



**HAL**  
open science

## Rotation d'un corps rigide

Sébastien Bouquillon

► **To cite this version:**

Sébastien Bouquillon. Rotation d'un corps rigide. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2000. Français. NNT: . tel-01958564

**HAL Id: tel-01958564**

**<https://theses.hal.science/tel-01958564>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

20 NOV. 2001

00 OBSP 0092

(043)  
BOU

Observatoire de Paris

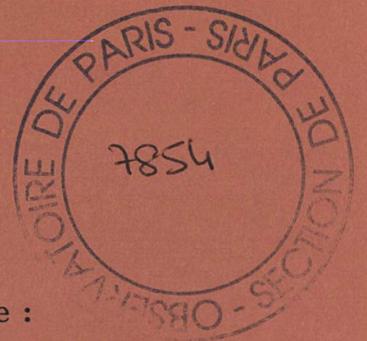
# THÈSE DE DOCTORAT

*spécialité :*

Astronomie Fondamentale,  
Mécanique Céleste et Géodésie

Sébastien BOUQUILLON

## ROTATION D'UN CORPS RIGIDE APPLICATION A MARS



Soutenue le 8 Mars 2000 devant le jury composé de :

Madame Ana Gómez	<i>Présidente</i>
Monsieur Jacques Henrard	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Jean-Pierre Barriot	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Jean Souchay	<i>Directeur de thèse</i>
Madame Nicole Capitaine	<i>Examinatrice</i>
Monsieur Eric Bois	<i>Examineur</i>

le Soleil est mesure et pendule du jour

*Antoine de Saint-Exupéry*

Roulez dans vos sentiers de flamme,

Astres, rois de l'immensité !

Insultez, écrasez mon âme,

Par votre presque éternité !

*Alphonse de Lamartine*

# Table des matières

Notation et définition	7
Introduction	11
La rotation des corps célestes : état des connaissances	15
<b>1 Description du problème du pendule sans excitation et sans dissipation d'énergie</b>	<b>29</b>
1.1 Présentation du problème théorique . . . . .	31
1.2 Visualisation dans l'espace des phases des courbes d'isoénergie. . . . .	32
1.3 Le cas des petites oscillations . . . . .	34
1.4 Résolution générale à l'aide des intégrales elliptiques . . . . .	37
1.4.1 La libration . . . . .	39
1.4.2 La rotation . . . . .	41
<b>2 Mouvement de rotation libre</b>	<b>45</b>
2.1 Définition des variables d'Andoyer . . . . .	47
2.2 Description du Hamiltonien du problème . . . . .	53
2.3 Visualisation qualitative des solutions dans l'espace des phases . . . . .	55
2.4 Résolution à l'aide des intégrales elliptiques . . . . .	67
2.5 Développement de $g$ , $l$ et $J$ au voisinage de $\bar{J} = 0$ . . . . .	95
2.5.1 1 <sup>er</sup> Cas : Développement pour un $\bar{J}$ petit. . . . .	96
2.5.2 2 <sup>eme</sup> Cas : Développement pour un $e$ petit. . . . .	97
2.5.3 Application à Mars . . . . .	98
2.5.4 Application à la Lune . . . . .	98
2.5.5 Application à P/Halley . . . . .	100
2.5.6 Application à Toutatis . . . . .	100

<b>3</b>	<b>Mouvement de rotation forcée</b>	<b>103</b>
3.1	Définition du repère de référence . . . . .	105
3.2	Description du Hamiltonien du problème . . . . .	107
3.2.1	Description du terme d'entraînement $E$ . . . . .	107
3.2.2	Description des termes de potentiel $U^i$ . . . . .	108
3.3	Méthode de résolution . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Mouvement de rotation forcée : application à Mars</b>	<b>125</b>
4.1	Possibilité d'application de la méthode du Chapitre 3 à Mars . . . . .	127
4.2	Le mouvement de l'axe de moment cinétique $\vec{L}$ . . . . .	131
4.2.1	Les effets dûs au soleil . . . . .	131
4.2.2	Les effets dûs aux satellites Phobos et Deimos . . . . .	141
4.2.3	Les effets directs dûs aux autres planètes . . . . .	146
4.2.4	Influence du terme d'entraînement $E$ . . . . .	148
4.2.5	Visualisation du mouvement de $\vec{L}$ dans $R$ . . . . .	150
4.3	Mouvement de l'axe de figure $OC$ . . . . .	154
4.4	La constante $MR^2/C$ et son lien avec la variable $\mathbf{h}$ . . . . .	158
4.5	influence du terme d'entraînement $E$ à plus long terme . . . . .	163
4.5.1	Méthode d'intégration des équations sur 500 000 ans . . . . .	163
4.5.2	Influence de la précision de $C/MR^2$ sur cette intégration . . . . .	168
	<b>Valeurs numériques importantes</b>	<b>171</b>
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>173</b>
	<b>Annexes</b>	<b>177</b>
	Annexe I : Rappel sur les intégrales elliptiques . . . . .	179
	Annexe II : La fonction de Heuman $\Lambda_0$ et son lien avec $\tilde{L}$ . . . . .	181
	Annexe III : Departure Point ou Origine non tournante . . . . .	183
	Annexe IV : Matrice de passage entre l'écliptique J2000 et les axes principaux d'inertie de Mars . . . . .	185
	Annexe V : Etat des lieux de nos travaux sur la libration de la Lune. . . . .	187
	Annexe VI : Article personnel paru dans <i>Astronomy and Astrophysics</i> . . . . .	191
	<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>

# Notations et définitions

Tableaux regroupant les variables du Chapitre 2, 3 et 4.

Variables	Définition	Pages
$(S)$	Nom du corps solide en rotation	45
$R = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$	Le repère de référence	45
$\vec{X} = \vec{OD}$	$D$ est l'origine des longitudes dans $R$ et l'origine non-tournante à partir de la page 101	45
$A < B < C$ $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$	Les moments d'inertie principaux du corps tournant et les vecteurs unitaires correspondants	45
$R_I = (O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$	Le repère formé des axes d'inerties de $(S)$	45
$\Gamma$	Noeud descendant du plan perpendiculaire au moment cinétique sur le plan de référence.	46
$P$	Noeud ascendant de l'équateur de figure sur le plan perpendiculaire au moment cinétique.	46
$\vec{L}$	Le vecteur moment cinétique	46
$h, g, l, H, G, L$	Les variables d'Andoyer.	46
$I, J$	$\cos(I) = \frac{H}{G}$ et $\cos(J) = \frac{L}{G}$	47
$\bar{\lambda}$ $\bar{\Omega}$ $M$	La longitude moyenne de la Lune, la longitude moyenne du noeud ascendant de la Lune sur l'écliptique et l'anomalie moyenne de la Lune.	48
$F_0$	Le Hamiltonien du problème de rotation libre d'un corps solide.	51
$M_I$	Matrice d'inertie de $(S)$	51
$a > b > c$	Les rayons correspondant respectivement aux moments d'inertie $A, B$ et $C$	51
$\vec{\omega}$	Le vecteur de rotation instantanée de $(S)$	51
$(\omega_A, \omega_B, \omega_C)$	Composantes de $\vec{\omega}$ dans $R_I$	51

Variables	Définition	Pages
$(L_A, L_B, L_C)$	Composantes de $\vec{L}$ dans $R_I$	51
$e$	Le coefficient de triaxialité du corps tournant.	52
$D$	Le coefficient: $\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\right)$	52
$(G^*, H^*, L^*)$	Moments des variables d'Andoyer divisé par la constante $G_O$	54
$J_{ll}$	Valeur minimale de $J$ pour un mouvement de libration libre	56
$P_{ll}$	Probabilité d'un mouvement de libration libre	56
$(h, g_A, l_A, H, G, L_A)$	Variables d'Andoyer en intervertissant $OA$ et $OC$	59
$P_A$	Noeud ascendant du plan perpendiculaire à $OA$ sur le plan perpendiculaire au moment cinétique.	59
$J_A$	$\cos(J_A) = \frac{L_A}{G}$	59
$(e_A, D_A)$	Coefficient $e$ et $D$ en intervertissant $A$ et $C$	60
$\tau$	Période pour la dissipation de l'énergie de rotation	61
$\gamma$	Une constante du mouvement de rotation libre	66
$\bar{J}$	Valeur de $J$ quand $l = \pi/2$	66
$\bar{g}, \bar{l}, \bar{G}, \bar{L}$	Des variables canoniques avec $\bar{G} = G$ et $\bar{L} = G \cos \bar{J}$	66
$\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{G}, \tilde{L}$	Des variables canoniques avec $\tilde{G}$ et $\tilde{L}$ les actions associées à $G$ et $L$	68
$\delta$	Variable intermédiaire liant le coefficient de triaxialité ( $e$ ) et la variable d'Andoyer ( $l$ )	68
$\bar{b}$	$\bar{b} = \frac{1}{\cos^2 \bar{J}} = \frac{G^2}{L^2}$	68
$k$	Coefficient dépendant de $e$ et de $\bar{b}$	68
$\xi$	Angle égale à $\pi/2 - \bar{J}$	69
$u$	Variable variant linéairement avec le temps : $\delta = am(u) + \frac{\pi}{2}$	69
$\Lambda_0$	Fonction de Heuman (cf. annexe II)	69
$\mathcal{K}$	Intégrale elliptique complète de première espèce	70
$n_{\tilde{g}} = n_g$ et $n_{\tilde{l}} = n_l$	Fréquences angulaires respectivement de $\tilde{g}$ et $\tilde{l}$ égales respectivement aux mouvements moyens libres de $g$ et $l$	70
$n_1$ et $n_2$	$n_1 = -n_l \frac{C}{G}$ et $n_2 = n_g \frac{C}{G}$	76
$l^*$	variable intermédiaire liant $\tilde{l}$ et $e$	92
$\tilde{J}$	$\cos \tilde{J} = \frac{\tilde{L}}{G}$	93
$R_1 = (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$	Le repère de base	101
$Q$	Noeud ascendant du plan de base sur le plan de référence	101
$(\pi, \Pi)$	Angle liant les repères $R$ et $R_1$	101
$K$	Hamiltonien de la rotation perturbée	103
$E$	Terme d'entraînement de $R$ par rapport à $R_1$	103
$(P_i)$	$(P^i)$ est un corps céleste perturbant ( $S$ )	103
$U^i$	Potentiel gravitationnel d'un corps ( $P^i$ )	103
$\vec{\Omega}_{R/R_1}$	Vecteur de rotation instantanée de $R$ par rapport à $R_1$	103

$M_i$ et $r_i$	La masse de $(P_i)$ et sa distance à $(S)$	104
$M$	La masse de $(S)$	104
$R$	Le rayon équatorial de $(S)$	104
$\delta_i$ et $\alpha_i$	La latitude et la longitude de $(P_i)$ dans le repère $R_I$	104
$P_m^n$	Les fonctions de Legendre	104
$\beta$ et $\lambda$	La latitude et la longitude de $(P_i)$ dans le repère $R$	105
$J_n, C_{m,n}$ et $S_{m,n}$	Des constantes associées aux $P_m^n$	105
$A_i$ avec $i = 1, 2, 3$	Différentes parties de $P_2(\sin \delta)$	106
$B_i$ avec $i = 1, 2, 3$	Différentes parties de $P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha$	106
$T^K = E_W(K)$	$T^K$ est la transformée de Lie du Hamiltonien $K$	112
$(q_4, p_4)$	$q_4 = t$ où $t$ est le temps et $p_4 = -K$ sa variable conjuguée	114
$(h^s, \tilde{g}^s, \tilde{l}^s, H^s, G^s, \tilde{L}^s)$	la partie séculaire des variables $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, H, G, \tilde{L})$	115
$U_{sec}^i$	La partie séculaire de $U^i$	116
$I^s$ et $J^s$	$\cos(I^s) = \frac{H^s}{G^s}$ et $\cos(\tilde{J}^s) = \frac{L^s}{G^s}$	118

\* \* \*



# Introduction

Dans le mouvement d'un corps céleste dans le système solaire, on peut distinguer deux composantes:

Un premier mouvement correspond à la révolution de ce corps céleste autour d'un autre corps central.

Un second mouvement correspond à la rotation de ce corps céleste autour de son centre de gravité. C'est de ce second mouvement qu'il est question dans notre travail.

Les deux mouvements exercent une influence mutuelle l'un sur l'autre.

Pendant longtemps, seul le mouvement de révolution des corps célestes a été étudié avec précision. La raison en était notamment que, jusqu'à une époque relativement récente, observer la rotation de la plupart des corps célestes était plus compliqué qu'observer la révolution de ces mêmes corps.

Un seul astre fait exception : notre planète, la Terre. En effet, sa rotation est étudiée depuis l'Antiquité. Pour rendre compte théoriquement de son mouvement de rotation, les techniques actuelles, extrêmement précises (de l'ordre de  $10^{-10}$  radian pour les radio-interféromètres à très longue base), nous obligent à construire des modèles de Terre complexes où les effets élastiques, océaniques, hydrodynamiques et hydromagnétiques viennent perturber de manière significative la rotation pour un modèle de Terre rigide régi par les lois de la mécanique céleste.

Mais depuis une cinquantaine d'années, l'avènement de l'ère spatiale a changé notre façon d'observer le système solaire. Il est désormais possible de poser des sondes sur d'autres corps célestes. C'est le cas des missions Apollo ou Lunakhod qui se sont posées sur la Lune et plus récemment des missions Viking et Pathfinder sur Mars. Ce changement de point d'observation a permis, et permettra encore, d'acquérir un grand nombre d'informations nouvelles et précises, en particulier sur la rotation de corps du système solaire autres que la Terre.

L'idée directrice de cette thèse est d'adapter les théories développées pour décrire la rotation de la Terre, à la description de la rotation de Mars. La théorie de base reconnue par l'UAI. pour la rotation de la Terre (Wahr, 1980) est construite à partir d'un modèle de Terre rigide auquel on rajoute des termes exprimant les perturbations dûes à la non-rigidité. La contribution des travaux regroupés dans cette thèse vise à la réalisation d'un modèle rigide précis de la rotation de Mars qui s'inspire du modèle de la rotation de la Terre rigide élaboré par Kinoshita (1977).

D'autres auteurs, en particulier Reasenberget King (1979), Borderies (1980) ou Hilton (1991) ont travaillé sur la rotation de Mars. L'apport supplémentaire de cette thèse par rapport à ces travaux est d'une part la tentative de mise en place d'une méthode générale de calcul de la rotation des corps célestes et d'autre part le calcul rigoureux de certaines variations de la rotation de Mars comme ceux dûs aux influences de Phobos et Deimos, à l'effet indirect des planètes ou le calcul des termes d'Oppolzer.

Le travail commence par une partie introductive qui rassemble l'essentiel de nos connaissances aussi bien d'observations que théoriques sur la rotation des corps du système solaire.

Le premier chapitre présente les outils de mécanique Hamiltonienne et d'analyse dont nous allons avoir besoin par la suite. Pour illustrer l'utilisation de ces outils, nous les appliquons au mouvement du pendule qui, comme l'a fait remarquer Deprit (1967), présente de nombreuses similitudes avec le mouvement de rotation libre d'un corps solide.

Le deuxième chapitre est justement consacré à l'étude du mouvement de rotation libre des corps célestes rigides. Le mouvement de rotation libre est le mouvement de rotation d'un corps autour de son centre de masse en supposant ce corps comme isolé dans l'espace. Nous illustrons cette étude par la description de la rotation libre de différents corps, en particulier celle de l'astéroïde Toutatis et celle du noyau de la comète P/Halley. Nous décrivons également les mouvements libres de Mars, de Phobos et de la Lune même si ceux-ci sont éloignés du mouvement réel de la rotation de ces corps.

Le troisième chapitre étudie le mouvement de rotation d'un corps céleste soumis aux perturbations gravitationnelles d'autres corps. En particulier nous montrerons qu'il est possible, pour certains corps célestes, de considérer la rotation simplifiée, étudiée dans le deuxième chapitre, comme une première approximation du mouvement perturbé. Nous décrirons comment, à l'aide de la transformée de Lie et de son application à la théorie des perturbations des systèmes Hamiltoniens, il est possible d'aboutir à la description

de la rotation perturbée.

Le quatrième chapitre est l'application des études précédentes à la construction d'un modèle de rotation de Mars rigide, permettant de repérer l'axe de figure de Mars dans le plan de l'orbite moyenne de Mars de la date. Nous ajusterons notre modèle aux observations en nous servant en particulier des données récoltées par les missions Viking et Pathfinder.

Mais avant cela nous faisons un petit survol théorique des connaissances actuelles sur la rotation des corps célestes.



# La rotation des corps célestes : état des connaissances

Le corps céleste dont la rotation a été la plus observée et la plus étudiée est, sans aucun doute, notre planète : la Terre. La partie uniforme de sa rotation rythme la vie des hommes depuis la nuit des temps et même son mouvement lent de précession en longitude est connu depuis l'antiquité. Il semble donc naturel de commencer ce chapitre par une description de la rotation terrestre

## La rotation terrestre

L'aspect dominant de la rotation terrestre est une rotation uniforme autour d'un axe voisin de l'axe de moment d'inertie maximal, et dont la période sidérale est d'environ 23 heures 56 minutes et 4 secondes.

De plus, cet axe de rotation se déplace lui-même dans l'espace.

Son déplacement principal correspond à ce que nous appelons "la précession des équinoxes". Ce mouvement fait décrire à l'axe de rotation un cône en 27000 ans avec une demi-ouverture de  $23^{\circ}27'$  autour de la normale à l'écliptique. Ce mouvement, qui correspond à un déplacement des équinoxes de 50 secondes d'arc par an, fut découvert en 150 Av.J.-C. par Hipparque qui l'interprétait, dans un système géocentrique, comme un mouvement d'ensemble des étoiles. C'est Copernic, en 1532, qui expliqua qu'il s'agissait, dans un système héliocentrique, d'un mouvement de l'axe de rotation terrestre dans l'espace. Ce mouvement fut expliqué de manière dynamique par Newton en 1687 comme étant dû à la partie constante du couple luni-solaire sur la partie non-sphérique de la Terre.

Le second mouvement de l'axe de rotation terrestre dans l'espace correspond à une somme de mouvements périodiques que nous appelons les nutations. Ces mouvements produisent des ondulations autour du cône de précession. L'amplitude crête à crête de ces oscillations peut atteindre 18 secondes d'arc pour le terme principal, avec des périodes

variant entre une fraction du jour et plusieurs centaines d'années, le terme principal ayant, lui, une période de 18.6 ans. Ces mouvements sont représentés sur la figure [1]. Bien que Newton ait prédit ces mouvements périodiques, l'oscillation principale à la période de 18.6 ans due à la rétrogradation du noeud de l'orbite lunaire ne fut observée pour la première fois par Bradley qu'en 1748. D'Alembert en donna une estimation théorique en 1749 grâce à sa théorie analytique du mouvement de précession-nutation de la Terre en considérant celle-ci comme rigide. Depuis, les modèles de précession-nutation d'une Terre rigide n'ont cessé de s'affiner. Le modèle de Kinoshita (1977) construit à l'aide des variables d'Andoyer et de la méthode d'intégration de Hori (1966) avait déjà une précision intrinsèque d'environ 0.0001 seconde d'arc. Les modèles les plus récents (Souchay et al., 1999; Bretagnon et al, 1997 et Roosbeek F. et Dehant V., 1998) conservent tous les termes ayant des amplitudes supérieures à  $10^{-7}$  seconde d'arc.

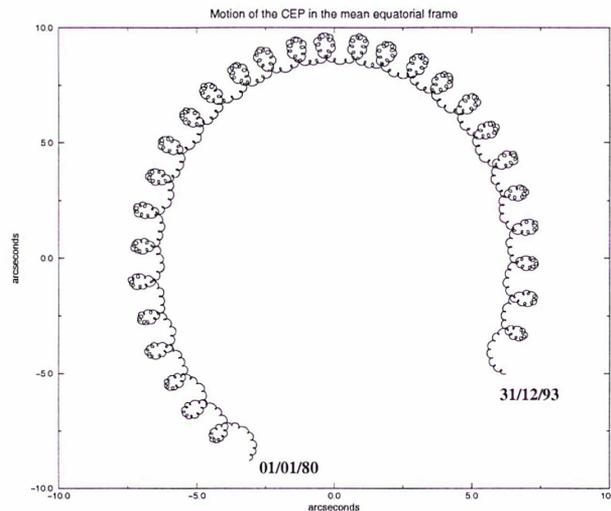


FIG. 1: *Mouvement du C.E.P. dans le plan équatorial moyen correspondant essentiellement au mouvement de nutation de l'axe de rotation terrestre (Christian Bizouard (1995)).*

En 1765, Euler a montré qu'il pouvait exister pour l'axe de rotation de la Terre un autre mouvement que celui de précession-nutation, appelé mouvement libre. Ce mouvement s'appelle ainsi car il existe même sans perturbations extérieures. Ce mouvement apparaît dès que l'axe de rotation terrestre n'est pas confondu avec l'axe de moment d'inertie maximal, auquel cas l'axe de rotation décrit un cône autour de l'axe d'inertie maximal avec une période évaluée par Euler dans le cas d'une Terre rigide à 305 jours. Mais ce mouvement ne sera observé qu'un siècle plus tard, en 1891, par Chandler et

Technique		Type d'observable
VLBI		écart entre les temps d'arrivée à 2 antennes d'un signal radio émis par un quasar
Satellites	système GPS	différence de phase entre l'horloge du satellite et l'horloge du récepteur.
	système Doris	vitesse entre station et satellite (effet Doppler)
	télémétrie laser	temps aller retour de l'impulsion laser(station-satellite)
Laser-Lune	télémétrie laser	temps aller retour de l'impulsion laser (station-Lune)
Astrométrie optique	Astrolabe de Danjon	instant de passage d'une étoile dans le méridien à
	Instrument méridien	une distance zénitale donnée

TAB. 1: *Les techniques utilisées depuis 1950 pour mesurer l'orientation de la Terre et les observables associés (Sylvain Loyer (1997))*

avec un période très différente de celle prévue par Euler et une amplitude variable au cours du temps. Ce terme, appelé terme de Chandler, a une période de 460 jours et une amplitude qui a oscillé entre 0.06 seconde d'arc et 0.28 seconde d'arc entre 1900 et 1981.

Chandler a découvert en même temps un second mouvement de l'axe de rotation autour de l'axe de moment d'inertie maximal avec une période annuelle et une amplitude de 0.15 seconde d'arc. Dans l'espace, ces deux termes sont responsables de mouvements de l'axe de rotation terrestre dont les périodes sont proches de la journée et dont les amplitudes sont celles indiquées précédemment.

Ces deux termes ne peuvent s'expliquer à l'aide d'un modèle de Terre rigide ; ils furent donc les premières preuves issues des observations de l'influence de la non-rigidité de la Terre sur sa propre rotation. Nous savons maintenant que l'effet annuel provient d'un déplacement saisonnier de masses d'air dans l'atmosphère et que la période du terme de Chandler correspond bien au terme d'Euler mais dans le cas d'une Terre non-rigide : la déformation rotationnelle élastique et océanique rallonge d'environ 160 jours la période d'Euler, comme l'a montré Newcomb en 1892, et la présence d'un noyau fluide la raccourcit de 60 jours, d'après les travaux de Poincaré en 1910. Les causes des variations de l'amplitude du terme de Chandler ne sont, quant à elles, toujours pas entièrement élucidées à l'heure actuelle.

De nouvelles techniques d'observation astrométriques sont apparues dans la seconde moitié du XXème siècle permettant d'améliorer sensiblement la précision des observations. Ces techniques sont résumées dans le tableau [1]. A titre d'exemple, pour ne citer que les plus précises, le Laser-Lune permet aujourd'hui de mesurer la distance Terre-Lune

avec une précision intrinsèque supérieure au centimètre et la technique V.L.B.I. permet de mesurer des angles entre deux sources radio avec une précision de 0.0001 seconde d'arc. Grâce à ces nouvelles techniques, des effets nouveaux ont pu être observés sur le mouvement de l'axe de rotation terrestre dont beaucoup ne peuvent être expliqués que par des théories basées sur un modèle de Terre non-rigide :

- l'amplitude de certains termes de nutations est modifiée en fonction de la valeur de leurs fréquences;
- la vitesse angulaire de rotation terrestre varie au cours du temps. Elle décroît de manière séculaire, ce qui se traduit par un allongement de la durée du jour de 2 ms par siècle . De plus, elle varie également de manière irrégulière avec des fluctuations d'environ 7 ms sur la durée du jour en 50 ans.

L'ensemble de ces mouvements nouveaux ont obligé les scientifiques à prendre davantage en compte les effets de la non-rigidité de la Terre. Ces effets de non-rigidité sont les suivants :

- l'élasticité,
- la présence d'un noyau fluide,
- les phénomènes atmosphériques,
- les phénomènes océaniques,
- la dissipation d'énergie.

En 1979, Wahr, en s'aidant de données sismologiques terrestres, a évalué à partir d'un modèle de Terre élastique avec un noyau fluide et une graine solide, une fonction de transfert permettant de passer des séries de précession-nutation de Kinoshita (1977) à des séries de précession-nutation d'une Terre non-rigide. Cette fonction de transfert a été appliquée à des modèles plus récents de précession-nutation d'une Terre rigide, comme le modèle de Kinoshita et Souchay (1990), et comparée aux observations V.L.B.I. récentes (Souchay et al., 1995). D'autres modèles tentant d'étendre la théorie de Kinoshita à une Terre non-rigide mais en gardant son formalisme, contrairement à Wahr, existent depuis 1979 avec la tentative de Kubo et plus récemment celle de Getino depuis le début des années 1990. Dans tous ces travaux, y compris celui de Wahr, le modèle servant de support à l'évaluation des nutations non-rigides est le modèle de précession-nutation d'une Terre rigide.

Certains aspects du mouvement de rotation de la Terre ne sont toujours pas explicités. C'est le cas principalement du "mouvement de Chandler" dont nous connaissons relativement bien la période mais dont l'amplitude et son processus d'excitation gardent une grande part de leur mystère. Une partie seulement des variations de l'amplitude de ce mouvement semble pouvoir être explicitée par le couplage avec l'atmosphère.

En Astronomie, les phénomènes étudiés n'étant pas à l'échelle humaine, l'expérimentation conduite par l'homme est le plus souvent non envisageable, voire même impossible. Nous ne pouvons pas, par exemple, soumettre la Terre à d'autres excitations, ni modifier ses paramètres de rotation, ce qui pourrait pourtant se révéler particulièrement intéressant. En revanche, l'Univers nous propose "ses expériences" que nous pouvons observer et étudier. C'est pour cette raison qu'il est intéressant de se pencher davantage sur le mouvement de rotation d'autres corps célestes.

## La rotation d'autres corps célestes

Nous pouvons répartir les corps célestes en deux groupes suivant l'intérêt que peut avoir l'étude de leurs rotations.

- En étudiant des corps célestes ayant des paramètres de rotation (obliquité, vitesse de rotation, aplatissement,...) voisins de ceux de la Terre, nous pourrions voir si nous retrouvons les mêmes caractéristiques que celles de la Terre, et en particulier celles qui restent inexplicées, et en quoi elles diffèrent.
- En étudiant des corps célestes ayant des formes et des rotations très différentes de celles de la Terre, nous pourrions en savoir davantage sur le rôle des différents paramètres mis en jeu dans ces mouvements. Nous pourrions également comprendre pourquoi ceux-ci tournent ainsi et quelle est l'histoire de leurs rotations.

Mais, il y a une difficulté majeure à surmonter pour observer la rotation des planètes. Sans cette difficulté, le mouvement de rotation des planètes du système solaire serait étudié depuis aussi longtemps que les irrégularités de la rotation terrestre (Hipparque, 150 av. J.C) ou que les mouvements de révolution de ces mêmes corps. Le problème est que, jusqu'à présent, l'observation de la rotation de la plupart des autres corps célestes s'est faite depuis la Terre.

Le schéma [2] montre la difficulté de la mesure de la rotation d'un corps céleste ( $S$ ) autre que la Terre : la partie gauche de la figure montre la mesure de la rotation de la Terre par rapport à une étoile fixe, la rotation correspond à la mesure au cours du temps de la différence  $\theta - \theta_0$ ; la partie de droite montre la mesure de la rotation d'un autre corps céleste depuis la Terre : l'angle  $\mu$  mesuré est de l'ordre de  $\frac{R}{r}$  en radians avec  $R$  le

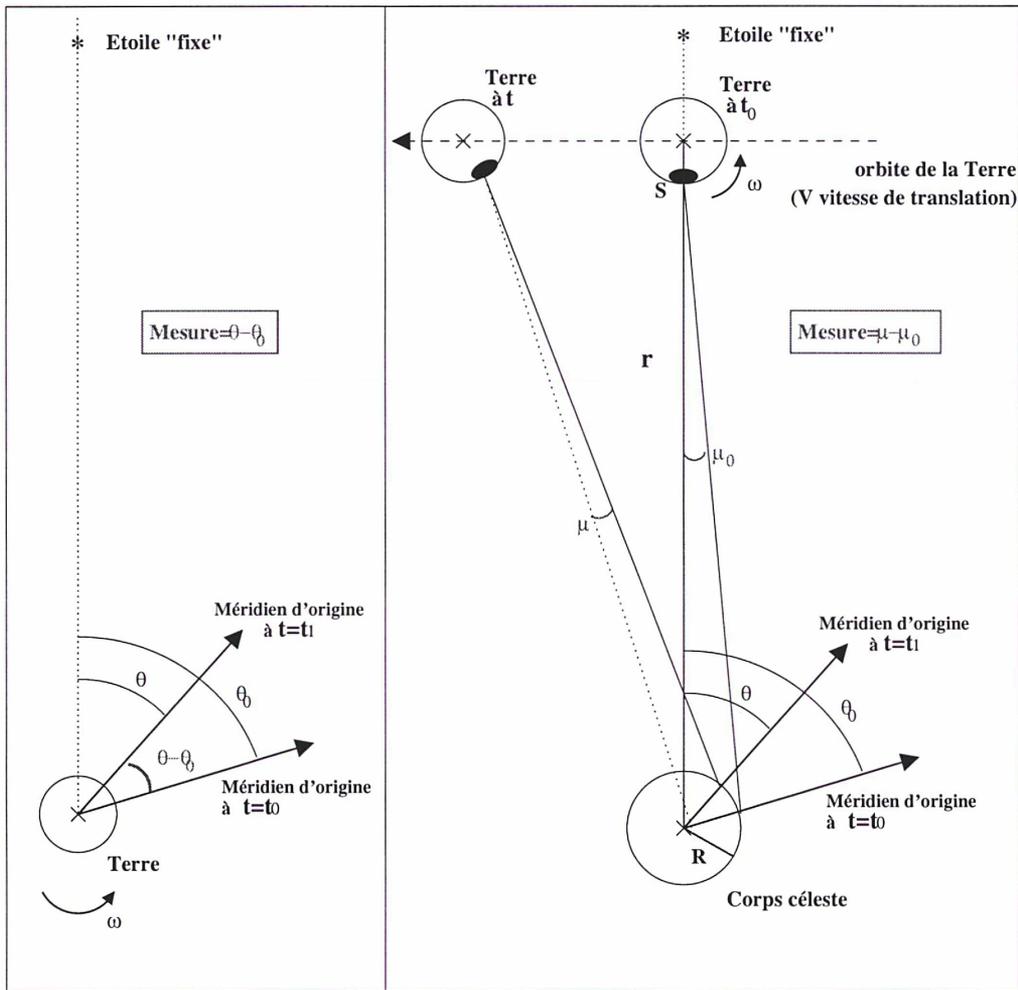


FIG. 2: Comparaison entre la mesure de la rotation terrestre et la mesure de la rotation d'un autre corps céleste.

rayon du corps ( $S$ ) et  $r$  la distance de la Terre au même corps ( $S$ ). Dans la majorité des cas ce rapport est bien inférieur à 0.004 radian, qui est la valeur de  $\frac{R}{r}$  quand ( $S$ ) est le Soleil ou la Lune. Pour Mars, ce rapport n'atteint pas 10 secondes d'arc. Nous voyons donc que  $r \gg R$ . De plus, en supposant que  $r \gg V \times T$  et  $r \gg R_T$ , où  $V$  est la vitesse de translation de la Terre par rapport au corps ( $S$ ),  $T$  est la période de rotation de ( $S$ ) et  $R_T$  est le rayon de la Terre, nous avons la mesure de la rotation grâce à la relation :

$$\sin \theta - \sin \theta_0 \simeq \frac{r}{R} [\mu - \mu_0] \quad (1)$$

Donc, s'il est possible de mesurer sur la Terre des angles avec une précision maximale de  $\sigma$ , il n'est possible de mesurer des écarts angulaires de rotation sur le corps  $S$  qu'avec une précision de  $\frac{r}{R}\sigma$ , soit une précision 250 fois moins grande pour la Lune ou le Soleil et une précision 15000 fois plus faible pour Mars dans le meilleur des cas.

L'étude des révolutions des corps célestes n'est pas soumise à cette limitation. Prenons l'exemple de Vénus. Sa période de révolution est connue depuis l'antiquité. En revanche, pour connaître sa période de rotation, il faudra attendre l'avènement du radar et la mise en place de mesures depuis la Terre. Elles seront réussies dans les années 1960 (Carpenter, 1965) et la détermination d'une vitesse de rotation rétrograde de 1.5 degré par jour étonnera le monde scientifique. Il est vrai que le fait que la surface de Vénus soit cachée en permanence par une atmosphère épaisse ne facilite pas cette observation. Mais, même dans le cas de la planète Mars, pour laquelle il est facile d'observer des détails de surface, la connaissance d'un paramètre aussi important que celui de la précession en longitude (environ 7 secondes d'arc par an) ne pourra être déduite de l'observation qu'à l'aide des sondes Viking au début des années 1980 (Michael et Kelly, 1981). Il s'agit pourtant de l'un des corps célestes les plus proches de nous.

Il semble donc évident que la détermination précise du mouvement de rotation d'un corps céleste autre que la Terre soit plus facile avec un appareil de mesure installé à la surface de celui-ci qui mesure directement l'angle  $\theta$ . Bien que des sondes spatiales se soient déjà posées sur d'autres corps célestes (Mars et la Lune), la mesure de la rotation de ces corps ne s'est jamais faite par la mesure directe de l'angle  $\theta$  mais par l'intermédiaire de la mesure de la distance entre la Terre et ce corps ou entre un orbiteur et ce corps. Ces mesures pour Mars et la Lune sont celles qui, à ce jour, ont permis de déterminer le plus précisément la rotation de corps célestes autres que la Terre. Pour Mars, des distances très précises ont pu être mesurées grâce à des échanges radioélectriques entre des sondes posées à sa surface et la Terre (les sondes Viking 1 et 2 ou la sonde Pathfinder). Par la connaissance de ces distances, il est possible de déterminer des paramètres de rotation pour Mars (Borderies, 1980; Pitjeva, 1996 et Folkner et al., 1997). L'expérience de géodésie NEIGE qui doit faire partie de la mission Netlander, prévue pour 2005, s'inscrit dans cette perspective. Elle prévoit de poser 4 modules Netlander répartis sur la surface de la planète Mars en communication radioélectrique sur deux fréquences avec un orbiteur.

Pour la Lune, des mesures laser entre des coins de cube posés à la surface de la Lune et des stations terrestres permettent de même d'établir très précisément la distance Terre-Lune et ainsi d'obtenir des renseignements sur sa rotation.

En tenant compte de ces données, quels sont les corps célestes dont l'étude de la rotation est à l'heure actuelle intéressante?

Nous ne parlerons pas de la rotation des planètes géantes (Jupiter, Saturne,...) ni de la rotation du Soleil. Nous ne parlerons pas non plus des rotations des satellites des planètes géantes.

### La planète Mars

Mars est la planète la plus attrayante pour qui veut observer et étudier avec précision la rotation d'un corps céleste ayant de grandes similitudes avec celle de la Terre.

- Son atmosphère peu dense et transparente facilite l'observation de sa surface. C'est d'ailleurs l'observation de taches sombres sur cette surface qui permettra à Huygens en 1659 d'évaluer la période de rotation de Mars comme étant proche de 24 heures (en fait 24 heures et 37 minutes)
- Il s'agit d'une planète tellurique et, en tant que telle, sa surface peut servir de référence pour définir un repère qui lui soit lié.
- Elle est un des corps célestes les plus proches de la Terre et, à ce titre, le rapport  $r/R = 15000$  lors de l'opposition est l'un des plus faibles.
- Sa rotation présente un grand nombre de similitudes avec la rotation de la Terre : obliquité voisine de 25 degrés, vitesse de rotation voisine de 24 heures, période de révolution proche de 1.9 année terrestre et mouvement du pôle de faible amplitude. Cela facilite l'application, à cette planète, de théories ayant fait leur preuve dans la description de la rotation de la Terre.

Ce dernier point place la planète Mars dans la première catégorie définie au début de ce sous-chapitre : les corps célestes dont la rotation a des caractéristiques proches de celles de la Terre et dont les études respectives peuvent être complémentaires.

D'un point de vue historique, à part la découverte de sa vitesse de rotation, il faudra attendre longtemps pour faire d'autres pas dans la connaissance de la rotation de Mars. En 1956, Camichel détermine à partir d'images obtenues au Pic du Midi les coordonnées du pôle de Mars en le considérant comme fixe dans l'espace et Struve fait une estimation théorique de la constante de précession des équinoxes l'évaluant à 7.07 secondes d'arc. Mais il faudra attendre le début des programmes spatiaux et particulièrement les missions Viking 1 et 2 pour avoir une meilleure précision sur la position du pôle de Mars. Des travaux théoriques sur les mouvements fins de la rotation de Mars et en particulier sur les mouvements de précession-nutation dans le cadre d'un modèle de Mars rigide ont fait leur apparition et ont été confrontés aux données Viking. Nous pouvons citer les travaux de Reasenberg et King (1979) qui déterminaient, à l'aide des

équations d'Euler pour un corps rigide, le mouvement de précession-nutation de Mars dû à l'influence solaire, et de Borderies (1980) qui a également étudié l'influence solaire sur la précession-nutation de Mars à l'aide, dans un premier temps, du même formalisme que Reasenberg et King puis, dans un second temps, avec une approche Hamiltonienne voisine de celle que nous allons employer, toujours dans un cas rigide. En comparant ces résultats théoriques aux données Viking, la précision sur certaines constantes a pu être grandement améliorée. En particulier, ce fut le cas pour la vitesse de rotation, pour l'obliquité et pour la constante de précession, celle-ci ayant pu pour la première fois être déduite de l'observation. En 1996, Pitjeva, en se servant en plus de données radars pour améliorer la modélisation de l'orbite de Mars, arriva à évaluer la précession à  $7.50 \pm 0.36$  secondes d'arc par an, ce qui est proche de la valeur proposée par Struve. En 1991, Hilton, en utilisant les angles d'Euler, a ajouté aux travaux théoriques existants l'examen de plusieurs autres influences pouvant être importantes pour la détermination de la rotation de Mars, en particulier celles de Phobos et Deimos. En 1997, l'envoi de la sonde Pathfinder a permis d'améliorer la précision sur la constante de précession en longitude grâce aux 24 ans séparant cette mission de la mission Viking. La valeur que Folkner et al. (1997) en ont déduite pour la précession est de  $7.576 \pm 0.036$  secondes d'arc par an. Il faut remarquer que, jusqu'ici, pas la moindre nutation de l'axe de rotation de Mars n'a pu être observée.

Le travail de la dernière partie de cette thèse vise à donner des séries de précession-nutation de Mars dans un cadre rigide avec une précision de troncature de 0.0001 mas sur une période de 100 ans. D'autres travaux récents ont été publiés sur d'autres effets importants mais plus difficilement modélisables sans davantage d'observations. Ces effets sont essentiellement les influences de la non-rigidité observées sur la rotation de la Terre et appliquées à la planète Mars. Par exemple : les effets de non-rigidité de cette planète sur les nutations ou le mouvement de l'axe de rotation dans le repère lié à Mars (Dehant et al., 1999). Tous ces travaux sont des travaux de prospective en vue des prochaines missions vers Mars et en particulier en vue de l'expérience NEIGE. Si l'expérience se déroule conformément aux simulations, il devrait être possible d'observer des effets inférieurs à 10 millisecondes d'arc sur la position de l'axe de rotation de Mars. Soit une augmentation d'un facteur 100 par rapport aux meilleures mesures actuelles.

Il faut se rendre compte que les observations évoquées ci-dessus permettent, en dehors de la connaissance de la rotation de Mars elle-même, d'avoir des renseignements importants sur la structure interne de la planète Mars qui, faute de la présence de sismomètre à sa surface, reste, pour une grande part, mal connue.

- L'amélioration de la mesure de la précession en longitude permettrait, connaissant le potentiel gravitationnel de Mars (en particulier le coefficient  $J_2$ ), de déterminer des contraintes importantes sur les modèles de répartition de masses à l'intérieur de la planète.
- Les amplitudes des nutations nous renseigneraient sur les aspects non-rigides de la planète (par exemple à l'interface noyau-manteau).
- La période et l'amplitude du mouvement du pôle permettrait de poser des contraintes sur l'existence d'un noyau et sur sa taille (Hilton, 1991*b*).
- L'amélioration de la connaissance des paramètres d'orientation de Mars sur une longue période de temps permettrait de mieux connaître les variations climatiques qu'a connues Mars durant son histoire et d'expliquer les phénomènes d'érosion visible à sa surface et les structures particulières de ses calottes glaciaires. En effet, d'après l'idée de Milankovitch datant de 1920, les variations climatiques sont essentiellement dûes aux variations de l'obliquité au cours du temps. Or, pour Mars, ces variations sont de 20 degrés alors que pour la Terre elle sont seulement de 2 degrés. Cela a été particulièrement étudié par Ward (1979) et plus récemment par Laskar et Robutel (1993).

## La Lune

Parmi les corps célestes, la Lune est celui dont la rotation est la plus facilement et la plus précisément observable. Les trois premières raisons que nous donnions à la facilité d'observation de la rotation de Mars sont encore plus valables dans le cas de la Lune : elle n'a pas d'atmosphère, sa nature quasi-rigide permet de prendre sa surface pour définir un repère lié à ses axes de moment d'inertie principaux, et son rapport  $r/R = 250$  est le plus faible de tous les objets célestes.

Mais les similitudes s'arrêtent là. La rotation lunaire est difficilement comparable à celle de la Terre. Depuis l'Antiquité, l'homme sait, en regardant la surface lunaire, que celle-ci présente toujours la même face dirigée vers nous. C'est à dire que son mouvement de rotation est égal à son mouvement de révolution autour de la Terre. Ce mouvement est appelé un mouvement de résonance spin-orbit 1/1. Toutefois, on observe un faible mouvement d'oscillation. Et celui-ci fait apparaître et disparaître environ un dixième de la surface lunaire. C'est Hévélius, en 1654, qui exprimera le premier l'idée que ces librations (mot dont l'ethymologie latine *libra* signifie balancement) proviennent de l'ellipticité de l'orbite de la Lune. Newton déterminera rigoureusement ces effets et les nommera les "librations optiques" de la Lune. Il prévoit même les librations dites

”physiques” dûes à l’influence gravitationnelle de la Terre, qui ne seront observées que beaucoup plus tard.

En 1693, J.D. Cassini va plus loin dans la description du mouvement lunaire en établissant les trois lois purement empiriques suivantes qui maintenant portent son nom.

- La Lune tourne sur elle-même dans le sens direct d’un mouvement uniforme autour d’un axe dont les pôles sont fixes à sa surface avec une période de rotation de 27 jours 7 heures et 43 minutes qui correspond à sa période de révolution sidérale autour de la Terre.
- L’axe de rotation fait un angle constant avec le pôle de l’écliptique de 1.5 degré.
- Le noeud ascendant de l’orbite lunaire sur l’écliptique est confondu avec le noeud descendant de l’équateur lunaire sur l’écliptique.

En 1764, Lagrange est arrivé à expliquer ce mouvement particulier en donnant à la Lune la forme d’un ellipsoïde allongé, dont le grand axe est en permanence dirigé vers la Terre. Dans ce cas, les lois de Cassini correspondent à une position d’équilibre pour le mouvement de rotation de la Lune. En fait, comme prévu par Newton, il y a des écarts par rapport à cette position d’équilibre. En 1839, Bessel détectera pour la première fois ces écarts, les ”librations physiques”, grâce à un instrument de son invention : l’héliomètre, qui lui avait déjà permis de mesurer les premières parallaxes d’étoiles. Des théories tentant d’évaluer précisément ces librations feront alors leur apparition. Elles seront dûes à Tisserand puis Hayn et seront toutes basées sur les équations d’Euler.

Depuis le début des années 1970, grâce à la mise en place, par les missions Apollo et Lunakhod, de plusieurs panneaux formés de coins de cubes sur la surface lunaire, il est possible de mesurer le temps aller-retour d’un tir laser entre une station terrestre et un de ces panneaux. Une des stations laser capables de ”tirer” sur la Lune existe en France, sur le plateau de Calern, près de Grasse. Cette technique a permis dans les années 1980 des mesures de distance Terre-Lune avec des précisions remarquables de l’ordre d’une trentaine de centimètres.

Ce gain de précision a amené les mécaniciens célestes à développer, dans un premier temps, des théories beaucoup plus fines des mouvements de libration. C’est ce qu’entreprit Eckhardt en conservant le formalisme des équations d’Euler. Migus (1977) ou Moons (1981) ont, eux, choisi une méthode Hamiltonienne en déterminant les écarts à une position d’équilibre proche de la position observée par Cassini. Ils ont tous deux utilisé les éphémérides de la Lune de Chapront et Chapront-Touzé (1983).

La comparaison de ces théories avec les observations laser-Lune ont permis de calculer plus précisément un grand nombre de paramètres déterminant la forme de la Lune, sa

structure interne ou l'accélération séculaire de sa longitude moyenne (Dickey et al, 1982). Cela a également posé des contraintes aux modèles tentant d'expliquer l'apparition du système Terre-Lune.

Il est à noter que les données laser-Lune continuent de s'accumuler avec, depuis cinq ans, une amélioration de la précision des mesures de distance Terre-Lune par un facteur 10 (soit 2 ou 3 centimètres). La théorie de Moons sur la libration de la Lune est toujours, à ce jour, la théorie analytique la plus complète du mouvement libratoire de la Lune. C'est celle qui est utilisée pour le traitement des données du laser-Lune de Calern par l'équipe de Chapront et Chapront-touzé. Ils y ont rajouté un certain nombre de compléments comme les perturbations dues à la forme de la Terre ou un nouveau modèle de marées.

Des améliorations importantes dans la modélisation de la rotation de la Lune ont été apportées ces dernières années par la confrontation de l'observation avec de nombreuses simulations numériques. Entre autres, ces travaux ont révélé une dissipation importante de l'énergie de rotation de la Lune qui vient compenser la dissipation de l'énergie de révolution et laisse donc le système Terre-Lune en résonance 1/1 (Bois, Boudin et Journet, 1996). Ces travaux ont aussi prouvé l'existence effective de l'oscillation à 2.9 ans du méridien origine de la Lune autour de la position moyenne de la Terre avec une amplitude de 1.5 secondes d'arc ainsi qu'un mouvement équivalent à celui de Chandler pour la Terre avec une période de environ 80 ans (Williams et al., 1996).

Récemment, il a été observé une dérive essentiellement séculaire entre les termes de libration calculés et ceux observés grâce au laser-Lune. Ces termes ont été identifiés par Chapront et Chapront-Touzé comme étant l'influence sur la libration de termes non-périodiques présents dans les éphémérides de la Lune (Chapront et al., 1999). Ces librations demandent à être calculées rigoureusement. De plus, en 2003, la sonde japonaise SELENE devrait se poser sur la Lune pour faire des mesures V.L.B.I. (Interférométrie à très grande base) qui permettront d'améliorer encore la précision sur les librations observées de la Lune. L'ensemble de ces instruments font de l'étude des librations lunaires un sujet toujours d'actualité.

Nous avons entrepris l'étude de ces effets, mais n'ayant pas encore de résultats satisfaisants nous ne présenterons pas ce travail dans cette thèse.

## La planète Vénus

La première difficulté pour observer la rotation de Vénus est son atmosphère, dont des couches opaques nous cachent la surface dans le domaine des longueurs d'ondes visibles. Cette difficulté a été surmontée par l'utilisation des ondes radar qui, elles, traversent entièrement l'atmosphère. C'est ainsi que Carpenter (1964) découvrira la rotation lente et rétrograde de cette planète dont la période de 243 jours est très différente de celles de ses couches atmosphériques.

Mais c'est aussi cette particularité qui en fait un "laboratoire" particulièrement intéressant pour l'étude des influences entre atmosphère et rotation. En effet nous savons que pour la Terre l'atmosphère joue déjà un rôle moteur important dans le mouvement de l'axe de rotation autour de l'axe d'inertie. Il est probable que dans le cas de Vénus l'atmosphère joue un rôle très important qui explique en grande partie le passage d'une rotation proche de la rotation actuelle de la Terre à cette rotation lente et rétrograde (Lago et Cazenave, 1980).

Une deuxième difficulté à surmonter quand on veut mesurer plus précisément la rotation de Vénus sont les conditions très dures à sa surface qui ne permettent pas, comme dans le cas de Mars, de déposer des transpondeurs radioélectriques sur cette planète. A l'époque actuelle, cette difficulté n'a pu être surmontée.

## La planète Mercure

Toujours grâce aux mesures radar, on sait depuis 1965 que la planète Mercure présente la particularité d'être en résonance spin-orbit 2/3. Autrement dit, quand Mercure a effectué trois rotations, elle a aussi fait exactement deux révolutions autour du Soleil. Cette particularité a été étudiée d'un point de vue dynamique par Colombo (1965) et par Peale (1973). Mais pour cette planète, beaucoup de paramètres sont incertains. Il est donc difficile actuellement d'en dire d'avantage sur sa rotation.

## Les astéroïdes et les comètes

Il existe d'autres corps pour lesquels l'hypothèse de la rigidité peut être valide. Ces corps ce sont les noyaux de comètes ou les astéroïdes. Il faut bien dire que, jusqu'à maintenant, nous avons assez peu d'informations sur la rotation de ces corps. Nous pouvions grâce à la photométrie identifier leurs variations d'intensité lumineuse périodiques qui permettaient ensuite d'évaluer plus ou moins bien la période de la rotation du corps et sa forme en supposant toujours un axe de rotation confondu avec l'axe de moment d'inertie maximal. Cette dernière hypothèse était confortée par les travaux de Burns et Safronov (1973) qui estimaient que les astéroïdes par dissipation d'énergie de rotation tendaient

vers cet état en un temps bien inférieur à leur âge.

Mais depuis ce calcul, de nombreux nouveaux astéroïdes ont été observés et en particulier des astéroïdes ayant de longues périodes (plusieurs jours). Harris (1994) a repris les calculs de Burns et Safronov et a montré qu'il était possible pour les astéroïdes à longue période de rotation de tourner, encore maintenant, suivant un axe différent de l'axe de moment d'inertie maximal. Ce résultat théorique a pu être vérifié grâce au développement des techniques d'observation radar qui permettent d'observer précisément le mouvement des astéroïdes passant à proximité de la Terre. L'observation radar en particulier de l'astéroïde Toutatis, dont la période avoisine les 7 jours, a permis de montrer qu'il ne tournait pas suivant son axe de moment d'inertie maximal (Hudson et Ostro, 1995). L'étude du mouvement de ce corps est expliqué en détail dans le Chapitre 2 comme cas particulier de mouvement libre.

Un autre corps céleste sur la rotation duquel lequel nous avons eu récemment de nouvelles d'informations est le noyau de la comète de Halley (observé par les sondes Giotto, Vega-1 et Vega-2). Ce corps ne semble pas non plus tourner suivant son axe de moment d'inertie maximal et l'étude de son mouvement est également détaillé dans le Chapitre 2.

Il semble donc justifié de s'intéresser davantage à la rotation des corps célestes : d'une part, dans un but théorique pour l'étude générale des mouvements de rotation et, d'autre part, dans un but plus descriptif et plus précis pour certains corps comme Mars ou la Lune pour lesquels nous avons ou nous aurons, dans un proche avenir, plus d'observations.

Pour la Terre, nous avons expliqué que l'hypothèse de rigidité est l'hypothèse de départ de toutes les théories tentant de décrire sa rotation. Nous allons dans ce travail nous cantonner à cette hypothèse. Avant de commencer notre modélisation de la rotation des corps célestes rigides, nous présentons succinctement les outils dont nous aurons besoin sur un exemple simple : celui du pendule.

# Chapitre 1

## Description du problème du pendule sans excitation et sans dissipation d'énergie

### Introduction

Pourquoi commencer cette thèse sur la rotation des corps solides par un premier chapitre sur le mouvement du pendule? Quel est le rapport entre la rotation d'un corps céleste et le mouvement de ce dernier?

Le pendule est un système mécanique très simple fait d'un support  $S$ , d'une tige de longueur  $l$  accrochée à ce support, et au bout de cette tige, d'une masse  $M$ , (voir figures [1.2] ou [1.3]). Nous soumettons l'ensemble à l'accélération constante  $\vec{g}$ . Une seule variable,  $\theta$ , est nécessaire et suffisante pour déterminer la position de la masse  $M$  au cours du temps. (Nous définissons, dans ce travail,  $\theta$  comme l'angle que fait la tige avec le vecteur  $\vec{g}$ ).

Ce système, malgré sa simplicité, permet néanmoins de visualiser la plupart des phénomènes importants et complexes de la mécanique céleste. En effet, nous pouvons nous rendre compte, avec ce seul système, de ce qu'est une résonance, un mouvement chaotique ou un changement de mode, en introduisant des perturbations (par exemple en déplaçant le support  $S$ ) ou en rajoutant un effet de dissipation (par exemple en faisant évoluer le pendule non dans le vide mais en présence de gaz plus ou moins denses).

Dans ce premier chapitre, nous allons nous cantonner au problème du pendule libre, C'est à dire, non perturbé, sans dissipation d'énergie, et soumis seulement à l'accélération constante  $\vec{g}$ .

Dans un premier temps, et par un changement de variable approprié nous écrirons le Hamiltonien du pendule, le plus simple possible, en gardant comme variable angulaire, la même variable  $\theta$ .

Nous donnerons ensuite une idée des différents types de mouvements possibles en regardant les courbes solutions de ce Hamiltonien dans l'espace des phases.

Nous traiterons le cas classique des petites oscillations en définissant et utilisant le formalisme action-angle qui nous sera grandement utile dans toute la suite de notre travail.

Enfin, nous exprimerons, dans le cas général, l'angle  $\theta$  en fonction du temps à l'aide des fonctions elliptiques.

Nous ne prétendons pas apporter des solutions nouvelles ni même un éclairage nouveau à ce problème. Il nous a paru simplement utile de traiter le cas du pendule libre dans son ensemble, d'une part, pour présenter la méthode que nous utiliserons par la suite dans l'étude de la rotation des corps rigides, et d'autre part, parce que les solutions du problème pendulaire s'apparentent à celles du mouvement de rotation libre d'un corps solide, mais aussi à celles du mouvement de rotation forcée.

Les variables utilisées dans ce chapitre sont indépendantes de celles utilisées dans les autres chapitres de la thèse.

\* \* \*

## 1.1 Présentation du problème théorique

Le Hamiltonien du système pendulaire, que nous noterons  $H$ , peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{H = E - F \cos \theta}$$

où  $\theta$  est l'angle entre la verticale et le fil du pendule (voir figures [1.2] et [1.3]).

Le terme  $E$  est l'énergie cinétique du système :  $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ .

Le terme  $-F \cos \theta$  est l'énergie potentielle du système :  $F = mgl$ .

$g$  l'accélération de la pesanteur,  $l$  la longueur du fil et  $m$  la masse du pendule sont des constantes du système.

Nous prendrons durant cette étude des variables canoniques. Nous définissons donc  $P_\theta$ , variable conjuguée à  $\theta$  :

$$P_\theta = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

Le Hamiltonien s'écrit alors avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  :

$$\left(\frac{H}{ml^2\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{P_\theta}{ml^2\omega_0}\right)^2 - \omega_0 \cos \theta$$

Enfin nous faisons le changement de variable :  $\widetilde{P}_\theta = \frac{P_\theta}{ml^2\omega_0}$ , en posant :  $\widetilde{H} = \frac{H}{ml^2\omega_0}$  pour que la transformation reste canonique. Notre nouveau Hamiltonien s'écrit alors :

$$\boxed{\widetilde{H} = \frac{\omega_0}{2} \left[ (\widetilde{P}_\theta)^2 - 2 \cos \theta \right]}$$

(1.1)

Cette relation sera à la base de l'étude développée dans ce chapitre.

Les variables canoniques et le formalisme basé sur le Hamiltonien permettent d'écrire les équations différentielles du mouvement très simplement :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \widetilde{P}_\theta} = \omega_0 \widetilde{P}_\theta \\ \frac{d\widetilde{P}_\theta}{dt} &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta} = -\omega_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pour plus de commodité, nous oublierons volontairement les tildes dans la suite de notre exposé.

Nous allons maintenant essayer de regarder globalement quels sont les mouvements possibles pour le pendule.

## 1.2 Visualisation dans l'espace des phases des courbes d'isoénergie.

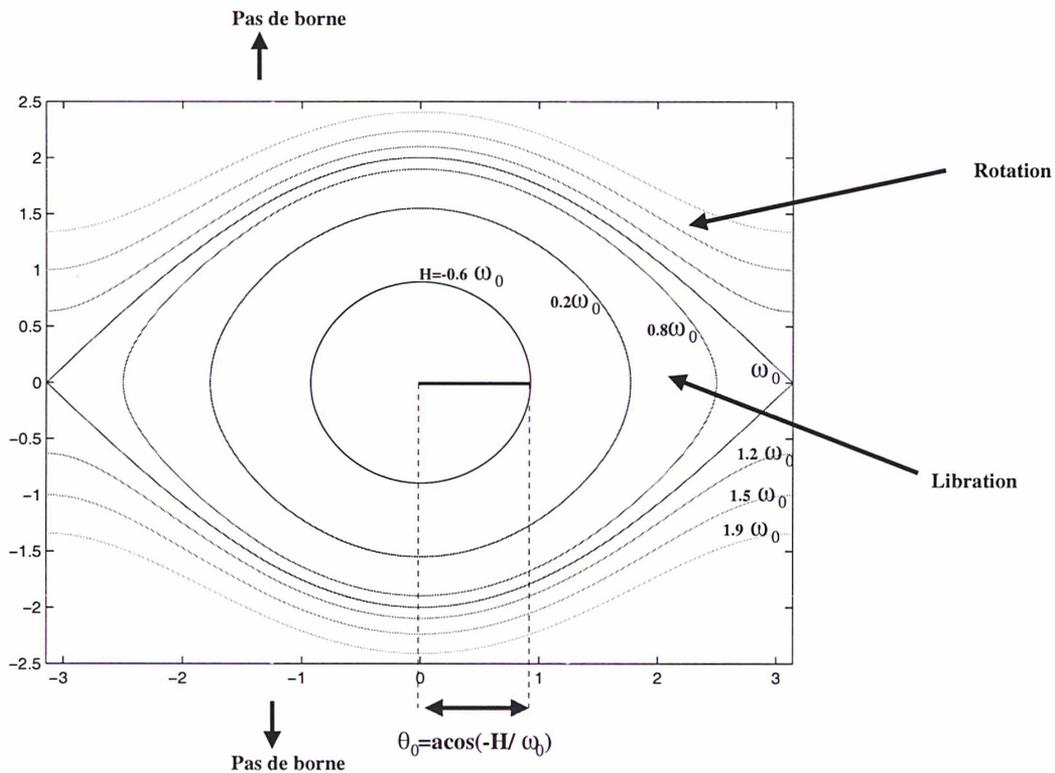


FIG. 1.1: Espace des phases  $(\theta \times P_\theta)$ . Les valeurs de  $H$  associées à chacune des courbes d'isoénergie sont indiquées sur celles-ci en fonction de  $\omega_0$ .

Comme le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, c'est une constante du mouvement. Nous dirons que notre système est conservatif ou encore qu'il ne présente pas de dissipation d'énergie.

Cette propriété permet de visualiser très simplement les différents mouvements possibles pour le pendule dans l'espace  $(\theta \times P_\theta)$  que nous appellerons **espace des phases**. En effet, suivant la position initiale  $(\theta_i, P_{\theta_i})$  du pendule dans cette espace,  $H$  prend une certaine valeur  $H_i$ . Au cours du mouvement cette valeur  $H_i$  ne peut changer. Le

mouvement effectué par le pendule peut donc être représenté par l'intersection entre la surface  $H(\theta, P_\theta)$  définie par l'équation (1.1) et le plan défini par  $H = H_i$ . Les courbes solutions sont donc les différentes courbes de niveaux de la fonction  $H(\theta, P_\theta)$ .

Nous pouvons tracer ces courbes dans l'espace des phases pour différentes conditions initiales. nous appellerons ces courbes : **courbes d'isoénergie** (cf. le graphique [1.1]).

Ces courbes ont pour propriété importante de ne pouvoir se couper entre elles; en effet, si elles se coupaient en un point M, alors, la valeur énergétique des deux courbes serait la même en ce point et donc ces deux courbes seraient confondues.

Une deuxième propriété importante de ces courbes, dans l'espace des phases, est ce qu'on appelle **l'incompressibilité du flot**, plus connue sous le nom de théorème de Liouville. Ce théorème dit que si on prend dans l'espace des phases un ensemble de conditions initiales  $S1$  à l'instant  $t_0$  représentant une aire  $A1$ , alors, au bout d'un temps  $t$ , l'ensemble d'arrivée  $S2$  de toutes ces trajectoires aura une même aire  $A1$  (Lichtenberg et Lieberman, 1983). Cette propriété nous sera utile par la suite.

Sur le graphique [1.1], nous voyons déjà apparaître deux zones différentes délimitées par une courbe séparatrice d'énergie  $H_{sp} = \omega_0$ . Ces deux zones correspondent à deux types de mouvements différents pour le pendule :

- Pour des valeurs de  $H$  inférieures à  $H_{sp}$ , le pendule est dit dans un état de **libration** (voir figure [1.2]). Dans ce cas, la courbe d'isoénergie est une courbe fermée qui admet une valeur maximale pour  $\theta$  que nous noterons  $\theta_0$ . D'après la relation (1.1)  $\cos \theta_0 = -\frac{H}{\omega_0}$ . Il faut aussi remarquer que  $H$  ne peut être inférieur à  $-\omega_0$ .
- Pour des valeurs de  $H$  supérieures à  $H_{sp}$ , le pendule est dit dans un état de **rotation** (voir figure [1.3]). La courbe d'isoénergie est dans ce cas une courbe ouverte; il n'existe plus de valeur maximale pour  $\theta$ . Il n'y a pas non plus de borne supérieure pour l'énergie  $H$ ; ce qui revient à dire qu'il n'y en a pas non plus pour la variable  $P_\theta$ . Nous trouverons donc toujours des courbes solutions quelle que soit la condition initiale  $P_{\theta_i}$ .

Cette description du mouvement du pendule est essentiellement qualitative. Mais elle nous aidera énormément pour la suite de l'étude. Par ailleurs la comparaison du graphique [1.1] avec, par exemple, le graphique [2.4] que nous trouverons dans le Chapitre 2, nous montre clairement que les deux problèmes, mouvement du pendule et mouvement de rotation libre d'un corps rigide triaxial, ont des topologies énergétiques très voisines.

Essayons maintenant d'exprimer ce mouvement en fonction du temps.

### 1.3 Le cas des petites oscillations

Pour de faibles variations de l'angle  $\theta$ , le problème a été décrit et quantifié depuis longtemps et il est accessible même aux lycéens qui savent quelle est la période des oscillations du pendule. Le principe pour résoudre le système pour de faibles valeurs de  $\theta$  est de linéariser l'expression (1.1). Le Hamiltonien devient (en négligeant les parties indépendantes de  $\theta$  et de  $P_\theta$ ) :

$$\boxed{H = \frac{\omega_0}{2} [P_\theta^2 + \theta^2]}$$
(1.3)

Ce Hamiltonien est connu. Il s'agit du Hamiltonien d'un **oscillateur harmonique**. Nous allons étudier ce Hamiltonien non pour les résultats connus de tous mais pour la méthode que nous employons.

#### Méthode :

Cette méthode se sert du formalisme action-angle. Nous la présentons dans le cas d'un système à un degré de liberté. Elle s'applique aux systèmes dits "périodiques". Les systèmes périodiques sont :

- soit les systèmes dont le degré de liberté  $x$  et son moment conjugué  $y$  sont des fonctions périodiques du temps, de même période  $T$  (ce cas correspond au mouvement de libration, (cas **I**)),
- soit les systèmes dont  $y$  est une fonction périodique de  $x$ , de période  $T$  (ce cas correspond au mouvement de rotation, (cas **II**)).

Succinctement, il s'agit, dans cette méthode, d'utiliser le **changement de variables canoniques** particulier qui remplace  $(x, y)$  par  $(\phi, J)$  où la variable  $J$  est un moment particulier du système, appelé **action**, que nous allons définir. La variable  $\phi$  est la variable angulaire qui est associée à  $J$ . Notre but est d'obtenir un Hamiltonien qui dépende uniquement de l'action. Nous aurons alors, du fait du choix de  $J$  comme moment, les relations simples suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{2\pi}{T} \\ \phi = \frac{2\pi}{T} \times t + \phi_0 \end{cases}$$

où  $T$  est la période du système et  $\phi_0$  une constante. Nous ne démontrons pas ici ces relations. Pour en savoir plus, le lecteur pourra par exemple se référer à Lichtenberg et Lieberman (1983). Nous expliquons cependant la notion de changement de variables canoniques et la définition d'une action :

- Par **changement de variables canoniques**, il faut comprendre un changement de variables qui conserve le formalisme des équations différentielles (1.2). Soit :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

- Quant à l'**action**  $J$ , elle se définit ainsi :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} y \, dx \quad (1.4)$$

où  $\gamma$  est un cycle de la courbe représentative du mouvement dans l'espace des phases. D'après la formule de Stoke, nous pouvons aussi écrire cette intégrale sous la forme :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int \int_{S_{\gamma}} dy \times dx \quad (1.5)$$

où  $S_{\gamma}$  est la surface délimitée par le circuit  $\gamma$  si  $\gamma$  est un circuit fermé (cas **I**), et délimitée par  $\gamma$  et l'axe des abscisses si  $\gamma$  n'est pas fermé (cas **II**).  $J$  peut donc être vu, au facteur  $2\pi$  multiplicatif près, comme l'aire de cette surface. Or cette aire, et par là même  $J$ , est une intégrale invariante connue du mouvement résultant du théorème de Liouville que nous venons d'explicitier précédemment. (Lichtenberg et Lieberman, 1983).

Dans le cas du pendule, avec les notations que nous avons adoptées, l'action  $J$  s'écrit ainsi :

$$J(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} P_{\theta} \, d\theta \quad (1.6)$$

où  $\gamma$  est le circuit parcouru par le pendule.

Pour de faibles variations de  $\theta$ , d'après le diagramme des phases ou tout simplement d'après notre expérience du mouvement d'un pendule, ce dernier se trouve dans le cas de la libration défini dans la section précédente. Le circuit  $\gamma$  qu'il parcourt est donc un circuit fermé autour du point  $(0, 0)$ .

Nous savons d'après le chapitre précédent que  $H$  est une constante. En écrivant l'expression de  $P_{\theta}$  à l'aide de l'équation (1.3) et en faisant le changement de variables  $\sqrt{\frac{\omega_0}{2H}} \theta = \sin X$ , nous pouvons déterminer la valeur de  $J$  :

$$\begin{aligned}J(H) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \pm \left[ \frac{2H}{\omega_0} - \theta^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \left[ \frac{2H}{\omega_0} - \theta^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \frac{H}{\omega_0}\end{aligned} \quad (1.7)$$

$\theta_0$  est l'angle limite atteint par le pendule dans le cas du mouvement libratoire. Soit, en fonction de  $H$  :  $\theta_0 = \sqrt{\frac{2H}{\omega_0}}$ . En inversant la relation (1.7), le nouveau Hamiltonien s'écrit alors en fonction de  $J$  et  $\phi$  :

$$H(J, \phi) = J\omega_0$$

De cette expression du Hamiltonien, nous déduisons deux choses :

- Premièrement que l'action  $H$  est indépendante de la variable  $\phi$ . Cette absence de  $\phi$  est induite par le choix même de l'action  $J$  comme moment, du fait que  $J$  est, comme nous venons de le dire, une constante du mouvement. Dans un problème à un degré de liberté, cette première remarque sera toujours vérifiée.
- Deuxièmement que  $\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega_0$  est également une constante.  $\phi$  est donc une fonction affine du temps.

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0 \quad (1.8)$$

$\phi$  étant une variable angulaire, nous définissons la période de  $\phi$ , comme le temps nécessaire pour que  $\phi$  varie de  $2\pi$  radians. Dans la suite, nous noterons  $T_0$  la période associée à  $\omega_0$ .  $g$  étant une accélération et  $l$  une longueur, la racine carrée  $\sqrt{\frac{l}{g}}$  est un intervalle de temps.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  a donc bien la dimension d'une fréquence

Il nous faut maintenant connaître la transformation canonique elle-même, entre  $(\phi, J)$  et  $(\theta, P_\theta)$ , pour pouvoir exprimer  $\theta$  et  $P_\theta$  en fonction du temps. Pour cela nous allons utiliser la fonction génératrice  $S(J, \theta)$ . Nous savons qu'elle doit vérifier :

$$\frac{\partial S(J, \theta)}{\partial \theta} = P_\theta = \left[ \frac{2H}{\omega_0} - \theta^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [2J - \theta^2]^{\frac{1}{2}}$$

Soit en intégrant par rapport à  $\theta$  :

$$S(J, \theta) = \int_0^\theta [2J - \theta^2]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

Soit :

$$\phi = \frac{\partial S(J, \theta)}{\partial J} = \int_0^\theta \frac{d\theta}{[2J - \theta^2]^{\frac{1}{2}}} = \arcsin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2J}}\right)$$

Les solutions exactes pour un oscillateur harmonique sont donc :

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2H}{\omega_0}} \sin \phi \\ P_\theta &= \sqrt{\frac{2H}{\omega_0}} \cos \phi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le mouvement du pendule tend donc vers le mouvement circulaire quand les oscillations tendent vers 0 (cf. graphique [1.1]). Il nous faut maintenant essayer de quantifier ce qui se passe quand le pendule s'éloigne de la position d'équilibre  $(0, 0)$  du diagramme des phases.

## 1.4 Résolution générale à l'aide des intégrales elliptiques

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il est possible, en utilisant la même méthode que précédemment, de traiter le problème sans le restreindre au cas de faibles oscillations. Nous partons cette fois de l'équation (1.1) non linéarisée.

$$\boxed{H = \frac{\omega_0}{2} [(P_\theta)^2 - 2 \cos \theta] = \omega_0 C}$$
(1.10)

Où  $C$  est une constante comprise entre  $-1$  et  $+\infty$ . L'action  $J$  s'exprime maintenant ainsi :

$$\begin{aligned} J(H) &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \pm \left[ \frac{2H}{\omega_0} + 2 \cos \theta \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \delta_C \int_0^{\theta_0} [2C + 2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta \end{aligned}$$
(1.11)

Où :

$$\left. \begin{aligned} -\cos(\theta_0) &= C \\ \delta_C &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ si } C < 1$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \pi \\ \delta_C &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ si } C > 1$$

Et  $S(J, \theta)$  est déterminée comme précédemment. Soit :

$$\frac{\partial S(J, \theta)}{\partial \theta} = P_\theta = \left[ \frac{2H}{\omega_0} + 2 \cos \theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne :

$$S(J, \theta) = \int_0^\theta [2C + 2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta$$
(1.12)

Nous en déduisons l'expression de  $\phi$  qui est, comme dans la partie précédente, la variable angulaire conjuguée à la variable d'action  $J$ .

$$\phi = \frac{\partial S(J, \theta)}{\partial J} = \frac{\partial S}{\partial C} \times \frac{\partial S}{\partial J}$$

$$= \frac{\partial C}{\partial J} \int_0^\theta \frac{d\theta}{[2C + 2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.13)$$

D'autre part  $(\partial C/\partial J)$  est déterminée par la relation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial J} = \frac{\partial H}{\partial J} \frac{1}{\omega_0} = \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{\omega_0}$$

Nous savons que  $J$  est une constante du mouvement. Cela implique que le Hamiltonien  $H$  ne dépend que de  $J$ . La dérivée par rapport au temps de  $\phi$  est  $\frac{\partial H}{\partial J}$  qui est donc également une constante. Donc  $\phi$  est une variable purement affine du temps, de pente égale à  $(\partial H/\partial J)$ . Nous en déduisons l'expression de  $(\partial J/\partial H)$  en fonction de  $T$  la période de  $\phi$  :

$$\frac{\partial J}{\partial H} = \frac{T}{2\pi} \quad (1.14)$$

Il nous faut maintenant calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} J(H) = \frac{2}{\pi} \delta_c \int_0^{\theta_0} [2C + 2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ \phi = \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{\omega_0} \int_0^\theta \frac{d\theta}{[2C + 2 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (1.15)$$

En s'aidant des formules des demi-angles, ces relations deviennent :

$$\begin{cases} J(H) = \frac{4}{\pi} k \delta_c \int_0^{\theta_0} [1 - k^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2}]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ \phi(\theta, H) = \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{2\omega_0 k} \int_0^\theta \frac{d\theta}{[1 - k^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2}]^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (1.16)$$

Avec :  $k = \sqrt{\frac{1+C}{2}}$ .

Selon que le mouvement du pendule est un mouvement de libration ou de rotation, la valeur de  $C$ , (et donc de  $k$ ), est tantôt inférieure tantôt supérieure à 1. Nous pouvons exprimer les intégrales ci-dessus à l'aide d'un nouveau type de fonction, les **intégrales elliptiques**, (voir annexe **II**), grâce au changement de variables :

$$\begin{cases} \frac{\theta}{2} = \eta & \text{si } k > 1 \\ \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \eta & \text{si } k < 1 \end{cases}$$

Nous allons traiter ces deux cas séparément.

### 1.4.1 La libration

Dans ce cas, la variable  $k$  est inférieure à 1. Nous utilisons donc le changement de variables spécifié ci-dessus, à savoir :  $\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \eta$ . Nous obtenons les deux intégrales suivantes à la place des équations (1.16)

$$\begin{aligned} J(H) &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{(k^2 - 1)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} \right] d\eta \\ &= \frac{8}{\pi} [(k^2 - 1) \mathcal{K}(k) + \mathcal{E}(k)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \phi(\eta, H) &= \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{2\omega_0 k} \int_0^\eta \frac{2k d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \\ &= \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{\omega_0} \mathcal{F}(\eta, k) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En effet, dans le cas de la libration, par définition,  $k = \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right)$ . Il s'en suit que quand  $\theta = \theta_0$ ,  $\eta = \pi/2$ .

$\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$  sont respectivement l'intégrale elliptique de première espèce complète, l'intégrale elliptique de première espèce incomplète et l'intégrale elliptique de seconde espèce complète. Ces fonctions correspondent à une généralisation des fonctions trigonométriques classiques (voir annexe I).

Il nous reste à déterminer  $(\partial J / \partial H)$  en fonction des intégrales elliptiques.  $H$  n'apparaît que dans  $k$ , et  $(\partial k / \partial H)$  est égal à  $1/(4\omega_0 k)$ . De plus, connaissant les formules de dérivation des intégrales elliptiques par rapport à leur paramètre  $k$ , (cf. annexe I), nous avons :

$$\left( \frac{\partial J}{\partial H} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0} \mathcal{K}(k)$$

Nous en déduisons immédiatement la période de  $\phi$  d'après la relation (1.14) :

$$T = \frac{4}{\omega_0} \mathcal{K}(k) = \left( \frac{2}{\pi} \right) T_0 \mathcal{K} \left( \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

Pour les petites amplitudes, nous pouvons utiliser le développement limité de cette intégrale. Le terme principal de cette nouvelle relation correspond à la période de l'oscillateur harmonique classique  $T_0$ , ce qui valide notre étude précédente dans le cas de petites oscillations.

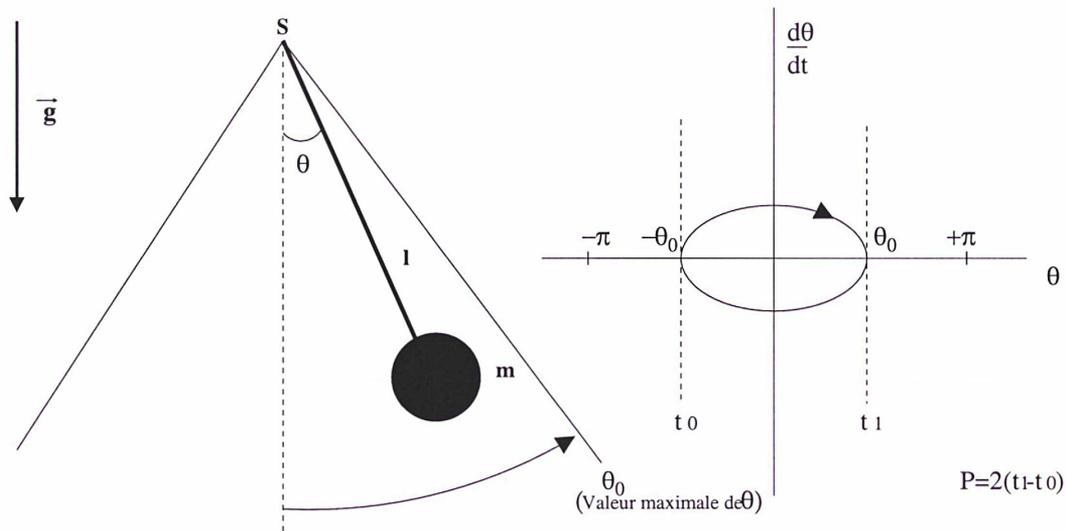


FIG. 1.2: Pendule en état de libration.

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \dots \right)$$

Enfin, nous pouvons maintenant exprimer complètement la variable  $\phi$  en fonction d'intégrales elliptiques.

$$\phi(\eta, H) = \frac{\pi}{2} [\mathcal{K}(k)]^{-1} \mathcal{F}(\eta, k) = \frac{2\pi}{T} t + \phi_0 \quad (1.19)$$

Où  $\phi_0$  est une constante d'intégration. Pour exprimer  $\theta$  en fonction de  $\phi$ , nous nous servons de la fonction elliptique de Jacobi  $\text{sn}$  : la fonction  $\text{sn}$  est définie telle que  $(\text{sn}[\mathcal{F}(\eta, k), k] = \sin \eta)$ , (Byrd et Friedman, 1954).

$$\frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2} = \sin(\eta) = \text{sn} \left( \frac{2\phi}{\pi} \mathcal{K}(k), k \right)$$

Soit

$$\theta = 2 \arcsin \left( k * \text{sn} \left( \frac{2\phi}{\pi} \mathcal{K}(k), k \right) \right) \quad (1.20)$$

Nous nous rendons compte que la période de  $\phi$  est également la période de l'angle  $\theta$ . Nous avons ainsi, en fonction du temps et de constantes du mouvement, l'expression de l'unique degré de liberté :  $\theta$ . Le problème dans le cas du mouvement libratoire est résolu.

### 1.4.2 La rotation

Traisons maintenant le second cas :  $H > \omega_0$ . Dans ce cas qui correspond à :  $k > 1$ , le changement de variable est simple :  $\frac{\theta}{2} = \eta$ .

Nous obtenons, pour l'action  $J$  et l'angle  $\phi$ , d'après les formules (1.16) :

$$J(H) = \frac{4}{\pi} k \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \eta} d\eta = \frac{4}{\pi} k \mathcal{E}(k^{-1})$$

$$\phi(\eta, H) = \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{\omega_0 k} \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \eta}} = \left( \frac{\partial J}{\partial H} \right)^{-1} \frac{1}{\omega_0 k} \mathcal{F}(\eta, k^{-1}) \quad (1.21)$$

Il nous reste à déterminer, comme dans le cas de la libration,  $(\partial J / \partial H)$  :

$$\left( \frac{\partial J}{\partial H} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\omega_0 k} \mathcal{K}(k^{-1})$$

Nous en déduisons la période de  $\phi$  dans le cas de la rotation :

$$T = \frac{2}{\omega_0 k} \mathcal{K}(k^{-1}) = T_0 \frac{1}{\pi} \mathcal{K}(k^{-1})$$

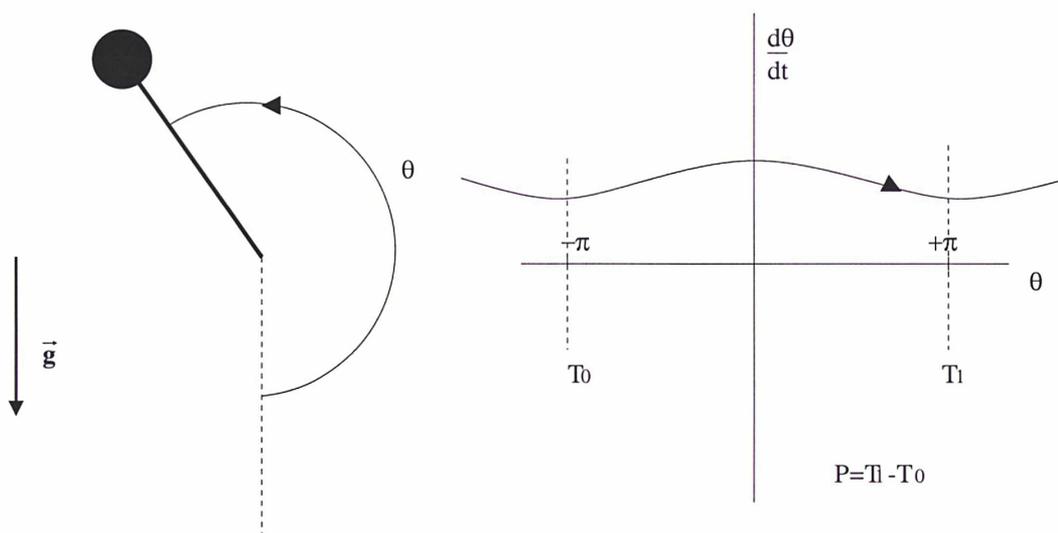


FIG. 1.3: Pendule en état de rotation

Nous pouvons maintenant exprimer la variable  $\phi$  en fonction uniquement d'intégrales elliptiques.

$$\phi(\theta, H) = \pi [\mathcal{K}(k^{-1})]^{-1} \mathcal{F}\left(\frac{\theta}{2}, k^{-1}\right) = \frac{2\pi}{T}t + \phi_0 \quad (1.22)$$

Et  $\theta$  en fonction de  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \operatorname{sn}\left(\frac{\phi}{\pi}\mathcal{K}(k^{-1}), k^{-1}\right) \\ \text{Soit} \quad \theta &= 2 \operatorname{arcsin}\left(\operatorname{sn}\left(\frac{\phi}{\pi}\mathcal{K}(k^{-1}), k^{-1}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Nous avons rassemblé les résultats obtenus pour le cas libratoire et pour le cas rotationnel dans deux derniers graphiques. La période de  $\theta$  en fonction du paramètre  $C$  est donnée sur le graphique [1.4]. Le graphique [1.5] représente, quant à lui, la variation de  $\theta$  en fonction du temps et du paramètre  $C$ . Nous résolvons ainsi le problème du mouvement d'un pendule libre dans son ensemble. Ces formules ont été obtenues sous une forme voisine durant les années 1970 (Rechester et Stix, 1979).

Une remarque s'impose. Quand nous parlons de mouvement libre du pendule, ici, il s'agit d'un abus de langage. En effet le pendule est soumis en permanence à une force perturbatrice constante, l'attraction  $g$ . Le mouvement libre suppose en fait l'absence de cette force. Dans ce cas le problème est plus simple puisque le Hamiltonien ne dépend plus que de la variable d'action : on a tout le temps un mouvement de rotation et la vitesse instantanée de rotation est constante, la libration ne peut exister. On retrouve d'ailleurs cet abus de langage, dans le cas du "mouvement libre de la Lune" par exemple.

\* \* \*

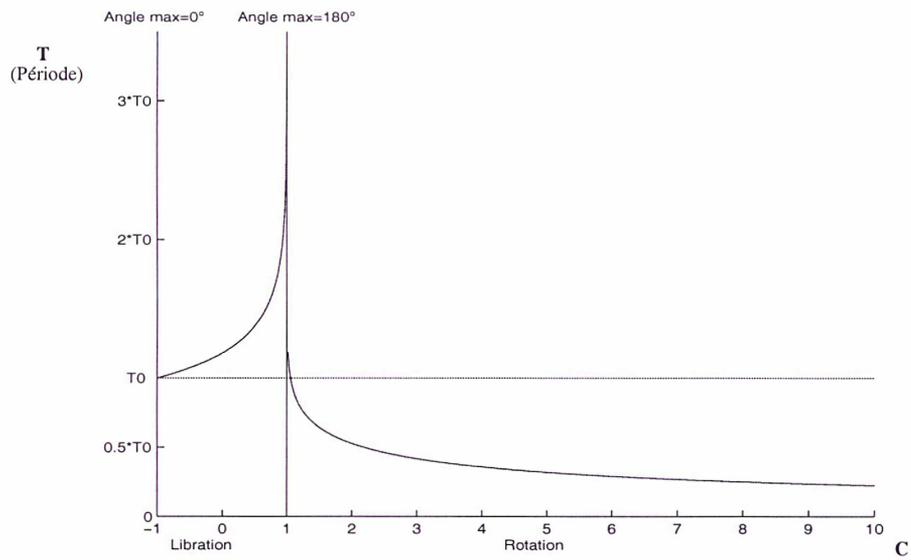


FIG. 1.4: Valeur de la période en fonction du paramètre  $C$ .

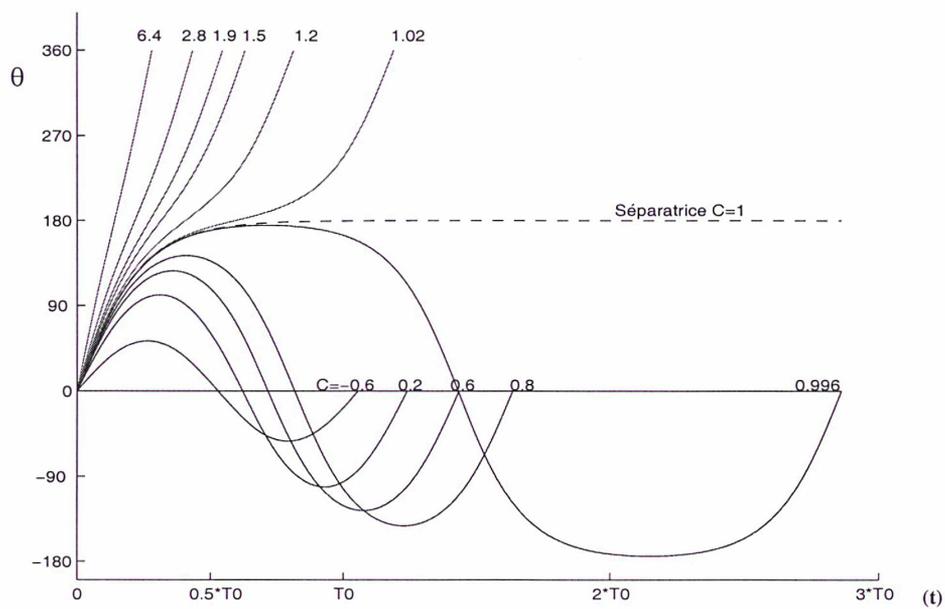


FIG. 1.5: Valeur de  $\theta$  en fonction du temps et du paramètre  $C$ .

# Chapitre 2

## Mouvement de rotation libre

### Introduction

Nous suivons dans ce chapitre une méthodologie très proche de celle du Chapitre 1.

Nous commençons par définir les variables d'Andoyer que nous allons utiliser pour l'étude du mouvement de rotation libre d'un corps rigide. Nous présentons leurs intérêts par rapport à d'autres variables pour la simplification de l'écriture du Hamiltonien du problème. En nous plaçant dans un espace des phases restreint, nous visualiserons l'ensemble des mouvements possibles pour le vecteur moment cinétique.

Nous résoudrons ensuite le problème dans son ensemble en donnant une formulation analytique des solutions. La méthode suivie est celle expliquée en détails dans le Chapitre 1.

Nous terminerons ce deuxième chapitre en appliquant ces résultats à quelques corps célestes (Halley, Toutatis, ...) et en donnant les développements limités des variables d'Andoyer qui nous semblent utiles.

\* \* \*



## 2.1 Définition des variables d'Andoyer

Les angles d'Euler sont les variables les plus communément employées pour raccorder deux repères. Cependant, l'utilisation de ces variables pour une étude Hamiltonienne présente des inconvénients. En effet, d'une part, les moments conjugués des angles d'Euler ne sont pas des quantités physiques très intuitives. Et, d'autre part, l'expression de l'énergie cinétique du problème en fonction de ces variables et de leurs moments n'est pas simple (Deprit, 1967). Les variables d'Andoyer semblent mieux adaptées au problème.

D'abord, les inconvénients soulevés ci-dessus n'existent plus : la définition des moments conjugués aux variables angulaires d'Andoyer et l'expression du Hamiltonien libre sont simples comme nous le montrerons dans le chapitre suivant.

Ensuite, les variables d'Andoyer confèrent au problème de la rotation des corps, une structure très voisine du problème de la révolution de ces mêmes corps en coordonnées elliptiques. Or ce dernier a été abondamment étudié par les astronomes, en particulier du fait d'observations plus faciles que pour les problèmes de rotations. Nous avons explicité dans le chapitre introductif sur la rotation des corps, la difficulté de la mesure de la rotation d'autres corps célestes que la Terre. Les similitudes formelles que nous rencontrons entre l'étude du mouvement de rotation avec les variables d'Andoyer et l'étude du mouvement de révolution avec les variables elliptiques, vont nous aider à répondre à nos questions.

Les deux repères que nous voulons raccorder à l'aide des variables d'Andoyer sont :

- Un repère de référence  $R = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$
- Un repère  $(R_I) = (O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$  formé des axes principaux d'inertie du corps  $(S)$  dont nous étudions la rotation.

$A, B, C$  sont les moments principaux d'inertie de  $S$  dans l'ordre croissant, et  $O$  le barycentre du corps  $(S)$ . Nous définissons également un point d'origine  $D$  des longitudes en posant  $\vec{X} = \vec{OD}$ .

Les variables d'Andoyer sont représentées sur le schéma [2.1]. Elles consistent en trois variables de type Angle et trois variables de type Action. Les variables de type Action, sont les moments conjugués des trois variables angulaires.

### Les trois variables de type Angle

- $h$  est l'angle supporté par le plan de référence  $(OX \times OY)$ , entre le point origine  $D$  et le noeud descendant  $\Gamma$  du plan perpendiculaire au moment cinétique du corps  $(S)$ .
- $g$  est l'angle entre  $\Gamma$  et  $P$ , supporté par le plan normal au moment cinétique du corps  $(S)$ ,  $P$  étant le noeud ascendant de l'équateur de figure de  $(S)$  sur ce dernier. L'équateur de figure de  $(S)$  est le plan  $(OA \times OB)$
- $l$  est l'angle entre  $OP$  et l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$ , supporté par l'équateur de  $(S)$ .

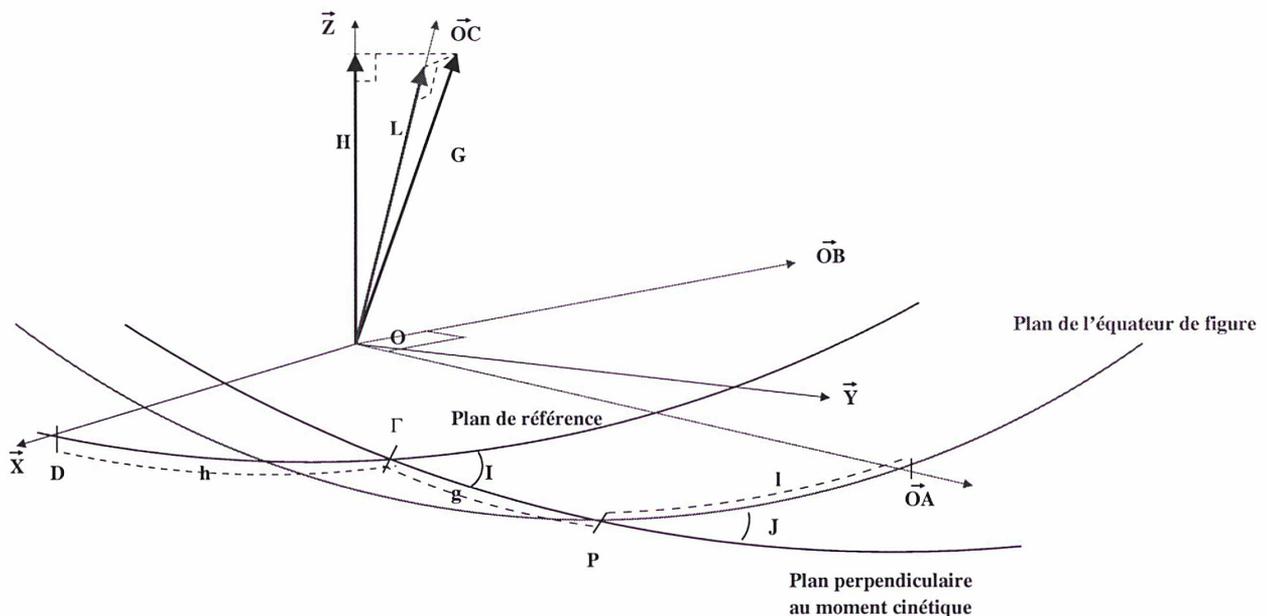


FIG. 2.1: Définition des variables d'Andoyer.

### Les trois Moments conjugués respectivement à $h$ , $g$ et $l$

- $H$  est la norme de la projection du moment cinétique de  $(S)$  sur l'axe  $\vec{Z}$ , normal au plan de référence.
  - $G$  est la norme du moment cinétique total.
  - $L$  est la norme de la projection du moment cinétique sur l'axe de figure  $OC$ .
- Nous noterons dans la suite de notre travail le moment cinétique de  $(S)$  par  $\vec{L}$ .

Nous pouvons exprimer  $H$  et  $L$  à l'aide des angles  $J$  et  $I$  avec :

- $I$ , l'angle entre le plan de référence et le plan perpendiculaire à  $\vec{L}$ .
- $J$ , l'angle entre le plan perpendiculaire à  $\vec{L}$  et le plan de l'équateur de figure du corps ( $S$ ).

Soit :  $H = G \cos I$  et  $L = G \cos J$ . Le schéma [2.1] représente graphiquement ces variables.

Remarque (1) :

Nous avons besoin pour la définition de l'angle  $l$  de connaître la position de l'axe de moment d'inertie minimal du corps ( $S$ ). Or, l'axe de moment d'inertie minimal d'un corps céleste ne peut pas être observé directement.

Pour les corps du système solaire dont la surface a pu être observée assez précisément, et pour lesquels des points de repère peuvent être déterminés, il est possible de définir un méridien d'origine appelé "méridien zéro" de ce corps. La plupart du temps, il s'agit d'un cratère. Ce méridien zéro est par exemple la cratère d'Airy-0 pour Mars, (cf. l'image [2.2]). Ce méridien d'origine est de nature purement conventionnelle et n'a rien à voir naturellement avec l'axe de moment d'inertie minimum, qui, en ce qui le concerne, répond à un principe purement théorique. Cependant, l'angle entre le méridien origine et l'axe de moment d'inertie minimum, constant dans le cas d'un corps solide, peut être déterminé par la connaissance des coefficients gravitationnels  $C_{2,2}$  et  $S_{2,2}$  dans le repère lié au méridien zéro (Borderies, 1980).

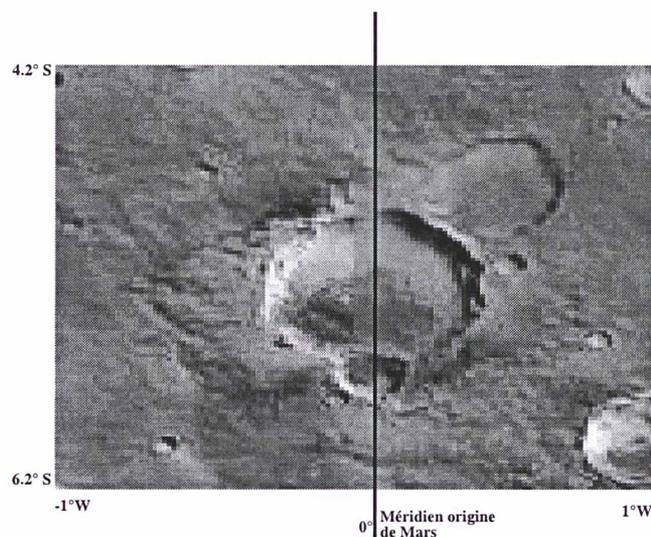


FIG. 2.2: Le cratère d'Airy sur Mars par lequel passe le méridien zéro de cette planète.

Pour la Lune la définition du méridien zéro est différente. Nous savons, du fait des effets de marées, que l'axe de moment d'inertie minimum est orienté approximativement dans la direction moyenne de la Terre. Le méridien d'origine de la Lune, est repéré sur le sol lunaire par rapport à cette relation à la direction moyenne de la Terre et non pas par une référence directe, de type topographique (cratère, montagne, etc ...). Plus précisément, le méridien d'origine est défini par l'intermédiaire du point d'intersection entre la surface lunaire et la ligne joignant le centre de la Lune au centre de la Terre quand la Lune, le noeud ascendant de son orbite sur l'écliptique et son périégée moyen se trouvent en coïncidence. Cette dernière condition peut s'écrire formellement comme :  $\bar{\lambda} = \bar{\Omega} = M$  (avec  $\bar{\lambda}$  la longitude moyenne de la Lune,  $\bar{\Omega}$  la longitude moyenne du noeud et  $M$  l'anomalie moyenne de la Lune). Cette dernière condition permet donc de définir un point de la surface lunaire proche de l'équateur de la Lune et voisin de l'axe de moment d'inertie minimal, voir le schéma [2.3]. (Le développement du potentiel lunaire en harmonique sphérique, dont le coefficient  $S_{2,2}$  est négligeable, nous confirme cette proximité entre ce point et l'axe  $OA$ .)

Ce point s'appelle le "centre moyen du disque apparent" ou "Mean sub-earth point" d'après Bills et Ferrari (1977).

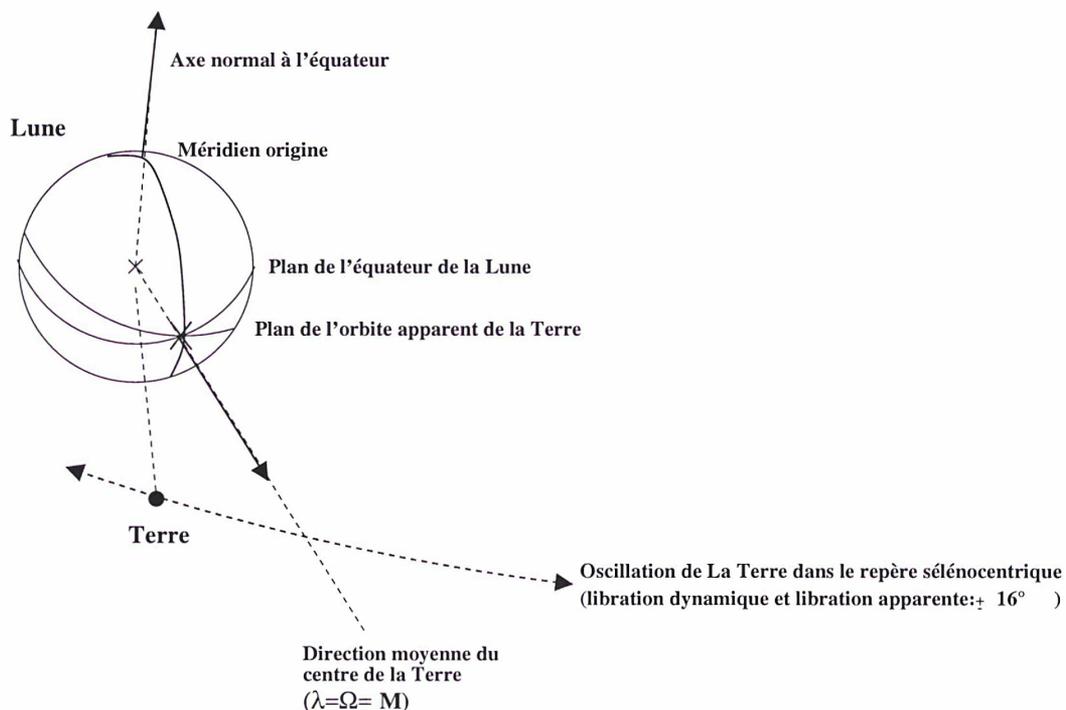


FIG. 2.3: Définition du point d'origine du repère sélénocentrique.

Dans beaucoup d'autres cas, les corps dont nous voulons modéliser la rotation, ont une surface que nous ne pouvons observer. Leur vitesse de rotation est alors déduite de considérations théoriques, (résonance rotation-révolution 1/1 avec la planète mère pour un satellite, par exemple) et leur méridien origine est défini de manière arbitraire.

Remarque (2)

Nous n'avons pas montré ici la canonicité des variables  $h, g, l, H, G, L$ . Elles le sont cependant. Une démonstration de cette canonicité est faite dans l'article de Deprit, (1967).

\* \* \*

## 2.2 Description du Hamiltonien du problème

Nous nous proposons, dans cette partie, d'examiner le mouvement de rotation d'un corps solide ( $S$ ) autour de son barycentre. Pour l'instant, nous supposons que ce corps ( $S$ ) n'est soumis à aucune influence extérieure. Il s'agit donc du mouvement de rotation libre.

Ce problème est étudié depuis relativement longtemps puisque les équations qui gouvernent ce mouvement ont été mises à jour par Euler (1707-1783). Plus récemment, ce même problème a été traité, à l'aide du formalisme Hamiltonien, qualitativement par Deprit (1967) et plus quantitativement par Kinoshita (1972) et par Deprit et Eliepe (1993). Cette partie est une présentation de ces travaux.

Bien qu'essentiellement théorique, l'étude du mouvement de rotation libre est importante. En effet, c'est la première étape naturelle pour la détermination du mouvement de rotation du corps rigide ( $S$ ), perturbé, cette fois, par d'autres corps célestes (cf. Kinoshita (1972) et le Chapitre 3).

Nous choisissons comme repère ( $R$ ) un repère inertiel. Dans ce cas, le Hamiltonien libre  $F_0$  d'un corps solide se réduit à l'énergie cinétique. Celle-ci s'écrit par définition, pour un solide ( $S$ ), de la manière suivante :

$$F_0 = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Avec le moment cinétique  $\vec{L}$  égal par définition à  $(M_I \cdot \vec{\omega})$ , où  $M_I$  est la matrice d'inertie du corps ( $S$ ) et  $\vec{\omega}$  le vecteur de rotation instantanée du même corps ( $S$ ).

Dans le repère  $R_I$  des axes de moments d'inertie principaux  $(O, \vec{O}A, \vec{O}B, \vec{O}C)$ , la matrice d'inertie est diagonale et s'écrit  $M_I = \text{DIAG}(A, B, C)_{R_I}$ , où  $A, B$  et  $C$ , ( $A < B < C$ ), sont les moments d'inertie principaux du corps ( $S$ ). Ces moments sont associés aux rayons orthogonaux de ( $S$ )  $a > b > c$ . Dans ce même repère  $R_I$ , les coordonnées de  $\vec{L}$  sont  $(L_A, L_B, L_C)$  et celles de  $\vec{\omega}$  sont  $(\omega_A, \omega_B, \omega_C)$ .

D'après le schéma [2.1], celles-ci s'écrivent en fonction des variables d'Andoyer :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_A = A\omega_A = G \sin J \sin l \\ L_B = B\omega_B = G \sin J \cos l \\ L_C = C\omega_C = G \cos J \end{pmatrix}_{R_I} \quad (2.1)$$

L'énergie cinétique s'écrit alors :

$$F_0 = \frac{1}{2} [A\omega_A^2 + B\omega_B^2 + C\omega_C^2] \quad (2.2)$$

Le Hamiltonien, réduit à  $F_0$ , peut alors s'écrire :

$$F_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C} \quad (2.3)$$

Premièrement, nous observons d'après (2.3) que les variables d'Andoyer simplifient effectivement grandement l'écriture du Hamiltonien : celui-ci ne dépend plus que de trois variables,  $G$ ,  $L$ , et  $l$  tandis qu'en utilisant les angles d'Euler, le Hamiltonien dépend de 5 des 6 variables canoniques qui leur sont associées (Deprit, 1967). Deuxièmement, la méthode employée dans l'étude du mouvement du pendule doit pouvoir être appliquée sans grande modification.

Le Hamiltonien ci-dessus peut également s'écrire en séparant la partie périodique de la partie séculaire de la manière suivante :

$$F_0 = \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) G^2 + \frac{L^2}{2D} \right]_{sec} + \left[ \frac{e}{2D} (G^2 - L^2) \cos(2l) \right]_{per} \quad (2.4)$$

Avec  $\frac{1}{D} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \right)$  et  $e = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) D$ . Le paramètre  $e$  a été introduit pour la première fois en 1923 par Andoyer. Il souligne d'un point de vue quantitatif l'aspect triaxial du corps étudié. (Lorsque  $e$  est nul, cela signifie que  $A = B$ , donc que le solide présente une symétrie de révolution). Nous utiliserons dans la suite la terminologie conventionnelle de **coefficient de triaxialité** (Kinoshita, 1972).

\* \* \*

## 2.3 Visualisation qualitative des solutions dans l'espace des phases

Comme pour le pendule, le Hamiltonien libre  $F_0$  ne dépend pas explicitement de  $t$ .  $F_0$  est donc une constante du mouvement. Nous remarquons également que  $H$  et  $h$  n'apparaissent pas dans  $F_0$ . Il s'agit donc de variables dites "dégénérées" du problème libre. Ce qui revient à dire que le degré de liberté  $h$  n'est pas utile pour décrire le mouvement de rotation libre d'un corps solide. La variable  $g$  n'apparaît pas non plus dans  $F_0$ . Cependant, elle est nécessaire à l'étude du mouvement du fait que son moment associé  $G$ , lui, apparaît dans le Hamiltonien. En résumé, il y a donc trois variables constantes durant le mouvement :  $G$ ,  $H$  et  $h$ . Nous en déduisons immédiatement que :

- la variable  $I$  est une constante ( $\cos I = \frac{H}{G}$ ).  $I$  étant l'obliquité du moment cinétique qui fait donc un angle constant avec le plan de référence,
- le vecteur moment cinétique  $\vec{L}$  est fixe dans le repère inertiel puisque ses composantes  $[G \sin I \sin h, -G \sin I \cos h, G \cos I]$  dans ce repère sont constantes.

En fixant la valeur de  $G$ , il devient possible de tracer, dans le plan  $(l \times L)$ , les courbes isoénergétiques correspondant aux mouvements possibles pour le corps en rotation. Ce type de représentation pour le mouvement libre est dû à Deprit (1967).

Nous avons préféré représenter ces courbes dans le plan  $(l \times J)$  plus représentatif d'un point de vue géométrique puisque  $J$  est l'angle entre le moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe  $OC$ . Cependant, comme  $L = G \cos J$ , il n'y a pas de différences topologiques fondamentales entre les courbes d'isoénergie dans le plan  $(l \times J)$  ou dans le plan  $(l \times L)$ .

Ce travail est analogue à celui effectué dans le sous-chapitre 1.2 pour le pendule. Nous choisissons plusieurs conditions initiales  $(l_i, J_i)$  dans l'espace  $(l \times J)$ . En sachant que le Hamiltonien  $F_0$  garde une valeur constante  $F_{0i}$  au cours du mouvement, en nous rappelant que  $G$  est également une constante, et en nous aidant de l'équation (2.3), nous pouvons déterminer différentes courbes d'isoénergie.

Nous les avons tracées pour deux corps particulier : Mars et la Lune (voir graphiques [2.4] et [2.5]).

Remarque 1 :

Nous pourrions penser que la valeur de  $G$  peut affecter la forme de ces courbes. Il n'en est rien. Un changement de variables comme  $[G^* = \left(\frac{G}{G_0}\right), L^* = \left(\frac{L}{G_0}\right)$  et  $F_0^* = \left(\frac{F_0}{G_0}\right)]$  où  $G_0$  est la valeur constante prise par la variable  $G$ , nous en persuade. Le Hamiltonien du système devient :

$$F_0^* = G_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^{*2} - L^{*2}) + \frac{L^{*2}}{2C} \right]$$

Dans ce nouveau Hamiltonien la valeur de  $G^*$  est toujours égale à 1 et la valeur  $G_0$  de  $G$  n'est qu'un coefficient de proportionnalité du Hamiltonien. La forme des courbes n'est donc pas modifiée.

Nous observons tout de suite une grande similitude entre l'espace des phases du pendule (cf. graphique [1.1]) et l'espace restreint du problème de la rotation libre (cf. graphiques [2.4] pour Mars et [2.5] pour la Lune) :

- Deux zones de mouvement bien distinctes : la zone de libration qui est la zone comprenant le point de coordonnées  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  et telle que la valeur du Hamiltonien soit comprise entre  $\frac{G^2}{2B}$  et  $\frac{G^2}{2A}$  et la zone de rotation qui est l'autre zone où la valeur du Hamiltonien est comprise entre  $\frac{G^2}{2C}$  et  $\frac{G^2}{2B}$ .
- Une courbe séparatrice, notée  $C_s$ , reliant deux points d'équilibre,  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$ , en des temps infinis. Cette courbe sépare la zone de rotation de la zone de libration. La valeur du Hamiltonien sur cette courbe est, pour les graphiques [2.4] et [2.5],  $\frac{G^2}{2B}$ . Nous ne décrirons pas davantage la rotation d'un corps se trouvant sur cette courbe car il s'agit d'un solution instable du mouvement.

Nous constatons également des différences entre l'espace des phases du pendule et l'espace  $(l \times L)$  ou  $(l \times J)$  :

- Dans le plan  $(l \times L)$ , le diagramme est borné suivant le moment  $L$  qui varie logiquement, d'après sa définition, uniquement entre  $-G$  et  $G$ . C'est pour cette raison que nous pouvons définir  $J$  tel que  $L = G \cos J$ . Dans le cas du pendule, le moment  $P_\theta$ , pouvait au contraire prendre toutes valeurs réelles.
- L'écriture du Hamiltonien sous la forme (2.4) ne dépend de la variable  $l$  que sous la forme "2l". Nous pouvons donc réduire notre espace  $(l \times J)$  à  $([0, \pi] \times [0, \pi])$ . La partie  $([\pi, 2\pi] \times [0, \pi])$  de l'espace des phases étant simplement la translation par  $\pi$  de l'espace  $([0, \pi] \times [0, \pi])$ .

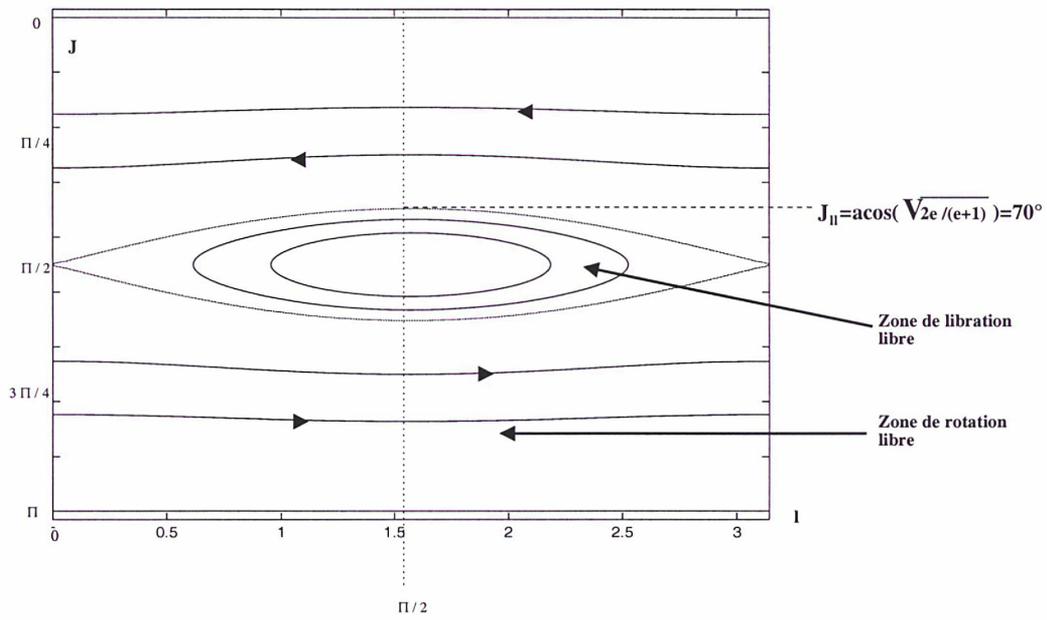


FIG. 2.4: Espace restreint ( $l \times J$ ) pour Mars.

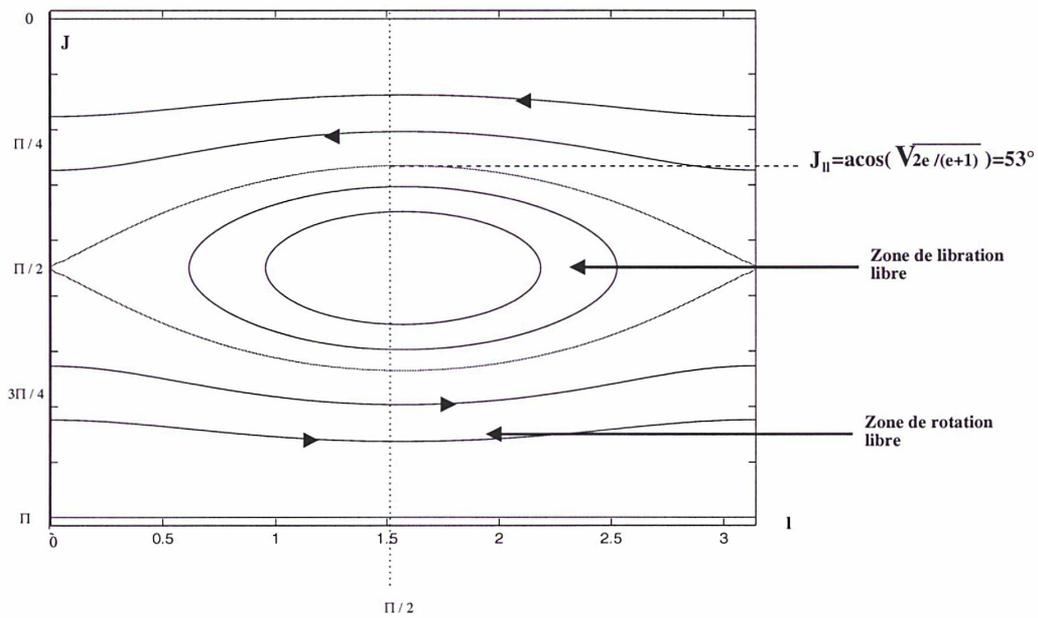


FIG. 2.5: Espace restreint ( $l \times J$ ) pour la Lune.

Nous pouvons retirer des graphiques [2.4] et [2.5] des informations utiles :

- On peut définir, pour tout corps rigide, une valeur limite de  $J$  à partir de laquelle les mouvements libratoires peuvent apparaître. Nous noterons cette valeur  $J_u$  ("ll" pour libration libre). Elle correspond à la valeur de  $J$  minimum atteinte sur la séparatrice  $C_s$ . Cette valeur minimum est atteinte pour  $l = \frac{\pi}{2}$ . Nous savons que la valeur de  $F_0$  sur la séparatrice est  $\frac{G^2}{2B}$ . Nous pouvons donc déterminer, d'après la relation (2.4), la valeur de  $J_u$  en fonction uniquement du coefficient de triaxialité :

$$J_u = \arccos \left( \sqrt{\frac{2e}{e+1}} \right) \quad (2.5)$$

Pour toute valeur de  $J$  inférieure à  $J_u$  ou supérieure à  $(\pi - J_u)$ , il n'est pas possible d'avoir un mouvement de libration.

- On peut également définir, dans le cas non dissipatif, une probabilité  $P_u$  de choisir des conditions initiales telles que le corps ( $S$ ) ait un mouvement libratoire dans l'espace des phases ( $l \times L$ ). Cette probabilité correspond, par exemple pour Mars, à l'aire de la surface délimitée par la séparatrice  $C_s$  sur la figure [2.4], en prenant comme unité, l'aire de la surface du demi-espace des phases  $([0, \pi] \times [-G, G])$ . L'aire de cette surface peut s'écrire :

$$P_u = \frac{1}{2\pi G} \int_{\gamma} L(J_u) dl \quad (2.6)$$

Nous voyons, d'après la définition d'une action (cf. Chapitre 1), que  $P_u$  peut s'écrire  $\frac{\tilde{L}}{G}$ , où  $\tilde{L}$  est l'action associée à  $L$ . Or, dans le sous-chapitre suivant 2.4, nous donnons l'expression suivante :  $\tilde{L} = G\Lambda_0((\frac{\pi}{2} - \bar{J}), k)$  (cf. relation (2.20)). La fonction  $\Lambda_0$  est la fonction de Heuman définie dans l'annexe I. Dans le cas de la séparatrice  $C_s$ , qui est le cas qui nous intéresse ici,  $\bar{J} = J_u$  et  $k = 1$ . Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$\boxed{P_u = \frac{\tilde{L}(J_u)}{G} = \Lambda_0 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - J_u \right), 1 \right] = 1 - \frac{2}{\pi} J_u} \quad (2.7)$$

Cette probabilité peut, par exemple, servir dans le cas d'une collision entre deux astéroïdes pour déterminer, après l'impact, les chances que chacun des corps a d'être en rotation ou en libration.

Nous pouvons déduire entièrement des courbes isoénergétiques dans l'espace restreint plan le mouvement du vecteur moment cinétique, que nous noterons  $\vec{L}$ , dans le repère lié aux axes principaux d'inertie du corps rigide. Les coordonnées de  $\vec{L}$  dans ce repère sont, d'après les relations (2.1) :

$$\begin{aligned} L_A &= G \sin J \sin l \\ L_B &= G \sin J \cos l \\ L_C &= G \cos J \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les deux graphiques suivants, [2.6] et [2.7], représentent schématiquement ces mouvements respectivement pour Mars et la Lune. Il est vrai que l'espace des phases restreint ( $l \times L$ ) ne nous donne pas d'information sur la variable  $g$ . Cependant, cela n'est pas gênant en soi, le vecteur  $\vec{L}$  n'étant pas influencé par la rotation d'angle  $g$  que subit le repère des axes principaux d'inertie par rapport au repère inertiel, du fait que l'axe même de cette rotation est celui porté par le vecteur  $\vec{L}$ . Pour représenter le mouvement du vecteur  $\vec{L}$ , il suffit de recouvrir la sphère unité par l'espace restreint représenté précédemment dans le plan. La sphère a été déformée en un ellipsoïde exagéré afin de bien mettre en évidence les axes d'inertie principaux :  $OA, OB, OC$  sont respectivement l'axe de moment d'inertie minimal, l'axe de moment d'inertie intermédiaire, et l'axe de moment d'inertie maximal.

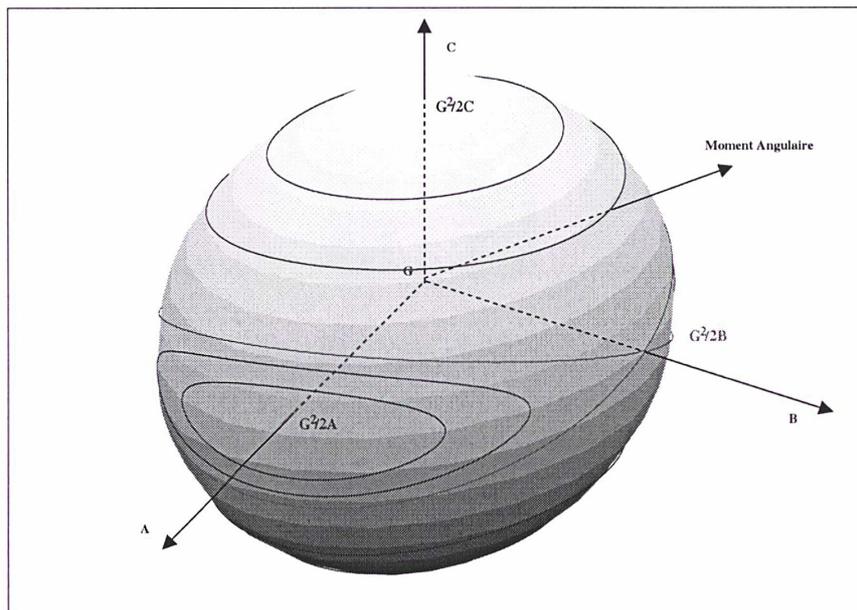


FIG. 2.6: *Mouvement du moment angulaire  $\vec{L}$  dans le repère des axes principaux d'inertie pour Mars.*

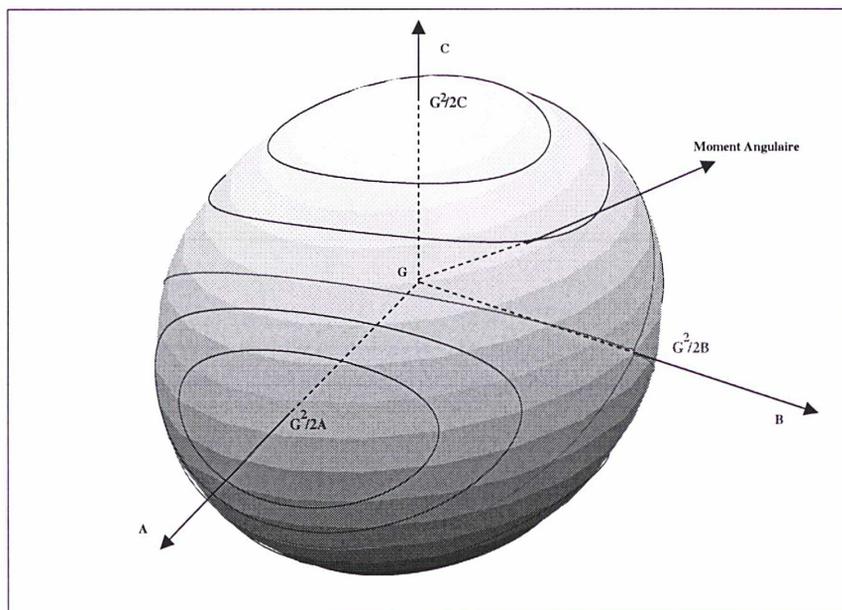


FIG. 2.7: *Mouvement du Moment angulaire dans le repère des axes principaux d'inertie pour la Lune.*

Les points particuliers, pour lesquels le vecteur  $\vec{L}$  est immobile dans le repère des axes d'inertie, sont au nombre de six. Les quatre premiers sont directement visibles dans l'espace plan  $(l \times J)$  en n'oubliant pas que les graphiques [2.5] ou [2.4] ne représentent que la moitié de cet espace.

- Les premiers, de coordonnées  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  et  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  dans le plan  $(l \times J)$ , correspondent au cas particulier où le Hamiltonien  $F_0$  atteint son maximum :  $F_0^{Max} = \frac{G^2}{2A}$ . Ces points correspondent aux cas où le vecteur  $\vec{L}$  est orienté dans le sens de l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$  ou dans le sens opposé (voir ces points d'équilibre sur les ellipsoïdes [2.6] et [2.7]).
- Les deux autres, de coordonnées  $(0, \frac{\pi}{2})$  et  $(\pi, \frac{\pi}{2})$ , correspondent au cas particulier où  $F_0 = \frac{G^2}{2B}$ . Ces points correspondent aux cas où le vecteur  $\vec{L}$  est orienté dans le sens de l'axe de moment d'inertie intermédiaire  $OB$  ou dans le sens opposé.
- Nous voyons enfin apparaître deux points fixes supplémentaires, pour  $J = 0$  et  $J = \pi$ , quand nous projetons l'espace restreint plan sur l'ellipsoïde. Ces points correspondent au cas où le Hamiltonien  $F_0$  atteint son minimum :  $F_0^{Min} = \frac{G^2}{2C}$ . C'est le cas où le moment cinétique est orienté dans le sens de l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$  ou dans le sens opposé.

Remarque 2 :

En regardant les courbes parcourues par le moment cinétique  $\vec{L}$ , sur l'ellipsoïde, nous nous apercevons qu'il n'y a pas de différences topologiques entre les courbes qui tournent autour de l'axe de moment d'inertie  $OC$  et celles qui tournent autour de l'axe  $OA$ .

Nous en déduisons, qu'il est possible d'inverser dans le repère  $(R_I)$  l'axe de moment d'inertie minimum  $OA$  et l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$  sans changer la formulation théorique de notre problème. Dans ce cas :

- Les variables  $h, G, H$  et le point  $\Gamma$  ne seront pas modifiées (cf. schéma [2.1]).
- L'équateur sera défini comme le plan formé par les deux vecteurs  $(\vec{OC}, \vec{OB})$ .
- La variable  $g_A$ , qui remplacera la variable  $g$ , sera l'angle entre le point  $\Gamma$ , (défini dans le Chapitre 2.2), et le noeud ascendant  $P_A$  du "nouvel équateur" sur le plan normal au moment cinétique.
- La variable  $(l_A)$ , qui remplacera la variable  $l$ , indiquera la position du vecteur  $\vec{OC}$  à partir du point  $P_A$ .
- Enfin, la variable  $L_A$  qui remplacera la variable  $L$  sera la projection du moment cinétique sur l'axe  $OA$ .  $L_A = G \cos J_A$  avec  $J_A$  l'angle entre le moment cinétique et l'axe  $OA$ .

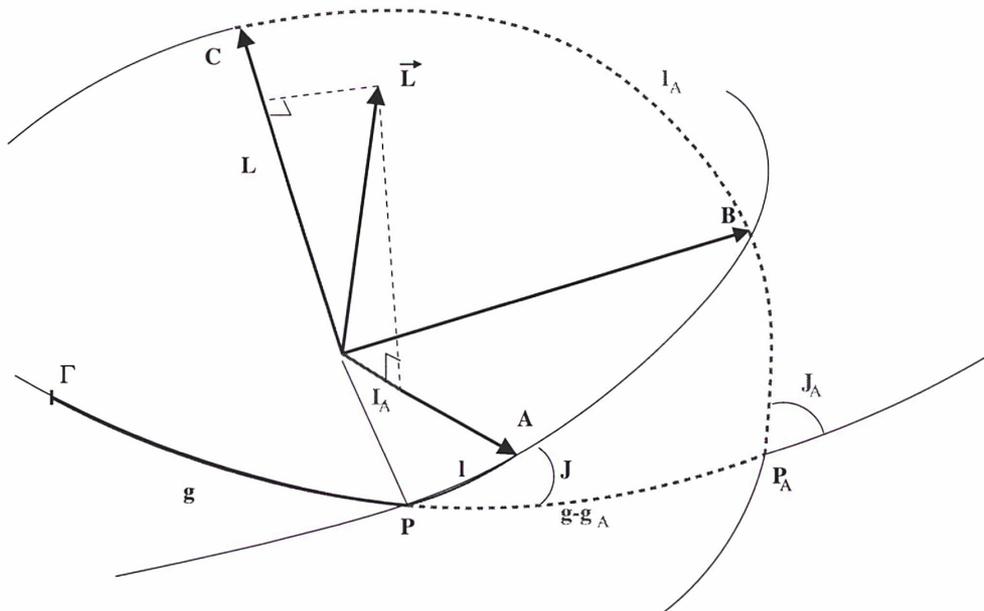


FIG. 2.8: Lien entre les variables  $(g, l, J)$  et  $(g_A, l_A, J_A)$ .

En gardant les notations du schéma [2.1], les nouvelles variables  $(g_A, l_A, J_A, L_A)$  sont représentées sur le graphique [2.8]. Le Hamiltonien du problème se notera de la même manière en inversant  $A$  et  $C$  dans la relation (2.3) et en remplaçant les variables comme nous venons de le spécifier ci-dessus. De même, nous pourrions définir :  $\frac{1}{D_A} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B}\right)\right)$  et :  $e_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) D_A$  qui remplaceront  $e$  et  $D$  dans la relation (2.4).

L'écriture, avec ces nouvelles variables, simplifiera l'étude du cas de la rotation le long de l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$  (développée dans la partie suivante). Cette remarque fait disparaître la différence que nous faisons entre mouvement de libration et mouvement de rotation. Suivant le groupe de variables que nous choisissons,  $(h, g, l, H, G, L)$  ou  $(h, g_A, l_A, H, G, L_A)$ , un mouvement de libration deviendra un mouvement de rotation et inversement. Nous continuerons cependant à appeler **rotation** le mouvement circulaire autour de l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$  et **libration** le mouvement circulaire autour de l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$ .

Remarque 3 :

L'angle  $J$  est l'écart angulaire entre le vecteur de moment cinétique et l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$  qui correspond au rayon minimal  $c$ .

Or, des corps comme la Lune et Mars sont particuliers :

- $A, B, C$  ont des valeurs voisines. Donc, le moment cinétique  $\vec{L}$  est voisin du vecteur de rotation instantanée  $\vec{\omega}$  d'après les coordonnées de  $\vec{L}$  dans le repère  $R_I$  ( cf. les équations (2.1)).
- Il ne s'agit pas de corps rigides mais élastiques. Leur rotation influe sur leur géométrie. Entre autres, un aplatissement se crée suivant la direction de l'axe de rotation.

Donc  $\vec{OC}$  est proche de  $\vec{L}$  et, par là même,  $J$  est petit.

Pour la Lune,  $J$  est d'environ 100 mas (millisecondes d'arc). Pour Mars, du fait que le mouvement du pôle n'a pas encore pu être observé,  $J$  n'est pas connu mais il doit être également très faible. Pour la Terre,  $J$  est de l'ordre de  $1.10^{-6}$  radian. Pour tous ces corps, la valeur de  $J$  est très nettement inférieure à la variable  $J_{II}$  de chacun d'entre eux, (la valeur  $J_{II}$  de la Lune, d'après la relation (2.5), est de  $53^\circ$ , et est la plus petite des trois corps).

Remarque 4 :

Une autre remarque a tendance à nous faire penser que l'angle  $J$  est faible pour la plupart des corps célestes, c'est le fait que la rotation autour de l'axe de moment d'inertie minimum  $A$  correspond à un maximum du Hamiltonien du mouvement de rotation libre  $F_0$ , ( $F_0^{Max} = \frac{G^2}{2A}$ ) tandis que la rotation autour de l'axe de moment d'inertie maximal  $C$  correspond à un minimum de  $F_0$ , ( $F_0^{Min} = \frac{G^2}{2C}$ ). Donc, dans le cas le plus classique d'une dissipation d'énergie, le système aura tendance à rapprocher son axe de rotation de l'axe  $OC$  et donc l'angle  $J$  de 0.

Le mouvement de libration libre n'est donc possible pour ces corps que si leur vitesse de dissipation d'énergie de rotation est particulièrement faible. Par "particulièrement faible", nous entendons que le temps  $\tau$  nécessaire à ces corps pour passer d'un état de rotation initiale quelconque à une rotation suivant l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$  est comparable à l'âge du système solaire (soit 4.5 milliard d'années). Il est vrai qu'une collision avec d'autres astéroïdes peut "re-initialiser" la rotation d'un corps céleste et reintroduire un mouvement de libration. Cependant, le temps estimé généralement pour une collision entre deux astéroïdes est particulièrement long et les chocs sont donc très peu probables.

L'estimation de cette période de dissipation  $\tau$  est particulièrement difficile et imprécise. Burns et Safronov, (1973), ont entrepris d'estimer la vitesse de dissipation d'énergie de rotation due aux efforts et déformations internes pour un astéroïde dont le mouvement de libration est de faible amplitude. Ils en ont déduit une estimation de la période de dissipation  $\tau$ . Il est vrai que pour de fortes amplitudes de libration, la vitesse de dissipation de l'énergie de rotation doit être plus importante que celle estimée par Burns et Safronov, mais leur expression de  $\tau$  sera cependant une borne supérieure à la période de dissipation des corps célestes. Ils expriment  $\tau$  de la manière suivante :

$$\tau = \frac{\mu Q}{\rho K_3^2 r^2 \omega^3} \quad (2.9)$$

Avec  $\mu$  représentant la rigidité du matériau composant l'astéroïde,  $Q$  le rapport entre l'énergie contenue dans une oscillation et l'énergie perdue à chaque oscillation,  $\rho$  est la densité moyenne de l'astéroïde,  $K_3^2$  un coefficient dépendant de la forme de l'astéroïde, ( $\simeq 0.01$  si c'est un corps proche de la sphère et  $\simeq 0.1$  si c'est un corps irrégulier),  $r$  le rayon moyen de l'astéroïde et  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de l'astéroïde. Nous remarquons entre autres que les corps dont le coefficient de triaxialité  $e$  est important ont leur constante  $K_3^2$  également importante et donc

ont une période de dissipation plus courte. Comme nous l'avons vu, ces mêmes corps ont leur probabilité  $P_{ll}$  d'avoir un mouvement de libration libre initialement supérieur à celle des astéroïdes ayant un coefficient  $e$  plus faible. Mais il semble que ce mouvement se dissipe d'autant plus vite d'après la relation (2.9). Les résultats obtenus par Burns et Safronov, avec différents astéroïdes pour  $\tau$ , étaient compris entre  $10^5$  et  $10^8$  ans. Il semblait donc impossible d'après leurs estimations, non seulement d'avoir un mouvement de libration libre, mais encore d'avoir un axe de rotation différent de l'axe  $OC$ .

Cependant beaucoup de corps découverts par la suite présentent une période de rotation beaucoup plus longue que celles observées jusqu'en 1973. En 1973, l'astéroïde dont la période de rotation était la plus longue était 532 Herculina, avec une période de 18.8 heures. L'observation de 4179 Toutatis, observé en 1993, révéla une période d'environ 7 jours. Or comme nous le voyons dans la relation (2.9), la vitesse de rotation est un paramètre très important dans la détermination de  $\tau$ . Cette remarque a été faite en 1994 par Harris (1994), qui a redéterminé cette période  $\tau$  en réactualisant les variables  $\mu$  et  $Q$ , en fixant  $K_3^2$  à une valeur intermédiaire de 0.03, et en rajoutant les nouveaux astéroïdes observés depuis 1973. Il a pu ainsi définir une relation simple entre la période de rotation  $P$  d'un astéroïde, son diamètre  $D$  et sa période de dissipation  $\tau$  :

$$P = 17D^{2/3}\tau^{1/3} \quad (2.10)$$

En positionnant chaque astéroïde dans le plan ( $\log P \times \log D$ ) et en traçant pour différentes valeurs de  $\tau$ , ( $10^8$  ans,  $10^9$  ans et  $4.5 * 10^9$  ans),  $\log P$  en fonction de  $\log D$  grâce à l'équation (2.10), Harris a pu identifier une douzaine d'astéroïdes qui peuvent avoir, encore maintenant, une rotation dont l'axe n'est pas parallèle à l'axe  $OC$ , (c'est l'ensemble des astéroïdes qui se trouvent dans la partie inférieure du graphique [2.9] délimité par la droite définie par  $\tau = 4.5 * 10^9$  ans). 4179 Toutatis, qui fait partie de ces astéroïdes, a été observé par Radar lors de son passage au voisinage de la Terre par Hudson et Ostro (1995). Son mouvement semble être, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, un mouvement de libration libre. Cela valide les estimations faites par Harris pour cette période  $\tau$ , et prouve de manière observationnelle l'existence de tels mouvements et donc l'intérêt de leur étude théorique plus approfondie.

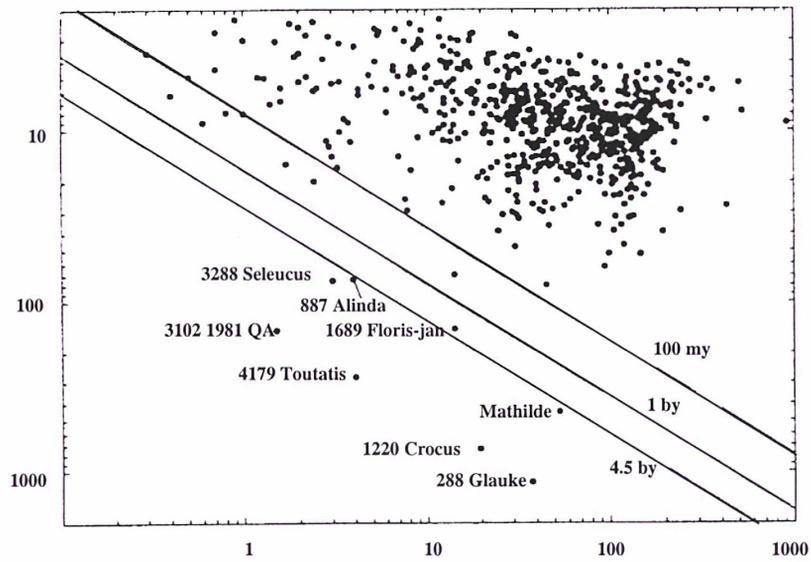


FIG. 2.9: Graphique ( $\log, \log$ ) de Harris (1994), présentant la position des différents astéroïdes existant en fonction de leur diamètre  $D$  et de leur période de rotation  $P$ .

\* \* \*



## 2.4 Résolution à l'aide des intégrales elliptiques

La méthode que nous utilisons pour résoudre analytiquement les équations du mouvement de rotation libre d'un corps rigide consiste, comme dans le premier chapitre, à remplacer, grâce à un changement de variables canoniques, le moment  $L$  par l'action qui lui est associée et que nous noterons  $\tilde{L}$ . Cette méthode de résolution du problème de la rotation libre d'un corps rigide a déjà été entreprise par Kinoshita dans les années 1970 (cf. (Kinoshita, 1972) et (Kinoshita, 1992)). Nous nous en inspirons. La différence essentielle entre le Hamiltonien du problème de la rotation libre d'un corps rigide, (défini par la relation (2.3) ou (2.4)), et le Hamiltonien du pendule, (défini par la relation (1.1)), est la présence supplémentaire de la variable  $G$ . Mais, comme nous l'avons remarqué précédemment,  $G$  est une constante du mouvement, ( $g$  n'apparaissant pas dans le Hamiltonien  $F_0$ ).

Pour faciliter les calculs, nous introduisons des changements de variables intermédiaires à l'aide de la fonction caractéristique  $S(g, l, \alpha_1, \alpha_2)$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes du mouvement. Nous prenons par exemple :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= F_0 \\ \alpha_2 &= \left( \frac{\partial F_0}{\partial g} \right) = G\end{aligned}$$

Par définition même de  $S$ , nous contraignons cette fonction ainsi :

$$\begin{aligned}G &= \left( \frac{\partial S}{\partial g} \right) = \alpha_2 \\ L &= \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right) \\ u_1 &= \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \right) \\ u_2 &= \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \right)\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire le Hamiltonien sous la forme suivante qui correspond à l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$F_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) \left( \left( \frac{\partial S}{\partial g} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)^2 \right) + \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)^2}{2C} = \alpha_1$$

(2.11)

La résolution de cette équation aux dérivées partielles, et donc l'existence même de la fonction caractéristique  $S$ , va assurer, d'une part, une transformation canonique entre les variables  $(g, l, G, L)$  et  $(u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2)$ , et, d'autre part, l'intégration possible du système<sup>1</sup>.

Grâce à l'équation de Hamilton-Jacobi (2.11), nous voyons que nous pouvons exprimer  $\frac{\partial S}{\partial l}$  uniquement en fonction de la variable  $l$  et des constantes  $\alpha_1 = F_0$  et  $\alpha_2 = G = \frac{\partial S}{\partial g}$ . Nous pouvons donc obtenir la fonction  $S(g, l, \alpha_1, \alpha_2)$ , à une constante près, par l'intégration de  $\frac{\partial S}{\partial l}$  par rapport à la variable  $l$ . Nous obtenons la relation suivante :

$$S = \int_{\pi/2}^l \sqrt{\frac{\gamma - e\alpha_2^2 \cos(2l)}{1 - e \cos 2l}} dl + \alpha_2 g \quad (2.12)$$

Avec  $\gamma$  une constante égale à  $(2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{A} + \frac{1}{B})\alpha_2^2)D$

Les dérivées partielles de  $S$  par rapport à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} = 2D \frac{\partial S}{\partial \gamma} \\ u_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

D'autre part, du fait que le Hamiltonien  $F_0$  dépend uniquement du moment  $\alpha_1$  ( $F_0 = \alpha_1$ ), nous pouvons également écrire  $u_1$  et  $u_2$  à l'aide des constantes d'intégration  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_1} \times t + \beta_1 = (t + \beta_1) \\ u_2 &= \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_2} \times t + \beta_2 = \beta_2 \end{aligned}$$

Nous définissons un autre groupe de variables canoniques  $(\bar{g}, \bar{l}, \bar{G}, \bar{L})$ , dont les moments  $\bar{G}$  et  $\bar{L}$ , associés respectivement à  $g$  et  $l$ , sont encore des constantes du mouvement :  $\bar{G} = G$  et  $\bar{L} = G \cos \bar{J}$  où  $\bar{J}$  est la valeur de  $J$  quand  $l = \pi/2$  (ou encore la valeur minimale de  $J$  d'après le graphique [2.10]). Nous voyons que, quelle que soit la courbe d'isoénergie, celle-ci coupe la droite  $l = \pi/2$ . La variable  $\bar{J}$  est donc toujours définie.

---

<sup>1</sup>Pour la démonstration du théorème de Hamilton-Jacobi voir par exemple Chazy (1953).

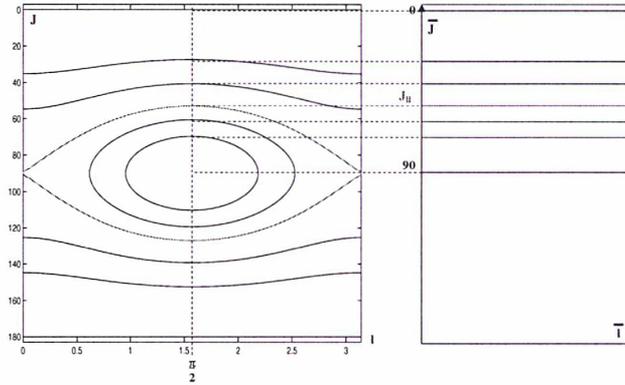


FIG. 2.10: Lien entre l'espace  $(l \times J)$  et  $(\bar{l} \times \bar{J})$ .

Avec ces variables, le Hamiltonien  $F_0$  s'écrit très simplement en fonction uniquement des nouveaux moments. Pour obtenir l'expression de  $F_0$ , il suffit de remplacer  $l$  par  $\pi/2$  dans la relation définissant  $F_0$  en fonction des variables d'Andoyer (2.3) :

$$F_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 \bar{J}}{A} + \frac{\cos^2 \bar{J}}{C} \right) \bar{G}^2 \quad (2.14)$$

De plus, nous savons que pour la séparatrice passant par des  $J < \pi/2$ ,  $\bar{J}$  est égale à  $J_u$  dont nous avons déterminé le cosinus :  $\cos J_u = \sqrt{\frac{2e}{1+e}}$ .

- Si  $\bar{J} < J_u$  ou  $\bar{J} > (\pi - J_u)$ , alors, le mouvement est une rotation.
- Si  $J_u < \bar{J} < (\pi - J_u)$ , alors, le mouvement est une libration.

Dans le cas d'axisymétrie, c'est à dire dans le cas où  $A = B$ , ou encore où  $e = 0$ , nous voyons, toujours grâce à la relation (2.3), que le Hamiltonien  $F_0$  s'écrit avec les variables d'Andoyer sous une forme identique à (2.14), où  $J$  remplace  $\bar{J}$ . Nous en déduisons que quand  $e = 0$ ,  $\bar{L} = L$ .

Remarque 1 : Nous déduisons de la symétrie par rapport à l'axe  $J = 90^\circ$  des diagrammes des phases [2.4] et [2.5], respectivement pour Mars et pour la Lune, que l'étude peut être restreinte au cas où  $J$  est compris entre  $[0^\circ, 90^\circ]$ . En effet, le cas où  $J$  est compris entre  $[90^\circ, 180^\circ]$  peut se ramener au cas précédent par le changement de variables canoniques :  $L_j = -L = G \cos j$  et  $l = -l$ , où  $j = 180^\circ - J$ . A partir de maintenant on prendra  $J$  compris dans l'intervalle  $[0^\circ, 90^\circ]$ .

En se rappelant que  $\alpha_1 = F_0$  et  $\alpha_2 = G = \bar{G}$  et en s'aidant des relations (2.13) et (2.14), les variables angulaires  $\bar{g}$  et  $\bar{l}$ , associées respectivement aux moments  $\bar{G}$  et  $\bar{L}$ ,

sont déterminées par les dérivées partielles suivantes de  $S(g, l, \bar{G}, \bar{L})$  :

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \frac{\partial S}{\partial \bar{G}} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{G}} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A} \bar{G}(t + \beta_1) + \beta_2 \\ \bar{l} &= \frac{\partial S}{\partial \bar{L}} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{L}} = \frac{\bar{L}(1+e)}{D}(t + \beta_1)\end{aligned}$$

Cependant, si nous gardons ces moments, des termes mixtes séculaires vont apparaître dans le développement des perturbations (Kinoshita, 1972). Pour éviter cette complication, nous introduisons, comme nous l'avons fait dans le premier chapitre, les variables d'action  $\tilde{G}$  et  $\tilde{L}$  comme nouveaux moments, ( $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$  étant respectivement leurs variables angulaires associées). Les variables d'action s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= G \\ \tilde{L} &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{\gamma - eG^2 \cos(2l)}{1 - e \cos 2l}} dl\end{aligned}\quad (2.15)$$

$\gamma$  pouvant s'exprimer en fonction de  $\bar{L}$  et  $G$  :  $[(1+e)\bar{L}^2 - eG^2]$ . Dans le cas où  $e = 0$ , les actions  $\tilde{G}$  et  $\tilde{L}$  sont égales aux variables d'Andoyer  $G$  et  $L$  car d'après la relation (2.15),  $\tilde{L} = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\bar{L}^2} dl = \bar{L} = L$ .

En s'inspirant de la relation liant, dans le problème képlerien, l'anomalie excentrique à l'anomalie vraie, Kinoshita définit une variable intermédiaire  $\delta$  liant la variable d'Andoyer  $l$  au coefficient de triaxialité  $e$  de la manière suivante :

$$\cos 2l = \frac{\cos 2\delta + e}{1 + e \cos 2\delta}\quad (2.16)$$

En nous servant de la tangente des angles moitiés, la relation devient :  $\tan l = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \delta$ . Nous en déduisons l'égalité entre les formes différentielles  $dl$  et  $d\delta$  :  $dl = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos 2\delta} d\delta$ .

En remplaçant  $l$  par  $\delta$  dans l'équation (2.15),  $\tilde{L}$  peut alors s'exprimer à l'aide des variables  $\bar{L}$ ,  $\bar{G}$  et  $\delta$  de la manière suivante :

$$\tilde{L} = \frac{\bar{L}}{2\pi} \sqrt{(1-e^2)} \oint \frac{\sqrt{(1-k^2 \cos^2 \delta)}}{1+e \cos 2\delta} d\delta\quad (2.17)$$

Avec :

$$\boxed{k^2 = \left(\frac{2e(\bar{b}-1)}{1-e}\right)} \text{ et } \boxed{\bar{b} = \frac{\bar{G}^2}{\bar{L}^2}}, \text{ (soit en fonction de } \bar{J}, \bar{b} = \cos^{-2} \bar{J}\text{).}$$

Remarque 2 : Jusqu'ici, toutes les relations que nous établissions étaient valables aussi bien dans le cas de la rotation libre que dans le cas de la libration libre. Cependant le cas qui nous intéresse le plus est celui de la rotation libre. En effet, nous savons que pour la plupart des corps célestes, il ne peut y avoir longtemps un mouvement de libration libre du fait que l'angle  $J$  a tendance à tendre vers 0 (voir les Remarques 3 et 4 de la Partie précédente). Nous continuons donc cet exposé en nous plaçant uniquement dans le cas de la rotation libre.

Remarque 3 : D'autre part, comme nous l'avons remarqué à la fin de la partie (2.2), il est possible moyennant l'inversion des axes de moment d'inertie  $OA$  et  $OC$  dans le repère  $R_I$  de définir de nouveaux angles  $(g_A, l_A, J_A)$  pour lesquels le mouvement de libration autour de l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$  devient un mouvement de rotation. Tous les calculs qui vont suivre peuvent donc être transposés au cas des librations en remplaçant les variables  $(g, l, J, A, C, e, D)$  respectivement par les variables  $(g_A, l_A, J_A, C, A, e_A, D_A)$ . Nous traiterons donc, ce faisant, l'ensemble du problème (rotation libre et libration libre).

Dans le cas défini par la remarque 2, nous faisons le changement de variables suivant dans l'intégrale (2.17) :

$$\delta = am(u) + \frac{\pi}{2} \quad (2.18)$$

où  $am$  est une fonction de Jacobi appelée : la "fonction amplitude" et définie dans l'annexe I. Inversement, l'expression de  $u$  en fonction de  $\delta$  est d'après la définition de  $am$  :

$$u = \mathcal{F}((\delta - \pi/2), k) = \int_{\pi/2}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \delta}} d\delta \quad (2.19)$$

où  $\mathcal{F}$  est l'intégrale elliptique de première espèce déjà utilisée dans le Chapitre 1 et également définie dans l'annexe I.

L'intégrale (2.17) peut alors s'écrire à l'aide des intégrales elliptiques de premières et secondes espèces par l'intermédiaire de la fonction de Heuman  $\Lambda_0$  :

$$\boxed{\tilde{L} = \bar{G}\Lambda_0(\xi, k)} \quad (2.20)$$

La définition de la fonction  $\Lambda_0$  ainsi que la démonstration de la relation ci-dessus sont développées dans les annexes I et II. La variable  $\xi$  est égale à  $(\pi/2 - \bar{J})$ .

A partir de ces relations, nous voulons donner l'expression de  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{g}$  et de la variable  $u$  en fonction du temps  $t$  et l'expression du moment cinétique  $\tilde{L}$ , dans le repère des axes principaux d'inertie  $R_I$ , en fonction de  $u$  et  $\tilde{J}$ .

- Expression de  $\tilde{l}$  et  $\tilde{g}$  en fonction du temps  $t$ .

En considérant  $\tilde{G}$  comme une constante, nous pouvons regarder  $F_0$  comme un Hamiltonien à un degré de liberté. Nous savons donc, d'après le sous-chapitre 1.4, que le Hamiltonien  $F_0$  va s'exprimer uniquement en fonction des moments  $\tilde{G}$  et  $\tilde{L}$ . Cela implique que les variables  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$  sont des applications affines du temps.

Nous déterminons leur moyen mouvement constant respectivement  $n_{\tilde{l}}$  et  $n_{\tilde{g}}$  :

$$\begin{aligned} n_{\tilde{l}} &= \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{L}} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tilde{L}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{L}} \\ n_{\tilde{g}} &= \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{G}} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tilde{L}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{G}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tilde{G}} \end{aligned}$$

Du fait que la fonction permettant le passage de  $(\bar{G}, \bar{L})$  à  $(\tilde{G}, \tilde{L})$  est un difféomorphisme, que  $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{G}} = 1$  et  $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{L}} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{L}} = 0$ , on dispose des relations :  $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}} = \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}}\right)^{-1}$  et  $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{G}} = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{G}}$ . D'autre part, en utilisant la relation (2.14) liant  $\bar{G}$ ,  $\bar{L}$  et  $F_0 = \alpha_1$ , les moyens mouvements deviennent :

$$n_{\tilde{l}} = \frac{\bar{L}(1+e)}{D} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}}\right)^{-1} \boxed{= \frac{\pi}{2\mathcal{K}D} \sqrt{(1-e^2)\bar{L}}} \quad (2.21)$$

$$n_{\tilde{g}} = \frac{1}{A} \bar{G} - n_{\tilde{l}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{G}} \boxed{= \frac{1}{A} \bar{G} - n_{\tilde{l}} \Lambda_0 + \frac{\bar{L}^2}{D\bar{G}}(1+e)}$$

Les expressions de  $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{G}}$  et  $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}}$  sont déterminées dans l'annexe II.  $\mathcal{K}$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce de paramètre  $k$ . Nous avons déjà utilisé  $\mathcal{K}$  dans le premier chapitre et sa définition est donnée dans l'annexe I. Si nous voulons exprimer  $\tilde{l}$  et  $\tilde{g}$  avec  $n_{\tilde{l}}$  et  $n_{\tilde{g}}$ , on revient à la fonction caractéristique  $S$  et on a :

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{L}} = n_{\tilde{l}}(t + \beta_1) = n_{\tilde{l}} \times t \\ \tilde{g} &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{G}} = n_{\tilde{g}}(t + \beta_1) + \beta_2 = n_{\tilde{g}} \times t + \tilde{g}_0 \end{aligned}$$

Nous souciant de simplifier les expressions, nous choisissons l'instant  $t = 0$  tel que  $\tilde{l} = 0$  et nous notons  $\tilde{g}_0$  la valeur de  $\tilde{g}$  à cet instant. Cela implique que  $\beta_1 = 0$  et  $\beta_2 = \tilde{g}_0$ .

- Expression de  $u$  en fonction du temps  $t$

En dérivant la relation (2.12) par rapport à  $\gamma$  et en remplaçant dans cette expression  $l$  par  $\delta$  grâce à la relation (2.16), puis  $\delta$  par  $u$  grâce à la relation (2.19), nous remarquons que  $\partial S/\partial\gamma$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial\gamma} = \frac{1}{2\bar{L}\sqrt{(1-e^2)}} \int_{\pi/2}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2\delta}} d\delta = \frac{1}{2\bar{L}\sqrt{(1-e^2)}} u \quad (2.22)$$

Et, en utilisant la relation (2.13), nous arrivons à exprimer la variable  $u$  en fonction du temps  $t$  :

$$u = \sqrt{1-e^2} \frac{\bar{L}}{D} (t + \beta_1) = \frac{G}{D} \cos J\sqrt{1-e^2} \times t + u_0$$

En utilisant la valeur de la relation (2.21) pour  $n_{\tilde{l}}$ ,  $u$  s'exprime à l'aide de  $\tilde{l}$  de la manière suivante :

$$u = \frac{2\mathcal{K}}{\pi} \tilde{l} + u_0 \quad (2.23)$$

où  $u_0$  est la valeur de  $u$  à  $t = 0$ . Si nous prenons, comme précédemment,  $\beta_1 = 0$ , alors  $u_0 = 0$ . Cela implique, d'après les relations (2.16) et (2.18), que  $l = 0$  à l'instant  $t = 0$ . Nous noterons dans la suite  $n_u$  la dérivée de  $u$  par rapport au temps  $t$ .

- Expression du moment cinétique  $\vec{L}$  en fonction de  $u$  et  $\vec{J}$

En égalisant la relation (2.3) et la relation (2.14), on peut exprimer  $L$  en fonction de  $\bar{L}$  et  $l$  :  $L = \bar{L} \sqrt{\frac{(1+e-e\bar{b})-e\bar{b}\cos 2l}{1-e\cos 2l}}$ . A partir de cette relation, les coordonnées du moment cinétique  $\vec{L}$  dans le repère  $R_I$  (cf. relations (2.8)), peuvent s'écrire en remplaçant  $l$  par  $\delta$  puis  $\delta$  par  $u$  à l'aide de la formule (2.16) et (2.18) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
G \cos J = L = L_C = \bar{L} \left[ \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\delta)} \right] &= G \cos \bar{J} \operatorname{dn}(u) \\
G \sin J \sin l = L_A = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l &= G \sin \bar{J} \operatorname{cn}(u) \\
G \sin J \cos l = L_B = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l &= -G \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \bar{J} \operatorname{sn}(u)
\end{aligned}$$

(2.24)

Les fonctions  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  et  $\operatorname{dn}$  sont des fonctions de Jacobi définies dans l'annexe I. Par définition,  $\operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u)$  et  $\operatorname{dn}(u)$  sont des fonctions périodiques de même période. Leur période est égale à  $4\mathcal{K}/n_u$ . Ces trois dernières relations permettent d'exprimer les variables  $l$  et  $J$  en fonction des variables  $\bar{J}$  et  $u$  et de la constante  $e$ .

Avec l'ensemble des ces relations, nous avons tous les éléments pour déterminer  $J$  et  $l$  en fonction du temps  $t$  par l'intermédiaire de  $e$ , de  $u$  et de  $\bar{J}$ . Nous pouvons remarquer une chose particulièrement importante pour la suite : le moyen mouvement de  $l$ , que nous noterons dans la suite  $n_l$ , correspond à la fréquence  $n_{\bar{l}}$ .

$$\boxed{n_l = n_{\bar{l}}}$$

En effet, d'après les relations (2.24), la période de  $\sin l$  égale à  $2\pi/n_l$ , et la période de  $\operatorname{cn}(u)$  égale à  $4\mathcal{K}/n_u$ , sont les mêmes. Or, d'après la relation (2.23) :  $4\mathcal{K}/n_u = 2\pi/n_{\bar{l}}$ . Donc  $n_l = n_{\bar{l}}$ .

Nous ne nous sommes, cependant, pas encore intéressés à ce qui se passe pour la variable d'Andoyer  $g$ . En effet, nous ne nous sommes penchés, jusqu'ici, que sur le mouvement de l'axe de moment cinétique qui est, comme nous l'avons vu dans la Partie 2.3, indépendant de cette variable.

- $\boxed{\text{Expression de } g \text{ en fonction du temps } t.}$

Pour l'expression de  $g$ , nous revenons à l'équation (2.13) :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2 = \tilde{g}_0$$

En utilisant la définition de  $S$  par une intégrale, (2.12), nous exprimons  $\partial S/\partial \alpha_2$  ainsi :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) GD \frac{\partial S}{\partial \gamma} - eG \int_{\pi/2}^l \frac{\cos 2l}{\sqrt{\gamma - e\alpha_2^2 \cos 2l} \sqrt{1 - e \cos 2l}} dl + g$$

En remplaçant  $l$  par  $\delta$  dans cette relation et en utilisant (2.13), nous pouvons exprimer  $g$  en fonction du temps  $t$  :

$$g = 2 \frac{GD}{C} \frac{\partial S}{\partial \gamma} - \frac{G(1+e)}{\bar{L}\sqrt{1-e^2}} \int_{\pi/2}^{\delta} \frac{1}{(1+\alpha \cos^2 \delta) \sqrt{1-k^2 \cos^2 \delta}} d\delta + \tilde{g}_0$$

où  $\alpha = \left(\frac{2e}{1-e}\right)$ . En utilisant l'intégrale elliptique de troisième espèce,  $\Pi$ , décrite dans l'annexe I, et en remplaçant  $\partial S/\partial \gamma$  à l'aide de l'expression (2.13), nous obtenons la relation suivante pour  $g$  :

$$g = \frac{G}{C} \times t - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \frac{G}{n_u} \Pi(\text{am}(u), \alpha, k) + \tilde{g}_0 \quad (2.25)$$

Nous voyons qu'à l'instant  $t = 0$ ,  $g = \tilde{g}_0$  car  $\Pi(0, \alpha, k) = 0$ . D'autre part, nous pouvons remarquer que le moyen mouvement de  $g$ , que nous noterons  $n_g$ , est la fréquence  $n_{\tilde{g}}$ . En effet,  $n_g$  peut s'écrire, grâce à l'expression de  $\Pi(\pi/2, \alpha, k)$  en fonction de la fonction de Heuman  $\Lambda_0$  (cf. annexe II), ainsi :

$$n_g = \frac{G}{C} - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \frac{2Gn_l}{\pi n_u} \left[ \mathcal{K} \sin^2 \bar{J} - \frac{\pi}{2} \Lambda_0(\xi, k) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cos \bar{J} \right]$$

En nous servant de la relation (2.23) liant la variable  $u$  à  $\tilde{l}$ , nous exprimons  $n_u$  sous la forme  $n_u = \frac{2\mathcal{K}}{\pi} n_{\tilde{l}}$  et obtenons pour la variable  $n_g$  la valeur suivante :

$$n_g = \frac{G}{A} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \frac{\bar{L}^2}{G} - \frac{\bar{L}}{DK} \frac{\pi}{2} \sqrt{1-e^2} \Lambda_0(\xi, k)$$

Nous avons vu, (première relation de (2.21)), que  $n_l = \frac{\pi \bar{L}}{2\mathcal{K}D} \sqrt{(1-e^2)}$ . En comparant  $n_g$  avec la deuxième relation de (2.21) nous voyons que  $n_g$  et  $n_{\tilde{g}}$  sont identiques : le moyen mouvement de  $g$  est donc égal à la fréquence angulaire de  $\tilde{g}$ .

$$\boxed{n_g = n_{\tilde{g}}}$$

Remarque 4 : Nous venons donc de décrire entièrement le mouvement de rotation libre d'un corps rigide dans le cas où  $\bar{J} < J_u$ , (c'est le cas d'une rotation autour de l'axe de moment d'inertie maximal,  $OC$ ). Comme nous le précisons dans la Remarque 3, nous pouvons transposer l'ensemble de ces résultats et les faire coïncider avec le cas de la libration, (rotation autour de l'axe de moment d'inertie minimal), en utilisant un nouveau jeu de variables.

Les résultats dans chacun de ces deux cas :  $\bar{J} < J_u$  et  $90^\circ < \bar{J} < J_u$ , sont résumés dans le tableau page 93. Pour avoir les résultats dans les cas où  $\bar{J} > 90^\circ$ , il suffit, d'après la Remarque 1, de remplacer dans le tableau page 93 :  $l$  par  $-l$ ,  $L$  par  $-L$  et  $J$  par  $180^\circ - \bar{J}$ .

Les moyens mouvements de  $l$  et  $g$  en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

L'intérêt majeur de cette étude est la détermination analytique des fréquences des variables  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$  données par les relations (2.21). En effet, comme nous venons de le montrer, ces fréquences sont égales respectivement aux moyens mouvements de  $g$  et de  $l$ .

D'après (2.21), les valeurs de  $n_l$  et  $n_g$  dépendent de trois coefficients représentant des caractéristiques physiques du corps ( $S$ ) : par exemple, les moments d'inertie principaux  $A$ ,  $B$ , et  $C$ . Elles dépendent également du moment cinétique  $\vec{L}$  de ( $S$ ) par l'intermédiaire de sa norme  $G$  et de l'angle  $\bar{J}$ .

Cette dépendance entre les moyens mouvements de  $l$  et de  $g$ , et l'angle  $\bar{J}$  est importante. Elle correspond dans le cas du pendule à la dépendance entre la période du pendule et l'angle maximum  $\Theta_0$  de l'oscillation. Souvent, comme nous l'avons précisé, en astronomie, beaucoup de corps observés présentent un angle  $\bar{J}$  peu important et donc la valeur de  $n_g$  et  $n_l$  quand  $\bar{J} = 0$  est une bonne approximation des fréquences réelles de la rotation de ces corps. Mais nous avons vu dans la Remarque 4 du chapitre précédent que, pour certains corps célestes, on pouvait s'attendre à observer, (et parfois même cela a été observé), un angle  $\bar{J}$  important. Dans ces cas, les astronomes ont souvent recours à l'intégration numérique pour estimer ces fréquences. Or, comme nous l'avons vu, il existe une formulation analytique directe de ces fréquences quelle que soit la valeur de  $\bar{J}$  (cf. relations (2.21)).

$n_g$  et  $n_l$  dépendent également de la variable  $G$  mais, pour ces moyens mouvements,  $G$  n'est qu'un facteur de proportionnalité, (ce qui est logique d'après la Remarque 1 du Chapitre 2.3).

Par ailleurs, deux paramètres physiques de ( $S$ ), indépendants, suffisent pour notre étude, le troisième n'étant plus, comme  $G$ , qu'un coefficient de proportionnalité. On peut s'en convaincre facilement en multipliant par  $C$  la relation (2.3) définissant le Hamiltonien  $F_0$  de notre problème :  $F_0$  est alors inversement proportionnel à  $C$ , et dépend des deux rapports  $\frac{C}{A}$  et  $\frac{C}{B}$  qui peuvent s'exprimer en fonction de  $e$ , le coefficient de triaxialité, et de  $\frac{C}{D}$ .

Nous choisissons donc de normaliser les fréquences  $n_l$  et  $n_g$  par  $\frac{C}{G}$  et de les présenter respectivement sur les graphiques [2.11] et [2.12]. Nous noterons ces deux fréquences

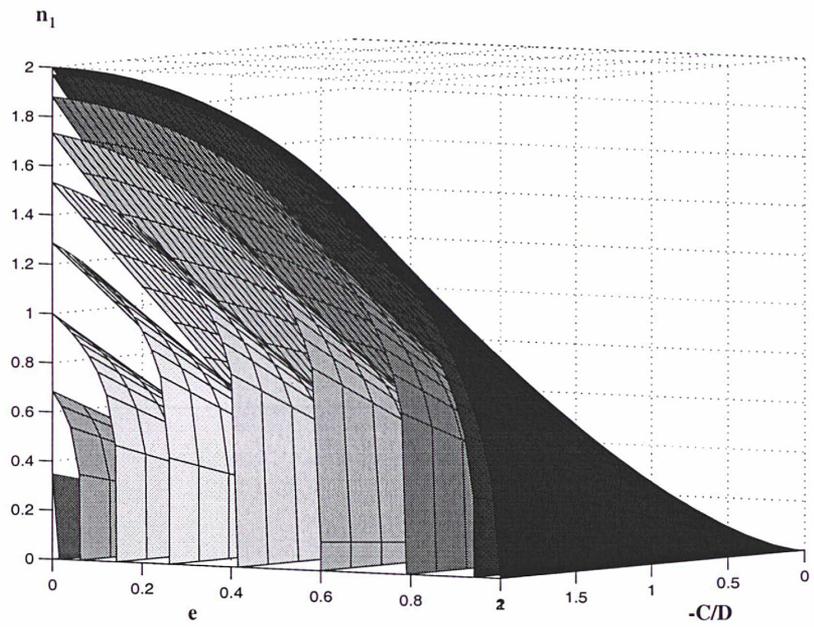


FIG. 2.11: *Fréquences  $n_1$ .*

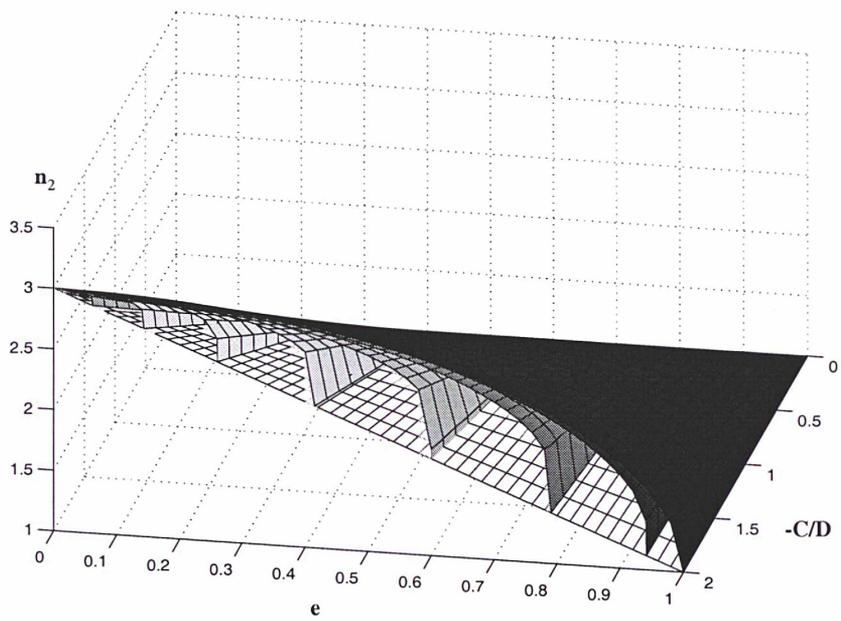


FIG. 2.12: *Fréquences  $n_2$ .*

normalisées :  $n_1 = -n_l \frac{C}{G}$  et  $n_2 = n_g \frac{C}{G}$ . Elles ne dépendent plus que de deux paramètres physiques,  $e$  et  $\frac{C}{D}$ , et de l'angle  $\bar{J}$ . En fonction de ces coefficients, elles s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{\pi}{2} \left[ \frac{C}{D} \right] \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mathcal{K}} \cos \bar{J} \\ n_2 &= 1 + n_1 \Lambda_0 - \left[ \frac{C}{D} \right] (1+e) \sin^2 \bar{J} \end{aligned}$$

L'axe des abscisses des graphiques [2.11] et [2.12] représente le coefficient de triaxialité  $e$  variant entre  $[0, 1]$ . L'axe des ordonnées représente le coefficient  $\left(-\frac{C}{D}\right)$  variant dans l'intervalle  $[0, +\infty]$ , que nous représentons sur les graphiques dans l'intervalle  $[0, 2]$ . Les différentes surfaces correspondent à la valeur de la fréquence  $n_1$  ou  $n_2$  pour différentes valeurs de  $\bar{J} : 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$ .

Remarque 5 : Ces graphiques peuvent également être utilisés pour décrire le cas de la libration. A ce moment là, l'axe des abscisses correspond à  $e_A$ , l'axe des ordonnées à  $\left(-\frac{A}{D_A}\right)$ , les surfaces du premier graphique représentent la fréquence  $n_{1A} = -n_{lA} \frac{A}{G}$  suivant différentes valeurs de  $\bar{J}_A$ , et les surfaces du deuxième graphique représentent la fréquence  $n_{2A} = n_{gA} \frac{A}{G}$  suivant différentes valeurs de  $\bar{J}_A$ .

En faisant des sections de ces graphiques pour  $\frac{C}{D}$  constant ou pour  $e$  constant, nous voyons la modification des fréquences en fonction d'un seul des paramètres physiques.

- Pour  $e$  constant, ( $e = 0.02$  sur le graphique [2.13] et  $e = 0.1$  sur le graphique [2.15]), nous voyons que les fréquences  $n_1$  et  $n_2$  sont proportionnelles à  $\frac{C}{D}$ . D'autre part les surfaces n'apparaissent plus toutes. En effet, pour certaines valeurs de  $\bar{J}$ , ( $\bar{J} > J_{ll}(e = 0.02) = 78.6^\circ$  pour le graphique [2.13] et  $\bar{J} > J_{ll}(e = 0.1) = 64.8^\circ$  pour le graphique [2.15]), la valeur de  $e$  que nous avons fixée n'est jamais atteinte.
- La section pour  $\frac{C}{D}$  constant, ( $\frac{C}{D} = -1$  sur les graphiques [2.14] et [2.16]), est plus intéressante. Elle permet d'approximer rapidement les moyens mouvements de la rotation libre de tout corps céleste en fonction de sa triaxialité  $e$  et de l'angle  $\bar{J}$ . En effet, tout corps céleste va se positionner sur chacun de ces graphiques en un unique point image si on connaît les deux quantités qui caractérisent sa rotation, c'est à dire  $e$  et  $\bar{J}$ . Nous pouvons déduire  $e$ , le coefficient de triaxialité de ce corps, de sa géométrie et de son potentiel gravitationnel ;  $\bar{J}$  peut, lui, être déduit de l'observation de l'axe instantané de rotation de ce corps. On obtiendra le moyen mouvement de  $l$ , en multipliant l'ordonnée du point image dans le graphique [2.14], par  $\frac{G}{C}$ . On obtiendra le moyen mouvement de  $g$ , en multipliant l'ordonnée du point image dans le graphique [2.16], par  $\frac{G}{C}$  et en ajoutant  $\frac{G}{C} - \frac{G}{D}$ .

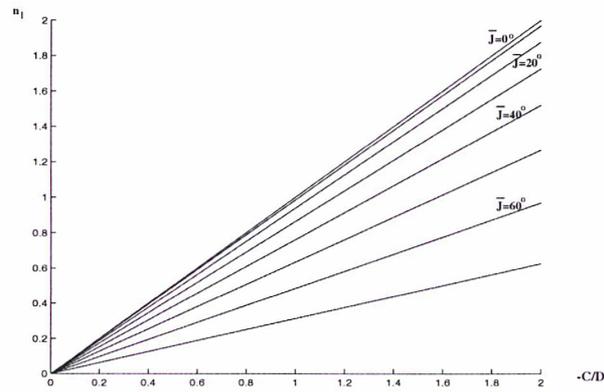


FIG. 2.13: Fréquence  $n_1$  en fonction de  $\left(-\frac{C}{D}\right)$  et  $\bar{J}$  pour  $e = 0.02$ .

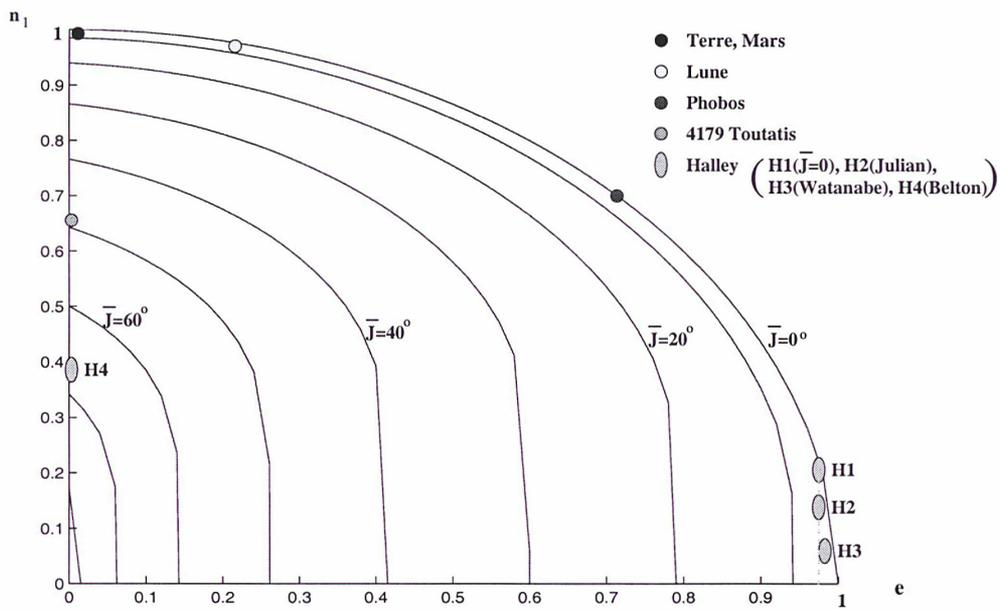


FIG. 2.14: Fréquence  $n_1$  en fonction de  $e$  et  $\bar{J}$  pour  $\frac{C}{D} = -1$ .

Remarque 6 : Le rapport  $\frac{G}{C}$  est très proche pour Mars ou la Lune de la norme de la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$ . En effet, à l'instar de beaucoup de corps célestes, ils ont leur axe de rotation très proche de l'axe  $OC$  et donc la norme de leur moment cinétique s'écrit, d'après la relation (2.1) :  $G \simeq C\omega$ .

Le graphique [2.14], ( $n_1$  en fonction de  $e$  et  $\bar{J}$ ) est l'équivalent en fréquence du graphique [1.4] que nous avons tracé pour le pendule en période, (période d'oscillation du pendule en fonction de l'angle maximum de cette oscillation).

La courbe d'équation  $n_2 = 2 - e$  sur le graphique [2.16], (tracée en rouge), correspond à la valeur du moyen mouvement de  $g$  dans le cas où le système tend vers la séparatrice entre mouvement de libration et mouvement de rotation. Dans ce cas-là, logiquement, comme nous l'observons sur le graphique [2.14], le moyen mouvement de  $l$  s'annule.

Nous avons représenté sur ces graphiques les positions correspondant au cas de Mars, de la Lune, de Phobos, (satellite de Mars), de 4179-Toutatis et de Halley pour différents modèles notés  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  que nous expliciterons plus tard. Pour ces trois derniers corps, Phobos, Toutatis et Halley, nous avons calculé le coefficient de triaxialité à partir de leurs trois rayons principaux, en supposant qu'il s'agissait d'ellipsoïdes de densité uniforme. Soit :

$$\begin{cases} A = \frac{M}{5} (b^2 + c^2) & B = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) & C = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \\ e = \frac{\frac{1}{2}(b^4 - a^4)}{c^4 - \frac{1}{2}(b^4 + a^4)} \end{cases} \quad (2.26)$$

En prenant les valeurs suivantes des rayons principaux de ces trois corps, nous pouvons déterminer tous les paramètres liés à la géométrie de ces corps :

Corps céleste	$a(\text{km})$	$b(\text{km})$	$c(\text{km})$	$e$	$e_A$	$\frac{C}{D}$	$\frac{A}{D_A}$	$J_{ll}$ ( $^\circ$ )	$P_{ll}$
Phobos <sup>1</sup>	14	11	10	0.719	0.0889	-0.25	0.2781	23.85	0.7351
4179-Toutatis <sup>2</sup>	4.26	2.03	1.70	0.947	0.0136	-1.12	0.676	9.44	0.8951
P/Halley <sup>3</sup>	16	8	7	0.948	0.0136	-0.9405	0.6382	9.43	0.8952

TAB. 2.1: Paramètres physiques de Phobos, 4179-Toutatis et P/Halley

Pour Mars et la Lune, les paramètres caractéristiques sont définis dans le chapitre suivant dans les tableaux [2.4], [2.5], [2.6] et [2.7].

<sup>1</sup>d'après l'article de Chapront-Touzé, (1990)

<sup>2</sup>d'après l'article de Hudson et Ostro, (1995)

<sup>3</sup>d'après l'article de Sagdeev et al., (1989) ou l'article de Julian, (1987)

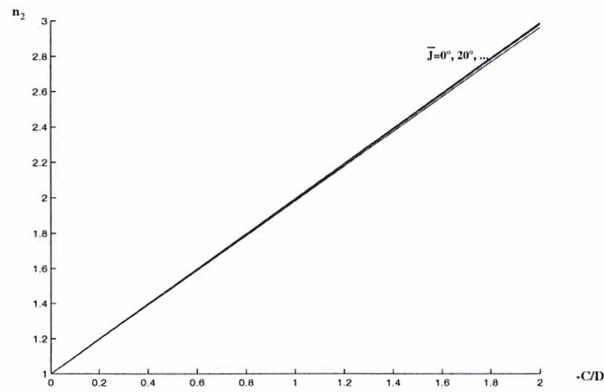


FIG. 2.15: Fréquence  $n_2$  en fonction de  $\left(-\frac{C}{D}\right)$  et  $\bar{J}$  pour  $e = 0.1$ .

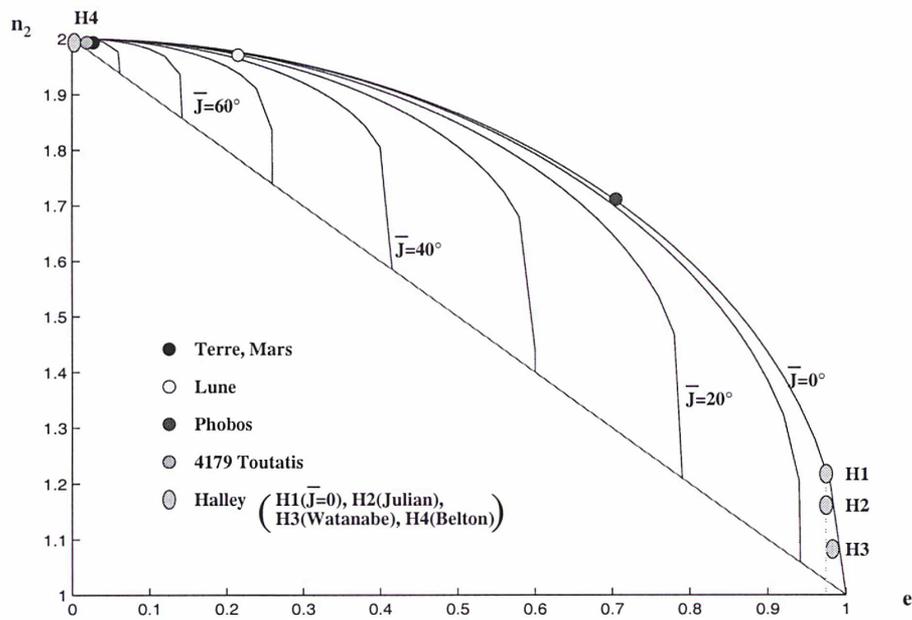


FIG. 2.16: Fréquence  $n_2$  en fonction de  $e$  et  $\bar{J}$  pour  $\frac{C}{D} = -1$ .

En faisant différentes hypothèses sur la rotation de ces trois corps, et sur la rotation de la Terre et de la Lune, nous pouvons déterminer les valeurs de leurs fréquences de  $l$  et de  $g$ . Nous réunissons ces valeurs en radians par jour dans le tableau suivant.

Corps céleste	$\frac{G}{C}$	$n_l$	$n_g$	$\bar{J}$
Lune	0.22997083454	$-4.227286 \times 10^{-2}$ (rad/ans)	0.230086571	$100'' < \bar{J} < 200''$
Mars <sup>4</sup>	6.1242204093	$-3.295893322 \times 10^{-2}$	6.15717934	$\bar{J} = 0$
Phobos <sup>1</sup>	19.70206	-3.423283	23.12534	$\bar{J} = 0$
4179-Toutatis <sup>2</sup>	$\frac{G}{A} = 2.6388$	$n_{l_A} = 1.1602$	$n_{g_A} = 0.8552$	$\bar{J} = 41.03$
Halley ( $H_1$ )	2.856	-0.857	3.713	$\bar{J} = 0$
Halley <sup>3</sup> ( $H_2$ )	2.856	-0.850	3.672	$\bar{J} = 4^\circ$
Halley <sup>5</sup> ( $H_3$ )	2.766	-0.425	2.856	$\bar{J} = 6^\circ$
Halley <sup>6</sup> ( $H_4$ )	$\frac{G}{A} = 3.89$	$n_{l_A} = 0.885$	$n_{g_A} = 1.703$	$\bar{J} = 24^\circ$

TAB. 2.2: Fréquences des variables d'Andoyer  $l$  et  $g$  (ou  $l_a$  et  $g_a$ ) pour ces différents corps.

Le même tableau, mais exprimé avec les périodes (en jours) et non plus avec les fréquences angulaires, devient :

Corps céleste	$T_{\frac{G}{C}}$	$T_l$	$T_g$
Lune	27.321661548	148.6340 (ans)	27.30791836
Mars	1.025956757	190.6368	1.020464
Phobos	0.318910	1.83543	0.271701
4179-Toutatis	$T_{\frac{G}{A}} = 2.3811$	$T_{l_A} = 5.4158$	$T_{g_A} = 7.3466$
Halley ( $H_1$ )	2.2	7.33	1.69
Halley <sup>3</sup> ( $H_2$ )	2.2	7.4	1.7
Halley <sup>5</sup> ( $H_3$ )	2.27	14.8	1.9
Halley <sup>6</sup> ( $H_4$ )	$T_{\frac{G}{A}} = 1.$	$T_{l_A} = 7.1$	$T_{g_A} = 3.69$

TAB. 2.3: Périodes des variables d'Andoyer  $l$  et  $g$  (ou  $l_a$  et  $g_a$ ) pour ces différents corps.

<sup>4</sup>d'après l'article de Folkner et al, (1997)

<sup>5</sup>d'après l'article de Watanabe, (1989)

<sup>4</sup>d'après l'article de Belton et al, (1991)

Pour la comètes P/Halley, il existe plusieurs modèles pour décrire sa rotation. Nous indiquons dans les deux tableaux [2.2] et [2.3] ainsi que sur les graphiques [2.14] et [2.16], les valeurs de  $n_l$  et  $n_g$  pour quatre de ces modèles . Ces quatres modèles sont :

- $H_1$  qui correspond au cas où  $\bar{J} = 0$  et avec (7 : 8 : 16) les dimensions respectives des axes ( $a : b : c$ ) en kilomètres,
- $H_2$  qui correspond au cas proposé par Julian (1987) et Sagdeev (1989), avec (7 : 8 : 16),
- $H_3$  qui correspond au cas proposé par Watanabe (1989), avec (7.5 : 8 : 16),
- $H_4$  qui correspond au cas proposé par Belton (1991), avec (8.5 : 8.5 : 16). Pour ce dernier, il s'agit d'une libration et donc, selon la Remarque 5, les graphiques [2.14] et [2.16] représentent respectivement la valeur de  $n_{l_A}$  et  $n_{g_A}$  en fonction de  $e_A$  en abscisse tandis que les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de  $\bar{J}_A$ . De même, les tableaux [2.2] et [2.3] indiquent les valeurs de  $n_{l_A}$  et  $n_{g_A}$ .

Méthode utilisée dans les tableaux précédents pour déterminer  $n_g$  et  $n_l$  :

- \* Pour la Lune, la Terre et Phobos, nous savons que  $\bar{J}$  est voisin de zéro. Et donc que  $G/C$  est voisin de  $\omega$ , la vitesse de rotation, qui est très bien connue. En utilisant les relations (2.21), le calcul de  $n_l$  et  $n_g$  ne pose, alors, plus de problème.
- \* Pour 4179-Toutatis, il est également possible de déterminer l'angle  $\bar{J}$  grâce aux observations radar faites par Hudson et Ostro (1995) (cf. l'image ci-dessous).



FIG. 2.17: Une des images radar obtenues par Ostro et Hudson (1995).

Hudson et Ostro sont arrivés à déterminer les coordonnées de l'axe instantané de rotation de 4179-Toutatis le 11 Décembre 1992 à 9 : 21 UTC dans le repère  $R_I$  des

ses axes principaux d'inertie. Soit avec nos notations :

$$\begin{aligned}\omega_A &= 98^\circ/\text{jour} \\ \omega_B &= 32^\circ/\text{jour} \\ \omega_C &= 20^\circ/\text{jour}\end{aligned}$$

D'après les relations (2.1) et (2.2) nous pouvons respectivement écrire les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{G}{A}\right)^2 &= \left(\frac{\|\vec{L}\|}{A}\right)^2 = \omega_A^2 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 \omega_B^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2 \omega_C^2 \\ \frac{F_0}{A} &= \frac{1}{2} \left( \omega_A^2 + \frac{B}{A} \omega_B^2 + \frac{C}{A} \omega_C^2 \right)\end{aligned}$$

Les rapports  $\frac{B}{A}$  et  $\frac{C}{A}$  sont calculables à partir des relations (2.26). Or, d'après (2.14), on peut écrire  $\bar{J}$  en fonction de  $\frac{G}{A}$  et  $\frac{F_0}{A}$  et donc en fonction des coordonnées  $\omega_A$ ,  $\omega_B$  et  $\omega_C$  qui sont connues :

$$\cos^2 \bar{J} = \left[ \frac{F_0}{A} - \frac{1}{2} \left( \frac{G}{A} \right)^2 \right] \left( \frac{A}{G} \right)^2 \frac{C}{A - C}$$

On en déduit la valeur de  $\bar{J}$  le 11 Décembre 1992 que nous avons utilisée (cf. tableau [2.2]).

$$\boxed{\bar{J} = 41^\circ.03}$$

Nous avons calculé la valeur de  $J_U = 9^\circ.44$  pour 4179-Toutatis (cf. tableau [2.1]). Nous voyons que  $\bar{J} \gg J_U$ . Toutatis est donc dans un mouvement de libration selon notre terminologie, (ou encore : dans une rotation autour de l'axe d'inertie minimum  $OA$ ). Nous avons donc, selon la Remarque 5, placé 4179 Toutatis sur les graphiques [2.14] et [2.16] qui représentent respectivement pour Toutatis  $n_{1A}$  et  $n_{2A}$  en fonction de  $e_A$  en abscisse tandis que les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de  $\bar{J}_A$  ( $\bar{J}_A = \pi/2 - J_A = 48^\circ.97$  pour Toutatis). Les périodes que nous obtenons pour  $g_A$  et pour  $l_A$  sont respectivement 7.35 jours et 5.4158 jours (cf. tableau [2.3]) et sont proches de celles observées par Hudson et Ostro (1995).

\* Mais, la plupart du temps, pour les comètes ou les astéroïdes, on manque de données observationnelles sur l'angle  $\bar{J}$  d'une part, mais aussi sur les rayons principaux  $(a, b, c)$  du corps. C'est le cas par exemple de la comète P/Halley qui est pourtant l'une des comètes dont les caractéristiques sont les mieux connues. Malgré des campagnes d'observation intensive, les images obtenues, particulièrement bruitées, ne permettent de déterminer les rayons principaux du noyau ( $a = 16$  km,  $b = 8$  km et  $c = 7$  km) qu'avec une incertitude de  $\pm 0.8$  km. L'image ci-dessous est une mosaïque de 8 images prises le 13 Mars 1986 par la sonde Giotto.



FIG. 2.18: Image réalisée à partir de 8 photographies obtenues par la sonde Giotto (1986).

Quant à l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  de la comète de Halley, nous n'avons pas assez d'observations pour mesurer sa direction de manière unique. En effet, le noyau de la comète n'a été observé que trois fois lors des passages successifs des trois sondes : Vega-1 le 6 Mars, Vega-2 le 9 Mars et Giotto le 13-14 Mars. Nous avons représenté sur la figure [2.19] la position de l'axe de longueur maximal  $a$  du noyau de la comète pour chacun de ces passages dans le repère écliptique cométocentrique. Cette axe doit correspondre approximativement à la direction de l'axe de moment d'inertie minimal  $OA$ . (Nous avons utilisé les valeurs de Samarasinha et A'Hearn (1991)).

Les cercles de  $15^\circ$  de rayon représentent l'imprécision à laquelle on peut s'attendre sur chacune de ces positions. On voit sur le graphique [2.19] qu'il existe deux possibilités distinctes pour la direction de  $OA$  lors des passages de Vega-1 (les possibilités  $V1(1)$  et  $V1(2)$ ) et de Giotto ( $G(1)$  et  $G(2)$ ). Pour Vega-1, cela est dû à une mauvaise mise au point de la caméra embarquée. Pour Giotto, le problème est différent : sa caméra s'est arrêtée, ne permettant pas d'avoir une vue stéréoscopique

du noyau ; nous n'avons donc que la projection de l'axe  $OA$  sur le fond du ciel. Cela entraîne la possibilité d'une double interprétation de la position de l'axe  $OA$ .

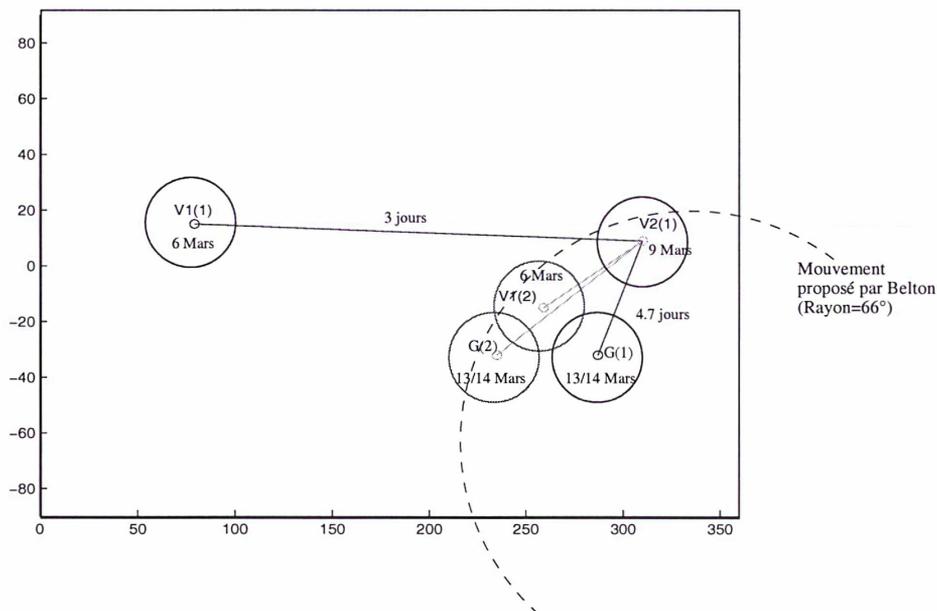


FIG. 2.19: Position de l'axe  $OA$  dans le repère écliptique cométo-centrique lors des passages successifs de Vega-1, Vega-2 et Giotto.

On est donc obligé de poser des hypothèses complémentaires ou de faire des choix arbitraires si nous voulons essayer de déterminer le mouvement de rotation de la comète P/Halley. Si nous choisissons comme Julian (1987), Sagdeev (1989) et Watanabe (1989) les positions V1(1), V2(1) et G(1) pour direction de l'axe  $OA$ , nous sommes obligés de faire appel à une période de rotation moyenne de  $OA$  de l'ordre de 2.2 jours ou 5.1 jours pour expliquer approximativement la position relative de ces points (cf Samarasinha et A'Hearn (1991)). Nous noterons ce premier choix dans la suite par l'abréviation : **J.S.W.**. Si au contraire nous choisissons comme Belton (1991), les positions V1(2), V2(1) et G(2) pour direction de l'axe  $OA$ , nous sommes obligés de faire appel à une période de rotation moyenne de  $OA$  de l'ordre de 3.7 jours ou 8 jours. Dans la suite, nous noterons ce choix : **B**. En plus de ces choix, nous devons également tenir compte des observations photométriques et autres, menées depuis le sol terrestre sur la comète de Halley qui mettent en évidence une troisième période d'une durée de environ 7.4 jours ainsi que bon nombre de ses sous-harmoniques.

Si nous voulons décrire théoriquement la rotation d'une comète, il nous faut surmonter une nouvelle difficulté qui n'apparaissait pas dans le cas des astéroïdes. Dans le cas des comètes, une force d'origine non-gravitationnelle perturbe leur rotation. Cette force, due au dégazage de la comète (sublimation plus ou moins importante selon la proximité du Soleil), crée un couple pouvant modifier sa rotation. Les travaux de Peale et Lissauer (1989), visant à modéliser ce couple pour la comète de Halley, montrent qu'il peut avoir des influences significatives sur sa rotation, et donc qu'un modèle de rotation basé uniquement sur le mouvement libre n'est sans doute pas adapté.

Cependant, des mesures de variation de brillance de la coma faites sur cette comète ont conduit certains auteurs à affirmer que sa rotation sidérale reste à peu près constante au cours d'une révolution complète sur son orbite (Samarasinha et A'Hearn, 1991). C'est donc que la dissipation de l'énergie de rotation est négligeable en première approximation au moins durant toute une révolution. Un calcul hydrodynamique de l'effet du dégazage sur la rotation, basé sur la forme réelle du noyau de cette comète est en cours (Crifo, Lagerros, Rodionov, et Szego, communication personnelle). Leur estimation provisoire de cet effet le situe entre  $1/50$  de radian par jour et  $1/10$  de radian par jour. Dans ces conditions, l'approximation de la rotation du noyau de la comète de Halley par un modèle de rotation sans perturbation ne reste valable à un radian près que sur une durée variant entre 5 et 20 rotations dans le cas **J.S.W.** et entre 3 et 15 rotations dans le cas **B.**

Notre propos étant d'illustrer ici le mouvement libre des corps célestes, nous allons traiter le problème de la rotation du noyau de la comète de Halley en supposant son mouvement arbitrairement libre. Mais nous garderons présent à l'esprit que ce mouvement théorique ne peut décrire le mouvement réel du noyau de la comète que pendant un nombre particulièrement limité de rotations.

Il n'est pas possible cependant de trouver une rotation simple (c'est à dire un axe de moment cinétique pour la comète dirigé quasi parallèlement à  $OC$  ou à  $OA$ ) avec une fréquence également de 7.4 jours qui soit compatible avec les observations des sondes spatiales à moins d'augmenter très nettement les cercles d'incertitude de  $15^\circ$  à  $30^\circ$ . Si ces deux fréquences ( $(2.2 : 7.4)$  dans le cas **J.S.W.** et  $(3.7 : 7.4)$  dans le cas **B.**) proviennent bien de la rotation du noyau de la comète, il faut que les différents modèles puissent les expliquer. Le plus simple est d'associer la fréquence de 7.4 jours à la variable d'Andoyer  $l$  ou  $l_A$  et l'autre fréquence 2.2 ou 3.7 jours à  $\omega$  ou à  $n_{g_A}$ . Ces fréquences distinctes impliquent également que la comète de Halley est relativement éloignée d'un mouvement de rotation simple. Dans le cas contraire on devrait avoir dans les signaux photométriques la trace

uniquement de la fréquence liée à la rotation de l'axe  $OA$ . Soit : 2.2 ou 3.7 jours suivant les cas et non la trace de la période à 7.4 jours, ce qui est pourtant le cas. Pour avoir la trace de cette fréquence dans les signaux photométriques, il faudrait que l'amplitude des variations à cette fréquence de 7.4 jours de la position de la comète de Halley dans un repère inertiel lié au soleil soit importante. Pour la comète de Halley, qui est de forme allongée les variations dans les courbes de lumière sont principalement dûes aux mouvements de l'axe de longueur maximum. Le mouvement de cet axe a une amplitude (associée à la fréquence  $n_l$  ou  $n_{l_A}$  de 7.4 jours) de  $2\bar{J}$  dans le cas d'une rotation et de  $2\bar{J}_A$  dans le cas d'une libration (cf. graphique [2.20]). Donc il faut que  $\bar{J}$  soit important dans le cas d'une rotation et que  $\bar{J}_A$  soit important dans le cas d'une libration. Cependant, pour la comète de Halley, la période de dissipation de l'énergie rotationnelle  $\tau$  (définie à la Remarque 4 du Chapitre 2.3) est inférieure à  $10^8$  ans d'après Peale et Lissauer (1989). Donc la comète de Halley devrait logiquement avoir son moment cinétique  $\vec{L}$  proche de l'axe  $OC$  pour minimiser l'énergie rotationnelle et donc être dans un mouvement de rotation avec un  $\bar{J}$  voisin de zéro ce qui est contraire à ce que l'on semble observer. On peut toutefois supposer que l'activité liée aux jets de poussières ou la rencontre avec un astéroïde dans un passé relativement récent, peuvent expliquer un décalage important entre l'axe du moment cinétique et l'axe de moment d'inertie maximum  $OC$ . Sur le graphique [2.20], nous avons représenté, pour la comète de Halley, les mouvements possibles pour son axe de moment cinétique dans le repère  $R_I$  de ses axes principaux d'inertie pour les différents modèles existants ( $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ ). Pour cela, nous avons suivi la même méthode que celle que nous avons utilisée pour tracer ces mouvements pour Mars et pour la Lune respectivement sur les graphiques [2.6] et [2.7] (cf. Chapitre 2.3).

Nous avons ici fixé :  $a = 16$  km,  $b = 8$  km et  $c = 7$  km. Nous remarquons, en particulier, dans le cas de la rotation autour de l'axe  $OC$ , qu'une faible variation dans le choix de  $\bar{J}$  ( $\Delta\bar{J} \simeq 2^\circ$ ) au voisinage du point  $C$ , entraîne, du fait que la comète de Halley a un coefficient de triaxialité  $e$  important, une forte variation de  $J$  ( $\Delta J \simeq 12^\circ$ ). Si, comme le montre Belton, certaines zones semblent plus réfléchissantes que d'autres, l'amplitude du mouvement de  $J$  va jouer un rôle important dans les courbes de lumière. (Du fait que les ellipsoïdes approximant la comète de Halley et 4179-Toutatis sont proches, nous avons également représenté sur l'ellipsoïde de la comète de Halley, figure [2.20], la position de l'axe de moment cinétique de Toutatis.)

En résumé, on peut donc supposer que l'axe de moment cinétique de la comète n'est pas confondu avec l'axe  $OC$  mais qu'il tourne dans un repère lié à la comète

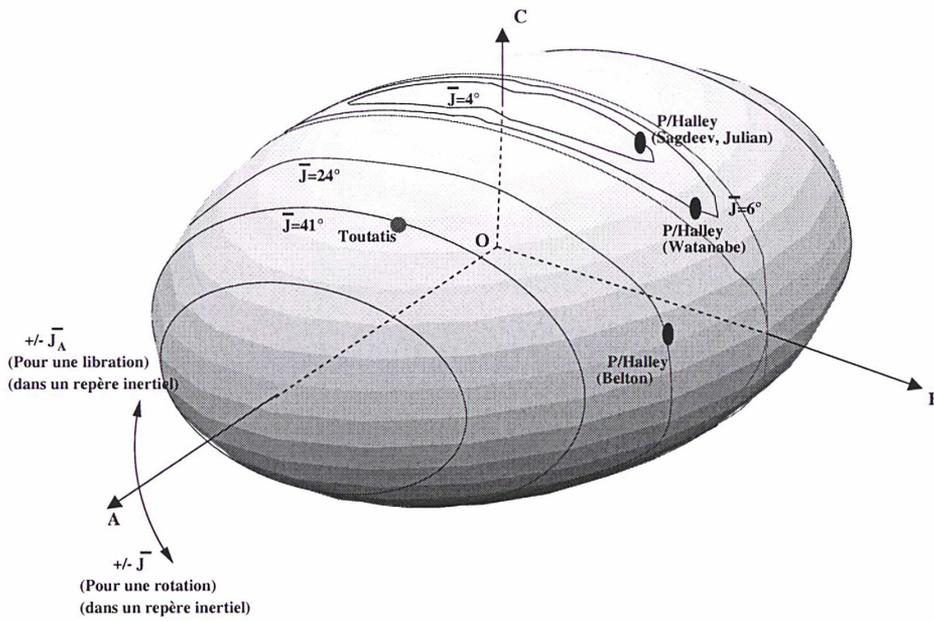


FIG. 2.20: Représentation schématique des mouvements possibles pour le moment cinétique  $\vec{L}$  dans le repère des axes principaux d'inertie pour P/Halley et 4179-Toutatis (coefficient de triaxialité voisin pour ces deux corps).

autour de  $OC$  avec une période proche de 7 jours : c'est le cas **J.S.W.** (son état serait donc un mouvement de rotation selon notre terminologie) ou qu'il tourne autour de l'axe  $OA$  avec une période également d'environ 7 jours : c'est le cas **B.** (soit une libration). Les valeurs de  $n_g$ ,  $n_l$  et  $\bar{J}$  (ou  $n_{gA}$ ,  $n_{lA}$  et  $\bar{J}_A$ ) sont données dans les tableaux [2.2] et [2.3] pour ces différents modèles. Chacun de ces modèles répond à certaines contraintes mais aucun n'est pleinement satisfaisant. Le modèle de Belton, représenté sur la figure [2.19] par une ligne en pointillé, semble être celui qui, à l'heure actuelle, répond le mieux aux contraintes observationnelles, mais il est étrange du point de vue de la dissipation d'énergie que le mouvement de l'axe de moment cinétique de la comète de Halley ne soit pas plus proche de l'axe  $OC$ . Si on accepte ce modèle, il reste à trouver le processus d'excitation qui entretient cette énergie rotationnelle élevée. Les modèles **J.S.W.** ont, eux, le désavantage d'avoir considéré une période de 2.2 jours qui ne semble pas apparaître dans les courbes de lumière.

De plus, ces modèles correspondent à un petit choix parmi une grande variété de modèles qui semblent dynamiquement possibles. Par exemple, selon les hypothèses que nous avons énoncées, nous pouvons déterminer selon la valeur de l'angle  $\bar{J}$  et la forme du noyau de la comète, les mouvements de rotation qui

restent possibles. Pour envisager diverses formes du noyau de la comète, nous avons fixé les dimensions de  $a$  à 16 km et de  $c$  à 7 km, et nous faisons varier le rayon intermédiaire  $b$  autour de la valeur 8.2 km sachant que l'incertitude sur sa mesure est d'environ  $\pm 0.8$  km. (Bien sûr, en faisant cela, nous ne considérons pas toutes les déformations possibles de l'ellipsoïde puisque  $a$  et  $c$  eux aussi ont une incertitude de  $\pm 0.8$  km.) Nous supposons que la première période observée (de 2.2 jours pour **J.S.W.** et 3.7 jours pour **B.**) correspond respectivement à  $\omega$  la vitesse de rotation instantanée et à  $n_{g_A}$  tandis que la seconde période observée (de 7.4 jours) correspond à la fréquence de  $l$  pour Julian et Sagdeev, à la fréquence de  $2l$  pour Watanabe et approximativement à la fréquence de  $l_A$  pour Belton. Afin de voir tous les cas de rotation possibles, nous fixons une valeur de  $\bar{J}$ . Pour cette valeur de  $\bar{J}$ , nous déterminons  $\frac{G}{C}$  nécessaire pour le calcul de  $n_g$  et  $n_l$  d'après les relations (2.21). Puis nous déterminons par dichotomie la valeur du rayon principal intermédiaire  $b$  pour avoir la valeur de la fréquence  $n_l$  voulue (ou le bon rapport  $n_{g_A}/n_{l_A} = 3.69/7.1$  dans le cas de Belton). Puis nous augmentons la valeur de  $\bar{J}$  de  $1^\circ$  et nous recommençons. Ce sont ces résultats que nous avons représentés sur le graphique [2.21].

Pour le calcul de  $\frac{G}{C}$ , nous utilisons le fait que  $L_A = A\omega_A$ ,  $L_B = B\omega_B$  et  $L_C = C\omega_C$ , et que  $\omega$  la vitesse de rotation peut s'exprimer grâce aux relations (2.24) :

$$\omega^2 = \left(\frac{G}{A}\right)^2 \sin^2 \bar{J} + \left(\frac{G}{C}\right)^2 \cos^2 \bar{J} = \left(\frac{G}{C}\right)^2 \left( \left(\frac{C}{A}\right)^2 \sin^2 \bar{J} + \cos^2 \bar{J} \right)$$

D'où nous pouvons déduire  $\frac{G}{C}$  en fonction de  $\bar{J}$  et de  $\frac{C}{A}$ . Nous définissons ainsi 3 droites, notées  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ , ayant respectivement les rapports de fréquence proposés par Julian et Sagdeev, par Watanabe et par Belton. D'autres droites également compatibles avec les positions de l'axe  $OA$  peuvent être construites. Par exemple, le couple de fréquences (3.7 : 14.8) nous paraît particulièrement intéressant du fait qu'il supprime le problème majeur du modèle de Watanabe c'est à dire la fréquence à 2.2 jours mais conserve ses avantages : rotation autour de l'axe  $OC$ , possibilité d'un  $\bar{J}$  tout de même important  $10^\circ$  et de fortes amplitudes de  $J$ . Cependant, ce travail n'a pas été fait ici.

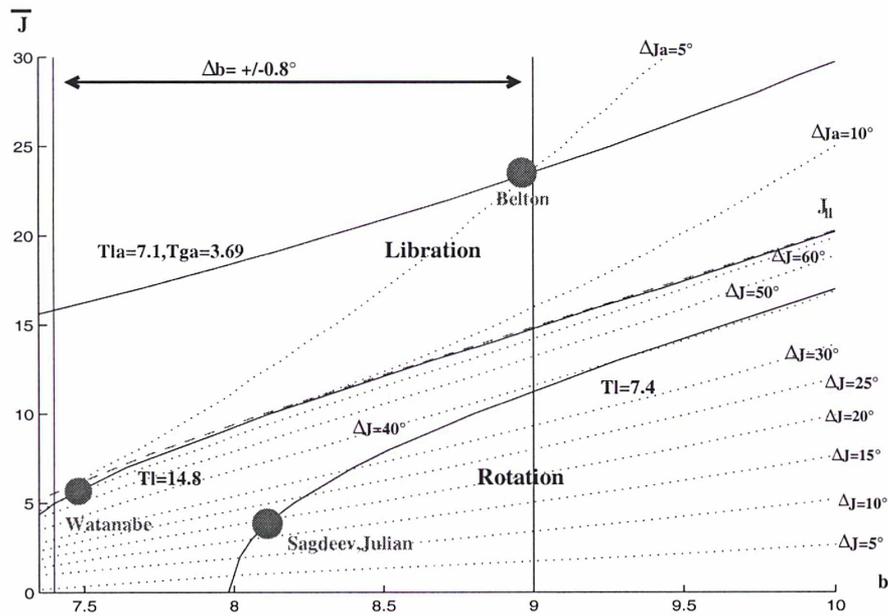


FIG. 2.21: Différentes possibilités de mouvement pour le moment cinétique  $\vec{L}$  de P/Halley.

Nous avons également tracé sur ce graphique les variations  $\Delta J$  de l'angle  $J$  suivant les valeurs de  $\bar{J}$  et de  $b$ . Ces variations peuvent avoir de l'importance d'un point de vue photométrique, comme nous l'avons dit. Nous pouvons donc définir un ensemble de modèles satisfaisant à un maximum de conditions qui nous semblent être :

- un mouvement de rotation autour de l'axe  $OC$ ,
- un  $\Delta J$  et un  $\bar{J}$  les plus grands possibles (on est limité pour  $\bar{J}$  par  $J_{ll}$ ),
- un  $b$  compris entre 7.4 km et 9 km,
- et enfin un rapport de fréquence compatible avec les observations de l'axe  $OA$  (c'est à dire une solution sur les courbes  $d_1, d_2$  ou  $d_3$ )

Il ne faut pas oublier de vérifier si l'angle  $\bar{J}$  dans le cas d'une rotation (ou  $\bar{J}_A$  dans le cas d'une libration) est compatible avec les observations de la figure [2.19].

La plupart des résultats présentés dans cette partie ne sont pas fondamentalement nouveaux. Ils mettent seulement en évidence la grande utilité de la détermination analytique des fréquences  $n_l$  et  $n_g$  qui permet, comme nous venons de le voir, d'éviter de nombreuses intégrations numériques. Par exemple, pour le graphique [2.21], nous avons déterminé  $n_l$  et  $n_g$  pour environ 1000 couples  $(\bar{J}, b)$ , ce qui était relativement rapide à l'aide des expressions analytiques des fréquences mais qui aurait été beaucoup plus fastidieux s'il avait fallu à chaque fois mener à bien une intégration numérique des équations différentielles du mouvement et obtenir la fréquence par une transformation de Fourier.

D'autre part, dans le cas où les effets des corps extérieurs peuvent être considérés comme des perturbations d'ordre inférieur, ces fréquences sont de bonnes approximations des fréquences de ces mêmes variables dans le cas perturbé .

Naturellement, la Terre et la Lune se trouvent sur les courbes voisines de  $\bar{J} = 0$  comme pour la majorité des corps célestes dont la rotation a pu être observée. Il est donc utile de développer l'ensemble de ces résultats au voisinage de  $\bar{J} = 0$ .

En revanche, pour 4179-Toutatis et pour P/Halley selon le modèle de Belton,  $\bar{J}_A$  est important, mais  $e_A$  est très faible ; pour P/Halley selon le modèle de Julian,  $\bar{J}$  est proche de zéro et  $e$  est proche de 1. Il est donc également intéressant de donner les développements de ces résultats au voisinage de  $e_A = 0$ ,  $e = 0$ ,  $e = 1$  ou  $e_A = 1$ .

C'est ce que nous ferons dans la partie suivante.

## Résultats

Paramètres :  $(A, B, C)$  sont les moments d'inertie principaux,  $(e)$  est le coefficient de triaxialité,  $\bar{J}$  est la valeur minimale de  $J$  et  $J_{ll}$  est la valeur de  $\bar{J}$  pour la séparatrice.

•  $\bar{J} < J_{ll}$

Rotation autour de l'axe de moment d'inertie maximum  $OC$

$$L_A = G \sin J \sin l = G \sin \bar{J} \operatorname{cn}(u)$$

$$L_B = G \sin J \cos l = -G \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \bar{J} \operatorname{sn}(u)$$

$$L_C = G \cos J = G \cos \bar{J} \operatorname{dn}(u)$$

$$g = \frac{G}{C} \times t - \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \frac{G}{n_u} \Pi \left( \operatorname{am}(u), \left( \frac{2e}{1-e} \right), k \right) + \tilde{g}_0$$

Avec

$$u = \frac{G}{D} \cos \bar{J} \sqrt{1-e^2} \times t = n_u \times t$$

$$n_l = \frac{\pi \sqrt{1-e^2}}{2DK(k)} G \cos \bar{J}$$

$$e = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) D \quad \text{et} \quad \frac{1}{D} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \right)$$

$$n_g = \frac{1}{A} \bar{G} - n_l \Lambda_0 + \frac{(1+e)}{D} G \cos^2 \bar{J}$$

$$k^2 = \frac{2e}{1-e} \tan^2 \bar{J}$$

$$\cos J_{ll} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}}$$

•  $90^\circ > \bar{J} > J_{ll}$

Rotation autour de l'axe de moment d'inertie minimum  $OA$

$$L_A = G \sin J \sin l = G \cos(\bar{J}_A) \operatorname{dn}(u_A)$$

$$L_B = G \sin J \cos l = G \sqrt{\frac{1+e_A}{1-e_A}} \sin(\bar{J}_A) \operatorname{sn}(u_A)$$

$$L_C = G \cos J = G \sin(\bar{J}_A) \operatorname{cn}(u_A)$$

$$g_A = \frac{G}{A} \times t - \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) \frac{G}{n_{u_A}} \Pi \left( \operatorname{am}(u_A), \left( \frac{2e_A}{1-e_A} \right), k_A \right) + \tilde{g}_{A0}$$

Avec

$$u_A = \frac{G}{D_A} \cos \bar{J}_A \sqrt{1-e_A^2} \times t = n_{u_A} \times t$$

$$n_{l_A} = \frac{\pi \sqrt{1-e_A^2}}{2DK(k_A)} G \cos \bar{J}_A$$

$$e_A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) D_A \quad \text{et} \quad \frac{1}{D_A} = \frac{1}{A} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{B} \right)$$

$$n_{g_A} = \frac{1}{C} \bar{G} - n_{l_A} \Lambda_0 + \frac{(1+e_A)}{D_A} G \cos^2 \bar{J}_A$$

$$k_A^2 = \frac{2e_A}{1-e_A} \tan^2 \bar{J}_A$$

$$\bar{J}_A = \left( \frac{\pi}{2} - \bar{J} \right)$$



## 2.5 Développement de $g$ , $l$ et $J$ au voisinage de $\bar{J} = 0$

Nous avons, dans la partie précédente, décrit analytiquement les mouvements de rotation libre d'un corps solide. Suivant le cas, (mouvement de rotation autour de l'axe de moment d'inertie maximum  $OC$ , ou rotation autour de l'axe de moment d'inertie minimum  $OA$ ), nous utilisons pour décrire le mouvement différentes variables (soit les variables  $g$ ,  $l$  et  $J$  soit les variables  $g_A$ ,  $l_A$  et  $J_A$  (cf. définition Partie 2.1 et 2.3)). Nous avons dans le premier cas exprimé  $g$ ,  $l$  et  $J$  en fonction de constantes ( $e$ ,  $\bar{J}$ ,  $g_0$  ...) et du temps  $t$ . Dans le second cas, nous avons exprimé  $g_A$ ,  $l_A$  et  $J_A$  en fonction d'autres constantes ( $e_A$ ,  $\bar{J}_A$ ,  $g_{0A}$  ...), et du temps  $t$  (cf. le tableau des résultats à la page 93). On rappelle que  $\bar{J}$  est la valeur minimale de  $J$  (si  $J < \pi/2$ ), que  $\bar{J}_A = \pi/2 - \bar{J}$ , que  $e$  est le coefficient de triaxialité, une constante représentative de la forme et de la composition interne du corps ( $S$ ) en rotation :  $e = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{B} - \frac{1}{A})}{\frac{1}{C} - \frac{1}{2}(\frac{1}{A} + \frac{1}{B})}$  avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  les moments d'inertie du corps ( $S$ ), que  $e_A$  est une constante obtenue en intervertissant, dans l'expression de  $e$ ,  $A$  et  $C$ , que  $g_0$  est la valeur de  $g$  quand  $t = 0$  et que  $g_{0A}$  la valeur de  $g_A$  quand  $t = 0$ .

Nous présentons dans cette partie, comme on le fait souvent en mécanique céleste, dans le cas le plus courant de la rotation autour de l'axe  $OC$ , les variables  $g$ ,  $l$  et  $J$  comme des séries de puissance d'un "petit paramètre". (D'après la Remarque 3 de la Partie 2.4, nous pourrions en déduire facilement, les expressions équivalentes de  $g_A$ ,  $l_A$  et  $J_A$  en remplaçant respectivement dans les séries  $g$ ,  $l$  et  $J$  qui vont suivre les constantes  $e$ ,  $D$ ,  $J$  et  $g_0$  par  $e_A$ ,  $D_A$ ,  $J_A$  et  $g_{0A}$  et en intervertissant les moments d'inertie  $A$  et  $C$ .)

Cependant, comment allons nous choisir le "petit paramètre" en fonction duquel nous allons développer les relations du tableau de la page 93 en séries?

Nous avons remarqué au cours de la partie précédente et sur l'ensemble des cas de rotation que nous avons étudiés (tous les cas, sauf 4179-Toutatis et la comète de P/Halley selon Belton (1991), qui, eux, sont en libration) que :

- la majorité des gros corps célestes, (planètes et satellites principaux), ont des formes voisines de la sphère et donc un coefficient de triaxialité  $e$  voisin de zéro : dans ce cas,  $e$  sera ce petit paramètre à l'aide duquel nous exprimerons les séries résultats;
- la période  $\tau$  de dissipation de l'énergie rotationnelle étant pour la plupart des astéroïdes inférieure à  $10^8$  ans (cf. graphique [2.9] de Harris (1994)), ceux-ci ont, en majorité, leur axe de moment cinétique  $\vec{L}$  voisin de l'axe  $OC$  et donc un  $\bar{J}$  voisin de zéro: dans ce cas,  $\bar{J}$  sera le petit paramètre;

- enfin, que la plupart des petits corps, (astéroïdes et comètes), ont des formes très irrégulières et donc un  $e$  qui peut être important. Cependant, nous voyons, par exemple, pour le cas de la comète de Halley ( $e = 0.948$ ) qu'un  $e$  important entraîne un  $J_U$  petit d'après la relation (2.5). ( $J_U$  est la valeur de  $\bar{J}$  pour la séparatrice entre mouvement de rotation et mouvement de libration;  $J_U = 9^\circ.43$  pour P/Halley (cf. tableau [2.1])). Un  $J_U$  petit entraîne à son tour un  $\bar{J}$  petit (P/Halley étant dans un mouvement de rotation,  $\bar{J}$  est inférieur à  $J_U$ ). On prendra donc dans ce cas, encore la variable  $\bar{J}$  comme petit paramètre.

Nous ne faisons que donner ici les résultats de ces développements. Pour le lecteur désirant plus de détails, les annexes des articles de Kinoshita (1972) et (1992) présentent les étapes de ces développements.

Ensuite, suivant la valeur de  $e$  et de  $J$  pour la planète Mars, la Lune et la comète de Halley selon le modèle de Julian (1987), et suivant la valeur de  $e_A$  et de  $J_A$  pour l'astéroïde Toutatis, nous montrerons quel est le type de série le plus adapté.

### 2.5.1 1<sup>er</sup> Cas : Développement pour un $\bar{J}$ petit.

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \tilde{g} - \frac{G\sqrt{(1-e^2)}}{Dn_{\tilde{l}}} (l^* - \tilde{l}) + \frac{1}{4} \frac{G}{Dn_{\tilde{l}}} (1+e) \bar{J}^2 \left[ \frac{e \sin 2\tilde{l}}{1+e \cos 2\tilde{l}} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} (l^* - \tilde{l}) \right] + O(\bar{J}^4) \\ l = l^* - \frac{1}{4} e \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \bar{J}^2 \times \frac{\sin 2\tilde{l}}{1+e \cos 2\tilde{l}} + O(\bar{J}^4) \\ J = \bar{J} \sqrt{\frac{1}{1-e} + \frac{e}{1-e} \cos 2\tilde{l}} + O(\bar{J}^3) \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan l^* = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \tilde{l} \\ n_{\tilde{l}} = \left[ \frac{G}{D} \sqrt{1-e^2} \right] - \left[ \frac{G}{2D} \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \right] \times \bar{J}^2 + O(\bar{J}^4) \\ n_{\tilde{g}} = \left[ \frac{G}{C} - \frac{G}{D} \sqrt{1-e^2} \right] + \left[ \frac{G}{2D} \left( \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} - (1+e) \right) \right] \times \bar{J}^2 + O(\bar{J}^4) \end{array} \right.$$

### 2.5.2 2<sup>eme</sup> Cas : Développement pour un $e$ petit.

Nous rappelons que  $\bar{b} = \frac{G^2}{L^2} = \frac{1}{\cos^2 \bar{J}}$  et nous posons  $\cos \tilde{J} = \frac{\tilde{L}}{G}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} l = \tilde{l} - \left\{ \frac{1}{4} (\bar{b} + 1) + \frac{1}{256} (19\bar{b}^3 - 3\bar{b}^2 - 3\bar{b} - 19) e^2 \right\} e \sin 2\tilde{l} \\ \quad + \left\{ \frac{1}{64} (\bar{b}^2 + 6\bar{b} + 1) + \frac{1}{512} (5\bar{b}^4 + 12\bar{b}^3 - 2\bar{b}^2 + 12\bar{b} + 5) e^2 \right\} e^2 \sin 4\tilde{l} \\ \quad - \frac{1}{768} (\bar{b}^3 + 15\bar{b}^2 + 15\bar{b} + 1) e^3 \sin 6\tilde{l} \\ \quad + \frac{1}{8192} (\bar{b}^4 + 28\bar{b}^3 + 70\bar{b}^2 + 28\bar{b} + 1) e^4 \sin 8\tilde{l} + O(e^5) \\ \\ g = \tilde{g} + \sqrt{b} \left[ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{64} (9\bar{b}^2 - 2\bar{b} + 9) e^2 \right\} e \sin 2\tilde{l} \right. \\ \quad - \frac{1}{16} (b + 1) \left\{ 1 + \frac{1}{16} (7\bar{b}^2 - 6\bar{b} + 7) e^2 \right\} e^2 \sin 4\tilde{l} \\ \quad + \frac{1}{384} (3\bar{b}^2 + 10\bar{b} + 3) e^3 \sin 6\tilde{l} \\ \quad \left. - \frac{1}{1024} (\bar{b}^3 + 7\bar{b}^2 + 7\bar{b} + 1) e^4 \sin 8\tilde{l} + O(e^5) \right] \\ \\ J = \tilde{J} + \frac{1}{16} \left( \frac{2}{\cos^2 \tilde{J}} + 1 \right) \tan \tilde{J} e^2 + \frac{1}{2} \tan \tilde{J} e \cos 2\tilde{l} - \frac{1}{16} \frac{\sin \tilde{J}}{\cos^3 \tilde{J}} e^2 \cos 2\tilde{l} + O(e^3) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{J} = \bar{J} + \frac{1}{2} \tan \bar{J} e + \tan \bar{J} \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{16} \tan^2 \bar{J} \right) e^2 + O(e^3) \\ \\ \tilde{l} = n_{\tilde{l}} \times t \quad \text{avec} \quad n_{\tilde{l}} = \frac{G}{D} \cos \tilde{J} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\cos^4 \tilde{J}} + 3 \right) e^2 \right] + O(e^4) \\ \\ \tilde{g} = n_{\tilde{g}} \times t + g_0 \quad \text{avec} \quad n_{\tilde{g}} = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{A} - \frac{G}{B} \right) + \frac{G}{4D} \left( \frac{1}{\cos^2 \tilde{J}} + 1 \right) e^2 + O(e^4) \end{array} \right.$$

Certes, les expressions dans ce cas (séries pour un  $e$  petit) sont plus simples car il s'agit de combinaisons linéaires de cosinus ou de sinus de la variable  $2\tilde{l}$  tandis que dans le premier cas (séries pour un  $\bar{J}$  petit) les expressions présentent des  $\cos 2\tilde{l}$  en dénominateur.

Dans les cas de corps célestes ayant à la fois un coefficient de triaxialité  $e$  et un angle  $\bar{J}$  petits, il nous faudra choisir les séries les mieux adaptées.

### 2.5.3 Application à Mars

Mars est dans le cas que nous venons juste de citer. Son coefficient de triaxialité  $e = 0.0646$  est petit (cf. tableau [2.4]) et son angle  $\bar{J}$  est également très faible mais pas observé jusqu'à aujourd'hui. Nous pouvons donc aussi bien utiliser les relations (2.28) que les relations (2.27). Comme  $e$  est beaucoup mieux connu que l'angle  $\bar{J}$ , les séries en fonction de  $\bar{J}$  (2.27) ont l'intérêt de permettre de donner un encadrement de ces variables en fonction de  $\bar{J}^2$  en remarquant simplement que  $\frac{\sin 2\tilde{l}}{1+e \cos 2\tilde{l}}$  est majorable par  $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$  et que dans le cas de Mars le rapport  $\frac{1}{1-e} \bar{J}^2$  est petit :

$$\begin{cases} l &= l^* \pm 0.0173 (\bar{J}^2) \\ g &= \tilde{g} - (l^* - \tilde{l}) \pm 0.0173 (\bar{J}^2) \\ J &= \bar{J} \sqrt{1.069061 + 0.069061 \cos 2\tilde{l}} + O(\bar{J}^3) \end{cases}$$

avec

$$\tan l^* = 0.937358 \tan \tilde{l}$$

Les relations (2.28) ont, elles, l'avantage de donner des séries de Fourier très simples quand on approxime  $\bar{b}$  par  $1 + O(\bar{J}^2)$  :

$$\begin{cases} l &= \tilde{l} - 0.0323 \sin 2\tilde{l} + 0.0005 \sin 4\tilde{l} + O(\bar{J}^2, e^3) \\ g &= \tilde{g} + 0.0323 \sin 2\tilde{l} - 0.0005 \sin 4\tilde{l} + O(\bar{J}^2, e^3) \\ J &= \bar{J} [1.0008 + 0.032039 \cos 2\tilde{l}] + O(\bar{J}^2, e^3) \end{cases} \quad (2.29)$$

Les valeurs des fréquences  $n_{\tilde{l}}$  et  $n_{\tilde{g}}$  ont déjà été calculées et sont données dans le tableau [2.2].

### 2.5.4 Application à la Lune

La Lune est sensiblement dans le même cas que la planète Mars. Son coefficient de triaxialité est un peu plus grand mais reste relativement faible  $e = 0.220776129$  (cf. tableau [2.6]) et son angle  $\bar{J}$  est également très faible mais connu (contrairement à Mars) et voisin de 100 mas (millième de seconde d'arc). Dans ce cas, les séries (2.27) sont les plus appropriées. Nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{cases} l &= l^* \pm 2 \times 10^{-14} \\ g &= \tilde{g} - (l^* - \tilde{l}) \pm 2 \times 10^{-14} \\ J &= \bar{J} \sqrt{1.283328 + 0.283328 \cos 2\tilde{l}} \pm 10^{-19} \end{cases}$$

avec

$$\tan l^* = 0.798938 \tan \tilde{l}$$

Comme pour Mars, les valeurs des fréquences  $n_{\tilde{l}}$  et  $n_{\tilde{g}}$  ont déjà été calculées et sont données dans le tableau [2.2].

Dénomination	Relation	Valeur
$J_2 = -C_{(2,0)}$		0.001964
$C_{(2,2)}$		-0.000055
$S_{(2,2)}$		0.000031
$\frac{MR^2}{C}$		$\frac{1}{0.3662}$
$\frac{2C-A-B}{2C}$	$J_2 \frac{MR^2}{C}$	0.005363
$\frac{A-B}{4C}$	$-\sqrt{C_{(2,2)}^2 + S_{(2,2)}^2} \frac{MR^2}{C}$	-0.0001724
$\frac{C}{A}$	$\frac{1}{1 - \left( J_2 + 2\sqrt{C_{(2,2)}^2 + S_{(2,2)}^2} \right) \frac{MR^2}{C}}$	1.005741
$\frac{C}{B}$	$\frac{1}{1 - \left( J_2 - 2\sqrt{C_{(2,2)}^2 + S_{(2,2)}^2} \right) \frac{MR^2}{C}}$	1.005044
$\frac{C}{D}$	$\left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right) \right)$	-0.005393
$e$	$\frac{\left[ \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \left[ \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right]^{\frac{1}{2}}}$	0.0646

TAB. 2.4: Paramètres physiques de Mars

Dénomination	Définition	Valeur
$\omega$	Vitesse de rotation	$4.6138786747 \times 10^8$ "/ans
$n$	Moyen mouvement de la longitude de Mars	1886.51820925 "/jour
$\dot{\Omega}$	Moyen mouvement du noeud de l'orbite de Mars	"/ans
$i$	Inclinaison de l'orbite de Mars	1.8497264919 degrés

TAB. 2.5: Constantes liées au mouvement de Mars

Dénomination	Relation	Valeur
$J_2 = -C_{(2,0)}$		0.00020215
$C_{(2,2)}$		0.000022304
$\frac{MR^2}{C}$		$\frac{1}{0.392}$
$\frac{2C-A-B}{2C}$	$J_2 \frac{MR^2}{C}$	0.00051568878
$\frac{A-B}{4C}$	$-C_{(2,2)} \frac{MR^2}{C}$	-0.000056897959
$\frac{C}{A}$	$\frac{1}{1 - \left( J_2 + 2C_{(2,2)} \right) \frac{MR^2}{C}}$	1.0006299
$\frac{C}{B}$	$\frac{1}{1 - \left( J_2 - 2C_{(2,2)} \right) \frac{MR^2}{C}}$	1.0004021
$\frac{C}{D}$	$\left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right) \right)$	-0.0005160
$e$	$\frac{\left[ \frac{C}{B} - \frac{C}{A} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \left[ \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right]^{\frac{1}{2}}}$	0.220776129

TAB. 2.6: Paramètres physiques de la Lune



Dénomination	Définition	Valeur
$\omega$	Moyen mouvement de la longitude de la Lune et Vitesse de Rotation	$17.325593437 \times 10^6$ "/ans
$\dot{\Omega}$	Moyen mouvement du noeud de l'orbite lunaire	$-6.9628902 \times 10^4$ "/ans
$i$	Inclinaison de l'orbite lunaire	5.129835064 degrés

TAB. 2.7: Constantes liées au mouvement de la Lune

### 2.5.5 Application à P/Halley

Pour la comète de Halley, nous prenons le modèle de Julian (1987) : l'angle  $\bar{J} \simeq 4^\circ$  d'après la Partie 2.4. Le coefficient de triaxialité  $e$  se déduit alors de la valeur de  $b$ , le rayon principal intermédiaire, correspondant sur le graphique [2.21] à  $\bar{J} \simeq 4^\circ$ . Soit:  $b \simeq 8.1200$  et  $e \simeq 0.9402$ . Les valeurs correspondantes de  $n_{\tilde{l}}$  et  $n_{\tilde{g}}$  sont :  $n_{\tilde{l}} = -0.8504$  et  $n_{\tilde{g}} = 3.673$ . On voit que  $e$  est très grand. Seul le développement en série de l'angle  $\bar{J}$  est donc possible. Nous voyons qu'avec un développement à l'ordre 3, comme dans les relations (2.27), nous aurons une précision de l'ordre de la minute d'arc.

$$\begin{cases} l &= l^* - 0.0065 \frac{\sin 2\tilde{l}}{1 + 0.9402 \cos 2\tilde{l}} \pm 2 \cdot 10^{-5} \\ g &= \tilde{g} - 0.9593 (l^* - \tilde{l}) + 0.0069 \frac{\sin 2\tilde{l}}{1 + 0.9402 \cos 2\tilde{l}} \pm 2 \cdot 10^{-5} \\ J &= \bar{J} \sqrt{16.7189 + 15.7189 \cos 2\tilde{l}} \pm 3 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

avec

$$\tan l^* = 0.1756 \tan \tilde{l}$$

### 2.5.6 Application à Toutatis

Nous avons vu que le mouvement libre de 4179-Toutatis est une libration. D'après le tableau [2.1], son coefficient  $e_A$  est faible :  $e_A = 0.0136$ , tandis que son angle  $\bar{J}_A$ , lui, est important :  $\bar{J}_A = 48.97^\circ$ . Donc, seul le développement en série de puissance du coefficient  $e_A$  est possible pour le mouvement de Toutatis. Les relations (2.28), que nous allons utiliser, sont limitées en précision par le développement de la variable  $J$  qui s'arrête à l'ordre 3 de  $e$ . Nous pouvons, en nous servant encore de la Remarque 3 de la Partie 2.4, exprimer les variables  $g_A$ ,  $l_A$  et  $J_A$  grâce aux relations (2.28) avec une précision générale de 1/2 seconde d'arc.

$$\begin{aligned} l_A &= \tilde{l}_A - 0.011311 \sin 2\tilde{l}_A + 0.000059 \sin 4\tilde{l}_A \\ g_A &= \tilde{g}_A + 0.010378 \sin 2\tilde{l}_A - 0.000039 \sin 4\tilde{l}_A \\ J_A &= 0.862674 + 0.007923 \cos 2\tilde{l}_A \end{aligned}$$

Les moyens mouvements  $n_{g_A}$  et  $n_{l_A}$  ont déjà été déterminés. Ils sont donnés dans le tableau [2.2]

Remarque 1 :

Bien sûr, étant donné le degré de précision que nous avons sur les rayons principaux de Toutatis ou de la comète de Halley, et donc sur le coefficient  $e_A$  ou  $e$ , nous ne pouvons pas espérer de ces séries autres choses qu'une information approximative sur les amplitudes des différents termes.

Remarque 2 : Il ne faut pas oublier, non plus, que nous déterminons le mouvement de rotation libre de ces corps : c'est à dire que nous déterminons leur rotation sans tenir compte des corps céleste qui les entourent. Or, le soleil par exemple a des effets importants sur la rotation de tous ces corps : en particulier, il fait bouger le moment cinétique qui n'est plus fixe dans un repère inertiel. Cependant, dans beaucoup de cas, nous allons voir que ces effets peuvent être traités comme des perturbations à un mouvement principal, le mouvement principal étant celui que nous venons de décrire. Ce sera le cas pour Mars que nous étudions en détail dans le Chapitre 4.

En revanche, pour la Lune, du fait de sa proximité à la Terre, il n'est pas possible de considérer le mouvement libre comme un mouvement principal et l'influence de la Terre comme une perturbation. On est obligé de rajouter dès le départ l'influence de la Terre dans le Hamiltonien et de déterminer ensuite un Hamiltonien principal (cf la thèse de Moons (1981)).

\* \* \*

# Chapitre 3

## Mouvement de rotation forcée

### Introduction

Un corps céleste n'est jamais seul dans l'espace. D'autres corps sont amenés à passer dans son voisinage. Ces autres corps perturbent son mouvement par effet gravitationnel. Jusqu'ici nous n'avons pas pris en compte l'influence de ces corps extérieurs dans le mouvement de rotation. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce nouveau chapitre.

Nous écrirons tout d'abord le Hamiltonien complet d'un corps solide ( $S$ ) en rotation, perturbé par la présence d'autres corps célestes. Ces autres corps seront considérés comme des masses ponctuelles. Nous nous permettrons, entre autres, de pouvoir utiliser un repère non inertiel comme repère de référence  $R$ . Ce repère  $R$  a été défini dans le chapitre 2. Cela nous oblige à rajouter dans le Hamiltonien un terme d'entraînement que nous décrirons de manière formelle.

Nous isolerons ensuite la partie forcée proprement dite du Hamiltonien et expliquerons les transformations qui nous permettent de l'exprimer en fonction des éphémérides caractérisant les mouvements de révolution des corps perturbateurs et des éphémérides du corps ( $S$ ) lui-même.

Nous présenterons enfin la théorie des transformées de Lie et son application à la méthode des perturbations des systèmes Hamiltoniens. Cette dernière nous permettra de résoudre, sous certaines conditions, le système d'équations différentielles lié au Hamiltonien de rotation d'un corps solide perturbé.

\* \* \*



### 3.1 Définition du repère de référence

Il nous faut maintenant choisir le repère de référence par rapport auquel nous allons étudier la rotation du corps ( $S$ ). Nous notons, au début du chapitre 2, ce repère:  $R = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,  $O$  étant toujours le barycentre du corps ( $S$ ). Nous définissons  $R$  ainsi :

- Le plan de référence ( $OX \times OY$ ) du repère de référence  $R$  sera **l'orbite apparente moyenne de la date du corps le plus influent sur la rotation de ( $S$ )**. Nous aurions pu prendre un plan inertiel comme l'écliptique  $J2000$ . Mais les complications que semblent apporter notre choix ne sont qu'apparentes. Certes, il faudra rajouter dans le Hamiltonien de la rotation forcée un terme d'entraînement  $E$ , mais d'une part son influence sera faible et d'autre part ce choix simplifiera les calculs que nous serons amenés à faire. Par exemple, pour Mars, nous prendrons le plan de l'orbite moyenne de Mars de la date qui correspond à l'orbite apparente du Soleil, ce dernier étant bien l'astre le plus influent sur la rotation. Ce choix simplifie considérablement les calculs.

- Le vecteur  $\vec{Z}$  sera le vecteur normal au plan de référence et tel que le trièdre  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  soit direct.

- L'axe  $OX$  sera dirigé vers le point d'origine des longitudes,  $D$ , défini dans le sous-chapitre 2.1. Ce point  $D$  sera le **Departure Point** que nous appellerons l'**Origine non-tournante**. L'Origine non-tournante est un point de référence naturel sur un plan non inertiel puisque par définition même, nous imposons au trièdre qui lui est associé de ne pas avoir de rotation suivant l'axe  $\vec{Z}$  (voir annexe III). La description ainsi que l'intérêt de ce point ont été traités en détail par Guinot (1979) et Capitaine et al. (1986). Notons que le choix de  $D$  à la date initiale est arbitraire. A  $J2000$ , on choisira  $D$  confondu avec le point  $\Gamma$  (noeud descendant du plan perpendiculaire au moment cinétique du corps ( $S$ ) sur le plan de référence).

Le repère  $R$ , pris à l'instant  $J2000$ , définira le repère  $R_1 = (O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  inertiel, que nous appellerons le **repère de base**, le plan de base étant l'orbite moyenne à  $J2000$ .

Les repères  $R$  et  $R_1$  ainsi que les angles permettant de les raccorder sont représentés sur la figure [3.1]. Ces angles  $\Pi$  et  $\pi$  sont définis ainsi :

- $\pi$  est l'angle entre le plan ( $OX \times OY$ ) du repère de référence  $R$  et le plan ( $OX_1 \times OY_1$ ) du repère de base  $R_1$  qui n'est rien d'autre que le repère  $R$  à  $J2000$ .
- $\Pi$  est l'angle défini dans le plan ( $OX_1 \times OY_1$ ) de  $R_1$  entre le point  $\Gamma$  à  $J2000$  et le point  $Q$ , le noeud ascendant du plan ( $OX \times OY$ ) de  $R$  sur  $R_1$ .

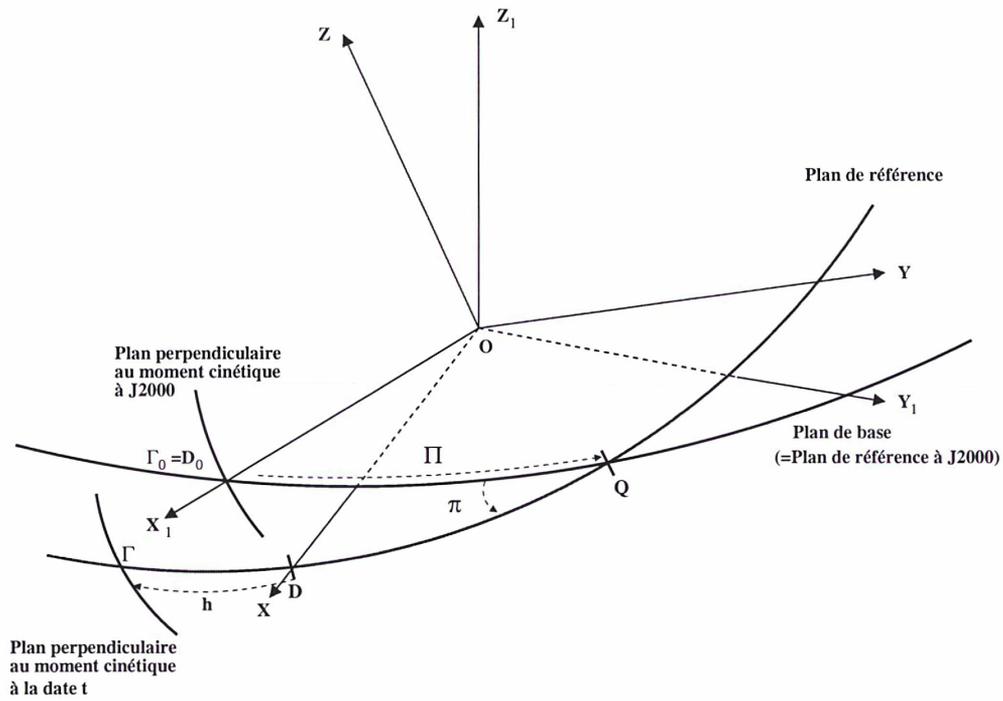


FIG. 3.1: Le plan de référence et le plan de base.

$\pi$  et  $\Pi$  correspondent aux variables classiques  $\pi_A$  et  $\Pi_A$  choisies de manière conventionnelle pour la Terre par Lieske et al. (1977).

\* \* \*

## 3.2 Description du Hamiltonien du problème

Le Hamiltonien  $K$  d'un corps solide en rotation peut s'écrire de manière très générale sous la forme suivante:

$$K = F_0 + \sum_i U^i + E \quad (3.1)$$

$F_0$  correspond au Hamiltonien libre d'un corps solide ( $S$ ) en rotation dans un repère inertiel. Ou encore,  $F_0$  est l'**énergie cinétique** de ( $S$ ). Nous avons décrit en détail cette partie du Hamiltonien dans le chapitre précédent. Sa formulation en fonction des variables d'Andoyer ( $l, G, L$ ) et des moments d'inertie ( $A, B, C$ ) de ( $S$ ) est donnée par la relation (2.3) ou par la relation (2.4). Le mouvement du corps solide soumis uniquement à l'influence de  $F_0$  est résumé dans le tableau de la page 77.

$E$  est, comme nous l'avons expliqué précédemment, un terme d'**entraînement** qui apparaît du fait du mouvement du repère de référence  $R$ . Nous exprimons ce terme en fonction des variables d'Andoyer ( $h, G, L$ ) et du temps  $t$  dans le sous-chapitre qui suit.

Enfin les termes  $U^i$  correspondent aux **potentiels gravitationnels** qu'exercent les corps célestes extérieurs ( $P^i$ ) sur le corps ( $S$ ). Leur formulation en fonction des mêmes variables d'Andoyer et du temps  $t$ , (qui apparaît par l'intermédiaires des éphémérides de révolution des corps perturbateurs ( $P^i$ ) et des éphémérides de révolution du corps ( $S$ )), est développée dans le sous-chapitre 3.2.2.

### 3.2.1 Description du terme d'entraînement $E$

Le choix de l'origine non-tournante  $D$  comme point de départ de l'angle  $h$  simplifie l'écriture de ce terme d'entraînement.

En effet, le terme d'entraînement  $E$  du Hamiltonien lié au mouvement de  $R$  par rapport à  $R_1$  s'écrit ainsi :

$$E = -\vec{\Omega}_{R/R_1} \cdot \vec{L} \quad (3.2)$$

Avec  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  le vecteur de rotation instantanée du repère  $R$  par rapport au repère  $R_1$  et  $\vec{L}$  le moment cinétique tel que nous l'avons défini au Chapitre 2 . D'après l'annexe III, le vecteur  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  s'exprime dans le repère de référence  $R$  ainsi :

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \begin{bmatrix} \dot{\pi} \cos(DQ) - \dot{\Pi} \sin \pi \sin(DQ) \\ \dot{\pi} \sin(DQ) + \dot{\Pi} \sin \pi \cos(DQ) \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (3.3)$$

La troisième composante de  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  dans  $R$  est nulle par définition même de  $D$ , l'origine non-tournante. L'expression de  $\vec{L}$  dans le même repère  $R$  s'écrit à l'aide des variables d'Andoyer ainsi :

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} G \sin I \sin h \\ -G \sin I \cos h \\ G \cos I \end{bmatrix}_R \quad (3.4)$$

Le terme d'entraînement  $E$  s'écrit donc de la manière suivante :

$$E = G \sin I \left[ \sin \pi \cos (h - \bar{D}Q) \dot{\Pi} - \sin (h - \bar{D}Q) \dot{\pi} \right] \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Description des termes de potentiel $U^i$

Un corps solide dans l'espace est soumis à l'action de forces extérieures exercées par les autres corps célestes. Cela se traduit dans le Hamiltonien du mouvement de rotation de  $(S)$  par l'ajout de termes  $U^1$ ,  $U^2$ , etc... qui représentent le potentiel gravitationnel exercé par chacun des corps extérieurs ( $P^i$ ) sur le corps  $(S)$  dont nous étudions la rotation. En considérant les corps extérieurs comme des points masses, nous pouvons écrire  $U^i$  sous la forme suivante:

$$U^i = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\kappa^2 M_i M R^n}{r_i^{n+1}} \left[ J_n P_n (\sin \delta_i) - \sum_{m=1}^n P_n^m (\sin \delta) (C_{mn} \cos m\alpha_i + S_{mn} \sin m\alpha_i) \right] \quad (3.6)$$

$\kappa^2$  est la constante universelle de la gravitation,

$M$  est la masse de  $(S)$ ,  $R$  le rayon équatorial de  $(S)$ ,  $r_i$  la distance de  $(S)$  à  $(P^i)$  et  $M_i$  la masse de  $(P^i)$ .  $\delta_i$  et  $\alpha_i$  sont respectivement la latitude et la longitude du corps perturbateur  $(P^i)$  dans le repère  $R_I$  des axes principaux d'inertie du corps  $(S)$ .

Les  $J_n$ , les  $C_{m,n}$  et les  $S_{m,n}$  sont des constantes (dans le cas d'un corps rigide) associées aux fonctions de Legendre  $P_n^m$ . Ces constantes permettent de décrire le champ de gravitation de  $(S)$ .

Dans le but de simplifier le Hamiltonien, nous assimilerons le corps  $(S)$  à un ellipsoïde en ne tenant pas compte des développements du potentiel en harmoniques sphériques supérieurs à 2. En effet la plupart du temps, la distance entre les corps est bien supérieure à leurs tailles. Cependant, pour certains corps, (la Lune par exemple), les effets des hamoniques sphériques d'ordre 3 ou 4 peuvent être importants du fait de la

relative proximité du corps perturbateur. Mais, même dans le cas de la Lune, il s'agit de perturbations plus faibles qui peuvent être traitées ultérieurement.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire le potentiel de la manière suivante :

$$U_2^i = \frac{\kappa^2 M_i}{r^3} \left[ \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2(\sin \delta_i) + \left( \frac{A - B}{4} \right) P_2^2(\sin \delta_i) \cos 2\alpha_i \right] \quad (3.7)$$

Nous ne prenons donc en compte que les effets de  $J_2$ ,  $S_{2,2}$  et  $C_{2,2}$  par l'intermédiaire des moments d'inertie principaux  $(A, B, C)$  de  $(S)$ . Dans le Chapitre 2, nous avons donné les relations entre ces différentes constantes dans le tableau [2.4].

Nous noterons :  $U_n^i$ , l'ordre  $n$  du développement du potentiel en harmonique sphérique de  $(P^i)$  sur  $(S)$ .

Les fonctions de Legendre associées, dont nous avons donc besoin, sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_2^1(x) &= 3x\sqrt{1-x^2} \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2) \end{aligned}$$

Si  $x = \sin y$  on a :

$$\begin{aligned} P_2(\sin y) &= \frac{3}{2}\sin^2 y - \frac{1}{2} \\ P_2^1(\sin y) &= 3\sin y \cos y \\ P_2^2(\sin y) &= 3\cos^2 y \end{aligned}$$

Kinoshita et al. (1974) et Kinoshita (1977) nous donnent un moyen d'écrire les fonctions  $P_2(\sin \delta_i)$  et  $P_2^2(\sin \delta_i) \cos 2\alpha_i$  comme dépendant, d'une part, des variables de rotation (ici les variables d'Andoyer) et, d'autre part, de la latitude  $\beta$  et de la longitude  $\lambda$  du corps perturbateur  $P^i$  par rapport au plan de référence  $(OX \times OY)$  de  $R$  et par rapport à l'origine non-tournante  $D$ . Soient :

$$\bullet P_2(\sin \delta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) A_1(I, h) + \sin 2J A_2(I, h, g) + \sin^2 J A_3(I, h, g) \quad (3.8)$$

$$\text{Avec } A_1(I, h) = \begin{cases} \frac{1}{2} (3 \cos^2 I - 1) P_2(\sin \beta) \\ -\frac{1}{2} \sin(2I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \\ -\frac{1}{4} \sin^2(I) P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h) \end{cases}$$

$$A_2(I, h, g) = \begin{cases} -\frac{3}{4} \sin(2I) P_2(\sin \beta) \cos g \\ -\sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 2\epsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - \epsilon g) \\ -\sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) P_2^2(\sin \beta) \cos(2\lambda - 2h - \epsilon g) \end{cases}$$

$$A_3(I, h, g) = \begin{cases} \frac{3}{4} \sin^2(I) P_2(\sin \beta) \cos 2g \\ +\frac{1}{4} \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon \sin(I) (1 + \epsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - 2\epsilon g) \\ -\frac{1}{16} \sum_{\epsilon=\pm 1} (1 + \epsilon \cos I)^2 P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h - \epsilon g) \end{cases}$$

et

$$\bullet P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha = \frac{1}{4} (1 + \cos J)^2 B_1(l; I, h, g) + \frac{1}{4} (1 - \cos J)^2 B_1(-l; I, h, g) \\ + \sin J (1 + \cos J) B_2(l; I, h, g) - \sin J (1 - \cos J) B_2(-l; I, h, g) + 3 \sin^2 J B_3(I, h, l) \quad (3.9)$$

$$\text{Avec } B_1(l; I, h, g) = \begin{cases} -3 \sin^2(I) P_2(\sin \beta) \cos 2(g + l) \\ -\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - 2\epsilon(g + l)) \\ +\sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \epsilon \cos I)^2 P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h - \epsilon(g + l)) \end{cases}$$

$$B_2(l; I, h, g) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \sin(2I) P_2(\sin \beta) \cos(g + 2l) \\ -\sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{2} (1 + \epsilon \cos I) (-1 + 2\epsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - \epsilon g - 2\epsilon l) \\ -\sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{4} \epsilon \sin I (1 + \epsilon \cos I) P_2^2(\sin \beta) \cos(2\lambda - 2h - 2\epsilon l - \epsilon g) \end{cases}$$

$$B_3(I, h, l) = \begin{cases} -\frac{1}{2} (3 \cos^2 I - 1) P_2(\sin \beta) \cos 2l \\ +\frac{1}{2} \sin(2I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \cos 2l \\ +\frac{1}{4} \sin^2(I) P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h) \cos 2l \end{cases}$$

Comme nous le voyons dans les équations précédentes, nous allons avoir besoin des cinq fonctions suivantes que nous pouvons exprimer à l'aide des trois composantes rectangulaires normalisées du corps perturbateur ( $P^i$ ) dans le repère  $R$  :  $X_i = \cos \beta \cos (\lambda - h)$ ,  $Y_i = \cos \beta \sin (\lambda - h)$  et  $Z_i = \sin \beta$ .

$$\begin{aligned}
 P_0 &= P_2 (\sin \beta) &= \frac{3}{2} Z_i^2 - \frac{1}{2} \\
 P_{1C} &= P_2^1 (\sin \beta) \cos (\lambda - h) &= 3 Z_i X_i \\
 P_{1S} &= P_2^1 (\sin \beta) \sin (\lambda - h) &= 3 Z_i Y_i \\
 P_{2C} &= P_2^2 (\sin \beta) \cos 2 (\lambda - h) &= 3 (X_i^2 - Y_i^2) \\
 P_{2S} &= P_2^2 (\sin \beta) \sin 2 (\lambda - h) &= 6 X_i Y_i
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nous pouvons donc entièrement exprimer le potentiel  $U_2^i$  en fonction de constantes, des variables d'Andoyer ( $h, g, l, H, G, L$ ), et des coordonnées rectangulaires ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) de ( $P^i$ ) dans  $R$ . Ces coordonnées nous seront données par les différentes éphémérides des corps perturbateurs ( $P^i$ ) et des éphémérides du barycentre du corps ( $S$ ) en fonction du temps  $t$ .

Notre Hamiltonien  $K$  étant entièrement décrit, il nous faut maintenant expliciter la méthode qui va nous permettre de trouver les solutions correspondantes.

\* \* \*



### 3.3 Méthode de résolution

Soit un Hamiltonien de la forme :

$$K(p, q; \epsilon) = K_0(p, q) + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} K_n(p, q) \quad (3.11)$$

où  $q$  est un vecteur représentant les  $r$  variables angulaires du problème,  $p$  leurs variables conjuguées et  $\epsilon$  un petit paramètre. Par exemple, dans le cas de la rotation libre :  $q = (g, l)$  sont les 2 degrés de liberté et  $p = (G, L)$  sont les variables conjuguées respectivement à  $g$  et  $l$ .

En supposant que nous savons intégrer le Hamiltonien d'ordre 0,  $K_0(p, q)$ , et que nous pouvons considérer la seconde partie du Hamiltonien comme des perturbations d'ordre supérieur, la théorie des perturbations des systèmes Hamiltoniens consiste à effectuer un changement de variable canonique proche de l'identité pour ramener ce problème à l'étude d'un nouveau Hamiltonien plus simple que nous pourrions intégrer complètement. Nous nous aiderons pour trouver ce changement de variable de la transformée de Lie.

**La transformée de Lie:  $E_W(K)$** 

La transformée de Lie d'une fonction  $K(p, q; \epsilon)$  générée par une autre fonction  $W(p, q; \epsilon)$  est la fonction notée  $E_W(K)$  et définie ainsi :

$$E_W(K) = \sum_{j \geq 0} \frac{\epsilon^j}{j!} K^{(j)}(p, q; 0) \quad (3.12)$$

$$\text{Avec} \quad K^{(j)}(p, q; 0) = \left[ \Delta_{W(p, q; \epsilon)}^j K(p, q; \epsilon) \right]_{\epsilon=0}$$

$$\underbrace{\Delta_W^j(K) = \Delta_W(\Delta_W \dots (\Delta_W(K)))}_{j \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \Delta_W(K)(p, q; \epsilon) = L_W(K) + \frac{\partial K}{\partial \epsilon}$$

$L_W(K)$  s'appelle la dérivée de Lie de la fonction  $K$  et est égale au crochet de Poisson

$$\{K, W\} = \sum_{i \leq r} \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial W}{\partial q_i}.$$

Cette transformation possède deux propriétés qui vont nous être grandement utiles :

- La transformée de Lie comme solution d'un système d'équations différentielles.

Soit le système d'équations canoniques suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial W(p, q; \epsilon)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial W(p, q; \epsilon)}{\partial q_i} \end{cases}$$

avec, pour condition initiale à  $\epsilon = 0$  :  $q = \tilde{q}$  et  $p = \tilde{p}$ . Alors, la solution de ce système (I) est :

$$\begin{aligned} q_i(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon) &= E_W(\tilde{q}_i) \\ p_i(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon) &= E_W(\tilde{p}_i) \end{aligned}$$

Nous pouvons regarder cette solution comme un changement de variable canonique entre les variables  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  et les variables  $(p, q)$ .

- Le théorème de commutation.

Soit une fonction  $K(p, q; \epsilon)$  analytique en  $\epsilon$  avec  $p$  et  $q$  solutions du système (I) et  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  définis comme précédemment. Le théorème de commutation est le suivant :

$$K[E_W(\tilde{p}), E_W(\tilde{q}); \epsilon] = E_W(K(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)) \quad (3.13)$$

**Une méthode pour calculer  $E_W(K)$ : le triangle de Lie**

La méthode du triangle de Lie (Deprit, 1969) permet, connaissant la fonction génératrice  $W$ , de déterminer de manière récursive la transformée de Lie d'une fonction  $K$  analytique en  $\epsilon$ . Cette méthode peut aussi permettre, à l'inverse, connaissant la fonction  $K$  et la transformée de Lie  $T^K = E_W K$ , de déterminer la fonction génératrice  $W$ .

La méthode est la suivante :

Nous écrivons  $K(p, q; \epsilon)$  de la même manière que dans (3.11) et  $W$  sous la forme du développement suivant en série de puissance de  $\epsilon$  :

$$W(p, q; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{(n)!} W_{n+1}(p, q)$$

Nous avons alors une forme similaire à (3.11) pour  $\Delta_W^j K$ . Soit :

$$(\Delta_W^j K)(p, q; \epsilon) = (\Delta_W^j K)_0(p, q) + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} (\Delta_W^j K)_n(p, q)$$

Nous posons de manière formelle  $K_n^0 = K_n$ . Nous posons de même  $K_n^j = (\Delta_W^j K)_n$ . Nous voyons que  $T^K(p, q; \epsilon)$ , la transformée de Lie de  $K$ , peut s'écrire également sous

la forme (3.11), avec  $T_n^K = K_0^n$  d'après la définition de la transformée de Lie (3.12). Nous disposons schématiquement les fonctions  $K_i^j$  sur un triangle pour mieux visualiser l'algorithme de calcul de chacune de ces fonctions (voir la représentation Fig. [3.2]).

Dans ce triangle, chaque région du graphique d'une forme semblable à celle encadrée est liée par la relation suivante :

$$K_n^j = K_{n+1}^{j-1} + \sum_{m \leq n} C_n^m \{K_{n-m}^{j-1}, W_{m+1}\} \tag{3.14}$$

Soit nous connaissons la première colonne du graphique,  $K$ , et la fonction génératrice  $W$ , et alors nous pouvons calculer  $T^K$  grâce à cette relation (3.14).

Soit nous connaissons la première colonne du graphique et sa diagonale, (qui représente  $T^K$ ), et nous pouvons déterminer la fonction génératrice  $W$ .

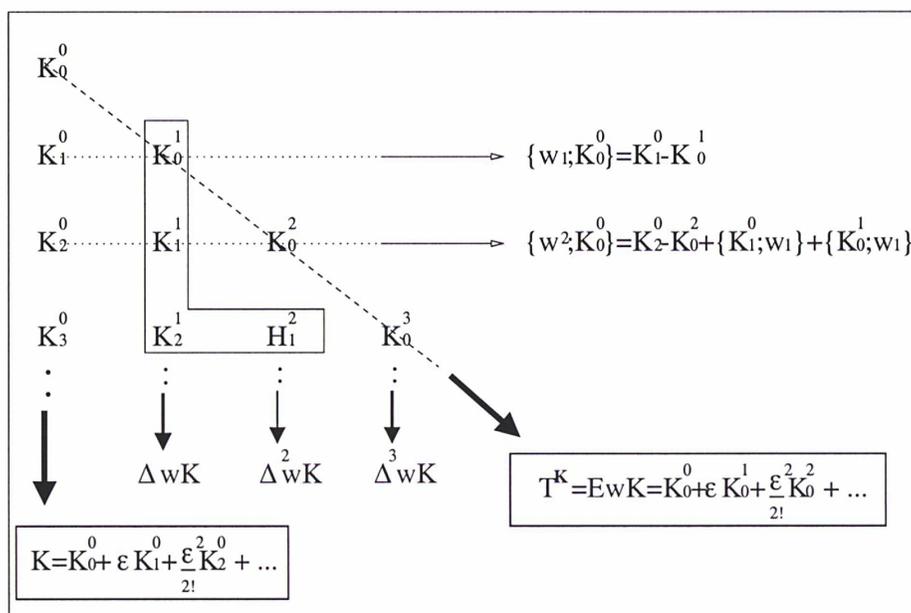


FIG. 3.2: Triangle de Lie

**Application de la transformée de Lie aux systèmes Hamiltoniens**

L'application de la transformée de Lie à la résolution des systèmes Hamiltoniens consiste à chercher un changement de variables canoniques (des variables  $(p, q)$  aux variables  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ ) qui soit "solution" du système (I) (c'est à dire tel que  $q_i = E_W(\tilde{q}_i)$  et  $p_i = E_W(\tilde{p}_i)$ ) et qui transforme le Hamiltonien  $K(p, q; \epsilon)$  en un Hamiltonien  $T^K(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$  dont nous sachions intégrer simplement les équations canoniques. D'après le théorème de commutation (3.13),  $T^K$  est la transformée de Lie de  $K$ :

$$K(p, q; \epsilon) = K(E_W(\tilde{p}), E_W(\tilde{q}); \epsilon) = E_W[K(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)] = T^K(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$$

Cela se fait de manière récursive en déterminant au fur et à mesure la fonction génératrice  $W(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$  en se servant du triangle de Lie. Pour ce faire, nous devons choisir au fur et à mesure ce que contiendra le nouveau Hamiltonien  $T^K = E_W K$ . Le choix de  $T^K$  est important : il faut en particulier que nous sachions intégrer les équations différentielles qui en découlent et ainsi exprimer  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  en fonction du temps .

- Par exemple : essayons de déterminer  $W_1(\tilde{p}, \tilde{q})$ , l'ordre 1 de  $W(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$ .

Nous avons la relation suivante d'après le triangle de Lie de la figure [3.2] ou d'après la relation (3.14) :

$$\{W_1, K_0^0\} = \sum_{i \leq r} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial K_0^0}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial K_0^0}{\partial \tilde{q}_i} = \sum_{i \leq r} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{p}_i} \dot{\tilde{p}}_i = \frac{dW_1}{dt} = K_1^0 - K_0^1 \quad (3.15)$$

Nous connaissons  $K_1^0(\tilde{p}, \tilde{q})$  qui est le premier ordre du Hamiltonien  $K$  non transformé dans lequel nous avons substitué formellement  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  à  $(p, q)$ . Nous connaissons également  $K_0^1(\tilde{p}, \tilde{q})$  qui est ce que nous choisissons de laisser dans le Hamiltonien transformé  $T^K$ . Donc, par intégration par rapport au temps  $t$  nous déterminons  $W_1$  :

$$W_1 = \int (K_1^0 - K_0^1) dt$$

Pour l'intégration, on prend donc  $\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial K_0^0}{\partial \tilde{p}_i}$  et  $\dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial K_0^0}{\partial \tilde{q}_i}$ .

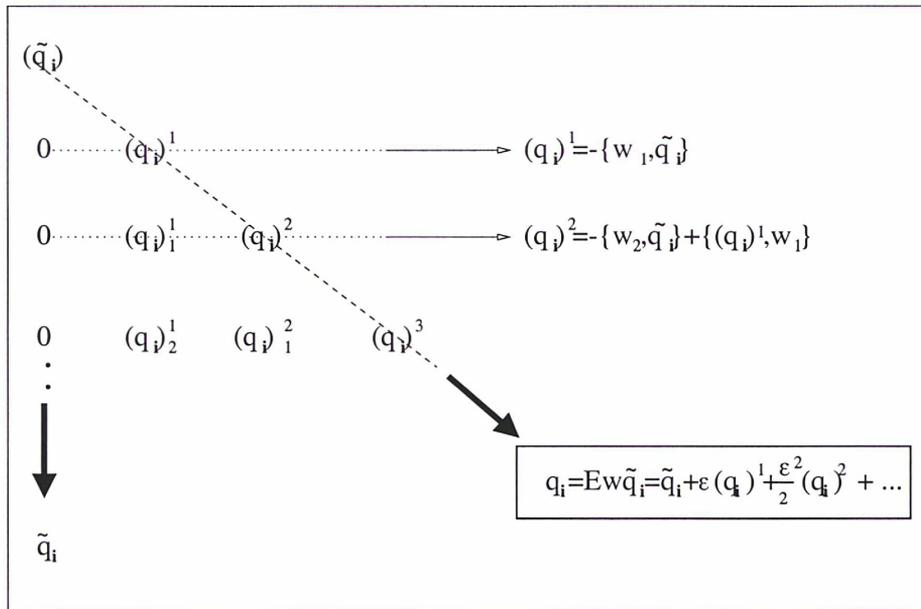
- Déterminons maintenant  $W_2(\tilde{p}, \tilde{q})$  l'ordre 2 de  $W(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$ .

Nous avons, toujours d'après le triangle de la figure [3.2] et la relation (3.14), l'expression suivante pour  $W_2$  :

$$\frac{dW_2}{dt} = K_2^0 - K_0^2 + \{K_1^0, W_1\} + \{K_0^1, W_1\} \quad (3.16)$$

Nous connaissons  $K_2^0, K_0^2, K_1^0, K_0^1$  et  $W_1$  donc, par intégration par rapport au temps  $t$  nous déterminons  $W_2$

Une fois la fonction génératrice  $W(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$  déterminée avec la précision désirée, nous pouvons déterminer le changement de variables canoniques et donc les fonctions  $p_i(\tilde{p}, \tilde{q}, \epsilon) = E_W(\tilde{p}_i)$  et  $q_i(\tilde{p}, \tilde{q}, \epsilon) = E_W(\tilde{q}_i)$ . Il est plus facile de revenir au triangle de Lie pour déterminer ces fonctions en sachant que la fonction dont on veut la transformée de Lie est ici simplement  $\tilde{q}_i$  ou  $\tilde{p}_i$  (représentation graphique du triangle de Lie pour  $\tilde{q}_i$  sur la figure [3.3]).


 FIG. 3.3: Triangle de Lie pour  $q_i$ 

La relation qui exprime donc  $q_i$  en fonction de  $(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$  est la suivante :

$$\Delta q_i = q_i - \tilde{q}_i = \epsilon \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{\epsilon^2}{2} \left[ \frac{\partial W_2}{\partial \tilde{p}_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{p}_i}, W_1 \right\} \right] + \dots \quad (3.17)$$

De même, la relation qui exprime  $p_i$  en fonction de  $(\tilde{p}, \tilde{q}; \epsilon)$  est la suivante :

$$\Delta p_i = p_i - \tilde{p}_i = -\epsilon \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{q}_i} - \frac{\epsilon^2}{2} \left[ \frac{\partial W_2}{\partial \tilde{q}_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{q}_i}, W_1 \right\} \right] + \dots \quad (3.18)$$

Il nous faut maintenant appliquer cette méthode au Hamiltonien  $K$  de la rotation forcée d'un corps solide (cf. relation (3.1)).

**Application au Hamiltonien de la rotation forcée des corps rigides**

D'après la relation (3.1), le Hamiltonien  $K$  de la rotation forcée d'un corps rigide ( $S$ ) s'écrit :

$$K(h, g, l, H, G, L; t) = F_0(l, G, L) + E(h, H, G; t) + \sum_i U^i(h, g, l, H, G, L; t)$$

$K$  dépend des variables d'Andoyer  $(h, g, l, H, G, L)$  mais aussi du temps  $t$  par l'intermédiaire des éphémérides planétaires nécessaires à la détermination du potentiel gravitationnel perturbateur  $U^i$  et par l'intermédiaire des angles  $\pi$  et  $\Pi$  nécessaires à la détermination de  $E$ , le terme d'entraînement entre le repère  $R$  et  $R_1$ .

La méthode que nous venons de décrire dans les pages précédentes exige un Hamiltonien  $K$  qui ne dépende pas explicitement du temps  $t$ . Cependant, il est possible, en augmentant d'un degré de liberté le système, de faire disparaître le temps  $t$  du Hamiltonien  $K$ . Nous avons déjà 3 degrés de liberté :  $h$ ,  $g$  et  $l$ . Le quatrième degré de liberté, que nous noterons  $q_4$  sera le temps lui-même,  $q_4 = t$ , et sa variable conjuguée sera  $p_4 = -K$ . Ces variables  $(h, g, l, q_4, H, G, L, p_4)$  sont toujours canoniques et le nouveau Hamiltonien  $\bar{K}$  du problème ne dépend plus explicitement du temps  $t$  et s'écrit maintenant :

$$\bar{K}(h, g, l, q_4, H, G, L, p_4) = K(h, g, l, H, G, L; t) + p_4$$

Nous avons vu dans le Chapitre 2 que, en utilisant les variables canoniques  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$  associées respectivement aux actions  $\tilde{G}$  et  $\tilde{L}$  du mouvement libre, on obtenait un nouveau Hamiltonien  $\tilde{F}_0(\tilde{G}, \tilde{L})$  purement séculaire pour le mouvement libre, (par purement séculaire, nous entendons, que  $\tilde{F}_0$  ne dépend que des variables d'actions). On a, de plus, remarqué que l'action  $\tilde{G}$  était égale à la variable d'Andoyer  $G$  et que plus le coefficient de triaxialité  $e$  du corps ( $S$ ) tendait vers 0, plus l'action  $\tilde{L}$  tendait vers la variable d'Andoyer  $L$ .

L'idée que Kinoshita (1977) a appliquée à la rotation de la Terre est dans un premier temps de faire le même changement de variables canoniques que ci-dessus dans le cas de la rotation forcée : c'est à dire de remplacer  $(h, g, l, q_4, H, G, L, p_4)$  par  $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, q_4, H, G, \tilde{L}, p_4)$  dans le Hamiltonien  $\bar{K}$ . Le travail que nous avons fait dans le Chapitre 2 et en particulier les relations (2.27) ou (2.28), qui expriment les variables  $g$ ,  $l$  et  $J$  ( $= \arccos \frac{L}{G}$ ) en fonction des variables  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{l}$  et  $\tilde{J}$  ( $= \arccos \frac{\tilde{L}}{\tilde{G}}$ ), vont nous permettre de faire ce changement entre les anciennes variables et les nouvelles. On remarque entre autres que ce changement de variable ne modifie pas les variables  $h$ ,  $H$  et  $G$  qui restent les variables d'Andoyer classiques. Ces nouvelles variables seront notées  $(p, q)$

avec  $q = (h, \tilde{g}, \tilde{l}, t)$  et  $p = (H, G, \tilde{L}, -K)$  et notre nouveau Hamiltonien exprimé avec ces nouvelles variables  $\tilde{K}(p, q) = \tilde{K}(h, g, l, q_4, H, G, L, p_4)$ . Nous noterons cependant sans risque de confusion dans la suite : le Hamiltonien de la rotation forcée  $\tilde{K}(p, q)$  par  $K(p, q)$ , la partie correspondante au Hamiltonien de la rotation libre  $\tilde{F}_0(p)$  par  $F_0(p)$  (qui ne dépend plus que des moments  $p_i$  grâce à ce changement de variables), les parties correspondantes aux potentiels perturbateurs des corps extérieurs mais exprimées avec les variables  $(p, q)$  par  $U^i(p, q)$  et le terme d'entraînement avec les variables  $(p, q)$  par  $E(p, q)$ .

Une fois effectué ce premier changement de variables canoniques, nous appliquons, comme Kinoshita (1977), au Hamiltonien  $K(p, q)$  la méthode de Lie (ou de Hori (1966)) que nous avons explicitée précédemment. Nous écrivons d'abord le Hamiltonien  $K$  sous la forme (3.11) suivante avec  $\epsilon = 1$  :

$$K_0^0 = F_0(p) + p_4 \text{ (soit le Hamiltonien libre plus la variable conjuguée du temps)}$$

$$K_1^0 = K(p, q) - K_0^0 - K_0^1 \text{ (soit le reste du Hamiltonien forcé moins } K_0^1\text{).}$$

$$K_{j>1}^0 = 0.$$

L'ordre "0" est, comme nous le voyons, purement séculaire et correspond donc pour les variables  $(h, \tilde{g}, \tilde{l})$  au problème de la rotation libre étudiée en détail dans le Chapitre 2. Nous appliquons ensuite la méthode itérative explicitée précédemment en cherchant un second changement de variables canoniques de la forme  $p_i = E_W(\tilde{p}_i)$  et  $q_i = E_W(\tilde{q}_i)$  permettant d'avoir un nouveau Hamiltonien  $T^K(\tilde{p}, \tilde{q}) = E_W(K(\tilde{p}, \tilde{q}))$  que nous sachions intégrer.

Comme cela se fait habituellement, nous choisissons de mettre dans  $T^K(\tilde{p}, \tilde{q})$  uniquement les parties purement séculaires obtenues au cours du processus itératif. Les variables  $\tilde{p}_i$  seront donc des constantes et les variables  $\tilde{q}_i$  des applications affines du temps  $t$  de la forme  $\tilde{q}_i = n_{\tilde{q}_i} t + \tilde{q}_i^0$  avec  $n_{\tilde{q}_i} = \frac{\partial T^K}{\partial \tilde{p}_i}$ . Dans la suite nous appellerons ces variables  $\tilde{p}_i$  et  $\tilde{q}_i$  les variables séculaires du mouvement et nous les noterons  $p_i^s = (H^s, G^s, \tilde{L}^s, p_4^s)$  et  $q_i^s = (h^s, \tilde{g}^s, \tilde{l}^s, q_4^s)$  pour éviter les confusions avec les variables  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$ .

Les parties non-séculaires sont intégrées selon l'algorithme itératif défini précédemment pour déterminer la fonction génératrice  $W$  qui permettra de déterminer à son tour explicitement le changement de variables canoniques  $p_i = E_W(p_i^s)$  et  $q_i = E_W(q_i^s)$ .

Nous obtiendrons enfin les variables d'Andoyer  $(h, g, l, H, G, L)$  à l'aide des relations (2.27) ou (2.28) définies à la fin du Chapitre 2 et des variables  $(p, q)$ .

Nous allons maintenant développer plus précisément le premier ordre de cette méthode.

Le premier ordre de manière pratique :

*A partir de maintenant, nous ne différencierons les variables  $(p, q)$  des variables  $(p^s, q^s)$  que quand cette différence n'est pas simplement formelle. Dans les autres cas nous utiliserons les variables  $(p, q)$ .*

Il nous faut d'abord déterminer  $K_0^1$ , l'ordre "1" de  $T^K$  le nouveau Hamiltonien. D'après le choix que nous avons fait pour  $K_1^0$  et le fait que nous voulons un  $T^K$  purement séculaire,  $K_0^1$  sera la partie séculaire du Hamiltonien  $K$  une fois  $K_0^0 = F_0(p) + p_4$  enlevé de celui-ci. Donc  $K_0^1$  contiendra la partie séculaire de  $U^i$  et  $E$  une fois que nous avons remplacé dans leurs expressions respectives (3.7) et (3.5) les variables  $g, l$  et  $J$  par leurs expressions en fonction de  $\tilde{g}, \tilde{l}$  et  $\tilde{J}$  grâce aux relations (2.27) ou (2.28).  $E$  ne dépend pas de ces variables et donc le changement de variables ne modifie pas l'expression de  $E$ . De plus, le choix de  $D$  l'origine non-tournante comme origine de la variable d'Andoyer  $h$  fait qu'il n'y a pas de partie indépendante de la variable  $h$  et donc pas de partie séculaire dans  $E$ .

$K_0^1$  se réduit donc à la partie séculaire de  $U^i$ . Kinoshita (1977) donne l'expression de cette partie séculaire de  $U^i(p, q)$  dans le cas où il n'y pas de commensurabilité entre les variables  $\tilde{g}, \tilde{l}$  et les arguments utilisés dans les éphémérides du corps perturbateur ( $P^i$ ) (cf. le sous-chapitre 4.2.1). Cette expression est la suivante :

$$U_{sec}^i = \frac{\kappa^2 M_i}{a_i^3} \frac{2C - A - B}{4} \left[ (3 \cos^2 \tilde{J} - 1) + O(\tilde{J}^2 e^2) \right] \times \left[ \frac{a_i^3 A_1(I, h)}{r^3} \right]_{sec} \quad (3.19)$$

avec  $a_i$  le demi-grand axe du corps perturbateur ( $P^i$ ) et  $A_1(I, h)$  une fonction dépendant des variables  $I$  et  $h$  et du corps perturbateur ( $P^i$ ) (cf. relation (3.8)).

Remarque: Cependant, pour beaucoup de corps, l'hypothèse de non-commensurabilité n'est pas vérifiée.

Par exemple, pour la Lune, ou tout corps en résonance "spin-orbite" autour d'un autre corps ( $C$ ), les variables  $\tilde{g}, \tilde{l}$  et  $\lambda_i$  vont être commensurables ( $\lambda_i$  étant la longitude moyenne de ( $C$ )).

Mais il n'est pas nécessaire d'avoir une expression formelle pour la partie séculaire de  $U^i(p, q)$ . En effet, quand nous exprimerons  $U^i(p, q)$  en série de Poisson (cf. le sous-chapitre 4.2.1) la partie séculaire apparaîtra naturellement.

Une fois déterminé  $K_0^1$  l'ordre "1" du nouveau Hamiltonien  $T^K$ , nous cherchons à déterminer l'ordre "1" de la fonction génératrice  $W$ . Grâce à la relation (3.15), nous pouvons écrire :

$$\frac{dW_1}{dt} = K_1^0 - K_0^1 = \sum_i [U^i - U_{sec}^i] + E \quad (3.20)$$

Nous connaissons l'expression du second membre de cette relation. Il nous suffit donc d'intégrer cette équation par rapport au temps  $t$ . Cette intégration se fait d'après la relation (3.15) en prenant pour les dérivées des variables angulaires  $\dot{h} = \frac{\partial F_0}{\partial H} = 0$ ,  $\dot{g} = \frac{\partial F_0}{\partial G} = n_{\tilde{g}}$  et  $\dot{l} = \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{L}} = n_{\tilde{l}}$ , et pour leurs variables conjuguées  $H$ ,  $G$  et  $\tilde{L}$  des constantes. Les fréquences angulaires  $n_{\tilde{g}}$  et  $n_{\tilde{l}}$  sont donc celles déterminées dans le Chapitre 2 pour le mouvement libre.

Une fois que  $W_1$  et  $K_0^1$  sont déterminés au premier ordre, nous pouvons également déterminer au premier ordre les variables  $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, q_4, H, G, \tilde{L}, p_4)$  grâce aux relations (3.17) et (3.18). Soient :

$$\begin{aligned} h &= h^s + \Delta h = h^s + \frac{\partial W_1}{\partial H} & H &= H^s + \Delta H = H^s - \frac{\partial W_1}{\partial h} \\ \tilde{g} &= \tilde{g}^s + \Delta \tilde{g} = \tilde{g}^s + \frac{\partial W_1}{\partial G} & G &= G^s + \Delta G = G^s - \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{g}} \\ \tilde{l} &= \tilde{l}^s + \Delta \tilde{l} = \tilde{l}^s + \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{L}} & \tilde{L} &= \tilde{L}^s + \Delta \tilde{L} = \tilde{L}^s - \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{l}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où les  $(h^s, \tilde{g}^s, \tilde{l}^s, H^s, G^s, \tilde{L}^s)$  sont les solutions du nouveau Hamiltonien purement séculaire  $T^K = F_0 + K_0^1$ . C'est à dire :  $H^s, G^s, \tilde{L}^s$  sont des constantes et, en se rappelant que  $\frac{\partial F_0}{\partial H} = 0$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial G} = n_{\tilde{g}}$  et  $\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{L}} = n_{\tilde{l}}$ , les variables  $h^s, \tilde{g}^s$  et  $\tilde{l}^s$  sont les applications affines suivantes :

$$h^s = h_0^s + \left[ \frac{\partial K_0^1}{\partial H} \right] t \quad \tilde{g}^s = \tilde{g}_0^s + \left[ n_{\tilde{g}} + \frac{\partial K_0^1}{\partial G} \right] t \quad \tilde{l}^s = \tilde{l}_0^s + \left[ n_{\tilde{l}} + \frac{\partial K_0^1}{\partial \tilde{L}} \right] t \quad (3.22)$$

Nous passons ensuite des variables  $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, H, G, \tilde{L})$  aux variables d'Andoyer  $(h, g, l, H, G, L)$  grâce aux relations (2.27) et (2.28).

Comme nous avons exprimé le Hamiltonien  $K(h, g, l, H, G, L; t)$  non pas en fonction directement de  $L$  et  $H$  mais en fonction respectivement des angles  $I$  et  $J$  qui leur sont associés par les relations :  $\cos I = \frac{H}{G}$  et  $\cos J = \frac{L}{G}$  (cf. relation (3.1)), comme les relations (2.27) et (2.28) expriment  $J$  en fonction de  $\tilde{J}$  et non pas  $L$  en fonction de  $\tilde{L}$ , le Hamiltonien que nous notons  $K(p, q) = K(h, \tilde{g}, \tilde{l}, q_4, H, G, \tilde{L}, p_4)$  s'exprime en fait en fonction de  $I$  et  $\tilde{J}$  plutôt qu'en fonction de  $H$  et  $\tilde{L}$ . Nous préférons donc nous servir des variables  $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, I, G, \tilde{J})$  bien que celles-ci ne soient plus canoniques.

En nous servant des dérivés partielles de  $I$  et de  $\tilde{J}$  par rapport à  $H$ ,  $G$  et  $\tilde{L}$  suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin I} & \frac{\partial I}{\partial G} &= \frac{\cos I}{G \sin I} \\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tilde{L}} &= -\frac{1}{G \sin \tilde{J}} & \frac{\partial \tilde{J}}{\partial G} &= \frac{\cos \tilde{J}}{G \sin \tilde{J}} \end{aligned}$$

les relations (3.21) deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} h &= h^s + \Delta h = h^s - \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} \\ \tilde{g} &= \tilde{g}^s + \Delta \tilde{g} = \tilde{g}^s + \frac{1}{G} \left( \frac{\cos I}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} + \frac{\cos \tilde{J}}{\sin \tilde{J}} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{J}} \right) \\ \tilde{l} &= \tilde{l}^s + \Delta \tilde{l} = \tilde{l}^s - \frac{1}{G \sin \tilde{J}} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{J}} \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} I &= I^s + \Delta I = I^s + \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial h} - \frac{\cos I}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{g}} \right) \\ G &= G^s + \Delta G = G^s - \frac{\partial W_1}{\partial g} \\ \tilde{J} &= \tilde{J}^s + \Delta \tilde{J} = \tilde{J}^s \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin \tilde{J}} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{l}} - \frac{\cos \tilde{J}}{\sin \tilde{J}} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{g}} \right) \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont celles écrites par Kinoshita (1977) pour ces mêmes variables. En faisant le même raisonnement avec les variables séculaires, les variables  $G^s$ ,  $I^s$  et  $\tilde{J}^s$  sont des constantes avec  $\cos I^s = H^s/G^s$  et  $\cos \tilde{J}^s = L^s/G^s$  et les relations (3.22) définissant  $h^s$ ,  $\tilde{g}^s$  et  $\tilde{l}^s$  deviennent :

$$\begin{aligned} h^s &= h_0^s - \left[ \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial K_0^1}{\partial I} \right] t \\ \tilde{g}^s &= \tilde{g}_0^s + \left[ n_{\tilde{g}} + \frac{\cos I}{G \sin I} \frac{\partial K_0^1}{\partial I} + \frac{\cos \tilde{J}}{G \sin \tilde{J}} \frac{\partial K_0^1}{\partial \tilde{J}} \right] t \\ \tilde{l}^s &= \tilde{l}_0^s + \left[ n_{\tilde{l}} - \frac{1}{G \sin \tilde{J}} \frac{\partial K_0^1}{\partial \tilde{J}} \right] t \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tout cela n'est bien sûr possible que si  $K_1^0$  modélise une perturbation faible du mouvement libre représenté par  $K_0^0$  ; plus cette perturbation sera faible, moins nous aurons besoin d'itérer le processus de résolution.

Nous allons dans le chapitre suivant appliquer cette méthode au cas de la planète Mars.

\* \* \*



# Chapitre 4

## Mouvement de rotation forcée : application à Mars

### Introduction

Pour appliquer la méthode décrite dans le Chapitre 3 à la planète Mars, nous devons dans un premier temps vérifier si le mouvement de rotation perturbé est bien une faible perturbation par rapport au mouvement de rotation libre.

Une fois cette condition remplie, nous nous intéresserons au mouvement de l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$ , encore appelé couramment "axe de figure" dans le repère de référence  $R$ . Comme la variable d'Andoyer  $J$ , qui est l'écart angulaire entre l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe  $OC$ , est pour la planète Mars voisin de 0, le mouvement de  $OC$  est très proche du mouvement de  $\vec{L}$ .

Nous allons donc dans un premier temps étudier le mouvement de l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  dans l'espace (plus précisément dans le repère  $R$ ) grâce aux variables d'Andoyer  $H$  et  $h$  (ou  $I$  et  $h$ ) qui le décrivent. Nous regarderons en détail, les parties du Hamiltonien  $K$  susceptibles d'agir sur ces deux variables ( $U^S$  : l'influence du Soleil,  $U^P$  : l'influence de Phobos,  $E$  le terme d'entraînement entre les repères  $R$  et  $R_1$ , etc ...).

Dans un deuxième temps, une fois le mouvement de l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  de Mars connu, nous évaluerons l'écart entre cet axe et l'axe de figure en exprimant les termes d'Oppolzer en fonction des variables d'Andoyer  $(h, g, l, H, G, L)$ .

Enfin, nous comparerons nos résultats théoriques avec les observations combinées des sondes Viking et Pathfinder. Cela nous permettra principalement de tirer des conclusions sur l'incertitude d'une constante importante pour la description de la rotation de Mars : la constante  $\frac{MR^2}{C}$ . Nous verrons également ce que cela implique sur le mouvement de rotation de Mars pour des périodes de l'ordre de 500000 ans.

\* \* \*



## 4.1 Possibilité d'application de la méthode du Chapitre 3 à Mars

Les différents corps dont nous allons considérer l'influence sur la rotation de Mars sont :

- le Soleil,
- les satellites Phobos et Deimos,
- les planètes Vénus, Terre, Jupiter et Saturne.

Il n'est pas nécessaire de tenir compte des autres corps célestes. leurs influences seraient inférieures à celle de Saturne qui est, comme nous le verrons, en dessous de notre seuil de précision (0.0001 secondes d'arc).

Pour savoir si la méthode d'intégration des équations canoniques explicitée précédemment est valable dans le cas de Mars, il faut vérifier que l'influence de tous ces corps célestes (potentiel  $U^i$ ) et le terme d'entraînement  $E$  sont bien de faibles perturbations du mouvement libre. Nous nous doutons intuitivement que le corps qui perturbe le plus la rotation de Mars est le Soleil. Nous nous intéressons donc en priorité au rapport du potentiel gravitationnel du Soleil  $U^S$  sur  $F_0$ , le Hamiltonien de la rotation libre.

$$\begin{aligned} \frac{U^S}{F_0} &\simeq \frac{M_s}{r_s^3} \left[ 2C - A - B + \frac{3}{2}(B - A) \right] \frac{C}{L^2} \simeq \frac{2M_s}{M + M_s} \left( \frac{n}{\omega} \right)^2 \frac{MR^2}{C} \left[ J_2 + \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2} \right] \\ &\simeq 2.4 \cdot 10^{-8} \text{ (terme en } J_2) + 7.7 \cdot 10^{-10} \text{ (terme en } C_{22} \text{ et } S_{22}) \\ &\simeq 2.5 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Nous nous intéressons ensuite aux rapports des  $U^i$  des autres corps perturbateurs ( $U^P$  (Phobos),  $U^D$  (Deimos),  $U^J$  (Jupiter),  $U^T$  (Terre),  $U^V$  (Vénus) et  $U^{Sa}$  (Saturne)) sur  $U^S$ .

$$\begin{aligned} \bullet \text{Pour Phobos} \quad \frac{U^P}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_P}{M_s} \right) \left( \frac{a_s}{a_P} \right)^3 \simeq \mathbf{0.0927} \\ \bullet \text{Pour Deimos} \quad \frac{U^D}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_D}{M_s} \right) \left( \frac{a_s}{a_D} \right)^3 \simeq \mathbf{8.3 \cdot 10^{-4}} \\ \bullet \text{Pour Jupiter} \quad \frac{U^J}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_J}{M_s} \right) \left( \frac{a_s}{a_J} \right)^3 \simeq \mathbf{2.4 \cdot 10^{-5}} \\ \bullet \text{Pour Terre} \quad \frac{U^T}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_T}{M_s} \right) \simeq \mathbf{3.0 \cdot 10^{-6}} \\ \bullet \text{Pour Vénus} \quad \frac{U^V}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_V}{M_s} \right) \simeq \mathbf{2.4 \cdot 10^{-6}} \\ \bullet \text{Pour Saturne} \quad \frac{U^{Sa}}{U^S} &\simeq \left( \frac{M_{Sa}}{M_s} \right) \left( \frac{a_s}{a_{Sa}} \right)^3 \simeq \mathbf{1.6 \cdot 10^{-6}} \end{aligned}$$

Enfin nous nous intéressons au rapport de  $E$ , le terme d'entraînement, sur  $F_0$ .

$$\frac{E}{F_0} \simeq \frac{2\pi}{\omega} \simeq \mathbf{4.0 \cdot 10^{-9}}$$

$(M_P, M_D, \text{etc } \dots)$  sont les masses des différents corps et  $(a_P, a_D, \text{etc } \dots)$  sont leurs demi-grands axes au Soleil (avec  $a_s$  le demi-grand axe de Mars). Les paramètres liés à Mars ( $J_2, C_{22}, S_{22}, n, \omega, \frac{MR^2}{C}, \dots$ ) ont déjà été définis et évalués numériquement dans les tableaux [2.4] et [2.5].  $\dot{\pi}$  est la dérivée temporelle de  $\pi$ , l'angle défini dans le sous Chapitre 3.2.1.

Ces paramètres ainsi que l'ensemble des valeurs numériques utiles pour le calcul des éphémérides de l'axe de figure  $OC$  de Mars se trouvent dans les tableaux récapitulatifs à la fin de ce chapitre.

Comme nous le voyons, l'ensemble de ces effets représente une faible perturbation par rapport au mouvement induit par  $F_0$ . Nous pouvons donc employer la méthode itérative du Chapitre 3.

Notre but est de décrire, grâce à cette méthode, le mouvement de l'axe de figure de Mars, encore appelé l'axe de moment d'inertie maximal  $OC$ .

Le mouvement de cet axe est souvent représenté à l'aide des angles d'Euler  $h_f$  et  $I_f$  plutôt qu'à l'aide des variables d'Andoyer d'un usage moins courant, le troisième angle d'Euler  $\phi$  représentant quant à lui la rotation du corps lui-même autour de son axe de figure (cf. la figure [4.1]).

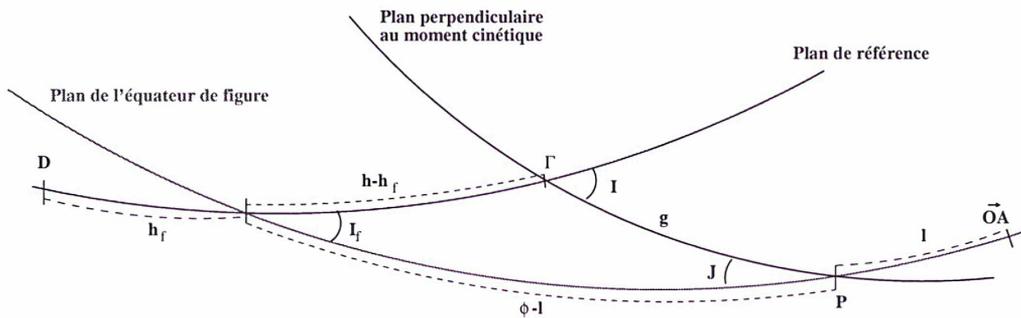


FIG. 4.1: Lien entre les angles d'Euler et les variables d'Andoyer.

En nous inspirant des notations que Lieske et al. (1977) ont choisies pour la Terre, nous pouvons écrire les angles d'Euler  $I_f$  et  $h_f$  de l'axe de figure sous la forme :

$$\begin{aligned} h_f &= -p_A^M - \Delta\psi \\ I_f &= -\varepsilon_A^M - \Delta\varepsilon \end{aligned} \quad (4.1)$$

$p_A^M$  et  $\varepsilon_A^M$  sont des polynômes du temps représentant respectivement la précession en longitude et en obliquité de l'axe de figure. A  $J2000$   $P_A^M = 0$  et  $\varepsilon_A^M = \varepsilon_0 = 25^\circ.189417$ .

Les quantités  $\Delta\psi$  et  $\Delta\varepsilon$  représentent, quant à elles, les variations périodiques des angles d'Euler et ne sont autres respectivement que la nutation en longitude et en obliquité de l'axe de figure.

Nous voulons essayer de faire le lien entre ces quantités et les variables d'Andoyer que nous allons utiliser pour décrire le mouvement de l'axe  $OC$ .

En appliquant les relations de trigonométrie sphérique dans le triangle de la figure [4.1] défini par les côtés  $(h - h_f)$ ,  $g$  et  $(\phi - l)$  nous pouvons déterminer les relations liant les angles d'Euler et les variables d'Andoyer au premier ordre en  $J$ . Soient:

$$\begin{aligned} h_f &\simeq h + \frac{J}{\sin I} \sin g \\ I_f &\simeq I + J \cos g \\ \phi &\simeq l + g - J \cot I \sin g \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous savons que l'angle  $J$ , bien qu'il ne soit pas précisément connu pour Mars, doit être très faible du fait qu'il n'a pas encore pu être observé et que par effet dissipatif cette angle  $J$  a tendance à diminuer avec le temps. L'écart angulaire entre l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe de moment d'inertie maximum  $OC$  est donc faible et est représenté dans le développement (4.2) par les termes ayant pour facteur l'angle  $J$  dans les deux premières relations.

- Nous allons donc nous intéresser en premier lieu au mouvement de  $\vec{L}$  dans le repère de référence  $R$  : c'est à dire aux variables d'Andoyer  $h$  et  $I$  (se référer aux sous-chapitres 4.2, 4.4 et 4.5). En remplaçant, dans la relation (4.2) définissant les angles d'Euler, les variables d'Andoyer  $h$  et  $I$  par leur expression (3.23) déterminée par la méthode de Lie dans le Chapitre 3, nous avons les expressions suivantes pour les deux angles d'Euler  $h_f$  et  $I_f$  au premier ordre en  $J$  :

$$\begin{aligned} h_f &\simeq h^s + \Delta h + \frac{J}{\sin I} \sin g \\ I_f &\simeq I^s + \Delta I + J \cos g \end{aligned}$$

En identifiant ces relations avec les relations (4.1), nous nous rendons compte que  $-h^s$  et  $-I^s$  étant les parties séculaires de  $h$  et  $I$ , elles feront parties respectivement du mouvement de précession en longitude  $p_A^M$  et en obliquité  $\varepsilon_A^M$  tandis que  $-\Delta h$  et  $-\Delta I$  feront parties respectivement du mouvement de nutation en longitude  $\Delta\psi$  et en obliquité  $\Delta\varepsilon$ .

- Nous donnerons ensuite l'écart entre l'axe  $OC$  et l'axe  $\vec{L}$  en exprimant, d'après les relations (4.2), les variations du terme  $-\frac{J}{\sin I} \sin g$  et du terme  $-J \cos g$  qui sont, comme nous le verrons dans le sous-chapitre 4.3, des mouvements périodiques.

Avec les notations (4.1) le premier terme contribuera donc à  $\Delta\Psi$ , le mouvement de nutation en longitude de l'axe  $OC$ , et le second terme contribuera à  $\Delta\varepsilon$ , le mouvement de nutation en obliquité de ce même axe.

Nous donnerons l'ensemble de nos résultats sur la position de l'axe de figure  $OC$  à l'aide des quantités  $p_A^M$ ,  $\varepsilon_A^M$ ,  $\Delta\varepsilon$  et  $\Delta\psi$ .

## 4.2 Le mouvement de l'axe de moment cinétique $\vec{L}$

D'après les déterminations approximatives des différentes influences sur la rotation de Mars, nous remarquons que la principale perturbation est celle due à la présence du Soleil puis par ordre d'importance, à la présence des satellites Phobos et Deimos, au terme d'entraînement E et aux planètes.

Nous pouvons, du moins au premier ordre, traiter ces différentes influences séparément. Nous commencerons donc par l'influence du Soleil

### 4.2.1 Les effets dûs au soleil

L'influence solaire est représentée dans le Hamiltonien  $K$  par  $U^S$  qui d'après la relation (3.7) s'écrit :

$$U_2^S = \frac{\kappa^2 M_S}{r^3} \left[ \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2(\sin \delta_S) + \left( \frac{A - B}{4} \right) P_2^2(\sin \delta_S) \cos 2\alpha_S \right] \quad (4.3)$$

Nous négligerons les termes  $U_i^S$  avec  $i > 2$  du développement de  $U^S$  car ils ont des influences encore moindre que les perturbations les plus faibles que nous venons de présenter (Vénus, Saturne).

Le terme largement prépondérant dans cette relation est celui ayant pour facteur de proportionnalité  $\frac{2C-A-B}{2}$ . Cette partie est en relation directe avec l'aplatissement dynamique de la planète Mars d'après la relation  $\frac{MR^2}{C} \times J_2 = \frac{2C-A-B}{2C}$ .

L'autre partie, de moindre importance, a pour facteur de proportionnalité  $\frac{A-B}{4}$ . Cette partie est liée à la triaxialité de Mars par l'intermédiaire des constantes  $C_{22}$  et  $S_{22}$  et par la relation  $\frac{MR^2}{C} \times \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2} = \frac{B-A}{4C}$ . Mais commençons par l'influence de l'aplatissement dynamique de Mars sur la rotation de Mars.

#### Influence de l'aplatissement de Mars ( $J_2$ )

La partie du Hamiltonien que nous considérons est donc :

$$U_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{r^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2(\sin \delta_S)$$

En remplaçant  $P_2(\sin \delta_S)$  par son expression en fonction des variables d'Andoyer, de la latitude  $\beta$  et de la longitude  $\lambda$  du Soleil par rapport à l'orbite moyenne de Mars de la date et par rapport à l'origine non-tournante  $D$  (cf. la relation (3.8)), nous obtenons :

$$U_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \times \quad (4.4)$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) \frac{A_1(I, h)}{r^3/a_s^3} + \sin 2J \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} + \sin^2 J \frac{A_3(I, h, g)}{r^3/a_s^3} \right]$$

• Nous devons dans un premier temps, d'après la méthodologie du Chapitre 3, remplacer dans cette expression de  $U_{J_2}^S$  les variables  $(h, g, l, H, G, L)$  par les variables  $(h, \tilde{g}, \tilde{l}, H, G, \tilde{L})$ . Nous voyons que les variables d'Andoyer  $(g, l, L)$  qui interviennent dans le mouvement libre, n'apparaissent dans le Hamiltonien  $K$  que sous la forme des quantités  $g + l$ ,  $J \cos l$ ,  $J \sin l$ ,  $J \cos g$  et  $J \sin g$  (cf relations (3.8) et (3.9)). D'après les relations (2.29), pour Mars, ces quantités sont respectivement égales à  $\tilde{g} + \tilde{l}$ ,  $\tilde{J} \cos \tilde{l}$ ,  $\tilde{J} \sin \tilde{l}$ ,  $\tilde{J} \cos \tilde{g}$  et  $\tilde{J} \sin \tilde{g}$ , à  $\tilde{J}e$  près. Pour la Terre,  $Je$  est environ égale à  $10^{-9}$ . La valeur de l'angle  $J$  pour Mars est également très faible (supposé inférieur à 0.1 seconde d'arc). Nous pouvons donc supposer que la valeur du produit  $Je$  de Mars est voisin de la valeur du même produit pour la Terre.

Avec cette hypothèse, il n'est donc pas utile dans le cas de Mars de différencier les variables  $g, l, L$  respectivement des variables  $\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{L}$ . Ce changement de variables se réduit donc systématiquement pour Mars à l'identification de  $g$  avec  $\tilde{g}$ , de  $l$  avec  $\tilde{l}$ , et de  $L$  avec  $\tilde{L}$ . (*Nous n'utiliserons plus que les notations  $g, l$  et  $L$  dans la suite*).

• Nous devons ensuite intégrer la partie non séculaire de  $U_{J_2}^S$  pour obtenir avec la même terminologie que dans le chapitre précédent la partie correspondante de la fonction génératrice  $W_1$ , partie que nous noterons  $W_{J_2}^S$ . Soit d'après la relation (3.20) :

$$W_{J_2}^S = \int \sum_i [U_{J_2}^S - [U_{J_2}^S]_{sec}]$$

L'hypothèse de Kinoshita selon laquelle il n'y a pas de commensurabilité entre les variables  $g, l$  et les arguments utilisés dans les éphémérides du Soleil est valide. L'expression de la partie séculaire (3.19) l'est donc également. Cependant cette partie séculaire apparaît naturellement quand on détermine la fonction  $U_{J_2}^S$  à l'aide de l'expression (4.4) et des éphémérides du Soleil. Il ne nous est donc pas utile d'en avoir une expression formelle. **Nous ne ferons plus dans la suite, la différence entre  $U_{J_2}^S$  et la partie non-séculaire de  $U_{J_2}^S$  par soucis de simplification d'écriture** ; nous nous souviendrons seulement que la fonction  $W_{J_2}^S$  ne doit pas contenir de terme séculaire.

A l'aide de la relation (4.4),  $W_{J_2}^S$  s'écrit :

$$W_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \times \quad (4.5)$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) \int \frac{A_1(I, h)}{r^3/a_s^3} dt + \sin 2J \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt + \sin^2 J \int \frac{A_3(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right]$$

Les expressions des  $A_i$  sont données dans les relations (3.8).

Une fois obtenu  $W_{J_2}^S$ , nous pouvons déterminer les variations dûes au Soleil et à l'aplatissement dynamique de Mars sur les variables  $h$  et  $I$  d'après les relations (3.23) définies à la fin du chapitre précédent :

$$\begin{aligned}\Delta h &= -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_{J_2}^S}{\partial I} \\ \Delta I &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_{J_2}^S}{\partial h} - \frac{\cos I}{G \sin I} \frac{\partial W_{J_2}^S}{\partial g}\end{aligned}$$

Nous remarquons d'après l'expression (4.5) de  $W_{J_2}^S$  que le terme qui va être important pour le calcul de  $\Delta h$  et  $\Delta I$  est seulement l'intégrale de  $\frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3}$ . En effet, les autres termes ont  $J$  en facteur et sont donc négligeables.  $W_{J_2}^S$  se réduit donc à l'expression suivante :

$$W_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \int \frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3} dt$$

$W_{J_2}^S$  ne dépend donc plus de la variables d'Andoyer  $g$ , les expressions des variations de  $h$  et  $I$  se simplifient encore et deviennent (en posant la variable  $G = C\omega$  comme dans le Chapitre 2) :

$$\begin{cases} \Delta h = -\frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2C} \right) \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial I} \left[ \int \frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3} dt \right] \\ \Delta I = \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2C} \right) \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial h} \left[ \int \frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3} dt \right] \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous rappelons que dans ces relations nous ne devons prendre en compte que la partie non-séculaire de  $\frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3}$ . Ces équations correspondent à celles déterminées pour la Terre par Kinoshita (1977). Nous noterons comme lui, le facteur de proportionnalité présent dans  $\Delta I$  et  $\Delta h$  par :

$$K_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2C} \right) = \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} J_2 \frac{MR^2}{C} = 5519''/1000 \text{ ans} \quad (4.7)$$

De manière pratique, nous avons besoin pour calculer  $\Delta h$  et  $\Delta I$  à partir des relations (4.6) de déterminer et d'intégrer  $\frac{a_s^3 A_1(I, h)}{r^3}$ . Nous nous aidons pour cela des composantes rectangulaires apparentes du Soleil ( $X_s, Y_s, Z_s$ ) depuis le centre de Mars dans le repère de référence  $R$  (cf. les relations (3.10)). Celles-ci sont les opposées des coordonnées rectangulaires héliocentriques de Mars dans le même repère. Les éphémérides V.S.O.P.87 (Bretagnon et Francou, 1988) nous fournissent ces coordonnées dans le repère écliptique  $J2000$  sous formes de séries de Poisson dont les arguments sont les longitudes moyennes des planètes. Nous exprimons ces coordonnées dans le repère  $R$  par trois rotations successives (cf. Annexe IV) : une rotation d'angle  $\Omega$  correspondant au noeud de l'orbite

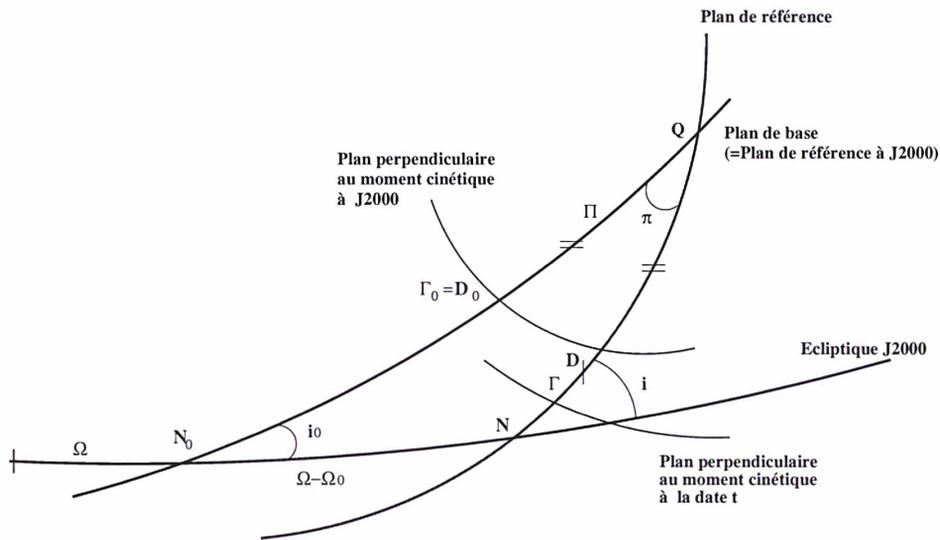


FIG. 4.2: Représentation des angles  $\omega$ ,  $i$  et  $ND$

moyenne de Mars sur l'écliptique  $J2000$ , puis une rotation d'angle  $i$  correspondant à l'inclinaison de l'orbite moyenne de Mars sur l'écliptique  $J2000$  et enfin une dernière rotation d'angle  $ND$  sur l'orbite moyenne de la date pour arriver jusqu'au point  $D$  (cf. figure [4.2]).  $\Omega$  et  $i$  ont été calculés par Bretagnon (1988), tandis que la valeur de  $ND$  est donnée dans le sous-chapitre 4.2.4 par la relation (4.28).

Ces rotations ainsi que l'intégration sont menées à bien grâce à un programme informatique permettant de manipuler des séries de Poisson (Broucke, 1980). Celles-ci sont sous la forme suivante :

$$\sum_v t^\alpha [a_v^s \sin(\theta_v) + a_v^c \cos(\theta_v)]$$

$$\theta_v = v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2 + \dots + v_n \lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_i = \lambda_i^1 \times t + \lambda_i^0$$

Les coefficients  $a_v^s$  et  $a_v^c$  en facteur des cosinus ou des sinus sont numériques tandis que les arguments  $\theta_v$  restent, eux, sous une forme analytique avec des  $v_i$  entiers et des  $\lambda_i^j$  constants. Dans le cas de l'influence du Soleil ou des planètes, les  $\lambda_i$  seront les longitudes écliptiques moyennes des planètes utilisées par Bretagnon pour ses séries V.S.O.P.87. ( $\lambda_V$  pour Vénus,  $\lambda_T$  pour la Terre,  $\lambda_M$  pour Mars,  $\lambda_J$  pour Jupiter et  $\lambda_{Sa}$  pour Saturne) et les trois variables angulaires d'Andoyer  $h$ ,  $g$  et  $l$ .

Comme notre but est de modéliser le mouvement de l'axe  $OC$ , nous présentons dans les tableaux qui vont suivre les parties  $\Delta \varepsilon_{Sol}$  et  $\Delta \psi_{Sol}$  dûs au soleil des nutations  $\Delta \varepsilon$  et  $\Delta \psi$  correspondant respectivement à  $-\Delta I$  et  $-\Delta h$  d'après les relations (4.2) et (4.1).

sin (")	cos (")	Période (an)	$M$	$\Lambda_M$	Valeurs de Borderies cos (")	Valeurs de Hilton cos (")
0.00003	0.51589	0.940	2	2	0.4908	0.5158
0.00001	0.11274	0.627	3	2	0.1072	0.1130
	-0.04921	1.881	1	2	-0.0468	-0.0493
	0.01917	0.470	4	2	0.0182	0.0193
	0.00296	0.376	5	2	0.0029	0.0030
	0.00044	0.313	6	2		

TAB. 4.1: Influence solaire sur la nutation de Mars en obliquité  $\Delta\varepsilon_{Sol}$ 

sin (")	cos (")	Période (an)	$M$	$\Lambda_M$	Valeurs de Borderies sin (")	Valeurs de Hilton sin (")
-1.09689	0.00006	0.940	2	2	-1.0431	-1.0962
0.63460		1.881	1		0.6031	0.6357
-0.23971	0.00001	0.627	3	2	-0.2278	-0.2401
0.10463	-0.00001	1.881	1	2	0.0994	0.1047
-0.04076		0.470	4	2	-0.0387	-0.0409
0.04432		0.940	2		0.0421	0.0445
-0.00630		0.376	5	2	-0.0061	-0.0063
0.00405		0.627	3		0.0038	0.0041
-0.00093		0.313	6	2		-0.0009
0.00041		0.470	4			
-0.00013		0.269	7	2		

TAB. 4.2: Influence solaire sur la nutation de Mars en longitude  $\Delta\psi_{Sol}$ 

Nous présentons les résultats obtenus pour  $\Delta\varepsilon_{Sol}$ , la nutation en obliquité, dans les tableaux [4.1] et [4.3]. Le premier tableau regroupe les termes de Fourier tandis que le second regroupe les termes ayant le temps  $t$  en facteur. De même, nous présentons les résultats obtenus pour  $\Delta\psi_{Sol}$  dans les tableaux [4.2] et [4.4] en secondes d'arc.

Nous avons remplacé la longitude moyenne de Mars  $\lambda_M$  par l'anomalie moyenne de Mars  $M$  et par  $\Lambda_M$  qui correspond à l'angle entre  $D$  et le périhélie de Mars qui sont liés par la relation  $\lambda_M = M + \Lambda_M + h$  : cela nous permet d'avoir des séries dont les termes de Fourier ne sont quasiment que des termes en sinus pour  $\Delta\psi_{Sol}$  et que des termes en cosinus pour  $\Delta\varepsilon_{Sol}$ . Nous nous sommes donnés comme limite de troncature de ces séries  $10^{-4}$  seconde d'arc pour espérer avoir une précision intrinsèque d'environ  $10^{-3}$  seconde d'arc. Cela représente à la surface de Mars une distance d'environ 2 cm.

Beaucoup de ces coefficients ont déjà été calculés par d'autres auteurs (Borderies, 1980 et Hilton, 1991). Borderies a utilisé pour calculer ces coefficients une méthode Hamiltonienne avec les éléments planétaires de Struve, et Hilton a utilisé une méthode employant les angles d'Euler et les éphémérides V.S.O.P.82 (Bretagnon, 1982). Leurs valeurs respectives sont présentées dans les deux dernières colonnes des tableaux [4.1] et [4.2]. Nos valeurs sont très proches de celles de Hilton. Les différences plus importantes que nous observons avec celles de Borderies sont en grande partie dues à un choix différent pour la constantes  $\frac{MR^2}{C}$  qui est en effet une valeur mal connue pour la planète Mars. Borderies a pris  $\frac{MR^2}{C} \simeq 2.598$  et nous avons pris  $\frac{MR^2}{C} \simeq 2.731$ . Ce facteur étant simplement un facteur de proportionalité de  $W_{J_2}^S$  d'après les relations (4.6), nous pouvons changer sa valeur dans les séries de  $\Delta h$  et de  $\Delta I$  simplement en multipliant celles-ci par le rapport de la nouvelle valeur de  $\frac{MR^2}{C}$  sur l'ancienne. Nous discuterons de ce paramètre  $\frac{MR^2}{C}$  dans le sous-chapitre 4.3.

Les termes mixtes rassemblés dans les tables [4.3] et [4.4] proviennent de la présence même de termes mixtes dans les éphémérides V.S.O.P.87 de Mars.

- Nous devons enfin étudier le rôle de la partie séculaire de  $U_{J_2}^S$  qui correspond d'après la méthode explicitée au Chapitre 3 à  $K_0^1$ , le premier ordre du nouveau Hamiltonien séculaire  $T^K = K_0^0 + K_0^1$ . Nous avons exprimé cette fonction  $U_{J_2}^S$  comme une série de Poisson grâce au manipulateur de séries et à la relation (4.4). Nous avons alors pu identifier la partie séculaire de cette fonction comme se restreignant à :

$$\left[ U_{J_2}^S \right]_{sec} = K_0^1 = \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \frac{1}{2} (3 \cos^2 I - 1) S_0 \quad (4.8)$$

où  $S_0$ , voisin de  $-\frac{1}{2}$ , est la partie séculaire de  $\frac{a^3}{r^3} P_2(\sin \beta)$  avec  $\beta$  la latitude du Soleil dans le repère  $R$ . Cette partie  $K_0^1$  de  $T^K$  va jouer un rôle sur la variable  $h^s$  (la partie séculaire de  $h$ ) qui par l'intermédiaire des relations (3.24) va s'exprimer ainsi :

$$h^s = h_0^s - \left[ \frac{1}{G \sin I} \left( \frac{\partial K_0^1}{\partial I^s} \right) \right] \times t$$

Comme  $\Gamma$  est confondu avec  $D$  à  $J2000$ ,  $h_0^s = 0$ . Ainsi, en remplaçant  $K_0^1$  par sa valeur, l'opposé de la partie séculaire  $h^s$  due au Soleil, que nous noterons  $[p_A^M]_S$  est donc égale à :

$$\boxed{[p_A^M]_S = - [3K_{J_2}^S \cos I S_0] t = 7590.39671 \times t} \quad (4.9)$$

$t$  étant en millier d'années et  $[p_A^M]_S$  en seconde d'arc. Dans l'ensemble des tables qui suivront, les termes sont rangés par ordre décroissant de leurs amplitudes  $\sqrt{a_v^{s2} + a_v^{c2}}$  avec la seconde d'arc comme unité d'angle et le millier d'années comme unité de temps.

sin (")	cos (")	Période (an)	$\alpha (t^\alpha)$ 1000 ans	$M$	$\lambda_J$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda_M$
0.00875	0.00105	0.627	1	3			2
-0.00332	0.00579	0.940	1	2			1
0.00381	-0.00048	1.881	1	1			2
0.00297	0.00036	0.470	1	4			2
	0.00242		1				
-0.00063	-0.00227	1.881	1	1			1
0.00180	-0.00077	1.881	1	1			-1
-0.00072	0.00128	0.627	1	3			1
0.00019	0.00104	-877.785	1		2	-5	-1

TAB. 4.3: Influence solaire sur la nutation de Mars en obliquité : les termes avec le temps  $t$  en facteur,  $\Delta\varepsilon_{Sol}$

sin (")	cos (")	Période (an)	$\alpha (t^\alpha)$ 1000 ans	$\lambda_T$	$M$	$\lambda_J$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda_M$
0.00627	-0.04917	1.881	1		1			
-0.00223	0.01860	0.627	1		3			2
0.00959	0.00550	0.940	1		2			1
0.00101	0.00809	1.881	1		1			2
-0.00077	0.00632	0.470	1		4			2
0.00086	-0.00687	0.940	1		2			
-0.00377	0.00105	1.881	1		1			1
0.00287	0.00179	-1783.395	1	4	-8	3		
0.00127	0.00297	1.881	1		1			1
0.00212	0.00119	0.627	1		3			1
0.00163	-0.00160	-883.270	1			2	-5	
-0.00018	0.00146	0.376	1		5			2

TAB. 4.4: Influence solaire sur la nutation et la précession de Mars en longitude : les termes avec  $t$ , le temps, en facteur  $\Delta\psi_{Sol}$

## Influences planétaires indirectes

Comme dans le cas de la Terre (cf. Souchay et Kinoshita (1996)), nous appelons *influences planétaires indirectes* les influences des planètes autres que Mars sur l'orbite de cette dernière et donc sur l'orbite apparente marsocentrique du Soleil, qui à son tour influent sur l'axe de figure  $OC$  de la planète Mars. Ces influences sur l'orbite de Mars sont prises en compte dans les éphémérides V.S.O.P.87 de Mars et elles apparaissent donc à leur tour naturellement après intégration dans les variations  $\Delta h$  et  $\Delta I$ .

Nous présentons les plus importantes variations dans les tableaux [4.5] et [4.6] respectivement en obliquité  $\Delta\varepsilon_{Pla(indirect)}$  et en longitude  $\Delta\psi_{Pla(indirect)}$ .

sin (")	cos (")	Période (an)	$\lambda_T$	$M$	$\lambda_J$	$\Lambda_M$
-0.00003	0.00014	-0.940	4	-10	3	2
-0.00013	-0.00007	0.941	4	-6	3	2

TAB. 4.5: *Les effets planétaires indirects en obliquité  $\Delta\varepsilon_{Pla(indirect)}$*

sin (")	cos (")	Période (an)	$\lambda_V$	$\lambda_T$	$M$	$\lambda_J$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda_M$
-0.00039	0.00019	2.235			1	-1		
0.00028	-0.00035	2.754			1	-2		
0.00030	0.00007	-0.940		4	-10	3		2
0.00014	-0.00027	0.941		4	-6	3		2
0.00015	-0.00017	1.118			2	-2		
-0.00004	-0.00024	-877.785				2	-5	1
0.00028	0.00003	-15.781		1	-2			
-0.00019	-0.00003	11.862				1		
0.00014	-0.00007	0.662			3	-1		2
-0.00008	0.00009	0.511			4	-2		2
-0.00008	0.00010	0.701			3	-2		2
0.00011	0.00004	2.135		1	-1			
0.00009	0.00008	2.470		2	-3			
-0.00002	0.00011	32.835	1		-3			2
0.00005	-0.00009	0.627		4	-5	3		2

TAB. 4.6: *Les effets planétaires indirects sur la nutation de Mars en longitude,  $\Delta\psi_{Pla(indirect)}$*

Influence de la triaxialité de Mars ( $C_{22}$  et  $S_{22}$ )

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré dans l'influence solaire sur la rotation de la planète Mars que la partie dépendant de l'aplatissement dynamique  $J_2$  de Mars, laissant de côté le second membre de la relation (cf. la relation (4.3) définissant  $U_2^S$ ) d'amplitude sensiblement plus petite. Penchons-nous maintenant sur ce second terme à savoir :

$$U_{tri}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{r^3} \left( \frac{A - B}{4} \right) P_2^2 (\sin \delta_S) \cos 2\alpha_S$$

Ce second terme dépend, lui, de la triaxialité de la planète. En effet, si ce corps n'était pas triaxial (c'est à dire  $A = B$ ) ce terme n'existerait pas. En procédant de la même manière que dans le cas du terme dépendant du  $J_2$  (c'est à dire en remplaçant  $P_2^2$  par son expression (3.9), en remarquant qu'il n'y a pas de partie séculaire provenant de  $U_{tri}^S$ , en intégrant  $U_{tri}^S$  par rapport au temps et en supposant un angle  $J$  petit), nous arrivons à exprimer des relations équivalentes aux relations (4.6). Soient les relations suivantes :

$$\Delta h = -\frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{A - B}{4C} \right) \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial I} \left[ \int \frac{B_1(l; I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \quad (4.10)$$

$$\Delta I = \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{A - B}{4C} \right) \frac{1}{\sin I} \left[ \frac{\partial}{\partial h} - \cos I \frac{\partial}{\partial g} \right] \left[ \int \frac{B_1(l; I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right]$$

Nous noterons le facteur de proportionnalité présent dans ces variations  $\Delta I$  et  $\Delta h$  par  $K_{tri}^S$ , que nous évaluons en fonction de  $K_{J_2}^S$ , de  $J_2$ , de  $C_{22}$  et de  $S_{22}$ , grâce aux relations du tableau [2.4] :

$$K_{tri}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} \left( \frac{A - B}{4C} \right) = -K_{J_2}^S \frac{\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}}{J_2} = -177.41''/1000 \text{ ans}$$

Etant donné qu'il s'agit d'effets de très faibles amplitudes ne demandant pas une grande précision de calcul et que le plan de référence ( $OX \times OY$ ) de  $R$  correspond à l'orbite moyenne apparente du soleil, nous pouvons poser  $Z_s \simeq 0$ ,  $X_s \simeq -\cos(\lambda_M - h)$  et  $Y_s \simeq -\sin(\lambda_M - h)$ . Donc, d'après les relations (3.10), nous avons les valeurs suivantes pour les fonctions intervenant dans le calcul de  $B_1(l)(I, h, g)$  :

$$\begin{aligned} P_2(\sin \beta) &\simeq -\frac{1}{2} \\ P_2^2(\sin \beta) \sin 2(\lambda_S - h) &\simeq 3 \sin 2(\lambda_M - h) \quad ; \quad P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda_S - h) \simeq 0 \\ P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda_S - h) &\simeq 3 \cos 2(\lambda_M - h) \quad ; \quad P_2^1(\sin \beta) \cos(\lambda_S - h) \simeq 0 \end{aligned}$$

Et donc l'expression suivante de  $B_1$  d'après la relation (3.9) :

$$B_1(l; I, h, g) = \frac{3}{2} \sin^2(I) \cos 2(g+l) + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{3}{4} (1 + \epsilon \cos I)^2 \cos 2(\lambda_M - h - \epsilon(g+l))$$

En utilisant cette écriture de  $B_1$  dans les relations (4.10), et en supposant un mouvement circulaire apparent du soleil, nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} \Delta h &= -K_{tri}^S \left[ \frac{3}{2} \frac{\cos I}{(n_{\tilde{g}} + n_{\tilde{l}})} \sin 2(g+l) - \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon \frac{3}{4} \frac{(1 + \epsilon \cos I)}{(\lambda_M - h - \epsilon(n_{\tilde{g}} + n_{\tilde{l}}))} \sin 2(\lambda_M - h + \epsilon(g+h)) \right] \\ \Delta I &= -K_{tri}^S \left[ \frac{3}{4} \frac{\sin 2I}{(n_{\tilde{g}} + n_{\tilde{l}})} \cos 2(g+l) + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{3}{4} \frac{(1 - \epsilon \cos I^2)(1 + \epsilon \cos I)}{\sin I (\lambda_M - h - \epsilon(n_{\tilde{g}} + n_{\tilde{l}}))} \cos 2(\lambda_M - h - \epsilon(g+l)) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comme nous le précisons dans le Chapitre 3 lors de l'application de la méthode de Lie au Hamiltonien de la rotation d'un corps rigide, les intégrations par rapport au temps se font en prenant  $h = 0$ ,  $g = \tilde{g}$  et  $l = \tilde{l}$  avec  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$  les applications affines du temps définies dans le Chapitre 2 pour le mouvement libre.

On obtient, en ne gardant que les termes supérieurs à  $10^{-4}$  seconde d'arc :

$$\Delta\psi_{tri} = 0'' .00011 \sin(2\lambda_M - 2g - 2l - 2h) - 0'' .00011 \sin(2g + 2l)$$

et :

$$\Delta\varepsilon_{tri} = -0'' .00005 \cos(2\lambda_M - 2g - 2l - 2h) + 0'' .00005 \cos(2g + 2l)$$

Ces termes ont été vérifiés en utilisant les éphémérides de Mars de V.S.O.P.87. Les périodes mises en jeu sont respectivement de 0.514 jours et 0.513 jours pour les arguments  $(2\lambda_M - 2g - 2l - 2h)$  et  $(2g + 2l)$ .

Remarque : Nous noterons  $n_g$  la fréquence moyenne de la variable  $g$  qui correspond à la fréquence de  $g^s$ , la partie séculaire de  $g$ . Cette fréquence différera légèrement de la fréquence moyenne de  $g$  dans le cas du mouvement libre étudié dans le Chapitre 2 et que nous notons  $n_{\tilde{g}}$ . En effet, la partie séculaire du potentiel solaire donné par la relation (4.8) dépend de la variable  $I$  et va donc d'après les relations (3.24) rajouter le terme suivant à la variable  $g^s$  :

$$\tilde{g}^s = \tilde{g}_0^s + \left[ n_{\tilde{g}} + \frac{\cos I}{G \sin I} \frac{\partial}{\partial I} [U_{J_2}^S]_{sec} \right] t = \tilde{g}_0^s + n_{\tilde{g}} \times t + \cos I \times [P_A^M]_{sec} \quad (4.12)$$

La fréquence moyenne de la variable  $g$  ( $n_g$ ) est donc la somme de la fréquence moyenne de  $g$  dans le cas du mouvement libre ( $n_{\tilde{g}}$ ) et de la fréquence de précession en longitude multiplié par  $\cos I$

### 4.2.2 Les effets dûs aux satellites Phobos et Deimos

Après l'influence solaire, la partie la plus significative du Hamiltonien  $K$  de la rotation de Mars semble venir des potentiels gravitationnels  $U^P$  de Phobos et  $U^D$  de Deimos. Bien que ces deux corps soient de très petites dimensions (11.1 km pour le rayon équatorial de Phobos et 6.2 km pour celui de Deimos), leurs influences sont relativement importantes sur la rotation de Mars du fait qu'ils sont très proches de leur planète mère (2.76 rayons martiens pour la distance de Phobos au centre de Mars et 6.91 rayons martiens pour la distance de Deimos au centre de Mars).

Nous utilisons comme éphémérides de ces corps, les séries ESAPHO et ESADE (Ephémérides Semi-Analytiques de PHObos et DEImos) (Chapront-Touzé, 1990). Ces éphémérides donnent les coordonnées rectangulaires marsocentriques ( $X, Y, Z$ ) de ces satellites dans le repère lié au plan de l'équateur moyen de Mars de la date  $t$ , avec comme origine des longitudes sur ce plan le noeud descendant  $\gamma_{Ma}$  de l'orbite moyenne de Mars de la date  $t$  (cf. figure [4.3]). Nous noterons  $R_{eq}$  ce nouveau repère.

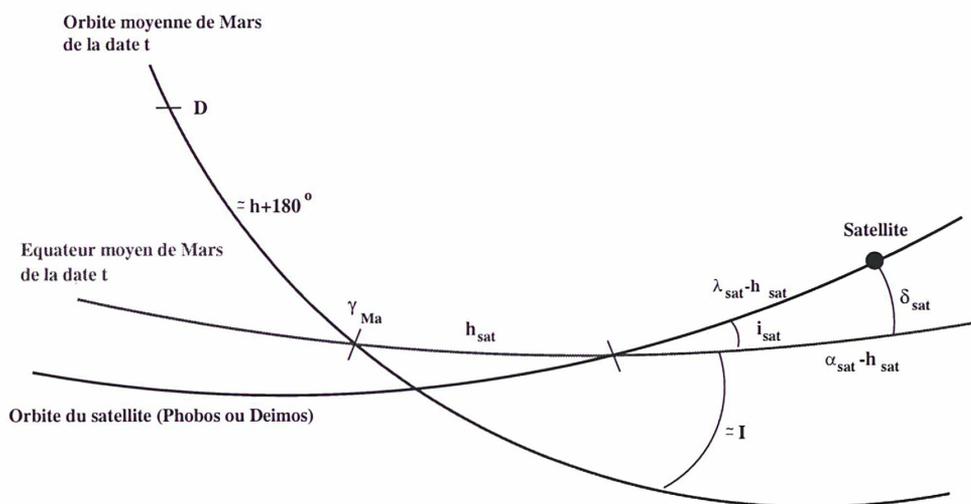


FIG. 4.3: *Eléments équatoriaux des satellites de Mars*

Les éléments moyens de ces corps sont les suivants, respectivement pour Phobos et Deimos :

Phobos		Deimos
$a_P = 9373.713 \text{ km}$		$a_D = 23457.06 \text{ km}$
$e_P = 0.015146$		$e_D = 0.00096$
$i_P = 1.067639^\circ$	et	$i_D = 1.78896^\circ$
$\dot{h}_P = -0.436025^\circ/d$		$\dot{h}_D = -0.018001^\circ/d$
$\dot{\lambda}_P = 1128.84476^\circ/d$		$\dot{\lambda}_D = 285.161875^\circ/d$

Avec les conventions habituelles :  $a_{sat}$  est le demi-grand axe entre le satellite et Mars,  $e_{sat}$  est l'excentricité de l'orbite du satellite,  $i_{sat}$  est l'inclinaison de l'orbite du satellite par rapport au plan de l'équateur moyen de Mars de la date  $t$ ,  $h_{sat}$  est le noeud ascendant de l'orbite du satellite dans le repère  $R_{eq}$  et  $\lambda_{sat}$  est la longitude moyenne du satellite dans ce même repère.

Encore plus dans le cas de ces satellites que dans le cas du Soleil, seule l'influence du terme du potentiel dépendant de  $J_2$  va être significative. De plus, comme nous le voyons, l'excentricité des deux corps est très faible (0.015146 pour Phobos et 0.00096 pour Deimos). Nous pouvons donc approximer leurs mouvements par des cercles ayant leurs demi-grands axes pour rayon . Nous pouvons donc restreindre le potentiel gravitationnel  $U^{sat}$  du satellite à :

$$U_{J_2}^{sat} = \frac{\kappa^2 M_{Sat}}{a_{sat}^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2(\sin \delta_{sat})$$

On remarque que  $\alpha_{sat}$  et  $\delta_{sat}$  sont respectivement l'équivalent de l'ascension droite et de la déclinaison du satellite dans le repère équatorial de Mars,  $R_{eq}$  (cf. figure [4.3]).

Les équations exprimant les variations de  $h$  et  $I$  sont toujours données par les relations (3.23) avec dans notre cas  $W_1 = \int U_{J_2}^{sat} dt$  (on se rappelle que  $W_1$  ne doit pas contenir de terme séculaire). On peut également inverser l'ordre de l'intégrale et de la dérivation partielle dans ces relations et celles-ci deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta h &= -K_{J_2}^{sat} \frac{1}{\sin I} \int \frac{\partial P_2(\sin \delta_{sat})}{\partial I} dt \\ \Delta I &= K_{J_2}^{sat} \frac{1}{\sin I} \int \frac{\partial P_2(\sin \delta_{sat})}{\partial h} dt \end{aligned} \tag{4.13}$$

où  $K_{J_2}^{sat}$  correspond à  $K_{J_2}^S$  de la relation (4.7), mais pour le satellite Phobos ou pour le satellite Deimos et non plus pour le Soleil. Soit respectivement pour Phobos et Deimos :

$$\begin{aligned} K_P^S &= K_{J_2}^S \frac{M_P}{M_S} \frac{a_s^3}{a_P^3} = 511.7''/1000 \text{ ans} \\ K_D^S &= K_{J_2}^S \frac{M_D}{M_S} \frac{a_s^3}{a_D^3} = 4.581''/1000 \text{ ans} \end{aligned}$$

Du fait que les éphémérides de Phobos et Deimos sont données dans le repère  $R_{eq}$  et non plus comme pour V.S.O.P.87 dans le repère de l'écliptique moyen  $J2000$ , la méthode d'intégration va différer de celle que nous avons employée pour l'influence solaire.

En particulier, les coordonnées rectangulaires  $(X, Y, Z)$  du satellite se rapportant déjà à l'équateur moyen de la date de Mars, on a :  $Z = \sin \delta_{sat}$  si on ne tient pas compte des nutations.  $P_2(\sin \delta_{sat})$  s'exprime donc très simplement en fonction de  $Z$  :

$$P_2(\sin \delta_{sat}) = \frac{3}{2}Z^2 - \frac{1}{2}$$

Il ne semble donc pas utile de passer par l'intermédiaire de la relation (3.8) pour calculer  $P_2(\sin \delta_{sat})$ .

Cependant, ce n'est pas vraiment de la fonction  $P_2$  dont nous avons besoin mais plutôt, d'après les relations (4.13), des dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial h} &= \frac{\partial P_2(\sin \delta_{sat})}{\partial h} = 3 \sin \delta_{sat} \frac{\partial \sin \delta_{sat}}{\partial h} \\ \frac{\partial P_2}{\partial I} &= \frac{\partial P_2(\sin \delta_{sat})}{\partial I} = 3 \sin \delta_{sat} \frac{\partial \sin \delta_{sat}}{\partial I} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous allons exprimer ces deux fonctions à l'aide des éléments moyens de Phobos et de Deimos dans le repère  $R_{eq}$  et nous les intégrerons pour obtenir les variations de  $h$  et  $I$ . La méthode est donc la suivante :

Première étape :

Nous exprimons les fonctions  $\frac{\partial P_2}{\partial h}$  et  $\frac{\partial P_2}{\partial I}$  à l'aide des variables d'Andoyer et des variables angulaires  $(\delta_{sat}, h_{sat}, \alpha_{sat})$ , décrivant la révolution de Phobos ou de Deimos dans  $R_{eq}$ . Pour ce faire, nous exprimons tout d'abord  $\sin \delta_{sat}$  à l'aide de  $(x, y, z)$ , les composantes du satellite dans  $R$ , le repère de référence.

Pour cela, nous écrivons la formule de passage suivante :

$$[X, Y, Z(=\sin \delta_{sat})] = M_1(I_f^m) M_3(h_f^m) [x, y, z] \quad (4.15)$$

où  $M_1$  est la matrice de rotation autour de l'axe des  $X$  dans le sens direct et  $M_3$  est la matrice de rotation autour de l'axe des  $Z$  également dans le sens direct.  $I_f^m$  est l'obliquité moyenne de l'axe de figure de Mars tandis que  $h_f^m$  est la précession en longitude de ce même axe. Ces angles  $I_f^m$  et  $h_f^m$  sont très proches respectivement des variables d'Andoyer  $-I$  et  $h + \pi$  et nous ne ferons pas la différence dans la suite de cette étude.

Soit en différentiant cette dernière relation par rapport à  $I$  et  $h$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sin \delta_{sat}}{\partial h} &= -\sin I \cos \delta_{sat} \cos \alpha_{sat} \\ \frac{\partial \sin \delta_{sat}}{\partial I} &= \cos \delta_{sat} \sin \alpha_{sat} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Soit, en utilisant les équations (4.16) dans les relations (4.14) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_2}{\partial h} &= -3 \sin I \sin \delta_{sat} \cos \delta_{sat} \cos \alpha_{sat} \\ \frac{\partial P_2}{\partial I} &= 3 \sin \delta_{sat} \cos \delta_{sat} \sin \alpha_{sat}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Deuxième étape :

Il nous faut maintenant écrire les relations (4.17) en fonction des éléments moyens  $a_{sat}$ ,  $i_{sat}$ ,  $\lambda_{sat}$  et  $h_{sat}$  que nous connaissons. Pour cela, nous nous aidons des coordonnées  $(X, Y, Z)$  du satellite dans  $R_{eq}$ .

Par des considérations de trigonométrie sphérique dans le triangle sphérique de côtés :  $\delta_{sat}$ ,  $(\lambda_{sat} - h_{sat})$  et  $(\alpha_{sat} - h_{sat})$  (cf. la figure [4.3]), on remarque que  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  peuvent s'écrire de deux façons :

$$\begin{aligned}X &= \cos(\alpha_{sat} - h_{sat}) \cos \delta_{sat} = \cos(\lambda_{sat} - h_{sat}) \\ Y &= \sin(\alpha_{sat} - h_{sat}) \cos \delta_{sat} = \sin(\lambda_{sat} - h_{sat}) \cos i_{sat} \\ Z &= \sin \delta_{sat} = \sin(\lambda_{sat} - h_{sat}) \sin i_{sat}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Les relations (4.17) peuvent s'écrire à l'aide de  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_2}{\partial h} &= -3Z (X \cos h_{sat} - Y \sin h_{sat}) \sin I \\ \frac{\partial P_2}{\partial I} &= 3Z (Y \cos h_{sat} + X \sin h_{sat})\end{aligned}$$

En substituant dans ces dernières relations aux variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  leurs expressions (4.18) en fonction de  $i_{sat}$ ,  $\lambda_{sat}$  et  $h_{sat}$ , nous obtenons les séries suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(I)} \frac{\partial P_2}{\partial h} &= \frac{3}{4} \sin 2i_{sat} \sin(h_{sat}) \\ &\quad - \frac{3}{4} \sin i_{sat} (1 + \cos i_{sat}) \sin(2\lambda_{sat} - h_{sat}) \\ &\quad - \frac{3}{4} \sin i_{sat} (1 - \cos i_{sat}) \sin(2\lambda_{sat} - 3h_{sat})\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_2}{\partial I} &= \frac{3}{4} \sin 2i_{sat} \cos(h_{sat}) \\ &\quad - \frac{3}{4} \sin i_{sat} (1 + \cos i_{sat}) \cos(2\lambda_{sat} - h_{sat}) \\ &\quad + \frac{3}{4} \sin i_{sat} (1 - \cos i_{sat}) \cos(2\lambda_{sat} - 3h_{sat})\end{aligned}\tag{4.20}$$

En intégrant ces expressions et par le biais de (4.13) nous pouvons maintenant obtenir les nutations  $\Delta h$  et  $\Delta I$  sous forme de séries de Poisson, en prenant les éléments moyens des satellites fournis par Chapront-Touzé (1990) :

$$\Delta h = -\frac{K_{J_2}^{sat}}{\sin I} \times \frac{3}{4} \left[ \frac{\sin 2i_{sat}}{h_{sat}} \sin(h_{sat}) \right] \quad (4.21)$$

$$-\frac{\sin i_{sat} (1 + \cos i_{sat})}{(2\lambda_{sat} - h_{sat})} \sin(2\lambda_{sat} - h_{sat}) \quad (4.22)$$

$$+\frac{\sin i_{sat} (1 - \cos i_{sat})}{(2\lambda_{sat} - 3h_{sat})} \sin(2\lambda_{sat} - 3h_{sat}) \quad (4.23)$$

$$\Delta I = -K_{J_2}^{sat} \times \frac{3}{4} \left[ \frac{\sin 2i_{sat}}{h_{sat}} \cos(h_{sat}) \right] \quad (4.24)$$

$$-\frac{\sin i_{sat} (1 + \cos i_{sat})}{(2\lambda_{sat} - h_{sat})} \cos(2\lambda_{sat} - h_{sat}) \quad (4.25)$$

$$-\frac{\sin i_{sat} (1 - \cos i_{sat})}{(2\lambda_{sat} - 3h_{sat})} \cos(2\lambda_{sat} - 3h_{sat}) \quad (4.26)$$

Les influences significatives des satellites Phobos et Deimos respectivement en longitude et en obliquité sont donc les suivantes en remplaçant les différents paramètres par leurs valeurs numériques :

$$\Delta\psi_{sat} = +0'' .01209 \times \sin h_P + 0'' .00439 \times \sin h_D$$

$$\Delta\varepsilon_{sat} = -0'' .00514 \times \cos h_P - 0'' .00187 \times \cos h_D$$

Les périodes mises en jeu sont celles des noeuds des orbites des satellites Phobos,  $h_P$ , et Deimos,  $h_D$ , qui sont respectivement de 2.260 ans et de 54.754 ans. Nous avons fait une erreur de signe dans le calcul de ces influences lors de la publication de nos séries de la rotation de Mars (Bouquillon et Souchay, 1999).

### 4.2.3 Les effets directs dûs aux autres planètes

La partie du Hamiltonien correspondant aux effets directs d'un corps céleste ( $P^i$ ) sur la rotation de Mars est le potentiel gravitationnel  $U^i$  que nous avons décrit en détail dans le sous-chapitre 3.2.2.

Nous avons déjà étudié ce type d'influence sur la rotation de Mars dans le cas où ce corps ( $P^i$ ) est le Soleil (cf. partie 4.2.1). Nous avons fait dans ce cas des simplifications appréciables qui restent valides pour les autres corps perturbateurs ( $P^i$ ) dont les éphémérides se rapportent au repère écliptique  $J2000$  : Vénus, la Terre, Jupiter et Saturne. Entre autres, les équations (4.6) donnant les variations  $\Delta I$  et  $\Delta h$  sont toujours valables :

$$\begin{aligned}\Delta h &= -K_{J_2}^i \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial I} \times \left[ \int \frac{a_i^3}{r^3} A_1(I, h) dt \right] \\ \Delta I &= K_{J_2}^i \frac{1}{\sin I} \frac{\partial}{\partial h} \times \left[ \int \frac{a_i^3}{r^3} A_1(I, h) dt \right]\end{aligned}$$

où  $a_i$  est le demi-grand axe de la planète ( $P^i$ ).

De même, la relation (4.9) donnant l'opposé de la partie séculaire  $h^s$  de la variable  $h$  pour le Soleil est aussi valable pour les planètes ( $P^i$ ). En notant  $[p_A^M]_{P^i}$  l'opposé de la partie de  $h^s$  due aux corps ( $P^i$ ) la relation (4.9) devient :

$$[p_A^M]_{P^i} = - [3K_{J_2}^i \cos IS_i] t \quad (4.27)$$

où  $S_i$ , est la partie séculaire de  $\frac{a_i^3}{r^3} P_2(\sin \beta)$  avec  $\beta$  la latitude de la planète ( $P^i$ ) dans le repère  $R$ .  $K_{J_2}^i$  correspond au coefficient à  $K_{J_2}^S$ , mais pour la planète ( $P^i$ ) et non plus pour le Soleil :

$$K_{J_2}^i = K_{J_2}^S \frac{M_i}{M_S} \frac{a_S^3}{a_i^3}$$

Les valeurs numériques de ce coefficient sont : pour Jupiter  $K_{J_2}^J = 0.1324''/1000\text{ans}$ , pour la Terre  $K_{J_2}^T = 0.05936''/1000\text{ans}$ , Pour Venus  $K_{J_2}^V = 0.1263''/1000\text{ans}$  et pour Saturne  $K_{J_2}^{S^a} = 0.006397''/1000\text{ans}$ .

Pour mener à bien l'intégration du terme  $\frac{a_i^3 A_1(I, h)}{r^3}$ , il faut se rappeler qu'il dépend des coordonnées ( $X_i$ ,  $Y_i$  et  $Z_i$ ) marsocentriques dans le repère  $R$  des corps ( $P^i$ ) (cf. les relations (3.8) et (3.10)). Celles-ci s'expriment en faisant la différence des coordonnées héliocentriques dans le repère  $R$  du corps perturbateur ( $P^i$ ) avec celles de Mars. Les coordonnées héliocentriques dans le repère  $J2000$  de Mars et du corps ( $P^i$ ) sont fournies par les éphémérides V.S.O.P.87. On obtient leurs coordonnées dans le repère  $R$  en faisant les rotations décrites dans l'annexe VI et dans la partie consacrée à l'influence solaire.

Nous avons rassemblé les effets directs des planètes sur la nutation de l'axe du moment cinétique  $\vec{L}$  supérieurs à  $10^{-4}$  seconde d'arc en obliquité  $\Delta\varepsilon_{Pla}$  et en longitude  $\Delta\psi_{Pla}$ , respectivement dans les tableaux [4.7] et [4.8]. Nous remarquons que seuls Jupiter et la Terre ont des effets supérieurs à notre degré de troncature.

Remarque : Des termes à longue période de  $\Delta\psi_{Pla}$  que nous avons linéarisés viennent se rajouter à la partie séculaire  $[p_A^M]_{Pi}$  calculée par la relation (4.27). C'est l'ensemble de ces contributions que nous noterons  $[p_A^M]_{Pla}$ . De même, des termes à longue période de  $\Delta\varepsilon_{Pla}$  que nous avons linéarisés viennent créer une partie séculaire que nous noterons  $[\varepsilon_A^M]_{Pla}$ .

Nous n'avons pas distingué dans ces tableaux les parties séculaires des parties non-séculaires.

coefficient (")	Période (year)	argument	influence
-0.00622	-	t (1000 ans)	Jupiter
0.00009	5.930	$\cos(2\lambda_J)$	Jupiter
-0.00002	5.930	$\sin(2\lambda_J)$	Jupiter
0.00249	-	t (1000 ans)	Terre

TAB. 4.7: Les influences directes des planètes sur la nutation et la précession de Mars en obliquité  $\Delta\varepsilon_{Pla}$  et  $[\varepsilon_A^M]_{Pla}$

coefficient (")	Période (year)	arguments	influence
-0.22154	-	t (1000 ans)	Jupiter
-0.00019	5.930	$\sin(2\lambda_J)$	Jupiter
-0.00003	5.930	$\cos(2\lambda_J)$	Jupiter
-0.08153	-	t (1000 ans)	Terre
0.00014	-15.781	$\sin(\lambda_T - 2\lambda_M)$	Terre
-0.00008	-15.781	$\cos(\lambda_T - 2\lambda_M)$	Terre

TAB. 4.8: Les influences directes des planètes sur la nutation et la précession de Mars en longitude  $\Delta\psi_{Pla}$  et  $[p_A^M]_{Pla}$

#### 4.2.4 Influence du terme d'entraînement $E$

Il nous reste encore un terme du Hamiltonien  $K$  dont nous n'avons pas évalué l'influence sur l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$ . Ce terme est le terme d'entraînement  $E$  du repère de référence  $R$  sur le repère inertiel  $R_1$ .  $E$  est représenté par la relation (3.5) qui est :

$$E = G \sin I \left[ \sin \pi \cos (h - \bar{D}Q) \dot{\Pi} - \sin (h - \bar{D}Q) \dot{\pi} \right]$$

Ce terme  $E$  dépend des angles  $\pi$  et  $\Pi$  dont les définitions sont données dans le sous-chapitre 3.1. Nous pouvons déterminer les variations de  $\pi$  et  $\Pi$  au cours du temps à l'aide des deux angles  $\Omega$  et  $i$ , respectivement le noeud et l'inclinaison de l'orbite de Mars par rapport à l'écliptique  $J2000$ . Nous nous sommes déjà servi des angles  $\Omega$  et  $i$  dans la partie 4.2.1 pour faire les rotations entre le repère  $J2000$  et le repère  $R$ . Les valeurs de  $\Omega$  et  $i$  sont fournies sous formes de polynômes du temps par Bretagnon (1988) (cf. annexe IV) pour des études sur de relativement courtes périodes ( $\leq 1000$  ans) ou sous formes de séries de Fourier dépendant d'un plus ou moins grand nombre d'arguments (Bretagnon, 1984 et Laskar, 1988). Jusqu'ici, les périodes mises en évidence dans le mouvement de l'axe  $\vec{L}$  sont de l'ordre de l'année ; les éphémérides sous forme de polynômes du temps nous semblent donc plus appropriées. Nous traiterons le cas des plus longues périodes dans le sous-chapitre 4.5.

Le schéma [4.2] permet de relier tous ces angles  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\pi$  et  $\Pi$ . En se plaçant dans le triangle sphérique de sommets  $Q$ ,  $N_0$  et  $N$  de la figure [4.2], nous déterminons les relations suivantes entre ces angles :

$$\begin{aligned} \sin (\Pi + N_0 \Gamma_0) \sin \pi &= \sin (\Omega - \Omega_0) \sin i \\ \cos (\Pi + N_0 \Gamma_0) \sin \pi &= -\cos i \sin i_0 + \sin i \cos i_0 \cos (\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

Nous en déduisons les valeurs de  $\pi$  et  $\Pi$  suivantes, utiles au calcul du terme  $E$  :

$$\begin{aligned} \pi &= 897''.4480134T - 1''.380904T^2 - 0''.091923T^3 \\ \Pi &= -446819''.38155 + 12842''.087336T - 4''.352970T^2 + 15''.967223T^3 \end{aligned}$$

Précédemment, dans la partie 4.2.1, nous avons eu besoin de la valeur de  $ND$ , (l'angle entre le noeud descendant  $N$  de l'écliptique  $J2000$  sur l'orbite moyenne de Mars de la date  $t$  et l'origine non-tournante  $D$ ), pour faire la rotation entre le repère lié à l'écliptique  $J2000$  et le repère  $R$ . Nous pouvons maintenant calculer  $ND$  comme la différence entre  $NQ$ , (déterminé en utilisant la trigonométrie sphérique dans le triangle de sommet  $N_0$ ,  $N$  et  $Q$ ), et  $DQ$  (déterminé par les relations (A<sub>3.1</sub>) et (A<sub>3.2</sub>) de l'annexe III définissant l'origine non-tournante à l'aide de  $\pi$  et  $\Pi$ ). Soit :

$$(ND) = -520206''.882048 + 27780''.958512T + 5''.827291T^2 + 8''.236316T^3 \quad (4.28)$$

Le temps est ici donné en millier d'années.

En utilisant toujours les équations (3.23), nous pouvons déterminer les variations de  $h$  et  $I$  dûes au terme  $E$  avec dans ce cas :  $W_1 = \int E dt$ . Soit, à une constante près :

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{\cos I}{\sin I} \left[ \frac{\cos \Pi}{\dot{\Pi}} \dot{\pi} - \sin \pi \sin \Pi \right] \\ \Delta I &= -\sin \pi \cos \pi - \frac{\sin \Pi}{\dot{\Pi}} \dot{\pi} \end{aligned}$$

Nous voyons que l'ensemble des angles qui apparaissent dans l'expression de  $E$  ont de très longues périodes :  $\pi$  a une période de  $1.71 \times 10^5$  ans,  $\Pi$  une période de  $2.87 \times 10^6$  ans et  $h$  une période voisine de celle de  $\pi$ . Nous pouvons donc considérer que, sur la période de notre étude, ces angles et leurs dérivées premières sont constants. Dans ces conditions, en prenant les valeurs des angles et de leurs dérivées à  $J2000$ , on a en particulier  $\pi = 0$ ,  $h = 0$  (car à  $J2000$  nous avons choisi le point  $D$  et le point  $\Gamma$  confondus) et  $h - DQ = -\Pi$ . Les expressions des variations de  $h$  et  $I$  se simplifient et deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{\cos I \cos \Pi}{\sin I \dot{\Pi}} \dot{\pi} \\ \Delta I &= -\frac{\sin \Pi}{\dot{\Pi}} \dot{\pi} \end{aligned}$$

Enfin, en développant  $\cos \Pi = \cos \Pi_0 - \dot{\Pi} \sin \Pi_0 t$  et  $\sin \Pi = \sin \Pi_0 + \dot{\Pi} \cos \Pi_0 t$  avec  $\Pi_0$  la valeur de  $\Pi$  à  $J2000$ , ces expressions deviennent :

$$\begin{aligned} h_E &= -\frac{\cos I}{\sin I} \dot{\pi} \sin \Pi_0 \times t \\ I_E &= -\dot{\pi} \cos \Pi_0 \times t \end{aligned}$$

Soit, numériquement :

$$\begin{aligned} \dot{h}_E &\approx -1.57970''/\text{an} \\ \dot{I}_E &\approx 0.50336''/\text{an} \end{aligned}$$

Par linéarisation les effets  $h_E$  et  $I_E$  sont devenus des effets séculaires et ils participent donc respectivement à  $p_A^M$  et à  $\varepsilon_A^M$ . Nous noterons ces effets respectifs :

$$\begin{aligned} [p_A^M]_E &= -h_E \approx 1.57970''/\text{an} \\ [\varepsilon_A^M]_E &= -I_E \approx -0.50336''/\text{an} \end{aligned}$$

### 4.2.5 Visualisation du mouvement de $\vec{L}$ dans $R$

Nous venons donc d'étudier les termes du Hamiltonien  $K$  qui pouvaient influencer de manière significative sur les variables  $h$  et  $I$ . Nous avons calculé l'amplitude des différentes perturbations significatives. Nous pouvons donc maintenant exprimer  $h$  et  $I$  à l'aide de toutes ces quantités et nous obtenons les relations suivantes :

$$h = -[p_A^M]_S - [p_A^M]_E - [p_A^M]_{Pla} - \Delta\psi_{Sol} - \Delta\psi_{sat} - \Delta\psi_{Pla(indirect)} - \Delta\psi_{Pla} - \Delta\psi_{tri} \quad (4.29)$$

$$I = -\varepsilon_0 - [\varepsilon_A^M]_S - [\varepsilon_A^M]_E - [\varepsilon_A^M]_{Pla} - \Delta\varepsilon_{Sol} - \Delta\varepsilon_{sat} - \Delta\varepsilon_{Pla(indirect)} - \Delta\varepsilon_{Pla} - \Delta\varepsilon_{tri}$$

Nous savons que la direction de l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  est entièrement déterminé dans le repère de référence  $R$  par les variations des deux angles ci-dessus au cours du temps. La relation (3.4) exprime les coordonnées rectangulaires du vecteur  $\vec{L}$  dans le repère  $R$  en fonction des variables  $h$  et  $I$ , et de sa norme  $G$  :

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} G \sin I \sin h \\ -G \sin I \cos h \\ G \cos I \end{bmatrix}_R$$

En remplaçant  $h$  et  $I$  par leurs expressions (4.29) dans la relation ci-dessus, nous obtenons le mouvement du vecteur  $\vec{L}$  normalisé sur la sphère unité liée au repère  $R$ .

Nous avons représenté le mouvement de ce vecteur sur la figure [4.4]. Il se décompose en deux mouvements distincts :

- Un premier mouvement dû à la précession en longitude  $p_A^M$  et responsable de la rotation du vecteur  $\vec{L}$  autour de l'axe perpendiculaire à l'orbite moyenne de Mars de la date avec une période  $T_p$  d'environ 141 000 ans avec un angle constant entre ces deux axes  $\varepsilon_0$  voisin de 25 degrés. Nous nommerons l'axe imaginaire emporté par ce seul mouvement : l'axe de moment cinétique moyen de Mars. Nous le noterons  $\vec{L}_m$ . (Le mouvement de cet axe est représenté sur la sphère de la figure [4.4].) Ce mouvement est principalement dû à  $[p_A^M]_S$ , la partie solaire de la précession en longitude, et, avec une moindre importance, à  $[p_A^M]_E$ , la partie de la précession en longitude provenant de la linéarisation des effets du terme d'entraînement  $E$  entre le repère  $R_1$  (inertiel) et le repère  $R$ .

Ce même mouvement pour la Terre a une période d'environ 27 000 ans. La différence importante entre les fréquences de ce mouvement pour la Terre et pour Mars s'explique par l'influence de la Lune qui, dans le cas de la Terre, participe pour 2/3 à sa précession en longitude.

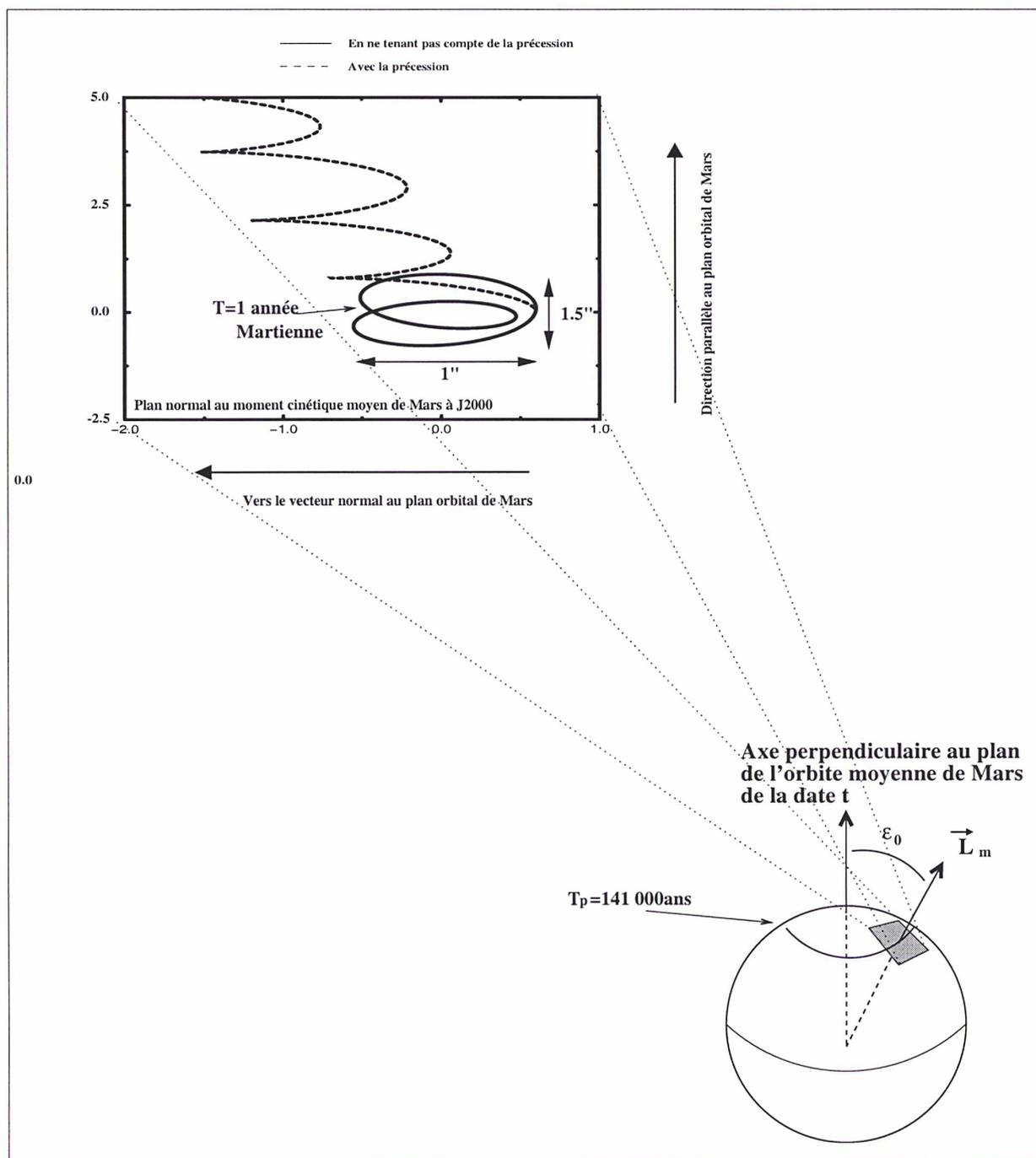


FIG. 4.4: *Mouvement du moment cinétique vrai de Mars dans un repère centré sur le moment cinétique moyen de Mars à une date  $t_0$*

- Un second mouvement dû aux nutations en longitude  $\Delta\psi$  et en obliquité  $\Delta\varepsilon$  de beaucoup plus faible amplitude ( $\leq 1.5$  secondes d'arc, ce qui correspond à environ 24 mètres si nous nous plaçons sur la surface de Mars). Ce second mouvement est une oscillation autour de la position de l'axe de moment cinétique moyen  $\vec{L}_m$ . Nous avons représenté l'aspect général de ce mouvement de nutation sur la partie agrandie de la figure [4.4]. La cycloïde en pointillés représente la somme du mouvement de précession et de nutation de l'axe  $\vec{L}$ . La courbe "quasi-fermée" en trait plein ne représente quant à elle que le mouvement de nutation de ce même axe. Cette dernière courbe est également représentée sur la figure [4.6]. Elle est à comparer à la courbe [4.5] qui correspond au même mouvement de nutation de l'axe de moment cinétique mais pour la Terre. Pour la Terre, ce mouvement est dominé par l'influence de la Lune (oscillation principale d'une période de 18.6 ans et d'une amplitude d'environ 18 secondes d'arc). Les nutations dûes au Soleil sont de moindre importance : une influence principale de 1 seconde d'arc sur une période semi-annuelle.

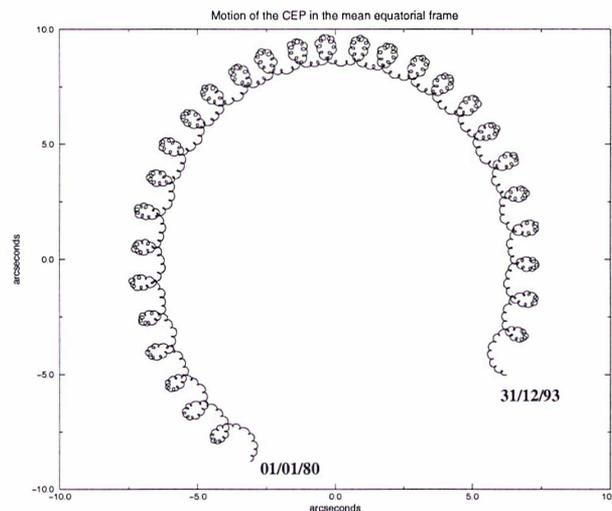


FIG. 4.5: *Mouvement de nutation de l'axe de moment cinétique vrai de la Terre centré sur l'axe de moment cinétique moyen de la Terre (Christian Bizouard (1995)).*

Pour Mars, ses deux satellites, Phobos et Deimos, sont de beaucoup plus faibles dimensions que la Lune. C'est donc l'influence du Soleil qui domine largement le mouvement de nutation, en étant responsable des 3 plus gros termes de nutations dont les arguments respectifs sont, par ordre décroissant d'importance :  $2M+2\Lambda_M$ ,  $M$  et  $3M+2\Lambda_M$  (cf. tables [4.1] et [4.2]). Ces deux plus gros termes expliquent d'ailleurs l'apparence fermée et la forme particulière de la courbe de nutation

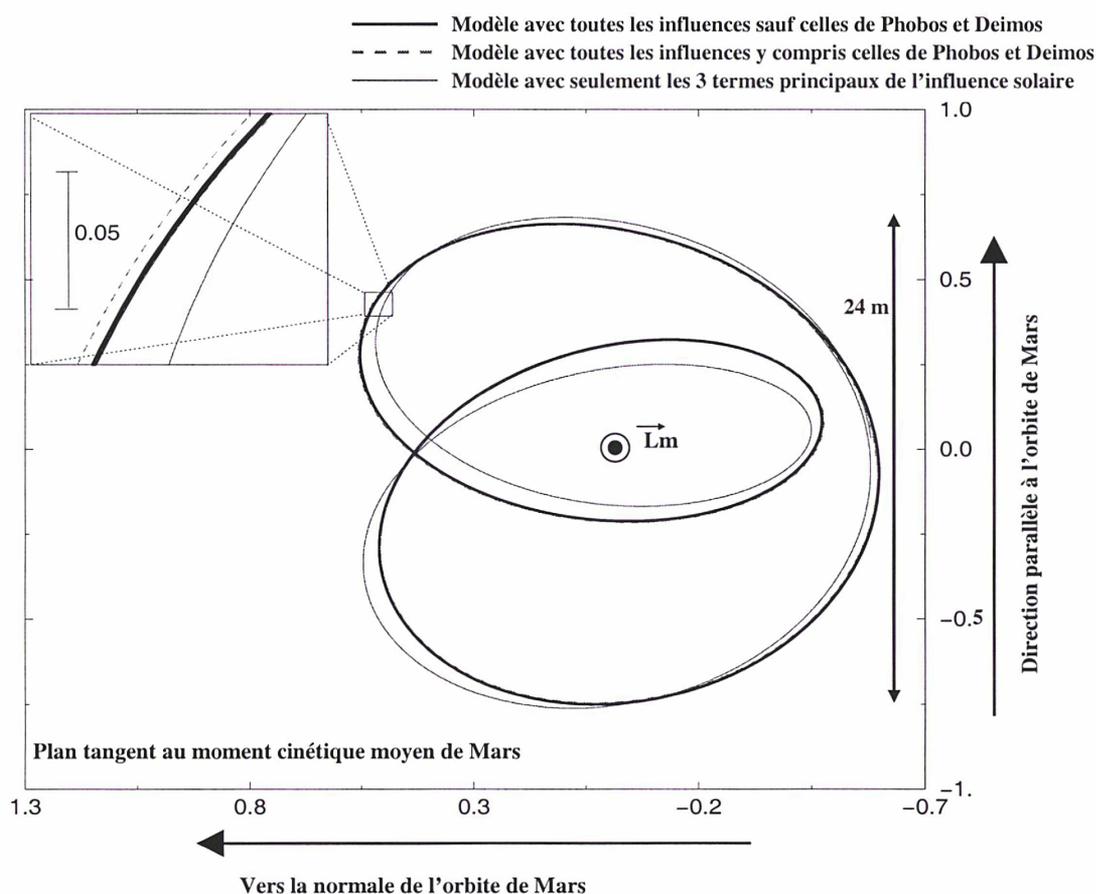


FIG. 4.6: *Mouvement du moment cinétique vrai de Mars dans un repère centré sur le moment cinétique moyen de Mars.*

de Mars par : la commensurabilité de leurs fréquences (d'un rapport 2) et leurs amplitudes voisines (respectivement 2 et 1.2 secondes d'arc). Nous voyons sur la figure [4.6] centrée sur l'axe  $\vec{L}_m$  qu'en traçant la courbe prenant en compte uniquement ces trois termes principaux (courbe en trait fin), la courbe réelle du mouvement de nutation de Mars (courbe en gras), ne s'écarte pas de l'autre de plus de 0.06 secondes d'arc (soit d'environ 1 mètre à la surface de Mars). Si nous voulons un degré de précision supérieur, il faut alors prendre en compte les effets des deux satellites Phobos et Deimos qui ne peuvent plus être négligés. Nous avons tracé pour en rendre compte, dans la partie agrandie de la figure [4.6], le mouvement de nutation de l'axe  $\vec{L}$  en tenant compte des satellites Phobos et Deimos (ligne en pointillés) et ce même mouvement sans en tenir compte (ligne en trait gras).

### 4.3 Mouvement de l'axe de figure $OC$

Nous avons entièrement déterminé le mouvement de l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  dans le repère de référence  $R$ . Mais nous ne devons pas oublier que notre but initial était de décrire le mouvement de l'axe de figure  $OC$  qui nous intéresse car, dans le cas d'un modèle de Mars rigide, cet axe est fixe dans un repère lié aux axes de moments d'inertie principaux de cette planète. Nous n'avons décrit le mouvement du vecteur  $\vec{L}$  que parce qu'il s'exprime simplement en fonction de deux variables d'Andoyer et qu'il est proche de cet axe  $OC$ . Nous savons que l'écart entre ces deux axes est donné par les relations au premier ordre en  $J$  (4.2) qui s'écrivent respectivement en longitude et en obliquité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h_f - h &\simeq \frac{J}{\sin I} \sin g \\ I_f - I &\simeq J \cos g \end{aligned}$$

où  $h_f$  et  $I_f$  sont les deux angles d'Euler permettant de définir la position de l'axe  $OC$  (cf. la figure [4.1]).

Nous allons déterminer comment varient ces quantités en exprimant les variables  $g$  et  $J$  sous la forme de la relation (3.23) :  $J = J^s + \Delta J$  et  $g = g^s + \Delta g$ . Soient, au premier ordre de ces variations :

$$\begin{aligned} h_f - h &\simeq \frac{J^s}{\sin I} \sin g^s + \Delta \left( \frac{J}{\sin I} \sin g \right) = \frac{J^s}{\sin I} \sin g^s + \left[ \frac{\Delta J}{\sin I} \sin g^s + \frac{J^s \Delta g}{\sin I} \cos g^s \right] \\ I_f - I &\simeq J^s \cos g^s + \Delta (J \cos g) = J^s \cos g^s + [\Delta J \cos g^s - J^s \Delta g \sin g^s] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Remarque : il n'est pas utile de différencier la variable  $I$  de la constante  $-\varepsilon_0$  pour déterminer ces variations. En effet, les variations de  $I$  sont déjà faibles et elles seront dans ces calculs multipliées par  $J$  qui est lui même petit.

En utilisant le méthode de Lie, nous pouvons exprimer formellement les variables  $J$  et  $g$  à l'aide des relations (3.23) qui expriment les variations de  $\tilde{J}$  et  $\tilde{g}$  en fonction de  $W_1$ , le premier ordre de la fonction génératrice. En effet nous avons supposé pour Mars que l'angle  $J$  était assez petit pour que nous puissions identifier  $J \cos g$  et  $J \sin g$  avec respectivement  $\tilde{J} \cos \tilde{g}$  et  $\tilde{J} \sin \tilde{g}$  (cf. le sous-chapitre 4.2.1). Soient :

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{1}{G} \left( \frac{1}{\sin J} \frac{\partial W_1}{\partial l} - \frac{\cos J}{\sin J} \frac{\partial W_1}{\partial g} \right) \\ \Delta g &= \frac{1}{G} \left( \frac{\cos I}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} + \frac{\cos J}{\sin J} \frac{\partial W_1}{\partial J} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Comme nous savons qu'il s'agit d'effets faibles, nous allons considérer seulement la partie la plus importante de la fonction génératrice  $W$ . Soit, d'après les sous-chapitres

précédents, l'ordre 1, noté  $W_{J_2}^S$ , de la fonction génératrice due à l'interaction entre le potentiel solaire et l'aplatissement dynamique  $J_2$  de Mars. Nous avons exprimé cette quantité en fonction des variables d'Andoyer par la relation (4.5) qui s'écrit :

$$W_{J_2}^S = \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) \int \frac{A_1(I, h)}{r^3/a_s^3} dt + \sin 2J \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt + \sin^2 J \int \frac{A_3(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right]$$

En utilisant la relation ci-dessus pour  $W_1$  dans l'expressions (4.31) des variations de  $g$  et  $J$ , en remarquant que  $W_{J_2}^S$  ne dépend pas de la variable d'Andoyer  $l$  et en se rappelant que  $\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} = -\Delta h$  (relation (3.23)), nous obtenons les relations suivantes :

$$\Delta J = -\frac{1 \cos J}{G \sin J} \frac{\partial W_1}{\partial g} \\ = -K_{J_2}^S \left[ 2 \cos^2 J \frac{\partial}{\partial g} \left[ \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] + \frac{1}{2} \sin 2J \frac{\partial}{\partial g} \left[ \int \frac{A_3(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \right] \\ \Delta g = -\cos I \Delta h + \frac{\cos J}{G \sin J} \frac{\partial W_1}{\partial J} = -\cos I \Delta h + \\ + K_{J_2}^S \left[ -3 \cos^2 J \int \frac{A_1(I, h)}{r^3/a_s^3} dt + 2 \frac{\cos 2J \cos J}{\sin J} \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt + 2 \cos^2 J \int \frac{A_3(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right]$$

En substituant ces expressions des variations de  $g$  et  $J$  dans les relations (4.30), nous exprimons l'écart entre l'axe du moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe  $OC$  à l'ordre 0 en  $J$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \left( \frac{J}{\sin I} \sin g \right) = -\frac{K_{J_2}^S}{\sin I} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial g} \left[ \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \sin g^s - 2 \left[ \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \cos g^s \right] + O(J) \\ \Delta (J \cos g) = -K_{J_2}^S \left[ 2 \frac{\partial}{\partial g} \left[ \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \cos g^s + 2 \left[ \int \frac{A_2(I, h, g)}{r^3/a_s^3} dt \right] \sin g^s \right] + O(J) \end{array} \right.$$

Nous nous servons, comme dans le cas de la détermination des séries des variations  $\Delta h$  et  $\Delta I$  dans le Chapitre 4.2, du manipulateur de série de Poisson de Broucke, (1980) pour exprimer ces relations. Dans la partie de droite de ces équations, les variables d'Andoyer correspondent aux solutions du Hamiltonien séculaire restreint à  $K_0^0$ . C'est à dire que  $G$  et  $I$  sont des constantes égales respectivement à  $G = C\omega$  et  $I = -\epsilon_0$  tandis que les variables angulaires  $h$ ,  $g$  et  $l$  sont des fonctions affines du temps  $t$  ayant pour fréquences angulaires respectives  $n_h = 0$ ,  $n_g = n_{\bar{g}}$  et  $n_l = n_{\bar{l}}$  et où  $n_{\bar{g}}$  et  $n_{\bar{l}}$  sont les fréquences du mouvement libre de Mars (les détails sur la méthode sont donnés dans le sous-chapitre 3.3).

Nous donnons les résultats avec les notations de la relation (4.1) : les nutation de l'axe  $OC$  en longitude  $\Delta\psi = -\Delta (J \sin g / \sin I)$  dans le tableau [4.9] et les nutations de l'axe  $OC$  en obliquité  $\Delta\varepsilon = -\Delta (J \cos g)$  dans le tableau [4.10].

sin (")	Période (an)	$M$	$\Lambda_M$
-0.00361	0.940	2	2
-0.00119	0.627	3	2
-0.00027	0.470	4	2
0.00017	1.881	1	2

TAB. 4.9: Les termes d'Oppolzer en longitude permettant de faire la différence entre l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe de figure  $OC$ ,  $\Delta\psi_{opp}$

cos (")	Période (an)	$M$	$\Lambda_M$
-0.00139	0.940	2	2
-0.00046	0.627	3	2
0.00040	1.881	1	
-0.00010	0.470	4	2

TAB. 4.10: Les termes d'Oppolzer en obliquité permettant de faire la différence entre l'axe de moment cinétique  $\vec{L}$  et l'axe de figure  $OC$ ,  $\Delta\varepsilon_{opp}$

Nous avons donc maintenant le mouvement total de l'axe  $OC$  dans le repère  $R$ . Il ne faut cependant pas oublier les premiers termes de la partie droite des relations (4.30),  $(\frac{J^s}{\sin I} \sin g^s \text{ et } J^s \cos g^s)$ , qui correspondent dans le cas rigide au mouvement libre dans le repère  $R$  étudié dans le Chapitre 2 : soit une rotation circulaire, de rayon  $J$ , de l'axe de figure  $OC$  autour de l'axe  $\vec{L}$  avec la période de la variable  $g^s$  (cf. relation (4.12)).

Mais nous savons que pour la Terre ce mouvement se transforme énormément en raison de l'élasticité de la Terre et de la présence d'un noyau fluide. Ce mouvement appelé "mouvement de Chandler" dans le cas non-rigide, (voir le chapitre introductif sur la rotation des corps), modifie la période de la variable  $g^s$  en rajoutant des corrections dues à l'élasticité de la Terre et à la présence d'un noyau fluide. L'estimation de l'amplitude de ce mouvement par Yoder et Standish (1997) pour Mars est inférieure à 0.05".

De plus, pour la Terre, un deuxième mouvement saisonnier vient se rajouter à celui-ci. Il est dû principalement à la variation de la pression sur la surface d'un corps non-sphérique. Cette effet de 0.15 seconde d'arc d'amplitude pour la Terre doit être plus faible pour Mars étant donnée la moindre importance de son atmosphère.

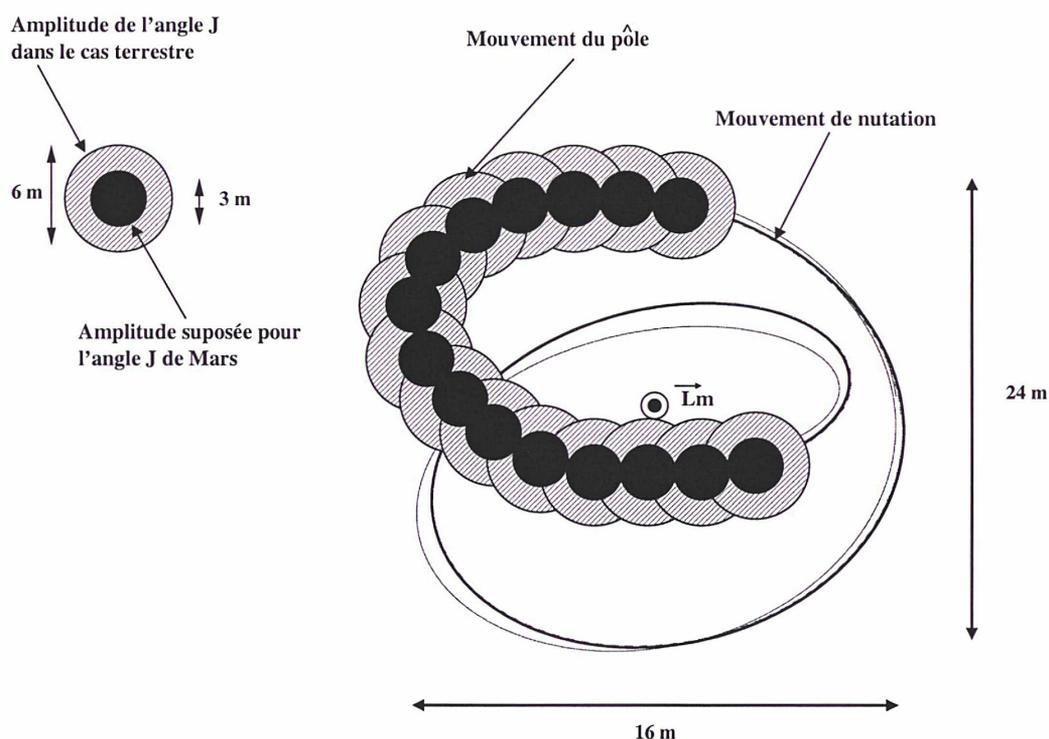


FIG. 4.7: Incertitude sur la position de l'axe de figure de Mars en prenant la valeur de  $J \simeq 0.2$  seconde d'arc (valeur voisine de celle de la Terre) ou en prenant la valeur de  $J \simeq 0.1$  seconde d'arc (estimation pour Mars).

Nous pouvons donc supposer que l'angle  $J$  de Mars est inférieur à  $0.1''$ . Pour la Terre, cette angle a une valeur voisine de  $J = 0.2''$ .

Comme jusqu'à maintenant le mouvement du pôle n'a pas pu être observé, nous pouvons regarder  $J$  comme une variable indéterminée permettant de localiser l'axe  $OC$  autour de l'axe du moment cinétique.

La figure [4.7] indique schématiquement la taille relative entre le mouvement de nutation et l'incertitude que représente l'ignorance de la valeur de l'angle  $J$  sur la position relative de l'axe  $OC$  et de l'axe  $\vec{L}$ . Nous avons encadré cet angle  $J$  entre deux valeurs correspondant respectivement à la valeur moyenne  $0.2''$  de cette angle pour la Terre (cercles hachurés) et la valeur de  $0.1''$  que nous supposons pour cette angle pour Mars (cercle plein).

Quant aux variations de ce mouvement circulaire correspondant aux valeurs des deux tableaux ci-dessus, nous voyons qu'elles sont très faibles (l'écart maximal étant de  $0.004$  seconde d'arc en longitude et de  $0.002$  seconde d'arc en obliquité, ce qui fait des distances sur Mars de l'ordre de  $4$  cm).

## 4.4 La constante $MR^2/C$ et son lien avec la variable $h$

Nous avons vu dans les sous-chapitres précédents lors de la détermination du mouvement de l'axe de figure  $OC$  de Mars dans le repère  $R$  que la constante  $\frac{MR^2}{C}$  y jouait un rôle particulièrement important.

En effet, les mouvements de cet axe  $OC$  dûs à des corps célestes extérieurs (le Soleil, les satellites Phobos et Deimos ou les autres planètes) sont tous proportionnels à  $\frac{MR^2}{C}$ . Dans le cas de l'influence solaire, l'explication principale de la différence entre nos valeurs de nutation et celles calculées par Borderies, (1980) était justement due à un choix différent pour la valeur de ce paramètre  $\frac{MR^2}{C}$ . Il n'y a que le terme d'entraînement  $E$  du repère  $R$  sur le repère  $R_1$  et l'énergie cinétique  $F_0$  (correspondant au mouvement libre) qui ont des influences indépendantes de ce paramètre.

Ce dernier dépend de la structure physique interne de Mars. Or, cette structure interne est très mal connue du fait qu'il n'a pas été possible, jusqu'à maintenant, de poser ni de faire fonctionner des sismomètres à la surface de Mars. Il est cependant possible de calculer une estimation de ce paramètre à partir de modèles théoriques de la structure interne de cette planète. Le modèle le plus simple pour la distribution des masses à l'intérieur de Mars est celui qui suppose cette planète en équilibre hydrostatique. Il est également possible d'estimer des écarts à cet équilibre en imaginant, par exemple un excès de masse provenant de la présence du plateau de Tharsis (Reasenbergh, 1977).

Pour la Terre, bien que sa structure interne soit connue beaucoup plus précisément que celle de Mars, on ne détermine pas ce paramètre  $\frac{MR^2}{C}$  grâce aux mesures géophysiques ni à l'aide de modèles théoriques mais par l'intermédiaire, justement, du rôle qu'il joue dans la précession en longitude  $P_A$  (Souchay et Kinoshita, 1996) qui est une quantité observée avec précision depuis très longtemps. Pour appliquer cette même méthode pour la planète Mars, il nous faut une valeur observée de la précession en longitude.

Depuis les sondes Viking (1976–1980), et plus récemment avec la sonde Pathfinder (1997), il a été possible d'observer la précession en longitude de Mars, que nous notions  $P_A^M$  dans les chapitres précédents. En effet, le mouvement de précession est un effet séculaire et donc, en tant que tel, sa valeur augmente avec le temps. Contrairement aux nutations dont l'amplitude maximum est d'environ 0.75 seconde d'arc et ne varie pas, la valeur de l'angle de précession augmente, elle, avec le temps : en 1 an, sa valeur augmente de 7.5 secondes d'arc environ soit 1 minute et 15 secondes en 10 ans (en ne tenant compte que de l'effet solaire). Donc, plus on observe longtemps un phénomène séculaire, plus on connaît sa variation avec précision. En accordant les données Viking et les données Pathfinder qui ont 24 ans d'écart, Folkner et al. (1997) ont réussi à

déterminer la précession en longitude par rapport au plan fixe de l'orbite de Mars à  $J2000$ . Soit :

$$[P_A^M]_{Obs} = 7.576 \pm 0.035 \text{ secondes d'arc par an}$$

Nous pouvons donc, comme dans le cas de la Terre, déterminer la valeur de  $\frac{MR^2}{C}$  pour Mars à partir de ces observations de la précession en longitude et à l'aide de l'expression de  $P_A^M$  en fonction de  $\frac{MR^2}{C}$ . Soit, d'après les relations (4.29) :

$$[P_A^M] = [P_A^M]_S + [P_A^M]_E + [P_A^M]_{Pla} + [P_A^M]_{geo}$$

- Nous avons rajouté  $[P_A^M]_{geo}$  qui s'appelle la précession géodésique et qui correspond à un effet relativiste dont De Sitter (1938) a donné l'expression suivante :

$$[P_A^M]_{geo} = \frac{3}{2} \times \left[ \frac{na_s}{c} \right] \times \left[ \frac{n}{1-e^2} \right]$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $n$ ,  $a_s$  et  $e$  respectivement le moyen mouvement, le demi-grand axe et l'excentricité de Mars. La valeur numérique que nous trouvons pour Mars est de :  $[P_A^M]_{geo} = 0.67547$  seconde par siècle.

- En dehors de la précession géodésique, seule la partie  $[P_A^M]_E$  provenant du terme d'entraînement  $E$  entre un repère fixe  $R_1$  et le repère de référence  $R$  ne dépend pas de  $\frac{MR^2}{C}$ . Sa valeur est de :  $[P_A^M]_E = 1.57970$  seconde par an.
- Enfin, à l'aide des expressions de la précession en longitude dues au Soleil et aux planètes (respectivement les relations (4.9) et (4.27)) et de l'expression de  $K_{J_2}^S$  (4.7), nous pouvons exprimer  $[P_A^M]$  en fonction de  $\frac{MR^2}{C}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [P_A^M] &= [P_A^M]_S + [P_A^M]_E + [P_A^M]_{Pla} + [P_A^M]_{geo} \\ &= -\frac{MR^2}{C} \times \left[ 3 \cos I \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} J_2 \left[ S_0 + \frac{M_i a_S^3}{M_S a_i^3} S_i \right] \right] t + 1.57970 + 0.0067547 \end{aligned} \quad (4.32)$$

où  $S_i$ ,  $a_i$  et  $M_i$  sont des paramètres liés à la planète perturbatrice ( $P_i$ ) définis dans le sous-chapitre 4.2.3.

Nous avons montré dans ce même sous-chapitre que les planètes ayant les effets les plus importants étaient Jupiter et la Terre et que leurs influences respectives sur la précession en longitude étaient  $-0.00022''/\text{an}$  et  $-0.00008''/\text{an}$  (cf. le tableau [4.8]). Ces deux valeurs ainsi que celle de la précession géodésique sont donc très faibles comparativement à la précision que nous avons sur la précession en longitude observée  $[P_A^M]_{obs}$ . Il n'est donc pas utile de tenir compte du terme lié à  $S_i$  ni de  $[P_A^M]_{geo}$  dans l'expression de  $P_A^M$ .

D'autre part, la valeur observée est mesurée par rapport au plan fixe de l'orbite de Mars à J2000. Nous ne devons donc pas tenir compte du terme  $E$  d'entraînement. La seule influence au degré d'incertitude actuel reste donc celle du soleil. Soit, en posant :

$$[P_A^M]_{obs} = -\frac{MR^2}{C} \times \left[ 3 \cos I \frac{\kappa^2 M_S}{\omega a_s^3} J_2 S_0 \right] t$$

où  $I$ ,  $\kappa^2 M_S$ ,  $\omega$ ,  $a_s$  et  $J_2$  sont tous beaucoup mieux connus que la valeur observée de la précession en longitude.

Nous pouvons donc en déduire la valeur suivante de  $\frac{MR^2}{C}$  :

$$\frac{MR^2}{C} = 2.726 \pm 0.013 \quad (4.33)$$

Cette valeur est légèrement différente de celle calculée par Folkner et al. (1997) qui était de  $2.731 \pm 0.013$ . La différence peut provenir du terme  $S_0$  pour lequel Folkner et al. prennent l'approximation képlérienne  $-\frac{1}{2}(1 - e^2)^{-3/2}$  et pour lequel nous prenons la partie constant du couple solaire déterminé à partir de l'éphéméride VSOP87 de Mars. Cette différence est de l'ordre de 1/6 de l'incertitude sur cette mesure.

Nous avons pris la valeur de Folkner et al. pour calculer l'ensemble des résultats de ce chapitre. Pour obtenir les résultats avec notre valeur de  $\frac{MR^2}{C}$ , il suffit de multiplier les effets solaires, les effets de Phobos et Deimos et les effets planétaires par 0.998.

Remarque : La mesure précise de la quantité  $MR^2/C$  présente un intérêt considérable pour la connaissance de la répartition des masses à l'intérieur de la planète Mars. En effet, l'absence de sismomètre à la surface de Mars a limité jusqu'ici son étude géophysique directe. Mais la connaissance du moment d'inertie maximal  $C$  grâce à la détermination du coefficient  $MR^2/C$ , lui-même estimé par l'intermédiaire de la relation (4.32) et de la mesure observée de la quantité de précession en longitude  $[P_A^M]_{obs}$ , nous renseigne sur les variations de densité interne de la planète Mars. En effet, si on note  $\rho$  la fonction de densité de la planète Mars, le moment d'inertie maximal  $C$  s'écrit de la manière suivante dans le repère des axes d'inertie principaux  $R_I$  :

$$C = \int \int \int \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \int \int \int \rho r^4 \sin^3 \theta d\theta dr d\phi$$

où le domaine d'intégration est borné par la surface de Mars avec l'angle  $\theta$  qui est l'angle entre le vecteur  $\vec{v}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $R_I$  et l'axe des  $Z$  et l'angle  $\phi$  qui est l'angle entre la projection de  $\vec{v}$  dans le plan  $X \times Y$  et l'axe des  $X$ .

Si nous supposons de plus que  $\rho$  ne dépende que de la distance au centre de la planète, nous obtenons :

$$C = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r)r^4 dr$$

Nous voyons donc que  $C$  est directement relié à la répartition des masses à l'intérieur de Mars ( $C/MR^2 = 0.4$  pour une sphère de densité uniforme et ce paramètre tend vers 0 plus la masse est concentrée au centre de la sphère). La densité dépend elle-même :

- de la composition chimique de Mars,
- des conditions de température et de pression,
- de la taille du noyau,
- des nombres de Love.

L'encadrement de la valeur de  $C$  obtenu grâce à la sonde Pathfinder, impose des contraintes aux différents modèles de structure interne de Mars. Le graphique ci-dessous réalisé par Yoder et Standish (1997) exprime le lien entre le rayon du noyau de Mars et la constante  $C/MR^2$  pour 4 modèles différents de composition chimique interne de Mars et pour 2 profils de température différents.

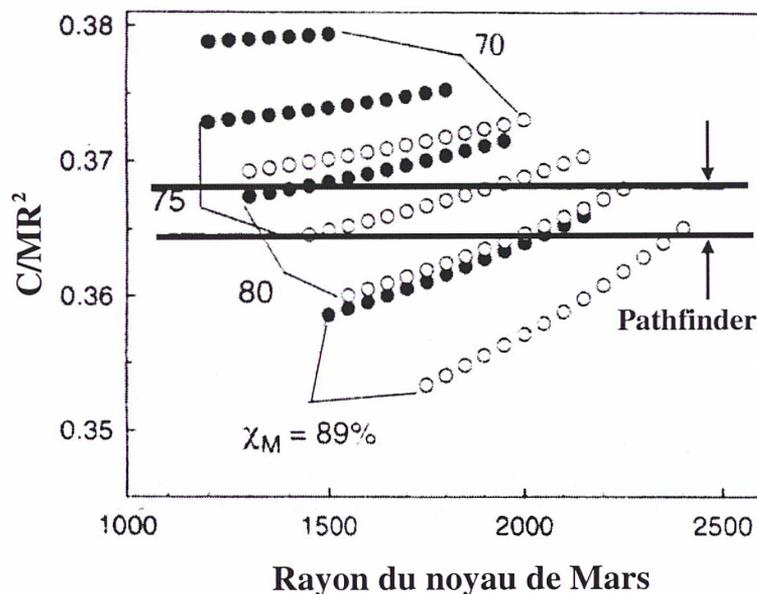


FIG. 4.8: Graphique réalisé par Yoder et Standish (1997)

Les 4 modèles de composition chimique interne du manteau de Mars sont formés d'un mélange de Magnésium et de Fer identifiés par leurs pourcentages respectifs de Magnésium,  $\chi_M$  (pour la Terre  $\chi_M = 89\%$ ). Les cercles pleins correspondent à une température inférieure de 200 Kelvin à celle de la Terre à pression équivalente et les cercles vides correspondent à une température supérieure de 200 Kelvin à celle de la Terre toujours à pression équivalente. Nous voyons nettement que l'amélioration de la mesure de  $C/MR^2$  contraint véritablement tout ces paramètres.

Les caractéristiques géophysiques évoquées ci-dessus vont jouer, réciproquement, un rôle important dans la rotation de Mars : en particulier la taille du noyau de Mars va avoir un rôle primordial dans la durée de la période de Chandler (cf. l'article de Gauchez et Souchay (2000)).

## 4.5 influence du terme d'entraînement $E$ à plus long terme

### 4.5.1 Méthode d'intégration des équations sur 500 000 ans

En étudiant l'influence sur les variables  $(h, g, l, I, G, J)$  du terme d'entraînement  $E$  du repère de référence  $R$  par rapport au repère inertiel  $R_1$  dans le Hamiltonien  $K$ , nous avons remarqué qu'il produisait des mouvements à relativement longue période : de l'ordre de 100 000 ans. Ce n'est pas le cas des autres termes du Hamiltonien  $K$  qui produisent, eux, des mouvements à courte période dont la plus longue d'environ 55 ans est due au mouvement du noeud de Deimos. Il y a également un terme avec une période d'environ 900 ans dans les termes planétaires indirects et aussi des termes mixtes, mais ceux-ci sont de faible amplitude : le plus grand terme mixte n'atteint pas 1 seconde d'arc au bout de 100 000 ans et le terme planétaire, avec une période de 878 ans, a une amplitude inférieure à 0.0002 seconde d'arc.

Nous avons calculé précédemment au premier ordre, le changement de variable permettant de transformer le Hamiltonien  $K$  en un Hamiltonien purement séculaire  $T^K = K_0^0 + K_0^1$  où  $K_0^0$  correspond au Hamiltonien du mouvement libre plus la variable conjuguée du temps et où  $K_0^1$  correspond à la partie séculaire restante de  $K$  qui, d'après la relation (4.8), se restreint à  $[U_{J_2}^S]_{sec}$  (nous ne tenons pas compte, ici, de la partie séculaire très faible due aux influences directes des planètes). Ce changement de variable est exprimé à l'aide des relations (3.23) qui lient les variables  $(h, g, l, I, G, J)$  aux variables séculaires correspondantes :  $(h^s, g^s, l^s, I^s, G^s, J^s)$ . (On rappelle que pour le cas de Mars, il n'est pas nécessaire, d'après le Chapitre 4.2.1, de différencier les variables  $(g, l, J)$  des variables  $(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{J})$ ).

Si nous ne tenons pas compte pour ce changement de variables des quantités provenant du terme d'entraînement  $E$ , c'est à dire des quantités calculées au Chapitre 4.2.4, alors, nous avons un changement de variable entre l'ancien Hamiltonien  $K$  et un nouveau Hamiltonien  $T^K + E$ . Dans cette somme, le terme  $E$  est exprimé en fonction des variables séculaires  $(h^s, g^s, l^s, I^s, G^s, J^s)$  à l'aide de (3.23). Cependant, du fait que les variations entre variables séculaires et variables non-séculaires ont des périodes courtes comparées aux périodes présentes dans  $E$  (cf. le début de ce chapitre) il n'est pas nécessaire de les distinguer; dans la suite nous noterons les variables séculaires par  $(h, g, l, I, G, J)$  pour simplifier les écritures.

Ce nouveau Hamiltonien s'écrit donc, en fonction des variables séculaires, ainsi :

$$\begin{aligned}
 K_{LP} &= F_0 + p_4 + E + [U_{J_2}^S]_{sec} & (4.34) \\
 K_{LP} &= F_0(G, J) + p_4 + G \sin I \left[ \sin i \cos(h - D\bar{N})\dot{\Omega} - \sin(h - D\bar{N})\frac{di}{dt} \right] - \\
 &\quad - \frac{k^2 M_S}{a_s^3} \frac{(2C - A - B)}{2} \frac{1}{4} (3 \cos^2 I - 1) (1 - e^2)^{-3/2}
 \end{aligned}$$

où  $LP$  signifie "longue période" et où nous avons remplacé  $S_0$  dans l'expression de  $[U_{J_2}^S]_{sec}$ , (cf.relation (4.8)), par  $-\frac{1}{2}(1 - e^2)^{-3/2}$  qui est la valeur de  $S_0$  dans le cas du mouvement képlerien,  $e$  étant l'excentricité de Mars. Le point  $N$  est, lui, défini sur la figure [4.2]. L'expression du terme  $E$  peut sembler différente de celle donnée par la relation (3.5) utilisée dans le cas de l'étude à courte période. En fait, nous avons seulement changé de repère inertiel  $R_1$ . Pour l'étude à courte période, nous avons pris, pour plan inertiel, le plan de l'orbite moyenne de Mars à  $J2000$  dans le but de décrire le mouvement de précession et nutation de Mars de manière analogue à celui de la Terre où le plan inertiel est le plan de l'orbite moyenne de la Terre à  $J2000$ , c'est à dire l'écliptique  $J2000$ .

Pour l'étude que nous entreprenons maintenant sur une plus longue période, nous prenons pour  $R_1$  : le repère de l'écliptique  $J2000$ . Ce plan est plus commode puisque les éphémérides de Mars à longue période (Bretagnon, 1984 et Laskar, 1988) sont données dans ce repère.

Dans tous les cas, l'expression de  $E$  s'écrit toujours à l'aide de la relation (3.5) ainsi :

$$E = -\vec{\Omega}_{R/R_1} \cdot \vec{L}$$

où  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  est le vecteur de rotation du repère  $R$  par rapport au repère  $R_1$ . Pour l'étude à longue période, le plan inertiel de  $R_1$  est le plan de l'orbite moyenne de Mars et l'origine des longitudes est toujours l'origine non-tournante  $D$ . En utilisant les angles  $\Omega$  et  $i$  qui sont, on le rappelle, respectivement le noeud de l'orbite moyenne de Mars sur l'écliptique  $J2000$  et l'inclinaison de l'orbite moyenne sur l'écliptique  $J2000$ , nous pouvons déterminer les composantes  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  dans le repère  $R$ . Soient :

$$\vec{\Omega}_{R/R_1} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \cos(D\bar{N}) - \dot{\Omega} \sin i \sin(D\bar{N}) \\ \frac{di}{dt} \sin(D\bar{N}) + \dot{\Omega} \sin i \cos(D\bar{N}) \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (4.35)$$

La troisième composante de  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  est nulle puisque  $D$  est toujours l'origine non-tournante. Les composantes de  $\vec{L}$  dans le repère  $R$  sont toujours données par la relation (3.4) et donc  $E_{LP}$ , le terme d'entraînement à longue période, s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{LP} &= G \sin I [\Omega_2 \cos h - \Omega_1 \sin h] \\ &= G \sin I \left[ \sin i \cos (h - D\bar{N})\dot{\Omega} - \sin (h - D\bar{N})\frac{di}{dt} \right] \end{aligned}$$

Pour l'étude à courte période, nous avons exprimé les composantes  $\Omega_i$  en fonction de  $\pi$  et  $\Pi$  et nous avons l'expression (3.5) pour  $E_{CP}$ , le terme d'entraînement à courte période. Comme le vecteur de rotation instantanée entre le repère inertiel  $R_1$  à courte période et le repère inertiel  $R_1$  à longue période est nul, nous avons  $E_{LP} = E_{CP}$ . De même, le mouvement de  $D$ , l'origine non-tournante, peut être déterminé par deux relations équivalentes, suivant le choix de  $R_1$ , correspondant toutes les deux à la condition (A<sub>3.2</sub>) de l'annexe III :

$$\begin{aligned} \dot{N}D &= -\cos i \dot{\Omega} \\ \dot{Q}D &= -\cos \pi \dot{\Pi} \end{aligned} \quad (4.36)$$

En écrivant les dérivées temporelles des variables  $h$  et  $I$  à l'aide du Hamiltonien  $K_{LP}$  nous avons donc :

$$\begin{cases} \dot{h} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial F}{\partial I} \\ \dot{h} = -\frac{\cos I}{\sin I} [\Omega_2 \cos h - \Omega_1 \sin h] - \frac{3 k^2 M}{2 G a^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) (1 - e^2)^{-3/2} \cos I \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \dot{I} = \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial F}{\partial h} \\ \dot{I} = -[\Omega_2 \sin h + \Omega_1 \cos h] \end{cases} \quad (4.38)$$

De manière pratique, les coordonnées  $\Omega_i$  peuvent s'exprimer à l'aide des variable  $p$  et  $q$  données par les éphémérides à longue période de Bretagnon (1984) ou de Laskar (1988). En fonction de  $\Omega$  et  $i$ , ces variables sont les suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \sin \left( \frac{i}{2} \right) \sin \Omega \\ q &= \sin \left( \frac{i}{2} \right) \cos \Omega \end{aligned}$$

Soient, grâce aux relations (4.35), les coordonnées  $\Omega_i$  de  $\vec{\Omega}_{R/R_1}$  dans  $R$  en fonction de  $p$  et  $q$  :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \frac{2(p\dot{p} + q\dot{q})}{\sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{1 - p^2 - q^2}} \\ \Omega_2 = \frac{2(\dot{p}q - \dot{q}p) \sqrt{1 - p^2 - q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \Omega_3 = 0 \end{cases}$$

Nous déterminons le terme  $(1 - e^2)^{\frac{-3}{2}}$ , présent dans l'équation (4.37), à l'aide des variables à longue période  $k_1 = e \sin \tilde{\omega}$  et  $k_2 = e \cos \tilde{\omega}$  données par les éphémérides à longue période de Mars :

$$(1 - e^2)^{\frac{-3}{2}} = (1 - k_1^2 - k_2^2)^{\frac{-3}{2}}$$

Nous pouvons donc exprimer les relations (4.36), (4.37) et (4.38) comme des fonctions du temps, lesquelles fonctions peuvent être intégrées numériquement, permettant d'avoir ainsi les mouvements des variables  $h$  et  $I$  et le mouvement de l'origine non-tournante  $D$ . Nous décidons d'intégrer ces variables sur une période de 500 000 ans. La limitation à cette échelle de temps est principalement due à l'incertitude des fréquences orbitales des planètes : soit environ 0.1 seconde d'arc par an. Cette incertitude entraîne au bout de 500 000 ans une incertitude en longitude d'environ 15 degrés. De plus, Laskar et Robutel (1993) ont montré que Mars est situé à l'intérieur d'une zone chaotique et qu'après 5 millions d'années la prédiction de l'orientation de Mars n'est plus possible.

Nous utilisons, pour mener à bien cette intégration, un intégrateur numérique de Runge-Kunta à l'ordre 8 avec un pas variable. Nous prenons les éphémérides de Laskar (1988) comme éléments planétaires à longue période. Sur 500 000 ans les différences avec les éphémérides de Bretagnon sont négligeables pour notre étude.

Dans un premier temps, nous prenons  $\frac{MR^2}{C} = 2.731$  qui est la valeur déterminée par Folkner et *al.* (1997) et qui correspond à  $[P_A^M]_{Obs} = 7.576$  secondes d'arc par an (cf. le sous-chapitre 4.4). La figure [4.9] montre les variations de  $(h + [P_A^M]_{Obs} \times t)$ , avec  $-500\,000\text{ans} < t < 0$ . La figure [4.10] montre les variations de  $\varepsilon_A^M (= -I)$  sur la même période de temps. Enfin, la figure [4.11] montre les variations de  $(\bar{D}N - D_0\bar{N}_0 - N_0\bar{N}) = V(D)$  qui représente le mouvement de  $D$ , l'origine non-tournante, sur l'orbite moyenne de la date de Mars.  $D_0$  et  $N_0$  sont les points  $D$  et  $N$  à l'instant  $J2000$ . Ils sont représentés sur la figure [4.2].

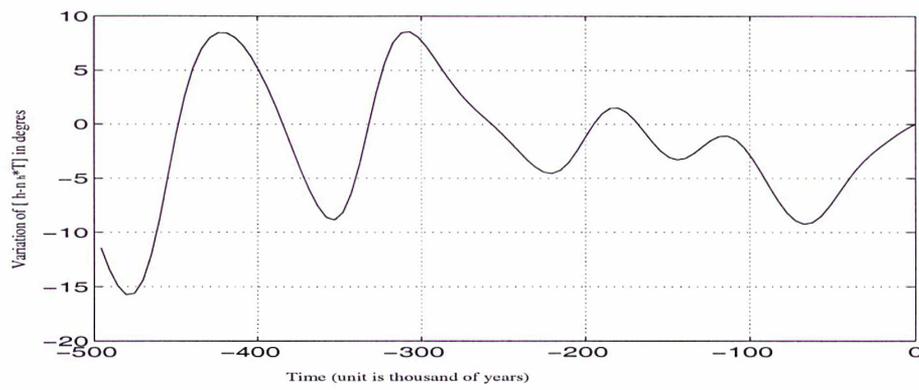


FIG. 4.9: *Mouvement de la variable  $h$  sur 500 000 ans*

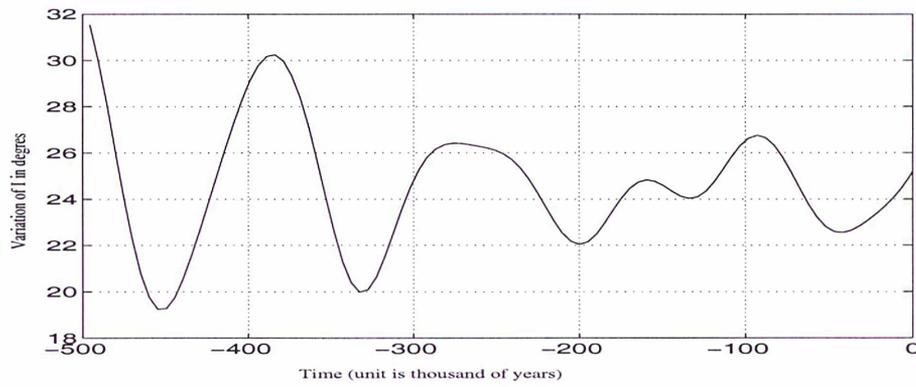


FIG. 4.10: *Mouvement de la variable  $\epsilon_A^M (= -I)$  sur 500 000 ans*

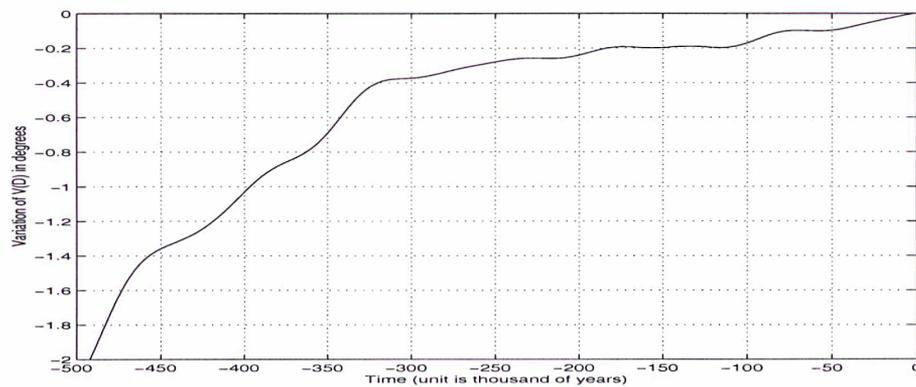


FIG. 4.11: *Mouvement de la variable  $D$  sur 500 000 ans*

### 4.5.2 Influence de la précision de $C/MR^2$ sur cette intégration

La variation de l'obliquité  $I$  de Mars sur des échelles de temps très longues a déjà été étudiée par Ward (1979) et (1991). Borderies (1980) a aussi étudié, pour Mars, les variations à longue période de l'obliquité  $I$  et de la précession en longitude du noeud  $\Gamma$  mesurée par la variable d'Andoyer  $h$  mais dont l'origine de l'angle  $h$  est, avec les notations de la figure [4.2], le point  $N$  qui n'a pas les mêmes propriétés que le point  $D$ . Cependant, le choix de ce point d'origine n'affecte pas directement l'obliquité qui est la variable dont les variations ont le plus d'influence sur l'histoire climatique de la planète Mars. Bien que nous utilisions des éphémérides différentes, les variations de l'obliquité de Mars déterminées par Ward, Borderies, ou nous même sont très similaires. Les différences principales sont dues essentiellement, encore une fois, au choix du paramètre incertain  $\frac{MR^2}{C}$ . Lequel paramètre a récemment gagné en précision grâce aux mesures supplémentaires de la sonde Pathfinder (cf. figure [4.13]).

Les larges variations de l'obliquité visibles sur la figure [4.10] : entre 18 et 32 degrés, proviennent de la commensurabilité entre la fréquence moyenne de précession en longitude, que nous noterons  $n_h$ , et des combinaisons linéaires des fréquences de révolution planétaire présentes dans les éphémérides à longue période. Nous avons déjà remarqué cette commensurabilité dans le sous-chapitre 4.2.4 entre la période moyenne de  $h$  et la période de l'angle  $\pi$ . Cette commensurabilité n'existe pas dans le cas de la Terre du fait que la Lune rajoute un terme très important dans la précession en longitude : environ 30 secondes d'arc par an (cf. sous-chapitre 4.3), lequel terme éloigne la fréquence moyenne de  $h$  des fréquences planétaires. Il en découle que les variations de l'obliquité pour la Terre ont une amplitude de 1 degré tandis que pour Mars ces variations atteignent une amplitude de 15 degrés.

De plus, la fréquence moyenne de précession  $n_h$  est proportionnelle au facteur  $\frac{MR^2}{C}$  d'après l'équation (4.37). Donc, du fait de résonances proches de  $n_h$ , la rotation de Mars à longue période va dépendre énormément de ce paramètre. D'après Folkner et al. (1997), l'incertitude sur ce paramètre a été réduite d'un facteur 10 grâce aux mesures de Pathfinder. Cependant, malgré le fait que cette amélioration permette de mieux déterminer la fréquence moyenne de  $h$ , il est toujours possible pour Mars de passer dans des zones de résonances. C'est pourquoi, nous avons étudié cette possibilité dans la figure [4.12]. Celle-ci représente l'évolution au cours du temps de la différence entre :

- des déterminations de l'obliquité de Mars calculées avec différentes valeurs du paramètre  $\frac{MR^2}{C}$  comprises dans la zone d'incertitude définie par la relation (4.33) et,
- l'obliquité de Mars calculée avec la valeur moyenne  $\frac{MR^2}{C} = 2.731$ .

Il n'y a pas sur cette période de 500 000 ans de résonances : les courbes ne se croisent pas et présentent des formes semblables avec des amplitudes augmentant graduellement. Cela est logique car la période de  $h$  et les périodes des arguments planétaires mises en jeu étant de l'ordre de 150 000 ans (cf. le sous-chapitre 4.2.4), les effets résonants produisent des termes à plus longues périodes encore que nous ne décelons pas sur 500 000 ans.

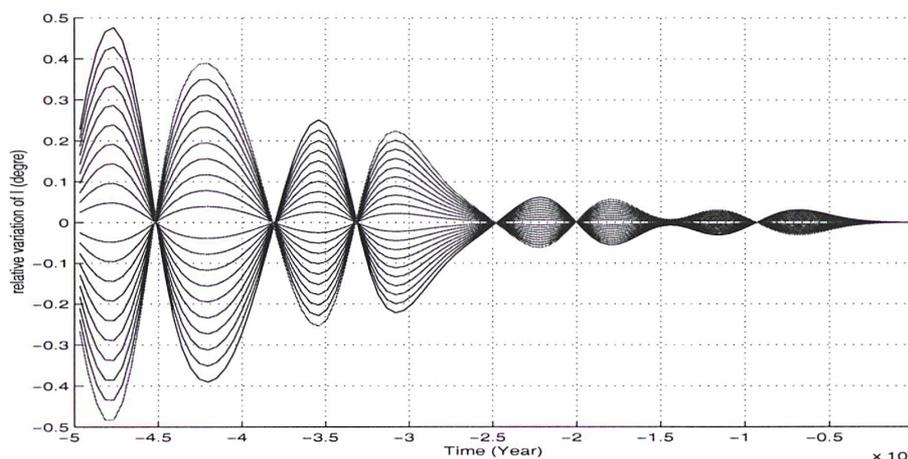


FIG. 4.12: *Mouvement relatif de  $I$  avec différentes valeurs de  $C/MR^2$  déterminées par Pathfinder.*

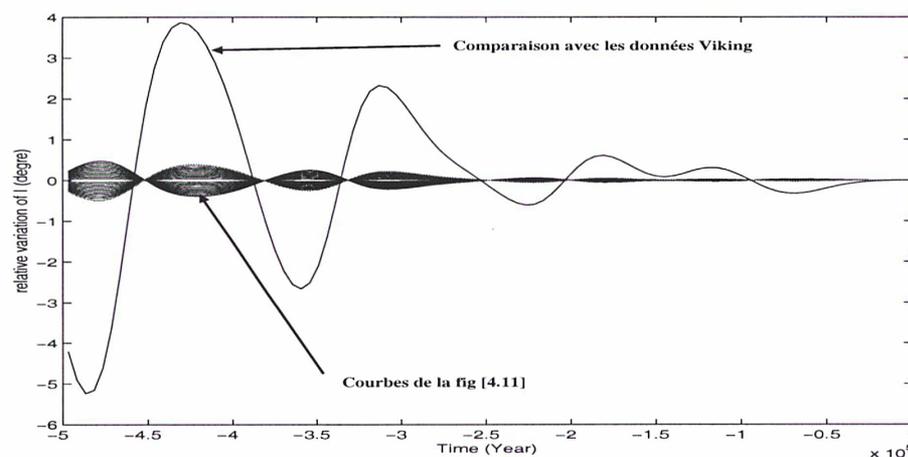


FIG. 4.13: *Mouvement relatif de  $I$  avec  $C/MR^2$  déterminé par Pathfinder d'une part et par Viking d'autre part.*

Comme nous l'avons déjà dit, les données de Pathfinder ont permis de réduire récemment d'un facteur 10 l'incertitude sur le paramètre  $\frac{MR^2}{C}$ . La figure [4.13] montre les conséquences de cette amélioration sur la détermination à longue période de l'obliquité de Mars. les courbes voisines de l'axe des abscisses sont les mêmes courbes que celles de la figure [4.12]. Il faut les comparer à la courbe isolée correspondant à l'incertitude sur

l'obliquité  $I$  telle que nous pouvions la déterminer avant la mission Pathfinder. Nous remarquons que l'incertitude sur  $I$  au bout de 500 000 ans est également réduite d'un facteur 10. Cependant, même avec les données de Pathfinder, l'amplitude de l'incertitude sur l'obliquité au bout de 500 000 ans est encore de 1 degré.

Mais si l'on songe que des variations d'amplitude semblables pour l'obliquité de la Terre sont une des principales raisons des ères glaciaires de notre planète, il apparaît d'autant plus utile de déterminer, encore plus précisément, ce paramètre  $\frac{MR^2}{C}$  pour la planète Mars.

\* \* \*

# Valeurs numériques importantes du Chapitre 4

Nom de la variable	valeur	incertitude	unité	provenance
$\omega$	350.89198226	$\pm 8$	$^{\circ}/d$	Folkner et al.(1997)
$n$	1886.51820925		$''/day$	conventional value of IAU.
$a_s$	$2.27939184 \times 10^8$		km	conventional value of IAU.
$\kappa^2 M_S$	$1.32712438 \times 10^{20}$		$m^3 \times sec^2$	conventional value of IAU.
$M_S/M$	3098710		-	conventional value of IAU.
$J_2$	0.001964		-	conventional value of IAU.
$J_3$	0.000036		-	conventional value of IAU.
$S_{2,2}$	0.000031		-	conventional value of IAU.
$C_{2,2}$	-0.000055		-	conventional value of IAU.
$MR^2/C$	2.731	$\pm 13$	-	Folkner et al.(1997)
$(B - A)/C$	0.0006896	$\pm 32$	-	
$C/A$	1.005741	$\pm 27$	-	this paper
$C/B$	1.005044	$\pm 24$	-	this paper
$R$	3397.2	$\pm 40$	km	conventional value of IAU.
$e$	0.0646	$\pm 5$	-	
$K_{J_2}^S$	5519	$\pm 26$	$''/1000 \text{ ans}$	
$K_{tri}^S$	-177.4	$\pm 8$	$''/1000 \text{ ans}$	
$\varepsilon_0$	25.189417	$\pm 35$	$\circ$	Folkner et al.(1997)
$\alpha_{2000}$	317.68143	$\pm 1$	$\circ$	Folkner et al.(1997)
$\delta_{2000}$	52.88650	$\pm 3$	$\circ$	Folkner et al.(1997)
$\Lambda_0$	-108.994438		$\circ$	

TAB. 4.11: Valeurs liées à Mars

Nom de la variable	valeur	incertitude	unité	provenance
$a_P$	9373.713		km	Chapront-Touzé (1990)
$e_P$	0.015146		-	Chapront-Touzé (1990)
$v_P$	1128.845		° /d	Chapront-Touzé (1990)
$i_P$	1.067639		°	Chapront-Touzé (1990)
$\kappa^2 M_P$	$6.38825 \times 10^{15}$		$m^3 \times d^2$	Chapront-Touzé (1990)
$\dot{h}_P$	-0.436025		° /d	Chapront-Touzé (1990)
$K_{J_2}^P$	511.7	$\pm 24$	"/1000 ans	this paper
$a_D$	23457		km	Chapront-Touzé (1990)
$e_D$	0.000196		-	Chapront-Touzé (1990)
$v_D$	285.1619		° /d	Chapront-Touzé (1990)
$i_D$	1.78896		° /d	Chapront-Touzé (1990)
$\kappa^2 M_D$	$8.96375 \times 10^{14}$		$m^3 \times d^2$	Chapront-Touzé (1990)
$\dot{h}_D$	-0.018001		° /d	Chapront-Touzé (1990)
$K_{J_2}^D$	4.581	$\pm 21$	"/1000ans	this paper
$M_S/M_J$	1047.355		-	conventional value of IAU.
$a_J$	$7.78298355 \times 10^8$		-	conventional value of IAU.
$K_{J_2}^J$	0.1324	$\pm 6.2$	"/1000ans	this paper
$M_S/M_T$	328900.5		-	conventional value of IAU.
$a_T$	$1.49598022 \times 10^8$		-	conventional value of IAU.
$K_{J_2}^T$	0.05936	$\pm 28$	"/1000ans	this paper
$M_S/M_V$	408523.5		-	conventional value of IAU.
$a_v$	$1.08208600 \times 10^8$		-	conventional value of IAU.
$K_{J_2}^V$	0.1263	$\pm 6$	"/1000ans	this paper
$M_S/M_{Sa}$	3498.5		-	conventional value of IAU.
$a_{Sa}$	$1.42939412 \times 10^9$		-	conventional value of IAU.
$K_{J_2}^{Sa}$	0.006397	$\pm 30$	"/1000ans	this paper

TAB. 4.12: Valeurs liées à Phobos, Deimos, Jupiter et la Terre

# Conclusions et perspectives

Au cours de ces dernières années, le nombre de nouvelles sondes spatiales envoyées dans l'espace n'a cessé d'augmenter, et en particulier en direction de la planète Mars. La technologie rend désormais possible le déplacement de notre point d'observation à travers le système solaire, point d'observation qui, auparavant, se trouvait limité à la surface de la Terre.

Ce changement rend indispensable une représentation astrométrique du système solaire plus précise que ce qu'elle était par le passé, et cela afin de nous permettre de construire des systèmes de référence très fiables qui sont le support essentiel à beaucoup d'études spatiales. En particulier, notre connaissance de la rotation des corps devrait faire un véritable bond en avant dans les années à venir. En effet, jusqu'en 1960, les données que nous avons sur la rotation des corps célestes étaient assez limitées (dans le meilleur des cas, nous avons seulement leur vitesse angulaire moyenne). Désormais, avec la mise en place à leur surface du même type d'instruments que ceux ayant permis de mesurer finement la rotation de la Terre, nous nous attendons à avoir sur la mesure des rotations des corps du système solaire des précisions comparables à celles obtenues pour la rotation terrestre.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes attachés à établir une méthode systématique qui permette de décrire avec précision la rotation des corps célestes de nature tellurique. Nous avons appliqué cette méthode à la planète Mars.

La première partie de ce travail nous a permis d'analyser avec rigueur le mouvement de rotation d'un corps rigide autour de son centre de masse en l'absence de corps extérieur pouvant perturber ce mouvement. Même si cette hypothèse de non-perturbation extérieure peut sembler éloignée des conditions réelles de rotation des corps du système solaire, elle s'est révélée souvent une bonne approximation du mouvement

de rotation sur de courtes périodes de temps quand la vitesse angulaire de rotation est bien supérieure à la vitesse angulaire de révolution (cf. en particulier, dans le Chapitre 2, la description de la rotation du noyau de la comète de Halley ou du satellite Toutatis).

Ce qui nous a confirmé la pertinence de décrire ce mouvement en détail est la découverte récente de corps célestes ayant un axe de rotation éloigné de l'axe de moment d'inertie maximal ou même un axe de rotation qui tourne autour de l'axe de moment d'inertie minimal. On pensait jusqu'alors que ce type de mouvement était peu probable dans la réalité, et cela du fait d'une estimation de la période de dissipation de l'énergie rotationnelle des corps célestes concernés bien plus courte que leur âge même. Ces mouvements ont été, dès lors, peu étudiés jusqu'à maintenant. Il nous a donc paru intéressant de traiter le "problème libre" dans tous les cas de figure possibles.

Dans la suite de notre travail nous avons étudié le mouvement de rotation de la planète Mars, avec un modèle de Mars rigide soumis aux influences gravitationnelles des corps célestes extérieurs.

Nous avons montré qu'il était possible de considérer le mouvement de rotation libre comme une première approximation du mouvement de rotation de Mars et que les influences extérieures pouvaient être regardées comme des perturbations plus faibles de ce mouvement.

Nous avons dressé la liste dans le cas d'un modèle de Mars rigide de toutes les influences pouvant avoir des effets sur sa rotation supérieurs à 0.0001 seconde d'arc ce qui nous a obligé à prendre en compte des effets non considérés jusqu'ici pour la planète Mars. Nous avons ensuite calculé ces effets.

La comparaison de ces effets théoriques avec l'observation de la rotation de Mars faite par Folkner et al. (1997) à partir des données des sondes Viking et Pathfinder nous a permis de calculer une constante importante de la structure interne de Mars : la constante  $C/MR^2$ . Cette constante est également importante par les répercussions qu'elle a sur les modèles d'orientation de la planète Mars sur de plus longues périodes.

Nous pensons que ce modèle de rotation de la planète Mars sera utile pour l'analyse des données des prochaines missions vers la "planète rouge" et en particulier celles associées à l'expérience de géodésie NEIGE (NEtlander Ionosphere and Geodesy Experiment) embarquée sur la mission NETLANDER.

Quand nous aurons davantage de renseignements sur la composition interne de Mars, ce modèle pourra également servir de base à la détermination de ses nutations non-rigides : en rajoutant au modèle une fonction de transfert semblable à celle que Wahr (1981) a déterminée pour la rotation de la Terre.

Nous avons enfin souhaité, en suivant la même méthode que celle décrite dans cette thèse pour le cas de la planète Mars, évaluer le mouvement de libration de la Lune et cela dans un double but :

- le premier étant de montrer que notre méthode peut s'appliquer à des corps ayant des rotations aussi différentes que celle de Mars et celle de la Lune,
- le deuxième étant de calculer précisément pour la Lune certains mouvements qui apparaissent dans l'observation de sa rotation et qui ne sont pas encore modélisés à l'heure actuelle.

Cette dernière démarche est en cours. Nous ne donnerons ici qu'un premier aperçu de l'état de ces travaux, à travers les graphiques de l'annexe *V* qui représentent la comparaison des variables  $h$  et  $I$  que nous obtenons pour la Lune à celles obtenues par Moons (1981). La différence entre ces deux modèles est due principalement à notre capacité actuelle de calcul. Nous avons fait en effet des approximations de deux types. Premièrement, la prise en compte d'un modèle de mouvement libre de la Lune trop simplifié. Deuxièmement, la non-prise en compte des ordres supérieurs ou égaux à 2 de la méthode de Lie.

Une fois ces approximations affinées et ce travail en cours terminé, il nous paraît également important de tenter d'écrire un algorithme plus général, sur la base de celui développé pour la rotation de la Lune, pouvant être appliqué efficacement à de nombreux corps du système solaire.

\* \* \*



# Annexes

- Annexe I**      Rappel sur les intégrales elliptiques.
- Annexe II**     La fonction de Heuman  $\Lambda_0$  et son lien avec  $\tilde{L}$ .
- Annexe III**    Définition, détermination et intérêt du Departure Point ou de l'Origine non tournante.
- Annexe IV**     Matrice de passage entre l'écliptique J2000 et les axes principaux d'inertie de Mars.
- Annexe V**      Etat des lieux de nos travaux sur la libration de la Lune.
- Annexe VI**     Article personnel paru dans *Astronomy and Astrophysics*..



## Annexe I : Rappel sur les intégrales elliptiques

Le but de cette annexe est de présenter sommairement les définitions et les formules concernant les intégrales elliptiques qui nous sont utiles.

- L'intégrale elliptique de première espèce se note habituellement  $\mathcal{F}(\theta, k)$  où  $k$  est appelé son paramètre. Elle peut être définie à l'aide de l'intégrale suivante :

$$\mathcal{F}(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (A_1.1)$$

On note  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(k) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ .  $\mathcal{K}$  s'appelle l'intégrale elliptique complète de première espèce.

- L'intégrale elliptique de seconde espèce se note habituellement  $\mathcal{E}(\theta, k)$ . Elle est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1} d\theta_1 \quad (A_1.2)$$

De la même façon, on note  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(k) = \mathcal{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ .  $\mathcal{E}$  s'appelle l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce.  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{K}$  sont toutes les deux représentées en fonction du paramètre  $k$  sur le graphique (4.14).

- Les fonctions dérivées des intégrales elliptiques complètes par rapport à  $k$  sont :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{K}}{dk} &= \frac{\mathcal{E}}{k(1-k^2)} - \frac{\mathcal{K}}{k} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dk} &= \frac{\mathcal{E}}{k} - \frac{\mathcal{K}}{k} \end{aligned}$$

- On note  $\mathcal{F}'(\theta, k) = \mathcal{F}(\theta, k')$  et  $\mathcal{E}'(\theta, k) = \mathcal{E}(\theta, k')$  avec  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . On appelle ces intégrales : intégrales elliptiques complémentaires respectivement de première et de seconde espèce.

On remarque que ces fonctions vérifient la **relation de Legendre** :

$$\mathcal{E}\mathcal{K}' + \mathcal{E}'\mathcal{K} - \mathcal{K}\mathcal{K}' = \frac{\pi}{2}$$

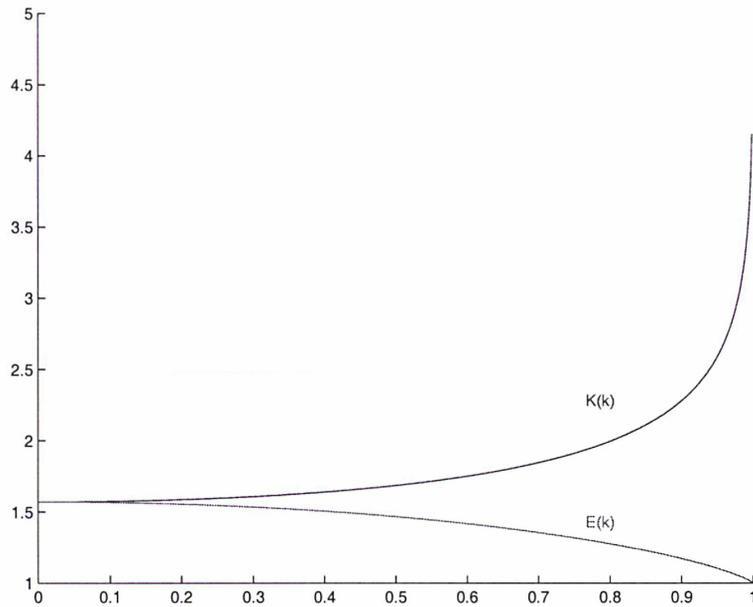


FIG. 4.14: *Intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce en fonction de  $k$*

• L'intégrale elliptique de troisième espèce se note habituellement  $\Pi(\theta, \alpha, k)$ . Elle est définie de la manière suivante :

$$\Pi(\theta, \alpha, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta_1}{(1 + \alpha \sin^2 \theta_1) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (A_{1.3})$$

On note  $\Pi(\alpha, k) = \Pi(\pi/2, \alpha, k)$ . Dans le cas où  $\alpha$  est positif, on peut écrire, d'après la relation (410.01), (Byrd et Friedman, 1954) :  $\Pi(\alpha, k) = \frac{k^2 \mathcal{K}}{k^2 + \alpha} + \frac{\pi \alpha \Lambda_0(\psi, k)}{2\sqrt{\alpha(1+\alpha)(\alpha+k^2)}}$ , où  $\Lambda_0$  est la fonction de Heuman, définie ainsi :

$$\Lambda_0(\psi, k) = \frac{2}{\pi} [\mathcal{E}\mathcal{F}'(\psi, k) + \mathcal{K}\mathcal{E}'(\psi, k) - \mathcal{K}\mathcal{F}'(\psi, k)]$$

avec  $\psi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+k^2}}$ .

• Les fonctions de Jacobi définies de la manière suivante vont également nous être utiles :

$$\begin{aligned} am[\mathcal{F}(\theta, k)] &= \theta \\ sn[\mathcal{F}(\theta, k)] &= \sin(\theta) \\ cn[\mathcal{F}(\theta, k)] &= \cos(\theta) \\ dn[\mathcal{F}(\theta, k)] &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

## Annexe II : La fonction de Heuman $\Lambda_0$ et son lien avec $\tilde{L}$

• Les contours sur lesquels l'intégrale (2.17) nous intéresse sont ceux contenant toutes les valeurs de  $(l)$ . Nous pouvons donc écrire cette intégrale sous la forme :

$$\tilde{L} = \frac{2\bar{G}}{\pi\sqrt{\bar{b}}}\sqrt{(1-e^2)} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sqrt{(1-k^2\cos^2\delta)}}{1+e\cos 2\delta} d\delta$$

En rappelant que  $k^2$  est égale à  $\left[\frac{2e(\bar{b}-1)}{1-e}\right]$ .

En posant le changement de variable  $\delta = am(u) + \frac{\pi}{2}$ ,  $\tilde{L}$  devient :

$$\tilde{L} = \frac{2\bar{G}}{\pi} \frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{\bar{b}}(1-e)} \int_0^{\mathcal{K}} \frac{dn^2(u)}{\left(1 + \frac{2e}{1-e}sn^2(u)\right)} du \quad (A_{2.1})$$

D'après la relation (410.04) de (Byrd et Friedman, 1954), sur les intégrales complètes de troisième espèce, nous savons que :

$$\int_0^{\mathcal{K}} \frac{dn^2(u)}{1+\alpha sn^2(u)} du = \frac{\pi\sqrt{(k^2+\alpha)}}{2\sqrt{\alpha(1+\alpha)}} \Lambda_0(\xi, k)$$

avec  $\sin^2(\xi) = \left(\frac{\alpha}{k^2+\alpha}\right)$  et  $\Lambda_0$  la fonction de Heuman définie dans l'annexe I.

En remarquant que  $\alpha$  vaut  $\left(\frac{2e}{1-e}\right)$  dans la relation (4.5.2), nous obtenons la relation (2.20) qui nous intéresse :

$$\tilde{L} = \bar{G}\Lambda_0(\xi, k)$$

avec  $\sin(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\bar{b}}} = \cos \bar{J}$ . Soit  $\xi = (\pi/2 - \bar{J})$ .

• Nous voulons calculer les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{L}} &= -\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \bar{b}} 2\bar{b}^{3/2} \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{G}} &= \Lambda_0 + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \bar{b}} 2\bar{b} \end{aligned}$$

Nous avons besoin des formules de dérivation de la fonction de Heuman. D'après les relations (710.11) et (730.04) de (Byrd et Friedman, 1954) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_0(\xi, k)}{\partial \xi} &= \frac{2(\mathcal{E} - k'^2 \sin^2(\xi)\mathcal{K})}{\pi\sqrt{1-k'^2\sin^2(\xi)}} \\ \frac{\partial \Lambda_0(\xi, k)}{\partial k} &= \frac{2(\mathcal{E} - \mathcal{K})\sin(\xi)\cos(\xi)}{\pi k\sqrt{1-k'^2\sin^2(\xi)}} \end{aligned}$$

Les dérivées de  $\xi$  et  $k$  par rapport à  $\bar{b}$  sont :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{b}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{b} \sqrt{(\bar{b} - 1)}}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \bar{b}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{(1 - e)} \sqrt{2(\bar{b} - 1)}}$$

Donc :

$$\frac{\partial \Lambda(\xi, k)}{\partial \bar{b}} = -\frac{K}{\pi} \bar{b}^{-3/2} \frac{\sqrt{(1 + e)}}{\sqrt{(1 - e)}}$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{L}} = \frac{2K}{\pi} \frac{\sqrt{(1 + e)}}{\sqrt{(1 - e)}}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{G}} = \Lambda_0 - \frac{2K}{\pi} \bar{b}^{-1/2} \frac{\sqrt{(1 + e)}}{\sqrt{(1 - e)}}$$

## Annexe III : Departure Point ou Origine non tournante

### Définition de l'origine non-tournante

Soit un repère  $R_1 = (O, X_1, Y_1, Z_1)$ . Soit un axe  $OZ$  en mouvement dans le repère  $R_1$ . Il est alors possible de montrer qu'il existe un axe  $OX$  dans le plan normal à  $OZ$  tel qu'à tout instant  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  soit un repère orthonormé et tel que le vecteur de rotation instantanée entre les deux repères ait sa composante suivant l'axe  $OZ$  nulle. Cet axe  $OX$  sera le support de l'origine non-tournante (Guinot,1979).

Dans le cas qui nous intéresse, le repère  $R_1$  sera le repère de référence à  $J2000$ . Le repère  $R$  étant, lui, le repère de référence de la date  $t$ . Nous prendrons la direction  $OX$  à l'instant  $t_0 = J2000$  confondue avec la direction  $OX_1$  que nous choisirons dans la direction du point  $\Gamma_0$  qui n'est rien d'autre que le point  $\Gamma$ , (le noeud ascendant du plan normal au moment cinétique de  $(S)$ ), à l'instant  $J2000$  (cf. figure [4.15]).

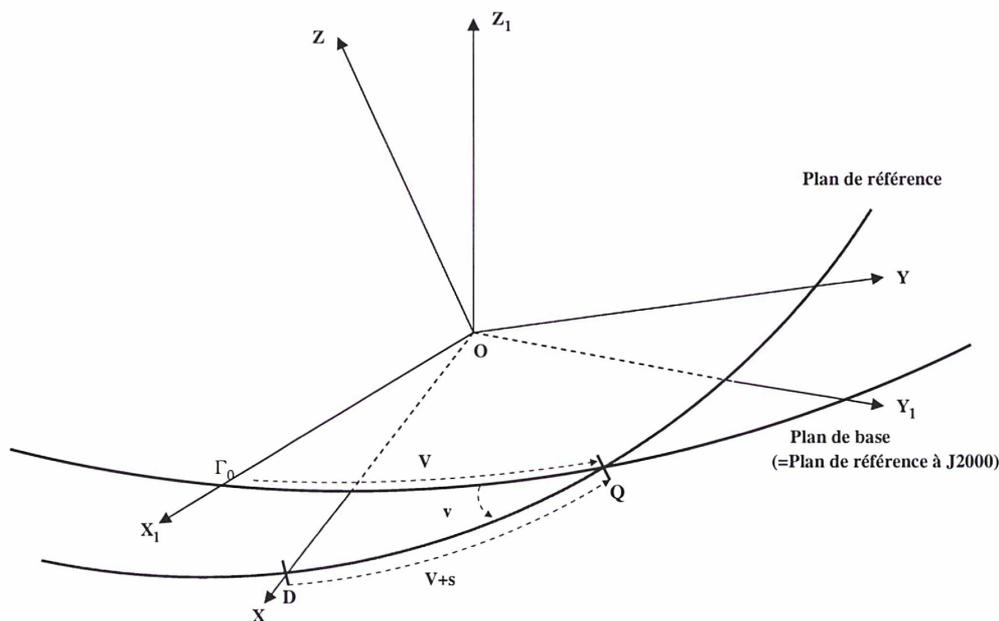


FIG. 4.15: Position relative du repère  $R$  et du repère  $R_1$ .

Les relations entre les angles  $V$ ,  $v$  et  $s$  définis sur la figure ci-dessus et les angles d'Euler entre les deux repères  $R_1$  et  $R$  sont :

$$\begin{cases} \psi = V = \Gamma_0 \bar{Q} \\ \theta = v \\ \Phi = -D \bar{Q} = -(\Gamma_0 \bar{Q} + s) = -V - s \end{cases} \quad (A_3.1)$$

Remarque (1) : Pour des repères lentement variables l'un par rapport à l'autre, l'angle  $\overline{DQ}$  est très proche de l'angle  $\Gamma_0\overline{Q}$ . C'est pourquoi nous écrivons  $\Phi$  sous la forme précédente.

Remarque (2) : En fait,  $V$  correspond à l'angle  $\Pi$  tandis que  $v$  correspond à l'angle  $\pi$ , si nous utilisons ici les mêmes angles que ceux que nous employons dans le Chapitre 3

### Détermination et intérêt de l'origine non-tournante.

Essayons de localiser l'axe  $OX$  à tout instant  $t$ . Pour cela, nous nous basons sur la définition de l'origine non-tournante. Nous avons dit que cette dernière était définie de façon telle que la composante suivant l'axe  $OZ$  du vecteur rotation de  $R$  par rapport à  $R_1$  soit nulle, autrement dit, que :

$$\Omega_{R/R_1} = \begin{bmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ 0 \end{bmatrix}_R$$

Si on écrit  $\Omega_{R/R_1}$  en fonction des angles d'Euler, on a :

$$\Omega_{R/R_1} = \dot{\psi}O\vec{Z}_1 + \dot{\theta}O\vec{Q} + \dot{\phi}O\vec{Z}$$

Donc dire que la composante suivant l'axe  $OZ$  de  $\Omega_{R/R_1}$  est nulle nous donne la relation :

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = 0$$

Soit :

$$\dot{V} \cos v - \dot{V} - \dot{s} = 0 \quad \implies \quad \dot{s} = \dot{V} (\cos v - 1)$$

D'où :

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} (\cos v - 1) dt \quad (A_{3.2})$$

avec  $s_0 = 0$ .

Dans ces conditions, les composantes de  $\Omega_{R/R_1}$  sont :

$$\Omega_{R/R_1} = \begin{bmatrix} \dot{v} \cos (V + s) - \dot{V} \sin v \sin (V + s) \\ \dot{v} \sin (V + s) + \dot{V} \sin v \cos (V + s) \\ 0 \end{bmatrix}_R$$

## Annexe IV : Matrice de passage entre l'écliptique J2000 et les axes principaux d'inertie de Mars

Cette annexe permet d'établir les formules de passage entre les trois repères suivants :

Le repère "Ecliptique J2000",

Le repère de référence "R" défini par le plan de l'orbite moyenne de Mars de la date  $t$  (appelé plan de référence) et comme origine des longitude, l'origine non-tournante ( $D_t$  avec nos notations) confondue à J2000 avec le noeud ascendant de l'orbite de Mars sur l'équateur de Mars et

Le repère lié à Mars " $R_I$ " défini par les trois vecteurs  $(O, X_I, Y_I, Z_I)$  correspondant respectivement à  $(OA, OB, OC)$ , les axes principaux d'inertie de Mars

Nous noterons dans la suite :

$\vec{X}$  un vecteur position dans le repère "Ecliptique J2000".

$\vec{X}'$  le même vecteur position dans le repère "R"

$\vec{X}''$  le même vecteur position dans le repère " $R_I$ "

**Pour passer de "Ecliptique J2000" à "R"**

La matrice de passage entre "Ecliptique J2000" et "R" (notée  $M_{ecl/orb}$ ) peut s'écrire :

$$M_{ecl/orb} = M_3 (ND) M_1 (i) M_3 (\Omega)$$

et

$$\vec{X}' = M_{ecl/orb} \vec{X}$$

Avec  $ND$  donné par la relation (4.28).

$\Omega$  et  $i$  respectivement le noeud et l'inclinaison de l'orbite moyenne de Mars de la date  $t$  sur l'Ecliptique J2000. Soit les valeurs suivantes si on se réfère à Bretagnon (1988)

(( $t$ ) en siècle Julien à partir de J2000):

$$\Omega = 49^\circ.55809321 - 1062'' .090088t - 2'' .3057416t^2$$

$$i = 1^\circ.84972648 - 29'' .331722t - 0.0811830t^2$$

Pour passer de "R" à "R<sub>I</sub>":

La matrice de passage entre "R" et "R<sub>I</sub>" (notée  $M_{orb/equ}$ ) peut s'écrire :

$$M_{orb/equ} = M_3(\omega - h_f \cos I_f) M_1(I_f) M_3(h_f)$$

et

$$\vec{X}'' = M_{ecl/equ} \vec{X}'$$

Avec  $h_f = -p_A^M - \Delta\psi$  et  $I_f = -\epsilon_A^M - \Delta\epsilon$

$\Delta\psi$  et  $\Delta\epsilon$  correspondent à l'ensemble des tables qui se trouvent dans le Chapitre 4.  $p_A^M$  est la somme de l'opposé des termes séculaires déterminés pour  $h$  dans le Chapitre 4 plus la linéarisation du terme  $-h_E$  provenant de  $E$ , le terme d'entraînement entre  $R$  et  $R_1$ , sans terme constant (à  $J2000$ ,  $p_A^M = 0$ ).

$\epsilon_A^M$  est la partie séculaire essentiellement représentée par  $\epsilon_0$ , une constante plus la linéarisation du terme  $-I_E$  provenant de  $E$ .

$\omega$  est la norme de la vitesse instantanée de rotation sidérale de Mars.

## Annexe V : Etat des lieux de nos travaux sur la libration de la Lune.

Nous appliquons la méthode explicitée dans le Chapitre 3 à la description de la rotation de la Lune. Nous procédons de la même manière que nous l'avons fait dans le Chapitre 4 pour Mars.

Tout d'abord, nous regardons quels sont les corps célestes qui agissent de manière substantielle sur la rotation de la Lune. Ces corps sont par ordre décroissant d'importance :

- la Terre,
- le Soleil,
- les planètes Jupiter, Vénus, Mars et Saturne.

Pour savoir si notre méthode d'intégration du Chapitre 3 est valable dans le cas de la Lune, il faut vérifier que les potentiels gravitationnels de ces corps sont bien des perturbations du problème libre. Le potentiel perturbateur le plus important est celui de la Terre que nous notons  $U^T$ . Le rapport entre  $U^T$  et  $F_0$ , le Hamiltonien libre de la Lune, est le suivant d'après le Chapitre 4 :

$$\begin{aligned} \frac{U^T}{F_0} &\simeq \frac{M_T}{r_T^3} \left[ 2C - A - B + \frac{3}{2}(B - A) \right] \frac{C}{L^2} \simeq \frac{M_T}{M_L + M_T} \frac{2C - A - B}{C} \\ &\simeq 10^{-3} \end{aligned}$$

où  $M_L$  est la masse de la Lune et  $\frac{2C-A-B}{C} \simeq 10^{-3}$ .

Ce rapport est plus important que dans le cas de Mars (où il était de  $10^{-8}$ ), mais l'influence terrestre peut toujours être traitée comme une perturbation du mouvement de rotation libre. Seulement cette fois, vu la relative importance de la perturbation, le premier ordre ne suffira pas. Pour arriver à avoir sur les variables d'Andoyer de la Lune la même précision que pour celles de Mars, il faudra itérer plusieurs fois le processus de Lie. Nous présentons dans cette annexe l'état de nos calculs pour le premier ordre de ce processus pour la perturbation engendrée par le potentiel gravitationnel de la Terre sur la rotation de la Lune. Nous présentons dans les graphiques 4.16 les mouvements de précession et de nutation de l'axe de moment cinétique de la Lune en obliquité et en longitude que nous obtenons et nous les comparons à ceux déterminés par Moons.

Plusieurs difficultés viennent s'ajouter lors de l'étude de la rotation de la Lune que nous n'avons pas rencontrées dans le cas de la rotation de Mars.

- Il est important dans le cas de la Lune de rajouter directement à  $K_0^0$  la partie séculaire de  $U^T$  qui joue un rôle important du fait de la résonance entre la période de rotation et la période de révolution de la Lune.
- Le second point délicat est le remplacement des variables d'Andoyer  $g$  et  $l$  par les variables définies dans le cas du mouvement libre :  $\tilde{g}$  et  $\tilde{l}$ . Pour Mars, ce changement de variable se réduisait à l'identité (cf. le sous-chapitre 4.2.1). Dans le cas de la Lune, la valeur élevée de son coefficient de triaxialité (pour la Lune  $e \simeq 0.2$  tandis que pour Mars  $e \simeq 0.05$ ), nous oblige à prendre une meilleure approximation de ce changement de variable que seulement l'identification pure et simple. L'expression de ce changement de variable est obtenue grâce aux relations du sous-chapitre 2.5.4. La transformée de Fourier faite sur la différence entre notre détermination de la variation en longitude et celle de Moons, (cf. les deux derniers graphiques), révèle justement que nous n'avons pas été assez précis dans l'expression de ce changement de variable.

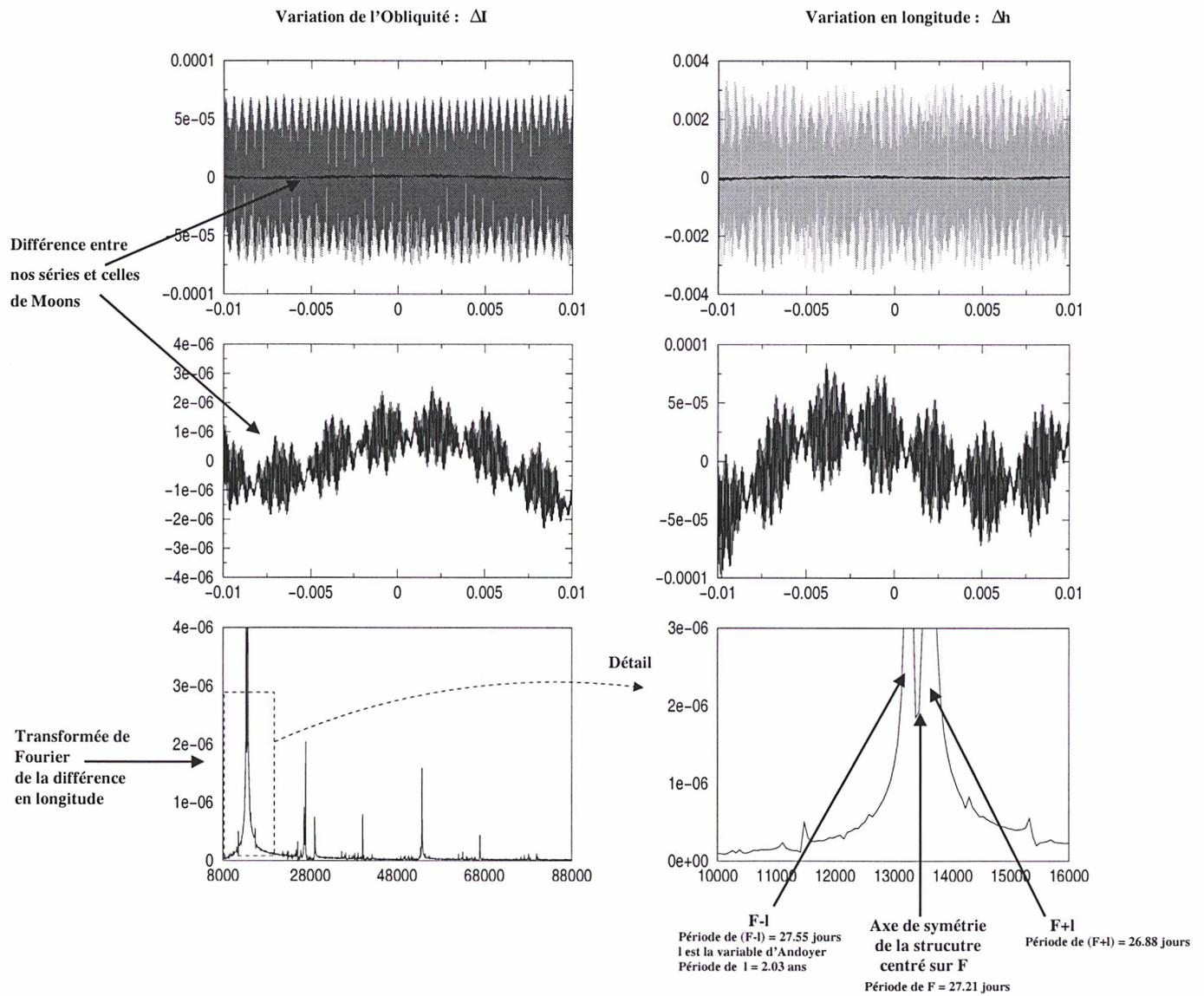


FIG. 4.16: Etat des lieux de nos travaux sur la libration de la Lune.

Annexe VI : Article personnel paru dans *Astronomy and Astrophysics*.

## Precise modeling of the precession-nutation of Mars

S. Bouquillon and J. Souchay

Observatoire de Paris/DANOF, URA 1125 du CNRS, 61 Avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France (etudiant@obspm.fr)

Received 16 October 1998 / Accepted 8 January 1999

**Abstract.** This paper aims to present the theoretical study of the precession and of the nutation of the planet Mars considered as a rigid body, in a rigorous way, by using canonical equations related to Hamiltonian theory, and by taking into account all the coefficients of nutation up to 0.1 mas. The equations are solved by taking into account the leading influence of the Sun, but also those due to Jupiter, to the Earth, and to the Martian satellites Phobos and Deimos. Oppolzer terms which make the separation from the axis of angular momentum to the figure axis as well as to the axis of rotation, are also determined, as well as semi-diurnal terms coming from the triaxial asymetry of the planet. Calculations and important remarks related to the accuracy of the determination of the variation of the obliquity at a long periodic time scale complete the results above.

**Key words:** celestial mechanics, stellar dynamics – planets and satellites: individual: Mars

## 1. Introduction

The accurate theoretical study of the rotation of the planets other than the Earth is particularly recent. One of the reason is that the main observational parameter related to this study is the period of rotation of each planet. Even in that point of view, concerning Mercury and Venus this period of rotation has been definitely known only in the 60's. The first observations which clearly showed the slow retrograde rotation of Venus have been done by Carpenter (1964), whereas the 2/3 resonance of Mercury is known only from 1965, starting from Doppler-spread measurements by Petengill & Dyce (1965), after the planet's spin was often believed, for a long time, to be exactly equal to its orbital period, as it is the case for the Moon. Because of the variety of details on the surface of Mars, its period of rotation was determined with good accuracy from a long time ago with the help of the observational data acquired from big telescopes. The complementary information concerning the rotation of Mars other than the spin rate, that is to say the motion of precession and nutation of its figure axis in space, is much more difficult to determine observationally.

The precession constant of Mars was calculated theoretically by Struve at the end of the 19th. century, but its observational determination at the present time cannot be done very

accurately, as it was shown by Pitjeva (1996), who found a value of  $750'' \pm 36''/cy$ . Nevertheless the very recent results from the Mars Pathfinder mission lead to a much more accurate determination of the precession, that is to say  $-757.6 \pm 3.5''/cy$  (Folkner et al., 1997) starting from spacecraft data.

Concerning the theoretical approach of the precession-nutation motion of Mars, an important progress was done by Borderies (1980) by considering only the leading torque due to the Sun. Hilton (1991) has shown in fact that the effects on the nutation related to the action of the two small but very close artian satellites Phobos and Deimos are not negligible in comparison with the main nutation term, with a roughly 1% relative order of amplitude. Notice that the evaluations of the nutations coming from the three main and recent theoretical studies (Borderies, 1980; Reasenber & King, 1979; Hilton, 1991) give some difference at a relative  $10^{-3}$ .

Various reasons lead us to calculate here with the best accuracy the coefficients of the precession and of the nutation of Mars: one is that the launch of several spacecraft missions on and around Mars are already achieved or in the way of a launch in the near future. No doubt that the accumulation of data coming from the tracking of the probes will require an improved analytical determination of the rotational parameters of the planet, thus improving the knowledge about its physical and dynamical characteristics.

For instance, the dynamical ellipticity  $H_i^{Ma}$  is well-known in the case of the Earth, for it is determined from an accurate observational value of the precession constant by the way of a straightforward relationship (Kinoshita, 1972; Souchay & Kinoshita, 1997). In fact  $H_i^{Ma}$ , in the case of Mars, was determined until now only from an hypothetic modeling of the internal structure of the planet. Consequently, the variations of this fundamental parameter according to the theoretical modelings (without taking into account Pathfinder's results), were about  $\pm 5\%$ . The determination of  $H_i^{Ma}$  which will be done in the following starting from the new value of the precession constant (Folkner et al., 1997), will be much more accurate.

Then we can expect that future probe explorations of the red planet will bring enough information to get better constraints concerning the value of parameters like  $\frac{C}{MT^2}$  and  $H_i^{Ma}$ , following a more accurate value of the precession constant and an improved modeling of the planet's interior.

In a reciprocal way, it seems important in our analytical calculations carried out here to choose a level of truncation smaller than that already adopted in the precedent series of the nutation of Mars, in order to improve the modelisation of the motion of the figure axis in the space and to avoid truncation problems when using these series after taking into account more and more accurate data analysis.

For this aim, we have decided to apply a theoretical way of calculation of the rotation of the Earth, considered as a rigid body, to the planet Mars. The basic analytical principles related to this are taken from the work of Kinoshita (1977), improved by Kinoshita & Souchay (1990), and constructed starting on Hamiltonian canonical equations. In the case of the Earth, the most accurate observations (essentially based on the VLBI technique) show that the difference between the values of the main coefficients of the nutation in the case of a rigid body and a non-rigid one, are of the order of a relative  $10^{-5}$ . There is no real reason to believe that for a telluric planet as Mars, the relative difference will be noticeably bigger, that is to say by one order or more, for the Martian characteristics (size, rotation, internal structure) are relatively close to that of the Earth.

Then it seems that the accuracy concerning the determination of the rotation of the planet, which should be obtained from missions around Mars in the very near future, will hardly enable to detect the influence of non rigidity.

One of the new topics included in this paper is the computation of the Opolzer terms, which give the angular spatial offset between the axis of figure and the axis of angular momentum. Moreover we evaluate in the following the influence of the planets in addition to that of the satellites Phobos and Deimos. Notice that this influence can be ranged into two categories: the direct one, that is to say the influence related to the direct torque exerted by the planets on the equatorial martian bulge; and the indirect one, caused by the perturbation of the planets on the orbital motion of Mars around the Sun, and consequently on the gravitational potential exerted by the Sun on the planet.

The ephemerides used in order to compute the potential exerted by the external bodies are VSOP87 (Bretagnon & Francou, 1988) for the Sun and the other planets, and those calculated by Chapront-Touze (1990) concerning Phobos and Deimos.

## 2. The materialization of the motion of rotation

The canonical variables that we choose here in order to solve the equations of motion of Mars by the way of the Hamiltonian equations are the Andoyer variables equivalent to those used in the case of the study of the motion of rotation of the Earth, as done by Kinoshita (1977). Refer to Fig. 1. The basic plane ( $P_M^t$ ) is the mean orbit of Mars for the date  $t$ , which is slightly moving with respect to an inertial plane, which is the mean orbit of Mars ( $P_M^0$ ) at the epoch J2000.0. Nevertheless, the basic point used in order to measure the motion of the precession and nutation in longitude of Mars is not here an equinox, which is classically chosen in the case of the Earth, but a point called the "departure point"  $D_t$  along ( $P_M^t$ ). The choice of this point is justified by the fact that as considering the condition of non-

rotation which characterizes it, and which is described in detail by Guinot (1979) and Capitaine et al. (1986),  $D_t$  is the natural point to measure any motion along the moving plane ( $P_M^t$ ). This is particularly the case of the motion of the true martian equinox whose determination is one of the aims of our study together with the variation of the obliquity  $\varepsilon_A^M$ , which is defined as the angle between the plane of the true martian equator with respect to ( $P_M^t$ ).

Let  $P$  be the node of the equator of figure with respect to the plane perpendicular to the angular momentum vector, and  $\Gamma$  the descending node of the plane perpendicular to the angular momentum vector with respect to ( $P_M^t$ ) (in fact one of the two equinoxes of Mars when considering the equator perpendicular to the angular momentum, not the true equator).

Still refer to Fig. 1. The angle variables  $l$ ,  $g$ , and  $h$  and the action variables  $L$ ,  $G$  and  $H$ , are defined as in the following (Kinoshita, 1977):

$l$  is the angle between  $P$  and the principal axes of Mars corresponding to the minimum moment of inertia.

$g$  is the angle between  $\Gamma$  and  $P$ , along the plane perpendicular to the angular momentum.

$h$  is the angle along the mean orbit of Mars ( $P_M^t$ ), between the departure point  $D_t$  and the node  $\Gamma$ .

$L$  is the component of the angular momentum on the axis along the axis of figure.

$G$  is the total angular momentum of Mars.

$H$  is the component of the angular momentum along the axis perpendicular to ( $P_M^t$ ).

Notice that only  $h$  has a different meaning from that in Kinoshita (1977), for it is defined from  $D_t$ , not from an equinox. Nevertheless we choose the departure point  $D_0$  at J2000.0 in coincidence with the equinox  $\Gamma_0$  at this epoch. Moreover, by calling  $J$  the angle between the true equatorial plane of Mars (perpendicular to the figure axis) and the plane perpendicular to the angular momentum, and  $I \approx -\varepsilon_A^M$  the angle between this last plane and ( $P_M^t$ ), we have the following relationships:

$$H = G \times \cos I \quad (1)$$

$$L = G \times \cos J \quad (2)$$

As the variables  $h$  and  $I$  enable to give the location of the plane perpendicular to the angular momentum vector, with respect to ( $P_M^t$ ), in a similar way the variables quoted as  $h_f$  and  $I_f$  will enable to give the location of the equator of figure with respect to ( $P_M^t$ ). Notice that  $h_f$  and  $I_f$  are two of the classical Euler angles used to represent the rotation of the Earth (Woolard, 1953) or any other planet, the third one being generally quoted as  $\phi$ .

The link between the Andoyer variables  $l$ ,  $g$ , and  $h$ , and the Euler angles  $h_f$ ,  $I_f$ , is given by the following classical relationships, derived from the spherical triangle, neglecting the second order of  $J$  (Kinoshita, 1977):

$$h_f \approx h + \frac{J}{\sin I} \sin g \quad (3.1)$$

$$I_f \approx I + J \cos g \quad (3.2)$$

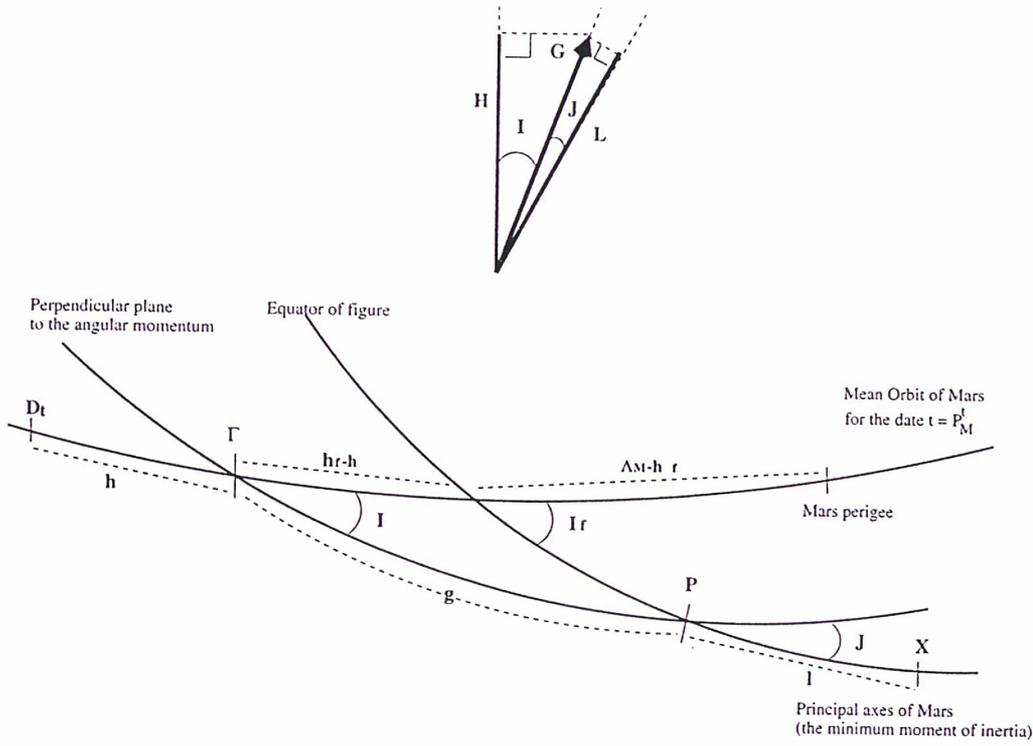


Fig. 1. Andoyer variables

$$\phi = l + g - J \cot I \sin g \quad (3.3)$$

Notice that the angles  $I$  and  $I_f$  characterize the obliquity, whereas  $h$  and  $h_f$  are the combination of the general precession in longitude and of the nutation in longitude, so that we can write:

$$h_f = -p_A^M - \Delta\psi \quad (4.1)$$

$$I_f = -\varepsilon_A^M - \Delta\varepsilon \quad (4.2)$$

$p_A^M$  and  $\varepsilon_A^M$  being the notations corresponding respectively to  $p_A$  and  $\varepsilon_A$  for the Earth, as can be found in Lieske et al. (1977).

### 3. The Hamiltonian of the system and the equation of the motion of rotation

The way chosen for the parametrization of the problem being equivalent to that chosen by Kinoshita (1977), and by more recent studies (Kinoshita & Souchay 1990; Souchay & Kinoshita 1996; Souchay et al., 1998) of the rotation of the Earth, naturally the Hamiltonian related to the rotational motion of Mars can be written in a similar manner, by:

$$K = F + \sum_i U_i + E \quad (5)$$

where  $F$  is the Hamiltonian for the free motion,  $\sum_i U_i$  represents the potential due to the forced motion, that is to say to the gravitational action exerted by the external bodies as the Sun, the satellites Phobos and Deimos, and the other planets, and  $E$  can be considered as a complementary term which is due to the fact that our reference plane, that is to say the plane of the mean orbital motion of Mars, is slightly moving with respect to an inertial reference system.  $F$  has the following form:

$$F = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right] \times (G^2 - L^2) + \frac{1}{2C} \times L^2 \quad (6)$$

where  $A$ ,  $B$  and  $C$  are the principal moments of inertia of Mars. For each of the external bodies represented by an index  $i$ , the disturbing potential is given at the first order by:

$$U_i = \frac{\kappa^2 M_i}{r_i^3} \times \left[ \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2^0(\sin \delta_i) + \left( \frac{A - B}{4} \right) P_2^2(\sin \delta_i) \cos 2\alpha_i \right] \quad (7)$$

where  $M_i$  is the mass of the perturbing body and  $r_i$  is the distance between its barycenter and the barycenter of Mars.  $\alpha_i$  and  $\delta_i$  are respectively the marsocentric longitude and latitude of the perturbing bodies, with respect to the meridian given as an origin and which is crossed by the axis of minimum moment of inertia  $A$ , and to the mean martian equator of the date.  $P_2^0(\sin \delta_i)$  and  $P_2^2(\sin \delta_i)$  are the modified Legendre polynomials.

At last, the complementary component  $E$  is expressed as:

$$E = G \sin I \times \left[ \sin \pi \cos(h - D_i^M) \dot{\Pi} - \sin(h - D_i^M) \times \dot{\pi} \right] \quad (8)$$

Let us refer to Fig. 2.  $\pi$  is the angle between the two orbital planes ( $P_{M_t}^t$ ) and ( $P_{M_t}^0$ ), and  $\Pi$  is defined as the angle between the martian equinox of the epoch  $\Gamma_0$  and the ascending node of ( $P_{M_t}^t$ ) with respect to ( $P_{M_t}^0$ ).  $\pi$  and  $\Pi$  are the martian corresponding variables to the classical variables  $\pi_A$  and  $\Pi_A$  adopted conventionally for the Earth (Lieske et al., 1977). Notice that for the sake of simplicity, we have decided in the precedent section

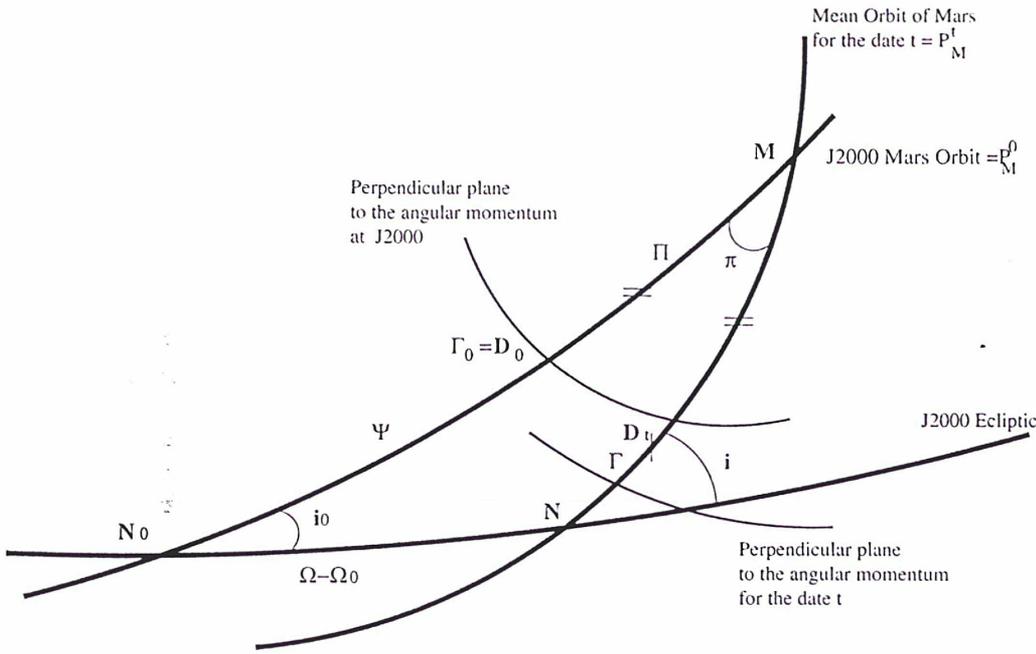


Fig. 2. Moving reference plane

that at the epoch J2000.0, the *a priori* arbitrary point  $D_0$  corresponds to the martian equinox  $\Gamma_0$  which is the ascending node of the martian orbit w.r.t. the mean equator at the epoch J2000.0. The numerical expressions for  $\pi$  and  $\Pi$  will be calculated and given in a next section.

The free motion of a planet as studied from the principle of the Hamiltonian has been abundantly studied by Kinoshita (1972), in the case of the Earth. It is rather complex and involves elliptic functions at the second order, but it has no important effect on the angles  $h$  and  $I$ . Moreover it is not studied here, for we are only concerned with the forced motion of rotation of Mars.

After the determination of  $U_i$  and  $E$ , the angles  $h$  and  $I$  are given by the means of canonical equations (Kinoshita, 1977):

$$\dot{h} = \frac{\partial K}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial K}{\partial I} \approx -\frac{1}{G \sin I} \left( \frac{\partial E}{\partial I} + \frac{\partial U_i}{\partial I} \right) \quad (9.1)$$

$$I = \frac{\partial K}{\partial h} = \frac{1}{G} \left( \frac{\partial K}{\partial h} \frac{1}{\sin I} - \frac{\partial K}{\partial g} \frac{1}{\tan I} \right) \quad (9.2)$$

As it is the case in the method developed by Kinoshita (1977), as well as in its improvements by Kinoshita & Souchay (1990) concerning the study of the rotation of the Earth, we separate the periodic part of the Hamiltonian from the secular one, in order to derive directly the quantities related to the nutation. This can be done by using an averaging algorithm close to Lie transformations (Hori, 1966). The coefficients of the nutation are then given in a straightforward manner, by the following formula:

$$\Delta\psi = -\Delta h = -\frac{\partial W_1}{\partial H} - \frac{\partial W_2}{\partial H} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial H}, W_1 \right\} \quad (10.1)$$

$$\Delta\varepsilon = -\Delta I = -\left[ \frac{1}{G \sin I} \right] \left( \frac{\partial W_1}{\partial h} + \frac{\partial W_2}{\partial h} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial h}, W_1 \right\} \right) + \frac{1}{2} (\Delta I)^2 \cot I \quad (10.2)$$

Notice that some of the terms in (10.1) and (10.2) are completely negligible w.r.t. our level of truncation of our coefficients, as the Poisson brackets and the last term at the r.h.s. of (10.2). In the case of the Earth (Souchay et al., 1998) they are relatively much larger, for they involve important effects between the Moon and the Earth, as crossed nutation effects and coupling effects between the orbital motion of the Moon and the Earth flattening.  $W_1$  and  $W_2$  are respectively the components of the determining function at the first and second order. The determining function at the first order  $W_{i,1}$  is obtained by integrating the potential, at the first order  $U_{i,1}$ , exerted by each perturbing body, whose expression is given by (7):

$$W_{i,1} = \int U_{i,1} \times dt \quad (11)$$

As it was the case for the Earth (Kinoshita, 1977) the development of the disturbing function  $U_{i,1}$  as given by (7) can be done in function of the coordinates of the perturbing body  $r_i$ ,  $\lambda_i$  and  $\beta_i$  with respect to the moving orbital plane of Mars, and to the departure point  $D_t$  on this plane instead of the equinox. For that we use the same transformations of  $P_2^0(\sin \delta)$  and  $P_2^2(\sin \delta)$  as Kinoshita (1977), based on the Jacobi polynomials (Kinoshita et al., 1974), that is to say:

$$\begin{aligned} P_2^0(\sin \delta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 I - 1) P_2^0(\sin \beta) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin(2I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin^2(I) P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h) \right] \\ &\quad + \sin 2J \left[ -\frac{3}{4} \sin(2I) P_2(\sin \beta) \cos g - \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \cos I) \right. \\ &\quad \left. \times (-1 + 2\varepsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - \varepsilon g) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{1}{8} \sin I (1 + \varepsilon \cos I) P_2^2(\sin \beta) \cos(2\lambda - 2h - \varepsilon g) \Bigg] \\
& + \sin^2 J \left[ \frac{3}{4} \sin^2(I) P_2^0(\sin \beta) \cos 2g \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \sin(I) (1 + \varepsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - 2\varepsilon g) \\
& \left. - \frac{1}{16} \sum_{\varepsilon=\pm 1} (1 + \varepsilon \cos I) P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h - \varepsilon g) \right] \quad (12)
\end{aligned}$$

In the same way, we get:

$$\begin{aligned}
& P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha \\
& = 3 \sin^2 J \left[ -\frac{1}{2} (3 \cos^2 I - 1) P_2^0(\sin \beta) \cos 2l \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sin 2I P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - 2\varepsilon l) \\
& + \left. \frac{1}{8} \sin^2 I P_2^2(\sin \beta) \cos 2(\lambda - h - \varepsilon l) \right] \\
& + \sum_{\rho=\pm 1} \rho \sin J (1 + \rho \cos J) \left[ -\frac{3}{2} \sin(2I) \right. \\
& \times P_2^0(\sin \beta) \cos(2\rho l + g) \\
& - \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{1}{2} (1 + \cos I) (-1 + 2\varepsilon \cos I) P_2^1(\sin \beta) \\
& \times \sin(\lambda - h - 2\rho\varepsilon l - \varepsilon g) \\
& - \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{1}{4} \varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I) P_2^2(\sin \beta) \\
& \times \left. \cos(2\lambda - 2h - 2\rho\varepsilon l - \varepsilon g) \right] \\
& + \sum_{\rho=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \rho \cos J)^2 \left[ -3 \sin^2(I) P_2(\sin \beta) \right. \\
& \times \cos(2l + 2\rho g) - \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \sin I (1 + \varepsilon \cos I) \\
& \times P_2^1(\sin \beta) \sin(\lambda - h - 2\rho\varepsilon l - 2\varepsilon g) \\
& + \left. \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \cos I)^2 P_2^2 \cos 2(\lambda - h - \rho\varepsilon l - \varepsilon g) \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

Notice that the second component in the parenthesis in the r.h.s. (7) involves the potential at the second order  $U_{i,2}$ ; it is not considered in the present section, and gives birth to the terms of nutation coming from the triaxial asymmetry of the planet, which will be treated in the Sect. 4.6.

The three Legendre polynomials  $P_2^0(\sin \beta)$ ,  $P_2^1(\sin \beta)$  and  $P_2^2(\sin \beta)$  present in Eq. (12) can be written as follows:

$$P_2^0(\sin \beta) = \frac{1}{2} \times (-1 + 3 \sin^2 \beta) \quad (14.1)$$

$$P_2^1(\sin \beta) = 3 \sin \beta \cos \beta \quad (14.2)$$

$$P_2^2(\sin \beta) = 3 \sin \beta \cos \beta \quad (14.3)$$

Moreover the expression  $\frac{\kappa^2 M_i}{r_i^3}$  in (7) can be advantageously replaced by  $\frac{\kappa^2 M_i}{a_i^3} \times \frac{a_i^3}{r_i^3}$  where  $a_i$  is the semi-major axis of the Mars motion given by the following relationship, related to the keplerian motion:

$$n^2 a_i^3 = \kappa^2 (M_S + M_M) \quad (15)$$

where  $\kappa^2$  is the constant of the gravitation.

Then the first part of the expression  $\frac{\kappa^2 M_i}{a_i^3}$  is a constant term.

In the opposite, the second part  $\frac{a_i^3}{r_i^3}$  can be developed as a function of Mars eccentricity and of its mean longitude, when the perturbing body is the Sun. In the other cases (Phobos, Deimos and planets), this development contains also the eccentricity and mean longitude of the perturbing body.

Contrary to the Earth for which the leading influence on the nutation is coming from its satellite, the Moon for which the amplitude is roughly 20 times that of the Sun, the nutation of the planet Mars is largely dominated by the gravitational action of the Sun, the influence of Phobos and Deimos being of the order of 1/100 in comparison, and the influence of the planets being still significantly smaller.

#### 4. Results of the various contributions to the martian nutation

##### 4.1. The main terms of nutation of Mars due to the Sun

The coefficients of the nutation of Mars due to the Sun are computed in the following manner: the solar potential at the first order  $U_S^1$  as expressed by the first part of the formula at the r.h.s. of (7) is calculated by the way of the transformations given by (12). The analytical expressions for the coordinates  $\lambda_S$ ,  $\beta_S$ , and  $r_S$  are taken from the ephemerides VSOP87 (Bretagnon & Francou, 1988). More precisely the rectangular coordinates of Mars w.r.t. the Sun extracted from these ephemerides have been converted into the geocentric spherical solar ecliptic coordinates above. It must be noticed that  $\beta_S$  which represents the latitude of the Sun with respect to the mean ecliptic of the date, is in fact non equal to 0, for we must take into consideration the small oscillations of the orbital plane of the Sun (that is to say the plane of the true ecliptic). Even if the terms of nutation coming from this contribution have a very small amplitude they should be taken into consideration, as was demonstrated by Souchay & Kinoshita (1997) in the case of the Earth. Moreover the nutation coefficients coming from the second component of the potential at the r.h.s. of (7) are not considered here. for they can be neglected for two reasons: at first  $A - B$  is very small in comparison with  $2C - A - B$ , and at second (this is the main explanation) they have a period close to half a martian day, which means that the corresponding component in  $W_S$ , that is to say after integration in (11), becomes very small itself because of the high frequency at the denominator. Nevertheless, we will give a rough estimation of the largest semi-diurnal term related to this component, in Sect. 4.6.

Table 1.1. The solar influence on the nutation of Mars, longitude  $\Delta\psi$ 

sin ( $''$ )	cos ( $''$ )	Period (year)	$M$	$\Lambda_M$	Borderies Values sin ( $''$ )	Hilton values sin ( $''$ )
-1.09689	0.00006	0.940	2	2	-1.0431	-1.0962
0.63460		1.881	1		0.6031	0.6357
-0.23971	0.00001	0.627	3	2	-0.2278	-0.2401
0.10463	-0.00001	1.881	1	2	0.0994	0.1047
-0.04076		0.470	4	2	-0.0387	-0.0409
0.04432		0.940	2		0.0421	0.0445
-0.00630		0.376	5	2	-0.0061	-0.0063
0.00405		0.627	3		0.0038	0.0041
-0.00093		0.313	6	2		-0.0009
0.00041		0.470	4			
-0.00013		0.269	7	2		

Table 1.2. The solar influence on the nutation of Mars, obliquity  $\Delta\varepsilon$ 

sin ( $''$ )	cos ( $''$ )	Period (year)	$M$	$\Lambda_M$	Borderies Values cos ( $''$ )	Hilton values cos ( $''$ )
0.00003	0.51589	0.940	2	2	0.4908	0.5158
0.00001	0.11274	0.627	3	2	0.1072	0.1130
	-0.04921	1.881	1	2	-0.0468	-0.0493
	0.01917	0.470	4	2	0.0182	0.0193
	0.00296	0.376	5	2	0.0029	0.0030
	0.00044	0.313	6	2		

Table 1.3. The solar influence on the nutation of Mars, mixed terms, longitude  $t \times \Delta\psi$ 

sin ( $''$ )	cos ( $''$ )	Period (year)	$\alpha$ ( $t^\alpha$ ) 1000 years	$\lambda_{Ea}$	$M$	$\lambda_{Ju}$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda$
	7590.39671		1					
0.00627	-0.04917	1.881	1		1			
-0.00223	0.01860	0.627	1		3			2
0.00959	0.00550	0.940	1		2			1
0.00101	0.00809	1.881	1		1			2
-0.00077	0.00632	0.470	1		4			2
0.00086	-0.00687	0.940	1		2			
-0.00377	0.00105	1.881	1		1			1
0.00287	0.00179	-1783.395	1	4	-8	3		
0.00127	0.00297	1.881	1		1			1
0.00212	0.00119	0.627	1		3			1
0.00163	-0.00160	-883.270	1			2	-5	
-0.00018	0.00146	0.376	1		5			2

In Tables 1.1 and Table 1.2, we show respectively in longitude and in obliquity the coefficients deduced from the Eqs. (10.1) and (10.2) and characterizing the nutation of Mars due to the Sun, together with the corresponding argument and period. Borderies (1980) and Hilton (1991) calculated the same coefficients by different approaches. Borderies used an Hamiltonian method with orbit elements given by Struve and Hilton an Eulerian method by using the ephemerides VSOP82 (Bretagnon, 1982). Their values are given in the two last columns of Table 1.1 and 1.2. Our values are very close to Hilton's ones.

The difference with Borderies results are more important. But Borderies took  $H_d^{Ma} = 5.103 \times 10^{-3}$  while we took  $H_d^{Ma} = 5.363 \times 10^{-3}$ . The coefficients are proportional to the value of  $H_d^{Ma}$ . The difference between our  $H_d^{Ma}$  and Borderies one explains a large part of the differences between the amplitudes of the nutation coefficients.

Moreover, in Tables 1.3 and 1.4, we show the mixed secular terms in the form  $t \times \cos$  or  $t \times \sin$  which result from our computations. They result themselves from the presence of mixed secular terms in the expression of the coordinates  $\lambda_S$ ,  $\beta_S$  and

**Table 1.4.** The solar influence on the nutation of Mars, mixed terms, obliquity  $t \times \Delta\varepsilon$ 

sin (")	cos (")	Period (year)	$\alpha$ ( $t^\alpha$ ) 1000 years	$M$	$\lambda_{Ju}$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda_M$
0.00875	0.00105	0.627	1	3			2
-0.00332	0.00579	0.940	1	2			1
0.00381	-0.00048	1.881	1	1			2
0.00297	0.00036	0.470	1	4			2
	0.00242		1				
-0.00063	-0.00227	1.881	1	1			1
0.00180	-0.00077	1.881	1	1			-1
-0.00072	0.00128	0.627	1	3			1
0.00019	0.00104	-877.785	1		2	-5	-1

$r_S$ . We are taking into account all the coefficients with absolute amplitude up to 0.1 milliarcsecond (mas), in combined absolute amplitude (sine and cosine). Notice that, as it can be expected by similarity to the case of the Earth, the leading component of nutation, with amplitude  $1.09512''$  and  $0.51532''$  respectively in longitude and in obliquity, has a period corresponding to half the period of revolution of the planet around the Sun, that is to say 343.49 d, the relative argument being  $2M + 2\Lambda_M$ , where  $M$  is the mean anomaly of Mars and  $\Lambda_M$  corresponds to the angle between the point  $D_t$  and the Mars perigee, along the moving orbit of Mars (see Fig. 1). Notice that  $\Lambda_M$  must not be confused with the longitude of the perigee, for it is determined along the mean martian orbit and the martian equinox, and not the ecliptic and the equinox of the Earth.

The second term in decreasing order of amplitude has no component in obliquity, but its amplitude in longitude is  $-0.63358''$  and its period is 687.0 d, for the corresponding argument is the mean anomaly of Mars. At total 11 coefficients are present for  $\Delta\psi$  and 6 coefficients for  $\Delta\varepsilon$ , above our level of truncation, that is to say 0.1 mas. The value of  $H_d^{Ma}$  which serves to the determination of the scaling factor:

$$K' = 3 \frac{\kappa^2 M_S}{a_S^3 \omega} \times H_d^{Ma}$$

from which the values of the coefficients of nutation are depending directly, is discussed in Sect. 6.

#### 4.2. The indirect planetary effect on the nutation of Mars

As it is the case for the nutation of the Earth (Kinoshita & Souchay, 1990; Souchay & Kinoshita, 1996) the solar potential which gives birth to the nutation of Mars is influenced by the planets by the intermediary of their perturbation on the orbital motion of Mars, and consequently on the relative motion of the Sun with respect to Mars. Therefore, some terms of nutation involving the mean longitude of planets other than Mars appear when the truncation threshold in the series of nutation is small enough. These terms are sometimes called the "indirect planetary effect", although this terminology does not seem really adequate, as was discussed by Souchay et al. (1998).

**Table 2.1.** The indirect planetary effects on the nutation of Mars, longitude  $\Delta\psi$ 

sin (")	cos (")	Period (year)	$\lambda_{V'e}$	$\lambda_{Ea}$	$M$	$\lambda_{Ju}$	$\lambda_{Sa}$	$\Lambda_M$
-0.00039	0.00019	2.235			1			-1
0.00028	-0.00035	2.754			1			-2
0.00030	0.00007	-0.940		4	-10			3
0.00014	-0.00027	0.941		4	-6			3
0.00015	-0.00017	1.118			2			-2
-0.00004	-0.00024	-877.785					2	-5
0.00028	0.00003	-15.781		1	-2			
-0.00019	-0.00003	11.862						1
0.00014	-0.00007	0.662			3			-1
-0.00008	0.00009	0.511			4			-2
-0.00008	0.00010	0.701			3			-2
0.00011	0.00004	2.135		1	-1			
0.00009	0.00008	2.470		2	-3			
-0.00002	0.00011	32.835	1		-3			
0.00005	-0.00009	0.627		4	-5	3		

**Table 2.2.** The indirect planetary effects on the nutation of Mars, obliquity  $\Delta\varepsilon$ 

sin (")	cos (")	Period (year)	$\lambda_{Ea}$	$M$	$\lambda_{Ju}$	$\Lambda_M$
-0.00003	0.00014	-0.940	4	-10	3	2
-0.00013	-0.00007	0.941	4	-6	3	2

Their argument is a linear combination of the mean longitude of Mars itself and of the other planets. These terms appear simultaneously with the main terms of nutation due to the Sun, for the planetary perturbations of the relative ecliptic coordinates  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$  and  $\lambda_S$  of the Sun in (7) and (12) are included as Fourier series involving the mean longitudes of the other planets, together with terms characterizing a keplerian motion.

Notice that here the most influent planets are Jupiter and the Earth, whereas for the nutation of the Earth, these are Venus and Jupiter. The leading terms of the indirect planetary effects are gathered in Tables 2.1 and 2.2 respectively in longitude and in obliquity.

#### 4.3. The nutation of Mars due to Phobos and Deimos

Phobos and Deimos, the two satellites of Mars, are bodies of very small dimensions, with mean radius respectively about 11.1 km and 6.2 km. But they are very closed to the planet, for their mean distance corresponds respectively to 2.76 and 6.91 Mars radii. In order to compute the nutation due to these two bodies, we have used the series ESAPHO and ESADE (Chapront-Touzé, 1990). The means orbital elements of the two satellites are the following ones, according to this last paper:

$$a_{Ph} = 9373.713 \text{ km}$$

$$e_{Ph} = 0.015146$$

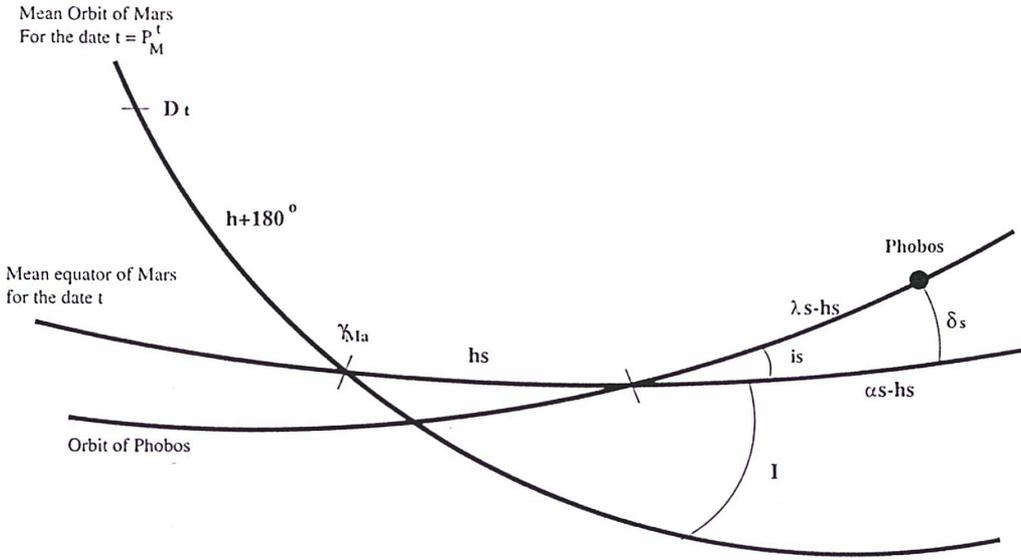


Fig. 3. Equatorial Phobos elements

$$\begin{aligned} i_{Ph} &= 1.067639^\circ \\ \dot{h}_{Ph} &= -0.436025^\circ/d \\ \dot{\lambda}_{Ph} &= 1128.84476^\circ/d \end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned} a_{De} &= 23457.06 \text{ km} \\ e_{De} &= 0.00096 \\ i_{De} &= 1.78896^\circ \\ \dot{h}_{De} &= -0.018001^\circ/d \\ \dot{\lambda}_{De} &= 285.161875^\circ/d \end{aligned}$$

Because of the smallness of the influence of the two satellites on the nutation, the second part of the potential at the r.h.s. of (7) is completely negligible and not considered here. Thus for the two satellites the perturbing potential can be expressed as:

$$U_s \approx \frac{k^2 M_S}{r_s^3} \times \left[ \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) P_2(\sin \delta_s) \right] \quad (16)$$

the indice  $s$  being associated with the given satellite. Then, we must notice some particularity in the way of computation of the nutation here, which looks like an extension with respect to the usual one as set up by Kinoshita (1977) and used precedently to calculate the coefficients of the nutation due to the Sun. The reason is that the coordinates  $(X, Y, Z)$  of the satellites in the ephemerides ESAPHO and ESADE (Chapront-Touzé, 1990) used here, are determined with respect to the equatorial plane of the planet and to the ascending node of the mean equator with respect to the mean orbital plane  $P_{M}^t$ . We call this reference system  $(R_M)$ . Therefore we want to avoid to compute the coordinates  $\lambda_s$  and  $\beta_s$  of the satellites with respect to the mean orbital plane of the planet, and to compute the Legendre polynomial  $P_2(\sin \delta_s)$  by the intermediary of the transformations in Eq. (12). In other words, we use the same canonical equations as those given by (9.1) and (9.2), but, by keeping, for further developments the original angle  $\delta_s$ , which is the declination of the satellite with respect to the mean equator. Notice that the

expression of the Legendre polynomial  $P_2(\sin \delta_s)$  is:

$$P_2(\sin \delta_s) = \frac{3}{2} \sin^2 \delta_s - \frac{1}{2} \quad (17)$$

As our procedure here is a new one, we develop it exhaustively in the following: let us consider (Fig. 3) the angles  $h_s$ ,  $\lambda_s$  and  $i_s$  which enable to give the position of the satellite (Phobos or Deimos) with respect to the mean equator of the planet of the date and to the node between the mean equator of the date and the mean orbit of the planet of the date  $\gamma_{Ma}$ .  $h_s$  is the longitude of the ascending node of the orbit of the perturbing satellite with respect to the mean orbit of Mars and counted from  $\gamma_{Ma}$ .  $\lambda_s$  is the mean longitude of the satellite and  $i_s$  is the inclination of the orbit of the satellite, with respect to the equator of Mars.

Then, the coordinates  $(X, Y, Z)$  of the perturbing satellite, with respect to the equatorial frame  $(R_M)$ , are related to its coordinates  $(x, y, z)$  with respect to the frame materialized by the mean orbital plane and  $\gamma_{Ma}$ , by the way of the following transformation:

$$[X, Y, Z] = M_x(I)M_z(h + \Pi)[x, y, z] \quad (18)$$

where  $M_x$  and  $M_z$  are respectively the rotations around the x-axis and the z-axis.

Then after (17) we find:

$$\frac{\partial P_2}{\partial h} = \frac{\partial P_2(\sin \delta_s)}{\partial h} = 3 \sin \delta_s \frac{\partial \sin \delta_s}{\partial h} \quad (19.1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = \frac{\partial P_2(\sin \delta_s)}{\partial I} = 3 \sin \delta_s \frac{\partial \sin \delta_s}{\partial I} \quad (19.2)$$

Then, with the help of (18), we can write:

$$\frac{\partial \sin \delta_s}{\partial h} = -\sin I \cos \delta_s \cos \alpha_s \quad (20.1)$$

$$\frac{\partial \sin \delta_s}{\partial I} = \cos \delta_s \sin \alpha_s \quad (20.2)$$

Notice that  $\alpha_s$  is the equivalent of the right ascension of the satellite with respect to the planet's equatorial reference frame and

equinox. Then, the combination of Eqs. (19.1), (19.2), (20.1) and (20.2) enables to write:

$$\frac{\partial P_2}{\partial h} = -3 \sin I \sin \delta_s \cos \delta_s \cos \alpha_s \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = +3 \sin \delta_s \cos \delta_s \sin \alpha_s \quad (21.2)$$

In a second step, we write the equations above as a function of  $X$ ,  $Y$  and  $Z$ , with the help of trigonometric transformations:

$$X = \cos \delta_s \cos(\alpha_s - h_s) = \cos(\lambda_s - h_s) \quad (22.1)$$

$$Y = \sin(\alpha_s - h_s) \cos \delta_s = \sin(\lambda_s - h_s) \cos i_s \quad (22.2)$$

$$Z = \sin \delta_s = \sin(\lambda_s - h_s) \sin i_s \quad (22.3)$$

Thus, by combining the Eqs. (21.1–2) and (22.1–3), we find the following relationships:

$$\frac{\partial P_2}{\partial h} = -3Z(X \cos h_s - Y \sin h_s) \sin I \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = +3Z(Y \cos h_s + X \sin h_s) \quad (23.2)$$

or, by substitution of  $X$ ,  $Y$  and  $Z$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin I_c} \frac{\partial P_2}{\partial h} &= +\frac{3}{4} \sin 2i_s \sin h_s \\ &+ \frac{3}{4} \sin i_s (1 + \cos i_s) \sin(2\lambda_s - h_s) \\ &+ \frac{3}{4} \sin i_s (1 - \cos i_s) \sin(2\lambda_s - 3h_s) \end{aligned} \quad (24.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial I} &= +\frac{3}{4} \sin 2i_s \cos h_s \\ &+ \frac{3}{4} \sin i_s (1 + \cos i_s) \cos(2\lambda_s - h_s) \\ &- \frac{3}{4} \sin i_s (1 - \cos i_s) \cos(2\lambda_s - 3h_s) \end{aligned} \quad (24.2)$$

In the following we will assimilate the orbit of the two satellites to a circle, for their eccentricity is very small (respectively 0.015146 and 0.00096 for Phobos and Deimos). Thus, by choosing  $a_s$  as the mean distance of the satellite, the derivatives of the perturbing potential  $U_s$  w.r.t. the variables  $h$  and  $I$  can be written in the following form:

$$\frac{\partial U_s}{\partial h} = \left( \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \right) \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \left( \frac{\partial P_2}{\partial h} \right) \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial I} = \left( \frac{\kappa^2 M_S}{a_s^3} \right) \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) \left( \frac{\partial P_2}{\partial I} \right) \quad (25.2)$$

Then, the integration of the canonical equations at the first order gives:

$$\Delta h = -\frac{1}{G \sin I} \int \frac{\partial U_s}{\partial I} \quad (26.1)$$

$$\Delta I = \frac{1}{G \sin I} \int \frac{\partial U_s}{\partial h} \quad (26.2)$$

Let us call  $K_s$  the coefficient:

$$K_s = \left( \frac{3\kappa^2 M_S}{4a_s^3 \omega} \right) \times \left( \frac{2C - A - B}{2C} \right)$$

Then the nutations  $\Delta\psi = -\Delta h$  and  $\Delta\varepsilon = -\Delta I$  are given by:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\frac{K_s}{\sin I} \left[ \left[ \frac{\sin 2i_s}{\dot{h}_s} \right] \right. \\ &\times \sin h_s - \left[ \frac{\sin i_s (1 + \cos i_s)}{2\dot{\lambda}_s - \dot{h}_s} \right] \sin(2\lambda_s - h_s) \\ &\left. + \left[ \frac{\sin i_s (1 - \cos i_s)}{2\dot{\lambda}_s - 3\dot{h}_s} \right] \sin(2\lambda_s - 3h_s) \right] \end{aligned} \quad (27.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= -K_s \left[ \left[ \frac{\sin 2i_s}{\dot{h}_s} \right] \right. \\ &\times \cos h_s - \left[ \frac{\sin i_s (1 + \cos i_s)}{2\dot{\lambda}_s - \dot{h}_s} \right] \cos(2\lambda_s - h_s) \\ &\left. - \left[ \frac{\sin i_s (1 - \cos i_s)}{2\dot{\lambda}_s - 3\dot{h}_s} \right] \cos(2\lambda_s - 3h_s) \right] \end{aligned} \quad (27.2)$$

The leading components of the nutation due to Phobos and Deimos are by far those which involve the longitude of the node of the satellites, in Eqs. (27.1) and (27.2). Thus at the 0.1 milliarcsecond truncation level, we find only two terms both in longitude and obliquity:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= +0''.01209 \times \sin h_{Phobos} + 0''.00439 \times \sin h_{Deimos} \\ \Delta\varepsilon &= -0''.00514 \times \cos h_{Phobos} - 0''.00187 \times \cos h_{Deimos} \end{aligned}$$

Notice that the respective periods are 2.260 y for  $h_{Phobos}$  and 54.754 y for  $h_{Deimos}$ .

#### 4.4. The nutation of Mars due to the direct action of the planets

The attraction of the other planets on Mars causes nutations which can be calculated in the same manner as the nutation coming from the attraction of the Sun, by replacing the marsocentric coordinates of the Sun  $r_S$ ,  $\lambda_S$  and  $\beta_S$  by the marsocentric coordinates  $r_p$ ,  $\lambda_p$  and  $\beta_p$ , inside the Eqs. (7), (12), (14.1–3). These coordinates are obtained by subtraction of the heliocentric coordinates of Mars from the heliocentric coordinates of the given planet, as they are expressed analytically by the ephemerides VSOP87 (Bretagnon & Francou, 1988). The coefficients of nutation are still here obtained after integration of the potential to provide the determining function  $\Pi_1^p$  by the way of Eqs. (10.1) and (10.2). The Earth and Jupiter are the sole planets to give significant influence at the 0.1 *mas* level. The precession due to these two planets is listed together with the main nutation terms in Tables 3.1 (longitude) and 3.2 (obliquity).

#### 4.5. The Oppolzer terms and the nutation and precession of the figure axis

All the coefficients of nutation which have been calculated in the precedent chapters concerned the axis of angular momentum, following the Eqs. (9.1), (9.2), (10.1) and (10.2). Nevertheless, it must be noticed that generally users are much more interested by the nutation of the axis of figure, rather than by the nutation of the angular momentum, for the former enables to give directly the orientation of the planet w.r.t. a given reference frame. The difference between the orientation of the axis of figure and that

**Table 3.1.** The direct influence of the planets on the nutation of Mars, longitude  $\Delta\psi$ 

coefficient (")	Period (year)	arguments	influence
-0.22154	—	t (1000 y.)	Jupiter
-0.00019	5.930	$\sin(2\lambda_{Ju})$	Jupiter
-0.00003	5.930	$\cos(2\lambda_{Ju})$	Jupiter
-0.08153	—	t (1000 y.)	Earth
0.00014	-15.781	$\sin(\lambda_{Ea} - 2\lambda_{Ma})$	Earth
-0.00008	-15.781	$\cos(\lambda_{Ea} - 2\lambda_{Ma})$	Earth

**Table 3.2.** The direct influence of the planets on the nutation and precession of Mars, obliquity  $\Delta\varepsilon$ 

coefficient (")	Period (year)	argument	influence
-0.00622	—	t (1000 y.)	Jupiter
0.00009	5.930	$\sin(2\lambda_{Ju})$	Jupiter
-0.00002	5.930	$\cos(2\lambda_{Ju})$	Jupiter
0.00249	—	t (1000 y.)	Earth

**Table 4.1.** The Opolzer terms making the difference between the axis of angular momentum and the axis of figure, longitude,  $\Delta\psi$ 

sin (")	Period (year)	$M$	$\Lambda_M$
-0.00361	0.940	2	2
-0.00119	0.627	3	2
-0.00027	0.470	4	2
0.00017	1.881	1	2

of the axis of angular momentum is given by the following expressions, obtained with the help of Eqs. (3.1) and (3.2):

$$\Delta\psi_f - \Delta\psi = -(\Delta h_f - \Delta h) = -\Delta \left( \frac{J}{\sin I} \times \sin g \right) \quad (28.1)$$

$$\Delta\varepsilon_f - \Delta\varepsilon = -(\Delta I_f - \Delta I) = -\Delta (J \cos g) \quad (28.2)$$

The development of the expressions at the r.h.s. of (27.1) and (27.2) by the intermediary of canonical equations giving both  $\Delta J$  and  $\Delta g$ , and the numerical treatment related to this development, are still here exactly the same as in the case of the calculation of Opolzer terms for the Earth, as analytically carried out by Kinoshita (1977). Thus we can refer to that last paper to know in detail the whole procedure. Four coefficients are found and listed in Tables 4.1 and 4.2, up to 0.1 mas in absolute amplitude.

Thus we can refer to that last paper to know in detail the whole procedure. Four coefficients are found and listed in Tables 4.1 and 4.2, up to 0.1 mas in absolute amplitude. These coefficients have to be added to the corresponding one (with the same argument) for the axis of angular momentum, in order to get the nutation for the figure axis. Notice that the argument of the leading coefficients for the Opolzer terms correspond to the leading ones for the axis of angular momentum or the axis

**Table 4.2.** The Opolzer terms making the difference between the axis of angular momentum and the axis of figure, obliquity,  $\Delta\varepsilon$ 

cos (")	Period (year)	$M$	$\Lambda_M$
-0.00139	0.940	2	2
-0.00046	0.627	3	2
0.00040	1.881	1	
-0.00010	0.470	4	2

of figure, as can be seen from Tables 1.1 and 1.2. At last, the Opolzer terms which give the orientation of the axis of rotation with respect to the axis of angular momentum are much smaller in absolute amplitude, than those which have been calculated above for the determination of the axis of figure, that is to say by a ratio  $(C-A)/C$ . Thus they are at the order of the microarcsecond level which is negligible in the frame of our present study, and consequently they are not studied here. In other words, we can assimilate the axis of rotation to the axis of figure.

#### 4.6. The influence of the triaxiality on the rotation of Mars

As it is the case for the Earth, Mars is not an axisymmetric body, which means that the moment of inertia  $A$  and  $B$  are not identical. The consequence is the presence of semi-diurnal (which means here with period corresponding to half a martian day) components of the nutation. The way of calculation of these components starting from Hamiltonian theory is quite identical to that already used by Kinoshita (1977) and more precisely by Souchay & Kinoshita (1997). Then the final formula giving the nutation in longitude and obliquity are the same, the values of the parameters being changed. The two leading terms can be written as follows:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{1/2d} = & \frac{B-A}{2C-A-B} \times K' \left[ \frac{1}{8} (1 + \cos I) \right. \\ & \times \left[ \frac{1}{(\dot{g} + \dot{l} - \dot{M} - \dot{h})} \right] A_{2M+2\Lambda_M} \\ & \times \sin(2g + 2l - 2M - 2\Lambda_M) \\ & \left. - \frac{1}{2} \cos I \left[ \frac{1}{(\dot{g} + \dot{l})} \right] A_0 \times \sin(2g + 2l) \right] \quad (29.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{1/2d} = & \frac{B-A}{2C-A-B} \times K' \left[ \frac{1}{8} \sin I (1 + \cos I) \right. \\ & \times \left[ \frac{1}{(\dot{g} + \dot{l}) - (\dot{M} + \dot{h})} \right] A_{2M+2\Lambda_M} \\ & \times \cos(2g + 2l - 2M - 2\Lambda_M) \\ & \left. - \frac{1}{4} \sin 2I \left[ \frac{1}{(\dot{g} + \dot{l})} \right] A_0 \times \cos(2g + 2l) \right] \quad (29.2) \end{aligned}$$

where the coefficient  $K'$  has the following expression:

$$K' = 3 \frac{\kappa^2 M_S}{a^3 \omega} \times \left[ \frac{2C - A - B}{2C} \right]$$

$A_{2M+2\Lambda_M}$  being the coefficient of the term with argument  $2M + 2\Lambda_M$  in the development of the expression  $(\frac{a_s}{r_s})^3 \cos^2 \beta_s \cos 2\lambda_s$  and  $A_0$  the constant term in the expression  $\frac{1}{2}(\frac{a_s}{r_s})^3(1 - 3\sin^2 \beta_s)$ .

We can observe that to determine numerically the Oppolzer terms, we need to know the value of the angular rate of the variables  $l$  and  $g$  whose definitions have been given at the beginning of the paper. The value of this angular rate is determined when studying the free motion of rotation of the planet. By analogy with the free motion of the Earth studied extensively by Kinoshita (1972), we can approximate  $\dot{g}$  and  $\dot{l}$  by the following simple expressions:

$$\dot{g} = \frac{1}{2} \left[ \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right] \times \omega \quad (30)$$

$$\dot{l} = \omega - \dot{g} \quad (31)$$

These approximations are available at the condition that the triaxiality expressed by the parameter  $e$  is small, where:

$$e = \frac{\left[ \frac{C}{A} - \frac{C}{B} \right]}{2 - \left[ \frac{C}{A} + \frac{C}{B} \right]} \quad (32)$$

A rough calculation leads to:  $e = 0.065$  which gives the following numerical values of the main semi-diurnal nutations, after substitution of arguments:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{1/2d} &= 0''.00011 \sin(2\lambda_{Ma} - 2g - 2l - 2h) \\ &\quad - 0''.00011 \sin(2g + 2l) \end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{1/2d} &= -0''.00005 \cos(2\lambda_{Ma} - 2g - 2l - 2h) \\ &\quad + 0''.00005 \cos(2g + 2l) \end{aligned}$$

The periods are respectively  $0.514d$  and  $0.513d$ .  $\lambda_{Ma}$  is the mean longitude of Mars, and  $(l+g+h)$  has a period equal to the sidereal rotation of the planet.

These expressions hold for the axis of angular momentum. As it is the case for the Earth, the corresponding expressions for the nutation of the axis of figure for these semi-diurnal coefficients are opposite, at the level of precision of these coefficients.

## 5. The planetary precession and the secular variation of the obliquity

As the Eqs. (5), (8), (9.1) and (9.2) are pointing out, the additional component  $E$  in the Hamiltonian, which is related to a secular motion of the plane of reference to compute the nutation terms, that is to say the mean orbital plane of Mars, has to be taken into account.  $E$  depends on the angles  $\pi$  and  $\Pi$ , which have been determined in the following of (8).

These angles can be expressed as a function of the elements  $\Omega$  and  $i$  which are respectively the longitude of the node of Mars orbit and the inclination of the orbit w.r.t. ecliptic of J2000.0. The numerical expressions for these two parameters have been

calculated by Bretagnon (1982), and we take these values. Thus, we can write:

$$\sin(\Pi + \psi) \sin \pi = \sin(\Omega - \Omega_0) \sin i \quad (33.1)$$

$$\begin{aligned} \cos(\Pi + \psi) \sin \pi &= -\cos i \sin i_0 \\ &\quad + \sin i \cos i_0 \cos(\Omega - \Omega_0) \sin i \end{aligned} \quad (33.2)$$

The variable  $\psi$  corresponds to the angle  $N_0 D_0$  in the Fig. 2. And the values found for the angles are:

$$\pi = 897.4480134T - 1.380904T^2 - 0.091923T^3 \quad (34.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= -446819.38155 + 12842.087336T \\ &\quad - 4.352970T^2 + 15.967223T^3 \end{aligned} \quad (34.2)$$

The angle from the node  $N$  between ecliptic J2000.0 and  $(P_m^t)$ , and the departure point is:

$$\begin{aligned} (ND) &= -520206.882048 + 27780.958512T \\ &\quad + 5.827291T^2 + 8.236316T^3 \end{aligned} \quad (34.3)$$

The units are arcseconds and thousand of years for the time.

The partial derivatives of  $E$  with respect to the variables  $h$  and  $I$  are obtained with the help of (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial I} &= -G \cos I \left[ \dot{\pi} \sin(h - D\bar{M}) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\Pi} \sin \pi \cos(h - D\bar{M}) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial h} &= G \sin I \left[ -\dot{\Pi} \sin \pi \sin(h - D\bar{M}) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\pi} \cos(h - D\bar{M}) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Notice that the variations of these angles are very small:  $h$ ,  $\pi$  and  $\Pi$  have respectively the periods  $1.71 \times 10^5 y$ ,  $2.87 \times 10^6 y$  and  $1.59 \times 10^5 y$ . We can consider them as constant terms for a short span of time.

The rate of precession  $\dot{h}_E$  coming from the motion of the mean orbit of Mars, as well as the secular variation of the obliquity  $\dot{\varepsilon}$  of Mars equator with respect to the mean ecliptic of the date, are given by:

$$\begin{aligned} \dot{h}_E &= \frac{-1}{G \sin I} \frac{\partial E}{\partial I} \\ &= \cot I \left[ \dot{\pi} \sin(h - D\bar{M}) - \dot{\Pi} \times \sin \pi \cos(h - D\bar{M}) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial E}{\partial h} \\ &= -\dot{\Pi} \times \sin \pi \sin(h - D\bar{M}) - \dot{\pi} \cos(h - D\bar{M}) \end{aligned} \quad (38)$$

These last equations lead to:

$$\dot{h}_E \approx \cot I \sin(h - D\bar{M}) \times \dot{\pi} \quad (39)$$

$$\dot{\varepsilon} \approx -\cos(h - D\bar{M}) \times \dot{\pi} \quad (40)$$

where the value of  $\sin \pi$  has been neglected because of the smallness of the angle  $\pi$ . The following resulting numerical determinations are:  $\dot{h}_E \approx -1.57970''/y$  and:  $\dot{\varepsilon}_{Ma} = -\dot{I} = -0.50336''/y$

At the first order the martian planetary precession  $\dot{\chi}_{Ma}$  which is the equivalent expression of the planetary precession  $\dot{\chi}_A$  for the Earth as defined in Lieske et al. (1977), is related to  $\dot{h}_E$  by the straightforward formula:

$$\dot{\chi}_{Ma} = -\frac{\dot{h}_E}{\cos \varepsilon_{Ma}} = 1.74571''/y$$

Notice that these values are respectively for the Earth:  $\dot{\varepsilon} = -0.46815''/yr$  and  $\dot{\chi} = 0.10553''/yr$

## 6. The contributions to the precession in longitude and its relationships with the dynamical ellipticity

As it has been defined for the Earth, the general precession in longitude in the case of Mars characterizes the motion, with respect to the slightly moving plane of the Mars orbital motion of the date, of the intersection of the ascending node of this plane with the mean equator of Mars. We call in the following this general precession in longitude  $p_{Ma}$

In a very similar manner as for the Earth (Kinoshita & Souchay, 1990; Williams, 1994; Souchay & Kinoshita, 1996)  $p_{Ma}$  is the sum of several contributions, which can be enumerated as: the leading one due to the gravitational attraction of the Sun, the contribution due to the gravitational attraction of the planets (direct planetary effect) as well as to the gravitational attraction of Phobos and Deimos, and the geodesic precession, which is a small correction related to a relativistic effect (De Sitter, 1938). At last we must take into account the rather big component which is coming from the fact that the general precession in longitude is not measured from an inertial plane (for instance the orbital plane for the epoch of reference J2000.0), but from the moving orbital plane of the date. This component corresponds in fact to the expression  $\dot{\chi} \cos \varepsilon_{Ma}$  as calculated in the precedent chapter, where  $\dot{\chi}$  characterizes the planetary precession.

From the Viking/Pathfinder experiments the Mars' rate of the precession in longitude  $\dot{\psi}_{Ma}$ , with respect to the fixed mean orbital plane of Mars at the epoch J2000.0, has been determined with a good accuracy, that is to say  $7.576 \pm 0.035''/y$ . It must not be confused with  $p_{Ma}$ ; nevertheless, to get the sole contribution of the Sun to  $\dot{\psi}_{Ma}$ , as quoted as  $\dot{\psi}_{Ma}^S$ , we must make the substitutions of all the other components which have been enumerated above, excepted the leading one due to the change of reference plane.

The influence of Phobos and Deimos on the precession of Mars derived from our calculations are not present, which seems to indicate that because the plane of their orbit is very closed to the equatorial plane of the planet, this influence does not exist.

The influence of Jupiter is  $-0.00022''/y$  and that of the Earth  $-0.00008''/y$  (the sign "-" indicates that the related motion is a retrograd one). Thus all these effects are considerably small (the cumulative effect of these contributions is only about 1/10000 that of the total value of the precession). Moreover, we can neglect the direct effects of the other planets as the Earth and Jupiter.

In order to determine the value of the geodesic precession for Mars, we can refer to a basic formula as it has been established by De Sitter (1938) and calculated by Barker and O'Connell (1975) as well as by Williams (1994) for the Earth, that is to say:

$$p_{geod.} = \frac{3}{2} \times \left[ \frac{na}{c} \right]^2 \times \left[ \frac{n}{1-e^2} \right] \quad (41)$$

Where  $n$ ,  $a$ , and  $e$  are respectively the mean motion, the semi-major axis and the excentricity of the Mars orbit, and  $c$  is the speed of light. The numerical value thus found is:  $p_{Geod} = 0''.67547/cy$ .

In a similar way as it was the case for the Earth (Souchay & Kinoshita, 1996),  $\dot{\psi}_{Ma}^S$  can be expressed as a function of the dynamical ellipticity of Mars  $H_d^{Ma} = \frac{2C-A-B}{2A}$ , and of parameters which are known with a relatively very good accuracy, as the mean motion, the mean rotation, and the orbital characteristics of the planet. By using the same formula as for the Earth (Kinoshita & Souchay, 1990; Souchay & Kinoshita, 1996) but by taking into account the sole solar contribution, we can write the relationship between  $\dot{\psi}_{Ma}^S$  and  $H_d^{Ma}$ :

$$\dot{\psi}_{Ma}^S = -3 \times H_d^{Ma} \times \left[ \frac{M_{Ma}}{M_{Ma} + M_S} \right] \times \left[ \frac{n_{Ma}^2}{\omega_{Ma}} \right] S_0 \cos \varepsilon_{Ma} \quad (42)$$

Where  $S_0$  is the constant term in the expression of the potential given in (14.1). Some additional relatively small contributions already calculated in the case of the Earth (Kinoshita & Souchay, 1990) will not be considered here because of their expected smallness as it is the case for the contribution due to the solar interaction with  $J_4$ . Unless future determinations of the ratio  $\frac{J_4}{J_2}$  look astonishingly relatively large for Mars in comparison with the Earth, we can neglect this last influence. Notice that for the Earth it amounts only to  $-0''.0026/cy$ , that is to say a relative  $5 \times 10^{-7}$  ratio with respect to the total precession value.

At last some other influences present in the case of the Earth, as coupling effects between the planet and its satellite (Kinoshita & Souchay, 1990) which can be divided into two parts as crossed-nutation and tilt-effects (Williams, 1994) are not considered here, because the corresponding coupling interaction between Mars and its satellites Phobos and Deimos look completely negligible in comparison: the effects of Phobos and Deimos on the first order precession and nutations are less than 1% that of the Sun, whereas in comparison the effects of the Moon on the precession of the Earth are twice that of the Sun and more than ten times in the case of the nutation. Finally, our value for  $H_d^{Ma}$  as deduced from (42) is:  $H_d^{Ma} = 0.3669 \pm 0.0017$ . This value of  $H_d^{Ma}$  is a little different of that calculated by Folkner et al., that is to say:  $H_d^{Ma} = 0.3662 \pm 17$ , but notice that we use this last value in the computation of our series. Thus the series calculated with our value  $H_d^{Ma}$  may be obtain in a simple manner by multiplying the series of this paper by the ratio of the values of the factor  $H_d^{Ma}$  that is to say 1.0019.

\*  $c/MR^2$

Table 5. Values of the parameters and angles used in this paper

name of the variable	value	uncertainty	unit	origin
$\omega$	350.89198226	$\pm 8$	$^\circ / d$	Folkner et al. (1997)
$n$	1886.51820925		$'' / day$	conventional value of IAU.
$\kappa^2 M_S$	$1.32712438 \times 10^{20}$		$m^3 \times sec^2$	conventional value of IAU.
$M_S / M_{Ma}$	3098710		–	conventional value of IAU.
$J_2$	0.001964		–	conventional value of IAU.
$J_3$	0.000036		–	conventional value of IAU.
$S_{2,2}$	0.000031		–	conventional value of IAU.
$C_{2,2}$	–0.000055		–	conventional value of IAU.
$C / MR^2$	0.3662	$\pm 17$	–	Folkner et al. (1997)
$H_d$	0.005363	$\pm 25$	–	this paper
$(B - A) / C$	0.0006896	$\pm 32$	–	
$C / A$	1.005741	$\pm 27$	–	this paper
$C / B$	1.005044	$\pm 24$	–	this paper
$R_{ma}$	3397.2	$\pm 40$	km	conventional value of IAU.
$\dot{g}$	352.7842	$\pm 88$	$^\circ / d$	this paper
$\dot{l}$	–1.8922	$\pm 88$	$^\circ / d$	this paper
$e$	0.0646	$\pm 5$	–	
$K'$	16557	$\pm 77$	$'' / 1000 \text{ ans}$	
$\varepsilon_{Ma}$	25.189417	$\pm 35$	$^\circ$	Folkner et al. (1997)
$\alpha_{2000}$	317.68143	$\pm 1$	$^\circ$	Folkner et al. (1997)
$\delta_{2000}$	52.88650	$\pm 3$	$^\circ$	Folkner et al. (1997)
$\Lambda_0$	–108.994438		$^\circ$	
$a_{Ph}$	9373.713		km	Chapront-Touzé (1990)
$e_{Ph}$	0.015146		–	Chapront-Touzé (1990)
$v_{Ph}$	1128.845		$^\circ / d$	Chapront-Touzé (1990)
$i_{Ph}$	1.067639		$^\circ$	Chapront-Touzé (1990)
$\kappa^2 M_{Ph}$	$6.38825 \times 10^{15}$		$m^3 \times d^2$	Chapront-Touzé (1990)
$h_{Ph}$	–0.436025		$^\circ / d$	Chapront-Touzé (1990)
$K_{Ph}$	383.8	$\pm 18$	$'' / 1000 \text{ ans}$	this paper
$a_{De}$	23.457		km	Chapront-Touzé (1990)
$e_{De}$	0.000196		–	Chapront-Touzé (1990)
$v_{De}$	285.1619		$^\circ / d$	Chapront-Touzé (1990)
$i_{De}$	1.78896		$^\circ / d$	Chapront-Touzé (1990)
$\kappa^2 M_{De}$	$8.96375 \times 10^{14}$		$m^3 \times d^2$	Chapront-Touzé (1990)
$h_{De}$	–0.018001		$^\circ / d$	Chapront-Touzé (1990)
$K_{De}$	3.436	$\pm 16$	$'' / 1000 \text{ ans}$	this paper
$M_{Ju} / M_S$	$\sqrt{1047.355}$		–	conventional value of IAU.
$M_{Terre} / M_S$	$\sqrt{328900.5}$		–	conventional value of IAU.

## 7. Long time scale evolution of the motion of rotation of Mars

In order to study on a long time scale the variation of the parameters related to the rotation of Mars, especially that of the obliquity  $\varepsilon_{Ma}$  and of the precession rate in longitude  $\dot{\psi}_{Ma}$ , we first express the long period and the secular parts of the Hamiltonian related to this rotation. For this purpose, we do not consider here the Hamiltonian related to the free motion as well as its component related to the short-periodic forced motion. With a suitable change of canonical variables, the Hamiltonian  $F_{LP}$  becomes ( $LP$  for Long Period and  $SP$  for Short Period):

$$F_{LP} = \frac{L^2}{2C} + G \sin I \left[ \sin i \cos (h - \bar{D}N) \dot{\Omega} \right.$$

$$\left. - \sin (h - \bar{D}N) \frac{di}{dt} \right] + \frac{k^2 M'}{r^3} \times \frac{2C - A - B}{2} \times [P_2(\sin \delta)]_{sec} \quad (43)$$

with:

$$[P_2(\sin \delta)]_{sec} = -\frac{1}{4} \left( \frac{r}{a} \right)^3 (3 \cos^2 I - 1) (1 - e^2)^{-3/2} \quad (44)$$

The term  $E$  that stay in this Hamiltonian  $F_{LP}$  seems to differ from the term  $E$  use in the previous parts of this paper. In fact, the only difference is the choice of the inertial plane. For the short period study, we choose the mean orbital plane of Mars at J2000 as inertial plane. The choice of this inertial plane of reference comes from the intention to describe the motion

of precession-nutation of Mars in a way analogous to what is chosen in general for the Earth, that is to say the mean orbital plane of the Earth or ecliptic, at J2000.0.

For the long period study, we choose the ecliptic of the epoch J2000.0. This plane is easier to use because the ephemerides of Mars relate to it. In both cases, the term  $E$  is written:

$$E = -\Omega_1 \times L_1 - \Omega_2 \times L_2 - \Omega_3 \times L_3 \quad (45)$$

$\Omega_i, i = 1, 2, 3$  are the coordinates of the instantaneous vector of rotation of the reference frame linked to the mean orbit of Mars w.r.t. the reference frame linked to the inertial plane. We remark that for the long period study as well as for the short period study, the origin of the angle  $h$  is the departure point  $D_t$ . Therefore  $\Omega_3$  is equal to zero. For the long period study, the  $\Omega_i$  are written with the help of the variables  $i$  et  $\Omega$  describe in chapter 5. Until chapter 6, the  $\Omega_i$  are written with the help of the variables  $\pi$  et  $\Pi$ . So we have the relation:

$$\begin{aligned} E_{LP} &= G \sin I \left[ \sin i \cos(h - D\bar{N}) \dot{\Omega} - \sin(h - D\bar{N}) \frac{di}{dt} \right] \\ &= E_{SP} = G \sin I \left[ \sin \pi \cos(h - D\bar{M}) \dot{\Pi} \right. \\ &\quad \left. - \sin(h - D\bar{M}) \dot{\pi} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

The same thing occurs for the definition of the variation of the departure point  $D_t$ . We have the two following relations that determine the same motion:

$$\dot{N}D = -\cos i \dot{\Omega}$$

or

$$\dot{M}D = -\cos \pi \dot{\Pi} \quad (47)$$

With the Hamiltonian  $F_{LP}$ , the two equations of the system can be written

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial F}{\partial I} \\ \dot{h} &= -\frac{\cos I}{\sin I} \left[ \sin i \cos(h - D\bar{N}) \dot{\Omega} - \sin(h - D\bar{N}) \frac{di}{dt} \right] \\ &\quad - \frac{3 k^2 M'}{2 G a^3} \left( \frac{2C - A - B}{2} \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \cos I \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\partial F}{\partial h} \\ &= - \left[ \sin i \sin(h - D\bar{N}) \dot{\Omega} + \cos(h - D\bar{N}) \frac{di}{dt} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Practically the coordinates  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  can be expressed as a function of the variables  $p$  and  $q$  given by the long period ephemerides of Mars (Bretagnon, 1984; Laskar, 1988). They are given by:

$$p = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega \quad (50.1)$$

$$q = \sin\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega \quad (50.2)$$

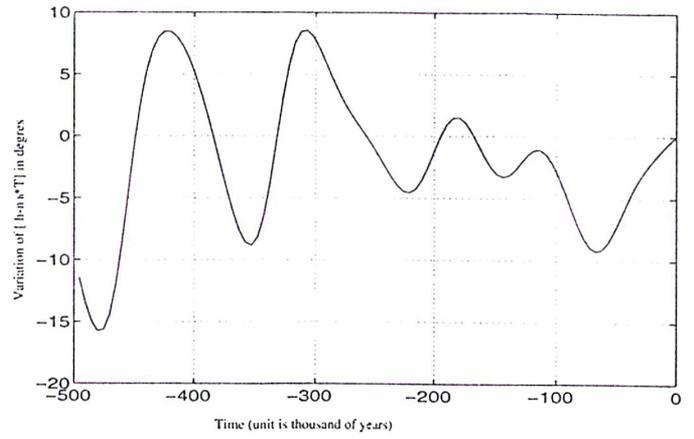


Fig. 4. Motion of variable  $h$  over 500 000 years

The components  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  can then be written in the following form:

$$\Omega_1 = \frac{2(p\dot{p} + q\dot{q})}{\sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{1 - p^2 - q^2}} \quad (51.1)$$

$$\Omega_2 = \frac{2(\dot{p}q - q\dot{p}) \sqrt{1 - p^2 - q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad (51.2)$$

$$\Omega_3 = 0 \quad (51.3)$$

With the help of Eqs. (51.1–3), we can express the  $\Omega_i$  with respect to  $p$  and  $q$ . Moreover the expression  $(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}$  in (48) can be determined from the angles  $h = e \sin \tilde{\omega}$  and  $k = e \cos \tilde{\omega}$  given by the long period ephemeris:

$$(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} = (1 - h^2 - k^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (52)$$

Thus the differential Eqs. (48) and (49) can be expressed as a function of the time, and a numerical integration can be carried out, leading to the determination of the rotation angles  $h$  and  $I$ . We use a numerical integrator of Runge-Kunta at 8th. order with variable step. In the continuation, we use the Laskar ephemerides. On a 500 000 years period the differences with the Bretagnon ephemerides are negligible for this study. The limitation to this time span is principally due to the uncertainty on the frequencies of the orbital motion of the planets (that is to say roughly  $0.1''/y$ ). This uncertainty brings a phase shift of about  $15^\circ$  on the longitudes after 1/2 million years. Moreover, Laskar & Robutel (1993) have shown that Mars is located inside a chaotic zone, and that after 5 million years time interval, the determination of the orientation of the planet cannot be mod- elized.

As a first step we integrate the Eqs. (47), (48) and (49) with  $\frac{C}{MTR^2} = 0.3662$  that is to say the value determined by Folkner et al. (1997) from a precession value set to  $7.576''/y$ . Fig. 4 shows the variation of  $(h - \dot{h} \times T)$ , (where  $T$  is the time), from  $-500\,000$  years until nowadays. Fig. 5 shows the variation of  $\varepsilon_{Ma} (= -I)$  on the same period. At last, Fig. 6 shows the variation of  $(D_t \bar{N} - D_0 \bar{N}_0 - N_0 \bar{N}) = V(D)$  that represent the motion of the departure point on  $P_{Mt}^t$ .

Variations of the obliquity  $I$  of Mars on a very long time scale have already been done by Ward (1979). Borderies (1980)

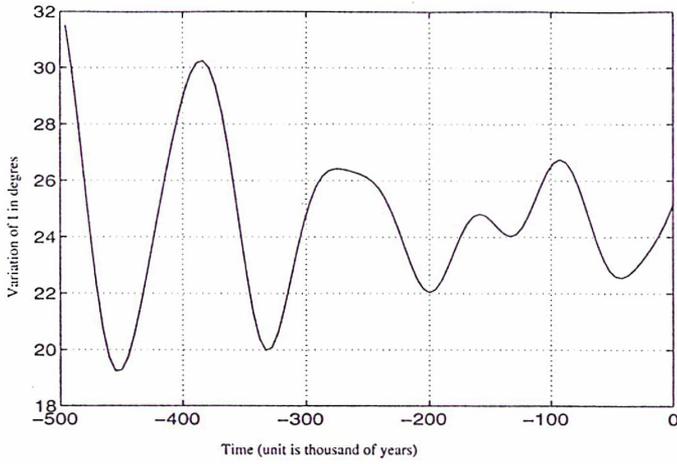


Fig. 5. Motion of variable  $\epsilon_{Ma}(= -I)$  over 500 000 years

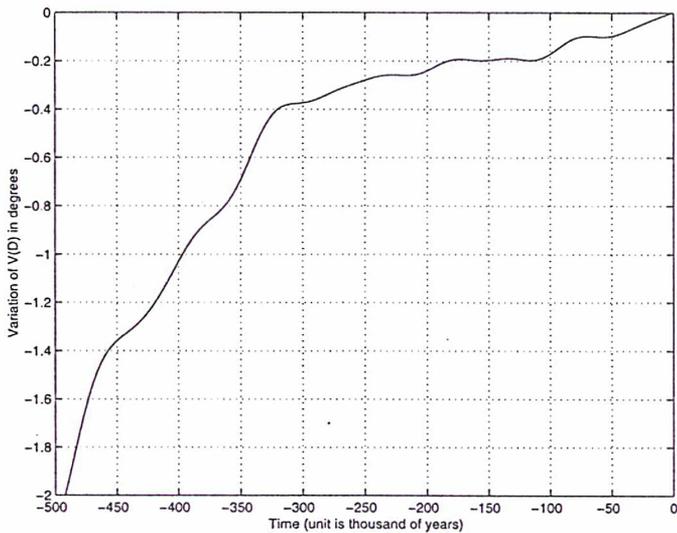


Fig. 6. Motion of departure point  $D_t$  over 500 000 years

has also studied the variations of the obliquity and of the precession in longitude of  $\Gamma$  measured from the parameter  $h$ , on the same time scales, but with an origin for the determination of the angle  $h$  the point  $N_t$  which has not the same properties as the point  $D_t$ . However, the choice of the origin does not affect directly the obliquity, which is the more significant variable for the past history of Mars weather. Although they are different ephemerides, the variations of obliquity determined by Ward and Borderies were very similar to our results. The main differences between the results are due to the choice of  $(\frac{MR^2}{C})$  of which uncertainly has been improved recently by the Pathfinder mission, (see Fig. 8).

The large variations of the obliquity (Fig. 5) come from the commensurability between the frequency of the precession  $\dot{h}$  and the linear combinations of the frequencies of the revolutions of the planets. Notice that the Earth is taken away from resonant zones, because of the dynamical couple exerted by the Moon, the precession caused by this last body being roughly  $30''/y$ . Thus the variations in obliquity for the Earth are about  $1^\circ$  whereas for Mars they reach  $15^\circ$ .

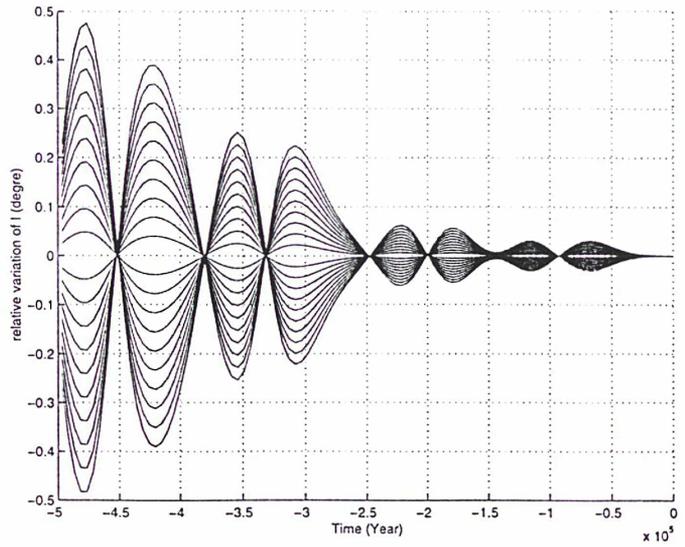


Fig. 7. Relative motion of I with different Pathfinder values of  $C/MR^2$

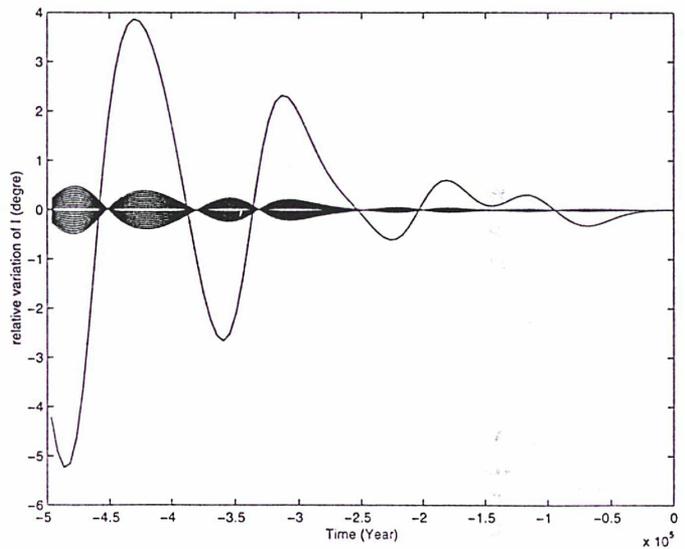


Fig. 8. Relative motion of I with Pathfinder and Viking values of  $C/MR^2$

Moreover, the frequency of the precession  $\dot{h}$  depends on the ratio  $(\frac{MR^2}{C})$  as a scaling factor. The rotation of Mars at a long time scale depends also strongly from this parameter because of resonances closed to this frequency. As we already mentioned it before, the accuracy on this parameter has been drastically improved by the measurements done by Pathfinder (Folkner et al., 1997). Nevertheless, despite the better delimitation of the range of the values of  $I$  and  $h$  in a 500 000 y time scale, Mars could still cross resonant zones. Thus we have studied this possibility; in Fig. 7 we have represented the evolution w.r.t. the time of the difference between the determinations of obliquities calculated with different values of the coefficient  $(\frac{C}{MR^2})$  located inside the uncertainty range, and that calculated with the nominal value  $(\frac{C}{MR^2} = 0.3662)$ . Then we show that no resonance occur on a period of 500 000 y (the curves do not overlap but present the same form with gradually increasing amplitudes).

The Pathfinder data has allowed to reduce by a factor ten the uncertainty of the  $(\frac{MR^2}{C})$  parameter since Viking missions. The Fig. 8 shows the drastic improvement of the accuracy in the determination of the martian obliquity from -500000 y until now. The same curves as in Fig. 7 are shown in comparison with the isolated curve which shows the uncertainty on the value of  $I$  before the mission Pathfinder. We can then remark that the accuracy on the determination of  $I$  has also been improved by a factor 10. However, the peak to peak uncertainty after 500,000 years of integration is still about one degree. Variations of amplitude of the Earth obliquity are the main reason of ice age for our planet. Then it looks very interesting to constrain at best the time evolution of such a parameter as the obliquity for Mars, as we did here.

## 8. Conclusion

In this paper, we carried out a complete study of the combined motion of precession and nutation of the planet Mars by choosing basic canonical equations based on the Hamiltonian for the motion of rotation of the planet analogous to that set up by Kinoshita (1977) for the Earth. We have used very recent parameters of the planet coming from the Pathfinder mission (Folkner et al., 1997), especially those concerning the moments of inertia and the precession constant ( $7''.567/ly$ ). We have calculated the coefficients of the nutation at the 0.01 milliarcsecond level for both the axis of angular momentum, and the axis of figure, when taking into account the Oppolzer terms which make the difference between these two axes. We have considered not only the main terms of nutation which are due to the influence of the Sun, but also those which are coming from the direct action of the planets. Moreover we have made some suitable theoretical transformations to calculate the nutation due to the two satellites Phobos and Deimos, whose the amplitude is at the level of 1% w.r.t. the main nutation term due to the Sun. We have also evaluated the effect of the triaxial component of the potential of the planet on the nutation, characterized by half diurnal coefficients.

At last we have studied the evolution of Mars obliquity and precession rate at a very long time scale (500 000 y), by the way of a numerical integration. Thus we have shown that the improved accuracy of data concerning Mars by the intermediary

of the Pathfinder mission leads a much better delimitation, by roughly a factor 10, of this evolution. Then we can observe that the uncertainty of the Martian obliquity for the time scale above does not exceed 1 degree peak to peak. We hope that this work might be useful to determine at best the orientation of the axis of figure in space in the perspective of future missions as NETLANDER.

## References

- Barker B.M., O'Connell R.F., 1975, In: Proceed of the Enrico Fermi Summer School, Varenna, Italy  
 Borderies N., 1980, A&A 82, 129  
 Bretagnon P., 1982, A&A 114, 278  
 Bretagnon P., 1984, In: Berger A.L., et al. (eds.) Milankovitch and climate. p. 1  
 Bretagnon P., Francou G., 1988, A&A 202, 309  
 Capitaine N., Guinot B., Souchay J., 1986, Celest. Mech 39, 283  
 Carpenter R.L., 1964, AJ 69, 2  
 Chapront-Touzé M., 1990, A&A 240, 159  
 De Sitter W., 1938, Bull. Astron. Netherlands 8, 213  
 Folkner W.M., Yoder C.F., Yuan D.N., Standish E.M., Preston R.A., 1997, Sci 278, 1749  
 Guinot B., 1979, In: Time and the Earth's rotation. Proceed. of the Eighty-second Symposium, San Fernando, Spain, p. 7  
 Hilton J.L., 1991, AJ 102, 1510  
 Hori G., 1966, PASJ 18, 827  
 Kinoshita H., 1972, PASJ 24, 423  
 Kinoshita H., Hori G., Nakai H., 1974, Annals Tokyo Astr. Obs. 14, 14  
 Kinoshita H., 1977, Celest. Mech. 33, 26  
 Kinoshita H., Souchay J., 1990, Celest. Mech. 48, 187  
 Laskar J., 1988, A&A 198, 341  
 Laskar J., Robutel P., 1993, Nat 361, 608  
 Lieske J.H., Lederle T., Fricke W., Morando B., 1977, A&A 58, 1  
 Pettingill G.H., Dyce R.B., 1965, Nat 206, 1241  
 Pitjeva E.V., 1996, In: Proceed. IAU Colloquium 165 Poznan, Poland, 251  
 Reasenberg R.D., King R.W., 1979 J. Geophys. Res. 84, 6231  
 Souchay J., Kinoshita H., 1996, A&A 312, 1017  
 Souchay J., Kinoshita H., 1997, A&A 318, 639  
 Souchay J., Loysel B., Kinoshita H., Figueira M., 1998, A&A 134, 243  
 Ward W.R., 1979, J. Geophys. Res. 84, 243  
 Williams J.G., 1994, AJ 108, 711  
 Woolard E.W., 1953, Astron. Papers Amer. Eph. 15, 1

# Bibliographie

- [Belton et Al., 1991] BELTON M.J.S., JULIAN W.H., ANERSON A.J. et MUELLER B.E.A. – The Spin State and Homogeneity of Comet Halley’s Nucleus. *Icarus*, vol. 93, 1991, pp. 183-193.
- [Bills et Ferrari, 1977] BILLS B.G. et FERRARI A.J. – A Harmonic Analysis of Lunar Topography. *Icarus*, vol. 31, 1977, pp. 244-259.
- [Bizouard, 1995] BIZOUARD C. – *Modélisation astrométrique et géophysique de la rotation de la Terre*. – Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, novembre 1995.
- [Bois, 1995] BOIS E. – Proposed terminology for a general classification of rotational swing motions of the celestial solid bodies. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 296, avril 1995, pp. 850–857.
- [Bois, Boudin et Journet, 1996] BOIS E., BOUDIN F. et JOURNEY A.– Secular variation of the Moon’s rotation rate. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 314, 1996, pp. 989–994.
- [Bouquillon et Souchay, 1999] BOUQUILLON S. et SOUCHAY J. – Precise modeling of the precession-nutation of Mars. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 345, 1999, pp. 282–297.
- [Borderies, 1980] BORDERIES N. – *La rotation de Mars: Théorie analytique, Analyse d’observations de l’expérience Viking*. – Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, Février 1980.
- [Bretagnon, 1982] BRETAGNON P. – *Astronomy and Astrophysics.*, vol. 114, 1982, pp. 278.
- [Bretagnon, 1984] BRETAGNON P. – *Milankovitch and climate*. – eds. A.L. Berger and al., 1984, pp. 1.
- [Bretagnon et Francou, 1988] BRETAGNON P. et FRANCOU G. – *Astronomy and Astrophysics.*, vol. 202, 1988, pp. 309.
- [Bretagnon et al, 1997] BRETAGNON P., ROCHER P. et SIMON J.-L. – *Astronomy and Astrophysics.*, vol. 319, 1987, pp. 305.
- [Broucke, 1980] BROUCKE R.A., – A Fortran System for the Manipulation of Symbolic Poisson Series with Application to Celestial Mechanics. *Inst.for Adv. Studies in Orbital Mechanics*, Univ. Texas, 1980.

- [Burns et Safronov, 1973] BURNS J.A. et SAFRONOV V.S. – Astéroïde nutation angles. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 165, 1973, pp. 403-411.
- [Byrd et Friedman, 1954] BYRD P.F. et FRIEDMAN P.M. – *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. – Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [Camichel, 1956] CAMICHEL H. – *Sky and Telescope*, vol. 18, 1959, pp. 600.
- [Capitaine, 1986] CAPITAINE N., GUINOT B. et SOUCHAY J. – *Celestial Mech.*, vol. 39, 1986, pp. 283.
- [Carpenter, 1965] CARPENTER M. – *A.J.*, vol. 170, 1965, pp. 134.
- [Chapront et Chapront-Touzé, 1983] CHAPRONT J. et CHAPRONT-TOUZÉ M. – The lunar Ephemeride ELP 2000. *Astronomy and Astrophysics.*, vol. 124, 1983, pp. 50.
- [Chapront-Touzé, 1990] CHAPRONT-TOUZÉ M. – *Astronomy and Astrophysics.*, vol. 240, 1990, pp. 159.
- [Chapront et al, 1999] CHAPRONT J., CHAPRONT-TOUZÉ M. et FRANCOU G. – Complements to Moons' Lunar Libration Theory. *Celestial Mech.*, vol. 73, 1999, pp. 317.
- [Chazy, 1953] CHAZY J. – *Mécanique Céleste: Équations canoniques et variation des constantes*. – 1953. Edité par Presses Universitaires de France, Paris.
- [Davies et Al., 1991] DAVIES M.E. et Al. – Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites - 1991 *Celestial Mech.*, vol. 53, 1992, pp. 377-397.
- [Dehant et al, 1999] DEHANT V., DEFRAIGNE P. et VAN HOOUST T., – Proceed. of S.E.D.I. meeting *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1998, accepté.
- [Deprit, 1967] DEPRIT A. – Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. *Am. J. Phys.*, vol. 35, 1967, pp. 424-428.
- [Deprit, 1969] DEPRIT A. – Canonical Transformations Depending on a Small Parameter. *Celestial Mech.*, vol. 1, 1969, pp. 12-30.
- [Deprit et Elipe, 1993] DEPRIT A. et ELIPE A. – Complet reduction of Euler-Poinsot problem. *Journal of the Astronautical Sciences.*, vol. 41, No. 4, 1993, pp. 603-628.
- [Dickey et al, 1982] DICKEY J.O., WILLIAMS J.G. et YODER C.F. – . *Proceedings of the Sixty-third Colloquium : "High-precision earth rotation and earth-moon dynamics"*, 1982, pp. 209-216.
- [Explanatory Supplemen, 1961] *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, – Edité par H. M. Nautical Almanac Office.
- [Folkner et al., 1997] FOLKNER W.M., YODER C.F., YUAN D.N., STANDISH E.M. et PRESTON R.A. – *Science*, vol. 278, 1997, pp. 1749.
- [Gauchez et Souchay, 2000] GAUCHEZ D. et SOUCHAY J. – *Earth, Moons and planets*, soumis.

- [Getino, 1995a] GETINO J. – An Interpretation of the Core-Mantle Interaction Problem, *Geophys. J. Int.* vol 120, 1995, pp. 693–705
- [Getino, 1995b] GETINO J. – Forced Nutations of a Rigid Mantle-Liquid Core Earth Model in Canonical Formulation, *Geophys. J. Int.* vol 122, 1995, pp. 803–814
- [Guinot, 1979] GUINOT B. – *Basic problems in the kinematics of the rotation of the Earth*, pp. 7–18. – D. Reidel, Norwell, Mass., 1979. Edité par D. D. McCarthy and J. D. Pilkington.
- [Harris, 1994] HARRIS A.W. – Tumbling Asteroids *Icarus*, vol. 107, 1994, pp. 209–211.
- [Hilton, 1991] HILTON J.L. – The Motion of Mars’Pole. I - Rigid Body Precession and Nutation. *A.J.*, vol. 102, 1991, pp. 1510.
- [Hilton, 1991b] HILTON J.L. – The Motion of Mars’Pole. II - The Effect of AN Elastic Mantle and a Liquid Core. *A.J.*, vol. 103, 1991, pp. 619.
- [Hori, 1966] HORI G. – Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. *Publ. Astron. Soc. Japan*, vol. 18, 1966, pp. 287–296.
- [Hudson et ostro, 1995] HUDSON R.S. et OSTRO S.J. – Shape and Non-Principal Axis Spin State of Asteroid 4179-Toutatis. *Science*, vol. 270, 1995, pp. 84–86.
- [Jeffrey, 1995] JEFFREY A. – *Handbook of mathematical formulas and integrals*. 1995. Edité par Academic Press, Inc., San Diego.
- [Julian, 1987] JULIAN W.H. – *Nature*, vol. 326, 1987, pp. 57.
- [Kelemen, 1997] KELEMEN J. – Rotation Period of the Nucleus of the Comet Halley *American Astronomical Society, DPS meeting*, vol. 29, 1997, pp. 18.
- [Kinoshita, 1972] KINOSHITA H. – First-order Perturbation of the Two Finite Body Problem. *Publ. Astron. Soc. Japan*, vol. 24, 1972, pp. 423–457.
- [Kinoshita et al., 1974] KINOSHITA H., HORI G. et NAKAI H. – *Annals Tokyo Astron. Obs.*, vol. 14, 1974, pp. 14.
- [Kinoshita, 1977] KINOSHITA H. – Theory of the Rotation of the Rigid Earth. *Celestial Mechanics*, vol. 15, 1977, pp. 423–457.
- [Kinoshita et Souchay, 1990] KINOSHITA H. et SOUCHAY J. – The Theory of the Nutation for the Rigid Earth Model at the Second Order. *Celestial Mechanics*, vol. 48, 1990, pp. 187–265.
- [Kinoshita, 1992] KINOSHITA H. – Analytical Expansions of Torque-Free Motions for Short and Long Axis Modes. *Celestial Mechanics*, vol. 53, 1992, pp. 365–375.
- [Kopal et Carder, 1974] KOPAL Z. et CARDER R.W. – *Mapping of the moon. Past and present.*– 1974. Edité par Reidel, Dordrecht.
- [Kubo, 1979] KUBO Y. – A Core-Mantle Interaction in the Rotation of the Earth. *Celestial Mechanics*, vol. 19, 1979, pp. 215–241.

- [Kuwae, 1977] KUWAE K. – *Manuel de Japonais, vol. 1.*– 1979. Edité par Langues & mondes-l’asiathèque, Paris.
- [Landau et Lifshitz, 1960] LANDAU L.D. et LIFSHITZ E.M. – *Course of Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics.* – 1960. Edité par Pergamon Press Ltd.
- [Laskar, 1988] LASKAR J. – *Astronomy and Astrophysics*, vol. 198, 1988, pp. 341.
- [Laskar et Robutel, 1993] LASKAR J. ROBUTEL P.– *Nature*, vol. 361, 1993, pp. 608.
- [Lichtenberg et Lieberman, 1983] LICHTENBERG A.J. et LIEBERMAN M.A. – *Regular and stochastic motion.* – 1983. Edité par Springer-Verlag New York Inc.
- [Lieske et al., 1977] LIESKE J.H., LEDERLE T., FRICKE W., MORANDO B. – *Astronomy and Astrophysics*, vol. 58, 1977, pp. 1.
- [Loyer, 1997] LOYER S. – *Techniques Dynamiques d’Observation de la Rotation de la Terre.* – Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, Octobre 1997.
- [Migus, 1977] MIGUS A. – *Théorie Analytique de la Libration Physique de la Lune.* – Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1977
- [Milankovitch, 1920] MILANKOVITCH M. – *Théorie mathématique des phénomènes thermiques.* – Edité par Gauthier-Villars.
- [Moons, 1981] MOONS M. – *Libration physique de la Lune.* – Thèse de doctorat, Facultés Universitaires Notre Dame de la Paix, Namur, Faculté des Sciences, 1981
- [Peale et Lissauer, 1989] PEALE S.J. et LISSAUER J.J.– *Rotation of Halley’s Comet Icarus*, vol. 79, 1989, pp. 396–430.
- [Pitjeva, 1996] PITJEVA E.V.– *Using Spacecraft Range Data and Radar Observations for the Improvement of the Orbital Elements of Planets and Parameters of Mars Rotation. proceed. of the 172nd Symposium of I.A.U..* – Edited by Ferraz-Mello et al, 1996, pp. 45.
- [Reasenberg, 1977] REASENBERG R.D. – *The Moment of Inertia and Isostasy of Mars J. Geophys. Res.*, vol. 82, 1977, pp. 369–375.
- [Reasenberg et King, 1979] REASENBERG R.D. et KING R.W. – *The Rotation of Mars J. Geophys. Res.*, vol. 84, 1979, pp. 6231–6240.
- [Rechester et Stix, 1979] RECHESTER A.B. et STIX T.H. – *Phys. Rev.*, vol. A19, 1979, pp. 1656.
- [Roosbeek et Dehant, 1998] ROOSBEEK F. et DEHANT V. – *Celestial Mechanics*, vol. 79, 1998, pp. 215–253.
- [Sagdeev, 1989] SAGDEEV R.Z. et al. – *The Rotation of P/Halley Astron. J.*, vol. 97, 1989, pp. 546.
- [Samarasiha et A’Hearn., 1991] SAMARASIHA N.H., A’HEARN M.F. – *Observational and Dynamical Constraints on the Rotation of Comet P/Halley. Icarus*, vol. 93, 1991, pp. 194-225.

- [Souhay et al., 1995] SOUCHAY J., FEISSEL M., BIZOUARD C., CAPITAIN N. et BOUGEARD M. – Precession and Nutation for a Non-Rigid Earth : Comparai-son between Theory and V.L.B.I. Observations. *Astronomy and As-trophysics*, vol. 299, 1995, pp. 277–287.
- [Souhay et Kinoshita, 1996] SOUCHAY J., KINOSHITA H. – Corrections and New Developements in Rigid Earth Nutation Theory. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 312, 1996, pp. 1017.
- [Souhay et al, 1999] SOUCHAY J., LOYSEL B., KINSOHITA H. et FOLGUEIRA M. – Correc-tions and New Developements in Rigid Earth Nutation Theory. III. Final tables "REN-2000" including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, vol. 135, 1999, pp. 111-131.
- [Ward, 1979] WARD W.R. – *Geophys. Res.*, vol. 84, 1979, pp. 243.
- [Ward, 1992] WARD W.R. – Long-term Orbital and Spin Dynamics of Mars. *Mars*, 1992, pp. 298. éditeurs : Kieffer, Jakosky, Snyder et Matthews., 1992, pp. 298.
- [Wahr, 1981] WAHR J.M. – Body tides of an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 64, 1981, pp. 667–703.
- [Watanabe, 1989] WATANABE J.I. – Rotational motion of the nucleus of Comet P/Halley. *Publ. Astron. Soc. Japan*, vol. 41, 1989, pp. 897–918.
- [Williams et al., 1996] WILLIAMS J.G., NEWHALL X.X., YODER C.F. et DICKEY J.O. – "Lu-nar Free Libration". *Lunar and Planetary Science*, vol. 27, 1997, pp 1439.
- [Yoder et Standish, 1997] YODER C.F. et STANDISH E.M. – Martian Precession and Rotation from Viking Lander Range Data. *J. Geophys. Res.*, vol. 102, 1997, pp. 4065.

# Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier *Jean Souchay*, mon directeur de thèse, pour son encadrement chaleureux et efficace ainsi que *Nicole Capitaine* qui s'est démenée pour que j'obtienne un financement sans lequel je ne pourrais pas aujourd'hui soutenir cette thèse.

Je remercie *Hiroshi Kinoshita* qui, par ses travaux, a beaucoup inspiré ce mémoire.

Je remercie *Jacques Henrard*, *Jean-Pierre Barriot*, *Eric Bois* et *Ana Gómez* d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et de m'avoir aidé par leurs remarques à améliorer mon mémoire.

Je remercie *Monsieur et Madame Chapront* pour leur disponibilité et leur écoute, même si les conversations que nous avons eues, ont plus porté sur les problèmes liés aux calculs des librations de la Lune que sur ceux présentés dans cette thèse.

Je remercie toute l'équipe du *DANOF* et en particulier le monsieur informatique, *Dau*, pour sa promptitude à résoudre la plupart des problèmes.

J'aimerais enfin, à la veille de mon départ au Japon, exprimer mon attachement aux personnes qui m'ont entouré et aidé durant toute cette période de ma vie et qui me sont chères : à *Laurence*, à *Benoit*, à toute ma famille : *l'Alice*, la *Maman*, le *Jean-Claude*, mes *grand-parents*, et à la maisonnée parisienne : le *60 rue Blanche*.

\* \* \*





## Résumé

Le sujet de cette thèse est l'étude des mouvements de rotation des corps célestes rigides. Ces corps sont soit des planètes telluriques comme Mercure, Venus, la Terre ou Mars, soit des satellites, des astéroïdes ou des noyaux de comète.

Nous utilisons, pour l'étude de ces mouvements de rotation, les théories hamiltoniennes de la mécanique céleste. Afin de familiariser le lecteur avec ces méthodes, nous les décrivons succinctement à l'aide d'un système mécanique simple : le pendule.

Le mouvement du pendule a, entre autres avantages, celui d'être formellement voisin du mouvement de rotation des corps rigides sans perturbation, c'est à dire, sans corps extérieurs influençant cette rotation.

Nous employons donc ces mêmes méthodes hamiltoniennes à l'étude de ce mouvement de rotation sans perturbations que nous nommons : la rotation libre d'un corps rigide. Nous montrons comment ces méthodes s'appliquent à des cas concrets. Nous nous intéressons en particulier au mouvement de l'astéroïde 4179-Toutatis et à celui du noyau de la comète P/Halley. Nous évaluons également les mouvements libres de Mars, Phobos et de la Lune même si ceux-ci sont éloignés des mouvements réels de rotation de ces corps.

Nous montrerons qu'il est également possible, pour l'étude de la rotation de certains corps célestes, d'utiliser ce mouvement de rotation simplifié, comme une première étape dans la détermination du mouvement de rotation perturbé, c'est à dire, avec des corps célestes l'influençant. Nous expliquerons les méthodes permettant de converger vers ce mouvement et nous les appliquerons au cas de la planète Mars pour décrire finement le mouvement de son axe de figure. Nous discuterons en particulier de l'importance du paramètre  $\frac{MR^2}{C}$  sur le mouvement de cet axe à courte période (100 ans) et à longue période (500 000 ans).

\* \* \*