voilà !

Le travail au sein du modèle que vous avez choisi.

C'est ça, c'est ça.

Donc, dans votre projet, est-ce que vous pouvez dire qu'il y a de la modélisation quand même ?

Il y a... il y a que ça. En gros, c'est là, on fait... On a... on a une partie, la partie euh, disons, il est indispensable d'avoir un modèle ou quelque chose. Par exemple, je... on a une difficulté pour les écoulements sanguins, c'est qu'il n'y a pas de modèle, pour le sang, en fait. Il y a pas un modèle simple comme pour l'eau ou l'air où là, en fait, en gros donc c'est un, ce qu'on appelle un modèle rhéologique, c'est-à-dire, qu'en fait, on sait que quand on applique certaines forces sur un fluide, il réagit d'une certaine façon. Eh ben, pour le sang, en fait il n'y a pas, il n'y a pas de modèle simple pour le faire et donc, même si vous avez plein de méthodes mathématiques pour résoudre des problèmes des mécaniques des fluides, tant qu'il y a pas un bon modèle, il y aura pas des bons résultats quoi. Donc il y a... c'est pour ça qu'on peut intervenir vraiment à... donc moi je fais de la recherche à différents niveaux, soit en modélisation où il y a vraiment cette étape de euh... on a un problème pas simple et puis on l'écrit en équations mathématiques pour, ensuite, qu'il puisse être résolu, mais une fois qu'on a le modèle, en général, c'est, enfin, c'est insuffisant pour avoir des résultats. Des modèles de... qu'on traite, notamment, en mécanique des fluides, sont trop compliqués pour qu'on puisse en tirer des résultats concrets donc et on a besoin ensuite, de traiter ces choses-là par ordinateur, de faire des simulations numériques. Donc de résoudre les équations, non plus analytiquement avec des maths, disons non plus directement à la main mais avec l'ordinateur et là, il y a des méthodes mathématiques, des voilà, des méthodes mathématiques qui permettent de traiter ces modèles. Donc voilà, je fais cette séparation.

Et dans votre activité, qu'est-ce que vous appelleriez échec ? S'il y en a (rires)

Oh ! Il y en a plein, euh... (Hésitation) en fait, le, il y a énormément de, enfin, il y a plein de types d'échecs. Disons qu'il y a des ... une partie importante des échecs, c'est des échecs de discussions, de collaboration avec des gens, c'est-à-dire que, en fait, on est euh. Donc ça, c'est un petit peu spécifique, je pense, à tout ce qui interdisciplinaire, c'est qu'on a beaucoup de difficultés en fait, à collaborer avec des gens qui sont dans d'autres champs disciplinaires qui ont d'autres intérêts, et même, si on prétend être appliqué à la médecine, les médecins nous trouvent juste, très souvent, disons, euh pas utiles. Voilà, donc, on a, on a du mal à, disons le médecin, le chirurgien a un problème, il a un patient sur la table, il faut qu'il choisisse comment il... voilà, quel coup bistouri il met, comment il fait son truc. Hum, le chercheur, même qui fait des applications à la médecine, euh, se retrouve rarement en fait, dans une position où il peut vraiment aider sur ces, les questions les plus importantes en fait, auxquelles sont confrontés les médecins. Donc, pour que vraiment, il puisse y avoir un rapprochement, il y a un gros, gros

travail de voilà, qui demande énormément de patience et qui n'aboutit pas forcément. Donc voilà, le premier échec, ça peut être ça. Ça peut être, ben, tenter d'initier les collaborations, mais finalement, voilà, ça prend pas, parce que, au bout d'un moment, disons, les interactions ne sont pas assez fructueuses et donc voilà, on arrête d'interagir. Et donc ça, c'est une difficulté qu'on a pas mal, dans les, dans ces interactions.

Mais est-ce que, par exemple, pour le projet de la simulation dans le cœur, la question au départ, elle est, elle est posée par qui finalement ?

Là donc justement, on, donc, le projet pour le cœur, c'est un truc où justement, on est en, un petit une déception, parce que, on a investi énormément en fait en termes de... pour aboutir à un outil, euh disons, utilisable et au final, les médecins trouvent ça très intéressant, très bien, mais (soupirs) oui, on ne voit pas très bien comment ça pourrait être appliqué, donc voilà, on a pas en gros, ils ne sont pas très, ils sont moins moteurs que ce qu'on espérait quoi voilà. On espérait qu'il y aurait, que ça susciterait des questions auxquelles on pourrait répondre, avec cet outil développé. Euh bon, ça n'a pas... voilà, ça n'a pas trop...

Mais au départ, ils sont dans le projet déjà ?

Non. Au départ, c'est un, c'est un... non pas sur ce projet-là, pas directement.

C'est un projet de l'année ?

Ils ne sont pas dans le projet parce que, c'est une phase de développement de méthodes mathématiques, etc., qui ne les intéressent pas. Donc, au début du projet, les médecins trouvent ça... En fait, sont un peu comme à la fin du projet, c'est-à-dire, ils trouvent ça intéressant, ils trouvent ça super. Il faut absolument le faire, mais, voilà, ils sont... il n'y a pas de... on n'a pas vraiment de de questions directes après, très souvent ce qu'on... on se retrouve avec des, des questions qui sont trop éloignées ou alors, par exemple, finalement, les médecins se euh... vont poser des questions sur le muscle cardiaque, disons, alors que nous, on s'intéresse à l'écoulement. Donc, il y a, enfin voilà, le muscle étant la partie importante, en vrai hein, la partie qui, enfin, je veux dire l'écoulement, c'est une conséquence du mouvement du muscle, c'est ce qui compte, c'est que le muscle continue et tout ça. Et donc souvent, y a pas trop de discussions qui vont s'engager sur comment il peut y avoir des interactions entre l'écoulement et le sang en question. Voilà ! Et le peu de médecins qu'on arrive à intéresser, en fait, bon ben, on essaye de monter les projets avec eux, mais ça ne prend pas vraiment au niveau de leur communauté. Voilà, il faut tomber sur des gens, faut avoir un peu de chance. Donc, donc ça, ça arrive et puis à côté, on a d'autres projets où ça se passe très bien, on travaille avec des chirurgiens, qui voilà qui prennent vraiment euh, enfin avec qui on arrive vraiment à travailler ensemble, avec des réunions régulières, un intérêt commun, des discussions permanentes, etc., Voilà ! Donc ça, c'est, voilà, c'est très dépendant des gens.

Les interactions avec les biologistes par exemple ?

(Soupirs) moi, je n'ai pas fait d'interactions directes avec les biologistes. Voilà, moi, c'est plus médecins et puis ingénieurs en... voilà, en bio-ingénierie, et tout ça. Après, bon, les autres types d'échecs, ben, c'est des échecs de, des modèles qui ne sont pas des bons modèles, des méthodes mathématiques qui marchent pas assez bien, qui sont pas assez rapides, c'est des simulations qui devraient prédire des choses qui les prédisent pas et voilà, donc là, on est... Là on est dans le cœur de, disons de de l'activité et des problèmes au quotidien quoi. De toute façon, en général, dès qu'il y a un truc qui marche, on passe au truc suivant qui ne marche pas. Voilà ! Donc voilà, on essaye de, mais c'est vrai.

Oui, ne pas être un bon modèle, donc vous le validez comment que ce n'est pas un bon modèle ?

Bon on a un certain nombre d'attentes vis-à-vis de certaines situations, enfin, on sait, enfin pour donner un exemple, sur le sang. On sait que le sang en fait, du fait de la présence des globules rouges a un certain type de comportement un peu particulier.

Donc, que c'est un modèle qui est déjà établi.

Donc ça, ce n'est pas un modèle, ça, c'est des observations. On va observer que par exemple, le il y a, qu'est-ce qu'on peut donner pour le sang ? On sait que, en gros, le sang a une viscosité apparente qui diminue en fait en fonction du vaisseau sanguin dans lequel il est, il va circuler. Donc, plus le diamètre d'un vaisseau est faible, en fait, plus la viscosité est faible jusqu'à un point plus bas quoi. En tout cas, ça change. Si on prend un mauvais modèle, pour un fluide, par exemple, un modèle qui est le modèle de l'eau, bon un peu adapté, on ne va pas reproduire ça. Voilà ! Tout simplement, on a une observation qui est euh voilà, d'expériences ou de médecine ou des choses comme ça et puis un mauvais modèle, c'est un modèle qui ne va pas reproduire cette observation-là. Donc, c'est un modèle, qui, alors il y a pas de mauvais modèles dans l'absolu, c'est-à-dire que le même modèle en fait va peut-être être très bon pour représenter l'écoulement dans le cœur ou même si c'est du sang parce que les effets en fait qui sont cruciaux quand on va atteindre les petits vaisseaux, les petits capillaires, ne vont pas être importants dans les gros vaisseaux. Donc voilà ! Y a, y a toujours, toujours ça. Donc, en général, on a, on part d'un modèle existant dont on connaît les capacités, qui va être capable de traiter une certaine partie, en fait des applications souhaitées. Et puis à un moment, on essaye de l'améliorer, on change un peu, on rajoute des ingrédients pour traiter les nouveaux aspects. Voilà ! Et puis dès fois, les ingrédients sont pas suffisants, on n'arrive pas à reproduire aussi bien qu'on voulait et donc là, on peut éventuellement être amené à jeter un modèle à la poubelle parce que, en gros, on sait qu'il ferait le boulot, on pensait qu'il améliorerait celui qui existe déjà, mais non, donc voilà.

Et est-ce que vous êtes amenés à en créer du coup ?

En créer ? Oui enfin oui...

Ou si vous voulez ça peut aboutir à un nouveau modèle ?

Oui, enfin oui. C'est, donc, il y a plusieurs manières de... il y a plusieurs manières d'aboutir à ça, soit on prend, on se place d'un point de vue un petit peu différent de... Donc en en modélisation, en fait, on a pas mal de d'angles finalement pour modéliser, c'est-à-dire que un modèle ça peut être disons juste une équation qui reproduit un certain type de résultat. Ça peut être aussi des, un traitement de d'équations, typiquement on a des équations qui sont valides à une certaine échelle et puis quand on cherche à se placer à une plus grande échelle, on a des méthodes d'homogénéisation ou des choses comme ça qui vont créer des nouveaux modèles à partir de de modèles existants. Donc voilà, on peut avoir ce type de de choses. Et après c'est vrai qu'il y a plusieurs angles pour créer de nouveaux modèles, soit des choses un petit peu empiriques, un peu rustiques, des trucs plus c'est vrai que des fondements en physique, euh voilà, il y a un petit peu de... Ou alors, on peut se donner pour un modèle, un certain nombre de critères, de choses qui... on veut qui suivent puis on cherche les voilà,

les bonnes équations qui vérifient tout ça, et ça nous fait un nouveau modèle. Après on, en fait, le modèle, il est euh le juge de paix, c'est le test quoi. C'est est-ce qu'il va être capable de reproduire les certaines choses qu'on n'était pas capable de reproduire avant quoi. Et après, une fois qu'on sait ça, bon on peut l'utiliser dans des nouveaux cadres. Voilà !

Et le choix donc du modèle existant au départ par rapport à vos observations ?

Ben en général, on part, en gros, on part de ce qui se fait de mieux sur le marché et puis au moment où on arrive, je veux dire, quand je suis arrivé, il y avait déjà des modèles de globules rouges existants qui ont d'ailleurs évolué, y a des gens qui proposaient d'autres modèles complémentaires, d'autres parties, d'autres ajouts. Euh, donc, voilà, on prend parmi des meilleurs modèles, donc souvent, y a des modèles plus anciens qui marchaient un peu moins bien, ben ceux-là, on les laisse de côté, c'est pas la peine. Et puis, voilà, le choix, il se fait là-dessus. Éventuellement, on les simplifie si jamais c'étaient des modèles qui avaient été créés pour traiter des applications, qui nous, ne nous intéressent pas. Euh voilà ! Et puis si jamais ce qui nous intéresse, c'est de nouvelles applications, il faut créer des nouveaux modèles pour voilà ! Ou enfin, le plus souvent, on dit créer des nouveaux modèles, mais c'est plus souvent, c'est adapter ceux qui existent, rajouter un ingrédient, c'est, ça se fait, généralement par des, des ajouts, je ne vais pas dire infinitésimaux, mais des petits ajouts quoi, voilà. Souvent il y a déjà des choses qui marchent pas trop mal donc voilà on les améliore, on les modifie.

Et vos tests sont par simulation ?

Oui voilà ! Et donc par simulation, en fait, qu'est-ce qu'on a comme comparaison on a ben (souffle) on... Si possible en fait, des comparaisons avec de de l'analytique, comme je disais au début voilà donc, ça, c'est toute la partie validation, en gros c'est...Donc là, cette étape de validation, en fait, elle valide à la fois, enfin, cette étape de validation, elle valide plutôt disons la partie méthode numérique c'est-à-dire que on est parti du modèle comme base, ensuite, on a appliqué une méthode numérique. Et la validation en quelque sorte, c'est vérifier enfin, on a plusieurs manières de définir, mais valider qu'en tout cas, contre une équation analytique contre les, une formule analytique, c'est vraiment vérifier notre méthode numérique plutôt. Et pour vérifier le modèle, on va plutôt se comparer à des observations expérimentales. Donc voilà typiquement, pour des globules rouges, il y a des collègues dans le laboratoire de physique qui font des écoulements de globules rouges en micro canaux, qui observent certains types de mouvements et la question est : est-ce qu'on les reproduit par la simulation ou non. Voilà ! Donc là avec toute la difficulté de comparaison à des expériences c'est-à-dire que...

Ces expériences ce n'est pas vous du coup qui les menez ? C'est en interaction ?

Non. Là c'est un métier en fait. Honnêtement, il y a peu de gens qui sont capables de vraiment mener à la fois des recherches importantes en expérimentale et en numérique. Il y a une telle spécialisation que bon le, en général, on essaye plutôt de monter des équipes où il y a les deux ou alors d'avoir des collaborateurs, disons sur plusieurs labos, mais quand quelqu'un fait les deux, c'est vraiment c'est vraiment très original quoi. C'est des compétences qu'on trouve

très peu... voilà, quelqu'un qui ferait un peu d'expérience et de la simulation dans une thèse, c'est voilà !

Oui. Donc là, sur le projet de la simulation dans le cœur, il y avait la collaboration avec les médecins ?

Avec ... alors, oui, plutôt avec des, avec des médecins, avec des radiologues en fait, voilà.

Mais ceux qui ont retesté après ? Voilà qui, une fois que le modèle a été ... pour valider ces ... il y a un retour à l'expérience ?

Oui, en fait on n'a pas pu mener ça en fait. Donc on a, on a soumis de voilà, on a...

Donc, traiter une difficulté de collaboration plutôt...Oui, en fait c'est alors, c'est ... de toute façon la validation finale de modèle est une énorme difficulté en écoulement biologique. Voilà, en écoulement pour le vivant, euh... ben parce que, en fait, on a contrairement, à ce qu'on fait en mécanique des fluides classiques, on n'est pas capable de faire une expérience bien contrôlée. Quand on fait euh, quand on valide souvent les modèles, on les valide contre des expériences en laboratoire, on connaît exactement ce qui rentre, on connaît l'état de surface de tous nos trucs, on a contrôlé la température extérieure, voilà ! Quand on fait une, une validation dans le domaine médical, on va prendre, on va faire une IRM chez quelqu'un donc voilà. Alors le l'IRM, le problème, c'est que ben... on est dans un truc fermé, ça chauffe un peu, au bout d'un moment le cœur s'accélère, alors ça change un petit peu les conditions, on est stressé. Voilà entre le moment où on fait des mesures morphologiques dont on a besoin pour la simulation et puis les mesures fluides dont on a besoin pour la valider, ben les conditions ont changé, donc on a voilà. On a d'énormes difficultés pour ça et puis à l'échelle microscopique, à l'échelle des globules rouges, on a aussi euh... ben toute la question de la variabilité euh biologique. Quand on est, on fait une simulation on dit ben voilà mon globule rouge, il a telle viscosité, telle propriété mécanique, euh... on rentre dans la, dans l'expérience on ne les connaît pas, voilà ça fait partie de l'inconnu, donc on doit faire avec. Voilà. Donc il y a, bon il y a différentes manières, il y a la manière la plus simple, c'est que... la manière la plus simple de faire avec, c'est de dire que ça excuse les différences, voilà comme voilà, il y a la variabilité biologique qui se... Donc ça, ça nous permet d'excuser certaines différences. Euh sinon dans ce qui est plus sérieusement, euh on... du coup, on va surtout valider des capacités à reproduire certains phénomènes, certaines tendances. C'est-à-dire que voilà, pas forcément le moindre détail numérique, c'est-à-dire que exactement à ce moment-là le globule rouge va faire telle oscillation de 12 °, mais plus une tendance, par exemple, que si on prend le même globule rouge et puis qu'on le soumet à des conditions où la vitesse augmente par exemple, on va voir telle chose. Donc on va chercher plus à reproduire des phénomènes, voilà. Et après dans un 2^e temps, il faut introduire la variabilité biologique et faire des études statistiques en fait, c'est en imaginant que on fait varier des paramètres dans une gamme biologique, qu'est-ce que ça a comme conséquences sur les résultats, voilà. Ce qui est un champ, en fait, en pleine explosion là dans tout ce qui est simulation numérique. C'est-à-dire qu'avant on faisait de la simulation numérique en disant, en donnant une condition de fonctionnement, mais on gardait le résultat. Et maintenant, de plus en plus, on s'intéresse à, non pas une seule condition de fonctionnement, mais une condition de fonctionnement plus des marges de tolérance, en gros des marges de d'erreurs quoi, et on regarde la conséquence, donc marges d'erreurs sur

nos paramètres, une gamme d'erreurs sur nos paramètres, ou d'incertitudes, disons, et les conséquences sur les résultats. Bon est-ce que... est-ce que finalement, donc c'est tout ce qui est analyse d'incertitudes, analyse de sensibilité. Qui euh... donc se développe beaucoup en ingénierie classique, et qui en tout ce qui est appliqué à la biologie est encore plus important quoi. Donc, voilà.

Donc, vous faites finalement quand même beaucoup de modélisations, vous êtes pratiquement à chaque fois engagé dans un processus de modélisation dans votre activité.
Oui, oui.

Et quel que soit finalement un projet, est-ce que vous pourriez euh... définir des pratiques invariantes que vous faites tout le temps, quelle que soit sa nature, avec une forme de temporalité de ces pratiques-là ? Est-ce que vous arrivez à avoir comme un schéma qui serait pas toujours le même ... Certains qui sont, parfois, tout le temps comme ça quand même.

Oui. Alors, de temporalité ... plus enfin, bon, c'est difficile parce qu'en, en fait on travaille souvent par euh... par améliorations successives. Donc, donc du coup, on s'attaque rarement, on ne dit pas chaque année je prends un nouveau problème, et donc je vais commencer toujours par-là, et voilà parce que c'est des problèmes qui sont tellement compliqués, que en fait on, on développe certaines choses, un moment ça marche, on en profite, on fait des analyses un petit peu physiques, biologiques des résultats, et puis après on va retravailler disons, soit sur la partie méthode numérique pour l'accélérer, soit sur un autre modèle pour le, l'améliorer, soit sur un autre modèle pour l'enrichir et faire des nouvelles applications, donc y a voilà, il y a...

Et ces choix-là quand ils sont..... enfin ils sont..., comment vous les faites, comment vous savez ? Enfin quels sont les indicateurs qui vont vous dire maintenant, je vais plutôt l'améliorer ?

Alors, on peut...Oui. On peut quand même... enfin, donc même si je dis ça, on peut quand même imaginer un schéma, lui donner une temporalité même si elle n'existe pas dans les faits. On va, on va commencer par s'intéresser à un problème physique, ... enfin voilà, c'est je pense déjà, c'est là que va se faire une première bifurcation entre les gens qui sont des mathématiques appliquées, et ceux qui vont appliquer des maths. Euh on part... on part de l'application en fait, enfin moi je pars de l'application, et c'est à partir de là qu'on va aller chercher les maths qu'il faut. Euh donc, euh... à partir de cette application, en fait, on va se renseigner, sur donc... dans la biblio quoi, on va lire, sur quels modèles existants sont capables de reproduire des choses, voilà sur ce sujet-là. On va sélectionner ce qu'on pense être un bon candidat, pour traiter le problème, donc soit il existe déjà, soit on va choisir le modèle le plus proche avec des idées d'améliorations en disant, ben oui il manque sûrement tel ingrédient, donc ça, c'est la connaissance de physique et puis de toute façon, on sait quand même dire assez bien ce qu'un modèle est capable de faire ou pas, voilà. Quand un modèle est capable de faire un truc, on le sait quoi. Donc voilà, le fait qu'il ne soit pas capable de faire quelque chose, ça, on le sait un peu moins des fois, mais voilà. Si en tout cas il est capable, voilà on le sait un peu tard, des fois, mais bon. Donc ... donc voilà, on va sélectionner un candidat, un bon modèle mathématique de base. Et donc ensuite on va appliquer des méthodes mathématiques qui nous permettent de le résoudre, de participer à la résolution dans des

simulations numériques. Eventuellement le modèle de base sera choisi aussi en ayant en tête les contraintes qu'on aura sur la partie méthode numérique et mathématique ; c'est-à-dire que si on a un modèle qui est où on voit très bien comment les méthodes mathématiques qu'il faudra appliquer par la suite, bon c'est un avantage, c'est un plus pour ce modèle-là par rapport à un modèle concurrent qui fait à peu près aussi bien, mais qu'on n'a jamais vu, on sait pas ce qu'il faut .

Oui, vous anticipez finalement la manière dont vous allez, enfin comment... organiser ?

Oui parce qu'on est obligé, enfin on est obligé de penser à...

Les mathématiques à l'intérieur.

Voilà. On est obligé de penser à comment on va résoudre en fait les... ben les équations quoi.

Le modèle choisi parmi les candidats c'est en fait donc, il y a la situation de départ, la question de départ. Vous identifiez finalement les variables pertinentes, les interdépendances. Et c'est ça qui vous amène à travers les lectures, à se dire bon ben lui, doit pouvoir correspondre.

Oui, oui voilà, en gros il y a déjà eu des applications ... quelles sont les applications suffisamment puisque proches qu'y a eues, quels modèles ont été utilisés ? Est-ce que les modèles étaient suffisants pour faire euh... ces applications-là ? Est-ce qu'ils leur manquaient des choses ? Souvent les gens, enfin... on a, on a une voilà, une assez bonne idée sur ce qui peut, ce qui peut manquer à un modèle ou non, tout simplement, on le fait. Dans un modèle de globules rouges, par exemple, il faudrait en réalité qu'il y ait une prise en compte de tout ce qui est capacité du globule rouge à, à s'agréger quoi, à se coller l'un à l'autre en fait, à adhérer. "Pour avoir un modèle plus complet, il faut, il faut ça. Euh... bon, quand vous faites des applications, les globules rouges sont isolés les uns aux autres, vous n'avez pas besoin de ça. Donc, la complexité, elle est là, elle existe, quand on aura des situations où y aura plein de globules rouges ensemble il faudra que l'on compte ça. Ouais, s'ils sont suffisamment séparés, on oublie cette partie qui avait, qui est compliquée, on ne va pas se rajouter des choses à traiter voilà, qui ne seront pas utiles, finalement. Donc le modèle, c'est aussi un... l'idée, on ne prend pas le meilleur, on ne prend pas le plus complet, puisque de toute façon, le meilleur, c'est aussi, le souvent, le modèle le plus complexe. Donc voilà il faut, on adapte aussi, complexité, notre capacité et les différents critères en fait. Pour choisir le modèle, c'est sa complexité. Euh voilà, des fois, ne serait-ce que notre capacité à l'expliquer à des gens. Notre capacité à le comprendre, de fond en comble, en maîtriser les ficelles quoi, euh voilà. Euh... notre capacité à la résoudre plus tard par des méthodes mathématiques, et puis ce qu'il a déjà prouvé comme étant ses capacités de prédiction, voilà. Donc ça, c'est, pour moi c'est des, des critères importants. Bon voilà ! Donc choix du modèle, ensuite on passera au choix des méthodes mathématiques, la validation des méthodes mathématiques, donc comparaison avec des résultats qu'on attend, qu'on peut démontrer à la main, tout ça, la validation de notre implémentation parce que entre... Donc, il y a le modèle, il y a la méthode mathématique et ensuite on code. Donc, typiquement, moi les codes que j'utilise, c'est des dizaines de fichiers, des centaines de milliers de lignes de codes, y a des bugs dedans, y a des erreurs, donc valider, c'est à la fois valider la méthode mathématique, mais aussi son implémentation. Donc, voilà ! Là il y a une autre source de d'erreurs. Une fois qu'on a ça,

comparaison avec des choses qui existent, donc typiquement, un globule rouge dans un canal, qui fait des bonds, voilà. Et ensuite ben... après on arrive à la, vraiment à la partie intéressante, qui est la partie application, c'est on a un outil qui est mûr pour regarder soit des nouveaux problèmes en gros. On savait en micro canal comment ça faisait, mais on ne sait pas, par exemple, dans telle configuration qui est très dure à faire expérimentalement, hop ! Donc voilà on va utiliser la simulation numérique pour le faire. Ou alors, expliquer des phénomènes parce que la simulation numérique nous donne accès à plus d'informations, voilà ! Donc après, on peut faire, justement, du traitement de statistiques pour déterminer l'influence de tel paramètre, voilà, qu'on ne maîtrise pas, sur les résultats. Comment la viscosité interne du globule rouge impacte ses mouvements, par exemple, donc voilà ! On peut le faire sur la simulation numérique, en gardant tout le reste constant, alors que dans une expérience, on ne peut pas le faire in vivo, on ne peut pas le faire non plus dans une expérience parce que on ne peut pas modifier tout seul un paramètre comme ça sur un globule quoi. Donc voilà ! Ça, après c'est la phase d'application, c'est la phase marrante quoi ! C'est là qu'on commence à...

Oui, oui. Donc ça c'est les formes après, potentiellement en arrière

Oui voilà et après donc vraiment, on va arriver, on va se retrouver à... à bosser plus ou moins sur telle ou telle partie, suivant les moments, c'est-à-dire que au début, quand on commence, on part de peu et on va vraiment insister sur le début. C'est-à-dire on a, on va implémenter un premier modèle, le valider, mais ce modèle-là, il nous permettra juste de faire ce que les autres font déjà, donc ce n'est pas intéressant, donc on va rajouter un deuxième modèle ce qui nous permet d'enrichir, voilà petit à petit on construit, et on va boucler beaucoup sur les premières ; les premières étapes, jusqu'à vraiment pouvoir appliquer à des choses nouvelles, faire de la recherche quoi ! Disons, voilà !

Oui, bon l'enjeu de se poser cette question, je pense aux candidats. Voir les réponses, et bon je reviens en fait en arrière avant de vraiment le pousser à l'intérieur.

Oui, oui. Voilà. Et donc, il y a vraiment cet, tout ce travail, à la fois disons, sur le... sur les modèles et sur les méthodes, parce que si on a un excellent modèle mais que les méthodes numériques nous les résolvent très mal, par exemple, avec beaucoup d'erreurs, ben, ce n'est pas très intéressant. Donc on peut, soit bosser sur le modèle, soit changer de modèle parce que finalement on a un autre candidat qu'on saura mieux résoudre, et qui ferait à peu près les, qui aurait les mêmes performances disons, soit changer les méthodes mathématiques, voilà ! Donc suivant ses affinités, suivant le moment, les collaborateurs, on ne choisit pas.

Mais oui, et le modèle, enfin que vous avez au départ, est souvent mathématique en fait.

En fait, on fait euh... c'est-à-dire nous c'est la... on part de ; on part d'équations, voilà, on part d'équations. C'est une vision mécaniste ça en fait. C'est-à-dire qu'on... la plupart du temps donc on part de bases, en fait, on essaye de partir de bases solides de la mécanique, et de... quand on fait un modèle, en fait. Ben, disons en mécanique si on veut faire simple il y avait toute une partie qui est, qui est très solide, et puis une qui est invariante, disons par rapport

aux applications, et puis des parties qui vont changer elles, donc typiquement en mécanique des fluides. On a toute une partie des équations qui ne va pas changer quel que soit l'application, et puis des parties qui vont changer en fonction du fluide, qu'on prenne du sang, de l'eau, voilà on va pas avoir euh... pas, du miel ou de la mayonnaise, il va pas se passer la même chose. Et là, c'est des modèles différents, en fait, c'est pas juste des paramètres différents, ce n'est pas juste que y en a un qui est un peu plus visqueux, l'autre moins, donc voilà ! C'est que c'est vraiment des modèles différents, les tendances, les comportements ne sont pas les mêmes. Donc voilà, donc là, y a des... alors je sais plus ce que c'était la question de départ en fait, mais...

C'était on parlait de modèles mathématiques.

Voilà. Donc là il peut y avoir une partie éventuellement, euh de développement de nouveaux modèles donc voilà. Mais il y a tout un cadre mathématique de départ qui est quand même assez contraint, assez solide finalement. Et voilà.

On voyait en fait qu'au départ pour trouver le modèle mathématique, il y a une forme de mathématisation de la situation pour trouver, enfin par rapport à vos observations.

Oui.

Et ensuite, il y a les mathématiques au sens méthodes.

Oui, oui. Il y a des... voilà il y a vraiment les deux étapes. C'est ça. Il y a les maths vraiment aux deux niveaux et il faut être, en fait, y a par exemple, y a certains... certains chercheurs qui finalement ne travaillent que sur une des deux parties, c'est-à-dire qui sont vraiment intéressés par, une fois qu'ils ont le modèle, il n'y a pas tout le traitement en mathématique, ils restent vraiment au niveau du modèle et appliquent des méthodes enfin de... disons, pas de résolution en tant que telle. Ils vont s'intéresser au modèle lui-même, et de faire de la recherche sur le type de comportement de ce modèle-là. Sans...

Sans l'appliquer ?

Sans l'appliquer oui, en fait, surtout c'est ça. C'est-à-dire on le voit comme un jeu d'équation. Voilà. Que, bon, il se trouve que ça a un intérêt, ça intéresse d'autres gens, donc ce jeu d'équation là ils vont s'y intéresser, voilà. Mais après finalement, c'est vu comme un objet mathématique avant tout et... voilà. On le traite comme un objet mathématique. D'autres personnes qui vont s'intéresser aussi qu'aux méthodes numériques, développer des méthodes numériques, génériques, qui permettent de traiter des problèmes voilà, et puis après c'est fini. On ne cherche pas forcément à l'appliquer. C'est enfin, c'est vraiment, moi je pense aussi le fait qu'on atteint maintenant une telle complexité dans plein d'étapes, disons à chaque étape. Bon, qui fait que il y a un peu cette spécialisation nécessaire pour continuer à progresser, c'est... voilà.

Oui. J'ai fini (rires).

OK, bon très bien.

Je vais couper. Merci.

Partie 3 volet 1

Annexe 7 Eléments de solution relatifs à la fiction réaliste « Les fuites à Fukushima »



IREM2013-2014
Résolution de problèmes Étienne Mann

etienne.mann@univ-montp2.fr

Fuite à Fukushima

Je tiens tout d'abord à vous remercier d'avoir posé ce problème à vos classes. Félicitez vos élèves pour leur recherche et donnez leur rendez-vous l'année prochaine! J'étais très content d'entendre que certains élèves ont très bien accroché au problème et qu'ils se sont passionnés pour les fuites :)

Ce problème est issu des « marches aléatoires ». Une recherche sur internet (Wikipédia par exemple) vous donnera plus d'informations sur ce sujet.

Ce petit texte est inspiré par le chapitre 12 du livre qu'on peut trouver sur internet à l'adresse suivante.

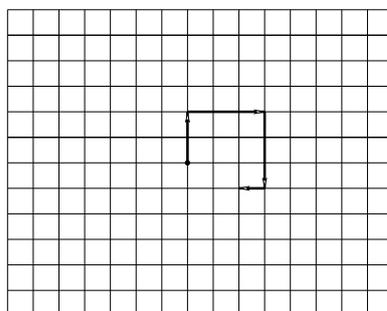
http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf

1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

- Nous ferons abstraction de la taille de la pièce et nous supposerons qu'elle est de taille très grande c'est-à-dire de taille infinie.
- Pour aider à bien mathématiser le problème, nous utiliserons les coordonnées du plan abscisse et ordonnée. Le point de départ du robot sera le point (0,0).
- Nous noterons déplacement vers la droite (resp. la gauche) $V+$ (resp. $V-$) pour un déplacement vers le haut (resp. le bas) et $H+$ (resp. $H-$). Ainsi le chemin noté $H+$ (resp. $H-$) pour un

$(V+, V+, H+, H+, H+, V-, V-, V-, H-)$

correspond au chemin de la figure ci-dessous.



2. QUELQUES EXEMPLES

Pour 1, 2 et 3 déplacements. Nous obtenons les configurations possibles que nous noterons $C(1)$, $C(2)$ et

$C(3)$. Les chiffres dans les tableaux $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$ ci-dessous signifient le nombre de chemin qui relie l'origine au point en le nombre fixé de déplacements. Par exemple, le nombre 4 dans la configuration $C(2)$ signifie qu'il y a 4 chemins qui relient le point de départ à lui-même. Ces 4 chemins sont

$$(V+, V-), (H+, H-), (V-, V+), (H-, H+)$$

Autre exemple, le nombre 9 dans la configuration $C(3)$ signifie qu'il y a 9 chemins qui relient l'origine au point de coordonnées (1,0) : ces 9 chemins sont

$$(V+, V-, H+), (H+, H-, H+), (V-, V+, H+), (H-, H+, H+), (V+, H+, V-), \\ (H+, V+, V-), (V-, H+, V+), (H+, V-, V+), (V+, V+, V-).$$

$$C(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

horizontale.

1. V pour verticale et H pour

3. OÙ LE ROBOT PEUT FINIR SON TRAJET ?

Avec les exemples précédents du §2, nous remarquons que les points accessibles sont symétriques et dépendent de la parité.

Proposition 3.1. Soit n un nombre de déplacements fixés. Un point (a, b) est un terminus possible en n déplacements si et seulement si $|a|+|b| \leq n$ et $|a|+|b|$ a la même parité que n .

Démonstration. Remarquons que deux nombres u, v ont la même parité si et seulement si $u + v$ est paire. Par symétrie, on peut supposer que $a, b \geq 0$. Montrons que si (a, b) est un terminus en n étapes alors $a+b \leq n$ et $n - a - b$ est paire. Un chemin est une suite de $V+, V-, H+, H-$. Pour arriver au point (a,b) en n étapes, le chemin doit vérifier les conditions suivantes $b = (\text{nombre de } V+) - (\text{nombre de } V-)$
 $a = (\text{nombre de } H+) - (\text{nombre de } H-)$ $n = (\text{nombre de } H+) + (\text{nombre de } H-) + (\text{nombre de } V+) + (\text{nombre de } V-)$
Ainsi $n - a - b = 2(\text{nombre de } V-) + 2(\text{nombre de } H-)$, c'est-à-dire que n et $a+b$ ont même parité. Nous voyons aussi que $a + b \leq n$. Réciproquement, montrons que si $a + b \leq n$ et $n - a - b$ est paire alors nous pouvons atteindre le point (a, b) en n étapes. Tout d'abord nous allons directement en (a, b) en faisant a fois $H+$ et b fois $V+$. Il nous reste alors $n - a - b$ étapes c'est-à-dire un nombre paire, disons $2k$, d'étapes. Nous faisons alors k fois le chemin $(V+, V-)$. Nous en

déduisons le corollaire suivant qui répond à la question : quels sont les joints qu'il est possible de nettoyer ?

Corollaire 3.2. *Les joints qu'il est possible de nettoyer sont les joints à l'intérieur du carré de sommets*

$$(n, 0), (-n, 0), (0, n), (0, -n)$$

4. POUR CHAQUE TERMINUS, COMBIEN Y A-T-IL DE CHEMINS POSSIBLES ?

Fixons n déplacements et supposons que nous connaissons le nombre de chemin possible pour aller de $(0,0)$ à tous les points (a, b) c'est-à-dire que nous connaissons le tableau $C(n)$.

Nous nous demandons alors combien de chemins y a-t-il pour aller de $(0,0)$ à un point fixé (a, b) en $n+1$ déplacements c'est-à-dire comme trouver $C(n+1)$?

Pour arriver en (a, b) en $n+1$ déplacements, il faut être à une distance de 10cm en n déplacements c'est à dire en n déplacements être sur un des quatre points suivants : $(a-1, b)$, $(a, b-1)$, $(a+1, b)$, $(a, b+1)$. Ainsi le nombre de chemin cherché en $n+1$ déplacements est la somme des 4 nombres en n déplacements qui relie $(0,0)$ à $(a-1, b)$, $(a, b-1)$, $(a+1, b)$, $(a, b+1)$.

Plus mathématiquement, notons $N_{(a,b)}(n)$ le nombre de chemin qui relie $(0,0)$ à (a, b) en n déplacements alors nous avons démontré la proposition suivante

Proposition 4.1.

$$N_{(a,b)}(n+1) = N_{(a-1,b)}(n) + N_{(a,b-1)}(n) + N_{(a+1,b)}(n) + N_{(a,b+1)}(n)$$

Remarque 4.2. Pour passer de n à $n+1$ déplacements, nous sommes tous les nombres de $C(n)$ qui sont reliés à notre case par un joint. Nous obtenons alors la configuration $C(n+1)$.

En travaillant de proche en proche, nous construisons des configurations pour des nombres de pas plus grands.

$$C(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 16 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 24 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 16 & 0 & 36 & 0 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 24 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 16 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 25 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 50 & 0 & 100 & 0 & 50 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 25 & 0 & 100 & 0 & 100 & 0 & 25 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 50 & 0 & 100 & 0 & 50 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 25 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit aussi apparaître des carrées 16, 25 dans les tableaux. Ceci se généralise facilement pour $C(n)$ par la formule

$$(n+1)^2 = n^2 + n + n + 1$$

5. QUELLE EST LA PROBABILITÉ DE RETOUR EN (0,0) ?

Cette question est la plus compliquée et certains résultats dépassent le programme de terminale. Pour avoir un chemin qui revienne à l'origine, il faut que le nombre de déplacements soit paire. Notons $2n$ ce nombre de déplacements fixés.

Résultats admis 5.1. Dans la suite, nous aurons besoin des résultats admis suivants.

- (1) Le nombre de choix possibles pour choisir k éléments dans un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ où $k! = k \cdot (k-1) \dots 2 \cdot 1$.
- (2) Nous dirons que deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *équivalentes* si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n / v_n = 1$. Nous notons $u_n \sim v_n$. Dans ce cas, nous avons $\sum_{n \geq 0} u_n = +\infty$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} v_n = +\infty$.
- (3) Nous avons $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} = +\infty$.

Dans la suite nous considérons deux probabilités

- (1) $u(2n)$: nombre de chemin qui reviennent à l'origine en $2n$ déplacements
- (2) $f(2n)$: nombre de chemin qui reviennent **la première fois** à l'origine en $2n$ déplacements

La question revient à calculer la probabilité suivante

$$(1) \quad \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k \geq 1} f(2k) := \frac{1}{4^{2n}} (f(2) + f(4) + f(6) + \dots)$$

Lemme 5.2. Nous avons la relation suivante $u(2n) = f(2) u(2n-2) + f(4)$

$$u(2n-4) + \dots + f(2n)$$

Remarque 5.3. Nous pouvons illustrer ce lemme pour $u(4) = u(2) f(2) + f(4)$. Un dénombrement à la main montre que $u(2) = f(2) = 4$ et $f(4) = 20$. Nous obtenons bien $u(4) = 36$ comme dans la configuration $C(4)$.

Démonstration. Si nous revenons en $2n$ déplacements, nous pouvons avoir un premier retour en 2 étapes, 4 étapes, 6 étapes, ... Si notre premier retour est en 2 étapes, alors nous pouvons compléter ce chemin par un retour en $2n-2$ étapes. Nous obtenons alors le premier terme de la somme. Pour les autres nous raisonnons de la même façon.

Lemme 5.4. Nous avons $u(2n) = \left(\frac{(2n)!}{n!n!} \right)^2$ chemins qui reviennent à l'origine en $2n$ déplacements.

Remarque 5.5. Nous avons $u(2) = 4$, $u(4) = 36$, $u(6) = 400$, $u(8) = 4900$. Les trois premières valeurs se voit sur $C(2)$, $C(4)$ et $C(6)$.

Démonstration du Lemme 5.4. Un chemin est codé par une suite de $V+$, $V-$, $H+$, $H-$. Dire qu'il revient à l'origine signifie que nous avons que le nombre de $V+$ (resp. $H+$) est égal au nombre de $V-$ (resp.

$H-$).

Nous avons donc un nombre pair de déplacements verticaux et horizontaux.

Dans un premier temps cherchons combien y a-t-il de chemin avec $2k$ déplacements verticaux? On doit choisir $2k$ places parmi les $2n$ du chemin pour y mettre des V c'est-à-dire $\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}$ possibilités (voir résultats admis 5.1). Ainsi nous avons mis les V et les H dans les places qui restent dans notre liste. Maintenant il faut mettre les $+$ et $-$. Comme nous avons autant de $V+$ que de $V-$, nous devons choisir k places parmi $2k$ pour mettre les $+$ c'est-à-dire $\frac{(2k)!}{k!k!}$ possibilités. Pour les $H+$ et $H-$, nous obtenons $\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$. Ainsi pour k déplacements verticaux nous avons un nombre de possibilités de

$$\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!} = \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}$$

Au total nous sommes sur k et nous obtenons

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}$$

Un calcul un peu compliqué montre que cette somme vaut exactement

$$\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

Théorème 5.6. Nous avons que $\frac{1}{4^{2n}} \sum_{k \geq 1} f(2k) = 1$ c'est-à-dire que nous sommes sûr de revenir au départ.

Démonstration. Posons

$$U(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{u(2n)}{4^{2n}} x^{2n}$$

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f(2n)}{4^{2n}} x^{2n}$$

où $u(0) = 1$ et $f(0) = 0$. Le lemme 5.2 implique l'égalité

$$U(x)F(x) = U(x) - 1$$

Le 1 dans le membre de droite vient du terme constant du produit qui est nul. Ainsi

$$F = \frac{U-1}{U}$$

Remarquons que nous cherchons à calculer $F(1)$ (cf. égalité (1))

Pour cela nous calculons

$$\frac{U(1)-1}{U(1)}$$

A l'aide du Lemme 5.4, nous en déduisons que

$$U(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

$n \geq 0$

$$(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)$$

La formule de Stirling nous dit que

$$n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ainsi nous obtenons que

$$\frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

Les résultats admis 5.1 impliquent que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers l'infini et donc la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{U(x) - 1}{U(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} 1 - \frac{1}{U(x)} = 1$$

Conclusion : Nous sommes sûrs de revenir au point de départ. Par contre, si nous avons le même genre de problème en dimension 3, nous ne sommes plus certains de revenir au départ!

Annexe 8 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « modèle »

➤ Autour de la proportionnalité (Qproportionnalité-modèle)

Est-ce que l'arbre pousse de manière régulière ?
 Est-ce que l'arbre pousse régulièrement? Si oui, de combien il pousse chaque année? Si non, quelle sera la taille maximale de l'arbre?
 L'arbre grandit-il proportionnellement?
 La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité?
 Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?
 La croissance de l'arbre est-elle régulière?
 L'arbre pousse-t-il proportionnellement ?
 Est-ce que la taille de l'arbre évolue de manière proportionnelle (avec le même coefficient de proportionnalité chaque année) ou est-ce qu'on ajoute toujours le même nombre ?
 Est-ce que la taille des nouvelles branches est proportionnelle à la taille des anciennes branches ?
 Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ?
 Sa taille est-elle proportionnelle à son âge ? Si oui est-ce toujours vrai ?
 Peut-on généraliser la croissance de l'arbre à partir de son évolution de 2013 à 2015 ? Autrement dit, grandit-il régulièrement ? (Proportionnellement?)
 Est-ce que la poussée de l'arbre est régulière ?
 Est-ce que la taille et la largeur de l'arbre sont proportionnelles ?
 Est-ce que la poussée de l'arbre est proportionnelle ?
 La croissance est-elle proportionnelle au temps ?
 Est-ce proportionnel ? (2 fois)
 Qu'est-ce que la proportionnalité ?
 De quelle façon l'arbre pousse-t-il ? Grandit-il de manière régulière ou irrégulière ? Est-ce qu'un arbre a des poussées de croissance ?
 Est-ce que l'arbre aura une croissance régulière chaque année ?
 Y a-t-il proportionnalité ?
 De combien de mètres évolue l'arbre chaque année ? L'arbre évolue-t-il proportionnellement chaque année ?
 Combien mesurera l'arbre en hauteur, en largeur, en épaisseur, combien aura-t-il de branche en 2023 ? Tout cela est-il proportionnel ?
 Si l'arbre ne pousse pas régulièrement, on ne pourra pas trouver de réponse. Qu'en pensez-vous ?
 Les branches et le tronc grandissent-ils proportionnellement ?
 Est-ce que la taille de l'arbre au fil des années est proportionnelle ?
 La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle chaque année ?
 Y a-t-il proportionnalité dans la croissance de l'arbre ?
 Pensez-vous que l'arbre double sa taille chaque année ?
 Le rythme de croissance de l'arbre est-il régulier chaque année ?
 Combien de temps met-il pour grandir d'un mètre ? (après on multipliera pour trouver sa taille en 2023)
 Est-ce que le tronc et les branches poussent toujours à la même vitesse? Si oui, de combien chaque année?
 Les branches et le tronc grandissent-ils à la même vitesse ?
 Y a-t-il un rapport entre la taille de la souche et la taille de l'arbre ? L'aire du tronc sur le dessin est-elle proportionnelle avec les années ?
 Les branches de l'arbre grandissent-elles à la même vitesse?
 Est-ce que l'arbre grandit proportionnellement ?
 Est-ce que la croissance de l'arbre se fait de manière linéaire (proportionnelle) ou selon un autre modèle ? (2 fois)
 La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ? (4 fois)
 L'arbre a-t-il une croissance proportionnelle à l'année (en hauteur, en largeur et en envergure) ?
 Est-ce que les arbres évoluent de manière proportionnelle ?
 Est-ce que les branches de l'arbre sont régulières ?
 Est-ce qu'il y a un rapport de proportionnalité dans la croissance de l'arbre ?
 A-t-il une poussée régulière?
 Mais on se demande si l'arbre pousse de manière régulière ?
 L'arbre grandit-t-il régulièrement ?

La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité?
 Y-a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?
 Comment on fait si ce n'est pas proportionnel ?
 Est-ce que les branches poussent de manière régulière ?
 L'arbre grandit-il proportionnellement chaque année ?
 Est-ce que la taille des branches est proportionnelle à la taille de l'arbre ?
 Est-ce que les branches évoluent de la même façon? Même question pour le tronc ?
 La croissance suit-elle un principe de proportionnalité?
 Doit-on chercher une régularité dans l'évolution du nombre de branches?
 Doit-on chercher une régularité dans la croissance?
 L'arbre grandit-il de façon proportionnelle chaque année?
 L'évolution de l'arbre est-elle régulière ?
 Y a-t-il proportionnalité entre le nombre d'années et le nombre de branches ?
 La mesure de l'arbre double-t-elle chaque année? (3 fois)
 De 2013 à 2014 d'après l'échelle on remarque que l'arbre a grandi de 1,40 m, et l'année suivante de 70 cm, qui est la moitié de 1,40mètres. Sa croissance sera-t-elle divisée par 2 à chaque fois ?
 Est-ce que l'arbre grandira régulièrement ? De combien l'arbre grandit-il chaque année ?

➤ Autour des branches

Sur la taille des branches ($Q_{\text{longueur branches-modèle}}$)

Quelle est la distance entre chaque intersection de branches chaque année ?
 De combien de cm grandissent les branches chaque année ?
 De combien de mètres poussent les branches chaque année ?
 Faut-il mesurer les branches ?
 Combien mesure chaque branche ?
 Les branches sont-elles toujours de la même taille ?
 Est-ce que les branches font toutes la même longueur ?
 De combien de centimètres les branches poussent-elles par an ?
 Est-ce que la taille des nouvelles branches est égale à la moitié des branches précédentes ?
 Quelle est la longueur des branches ?
 Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ? (2 fois)
 Les branches grandissent au cours du temps ainsi que le tronc, peut-on estimer la pousse de chaque branche ?
 Est-ce que les branches auront toutes la même longueur?
 En une génération, de quel pourcentage la taille des branches diminue?
 De combien les branches grandissent-elles chaque année ?
 De combien de cm les branches grandissent-elles chaque année ?
 De quelle longueur grandit chaque branche chaque année?
 Combien de centimètres prennent les branches chaque année ?
 Est-ce que les branches de l'arbre vont grossir en largeur ?
 Est-ce que des branches sont plus petites que d'autres ?
 Est-ce que les branches grandissent chaque année ?
 Existe-t-il une longueur maximale pour une branche ? (2 fois)
 Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?
 Les branches nouvelles étant de plus en plus petites chaque année, comment calculer leur taille pour chaque année ?

➤ Sur les angles entre les branches (Qangle-modèle)

Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?
 L'écart des branches est-il toujours le même ? (les angles entre les branches)
 Combien mesure l'angle de chaque branche ?
 Quelles sont les mesures possibles pour un angle formé par deux branches ?
 Est-ce que l'écartement entre deux branches est toujours le même ?
 Comment trouver les angles entre les branches ? Est-ce utile ?

➤ Sur les règles de formation des branches (Qformation_{branches}-modèle)

Quand les branches sont par trois l'une des trois est-elle la continuité de la branche d'avant ?
 Est-ce que les branches ont le même schéma en continu ?
 Est-ce que les futures pousses correspondront forcément aux bourgeons visibles sur le dessin ?
 Est-ce que les branches continuent de pousser ?
 Est-ce que chaque branche donne toujours naissance à d'autres branches et combien ?
 Est-ce que les branches peuvent ne pas donner d'autres branches ?
 Est-ce que les branches se construisent suivant un schéma précis ?
 Est-ce que les branches se multiplient toujours de la même manière ?
 En combien de branches se divise chaque branche chaque année ? Est-ce toujours en deux ou trois branches ? Y a-t-il une logique ou est-ce aléatoire ? (2 fois)
 Est-ce que la séparation des branches est régulière ?
 En 2023, l'arbre aura-t-il toujours 3 branches principales ?
 En 2023, certaines branches vont-elles toucher le tronc ?
 Les branches poussent-elles vers les côtés ou vers le ciel ?
 Quelle est la probabilité que d'une branche naissent 3 branches ?
 Est-ce que la pousse des branches est aléatoire ?
 Quelle est la probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches ?
 Une branche peut-elle se diviser en plus de 3 branches ?
 Est-ce que toutes les branches ont été dessinées ?
 Est-ce que de nouvelles branches vont pousser sur le tronc ?
 Est-ce qu'une nouvelle branche peut pousser au milieu d'une autre ?
 Est-ce que les branches de l'arbre peuvent pousser vers « l'intérieur » ?
 Comment s'étendent ses racines et ses branches ?
 Les branches déjà formées continuent-elles de pousser ?
 Y a-t-il un lien dans la progression des branches ? Sur une branche on rajoute 5 branches ? Sur 2 branches on rajoute 7 branches ?
 Peut-on faire un arbre de probabilités pour savoir s'il pousse 2 ou trois branches sur chaque ramification ?

➤ Sur le nombre de branches (Qnombre_{branches}-modèle)

Combien y a-t-il de branches qui poussent chaque année et est-ce que c'est toujours la même chose ?
 Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?
 Le nombre de branches augmente-t-il chaque année ?
 Combien y a-t-il de nouvelles branches sur l'arbre en une année ?
 Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?
 Quand il y a de nouvelles branches, quelle taille prennent-elles chaque année ?
 Combien de branches font naître chaque branche ?

Combien y-aura-t-il de branches à maturité?
 Est-ce qu'on compte que les nouvelles branches ou toutes les branches ?
 Comment calculer le nombre de branches en 2023? (2 fois)
 Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?
 Combien rajoute-t-on de branches entre 2015 et 2016 ?
 Combien aura-t-il de branches en 2023 ?
 Y a-t-il 68 branches en 2016 ?
 Est-ce que l'on compte les branches dans la taille de l'arbre ?
 Combien y aura-t-il de branches en 2023 ?
 Comment savoir combien de branches pousse par années ?
 De combien de branches augmente l'arbre chaque année ?
 Combien il y aura de branches en 2023 ?
 Combien de branches aura l'arbre en 2023 ?
 Combien de branches poussent chaque année ?
 Faut-il chercher le nombre de branches en 2023 ?
 Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il en tout à la fin ? (3 fois)
 Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?
 Combien de branches s'ajoutent à chaque fois ?
 Combien de branches se rajoutent-elles chaque année ?
 Pourquoi l'arbre en 2014 a pris 6 branches et en 2015 14 branches ?
 Le nombre de nouvelles branches est-il toujours le même ?
 Quand on compte les branches, doit-on compter toutes les branches (avec celles du milieu) ou seulement les nouvelles branches ?
 Y a-t-il une méthode pour déduire le nombre de nouvelles branches chaque année ?
 Est-ce que le même nombre de branches sort chaque année ?
 Chaque année, combien de branches nouvelles pousse-t-il ?
 Les branches se multiplient – elles seulement par 2 ou par 3 ?
 Est-ce qu'il faut calculer le nombre de nouvelles branches chaque année ?
 Combien de branches poussent chaque année ?
 Combien faut-il de branches en 2016 ?
 Aura-t-il le même nombre de branches chaque année ?
 Aura-t-il toujours le même nombre de branches en plus chaque année ?
 Combien de branches faut-il rajouter chaque année ?
 Combien y aura-t-il de branches en 2023?
 De combien de branches grandit-il ?
 Est-ce que le nombre de branches peut nous aider ?
 Combien de branches y aura-t-il dans l'arbre en 2023 et quelle sera sa taille ?
 Comment compte-t-on le nombre de branches ?
 Que doit-on étudier le nombre de branches, la hauteur, la largeur ?
 Le tronc est-il une branche ? (pas très mathématique mais important pour le dénombrement des branches)

➤ Autour de l'échelle (Qéchelle-modèle)

Grandit-il d'un mètre chaque année ?
 Le schéma est-il à l'échelle ?
 Les trois croquis sont-ils à la même échelle ? (2 fois)
 Par combien faut-il multiplier les dimensions, en centimètre, pour obtenir les dimensions en mètre ?
 Peut-on utiliser le segment "1 m" pour prendre des mesures sur les trois arbres, ou signifie-t-il simplement que la largeur de l'arbre en 2013 était 1 m ?
 1cm du dessin= combien de mètres en vrai ?
 Quelle est la taille précise (hauteur et largeur) de l'arbre? Echelle pas assez précise
 Quelle est la signification, exacte du dessin « 1 m » ?
 Qu'indique le "1mètre" au-dessus de la représentation de l'arbre en novembre 2013 ?
 La côte "1 mètre" est-elle valable dans toutes les directions?
 Peut-on supposer que l'arbre croît de 1 m par an en largeur?
 L'échelle est-elle de 1 m pour 2,8cm, 2,9 cm ou 3cm?
 L'échelle peut-elle être utilisée peu importe la direction dans laquelle on mesure ?
 Les croquis sont-ils à l'échelle ?
 L'échelle donne 1 mètre, mais est-ce 1 mètre de hauteur ou de largeur ?
 Est-ce que les croquis sont représentés à l'échelle réelle ?
 Quel calcul faut-il faire pour convertir les centimètres en mètres dans le dessin ?
 Quelle est l'échelle d'un mètre dans le problème ?
 L'échelle qualifie la hauteur ou la largeur ?
 L'échelle est-elle vraiment précise ?

➤ Autour de l'arbre (Qarbre-modèle)

Est-ce que le tronc grandit de 1 mm en largeur chaque année (sur le dessin) ?
 Comment peut-on savoir la taille du tronc au fil des années ?
 Est-ce que le tronc va grossir au même rythme que les branches ?
 Est-ce que le tronc de l'arbre grandit toujours en hauteur et largeur ?
 Est-ce que le tronc augmente de taille en hauteur et aussi en diamètre ?
 Le diamètre du tronc double-t-il chaque année ? *
 Le tronc s'épaissit-il de 2 mm en 2016 ?
 En 2013, combien mesure le tronc de l'arbre ?
 Quel est le diamètre du tronc chaque année ?
 Est-ce que le tronc grossit jusqu'à la maturité de l'arbre ?
 Est-ce que le tronc grossit en fonction des années ?
 De combien de mètres grandit le tronc chaque année ?
 Est-ce que le tronc de l'arbre s'arrête de grandir avant 2023 ?
 Doit-on tenir compte des racines de l'arbre ?
 L'arbre a-t-il des racines qui peuvent perturber le sol ?
 A-t-il des racines ?
 Doit-on compter dans la mesure de l'arbre la mesure des racines ?
 Est-ce que les racines de l'arbre seront grandes ?

* Cette question aurait pu être classée dans Q_{modèle-proportionnalité}

Du type « combien ? »

De combien de mètres l'arbre va-t-il grandir chaque année ?
 La largeur de l'arbre double-t-elle chaque année? (2 fois)
 Quelles étaient les dimensions de l'arbre en 2013, 2014 et 2015?
 Quelle est sa longueur en 2023 ? Son épaisseur ou sa largeur ?
 Grandit-il de 25 cm chaque année ?
 Quelle est la largeur de l'arbre ?
 Quelle est la hauteur de l'arbre ?
 Connaît-on la largeur de l'arbre en 2023 ?
 Quelle est la hauteur de l'arbre en nov 2013 ?
 Quelle sera la hauteur de l'arbre en 2023 ?
 De combien de largeur gagne l'arbre chaque année ?
 Quelles sont les dimensions réelles de l'arbre en novembre 2013 ? 2014 ? 2015 ? (2 fois)
 En 2013, l'arbre mesure un mètre en longueur ou en largeur?
 L'arbre en novembre 2014 mesure combien de plus que l'année précédente? en hauteur, en largeur?
 Faut-il mesurer l'arbre en largeur, en hauteur?
 De combien grandit l'arbre chaque année? (en largeur et en hauteur)
 De combien pousse l'arbre chaque année?
 De combien grandit l'arbre par an ? En mètre...
 Quelle est la taille de l'arbre à sa maturité ?
 De quelle hauteur grandit l'arbre par an?
 De combien s'élargit le tronc par an?
 Connaît-on la largeur du l'arbre en 2023 ?
 Quelle taille fera l'arbre en 2023 ? (3 fois)
 De combien de cm pousse l'arbre en une année ? (2 fois)
 Est ce qu'en 2023, la largeur de l'arbre sera de 10 m?
 De quelle hauteur l'arbre augmente chaque année ?
 Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?
 Quelle largeur prend l'arbre chaque année ?
 Quel sera le périmètre de l'arbre chaque année ?
 Quelles sont les dimensions de l'arbre en 2013, en 2014 et en 2015?
 De combien de centimètres évolue l'arbre chaque année ?
 Quelle est la hauteur de l'arbre en 2023 ?
 Combien l'arbre prend de centimètres en hauteur et en largeur chaque année ?
 Sera-t-il de 10 m?
 Est-ce que sa hauteur sera de 3 m ?
 Peut-on considérer que l'arbre s'élargit de 1 mètre par an?
 De combien de centimètres l'arbre grandit tous les ans?
 Combien de cm prend-t-il chaque année ?
 Sur le même plan, quelle est la hauteur et la largeur de l'arbre en 2016 ?
 De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?
 Combien l'arbre mesure-t-il la première année ?
 Combien mesure l'arbre en 2014 ?
 De combien de mètres ou centimètres pousse l'arbre par an ?
 En 2016, combien de mètres mesurera-t-il ?
 Combien l'arbre prendra-t-il de centimètres chaque année ?
 Combien de mètre gagne l'arbre chaque année ?
 Combien de centimètre ou mètre l'arbre prend-il par an ?
 Combien mesurera-t-il en 2016, 2017, 2018, 2019... ? y a-t-il un lien ?
 Quelle est la taille de l'arbre au départ ?
 Ses racines grandissent de combien par année ?

Combien l'arbre prend-il de m par an ?
Quelle est en 2023 la largeur de l'arbre
Combien mesure le premier arbre ?
De combien grandit-il chaque année ?
Combien fera-t-il en novembre 2016 ?
Quelle taille et quel format aura l'arbre en 2023 ?
Quelle sera la taille (hauteur et largeur) de l'arbre en 2023 ?
Quelles sont les dimensions hauteur et largeur chaque année ?
De combien de mètres grandit-il chaque année ?
Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?
Combien mesurera l'arbre en 2019 ?
Combien l'arbre mesurera-t-il en 2023 ?
Combien d'années dure la croissance de l'arbre ?
Combien d'étapes d'évolution jusqu'en 2023 ?
De quelle hauteur est-il chaque année ?
Chaque année (jusqu'à 2015), nous avons remarqué que l'envergure de l'arbre augmente de 1 m. Est-ce vrai pour les autres années ?
Combien de mètres en envergure gagne un arbre sur une année ?

Du type « Comment ? »

Comment pousse-t-il chaque année ?
Comment sera l'arbre en 2023 ?
Existe-t-il une formule mathématique qui permette de calculer la taille de l'arbre en 2023 ?
Comment s'y prendre pour trouver la taille en 2023 ?
Sait-on comment il grandit en un an ?
Au cours des années l'arbre évoluera-t-il autant en longueur qu'en largeur ?
Comment et de quelle manière pousse l'arbre ?
Faut-il mesurer la longueur et/ou la largeur ou faut-il mesurer la totalité de l'arbre (branches, tronc...) ?
La croissance de l'arbre diminue-t-elle ?
Est-ce que l'arbre va grandir ?
Est-ce que l'arbre peut rétrécir ?
Comment évolue l'arbre chaque année ? (largeur, hauteur, nb de branches, volume)
Peut-on connaître les dimensions de l'arbre en 2013, en 2014 et en 2015 ?
Nous nous demandons si cela est nécessaire de connaître à la fois la hauteur et la largeur de l'arbre ?
Comment grandit-il en largeur ?
La largeur est-elle importante ?
Comment fait-on pour savoir la taille de l'arbre en 2014 et 2015 ?
Est-ce que l'arbre se développe qu'à l'extérieur, qu'au bord des branches ?
L'arbre grandit-il de la même manière chaque année ? (2 fois)
Doit-on prendre en compte que la hauteur ou aussi la largeur ?
Est-ce que l'arbre peut arrêter de grandir certaines années ?
Y a-t-il un schéma de croissance ?
Comment et de quelle manière pousse l'arbre chaque année ?
Est-ce que l'arbre grandit dans toutes les directions ?
Comment trouver une méthode rapide et efficace pour le mesurer ?
Est-ce que l'arbre grandit autant en longueur qu'en largeur ?
L'arbre grandit-il tous les ans ?
Quelles mesures devons-nous traiter sa taille en largeur ou en hauteur ?
Avec quel(s) outil(s) peut-on mesurer l'arbre ?
À quelle vitesse l'arbre grandit-il en moyenne ?
Ne va-t-il pas mourir avant ? (2 fois)
Est-ce que l'arbre peut mourir avant ?
Est-ce que l'arbre peut mourir au cours des années ?
Quelle est sa croissance moyenne annuelle ? (2 fois)
La croissance annuelle est-elle constante ?

À partir de quelle année l'arbre réduit-il sa croissance ?
 Est-ce que la croissance entre 2013 et 2014 est la même qu'entre 2014 et 2015 ?
 Y aura-t-il une période de stagnation entre 2013 et 2023 ? (2 fois)
 Quelle est la durée de la croissance ?
 Est-on sûr qu'il aura fini de grandir en 2023 ?
 Peut-on représenter graphiquement la croissance de l'arbre ? (2 fois)
 La proposition « on multiplie toutes les épaisseurs du tronc précédentes entre elles » est-elle valide ? (exemple année 4 : 2x3x6 mm).
 Est-ce que l'on doit calculer sa largeur ?
 Comment évolue l'épaisseur de l'arbre ?
 L'arbre grandit-il de la même manière en largeur et en hauteur ?
 Est-ce que le tronc augmente (en épaisseur) ?
 Faut-il mesurer tout l'arbre ou juste la hauteur ?
 Est-ce que l'arbre penche ?
 L'arbre peut-il pousser de travers ?
 Est-ce que l'arbre pousse droit ?
 L'arbre peut-il pousser "tordu" ?
 L'arbre pousse-t-il droit ?
 L'arbre penchera-t-il ?

➤ Autour des schémas de l'énoncé (Qschéma-modèle)

Toutes les branches sont inscrites dans des cercles qui se coupent au sommet du tronc. Comment mesurer le rayon ou le diamètre de ces cercles ?
 L'arbre entier rentre dans un cercle, centré au sommet du tronc, de rayon 6,8cm pour 2014 et 9cm pour 2015, que peut-on en déduire ?
 Peut-on mesurer avec une règle ?
 Peut-on mesurer avec la règle ? Est-ce la bonne mesure si on travaille avec l'échelle ?*
 Est-ce que les traits de la hauteur et de la largeur de l'arbre entre les extrémités doivent être perpendiculaires ?
 La ramure forme-t-elle une fractale ?
 Peut-on inscrire le dessin de l'arbre dans un cercle ou le branchage dans un demi-cercle ? Où est le centre ? Est-ce que le diamètre de ce cercle grandit de façon proportionnelle ? Faudrait-il calculer son aire ?
 Est-ce que c'est symétrique ?
 Le croquis est-il dessiné chaque année en vrai ?
 Le croquis est-il dessiné chaque année à partir du même point de vue ?
 Est-ce que les croquis sont exacts ?
 Est-ce qu'on peut s'appuyer pour faire nos calculs des mesures que nous pourrions faire sur le dessin, pour les angles et pour les longueurs ?
 Doit-on réaliser un schéma de l'arbre en 2023 ?
 Doit-on travailler en 2D ? Ou en 3D ?
 L'arbre est-il plat ou en 3D ?
 L'arbre grandit en 2D ou en 3D ?

*Cette question aurait pu être classée dans « autour de l'échelle »

➤ Autour du sens de la question de l'énoncé (Qsens-modèle)

Pouvons-nous avoir des indications sur l'évolution de l'arbre ?
Pourquoi l'arbre est-il schématisé en novembre ?
Pourquoi ne donne-t-on pas la hauteur de l'arbre ?
Qu'est-ce qu'on entend par hauteur et largeur de l'arbre ?
Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?
Qu'entend-on par "prévoir comment sera l'arbre" ? (2 fois)
Faut-il calculer la hauteur du tronc et des branches séparément ou tout ensemble ?
Est-il possible de résoudre le problème ? Si oui, est-il résoluble par un produit en croix ?
Il faut répondre à quelle question ? Ça veut dire quoi « comment sera l'arbre ... »
Doit-on étudier le volume ?
Y a-t-il un rapport avec les suites ou les fractales ?

Annexe 9 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « paramètres extérieurs »

➤ Autour des fleurs, feuilles, fruits de l'arbre

Est-ce que l'arbre a des feuilles ?
 Est-ce que l'arbre aura des feuilles ? Des fleurs ?
 L'arbre a-t-il des feuilles et faut-il prendre les feuilles en compte ?
 L'arbre a-t-il des feuilles ou des épines ? De quelles tailles ?
 Est-ce que l'arbre possédera des feuilles ?
 L'arbre a-t-il des feuilles ? Perd-il ses feuilles en hiver ?
 L'arbre a-t-il des fruits, des feuilles assez grosses ? (ils prennent de l'espace à compter ou non dans les dimensions ?)
 Est-ce que l'arbre va fleurir ?
 Est-ce que cet arbre est un arbre fruitier ? Si oui, est-ce que ses fruits sont gros ?
 Est-ce qu'il y aura des fruits ?
 Est-ce que cet arbre va avoir des feuilles ? Si oui vont-elles tomber ?
 L'arbre pousse-t-il dans l'hémisphère nord ou sud, autrement dit, possède-t-il des feuilles, des aiguilles ?
 Est-ce qu'il y a des feuilles ?
 Est-ce que l'arbre a ou aura des feuilles ?
 Est-ce que l'arbre aura des feuilles ? (3 fois)
 Combien de feuilles vont pousser par an ?
 A-t-il des fleurs ou feuilles ou fruits ?
 L'arbre aura-t-il des feuilles ? Des fruits ?
 Est-ce un arbre fruitier ? Un conifère ?
 Quelle est la forme de ses feuilles ?
 L'arbre est-il un arbre fruitier ?
 Quelle forme ont les feuilles ? Quelle taille ?
 Va-t-il fleurir ? Forme et taille des fleurs ?
 Va-t-il fournir des fruits ? Forme et taille des fruits ?
 Est-ce que l'arbre aura des feuilles ?
 L'arbre fait-il des fleurs ?
 Est-il caduque, résineux où persistant ?
 L'arbre a-t-il des fleurs, des feuilles, des fruits ?
 Est-ce qu'il y aura des feuilles ou des fruits qui pousseront sur l'arbre ?
 Est-ce qu'il y a des animaux sur l'arbre ? Si oui vont-ils faire des nids ?

➤ Autour des besoins spécifiques de l'arbre

Les conditions climatiques de la serre sont-elles les même que celles de son pays d'origine ?
 A-t-il besoin d'un environnement spécial pour atteindre sa maturité ?
 Combien de fois faut-il l'arroser ?
 Le fait de mettre l'arbre sous serre va-t-il modifier sa croissance naturelle ?
 L'arbre a-t-il des besoins particuliers (terre spéciale, apport en eau ...)?
 Si on arrose l'arbre et que l'on le met au soleil : est ce qu'il poussera plus vite ? Et en hiver ?
 Dans quelles conditions de vie peut-il vivre ? Lui faut-il un environnement adapté? (T°, terre, humidité ...)
 Est-il sensible aux changements brusques de températures ?
 Est-ce qu'on mettra de l'engrais ?
 Est-ce que les botanistes mettent de l'engrais ?
 L'arbre a-t-il des besoins spéciaux ? (Terre, eau, chaleur...)
 L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?
 Dans quel milieu vit l'arbre ?
 Est-ce que l'arbre peut pousser de manière irrégulière par rapport aux saisons ?
 La croissance dépend-elle de la quantité d'engrais ou du climat?
 L'arbre a-t-il besoin d'un traitement particulier ?
 Dans quel environnement vit l'arbre?
 Est-il à l'ombre ou au soleil ?
 L'environnement du Jardin des Plantes est-il semblable à l'environnement initial de l'arbre ?
 Est-ce que les botanistes vont mettre de l'engrais sur l'arbre ?
 Met-on de l'engrais ?
 Faut-il prévoir une alimentation en eau ? Un système de ventilation ?
 Quelles conditions climatiques devront respecter la serre (humidité, chaleurs,...) ? Quels sont les apports d'eau dont requiert l'arbre afin d'optimiser sa croissance ? Dans quel type de terre l'arbre se développe-t-il ? Est-ce un arbre fruitier ?
 Donne-t-on de l'engrais à l'arbre ?
 Est-ce qu'on va s'occuper de l'arbre de la même manière tout au long de sa vie ?
 Est-ce que l'arbre a besoin de lumière pour pousser ?
 Doit-on protéger les racines de l'arbre qui sortiraient du sol?
 Taille-t-on l'arbre ?
 Est-ce que durant les années, on a taillé l'arbre ?
 Faudra-t-il couper des branches ?
 Les branches peuvent-elles se casser ?
 Est-ce que les botanistes taillent l'arbre ?
 Est-ce que les botanistes vont tailler des branches ?
 Est-ce que des branches vont tomber ?
 Les botanistes vont-ils tailler l'arbre ?
 Est-ce que les botanistes ont coupé des branches pour que l'arbre pousse mieux ?
 Est-ce que les anciennes branches ne vont pas mourir ou/et tomber ?
 Peut-on tailler l'arbre ?
 Y a-t-il des branches qui meurent et qui tombent ?
 L'arbre va-t-il être taillé ?

➤ Autour des facteurs extérieurs (Qfactext-PE)

A-t-il des problèmes de croissance ou de maladie ?
L'arbre craint-il une certaine espèce d'insecte ?
L'arbre peut-il être malade ? (et est-ce-que la maladie peut influencer sur sa croissance ?)
Ne risquerait-il pas de mourir avant 2023 ? (Adaptation d'un arbre exotique au climat méditerranéen ?)
Si les chercheurs ont laissé l'arbre dehors tout le temps, comment pouvaient-ils savoir qu'un changement brusque de température n'allait pas tuer l'arbre ou lui implanter des maladies ?
Peut-il se faire infesté de parasites ?
La météo, la pollution peuvent-elles faire varier la croissance de l'arbre ?
Nous pensons que l'arbre va grandir et changer à chaque saison, êtes-vous d'accord avec nous ?
Quelles ont été les températures moyennes en 2013,2014, 2015 ?
L'arbre peut-il nuire à d'autres arbres ou plantes, ou à la faune autour de lui ?

➤ Autour d'une comparaison avec un autre arbre

Peut-on faire une comparaison avec une espèce d'arbre connue ?
Connaît-on des espèces d'arbres semblables et qui pourraient nous servir d'élément de comparaison ? (2 fois)
Cet arbre a-t-il des points communs avec des arbres exotiques déjà connus ?

Annexe 10 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « serre »

➤ Autour des marges à prévoir entre l'arbre et la serre (Qmarges-serre)

Quel doit être l'écart entre l'arbre et la serre ?
 Est-ce qu'on prend une marge pour les dimensions de la serre ou on la fait pile à la taille de l'arbre ?
 Quelle est la distance à respecter entre la serre et l'arbre ?
 Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?
 Est-ce que la serre doit être construite au raz de l'arbre ?
 Quelle proportion doit avoir le volume de la serre par rapport au volume de l'arbre ?
 Combien de mètres faut-il entre l'arbre et la serre ?
 La serre doit être plus grande que l'arbre, de combien de mètres ?

➤ Autour des dimensions de la serre (Qdimensions-serre)

Pourquoi ne pas construire une serre assez grande de 75 m, pour être sûr que ça rentre ?
 Pourquoi ne pas construire tout de suite une serre de 10 à 15 m pour être sûr que ça soit assez grand ?
 Existe-t-il une taille maximale pour la serre ?
 Quelle doit-être la hauteur de la serre ? Doit-on respecter des distances entre la serre et l'arbre ?*
 En ayant estimé la taille maximale de l'arbre peut-on encadrer la taille de la serre ?
 Sachant que sa hauteur double en 2 ans et que sa largeur triple dans le même temps, est-ce qu'une serre cubique de 40m de côté sera suffisante ?

*Cette question aurait pu être classée dans « autour des marges à prévoir entre l'arbre et la serre ».

➤ Autour de la pertinence du choix du fragment réalité « serre » (Qpertinence-serre)

Doit-on trouver les dimensions de la serre ?
 La présence de la serre va-t-elle avoir une influence sur la croissance ?
 L'orientation de la serre est-elle importante ?
 Le matériau de la serre ou sa couleur influencent-ils la pousse de l'arbre (favorisation de la photosynthèse, maintien d'une température optimale,...)

➤ Autour de la forme de la serre (Qforme-serre)

A-t-on une forme obligatoire pour la serre ? Ronde, carrée, autre ?
Quelle forme doit prendre la serre ?
Quelle sera la forme de la serre ? (4 fois)
Est-ce que la serre doit être cubique ou rectangulaire?
La forme de la serre ?
Quelle doit être la forme de la serre ?
De quelle forme vaut-il mieux que la serre soit ?
La forme du toit est-elle imposée ? (Plat ? Cône de révolution ? Prisme?)
La forme de la serre est-elle imposée ? (Base carrée, circulaire, rectangulaire?)
À quoi va ressembler la serre (dôme ou cube ou autre) ?
De quelle forme pourra être la serre ?
Quelle est la forme de la serre ? (2 fois)
De quelle forme doit-être la serre ?
Est-ce possible de faire une serre démontable ? Ou avec un toit amovible par exemple ?

Annexe 11 Questions produites par les élèves lors de la session collaborative autour de la fiction réaliste « L'arbre », relatives au Groupe « précisions »

➤ Autour de demandes de précisions sur l'énoncé (Qénoncé-précisions)

Qu'est-ce que les botanistes ont fait depuis 2013 ?
 Comment les botanistes savent-ils que l'arbre sera mature en 2023 ?
 Sur quoi se basent les botanistes pour estimer la maturité en 2023 ?
 Est-ce que l'âge de maturité est vraiment 2023 ?
 L'arbre peut-il encore grandir après sa maturité ?
 À quoi ressemblera-t-il quand il sera à maturité ?
 Comment sait-on que la maturité sera atteinte en 2023 ?
 Est-ce que l'estimation de la maturité est précise ?
 Continue-t-il de grandir après 2023 ?
 Va t-il encore grandir après 2023 ?
 Est-on sûr qu'il sera à maturité en 2023 ?
 En 2023, nous pensons que l'arbre sera mature, il aura 11 ans. Êtes-vous d'accord avec nous ?
 Comment savez-vous que l'arbre atteindra sa maturité en 2023 ?
 Comment savez-vous qu'il va vivre jusqu'à 2023 ?
 Est-on sûr que l'arbre aura atteint sa maturité en 2023 ?
 Lors de la maturation de l'arbre y a-t-il des paliers de croissance ?
 Quel âge peut-il atteindre ?
 Si l'arbre est inconnu, comment les chercheurs ont-ils pu estimer son âge de maturité ?
 Est-il possible d'avoir la photo de l'arbre pour l'année 2016 ?
 Où pourrait-on voir le vrai arbre ? (2 fois)
 Comment imaginez-vous l'arbre en 2023 ?
 Avez-vous une photo de l'arbre s'il existe ?
 A quoi ressemblera l'arbre en 2023 ?
 Faut-il prévoir la place pour un seul arbre ?
 Y a-t-il un budget à respecter pour la construction de la serre ? Pour l'entretenir ?
 Que se passe-t-il si la serre n'est pas assez grande ?
 Les botanistes créeront ils la serre maintenant ou à la maturité de l'arbre ?

➤ Autour de demandes de précisions de vocabulaire (Qvoca-précisions)

Qu'est-ce que la maturité ?
 Qu'est-ce que le mot maturité ? Est-ce que la maturité veut dire la taille ?
 Que veut dire la maturité pour un arbre ?
 Qu'est-ce qu'un botaniste ? (2 fois)
 Que veut dire le mot botaniste ?
 Que veulent construire les botanistes ?
 Comment les botanistes ont trouvé cet arbre ?
 A quoi sert une serre ?
 Qu'est-ce qu'une serre ?
 Que veut dire le mot serre ?

➤ Autour des origines et de la provenance de l'arbre (Qarbre-précisions)

D'où vient-il ?
Est-ce que les botanistes ont des renseignements sur l'arbre (début) ?
Dans quelle terre pousse l'arbre ?
Quel genre de graine a-t-on planté ?
D'où vient l'arbre exotique inconnu rapporté par les botanistes du jardin des plantes ?
Les 3 premières années a-t-il grandi dans une serre ?
Quelle est la nature de l'arbre ?
De quelle espèce est l'arbre ? (2 fois)
Dans quel pays pousse-t-il ?
Quelle est cette nouvelle espèce ?
Peut-on connaître l'année de naissance de l'arbre ?
Quel est l'âge de l'arbre en 2013 ?
D'où vient l'arbre ? (2 fois)
Comment s'appelle cette espèce d'arbre ?
Pourquoi est-il exotique ?
A-t-on trouvé cet arbre à côté d'une rive ou dans une forêt ?
Quel âge avait l'arbre lorsqu'il a été planté ?
L'arbre en 2013 a quel âge ?
En quelle année a-t-il été planté ?
Quel âge à l'arbre ?
Peut-on lui inventer un nom ?
A-t-on donné un nom à cette nouvelle espèce ?
Cette espèce a-t-elle un nom ? Quel est son pays d'origine ?
Qu'est-ce qu'un arbre exotique ?
Connaissez-vous l'origine de cet arbre et comment peut-il survivre ?
Est-ce vraiment un arbre ou une autre plante ?

Annexe 12 Classement des questions selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale

SELON L'INDICATEUR $Q_{\text{modèle}}$

$Q_{\text{modèle-proportionnalité}}$

- 1) Est-ce que l'arbre grandit proportionnellement ?
- 2) La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ? (4 fois)
- 3) Est-ce que la croissance de l'arbre se fait de manière linéaire (proportionnelle) ou selon un autre modèle ? (2 fois)
- 4) L'arbre a-t-il une croissance proportionnelle à l'année (en hauteur, en largeur et en envergure) ?
- 5) De quelle façon l'arbre pousse-t-il ? Grandit-il de manière régulière ou irrégulière ? Est-ce qu'un arbre a des poussées de croissance ?
- 6) A-t-il une poussée régulière ?
- 7) Est-ce que les arbres évoluent de manière proportionnelle ?
- 8) Est-ce que les branches de l'arbre sont régulières ?
- 9) Est-ce qu'il y a un rapport de proportionnalité dans la croissance de l'arbre ?
- 10) On se demande si l'arbre pousse de manière régulière
- 11) L'arbre grandit-t-il régulièrement ?
- 12) Y a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?
- 13) Comment on fait si ce n'est pas proportionnel ?
- 14) Peut-on inscrire le dessin de l'arbre dans un cercle ou le branchage dans un demi-cercle ? Où est le centre ? Est-ce que le diamètre de ce cercle grandit de façon proportionnelle ? Faudrait-il calculer son aire ?
- 15) Est-ce proportionnel ? (2 fois)
- 16) Est-ce que les branches poussent de manière régulière ?
- 17) L'arbre grandit-il proportionnellement chaque année ?
- 18) Est-ce que la taille des branches est proportionnelle à la taille de l'arbre ?
- 19) L'arbre grandit-il de façon proportionnelle chaque année ?
- 20) L'évolution de l'arbre est-elle régulière ?
- 21) Y a-t-il proportionnalité entre le nombre d'années et le nombre de branches ?
- 22) Est-ce que l'arbre pousse régulièrement ? Si oui, de combien il pousse chaque année ? Si non, quelle sera la taille maximale de l'arbre ?⁴⁸
- 23) Peut-on généraliser la croissance de l'arbre à partir de son évolution de 2013 à 2015 ? Autrement dit, grandit-il régulièrement ? (Proportionnellement ?)
- 24) Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ?
- 25) Sa taille est-elle proportionnelle à son âge ? Si oui est-ce toujours vrai ?
- 26) Y a-t-il un rapport entre la taille de la souche et la taille de l'arbre ? L'aire du tronc sur le dessin est-elle proportionnelle avec les années ?
- 27) La croissance de l'arbre est-elle régulière ?
- 28) L'arbre pousse-t-il proportionnellement ?
- 29) Est-ce que la taille de l'arbre évolue de manière proportionnelle (avec le même coefficient de proportionnalité chaque année ? ou est-ce qu'on ajoute toujours le même nombre ?

⁴⁸ Cette question aurait pu être classée également dans $Q_{\text{grandeurs}_M}$

- 30) Est-ce que la taille des nouvelles branches est proportionnelle à la taille des anciennes branches ?
- 31) L'arbre grandit-il proportionnellement ?
- 32) Est-ce que l'arbre pousse de manière régulière ?
- 33) Est-ce que la poussée de l'arbre est régulière ?
- 34) La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité ?
- 35) Est-ce que la taille et la largeur de l'arbre sont proportionnelles ?
- 36) Est-ce que la poussée de l'arbre est proportionnelle ?
- 37) Qu'est-ce que la proportionnalité ?
- 38) De combien de mètres évolue l'arbre chaque année ? L'arbre évolue-t-il proportionnellement chaque année ?
- 39) Si l'arbre ne pousse pas régulièrement, on ne pourra pas trouver de réponse. Qu'en pensez-vous ?
- 40) Les branches et le tronc grandissent-ils proportionnellement ?
- 41) Est-ce que la taille de l'arbre au fil des années est proportionnelle ?
- 42) La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle chaque année ?
- 43) Le diamètre du tronc double-t-il chaque année ?
- 44) La mesure de l'arbre double-t-elle chaque année ? (3 fois)
- 45) Pensez-vous que l'arbre double sa taille chaque année ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponses :

- 46) La croissance est-elle proportionnelle au temps ?
- 47) Est-ce que l'arbre aura une croissance régulière chaque année ?
- 48) Y a-t-il proportionnalité ?
- 49) Est-ce que l'arbre a une croissance régulière chaque année ?
- 50) Y a-t-il proportionnalité dans la croissance de l'arbre ?
- 51) Le rythme de croissance de l'arbre est-il régulier chaque année ?
- 52) La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité ?
- 53) La croissance suit-elle un principe de proportionnalité ?
- 54) Doit-on chercher une régularité dans l'évolution du nombre de branches ?
- 55) Doit-on chercher une régularité dans la croissance ?
- 56) Est-ce que la taille des nouvelles branches est égale à la moitié des branches précédentes ?
- 57) La largeur de l'arbre double-t-elle chaque année ? (2 fois)
- 58) Est-il possible de résoudre le problème ? Si oui, est-il résoluble par un produit en croix ?⁴⁹

Q_{modèle-modèle}

- 1) La croissance de l'arbre diminue-t-elle ?
- 2) Le nombre de branches augmente-t-il chaque année ?
- 3) Comment s'étendent ses racines et ses branches ?
- 4) Sachant que sa hauteur double en 2 ans et que sa largeur triple dans le même temps, est-ce qu'une serre cubique de 40m de côté sera suffisante ?
- 5) Comment trouver les angles entre les branches ? Est-ce utile ?
- 6) La ramure forme-t-elle une fractale ?
- 7) Y a-t-il un rapport avec les suites ou les fractales ?
- 8) Est-ce que c'est symétrique ?

⁴⁹ Nous avons interprété cette question comme relevant de la recherche d'un modèle de proportionnalité

- 9) *Y a-t-il un lien dans la progression des branches ? Sur une branche on rajoute 5 branches ? Sur 2 branches on rajoute 7 branches ?*
- 10) *Comment peut-on savoir la taille du tronc au fil des années ?*
- 11) *Est-ce que le tronc va grossir au même rythme que les branches ?*
- 12) *Est-ce que le tronc de l'arbre grandit toujours en hauteur et largeur ?*
- 13) *Chaque année (jusqu'à 2015), nous avons remarqué que l'envergure de l'arbre augmente de 1 m. Est-ce vrai pour les autres années ?*
- 14) *L'arbre grandit-il tous les ans ?*
- 15) *Les branches se multiplient – elles seulement par 2 ou par 3 ?*
- 16) *Comment évolue l'arbre chaque année ? En largeur, en hauteur, en nombres de branches, en volume ?*
- 17) *Est-ce que les branches évoluent de la même façon? Même question pour le tronc ?*
- 18) *Quelle est la probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches?*
- 19) *Une branche peut-elle se diviser en plus de 3 branches?*
- 20) *Est-ce que la pousse des branches est aléatoire ?*
- 21) *Quelle est la probabilité que d'une branche naissent 3 branches ?*
- 22) *Comment et de quelle manière pousse l'arbre ?*
- 23) *Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?*
- 24) *Est-ce que la séparation des branches est régulière?*
- 25) *En combien de branches se divise chaque branche chaque année ? Est-ce toujours en deux ou trois branches ? Y a-t-il une logique ou est-ce aléatoire ? (2 fois)*
- 26) *En ayant estimé la taille maximale de l'arbre peut-on encadrer la taille de la serre ?*
- 27) *Est-ce que les branches se construisent suivant un schéma précis ?*
- 28) *Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ? (2 fois)*
- 29) *Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?*
- 30) *L'arbre grandit-il de la même manière en largeur et en hauteur ?*
- 31) *Y a-t-il une méthode pour déduire le nombre de nouvelles branches chaque année ?*
- 32) *La proposition « on multiplie toutes les épaisseurs du tronc précédentes entre elles » est-elle valide ? (exemple année 4 : 2x3x6 mm).*
- 33) *Les branches nouvelles étant de plus en plus petites chaque année, comment calculer leur taille pour chaque année ?*
- 34) *Sait-on comment il grandit en un an ?*
- 35) *Comment savoir combien de branches poussent par années ?*
- 36) *Les branches poussent-elles vers les côtés ou vers le ciel ?*
- 37) *Les branches peuvent-elles se casser ?*
- 38) *Est-ce que les anciennes branches ne vont pas mourir ou/et tomber ?*
- 39) *Les branches grandissent au cours du temps ainsi que le tronc, peut-on estimer la pousse de chaque branche ?*
- 40) *Est-ce que le tronc grossit en fonction des années ?*
- 41) *Le nombre de nouvelles branches est-il toujours le même ?*
- 42) *Comment évolue l'épaisseur de l'arbre ?*
- 43) *Quand on compte les branches, doit-on compter toutes les branches (avec celles du milieu) ou seulement les nouvelles branches ?*
- 44) *Les branches sont-elles toujours de la même taille ?*
- 45) *Est-ce qu'une nouvelle branche peut pousser au milieu d'une autre ?*
- 46) *Est-ce que les branches de l'arbre peuvent pousser vers « l'intérieur » ?*
- 47) *En 2023, certaines branches vont-elles toucher le tronc ?*
- 48) *Est-ce que l'écartement entre deux branches est toujours le même ?*
- 49) *Est-ce que les branches auront toutes la même longueur?*
- 50) *De 2013 à 2014 d'après l'échelle on remarque que l'arbre a grandi de 1,40 m, et l'année suivante*

- de 70 cm, qui est la moitié de 1,40mètres. Sa croissance sera-t-elle divisée par 2 à chaque fois ?
- 51) Au cours des années l'arbre évoluera-t-il autant en longueur qu'en largeur ?
 - 52) Est-ce que le même nombre de branches sort chaque année ?
 - 53) Aura-t-il le même nombre de branches chaque année ?
 - 54) Aura-t-il toujours le même nombre de branches en plus chaque année ?
 - 55) Est ce que les branches se multiplient toujours de la même manière ?
 - 56) Les branches et le tronc grandissent-ils à la même vitesse ?
 - 57) Est-ce que les branches font toutes la même longueur ?
 - 58) L'arbre entier rentre dans un cercle, centré au sommet du tronc, de rayon 6,8cm pour 2014 et 9cm pour 2015, que peut-on en déduire ?
 - 59) Est-ce que l'arbre se développe qu'à l'extérieur, qu'au bord des branches ?
 - 60) L'arbre grandit-il de la même manière chaque année ? (2 fois)
 - 61) Est-ce que les branches ont le même schéma en continu ?
 - 62) Y a-t-il un schéma de croissance ?
 - 63) Comment et de quelle manière pousse l'arbre chaque année ?
 - 64) Est-ce que le tronc et les branches poussent toujours à la même vitesse? Si oui, de combien chaque année?
 - 65) Est-ce que l'arbre grandit dans toutes les directions ?
 - 66) Est-ce que chaque branche donne toujours naissance à d'autres branches et combien ?
 - 67) Peut-on faire un arbre de probabilités pour savoir s'il pousse 2 ou trois branches sur chaque ramification ?
 - 68) Quand les branches sont par trois l'une des trois est-elle la continuité de la branche d'avant ?
 - 69) Est ce que l'arbre grandit autant en longueur qu'en largeur ?
 - 70) Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?
 - 71) Comment compte-t-on le nombre de branches ?
 - 72) L'arbre penchera-t-il ?
 - 73) Est-ce que l'arbre penche ?
 - 74) Est-ce que l'arbre pousse droit ?
 - 75) L'arbre peut-il pousser de travers ?
 - 76) L'arbre pousse-t-il droit?
 - 77) L'arbre peut-il pousser "tordu"?
 - 78) Ne va-t-il pas mourir avant ? (2 fois)
 - 79) Est-ce que l'arbre peut mourir avant ?
 - 80) Est-ce que l'arbre peut mourir au cours des années ?
 - 81) Est-on sûr qu'il aura fini de grandir en 2023 ?
 - 82) Est-ce que l'arbre va grandir ?
 - 83) Est-ce que l'arbre peut rétrécir ?
 - 84) Continue-t-il de grandir après 2023 ?
 - 85) Va-t-il encore grandir après 2023?
 - 86) Comment fait-on pour savoir la taille de l'arbre en 2014 et 2015 ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponses :

- 87) Les branches de l'arbre grandissent-elles à la même vitesse?
- 88) Comment calculer le nombre de branches en 2023? (2 fois)
- 89) Peut-on supposer que l'arbre croît de 1 m par an en largeur?
- 90) Peut-on considérer que l'arbre s'élargit de 1 mètre par an?
- 91) Comment pousse-t-il chaque année ?
- 92) Existe-t-il une formule mathématique qui permette de calculer la taille de l'arbre en 2023?
- 93) Comment s'y prendre pour trouver la taille en 2023 ?

- 94) Est-ce que l'arbre peut arrêter de grandir certaines années ?
- 95) Comment trouver une méthode rapide et efficace pour le mesurer ?
- 96) Comment grandit-il en largeur ?
- 97) Qu'entend-on par "prévoir comment sera l'arbre"?

Q_{modèle-serre}

- 1) Quelle forme doit prendre la serre ?
- 2) A-t-on une forme obligatoire pour la serre ? Ronde, carrée, autre ?
- 3) Quelle sera la forme de la serre ? (4 fois)
- 4) La forme de la serre ?
- 5) Est-ce que la serre doit être cubique ou rectangulaire?
- 6) La forme du toit est-elle imposée ? (Plat ? Cône de révolution ? Prisme?)
- 7) La forme de la serre est-elle imposée ? (Base carrée, circulaire, rectangulaire?)
- 8) De quelle forme vaut-il mieux que la serre soit ?
- 9) Quelle doit être la forme de la serre ?
- 10) A quoi va ressembler la serre (dôme ou cube ou autre) ?
- 11) De quelle forme pourra être la serre ?
- 12) Quelle est la forme de la serre ? (2 fois)
- 13) De quelle forme doit-être la serre ?
- 14) Est-ce que la serre doit être construite au raz de l'arbre?
- 15) Est-ce qu'on prend une marge pour les dimensions de la serre ou on la fait pile à la taille de l'arbre ?

Q_{modèle-schéma}

- 1) Doit-on réaliser un schéma de l'arbre en 2023 ?
- 2) Est-ce qu'on peut s'appuyer pour faire nos calculs des mesures que nous pourrions faire sur le dessin, pour les angles et pour les longueurs ?
- 3) Peut-on représenter graphiquement la croissance de l'arbre? (2 fois)
- 4) L'arbre est-il plat ou en 3D ?
- 5) Doit-on travailler en 2D ? Ou en 3D ?
- 6) L'arbre grandit en 2D ou en 3D ?
- 7) Est-ce que toutes les branches ont été dessinées ?
- 8) Est-ce que les croquis sont exacts ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponses :

- 9) Peut-on mesurer avec une règle ?
- 10) Est-ce que les traits de la hauteur et de la largeur de l'arbre entre les extrémités doivent être perpendiculaires ?
- 11) Le croquis est-il dessiné chaque année en vrai?
- 12) Le croquis est-il dessiné chaque année à partir du même point de vue?

SELON L'INDICATEUR $Q_{grandeurs}$

$Q_{grandeurs}_I$

- 1) Doit-on tenir compte des racines de l'arbre ?
- 2) Doit-on compter dans la mesure de l'arbre la mesure des racines?
- 3) Doit-on trouver les dimensions de la serre ?
- 4) Est ce que le tronc augmente de taille en hauteur et aussi en diamètre ?
- 5) L'arbre a-t-il des feuilles et faut-il prendre les feuilles en compte ?
- 6) Existe-t-il une longueur maximale pour une branche ? (2 fois)
- 7) Pourquoi ne donne-t-on pas la hauteur de l'arbre? (2 fois)
- 8) Qu'est-ce qu'on entend par hauteur et largeur de l'arbre?
- 9) Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?
- 10) Faut-il mesurer la longueur et/ou la largeur ou faut-il mesurer la totalité de l'arbre (branches, tronc...) ?
- 11) Est-ce qu'on compte que les nouvelles branches ou toutes les branches ?
- 12) Faut-il calculer la hauteur du tronc et des branches séparément ou tout ensemble ?
- 13) Faut-il mesurer l'arbre en largeur, en hauteur?
- 14) Est-ce que l'on compte les branches dans la taille de l'arbre ?
- 15) Est-ce que les branches grandissent chaque année ?⁵⁰
- 16) Est-ce que des branches sont plus petites que d'autres ?
- 17) Est-ce que les branches de l'arbre vont grossir en largeur ?
- 18) Nous nous demandons si cela est nécessaire de connaître à la fois la hauteur et la largeur de l'arbre.
- 19) Faut-il chercher le nombre de branches en 2023 ?
- 20) Le tronc est-il une branche ? (pas très mathématique mais important pour le dénombrement des branches)
- 21) Est-ce que le tronc grossit jusqu'à la maturité de l'arbre?⁵¹
- 22) Est-ce que l'on doit calculer sa largeur ?
- 23) Est-ce que le tronc augmente (en épaisseur) ?
- 24) Il faut répondre à quelle question ? Ça veut dire quoi « comment sera l'arbre ... »
- 25) Faut-il mesurer les branches ?
- 26) Que se passe-t-il si la serre n'est pas assez grande ?
- 27) Doit-on prendre en compte que la hauteur ou aussi la largeur ?
- 28) Y a-t-il des branches qui meurent et qui tombent ?
- 29) Les branches déjà formées continuent-elles de pousser ?
- 30) Est-ce que les branches continuent de pousser ?
- 31) Faudra-t-il couper des branches ?
- 32) Est-ce que des branches vont tomber ?
- 33) Est-ce que de nouvelles branches vont pousser sur le tronc ?
- 34) Quelles mesures devons-nous traiter sa taille en largeur ou en hauteur ?
- 35) Est ce que le tronc de l'arbre s'arrête de grandir avant 2023 ?
- 36) Que doit-on étudier le nombre de branches, la hauteur, la largeur ?
- 37) Y aura-t-il une période de stagnation entre 2013 et 2023 ?
- 38) Taille-t-on l'arbre ?
- 39) Est ce que durant les années, on a taillé l'arbre ?

⁵⁰ Cette question aurait pu être classée dans $Q_{modèle-modèle}$

⁵¹ Cette question aurait pu être classée dans $Q_{modèle-modèle}$

- 40) Est-ce que les botanistes vont tailler des branches ?
- 41) Est-ce que les botanistes taillent l'arbre ?
- 42) Les botanistes vont-ils tailler l'arbre ?
- 43) Peut-on tailler l'arbre ?
- 44) L'arbre va-t-il être taillé ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponse :

- 45) Est-ce que le nombre de branches peut nous aider ?
- 46) Est-ce qu'il faut calculer le nombre de nouvelles branches chaque année ?
- 47) L'écart des branches est-il toujours le même ? (les angles entre les branches)
- 48) Est-ce que les futures pousses correspondront forcément aux bourgeons visibles sur le dessin ?
- 49) Est-ce que les branches peuvent ne pas donner d'autres branches ?
- 50) La largeur est-elle importante ?
- 51) Faut-il mesurer tout l'arbre ou juste la hauteur ?
- 52) Doit-on étudier le volume ?

Qgrandeurs_M

- 1) Combien de feuilles vont pousser par an?
- 2) De quelle hauteur grandit l'arbre par an?
- 3) De combien s'élargit le tronc par an?
- 4) Combien de branches poussent par an?
- 5) Quelle est la taille de l'arbre à sa maturité ?
- 6) Combien y-a-t-il de nouvelles branches sur l'arbre en une année ?
- 7) Quand il y a de nouvelles branches, quelle taille prennent-elles chaque année ?
- 8) Quelle taille fera l'arbre en 2023 ? (3 fois)
- 9) Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?
- 10) De combien de cm pousse l'arbre en une année ? (2 fois)
- 11) De quelle hauteur l'arbre augmente chaque année ?
- 12) Quelles sont les dimensions réelles de l'arbre en novembre 2013 ? 2014 ? 2015 ? (2 fois)
- 13) Connaît-on la largeur de l'arbre en 2023 ?
- 14) Combien y a-t-il de branches qui poussent chaque année et est-ce que c'est toujours la même chose ?
- 15) Combien d'années dure la croissance de l'arbre ?
- 16) Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?
- 17) Quelle est la hauteur de l'arbre en nov. 2013 ?
- 18) De combien grandit l'arbre chaque année? (en largeur et en hauteur)
- 19) En 2013, combien mesure le tronc de l'arbre?
- 20) Combien y-aura-t-il de branches à maturité?
- 21) De combien pousse l'arbre chaque année?
- 22) Quelle est la taille précise (hauteur et largeur) de l'arbre? Échelle pas assez précise
- 23) Combien de branches font naître chaque branche ?
- 24) Quelle est la durée de la croissance ?
- 25) De combien grandit l'arbre par an ? En mètre...
- 26) Est-ce que le tronc grandit de 1 mm en largeur chaque année (sur le dessin) ?
- 27) En 2013, l'arbre mesure un mètre en longueur ou en largeur?

- 28) L'arbre en novembre 2014 mesure combien de plus que l'année précédente? En hauteur, en largeur?
- 29) Grandit-il de 25 cm chaque année ?
- 30) De combien de mètres l'arbre va-t-il grandir chaque année ?
- 31) Combien l'arbre mesurera-t-il en 2023 ?
- 32) Combien y aura-t-il de branches en 2023 ?
- 33) Combien de mètres en envergure gagne un arbre sur une année ?
- 34) Quelle sera la hauteur de l'arbre en 2023 ?
- 35) La serre doit être plus grande que l'arbre, de combien de mètres ?
- 36) Combien de branches se rajoutent-elles chaque année ?
- 37) Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?
- 38) Quel est le diamètre du tronc chaque année ?
- 39) Combien de centimètres prennent les branches chaque année ?
- 40) Quel sera le périmètre de l'arbre chaque année ?
- 41) De quelle longueur grandit chaque branche chaque année?
- 42) De combien de centimètres évolue l'arbre chaque année ?
- 43) Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?
- 44) Quelle est la distance à respecter entre la serre et l'arbre ?
- 45) Quelle est sa croissance moyenne annuelle ? (2 fois)
- 46) De combien de cm les branches grandissent-elles chaque année ?
- 47) De combien de branches augmente l'arbre chaque année ?
- 48) Combien y aura-t-il de branches en 2023?
- 49) Quelle est la hauteur de l'arbre en 2023 ?
- 50) Combien de mètres faut-il entre l'arbre et la serre ?
- 51) Combien l'arbre prend de centimètres en hauteur et en largeur chaque année ?
- 52) De combien l'arbre grandit-il chaque année?
- 53) De combien de largeur gagne l'arbre chaque année ?
- 54) Combien de branches poussent chaque année ?
- 55) En 2023, l'arbre aura-t-il toujours 3 branches principales ?
- 56) Peut-on connaître les dimensions de l'arbre en 2013, en 2014 et en 2015?
- 57) En une génération, de quel pourcentage la taille des branches diminue ?
- 58) De combien de centimètres l'arbre grandit tous les ans?
- 59) Combien de cm prend-t-il chaque année ?
- 60) Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il à la toute fin ? (3 fois)
- 61) De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?
- 62) Combien l'arbre mesure-t-il la première année ?
- 63) Combien de branches s'ajoutent à chaque fois ?
- 64) Sur le même plan, quelle est la hauteur et la largeur de l'arbre en 2016 ?
- 65) Quelles sont les mesures possibles pour un angle formé par deux branches ?
- 66) À partir de quelle année l'arbre réduit-il sa croissance ?
- 67) Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?
- 68) Combien mesure l'arbre en 2014 ?
- 69) De combien de mètres ou centimètres pousse l'arbre par an ?
- 70) Pourquoi l'arbre en 2014 a pris 6 branches et en 2015 14 branches ?
- 71) Quelle est la longueur des branches ?
- 72) En 2016, combien de mètres mesurera-t-il ?
- 73) De combien de mètres grandit le tronc chaque année ?
- 74) Combien d'étapes d'évolution jusqu'en 2023 ? (2 fois)
- 75) Quelle forme ont les feuilles? Quelle taille ?
- 76) Quelle est la forme de ses feuilles ?

- 77) Est-ce que l'arbre grandira régulièrement ? De combien l'arbre grandit-il chaque année ?⁵²
- 78) Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?
- 79) Pourquoi ne pas construire tout de suite une serre de 10 à 15 m pour être sûr que ça soit assez grand ?
- 80) Chaque année, combien de branches nouvelles pousse-t-il ?
- 81) Combien l'arbre prendra-t-il de centimètres chaque année ?
- 83) Combien faut-il de branches en 2016 ?
- 84) Combien mesure chaque branche ?
- 85) Combien l'arbre prend-il de m par an ?
- 86) Est ce qu'en 2023, la largeur de l'arbre sera de 10 m ?
- 87) Est ce que sa hauteur sera de 3 m ?
- 88) Quelle est la taille de l'arbre au départ ?
- 89) Pourquoi ne pas construire une serre assez grande de 75m pour être sûr que ça rentre ?
- 90) Combien mesure le premier arbre ?
- 91) De combien grandit-il chaque année ?
- 92) Quelle taille et quel format aura l'arbre en 2023 ?
- 93) Quelle sera la taille (hauteur et largeur) de l'arbre en 2023 ?
- 94) Ses racines grandissent de combien par année ?
- 95) Combien de temps met-il pour grandir d'un mètre ? (après on multipliera pour trouver sa taille en 2023)
- 96) Quelles sont les dimensions hauteur et largeur chaque année ?
- 97) Quelle est la distance entre chaque intersection de branches chaque année ?
- 98) De combien de cm grandissent les branches chaque année ?
- 99) Est-ce que la croissance entre 2013 et 2014 est la même qu'entre 2014 et 2015 ?
- 100) Combien mesure l'angle de chaque branche ?
- 101) Quelle proportion doit avoir le volume de la serre par rapport au volume de l'arbre ?
- 102) Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?
- 103) Combien de branches y aura-t-il dans l'arbre en 2023 et quelle sera sa taille ?
- 104) Quelle doit-être la hauteur de la serre ? Doit-on respecter des distances entre la serre et l'arbre ?
- 105) Combien mesurera l'arbre en 2019 ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponses :

- 106) Combien de branches faut-il rajouter chaque année ?
- 107) De combien de branches grandit-il ?
- 108) Combien il y aura de branches en 2023 ?
- 109) Combien de branches aura l'arbre en 2023 ?
- 110) Combien de branches poussent chaque année ?
- 111) Combien rajoute-t-on de branches entre 2015 et 2016 ?
- 112) Y a-t-il 68 branches en 2016 ?
- 113) De combien les branches grandissent-elles chaque année ?
- 114) De combien de mètres poussent les branches chaque année ?
- 115) De combien de centimètres les branches poussent-elles par an ?
- 116) Combien mesurera l'arbre en hauteur, en largeur, en épaisseur, combien aura-t-il de branche en 2023 ? Tout cela est-il proportionnel ?⁵³
- 117) Grandit-il d'un mètre chaque année ?

⁵² Cette question aurait pu être classée dans Q_{modèle-proportionnalité}

⁵³ Cette question aurait pu être classée dans Q_{modèle proportionnalité}

- 118) Le tronc s'épaissit-il de 2 mm en 2016 ?
- 119) Quelles étaient les dimensions de l'arbre en 2013, 2014 et 2015? (2 fois)
- 120) Quelle est sa longueur en 2023 ? Son épaisseur ou sa largeur ?
- 121) Quelle est la largeur de l'arbre ?
- 122) Quelle est la hauteur de l'arbre ?
- 123) Connaît-on la largeur du l'arbre en 2023 ?
- 124) Quelle largeur prend l'arbre chaque année ?
- 125) Quelles sont les dimensions de l'arbre en 2013, en 2014 et en 2015?
- 126) Sera-t-il de 10 m?
- 127) De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?
- 128) Combien de mètre gagne l'arbre chaque année ?
- 129) Combien de centimètre ou mètre l'arbre prend-il par an ?
- 130) Combien mesurera-t-il en 2016, 2017, 2018, 2019... ? Y a-t-il un lien ?
- 131) Est ce qu'en 2023, la largeur de l'arbre sera de 10 m?
- 132) De combien de mètres grandit-il chaque année ?
- 133) De quelle hauteur est-il chaque année ?
- 134) Avec quel(s) outil(s) peut-on mesurer l'arbre ?
- 135) Toutes les branches sont inscrites dans des cercles qui se coupent au sommet du tronc. Comment mesurer le rayon ou le diamètre de ces cercles ?
- 136) Quel doit être l'écart entre l'arbre et la serre ?
- 137) Existe-t-il une taille maximale pour la serre?
- 138) Pourquoi ne donne-t-on pas la hauteur de l'arbre ?

Qgrandeurs_E

- 1) Qu'indique le "1mètre" au-dessus de la représentation de l'arbre en novembre 2013 ?
- 2) L'échelle peut-elle être utilisée peu importe la direction dans laquelle on mesure ?
- 3) Quelle est la signification, exacte du dessin « 1 m » ?
- 4) L'échelle est-elle de 1 m pour 2,8cm, 2,9 cm ou 3cm?
- 5) Par combien faut-il multiplier les dimensions, en centimètre, pour obtenir les dimensions en mètre ?
- 6) 1cm du dessin= combien de mètres en vrai ?
- 7) L'échelle donne 1 mètre, mais est-ce 1 mètre de hauteur ou de largeur ?
- 8) Quel calcul faut-il faire pour convertir les centimètres en mètres dans le dessin ?
- 9) Quelle est l'échelle d'un mètre dans le problème ?
- 10) Peut-on mesurer avec la règle ? Est-ce la bonne mesure si on travaille avec l'échelle ?
- 11) L'échelle qualifie la hauteur ou la largeur ?
- 12) L'échelle est-elle vraiment précise ?
- 13) Est-ce que les croquis sont représentés à l'échelle réelle ?
- 14) Les croquis sont-ils à l'échelle ?
- 15) Les trois croquis sont-ils à la même échelle? (2 fois)
- 16) Le schéma est-il à l'échelle ?

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponse :

- 17) Peut-on utiliser le segment "1 m" pour prendre des mesures sur les trois arbres, ou signifie-t-il simplement que la largeur de l'arbre en 2013 était 1 m?
- 18) La côte "1 mètre" est-elle valable dans toutes les directions?

SELON L'INDICATEUR *Q*contexte

*Q*contexte-F

- 1) Est-ce que l'arbre a des feuilles ?
- 2) L'arbre a-t-il des feuilles ou des épines ? De quelles tailles ?
- 3) L'arbre a-t-il des feuilles ? Perd-il ses feuilles en hiver ?
- 4) Est-ce que l'arbre possédera des feuilles ?
- 5) Est-ce que l'arbre aura des feuilles ? (3 fois)
- 6) A-t-il des fleurs ou feuilles ou fruits ?
- 7) Est-ce que l'arbre a ou aura des feuilles ?
- 8) Est-ce qu'il y a des feuilles ?
- 9) L'arbre a-t-il des fruits, des feuilles assez grosses ? (ils prennent de l'espace à compter ou non dans les dimensions ?)⁵⁴
- 10) L'arbre aura-t-il des feuilles ? Des fruits ?
- 11) Est-ce que l'arbre aura des feuilles ? Des fleurs ?
- 12) Est-ce qu'il y aura des feuilles ou des fruits qui pousseront sur l'arbre ?
- 13) L'arbre est-il un arbre fruitier ?
- 14) Est-ce que cet arbre est un arbre fruitier ? Si oui, est-ce que ses fruits sont gros ?
- 15) Est-ce qu'il y aura des fruits ?
- 16) Est-ce un arbre fruitier ? Un conifère ?
- 17) Va-t-il fournir des fruits ? Forme et taille des fruits ?
- 18) Est-ce que cet arbre va avoir des feuilles ? Si oui vont-elles tomber ?
- 19) Est-il caduque, résineux où persistant ?
- 20) Est-ce que l'arbre va fleurir ?
- 21) Va-t-il fleurir ? Forme et taille des fleurs ?
- 22) L'arbre fait-il des fleurs ?
- 23) L'arbre a-t-il des fleurs, des feuilles, des fruits ?
- 24) L'arbre pousse-t-il dans l'hémisphère nord ou sud, autrement dit, possède-t-il des feuilles, des aiguilles ?
- 25) Est-ce qu'il y a des animaux sur l'arbre ? Si oui vont-ils faire des nids ?
- 26) Doit-on protéger les racines de l'arbre qui sortiraient du sol ?

*Q*contexte-Besoins

- 1) Les conditions climatiques de la serre sont-elles les mêmes que celles de son pays d'origine ?
- 2) A-t-il besoin d'un environnement spécial pour atteindre sa maturité ?
- 3) Est-ce que l'arbre a besoin de lumière pour pousser ?
- 4) L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?
- 5) Combien de fois faut-il l'arroser ?
- 6) Le fait de mettre l'arbre sous serre va-t-il modifier sa croissance naturelle ?
- 7) Quelles conditions climatiques devront respecter la serre (humidité, chaleurs,...) ? Quels sont les apports d'eau dont requiert l'arbre afin d'optimiser sa croissance ? Dans quel type de terre l'arbre se développe-t-il ? Est-ce un arbre fruitier ?
- 8) La météo, la pollution peuvent-elles faire varier la croissance de l'arbre ?

⁵⁴ Cette question aurait pu être classée dans *Q*gardeurs-I

- 9) Nous pensons que l'arbre va grandir et changer à chaque saison, êtes-vous d'accord avec nous ?
- 10) La croissance dépend-elle de la quantité d'engrais ou du climat ?
- 11) Quelles ont été les températures moyennes en 2013, 2014 et 2015 ?
- 12) La présence de la serre va-t-elle avoir une influence sur la croissance ?
- 13) L'environnement du Jardin des Plantes est-il semblable à l'environnement initial de l'arbre ?
- 14) Faut-il prévoir une alimentation en eau ? Un système de ventilation ?
- 15) L'orientation de la serre est-elle importante ?
- 16) A quoi sert une serre ?
- 17) Faut-il prévoir la place pour un seul arbre ?
- 18) Y a-t-il un budget à respecter pour la construction de la serre ? Pour l'entretenir ?
- 19) L'arbre a-t-il des besoins particuliers (terre spéciale, apport en eau ...) ?
- 20) L'arbre a-t-il des besoins spéciaux ? (Terre, eau, chaleur...)
- 21) L'arbre a-t-il besoin d'un traitement particulier ?
- 22) Dans quelles conditions de vie peut-il vivre ? Lui faut-il un environnement adapté ? (T°, terre, humidité ...) Est-il sensible aux changements brusques de températures ?
- 23) Est-il à l'ombre ou au soleil ?
- 24) Le matériau de la serre ou sa couleur influencent-ils la pousse de l'arbre (favorisation de la photosynthèse, maintien d'une température optimale,...).
- 25) Est-ce que l'arbre peut pousser de manière irrégulière par rapport aux saisons ?
- 26) Est-ce possible de faire une serre démontable ? Ou avec un toit amovible par exemple ?
- 27) Si on arrose l'arbre et que l'on le met au soleil : est-ce qu'il poussera plus vite ? Et en hiver ?
- 28) Est-ce que les botanistes mettent de l'engrais ?
- 29) Est-ce qu'on mettra de l'engrais ?
- 30) Est-ce que les botanistes vont mettre de l'engrais sur l'arbre ?
- 31) Met-on de l'engrais ?
- 32) Donne-t-on de l'engrais à l'arbre ?
- 33) Est-ce que les botanistes ont coupé des branches pour que l'arbre pousse mieux ?⁵⁵
- 34) Ne risquerait-il pas de mourir avant 2023 ? (Adaptation d'un arbre exotique au climat méditerranéen ?)

Qcontexte-Arbre

- 1) Qu'est-ce qu'un arbre exotique ?
- 2) L'arbre craint-il une certaine espèce d'insecte ?
- 3) Les 3 premières années a-t-il grandi dans une serre ?
- 4) Pourquoi l'arbre est-il schématisé en novembre ?
- 5) L'arbre peut-il être malade ? (et est-ce que la maladie peut influencer sur sa croissance ?)
- 6) L'arbre peut-il nuire à d'autres arbres ou plantes, ou à la faune autour de lui ?
- 7) Peut-il se faire infesté de parasites ?
- 8) A-t-il des problèmes de croissance ou de maladie ?
- 9) A-t-il des racines ?⁵⁶
- 10) Comment sera l'arbre en 2023 ?
- 11) Pourquoi est-il exotique ?
- 12) Connaissez-vous l'origine de cet arbre et comment peut-il survivre ?
- 13) Comment imaginez-vous l'arbre en 2023 ?

⁵⁵ Cette question aurait pu être classée dans Qgrandeurs-I

⁵⁶ Cette question aurait pu être classée dans Qgrandeurs-I

- 14) *En 2023, nous pensons que l'arbre sera mature, il aura 11 ans. Êtes-vous d'accord avec nous ?*
- 15) *Est-ce qu'on va s'occuper de l'arbre de la même manière tout au long de sa vie ?*
- 16) *Peut-on faire une comparaison avec une espèce d'arbre connue? (2 fois)*
- 17) *Connaît-on des espèces d'arbres semblables et qui pourraient nous servir d'élément de comparaison ?*
- 18) *Cet arbre a-t-il des points communs avec des arbres exotiques déjà connus ?*
- 19) *A quoi ressemblera l'arbre en 2023 ?*
- 20) *Est-il possible d'avoir la photo de l'arbre pour l'année 2016 ?*
- 21) *Avez-vous une photo de l'arbre s'il existe ?*
- 22) *A-t-on trouvé cet arbre à côté d'une rive ou dans une forêt ?*
- 23) *Comment savez-vous qu'il va vivre jusqu'à 2023 ?*
- 24) *Quel est l'âge de l'arbre en 2013 ?*
- 25) *Quel âge à l'arbre ?*
- 26) *L'arbre en 2013 a quel âge ?*
- 27) *En quelle année a-t-il été planté?*
- 28) *Est-ce que les racines de l'arbre seront grandes ?*
- 29) *L'arbre a-t-il des racines qui peuvent perturber le sol ?*
- 30) *Peut-on lui inventer un nom ?*
- 31) *Comment s'appelle cette espèce d'arbre ?*
- 32) *A-t-on donné un nom à cette nouvelle espèce?*
- 33) *Quel genre de graine a-t-on planté?*
- 34) *D'où vient l'arbre? (2 fois)*
- 35) *Dans quel pays pousse-t-il ?*
- 36) *Dans quel milieu vit l'arbre ?*
- 37) *Dans quelle terre pousse l'arbre?*
- 38) *De quelle espèce est l'arbre ? (2 fois)*
- 39) *Quelle est cette nouvelle espèce ?*
- 40) *Dans quel environnement vit l'arbre?*
- 41) *Quelle est la nature de l'arbre ?*
- 42) *D'où vient l'arbre exotique inconnu rapporté par les botanistes du jardin des plantes ?*
- 43) *Est-ce vraiment un arbre ou une autre plante ?*

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponse :

- 44) *Pouvons-nous avoir des indications sur l'évolution de l'arbre ?*
- 45) *À quoi ressemblera-t-il quand il sera à maturité ?*
- 46) *Quel âge peut-il atteindre ?*
- 47) *Où pourrait-on voir le vrai arbre? (2 fois)*
- 48) *D'où vient-il ?*
- 49) *Peut-on connaître l'année de naissance de l'arbre?*
- 50) *Quel âge avait l'arbre lorsqu'il a été planté ?*
- 51) *Cette espèce a-t-elle un nom? Quel est son pays d'origine?*

Q_{contexte-Maturité}

- 1) *Qu'est-ce que le mot maturité ? Est-ce que la maturité veut dire la taille ?*
- 2) *Que veut dire la maturité pour un arbre ?*
- 3) *Qu'est-ce que la maturité?*

- 4) *Est-on sûr que l'arbre aura atteint sa maturité en 2023 ?*
- 5) *Comment savez-vous que l'arbre atteindra sa maturité en 2023 ?*
- 6) *Comment sait-on que la maturité sera atteinte en 2023?*
- 7) *Est-on sûr qu'il sera à maturité en 2023 ?*
- 8) *Est-ce que l'estimation de la maturité est précise ?*
- 9) *Est-ce que l'âge de maturité est vraiment 2023 ?*
- 10) *L'arbre peut-il encore grandir après sa maturité?*

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponse :

- 11) *Lors de la maturation de l'arbre y a-t-il des paliers de croissance ?*

Q_{contexte-Botaniste}

- 1) *Qu'est-ce que les botanistes ont fait depuis 2013 ?*
- 2) *Que veulent construire les botanistes ?*
- 3) *Est-ce que les botanistes ont des renseignements sur l'arbre (début) ?*
- 4) *Comment les botanistes savent-ils que l'arbre sera mature en 2023 ?*
- 5) *Comment les botanistes ont trouvé cet arbre ?*
- 6) *Si l'arbre est inconnu, comment les chercheurs ont-ils pu estimer son âge de maturité ?*
- 7) *Si les chercheurs ont laissé l'arbre dehors tout le temps, comment pouvaient-ils savoir qu'un changement brusque de température n'allait pas tuer l'arbre ou lui implanter des maladies ?*
- 8) *Les botanistes créeront ils la serre maintenant ou à la maturité de l'arbre ?*

Les questions suivantes n'ont pas obtenu de réponse :

- 9) *Sur quoi se basent les botanistes pour estimer la maturité en 2023?*

A partir des indicateurs $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} , nous avons classé toutes les questions, exceptées les quatre suivantes. Ces questions ne montrent pas de travail de mathématisation horizontale mais relèvent de questions de vocabulaire. Nous les regroupons dans un groupe nommé $Q_{\text{vocabulaire}}$.

Q_{vocabulaire}

- 1) *Qu'est-ce qu'un botaniste ? (2 fois)*
- 2) *Qu'est-ce que qu'une serre ?*
- 3) *Que veut dire le mot serre ?*
- 4) *Que veux dire le mot botaniste ?*

Annexe 13 Classement des questions selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale et réponses associées

SELON L'INDICATEUR $Q_{\text{modèle}}$

$Q_{\text{modèle}}$ -Proportionnalité

1) *Est-ce que l'arbre grandit proportionnellement ?*

R1 : Non, l'arbre ne grandit pas proportionnellement car nous avons fait des mesures :

Années Hauteur max. de l'arbre (en cm, sur le schéma)

2013 4,7

2014 7,1

2015 8,6

De 2013 à 2014, il a grandi de 2,4 cm (sur le schéma) et seulement de 1,5 ensuite de 2014 à 2015.

2) *La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle ?*

R1 : D'après les dessins, la croissance n'est pas proportionnelle

R2 : Nous pensons que l'arbre croît de manière linéaire.

R3 : Non ce n'est pas linéaire si on prend l'échelle.

R4 : La largeur est proportionnelle en revanche la hauteur ne l'est pas.

R5 : Non, car aucun arbre ne grandit de façon aussi régulière

De plus, l'arbre grandit plus entre 2013 et 2014 qu'entre 2014 et 2015

R6 : La croissance n'est pas proportionnelle : on peut le calculer sur les trois premières années.

R7 : La croissance n'est pas proportionnelle car un être vivant n'a pas une croissance proportionnelle par exemple la croissance des humains n'est pas proportionnelle à l'âge.

R8 : La croissance n'est pas proportionnelle car elle dépend de plusieurs facteurs : notre manière de l'entretenir, la température, l'ensoleillement, l'arrosage.

3) *Est-ce que la croissance de l'arbre se fait de manière linéaire (proportionnelle) ou selon un autre modèle ?*

R1 : Oui, nous pensons que la croissance est proportionnelle.

R2 : Nous pensons que l'arbre croît de manière linéaire.

R3 : Non ce n'est pas linéaire si on prend l'échelle.

R4 : La largeur est proportionnelle en revanche la hauteur ne l'est pas.

4) *L'arbre a-t-il une croissance proportionnelle à l'année (en hauteur, en largeur et en envergure) ?*

R1 : Oui, il double chaque année.

R2 : Non, car aucun arbre connu ne pousse de manière régulière

5) *De quelle façon l'arbre pousse-t-il ? Grandit-il de manière régulière ou irrégulière ? Est-ce*

qu'un arbre a des poussées de croissance ?

R1 : L'arbre pousse en longueur et en largeur, nous ne pensons qu'il pousse de manière régulière.

R2 : L'arbre pousse plus au printemps qu'aux autres saisons. Sa poussée de croissance dépend de la météo. Il pousse moins en hiver. Il doit donc avoir des poussées de croissance.

R3 : L'arbre pousse droit et grandit de manière régulière.

6) A-t-il une poussée régulière?

R1 : En hauteur apparemment chaque année il pousse de 0,2m

R2 : Non il ne pousse pas régulièrement. Donc on ne sait pas quelle sera sa taille en 2023.

7) Est ce que les arbres évoluent de manière proportionnelle ?

R1 : Compte-tenu du contexte naturel les arbres n'évoluent pas de manière proportionnelle, mais pour la résolution on va considérer que oui.

R2 : Non car en 2013 il a poussé de 3,2 cm en largeur alors qu'en 2014 il a poussé de 2,1 cm
En 2013 il a poussé de 2,6 cm en hauteur alors qu'en 2014 il a poussé de 1,3 cm

8) Est ce que les branches de l'arbre sont régulières ?

R1 : Non car les branches vont donner 2 ou 3 branches. Il nous semble qu'il y ait une relation logique dans le nombre de branches et d'une année sur l'autre

R2 : Non, car d'abord les branches continuent de pousser, puis chaque branche donne naissance à deux ou trois branches.

9) Est-ce qu'il y a un rapport de proportionnalité dans la croissance de l'arbre ?

R1 : Non : ils ont essayé de le prouver en faisant des mesures mais ils n'ont pas encore abouti ! Le tronc lui semble grandir de manière proportionnelle 0,2 m par an.

R2 : On n'a pas trouvé un rapport de proportionnalité.

10) On se demande si l'arbre pousse de manière régulière

R1 : On a mesuré la hauteur et la largeur de chaque arbre :

en 2013 : l = 3,5 cm ; h = 5,1 cm ; t = 3,3 cm

en 2014 : l = 6,8 cm ; h = 7,6 cm ; t = 3,9 cm

en 2015 : l = 9,1 cm ; h = 9,2 cm ; t = 4,3 cm

Mais on se demande si l'arbre pousse de manière régulière. On ne sait pas, on pense qu'il va falloir faire une hypothèse. Par exemple, une année il peut moins pousser parce qu'il pleut moins.

R2 : On pense que les botanistes vont s'en occuper de la même manière chaque année, il va grandir « normalement ».

R3 : On pense que le nombre de branches évolue de manière régulière, on peut le prévoir. Par contre, on pense qu'il ne grandit pas toujours de la même manière (la hauteur n'est pas régulière)

11) L'arbre grandit-il régulièrement ?

R1 : Non, l'arbre ne grandit pas régulièrement.

R2 : L'arbre ne grandit pas régulièrement. En 2013, sur le schéma, il mesure 3cm, en 2014 6,4cm et en 2015 8,6cm.

12) *Y-a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?*

R1 : En utilisant l'échelle 3 cm sur le dessin = 1 m en réalité, on peut mesurer l'arbre chaque année, et on voit que le coefficient pour passer d'une année à une autre n'est pas constant, donc il n'y a pas proportionnalité.

R2 : Non il n'y a pas proportionnalité.

13) *Comment on fait si ce n'est pas proportionnel ?*

R1 : Bonne question...

R2 : On cherche autre chose : on part du principe qu'il doit y avoir une suite logique. (Les 1ères ont pensé à une fonction). Nombre de branches à ajouter chaque année : on pense qu'il faut additionner le nombre de branches en plus de l'avant-dernière année avec 2 fois celles de l'année précédente. Formule : $a+2b=c$ (a année 2013, b année 2014, c année 2015). Taille des branches : on a trouvé une formule : $a+b=c$ (taille en cm)

- après vérification par le calcul : taille, tronc, hauteur ne sont pas proportionnels.

- encadrement de l'arbre par un rectangle chaque année : le rectangle tend vers un carré sur les 3 années.

14) *Peut-on inscrire le dessin de l'arbre dans un cercle ou le branchage dans un demi-cercle ? Où est le centre ? Est-ce que le diamètre de ce cercle grandit de façon proportionnelle ? Faudrait-il calculer son aire ?*

R1 : Certains ont essayé avec un demi-cercle pour les branches, le centre du cercle étant le point de ramification des premières branches. Certains ont essayé d'englober l'arbre total d'un cercle complet, mais le centre du cercle évolue chaque année. On n'a pas testé la proportionnalité du rayon.

15) *Est-ce proportionnel ?*

R1 : Quoi ?!

R2 : Si on prend les mesures des trois arbres, on ne trouve pas de coefficient constant, donc il n'y a pas proportionnalité.

R3 : Oui c'est proportionnel car sinon on ne peut pas répondre au problème.

R4 : La taille de l'arbre n'est pas proportionnelle à son âge, nous avons mesuré l'arbre chaque année en l'encadrant dans un rectangle, et les dimensions du rectangle chaque année ne sont pas proportionnelles (il tend à devenir un carré)

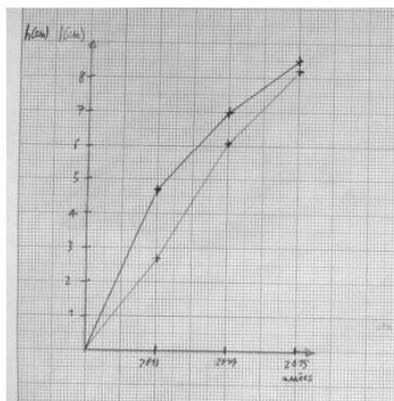
16) *Est-ce que les branches poussent de manière régulière ?*

R1 : Non car elles ne se développent pas en même temps et de la même manière.

17) *L'arbre grandit-il proportionnellement chaque année ?*

R1 : Non, s'il y avait proportionnalité, le coefficient de changement de taille serait constant, or $2,6/1,7$ est différent de $3/2,6$.

R2 : Nous pensons que l'arbre ne grandit pas proportionnellement à son âge, car quand il aura atteint sa maturité, il grandira moins vite qu'avant (dans ses premières années). Nous avons pensé faire une analogie avec la croissance d'un être humain. Certains élèves l'ont prouvé en dessinant un graphique.



18) Est-ce que la taille des branches est proportionnelle à la taille de l'arbre ?

R1 : Il faudrait mesurer, mais ça n'aidera pas à résoudre le problème.

R2 : Non, car les branches n'ont pas la même taille entre elles.

19) L'arbre grandit-il de façon proportionnelle chaque année?

R1 : La hauteur augmente de 0,8 m entre la première et la deuxième année, de la 2ème à la 3ème: environ 0,5 m. Il ne semble pas que l'arbre grandisse de façon proportionnelle chaque année.

R2 : Selon les 3 années présentées, on ne pense pas que l'arbre grandisse de façon proportionnelle.

20) L'évolution de l'arbre est-elle régulière ?

R1 : Non au vu des croquis, il nous semble qu'il pousse de moins en moins.

21) Y a-t-il proportionnalité entre le nombre d'années et le nombre de branches ?

R1 : Non il n'y a pas proportionnalité. La première année, il y a 3 branches, la deuxième année, il y a 7 branches. La troisième année, il y a 17 branches.

22) Est-ce que l'arbre pousse régulièrement? Si oui, de combien il pousse chaque année? Si non, quelle sera la taille maximale de l'arbre?⁵⁷

R1 : L'arbre pousse de manière irrégulière. On ne peut pas savoir la taille maximale de l'arbre

R2 : Vu les schémas, on pense que l'arbre ne pousse pas régulièrement. On ne connaît pas sa taille maximale.

23) Peut-on généraliser la croissance de l'arbre à partir de son évolution de 2013 à 2015 ? Autrement dit, grandit-il régulièrement ? (Proportionnellement?)

R1 : Chaque année chaque branche se divise en 2 ou 3 branches mais on n'a pas encore cherché comment.

24) Y a-t-il proportionnalité entre les dimensions de l'arbre et le nombre d'années ?

R1 : Non

R2 : Il n'y a pas proportionnalité, si les branches poussaient toutes avec les mêmes proportions qu'au départ un programme nous a permis de déterminer qu'on pourrait avoir des branches de plus d'un kilomètre, donc la croissance des branches n'est pas la même chaque année

⁵⁷ Cette question aurait pu être classée également dans Q_{grandeurs_v}

25) *Sa taille est-elle proportionnelle à son âge ? Si oui est-ce toujours vrai ?*

R1 : Sa taille n'est pas proportionnelle à son âge il suffit de regarder les trois premiers dessins pour voir qu'il n'y a pas le même coefficient de proportionnalité.

R2 : D'après les croquis, non. Plus les années passent plus le coefficient de croissance diminue.

26) *Y a-t-il un rapport entre la taille de la souche et la taille de l'arbre ? L'aire du tronc sur le dessin est-elle proportionnelle avec les années ?*

R1 : Oui, plus la souche s'élargit, plus l'arbre peut grandir.

27) *La croissance de l'arbre est-elle régulière ?*

R1 : On ne connaît pas l'espèce de l'arbre. Cependant on peut supposer que l'arbre grandit de façon proportionnelle, de plus on pourrait supposer qu'il grandit de 12 cm par an, d'après notre recherche sur internet par rapport à la croissance d'un eucalyptus gunii.

R2 : Si on mesure, l'arbre fait 1,66 m en 2013, 2,5 m en 2014 et 3 m en 2015. Les écarts ne sont pas les mêmes, et le coefficient pour passer d'une taille à l'autre n'est pas constant, donc il n'y a pas de régularité ni de proportionnalité.

28) *L'arbre pousse-t-il proportionnellement ?*

R1 : Nous n'arrivons pas à nous mettre d'accord sur le sens du mot « proportionnellement ».

29) *Est-ce que la taille de l'arbre évolue de manière proportionnelle (avec le même coefficient de proportionnalité chaque année ? ou est-ce qu'on ajoute toujours le même nombre ?*

R1 : D'après les croquis, non. Plus les années passent plus le coefficient de croissance diminue.

R2 : Non

30) *Est-ce que la taille des nouvelles branches est proportionnelle à la taille des anciennes branches ?*

R1 : Non.

R2 : Oui, elles sont proportionnelles car la taille des nouvelles branches fait la moitié des anciennes branches.

31) *L'arbre grandit-il proportionnellement ?*

R1 : Si on mesure, l'arbre fait 1,66 m en 2013, 2,5 m en 2014 et 3 m en 2015. Les écarts ne sont pas les mêmes, et le coefficient pour passer d'une taille à l'autre n'est pas constant, donc il n'y a pas de régularité ni de proportionnalité.

R2 : Non l'arbre ne grandit pas proportionnellement. Il n'y a pas de proportionnalité entre les hauteurs des arbres. Ce qui est normal car on ne grandit jamais de façon proportionnelle.

32) *Est-ce-que l'arbre pousse de manière régulière ?*

R1 : On aurait bien aimé mais ce n'est pas le cas.

33) *Est-ce que la poussée de l'arbre est régulière ?*

R1 : Oui il prend 5 cm/an

34) *La croissance de l'arbre suit-elle une règle de proportionnalité?*

R1 : On ne connaît pas l'espèce de l'arbre. Cependant on peut supposer que l'arbre grandit de façon proportionnelle, de plus on pourrait supposer qu'il grandit de 12 cm par an, d'après notre recherche sur internet par rapport à la croissance d'un eucalyptus gunii.

35) *Est-ce que la taille et la largeur de l'arbre sont proportionnelles ?*

R1 : Pas obligatoirement, ça dépend de la façon dont grandit

36) *Est-ce que la poussée de l'arbre est proportionnelle ?*

R1 : Non, la hauteur n'est pas proportionnelle mais les branches oui

37) *Qu'est-ce que la proportionnalité ?*

R1 : Quand tout a la même mesure chaque année. Quand on ajoute à un nombre, on ajoute aux autres. Pareil si on enlève.

38) *De combien de mètres évolue l'arbre chaque année ? L'arbre évolue-t-il proportionnellement chaque année ?*

R1 : Il grandit d'environ 1 m par an. Ce n'est pas proportionnel car on ajoute un nombre.

39) *Si l'arbre ne pousse pas régulièrement, on ne pourra pas trouver de réponse. Qu'en pensez-vous ?*

R1 : On est d'accord avec vous.

40) *Les branches et le tronc grandissent-ils proportionnellement ?*

R1 : Chaque année le tronc augmente de 0,25 m (0,5 cm sur le schéma).

R2 : Non, on peut le constater sur les trois premiers dessins, du premier au deuxième ou du deuxième au troisième la croissance n'est pas la même.

41) *Est-ce que la taille de l'arbre au fil des années est proportionnelle ?*

R1 : Non, ce n'est pas proportionnelle, nous l'avons vérifié entre 2013 et 2015

42) *La croissance de l'arbre est-elle proportionnelle chaque année ?*

R1 : Non toujours en regardant les trois dessins on ne trouve pas de coefficient de proportionnalité.

R2 : Non, ça n'a pas l'air d'être proportionnelle

43) *Le diamètre du tronc double-t-il chaque année ?*

R1 : Oui le diamètre du tronc augmente chaque année, mais cela n'aura pas d'influence importante pour les dimensions de la serre.

R2 : Non

44) *La mesure de l'arbre double-t-elle chaque année?*

R1 : Non

R2 : La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année car on a supposé à la question 3 qu'elle n'était pas proportionnelle.

R3 : La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année car l'arbre à une croissance régulière tout au long de l'année.

R4 : La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année parce qu'elle n'a pas doublé de l'année 2013 à 2014 et de l'année 2014 à 2015. Mais l'arbre continue de grandir quand même.

R5 : La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année parce que sinon il atteindrait vite des hauteurs démentielles

45) Pensez-vous que l'arbre double sa taille chaque année ?

R1 : Grâce aux 3 schémas, on peut dire que la taille de l'arbre ne va pas doubler chaque année.

R2 : Nous ne pensons pas que l'arbre double sa taille chaque année.

Nous avons mesuré en faisant des rectangles autour des arbres. Certains ont trouvé que l'arbre grandit de 50 cm par année, d'autres que l'arbre grandit de 1 m chaque année et on dit qu'en 2023 il mesurera 11 m.

Q_{modèle-modèle}

1) La croissance de l'arbre diminue-t-elle ?

R1 : Non elle ne diminue pas : 2 ou 3 branches de plus par branche, mais on n'a pas trouvé de modèle qui définit le nombre de branches supplémentaires à chaque fois.

R2 : Nous pensons que la croissance va diminuer au fil des ans car l'épaisseur du tronc a augmenté de 33% la 1^{re} année et de 25% la 2^e. Il devrait augmenter que de 10% la dernière année.

2) Le nombre de branches augmente-t-il chaque année ?

R1 : oui il augmente chaque année

R2 : Oui, car en 2014, il y a 7 branches de plus qu'en 2013 et en 2015 il y a 17 branches de plus qu'en 2013. Il y a donc 24 branches de plus entre 2013 et 2015.

3) Comment s'étendent ses racines et ses branches ?

R1 : Les racines et les branches s'étendent de part et d'autre du tronc comme les autres arbres

R2 : Les racines et les branches poussent de façon très droite tout autour de l'arbre.

R3 : Nous ne le savons pas par manque de données.

4) Sachant que sa hauteur double en 2 ans et que sa largeur triple dans le même temps, est-ce qu'une serre cubique de 40m de côté sera suffisante ?

R1 : Nous pensons que ce ne sera pas suffisant car l'arbre peut faire des poussées de croissances.

R2 : Nous pensons que ce ne sera pas suffisant car :

Si on suppose qu'il triple en largeur chaque année, donc on multiplie sa largeur par 3.

On suppose qu'en 2013, il fait 1m de large

Donc en 2014 : $1 \times 3 = 3\text{m}$ de large

.....

Et en 2018 : $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243\text{m}$

Il fera donc 243m de large !

5) *Comment trouver les angles entre les branches ? Est-ce utile ?*

R1 : Oui c'est utile, pour trouver les angles entre les branches et savoir s'ils sont toujours les mêmes.

6) *La ramure forme-t-elle une fractale ?*

R1 : Effectivement, nous n'avons pas de réponse...

R2 : Oui, on pense que c'est une fractale, puisque l'arbre grandit tout le temps, mais son volume devrait être contenu dans un plus grand espace qu'il ne dépassera jamais.

7) *Y a-t-il un rapport avec les suites ou les fractales ?*

R1 : Oui avec la suite de Fibonacci.

R2 : Oui, avec les suites.

8) *Est-ce que c'est symétrique ?*

R1 : Non visiblement ce n'est pas symétrique.

R2 : Non, on ne peut pas tracer d'axe de symétrie.

9) *Y a-t-il un lien dans la progression des branches ? Sur une branche on rajoute 5 branches ? Sur 2 branches on rajoute 7 branches ?*

R1 : Il apparaît une suite logique dans la formation des branches : quand on a trois branches, les ramifications de l'année suivante font 3-2-2, s'il y a deux branches, les ramifications font 3-2 (voir sur le schéma).

Autre comptage des branches : on compte uniquement les nouvelles ramifications : 3 en 2013, 7 en plus en 2014, 17 en plus pour 2015... Quelle logique ? 27 branches en 2016 ?

10) *Comment peut-on savoir la taille du tronc au fil des années ?*

R1 : On ne sait pas.

11) *Est-ce que le tronc va grossir au même rythme que les branches ?*

R1 : Non, ce sont les branches qui vont pousser plus vite.

12) *Est-ce que le tronc de l'arbre grandit toujours en hauteur et largeur ?*

R1 : oui sauf quand l'arbre sera arrivé à maturité.

13) *Chaque année (jusqu'à 2015), nous avons remarqué que l'envergure de l'arbre augmente de 1 m. Est-ce vrai pour les autres années ?*

R1 : Non car nous trouvons que l'arbre ne grandit pas régulièrement

R2 : On pense que oui

14) *L'arbre grandit-il tous les ans ?*

R1 : Oui, nous pensons que l'arbre grandit tous les ans. Car, premièrement, il y a le schéma de l'arbre en 2013, 2014 et 2015 et l'arbre a évolué sur les 3 schémas, et deuxièmement, l'énoncé nous dit que l'arbre n'atteindra sa maturité qu'en 2023. Il arrêtera de grandir à cette date.

R2 : Nous pensons que oui jusqu'en 2023.

15) *Les branches se multiplient – elles seulement par 2 ou par 3 ?*

R1 : On ne peut pas être sûr pour la suite, mais on dirait que oui. Toujours par 2 sauf pour une branche. C'est important car cela prend plus de place s'il y a plus de branches.

R2 : On ne sait pas répondre

16) *Comment évolue l'arbre chaque année ? En largeur, en hauteur, en nombres de branches, en volume ?*

R1 : 1,7 m en 2013, 2,6 m en 2014 et 3 m en 2015. (En hauteur)

1,15 m en 2013, 2,23 m en 2014 et 3 m en 2015. (En largeur)

On a mesuré et converti avec l'échelle donnée en utilisant la proportionnalité.

R2 : En largeur : cela s'agrandit, en hauteur : cela s'agrandit, en nombres de branches : au minimum il y a deux branches en plus et au maximum trois branches sur chaque branche.

En volume: cela s'agrandit. Pour le calcul de nombre de branches :

Il y a 7 branches en 2014, 10 branches en 2015, 27 en 2016 puis on pense 68 en 2017.

Comme il y a des pousses de 2 ou 3 branches, on n'a pas fini le calcul.

17) *Est-ce que les branches évoluent de la même façon? Même question pour le tronc ?*

R1 : Non, car on a trouvé qu'elles n'étaient pas pareilles.

18) *Quelle est la probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches?*

R1 : Pour le moment il n'y a pas de probabilité que chaque branche se divise en 2 ou 3 branches, car ce n'est pas un évènement aléatoire. C'est un évènement qu'on peut prévoir. En effet, une branche à 3 rameaux, donne 2 rameaux à 2 rameaux "secondaires" et 1 rameau à 3 rameaux "secondaires". Et une branche à 2 rameaux donne 1 rameau à 2 rameaux et 1 autre rameau à 3 rameaux.

R2 : La probabilité qu'une branche se divise en 2 est de $\frac{2}{3}$ et en 3 est de $\frac{1}{3}$.

R3 : Probabilité de $\frac{8}{21}$ d'obtenir 3 branches et probabilité de $\frac{13}{21}$ d'obtenir 2 branches.

19) *Une branche peut-elle se diviser en plus de 3 branches?*

R1 : Pour le moment on peut supposer qu'une branche ne se divise pas en plus de 3 branches.

R2 : À l'aide de la représentation, on en déduit que ce n'est pas possible.

20) *Est-ce que la pousse des branches est aléatoire ?*

R1 : Non, 2 branches se rajoutent à la branche initiale. Celle du milieu est la même branche.

R2 : D'après des calculs nous supposons que oui. $\frac{2}{3}$ en 2014 et $\frac{4}{7}$ en 2015.

21) *Quelle est la probabilité que d'une branche naissent 3 branches ?*

R1 : La probabilité qu'une branche se divise en 2 est de $\frac{2}{3}$ et en 3 est de $\frac{1}{3}$.

R2 : Probabilité de $\frac{8}{21}$ d'obtenir 3 branches et probabilité de $\frac{13}{21}$ d'obtenir 2 branches.

22) *Comment et de quelle manière pousse l'arbre ?*

R1 : L'arbre pousse dans tous les sens

R2 : L'arbre va gagner en hauteur et en largeur. Au niveau des branches, les branches se multiplient par 2 ou 3.

23) *Y a-t-il une régularité dans l'accroissement du nombre de branches?*

R1 : On suppose que le nombre de branches double chaque année.

24) *Est-ce que la séparation des branches est régulière?*

R1 : Elles se séparent parfois en deux et parfois en trois. Nous ne trouvons pas de régularité.

R2 : La séparation des branches semble être régulière. Sur les 3 schémas, si une branche donne 3 branches alors dans ces trois branches, il y aura 2 branches à 2 rameaux et 1 branche à 3 rameaux. Et si une branche donne 2 branches, ces deux branches donneront l'une deux rameaux et l'autre 3 rameaux. Mais on ne sait pas si cette loi est vérifiée par la suite.

25) *En combien de branches se divise chaque branche chaque année ? Est-ce toujours en deux ou trois branches ? Y a-t-il une logique ou est-ce aléatoire ?*

R1 : C'est logique. À chaque fois que les branches se divisent en 3, deux se divisent en 2 et une en 3. À chaque fois que les branches se divisent en 2, une se divisera en 2, l'autre en 3.

R2 : Chaque branche se divise en seulement 2 ou 3 et de façon aléatoire.

R3 : Sur chaque branche il y a une probabilité 1/2 d'avoir soit 2 ou 3 nouvelles branches.

R4 : Il nous semble que les branches évoluent selon un schéma régulier. S'il y a deux embranchements sur une branche alors ils se combinent avec deux branches sur le premier et trois branches sur le deuxième.

26) *En ayant estimé la taille maximale de l'arbre peut-on encadrer la taille de la serre ?*

R1 : Oui en laissant une marge d'environ 1m.

27) *Est-ce que les branches se construisent suivant un schéma précis ?*

R1 : Nous pensons qu'il s'en ajoute toujours le même nombre mais nous ne pouvons être sûrs.

R2 : C'est logique. À chaque fois que les branches se divisent en 3, deux se divisent en 2 et une en 3. À chaque fois que les branches se divisent en 2, une se divisera en 2, l'autre en 3.

R3: Sur chaque branche il y a une probabilité 1/2 d'avoir soit 2 ou 3 nouvelles branches.

28) *Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ?*

R1 : Elles sont de plus en plus petites.

R2 : La taille des branches diminue car elles sont plus nombreuses et qu'il y a moins de place.

R3 : À partir du moment où la branche se divise, elle arrête de grandir. On considère qu'elles se divisent chaque année.

R4: Toutes les branches d'une même génération grandissent de la même façon/même proportion. Et les anciennes générations poussent moins vite que les nouvelles.

29) *Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?*

R1 : Il nous semble que les branches évoluent selon un schéma régulier. S'il y a deux embranchements sur une branche alors ils se combinent avec deux branches sur le premier et trois branches sur le deuxième.

R2 : Non il suffit de regarder le nombre de branches sur les trois premiers dessins pour se rendre compte que le nombre de branches à une année n'est pas la somme du nombre de branches des deux précédentes.

30) *L'arbre grandit-il de la même manière en largeur et en hauteur ?*

R1 : En mesurant la hauteur et la largeur nous avons trouvé que non.

R2 : Il semble que non. Sur le dessin :

	2013	2014	2015
Épaisseur du tronc	2 mm	3 mm	6 mm
Hauteur du tronc	3 cm	3,7 cm	4 cm

31) *Y a-t-il une méthode pour déduire le nombre de nouvelles branches chaque année ?*

R1 : On dirait que chaque année il y a deux ou trois nouvelles branches par branche.

R2 : Nous pourrions observer le nombre de bourgeons et leur place sur les branches.

32) *La proposition « on multiplie toutes les épaisseurs du tronc précédentes entre elles » est-elle valide ? (exemple année 4 : $2 \times 3 \times 6$ mm).*

R1 : Non, car $2 \times 3 \times 6 = 36$ et ça a l'air trop grand.

R2 : Nous pensons que cette proposition n'est pas valide, l'épaisseur du tronc dépasserait 1 m en 2016.

33) *Les branches nouvelles étant de plus en plus petites chaque année, comment calculer leur taille pour chaque année ?*

R1 : Nous n'avons pas trouvé de règle pour ce phénomène.

R2 : Pour calculer la taille des branches, on pense qu'il faut utiliser la trigonométrie.

34) *Sait-on comment il grandit en un an ?*

R1 : Non, on ne sait pas.

R2 : Il grandit de manière irrégulière donc on ne sait pas

35) *Comment savoir combien de branches poussent par années ?*

R1 : On ne le sait pas.

36) *Les branches poussent-elles vers les côtés ou vers le ciel ?*

R1 : Les deux.

37) *Les branches peuvent-elles se casser ?*

R1 : Oui les branches peuvent se casser.

R2 : Les branches peuvent casser

38) *Est-ce que les anciennes branches ne vont pas mourir ou/et tomber ?*

R1 : C'est possible mais ça va repousser car sur les dessins les branches sont toujours présentes.

39) *Les branches grandissent au cours du temps ainsi que le tronc, peut-on estimer la pousse de chaque branche ?*

R1 : La taille des branches diminue car elles sont plus nombreuses et qu'il y a moins de place.

R2 : À partir du moment où la branche se divise, elle arrête de grandir. On considère qu'elles se divisent chaque année.

R3 : Toutes les branches d'une même génération grandissent de la même façon/même proportion. Et les anciennes générations poussent moins vite que les nouvelles.

40) *Est-ce que le tronc grossit en fonction des années ?*

R1 : Nous pensons que oui jusqu'à ce qu'il arrive à maturité.

R2 : Oui.

R3: Le tronc grandit proportionnellement jusqu'à la 5ème année pour atteindre 1,3m de largeur. Il grandit comme une suite géométrique.

41) *Le nombre de nouvelles branches est-il toujours le même ?*

R1 : Le nombre de branches qui poussent augmente tous les ans 7 puis 17. Sur chaque branche, il pousse soit 2, soit 3 nouvelles branches. Un nœud de trois branches donne l'année suivante 7 branches : 3 puis 2 puis 2. Chaque année, chaque branche fabrique de nouvelles branches et comme il y en a de plus en plus, il y a de plus en plus de nouvelles branches

R2 : Non 2 ou 3 branches poussent par année sur chaque branche.

42) *Comment évolue l'épaisseur de l'arbre ?*

R1 : Le tronc mesure 2mm puis 3 mm et 6 mm (mesure effectuée sans appliquer l'échelle)

R2 : Elle grossit mais on n'a pas eu le temps de chercher plus.

43) *Quand on compte les branches, doit-on compter toutes les branches (avec celles du milieu) ou seulement les nouvelles branches ?*

R1 : On pense qu'il ne faut que les nouvelles branches.

R2 : Les anciennes branches ne cessent de pousser, il faudrait donc continuer à les considérer.

44) *Les branches sont-elles toujours de la même taille ?*

R1 : D'après le schéma, les branches grandissent d'année en année donc elles vont logiquement continuer à pousser.

45) *Est-ce qu'une nouvelle branche peut pousser au milieu d'une autre ?*

R1 : Oui car les branches se multiplient, on le voit sur les schémas.

R2 : Oui une nouvelle branche peut pousser au milieu d'une autre

46) *Est-ce que les branches de l'arbre peuvent pousser vers « l'intérieur » ?*

R1 : Oui, mais cela va créer des difficultés pour les dessins...

R2 : Nous pensons que oui.

47) *En 2023, certaines branches vont-elles toucher le tronc ?*

R1 : C'est possible mais cela ne gênera pas pour calculer les dimensions de la serre.

48) *Est-ce que l'écartement entre deux branches est toujours le même ?*

R1 : Non car chaque branche est différente.

R2 : Non l'écartement n'est pas toujours le même

49) *Est-ce que les branches auront toutes la même longueur ?*

R1 : On ne sait pas.

50) *De 2013 à 2014 d'après l'échelle on remarque que l'arbre a grandi de 1,40 m, et l'année suivante de 70 cm, qui est la moitié de 1,40mètres. Sa croissance sera-t-elle divisée par 2 à chaque fois ?*

R1 : Nos observations ne correspondent pas : on trouve qu'il grandit d'un peu plus que la moitié la deuxième année. Donc on ne peut pas supposer que la croissance sera divisée par 2

chaque année.

51) *Au cours des années l'arbre évoluera-t-il autant en longueur qu'en largeur ?*

R1 : On ne sait pas, nos observations ne nous permettent pas encore de savoir.

52) *Est-ce que le même nombre de branches sort chaque année ?*

R1 : Il y a 2 ou 3 nouvelles branches sur chaque ancienne branche

53) *Aura-t-il le même nombre de branches chaque année ?*

R1 : Non, il n'y a pas le même nombre de branches chaque année, on a compté en 2013, 2014 et 2015

54) *Aura-t-il toujours le même nombre de branches en plus chaque année ?*

R1 : Si c'est proportionnel oui, sinon non.

R2 : Il apparait une suite logique dans la formation des branches : quand on a trois branches, les ramifications de l'année suivante font 3-2-2, s'il y a deux branches, les ramifications font 3-2 (voir sur le schéma).

R3 : On compte uniquement les nouvelles ramifications : 3 en 2013, 7 en plus en 2014, 17 en plus pour 2015... Quelle logique ? 27 branches en 2016 ?

55) *Est ce que les branches se multiplient toujours de la même manière ?*

R1 : Oui, il y a soit 3 branches ou 2 branches.

R2 : Non

56) *Les branches et le tronc grandissent-ils à la même vitesse ?*

R1 : Non, c'est le tronc car il a pris 1 m tandis que les branches ont pris 50 cm en 2 ans.

57) *Est-ce que les branches font toutes la même longueur ?*

R1 : Non

58) *L'arbre entier rentre dans un cercle, centré au sommet du tronc, de rayon 6,8cm pour 2014 et 9cm pour 2015, que peut-on en déduire ?*

R1 : On conclue que l'arbre augmente d'environ 2,2 cm d'année en année.

59) *Est-ce que l'arbre se développe qu'à l'extérieur, qu'au bord des branches ?*

R1 : Il se développe au bout des branches vers l'extérieur et l'intérieur, et aussi dans le sol par les racines

R2 : Non, pas du tout, l'arbre ne se développe de partout.

60) *L'arbre grandit-il de la même manière chaque année ?*

R1 : Oui, il y aura sans doute une régularité, mais ça dépend aussi de la météo.

R2 : Oui.

R3 : Non on le voit en regardant les trois dessins la croissance n'est pas la même.

R4 : Non, ça n'a pas l'air d'être proportionnel.

61) *Est-ce que les branches ont le même schéma en continu ?*

R1 : Oui, il pousse 2 ou 3 branches à chaque extrémité tous les ans.

R2 : Les branches n'ont pas le même schéma car elles se multiplient.

62) *Y a-t-il un schéma de croissance ?*

R1 : Le schéma de croissance des branches est le suivant : à partir de 3 branches naissent 3-2-2 branches et à partir de 2 branches naissent 3-2 branches. Pas de proportionnalité sur le nombre de branches.

63) *Comment et de quelle manière pousse l'arbre chaque année ?*

R1 : Nous avons mesuré la plus grande longueur et la plus grande largeur en mettant l'arbre dans un rectangle. Ce rectangle ne grandit pas régulièrement.

R2 : On pense que l'arbre pousse de manière irrégulière.

64) *Est-ce que le tronc et les branches poussent toujours à la même vitesse? Si oui, de combien chaque année?*

R1 : Nous avons mesuré la largeur du tronc juste au-dessus des racines et on a vu que ça grandit de 2 mm la première année, puis 3 mm la seconde. On prévoit que ce sera de 4 puis 5 puis 6 mm de plus chaque année.

65) *Est-ce que l'arbre grandit dans toutes les directions ?*

R1 : Il semblerait que oui.

66) *Est-ce que chaque branche donne toujours naissance à d'autres branches et combien ?*

R1 : Chaque branche peut donner naissance à 2 ou 3 nouvelles branches pour nous avec ce qu'on a vu.

67) *Peut-on faire un arbre de probabilités pour savoir s'il pousse 2 ou trois branches sur chaque ramification ?*

R1 : Il y aurait 4 chances sur 7 pour deux branches et 3 chances sur 7 pour trois branches

R2 : Nous pensons que l'arbre de probabilité n'est pas nécessaire. Car nous avons constaté que sur chaque nouvelle branche, il y a au moins une ramification à 3 branches.

68) *Quand les branches sont par trois l'une des trois est-elle la continuité de la branche d'avant ?*

R1 : Non

69) *Est ce que l'arbre grandit autant en longueur qu'en largeur ?*

R1 : Non il grandit plus en hauteur, du moins c'est ce que l'on voit sur les dessins.

R2 : Oui

70) *Y a-t-il un rapport entre les angles formés par les branches ?*

R1 : Nous ne savons pas.

R2 : Les angles ont l'air de varier entre 60 et 80°

71) *Comment compte-t-on le nombre de branches ?*

R1 : On compte les branches à partir de 3 branches, 7 apparaissent, puis 17 et ainsi de suite ce qui donne un coefficient de proportionnalité de 2,4 et donc en 2023 il y aura 18938 branches.

72) *L'arbre penchera-t-il ?*

R1 : On ne peut pas savoir mais on peut supposer que l'on mettra des tuteurs pour qu'il reste droit !

R2 : Dans notre résolution l'arbre ne penchera pas (plus l'arbre grandit plus le tronc est costaud)

73) *Est-ce que l'arbre penche ?*

R1 : On pense que non, quand on fait pousser un arbre, on met un tuteur pour qu'il soit droit.

74) *Est-ce que l'arbre pousse droit ?*

R1 : Oui

75) *L'arbre peut-il pousser de travers ?*

R1 : Oui, suivant les conditions météorologiques : s'il y a beaucoup de vent, ou sous le poids de la neige.

R2 : Oui, il peut pousser de travers.

76) *L'arbre pousse-t-il droit ?*

R1 : Si on se fie aux dessins, le tronc semble perpendiculaire au sol.

R2 : L'arbre ne semble pas pousser droit. Mais cela peut aussi varier en fonction d'autres éléments du milieu que nous ne connaissons pas.

77) *L'arbre peut-il pousser "tordu" ?*

R1 : On suppose que l'arbre grandit comme le schéma proposé.

78) *Ne va-t-il pas mourir avant ?*

R1 : Il n'y a aucune raison que l'arbre meurt si l'on s'en occupe bien.

R2 : Il peut mourir s'il n'a pas assez d'eau ou qu'il est mal entretenu.

R3 : L'arbre peut très bien mourir s'il attrape une maladie.

R4 : Non, sinon la recherche n'a plus de sens.

79) *Est-ce que l'arbre peut mourir avant ?*

R1 : L'objectif est de construire une serre pour le protéger. On suppose que l'arbre ne va pas mourir et qu'il vivra au moins jusqu'en 2023.

80) *Est-ce que l'arbre peut mourir au cours des années ?*

R1 : Peut-être, si les conditions de son nouveau milieu ne lui conviennent pas.

R2 : Il peut mourir si on ne l'arrose plus.

81) *Est-on sûr qu'il aura fini de grandir en 2023 ?*

R1 : Nous ne sommes pas sûrs qu'il aura fini de grandir, vu que c'est une nouvelle espèce qui est donc inconnue.

R2 : Nous pensons que sa croissance va s'arrêter en 2023 car c'est une étude scientifique réalisée par des botanistes.

R3 : Non, on n'en est pas sûr.

82) *Est-ce que l'arbre va grandir ?*

R1 : Oui

R2 : Nous pensons que l'arbre va grandir

83) *Est-ce que l'arbre peut rétrécir ?*

R1 : Non

R2 : Il peut rétrécir s'il meurt

84) *Continue-t-il de grandir après 2023 ?*

R1 : L'énoncé nous dit que non.

R2 : En 2023 normalement il arrête de grandir s'il a bien atteint sa maturité

85) *Va-t-il encore grandir après 2023 ?*

R1 : Non, c'est ça la maturité.

R2 : L'énoncé dit que non.

86) *Comment fait-on pour savoir la taille de l'arbre en 2014 et 2015 ?*

R1 : On mesure sur le schéma

R2 : Il prend environ 50 cm en hauteur par an, donc en 2017, il mesurera 3m50, en 2018 4m et en 2019 4m50.

R3 : L'augmentation de la taille de l'arbre diminue chaque année : en 2014 il mesure plus de 2m mais moins de 3m en 2015.

Q_{modèle-serre}

1) *Quelle forme doit prendre la serre ?*

R1 : Elle doit être rectangulaire pour couvrir tout l'arbre en totalité

R2 : Plutôt carrée.

R3 : Plutôt ronde pour le soleil.

2) *A-t-on une forme obligatoire pour la serre ? Ronde, carrée, autre ?*

R1 : Nous n'avons aucune obligation de forme pour la serre.

R2 : Non, mais plutôt carrée.

R3 : Non, mais plutôt ronde pour le soleil.

3) *Quelle sera la forme de la serre ?*

R1 : Elle doit être rectangulaire pour couvrir tout l'arbre en totalité

R2 : Comme vous voulez, laissez faire votre imagination.

R3 : On ne sait pas on peut imaginer une sphère mais ce serait plus simple avec un pavé pour la construction !

R4 : Elle sera en forme de dôme.

R5 : Nous pensons que ça sera de cette forme

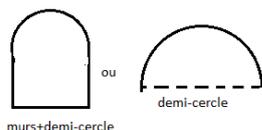


R6 : On pense qu'elle peut être en demi-cercle ou de forme rectangulaire. Elle peut être faite en verre ou plastique transparent.

R7 : Elle pense que la forme d'un pavé droit est le plus simple à construire.

R8 : On attendra de savoir la forme de l'arbre pour le dire.

4) *La forme de la serre ?*



R1 : On préfère un mur plus un demi-cercle, par rapport au demi-cercle complet.

5) *Est-ce que la serre doit être cubique ou rectangulaire ?*

R1 : Nous avons déjà posé une question à ce sujet, nous l'imaginions plutôt de forme arrondie, mais certains groupent la pensent plutôt rectangulaire.

R2 : Rectangulaire à priori. Mais elle peut être cubique finalement...

6) *La forme du toit est-elle imposée ? (Plat ? Cône de révolution ? Prisme?)*

R1 : L'énoncé ne dit rien, nous pensons que non.

R2 : Non

7) *La forme de la serre est-elle imposée ? (Base carrée, circulaire, rectangulaire?)*

R1 : L'énoncé ne dit rien, nous pensons que non.

R2 : Non

8) *De quelle forme vaut-il mieux que la serre soit ?*

R1 : Haute et ovale.

R2 : Une demi-sphère.

R3 : Parabolique.

9) *Quelle doit être la forme de la serre ?*

R1 : Nous avons plusieurs idées : d'abord une serre ronde (sphérique), puis une serre rectangulaire (en pavé droit), puis aussi un mélange des deux : une base rectangulaire surmontée d'une demi-sphère. Chaque forme peut servir en fonction de la façon dont l'arbre pousse : s'il pousse autant en hauteur qu'en largeur, la serre ronde est bien. S'il pousse plus en largeur qu'en hauteur, la serre rectangulaire est bien. S'il pousse plus en hauteur qu'en largeur, la serre avec un dôme est mieux.

10) *A quoi va ressembler la serre (dôme ou cube ou autre) ?*

R1 : On pense plutôt à un dôme car la plupart des serres ont cette forme. Certains d'entre nous pensent que ça ne change rien, d'autres pensent à un cube car les branches poussent mieux.

R2 : Certains ont essayé avec un rectangle ou un carré, d'autres ont prévu un rectangle surmonté d'un demi-cercle (en "porte de voute"), le centre du cercle étant le point de ramification des premières branches.

Certains ont essayé d'englober l'arbre total d'un cercle complet, mais le centre du cercle évolue chaque année.

11) *De quelle forme pourra être la serre ?*

R1 : La serre aura la forme d'un cube.

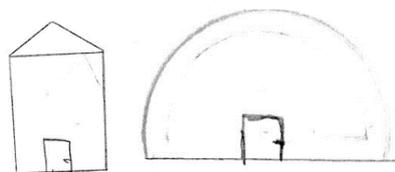
12) *Quelle est la forme de la serre ?*

R1 : Nous pensons que la forme de la serre dépendra de la forme de l'arbre. Mais la question du problème est de prévoir la taille de l'arbre, donc la forme de la serre ne nous semble pas importante. Si nous devons choisir une forme, nous choisirions une forme de pavé droit pour la base du tronc et puis sphérique pour les branches de l'arbre.

R2 : Nous pensons à un demi-cylindre ou encore un tétraèdre.

R3 : Cela dépend des matériaux utilisés, mais un cube est plus simple ou un pavé.

R4 : Nous avons cherché sur internet pour voir la forme normale d'une serre. La serre doit être en forme de maison ou de demi-cercle :



R5 : On ne peut pas la savoir, peut être un demi-cercle

13) *De quelle forme doit-être la serre ?*

R1 : Cela dépend des matériaux utilisés, mais un cube est plus simple ou un pavé.

14) *Est-ce que la serre doit être construite au raz de l'arbre ?*

R1 : Non il faut laisser de la place pour les feuilles et pour que l'arbre puisse respirer

R2 : Non il faudra laisser de l'espace.

15) *Est-ce qu'on prend une marge pour les dimensions de la serre ou on la fait pile à la taille de l'arbre ?*

R1 : Oui bien sûr, il faut une marge, on ne va pas faire au millimètre près.

Q_{modèle-schéma}

1) *Doit-on réaliser un schéma de l'arbre en 2023 ?*

R1 : Nous pensons que cela pourra nous aider, pour voir sa progression et savoir de combien il a grandi en 7 ans

R2 : Oui.

2) *Est-ce qu'on peut s'appuyer pour faire nos calculs des mesures que nous pourrions faire sur le dessin, pour les angles et pour les longueurs ?*

R1 : Oui, mais jusqu'à un certain point car le dessin risque d'être surchargé.

Oui, il faut garder aussi la même échelle.

R2 : On ne peut pas s'appuyer pour faire nos calculs sur des mesures que nous pouvions faire sur le dessin car ce sont des croquis faits pour nous représenter l'arbre.

R3 : Oui le schéma est à l'échelle.

3) *Peut-on représenter graphiquement la croissance de l'arbre ?*

R1 : Oui, on peut toujours le faire, en prenant en prenant 2 ou 3 carreaux pour une année en abscisse et en ordonnées 2 carreaux pour un mètre

R2 : On ne peut pas faire de représentation graphique de cet arbre car on ne connaît pas la hauteur qu'il prend chaque année.

R3 : On pourrait représenter graphiquement la croissance de l'arbre (en abscisse : la taille/hauteur et en ordonnée : l'année.) ou (en abscisse : l'année et en ordonnée : la taille/hauteur)

R4 : On pourrait représenter graphiquement la croissance de l'arbre mais comme on suppose que la croissance n'est pas proportionnelle, ce ne sera donc pas une droite qui passe par l'origine.

4) *L'arbre est-il plat ou en 3D ?*

R1 : 3 D !!!

R2 : L'arbre est en 3d.

5) *Doit-on travailler en 2D ? Ou en 3D ?*

R1 : Plutôt en 3d pour plus de réalisme

R2 : En 2D, c'est suffisant pour avoir une idée de la taille de la serre.

6) *L'arbre grandit en 2D ou en 3D ?*

R1 : Généralement, un arbre pousse en 3D.

R2 : Il grandit en 3D

7) *Est-ce que toutes les branches ont été dessinées ?*

R1 : On va dire que oui.

R2 : On ne peut pas répondre à cette question, mais on pense que oui parce que sinon on ne pourrait pas répondre au problème.

8) *Est-ce que les croquis sont exacts ?*

R1 : On pense que les schémas sont exacts vu qu'une échelle est indiquée dans l'énoncé.

R2 : Peut-être que les croquis sont exacts

SELON L'INDICATEUR $Q_{grandeurs}$

$Q_{grandeurs_I}$

1) *Doit-on tenir compte des racines de l'arbre ?*

R1 : On n'a pas d'information sur les racines : donc, non, on n'en tient pas compte

R2 : Nous avons tendance à dire non, mais si les racines se développent beaucoup, et qu'avant le terme de la croissance de l'arbre, elles rencontrent un obstacle, la croissance de l'arbre pourrait être ralentie.

2) *Doit-on compter dans la mesure de l'arbre la mesure des racines ?*

R1 : Non.

3) *Doit-on trouver les dimensions de la serre ?*

R1 : Il semble que non, car elle sera en fonction de l'arbre et du volume qu'il prendra

R2 : Oui, c'est ce que l'on cherche.

4) *Est ce que le tronc augmente de taille en hauteur et aussi en diamètre ?*

R1 : Oui, le tronc augmente en hauteur et en diamètre.

R2 : Oui chaque année.

5) *L'arbre a-t-il des feuilles et faut-il prendre les feuilles en compte ?*

R1 : Sur le dessin, nous ne voyons pas de feuilles.

R2 : On peut supposer que l'arbre a des feuilles, mais on ne sait pas s'il faut les prendre en compte.

6) *Existe-t-il une longueur maximale pour une branche ?*

R1 : Non, à part peut-être celle de 2023.

R2 : C'est une nouvelle espèce, donc on ne connaît pas ses caractéristiques.

R3 : Il n'existe pas de longueur maximale pour une branche car elles poussent de façon irrégulière et différente.

R4 : Il existe une longueur maximale pour une branche car plus les années passent moins les branches grandissent.

7) *Pourquoi ne donne-t-on pas la hauteur de l'arbre ?*

R1 : Parce qu'on ne la connaît pas, mais on peut la calculer grâce à l'échelle

R2 : On ne nous donne pas la hauteur de l'arbre, car comme c'est une nouvelle espèce, on ne sait pas comment il grandit. En ce qui concerne sa hauteur maximum, nous pensons que cela fait partie des données à chercher pour la construction de la serre.

R3 : On ne nous donne pas la hauteur de l'arbre mais on peut la calculer grâce à sa croissance sur les trois 1^{ère} années que l'on nous donne dans l'énoncé

R4 : On ne connaît pas la hauteur finale de l'arbre, mais on peut déjà voir si l'arbre grandit proportionnellement sur les trois 1^{ère} années.

8) *Qu'est-ce qu'on entend par hauteur et largeur de l'arbre ?*

R1 : De combien de m s'étendent les branches en largeur et en hauteur

R2 : La hauteur est la distance comprise entre la base du tronc de l'arbre et l'extrémité de la branche la plus haute.

La largeur est la distance comprise entre les extrémités des branches les plus éloignées.

9) *Faut-il dire s'il sera grand ou gros ou dire combien il aura de branche en 2023 ?*

R1 : C'est surtout la hauteur et la largeur de l'arbre qu'il faut calculer.

R2 : On pense qu'il faut étudier les 3 : grandeur, grosseur et nombre de branches

10) *Faut-il mesurer la longueur et/ou la largeur ou faut-il mesurer la totalité de l'arbre (branches, tronc...) ?*

R1 : Nous avons fait le choix de mesurer la largeur, la hauteur et le tronc de cet arbre. On trouve que c'est aussi important de compter le nombre de branches. On ne sait rien sur les feuilles, les fruits, donc on a choisi de ne pas les compter dans la taille de l'arbre.

On a partagé l'arbre en 3 parties : le tronc, les vieilles branches et les nouvelles branches de l'année en cours. On a choisi de ne pas mesurer la largeur du tronc, mais ça pourrait être faisable.

11) *Est-ce qu'on compte que les nouvelles branches ou toutes les branches ?*

R1 : On a choisi de les compter toutes, les nouvelles et les vieilles, ça revient au même. Un groupe a calculé le nombre de branches en 2013 puis a trouvé une technique pour calculer le nombre de branches à chaque année :

2013 : 3

2014 : $3*2 + 1 = 7$

2015 : $7*2 + 3 = 17$

2016 : $17*2 + 7 = 41$

...

2023 : il trouve 19601 branches

R2 : Il faut compter le tout.

12) *Faut-il calculer la hauteur du tronc et des branches séparément ou tout ensemble ?*

R1 : On peut faire les deux...

R2 : Peut-être d'abord séparément, puis tous ensemble.

13) *Faut-il mesurer l'arbre en largeur, en hauteur ?*

R1 : Oui pour calculer les dimensions de la serre.

R2 : Il faut mesurer l'arbre dans les deux dimensions.

14) *Est-ce que l'on compte les branches dans la taille de l'arbre ?*

R1 : Oui

R2 : Ce qui nous intéresse c'est la hauteur pas le nombre de branches.

15) *Est-ce que les branches grandissent chaque année ?*

R1 : On peut supposer que oui.

16) *Est-ce que des branches sont plus petites que d'autres ?*

R1 : Oui car chaque branche est unique.

17) *Est-ce que les branches de l'arbre vont grossir en largeur ?*

R1 : Oui car avec les années, le bois grossit.

18) *Nous nous demandons si cela est nécessaire de connaître à la fois la hauteur et la largeur de l'arbre.*

R1 : Nous sommes tous d'accord pour dire qu'il faut connaître la hauteur et la largeur pour rentrer l'arbre dans la serre

19) *Faut-il chercher le nombre de branches en 2023 ?*

R1 : Nous sommes en désaccord, certains pensent qu'il faut le nombre de branches et cherchent à le calculer, en regardant comment poussent les branches les premières années, d'autres ne voient pas l'intérêt.

20) *Le tronc est-il une branche ? (pas très mathématique mais important pour le dénombrement des branches)*

R1 : Le tronc est la base de l'arbre, c'est son socle, on ne le compte pas.

R2 : Nous pensons que le tronc n'est pas une branche, mais il continue d'évoluer donc on doit le prendre en compte.

21) *Est-ce que le tronc grossit jusqu'à la maturité de l'arbre?*

R1 : Oui, le tronc grossit jusqu'à la maturité de l'arbre et continue à grossir après.

R2 : On suppose que oui.

22) *Est-ce que l'on doit calculer sa largeur ?*

R1 : Oui car quand ça évolue en largeur, les branches s'étendent plus loin.

23) *Est-ce que le tronc augmente (en épaisseur) ?*

R1 : Oui, si l'arbre grandit, le tronc grandit, ça se voit sur la feuille.

R2 : Mesure de la hauteur du tronc uniquement ; 2013 1,10m, 2014, 1,4m et 2015 1,5m.

24) *Il faut répondre à quelle question ? Ça veut dire quoi « comment sera l'arbre ... »*

R1 : Certains pensent que c'est la hauteur de l'arbre

R2 : Certains pensent qu'il faut connaître la taille, la largeur, la hauteur, le nombre de ramifications...il faudrait surtout la hauteur et la largeur pour prévoir la taille de la serre. On cherche surtout la place qu'il prendra.

25) *Faut-il mesurer les branches ?*

R1 : Oui il faudra mesurer la taille des branches et du tronc, et le nombre de branches.

26) *Que se passe-t-il si la serre n'est pas assez grande ?*

R1 : C'est impossible car lorsqu'on met un arbre dans une serre, il a atteint sa maturité.

27) *Doit-on prendre en compte que la hauteur ou aussi la largeur ?*

R1 : On doit prendre en compte les 2, car la serre devra avoir un toit (hauteur) et des murs (largeur)

R2 : On doit prendre en compte la largeur et la hauteur.

28) *Y a-t-il des branches qui meurent et qui tombent ?*

R1 : Oui, c'est un phénomène naturel

R2 : L'arbre a des branches qui peuvent mourir et tomber car il peut y avoir du vent.

29) *Les branches déjà formées continuent-elles de pousser ?*

R1 : Oui a priori

R2 : Oui

30) *Est-ce que les branches continuent de pousser ?*

R1 : Nous pensons que l'arbre continue à pousser jusqu'à ce qu'il atteigne la maturité.

R2 : Oui mais elles vont très peu grandir à partir de 2023 car l'arbre aura atteint sa maturité.

R3 : Nous on a pensé que oui, elles grandissent chaque année jusqu'en 2023.

31) *Faudra-t-il couper des branches ?*

R1 : Non, on laisse faire la nature !!!

R2 : Il nous semble que non.

32) *Est-ce que des branches vont tomber ?*

R1 : peut-être, les branches mortes.

33) *Est-ce que de nouvelles branches vont pousser sur le tronc ?*

R1 : Vu les schémas, pas de nouvelles branches sur le tronc.

34) *Quelles mesures devons-nous traiter sa taille en largeur ou en hauteur ?*

R1 : Les deux

R2 : Nous pensons qu'il faut considérer sa largeur et sa hauteur maximale.

35) *Est ce que le tronc de l'arbre s'arrête de grandir avant 2023 ?*

R1 : Nous pensons que non, puisqu'on peut lire l'âge d'un arbre lorsqu'on le coupe c'est que le tronc continue de grandir.

R2 : L'arbre finit sa maturité en 2023 (énoncé du problème)

36) *Que doit-on étudier le nombre de branches, la hauteur, la largeur ?*

R1 : On étudie le nombre de nouvelles branches chaque année

37) *Y aura-t-il une période de stagnation entre 2013 et 2023 ?*

R1 : Nous pensons qu'il est préférable de dire que non.

R2 : Il n'y a pas de période de stagnation entre 2013 et 2023. Mais à partir de 2023, l'arbre s'arrêtera de grandir.

R3 : Il y aura une période de stagnation car l'arbre poussera de façon irrégulière, mais on ne connaît pas le modèle.

R4 : On considère qu'il n'y a pas de période de stagnation car, l'arbre grandit chaque année de façon régulière.

38) *Taille-t-on l'arbre ?*

R1 : Il faut supposer que non pour se simplifier la tâche.

R2 : Nous ne savons pas.

39) *Est ce que durant les années, on a taillé l'arbre ?*

R1 : On ne peut pas savoir mais on va considérer que non. On va négliger ces informations pour la résolution du problème.

R2 : On ne peut pas savoir.

40) *Est-ce que les botanistes vont tailler des branches ?*

R1 : On ne pense pas, ou ils vont peut-être couper les branches mortes.

41) *Est-ce que les botanistes taillent l'arbre ?*

R1 : Peut-être car ils doivent en prendre soin.

42) *Les botanistes vont-ils tailler l'arbre ?*

R1 : On laisse faire la nature, pas d'intervention des botanistes.

43) *Peut-on tailler l'arbre ?*

R1 : Non, on veut le laisser pousser jusqu'en 2023, sinon on ne peut pas prévoir la taille exacte.

44) *L'arbre va-t-il être taillé ?*

R1 : L'avis de la classe est partagé sur cette question ! Certains pensent que oui, d'autres que les scientifiques vont le laisser pousser de manière la plus naturelle possible, c'est-à-dire sans le tailler.

R2 : il n'y a pas de feuilles.

Qgrandeurs_M

1) *Combien de feuilles vont pousser par an?*

R1 : On ne sait pas.

Si on compte 20 feuilles par branche :

2013 – 60

2014 – 200

2015 - 540

R2 : On ne peut pas savoir, mais on peut supposer qu'elles constituent le 5 % du volume total.

2) *De quelle hauteur grandit l'arbre par an?*

R1 : On ne connaît pas l'espèce de l'arbre. Cependant on peut supposer que l'arbre grandit de façon proportionnelle, de plus on pourrait supposer qu'il grandit de 12 cm par an, d'après notre recherche sur internet par rapport à la croissance d'un eucalyptus gunii.

R2 : 2013 – 1,71 m

2014 – 2,5 m

2015 - 3,1 m

Entre 2013 et 2014 il grandit de 79 cm puis de 60 cm l'année d'après

3) *De combien s'élargit le tronc par an?*

R1 : On ne considère pas cette information importante pour établir le volume de la serre.

R2 : Le tronc s'élargit de 2 mm par an sur le schéma

2013/ 2 mm

2014/ 4 mm

2015/ 6 mm

Donc 7,14 cm de plus en largeur chaque année

4) *Combien de branches poussent par an?*

R1 : On suppose que le nombre de branches double chaque année.

R2 : 2013/ 3 branches

2014/ 7 branches de plus

2015/ 17 branches de plus

... (les élèves n'ont pas eu le temps d'aller plus loin sur cette question très intéressante)

5) *Quelle est la taille de l'arbre à sa maturité ?*

R1 : On ne sait pas, c'est justement la question.

R2 : entre 2013 et 2014 : + 2,4cm sur le dessin entre 2014 et 2015 : +1,5 cm moyenne de l'accroissement = 1,95 si la croissance reste régulière entre 2015 et 2023 : 8 ans donc $8 \times 1,95 = 15,6$ cm de plus sur le dessin. Mais il y a des chances que la croissance baisse dans les années qui suivent.

6) *Combien y-a-t-il de nouvelle branches sur l'arbre en une année ?*

R1 : 2 ou 3 à chaque ramification, donc entre 34 et 51 sauf si des oiseaux viennent en prendre ou si le vent les casse

R2 : 6

7) *Quand il y a de nouvelles branches, quelle taille prennent-elles chaque année ?*

R1 : On ne sait pas, c'est justement la question.

R2 : En 2 ans, les branches doublent de longueur

8) *Quelle taille fera l'arbre en 2023 ?*

R1 : On ne peut pas savoir, c'est justement la question qu'on se pose !

R2 : « On ne sait pas. Mais on suppose que si l'arbre grandit de 1m chaque année et à partir de 5 ans il grandit de 10 cm chaque année, alors l'arbre ferait environ 5m50cm. »

R3 : « On ne peut pas savoir pour l'instant, c'est la résolution du problème. »

R4 : « En 2023 la taille de l'arbre sera entre 8 et 10 mètres. »

R5 : On ne sait pas car c'est une partie de la réponse au problème posé

R6 : On ne le sait pas.

9) *Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?*

R1 : On a cherché à partir des dessins si on pouvait trouver une relation de proportionnalité pour déterminer le nombre de branches qui poussaient chaque année mais on n'en a pas trouvé, il faudrait faire des hypothèses.

R2 : 2013 : 3 ; 2014 : 6 et 2015 : 17

R3 : On suppose que chaque année il y a 2 branches qui poussent par branche déjà existante, il y aura donc 4352 branches en 2023.

10) *De combien de cm pousse l'arbre en une année ?*

R1 : Dans la classe, nous avons estimé une croissance de 10cm par an.

R2 : Les 5 premières années l'arbre pousse de 1m chaque année, et à partir de la 6^{ème} année l'arbre poussera de 10cm par an.

R3 : On ne sait pas.

R4 : L'arbre grandit d'environ 66 cm par an.

11) *De quelle hauteur l'arbre augmente chaque année ?*

R1 : C'est la question posée.

R2 : On suppose que d'après les schémas l'arbre grandit de 1 m chaque année. En 2023 l'arbre fera 10m de plus.

R3 : Pour trouver les dimensions de la serre, il faut trouver les dimensions de l'arbre que l'on ne connaît pas encore.

12) *Quelles sont les dimensions réelles de l'arbre en novembre 2013 ? 2014 ? 2015 ?*

R1 : 3,5 m en 2013 2,5m en 2014 environ 3m en 2015 : on s'appuie sur les dessins, qu'on suppose à l'échelle.

R2 : On considère que le schéma est à l'échelle, en 2013 il fait 1 mètre de largeur, en 2014 2 mètres et en 2015 3 mètres.

R3 : Si on prend l'échelle, on peut connaître les dimensions :

Arbre 1 : 1m25cm ; Arbre 2 : 2m40 ; Arbre 3 : 3m14cm.

13) *Connaît-on la largeur de l'arbre en 2023 ?*

R1 : D'après nos calculs, le tronc serait large de 13 mm sur le dessin

R2 : Non mais on peut penser que si la croissance de l'arbre se fait de manière linéaire, alors on peut en déduire la largeur en 2023.

R3 : Non.

14) *Combien y a-t-il de branches qui poussent chaque année et est-ce que c'est toujours la même chose ?*

R1 : En 2014, il y a 7 branches de plus qu'en 2013 et en 2015 il y a 17 branches de plus qu'en 2013. Il y a donc 24 branches de plus entre 2013 et 2015, donc non, ce n'est pas la même chose.

R2 : Le nombre de branches double environ chaque année.

R3 : Le nombre de branches qui poussent chaque année n'est pas proportionnel. 7 branches de plus en 2014 et 17 en plus en 2015

15) *Combien d'années dure la croissance de l'arbre ?*

R1 : 10 ans puisqu'il sera à maturité en 2023.

R2 : Environ 10 ans.

16) *Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?*

R1 : on mesure le diamètre sur le dessin, et on trouve 1mm la 1ère année, on convertit en grandeur réelle grâce à l'échelle : 1 m est représenté par 2,8 cm, donc 1 mm représente 3,57 cm. On multiplie par pi pour obtenir la circonférence, ce qui donne :
en 2013 : 11,21 cm - en 2014 : 22,43 cm- en 2015 : 33,64 cm

17) *Quelle est la hauteur de l'arbre en nov. 2013 ?*

R1 : On peut calculer la hauteur de l'arbre en novembre 2013 grâce à l'échelle : 1.6 m. Mais l'échelle n'est pas très précise (car nous n'avons pas la hauteur au millimètre près).

R2 : L'arbre mesure 1,5 m.

18) *De combien grandit l'arbre chaque année? (en largeur et en hauteur)*

R1 : Impossible de le savoir

19) *En 2013, combien mesure le tronc de l'arbre?*

R1 : 1,1 m en hauteur grâce à l'Échelle, Pas besoin de calculer le diamètre de l'arbre à cause des branches !

R2 : Le tronc mesure 0,2 cm sur la figure. Comme 1 mètre représente 2,8 cm cela fait environ 7,14 cm en réalité.

20) *Combien y-aura-t-il de branches à maturité?*

R1 : Environ 2 ou 3 branches qui repoussent mais pas plus

R2 : On ne sait pas.

21) *De combien pousse l'arbre chaque année?*

R1 : En hauteur apparemment chaque année il a grandi de 0,2m. Pour les branches on ne peut pas encore répondre.

R2 : En utilisant l'échelle on a trouvé 1.25m.

22) *Quelle est la taille précise (hauteur et largeur) de l'arbre? Échelle pas assez précise*

R1 : Grâce à un tableau de proportionnalité et en utilisant l'échelle on a trouvé en 2013, 1 m en largeur (entre deux extrémités de branche et 1.75m de hauteur)

R2 : De 2013 à 2014 l'arbre a poussé, sur la figure, de 3,2 cm en largeur, et de 2,6 cm en hauteur. De 2013 à 2014 l'arbre a poussé, sur la figure, de 2,1 cm en largeur, et de 1,3 cm en hauteur. On lit qu'un mètre en réalité correspond à 2,8 cm environ.

23) *Combien de branches font naître chaque branche ?*

R1 : Environ 2 ou 3 qui repousse mais pas plus

R2 : Chaque branche fait naître 2 ou 3 branches. Il nous semble qu'il y ait une relation logique dans le nombre de branche et d'une année sur l'autre

24) *Quelle est la durée de la croissance ?*

R1 : on ne sait pas.

R2 : On ne peut pas savoir la durée de la croissance mais ils disent que la croissance c'est 10 ans (car il a atteint sa maturité en 2023, donc il arrête de grandir)

25) *De combien grandit l'arbre par an ? En mètre...*

R1 : Pour l'instant, on ne peut pas savoir, on sait que ce n'est pas régulier car on a mesuré les années 2013 2014 et 2015 et ce n'est pas la même croissance. (Hauteur, largeur et tronc)

R2 : On ne sait pas car ce n'est pas régulier.

26) *Est-ce que le tronc grandit de 1 mm en largeur chaque année (sur le dessin) ?*

R1 : Non, il y a 0,7cm d'augmentation au début, puis 0,3cm.

R2 : Le tronc fonctionne pareil que les branches (il grandit pareil). (Règle fixée)

27) *En 2013, l'arbre mesure un mètre en longueur ou en largeur?*

R1 : Il mesure 1m en largeur.

R2 : En largeur, mais si on mesure bien, on trouve 1,16 m. Il faut mesurer l'envergure de l'arbre et multiplier par 0,33 pour avoir la largeur en mètres.

28) *L'arbre en novembre 2014 mesure combien de plus que l'année précédente? En hauteur, en largeur?*

R1 : 0,8 m de plus en hauteur et 1,1 m en largeur.

29) *Grandit-il de 25 cm chaque année ?*

R1 : Non.

30) *De combien de mètres l'arbre va-t-il grandir chaque année ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : L'arbre grandira de moins d'un mètre chaque année

31) *Combien l'arbre mesurera-t-il en 2023 ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : On ne sait pas trop.

32) *Combien y aura-t-il de branches en 2023 ?*

R1 : On ne le sait pas.

33) *Combien de mètres en envergure gagne un arbre sur une année ?*

R1 : Nous avons mesuré entre 50 cm et 1 m en largeur

R2 : On a l'impression que chaque année il gagne un mètre (la première année il fait 1 m d'envergure, la deuxième un peu plus de 2m et un peu plus de 3 m la troisième année)

34) *Quelle sera la hauteur de l'arbre en 2023 ?*

R1 : Nous n'étions pas d'accord dans la classe : nous avons mesuré en faisant des rectangles autour des arbres. Certains ont trouvé que l'arbre grandit de 50 cm par année, d'autres que l'arbre grandit de 1 m chaque année et ont dit qu'en 2023 il mesurera 11 m.

R2 : L'envergure et la hauteur seront de 11m (il grandit de 1 m d'envergure chaque année)

35) *La serre doit être plus grande que l'arbre, de combien de mètres ?*

R1 : Il faut que la serre soit plus grande, sinon l'arbre ne rentrera pas ! Nous pensons qu'il faut au moins 2 m de plus, mais 5 m de plus ça serait mieux. Nous avons regardé le plafond de notre salle de classe pour essayer de donner un nombre.

R2 : On pense qu'il faut laisser 10 mètres de hauteur pour que les autres plantes aient de la place. S'il n'y a que l'arbre, il faut laisser de la place aussi.

36) *Combien de branches se rajoutent-elles chaque année ?*

R1 : On ne pas savoir car cela varie, mais on dirait que chaque branche prend deux branches.

R2 : Il y a eu 7 branches de plus chaque année

37) *Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?*

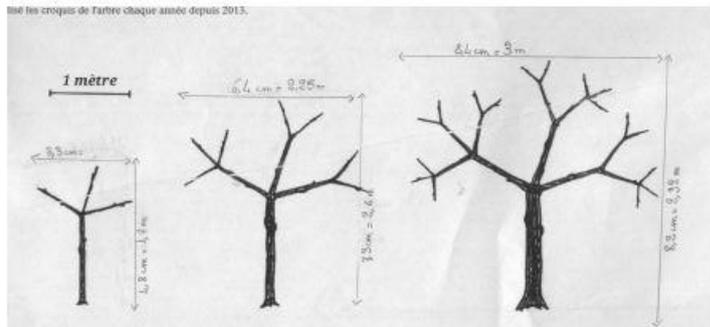
R1 : 1,7 m en 2013, 2,6 m en 2014 et 3 m en 2015. (En hauteur)

1,15 m en 2013, 2,23 m en 2014 et 3 m en 2015. (En largeur)

On a mesuré et converti avec l'échelle donnée en utilisant la proportionnalité.

R2 : Pour trouver la taille de l'arbre chaque année, il faut prendre des mesures sur les croquis et essayer d'établir un lien entre les anciennes branches et les nouvelles.

Voilà les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



38) *Quel est le diamètre du tronc chaque année ?*

R1 : On pourrait le mesurer, mais ça n'a pas d'importance pour la serre.

R2 : Nous ne savons pas car il n'y a pas de généralité pour l'évolution du diamètre de l'arbre. Nous avons effectué un produit en croix après avoir mesuré le diamètre en 2013.

l'arbre a été multiplié par 1,95 et entre 2014 et 2015 l'arbre a été environ multiplié par 1,36.
 R3 : Représenter graphiquement dans un repère la hauteur et la largeur de l'arbre pour conjecturer la réponse.

46) *De combien de cm les branches grandissent-elles chaque année ?*

R1 : La croissance diminue. On n'en sait pas plus.

47) *De combien de branches augmente l'arbre chaque année ?*

R1 : On ne le sait pas mais les branches se multiplient par 2 ou 3.

R2 : Chaque branche donne naissance à deux ou trois branches.

48) *Combien y aura-t-il de branches en 2023 ?*

R1 : On ne sait pas

R2 : Pour l'instant on ne le sait pas. Il manque des informations.

R3 : Pour l'instant on n'a pas fini de faire le calcul.

49) *Quelle est la hauteur de l'arbre en 2023 ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : Cela fait partie du problème à résoudre car la hauteur obtenue nous donnera la hauteur de la serre à construire.

50) *Combien de mètres faut-il entre l'arbre et la serre ?*

R1 : Au niveau de la largeur, on pense qu'il faut plusieurs mètres, pour qu'un tracteur puisse passer par exemple. Au niveau de la hauteur, on pense qu'il faut également plusieurs mètres, pour que le soleil ne brûle pas les feuilles par exemple.

R2 : Il faudrait au moins 1 mètre.

51) *Combien l'arbre prend de centimètres en hauteur et en largeur chaque année ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : De 2013 à 2014 l'arbre a poussé, sur la figure, de 3,2 cm en largeur, et de 2,6 cm en hauteur. De 2014 à 2015 l'arbre a poussé, sur la figure, de 2,1 cm en largeur, et de 1,3 cm en hauteur.

52) *De combien l'arbre grandit-il chaque année ?*

R1 : En 2013, l'arbre mesurait environ 1,71 m.

En 2014, l'arbre mesurait environ 2,78 m, il a grandi de 1,07 m

En 2015, l'arbre mesurait environ 3,07 m, il a grandi de 0,29 m

53) *De combien de largeur gagne l'arbre chaque année ?*

R1 : En 2013, sa largeur était environ 1,14 m.

En 2014, sa largeur était environ 2,46 m, il a grandi de 1,32 m

En 2015, l'arbre mesurait environ 3,03 m, il a grandi de 0,57 m

54) *Combien de branches poussent chaque année ?*

R1 : Il semblerait que deux ou trois branches poussent chaque année.

R2 : Nous n'arrivons pas à le savoir.

55) *En 2023, l'arbre aura-t-il toujours 3 branches principales ?*

R1 : Oui

56) *Peut-on connaître les dimensions de l'arbre en 2013, en 2014 et en 2015 ?*

R1 : Nous ne savons pas.

57) *En une génération, de quel pourcentage la taille des branches diminue ?*

R1 : On ne sait pas.

58) *De combien de centimètres l'arbre grandit tous les ans ?*

R1 : 0,84 m en 2014 et 0,5 m en 2015.

59) *Combien de cm prend-t-il chaque année ?*

R1 : Nous ne pouvons pas répondre à cette question car la croissance est irrégulière.

60) *Combien de branches poussent par an ? Et combien y en a-t-il à la toute fin ?*

R1 : En 1 an : 7 et à la fin : 19 601 (selon suite de Fibonacci).

R2 : On ne sait pas, l'évolution n'est pas proportionnelle.

R3 : Les branches issues de même sommet donne un triplet de branches et les autres sont doubles. Nombre de branches par an : $(3x)^n + (2y)^k$.

R4 : Minimum : 3072 branches et maximum : 177 147 branches.

R5 : On observe qu'il pousse au minimum 2 branches et au maximum 3 branches sur chacune des anciennes branches.

R6 : Le nombre de branches qui poussent augmente tous les ans 7 puis 17. Sur chaque branche, il pousse soit 2, soit 3 nouvelles branches.

Un nœud de trois branches donne l'année suivante 7 branches : 3 puis 2 puis 2

61) *De combien de mètres l'arbre se développe-t-il en un an ?*

R1 : On ne peut pas savoir car ce n'est pas proportionnel et on n'a pas plus d'informations.

R2 : Entre 2013 et 2014 il gagne 0,8m en hauteur et entre 2014 et 2015 il gagne 0,5m en hauteur.

R3 : En un an, l'arbre pousse d'environ 1m21cm de largeur à 2,35m et la longueur de la branche passe de 0,6m à 1,25m l'année d'après ($\times 0,65$ m).

62) *Combien l'arbre mesure-t-il la première année ?*

R1 : L'arbre mesure 1 mètre de largeur et 1,7 m de hauteur la première année.

R2 : Entre 1m69 et 1m72 en hauteur et 1m75 de largeur

63) *Combien de branches s'ajoutent à chaque fois ?*

R1 : Il s'ajoute au bout de chaque branche déjà existante deux ou trois branches, donc il s'ajoute une ou deux branches en plus de chaque branche existante.

R2: Chaque branche se divise en seulement 2 ou 3 et de façon aléatoire.

64) *Sur le même plan, quelle est la hauteur et la largeur de l'arbre en 2016 ?*

R1 : On ne peut pas savoir.

R2 : Nous ne savons pas car nous ne savons pas comment pousse l'arbre entre 2013 et 2016.

65) *Quelles sont les mesures possibles pour un angle formé par deux branches ?*

R1 : On ne peut pas savoir. On a l'impression que cela forme un angle droit.

R2 : Moins de 90 degrés il nous semble mais nous ne pouvons pas dire plus.

66) *À partir de quelle année l'arbre réduit-il sa croissance ?*

R1 : Dès la deuxième année on remarque que l'arbre croît moins vite.

67) *Quelle distance doit-on prévoir entre les branches de l'arbre et les parois de la serre ?*

R1 : Nous ne savons pas.

68) *Combien mesure l'arbre en 2014 ?*

R1 : Sur le dessin, il mesure 7,2 cm. Soit plus de 2 m en réalité.

R2 : On a mesuré 7.6 cm de hauteur. L'unité de mesure donnée indique que 2.8 cm représentent un mètre. L'arbre mesure environ 2m78

69) *De combien de mètres ou centimètres pousse l'arbre par an ?*

R1 : Sur le dessin :

-	2013	2014	2015
Epaisseur du tronc	2 mm	3 mm	6 mm
Hauteur du tronc	3 cm	3,7 cm	4 cm

R2 : Il pousse de façon différente. La hauteur prise chaque année est divisée par deux environ: 96 cm puis 46 cm

70) *Pourquoi l'arbre en 2014 a pris 6 branches et en 2015 14 branches ?*

R1 : Nous l'ignorons.

R2 : Il y a 7 puis 17 nouvelles branches

Chaque année, chaque branche fabrique de nouvelles branches et comme il y en a de plus en plus, il y a de plus en plus de nouvelles branches

71) *Quelle est la longueur des branches ?*

R1 : En 2015, au maximum 4,5 cm sur le dessin.

72) *En 2016, combien de mètres mesurera-t-il ?*

R1 : Nous l'ignorons.

R2 : On ne sait pas

73) *De combien de mètres grandit le tronc chaque année ?*

R1 : Sur le dessin :

	2013	2014	2015
Hauteur du tronc	3 cm (plus d'un mètre)	3,7 cm (25 cm de plus)	4 cm

74) *Combien d'étapes d'évolution jusqu'en 2023 ?*

R1 : 2015-2016 2016-2017 2017-2018 2018-2019 2019-2020 2020-2021
 2021-2022 2022-2023

On a compté qu'il y avait 8 étapes

R2 : Si une étape d'évolution correspond à une année, alors on compterait 10 étapes.

75) *Quelle forme ont les feuilles? Quelle taille ?*

R1 : On ne sait pas mais ça peut être important (exemple du palmier)

R2 : On ne sait pas car sur le dessin, il n'y a pas les feuilles.

76) *Quelle est la forme de ses feuilles ?*

R1 : Peut-être ont-elles la forme de palme ?

R2 : On ne sait pas mais ça pourrait être important (exemple le palmier)

77) *Est-ce que l'arbre grandira régulièrement ? De combien l'arbre grandit-il chaque année ?*

R1 : On ne sait pas directement, il va falloir faire des observations et des suppositions pour savoir comment grandira l'arbre. On est tout de même obligé de supposer que ce qui est observé sur les 3 schémas restera vrai après.

78) *Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?*

R1 : Nous n'avons pas vraiment cherché le nombre de branches. Mais on doit supposer que le développement des branches est identique chaque année, sinon on ne peut rien prévoir.

79) *Pourquoi ne pas construire tout de suite une serre de 10 à 15 m pour être sûr que ça soit assez grand ?*

R1 : Il est possible que l'arbre dépasse cette hauteur !! On se disait qu'on pourrait faire une serre de taille vraiment exagérée, par exemple 100m, mais alors ce serait du gâchis. Le but du problème est justement de prévoir une serre au plus proche de la taille de l'arbre en 2023, pour ne pas dépenser trop d'argent dans la serre.

80) *Chaque année, combien de branches nouvelles pousse-t-il ?*

R1 : En 2013 : 3 ; en 2014 : 7 de plus ; en 2015 : 17 de plus ; En 2016 ?

81) *Combien l'arbre prendra-t-il de centimètres chaque année ?*

R1 : La hauteur totale grandit de 1,4 m puis de 0,7 m si ça continue ainsi, il n'atteindra jamais le double de sa hauteur d'origine soit le double de 3m en 2015

83) *Combien faut-il de branches en 2016 ?*

R1 : Il y aura 68 branches en 2016. J'ai additionné les branches. Chaque année, il y a 3 branches qui poussent et le reste c'est 2 branches.

84) *Combien mesure chaque branche ?*

R1 : Ça change en fonction des années. Chaque année les branches grandissent, celles de 2013 continuent à pousser.

85) *Combien l'arbre prend-il de m par an ?*

R1 : On ne peut pas savoir sa taille mais on peut savoir sa forme (son nombre de branches).

R2 : D'après l'échelle, 1 mètre est représenté par 2,8 cm, donc on fait un produit en croix pour trouver combien représente 1 cm :

$1 \times 1 : 2,8 = 0,357$ donc 1 cm représente 0,357 m soit 35,7 cm dans la réalité

La première année il grandit de 2,2 cm sur le dessin, soit 78,54 m

La 2ème année il grandit de 1,6 cm sur le dessin, soit 57,12cm

86) *Est ce qu'en 2023, la largeur de l'arbre sera de 10 m?*

R1 : On ne peut pas savoir.

R2 : C'est possible, mais on n'a pas eu le temps de faire tous les calculs

87) *Est ce que sa hauteur sera de 3 m ?*

R1 : Non, en 2015 il fait déjà plus de 3 mètres

R2 : Il sera forcément plus grand car c'est environ sa hauteur en 2015

88) *Quelle est la taille de l'arbre au départ ?*

R1 : Sur la feuille, c'est 5cm de hauteur soit environ 1,66m et 1 m de largeur.

89) *Pourquoi ne pas construire une serre assez grande de 75m pour être sûr que ça rentre ?*

R1 : On ne pourrait pas car ce serait trop cher et inutile.

90) *Combien mesure le premier arbre ?*

R1 : D'après l'échelle, 1 mètre est représenté par 2,8 cm, donc on fait un produit en croix pour trouver combien représente 1 cm : $1 \times 1 : 2,8 = 0,357$ donc 1 cm représente 0,357 m soit 35,7 cm dans la réalité. Le premier arbre mesure environ 1,70 mètre de hauteur

R2 : Sur la feuille 5cm donc environ 1,66 m.

91) *De combien grandit-il chaque année ?*

R1 : La première année il grandit de 2,2 cm sur le dessin, soit 78,54 m

La 2ème année il grandit de 1,6 cm sur le dessin, soit 57,12cm

R2 : Pour la hauteur, il grandit d'environ 1 m.

92) *Quelle taille et quel format aura l'arbre en 2023 ?*

R1 : C'est ce qu'on cherche tous, pour l'instant on ne connaît pas encore la réponse. Nous sommes sur la voie de la recherche.

93) *Quelle sera la taille (hauteur et largeur) de l'arbre en 2023 ?*

R1 : On ne le sait pas encore.

94) *Ses racines grandissent de combien par année ?*

R1 : Cela n'a pas d'importance, car les racines poussent sous terre et donc elles ne posent pas de soucis pour la serre.

95) *Combien de temps met-il pour grandir d'un mètre ? (après on multipliera pour trouver sa taille en 2023)*

R1 : On ne le sait pas, il nous manque des informations.

96) *Quelles sont les dimensions hauteur et largeur chaque année ?*

R1 : Sur les dessins :

En 2013, la largeur est de 3,3 cm, la hauteur de 4,7 cm.

En 2014, la largeur est de 6,5 cm, la hauteur de 7,3 cm.

En 2015, la largeur est de 8,6 cm, la hauteur de 8,6 cm.

97) *Quelle est la distance entre chaque intersection de branches chaque année ?*

R1 : Difficile de répondre car elles semblent pousser toutes à des vitesses différentes.

98) *De combien de cm grandissent les branches chaque année ?*

R1 : On ne peut pas savoir car elles ne poussent pas à la même vitesse.

99) *Est-ce que la croissance entre 2013 et 2014 est la même qu'entre 2014 et 2015 ?*

R1 : Non

100) *Combien mesure l'angle de chaque branche ?*

R1 : Ca dépend des branches, on peut dire que tous les angles sont aigus.

101) *Quelle proportion doit avoir le volume de la serre par rapport au volume de l'arbre ?*

R1 : Nous ne savons pas.

102) *Quelle est la hauteur de l'arbre chaque année ?*

R1 : On la connaît pour 2013, 2014 et 2015

103) *Combien de branches y aura-t-il dans l'arbre en 2023 et quelle sera sa taille ?*

R1 : On n'en sait rien

104) *Quelle doit-être la hauteur de la serre ? Doit-on respecter des distances entre la serre et l'arbre ?*

R1 : On peut construire une serre qui fait le double de l'arbre

R2 : La serre doit avoir minimum la taille de l'arbre. Nous sommes d'accord avec vous sur le fait que nous avons besoin d'informations sur la distance à respecter entre l'arbre et la serre.

105) *Combien mesurera l'arbre en 2019 ?*

R1 : Nous ne pouvons pas savoir.

R2 : Plus qu'en 2015 (hihi)

Qgrandeurs_E

1) *Qu'indique le "1mètre" au-dessus de la représentation de l'arbre en novembre 2013 ?*

R1 : C'est une échelle. La longueur du segment correspond à un mètre.

2) *L'échelle peut-elle être utilisée peu importe la direction dans laquelle on mesure ?*

R1 : Oui !

3) *Quelle est la signification, exacte du dessin « 1 m » ?*

R1 : C'est une échelle, 3 cm sur le dessin représentent 1 m en réalité. On peut donc faire de la proportionnalité pour prendre des mesures.

R2 : 3 cm sur le dessin représente 1 m dans la réalité

4) *L'échelle est-elle de 1 m pour 2,8cm, 2,9 cm ou 3cm?*

R1 : On a considéré que l'échelle était de 1 m pour 2,8 cm.

R2 : On choisit 3 cm pour simplifier.

5) *Par combien faut-il multiplier les dimensions, en centimètre, pour obtenir les dimensions en mètre ?*

R1 : Si on compte 1 mètre pour 3 cm, alors 1 centimètre représente $1/3$ m. C'est la proportionnalité

R2 : On pense que c'est une échelle, c'est une situation de proportionnalité, il faut diviser par environ 0,33 (on fait une petite erreur) mais en fait c'est un tiers si on veut être exact.

6) *1cm du dessin= combien de mètres en vrai ?*

R1 : Il semblerait que 3 cm sur le dessin correspondent à 1 m en vrai, donc 1 cm correspond à 0,33 m.

R2 : 1 cm du dessin = 0,36 mètres

R3 : Nous on a trouvé 1 mètre pour 2,7cm

R4 : On pense que c'est la même façon que juste avant, il faut diviser par 3, 1 cm représente un tiers de mètre. Nous on a fait une photocopie plus petite, format A5, 2 cm représente 1 m et on doit tout diviser par 2, ça tombe pile, mais l'arbre sur notre feuille est plus petit.

7) *L'échelle donne 1 mètre, mais est-ce 1 mètre de hauteur ou de largeur ?*

R1 : C'est la même échelle en hauteur et en largeur

8) *Quel calcul faut-il faire pour convertir les centimètres en mètres dans le dessin ?*

D'après l'échelle, 1 mètre est représenté par 2,8 cm, donc on fait un produit en croix pour trouver combien représente 1 cm : $1 \times 1 : 2,8 = 0,357$, donc 1 cm représente 0,357 m soit 35,7 cm dans la réalité.

9) *Quelle est l'échelle d'un mètre dans le problème ?*

R1 : 1 mètre est représenté par 2,8cm

10) *Peut-on mesurer avec la règle ? Est-ce la bonne mesure si on travaille avec l'échelle ?*

R1 : Oui il faut utiliser la règle, sinon on ne peut pas mesurer.

11) *L'échelle qualifie la hauteur ou la largeur ?*

R1 : certains d'entre nous pensent que c'est pour une longueur en général (hauteur et largeur)

R2 : L'échelle est bonne pour mesurer un segment quelconque (quel que soit l'orientation)

12) *L'échelle est-elle vraiment précise ?*

R1 : 3 cm environ font 1 m.

13) *Est-ce que les croquis sont représentés à l'échelle réelle ?*

R1 : Ils respectent l'échelle du dessin

14) *Les croquis sont-ils à l'échelle ?*

R1 : Nous pensons que les croquis sont à l'échelle du moins au moins le premier croquis où l'on nous dessine au-dessus l'échelle.

R2 : Oui

R3 : Les croquis sont à l'échelle: 1 mètre = 2,9 cm

15) *Les trois croquis sont-ils à la même échelle?*

R1 : Oui

R2 : Les 3 croquis sont à la même échelle car on peut la lire : 3cm sur le dessin correspondent à 1m dans la réalité.

R3 : Les 3 croquis sont à la même échelle car ce serait contre-productif pour une étude scientifique, de produire des schémas à des échelles différentes.

16) *Le schéma est-il à l'échelle ?*

R1 : La plupart d'entre nous a pensé qu'il fallait supposer que oui !

R2 : Oui.

SELON L'INDICATEUR Q_{contexte}

$Q_{\text{contexte-F}}$

1) *Est-ce que l'arbre a des feuilles ?*

R1 : L'arbre aura des feuilles au printemps. Les croquis sont dessinés en novembre, il n'y a pas de feuilles comme c'est l'automne.

R2 : Oui

R3 : Oui, nous pensons qu'il y aura des feuilles.

2) *L'arbre a-t-il des feuilles ou des épines ? De quelles tailles ?*

R1 : Nous pensons que l'arbre n'a pas de feuille sur les schémas car ils sont faits en novembre Est-ce que ça serait une nouvelle espèce d'arbre qui n'a pas de feuille ?

3) *L'arbre a-t-il des feuilles ? Perd-il ses feuilles en hiver ?*

R1 : L'arbre a des feuilles : en effet, il est représenté sans rien sur les croquis donc il a peut-être des feuilles qui sont tombées vu que l'on est en novembre et que c'est la fin de l'automne.

R2 : Nous pensons que l'arbre n'a pas de feuilles car elles ne sont pas dessinées sur le schéma

R3 : Impossible de le savoir.

4) *Est ce que l'arbre possédera des feuilles ?*

R1 : On pense que oui mais on pense négliger la taille des feuilles pour la résolution du problème.

R2 : Oui, nous pensons qu'il y aura des feuilles.

R3 : Oui bien sur

5) *Est-ce que l'arbre aura des feuilles ?*

R1 : On ne peut le savoir car il se peut que cette arbre n'aura jamais de feuilles ou pas

R2 : Oui !

R3 : On ne peut pas savoir, mais on peut supposer qu'elles constituent le 5 % du volume total.

R4 : On ne sait pas mais ça dépend sans doute des saisons.

R5 : On a demandé aussi si ces feuilles devaient être comptées. On ne sait pas.

6) *A-t-il des fleurs ou feuilles ou fruits ?*

R1 : Oui car nous voyons des bourgeons.

7) *Est-ce que l'arbre a ou aura des feuilles ?*

R1 : On ne peut pas savoir, mais on peut supposer qu'elles constituent 5 % du volume total.

8) *Est-ce qu'il y a des feuilles ?*

R1 : On ne sait pas, ça dépend sans doute des saisons.

R2 : Il n'y a pas de feuilles sur les croquis car ils représentent les arbres en automne mais on peut supposer qu'au printemps et en été, il y aura des feuilles sur l'arbre.

9) *L'arbre a-t-il des fruits, des feuilles assez grosses ? (ils prennent de l'espace à compter ou non dans les dimensions ?)*

R1 : Certains élèves pensent qu'il n'y en a pas et d'autres élèves pensent qu'ils ne sont pas dessinés car c'est un schéma.

R2 : On ne sait pas, mais on va dire qu'il n'y en a pas.

10) *L'arbre aura-t-il des feuilles ? Des fruits ?*

R1 : Tous les arbres ont des fruits (pas forcément comestibles) c'est grâce à eux qu'ils se reproduisent. Pour les feuilles nous n'en savons rien.

11) *Est-ce que l'arbre aura des feuilles ? Des fleurs ?*

R1 : On suppose que oui, mais leur taille n'est pas importante par rapport aux branches et au tronc. On peut tout de même se dire qu'il faudra prévoir un peu d'espace en plus dans la serre pour les feuilles.

12) *Est-ce qu'il y aura des feuilles ou des fruits qui pousseront sur l'arbre ?*

R1 : Pour faciliter le problème, non...

13) *L'arbre est-il un arbre fruitier ?*

R1 : Nous l'ignorons.

14) *Est-ce que cet arbre est un arbre fruitier ? Si oui, est-ce que ses fruits sont gros ?*

R1 : Oui mais pas d'idée sur la grosseur du fruit.

15) *Est-ce qu'il y aura des fruits ?*

R1 : Si c'est un arbre fruitier, oui. On ne pas savoir, sauf s'il y a des graines.

R2 : Oui car c'est un arbre exotique.

16) *Est-ce un arbre fruitier ? Un conifère ?*

R1 : Ce n'est pas un conifère à cause de la forme de la pousse, c'est donc un arbre fruitier (dans le sens où il a des fruits mais pas forcément comestibles).

R2 : Fruitier.

R3: Nous supposons que non.

17) *Va-t-il fournir des fruits ? Forme et taille des fruits ?*

R1 : On ne sait pas car sur le dessin, il n'y a pas les fruits.

18) *Est-ce que cet arbre va avoir des feuilles ? Si oui vont-elles tomber ?*

R1 : Oui, mais on ne sait pas si les feuilles vont tomber, ça peut être des feuilles persistantes.

19) *Est-il caduque, résineux ou persistant ?*

R1 : On ne sait pas.

20) *Est-ce que l'arbre va fleurir ?*

R1 : Oui

R2 : Oui l'arbre va peut-être fleurir en 2023 et avoir des feuilles car c'est un arbre exotique.

21) *Va-t-il fleurir ? Forme et taille des fleurs ?*

R1 : On ne sait pas car sur le dessin, il n'y a pas les fleurs.

22) *L'arbre fait-il des fleurs ?*

R1 : Oui on peut supposer que l'arbre fait des fleurs.

23) *L'arbre a-t-il des fleurs, des feuilles, des fruits ?*

R1 : Nous ne savons pas.

24) *L'arbre pousse-t-il dans l'hémisphère nord ou sud, autrement dit, possède-t-il des feuilles, des aiguilles ?*

R1 : On ne peut pas répondre.

R2 : L'arbre pousse dans l'hémisphère sud car dans l'énoncé il y a écrit que l'arbre est exotique, on en déduit donc qu'il possède des feuilles.

25) *Est-ce qu'il y a des animaux sur l'arbre ? Si oui vont-ils faire des nids ?*

R1 : Oui, il peut y avoir effectivement des nids.

R2 : Dans la serre il n'y aura pas d'animaux ni d'insecte.

26) *Doit-on protéger les racines de l'arbre qui sortiraient du sol ?*

R1 : Les racines de l'arbre sortant du sol doivent être protégées car elles sont indispensables pour la croissance de l'arbre et doivent être prises en considération pour les mesures de la serre.

R2 : Non

Q_{contexte-Besoins}

1) *Les conditions climatiques de la serre sont-elles les mêmes que celles de son pays d'origine ?*

R1 : On pourrait les recréer dans la serre.

R2 : Oui. En chauffant la serre et grâce à l'effet de serre, on peut avoir des températures idéales.

2) *A-t-il besoin d'un environnement spécial pour atteindre sa maturité ?*

R1 : La serre

R2 : Oui. Il faut qu'il fasse chaud dans la serre.

3) *Est-ce que l'arbre a besoin de lumière pour pousser ?*

R1 : Oui, c'est pour cela qu'on fabrique une serre (et pas des murs avec ou sans fenêtre)

4) *L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?*

R1 : Nous pensons que non, sinon l'énoncé comporterait davantage d'informations sur ce sujet.

R2 : Nous ne savons pas.

5) *Combien de fois faut-il l'arroser ?*

R1 : On ne sait pas, mais d'habitude on n'arrose pas un arbre.

R2 : On arrose l'arbre 3 fois par mois.

6) *Le fait de mettre l'arbre sous serre va-t-il modifier sa croissance naturelle ?*

R1 : Non.

7) *Quelles conditions climatiques devront respecter la serre (humidité, chaleurs,...) ? Quels sont les apports d'eau dont requiert l'arbre afin d'optimiser sa croissance ? Dans quel type de terre l'arbre se développe-t-il ? Est-ce un arbre fruitier ?*

R1 : Nous pensons que cela n'a pas d'importance.

R2: La serre devra respecter les mêmes températures que l'endroit où l'arbre a été trouvé. Ce n'est pas un arbre fruitier.

R3 : Il faut des conditions exotiques. On ne connaît pas les rapports d'eau. »

R4 : On peut supposer que l'arbre a des feuilles, mais on ne sait pas s'il faut les prendre en compte.

8) *La météo, la pollution peuvent-elles faire varier la croissance de l'arbre ?*

R1 : Nous pensons que oui, la serre est fermée, mais la pollution peut rentrer par la terre, l'eau peut être polluée, nous pensons qu'il peut mourir à cause la pollution. C'est important car la météo et la pollution peuvent faire varier la croissance de l'arbre.

R2 : L'arbre sera protégé dans la serre, la chaleur peut le dessécher.

9) *Nous pensons que l'arbre va grandir et changer à chaque saison, êtes-vous d'accord avec nous ?*

R1 : On pense qu'il va changer à chaque saison.

R2 : Oui il va grandir chaque année et changer à chaque saison

10) *La croissance dépend-elle de la quantité d'engrais ou du climat ?*

R1 : Comme l'arbre est dans une serre on peut dire que sa croissance ne dépend pas du climat car depuis 2013 l'arbre était dehors et sa croissance n'a pas été modifiée. Pour les engrais, on ne peut pas répondre.

R2 : En effet, le climat ou l'utilisation d'engrais influe fortement sur la croissance de l'arbre. De plus, venant d'un pays exotique, il a besoin d'un endroit / climat chaud et humide.

11) *Quelles ont été les températures moyennes en 2013, 2014 et 2015 ?*

R1 : En 2013, à Montpellier la température moyenne a été de 15°C, en 2014, elle était de 16,4°C et 16,1°C en 2016.

12) *La présence de la serre va-t-elle avoir une influence sur la croissance ?*

R1 : Nous ne pensons pas que la serre influencera la croissance.

R2 : On ne peut pas savoir.

R3 : Non.

13) *L'environnement du Jardin des Plantes est-il semblable à l'environnement initial de l'arbre ?*

R1 : Nous ne pouvons pas savoir.

14) *Faut-il prévoir une alimentation en eau ? Un système de ventilation ?*

R1 : Oui.

15) *L'orientation de la serre est-elle importante ?*

R1 : Oui pour que l'arbre pousse bien mais pas pour répondre au problème.

16) *A quoi sert une serre ?*

R1 : Sert à protéger les arbres et plantes du froid et du vent.

R2 : A protéger l'arbre des différentes saisons, à protéger les plantes, à protéger des plantes en voie de disparition.

17) *Faut-il prévoir la place pour un seul arbre ?*

R1 : Oui.

18) *Y a-t-il un budget à respecter pour la construction de la serre ? Pour l'entretenir ?*

R1 : On ne sait pas.

19) *L'arbre a-t-il des besoins particuliers (terre spéciale, apport en eau ...)?*

R1 : Pas précisé.

R2 : oui : l'eau, le soleil, la terre, comme tous les végétaux

20) *L'arbre a-t-il des besoins spéciaux ? (Terre, eau, chaleur...)*

R1 : L'arbre a besoin d'un petit peu de tout et les botanistes vont en prendre soin

R2 : Il a sûrement besoin d'eau, de terre et de chaleur comme tous les arbres

21) *L'arbre a-t-il besoin d'un traitement particulier ?*

R1 : L'arbre étant exotique, il doit certainement avoir besoin d'un traitement particulier.

22) *Dans quelles conditions de vie peut-il vivre ? Lui faut-il un environnement adapté? (T°, terre, humidité ...) Est-il sensible aux changements brusques de températures ?*

R1 : L'arbre n'est sûrement pas sensible aux changements de température, car sinon il n'aurait pas survécu 3 ans au jardin des plantes.

R2 : L'arbre est sûrement sensible à des changements brusques car sinon il n'aurait pas besoin d'une serre spéciale. (Les arbres exotiques sont sensibles à ce genre de chose)

23) *Est-il à l'ombre ou au soleil ?*

R1 : Nous ne savons pas.

24) *Le matériau de la serre ou sa couleur influencent-ils la pousse de l'arbre (favorisation de la photosynthèse, maintien d'une température optimale,...).*

R1 : Oui, car cela peut influencer le milieu dans lequel l'arbre pousse.

R2 : La couleur n'aura pas d'influence si elle laisse passer la lumière naturelle, pareil pour le matériau tant que la température intérieure correspond à celle du milieu d'origine.

R3 : Oui, certains matériaux empêchent les rayons de passer et donc d'empêcher l'évolution de l'arbre.

25) *Est-ce que l'arbre peut pousser de manière irrégulière par rapport aux saisons ?*

R1 : Oui

R2 : L'arbre peut grandir tout seul mais les botanistes peuvent mettre de l'engrais

26) *Est-ce possible de faire une serre démontable ? Ou avec un toit amovible par exemple ?*

R1 : Nous pensons que vu les moyens techniques actuels, il est possible de faire une serre démontable.

R2 : Nous pensons qu'il est possible de faire une serre démontable mais cela pourrait être long à monter et à démonter

27) *Si on arrose l'arbre et que l'on le met au soleil : est ce qu'il poussera plus vite ? Et en hiver ?*

R1 : On n'a pas de données pour le savoir. On va négliger ces informations pour la résolution du problème.

R2 : Nous pensons qu'il poussera effectivement plus vite si on l'arrose et qu'on le met au soleil. En hiver il poussera moins vite.

28) *Est ce que les botanistes mettent de l'engrais ?*

R1 : On ne sait pas mais on va considérer que non. On va négliger ces informations pour la résolution du problème.

R2 : On ne sait pas. Peut-être.

29) *Est-ce qu'on mettra de l'engrais ?*

R1 : On ne sait pas.

R2 : On pense que non.

30) *Est-ce que les botanistes vont mettre de l'engrais sur l'arbre ?*

R1 : L'engrais doit être mis sur le sol et non sur les feuilles.

31) *Met-on de l'engrais ?*

R1 : Nous ne savons pas.

32) *Donne-t-on de l'engrais à l'arbre ?*

R1 : On ne peut pas savoir, et ce n'est pas important pour le problème.

R2 : C'est possible, mais pas sûr, on va plutôt le laisser pousser naturellement

33) *Est-ce que les botanistes ont coupé des branches pour que l'arbre pousse mieux ?*

R1 : Nous ne pouvons pas répondre à cette question.

R2 : Non

34) Ne risquerait-il pas de mourir avant 2023 ? (Adaptation d'un arbre exotique au climat méditerranéen?)

R1 : On ne sait pas

R2 : Il est sous une serre, il est protégé.

Q_{contexte-Arbre}

1) Qu'est-ce qu'un arbre exotique ?

R1 : C'est un arbre qui provient des tropiques où le climat est chaud et humide.

R2 : Cela veut dire : un arbre des pays chaud. Cela veut dire un arbre qui n'est pas originaire du pays dont il est question. Exemple : un palmier

2) L'arbre craint-il une certaine espèce d'insecte ?

R1 : On ne sait pas.

R2 : Oui. Les pucerons, les termites, les fourmis.

3) Les 3 premières années a-t-il grandi dans une serre ?

R1 : Oui.

4) Pourquoi l'arbre est-il schématisé en novembre ?

R1 : Parce qu'il a été planté en novembre et découvert en novembre

R2 : L'arbre est schématisé en novembre car il a été découvert ce mois-là. On suppose que l'arbre est un feuillu et qu'il perd ces feuilles. Il est donc plus facile de l'observer et de le schématiser sans ces feuilles. L'arbre est schématisé en novembre car c'est à cette période de l'année qu'il pousse.

5) L'arbre peut-il être malade ? (et est-ce-que la maladie peut influencer sur sa croissance ?)

R1 : Oui, bien sur

6) L'arbre peut-il nuire à d'autres arbres ou plantes, ou à la faune autour de lui ?

R1 : On pense que non, on ne connaît pas son lieu de vie d'origine

7) Peut-il se faire infesté de parasites ?

R1 : L'arbre peut se faire infester de parasites s'ils trouvent de quoi se nourrir sur lui.

R2 : L'arbre a peut-être des défenses contre les parasites.

R3 : L'arbre peut se faire infester de parasites s'il n'est pas protégé par des engrais.

R4 : Oui.

8) A-t-il des problèmes de croissance ou de maladie ?

R1 : Nous n'avons pas de précisions dans l'énoncé.

9) A-t-il des racines ?

R1 : Il a des racines pour pouvoir vivre.

10) *Comment sera l'arbre en 2023 ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : Il sera plus haut et plus large.

11) *Pourquoi est-il exotique ?*

R1 : Nous l'ignorons.

R2 : Il est inconnu des botanistes

12) *Connaissez-vous l'origine de cet arbre et comment peut-il survivre ?*

R1 : C'est un arbre qui provient des tropiques, il lui faut donc de la chaleur et de l'eau pour survivre.

R2 : On ne sait pas.

13) *Comment imaginez-vous l'arbre en 2023 ?*

R1 : Grand, feuillage dense.

R2 : De la taille d'un platane, peut être avec des fruits.

14) *En 2023, nous pensons que l'arbre sera mature, il aura 11 ans. Êtes-vous d'accord avec nous ?*

R1 : On est d'accord, l'énoncé nous le dit !

R2 : On n'est pas tous d'accord. Certains ont dit oui pour 11 ans, mais d'autres pensent qu'il aura 10 ans, car de 2013 à 2023 il y a 10 ans d'écart.

15) *Est-ce qu'on va s'occuper de l'arbre de la même manière tout au long de sa vie ?*

R1 : Oui pour bien observer son développement de manière régulière

R2 : Non, car vers 6 mois, on ne s'en occupe plus.

16) *Peut-on faire une comparaison avec une espèce d'arbre connue ?*

R1 : Non, sauf si on a récupéré d'autres arbres de la même espèce.

R2 : Nous ne savons pas assez de choses sur cet arbre pour pouvoir le comparer à un autre qui pourrait lui ressembler.

R3 : Comme nous avons supposé que l'arbre était feuillu, nous pourrions le comparer à un feuillu.

R4 : Nous pourrions comparer la croissance de l'arbre avec un autre à l'aide de ces branches

17) *Connaît-on des espèces d'arbres semblables et qui pourraient nous servir d'élément de comparaison ?*

R1 : Non, nous n'avons aucun élément de comparaison, il s'agit d'une nouvelle espèce.

R2 : A priori, non.

R3 : On ne sait pas.

18) *Cet arbre a-t-il des points communs avec des arbres exotiques déjà connus ?*

R1 : Nous ne pouvons pas répondre à cette question.

19) *A quoi ressemblera l'arbre en 2023 ?*

R1 : On ne sait pas.

20) *Est-il possible d'avoir la photo de l'arbre pour l'année 2016 ?*

R1 : Non, pas actuellement

R2 : Oui s'il existe et qu'il n'est pas juste le fruit de l'imagination de l'auteur du problème.

21) *Avez-vous une photo de l'arbre s'il existe ?*

R1 : Non

22) *A-t-on trouvé cet arbre à côté d'une rive ou dans une forêt ?*

R1 : Nous l'ignorons.

23) *Comment savez-vous qu'il va vivre jusqu'à 2023 ?*

R1 : Nous l'ignorons.

24) *Quel est l'âge de l'arbre en 2013 ?*

R1 : A priori, on ne peut pas le savoir.

R2 : Nous savons qu'il jeune mais nous ne savons quel âge il a.

25) *Quel âge à l'arbre ?*

R1 : Nous l'ignorons.

26) *L'arbre en 2013 a quel âge ?*

R1 : Nous ne pouvons point répondre à cette question car il n'y a aucune information qui nous permette de répondre. L'âge de l'arbre ne nous préoccupe pas pour répondre au problème. Idée : on peut partir du principe qu'en 2013, il a 1 an. Cela permet de numéroter les années.

27) *En quelle année a-t-il été planté ?*

R1 : On peut supposer que c'est en nov. 2013

R2 : On ne sait pas.

28) *Est-ce que les racines de l'arbre seront grandes ?*

R1 : On ne le sait pas.

R2 : On ne sait pas la taille des racines de l'arbre.

29) *L'arbre a-t-il des racines qui peuvent perturber le sol ?*

R1 : Dans tous les cas oui, en profondeur et au niveau de la surface. On peut faire des trous autour des arbres pour laisser la place aux racines

30) *Peut-on lui inventer un nom ?*

R1 : Oui. Julien. Le petit arbre tout seul. Pynganbo.

31) *Comment s'appelle cette espèce d'arbre ?*

R1 : Nous l'ignorons.

R2 : On ne sait pas mais ça ne sert à rien pour le problème

32) *A-t-on donné un nom à cette nouvelle espèce?*

R1 : On ne sait pas, mais plusieurs noms ont été proposés par la classe : Arbus, semper magnum, un naine, arctibus cerurus, orpur, jager, tortipous, fitness, Jacky, sdf, ingrid pleureur, gegen, centenaire, lou étoilé, vasilier...

R2 : Non mais on pourrait l'appelé le « coquillette »

33) *Quel genre de graine a-t-on planté?*

R1 : On ne considère pas cette information importante pour établir le volume de la serre.

R2 : On ne sait pas.

34) *D'où vient l'arbre?*

R1 : On suppose que l'arbre vient de l'Amazonie

R2 : D'un pays exotique (la Norvège ?)

R3 : C'est un arbre exotique, nous ignorons d'où il vient.

R4 : On ne sait pas mais cela ne nous semble pas important

R5 : Nous ne savons pas.

35) *Dans quel pays pousse-t-il ?*

R1 : D'après l'énoncé, l'arbre viendrait d'un pays exotique, et nous aimerions bien savoir lequel.

R2 : D'après l'énoncé, l'arbre viendrait d'un pays exotique, mais on pourrait imaginer en trouver également en France dans certaines régions chaudes.

R3 : On ne sait pas.

36) *Dans quel milieu vit l'arbre ?*

R1 : Milieu exotique

R2 : L'arbre vit dans un milieu exotique

37) *Dans quelle terre pousse l'arbre?*

R1 : On ne considère pas cette information importante pour établir le volume de la serre.

R2 : L'arbre pousse dans une terre similaire à l'endroit d'où il vient.

38) *De quelle espèce est l'arbre ?*

R1 : Exotique

R2 : Elle est inconnue.

R3 : L'énoncé précise qu'il s'agit d'une espèce non répertoriée.

R4 : C'est une nouvelle espèce donc on ne peut pas savoir.

39) *Quelle est cette nouvelle espèce ?*

R1 : C'est un arbre qui provient des tropiques où le climat est chaud et humide.

R2 : On ne le sait pas.

40) *Dans quel environnement vit l'arbre?*

R1 : C'est un arbre qui provient des tropiques où le climat est chaud et humide.

R2 : L'arbre vit dans le jardin des plantes de Montpellier. Comme c'est un arbre exotique il faut le protéger avec l'aide d'une serre.

41) *Quelle est la nature de l'arbre ?*

R1 : Inconnue, c'est dit dans l'énoncé.

R2 : Nous savons juste que c'est un arbre d'une espèce inconnue, donc a priori on n'a aucune information précise, internet ne nous a pas beaucoup aidé.

42) *D'où vient l'arbre exotique inconnu rapporté par les botanistes du jardin des plantes ?*

R1 : Amazonie Brésil

R2 : On suppose que l'arbre vient de l'Amazonie.

43) *Est-ce vraiment un arbre ou une autre plante ?*

R1 : C'est un arbre car cela est précisé dans l'énoncé.

R2 : Il est écrit que c'est un arbre !

Q_{contexte-Maturité}

1) *Qu'est-ce que le mot maturité ? Est-ce que la maturité veut dire la taille ?*

R1 : On pense que c'est quand l'arbre a atteint son plein développement, c'est-à-dire que l'arbre n'évoluera plus beaucoup.

R2 : La maturité c'est quand quelqu'un ou quelque chose arrête de grandir, donc ça sera quand l'arbre s'arrêtera de grandir.

2) *Que veut dire la maturité pour un arbre ?*

R1 : On pense que c'est quand l'arbre a atteint son plein développement, c'est-à-dire que l'arbre n'évoluera plus beaucoup.

R2 : La maturité correspond à ta taille finale

3) *Qu'est-ce que la maturité ?*

R1 : La maturité c'est quand il a atteint sa taille adulte et ne grandit plus.

R2 : C'est le fait d'être mûr. Lorsque la croissance cesse.

4) *Est-on sûr que l'arbre aura atteint sa maturité en 2023 ?*

R1 : On ne sait pas

R2 : Oui, c'est écrit dans l'énoncé

5) *Comment savez-vous que l'arbre atteindra sa maturité en 2023 ?*

R1 : C'est une donnée de l'énoncé, sûrement obtenue par des observations de cet arbre dans son habitat naturel ou par modélisation.

6) *Comment sait-on que la maturité sera atteinte en 2023 ?*

R1 : On ne sait pas

7) *Est-on sûr qu'il sera à maturité en 2023 ?*

R1 : Nous pensons qu'il faut faire confiance aux chercheurs.

R2 : Non, on n'en sait rien, mais si les botanistes l'estiment, on peut supposer que c'est bon.

8) *Est-ce que l'estimation de la maturité est précise ?*

R1 : Non

R2 : Une estimation n'est jamais précise à 100 %, on ne peut pas savoir s'il aura atteint sa maturité en 2023.

9) *Est-ce que l'âge de maturité est vraiment 2023 ?*

R1 : Oui, c'est dans l'énoncé.

10) *L'arbre peut-il encore grandir après sa maturité ?*

R1 : On ne sait pas

Q_{contexte-Botaniste}

1) *Qu'est-ce que les botanistes ont fait depuis 2013 ?*

R1 : Ils se sont occupés de l'arbre et ont étudié son développement, ses changements.

R2 : Les botanistes ont apporté l'arbre exotique inconnu. Depuis 2013, chaque année les botanistes réalisent des croquis de l'arbre. On pense qu'ils ont protégé l'arbre depuis 2013 en attendant la serre. Ils ont dû le cultiver et enlever les branches mortes.

2) *Que veulent construire les botanistes ?*

R1 : Une serre pour protéger l'arbre.

R2 : Une serre !

3) *Est-ce que les botanistes ont des renseignements sur l'arbre (début) ?*

R1 : Nous savons que c'est un arbre exotique sans connaître son espèce. On connaît sa taille pour l'année 2013, 2014 et 2015.

4) *Comment les botanistes savent-ils que l'arbre sera mature en 2023 ?*

R1 : On choisit de leur faire confiance.

R2 : Les botanistes savent qu'ils ont fait des études sur la nature de l'arbre.

5) *Comment les botanistes ont trouvé cet arbre ?*

R1 : Nous l'ignorons.

6) *Si l'arbre est inconnu, comment les chercheurs ont-ils pu estimer son âge de maturité ?*

R1 : On ne sait pas, on est obligé de croire ce que disent les chercheurs.

7) *Si les chercheurs ont laissé l'arbre dehors tout le temps, comment pouvaient-ils savoir qu'un changement brusque de température n'allait pas tuer l'arbre ou lui implanter des maladies ?*

R1 : Justement, ils construisent une serre pour pouvoir contrôler la température et éviter les maladies.

8) *Les botanistes créeront ils la serre maintenant ou à la maturité de l'arbre ?*

R1 : Nous pensons que la serre doit être construite maintenant pour protéger l'arbre au cours des années de recherche (jusqu'en 2023). Le problème est de connaître la taille de la serre à construire.

A partir des indicateurs $Q_{\text{modèle}}$, $Q_{\text{grandeurs}}$ et Q_{contexte} , nous avons classé toutes les questions exceptées les quatre suivantes. Ces questions sont de questions de vocabulaire qui relèvent de l'appropriation du contexte de l'énoncé, que nous regroupons dans un groupe nommé $Q_{\text{vocabulaire}}$.

$Q_{\text{vocabulaire}}$:

1) *Qu'est-ce qu'un botaniste ?*

R1 : C'est une personne qui s'occupe des arbres et qui les étudie.

R2 : C'est un spécialiste des végétaux.

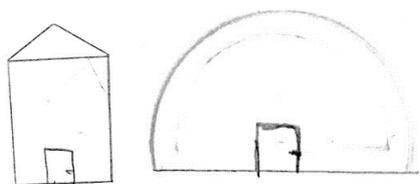
R3 : Un botaniste est une personne qui s'occupe des plantes.

2) *Qu'est-ce que qu'une serre ?*

R1 : une serre est un bâtiment vitré ou plastifié qui protège les plantes et qui permet ainsi d'avoir de meilleures conditions de croissance.

R2 : Une serre sert à protéger les plantes en hiver ou quand il y a du vent, c'est un endroit pour protéger les arbres du froid. C'est un dôme en verre qui protège les plantes.

Nous avons regardé sur internet les formes de serre : il y en a en forme de maison ou de demi-cercle :



3) *Que veut dire le mot serre ?*

R1 : Une serre est un abri en verre pour protéger les plantes.

R2 : C'est un abri pour arbres en verre

4) *Que veut dire le mot botaniste ?*

R1 : C'est une personne qui étudie les végétaux, c'est « un jardinier scientifique »

R2 : C'est quelqu'un qui s'occupe des plantes. C'est un spécialiste de botanique et la botanique est la science qui étudie des végétaux.

Annexe 14 Classement des réponses selon les indicateurs de dévolution de la mathématisation horizontale selon chaque catégorie de questions

Qmodèle-proportionnalité

	$R_{\text{modèle}}$	$R_{\text{grandeurs}}$	$R_{\text{pertinence}}$
Rchoix-réel	R1,1- R5,2-R7,2-R8,2- R2,4-R2,5-R1,10-R2,10- R2,17-R1,22-R2,24- R1,27-R2,31-R1,34- R1,35-R5,44-R1,7	R1, 26-	
Rchoix-a priori	R2,2-R4,2-R1,3-R2,3- R4,3-R1,4-R1,5-R3,5- R2,6--R3,10-R1,11- R2,12-R3,15-R1,17- R1,32-R1,33-R2,42- R3,44	R1,8-R2,8-R1,16- R2,18-R1,23-R1,36	R1,39- R1,43
Rchoix-maths	R1,2-R6,2-R2,7-R19- R2,9-R2,11-R1,12- R2,13-R1,14-R2,15- R4,15-R1,19-R2,19- R1,20-R2,22-R1,25- R2,25-R2,27-R1,29- R2,30-R1,31-R1,38- R1,40-R2,40-R1,41- R1,42-R1,44-R4,44- R1,45-R2,45	R3,2-R3,3-R1,6-R1,21	R1,18

Qmodèle-modèle

	$R_{\text{modèle}}$	$R_{\text{grandeurs}}$	$R_{\text{pertinence}}$
Rchoix-réel	R1,3-R1,4-R1,12-R1,15-R1,22-R2,28-R2,31-R1,39-R1,40- R2,43-R1,46-R1,59-R1,60-R1,72-R2,72-R1,73-R1,75- R2,76-R1,80-R2,80-R1,81-R2,81- R1,84-R2,84-R1,85- R2,85-R2,83	R2,6-R2,32-	
Rchoix-a priori	R1,2-R2,3-R1,7-R2,7-R1,13-R1,19-R1,23-R1,25-R2,25- R4,25-R1,27-R2,27-R3,28-R4,28-R1,31-R1,36-R1,37- R2,37-R2,39-R3,39-R2,41-R1,43-R2,45-R1,52-R1,55- R2,59-R1,61-R2,63-R1,65-R2,75-R1,78-R2,78-R3,78- R1,79- R2,82- R1,84	R1,11-R1,26- R1,28-	R1,47- R4,78-

Rchoix-maths	R2,4-R1,8-R2,8-R1,9-R1,14-R1,16-R2,16-R1,18-R2,18-R3,18-R2,19-R2,20-R1,21-R2,21-R2,22-R1,24-R2,24-R3,25-R3,27-R1,29-R2,29-R1,30-R2,30-R2,32-R2,33-R1,38-R3,40-R1,41-R1,42-R1,44-R1,45-R1,48-R2,48-R1,50-R1,53-R1,56-R1,58-R3,60-R1,62-R1,63-R1,64-R1,67-R1,69-R2,70-R1,71-R1,76-R1,77- R2,86-R3,86	R1,1-R2,1-R2,2-R1,20-R2,54-R3,54-R1,82-	R1,5-R2,67-
--------------	--	---	-------------

Qmodèle- serre

	$R_{\text{modèle}}$	$R_{\text{grandeurs}}$	$R_{\text{pertinence}}$
Rchoix-réel	R1,1-R3,1-R3,2-R1,3-R6,3-R1,9-R1,10-R3,12-R4,12-R1,13-R1,14		R8,3-R1,6-R1,7-
Rchoix-a priori	R2,1-R2,2-R3,3-R4,3-R7,3-R1,4-R1,5-R2,5-R1,8-R2,8-R3,8-R1,11-R2,12-R2,14-R1,15		R1,2
Rchoix-maths	R5,3-R2,10		R1,12

Qgrandeur_ I

	$R_{\text{modèle}}$	$R_{\text{grandeurs}}$	$R_{\text{pertinence}}$
Rchoix-réel	R2,20-R1,28-R2,28-R2,30-R1,31-R1,32-R2,35-	R2,6-R3,6-R4,6-R2,7-R2,8-R1,16-R1,17-R2,24-R1,27-R1,35-R1,40-R1,41-R1,42-R1,43-R1,44	R1,1-R2,1-R1,3-R2,3-R1,10-R1,18-R1,20-R1,21-R1,22-R1,26-

Rchoix-a priori	R2,11-R1,29- R1,30-R3,30- R2,31- -R4,37-	R1,4-R2,4-R1,6- R1,9-R2,9- R1,15-R1,24- R1,25-R2,27- R1,34-R2,34- R1,37-R2,37- R3,37-R1,38- R1,39-R2,44-	R2,5-R2,14- R2,21-
Rchoix-maths	R4,7-R1,11- R1,33-	R1,6-R1,7-R3,7-	R1,19-R1,23- R2,23-

Qgrandeur_M

	$R_{\text{modèle}}$	$R_{\text{grandeurs}}$	$R_{\text{pertinence}}$
Rchoix-réel	R1,2-R1,6-R1,35-R2,35-	R1,15-R1,19- R2,24-R1,43- R1,50-R1,76- R1,79-R1,89	R1,7-R1,8- R3,8-R5,8- R1,38-R1,44- R2,49-R1,75- R2,76-R1,94-
Rchoix-a priori	R2,1-R1,4-R2,7-R2,8-R3,9- R1,10-R2,10-R4,10-R2,13- R2,14-R1,20-R1,23-R2,23- R2,25-R2,26-R2,34-R2,38- R1,45-R1,46-R1,47-R2,47- R1,54-R2,60-R3,60-R2,63- R1,77-R1,78-R1,84-	R2,6-R4,8- R2,9-R2,15- R1,27-R2,30- R1,36-R2,36- R2,50-R4,60- R1,65-R2,65- R1,85-R2,91- R1,97-R2,98- R1,100- R1,104- R2,104-	R1,3-R2,48- R1,59-R1,61-

Rchoix-maths	R1,1-R2,5-R1,9-R2,11-R3,14-R1,25-R2,33-R1,34-R1,37-R2,37-R1,39-R2,39-R1,40-R1,41-R2,45-R3,45-R1,60-R1,63-R1,66-R2,69-R1,81-	R2,2-R2,3-R2,4-R1,12-R2,12-R3,12-R1,13-R1,14-R1,16-R1,17-R2,19-R1,21-R2,21-R1,22-R2,22-R1,26-R2,27-R1,28-R1,33-R1,42-R2,51-R1,52-R1,53-R1,58-R5,60-R6,60-R2,61-R3,61-R1,62-R2,62-R1,68-R2,68-R1,69-R2,70-R1,71-R1,73-R1,74-R2,74-R1,80- R1,83-R2,85-R1,87-R2,87-R1,88-R1,90-R2,90-R1,91-R1,96-	
--------------	---	--	--

Qcontexte

	R _{choix-réel}	R _{choix-maths}	R _{choix-modèle}	R _{pertinence}
Q _{contexte-F}	R1,1-R1,2-R1,3-R4,5 R1,6-R1,8-R2,8 R1,10-R2,15-R1,16- R2,16-R2,24-R2,26- R2,28-R1,33-R1,26	R2,3 R1,9	R1,5-R1,7 R2,9-R3,16 R1,22-R1,31 R2,25-	R1,4-R1,11 R1,12-
Q _{contexte-besoins}	Toutes les autres réponses (hormis les « non », «oui », «on ne sait pas », « peut-être ») soit 32 réponses		R2,5-R4,7- R1,12 R1,27-R1,28	R1,4-R1,7- R1,32
Q _{contexte-Arbre}	Toutes les autres réponses (hormis les « non », «oui », «on ne sait pas », « peut-être ») soit 32 réponses	R2,14	R2,10-R3,16 R1,34 R1,42-R2,42	R1,8-R1,14 R2,16-R2,20 R1,26 R2,31-R1,33 R4,34-R1,37 R3,38-R1,41 R1,43-R2,43
Q _{contexte-Maturité}	Toutes les autres réponses (hormis les « non », «oui », «on ne sait pas », « peut-être ») soit 8 réponses	R2,8		R2,4-R1,5-R1,9
Q _{contexte-Botaniste}	Toutes les réponses (hormis les « non », «oui », «on ne sait pas », « peut-être ») soit 10 réponses			

Conclusion générale et perspectives de recherche

Annexe 15 Enoncé de la FRAPPM « L'entrepôt »

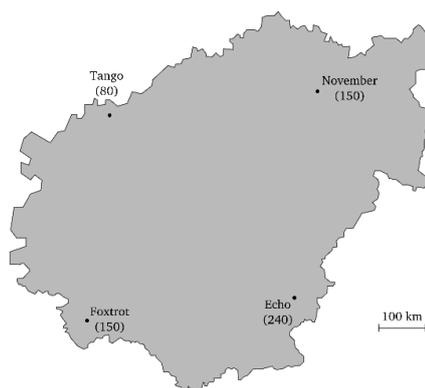
Une entreprise a plusieurs usines qui doivent être approvisionnées chaque semaine. La carte ci-dessous indique :

- les positions des différentes usines,
- le nom donné aux usines,
- le nombre d'unités de marchandise représentant l'approvisionnement dont chaque usine a besoin par semaine.

L'entreprise souhaite installer un entrepôt à partir duquel elle réalisera les approvisionnements vers les différentes usines en camion. La capacité maximale de chargement du camion est de 120 unités de marchandise.

L'entreprise souhaite que l'entrepôt soit positionné de la façon la plus économique possible.

Pouvez-vous l'aider à décider où installer cet entrepôt ?



Annexe 16 Fiction réaliste relancée « L'arbre »

IREM 2015-2016
Résolution Collaborative de Problèmes
L'arbre - Relance

Simon Modeste
simon.modeste@umontpellier.fr

Félicitations !

Vous avez été plus de 60 classes à vous pencher sur le problème de l'arbre. Je suis très content de voir que vous êtes engagés à fond dans notre problème !

Vous vous êtes tous posé beaucoup de questions très pertinentes, et vous avez proposé des réponses variées et très intéressantes permettant d'avancer dans la résolution du problème.

Beaucoup de questions ont porté sur l'arbre et ses spécificités. Malheureusement, on ne sait pas grand chose pour l'instant. C'est pour cela que les botanistes veulent l'étudier.

On peut tout de même préciser que l'arbre a des feuilles en été, ce sont des feuilles toutes petites. L'arbre a été prélevé dans la forêt en 2013, avant d'être replanté au Jardin des Plantes, donc on ne sait pas exactement quel est son âge. Les botanistes supposent que l'arbre atteindra en 2023 sa maturité (c'est-à-dire sa taille maximale). On leur fait confiance, c'est pourquoi on veut seulement savoir comment sera l'arbre en 2023.

On n'a pas besoin de se préoccuper des racines de l'arbre.

La serre qui va être construite aura une forme de pavé droit.

Le climat dans la serre sera similaire à celui du milieu d'origine de l'arbre (température, humidité, lumière, apports en eau et en nutriments, ...)

On laisse l'arbre pousser librement sans intervenir sur son développement (pas de taille, pas de tuteur, ...).

En étudiant vos réponses sur le forum, on voit que différentes pistes de travail sont envisageables pour traiter mathématiquement le problème. Pour continuer à travailler tous ensemble, nous devons faire des choix communs.

En faisant la même modélisation, nous étudierons ainsi le même problème mathématique.

Je me suis inspiré de vos réponses, pour faire les choix suivants :

- On utilise un modèle en 2 dimensions (dans le plan). Même si, en réalité, l'arbre est en 3 dimensions, cela facilitera le travail mathématique.
- On suppose que les diamètres du tronc et des branches sont sans importance, on les représente par des segments.
- On suppose que l'arbre va suivre les mêmes règles de croissance jusqu'en 2023, sans changement et sans imprévu (pas de parasite, pas de maladie, pas d'affaiblissement de l'arbre, pas de branche morte, ...).
- On utilise les croquis de l'arbre pour connaître les mesures et la forme de l'arbre en 2013, 2014 et 2015. Tous les croquis sont à la même échelle, indiquée sur l'énoncé.
- On prévoit une marge d'un mètre pour les dimensions de la serre pour que l'arbre ne la touche pas.
- D'une année sur l'autre, toutes les branches et le tronc grandissent de 10 %.
- Chaque année, de nouvelles branches poussent au bout des branches de l'année précédente (et jamais ailleurs).
- La longueur des nouvelles branches est proportionnelle à celle de la branche au bout de laquelle elles poussent.
- Les branches peuvent se croiser.
- On suppose qu'il pousse deux ou trois nouvelles branches au bout d'une même branche.
- À chaque embranchement à deux branches les angles sont toujours les mêmes. À chaque embranchement à trois branches, les angles sont toujours les mêmes.

En tenant compte de ces choix, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 et déterminez des dimensions pour la serre.

J'attends avec impatience de lire vos recherches !

Simon Modeste

Références

- Aldon G., Durand-Guerrier V. et Ray, B. (2014). Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation. Un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste. In ALDON Gilles (ed.), *Mathematics and realities* (p. 146-150), *Actes de la 66e CIEAEM*, 21-25 Juillet 2014 Lyon.
- Anhalt, C. O., Staats, S., Cortez, R., & Civil, M. (2017). *Mathematical Modeling and Culturally Relevant Pedagogy. Cognition, Metacognition, and Culture in STEM Education Learning, Teaching, and Assessment Of Science, Technology, Engineering, And Mathematics—STEM In K-12 Classrooms And Higher Education.*
- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCEREN-CRDP Académie de Lyon.
- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate*, 1997, (p. 101-139).
- Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, p.281-308
- Artigue, M., Dartois, Y., Pouyanne, N., & Rumelhard, G. (2009). Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie: l'expérience du Master professionnel «Didactique» à l'université Paris-Diderot–Paris 7. *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot*, 277-293.
- Bachelard S. (1979). « Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles ». In Delattre et M. Thellier (Ed) *Actes du colloque" Elaboration et Justification des Modèles: Applications en Biologie* (Vol. 1, p. 3-18).
- Barnes, H. (2005). The theory of Realistic Mathematics Education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras*, 2005(61), 42-57.
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM*, 50(1-2), 31-43.
- Berry, J. S., Burghes, D. N., & Huntley, I. D. (1984). Teaching and applying mathematical modelling.
- Berry, J. S. (1986). *Mathematical modelling: methodology, models, and micros* (Vol. 2). Halsted Press.
- Berry, J. S. (1987). *Mathematical modelling courses*. Halsted Press.
- Bessot, (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, p.29-56.
- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), p.195-232.
- Blum, W. (1995). Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education: some important aspects of practice and of research. *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications*, p.1-20.
- Blum, W (1996) Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht-Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, 23, p.15-38
- Blum, W., & Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. *Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft*.

- Blum, W., & Leiss, D. (2005). How the students and teacher deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics (222-231)*. Chichester: Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM* 38(2), 86-95.
- Brady, C., Lesh, R., & Sevis, S. (2015). Extending the reach of the models and modelling perspective: A course-sized research site. In *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 55-66). Springer International Publishing.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Bouleau, N. (1998). *Philosophies des mathématiques et de la modélisation. Du chercheur à l'ingénieur*. Paris : L'Harmattan.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics (Vol. 34)*. Springer Science & Business Media.
- Cabassut, R., & Ferrando, I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. In *Mathematical Modelling and Applications* (p. 223-232). Springer, Cham.
- Catinaud, R. (2016). *Qu'est-ce qu'une pratique ? Théories et théorisation des pratiques*. Thèse de doctorat
- Chabot, H. & Roux, S. (2011). *La mathématisation comme problème*, Archives contemporaines.
- Chesnais, A. (2014). Enseigner les mathématiques en ZEP. *Recherche sur la géométrie en sixième*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2e partie). *Petit x*, (19), 43-72.
- Colipan, X. (2014). Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim. Education. Université Joseph Fourier, 2014. Français.
- Coulange, L. (1997) Une étude sur la modélisation dans la classe de mathématiques en Seconde. Un double point de vue à partir de l'écologie et du contrat didactique. Mémoire de DEA de Didactique des disciplines Scientifiques. Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Coulange, L. (1998). Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement. *Petit x*, 47, 33-58.
- De Lange, J. (1989). Trends and barriers to applications and modelling in mathematics curricula. *Modelling, applications and applied problem solving*, 196-204.
- Delattre, P. (1979). Le problème de la justification des modèles dans le cadre du formalisme des systèmes de transformations. In P Delattre et M. Thellier (Ed) Actes du colloque" *Elaboration et Justification des Modèles: Applications en Biologie* (Vol. 1, p. 97-128).
- Dias T. (2008). *LA DIMENSION EXPERIMENTALE DES MATHÉMATIQUES* (Doctoral dissertation, Université Claude Bernard Lyon 1).
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.
- Eduscol (2016a)
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travillees/17/7/RA16_C4_MATH_modeliser_N.D_566177.pdf
- Eduscol (2016b)

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/20/7/RA16_C4_MATH_representer_N.D_566207.pdf

English, L. D., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*.

English, L. D., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008a). Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problem solving abilities. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*.

Freudenthal H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Gardes, M. L. (2013) *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* (Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I).

Gardes, M. L. (2017) Une étude d'épistémologie contemporaine sur l'activité de recherche mathématique de chercheurs : intérêt pour l'étude didactique dans *Epistémologie et didactique* -Bächtold, M., Durand-Guerrier, V., & Munier, V. Editions PUFC (p.177-192)

Giroud N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe* (Doctoral dissertation, Université de Grenoble).

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).

Gravemeijer, K., Figueiredo, N. & Van Galen, F., & (2009). The actor's and observer's point of view: A geometry applet as an example. *Educational Designer*, 1(3), 1-20.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, 32(6), p.777-796.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*.

Grenier D. (2015). La pratique des problèmes de recherche pour enseigner la Logique et les raisonnements mathématiques. Actes du colloque CORFEM 2014.

Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. *Enseigner les probabilités au lycée*, p.77-84.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Henry, M. (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités* (p.149-159). Besançon : Commission Inter-IREM statistiques et Probabilités.

Hubert, C. (2016) Modélisation : Complexifier ou simplifier ? Dans Alain Pavé (dir.), *Modélisation : succès et limites*, CNRS & Académie des Technologies, Paris, ISTE Éditions (p. 81-88)

Israël, G. (1996). *La mathématisation du réel: essai sur la modélisation mathématique*. Éd. du Seuil.

Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. 2. Empirische Untersuchungen*. Franzbecker.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 110-119.

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., & Stillman, G. (Eds.). (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

- Kaufmann J.-C. (1996). *L'entretien compréhensif*, Paris, Editions Nathan
- Kuzniak A., Vivier L. (2011). *La modélisation dans l'enseignement mathématique, mise en perspective. Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, n°3*. Irem de Paris 7.
- Legay, J. M. (1997). *L'expérience et le modèle* Paris, Inra Editions
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), p.113-142.
- Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn. *Mathematical modelling: Education, engineering and economics*, p.63-78.
- Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA—Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. In *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 629-639). Springer, Dordrecht.
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations.
- Martinand, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Berne, Peter Lang.
- Matos, J., & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications*, 71-82.
- Matthey, L. (2005) « Éthique, politique et esthétique du terrain : cinq figures de l'entretien compréhensif », *Cybergeo : European Journal of Geography* [En ligne], Epistémologie, Histoire de la Géographie, Didactique, document 312, mis en ligne le 31 mai 2005, consulté le 16 mars 2015. URL : <http://cybergeo.revues.org/3426> ; DOI : 10.4000/cybergeo.3426
- MEN (2008) BO n°6 du 28-08-2008
- MEN (2010) BO n°9 du 30-09-2010
- MEN (2011) BO n°8 du 13-09-2011
- MEN (2016) BO SPE 26/11/2015 Maths_cycle4
- MEN (2016a) BOEN n°17 du 23-4-2015
- MEN (2017) http://cache.media.education.gouv.fr/file/18/95/3/ensel512_maths_757953.pdf
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* (Doctoral dissertation, Université de Grenoble).
- OCDE (1999) Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Un nouveau cadre d'évaluation
- OECD (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. <http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/9603051e.pdf?expires=1503160581&id=id&accname=guest&checksum=0FC6A3AA70C4AB2F526F533DA7339200>
- Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques* (Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot-Paris VII).
- Perrin-Glorian, M. J. (1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques. *Repères IREM*, 29 (p.43-66).
- Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, p.57-78.

- Ramirez, P. (2017) Teachers' Beliefs about Mathematical Modelling: An Exploratory Study, In *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)*. European Society for Research in Mathematics Education.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 51-73.
- Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe: Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- Ray, B. (2013). Les fictions réalistes : un outil pour favoriser la dévolution du processus de modélisation mathématique ? Une étude de cas dans le cadre de la résolution collaborative de problème. Mémoire de Master 2 Recherche Histoire, Philosophie et didactique des Sciences, Universités Lyon 1 et Montpellier 2. p.39
- ResCo, IREM de Montpellier (2014) La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. *Repères IREM 96*, p. 73-96.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), p.505-528.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational studies in mathematics*, 59(1-3), p.269-298.
- Robert, A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck, *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès, p.59-68
- Robert, A. (2012) Une analyse qualitative du travail des enseignants de mathématiques du second degré en classe et pour la classe – éléments méthodologiques. Actes du Colloque *Les méthodes d'analyse des pratiques d'enseignement : un regard comparatif*. XVIIe Congrès Mondial AMSE, Recherche en Éducation et en Formation : Enjeux et Défis aujourd'hui. Université de Reims 3-8 juin 2012.
- Rodriguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- Rogalski, J. (2012) Théorie de l'activité et didactique, pour l'analyse conjointe des activités de l'enseignant et de l'élève. *Journal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. Vol 5, n°1
- Sauter, M. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. In *Repères Irem*, n° 72, p. 25-45.
- Schmid, A. (2009). Sciences, philosophies, modélisations : pour un nouvel usage de l'épistémologie. Dans Hervé D., Laloë F. (coord), 2009, *Modélisation de l'environnement : entre natures et sociétés* Paris coll. « Indisciplines », coédition Quæ/NSS-Dialogues, p. 181-190.
- Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. In *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 641-651). Springer, Dordrecht.
- Tanner, H., & Jones, S. (1995). Developing Metacognitive Skills in mathematical modelling—a socio-constructivist interpretation. *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications*, 61-70.
- Treffers, A. (1978) *Wiskobas Doelgericht*. Utrecht : IOWO.

- Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education—the Wiskobas program. In *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 97-121).
- Treffers, A. (1986). Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*, 1-32.
- Varenne, F. (2003). La simulation informatique face à la « méthode des modèles ». Le cas de la croissance des plantes. *Natures Sciences Sociétés*, 11(1), p.16-28.
- Varenne, F. (2007). *Du modèle à la simulation informatique*. Vrin.
- Varenne F. (2008). Epistémologie des modèles et des simulations. HAL Id: hal-00674144 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144>
- Varenne F. (2016). « Histoire de la modélisation : quelques jalons », dans Alain Pavé (dir.), *Modélisation : succès et limites*, CNRS & Académie des Technologies, Paris, ISTE Éditions
- Wenger E. (1998). *Communities of Practice : Learning, Meaning and Identity* Cambridge, University Press
- Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école: une étude de cas. *Éducation et didactique*, 6(2), 65-88.
- Yvain, S. & Gardes, M. L. (2014). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon G. (ed.), *Mathematics and realities. Actes de la 66e CIEAEM*, 361-366, 21-25 Juillet 2014 Lyon.
- Yvain, S. (2016) Vers une possible dévolution de la mathématisation dans un processus de modélisation. In Gueudet, G., Kryszynska, M., Rogalski, M., Trouche, L., Winsløw, C., Quilio, S., & Sierra, T. A. Enjeux et débats en didactique des mathématiques. *XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*.
- Yvain, S. (2017) Etude de la transposition du processus mathématisation aux élèves dans *Epistémologie et didactique* -Bächtold, M., Durand-Guerrier, V., & Munier, V. Editions PUFC (p.235-249)
- Yvain, S. (2018) Favoriser la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves engagés dans une activité de modélisation in *Proceedings of the CIEAEM 69 "Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 27, Supplemento n.2, 2017 p.123-128*
- Yvain, S. et Modeste, S. (2018) Faire entrer les élèves dans la mathématisation horizontale. Des fictions réalistes et un dispositif de résolution collaborative in *Proceedings of the CIEAEM 69 "Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 27, Supplemento n.2, 2017 p.288-296*

Table des figures

FIGURE 1 : LE PROBLEME DU PETROLIER	17
FIGURE 2 : ENONCE DU PROBLEME DE L'ARTISTE (2009-2010)	21
FIGURE 3 : ORGANISATION DU DISPOSITIF RESCO	23
FIGURE 4 : ENONCE DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS (2012-2013)	24
FIGURE 5 : QUESTIONS D'ELEVES A PROPOS DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS	25
FIGURE 6 : REPONSES D'ELEVES A PROPOS DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS	25
FIGURE 7 : RELANCE DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS	28
FIGURE 8 : EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ELEVES AUTOUR DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS	28
FIGURE 9 : QUESTIONNAIRE POUR LES ENSEIGNANTS AUTOUR DU PROBLEME DE LA DALLE D'ANUBIS	31
FIGURE 10 : LES QUATRE PHASES DE NOTRE ETUDE DANS LE CADRE DE LA METHODOLOGIE DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE	39
FIGURE 11 : STRUCTURE DE LA THESE	43
FIGURE 12 : ARCHITECTURE DE LA THESE	44
FIGURE 13 : LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION DANS LE LEMA PROJECT	52
FIGURE 14 : LE CYCLE DE MODELISATION DANS PISA (OECD, 2013, p.38)	52
FIGURE 15 : PROCESSUS DE MODÉLISATION SELON BLUM (1996)	54
FIGURE 16 : LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION COULANGE (1997)	57
FIGURE 17 : LA SITUATION DE LA TABLE (COULANGE, 1998)	58
FIGURE 18 : LA SITUATION DU GEANT DU LEMA PROJECT	59
FIGURE 19 : LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION D'ANHALT & AL. (2017)	60
FIGURE 20 : LE SCHÉMA DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DE BLUM ET LEISS (2005)	62
FIGURE 21 : REPRÉSENTATION DE LA MATHÉMATISATION HORIZONTALE ET VERTICALE DE BARNES (2005)	74
FIGURE 22 : ÉBAUCHE DU SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHÉMATIQUE POUR NOTRE ETUDE	82
FIGURE 23 : LA SITUATION DU PAVAGE DE POLYMINOS CARRES AVEC DES DOMINOS DE GRENIER & PAYAN	84
FIGURE 24 : LA SITUATION DE LA ROUE DES COULEURS DE GODOT (2005)	85
FIGURE 25 : LA SITUATION DU « JEU DU CHOCOLAT » DE COLIPAN (2014)	85
FIGURE 26 : GRILLE DES ENTRETIENS	98
FIGURE 27 : AXE DE LA MATHÉMATISATION HORIZONTALE DU SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHÉMATIQUE POUR NOTRE ETUDE	107
FIGURE 28 : SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHÉMATIQUE RETENU POUR NOTRE ETUDE	108
FIGURE 29 : LE PROBLEME DE L'ARTISTE	116
FIGURE 30 RELANCE DU PROBLEME DE L'ARTISTE	117
FIGURE 31 : EXTRAIT DE L'ANALYSE DE RESULTATS DE RAY (2013)	119
FIGURE 32 : LIEN ENTRE LA MODALITE DE LA PHASE DE QUESTIONS-REPONSES ET LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHÉMATIQUE	120
FIGURE 33 : ENONCÉ DE LA FICTION RÉALISTE "FUITES À FUKUSHIMA"	121
FIGURE 34 : ARTICULATION ENTRE LES MODALITES DE MISE EN ŒUVRE RESCO ET LE SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHÉMATIQUE	131
FIGURE 35 : LES CARACTERISTIQUES D'UNE FRAPPM	135
FIGURE 36 : PREMIERE VERSION DE LA FICTION REALISTE « L'ARBRE »	136
FIGURE 37: DEUXIEME VERSION DE LA FICTION REALISTE « L'ARBRE »	138
FIGURE 38 : TROISIEME VERSION DE LA FICTION REALISTE « L'ARBRE »	139
FIGURE 39 : VERSION FINALE DE LA FICTION REALISTE DE TYPE FRAPPM « L'ARBRE »	140
FIGURE 40 : INDICATEURS DE DEVOLUTION AUX ELEVES DE LA MATHÉMATISATION HORIZONTALE DANS LA PHASE D'ÉLABORATION DES QUESTIONS	154
FIGURE 41 : INDICATEURS DE DEVOLUTION AUX ELEVES DE LA MATHÉMATISATION HORIZONTALE DANS LA PHASE D'ÉLABORATION DES REPONSES	157

FIGURE 42 : REPARTITION DES QUESTIONS PRODUITES PAR LES ELEVES SELON LES CATEGORIES DEFINIES A PRIORI	159
FIGURE 43 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES SCHEMAS DE L'ENONCE.....	160
FIGURE 44 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA REGLE DE FORMATION DES NOUVELLES BRANCHES.....	160
FIGURE 45 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DU NOMBRE DE BRANCHES.....	160
FIGURE 46 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA LONGUEUR DES BRANCHES	161
FIGURE 47 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE L'ECHELLE	161
FIGURE 48 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE L'EVOLUTION DE LA TAILLE DU TRONC (QARBRE-MODELE)	161
FIGURE 49 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA TAILLE DE L'ARBRE, DE TYPE « COMBIEN » (QARBRE- MODELE)	161
FIGURE 50 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE L'EVOLUTION DE LA TAILLE DE L'ARBRE, DE TYPE « COMMENT » (QARBRE- MODELE)	161
.....	
FIGURE 51 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR D'UN MODELE PROPORTIONNEL	162
FIGURE 52 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA MESURE D'ANGLES ENTRE LES BRANCHES.....	162
FIGURE 53 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DU SENS DE LA QUESTION DE L'ENONCE	162
FIGURE 54 : REPARTITION DES QUESTIONS DU GROUPE <small>MODELE</small>	163
FIGURE 55 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES FLEURS, FRUITS OU FEUILLES EVENTUELLES DE L'ARBRE	164
FIGURE 56 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES BESOINS SPECIFIQUES DE L'ARBRE.....	164
FIGURE 57 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES FACTEURS EXTERIEURS	164
FIGURE 58 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA COMPARAISON AVEC UN AUTRE ARBRE	164
FIGURE 59 : REPARTITION DES QUESTIONS DU GROUPE « PARAMETRES EXTERIEURS »	165
FIGURE 60 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA FORME DE LA SERRE	165
FIGURE 61 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES DIMENSIONS DE LA SERRE.....	166
FIGURE 62 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES MARGES ENTRE LA SERRE ET L'ARBRE	166
FIGURE 63 : EXEMPLES DE QUESTIONS QPERTINENCE-SERRE	166
FIGURE 64 : REPARTITION DES QUESTIONS DU GROUPE « SERRE »	166
FIGURE 65 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES PRECISIONS DE VOCABULAIRE	167
FIGURE 66 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DES PRECISIONS SUR L'ENONCE.....	167
FIGURE 67 : EXEMPLES DE QUESTIONS AUTOUR DE LA PROVENANCE ET DE L'ESPECE DE L'ARBRE	167
FIGURE 68 : REPARTITION DES QUESTIONS DU GROUPE « PRECISIONS »	168
FIGURE 70 : REPARTITION DES QUESTIONS DES ELEVES SELON LES INDICATEURS DE DEVOLUTION MH- QUESTIONS	172
FIGURE 71 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE $Q_{\text{MODELE-PROPORTIONNALITE}}$	177
FIGURE 72 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE $Q_{\text{MODELE-MODELE}}$	180
FIGURE 73 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE $Q_{\text{MODELE-SERRE}}$	184
FIGURE 74 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE $Q_{\text{GRANDEURS}_I}$	187
FIGURE 75 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE $Q_{\text{GRANDEURS}_M}$	190
FIGURE 76 : REPARTITION DES REPONSES DES ELEVES POUR LES QUESTIONS DE TYPE Q_{CONTEXTE}	197
FIGURE 77 : PARTIE DU SCHEMA DU PROCESSUS DE MODELISATION MATHEMATIQUE MIS EN ŒUVRE DANS LES CLASSES A PARTIR D'UNE FRAPPM ET D'UNE PHASE DE QUESTIONS-REPONSES.....	202