



**HAL**  
open science

# Modélisation des systèmes de référence terrestres

Patrick Sillard

► **To cite this version:**

Patrick Sillard. Modélisation des systèmes de référence terrestres. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1999. Français. NNT: . tel-01958566

**HAL Id: tel-01958566**

**<https://theses.hal.science/tel-01958566>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

12 SEP. 2000

(043)

SIL

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

EN  
ASTRONOMIE FONDAMENTALE, MÉCANIQUE CÉLESTE  
ET GÉODÉSIE

présentée par

**Patrick SILLARD**

**MODÉLISATION DES SYSTÈMES  
DE RÉFÉRENCE TERRESTRES**

– Contribution théorique et méthodologique –

soutenue à l'École nationale des sciences géographiques, Marne-la-Vallée, le  
mercredi 12 mai 1999, devant le jury composé de :

François BARLIER	président
Georges BALMINO	rapporteur
Gerhard BEUTLER	rapporteur
Bernard GUINOT	rapporteur
Jean LACROIX	examineur
Claude BOUCHER	directeur de thèse



99 033P 0089

à Geneviève,  
Nathalie et Romane

## AVANT PROPOS

Ce travail de thèse, parrainé par l'Institut géographique national (IGN), s'est déroulé au laboratoire de recherche en géodésie (LAREG) de l'École nationale des sciences géographiques (ENSG). Il a été encadré par M. Claude Boucher, directeur du LAREG.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Claude Boucher pour la qualité de son encadrement et l'entière liberté dont j'ai pu jouir pendant mes travaux. Je lui sais gré d'avoir cherché, au cours de ces quelques années, à me transmettre « une certaine idée de la géodésie ». J'espère que son enseignement aura porté ses fruits . . .

Ces travaux s'insèrent dans une activité dont la maturation s'est réalisée sur plus de dix années à l'IGN. M. Zuheir Altamimi en a été l'un des principaux acteurs. Son professionnalisme et sa bienveillante disponibilité ont constitué un soutien essentiel tout au long de ces trois ans. Je lui exprime ici ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier l'IGN et plus particulièrement M. Jean Denègre, directeur de l'ENSG, pour m'avoir offert des conditions de travail idéales.

Ce texte doit beaucoup à Mme Martine Feissel, et à MM. Zuheir Altamimi, Claude Boucher et Pascal Willis qui ont accepté d'en relire une version préliminaire, puis à MM. Georges Balmino, Gerhard Beutler et Bernard Guinot, rapporteurs de ce manuscrit.

Un grand merci également à M. François Barlier, président du jury, et à M. Jean Lacroix d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

M. Alexandre Pasquier est l'auteur des figures (I.1, I.12, I.14, IV.5).

Enfin, *last but not least*, mes plus affectueuses pensées vont à Nathalie, mon épouse, sans qui je n'aurais jamais terminé cette thèse et à qui je dois la frappe délicate (que d'équations!) d'une bonne partie de ce mémoire.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant propos</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>6</b>
<b>I Introduction</b>	<b>11</b>
1. La construction des systèmes de référence . . . . .	13
2. Les systèmes de référence pour l'astrométrie et la géodésie . . .	15
3. Les systèmes de référence terrestres dans l'histoire . . . . .	19
4. Les techniques de positionnement géodésique de haute précision	21
4.1. La télémétrie laser . . . . .	24
4.2. L'interférométrie à très longue base . . . . .	26
4.3. Le GPS . . . . .	27
4.4. DORIS . . . . .	28
4.5. Problématique de réduction géodésique des observations	29
4.5.1. La propagation dans l'atmosphère . . . . .	29
4.5.2. La dynamique des systèmes et compensation .	30
4.5.3. Performance du positionnement global . . . . .	31
5. Genèse et orientations de la thèse . . . . .	33
6. Problématique de cet ouvrage . . . . .	35
<b>II Les systèmes de référence terrestres en relativité générale</b>	<b>39</b>
1. Introduction . . . . .	40
2. Le système solaire et l'environnement terrestre en relativité gé- nérale . . . . .	51
3. Les échelles de temps terrestres . . . . .	57
4. La dynamique relativiste au voisinage de la Terre . . . . .	60
5. Le géoïde terrestre en relativité . . . . .	67
5.1. Les mesures d'horloges . . . . .	69
5.2. La gravimétrie . . . . .	69
6. Les changements de systèmes de coordonnées . . . . .	71

<b>III Définition statistique des systèmes de référence terrestres</b>	<b>75</b>
1. Introduction . . . . .	75
2. Quelques considérations sur la statistique des calculs géodésiques	76
3. Les réseaux libres . . . . .	78
3.1. Généralités . . . . .	78
3.2. Ajustement en réseau libre . . . . .	80
4. Transcription statistique et algébrique des invariants géométriques	83
5. S-transformations et théorie des erreurs internes . . . . .	85
6. Effet de système de référence . . . . .	87
7. Applications numériques . . . . .	88
7.1. Méthodologie . . . . .	88
7.2. Exemples . . . . .	91
7.2.1. GPS . . . . .	91
7.2.2. DORIS . . . . .	95
7.3. Apport de l'analyse en composantes principales à l'iden- tification de l'effet de système de référence . . . . .	97
 <b>IV Les systèmes de référence terrestres en géodynamique</b>	 <b>99</b>
1. Cinématique des systèmes terrestres . . . . .	100
1.1. Paramétrisation de la position de points de la surface ter- restre et échantillonnage . . . . .	100
1.2. Le système d'axes de Tisserand . . . . .	106
1.2.1. Introduction . . . . .	106
1.2.2. Présentation mécanique . . . . .	107
1.2.3. Mise en œuvre des conditions de Tisserand . . . . .	109
1.3. Discrétisation de la surface terrestre . . . . .	112
1.4. Application à l'ITRF96 . . . . .	113
2. Un exemple de phénomène non linéaire : les mouvements du géocentre . . . . .	117
2.1. Contexte . . . . .	118
2.2. Physique du phénomène . . . . .	119
2.3. La mesure géodésique . . . . .	121
2.4. Traitement de données . . . . .	121
2.4.1. Régression . . . . .	122
2.4.2. Analyse en ondelettes . . . . .	122
2.5. Résultats géodésiques . . . . .	123
3. Apport de l'ITRF à la géodynamique globale . . . . .	126
3.1. Principe d'estimation . . . . .	129
3.2. Application au champ de vitesses ITRF96 . . . . .	132
3.3. Principales conclusions de l'étude . . . . .	133

<b>V Boîte à outils des systèmes de référence terrestre</b>	<b>139</b>
1. Introduction . . . . .	140
2. Principe général de la compensation de repères de référence terrestres . . . . .	141
2.1. Généralités sur les moindres carrés . . . . .	141
2.2. Quel modèle pour quel traitement? . . . . .	144
3. Calcul des composantes de la variance . . . . .	148
3.1. Présentation de la méthode . . . . .	148
3.1.1. Estimateur par le degré de liberté . . . . .	150
3.1.2. Estimateur de Helmert . . . . .	153
3.2. Illustration numérique sur des populations indépendantes	156
3.2.1. Simulation . . . . .	156
3.2.2. Pratique . . . . .	157
4. Analyse et validation d'une compensation par moindres carrés	159
4.1. Détection des fautes de mesures . . . . .	159
4.2. Estimation robuste . . . . .	162
4.2.1. Généralités . . . . .	162
4.2.2. Algorithme de Huber . . . . .	166
4.2.3. Algorithme de Wilcox, Mallows et Schweppe (WMS) . . . . .	168
4.2.4. Performances numériques des algorithmes précédents . . . . .	169
5. Critères de qualité d'un repère de référence terrestre . . . . .	172
<b>Conclusion</b>	<b>177</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>180</b>
<b>Annexes</b>	<b>195</b>
<b>A Éléments de géométrie riemannienne</b>	<b>197</b>
1. Dualité et calcul de Ricci . . . . .	197
1.1. Dualité . . . . .	197
1.2. Calcul de Ricci . . . . .	198
2. Morceaux de surfaces et surfaces . . . . .	199
2.1. Espace tangent en un point d'un morceau de surface paramétrée . . . . .	200
2.2. Espace fibré tangent . . . . .	200
2.3. Variété riemannienne . . . . .	200
2.4. Isométries riemanniennes . . . . .	200
3. Coordonnées - Paramétrage d'une surface . . . . .	201
4. Lignes géodésiques . . . . .	201
5. Transport parallèle . . . . .	203

6.	Dérivée covariante . . . . .	205
7.	Interprétation en dimension 3 . . . . .	206
8.	Courbure . . . . .	207
9.	Identité de Bianchi et tenseur d'Einstein . . . . .	209
10.	Définition du gradient à une sous-variété . . . . .	211
<b>B</b>	<b>Un peu d'algèbre</b>	<b>213</b>



## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

Le principe de base de toute physique, c'est l'interaction : les objets matériels interagissent selon des lois (la physique) qui, plus que le comportement individuel, décrivent le comportement mutuel des individus. Cette physique qui s'intéresse aux interactions des individus auxquels elle s'applique est, en réalité, une physique relative. Rattacher le comportement mutuel d'un système physique à une référence entre parfaitement dans la logique de description relativiste de la physique. Elle s'impose lorsque la physique transfère son objet de l'explication (expression des lois) à l'observation. Dès lors surgit une nouvelle difficulté, purement métrologique. Elle réside dans la méconnaissance de la référence à laquelle on rapporte l'observation. C'est précisément parce qu'il y a observation de comportements relatifs que se pose le problème des **systèmes de référence** : comment rendre compte de phénomènes sans avoir bâti, au préalable, un référentiel dans lequel exprimer l'observation ? Ainsi, les systèmes de référence interviennent dans toute la physique observationnelle.

Les systèmes de référence terrestres constituent la composante terrestre d'un problème général de la physique.

Néanmoins, si la construction intellectuelle d'un schéma général est satisfaisante car elle permet de relier conceptuellement la théorie et le réel, elle ne doit pas occulter les spécificités du problème particulier auquel est dévolu ce texte. Les systèmes de référence terrestres ont pour objet la Terre et visent à décrire l'espace au voisinage de notre planète. On peut ici noter une spécificité des systèmes de référence : il est aisé d'expliquer leur finalité (ils permettent de positionner un point au voisinage de la Terre), mais il est plus délicat de décrire ce qu'ils sont. Le premier paragraphe de ce chapitre constitue une tentative, s'appuyant sur une théorie classique essentiellement rhétorique, de répondre à cet objectif.

— On peut distinguer, dans la physique moderne, plusieurs branches corres-

pendant à des ordres de grandeurs différents. Depuis l'infiniment petit et les quantas à l'univers infiniment grand de la relativité générale, elle ne s'applique pas de façon uniforme. Du moins, notre compréhension ne la perçoit pas d'une manière unifiée. On comprend, dès lors, que les ordres de grandeurs jouent un rôle primordial dans la définition du champ de la physique que l'on applique. Ainsi, la Terre et son environnement entrent-ils pleinement dans un cadre post-newtonien relativiste qui justifie que toute modélisation cohérente englobe l'intégralité de l'objet de cette physique. Les ordres de grandeurs typiques vont alors du millimètre (précision du positionnement géodésique à la surface de la Terre) à quelques dizaines d'unités astronomiques. Ces ordres de grandeurs correspondent à la physique post-newtonienne du système solaire pour laquelle les champs de gravité rencontrés sont faibles en regard de la vitesse de la lumière. Les disciplines ayant pour objet la métrologie de ces gammes d'ordre de grandeurs sont l'astrométrie et la géodésie. On proposera au paragraphe 2. une revue rapide de la modélisation des références entrant en jeu.

Puis on reviendra sur l'historique de la thématique des systèmes de référence. On constatera alors que, d'objets anecdotiques auxquels étaient exceptionnellement consacrés les trois premières pages de manuels de mécanique, ils ont été promus, dans l'imaginaire collectif, au rang de trou noir métrologique absorbant toute sorte de fautes de modélisation. L'importance nouvelle que ces sujets ont acquise récemment repose en grande partie sur l'extraordinaire précision des techniques spatiales de positionnement, dont l'exactitude reste manifestement en deçà de leur potentiel réel. C'est aussi une des vertus des systèmes de référence terrestre de le montrer, même si le remède n'est pas forcément à rechercher dans cette perspective.

Le paragraphe (5.) reprend la logique déductive qui a prévalu durant cette thèse et justifie les orientations choisies. Ce mémoire est construit selon une perspective essentiellement didactique que présente le dernier paragraphe de ce chapitre.

Un jour, un jeune étudiant qui commençait à s'interroger sur le sujet dialoguait avec un géodésien confirmé. Le chercheur, non sans ironie, affirmait que la « théorie » des systèmes de référence était fort simple et reposait seulement sur une transformation mathématique appelée similitude. Et le jeune étudiant d'acquiescer avec scepticisme pour se rendre compte, quelques années plus tard, que si le problème est fort simple en théorie – dans le monde modèle de la physique – en pratique – dans le monde de l'observation – le sujet se complique quelque peu.

Cette thèse est une modeste contribution que le jeune étudiant sceptique d'hier a plaisir à proposer au lecteur circonspect d'aujourd'hui.

## 1. La construction des systèmes de référence

Les systèmes de référence sont des êtres mathématiques qui rendent possibles l'expression de la dynamique (position, mouvement) dans l'espace physique. Par conséquent, leur existence est avant tout un postulat de la physique. Leur caractère axiomatique est d'ailleurs souligné par les diverses étapes qui correspondent à la construction intellectuelle d'un repère de référence. Ces étapes seront détaillées un peu plus loin dans ce paragraphe.

La physique identifie l'espace dans lequel nous vivons à des espaces vectoriels au sens mathématique du terme <sup>1</sup>. Cette conception de notre monde est une réduction — une modélisation — nécessaire au développement du savoir et de la compréhension qu'a l'homme de son univers. La notion de repère se déduit du concept d'espace vectoriel en associant à cet objet une structure affine de sorte qu'à tout point de l'espace affine, on associe des coordonnées caractéristiques de la position de ce point dans l'espace. A tout point est associé un  $n$ -uplet unique,  $n$  étant la dimension de l'espace.

En physique, le système de coordonnées est généralement appelé système de référence. On s'aperçoit, en réalité, que l'usage de coordonnées dans la physique, et en particulier dans la mécanique, correspond à un niveau de description inférieur. Les lois de la physique s'appuient avant tout sur une description vectorielle de l'espace. Les coordonnées apparaissent lorsque la mesure intervient. Ainsi, système de référence et mesure sont indissociablement liés.

Si l'objet des systèmes de référence est assez divers (système de référence d'espace — terrestre, céleste —, de temps, etc ...), des étapes communes à leur matérialisation peuvent être dégagées (Kovalevsky et Mueller, 1981; Kovalevsky et Mueller, 1988; Mueller, 1985; Boucher, 1990) :

- **Un système de référence idéal** : appuyé sur un espace affine euclidien muni d'une base orthonormée, le système idéal s'applique à une structure physique envisagée dans un certain cadre théorique. Le système de référence, attaché à la structure physique modélisée dans le cadre théorique précédent, vérifie un ensemble de conditions le définissant de manière unique.

Le concept de système idéal est en réalité très vague car à aucun moment il n'est précisé, dans un système idéal, le détail du cadre théorique dans lequel on se place. Le concept se veut flou car les choix dont sa matérialisation découle relèvent du concept complémentaire de système conventionnel.

Par exemple, un système terrestre idéal sera centré au centre des masses de la Terre, en rotation avec la Terre (i.e. sans rotation résiduelle de la

<sup>1</sup> à des espaces euclidiens, pour être précis

Terre par rapport au système terrestre). Ce point sera détaillé un peu plus loin.

- **Un système de référence conventionnel** : appuyé sur un système idéal, le système conventionnel consiste en la description exhaustive des modèles et paramètres entrant en jeu dans la physique de la structure à laquelle est attachée le système, ainsi que le lien qui existe entre cette structure et les coordonnées.

A ce niveau, le système de coordonnées est intégralement décrit, mais pas nécessairement accessible. Il reste donc une dernière étape qui, selon les cas, peut être omise, et qui consiste à réaliser, par l'intermédiaire de mesures, le système conventionnel précédent.

- **Un repère de référence conventionnel** : s'appuyant sur un système conventionnel, le repère conventionnel consiste à donner un jeu de coordonnées cohérentes à un ensemble d'événements liés à la structure physique sous-jacente. L'élaboration d'un tel repère repose naturellement sur des mesures réduites aux coordonnées dans une modélisation compatible avec le système conventionnel choisi.

Supposons que l'ensemble des coordonnées nécessaires pour repérer un événement au voisinage de la Terre soit au nombre de 4  $(x, y, z, t)$ . Réaliser un système conventionnel (i.e. élaborer un repère conventionnel) consistera à donner des coordonnées cohérentes, au regard des modèles choisis dans le système conventionnel, à des points de la surface terrestre, ou à des satellites de la Terre par exemple. Ces coordonnées seront cohérentes dans le sens où la physique (i.e. le repère conventionnel) va lier deux groupes de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  par l'intermédiaire d'une réduction cohérente des mesures le concernant.

Cette construction est essentiellement rhétorique : en pratique, c'est à dire du point de vue métrologique, construire une référence, c'est élaborer un étalon au travers de mesures aussi précises que possible, et l'adopter comme « vrai » tant que les progrès technologiques ne nécessitent pas son abandon en tant que référence. Il est déjà arrivé, au cours des siècles, que le système de mesure ou que la structure physique auxquels est attaché un étalon s'avèrent moins stables ou moins précis que les phénomènes auxquels ils devaient servir de référence, de sorte que l'étalon ne remplissait plus son rôle de référence. Ceci s'est notamment produit pour les échelles de temps.

Néanmoins, une telle construction est utile car la principale difficulté des systèmes de référence repose sur la façon dont ils sont introduits dans nos théories physiques : ils relèvent d'un postulat et apparaissent dans les équations de façon implicite. Leur concrétisation qui vise à imposer l'usage d'un référentiel commun à la modélisation de toutes les expériences physiques afin de les rendre comparables entre elles, passe donc par des choix de modèles et de pro-

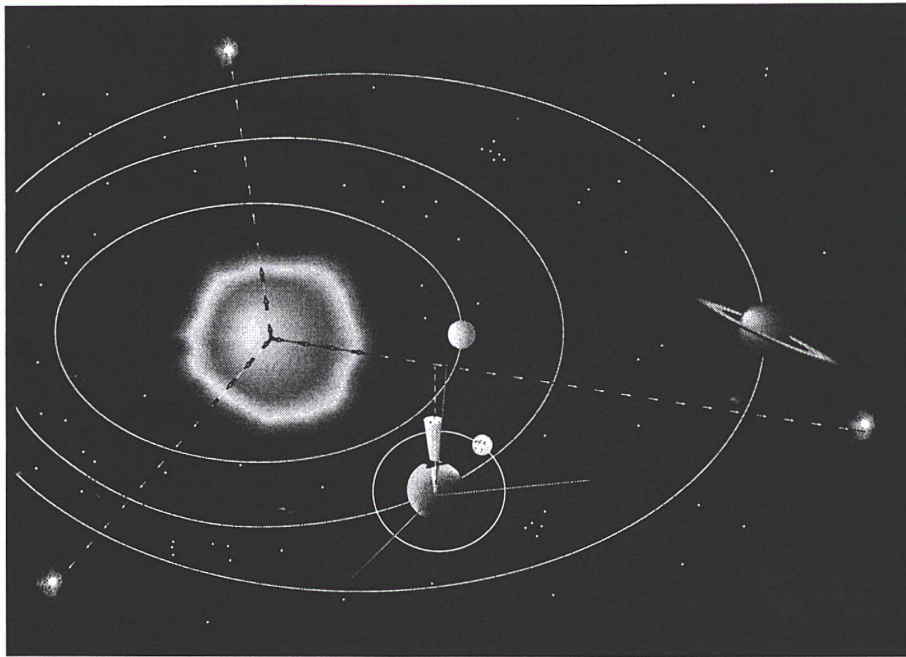


FIG. I.1: Les systèmes de référence du système solaire

cessus de réduction d'observations pour finalement aboutir à des coordonnées. C'est ce schéma logique que la construction précédente vise à formaliser.

## 2. Les systèmes de référence pour l'astrométrie et la géodésie

On peut considérer, ainsi que le suggère I. Mueller (Mueller, 1985), que pratiquement, seuls deux systèmes conventionnels suffisent pour les besoins de la mécanique spatiale (i.e. la mécanique du système solaire) :

- un système conventionnel inertiel [SCI] qui s'appuie sur une structure physique composée d'un ensemble de radio-sources extragalactiques. Ces radio-sources sont les objets les plus éloignés de l'univers connu et ne possèdent pas de mouvement apparent, ce qui en fait des objets fixes et parfaitement adaptés à la construction d'un référentiel quasi-inertiel au sens de la relativité générale. Un tel référentiel qui ne possède pas d'accélération d'entraînement (inertie), dans une vision newtonienne de la physique, est appelé « inertiel ».
- un système terrestre conventionnel [STC] centré au centre des masses de la Terre et co-mobile avec celle-ci (en rotation et en déplacement du centre des masses dans le système solaire).

□ La Terre est animée, au premier ordre, d'un mouvement elliptique autour du centre des masses du système solaire, de période un an et d'un mouvement

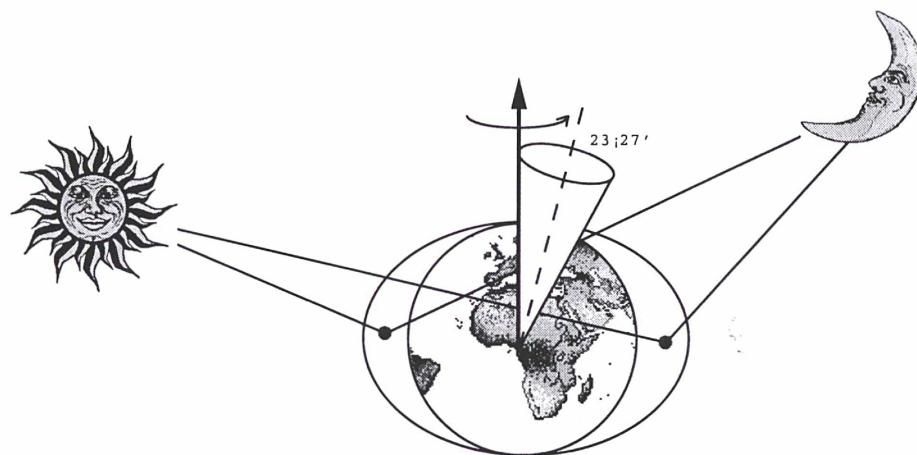


FIG. I.2: La précession et la nutation

diurne de rotation.

En raison de la forme ellipsoïdale de la Terre et de l'attraction non symétrique de la Lune et du Soleil sur le renflement de la Terre, un effet de couple s'exerce et génère un mouvement conique de l'axe de rotation, appelé précession luni-solaire, de période 26000 ans. L'obliquité de l'orbite lunaire sur l'équateur est sujette à de grandes fluctuations dues à la rétrogradation du nœud ascendant de l'orbite par rapport à l'écliptique, de période 18.6 ans. Ce phénomène est la cause principale de perturbations de la position du pôle terrestre appelée nutation. Elle a pour période principale 18.6 ans et pour amplitude  $9.21''$  en obliquité et  $17.23''$  en longitude du nœud (Danjon, 1980).

Enfin, en raison de la structure plastique et fluide de la Terre, des phénomènes géophysiques engendrent un mouvement spiralé du pôle appelé polhodie. Ce mouvement est également un signal à dominantes périodiques de 14 mois (terme de Chandler) et 12 mois (terme saisonnier). Son amplitude est de l'ordre de  $0.1''$ , soit 3 m à la surface de la Terre (cf. figure I.3).

Enfin, la vitesse de rotation de la Terre est irrégulière. Un « temps » lui est attaché (cf. §3. chapitre II), appelé UT1. UT1 n'est en réalité pas suffisamment stable pour se prévaloir de l'appellation d'échelle de temps mais est suffisamment important pour que le temps légal lui soit attaché : en effet, le temps universel coordonné, UTC, est défini comme étant décalé du TAI (temps atomique international) d'un nombre entier de secondes de sorte que  $|UTC - UT1| < 0.9s$ . UT1 est le temps qui rythme la vie des hommes et il est donc l'objet d'attentions et d'études particulières.

Tous ces mouvements peuvent être représentés sous forme de rotations de sorte qu'analytiquement, le passage du système céleste au système terrestre

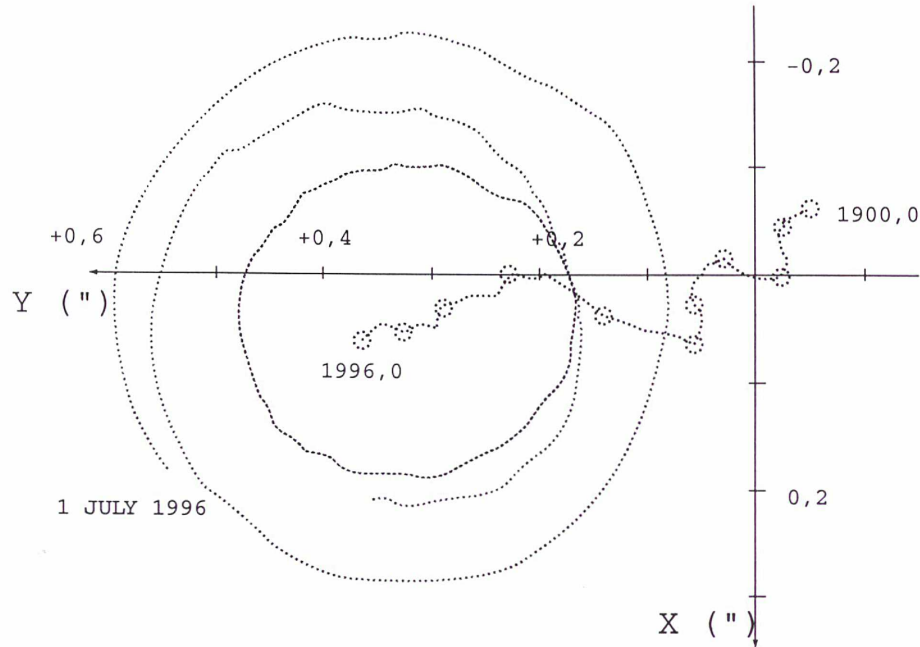


FIG. I.3: La polhodie représentée dans le plan tangent au pôle terrestre; la courbe débutant en 1900 et se terminant en 1996 correspond à la position moyenne annuelle pôle

s'écrit à l'aide de trois matrices de rotation (Zhu et Mueller, 1983) :

$$[STC] = SNP[SCI] \quad (I.1)$$

où  $P$  est la matrice de rotation liée à la précession,  $N$  la matrice liée à la nutation et  $S$  est la rotation de la Terre (mouvement du pôle -polhodie- et temps sidéral).

À l'heure actuelle, le système conventionnel inertiel est appelé système international de référence céleste (ICRS). Il est réalisé, dans le domaine des ondes radio, par un catalogue de 600 radio-sources appelé repère de référence céleste international (ICRF, International Celestial Reference Frame (Ma et al., 1998; Ma et Feissel, 1997)). Une illustration de la distribution de ces radio-sources est donnée à la figure (I.4). La direction de ces radio-sources est mesurée à l'aide de la technique ultra précise interférométrie à très longue base (VLBI).

Dans le domaine optique, le catalogue Hipparcos, qui donne la direction d'étoiles dans la galaxie, est une réalisation de l'ICRS (Kovalevsky et al., 1997).

Le système terrestre conventionnel est appelé système international de référence terrestre (ITRS — International Terrestrial Reference System). Il est réalisé par un jeu de coordonnées cartésiennes et vitesses de déplacement de stations observées par les techniques les plus précises actuellement disponibles pour le positionnement géodésique : VLBI, Global Positioning System (GPS), télémétrie laser sur satellite (SLR) et le système français de Détermination d'Orbite et

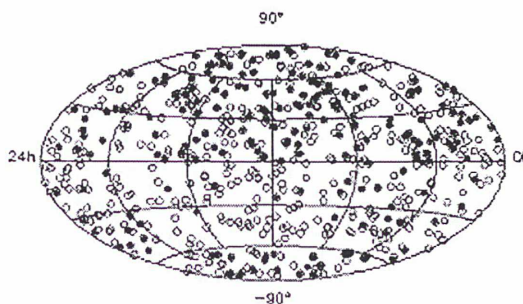


FIG. I.4: les radio-sources de l'ICRF

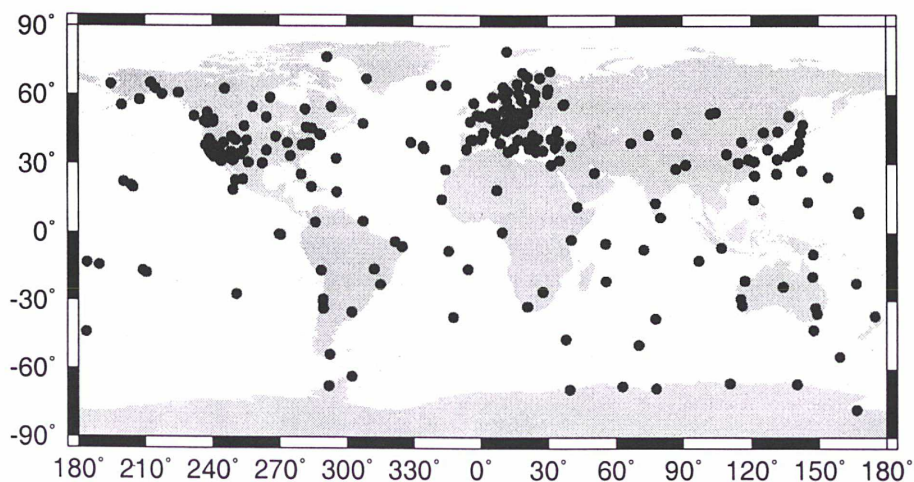


FIG. I.5: les sites de l'ITRF96

Radiopositionnement Intégrés par Satellite (DORIS). La dernière réalisation en date, l'ITRF96 (Boucher et al., 1998; Sillard, 1998a) (cf. figure I.5) donne les positions et vitesses de 520 stations réparties dans 290 sites de la surface terrestre.

Enfin, conformément à la formulation (I.1), le lien ne serait pas complet si l'ensemble des matrices n'était pas spécifié. Le modèle de précession-nutation (matrices  $P$  et  $N$ ) associé à l'ICRS et à l'ITRS est le modèle décrit dans les conventions du service international de la rotation terrestre (IERS) (McCarthy, 1996). La rotation de la Terre est une quantité observée quotidiennement par les techniques participant aux activités de l'IERS, déjà évoquées, et synthétisées par l'IERS (Feissel et Mignard, 1998).



### 3. Les systèmes de référence terrestres dans l'histoire

Jusqu'à l'avènement récent de la géodésie spatiale, la réalisation cohérente de systèmes terrestres et célestes était une affaire d'astronomes : la rotation de la Terre était observée relativement aux étoiles et l'ensemble de ces informations étaient synthétisées au Bureau international de l'heure (BIH). Les activités du BIH ont perduré sous cette forme jusqu'à la constitution en 1980 d'un groupe de travail commun à l'union astronomique internationale (UAI) et à l'association internationale de géodésie (AIG), appelé COTES, en vue de l'établissement d'un repère terrestre conventionnel dans le contexte du projet MERIT (Monitor Earth Rotation and Intercompare the Techniques of observations) lancé par l'UAI en 1978. Cette campagne avait pour but de confronter les résultats obtenus par les techniques les plus précises à l'époque (VLBI, astrométrie optique, télémétrie laser sur la Lune, télémétrie laser sur satellite, poursuite de satellites TRANSIT), et il a donc été tenté de connecter les repères terrestres et la rotation de la Terre obtenue par ces diverses techniques (Boucher et Feissel, 1983a).

Les premières tentatives de connexion des repères (Boucher, 1984) devaient s'avérer pertinentes dans l'idée, de sorte qu'il fut décidé que le BIH devait réaliser un repère terrestre cohérent avec la détermination de la rotation de la Terre qu'il effectuait déjà. Le système terrestre, appelé BTS (BIH Terrestrial System) s'appuyait sur les observations géodésiques et astrométriques utilisées dans le projet MERIT. Quatre réalisations du BTS ont été produites entre 1984 et 1988 (Altamimi, 1990) : BTS84, 85, 86, 87.

Puis en 1988, fut créé le service international de la rotation terrestre (IERS — International Earth Rotation Service) dont les objectifs reprenaient ceux du BIH, dissous, en focalisant l'activité sur la cohérence des déterminations du système céleste, du système terrestre et de la rotation de la Terre. Ce service est un service scientifique commun de l'UAI et de l'UGGI. Le bureau central est hébergé à l'Observatoire de Paris et à l'Institut géographique national. Le Bureau des longitudes était aussi partie prenante dans la proposition initiale. L'IERS a la charge de maintenir et réaliser les références globales. Il produit quotidiennement les paramètres d'orientation de la Terre et annuellement le repère terrestre ITRF sur la base de contributions des grands laboratoires de géodésie spatiale mondiaux.

Le système associé au premier ITRF calculé (l'ITRF-88) est appelé système de référence terrestre de l'IERS. L'ITRF88 comportait 158 stations réparties dans 96 sites (cf. I.6) (Altamimi, 1990).

Peu à peu, le nombre de stations observées ainsi que la méthodologie ont évolué. Ainsi, l'ITRF91 reposait sur 239 stations réparties sur 130 sites (cf. I.7) (Altamimi et al., 1993) et comportait pour la première fois des vitesses de déplacement de stations (Boucher et Altamimi, 1993). Ces vitesses étaient alors

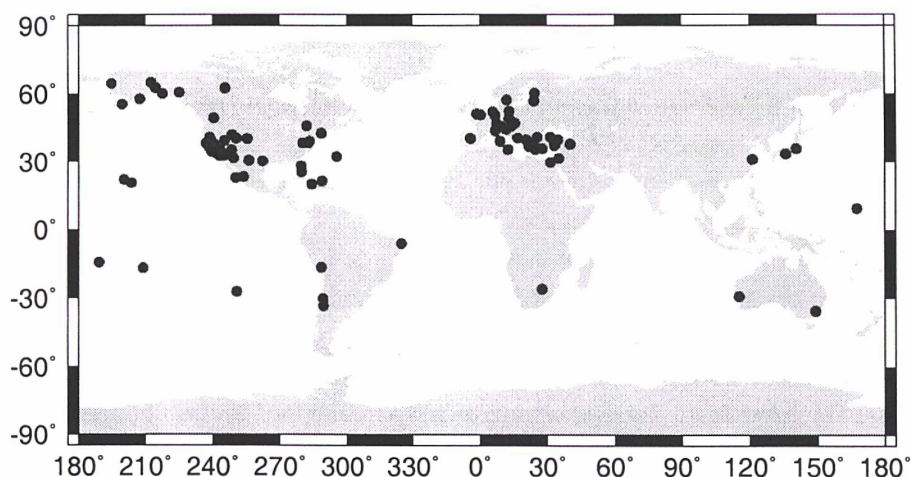


FIG. I.6: Les sites de l'ITRF88

combinées séparément des coordonnées. Les variances utilisées pour les observations étaient diagonales. L'ITRF94 a, quant à lui, été l'occasion d'utiliser pour la première fois des variances complètes de jeux de coordonnées (Boucher et Altamimi, 1996; Boucher et al., 1996).

Combiner de l'information provenant de sources statistiques différentes a toujours constitué un problème délicat pour l'IERS : les variances transmises par les laboratoires et associées aux coordonnées et vitesses sont difficiles à estimer et montrent avant tout l'auto-cohérence de ces données. La confrontation des données diverses nécessite un étalonnage des variances. La technique d'étalonnage utilisée pour les ITRF était empirique jusqu'à l'ITRF96. Le présent ouvrage (chap. V) évoque une technique mise en œuvre pour ce besoin précis et qui est sans doute l'une des causes d'amélioration significative entre les versions 94 et 96 de l'ITRF (Sillard, 1998a) – comparer les figures I.9 et I.10 –.

On trouvera à la figure (I.8) un histogramme de l'erreur sphérique des ITRF successifs<sup>2</sup>.

L'avenir des réalisations du système international de référence terrestre se situe selon deux directions :

- d'une part, il conviendrait de réfléchir à la représentation que l'on adopte d'une réalisation de système de référence. Il devient clair que les phénomènes qui régissent la position instantanée d'une station de la surface terrestre sont mal connus et qu'il faut adopter une modélisation qui laisse la possibilité de décrire des variations non prévisibles des positions. Une représentation en coordonnées-vitesses ne permet pas cette description.

On devrait donc tendre vers des séries temporelles de positions de sta-

<sup>2</sup>L'erreur sphérique d'un point est donnée par  $\sigma_{sph} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$  où les  $\sigma_i$  sont les écarts-types sur chacune des composantes du vecteur position  $(x, y, z)$ .

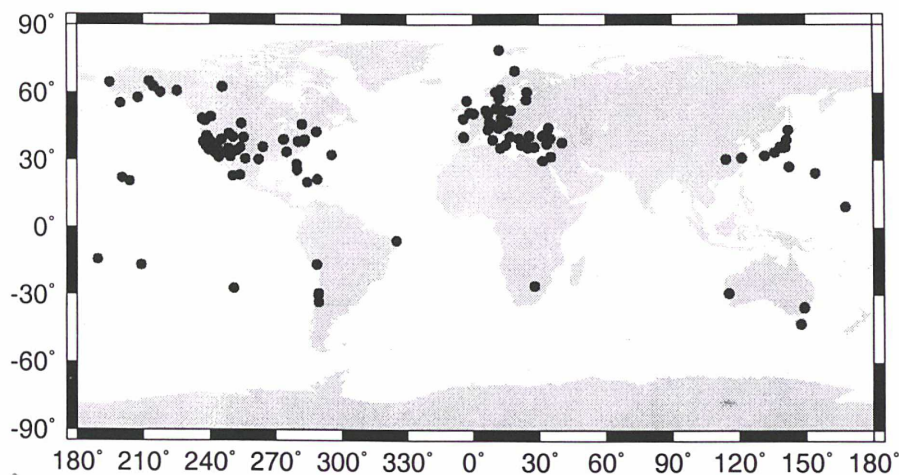


FIG. I.7: Les sites de l'ITRF91

tions qui permettent davantage de souplesse que le modèle actuel.

- d'autre part, il devient important, après 10 ans d'existence de l'IERS, d'envisager à nouveau<sup>3</sup> l'intégration de la rotation de la Terre dans les calculs du système terrestre. A l'heure actuelle, système terrestre et rotation de la Terre sont en effet déterminés de façon disjointe, ce qui engendre des incohérences inévitables avec un tel processus. Les paramètres d'orientation de la Terre sont en réalité déterminés par la géodésie spatiale exactement dans la même problématique que les coordonnées instantanées des stations. Il est urgent de connecter à nouveau ces deux types d'information dans les références de l'IERS.

#### 4. Les techniques de positionnement géodésique de haute précision

Le thème des systèmes de référence terrestre s'est développé conjointement à l'essor des techniques de positionnement géodésique global : en 25 ans, un facteur 100 en précision de positionnement (et en exactitude) a été gagné, faisant de la géodésie la discipline d'observation des déformations de la Terre.

Les techniques de positionnement ont débuté leur évolution dans les années 1960 avec l'apparition des techniques spatiales : la télémétrie laser sur satellite et l'interférométrie à très longue base (VLBI). Puis, issues des techniques Doppler de positionnement développées pour l'armée américaine dans les années 1970 (système TRANSIT), de nouvelles techniques radio-électriques ont vu le jour au milieu des années 1980 : les systèmes américain, GPS, et russe,

<sup>3</sup>Le système terrestre et la rotation de la Terre furent calculées, au sein d'un même processus d'estimation, durant les quelques années du BTS.

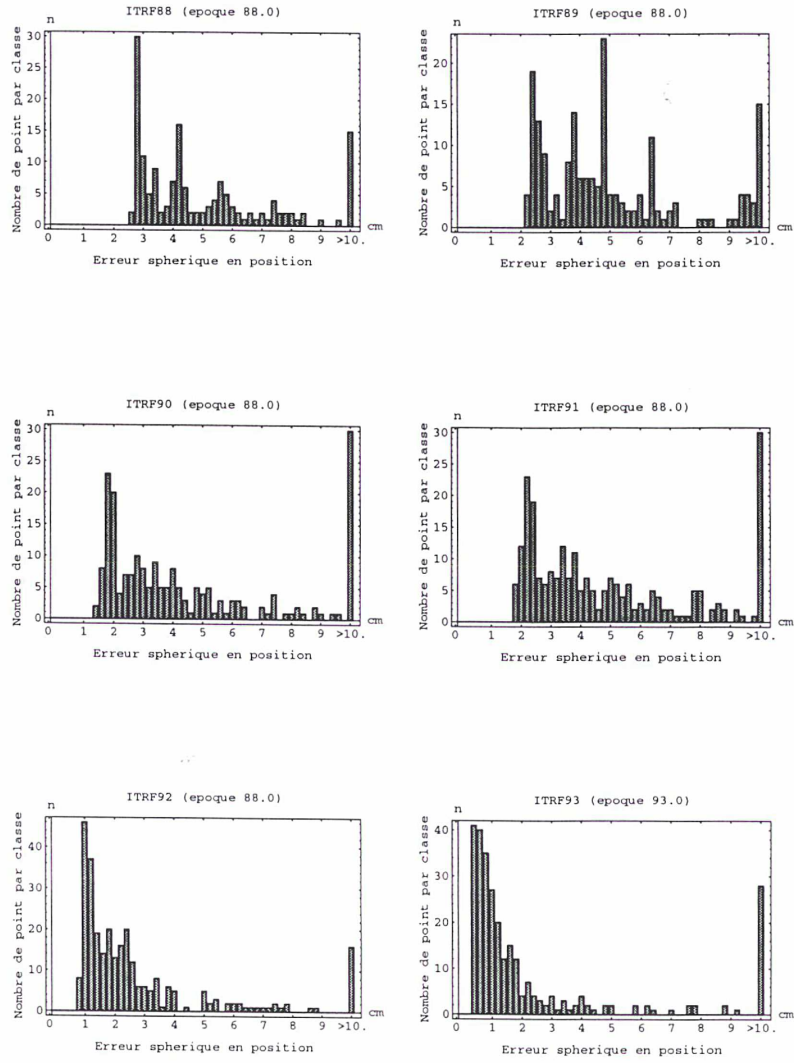


FIG. I.8: Histogramme de l'erreur sphérique des différents ITRF

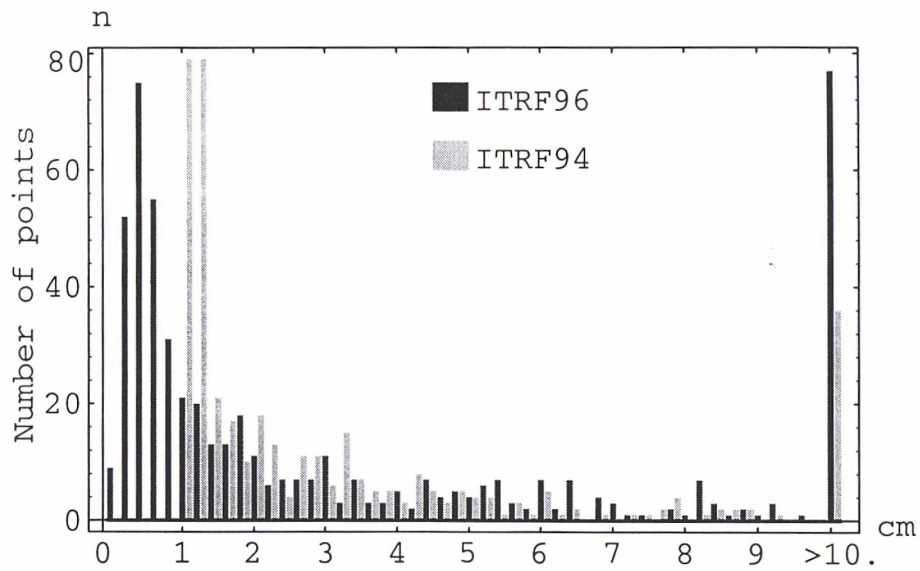


FIG. I.9: Histogramme de l'erreur sphérique des ITRF94 et 96 époque 1993.0

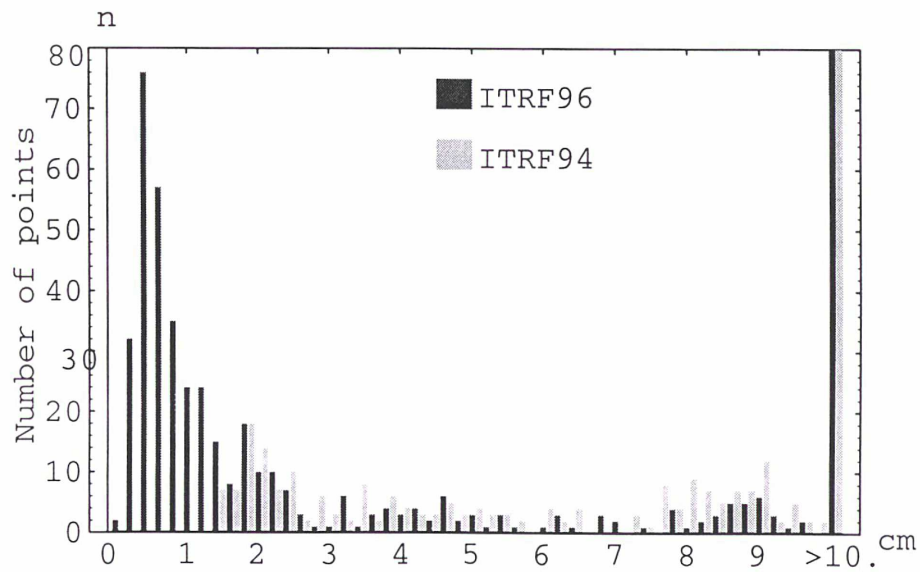


FIG. I.10: Histogramme de l'erreur sphérique des ITRF94 et 96 époque 1999.9

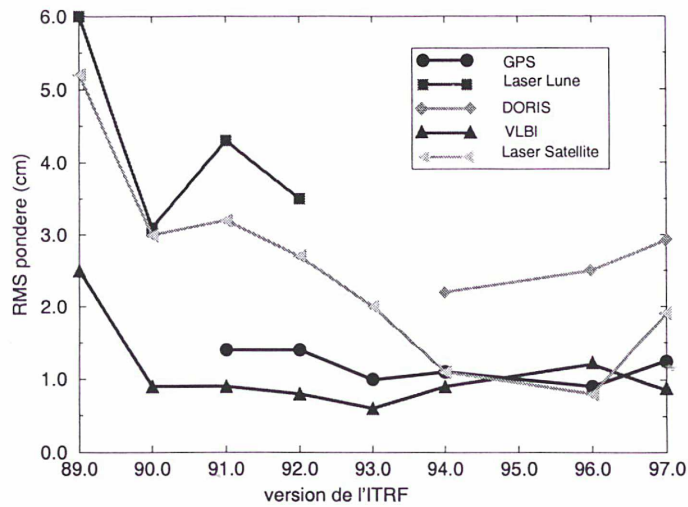


FIG. I.11: Evolution de la précision du positionnement géodésique par technique dans l'ITRF

GLONASS, s'appuient sur des constellations de satellites et sont, en premier lieu, destinés à la navigation ; le système français DORIS vise les applications d'orbitographie de précision et, dans la même classe de techniques, le système allemand PRARE se place en concurrent récent de la technique DORIS.

Sur le plan du positionnement global, les techniques aujourd'hui employées, notamment pour le calcul du repère international de référence terrestre (ITRF) sont le VLBI, la télémétrie laser sur satellite, GPS et DORIS (cf. figure I.12). Le fonctionnement de ces quatre techniques est succinctement décrit aux paragraphes suivants, ainsi que la réduction des observations dans un but géodésique.

#### 4.1. La télémétrie laser

La télémétrie laser consiste à tirer à l'aide d'un laser sur une cible munie de réflecteurs qui renvoient le rayon incident dans la direction d'émission. La puissance du rayon décroît en raison inverse du carré de la distance parcourue par l'onde lumineuse, donc en puissance quatrième pour l'aller-retour. Les cibles sont embarquées soit sur des satellites géodésiques en orbite autour de la Terre à une altitude de 800 km (satellite STELLA) à 6000 km (satellite LA-GEOS), soit sur la Lune. La puissance des lasers (Kovalevsky, 1990) utilisés est de l'ordre du gigawatt émise dans la gamme de longueur d'onde du vert

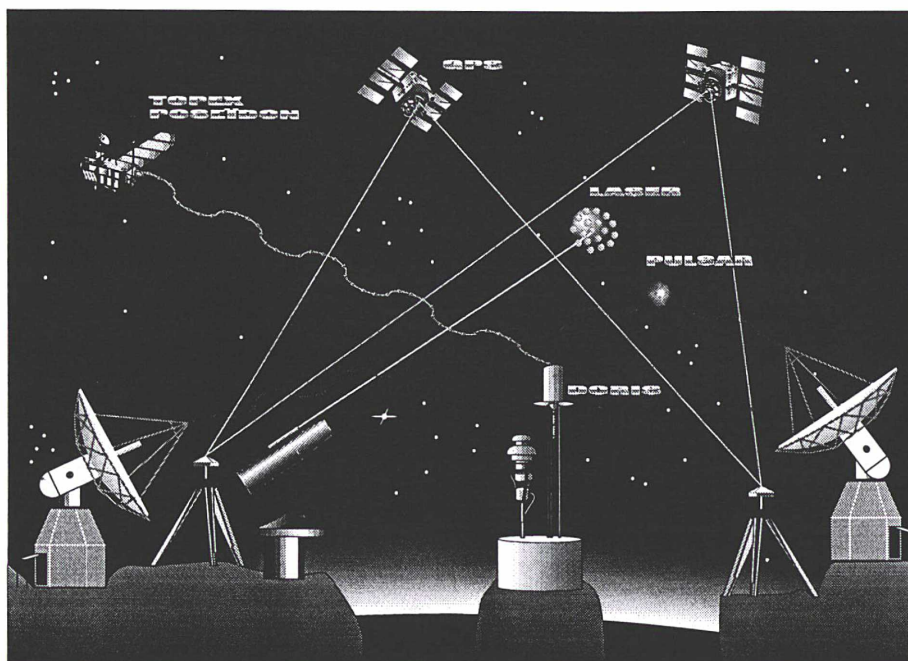


FIG. I.12: Les techniques de positionnement géodésique

( $0.54\mu\text{m}$ ). Le rayonnement reçu à une distance de 1000 km a une puissance de  $10^{-4}$  watts. Sa détection nécessite l'usage d'une station d'observation spécialisée. A cela s'ajoutent les déperditions dues à l'atmosphère. Dans le cas de la Lune, la perte d'énergie correspond à un facteur de  $10^{17}$ . Ainsi, le télescope 1.5 m de diamètre consacré au tir laser Lune de la station de Grasse (Plateau du Calern en France) est utilisé à la fois pour l'émission et pour la réception (Veillet, 1985). Ce télescope tire sur des réflecteurs posés sur la surface lunaire par les missions Apollo XI, XIV et XV (1969–1970), ainsi que par deux sondes soviétiques (1970–1973). Seuls trois sites dans le monde mènent des campagnes quasi-permanentes de tir sur la Lune : Grasse (France), Mc Donald (USA) et Haleakala (Hawaï).

Outre les applications au positionnement géodésique, la technique laser est intéressante pour la connaissance du champ de gravité de la Terre : en effet, la dynamique du mouvement des satellites utilisés en télémétrie laser et celle de la Lune sont dominées par l'action du champ de gravité terrestre. L'observation durant une très longue période du comportement de ces objets sous l'action du champ de gravité permet de connaître le champ de gravité et ses variations de façon très précise (Cazenave et Feigl, 1994; Gegout et Cazenave, 1993; Exertier, 1988).

L'extension de cette technique est, à l'ère du GPS, freinée par les coûts de mise en œuvre, ainsi que par l'incapacité de la technique à fonctionner lorsque

la couverture nuageuse est abondante.

#### 4.2. L'interférométrie à très longue base

L'interférométrie à très longue base (VLBI, Very Long Baseline Interferometry) a été développée durant les années 1960, avec l'objectif initial de comprendre la physique de noyaux actifs de galaxies et des quasars. Elle est issue des progrès de la radio-astronomie. Le principe de l'interféromètre consiste à recevoir un même signal en deux stations constituant les extrémités d'une base interférométrique, et par l'analyse des retards de réception déduits des interférences sur plusieurs bases, en déduire la géométrie du problème (Charlot, 1989; Gontier, 1992).

Cette technique, développée principalement pour les besoins de l'astrophysique, est aussi utilisée à des fins astrométriques. Un point délicat expérimentalement réside dans la datation des signaux reçus aux deux stations. La méthode qui dans un premier temps a prévalu, consistait à observer, au sein d'un même site, des objets galactiques ou extra-galactiques à l'aide de radiotélescopes. Les deux récepteurs de l'interféromètre étaient reliés à une même horloge *in situ*, de sorte que la datation commune des observations ne posait pas de problème particulier. La résolution d'un interféromètre dépend de la distance entre les éléments qui le composent. Observer au sein d'un même site limitait d'emblée l'extension, donc la résolution de l'interféromètre. Or rien ne s'opposait à étendre la ligne de base de l'interféromètre à la terre entière, si ce n'est le fameux écueil de la datation. Le problème fut résolu par l'utilisation d'horloges atomiques qui permettent de dater convenablement l'arrivée des signaux vus par des radiotélescopes répartis sur toute la Terre. Ainsi est née la technique fondamentale de l'astrométrie : le VLBI. Cette technique est fondamentale à plus d'un titre : d'une part, elle reste la plus précise, encore aujourd'hui, en matière de positionnement, quoique le GPS s'érige peu à peu en concurrent direct ; d'autre part, cette technique est la seule qui permette la réalisation d'un système de référence local (au sens de la relativité générale), valable pour toutes les applications de trajectographie dans le système solaire. En effet, elle s'appuie sur des objets extra-galactiques, les quasars, dépourvus de mouvement apparent depuis le système solaire. Ces objets permettent donc, par l'intermédiaire du VLBI, de définir des directions fixes dans l'espace, concrétisant ainsi le paradigme newtonien d'espace absolu.

Une onde sphérique est émise depuis l'infini et l'analyse de retards  $\delta\lambda(t)$  déterminés à des instants différents par corrélation des signaux parvenus en  $A$  et  $B$  (figure I.13) permet de déduire le vecteur  $\vec{AB}$  dans le système terrestre. Cette technique est indépendante du choix de l'origine du système terrestre.

Du point de vue technologique, cette technique est handicapée, dans son développement, par la lourdeur des moyens à mettre en œuvre : les antennes



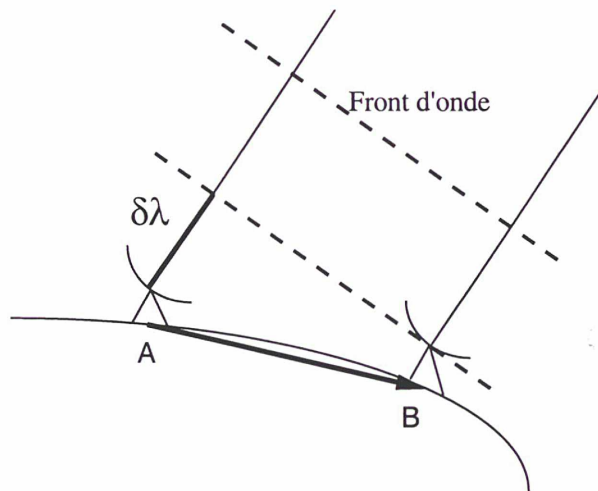


FIG. I.13: le principe de l'interférométrie

à déployer font plusieurs mètres de diamètre et les composants électroniques fragiles.

#### 4.3. Le GPS

La technique GPS (Global Positioning System) est apparue dans le milieu des années 1980 (Beutler et al., 1986; Beutler et al., 1987; Willis, 1989) avec le développement du programme satellitaire de navigation NAVSTAR/GPS pour les besoins de l'armée américaine. Le segment spatial du système comprend 24 satellites répartis sur 6 plans orbitaux inclinés de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur terrestre (cf. figure I.14).

Les satellites émettent un signal porteur d'éléments géométriques (éphémérides du satellite, temps, ...) qui, décodés au sol par un système adéquat, sont utilisés par triangulation pour en déduire la position du récepteur. La constellation est telle que plusieurs satellites sont toujours simultanément visibles d'un point quelconque de la Terre, rendant la triangulation possible. Le GPS étant un système militaire, le message de radionavigation est brouillé pour les utilisateurs civils. Par ailleurs, la précision en temps réel, même en mode décodé, n'atteint jamais le mètre, de sorte que les applications géodésiques ne peuvent s'envisager dans cette perspective. Les géodésiens, en abandonnant le principe du temps réel, s'offrent la possibilité de comparer les signaux reçus en plusieurs points, ce qui permet de construire des observables dans lesquels la position du satellite devient une inconnue ou un terme du second ordre.

— Pour plus de détails sur le mode opératoire et les différentes stratégies envisageables, le lecteur est invité à se reporter à (Botton et al., 1997).

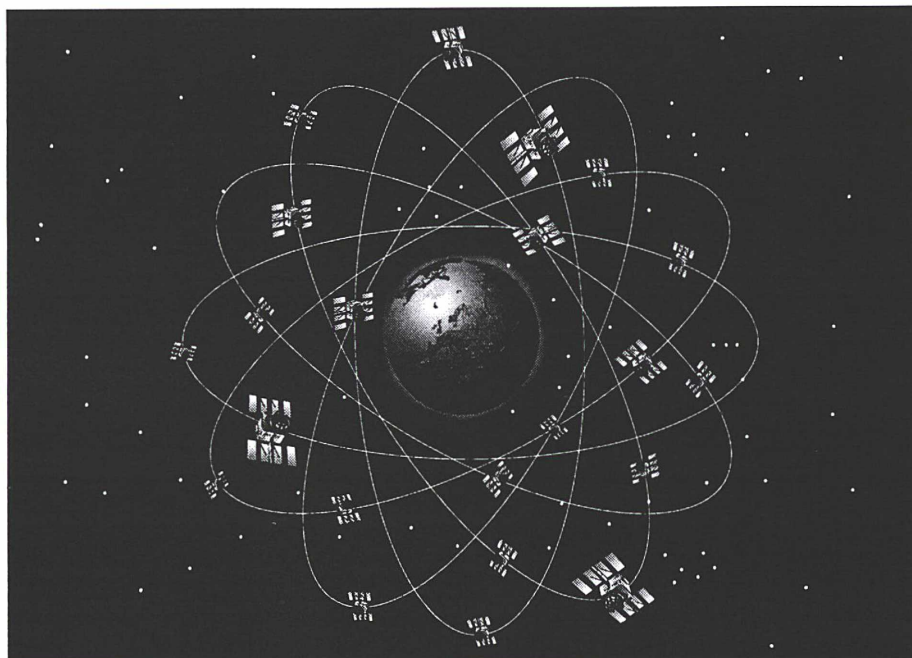


FIG. I.14: la constellation des satellites GPS

#### 4.4. DORIS

Le système français DORIS a été développé par le Centre national d'études spatiales (CNES) pour les besoins de l'orbitographie fine du satellite océanographique TOPEX-POSEIDON (Cazenave et al., 1992; Valette, 1992; Soudarin, 1995; Willis, 1996; Escudier et al., 1998). Pour ce faire, il fallait disposer d'un système centralisé, c'est-à-dire dans lequel les observations étaient facilement accessibles pour les calculs. Le principe d'un réseau de balises bien distribuées à la surface de la Terre et émettant vers un récepteur embarqué sur le satellite à poursuivre était retenu en conformité avec le critère précédent. Le système DORIS fonctionne selon le principe de l'effet Doppler et la mesure de base donne accès à la vitesse radiale du satellite par rapport à la station émettrice. Les satellites porteurs du système DORIS sont peu nombreux à l'heure actuelle : outre TOPEX-POSEIDON, le système est présent sur les satellites SPOT (SPOT2, SPOT4, ...). Il sera également embarqué sur les satellites JASON1 (2000), ENVISAT (2000), ... Le sous-produit de l'orbite de ce satellite est un repère de référence terrestre de grande qualité, en particulier du fait de l'excellente distribution du réseau de poursuite. La distribution inhomogène des stations d'observation des réseaux géodésiques globaux est une réalité dont la cause échappe à tout critère scientifique : les coûts de fonctionnement des systèmes de mesures restent élevés et l'investissement n'est encore massivement consenti que dans les pays industrialisés. Ce n'est pas le cas du réseau DORIS,

dimension particulièrement soignée dès la conception du système : l'Institut géographique national a assuré, en coopération avec le CNES, le déploiement des balises et ce réseau d'une cinquantaine de stations est encore aujourd'hui, après une dizaine d'années d'existence de DORIS, un point fort du système par rapport aux autres techniques géodésiques.

#### 4.5. Problématique de réduction géodésique des observations

On peut identifier, au delà des particularités de chaque technique évoquée précédemment, des points communs dans la réduction des observations. Si le principe physique de l'observation est caractéristique de la technique, elles reposent toutes sur la réception de signaux électromagnétiques se propageant dans un milieu unique : l'atmosphère terrestre. Le paragraphe (4.5.1.) est consacré à cet aspect.

Les techniques GPS, DORIS et laser s'appuient sur des satellites de la Terre dont le mouvement est régi par les lois de la mécanique. Or ce sont les observations qui permettent à la fois de connaître la trajectoire du satellite et la position des stations de poursuite. Il s'ensuit que la compensation de ce type d'observations repose sur un schéma commun à toutes ces techniques qualifiées de « dynamiques ». Ce schéma est évoqué au paragraphe (4.5.2.).

Pour finir, les performances en matière de positionnement à la surface de la Terre pour chacune des techniques seront évaluées à partir des résultats de l'ITRF96.

##### 4.5.1. La propagation dans l'atmosphère

Dans le domaine radio, deux milieux génèrent des perturbations dans l'atmosphère :

- l'**ionosphère** : c'est un milieu plasmatique situé entre 100 et 1000 km d'altitude (cf. figure I.15). On montre, au premier ordre, que l'indice de réfraction de ce milieu est fonction du contenu électronique au point considéré et proportionnel à l'inverse du carré de la fréquence du signal (Clemmov et Dougherty, 1990). Cette dernière propriété permet de s'affranchir de l'effet ionosphérique par combinaison linéaire d'observations à deux fréquences. Ce principe a été adopté pour les techniques de géodésie spatiale et conduit à négliger un terme de troisième ordre – par rapport à l'inverse de la fréquence – qui, pour des signaux de fréquence proche du MHz est de l'ordre de 0.1mm. Par contre, on a pu montrer (Sillard et Boucher, 1997) que cette approximation a eu des conséquences importantes (quelques dizaines de centimètres) lorsque les fréquences du signal étaient plus faibles : dans le cas du système TRANSIT où les fré-

quences sont 150 et 400 MHz, la correction due au troisième ordre atteignait le mètre.

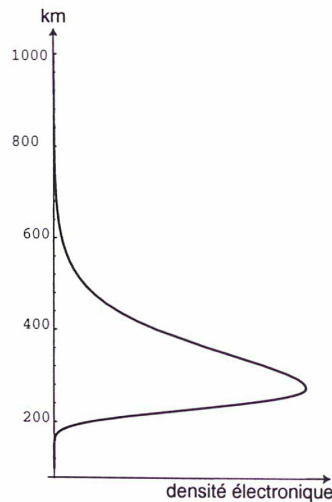


FIG. I.15: La densité électronique de l'ionosphère en fonction de l'altitude

- **la troposphère** : c'est un milieu gazeux situé dans la couche d'atmosphère basse (altitude inférieure à 10 km), et dont l'indice de réfraction se déduit des considérations usuelles sur la cinétique des gaz et la thermodynamique (Zarrouati, 1987; Barlier, 1994). On a coutume de distinguer une composante « sèche » dont l'indice est une fonction croissante de la pression atmosphérique, d'une composante « humide » d'indice proportionnel à la pression en vapeur d'eau (Berrada-Baby et al., 1988). La deuxième composante présente des fluctuations difficile à observer comme à prédire, de sorte que la troposphère est généralement une inconnue, de structure identifiée, dans les calculs de géodésie (Willis et al., 1998). La troposphère pose aussi des problèmes spécifiques lors de sa prise en compte dans les calculs de géodésie : en particulier, le délai troposphérique (inconnu) est calculé à la verticale de la station étudiée, ce qui nécessite de rabattre le signal au zénith via une fonction de rabattement. Plus l'angle que fait le signal avec le zénith est prononcé, moins la fonction de rabattement est précise.

#### 4.5.2. La dynamique des systèmes et compensation

Dans le cadre des techniques considérées, l'analyse des observations permet de connaître les positions des stations du réseau terrestre d'observation ainsi que la position de l'objet observé. Dans le cas du VLBI, la description s'arrête à ce stade, l'observable étant directement fonction continue des quantités

inconnues. Dans le cas des techniques satellitaires, le fait que l'objet observé évolue dans l'espace selon des règles physiques connues complique quelque peu l'expression du problème d'estimation : la trajectoire de l'objet est régie par une équation différentielle du second ordre. Poser le problème d'estimation nécessite donc de résoudre dans le même temps cette équation différentielle. Par conséquent, le problème d'estimation ne lie pas directement les inconnues aux observations par l'intermédiaire d'une fonction continue. Formellement,

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) & (1) \\ y = g(\vec{r}, \vec{x}) & (2) \end{cases} \quad (I.2)$$

où  $\vec{r}$  est la « position »<sup>4</sup> de l'objet observé,  $y$  l'observation et  $\vec{x}$  la « position » de la station d'observation. Le système (I.2) dépend des conditions initiales. La fonction  $\vec{f}$  contient, outre les termes dus à la gravité, des forces de frottement (Barlier et al., 1978; Berger et al., 1998), des accélérations d'inertie, des termes complémentaires d'origine relativiste, etc . . .

Dans le cas du VLBI, il n'y a pas d'équation de type (I.2.1), de sorte que le problème se réduit à la résolution de la seule équation (I.2.2).

La résolution du problème (I.2) (ou de (I.2.2) dans le cas du VLBI) s'effectue dans un contexte statistique où les observations sont identifiées à des réalisations de variables aléatoires. L'estimation repose le plus souvent sur la méthode des moindres carrés.

#### 4.5.3. Performance du positionnement global

Le calcul de l'ITRF représente un excellent outil pour évaluer les performances en matière de positionnement des différentes techniques spatiales. En effet, le calcul de l'ITRF combine l'ensemble des résultats obtenus par les différents centres d'analyse au sein d'un seul et unique calcul. Ce calcul permet donc, par l'analyse des résidus obtenus pour chaque lot de données, d'évaluer le niveau d'accord entre les diverses techniques.

Par ailleurs, les mesures effectuées par les différentes techniques de géodésie spatiale ne concernent pas les mêmes points physiques à la surface de la Terre. Néanmoins, la position relative de certains points est connue localement avec une précision suffisante pour négliger, dans un premier temps, l'influence de ce type d'information sur le bilan d'erreur final du calcul. Ces liens locaux, ou rattachements, sont obtenus par des techniques topométriques. Il est clair que si ces rattachements présentent des faiblesses, la cohérence de la combinaison en souffre directement. Les rattachements conduisent à définir la notion de site géodésique au sein duquel plusieurs points sont reliés entre eux par des rattachements observés par des techniques de géodésie spatiale.

<sup>4</sup>ces termes s'entendent dans un sens très général, sans hypothèse sur le référentiel sous-jacent.

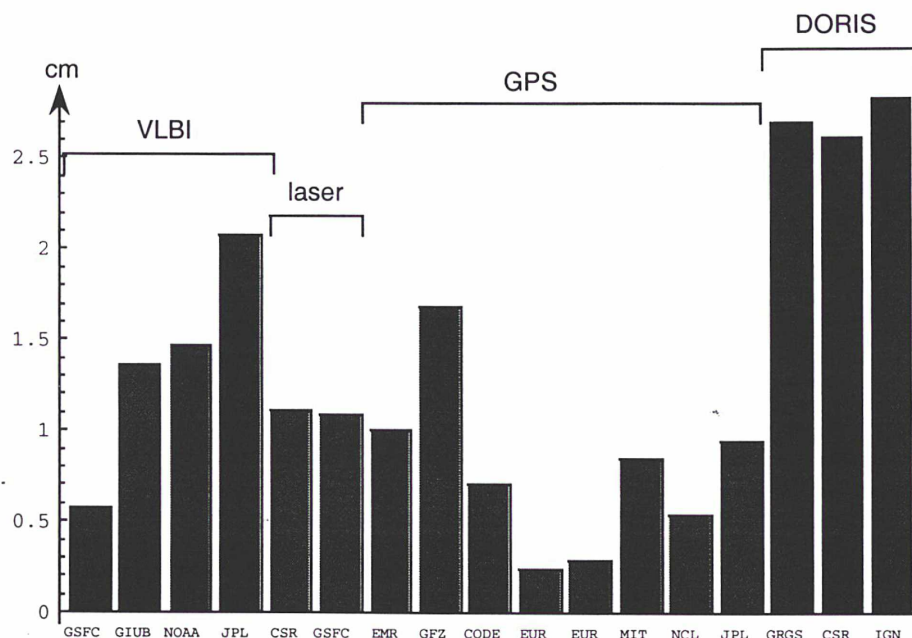


FIG. I.16: Estimation de l'erreur moyenne quadratique pondérée en position pour chaque solution utilisée dans le calcul de l'ITRF96

Les figures (I.16) et (I.17) présentent, à titre d'exemple, les erreurs moyennes quadratiques pondérées estimées à l'issue du calcul de l'ITRF96 à partir des résidus de la compensation. On se reportera au §5. du chapitre V pour une discussion de cet estimateur.

On peut conclure, à la lecture du graphique (I.16) que les techniques spatiales ont une exactitude de l'ordre du centimètre en position, sauf la technique DORIS dont la cohérence avec les autres techniques avoisine pour l'instant les deux centimètres.

Quant aux vitesses linéaires de déplacement, elles sont déterminées avec une exactitude de l'ordre de 3 mm/an, sauf pour la technique DORIS, de l'ordre de 7 mm/an (figure I.17).

Les différences entre la technique DORIS et les autres techniques s'expliquent essentiellement par la « jeunesse » de DORIS. C'est la technique la plus récente qui n'a manifestement pas encore tout à fait atteint le niveau de maturité des autres techniques de positionnement. Il faut noter, à la décharge des performances moyennes de cette technique, que l'objectif premier de DORIS n'est pas le positionnement précis, comme c'est le cas pour GPS par exemple, mais l'orbitographie. Pour cette application, DORIS donne entière satisfaction, à en juger par les résultats remarquables obtenus à partir des données du satellite altimétrique TOPEX/POSEIDON en océanographie, et dont l'orbite est restituée par DORIS. La faiblesse en positionnement est largement compensée

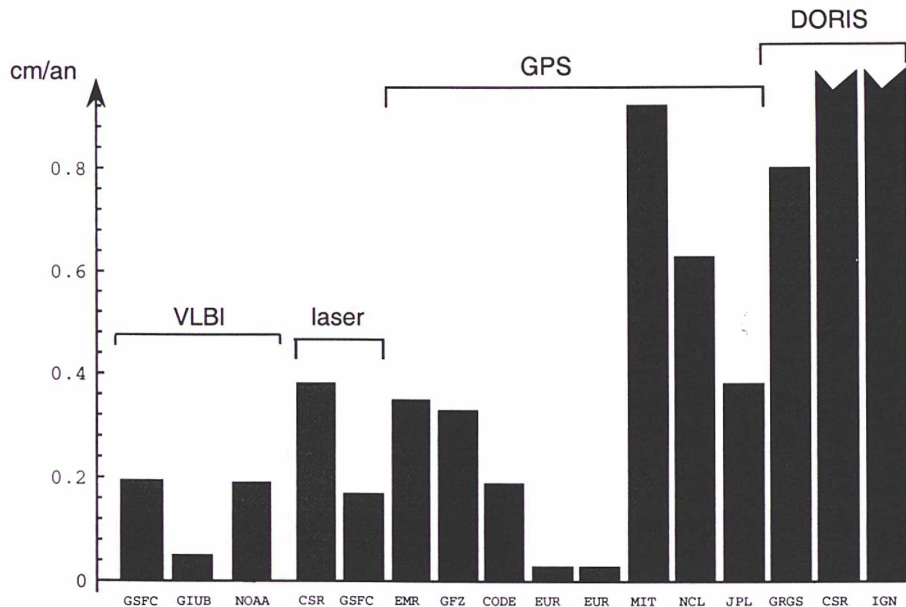


FIG. I.17: Estimation de l'erreur moyenne quadratique pondérée en vitesse pour chaque solution utilisée dans le calcul de l'ITRF96

par la qualité du réseau et devrait s'estomper avec la nouvelle génération d'appareillages planifiée avec le lancement du satellite SPOT5 (2001).

Enfin, il convient de prendre ces chiffres avec prudence. Si l'ITRF est un bon outil pour évaluer les désaccords entre techniques, les rattachements, ainsi que les artifices de calculs employés par les centres d'analyse ont un impact difficilement appréciable. La complexité des calculs actuels, le nombre de paramètres entrant en jeu incitent à éviter des raccourcis trop rapides : l'analyse de millions d'observations au moyen de modélisations comportant des milliers de paramètres inconnus ne peut décemment pas être résumée en un seul nombre !

## 5. Genèse et orientations de la thèse

L'objet de ce document est de présenter le thème des systèmes de référence de manière cohérente et didactique. C'est une logique différente de la logique déductive qui a prévalu durant les trois années de recherche de ce travail. Il est souhaitable de remettre ces deux logiques en perspective afin d'éclairer le cheminement de la réflexion.

Si ce document se soustrait délibérément de l'influence de l'ITRF, il n'en demeure pas moins que les considérations qui ont guidé ce travail de recherche lui sont intimement liées.

En 1995, année de début des travaux relatés ici, le calcul de l'ITRF94 avait montré les limites du processus de calcul de combinaison de jeux de coordonnées tels que pratiqués au bureau central de l'IERS. Les données de géodésie spatiale s'étant considérablement améliorées depuis la création de l'IERS, il devenait nécessaire de reconsidérer le processus de calcul de l'ITRF. En particulier, l'ITRF94 était le premier millésime des réalisations de l'ITRS dont le calcul reposait sur des variances complètes des jeux de positions-vitesses de stations (Boucher et al., 1996). Or pour l'ITRF94, les positions de stations ont été combinées à deux époques différentes permettant ainsi d'en déduire les vitesses. Outre la difficulté d'élaborer un modèle stochastique convenable (Sillard et al., 1995), la conséquence principale était d'aboutir à un champ de vitesses combiné (le champ de l'ITRF94) sur lequel on ne disposait d'aucune information statistique fiable. Le processus était à revoir intégralement et le développement d'un nouveau logiciel de combinaison de jeux de positions-vitesses de stations s'imposait. Ce développement a été entrepris par Z. Altamimi et la majeure partie des travaux présentés dans le chapitre (V) a été utilisée dans le logiciel  $CAT_{ITRF}$ . En particulier, les combinaisons de jeux de coordonnées s'appuient sur des populations de données (les jeux de coordonnées) hétérogènes du point de vue statistique. De tels calculs ne peuvent être conduits qu'avec un souci d'homogénéisation des données. Cette idée, sous-jacente dans les calculs pratiqués jusqu'en 1996, a été formalisée et rigoureusement mise en œuvre pour l'ITRF96. La technique d'estimation des composantes de la variance a été développée dans le logiciel  $CAT_{ITRF}$ . D'autres aspects statistiques ont été étudiés afin d'asseoir l'analyse  $CAT_{ITRF}$  sur des bases solides. Ainsi, des critères de qualité par population ont été construits, des tests de détection des fautes de mesure mis en œuvre. Enfin, quelques pas ont été faits en direction des techniques d'estimation robuste (estimateurs de Huber, estimation en norme d'ordre 1). Ces techniques seront approfondies dans l'avenir.

Par ailleurs, en 1995 s'est manifesté un regain d'intérêt très net pour les réalisations de systèmes de référence terrestres : la précision atteinte par les données de géodésie spatiale rend crucial le problème de la définition du système de référence terrestre. Cette analyse a été partagée par la majeure partie des centres de calcul de géodésie spatiale et a conduit à la création d'un groupe de travail de l'IERS sur l'ITRF, animé par J. Ray. L'attention de ce groupe s'est portée sur les modèles utilisés, en particulier sur le cadre relativiste de la mesure. En effet, le problème de la datation des mesures et de la cohérence des échelles de temps avec la partie spatiale du référentiel s'est posé : nous avons donc consacré une partie de cette thèse à son exposition. La relativité générale lie géométrie et gravitation. Il a semblé judicieux d'étendre la réflexion à l'une des références géodésiques dans laquelle la relativité intervient significativement : le géoïde. Ce groupe de travail s'est également penché sur les causes



d'instabilité des référentiels terrestres. Dans cette optique a été organisée en 1997 une campagne d'étude sur les variations du géocentre. Une partie de la thèse a été consacrée à l'analyse des résultats fournis par divers participants à cette campagne. Cette phase de traitement de données a permis de constater l'intérêt que représentent les séries temporelles de jeux de positions de stations pour la compréhension de la physique de la Terre. Elle ouvre du même coup des perspectives nouvelles : une réflexion sur la représentation des réalisations de référence terrestres est née de ces travaux. Les séries temporelles semblent constituer une vision d'avenir des ces représentations par rapport au « traditionnel » jeu de positions-vitesses. L'IERS a décidé, en 1998, le lancement d'une expérience pilote sur ce sujet dont l'auteur de cette thèse est le coordinateur (Sillard et Boucher, 1998).

1995, c'est aussi l'émergence de nouveaux modes de définition du système de référence dans les calculs de géodésie spatiale. La prise en compte de résultats issus de ces nouvelles stratégies dans les calculs de l'IERS nécessitait d'en maîtriser les conséquences. Cela nous a conduit à étudier le concept de réseau libre pour définir statistiquement la notion de réalisation de système de référence terrestre.

L'ITRF étant au cœur de l'activité dans laquelle s'inscrit cette thèse, il était naturel de montrer, après avoir étudié les processus de calculs, que le soin apporté dans l'élaboration de ceux-ci fait de l'ITRF un outil privilégié pour la géodynamique. La construction d'un référentiel lié à la Terre repose sur des conditions mécaniques intégrales sur la surface terrestre. Le réseau ITRF, bien distribué, offre une photographie discrète de la surface suffisamment dense pour envisager un modèle d'éléments finis. Ce modèle a permis la mise en œuvre des conditions intégrales précédentes. Une autre direction a consisté à analyser le champ de vitesses ITRF pour la tectonique globale. Ce sujet a déjà été étudié à maintes reprises à partir de données de géodésie spatiale. L'objectif était de montrer que le produit ITRF possédait la qualité requise pour mener à bien ce type d'études.

Ce mémoire est organisé selon une logique didactique différente de la logique qui prévaut dans l'orientation de travaux de recherche. On a cherché à rompre avec un mode de pensée incompatible avec une présentation synthétique. Le paragraphe suivant présente la problématique de ce mémoire.

## 6. Problématique de cet ouvrage

Les problèmes qui se posent lors de la réalisation de systèmes de référence terrestres sont multiples : ils sont d'ordre théorique, statistique, méthodologique. Par ailleurs, la façon dont est envisagée ce problème au bureau central de l'IERS est elle-même particulière dans le sens où elle relève de choix qui,

s'ils sont optimaux au moment où ils sont effectués, peuvent s'avérer discutables quelques temps après.

Par exemple, lorsque l'IERS a été créé, il était totalement exclu de traiter simultanément l'ensemble des observations brutes de géodésie spatiale pour compenser système terrestre et rotation de la Terre. Aujourd'hui, ce genre de calcul est possible et l'on peut légitimement s'interroger sur l'intérêt de décomposer en sous-problèmes un problème plus vaste qui peut être traité en une seule fois. Ainsi, des calculs comme ceux menés à Toulouse par le GRGS-CNES pour l'élaboration des champs de gravité GRIM qui mêlent à la source des données de télémétrie laser sur satellite, DORIS et GPS donnent clairement matière à réflexion (Biancale, 1996; Schwintzer et al., 1997). On peut encore aujourd'hui considérer que des calculs plus légers comme l'ITRF ont toujours un intérêt qui réside précisément dans leur relative simplicité : il est beaucoup plus facile d'analyser un calcul à 4000 inconnues pour 11000 observations (Sillard, 1998a) qu'un calcul à plusieurs centaines de milliers d'inconnues pour plusieurs millions d'observations.

Dans un travail comme celui auquel est consacré ce document, le contexte — ici les activités du laboratoire de recherche en géodésie (LAREG) de l'IGN dans le bureau central de l'IERS — est primordial. Néanmoins, sans ignorer ce contexte, les références terrestres constituent un sujet en soi, ainsi que ce manuscrit s'attache à le montrer, et ce, indépendamment des techniques mises en œuvre pour le calcul de l'ITRF. Par conséquent, il a été choisi de construire un texte aussi didactique que possible en illustrant des options étudiées par des résultats liés, entre autres, au calcul de l'ITRF.

Les systèmes de référence sont des objets support de la physique qui sont construits dans un certain cadre théorique. Le chapitre (II) est consacré à la description de ce cadre.

Ainsi qu'il a déjà été mentionné, les systèmes de référence revêtent une importance particulière en physique car celle-ci est basée sur la mesure. C'est donc tout naturellement que les systèmes de référence doivent s'envisager dans un contexte probabiliste découlant du caractère aléatoire des observations. Le chapitre (III) est consacré à la définition statistique des systèmes de référence terrestre.

L'objet des systèmes de référence terrestres est notre planète. Or notre planète vit : elle se déforme, elle bouge, et la dynamique terrestre occupe une part importante dans l'élaboration des systèmes de référence terrestres. En outre, les systèmes de référence terrestres sont eux-mêmes des objets supports des sciences environnementales, telles que la géophysique ou l'océanographie (Wöppelmann, 1997). Le chapitre (IV) reprend les concepts dans l'optique de systèmes s'appliquant spécifiquement à la Terre.

L'analyse de compensations de système de référence terrestre regroupe un

certain nombre d'outils qui font l'objet du chapitre (V).

Enfin, une brève conclusion dresse le bilan de ce travail et évalue les perspectives.

Deux textes assez courts sont proposés en annexe à cette thèse : le premier (annexe A) concerne quelques rappels de géométrie riemannienne utiles au chapitre (II) ; le second (annexe B) reprend des définitions et démonstrations d'algèbre utiles au chapitre (III).

## CHAPITRE II

### LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TERRESTRES EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Ce chapitre est consacré à la modélisation physique des systèmes de référence terrestres dans le cadre de la théorie de la relativité générale. Les systèmes de référence sont ici assimilés au système de coordonnées qui rend possible l'écriture des équations de la physique. Tous les systèmes sont équivalents dans une approche relativiste. Certains sont plus pratiques que d'autres. L'objectif de ce chapitre est de présenter une approche relativiste des systèmes de coordonnées adéquats à décrire l'environnement terrestre, et de montrer quelques conséquences du cadre théorique choisi sur la notion de système de référence terrestre.

Dans une première partie, on s'attachera à présenter succinctement le formalisme relativiste ainsi que les hypothèses physiques sur lesquelles il repose.

La seconde partie détaille l'application de la relativité au système solaire et à la Terre, et présente une formalisation de la géométrie habituellement adoptée pour la réduction des observations astrométriques et géodésiques.

La troisième partie est consacrée au délicat problème des échelles de temps, cette grandeur étant, en relativité, considérée comme une coordonnée de nature quasiment identique aux coordonnées d'espace.

Les systèmes de référence ont pour objectif premier la description de la dynamique. La quatrième partie de ce chapitre est dévolue à son expression au voisinage de la Terre dans un cadre relativiste.

Les deux derniers paragraphes sont consacrés à des « curiosités » : le potentiel de gravitation, en théorie newtonienne, peut être considéré de façon totalement déconnectée<sup>1</sup> des coordonnées d'espace. Cette caractéristique est modifiée par la relativité qui lie espace et temps de façon intime. La dépendance espace-temps est une traduction de la gravitation, donc du potentiel de

---

<sup>1</sup>à l'influence du potentiel terrestre sur le mouvement des satellites près

gravitation. La relativité offre ainsi aux systèmes de référence une dimension physique que la mécanique newtonienne permet d'ignorer.

Le dernier paragraphe concerne l'expression des similitudes de l'espace relativiste au voisinage de la Terre. Ces transformations sont essentielles car elles laissent rigoureusement invariant le système de coordonnées. Ainsi, les équations de la physique sont inchangées entre deux systèmes similaires. En outre, ces transformations sont d'utilité première en géodésie où la réduction des mesures est insensible à un changement de système de coordonnées par similitude.

Ce chapitre, en focalisant son objet sur les systèmes de coordonnées en relativité, tente d'établir la base physique d'une modélisation des systèmes de référence terrestres. Sans être exhaustive, la modélisation abordant la géométrie (§2.), le temps (§3.), la dynamique (§4.), l'extension de la notion d'équipotentielle du champ de gravité (§5.) et les transformations de coordonnées par similitudes (§6.) se concentre sur les éléments essentiels touchant aux systèmes de référence.

## 1. Introduction

La théorie de la relativité générale est maintenant admise comme conceptuel approprié pour décrire les phénomènes physiques tels que nous les observons. Les tests de l'exactitude de la relativité générale ne sont pas très nombreux pour les phénomènes observables dans le système solaire. Néanmoins, ces tests existent et ont, jusqu'à présent, confirmé l'aptitude de cette théorie à les décrire. A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la mécanique Newtonienne montrait des signes de faiblesse évidents : en particulier, elle était inapte à expliquer convenablement les phénomènes électromagnétiques. Ainsi, la vitesse de la lumière reste constante quelle que soit la vitesse de déplacement de la source qui la génère. Michelson et Morley (Einstein, 1961) utilisèrent le déplacement de la Terre à une vitesse de 30 km/s autour du Soleil pour démontrer cette propriété. La problématique de ce type d'expérience peut être décrite en termes de changements de référentiels et de repères inertiels : en mécanique classique (galiléenne), le passage d'un référentiel  $\mathcal{R}_{\vec{v}}$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  constante par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}_0$  est donné par la transformation de Galilée qui permet de passer du vecteur tridimensionnel  $\vec{X}_0$  exprimé dans  $\mathcal{R}_0$  à  $\vec{X}$  exprimé dans  $\mathcal{R}_{\vec{v}}$  par<sup>2</sup> :

$$\vec{X} = \vec{V}t + \vec{X}_0 \quad (\text{II.1})$$

---

<sup>2</sup>On notera  $\vec{u}$  un vecteur tridimensionnel et  $\mathbf{u}$  un vecteur en dimension 4

Cette équation est équivalente, du point de vue différentiel à :

$$\frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \vec{0} \quad (\text{II.2})$$

On dira alors que si  $\mathcal{R}_0$  est un référentiel inertiel,  $\mathcal{R}_{\vec{V}}$  défini par (II.1) en est un également. Le problème est que, par changement de repère, la vitesse d'un mobile de masse non nulle peut dépasser la célérité de la lumière, ce qui n'est donc pas conforme à l'expérience de Michelson et Morley.

Par analyse de la synchronisation d'horloges, Einstein observa que la transformation qu'il fallait appliquer n'était pas celle de Galilée (II.1), mais celle de Lorentz. La différence essentielle entre ces deux transformations est qu'elles correspondent à deux espaces de nature différente : le temps et espace géométrique absolus de Galilée et Newton de dimension (1+3) font place à l'espace-temps de Minkovski, résolument de dimension 4. Même si les tests de la relativité générale, en particulier au voisinage de la Terre, sont peu nombreux, il est possible d'en imaginer de nouveaux avec l'amélioration des techniques de mesure : récemment, on peut citer l'étude sur l'isotropie de la célérité de la lumière à l'aide du système GPS (Petit et Wolf, 1997; Wolf et Petit, 1997) qui a conclu une nouvelle fois à la pertinence de l'une des hypothèses de la relativité restreinte.

On considère la quantité  $d\tau$ , homogène à un temps et appelée temps propre, définie par (on note  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide) :

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \begin{pmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

La transformation de Lorentz fait de l'équation (II.3) une relation valable pour tout référentiel inertiel. Elle laisse donc invariante l'élément  $c^2 d\tau^2$  par changement de système de référence inertiel. L'équation (II.3) généralise l'élément de temps absolu  $dt$  de la relativité galiléenne où  $dt$  est une constante et l'élément de longueur de l'espace est l'élément euclidien usuel ( $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ). Considérons un référentiel inertiel de la relativité restreinte. En application de la relation (II.3),  $\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{c^2 + \vec{V}^2}$  où  $\vec{V}$  est la vitesse de translation constante du repère  $\mathcal{R}_{\vec{V}}$  par rapport au repère inertiel  $\mathcal{R}_0$  ( $\vec{V} = \left( \frac{dx}{d\tau} \quad \frac{dy}{d\tau} \quad \frac{dz}{d\tau} \right)^T$ ). Si  $\vec{V}$  est une constante, alors

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{d\tau^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 t}{d\tau^2} \\ \frac{d\vec{V}}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

où  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix}^T$ . L'équation (II.4) est le pendant minkovskien de l'équation (II.3) de la relativité galiléenne.

$c^2 d\tau^2$  correspond à l'unité de longueur dans l'espace de Minkovski (première forme quadratique). C'est le pendant minkovskien de l'élément de longueur dans l'espace absolu euclidien  $d\vec{X}^2$ .  $d\tau$  est le temps mesuré par une horloge de l'espace de Minkovski au point de l'espace temps considéré. Dans les deux cas, minkovskien et euclidien, l'élément de longueur est l'invariant de la physique sous-jacente, mais la forme de cet élément est fondamentalement différente, ainsi que le montrent les équations (II.2) et (II.4).

L'équation (II.4) constitue le premier pas vers la relativité générale. Elle correspond à la relativité restreinte, physique dans laquelle le champ de gravité n'agit pas de façon différentielle sur l'expérience : c'est le cas des horloges d'Einstein. Néanmoins, cette théorie ne constitue qu'une étape vers une théorie de plus grande ampleur qui supplanterait définitivement la théorie newtonienne de la gravitation. En effet, l'invariant (II.3) est de nature purement géométrique et n'explique en rien la façon dont s'insère la gravitation dans l'espace géométrique quadridimensionnel ainsi dévoilé.

C'est la géométrie riemannienne qui va donner à Einstein la possibilité d'exprimer, au sein d'une structuration théorique cohérente, la géométrie et la physique de l'espace-temps. Le phénomène de la gravitation est assimilé à la courbure de l'espace – appelée variété dans la terminologie de la géométrie riemannienne – et l'invariant (II.3) se généralise en :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{ij} du^i du^j \quad 0 \leq i, j \leq 3 \quad (\text{II.5})$$

où  $(du^i, du^j)$  sont les coordonnées différentielles de l'espace quadridimensionnel sous-jacent,  $g_{ij}$  sa métrique (appelé aussi tenseur métrique). L'équation (II.5) est écrite en application de la convention d'écriture d'Einstein : les signes sommes sont implicites sur les indices répétés (somme sur  $i$  et sur  $j$ ). En fait, algébriquement, l'équation (II.5) consiste « simplement » à associer à  $\mathbb{R}^4 (\equiv (\ell, x, y, z) ; \ell = ct)$  une forme bilinéaire symétrique  $g_{ij}$  qui généralise ainsi la forme de l'équation (II.3) de l'espace de Minkovski au cas où la matrice de produit scalaire n'est plus seulement diagonale.

Sur le plan mathématique, les espaces où en tout point est défini un espace hermitien ou pseudo-euclidien (cf. annexe B) sont des variétés et constituent l'objet d'étude privilégié de la géométrie riemannienne.

L'équation (II.4) donne la transformation des coordonnées par changement de repère inertiel. Elle peut aussi être interprétée comme définissant la géodésique de l'espace de métrique minkovskienne. La géodésique est la ligne la plus courte joignant deux points de l'espace considéré. Cette ligne la plus courte s'appuie naturellement sur la métrique de l'espace sous-jacent, et le système d'équations différentielles la caractérisant s'obtient en appliquant le principe

variationnel

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = 0 \quad (\text{II.6})$$

L'équation (II.6) conduit à un système d'équations différentielles du second ordre (II.7). On trouvera en annexe A une démonstration de la structure du système des équations différentielles vérifiées par une ligne géodésique :

$$\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} = 0 \quad (\text{II.7})$$

pour une métrique  $g_{ij}$  où les  $\Gamma_{jk}^i$  sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce<sup>3</sup>

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_k g_{j\alpha} + \partial_j g_{k\alpha} - \partial_\alpha g_{jk}) \quad (\text{II.8})$$

On peut remarquer que l'équation des lignes géodésiques est entièrement déduite de la connaissance de la métrique  $g_{ij}$  et ne dépend que des coefficients de cette métrique et de leurs dérivées. L'équation (II.7) peut être perçue comme une généralisation de l'équation (II.4) pour une variété riemannienne quelconque.

Du point de vue physique, la physique galiléenne conclut que, dans un référentiel galiléen, un mobile au repos suit une géodésique de l'espace, c'est-à-dire la trajectoire la plus courte qui relie deux points de l'espace euclidien. Cette géodésique a pour forme la droite euclidienne classique. La grande originalité de la théorie de la relativité générale, par rapport à la vision galiléenne du mouvement libre, est de postuler que l'état au repos d'un mobile est fondamentalement lié à la gravitation. Par opposition à la mécanique classique, la relativité générale assimile la gravitation comme un état standard de l'espace physique et l'intègre directement dans la géométrie de cet espace. L'état au repos d'un mobile en physique newtonienne correspond à un état donné de gravitation. L'état au repos en mécanique relativiste correspond à un état « plongé » dans un champ de gravitation. Einstein (Einstein, 1961) explique que la notion de repos, même avec des considérations de mécanique classique, peut parfaitement s'interpréter comme l'état d'un corps soumis à un champ de gravitation, et l'interprétation qui peut être faite de la gravitation repose sur l'écriture de la relation de la dynamique newtonienne. Celle-ci, dans son écriture usuelle, scinde implicitement la géométrie de l'espace (accélération) de la gravitation (forces). Reste à présent à identifier comment, avec les outils de la géométrie riemannienne, la gravitation peut expliquer la courbure de l'espace introduite dans la métrique  $g_{ij}$  (II.5).

<sup>3</sup>On désigne par  $g^{k\ell}$  l'inverse du tenseur métrique  $g_{k\ell}$  conformément aux règles du calcul de Ricci.  $g_{k\ell}$  est un tenseur covariant et  $g^{k\ell}$  un tenseur contravariant.  $\partial_k$  est la dérivée partielle par rapport à la k-ième composante. Pour plus de détails, se reporter à (Moritz et Hoffmann-Wellenhop, 1993) ou à (Dirac, 1996), par exemple.



C'est alors qu'entre en jeu une autre grandeur physique, assez nouvelle par rapport à l'arsenal théorique newtonien : le tenseur impulsion-énergie. Pour comprendre sa nature, il faut se rappeler deux lois, la relation fondamentale de la dynamique et la relation de conservation de la masse qui, exprimées dans l'espace de Minkovski, conduisent à une unique relation tensorielle :

– Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k(\rho V^k) = 0 \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (\text{II.9})$$

– Relation fondamentale de la dynamique

$$\rho \frac{\partial V^k}{\partial t} + \rho V^j \partial_j V^k = \partial_j \sigma^{jk} \quad 1 \leq j, k \leq 3 \quad (\text{II.10})$$

où  $V^k$  désigne la vitesse au point considéré,  $\rho$  la densité de masse et  $\sigma^{jk}$  le tenseur des contraintes symétriques. On pose  $\Sigma^{ij} = \begin{cases} \Sigma^{i0} = \Sigma^{0j} = 0 \\ \Sigma^{ij} = \sigma^{ij} \quad i, j \geq 1 \end{cases}$  et  $v^i = (c, V^i)$  et on peut alors observer que les équations (II.10) et (II.11) s'écrivent sous la forme d'une seule et unique relation :

$$\partial_k T^{kj} = 0 \quad (\text{II.11})$$

où  $T^{kj} = \rho v^k v^j - \Sigma^{kj}$ .  $T^{kj}$  est appelé le tenseur impulsion-énergie (Tourrenc, 1992; Landau et Lifchitz, 1989; Dirac, 1996).

Reste enfin à identifier les outils de la géométrie riemannienne utiles à la structuration des équations de la relativité générale.

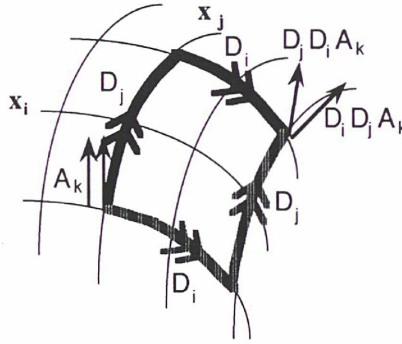
Une notion très riche et extrêmement utile en géométrie riemannienne est la notion de dérivée covariante. Il s'agit d'exprimer, dans l'opération de différenciation d'une quantité géométrique (tensorielle) liée au paramétrage de l'espace choisi, la part qui revient à la courbure (intrinsèque) de l'espace et la part de la différenciation « plane » (due au choix de paramètres), de façon à s'affranchir des effets du paramétrage et ainsi construire la variation intrinsèque à la variété de la quantité étudiée. Cette opération est de nature différentielle et s'exprime par

$$Dv^i = \underbrace{dv^i}_{\text{paramétrage}} - \underbrace{\Gamma_{jk}^i v^j du^k}_{\text{géométrie}} \quad (\text{II.12})$$

La dérivée covariante, mathématiquement, exprime la différentielle totale d'une quantité tensorielle liée au paramétrage de l'espace géométrique choisi (variété). Il s'agit donc d'une opération intrinsèque à l'espace (indépendante du paramétrage choisi). Et c'est en cela que cette opération est riche puisqu'elle va permettre d'exprimer la variation géométrique d'une quantité lorsqu'on se déplace dans l'espace physique.

La géométrie de la surface générera localement une distorsion sur un vecteur déplacé dans une direction donnée. L'interprétation de cette distorsion, mesurée à l'aide de la dérivée covariante précédemment introduite, résidera dans la courbure de la surface. Pour être un peu plus précis, cette distorsion dépendra d'une part du lieu de la sous-variété où est analysée la courbure, et d'autre part de la direction choisie pour déplacer le vecteur. La courbure sera la caractérisation de la différence entre une double dérivation covariante effectuée sur un même vecteur  $A_\ell$ .

$$(D_i D_j - D_j D_i) A_k = \underbrace{R_{kji}^\ell}_{\text{tenseur de courbure}} A_\ell \quad (\text{II.13})$$



Qualitativement, le lieu de la sous-variété est repéré à l'aide de deux indices (tenseur métrique), la direction à l'aide d'un indice, et comme la courbure correspond à une différence de distorsions, un indice supplémentaire sera nécessaire à son expression. La courbure sera donc un tenseur d'ordre 4 défini de façon équivalente à (II.13) par :

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^\ell} - \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{m\ell}^i \quad (\text{II.14})$$

On constate, une fois encore, que ce tenseur ne dépend que du tenseur métrique de la variété, et de ses dérivées. De ce tenseur de courbure, on déduit deux autres formes « condensées » de courbure :

- la courbure de Ricci :  $R_{ij} = R_{ikj}^k$ , obtenue par contraction (somme sur 2 indices) du tenseur de courbure (II.14).
- la courbure scalaire :  $R = g^{ij} R_{ij}$  obtenue par contraction du tenseur de Ricci.

Le tenseur de courbure présente un certain nombre de symétries à partir desquelles on peut travailler afin d'aboutir à une équation faisant apparaître le tenseur d'Einstein

$$E_{ij} = R_{ij} - g_{ij}R \quad (\text{II.15})$$

Ce tenseur possède la propriété fondamentale d'être de dérivée covariante nulle :

$$D_k E_{ij} = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.16) joue un rôle fondamental dans la théorie de la relativité générale. Pour comprendre ce point, il faut tout d'abord éclaircir le but recherché :  $E_{ij}$  est un tenseur qui, dans l'optique où on s'est placé, représente en quelque sorte la courbure de l'espace (ou tout au moins en découle). Le problème que l'on se pose est de savoir à quel niveau la physique (l'impulsion-énergie) va pouvoir s'insérer dans la géométrie pour expliquer la courbure de l'espace par la présence de matière. Avec le tenseur d'Einstein, on dispose d'une quantité présentant des symétries qui pourront être exploitées dans la tâche fixée. Pour comprendre ce qui est remarquable dans le tenseur d'Einstein, il faut d'abord observer que la dérivée covariante est une généralisation tensorielle de la notion de divergence.

En mécanique newtonienne, la formulation usuelle de la gravitation conduit à exprimer la force de gravitation  $\vec{g}$  dérivant d'un potentiel scalaire  $U^4$  :

$$\vec{g} = \vec{\nabla} U \quad (\text{II.17})$$

Si on calcule la divergence de  $\vec{g}$ , on aboutit à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \Delta U$$

Or, d'après l'équation de Poisson,  $\Delta U = -4\pi G\rho$  (Heiskanen et Moritz, 1967), où  $\rho$  est la densité de matière au point où est écrite l'équation de Poisson, de sorte que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \Delta U = -4\pi G\rho \quad (\text{II.18})$$

Cette équation permet de disposer d'un lien explicite entre la géométrie ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ ) et la physique (densité de matière  $\rho$ ) en théorie newtonienne de la gravitation. C'est précisément cette équation que l'on va chercher à généraliser.

<sup>4</sup>On désigne par  $\vec{\nabla} V$  le vecteur de composante  $\partial_\alpha V$

On peut montrer que l'équation (II.11) est équivalente à

$$D_k T^{kj} = 0$$

De sorte que l'on dispose, d'une part :

- des équations du « mouvement » dans un espace de Minkovski (sans courbure géométrique)

$$D_k T^{kj} = 0 \quad (\text{II.19})$$

- de l'équation qui relie la géométrie de l'espace à la matière

$$\vec{\nabla} \vec{g} = -4\pi G\rho \Leftrightarrow D_k g^k = -4\pi G\rho \quad (\text{II.20})$$

en gravitation newtonienne ;

et d'autre part d'une équation vérifiée très généralement par la géométrie de l'espace (II.16). Il n'y a donc aucune incompatibilité mathématique à postuler la proportionnalité des tenseurs d'Einstein et d'impulsion-énergie contravariants

$$\boxed{E^{ij} = \chi T^{ij}} \quad (\text{II.21})$$

Il reste à vérifier que cette équation est compatible avec la limite newtonienne correspondant à l'équation de Poisson, limite au sens de l'infiniment petit  $1/c$ . Pour l'établir, il convient de modifier l'équation (II.21) en remarquant que si  $R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = \chi T^{ij}$ , alors

$$g_{ij}R^{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}g^{ij}R = \chi g_{ij}T^{ij} \quad (\text{II.22})$$

$R - \frac{1}{2} \times 4R = \chi T$  où on a posé  $T = g_{ij}T^{ij}$  (contraction du tenseur d'impulsion énergie), de sorte que l'équation (II.21) est équivalente à

$$\boxed{R_{ij} = \chi T_{ij}^*} \quad (\text{II.23})$$

où  $T_{ij}^* = T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T$ .

La mécanique newtonienne se conforme par essence au principe de relativité de Galilée. Ce principe diffère de la relativité restreinte par la présence d'un temps absolu et correspond, dans l'expression de l'invariant de la relativité restreinte (II.3), à la limite basse vitesse de cet invariant. Dans l'expression (II.3), la relativité de Galilée correspond à un terme limite

$$c^2 d\tau^2 \simeq c^2 dt^2 \quad (\text{II.24})$$

L'introduction de la gravitation dans une équation de type (II.3) va donc s'interpréter comme une correction de premier ordre en  $\frac{1}{c^2}$ . Cette correction s'opère à basse vitesse dans la limite newtonienne, de sorte que l'élément de longueur recherché en limite sera de la forme ( $d\ell = cdt$ )

$$c^2 d\tau^2 = g_{00} d\ell^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{II.25})$$

où  $g_{00} = 1 + \eta_{00}(\frac{1}{c^2}) + o(\frac{1}{c^3})$ , et  $\eta_{00}$  est indépendant du temps  $t$ .

En utilisant la forme (II.25) de la métrique, on obtient

$$R^{00} = R_{00} = \frac{1}{2} \Delta \eta_{00} \quad (\text{II.26})$$

où  $\Delta$  est le laplacien spatial utilisé dans l'expression de l'équation de Poisson. Par ailleurs, à la limite newtonienne,  $T^{kk} = \delta^{k0} \rho c^2$ , de sorte que  $T^*_{kk} = \delta_{k0} \frac{1}{2} \rho c^2$ . Finalement, en écrivant  $R^{00} = \chi T^{00}$ , on est conduit à

$$\Delta \eta_{00} = \chi \rho c^2 \quad (\text{II.27})$$

L'équation (II.27) est équivalente à l'équation de Poisson (II.18), à condition de poser

$$\begin{cases} \eta_{00} &= -\frac{2U}{c^2} \\ \chi &= \frac{8\pi G}{c^4} \end{cases}$$

En définitive, les équations d'Einstein (II.21 ou II.23) ont pour limite basse vitesse les équations du mouvement de Newton; et la métrique de l'espace ainsi obtenue, en tant que généralisation de la relativité restreinte à la gravitation, est de la forme

$$g_{ij} = \text{diag}\left(1 - \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right) \quad (\text{II.28})$$

Les équations d'Einstein (II.21 et II.23) appellent plusieurs remarques :

- Tout d'abord, la théorie de la relativité générale présente la particularité, non négligeable par rapport aux autres théories de physique fondamentale, d'intégrer au sein d'une même équation (les équations d'Einstein) la description du champ et du mouvement des particules dans le champ. L'engouement dont fait l'objet la théorie de la relativité générale, même de la part du profane, n'est certainement pas indépendant de « l'esthétique » que l'on peut y percevoir : la caractéristique précédente en est une excellente illustration. L'homme a toujours eu l'impression de dominer la nature lorsqu'il croyait en percer les secrets . . .

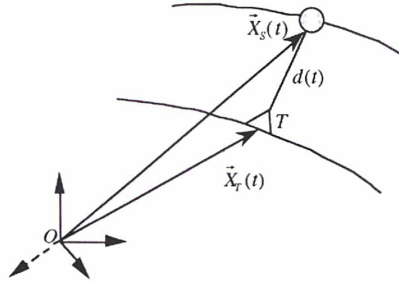
- Si la gravitation est, à présent, intégrée aux équations du mouvement, il n'en reste pas moins à exprimer au sein d'une équation complémentaire, les actions non-gravitationnelles. Ce qui conduit à l'équation du mouvement dans l'espace-temps :

$$\frac{dV^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \quad (\text{II.29})$$

où  $V^\alpha$  est la quadri-vitesse ( $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ ), et  $F^\alpha$  est appelée quadri-force exprimée en coordonnées locales,  $m$  est la masse du corps considéré (Tourrenc, 1992). Cette quadri-force mérite que l'on s'y arrête. C'est par analogie à l'écriture newtonienne de la relation fondamentale de la dynamique que cette équation est construite. Toute trajectoire non géodésique d'une particule plongée dans un champ de gravitation s'interprète via une action non gravitationnelle  $F^\alpha$ . Un corps à l'« état libre » ( $F^\alpha = 0$ ) suit une géodésique de l'espace-temps. A la limite newtonienne,  $F^0 = 0$ .

- D'un point de vue physique, il est bien clair que le temps  $t$  n'est plus absolu en relativité générale. L'expression de la mesure de temps propre  $d\tau$  est liée d'une part de la vitesse du point (au sens newtonien) comme c'était déjà le cas en relativité restreinte, et d'autre part de l'intensité du champ de potentiel (à l'approximation des champs de potentiels faibles). La mesure du temps propre va permettre de réaliser la coordonnée de temps  $t$  moyennant des hypothèses physiques bien précises. Le problème des échelles de temps est un problème crucial en physique moderne (et en géodésie) car c'est pour ce type de phénomènes mesurés qu'apparaissent les premiers effets relativistes. Et bien entendu, le choix de l'échelle de temps influence la mesure des grandeurs spatiales, ainsi qu'il sera étudié dans les paragraphes suivants.
- Du point de vue pratique, le « choix » du système de référence de travail est systématiquement implicite et est porté par les équations de la dynamique que l'on adopte. En d'autres termes, à chaque problème modélisé correspond un système de référence de travail. Par ailleurs, en métrologie, la restitution analytique des phénomènes en jeu (physique) s'opère par interprétation de mesures sujettes à erreurs de mesures. Par définition, ces erreurs de mesure ne sont pas physiquement modélisables mais sont assimilées à la réalisation de processus aléatoires. Ces processus sont en général assez bien connus (cf. chapitre III) mais révèlent une part de méconnaissance qui se transfère sur le choix implicite de système de référence. Pour bien comprendre les conséquences de ce flou sur la façon dont est réalisé le système de référence, il faut se reporter aux phénomènes entrant en jeu dans la réalisation des systèmes de référence : pour

prendre un exemple emprunté à la géodésie spatiale, la mesure fondamentale est une mesure de distance, ou une dérivée temporelle de celle-ci, entre le satellite et des stations de poursuite situées à la surface de la Terre.



Le système de référence (choix du système de coordonnées) apparaîtra au moment de l'écriture des équations de réduction de la mesure

$$g(\vec{X}_S(t), \dot{\vec{X}}_S(t), \ddot{\vec{X}}_S(t)) = f(\vec{X}_S(t), \vec{X}_T(t), \dots) + \varepsilon(t) \quad (\text{II.30})$$

L'équation (II.30) est une équation différentielle du second ordre (comme l'avait remarqué Newton) liant la position du satellite S et ses dérivées temporelles ( $g$ ) à la fonction de mesure ( $f$ ), elle-même fonction de la position du satellite, de la position de la station au sol ( $T$ ) et d'un lot de paramètres qui font la richesse de la modélisation. A  $f$  s'ajoute une variable aléatoire  $\varepsilon$  erreur de mesure dont la présence traduit l'incapacité de  $f$  à expliquer totalement  $g$ . Et c'est dans le paramétrage de  $g$  et  $f$  qu'est défini, de façon implicite, le système de référence. Il est clair que, du fait de la manipulation de processus aléatoires, la définition du système de référence est obtenue par le développement intégral de la fonction de mesure  $f$  et pas seulement la troncature de l'équation différentielle aux seuls termes dynamiques : la part inexpliquée de la mesure permet d'absorber une modélisation imparfaite de celle-ci.

Néanmoins, compte-tenu de la description de l'espace physique admis, au travers de la théorie de la relativité générale, le choix n'est pas totalement libre : l'adoption d'une métrique (II.28) et d'une dynamique (II.29) restreint considérablement le paramétrage que l'on peut choisir de l'espace. On a observé qu'en géométrie riemannienne, l'objet fondamental (l'invariant) est l'élément de longueur, ou temps propre (II.5). Ainsi, le choix de la métrique  $g_{ij}$  dicte la forme des équations de la dynamique. Comprendre la multiplicité des systèmes de référence réalisables pour un cadre physique donné – celui de la relativité – et un choix de métrique  $g_{ij}$ , c'est s'intéresser aux opérations algébriques qui laissent invariante la métrique  $g_{ij}$  choisie. Ces opérations sont appelées isométries rieman-

niennes et généralisent aux sous-variétés les concepts d'isométries des espaces euclidiens. Cet aspect du problème est traité au § 6..

## 2. Le système solaire et l'environnement terrestre en relativité générale

Le dessein de ce travail est de donner des éléments théoriques en vue de la construction des systèmes de référence terrestres au niveau d'exactitude du millimètre à la surface de la Terre . Dans cette perspective, le champ d'application des théories physiques de la gravitation est le voisinage de la Terre. Pour les besoins de la réduction des observations astrométriques, on est contraint d'envisager le voisinage de la Terre s'étendant au système solaire.

Dans le système solaire, la concentration des masses est faible. C'est une caractéristique importante qui explique que la relativité générale n'apporte que des corrections de second ordre à sa limite « basses vitesses-champs faibles » qu'est la théorie newtonienne de la gravitation. Cette caractéristique permet également de linéariser les équations d'Einstein en adoptant comme premier ordre une métrique minkovskienne. Concrètement,  $\frac{U}{c^2}$  et  $\frac{V^2}{c^2}$ , où  $U$  désigne tout potentiel de gravitation rencontré dans le système solaire,  $V$  les vitesses des corps massifs du système solaire et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide, sont des infiniment petits du second ordre.

Les théories de la gravitation en champ faible conduisent à un formalisme paramétrisé post-newtonien (ppn), la paramétrisation de ces théories reposant sur un jeu de 10 paramètres scalaires (Will, 1981; Boucher, 1986) caractéristiques du contexte théorique sous-jacent. Jusqu'à présent, aucune expérience macroscopique n'a mis en évidence de lacunes de la relativité générale, de sorte que l'Union astronomique internationale (UAI), dans sa recommandation I de l'année 1991, suggère l'usage de la théorie de la relativité générale pour la réduction des observations astrométriques du système solaire (Guinot, 1997). Dans le formalisme ppn, cela conduit à considérer que les 10 scalaires sont nuls à l'exception de 2, notés  $\beta$  et  $\gamma$ , et égaux à l'unité. Nous conserverons ces paramètres dans les équations car leur présence apporte des renseignements intéressants sur l'origine des termes obtenus dans les équations. D'une manière générale, pour un corps isolé et générant un potentiel newtonien (champ faible), la métrique sera, au deuxième ordre de petitesse, donné par (Will, 1981; Soffel, 1989;



Landau et Lifchitz, 1989) :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} + \beta \frac{2U^2}{c^4} - (2\gamma + 2)\Phi_1 - 2(3\gamma - 2\beta + 1)\Phi_2 - 2\Phi_3 \\ \quad - 6\gamma\Phi_4 + o(c^{-5}) \\ g_{0i} = \frac{1}{2}(4\gamma + 3)V_i + \frac{1}{2}W_i + o(c^{-4}) \\ g_{ij} = -(1 + 2\gamma \frac{U}{c^2})\delta_{ij} + o(c^{-3}) \end{array} \right. \quad (\text{II.31})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} U = G \int \frac{\rho'}{|x - x'|} d^3x' \\ \Phi_1 = \frac{G}{c^4} \int \frac{\rho' v'^2}{|x - x'|} d^3x' \\ \Phi_2 = \frac{G}{c^4} \int \frac{\rho' U'}{|x - x'|} d^3x' \\ V_i = \frac{G}{c^3} \int \frac{\rho' v'_i}{|x - x'|} d^3x' \\ W_i = \frac{G}{c^3} \int \frac{\rho' [v' \cdot (x - x')](x - x')_i}{|x - x'|^3} d^3x' \end{array} \right.$$

dans un repère non tournant.  $\Phi_3$  et  $\Phi_4$  sont deux termes dépendant respectivement de la pression et de la densité d'énergie de l'ordre de  $c^{-4}$ .

On trouvera l'expression des métriques ppn détaillées dans les ouvrages (Will, 1981; Soffel, 1989). Cette métrique (II.31) s'obtient en linéarisant les équations d'Einstein (II.23) et en utilisant des techniques d'intégration semblables à celles utilisées pour la résolution des équations de Maxwell (Einstein, 1976). Pour une présentation succincte de cette démonstration, on pourra se reporter à (Moisson, 1996; Sillard, 1996b) par exemple. Une présentation détaillée est proposée par (Tourenç, 1992).

Il est assez fréquent que le développement de deuxième ordre (II.31) soit tronqué aux seuls termes significatifs pour la majeure partie des besoins de l'astrométrie, ainsi que le prévoit la résolution I de l'UAI de 1991

$$ds^2 = (1 - \frac{2U}{c^2})c^2 dt^2 - (1 + \gamma \frac{2U}{c^2})[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (\text{II.32})$$

La résolution des équations d'Einstein (II.21) par la méthode des « potentiels retardés » et qui conduit à une métrique de la forme (II.31) suppose l'absence de variation du potentiel newtonien dans le temps, à l'ordre 0 de ce potentiel. Avec les infiniment petits impliqués dans les développements précédents, il s'agit d'absence de variation temporelle des coefficients de la métrique au second ordre ( $\frac{U}{c^2}$ ). Dans le cas de la Terre, la portion variable du champ principal correspond à  $10^{-8}$  du champ principal. Cette variation génère un terme de troisième-quatrième ordre dans la métrique. Pour fixer les idées, au

niveau du géoïde terrestre, la partie variable du champ correspond à un ordre de grandeur de plus que la correction induite par le terme en  $\frac{U^2}{c^4}$  sur la hauteur du géoïde :  $\frac{U^2}{c^4}$  représente une correction de hauteur de 5 mm sur le géoïde (Sillard, 1996c) alors que la partie variable du champ, due aux effets de marées représente une correction de l'ordre de la dizaine de centimètres sur la hauteur du géoïde (McCarthy, 1996). Si les équations d'Einstein sont non linéaires dans le cas général, dans le système solaire, leur comportement se rapproche de la linéarité. Il est donc ainsi légitime de considérer l'impact du champ variable sur le champ permanent comme un terme additif du potentiel newtonien, en vertu de loi d'additivité des potentiels en mécanique newtonienne.

C'est aussi pour cette raison que, vu d'un corps donné, les actions générées par les autres corps du système correspondent à des actions de troisième ordre et pourront être intégrées dans la métrique locale en ajoutant leur contribution au potentiel newtonien. Naturellement, cette façon d'opérer n'est justifiée qu'en raison de la faiblesse des champs gravitationnels rencontrés dans le système solaire. Enfin, dans cette perspective et par la technique même d'obtention de la métrique (II.31) – intégration des relations d'Einstein – le champ newtonien devra être considéré, à l'ordre 0, comme non variable :  $\frac{dU}{dt} \ll 0$ .

Pour compléter cet aspect essentiel de la structure de la métrique solution des équations d'Einstein dans le cas de champs faibles, il est indispensable de mentionner les travaux de Damour, Soffel et Xu (Damour et al., 1991; Damour et al., 1992; Damour et al., 1993; Damour et al., 1994) qui, au prix d'une paramétrisation astucieuse de la métrique  $(\omega, \gamma)$

$$\begin{cases} g_{00} = +exp[-\frac{2}{c^2}\omega] \\ g_{0i} = \frac{4}{c^3}\omega_i \\ g_{ij} = -\gamma_{ij}exp[\frac{2}{c^2}\omega] \end{cases} \quad (II.33)$$

– où  $\omega$  est homogène au potentiel newtonien et  $\gamma$  est un tenseur qui, moyennant des conditions d'harmonicité vérifiées par les coordonnées choisies, se simplifie en  $\delta_{ij}$  – montrent que les équations d'Einstein deviennent linéaires à l'ordre 2 en  $\frac{\omega}{c^2}$  – soit l'ordre 4 initial – et donc s'intègrent aisément et exactement. Partant de ce principe, ils reconstruisent le problème à  $n$  corps du système solaire, dans le cadre de la relativité générale.

Pour les besoins de l'astrométrie, science métrologique qui, sauf exception, opère depuis la Terre et dont l'objet est la dynamique du système solaire et de la galaxie, il est nécessaire de construire, de façon cohérente et dans le cadre de la relativité générale, une hiérarchie de systèmes de référence. Cette hiérarchie est rendue nécessaire par les classes d'observateurs qui entrent en jeu : observateur à la surface de la Terre, au centre de la Terre, au barycentre du système

solaire. En outre, chaque technique astrométrique sous-tendue par une modélisation propre apporte une contribution spécifique à la réalisation des systèmes. Chacune de ces contributions donne lieu à l'identification d'un système propre. Sans entrer dans les détails qui sont évoqués dans (Brumberg et al., 1997), on distinguera pour ce qui intéresse ce travail, trois grandes classes :

1. systèmes de référence géocentriques tournant
2. systèmes de référence géocentriques non tournant
3. systèmes de référence barycentriques

Le système 1. est le concept porteur des systèmes de référence terrestres. On verra plus loin le contenu détaillé de sa définition. Le point essentiel est que les systèmes de coordonnées associés servent de support à l'expression du potentiel terrestre et, par extension, au temps atomique international (TAI), échelle de temps primaire obtenue par réduction des mesures d'horloges les plus précises situées à la surface de la Terre.

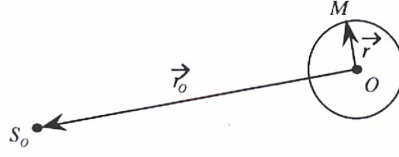
Le système 2. est le système d'intégration naturel des trajectoires de satellites en orbite autour de la Terre. C'est aussi ce système qui sert de support à la détermination de la rotation de la Terre.

Le système 3. est le système de la dynamique stellaire. C'est le système de l'astronomie.

Dans la métrique (II.31), il convient, lorsqu'on s'intéresse au voisinage d'un corps du système solaire, d'assimiler les autres corps à des points affectés de la masse du corps « résiduel ». De sorte que le potentiel newtonien est la somme du potentiel créé par le solide isolé (éventuellement variable, comme ce sera le cas pour la Terre) supposé disparaître à l'infini, et du potentiel de marée créé par les autres corps, supposé s'annuler au centre de la Terre (Guinot, 1997). Il faut distinguer ici la variation du potentiel newtonien due à l'attraction directe différentielle des autres corps par rapport au centre de la Terre et la variation du potentiel terrestre due à des réponses géophysiques aux sollicitations créées par les attractions différentielles précédentes (surcharges océanique et atmosphérique et terrestres réponses aux phénomènes de marées océaniques et terrestres). Afin de bien préciser la terminologie, la marée est un phénomène oscillatoire réponse à une sollicitation gravitationnelle différentielle sur le corps concerné. On appelle potentiel de marée le potentiel générateur de l'onde de marée. La marée entraînant une redistribution des masses, génère à son tour une sollicitation différentielle sur le corps concerné. On appellera ce potentiel réponse élastique.

On adoptera la modélisation suivante :

- – du potentiel de marée proprement dit, noté  $U_{ext}$ . Ce potentiel est généré principalement par la Lune et le Soleil. Les planètes massives du système solaire peuvent aussi intervenir.



$$\begin{cases} U(O) = \frac{GM}{r_0} \\ U(M) = \frac{GM}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \end{cases}$$

donc

$$U_{ext}^0 = \frac{GM}{r_0} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - 2\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}{r_0^2}\right)^{1/2}} - 1 \right]$$

soit, en développant et en supposant que  $r \ll r_0$ ,

$$U_{ext}^0(M) = \frac{GM}{r_0} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}{r_0^2} + o(r_0^{-3}) \quad (\text{II.34})$$

- des réponses de formes multiples au potentiel précédent (surcharges océaniques et terrestres). On intégrera dans ce modèle d'autres réponses à des variations du potentiel newtonien générées par des potentiels autres que celui de marée. La marée du pôle (réponse élastique de la Terre à l'inertie associée aux variations à courte période de la position du pôle nord terrestre) entre dans cette gamme de phénomènes, de même que la surcharge atmosphérique. Les variations des coefficients du champ de gravité développés en harmoniques sphériques sont données dans les conventions IERS (McCarthy, 1996). On retiendra, pour le calcul d'ordre de grandeur, les variations du coefficient  $J_2$  du champ de gravité (aplatissement dynamique de la Terre)

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - J_2 \frac{a_e^2}{r^2} \frac{3\cos^2\varphi - 1}{2} \right] + o(r^{-4})$$

et on montre que

$$|\Delta J_2| < \frac{k_{20}}{5} \left( \frac{GM_{\odot}}{GM_{\oplus}} \left( \frac{a_e}{r_{\odot}} \right)^3 + \frac{GM_L}{GM_{\oplus}} \left( \frac{a_e}{r_L} \right)^3 \right)$$

où  $k_{20}$  est le nombre de Love correspondant,  $\odot$  représente le Soleil,  $\oplus$  la Terre et  $L$  la Lune.  $a_e$  est le rayon équatorial de la Terre et  $r_j$  la distance moyenne Terre-corps  $j$ .

On notera  $U_{\tau}$  un tel potentiel.

- Avec ces notations, la métrique s'écrira, pour un système de coordonnées d'origine le centre de la Terre

$$\left\{ \begin{array}{l}
 g_{00} = 1 - 2\frac{U_{\oplus}}{c^2} - 2\frac{U_{\tau}}{c^2} + 2\frac{GM_{\odot}}{c^2} \frac{\vec{r}_{\odot} \cdot \vec{r}}{r_{\odot}^3} - 2\frac{GM_L}{c^2} \frac{\vec{r}_L \cdot \vec{r}}{r_L^3} + \\
 \quad 2\beta \frac{U_{\oplus}^2}{c^4} + o(c^{-5}) \\
 g_{0i} = \frac{1}{2}(4\gamma + 3) \frac{G}{c^2} \int \frac{\rho' v'_i}{|\vec{x}' - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{2} \frac{G}{c^3} \int \frac{\rho' [\vec{v}' \cdot (\vec{x}' - \vec{x}')] (x - x')_i}{|\vec{x}' - \vec{x}'|^3} d^3x' + o(c^{-4}) \\
 g_{ij} = -(1 + 2\gamma \frac{U_{\oplus}}{c^2}) \delta_{ij} + o(c^{-3})
 \end{array} \right. \quad (\text{II.35})$$

Pour fixer les ordres de grandeur, sur le géoïde terrestre :

rapporté à	$2\frac{U_{\oplus}}{c^2} (\sim 1.39 \times 10^{-9})$	
$\frac{2U_{\oplus}}{c^2}$	1	terme principal
$\frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{c^2}$	$1.72 \times 10^{-3}$	potentiel centrifuge <sup>a</sup>
$2\frac{1}{c^2} \frac{GMJ_2}{a_e}$	$1.08 \times 10^{-3}$	applatissage dynamique
$2\frac{U_{\tau}}{c^2}$	$\sim 5 \times 10^{-9}$	réponse au potentiel de marée
$\frac{2GM_{\odot}a_e}{c^2 r_{\odot}^2}$	$6.04 \times 10^{-4}$	marée solaire
$\frac{2GM_L a_e}{c^2 r_L^2}$	$3.39 \times 10^{-6}$	marée lunaire
$2\frac{U_{\oplus}^2}{c^4}$	$6.94 \times 10^{-10}$	développement d'ordre 4 de la métrique

<sup>a</sup>cette valeur est ici donnée à titre d'information car elle n'apparaît pas dans les équations dérivées jusqu'à présent : la cadre étant jusqu'à présent un système non tournant.

Avec la donnée de la métrique ci-dessus, on est en mesure d'exprimer le rapport du temps propre (mesuré par une horloge située au point considéré) et le temps-coordonnée choisi :

$$v = \frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{U_{\oplus}}{c^2} - \frac{U_{\tau}}{c^2} - \frac{U_{ext}}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{v^4}{c^4} + \frac{2\beta - 1}{2} \frac{U_{\oplus}^2}{c^4} - \frac{2\gamma + 1}{2} \frac{v^2 U_{\oplus}^2}{c^4} + \frac{v^i f_i}{c^4} + o(c^{-5}) \quad (\text{II.36})$$

où on a posé  $f_i = g_{0i}$ . Ce rapport correspond à la fréquence de l'horloge considérée. On retrouve une expression comparable et à ce niveau de précision dans (Wolf et Petit, 1995; Brumberg, 1991; Sillard, 1996c).

### 3. Les échelles de temps terrestres

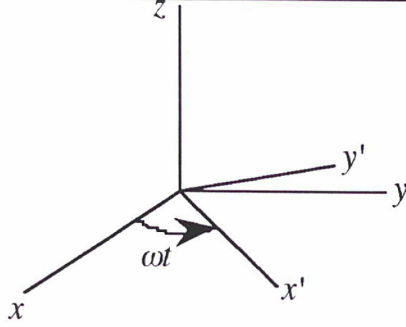
Une échelle de temps est la construction d'un axe coordonné de temps, le temps-coordonnée  $t$  qui apparaît dans les équations de la relativité. Les horloges sont les outils mesurant la « longueur » entre deux positions dans l'espace relativiste. La mesure d'horloge permet de construire un temps-coordonnée si la physique autorise à distinguer, dans l'évolution du temps propre, un changement de position spatiale d'un changement de position temporelle. Une échelle de temps est bâtie sur la mesure d'un temps propre dont on extrait la contribution spatiale. Dans le cas de la Terre, il suffit de considérer une horloge statique sur la surface terrestre et de travailler dans le système de référence comobile spatialement avec la Terre. Ce système tourne est en rotation uniforme avec la Terre et la contribution spatiale au temps propre mesuré par cette horloge est nulle. La métrique relativiste conduit à l'expression de  $d\tau/dt$ , où  $\tau$  est un temps propre et  $t$  un temps-coordonnée. C'est une fréquence d'horloge qui, pour une horloge immobile à la surface de la Terre est constante. L'objectif de ce paragraphe est de détailler la construction précédente.

L'échelle de temps choisie devrait, autant que possible, se rapprocher de la méthode de réalisation de celle-ci, de façon notamment, à éviter de dégrader la qualité de la réalisation obtenue par des réductions s'appuyant sur des constantes physiques sujettes à incertitudes.

Les réalisations d'échelles de temps que l'homme est aujourd'hui capable de produire s'appuient sur des horloges placées à la surface de la Terre. Concrètement, ces horloges reposent sur des technologies complexes et lourdes qui sont hébergées au sein de laboratoires dédiés. Les horloges actuellement utilisées pour l'élaboration du temps atomique international (TAI) sont des étalons à césium et présentent des performances de  $10^{-15}$  en exactitude et en fréquence relative. Des masers à hydrogènes sont également utilisés pour leur très grande stabilité, en dépit d'une exactitude nettement inférieure aux étalons à césium ( $10^{-12}$ ).

Il est donc nécessaire, pour modéliser convenablement le comportement relativiste de telles horloges, de se placer dans un système de référence géocentrique tournant. La métrique d'un tel système se déduit de la métrique non tournante par une rotation d'angle  $\omega t$ , où  $\omega$  est la vitesse de rotation de la Terre. En supposant, au premier ordre, que l'axe des  $z$  du repère géocentrique non tournant coïncide avec l'axe de rotation instantané de la Terre :

$$\begin{cases} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{II.37})$$



On obtient, en différenciant ces expressions, la nouvelle formulation de la métrique (Sillard, 1996b)

$$\begin{cases} g'_{00} = 1 - 2\frac{U_{\oplus}}{c^2} - 2\frac{U_{\tau}}{c^2} - 2\frac{U_{ext}}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}(x^2 + y^2) \\ \quad + 2\beta\frac{U^2}{c^4} - 2\gamma\frac{U\omega^2}{c^4}(x^2 + y^2) + 2\frac{\omega x}{c^4}f'_1 - 2\frac{\omega y}{c^4}f'_2 + o(c^{-5}) \\ g'_{01} = \frac{f'_1}{c^3} + \frac{\omega y}{c} \left( 1 + 2\frac{\gamma U}{c^2} \right) + o(c^{-4}) \\ g'_{02} = \frac{f'_2}{c^3} - \frac{\omega x}{c} \left( 1 + 2\frac{\gamma U}{c^2} \right) + o(c^{-4}) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Les autres termes sont inchangés. On a noté

$$\begin{cases} f'_1 = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t \\ f'_2 = f_2 \sin \omega t + f_1 \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

et on montre que  $f'_1$  et  $f'_2$  sont, au premier ordre, indépendantes du temps lorsque les intégrales correspondantes sont écrites dans le repère tournant (Sillard, 1996c; Sillard, 1996b).

On en déduit donc la fréquence d'une horloge en rotation avec la Terre et se déplaçant à la vitesse  $v$  dans le repère terrestre :

$$\begin{aligned} v = \frac{d\tau}{dt} &= 1 - \frac{U_{\oplus}}{c^2} - \frac{U_{\tau}}{c^2} - \frac{U_{ext}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2c^2} \\ &\quad - \frac{\omega(xv_y - yv_x)}{c^2} - \frac{[v^2 + 2\omega(xv_y - yv_x) + \omega^2(x^2 + y^2)]^2}{8c^4} \\ &\quad + \frac{2\beta - 1}{c^2} \frac{U_{\oplus}^2}{c^4} - \frac{2\gamma + 1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) \frac{U}{c^4} - \frac{2\gamma + 1}{2} \omega(xv_y - yv_x) \frac{U}{c^4} \\ &\quad - \frac{2\gamma + 1}{2} \frac{v^2 U}{c^4} + \frac{\omega}{c^4}(xf'_1 - yf'_2) + \frac{v^i f'_i}{c^4} + o(c^{-5}) \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Le principe de construction d'une échelle de temps repose entièrement sur la base d'équations du type (II.36) ou (II.40) : une horloge mesure un temps propre au point de l'espace considéré. La connaissance de la mesure de  $d\tau$  permet d'accéder, via l'expression de  $\frac{d\tau}{dt}$ , à la réalisation d'un temps-coordonnée. Sa structure relève du choix de coordonnées pour paramétrer l'espace, et non

plus de l'espace considéré. En cela, réaliser  $dt$  correspond tout à fait à la démarche de réalisation d'un système de référence : on accède au système de référence en signifiant la position d'un objet à l'aide du paramétrage implicitement choisi dans la structure des équations décrivant la position de l'objet.

Les recommandations I à IX de l'UAI 1991 introduisent les échelles de temps utiles à la réalisation des systèmes de référence dans le cadre de la relativité générale.

- *TCB* : temps-coordonnée barycentrique. Cité ici pour mémoire car il n'intervient pas directement dans la construction des échelles de temps liées aux systèmes terrestres. Son usage est néanmoins nécessaire pour l'expression d'éphémérides des corps en orbite autour du Soleil. Sa réalisation est appuyée sur la mesure de temps propres à la surface de la Terre.
- *TAI* : temps atomique international. C'est la base des mesures de temps à la surface de la Terre. Il est une réalisation d'une échelle de temps idéale, appelée TT (temps terrestre).
- *TT* : temps terrestre. L'échelle de temps TT est compatible avec la définition de la seconde sur le géoïde terrestre.
- *TCG* : temps-coordonnée géocentrique. C'est le temps-coordonnée introduit par les équations de la relativité générale lorsque le paramétrage de l'espace a pour origine le centre des masses de la Terre. D'une manière générale, les temps-coordonnées sont construits de telle sorte que leur échelle soit cohérente avec le temps propre définissant la seconde SI.

On déduit de l'équation (II.40) la relation qui lie TT à TCG. Sachant que le géoïde terrestre est défini par <sup>5</sup>  $W_0 = U_{\oplus} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = Cte$ , une horloge immobile et située sur le géoïde est telle que – en prenant les notations de (Wolf et Petit, 1995) –

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dT_{CG}} = 1 - \frac{W_0}{c^2} - \frac{U_{\tau}}{c^2} - \frac{U_{ext}}{c^2} + O(c^{-4}) \\ \frac{d\tau}{dT} = 1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} dTT = (1 - L_G)dTCG \\ L_G = \frac{W_0}{c^2} + \frac{U_{\tau}}{c^2} + \frac{U_{ext}}{c^2} + O(c^{-4}) \end{cases} \quad (II.41)$$

et au premier ordre de petitesse :

$$TT = \left(1 - \frac{W_0}{c^2}\right) TCG + TT_0 \quad (II.42)$$

Deux autres échelles sont très utilisées et d'importance cruciale pour les systèmes terrestres :

<sup>5</sup>Ce point est discuté plus loin.



- *UT1* : temps universel. Il est basé sur la vitesse de rotation de la Terre. Il est révélateur d'un phénomène et ne présente donc pas les caractéristiques de stabilité des échelles de temps précédentes.
- *UTC* : temps-coordonnée universel. C'est une réalisation décalée de TAI d'un nombre entier de secondes de façon à ce que  $|UT1 - UTC| < 0.9s$

Il est remarquable d'observer que le temps-coordonnée introduit par la métrique (II.31) et réalisé par l'intermédiaire du *TAI* et de la transformation (II.41) entre *TT* et *TCG*, est utilisable comme temps-coordonnée pour l'ensemble du système solaire. Ceci est dû au fait que, dans les équations de la relativité en présence de champs faibles, on est conduit à privilégier une classe de systèmes de référence d'origine au barycentre des corps massiques. Ces systèmes sont appelés quasi-lorentziens car le groupe des transformations laissant invariante la métrique est très proche du groupe des transformations de Lorentz (Boucher, 1986).

Les échelles de temps évoquées ci-dessus sont essentielles car elles permettent de dater un événement dans un certain système de référence et, connaissant la dépendance des différentes échelles de temps entre elles, de dater cet événement dans le système « canoniquement » associé à cet événement par la relativité générale (métrique II.31). Par exemple, la réalisation du temps terrestre *TAI* permet, par transformation entre le *TT* et le *TCG*, de réaliser indirectement le *TCG*, qui est le temps naturel au sens de la relativité pour décrire la dynamique au voisinage de la Terre. Muni de la réalisation directe ou indirecte des échelles de temps précédentes, il est alors possible de s'intéresser à la description effective du voisinage de la Terre et à sa mesure.

#### 4. La dynamique relativiste au voisinage de la Terre

Une fois l'axe coordonné de temps construit par découpage de l'espace relativiste en temps et espace, il convient de construire les axes d'espace. La construction de l'échelle de temps s'appuie sur des hypothèses concernant les coordonnées d'espace. Par conséquent, une modélisation des axes d'espace compatible avec les hypothèses opérées pour la construction de l'échelle de temps est à privilégier. En relativité générale, espace et temps sont intimement liés dans une théorie géométrique et physique de l'espace-temps. S'il a été possible de scinder temps et espace dans un contexte très particulier pour la construction d'un temps-coordonnée, les équations du mouvement dans l'espace relativiste supposent une modélisation unique des deux composantes. Pour réaliser une échelle de temps, un « mouvement » selon l'axe des temps a été conceptualisé. Un mouvement dans les quatre dimensions est le phénomène sur lequel reposera la construction des axes d'espace.

L'objectif de ce paragraphe est, dans un premier temps, d'évaluer l'impact

du choix de l'échelle de temps sur la pose des équations différentielles caractéristiques du mouvement dans l'espace relativiste, au voisinage de la Terre. On verra notamment que selon le choix de temps-coordonnée opéré, la définition de l'unité des axes d'espace est modifiée. En outre, des constantes comme la constante géogravitationnelle, interviennent dans les expressions du mouvement. Un changement d'échelle de temps peut aussi avoir des conséquences sur la définition des constantes fondamentales selon que l'on fait porter aux coordonnées ou aux constantes l'impact du changement. Une discussion est proposée. Elle fait suite au débat qu'a suscité la publication des standards IERS (McCarthy, 1996) et le calcul de l'ITRF94 (Boucher et al., 1996), précisément dans la perspective adoptée dans ce paragraphe. Une fois ces éléments clarifiés, l'accent est mis sur la résolution des équations différentielles du mouvement relativiste pour les seules coordonnées d'espace : cette résolution correspond à la construction des axes d'espace. Dans ce sens, la dynamique relativiste au voisinage de la terre peut être perçue comme une correction à la dynamique newtonienne. Une « force relativiste » est ainsi exhibée, et les ordres de grandeurs sont examinés.

Il a été établi (équation II.29) que l'équation du mouvement dans l'espace-temps est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dV^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

où  $V^\alpha$  est la quadri-vitesse de l'objet de masse  $m$  considéré et  $F^\alpha$  est la quadri-force non gravitationnelle. Cette équation est transformable en faisant apparaître le temps-coordonnée associé à la métrique ppn (II.38) par l'intermédiaire du rapport  $v = \frac{d\tau}{dt}$  introduit à l'équation (II.36) :

$$\begin{cases} \frac{dV^\alpha}{dt} v + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V^\alpha = v \frac{dX^\alpha}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Or le *TCG* correspond, par définition, au temps-coordonnée canoniquement introduit dans les équations de la relativité écrites à l'aide du formalisme ppn. Donc la relation (II.44) peut s'écrire explicitement :

$$\begin{cases} \frac{dV^\alpha}{dT\text{CG}} v + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V^\alpha = v \frac{dX^\alpha}{dT\text{CG}} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

— Cette dernière relation appelle un certain nombre de clarifications, ainsi que divers textes récents relevant parfois de la polémique scientifique l'illustrent (Guinot, 1997; McCarthy, 1996).

- Le  $TCG$  est le temps naturel d'intégration de la dynamique au voisinage de la Terre. C'est d'ailleurs ce que rappelle le rapport (Guinot, 1997). L'Union astronomique internationale, dans sa recommandation IV résolution A4 de 1991, préconise l'usage de  $TT$  comme temps de référence pour les éphémérides géocentriques. Il est clair que cela ne justifie pas l'emploi de  $TT$  comme temps d'intégration pour les mesures géodésiques lorsque l'on cherche à travailler dans le système géocentrique défini par la métrique (II.35). En effet, admettons qu'au lieu de  $TCG$ , l'échelle de temps utilisée soit  $TT$ . On a vu (équation II.40) que  $dTT = (1 - L_G)dTCG$ , donc l'équation (II.44) devient

$$\begin{cases} \frac{dV^\alpha}{dTT} v' + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V^\alpha = v' \frac{dX^\alpha}{dTT} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

avec  $v' = \frac{dTT}{dTCG} v = (1 - L_G)v$ . Avec cette correction sur  $v$  par  $v'$ , l'équation (II.46) est équivalente à (II.44). Par contre, admettons que  $v$  ne soit pas corrigé, dans ce cas, sans autre changement dans les expressions, les coordonnées  $X_{TT}^\alpha$  obtenues à l'aide de  $TT$  sont affectées au premier ordre d'un facteur d'échelle négatif, de l'ordre de  $0.7 \times 10^{-9}$  par rapport aux coordonnées du système géocentrique  $X_{TCG}^\alpha$  :

$$\boxed{X_{TT}^\alpha = (1 - L_G)X_{TCG}^\alpha} \quad (\text{II.47})$$

C'est précisément ce qui s'est passé pour l'ITRF94 où les coordonnées obtenues par combinaisons des coordonnées issues de réductions d'observations de géodésie spatiale en  $TT$  ont été corrigées afin d'être exprimées en  $TCG$  (Boucher et al., 1996).

- Ce rapport entre les coordonnées  $TT$  et  $TCG$  est un terme du premier ordre et nécessite en réalité l'introduction de termes d'ordre plus élevé pour prendre en compte l'intégralité des effets d'un changement d'unité de temps. En effet, le géoïde est défini par une équation de la forme  $W_0 = U_\oplus + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = Cte$  et donc  $\frac{dTT}{dTCG}$  n'est pas, à l'ordre  $1/c^4$ , une constante sur le géoïde. On verra au § 5. comment s'affranchir de ce problème. Toutefois, pour des coordonnées géocentriques de points de la surface de la Terre, l'effet est négligeable.
- Se pose ensuite le problème des unités. Les constantes de la gravitation utilisées dans les expression (II.43) sont des grandeurs propres, c'est-à-dire dont la définition devrait être insensible au changement de paramétrage. La gravitation (la métrique) est contenue dans les symboles de Christoffel de l'expression (II.46).

Une alternative à l'effet observé dans le changement de paramétrage de TCG en TT et qui conduit à l'introduction d'un facteur d'échelle sur les coordonnées du système géocentrique pourrait être la suivante : à l'aide de l'équation (II.45)à,

$$\begin{cases} \frac{dV^\alpha}{dT} (1 - L_G) + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V^\beta V^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V^\alpha = v \frac{dX^\alpha}{dT} = (1 - L_G) V'^\alpha = v(1 - L_G) \frac{dX^\alpha}{dT} \end{cases}$$

puis, en négligeant les termes non constants de  $L_G$

$$\begin{cases} \frac{dV'^\alpha}{dT} (1 - L_G)^2 + (1 - L_G)^2 \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V'^\beta V'^\mu = \frac{F^\alpha}{m} \\ V'^\alpha = (1 - L_G) V'^\alpha \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} \frac{dV'^\alpha}{dT} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V'^\beta V'^\mu = \frac{1}{(1 - L_G)^2} \frac{F^\alpha}{m} \\ V'^\alpha = v \frac{dX^\alpha}{dT} \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Ce qui conduit à une équation équivalente à l'équation (II.45), exprimée à l'aide du temps  $TT$ , mais qui, par rapport à l'équation (II.46) présente l'intérêt de travailler à l'aide de coordonnées  $X^\alpha$  d'échelle unitaire par rapport aux coordonnées  $X_{TCG}^\alpha$ . La relation de la dynamique (équation II.48) est légèrement modifiée lors du changement de paramétrage de TCG en TT. Toutefois, l'usage de la correction de fréquence d'horloge  $v$  n'implique nullement, à ce stade, le changement de définition de grandeurs physiques comme la constante géogravitationnelle. Par contre, lorsque  $v$  (équation II.36) est calculé comme rapport de  $\frac{d\tau}{dT} = v_{TT}$ , alors l'équation (II.48) devient ( $v_{TT} = \frac{d\tau}{dT} = \frac{1}{1-L_G} \frac{d\tau}{dT} = \frac{v}{1-L_G}$ ) :

$$\begin{cases} \frac{dV''^\alpha}{dT} + (1 - L_G) \Gamma_{\beta\mu}^\alpha V''^\beta V''^\mu = \frac{1}{(1 - L_G)^3} \frac{F^\alpha}{m} \\ V''^\alpha = v_{TT} \frac{dX^\alpha}{dT} = \frac{1}{1 - L_G} V'^\alpha \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

En contrepartie, les constantes de gravité sont modifiées, en valeur, par l'intermédiaire des symboles de Christoffel. Ceci implique, compte-tenu de la structure des symboles de Christoffel, de définir tous les coefficients entrant en jeu dans l'expression de la gravitation comme grandeurs propres, et liés entre les systèmes  $TT$  et  $TCG$  par ( $P$  est un coefficient quelconque) :

$$P_{TT} = (1 - L_G) P_{TCG} \quad (\text{II.50})$$

Par construction du système d'unités (Résolution A4, recommandation III de l'UAI, 1991), les constantes relatives à la Terre sont définies dans

le système  $TCG$  :  $P_{TCG} \equiv P$  est l'expression, en système d'unité SI, de la constante  $P$ . Concrètement, pour  $GM_{\oplus}$ , on a (McCarthy, 1996) ( $L_G = 6.9692903 \times 10^{-10}$ )

$$\begin{cases} GM_{\oplus} = 3.986004418 \times 10^{14} m^3/s^2 \\ [GM_{\oplus}]_{TT} = 3.986004415 \times 10^{14} m^3/s_{TT}^2 \end{cases} \quad (II.51)$$

Naturellement, la constante  $GM_{\oplus}$  n'est pas la seule concernée par les considérations précédentes : la rotation de la Terre, par exemple, intervient au même titre dans l'expression du potentiel d'entraînement pour un corps entraîné dans le mouvement de rotation de la Terre. Du reste, cette approche s'étend aux constantes de gravitation des autres corps qui, étant exprimées dans le système centré en leur barycentre conformément à la résolution de l'UAI déjà évoquée, doivent être corrigées du facteur de conversion du temps barycentrique vers le  $TCG$  (soit  $TCB$  vers  $TCG$  pour le soleil). Toutefois, ces corrections sont numériquement sans effet pour la dynamique terrestre (Guinot, 1997).

Ces considérations sur le temps permettent à présent d'étudier plus avant le système d'équations différentielles régissant la dynamique relativiste au voisinage de la Terre. Le but de ce développement consiste à transformer l'équation (II.45) en une écriture de la forme

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = f(F^i, \frac{dx^i}{dt}) \quad (II.52)$$

qui s'apparente à l'écriture de la relation fondamentale de la dynamique newtonienne. On peut alors aborder la dynamique relativiste, au voisinage de la Terre, sous un angle purement newtonien en introduisant une « action relativiste » que l'on va maintenant développer. Il faut noter que la plupart des logiciels de calcul d'orbite scientifiques sont bâtis sur ce schéma.

Pour cela, on cherche à développer les équations (II.45)

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{F^i}{m} \quad (II.53)$$

en une relation de la forme (II.52), les symboles de Christoffel se calculant à partir de la métrique (II.35). Le temps utilisé est le  $TCG$ . A l'aide de ces éléments, on calcule que<sup>6</sup>

<sup>6</sup>calculs effectués à l'aide du logiciel de calcul formel mathematica

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^i} + 2 \frac{\beta + \gamma}{c^4} U \frac{\partial U}{\partial x^i} + O\left(\frac{1}{c}\right)^5 \\
 \Gamma_{ok}^i &= \delta_k^i \left[ \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} - 2 \frac{\gamma^2}{c^4} U \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2c^3} \left( \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right) + O\left(\frac{1}{c}\right)^5 \\
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{\gamma}{c^2} \left[ \delta_j^i \left( \frac{\partial U}{\partial x^k} - 2 \frac{\gamma}{c^2} U \frac{\partial U}{\partial x^k} \right) + \delta_k^i \left( \frac{\partial U}{\partial x^j} - 2 \frac{\gamma}{c^2} U \frac{\partial U}{\partial x^j} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \delta_{jk} \left( \frac{\partial U}{\partial x^i} - 2 \frac{\gamma}{c^2} U \frac{\partial U}{\partial x^i} \right) \right] + O\left(\frac{1}{c}\right)^5
 \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned}
 \Gamma_{0i}^0 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^i} + 2 \frac{\beta - 1}{c^4} U \frac{\partial U}{\partial x^i} + O\left(\frac{1}{c}\right)^5 \\
 \Gamma_{jk}^0 &= \frac{\gamma}{c^2} \delta_{jk} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{2}{c^2} U \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2c^3} \left( \frac{\partial f_k}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j}{\partial x^k} \right) + O\left(\frac{1}{c}\right)^5
 \end{aligned} \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad (II.54)
 \end{aligned}$$

Ces expressions sont comparables à celles que l'on peut trouver dans (Boucher, 1978), toutefois développées ici à un ordre supérieur. On peut également retrouver de telles expressions dans (Soffel, 1989) par exemple. Ces formulations rendent possibles l'expression de la partie spatiale du système d'équations différentielles. Le système (II.53) est modifié de façon à faire apparaître le temps-coordonnée comme élément de différenciation :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{dx^i}{dt} \right] \\
 &= \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{dt}{d\tau} \right]^{-1} \\
 &= \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \left[ \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{dx^i}{dt} \right]
 \end{aligned} \tag{II.55}$$

A l'aide de la relation (II.53), on peut remplacer dans (II.55), l'expression de  $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2}$  et  $\frac{d^2 t}{d\tau^2}$  ( $x^i \equiv (ct, x, y, z)$ ;  $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{1}{c} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2}$ ), de sorte que l'équation (II.53) est équivalente à ( $v = \frac{d\tau}{dt}$ )

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \underbrace{- \left[ \Gamma_{jk}^i - \frac{1}{c} \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^i}{dt} \right] \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}}_{\text{ac. gravitationnelle et relativiste}} + \underbrace{v^2 \left[ \frac{F^i}{m} - \frac{1}{c} \frac{F^0}{m} \frac{dx^i}{dt} \right]}_{\text{ac. non gravitationnelle}} \tag{II.56}$$

A l'aide des valeurs des symboles de Christoffel (II.54), on déduit que la force de gravitation, à l'ordre  $1/c^2$ , est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \frac{F_G^i}{m} &= \frac{\partial U}{\partial x^i} - \frac{1 + 2\gamma}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} v^i - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right) v^k \\
 & \quad - 2 \frac{\beta + \gamma}{c^2} U \frac{\partial U}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^3 \frac{2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^k} v^i v^k \\
 & \quad - \frac{\gamma}{c^2} \sum_{j,k=1}^3 \left( \delta_j^i \frac{\partial U}{\partial x^k} + \delta_k^i \frac{\partial U}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial U}{\partial x^i} \right) v^k v^j + o(c^{-3})
 \end{aligned} \tag{II.57}$$

Cette expression se résume en

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\mathcal{F}}_G}{m} = & \vec{\nabla}U - [2(\beta + \gamma)U - \gamma v^2] \frac{\vec{\nabla}U}{c^2} \\ & - 2\frac{\gamma + 1}{c^2} (\vec{\nabla}U \cdot \vec{v}) \vec{v} - \frac{1 + 2\gamma}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \vec{v} - \vec{v} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \right) + o(c^{-3}) \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

où  $\vec{\Pi} = (f_1 \ f_2 \ f_3)^T$  et  $U = U_{\oplus} + U_{\tau} + U_{ext}$ .

Le dernier terme, d'expression  $\vec{v} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \right)$  est communément appelé accélération de Lense-Thirring.

On retrouve une expression équivalente, aux derniers termes près, dans (McCarthy, 1996) et (Boucher, 1978). Une équation légèrement plus générale peut être trouvée dans (Brumberg, 1991). Une discussion assez riche des effets à long terme de l'accélération ppn est menée dans (Soffel, 1989), à l'aide des équations de Lagrange. Une approche identique et très fouillée qualitativement est proposée dans (Cohas, 1990).

Force	Amplitude / force principale	radiale	tangentielle
$\vec{\nabla}U$	1	×	
$\gamma v^2 \frac{\vec{\nabla}U}{c^2}$	$6.10^{-9}$	×	
$2\frac{\gamma + 1}{c^2} (\vec{\nabla}U \cdot \vec{v}) \vec{v}$	$10^{-10}$		×
$\frac{1 + 2\gamma}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \vec{v}$	$10^{-11}$		×
$\vec{v} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \right)$	$\simeq 0$		

Le tableau précédent montre les ordres de grandeur de chaque accélération pour un satellite comme TOPEX-POSEIDON. Pour mémoire, on rappelle que le terme d'aplatissement dynamique de la Terre vient en  $10^{-3}$  du terme principal et que les autres termes du développement apparaissent en  $10^{-6}$  du terme principal.

Les précisions atteintes sur la détermination des ondulations du géoïde sont, pour les modèles géopotentiels globaux de l'ordre de 40 à 50 cm selon que des données de gravité complètent avantagement ou non les données satellitaires. Ces précisions descendent à moins de 20 cm au niveau de la mer, compte-tenu des données altimétriques (Lemoine et al., 1997). Pour les géoïdes locaux qui s'appuient quant à eux sur des données gravimétriques et de nivellement, les précisions atteintes sont inférieures à la dizaine de centimètres en plaine et de l'ordre de 10 cm en zone montagneuse ou aux limites de zone de calcul (Jiang, 1997). On constate donc que la finesse de restitution des géoïdes

qui justifierait l'usage de termes correctifs de nature relativiste sur la définition de cette surface n'est pas encore atteinte. Toutefois, pour les géoïdes locaux, certifier une précision de l'ordre du centimètre, précision qui semble devoir être atteinte sous peu, nécessite de se prémunir d'emblée contre des termes influant sur l'ordre de grandeur immédiatement inférieur. Dans ce cas, les considérations sur le géoïde relativiste sont sur le point d'être concrètement utiles et la question de sa définition devrait d'ores et déjà être posée. Toutefois, il convient de nuancer ce propos dans la mesure où une définition relativiste du géoïde trouve son sens essentiellement dans la perspective de géoïde globaux centimétriques. Quoi qu'il en soit, la question reste ouverte et devrait, à terme, devenir d'actualité.

On vient d'étudier l'impact de la prise en compte de la théorie de la relativité générale sur la description du modèle de forces qui régit la dynamique au voisinage de la Terre. Il est donc clair que, même à basse vitesse, les modifications relativistes de la gravitation sont perceptibles. Le géoïde terrestre, surface équipotentielle du champ, est un objet d'étude essentiel pour la géodésie. Il est donc naturel de s'interroger sur les modifications du concept de géoïde dans le cadre de la relativité.

## 5. Le géoïde terrestre en relativité

Le géoïde terrestre est généralement considéré de façon distincte des systèmes de références géométriques car la gravitation et le temps (mesures de distances) ne sont pas liés directement en mécanique newtonienne. Les développements précédents montrent que, dès qu'on se place dans un cadre relativiste, gravitation et temps sont deux grandeurs intimement liées par l'intermédiaire de la métrique de l'espace-temps. La définition théorique du géoïde en mécanique newtonienne repose sur une abstraction : la notion d'équipotentielle d'un champ scalaire. Néanmoins, la réalisation de cette surface est de nature « phénoménologique » : elle repose sur des expériences mettant en évidence la gravitation et la perception qu'on peut en avoir. La chute d'une masse d'épreuve est le domaine d'étude de la gravimétrie ; la trajectoire d'un satellite, perturbée par les anomalies du champ, conduit aux grandes longueurs d'ondes du champ, et donc du géoïde ... Or ces phénomènes sont modifiés, dans leur expression, par l'usage de la théorie de la relativité générale pour la modélisation de l'environnement terrestre. Il en découle que la notion même de géoïde doit être envisagée dans ce nouveau contexte.

Le géoïde, en tant que surface équipotentielle du champ de pesanteur, peut être réalisé par l'intermédiaire de deux types de mesures différentes :

- **mesures de fréquences d'horloges** : au premier ordre en  $1/c^2$ , la fréquence d'horloge dépend, dans le cadre de la relativité générale, du



champ de pesanteur :

$$\begin{cases} v &= 1 - \frac{W}{c^2} \\ W &= U + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

- **mesures de la pesanteur terrestre** : le géoïde est directement relié à la mesure de  $\vec{\gamma}$ , pesanteur terrestre, par l'intermédiaire de la formule de Stokes et du gradient  $\vec{\gamma} = \vec{\nabla}W$  du potentiel de pesanteur.

Ces deux approches sont convergentes au niveau de précision manipulée ici, et qui correspond déjà à un cadre post-newtonien de métrique conforme à l'équation (II.28). Le potentiel newtonien utilisé dans les expressions précédentes est régularisé des termes variables dans le temps : on s'attache ici à définir une surface stable dans le temps. Une autre conception, tout aussi légitime, pourrait être d'adopter comme définition du géoïde celle d'une véritable équipotentielle du champ de pesanteur, y compris dans sa variabilité temporelle. Ce n'est pas le parti pris ici. Pour être un peu plus précis dans ce que l'on entend par régularisé, on adoptera pour définition de  $U$  l'expression suivante ( $W_{\oplus}$  : potentiel de pesanteur terrestre ;  $W_{\oplus} = U_{\oplus} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$ ) :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \langle W_{\oplus}(t) + U_{\tau}(t) + U_{ext}(t) \rangle_t \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (W_{\oplus}(t) + U_{\tau}(t) + U_{ext}(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

T sera en fait une période d'intégration dont la durée sera essentiellement dictée par les mesures dont on dispose. Il est clair que rien ne permet de supposer que  $\langle U_{\tau} \rangle_t = 0$ , de même que  $\langle U_{ext} \rangle_t = 0$ . Avec la définition que l'on adopte de  $U$  sont intégrés des effets dits « permanents », que seule une construction théorique basée sur des hypothèses délicates à vérifier permet de dissocier du champ principal. On pourra citer à cet égard la marée permanente (Poutanen et al., 1996) dont le problème est abordé dans les conventions IERS (McCarthy, 1996).

Enfin, un dernier commentaire sur lequel nous reviendrons un peu plus loin mais qu'il convient de garder à l'esprit : il a déjà été mentionné que le passage à la limite dans l'équation (II.60) est réalisé concrètement par la moyenne, sur une période de mesure donnée, des réductions de ces observations au champ de pesanteur. Dès lors que la moyenne précédente fait intervenir des mesures – donc sujettes à erreurs de mesure – l'hypothèse implicitement pratiquée est celle de l'ergodicité du géoïde : la moyenne dans le temps permet-elle d'accéder à la moyenne des phénomènes aléatoires entrant en jeu à tout instant de mesure et donc d'accéder à la surface ? Il n'est pas question de trancher cette question ici, mais l'équation (II.60) impose cette hypothèse que nous effectuons.

### 5.1. Les mesures d'horloges

En relativité ppn développée au premier ordre en  $1/c^2$  (métrique à l'équation II.28), deux horloges situées sur le géoïde mesurent une même fréquence. Si l'on adopte à présent une métrique ppn développée à l'ordre  $1/c^4$  (équation II.35), la fréquence d'une horloge est donnée par (II.36) et donc, le rapport de deux fréquences est (Sillard, 1996b)

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{g_{00}}_2}{\sqrt{g_{00}}_1} = \frac{1 - W_2^*/c^2}{1 - W_1^*/c^2} \quad (\text{II.61})$$

avec

$$W^* = \bar{U} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{[\omega^2(x^2 + y^2)]^2}{8c^2} - \frac{2\beta - 1}{2} \frac{\bar{U}^2}{c^2} + \frac{2\gamma + 1}{2} \frac{\bar{U}\omega^2(x^2 + y^2)}{c^2} + \frac{\omega}{c^2}(xf'_1 - yf'_2) + o(c^{-3}) \quad (\text{II.62})$$

On retrouve une formule comparable dans (Soffel, 1989), légèrement moins développée. L'expression précédente est un développement exact à l'ordre  $1/c^3$ . Les  $f'_i$  utilisés dans cette expression sont définis à l'équation (II.39) et sont, au premier ordre, indépendants du temps. Une première définition admissible du géoïde basée sur les fréquences d'horloge est

$$W^* = Cte \quad (\text{II.63})$$

L'un des intérêts de l'adoption d'une telle définition est de s'affranchir de tout effet, autre que l'effet principal, et lors du passage de TT à TCG au voisinage de la Terre (cf. § 4. et la discussion qui s'ensuit).

### 5.2. La gravimétrie

La gravimétrie va s'attacher à mesurer l'amplitude et la direction de la force de pesanteur et à l'interpréter comme dérivant d'un potentiel via un gradient.

Considérons un point situé à la surface de la Terre, immobile dans le référentiel tournant de métrique (II.38). Écrivons la relation de la dynamique relativiste (équation II.29) appliquée à ce point. La quadri-vitesse est donnée par  $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ . La condition d'immobilité spatiale du point dans le repère tournant s'écrira (Sillard, 1996b)  $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$  pour  $1 \leq i \leq 3$ . L'espace tangent au point considéré aura donc pour métrique  $d\tau^2 = g_{00}dt^2$ . Par conséquent, la relation (II.29) devient

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \frac{c^2}{g_{00}}\Gamma^i_{00} = \frac{F^i}{m} \quad (\text{II.64})$$

Par ailleurs,  $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0$ , pour tout  $i$ , car le point est immobile spatialement et  $\bar{g}_{00}$  est indépendant de  $t$ . La quadri-force  $\mathbf{F}$  de réaction du sol se décompose de la façon suivante ( $U_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}$ ,  $f'_i = \frac{\partial f'_i}{\partial x^\alpha}$ ) :

$$\begin{aligned}
 \frac{F^0}{m} &= \omega(yU_x - xU_y)/c + o(c^{-2}) \\
 \frac{F^1}{m} &= -\omega^2x - U_x + \frac{\beta + \gamma - 1}{c^2}U^2)_x \\
 &\quad - \frac{1}{c^2}[\omega^4x^3 + \omega^4xy^2 + 2\omega^2xU + \omega^2xyU_y \\
 &\quad + (\gamma + 1)\omega^2x^2U_x + \gamma\omega^2y^2U_x - \omega f'_2 - \omega x f'^x_2 + \omega y f'^y_1] + o(c^{-3}) \\
 \frac{F^2}{m} &= -\omega^2y - U_y + \frac{\beta + \gamma - 1}{c^2}U^2)_y \\
 &\quad - \frac{1}{c^2}[\omega^4y^3 + \omega^4yx^2 + 2\omega^2yU + \omega^2yxU_x \\
 &\quad + (\gamma + 1)\omega^2y^2U_y + \gamma\omega^2x^2U_y - \omega f'_1 - \omega y f'^y_2 + \omega x f'^x_1] + o(c^{-3}) \\
 \frac{F^3}{m} &= -U_z + \frac{\beta + \gamma - 1}{c^2}U^2)_z - (\gamma + 1)\frac{\omega^2}{c^2}(x^2 + y^2)U_z \\
 &\quad - \omega x f'^x_2 + \omega y f'^y_1 + o(c^{-3})
 \end{aligned} \tag{II.65}$$

La notion de gradient est définie de façon générale pour une sous-variété riemannienne de codimension 1, de sorte que le gradient génère l'orthogonal à l'espace tangent à la sous-variété au point considéré (Sillard, 1996c). Pour une fonction  $\Theta$  à valeurs réelles, on définit le gradient par (Abraham et Marsden, 1978) :

$$(\mathbf{grad}\Theta)^i = \varepsilon g^{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x^j} \tag{II.66}$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

Outre le fait que cette définition est justifiée mathématiquement par la propriété d'orthogonalité recherchée, le vecteur gradient ainsi défini est un vecteur contravariant, ce qui est convenable vis-à-vis de la géométrie : il s'agit en effet d'une quantité extrinsèque à la sous-variété donc invariante par changement de paramétrage de la sous-variété (équation A.13). On trouvera une définition équivalente dans (Hotine, 1969). Il faut noter, et c'est important pour la suite, que cette définition est construite au signe près puisque l'orthogonal est lui-même défini au signe près (cf. annexe A §10.). L'alternative à cette définition aurait été d'adopter un gradient classique sans usage de la métrique, mais dans ce cas il s'agit d'une définition purement mathématique qui ne présente pas de propriété géométrique particulière.

En appliquant la définition (II.66) et en identifiant  $W^\circ$  à l'aide de la relation

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{grad}W^\circ)^i &= -g^{ij} \frac{\partial W^\circ}{\partial x^j} \\
 &= \frac{F^i}{m}
 \end{aligned} \tag{II.67}$$

on obtient pour  $W^\circ$ , l'expression<sup>7</sup> :

$$W^\circ = \bar{U} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + (1 - \beta)\frac{\bar{U}^2}{c^2} + \frac{1}{4}\frac{(\omega^2x^2 + \omega^2y^2)^2}{c^2} + (\gamma + 1)(\omega^2x^2 + \omega^2y^2)\frac{\bar{U}}{c^2} - \frac{\omega xf'_2 - \omega yf'_1}{c^2} + o(c^{-3}) \quad (\text{II.68})$$

Ce développement est exact à l'ordre  $1/c^2$ . Ce résultat est différent de celui obtenu par Soffel (Soffel, 1989) qui utilisait une définition covariante du gradient ( $(\mathbf{grad}\Theta)_i = \frac{\partial\Theta}{\partial x^i}$ ), méthode discutable pour les raisons évoquées plus haut.

Une deuxième définition admissible du géoïde, basée sur la gravimétrie relativiste est

$$W^\circ = Cte \quad (\text{II.69})$$

Les expressions (II.62) et (II.68) montrent que si les deux phénomènes dont la mesure permet de réaliser le géoïde terrestre sont compatibles dans le cadre de la relativité ppn développée au premier ordre en  $1/c^2$ , ils ne le sont plus dès qu'on envisage un développement d'ordre supérieur. Par conséquent, la mesure des deux phénomènes ne permet plus de réaliser directement la même surface, et dans ce constat réside une des curiosités de la relativité terrestre.

Pour finir, la table (II.1) propose les ordres de grandeurs des corrections sur la surface usuelles géoïdes exprimées en ondulation du géoïde.

## 6. Les changements de systèmes de coordonnées

Ce sujet mérite de s'y attarder par l'importance qu'il revêt dans le cas spécifique des systèmes terrestres, bien qu'il ne soit en général que fort peu étudié dans les ouvrages de relativité. Comme il a déjà été mentionné, le « choix » du système de référence terrestre est implicite dans la structuration des équations de modélisation des observations de géodésie. Physiquement, l'information de système de référence portée par les observations est pour partie déficiente, et

<sup>7</sup>Là encore, il convient de mentionner que le gradient défini en (II.66) donne entière liberté au choix du signe de  $W^\circ$ . Ici, on a pris  $(\mathbf{grad}W^\circ)^i = -g^{ij}\frac{\partial W^\circ}{\partial x^j}$ . Du reste, si la convention contraire avait été choisie pour la métrique  $(-, +, +, +)$ , cet artifice ne serait pas nécessaire et l'on pourrait adopter  $(\mathbf{grad}W^\circ)^i = g^{ij}\frac{\partial W^\circ}{\partial x^j}$ . Le degré de liberté sur la définition du gradient peut paraître à première vue surprenant. En réalité, il n'en est rien : les symboles de Christoffel sont indépendants du choix de la signature de la métrique. Par conséquent, la valeur du gradient (i.e. la quadri-force  $-\mathbf{F}$ ) est indépendante de ce choix. De ce fait, si dans (II.66) on omet le  $\pm$ , un changement de signe de la métrique entraîne un changement de signe du potentiel alors que le gradient devrait rester identique puisque le changement de signe de la métrique relève uniquement d'une convention. L'indétermination de signe dans la définition du gradient rend implicitement le signe du potentiel indépendant du signe de la métrique.

terme	correction
$U^2/c^2$	4.4 mm
$\omega^2(x^2 + y^2)U/c^2$	15 $\mu m$
$[\omega^2(x^2 + y^2)]^2/c^2$	53 nm
$\omega f'_i x^j/c^2$	13 $\mu m$

TAB. II.1: Ordres de grandeur de la correction relativiste du géoïde

cette déficience est comblée par des choix du calculateur. Ce point sera discuté d'un point de vue statistique et qualitatif au chapitre III. Par contre, le caractère orthonormé du repère sous-jacent est vérifié, par construction des équations de réduction des observations. Cette propriété justifie l'usage des similitudes comme transformation entre deux réalisations de système de référence géodésiques. Dans l'espace euclidien usuel  $(\mathbb{R}^3, I)$ , toute symétrie est la composition d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation. Le groupe des rotations  $SO(3)$  de  $\mathbb{R}^3$  est paramétré par trois angles d'Euler par exemple. On pourra se reporter à (Deheuvels, 1981) pour une construction à l'aide des quaternions de norme un de la paramétrisation précédente (cf. aussi annexe B). Si la paramétrisation de  $SO(3)$  à l'aide des angles d'Euler est assez classique (cf. équation II.70),

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.70})$$

le problème est plus complexe pour un espace pseudo-euclidien de métrique non dégénérée, mais non strictement positive, comme c'est le cas de l'espace de Minkovski.

Toujours à l'aide des quaternions de norme un (complexes), on montre que le groupe des isométries de l'espace de Minkovski est paramétré par 3 angles de rotation dans l'espace et 3 angles de rotation complexes :

$$\left| \begin{array}{l} R_{yz}(\omega) = \\ R_{tz}(\theta) = \end{array} \right. \begin{pmatrix} \text{ch}\omega & \text{sh}\omega & 0 & 0 \\ \text{sh}\omega & \text{ch}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.71})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie par exemple que , selon une telle isométrie :

$$\begin{pmatrix} cdt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}\omega & \text{sh}\omega \\ \text{sh}\omega & \text{ch}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}\omega & \text{sh}\omega \\ \text{sh}\omega & \text{ch}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (\text{II.72})$$

Cherchant à construire le groupe des isométries de l'espace de Minkovski, on retrouve les propriétés générales des isométries riemanniennes (cf. annexe A) : le groupe d'isométrie est dans le cas d'une variété de dimension 4, de dimension au plus égale à 10 – trois rotations spatiales, trois rotations complexes et 4 translations –. A cela s'ajoute un facteur d'homothétie lorsqu'on s'intéresse aux similitudes.

Lorsqu'on se place dans le cadre de la relativité générale, la métrique de Minkovski ne constitue que le premier ordre d'une métrique post-newtonienne. Il convient alors d'élaborer une isométrie à un ordre de développement équivalent à celui de la métrique post-newtonienne utilisée. Le premier terme de cette isométrie correspond à l'isométrie de l'espace de Minkovski.

Par exemple, adoptons la métrique post-newtonienne d'ordre 0 en  $1/c$ , (équation II.28)

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij} = \text{diag} \left( 1 - \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1 \right) \\ c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - 2U dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + o(1/c) \end{array} \right. \quad (\text{II.73})$$

et cherchons la transformation qui laisse invariante cette quantité à l'ordre 0. On note  $T_0$  le terme d'ordre 0 de la transformation <sup>8</sup> :

$$T_0 = \begin{pmatrix} \text{ch}\omega & \text{sh}\omega \\ \text{sh}\omega & \text{ch}\omega \end{pmatrix}$$

donc

$$T_0^T g T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{2U}{c^2} \begin{pmatrix} \text{ch}^2\omega & \text{ch}\omega\text{sh}\omega \\ \text{ch}\omega\text{sh}\omega & \text{sh}^2\omega \end{pmatrix} \quad (\text{II.74})$$

Comme la métrique (II.73) est développée à l'ordre 0, il convient de restreindre l'expression (II.74) à cet ordre :

$$T_0^T g T_0 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2U}{c^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{sh}^2\omega \begin{pmatrix} \frac{2U}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or

$$\text{sh}^2\omega \begin{pmatrix} \frac{2U}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sh}\omega\sqrt{\frac{2U}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sh}\omega\sqrt{\frac{2U}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>8</sup>On travaille ici en  $(cdt, dx)$  pour plus de légèreté dans les expressions ;  $g = \text{diag}(1 - 2U/c^2, -1)$ .

et donc

$$\begin{cases} (T_0 + T_1)^T g (T_0 + T_1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2U}{c^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ T_1 = \begin{pmatrix} \text{sh}\omega\sqrt{\frac{2U}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ceci nous conduit à une paramétrisation du groupe des isométries de la variété (II.73)

$$\begin{cases} R_{yz}(\omega) = \begin{pmatrix} \text{ch}\omega + \text{sh}\omega\sqrt{\frac{2U}{c^2}} & \text{sh}\omega & 0 & 0 \\ \text{sh}\omega & \text{ch}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + o(1/c^2) \\ R_{tz}(\theta) \text{ inchangé} \end{cases} \quad (\text{II.75})$$

Les critères de symétrie de la première forme étudiée ci-dessus ne sont pas les seuls intéressants dans le cadre de la relativité. En effet, la métrique de l'espace-temps est obtenue par intégration d'équations différentielles (les équations d'Einstein - cf. § 1.). Or ces équations possèdent elles-mêmes des symétries qui, ré-introduites dans la première forme, conduisent à une deuxième classe d'opérations préservant la métrique et appelées transformation (ou changement) de jauge.

Considérons deux systèmes de coordonnées 1 et 2 :

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta}^1 = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta}^2 = \eta_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta} \end{cases}$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  désigne la métrique de Minkovski. Le tenseur métrique déduit de ces deux systèmes de coordonnées est de la forme (Tourrenc, 1992)

$$i \in \{1, 2\}, R_{\alpha\beta\mu\sigma}^i = \frac{1}{2}(h_{\beta\mu, \alpha\sigma} + h_{\alpha\sigma, \beta\mu} - h_{\alpha\mu, \beta\sigma} - h_{\beta\sigma, \alpha\mu})$$

et au premier ordre

$$R_{\alpha\beta\mu\sigma}^1 = R_{\alpha\beta\mu\sigma}^2 \iff \phi_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha, \beta} + \varepsilon_{\beta, \alpha} \quad (\text{II.76})$$

où  $\{\varepsilon^\mu(x)\}$  est un ensemble de quatre fonctions arbitraires de  $x^\alpha$  du premier ordre. Les transformations (II.76) qui permettent de passer de  $h$  à  $\phi$  sont appelées transformations de jauge. La métrique, ainsi qu'étudiée au § 2. est issue de la résolution des équations d'Einstein. Une transformation de jauge laissant invariante ces équations différentielles, la métrique possède un degré de liberté spécifié par l'équation (II.76).

## CHAPITRE III

# DÉFINITION STATISTIQUE DES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TERRESTRES

### 1. Introduction

La notion de système de référence est à la fois riche en physique théorique et impropre à l'expression des problèmes de physique observationnelle : la physique postule l'existence de systèmes de référence (espaces euclidiens ou pseudo-euclidiens munis d'une base orthonormée) mais ces êtres ne suffisent pas à une mise en équations coordonnées d'observations de phénomènes physiques. L'outil adapté est le système de coordonnées qui se déduit du système de référence par l'adjonction, à l'espace euclidien, d'une structure affine (Schwartz, 1991; Schwartz, 1992). Ainsi, chaque point de l'espace est repéré par ses composantes dans la base de l'espace euclidien choisi. Ces composantes sont appelées coordonnées. Le choix du repère affine sur lequel s'appuie le système de coordonnées est néanmoins purement conventionnel dans la plupart des phénomènes physiques, pourvu que le repère choisi soit orthonormé. On en déduit une propriété essentielle des observations physiques : leur expression est invariante sous l'action des similitudes de l'espace affine sous-jacent<sup>1</sup>. Cette propriété est directement liée aux considérations sur les invariants de la géométrie de l'espace qui conduisent à une classe de transformations caractéristiques de la géométrie de l'espace : transformation de Galilée, transformation de Lorentz, transformation de Lorentz ppn . . . (cf. chapitre II).

La géodésie, de son côté, s'attelle à la réalisation de systèmes de référence, c'est-à-dire à donner des coordonnées à des événements se produisant dans l'environnement terrestre. De la propriété d'invariance des systèmes de réfé-

---

<sup>1</sup>En fait ce point peut être discutable : l'expression de la modélisation des observations est invariante, mais certaines constantes peuvent être changées. Par exemple, les constantes caractéristiques des unités physiques. Ainsi, on pourra dire que les expressions sont invariantes sous l'action des similitudes de l'espace, et les constantes invariantes sous l'action des isométries de l'espace.



rence terrestres sous l'action de similitudes s'ensuivront des propriétés algébriques du même type sur les réalisations de systèmes terrestres. Ces considérations ont donné lieu au développement d'une « théorie des invariants » des réseaux géodésiques (Grafarend et Schaffrin, 1976). Les conséquences statistiques de cette théorie sont extrêmement intéressantes et ont suscité une littérature fournie. Parmi les auteurs qui les premiers ont décelé l'intérêt de formaliser l'impact de cette théorie sur la réalisation des réseaux géodésiques et leur précision, on peut citer (Meissel, 1965; Meissel, 1969) et (Baarda, 1973). Cette théorie est ici revisitée dans le but d'en extraire les éléments constitutifs d'une définition statistique des réalisations de systèmes de référence terrestres.

## 2. Quelques considérations sur la statistique des calculs géodésiques

Les compensations d'observations géodésiques présentent certaines caractéristiques sur lesquelles il convient de revenir : tout d'abord, la multiplication des observations repose sur le postulat<sup>2</sup> que la redondance d'information conduit à une meilleure connaissance des paramètres explicatifs des observations. Ce point n'est évidemment pas spécifique des observations géodésiques mais commun aux sciences métrologiques. Ce postulat est assimilé depuis très longtemps et bien avant le développement des outils probabilistes qui ont permis d'étayer l'argumentation.

D'une manière générale, la réduction d'observations  $\Xi \in \mathbb{R}^n$  à un jeu de paramètres  $\xi \in \mathbb{R}^p$ , avec  $p < n$ , s'écrit fonctionnellement :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \xi \mapsto f(\xi) = \Xi \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

L'une des difficultés de l'analyse de problèmes du type (III.1) réside dans la dépendance complexe qui existe entre les observations et les inconnues ainsi que dans l'absence de solution simple – en réalité, l'absence de solution dans le cas général car  $\Xi \notin f(\mathbb{R}^p)$ , en raison des erreurs de mesures – au problème linéarisé autour d'une solution approchée  $\xi_0$ .

$$\begin{cases} X = \xi - \xi_0 \in \mathbb{R}^p \\ Y = \Xi - f(\xi_0) \in \mathbb{R}^n \\ A = f'(\xi_0) \in \mathcal{M}_{n,p} \\ AX = Y \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Jusqu'aux travaux de Gauss et Legendre, on percevait l'intérêt qu'il y avait à augmenter le nombre d'observations, tout en opérant un choix empirique

<sup>2</sup>Le terme « postulat » suppose l'absence de modélisation statistique; cette dernière apporte une confirmation de cette affirmation

parmi celles qui semblaient convenir au mieux au problème posé. Cette méthode (Laplace, 1812) était appelée « méthode des milieux » et constituait une extension de la moyenne arithmétique adoptée lorsque  $p = 1$ . En outre, les observations ne sont pas explicables fidèlement par  $f$  de sorte que résoudre un système linéaire de type (III.2) revient à déterminer  $X$  au mieux vis-à-vis des observations  $Y$ . Pour tenir compte convenablement de la dispersion des observations par rapport à un modèle théorique, on est conduit à travailler en variables aléatoires et à considérer  $Y$  comme un échantillon de  $n$  réalisations de variables aléatoires. Le caractère aléatoire de  $Y$  justifie celui de  $X$ , et sous les hypothèses<sup>3</sup>

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Y) = A\mathbb{E}(X) \\ \text{var}(Y) = \Sigma \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

on montre que l'estimateur de  $X$  linéaire en  $Y$  et de précision maximale est

$$\hat{X} = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} Y \quad (\text{III.4})$$

Sa précision est  $\text{var}(\hat{X}) = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1}$ . Ce résultat est issu du théorème de Gauss-Markov (cf. chapitre V). Il se trouve que l'estimateur (III.4), optimal au sens de la variance, se déduit d'un critère de minimisation de l'écart entre le modèle  $f(\xi)$  et les observations  $\Xi$ , ce critère étant quantifié par la norme euclidienne de la différence des deux vecteurs modèle-observations ( $\varphi : \xi \in \mathbb{R}^p \mapsto \varphi(\xi) = \|f(\xi) - \Xi\|_n^2$ ) où  $\|\cdot\|_n$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . La méthode précédente est appelée méthode des moindres carrés car elle minimise la somme des carrés des résidus de mesures (compensé moins observé) et constitue la méthode la plus communément employée pour la réduction d'observations géodésiques.

Tout ce développement sur une méthode bien connue se justifie par la dimension probabiliste des données géodésiques et de la mise en évidence de l'influence du paramétrage choisi sur la résolution du problème de compensation. Ce n'est qu'au niveau de la paramétrisation du problème que l'on adopte un système de coordonnées. De sorte que les observations ne sont pas elles-mêmes porteuses d'information coordonnée, et une part de l'expression de la solution au problème de compensation est conventionnelle : au-delà du choix de la modélisation physique de l'observation, le résultat d'un calcul de géodésie comprend une part directement liée à la définition du système de référence terrestre de travail.

Cependant, le problème n'est pas aussi simple que pourraient le laisser croire ces quelques phrases. Un repère orthonormé comprend 7 degrés de liberté (3 en translation, 1 en échelle et 3 en orientation) – on se place ici dans l'espace physique de la mécanique newtonienne –. Dans le cas de la réalisation

<sup>3</sup> $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique et  $\text{var}$  la variance

de systèmes terrestres, un certain nombre de contraintes de nature physique existent et viennent en réduction des degrés de liberté potentiels du repère. Par exemple, un satellite en orbite autour de la Terre « voit » le centre des masses de la Terre comme origine naturelle du repère. Les équations de la dynamique newtonienne posées en explication des observations effectuées à l'aide du satellite privilégient le centre des masses et réduisent, par la physique des observations, les 3 degrés de translation du repère. On aboutit à la conclusion que la part d'arbitraire dans la réalisation du système terrestre, résultat du calcul de géodésie spatiale, va dépendre également de la physique des observations ainsi que du modèle adopté. De fait, l'expérience montre que tous les degrés de liberté ne sont jamais simultanément réduits au même niveau par la physique. De ces constatations simples découle un certain degré d'équivalence dans la réalisation de systèmes de référence terrestre que l'on va chercher à caractériser au long de ce chapitre.

### 3. Les réseaux libres

#### 3.1. Généralités

On a coutume en géodésie de distinguer plusieurs niveaux de configuration (*design* en anglais) dans la compensation de réseaux géodésiques. On peut mentionner quatre étapes (Grafarend, 1974) :

- configuration d'ordre zéro : résolution du problème du système de référence qui repose sur le passage des observations géodésiques aux coordonnées cartésiennes des points du réseau.
- configuration de premier ordre : choix des observations et donc des points du réseau. On identifie à ce problème tout ce qui touche à la configuration de la matrice modèle du problème (matrice  $A$ , équation III.3).
- configuration de deuxième ordre : choix de la pondération (matrice  $\Sigma$ , équations III.3 et III.4).
- configuration de troisième ordre : quelles observations ajouter à l'information déjà existante pour l'améliorer ?

Les réseaux libres interviennent dans la configuration d'ordre zéro. Un réseau libre est le résultat de l'ajustement de coordonnées de stations observées sans aucune fixation du système de coordonnées. Ainsi, dans la plupart des cas, le système de coordonnées n'ayant pas été renseigné dans le calcul, une compensation en réseau libre conduit à une équation normale singulière dont le déficit de rang est inférieur ou égal à 7, les 7 degrés de liberté dans la définition du système de référence. En d'autres termes, cette situation est due au fait que l'expression des coordonnées, résultat de la compensation, dépend d'un

système de coordonnées, tandis que les observations sont invariantes relativement à tout changement de repère (Grafarend et Schaffrin, 1976). De telle sorte que la matrice modèle  $A$  liant les observations aux coordonnées reflète l'absence de définition du système de référence et présente un déficit de rang égal au nombre de paramètres nécessaires à la définition du système. Par extension, il existe un nombre infini de jeux de coordonnées solution du problème de moindres carrés. Lorsqu'une solution  $X_0$  est obtenue, l'espace des solutions est  $X_0 + \text{Ker}(A)$  (Dermanis, 1994a). Ce point est la conséquence du théorème de décomposition canonique des morphismes d'espaces vectoriels (cf. annexe B).

Une littérature abondante s'est développée autour du concept de réseau libre et des méthodes optimales pour déduire d'une équation normale singulière un jeu de coordonnées issu d'un choix de référentiel. Les choix usuels de contraintes à ajouter à l'équation normale d'un réseau libre sont (Mittermayer, 1972; Perelmuter, 1979; Blaha, 1982b; Blaha, 1982a; Blaha, 1982c; Dermanis, 1994a; Xu, 1997) :

- un estimateur des moindres carrés de norme minimale,
- la trace de la variance de cet estimateur minimale (étant donné que la variance est positive et symétrique, la trace est une norme, par conséquent trace minimale équivaut à précision maximale).

Mais ces considérations sont purement mathématiques et s'appuient, pour réduire le déficit de rang, sur des inverses généralisées (Bjerhammar, 1973). Cette méthode présente la particularité de conduire, en général, à des estimateurs biaisés des coordonnées (Grafarend et Schaffrin, 1974). En fait, adopter une inverse généralisée nécessite de compléter le rang de la matrice à inverser par une condition de régularisation. Cette condition, si elle ne repose pas sur l'identification des invariants propres des inconnues, conduit nécessairement à des estimateurs déconnectés de la réalité. Pour remédier à cet inconvénient, une démarche consiste à s'appuyer sur les invariants géométriques des systèmes de coordonnées géodésiques et à combler le déficit de rang du système normal par l'adjonction de conditions restreintes aux seuls degrés de liberté que procurent les invariants. D'un point de vue algébrique, considérons le système d'équations normales déduit de (III.2) et (III.3) :

$$A^T \Sigma^{-1} A X = A^T \Sigma^{-1} Y \quad (\text{III.5})$$

Supposons que ce système ne soit pas inversible, c'est-à-dire que<sup>4</sup>  $\text{rg}(A^T \Sigma^{-1} A) = p - c < p$ . L'inconnue  $X$  de l'équation (III.5) est alors appelée « **réseau libre** » (Blaha, 1982b). Dans ce cas, il faut ajouter à (III.5), au minimum,  $\overline{c}$  conditions ou contraintes pour que le système résultant soit inversible.

<sup>4</sup>rg désigne le rang de la matrice.

Dans ce cas, toute contrainte de la forme<sup>5 6</sup>

$$\begin{cases} BX = C, B \in \mathcal{M}_{r,p}, r \geq c \\ \text{Im}(B^T) + \text{Im}(A^T) = \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

sera une contrainte de régularisation du problème (III.5). On dira que ces contraintes sont minimales (Schaffrin, 1985) lorsque la somme des images est directe, soit explicitement

$$\begin{cases} BX = C, B \in \mathcal{M}_{r,p}, r = c \\ \text{Im}(B^T) \oplus \text{Im}(A^T) = \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Il faut remarquer, ainsi que le mentionne (Schaffrin, 1985) qu'il n'est pas nécessaire d'affirmer l'orthogonalité de  $\text{Im}(B^T)$  et  $\text{Im}(A^T)$  pour définir la notion de **contraintes minimales**. Donc la somme directe (III.7) n'est pas nécessairement orthogonale.

### 3.2. Ajustement en réseau libre

En prolongement du problème (III.5), il convient d'évoquer les fondements de l'**ajustement en réseau libre**, tels qu'ils ont été formulés par G. Blaha (Blaha, 1971). Tout d'abord, revenons sur la notion d'inverse généralisée.

Depuis l'étude algébrique de l'inversion d'applications linéaires par E. Moore et R. Penrose dans les années 1950, de nombreux auteurs se sont intéressés à ce sujet. Le problème posé consiste à résoudre, aussi généralement que possible, un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} MX = Y \\ M \in \mathcal{M}_{n,m} \\ \text{rg}(M) \leq \min(n, m) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Ce problème a ensuite été étendu à la résolution d'une équation normale présentant un déficit de rang. Assez récemment, on peut citer, de façon non exhaustive, (Rao et Mitra, 1971) et (Bjerhammar, 1973) qui ont étudié les implications des inverses généralisées dans les domaines de l'optimisation et de la statistique. A un degré moindre, (Blaha, 1971; Grafarend et Schaffrin, 1976; Dermanis, 1977; Blaha, 1982b; Koch, 1987) (et sans doute beaucoup d'autres!) ont contribué à la diffusion des idées et à l'élaboration des concepts, particulièrement en géodésie. Algébriquement, le théorème du rang appliqué au système (III.8) conduit à :

$$n = \text{rg}(M) + \dim \text{Ker } M \quad (\text{III.9})$$

<sup>5</sup>Im désigne l'image de l'application linéaire associée à la matrice considérée dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée

<sup>6</sup>On rappelle que pour toute matrice  $M$ ,  $\text{Ker}(M)^\perp = \text{Im}(M^T)$

Supposons que  $Y \in \text{Im } M$ . On dit, dans ce cas, que le système est consistant (Dermanis, 1977; Dermanis, 1985). Dans ce cas, il existe  $\check{X}$  tel que  $M\check{X} = Y$ . En vertu du théorème de décomposition canonique des applications linéaires (cf. annexe B), il existe  $M^-$  telle que  $\check{X} = M^-Y$ . Par conséquent,  $M\check{X} = MM^-Y$  soit  $MM^-M\check{X} = M\check{X}$ . Naturellement, si  $\text{Ker } M \neq \{0\}$ ,  $\check{X}$  n'est pas unique et l'espace solution de (III.8) est  $\mathcal{S} = \check{X} + \text{Ker } M$ . La relation de consistence est vérifiée pour tout élément de  $\mathcal{S}$ , de sorte que :

$$MM^-M = M \quad (\text{III.10})$$

La relation (III.10) définit  $M^-$ , **inverse généralisée** de  $M$ .  $M^-$  définie par (III.10) n'est pas unique.

Supposons à présent que  $Y \notin \text{Im}(M)$ . Dans ce cas, le système  $MX = Y$  est incompatible et n'a pas de solution. Il convient donc de modifier le problème afin d'en construire un résoluble. Pour cela, on modifie le système linéaire  $MX = Y$  en un calcul de minimum d'une fonction coût  $\varphi(X) = \|MX - Y\|$  qui caractérise l'écart entre le modèle et les observations. La fonction coût la plus utilisée correspond à un coût quadratique,  $\varphi(X) = \|MX - Y\|_n^2$ , où  $\|\cdot\|_n$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . C'est le coût correspondant aux moindres carrés. La meilleure approximation de  $Y$ , au sens des moindres carrés, est obtenue par projection orthogonale de  $Y$  sur  $\text{Im } M$ . Donc l'inverse généralisée d'un système normal sera construite à l'aide de projecteurs orthogonaux. On montre (Dermanis, 1977) que l'inverse ainsi obtenue est une inverse généralisée qui possède la propriété d'être positive. Cette dernière propriété peut être importante car l'inverse généralisée d'une matrice normale est, par extension, la variance de l'estimateur, donc positive. Cette inverse est appelée inverse généralisée réflexive.

Le problème des moindres carrés conduit à une équation normale ( $W$  est une matrice de poids) de la forme :

$$A^T W A X = A^T W Y \quad (\text{III.11})$$

qui, elle, est compatible. L'espace des solutions est de la forme (cf. annexe B)

$$\check{X} = (A^T W A)^- A^T W Y + (I - (A^T W A)^- A^T W A)z \quad (\text{III.12})$$

où  $z$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^p$ . La matrice  $(A^T W A)^- A^T W$  est elle-même une inverse généralisée, au sens de (III.10), appelée inverse généralisée des moindres carrés (Dermanis, 1977).

Enfin, parmi tous les estimateurs  $\check{X}$ , celui de norme minimale est obtenu pour l'usage de la pseudo-inverse  $(A^T W A)^+$ , encore appelée inverse de Moore-Penrose. Cette dernière vérifie, outre la propriété (III.10), (Rao et Mitra, 1971; Dermanis, 1977; Koch, 1987), trois autres relations qui définissent la pseudo-

inverse de façon unique :

$$\begin{cases} MM^+ = (MM^+)^T \\ M^+M = (M^+M)^T \\ M^+MM^+ = M^+ \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Supposons que l'estimateur  $\check{X}$  soit construit avec une telle inverse. On peut montrer que (Koch, 1987; Koch, 1985) parmi les inverses généralisées réflexives, la pseudo-inverse est celle de trace minimale. Une inverse généralisée réflexive vérifie, outre (III.10),  $M^\circ MM^\circ = M^\circ$ . On a alors ( $W^{-1} = \text{var}(Y)$ )

$$\text{var}(\check{X}) = (A^T WA)^\circ + (I - (A^T WA)^\circ A^T W) \Sigma_z (I - WA(A^T WA)^\circ) \quad (\text{III.14})$$

On conclut du théorème précédent que l'estimateur de norme minimale est aussi celui de précision maximale dans la classe des estimateurs construits à l'aide des inverses généralisées réflexives.

$$\begin{cases} \check{X} = (A^T WA)^+ A^T WY \\ \text{var}(\check{X}) = (A^T WA)^+ \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

G. Blaha aboutit à la formulation (III.15) en construisant un jeu de contraintes minimales vérifiant, outre (III.7), (Blaha, 1982b; Dermanis, 1977)

$$AB^T = 0 \quad (\text{III.16})$$

La relation (III.16) est justifiée par la constatation suivante : reprenons la relation (III.6) et la distinction de cette relation avec la relation (III.7). Supposons (III.6) vérifiée. La contrainte  $BX = C$  est une contrainte de régularisation quelconque. Ajouter  $AB^T = 0$  implique que si  $X \in \text{Im}B^T$ , alors  $AX = 0$  donc  $X \in \text{Ker}A$ . Or par définition,  $\text{Ker}A = (\text{Im}A)^\perp$ , et donc imposer (III.16) en sus de (III.6) conduit à une relation de type (III.7) où la somme directe est aussi orthogonale.

$B$  est appelée, dans ce cas, matrice d'**ajustement en contraintes internes**. (III.15) est obtenu, par exemple, en résolvant le système conditionné (Blaha, 1982b)

$$\left( \begin{array}{c|c} A^T WA & B^T \\ \hline B & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T WY \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

où  $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à la condition  $BX = 0$ . Cette dernière méthode est extrêmement importante car elle permet le calcul direct de l'estimateur de norme minimale et de sa variance, à partir d'équations matricielles inversibles.





Afin d'éviter tout problème théorique, on prendra dans la suite  $\mu = 0$ . Les conséquences de la relation d'équivalence (III.18) sont multiples et essentielles :

- La relation (III.18) conduit à identifier une classe d'équivalence de repères et formalise statistiquement les degrés de liberté géométriques qui existent dans la construction du système de coordonnées.
- Il est clair que la classe d'équivalence associée à tout lot d'observations va être un outil sur lequel il faudra travailler pour choisir, dans la classe d'équivalence, un élément privilégié selon des critères divers, comme par exemple l'élément de norme euclidienne minimale ou de précision maximale. Ce dernier critère est souvent celui retenu (cf. §5.)
- Le choix de  $D$  n'est en général pas immédiat. On a vu que lorsque l'on est confronté à un système normal singulier, l'idéal, pour respecter la physique des observations, est d'instaurer des contraintes minimales de régularisation. Le souci principal du calculateur doit être de conserver l'information portée par la mesure en évitant de la fausser par un complément de régularisation surabondant. Ainsi, pour un réseau terrestre global réalisé par un système de positionnement dynamique, l'origine du repère est fixée par les observations elles-mêmes. Il est intuitif, dans ce cas, que le déficit de rang sera au plus de  $4^8$  (échelle et 3 angles d'orientation). Par contre, pour un réseau géodésique local, par exemple obtenu par des mesures de lignes de base GPS, il est probable qu'aucun degré de liberté ne soit fixé. En conclusion, afin d'identifier numériquement les propriétés intrinsèques des observations, il faut construire un indicateur révélateur du « flou » pour chaque composante de la similitude. Cette idée conduit à la définition de l'effet de système de référence (cf. §6.).
- Une autre situation que celle évoquée aux deux alinéas précédents peut survenir : admettons qu'un jeu de coordonnées ait été obtenu d'un lot d'observations complété par des contraintes très lâches sur les coordonnées. Ces contraintes sont en réalité des termes de régularisation ( $\Sigma_0 \gg$  dans le système ci-après) :

$$\begin{cases} NX = K \\ X = X_0 (\Sigma_0) \end{cases} \implies (N + \Sigma_0^{-1})X = K + \Sigma_0^{-1}X_0 \quad (\text{III.21})$$

Dans ce cas,  $(N + \Sigma_0^{-1})$  est inversible mais la variance de  $\hat{X}$  reflète le « flou » lié à l'indétermination de système de référence ( $N$  n'est pas de plein rang) au niveau fixé par  $\Sigma_0$ . Dans ce cas, il ne s'agit plus d'ajouter des contraintes minimales à  $N$  mais d'identifier, au sein de la classe d'équivalence  $[\hat{X}]$  l'élément qui, par exemple, sera de précision maximale. La différence avec les situations précédentes est que l'on connaît

<sup>8</sup>ou 8, si le jeu de coordonnées comprend les vitesses de déplacement des stations

un élément de la classe  $\overline{[X]}$  sans avoir accès au système normal  $NX = K$ .  
On verra au §7. les applications pratiques de ces concepts.

## 5. S-transformations et théorie des erreurs internes

Reprenons la classe d'équivalence (III.18). Cette classe est bâtie sur l'existence d'un vecteur aléatoire  $\theta$  vérifiant,  $D$  étant une matrice fixée de plein rang,

$$X_1 = X_2 + D\theta \quad (\text{III.22})$$

Une fois un représentant de la classe d'équivalence  $\overline{[X_1]}$  connu, il est assez naturel de s'intéresser à la décomposition en somme directe de  $X_1$  selon l'image de  $D$  et un complémentaire dans  $E = \mathbb{R}^p$ . Un complémentaire d'usage assez pratique sera l'orthogonal de  $\text{Im } D$ , de sorte que l'on va s'intéresser à la décomposition de  $X_1$  selon

$$E = \text{Im } D \oplus \text{Im } D^\perp \quad (\text{III.23})$$

L'intérêt de la décomposition de  $\overline{[X_1]}$  selon la somme directe orthogonale (III.23) est qu'elle conduit à identifier, au sein de  $\overline{[X_1]}$ , l'élément « nul »  $X_0$ ,

$$X_1 = X_0 + D\theta_1 \quad (\text{III.24})$$

qui génère la classe d'équivalence par l'intermédiaire de l'image de la matrice  $D$ .

Pour avoir accès à  $X_0$ , on construit le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Im } D$  parallèlement à  $\text{Im } D^\perp$ . Si l'espace euclidien a pour produit scalaire  $W$ , ce projecteur a pour matrice (Saporta, 1990; Sillard, 1998a)

$$P_W = D(D^T W D)^{-1} D^T W \quad (\text{III.25})$$

Le projecteur de  $E$  sur  $\text{Im } D^\perp$  parallèlement à  $\text{Im } D$  a pour matrice  $Q_W = (I - P_W)$ . On constate donc que décomposer  $X_1$  selon (III.23) revient à poser, de façon cohérente avec la décomposition (III.24),

$$\begin{cases} X_0 &= Q_W X_1 \\ D\theta_1 &= P_W X_1 \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

La transformation d'une réalisation de système de référence  $X_1$  selon les équations (III.25) et (III.26) est appelée, dans la littérature géodésique, **S-transformation**<sup>9</sup>. Le premier à avoir introduit ce terme est W. Baarda dont les premiers écrits sur ce sujet remontent aux années 1950. Toutefois, les implications complètes de la transformation (III.26) ne seront approfondies qu'en 1973

<sup>9</sup>S-transformation du hollandais « Schrankingstransformaties » et qui signifie transformations liées aux similitudes.

dans un rapport rédigé sur ce sujet (Baarda, 1973). De nombreux autres auteurs se sont intéressés depuis au domaine. On peut citer, de façon non exhaustive, (van Mierlo, 1980) qui reprend l'analyse des réseaux libres et la réponse que l'on peut apporter au déficit de rang par l'introduction des S-transformations. (Strang van Hess, 1982) se place dans la même problématique. Plus récemment, d'autres auteurs (Teunissen, 1985; Koch, 1987; Crosilla et al., 1989; Xu, 1997) ont revu le problème, chacun apportant sa pierre à l'édifice.

En l'état, l'équation (III.26) est une curiosité mathématique sans lien direct avec la réalité numérique. Lorsque cette relation est écrite en variance, la théorie prend alors tout son sens

$$\begin{cases} \Sigma_0 = Q_W \Sigma_1 Q_W^T \\ D \Sigma_0 D^T = P_W \Sigma_1 P_W^T \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

L'immense avantage de la variance  $\Sigma_0$  par rapport à  $\Sigma_1$  réside dans son caractère indépendant de la définition – arbitraire – du système de coordonnées utilisé pour réduire les observations et du degré de précision avec lequel il a été fixé.  $\Sigma_0$  apparaît donc comme intrinsèque aux mesures et dénuée de tout arbitraire extérieur aux mesures. Du reste, c'est cette séduisante propriété qui a conduit P. Meissel à développer en parallèle et indépendamment de W. Baarda, sa **théorie des erreurs internes** des réseaux géodésiques (Meissel, 1965; Meissel, 1969). Le lien entre les deux approches a évidemment été perçu (Grafarend et Schaffrin, 1974; Grafarend et Schaffrin, 1976; Welsh, 1986; Koch, 1987; Dermanis, 1994a; Dermanis, 1994b).

Dans toute la littérature géodésique, le produit scalaire  $W$  de l'espace euclidien  $E$  est choisi égal à l'identité, ce qui apparaît comme naturel car, la fixation du système de référence étant assez arbitraire, il n'y a pas de raison objective, si l'on veut se débarrasser du « flou » de définition de ce système, à pondérer l'information portée par  $X_1$ .

Une difficulté subsiste toutefois : selon les cas, on peut être conduit à analyser, sur le plan de la physique, l'apport des observations dans la définition du système de référence. Ainsi, l'observation quasi-isotrope depuis la surface terrestre de l'orbite d'un satellite de la Terre assure une détermination presque parfaite de l'origine du repère terrestre. En outre, la géométrie de l'orbite a un impact sur l'échelle. Dans tous les cas, il peut être instructif de comprendre et de quantifier le potentiel de la technique sur la détermination de la référence. En particulier, si la technique est capable de réduire certains degrés du système de référence, il serait souhaitable d'éviter de dissimuler cette information interne aux mesures par des contraintes supplémentaires.

Or l'approche S-transformation n'aborde pas le problème du choix de la matrice  $D$  associée aux observations traitées, et la détermination de contraintes minimales (relation III.7) demeure non résolu. Le paragraphe suivant est dévolu à l'étude de l'effet de système de référence (Sillard et Boucher, 1999)

qui peut être perçu comme une réponse au problème précédent. Dans ce paragraphe, il sera fait usage d'un produit scalaire  $W$  autre que l'identité.

## 6. Effet de système de référence

Ce concept a été introduit par (Sillard et Boucher, 1999) pour répondre au problème soulevé dans le paragraphe précédent : quelles contraintes doit-on ajouter de façon à définir le système de coordonnées sans perturber l'information naturelle apportée par les observations sur ce système? Pour ce faire, il faut dans un premier temps identifier l'information de système de référence portée par les observations pour la compléter, dans un second temps, de manière conventionnelle. Cela revient à réduire le déficit de rang du système normal, sans ajouter d'information déjà contenue dans l'image de la matrice normale. Les deux étapes précédentes peuvent se réduire en une seule s'il est possible de décomposer de façon unique la variance des observations en deux composantes distinctes, la composante interne étant indépendante du représentant de la classe d'équivalence (III.18) choisi.

Il faut noter qu'avec la première relation du système (III.27), cette dernière propriété est vérifiée. En effet, propagée en variances, la relation d'équivalence (III.18) devient

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 + D\Sigma_0 D^T + \text{cov}(X, \theta)D^T \quad (\text{III.28})$$

Or, par construction,  $Q_W D = 0$ , donc  $Q_W \Sigma_1 Q_W^T = Q_W \Sigma_2 Q_W^T$ . Par contre, la covariance non nulle de  $X$  et  $\theta$  dans le cas général empêche de scinder  $\Sigma_1$  en deux bruits distincts, un bruit interne aux mesures et un bruit caractéristique de la fixation du système de référence. L'idée proposée, pour arriver à une telle fin, consiste à identifier au sein de la classe des S-transformations (lesquelles laissent stable le bruit intrinsèque, ce qui est désirable), le projecteur qui annulera la covariance de  $X$  et de  $\theta$ .

En conséquence de la relation (III.26), on a :

$$\text{cov}(X, D\theta_1) = Q_W \Sigma_1 (I - Q_W) \quad (\text{III.29})$$

On peut alors vérifier que

$$\text{cov}(X, D\theta_1) = 0 \iff W = \Sigma_1^{-1} \quad (\text{III.30})$$

Et finalement, dans le cas précis où  $W = \Sigma_1^{-1}$ , on a :

$$\begin{cases} \Sigma_1 &= \bar{\Sigma}_0 + D\Sigma_{0_1} D^T \\ \bar{\Sigma}_0 &= Q_{\Sigma_1^{-1}} \Sigma_1 Q_{\Sigma_1^{-1}}^T \\ \Sigma_{0_1} &= (D^T \Sigma_1^{-1} D)^{-1} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

L'équation (III.31) conduit à une décomposition unique de tout bruit de jeu de coordonnées en un bruit interne, au sens des S-transformations, et d'un bruit de système de référence

$$\Sigma_1 = \underbrace{\Sigma_1 - D(D^T \Sigma_1^{-1} D)^{-1} D^T}_{\bar{\Sigma}_0} + \underbrace{D(D^T \Sigma_1^{-1} D)^{-1} D^T}_{D \Sigma_{\theta_1} D^T} \quad (\text{III.32})$$

La matrice  $\bar{\Sigma}_0$  est positive de rang  $(p - r)$  donc il s'agit bien d'une matrice de variance. Sur le plan algébrique, si on considère l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $p$  symétriques et positives  $\mathcal{S}_p$ , le couple d'applications

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{J} : \mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{S}_p \\ \Sigma_1 \mapsto \bar{\Sigma}_0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{U} : \mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{S}_p \\ \Sigma_1 \mapsto D \Sigma_{\theta_1} D^T \end{array} \right| \quad (\text{III.33})$$

définit une décomposition de  $\mathcal{S}_p$  en somme directe

$$\mathcal{S}_p = \text{Im } \mathcal{J} \oplus \text{Im } \mathcal{U} \quad (\text{III.34})$$

en éludant le problème de la non-inversibilité de  $\Sigma$  par l'usage de pseudo-inverses (Bjerhammar, 1973). La matrice  $\bar{\Sigma}_0$  est très proche de la matrice de trace minimale associée à la solution en réseau libre de norme minimale (Mittermayer, 1972; Blaha, 1982b), quoique légèrement différente : en effet, dans ces écrits, le produit scalaire utilisé est l'identité et il n'est pas possible de rendre rigoureusement équivalents le problème en variance factorisée de Cholesky et le problème en variance identité. En définitive,  $\bar{\Sigma}_0$  n'est pas, dans la classe des matrices de variance  $Q_W \Sigma_1 Q_W^T$  la matrice de trace minimale. Donc, à ce titre, elle peut paraître sans grand intérêt. Néanmoins, cette matrice est cruciale pour l'écriture qu'elle permet (équations III.32 et III.34), écriture essentielle pour la compréhension de la physique des systèmes de référence. En fait, on montre que dans la classe des S-transformations, celle conduisant à une variance minimale est obtenue pour un produit scalaire identité (Strang van Hess, 1982; Blaha, 1971; Mittermayer, 1972). Donc, d'un point de vue méthodologique, la matrice  $\Sigma_0$  découlant de l'usage de  $Q_I$  sera identifiée comme révélatrice des erreurs internes du réseau (Meissel, 1965).

## 7. Applications numériques

### 7.1. Méthodologie

On suppose donné un couple  $(X_S, \Sigma_S)$  jeu de coordonnées-variance, et on cherche à modifier  $\Sigma_S$  du jeu  $X_S$ , de façon à associer à la réalisation  $X_S$  une variance  $\bar{\Sigma}_S$  caractéristique de la précision interne des mesures.

— En conséquence du paragraphe précédent, la démarche pratique sera la suivante :

1. Identification des degrés de liberté non réduits par les observations en calculant l'effet de système de référence en prenant  $D = \Delta$ . Si la matrice de variance  $\Sigma_S$  n'est pas inversible, on pourra, dans cette phase uniquement, la régulariser en la complétant

$$\Sigma_S \leftarrow \Sigma_S + \kappa I, \quad \kappa \ll \frac{\text{tr}\Sigma_S}{\text{tr}I}$$

2. Les degrés de liberté non réduits correspondent aux termes de l'effet de système de référence  $\Sigma_\theta$  élevés (équation III.31).
3. La matrice d'imposition de contraintes minimales de système de référence (équation III.7) sera construite à partir de la matrice  $\Delta$  (équation III.19) réduite aux seules colonnes relatives aux degrés de liberté non fixés selon le critère (1). On notera  $D$  cette matrice. La matrice  $B$  de l'équation (III.7) est donnée par  $B = (D^T D)^{-1} D^T$ . D'après (III.25), on remarque que  $P_I = DB$ .
4. Le traitement numérique de la variance résultant des approches précédentes pourra s'opérer de trois manières différentes.

(a) *Calcul de la variance par projection*

Ce cas correspond à l'équation (III.27) avec  $Q_I = I - D(D^T D)^{-1} D^T = I - DB$ , soit

$$\begin{cases} \overline{\Sigma}_S^{(1)} &= \Sigma_S - DB\Sigma_S - \Sigma_S B^T D^T + DB\Sigma_S B^T D^T \\ \widehat{X}^{(1)} &\equiv X_S \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

(b) *Calcul par ajout d'une équation de condition*

Le problème sujet à condition se pose dans les termes suivants :  $X$  est l'inconnue et

$$\begin{cases} X &= X_S \quad (\Sigma_S) & \text{équation d'observation} \\ BX &= BX_S & \text{équation de condition} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

La condition est exprimée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et conduit au système

$$\begin{pmatrix} \Sigma_S^{-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_S^{-1} X_S \\ BX_S \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \widehat{X}^{(2)} &\equiv X_S \\ \overline{\Sigma}_S^{(2)} &= \Sigma_S - \Sigma_S B^T (B \Sigma_S B^T)^{-1} B \Sigma_S \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

(c) *Calcul par ajout d'une équation de contrainte*

On se donne à présent, un niveau de fixation  $\Sigma_\theta$  du système de référence selon les paramètres à renseigner, en accord avec le point 1.

Le problème sujet à contraintes se pose dans les termes suivants :

$$\begin{cases} X = X_S & (\Sigma_S) & \text{équation d'observation} \\ BX = BX_S & (\Sigma_\theta) & \text{équation de contrainte} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Ce système conduit à l'équation normale

$$\left( \Sigma_S^{-1} + B^T \Sigma_\theta^{-1} B \right)^{-1} = \Sigma_S^{-1} X_S + B^T \Sigma_\theta^{-1} B X_S \quad (\text{III.40})$$

d'où on déduit que

$$\begin{cases} \hat{X}^{(3)} \equiv X_S \\ \overline{\Sigma}_S^{(3)} = \Sigma_S - \Sigma_S B^T (B \Sigma_S B^T + \Sigma_\theta)^{-1} B \Sigma_S \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

On constate naturellement que  $\lim_{\Sigma_\theta \rightarrow 0} \overline{\Sigma}_S^{(3)} = \overline{\Sigma}_S^{(2)}$ .

L'approche (4a) est celle déduite des études sur les S-transformations. C'est celle qui, par exemple, est préconisée dans (Koch, 1987). Elle a d'ailleurs été utilisée par le Jet Propulsion Laboratory (JPL) jusqu'en 1992 (Blewitt et al., 1992). L'approche (4b) est basée sur les contraintes internes (Blaha, 1971; Blaha, 1982b). Cette approche est également mentionnée dans (Vanicek et Krakiwsky, 1986). L'approche (4c) est directement inspirée de (4b) en modifiant la condition en une contrainte stochastique dont la variance est fixée par l'utilisateur. Cette optique est intéressante dans le sens où elle conduit à une variance finale de plein rang, donc aisément manipulable. Il semble que cette démarche ait été développée au JPL, à partir de 1993 par (Heflin, 1993).

Les deux approches (4a) et (4b) sont cohérentes dans le cas où la matrice normale du système n'est pas inversible et où la matrice  $\Delta$  correspond à des contraintes minimales. Par contre, dans le cas où la matrice normale est inversible, les deux solutions  $\overline{\Sigma}_S^{(1)}$  et  $\overline{\Sigma}_S^{(2)}$  diffèrent numériquement.

*Propriété Soit  $\succcurlyeq$  une relation d'ordre sur l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_{n,n}$  positives (ordre total :  $M \succcurlyeq M' \Leftrightarrow \text{tr}(M) \geq \text{tr}(M')$ ; ordre partiel :  $M \succcurlyeq M' \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \Gamma_{i,i}(M) \geq \Gamma_{i,i}(M')$ ). Les matrices  $\overline{\Sigma}_0$  (équation III.31),  $\overline{\Sigma}_S^{(1)}$  (équation III.35),  $\overline{\Sigma}_S^{(2)}$  (équation III.38) et  $\Sigma_1$  sont comparables et vérifient*

$$\Sigma_1 \succcurlyeq \overline{\Sigma}_0 \succcurlyeq \overline{\Sigma}_S^{(1)} \succcurlyeq \overline{\Sigma}_S^{(2)}$$

<sup>a</sup> $\Gamma_{i,j}(M)$  désigne le terme de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $M$ .

Quelques remarques sur la propriété précédente :

- (Blaha, 1971) montre que  $\overline{\Sigma}_S^{(1)} = \overline{\Sigma}_S^{(2)}$  dans le cas d'ajustement en contraintes internes.

- A l'aide du théorème de Gauss-Markov (Sillard, 1998a), on montre que l'estimateur (2) est la solution la plus précise dans l'espace solution  $\mathcal{E} = \{X | BX = 0, X \text{ linéaire en } X_S\}$  de l'équation d'observation  $\Sigma_S^{-1}X = \Sigma_S^{-1}X_S$ . Donc en particulier  $\overline{\Sigma_S}^{(1)} \succ \overline{\Sigma_S}^{(2)}$
- Enfin,  $\Sigma_1 \succ \overline{\Sigma_0} \succ \overline{\Sigma_S}^{(2)}$  d'après (Blaha, 1971).

## 7.2. Exemples

On étudie, dans la suite, un certain nombre de jeux de coordonnées issus de techniques dynamiques de géodésie spatiale. En particulier, dans chacun des cas est calculé l'effet de système de référence. En outre, un histogramme des écarts-types avant et après ajustement en contraintes internes est proposé. La variance *a priori* des jeux est obtenue en ôtant l'effet des contraintes imposées sur les coordonnées lors du calcul amont.

### 7.2.1. GPS

**Jeu global du MIT** La technique GPS possède, *a priori*, une bonne géométrie dans la mesure où elle s'appuie sur une constellation de 24 satellites situés dans des plans d'orbite différents. On s'attend donc à une bonne détermination de l'origine et de l'échelle d'un réseau global. L'orientation du repère est liée à la façon dont le pôle de rotation terrestre a été contraint dans le calcul. Sans information particulière sur le pôle ou le système terrestre, l'orientation n'est pas définie.

Le jeu analysé ci-dessous provient du Massachusetts Institute of Technology (MIT) et a été fourni à l'International GPS Service (IGS) par cet institut. Ce jeu ne comprend pas de vitesses de points et a été obtenu par combinaison des solutions hebdomadaires de 7 centres d'analyse de l'IGS pour la semaine du 18 au 24 janvier 1998. Les coordonnées fournies correspondent à un réseau de points répartis de façon relativement homogène à la surface de la Terre. La matrice de corrélation de l'effet de système de référence est donnée à l'équation (III.42). La table (III.1) regroupe les valeurs des écarts-types de l'effet de système de référence par paramètres.

$T_x$	$T_y$	$T_z$	$k$	$\varepsilon$	$\psi$	$\omega$
cm	cm	cm	$10^{-8}$	mas	mas	mas
0.146	0.143	0.258	0.00485	21.8	22.9	14.0

TABLE III.1: Effet de système de référence : valeur des écart-types pour chacune des composantes de la similitude -jeu GPS du MIT-



$$\begin{pmatrix}
 & T_x & T_y & T_z & k & \varepsilon & \psi & \omega \\
 T_x & 1 & 0.02 & 0.02 & -0.06 & -0.02 & 0.0008 & 0.01 \\
 T_y & . & 1 & -0.03 & 0.08 & 0.008 & -0.03 & -0.03 \\
 T_z & . & . & 1 & -0.3 & 0.01 & -0.0005 & 0.1 \\
 k & . & . & . & 1 & -0.02 & -0.003 & -0.3 \\
 \varepsilon & . & . & . & . & 1 & -0.02 & -0.004 \\
 \psi & . & . & . & . & . & 1 & 0.04 \\
 \omega & . & . & . & . & . & . & 1
 \end{pmatrix} \quad (III.42)$$

La matrice de l'équation (III.42) représente la corrélation déduite de l'effet de système de référence. On peut constater, au vu de cette matrice, que les corrélations entre paramètres sont faibles. Il est assez naturel que des paramètres mal déterminés, comme le sont les rotations, soient décorrélés. C'est ce que l'on observe sur la matrice précédente. Par ailleurs, la seule corrélation forte -comparée aux autres corrélations- est visible entre le paramètre  $T_z$  et l'échelle. La géométrie du réseau GPS doit permettre d'expliquer cette corrélation. On verra que dans le cas de réseaux continentaux, la matrice est nettement changée (cf. §suivant : jeu EUREF).

En final, on peut observer qu'une semaine de données GPS conduit à une connaissance millimétrique de l'origine, submillimétrique de l'échelle. Par contre, l'orientation est de l'ordre de 60 cm selon les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), et 40 cm selon l'axe ( $Oz$ ).

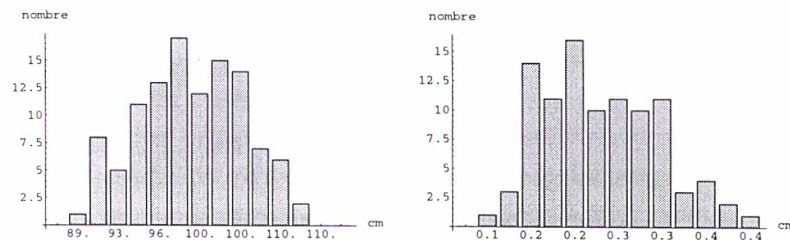


FIG. III.1: Histogramme des erreurs sphériques du jeu MIT avant et après ajustement en contraintes internes

La figure (III.1) présente les histogrammes des erreurs sphériques<sup>10</sup> du jeu MIT avant et après ajustement en contraintes minimales. L'historgramme issu de l'ajustement en contraintes internes correspond à l'expression (III.38). On constate que l'ajustement en contraintes internes réduit considérablement la variance du jeu de coordonnées. En utilisant l'expression obtenue par l'intermédiaire des S-transformation (équation III.35), la diminution est quasiment

<sup>10</sup>On définit l'erreur sphérique d'un point dont les coordonnées cartésiennes ont pour écart-type  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  par :  $\delta_{spher} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$

identique. Les traces des deux matrices vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\text{tr} \bar{\Sigma}_S^{(1)}/n} = 6.22 \text{cm} \\ \sqrt{\text{tr} \bar{\Sigma}_S^{(2)}/n} = 6.17 \text{cm} \end{array} \right\}$$

Ce résultat confirme la propriété du paragraphe précédent.

**Jeu continental EUREF** Le jeu analysé dans ce paragraphe a été calculé dans le cadre de la réalisation hebdomadaire du système de référence européen (ETRS89) par l'Université de Berne. Il correspond à l'analyse des données de la semaine du 10 mai 1998. Comme dans le cas du jeu MIT, les contraintes *a priori* ont été ôtées, sur la base d'informations transmises par l'Université de Berne. La matrice de corrélation de l'effet de système de référence est donnée à l'équation (III.43), et la valeur des écart-types associés par paramètres, à la table (III.2).

$T_x$	$T_y$	$T_z$	$k$	$\epsilon$	$\psi$	$\omega$
cm	cm	cm	$10^{-8}$	mas	mas	mas
0.161	0.0869	0.246	0.00986	0.00974	0.013	0.00642

TAB. III.2: Effet de système de référence : valeur des écart-types pour chacune des composantes de la similitude -jeu EUREF de CODE-

L'effet d'incertitude en rotation devrait être équivalent à celui du jeu du MIT. Or ce n'est pas le cas : en effet, l'orbite des satellites GPS ainsi que le pôle terrestre ont été fixés dans l'ajustement du réseau, de sorte que l'orientation du système de référence est parfaitement définie.

$$\begin{pmatrix} & T_x & T_y & T_z & k & \epsilon & \psi & \omega \\ T_x & 1 & 0.3 & 0.7 & -0.8 & 0.1 & -0.2 & -0.05 \\ T_y & . & 1 & 0.3 & -0.3 & 0.6 & 0.08 & -0.6 \\ T_z & . & . & 1 & -0.9 & 0.08 & 0.3 & -0.1 \\ k & . & . & . & 1 & -0.1 & -0.1 & 0.1 \\ \epsilon & . & . & . & . & 1 & 0.01 & -0.9 \\ \psi & . & . & . & . & . & 1 & -0.2 \\ \omega & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Par contre, l'étude des corrélations (équation III.43) entre paramètres est riche d'enseignements : les paramètres de translation selon les axes ( $Ox$ ) et ( $Oz$ ) sont très corrélés. De même, l'échelle du réseau est très corrélée avec le paramètre de translation selon les axes ( $Ox$ ) et ( $Oz$ ). Enfin, la rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) est très corrélée avec la rotation autour de l'axe ( $Ox$ ).

Toutes ces corrélations sont caractéristiques d'un réseau d'extension régionale dont la distribution limitée en latitude et en longitude ne permet pas de discriminer tous les degrés de libertés des systèmes de référence.

Prenons comme hypothèse que l'orientation a été alignée sur un repère conventionnel (c'est le cas puisque l'orbite et le pôle ont été fixés). Dans ce cas, l'amplitude de l'effet de système de référence est réduite. Par contre, les interdépendances entre paramètres sont conservées puisque l'alignement, en orientation, s'opère sur un réseau continental qui ne peut porter d'information totalement décorrélée sur chaque degré de liberté. La corrélation triple

entre  $T_x, T_z$  et  $k$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 0.7 & 1 & . \\ -0.8 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$  s'explique par la répartition géographique

du réseau : la latitude moyenne se situe vers  $45^\circ$  et la longitude moyenne est de l'ordre de  $10^\circ$ , de sorte que les vecteurs  $(\vec{u}_x + \vec{u}_z)$  et  $\vec{u}_n$  – où  $\vec{u}_x, \vec{u}_z$  sont les vecteurs de base du repère cartésien et  $\vec{u}_n$  le vecteur normal à la surface terrestre au point moyen du réseau – sont colinéaires (cf. figure III.2). Cette colinéarité

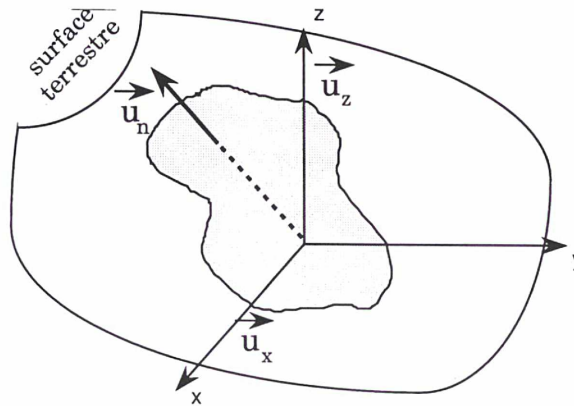


FIG. III.2: corrélation entre  $T_x, T_z$  et  $k$

explique la corrélation observée.

La corrélation entre les angles  $\varepsilon$  et  $\omega$  s'explique de la même manière : au point moyen du réseau,  $\vec{u}_\varepsilon$  et  $\vec{u}_\omega$  sont colinéaires ( $\vec{u}_\varepsilon$  et  $\vec{u}_\omega$  sont les vecteurs déplacement infinitésimaux à la surface de la Terre au point moyen du réseau correspondant à des rotations autour de l'axe  $(Ox)$  et de l'axe  $(Oz)$  respectivement). Cette colinéarité se traduit par une corrélation forte.

Revenons à présent sur le premier problème soulevé : quelle information sur le système de référence apporte-t-on en fixant l'orbite et le pôle ?

Afin d'étudier concrètement cet apport, nous proposons une analyse en composantes principales de l'inverse de l'effet de système de référence (Jen-

TAB. III.3: ACP de l'inverse de la matrice d'effet de système de référence du jeu EUREF

$\lambda =$	226000.	78500.	12700.	10200.	paramètre
$q_i =$	0.000816	0.0173	-0.00563	0.0673	$T_x$
	0.00274	-0.00153	-0.0837	-0.0232	$T_y$
	-0.00459	0.0287	0.00849	-0.043	$T_z$
	-0.08	0.995	-0.0338	0.0458	$k$
	0.511	0.0666	0.851	0.0711	$\varepsilon$
	0.103	-0.0418	-0.142	0.98	$\psi$
	0.849	0.0588	-0.498	-0.158	$\omega$

nings et McKeown, 1992). Cette technique permet d'identifier des axes principaux caractéristiques de l'information portée par la matrice analysée (cf. §7.3.). Pour le cas de la matrice étudiée (inverse de la variance) du jeu de l'Université de Berne, un résumé de l'analyse est donnée à la table (III.3). 99.922% de l'information de la matrice est portée par les quatre vecteurs propres ( $q_i$ ) de la table (III.3). Ces quatre vecteurs sont des combinaisons linéaires des rotations et de l'échelle. L'information portée par cette matrice relative aux translations est marginale. Or cette constatation n'a aucun fondement physique : les translations ne sont ni plus ni moins privilégiées par la géométrie du problème que l'échelle ou les rotations. Ainsi, la fixation de l'orbite et du pôle dans le calcul d'un réseau géodésique renseigne 4 degrés de liberté dans le système de référence : 3 rotations et l'échelle. Seule, l'origine du repère semble conserver une signification intrinsèque au réseau réalisé.

Pour conclure, une remarque de nature méthodologique s'avère nécessaire. Habituellement, l'analyse en composantes principales s'opère sur la variance. Ici, elle est appliquée à l'inverse d'une matrice de variance car l'objectif est d'identifier les degrés de liberté renseignés. Ceux-ci correspondent à une petite variance donc à des termes de forte amplitude dans l'inverse de la variance. La matrice normale (inverse de la variance) est donc l'objet à privilégier compte tenu du but recherché ici.

### 7.2.2. DORIS

Le jeu étudié dans ce paragraphe est issu de mesures DORIS et a été calculé à l'IGN par P. Willis. Il correspond au cumul d'un mois de données (Février 1997) généré à l'occasion du calcul de l'ITRF96. Ce jeu repose sur les mesures effectuées à l'aide des satellites TOPEX-POSEIDON, SPOT2 et SPOT3. La géo-

métrie du réseau DORIS est *a priori* meilleure que celle du réseau GPS car les stations d'observation sont mieux réparties à la surface terrestre. Par contre, la géométrie des observations satellitaire est moins bonne que pour GPS, car elle repose sur trois satellites seulement. Cet argumentaire laisse prévoir une définition de l'origine du repère satisfaisante. En particulier, les paramètres de translations devraient être convenablement discriminés, d'autant que l'altitude des satellites DORIS est beaucoup plus faible que l'altitude des satellites GPS. En somme, les deux systèmes présentent des avantages et inconvénients qualitatifs « complémentaires ».

$T_x$	$T_y$	$T_z$	$k$	$\epsilon$	$\psi$	$\omega$
cm	cm	cm	$10^{-8}$	mas	mas	mas
0.120	0.120	0.417	0.176	82.6	83.6	74.8

TAB. III.4: Effet de système de référence : valeur des écart-types pour chacune des composantes de la similitude -jeu DORIS-

La table (III.4) montre que effectivement, les valeurs des variances en translation sont plus élevées pour DORIS que pour GPS. En outre, on constate un coefficient plus fort selon l'axe ( $Oz$ ), qui est dû au plan de l'orbite assez incliné, par rapport à l'équateur, des satellites utilisés pour l'observation.

$$\begin{pmatrix}
 & T_x & T_y & T_z & k & \epsilon & \psi & \omega \\
 T_x & 1 & 0.3 & 0.02 & 0.006 & 0.0002 & 0.00003 & 0.003 \\
 T_y & . & 1 & 0.05 & 0.03 & -0.0002 & 0.0007 & -0.008 \\
 T_z & . & . & 1 & 0.1 & 0.0002 & 0.0007 & -0.005 \\
 k & . & . & . & 1 & -0.0005 & 0.0009 & -0.02 \\
 \epsilon & . & . & . & . & 1 & 0.002 & 0.02 \\
 \psi & . & . & . & . & . & 1 & -0.05 \\
 \omega & . & . & . & . & . & . & 1.
 \end{pmatrix} \quad (III.44)$$

Les corrélations des paramètres précédents (équation III.44) sont faibles. La plus importante est observée entre les paramètres  $T_x$  et  $T_y$ . Ce phénomène s'explique à nouveau par la géométrie des orbites des satellites DORIS.

La figure III.3 montre que la précision interne des détermination DORIS est sensiblement moins bonne que celle de GPS : rappelons que le jeu DORIS est obtenu à partir d'un mois de mesure, alors que le jeu GPS est obtenu sur une semaine de mesure...

— Pour conclure, il convient de noter que les justifications des disparités entre paramètres de l'effet de système de référence (notamment les corrélations),

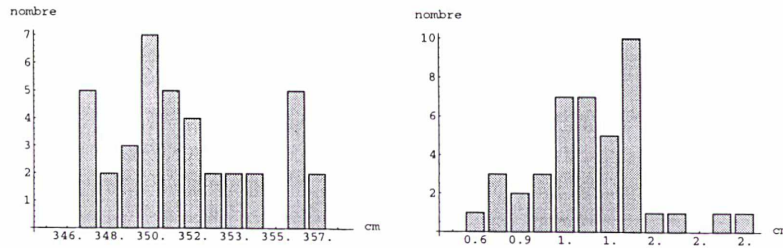


FIG. III.3: Histogramme du des erreurs sphériques jeu DORIS avant et après ajustement en contraintes internes

pour GPS, reposent sur la géométrie du réseau, alors que pour DORIS, c'est la géométrie de l'orbite qui constitue le facteur limitant.

### 7.3. Apport de l'analyse en composantes principales à l'identification de l'effet de système de référence

Considérons une matrice de variance  $\Sigma$  d'un jeu de coordonnées  $X$  obtenu par ajustement de données de géodésie spatiale. On a vu au cours de ce chapitre que la structure de  $\Sigma$  dépend de la méthode employée pour définir le système de coordonnées sous-jacent. En particulier, des considérations géométriques, indépendantes de  $X$ , permettent de discriminer, dans  $\Sigma$ , un bruit propre aux mesures géodésiques d'un bruit de système de référence. Cette dichotomie est postulée et la structure des bruits s'en déduit, indépendamment de  $X$  et  $\Sigma$ .

L'analyse en composantes principales conduit à une approche radicalement différente : elle consiste à identifier, à partir de la matrice  $\Sigma$ , les combinaisons linéaires des éléments de  $X$  de variance maximale. Mathématiquement, les variances des combinaisons linéaires recherchées sont les valeurs propres de  $\Sigma$  et les combinaisons linéaires proprement dites sont les vecteurs propres associés.

Lorsqu'un jeu de coordonnées résulte d'une fixation « floue » du système de référence, la matrice de variance de ce jeu de coordonnées est dominée numériquement par le bruit de système de référence. L'analyse en composantes principales de la matrice de variance va distinguer les combinaisons linéaires de  $X$  qui correspondent à tout ou partie de la matrice  $\Delta$  (équation III.19). En effet,  $\Sigma$  étant symétrique, il existe une base orthonormée de vecteurs propres dans laquelle  $\Sigma$  est diagonale. Les termes diagonaux sont alors les valeurs propres de  $\Sigma$ . Soit  $R$  la matrice orthogonale des vecteurs propres de  $\Sigma$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres. On peut alors écrire

$$\Sigma = R^T \Lambda R \quad (\text{III.45})$$

Il est immédiat de vérifier que  $X' = RX$  a pour variance  $\Lambda$  et on comprend,

TAB. III.5: ACP de la variance du jeu DORIS

$\lambda =$	210.5	203.1	171.8	paramètre
$q_i =$	0.02673	-0.02296	0.05852	$x_1$
	-0.04011	0.009083	0.1658	$y_1$
	-0.1436	0.09429	-0.02359	$z_1$
	0.1001	-0.1164	0.05728	$x_2$
	-0.1247	-0.08369	0.08926	$y_2$
	-0.06806	0.03734	-0.009611	$z_2$
	0.1004	-0.1146	0.06865	$x_3$
	-0.1209	-0.1152	-0.04339	$y_3$
	0.00929	-0.07455	0.01625	$z_3$
	0.08467	-0.1166	-0.04855	$x_4$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

dés lors, le parti que l'on peut tirer de  $X'$  : toutes les composantes de  $X'$  sont décorréliées et les directions privilégiées de la variance  $\Sigma$  correspondent aux combinaisons linéaires  $R_i$  associées aux fortes variances  $\Lambda_{i,i}$ .

Une telle analyse a été conduite pour le jeu DORIS. On trouvera à la table (III.5) un résumé des trois composantes principales de la matrice de variance du jeu DORIS. Ces trois composantes représentent 99.9968% de la variance totale.

Dans le but de mieux interpréter ces composantes, on a cherché à identifier l'espace vectoriel généré par ces trois vecteurs à l'espace vectoriel généré par les trois vecteurs issus de la linéarisation des trois rotations (cf. équation III.19). Pour ce faire, on considère la matrice  $v = \begin{pmatrix} q_1 & | & q_2 & | & q_3 & | & r_\epsilon & | & r_\psi & | & r_\omega \end{pmatrix}$ . Si les deux espaces sont identiques, la matrice  $v$  est de rang 3. C'est principalement le cas, comme le montrent les valeurs propres de la matrice  $v^T v$ , données à l'équation (III.46).

$$vp(v^T v) = \begin{pmatrix} 2.03 & 2.00 & 1.97 & 5.98 \cdot 10^{-9} & 1.74 \cdot 10^{-12} & 1.54 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix} \quad (III.46)$$

En conclusion, l'analyse en composantes principales permet, sans aucune connaissance préalable des observations ou du réseau concerné, d'identifier, au sein de la variance, le bruit de système de référence. Cette démarche constitue une deuxième réponse au problème du choix de contraintes en vue d'un ajustement en réseau libre.

## CHAPITRE IV

# LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TERRESTRES EN GÉODYNAMIQUE

Les réalisations de systèmes de référence terrestres sont des sous-produits d'analyse de géodésie spatiale. La mesure de base est effectuée depuis la surface terrestre et consiste en une mesure de distance (laser), pseudo-distance (GPS ou VLBI), vitesse radiale du satellite par rapport à la station concernée (DORIS). Dans tous les cas, la dynamique de l'objet visé est canoniquement attachée à un repère quasi-inertiel centré au centre des masses de la Terre<sup>1</sup>. Le passage de ce repère au repère terrestre conventionnel est complexe pour plusieurs raisons :

- la Terre est un solide déformable auquel on cherche à attacher un repère de façon à positionner efficacement des points de sa surface. Intuitivement, la propriété privilégiée dans la construction d'un tel repère sera l'absence de mouvement moyen de la surface de la Terre dans ce repère.
- la Terre est en rotation « moyenne » par rapport à un repère inertiel. Cette rotation est irrégulière en orientation et en vitesse, à des échelles de temps allant du millier d'années (précession) à la fraction d'heure (UT1, position de l'axe instantané de rotation) pour les effets identifiés. Certains de ces mouvements sont connus et modélisés, d'autres ne sont que constatés. Pour une discussion exhaustive des problèmes, on pourra se reporter à (Moritz et Mueller, 1987) par exemple.

La description précédente est extrêmement sommaire, mais vise à souligner la problématique de la construction d'un système terrestre : il est relativement aisé de conceptualiser un repère quasi-inertiel attaché à la Terre ; il reste ensuite à discriminer la rotation de la Terre du mouvement propre des points de la

---

<sup>1</sup>En toute rigueur, ce n'est pas le cas des mesures VLBI dont la « dynamique » est liée à un repère quasi-inertiel centré au barycentre du système solaire





surface terrestre dans un repère en rotation avec la Terre. Ce point sera étudié dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

La réalisation d'un système terrestre conventionnel comporte l'identification et le traitement de divers mouvements à courte période. La troisième partie de ce chapitre est consacrée à un exemple de tels phénomènes : les variations de la position du centre des masses de la Terre.

Enfin, la description même des réalisations de systèmes terrestres permet l'étude fine des déformations de premier ordre de la surface terrestre. Ces déformations concernent les mouvements tectoniques, mouvements de rotation de plaques lithosphériques sur l'asthénosphère. La quatrième partie de ce chapitre propose une analyse de l'apport de la réalisation de systèmes globaux comme l'ITRF à la connaissance de ces phénomènes.

## 1. Cinématique des systèmes terrestres

### 1.1. Paramétrisation de la position de points de la surface terrestre et échantillonnage

A tout instant, réaliser un système terrestre revient à donner des coordonnées cohérentes à un réseau de points à la surface de la Terre. On qualifiera ce système d'instantané. Le problème se complique lorsqu'on cherche à définir un système stable dans le temps, alors que les points de la surface terrestre présentent des vitesses non nulles dans le repère instantané. La Terre est un solide déformable et il n'existe pas de référentiel possédant un sens physique et comobile avec la surface terrestre. Dans un tel repère, tous les points de la Terre seraient de vitesse identiquement nulle. Il faut donc définir une évolution temporelle du repère instantané. Pour ce faire, il faut analyser physiquement la structure temporelle du signal afin d'identifier la nature de la transformation, paramétrée dans le temps, qui permet de changer de repère.

La position d'un point est un signal physique continu dans le temps<sup>2</sup>. On s'apercevra, au fil de ce texte, que plus que le signal lui-même, la vitesse du point physique considéré est le paramètre pertinent pour définir la cinématique de la surface terrestre. On considérera que la vitesse de tout point de la surface terrestre est continue presque partout, c'est à dire qu'elle est de la forme de l'équation (IV.1).

$$\begin{cases} \vec{V}(t) &= \vec{s}(t) + \sum_{i=1}^N d\vec{x}_i \cdot \delta(t - t_i) \\ \vec{X}(t) &= \int_0^t \vec{V}(u) \cdot du \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

<sup>2</sup>Comme certains truismes, celui-ci est d'importance car il constitue le point de départ d'une approche de la représentation des systèmes de référence qui commence seulement à émerger ...

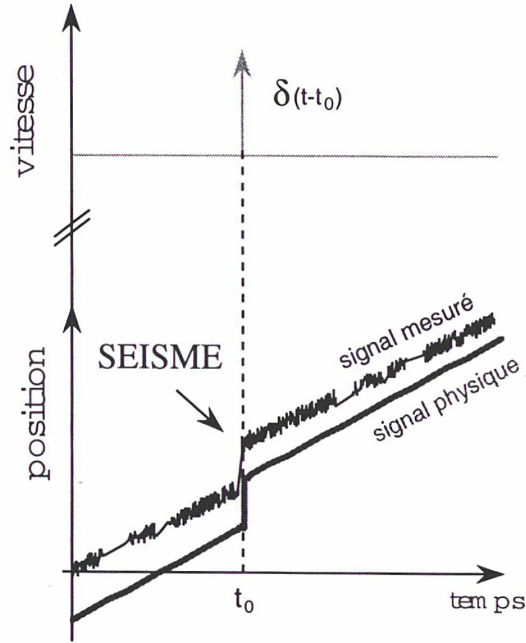


FIG. IV.1: Signal physique et mesuré de la position d'un point : vitesse discontinue

$\vec{s}'(t)$  est continue et dérivable,  $\delta$  est la distribution de Dirac nulle en tout point de  $\mathbb{R}$  sauf en 0 où elle est infinie. Son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1.  $d\vec{x}_i'$  est une fonction saut correspondant à un décrochement non linéaire dans la position du point intervenant en un nombre fini d'instants  $t_i (1 \leq i \leq N)$ .

Au lieu de la formulation (IV.1), on peut aussi avoir recours à une formulation en tout point continue, comme par exemple (IV.2).

$$\begin{cases} \vec{V}(t) = \vec{s}'(t) + \sum_{i=1}^N d\vec{x}_i' \cdot \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-t_i}{\tau}\right)^2\right) \\ \vec{X}(t) = \int_0^t \vec{V}(u) \cdot du \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Le paramètre  $\tau$  s'apparente à un temps de relaxation (figure IV.2). La physique de la surface terrestre est relativement simple en l'état actuel de nos connaissances. Si on élimine les variations périodiques de positions (marées, surcharges, etc ...) et qu'on suppose les moyennes de ces effets nulles (si ce n'est pas le cas, il suffit d'incorporer ces moyennes non nulles dans l'effet permanent), le terme principal de  $\vec{s}'(t)$  est un terme constant. Ce terme trouve son origine dans la tectonique des plaques pour le mouvement horizontal, et dans des réponses élastiques de la Terre à des effets de charge (rebond post-glaciaire, ...) pour le mouvement vertical. Par ailleurs, de brusques accélérations ou des termes de Dirac peuvent survenir lors d'événements catastrophiques comme

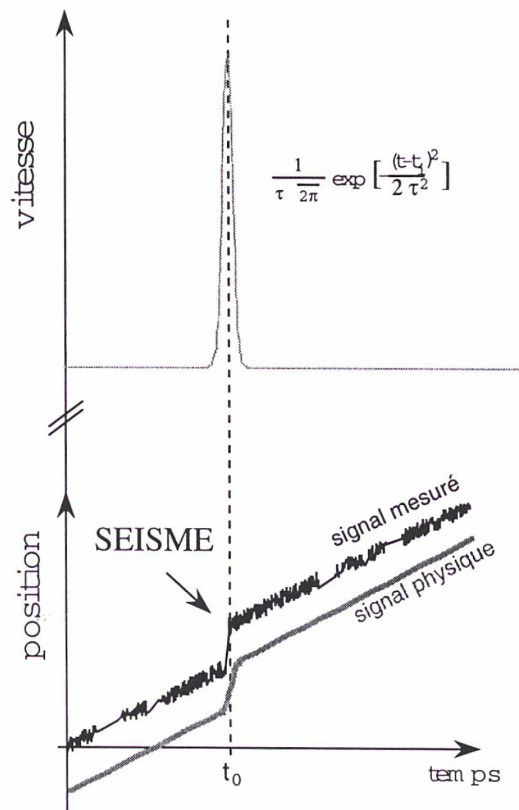


FIG. IV.2: Signal physique et mesuré de la position d'un point : vitesse continue

des séismes (cf. figures IV.1 et IV.2), ou d'incidents non documentés au niveau de l'équipement de la station (par exemple, des déplacements d'antennes). Enfin, à l'issue de tels événements catastrophiques, la valeur de la vitesse de déplacement peut elle-même changer.

Ceci étant, restreindre le mouvement des points aux seuls mouvements tectoniques et donc considérer que  $\vec{V}$  est constante presque partout ou par intervalles, est une approximation qui, selon les cas, peut être abusive.

Un moyen de s'affranchir de ce type de restrictions est de travailler sur l'échantillonnage de l'information. Une fois la physique du phénomène modélisée, il convient de passer à la mesure. A moins d'être capable de mesurer la déformation de la Terre en continu (on y tend avec des techniques comme GPS), on ne peut se contenter que d'un nombre discret de mesures  $[kT, 0 \leq k \leq n, T \text{ constante}]$ . Ces mesures ne sont pas directement des mesures de positions de sorte que les ensembles

$$\begin{cases} \{\vec{X}(kT), 0 \leq k \leq n\} & (1) \\ \{\vec{X}(0), \vec{V}(0)\} & (2) \end{cases} \quad (IV.3)$$

sont équivalents lorsque  $\vec{V}$  est une constante, aux décrochements près. Néanmoins, dès que  $\vec{V}(t)$  n'est plus constante dans le temps, la série temporelle (IV.3-1) contient davantage d'informations que (IV.3-2). On comprend dès lors que la modélisation physique que l'on adopte est un élément essentiel dans la réalisation du système terrestre.

Quoiqu'il arrive, le couple de relations (IV.2) ou (IV.3) impose de construire une transformation entre repères dans le temps. Soient deux jeux de coordonnées d'un même point physique exprimés dans deux repères instantanés différents  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  par la combinaison d'un changement d'origine, d'une homothétie et de trois rotations (isométrie)

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{T}(t, t): \mathcal{R}(t) \rightarrow \mathcal{R}'(t) \\ \vec{X}(t) \mapsto \vec{X}'(t) = \mathfrak{T} + \mathfrak{R}\vec{X}(t) \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

Considérons à présent que l'on dispose d'une série temporelle de  $\vec{X}$  à des instants successifs  $(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n)$  et la série adjointe  $(\vec{X}'_1, \dots, \vec{X}'_n)$ . D'après ce que l'on vient de construire, il existe une série temporelle de transformations  $\mathcal{T}_i \equiv \mathcal{T}(t_i, t_i)$  qui à tout  $\vec{X}_i$  fait correspondre  $\vec{X}'_i$ .

Dans l'hypothèse restrictive où la vitesse du point est constante, alors la famille  $(\mathcal{T}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est générée par les paramètres de transformation à deux instants distincts. Ceci s'exprime aussi par les paramètres de transformation à un instant donné et des dérivées de ces paramètres. C'est cette modélisation qui est adoptée pour l'ITRF (Boucher et al., 1998).

Dans le cas général, dire que  $\vec{X}(t)$  et  $\vec{X}'(t)$  sont dans le même système de

référence signifie que

$$\vec{X}'(t) = \vec{X}(t) \text{ soit } \begin{cases} \mathfrak{R} = I_3 \\ \vec{\mathfrak{X}} = \vec{0} \end{cases}$$

Supposons que cette propriété soit vraie pour tout  $t$ . Dans ce cas, par dérivation,  $\vec{V}'(t) = \vec{V}(t)$ . Or

$$\begin{aligned} \vec{V}'(t) &= \dot{\vec{\mathfrak{X}}} + \mathfrak{R}\dot{\vec{X}}(t) + \mathfrak{R}\dot{\vec{X}}(t) + \mathfrak{R}\vec{V}(t) \\ &= \dot{\vec{\mathfrak{X}}} + \mathfrak{R}\dot{\vec{X}}(t) + \mathfrak{R}\dot{\vec{X}}(t) + \vec{V}(t) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que les séries temporelles  $(\vec{X}'(t))_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(\vec{X}(t))_{t \in \mathbb{R}}$  réalisent un même système de référence, il faut que  $\dot{\vec{\mathfrak{X}}} = \vec{0}$ ,  $\dot{\mathfrak{R}} = 0$  et  $\mathfrak{R} = 0$ . De ce fait,

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\vec{X}(t), \vec{X}'(t)) \in \mathcal{R}(t)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \vec{\mathfrak{X}}(t) = \vec{0}, \mathfrak{R}(t) = I_3 \\ \text{ou bien} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \dot{\vec{\mathfrak{X}}}(t) = \vec{0} \\ \dot{\mathfrak{R}}(t) = 0 \\ \mathfrak{R}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\mathfrak{X}}(0) = \vec{0} \\ \mathfrak{R}(0) = I_3 \end{cases} \end{cases}$$

Tout ceci montre que si la modélisation physique est un paramètre important pour l'expression du problème, l'échantillonnage de la mesure est crucial pour sa résolution.

Un dernier mot sur le contexte physique de la réalisation de système terrestre. Nous avons étudié la modélisation physique et l'échantillonnage de la coordonnée. Il ne reste plus qu'à s'intéresser à sa mesure. Dans le cas d'une mesure, il convient de compléter le signal physique (IV.2) ou (IV.3) par un terme d'erreur de nature aléatoire  $\varepsilon(t)$  :

$$\begin{cases} \vec{V}(t) = \vec{s}(t) + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i(t) + \vec{\varepsilon}(t) \\ \vec{X}(t) = \int_0^t \vec{V}(t) dt \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Ainsi construit,  $\vec{V}(t)$  est un processus stochastique (Papoulis, 1991). Suivant la nature statistique de la variable aléatoire  $\vec{\varepsilon}(t)$ , il sera possible ou non d'estimer  $\vec{X}(t)$  et  $\vec{V}(t)$  en connaissant  $\vec{X}(t)$  et  $\vec{V}(t)$  en un nombre fini de points.

Une série temporelle de  $n$  mesures correspond à une série temporelle d'une réalisation de  $n$  variables aléatoires distinctes. Plus précisément, si on considère la variable aléatoire  $\tilde{X}(t_0)$  pour  $t_0$  fixé, une réalisation de cette variable sera paramétrée par  $\xi$  et notée  $\tilde{X}(t_0, \xi)$ . Cette notation est empruntée à A. Papoulis

(Papoulis, 1991). Toute estimation de  $\mathbb{E}(\tilde{X}(t_0))$  repose sur un échantillon de cette variable aléatoire soit  $\mathcal{E}_{t_0}^n = \{\tilde{X}(t_0, \xi_1), \dots, \tilde{X}(t_0, \xi_n)\}$ .

Par conséquent, pour déduire une information sur  $\tilde{X}(t_0)$ , il faudrait, sans autre hypothèse, disposer d'un échantillon de réalisations de cette variable aléatoire de la forme  $\mathcal{E}_{t_0}^n$ . Ainsi, un estimateur sans biais de la moyenne de  $\tilde{X}(t_0)$  appuyé sur  $\mathcal{E}_{t_0}^n$  serait

$$\mathbb{E}(\widehat{\tilde{X}(t_0)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}(t_0, \xi_i) \quad (\text{IV.6})$$

Dans une série temporelle, on ne dispose pas de plusieurs tirages à  $t$  constant mais de tirages uniques de plusieurs variables aléatoires à  $t$  variable  $\mathcal{E}^n = \{\tilde{X}(t_1, \xi_1), \dots, \tilde{X}(t_n, \xi_1)\}$ . Cette situation est très différente de la précédente et nécessite, pour inférer de  $\mathcal{E}^n$  un comportement de  $\tilde{X}(t)$ , de s'appuyer sur des hypothèses relatives au bruit de mesure. Ces hypothèses visent à ajouter une redondance qui, en l'état, n'existe pas. La redondance est la clé de toute estimation.

En premier lieu, le processus stochastique, pour être sujet à estimation, doit être un processus stationnaire. Un processus stochastique est stationnaire si sa moyenne est indépendante du temps en tout point, soit <sup>3</sup>

$$E(\tilde{X}(t)) = \eta \quad (\text{IV.7})$$

Cette seule propriété n'est pas suffisante pour construire un estimateur sur la base d'un échantillon de la forme  $\mathcal{E}^n$ . Pour cela, il faut compléter la propriété précédente par une propriété d'ergodicité du processus.

On définit  $\eta_T$  par

$$\eta_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{X}(t) dt \quad (\text{IV.8})$$

En vertu de l'équation (IV.7),  $\mathbb{E}(\eta_T) = \eta$ . Soit  $\sigma_T$  l'écart type associé à la variable aléatoire  $\eta_T$ . On dit que le processus  $\tilde{X}(t)$  est ergodique lorsque  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T = 0$  (Papoulis, 1991).

Avec une telle propriété, on en déduit que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{E}^n$  devient représentatif de la distribution de la variable aléatoire  $\tilde{X}(t)$  et permet donc d'accéder aux propriétés statistiques du processus stochastique.

Que déduire de ce propos pour les séries temporelles de coordonnées ?

- Tout d'abord, on ne peut pas s'intéresser aux réalisations seules (i. e. les coordonnées mesurées successives), dans le sens où il s'agit de mesures

<sup>3</sup>On distingue plusieurs classes de stationnarité; stationnarité stricte qui stipule que la statistique de  $\tilde{X}(t)$  est invariante à un changement d'origine des temps; stationnarité faible où l'auto-corrélation du processus ne dépend que de la différence de date (pour une discussion complète, on se reportera à (Papoulis, 1991) par exemple).

sujettes à erreur de mesure. Le processus stochastique sous-jacent doit être envisagé dans son intégralité.

- Ensuite, il faut extraire des mesures des sous-processus vérifiant les propriétés de stationnarité et d'ergodicité déjà évoquées, si l'on veut travailler à l'aide d'une seule série temporelle de données. Par exemple, postuler l'existence d'une vitesse constante entre pleinement dans ce schéma.
- Pour finir, supposons qu'au lieu d'une réalisation d'un processus stochastique par date, on dispose de plusieurs réalisations. Dans ce cas, on peut accéder à une connaissance meilleure, au sens statistique, du processus à chaque date. Or c'est précisément ce qui se produit lorsqu'on dispose de plusieurs systèmes de mesure opérant en parallèle, comme par exemple DORIS, GPS, la télémétrie laser sur satellite ou l'interférométrie à très longue base. On observe alors l'intérêt de disposer de lots de données obtenues indépendamment : non seulement une meilleure connaissance des phénomènes est accessible, mais aussi le nombre d'hypothèses à pratiquer en vue de l'analyse de ces phénomènes est restreint d'autant. Dans l'absolu, sans hypothèse de stationnarité et d'ergodicité, une série temporelle de données n'apporte que fort peu de choses ; des séries parallèles ouvrent des perspectives qu'interdit une série unique.

## 1.2. Le système d'axes de Tisserand

### 1.2.1. Introduction

Le concept de système de référence terrestre est intimement lié à la mesure des paramètres d'orientation de la Terre. Néanmoins, comme la Terre est un solide déformable, la détermination de sa rotation devient clairement un problème implicite et dépendant du temps : il n'est plus possible de définir un axe de rotation instantané d'un point de vue statique et à partir de considérations purement géométriques. Le problème de la définition d'un axe de rotation instantané ainsi que du système de référence sous-jacent a été envisagé depuis bien longtemps : (Laplace, 1812) et (Liouville, 1859) par exemple, ont étudié les équations différentielles de la rotation d'un corps quelconque par rapport à un axe de référence fixe. Lagrange a observé qu'il était possible d'identifier, dans le système d'équations précédent, l'énergie cinétique du corps considéré : cela constituait le premier pas vers une définition intrinsèque de la rotation de la Terre et du système terrestre tandis qu'aucun système de coordonnées n'était utilisé dans cette formalisation. Parmi d'autres, F.F. Tisserand (Tisserand, 1891) étudia attentivement le problème et nota que la rotation pouvait être définie avec une sorte de condition « d'absence de courant » pour un corps déformable. Cette condition est aujourd'hui connue sous le nom de « condition de Tisserand ». Cette condition présente l'intérêt d'être applicable à partir

de la connaissance des déformations de la Terre en surface. Il est bien évident qu'il existe d'autres conditions, physiquement aussi valables, mais généralement moins aisées à appliquer. C'est cette double caractéristique de pertinence physique et d'applicabilité numérique qui a justifié l'intérêt porté à cette méthode dans un passé récent : en effet, la géodésie spatiale est en mesure d'élaborer un champ de déformations de la surface terrestre et cette capacité rend nécessaire l'introduction d'une contrainte d'évolution temporelle de la croûte terrestre. Dans la littérature récente, (Munck et Macdonald, 1975; Moritz et Mueller, 1987) évoquent les conditions de Tisserand comme méthode de discrimination de la rotation de la Terre et du système terrestre. Plus récemment, les axes de Tisserand ont été présentés comme une méthode « plutôt tentante » pour la définition des systèmes terrestres (Boucher et Feissel, 1983b; Boucher, 1988).

Il existe naturellement d'autres méthodes pour imposer des conditions de non-rotation. On notera avec intérêt la méthode proposée par (Solomon et Sleep, 1974) et reprise pour la construction des modèles de plaques tectoniques AMO2 (Minster et al., 1974) et NNR-NUVEL1 (Argus et Gordon, 1991). Si l'implémentation de cette condition, étudiée à la fin de ce paragraphe, semble originale, les considérations physiques originelles demeurent identiques aux conditions de Tisserand.

On peut également être conduit à définir d'autres systèmes que le système de Tisserand. Par exemple, dans ses travaux, H. Drewes définit le système de référence de travail par  $\int_e \vec{V} dr = \vec{0}$ .

Cette condition est une condition nécessaire vérifiée par le système de Tisserand, comme on le verra au paragraphe suivant (équation IV.17). Elle est utilisée dans un certain nombre des écrits de cet auteur (Drewes, 1996; Drewes, 1998) et modifiée en  $\min(\int_e \vec{V}^2 dr)$  dans (Drewes, 1998). Cette dernière condition est précisément la condition de Tisserand. En outre, la vitesse  $\vec{V}$  utilisée dans les intégrales précédentes est, dans ces travaux, une vitesse régularisée des déformations locales d'origine géophysique autres que tectonique.

Les axes de Tisserand ne constituent nullement l'unique méthode pour définir l'évolution temporelle d'un système de référence terrestre. D'autres définitions de systèmes globaux existent dans la littérature. Ainsi, le modèle HS2-NUVEL1 (Gripp et Gordon, 1990) est construit à partir de la théorie des « points chauds », lesquels sont considérés fixes dans le temps. Le système de référence en question leur est attaché.

### 1.2.2. Présentation mécanique

On considère deux repères,  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}$  :  $\mathcal{R}_0$  est en translation et rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ . Au point physique M, la loi de composition des positions-vitesses



s'écrit ( $\mathcal{R}$  repère inertiel) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\vec{R}}_{\text{dans } \mathcal{R}} = \underbrace{\vec{R}_0}_{\text{origine de } \mathcal{R}_0 \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{r}}_{\text{vecteur position de } M \text{ dans } \mathcal{R}_0} \\ \underbrace{\vec{V}}_{\text{dans } \mathcal{R}} = \underbrace{\vec{V}_0}_{\text{vitesse de l'origine de } \mathcal{R}_0 \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{v}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}_0} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}_0/\mathcal{R}} \wedge \vec{r} \end{array} \right. \quad (\text{IV.9})$$

Supposons que  $\mathcal{R}_0$  est attaché à un corps  $\mathcal{C}$  (ensemble de points de masse non nulle) de densité  $\rho(r)$ . On définit dans  $\mathcal{R}$  le moment cinétique de  $\mathcal{C}$  par rapport à l'origine de  $\mathcal{R}_0$  par

$$\vec{H}_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{C}} \rho(r) \vec{r} \wedge \vec{V} dr \quad (\text{IV.10})$$

et dans  $\mathcal{R}_0$  par

$$\vec{H}_{\mathcal{R}_0} = \int_{\mathcal{C}} \rho(r) \vec{r} \wedge \vec{v} dr \quad (\text{IV.11})$$

En développant  $\vec{H}_{\mathcal{R}}$  en accord avec l'équation (IV.9), on a :

$$\vec{H}_{\mathcal{R}} = \left( \int_{\mathcal{C}} \rho(r) \vec{r} dr \right) \wedge \vec{V}_0 + \vec{H}_{\mathcal{R}_0} + J \cdot \vec{\omega} \quad (\text{IV.12})$$

où  $J$  est appelé tenseur d'inertie et implicitement défini par

$$J \cdot \vec{\omega} = \int_{\mathcal{C}} \rho(r) \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dr \quad (\text{IV.13})$$

On définit à présent la quantité de mouvement de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}_0$

$$\vec{P}_{\mathcal{R}_0} = \int_{\mathcal{C}} \rho(r) \vec{v} dr \quad (\text{IV.14})$$

L'énergie cinétique de  $\mathcal{C}$  dans le système  $\mathcal{R}_0$  s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \rho(r) v^2 dr \quad (\text{IV.15})$$

En vertu des relations (IV.9),  $T$  s'écrit formellement

$$T \equiv T(\vec{V}, \vec{V}_0, \vec{\omega}, \vec{R}, \vec{R}_0, t)$$

Néanmoins, le système mécanique  $\mathcal{C}$  d'énergie cinétique  $T$  possède six liaisons holonomes liées à la définition du système de référence  $\mathcal{R}$ . De sorte que si on applique un principe variationnel à  $T$  (Goldstein, 1964; Boucher, 1988), l'expression des liaisons sera traduite par exemple par  $\delta \vec{R} = \vec{0}$  et  $\delta \vec{V} = \vec{0}$ . Il en découle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = \delta \vec{R}_0 + \delta \vec{r} \\ \vec{0} = \delta \vec{V}_0 \delta + \vec{v} + \delta \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \delta \vec{r} \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$

et donc

$$\begin{aligned}\delta T &= \int \rho(r) \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dr \\ &= -\vec{P}_{\mathcal{R}_0} \cdot \delta \vec{V}_0 - \vec{H}_{\mathcal{R}_0} \cdot \delta \vec{\omega} + \vec{P}_{\mathcal{R}_0} \cdot (\vec{\omega} \wedge \delta \vec{R}_0)\end{aligned}$$

$\delta \vec{V}_0, \delta \vec{R}_0$  et  $\delta \omega$  étant arbitraires, finalement

$$\delta T = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{P}_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \\ \vec{H}_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

En conséquence, définir un système tel que l'énergie cinétique du corps  $\mathcal{C}$  dans ce système soit minimale revient à imposer les deux conditions vectorielles  $\vec{P}_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$  et  $\vec{H}_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$ .  $\vec{P}_{\mathcal{R}_0}$  et  $\vec{H}_{\mathcal{R}_0}$  ne sont pas colinéaires donc le système  $\mathcal{R}_0$  déduit de (IV.17) est parfaitement défini à l'aide des relations (IV.10).

Enfin, les conditions (IV.17) définissent l'axe instantané de rotation du corps  $\mathcal{C}$  : si on écrit le moment cinétique du corps  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}$  et en supposant que les origines des deux repères sont confondues (i.e.  $\vec{V}_0 = \vec{0}$ ), on a

$$\vec{H}_{\mathcal{R}} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{IV.18})$$

dans le système d'énergie minimale. Cette dernière propriété permet de définir le système de coordonnées instantané dans lequel le tenseur  $\mathbf{J}$  est diagonal.

Le système d'axe défini par les conditions (IV.17) est appelé système d'axes de Tisserand (Munck et Macdonald, 1975; Moritz et Mueller, 1987; Boucher, 1988).

### 1.2.3. Mise en œuvre des conditions de Tisserand

L'équation (IV.18) définit le système  $\mathcal{R}_0$  par rapport au système  $\mathcal{R}$ , le système  $\mathcal{R}_0$  étant attaché à un corps déformable ( $\mathbf{J}$ , tenseur d'inertie, fonction du temps) et en rotation instantanée  $\vec{\omega}$ .

Un modèle de la Terre couramment envisagé est celui d'une lithosphère découpée en plaques rigides d'extension connue. Ces plaques « flottent » sur le manteau dans un mouvement de rotation uniforme. Ce mouvement est dissocié de la rotation instantanée  $\vec{\omega}$ . Le modèle proposé par (Solomon et Sleep, 1974) est compatible avec le modèle de Terre évoqué ci-dessus.

Supposons que la surface terrestre soit composée de  $(q + 1)$  plaques de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_p$  dans  $\mathcal{R}_0$  ( $0 \leq p \leq q$ ).  $\mathbf{J}_p$  est le tenseur d'inertie de la plaque  $p$ , soit explicitement :

$$\mathbf{J}_p \vec{\omega}_p = \int_{\text{plaque } p} \rho(r) \vec{r} \wedge (\vec{\omega}_p \wedge \vec{r}) dr \quad (\text{IV.19})$$

Par définition, si  $\mathcal{R}_0$  est le système d'axes de Tisserand, alors

$$\vec{H}_{\mathcal{R}_0} = \sum_{p=0}^q J_p \vec{\omega}_p = \vec{0} \quad (\text{IV.20})$$

$J_p$  est de nature diverse selon que l'on prend un modèle de plaques d'épaisseur nulle (dans ce cas  $J_p$  est issue d'une intégrale de surface), non nulle mais constante, ou bien d'épaisseur variable.

Supposons que l'on dispose des vitesses relatives des plaques par rapport à une plaque de référence comme c'est le cas dans le modèle de plaques NUVEL-1 (DeMets et al., 1990). La plaque de référence est indiquée 0 et la vitesse relative de la plaque  $p$  s'écrit

$$\vec{\omega}_{p0} = \vec{\omega}_p - \vec{\omega}_0 \quad (\text{IV.21})$$

Par conséquent, la condition (IV.20) s'écrit

$$\sum_p J_p (\vec{\omega}_{p0} + \vec{\omega}_0) = \vec{0} \quad (\text{IV.22})$$

soit

$$\sum_p J_p \vec{\omega}_{p0} = - \sum_p J_p \vec{\omega}_0 \quad (\text{IV.23})$$

Dans l'hypothèse d'une Terre sphérique et de densité surfacique de masse unitaire,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dr = \frac{8\pi}{3} \vec{\omega}$$

Par conséquent, dans ce modèle,

$$\sum_p J_p \propto \frac{8\pi}{3}; r \equiv 1$$

et donc de (IV.23), on déduit :

$$\vec{\omega}_0 = - \frac{3}{8\pi} \sum_p J_p \vec{\omega}_{p0} \quad (\text{IV.24})$$

Ainsi, les modèles de plaques NNR-NUVEL-1 (Argus et Gordon, 1991) et NNR-NUVEL1A (DeMets et al., 1994) sont explicitement exprimés dans le système de Tisserand. D'autres formes de mise en œuvre peuvent être envisagées comme l'application directe de la condition  $T$  minimale (équation IV.15). En particulier, supposons que l'on dispose d'un réseau de points répartis à la surface de la Terre, auquel on associe une structure en éléments finis. A chaque point du réseau correspond un couple  $(\vec{V}_i, \delta s_i)$  où  $\vec{V}_i$  est une vitesse cartésienne exprimée dans un référentiel quelconque et  $\delta s_i$  est la surface de l'élément de surface associé au point considéré.

D'une manière générale, l'énergie cinétique de la croûte terrestre est donnée, dans le repère terrestre quelconque associé aux vitesses  $\vec{v}$  par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \int_{(e)} \rho(\sigma) \vec{v}(\sigma)^2 d\sigma \quad (\text{IV.25})$$

On note  $\theta$  les paramètres de la transformation permettant de passer du système de référence réalisé par le champ de vitesses  $\vec{v}$  au système de Tisserand. Trouver  $\theta$  revient à minimiser en  $\theta$  la quantité

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{2} \int \int_{(e)} \rho(\sigma) \vec{v}(\sigma, \theta)^2 d\sigma \quad (\text{IV.26})$$

Si on suppose  $\rho$  constante, alors  $\rho = \frac{1}{S}$  où  $S$  est la surface totale de la Terre. Au lieu d'un champ de vitesse continu, on dispose d'un champ de vitesses discret  $(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n)$ . On note  $(\vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_n)$  les vitesses correspondantes dans le système de Tisserand. Il s'agit donc de discrétiser l'énergie cinétique (IV.26). L'équation qui lie  $\vec{V}'_i$  à  $\vec{V}_i$  est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\delta s_i} \vec{V}'_i = \sqrt{\delta s_i} \vec{V}_i - A_i \theta \\ A_i = \sqrt{\delta s_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_i & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & y_i & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & z_i & y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix} \\ \theta = (\dot{T}_x \quad \dot{T}_y \quad \dot{T}_z \quad \dot{\lambda} \quad \dot{\epsilon} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\omega})^T \end{array} \right. \quad (\text{IV.27})$$

L'énergie discrétisée s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sum \delta s_i} \mathcal{V}'^T \mathcal{V}' \\ \mathcal{V}'^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\delta s_1} \vec{V}'_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\delta s_n} \vec{V}'_n \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{IV.28})$$

Une solution possible de ce problème est d'assimiler le problème d'estimation (IV.27) à un problème classique de moindres carrés  $\sqrt{\delta s_i} \vec{V}'_i = A_i \theta$ , où  $\theta$  est l'inconnue. Il convient néanmoins de pondérer l'information apportée par les  $\vec{V}'_i$  en raison inverse de leur variance. Soit  $\Sigma$  la variance du vecteur

$(\vec{V}_1^T \dots \vec{V}_n^T)^T$ , alors un estimateur de  $\theta$  sera

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta} = (A^T \Sigma^{-1} A) A^T \Sigma^{-1} \mathcal{V} \\ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{\delta s_1} \vec{V}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\delta s_n} \vec{V}_n \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{IV.29})$$

Il est clair que  $\hat{\theta}$  n'est pas unique et résulte d'un choix, en particulier en matière de pondération. La technique du maximum de vraisemblance pourrait être appliquée mais, d'une part elle conduit à des expressions non simplifiables avec les densités de probabilités usuelles, et d'autre part elle résulte, elle aussi, de postulats (densité de probabilité pour les observations et maximum de vraisemblance qui n'assure pas l'absence de biais). Il reste donc à définir une structure en éléments finis de la croûte terrestre afin d'appliquer une condition de type (IV.29). C'est ce que l'on propose d'effectuer au paragraphe suivant.

### 1.3. Discrétisation de la surface terrestre

L'objectif de cette discrétisation est de construire une partition de la surface terrestre où chaque élément de surface est associé à un point particulier du réseau sur lequel on s'appuie. Cette approche est très différente de l'optique qui consiste à définir une partition optimale de la surface terrestre selon des critères externes et à développer le réseau géodésique conformément à la partition obtenue. C'est ainsi qu'est construite la partition proposée dans (Zumberge et al., 1994).

Dans l'étude (Sillard, 1998c), une partition a été construite sur la base du réseau ITRF96 en s'appuyant sur la théorie des graphes. Un outil adapté est le graphe de Voronoï, graphe dual de la triangulation optimale de Delaunay : la triangulation de Delaunay correspond à l'ensemble des polygones dont les sommets sont les points du réseau, les côtés des polygones s'intersectant uniquement au niveau des sommets; le diagramme de Voronoï est également un ensemble de polygones. Chaque polygone contient un point du réseau et représente le lieu des points de la surface plus proches (au sens de la distance euclidienne) du point inscrit que de tout autre point du réseau. La figure IV.3 montre un exemple de diagramme de Voronoï associé aux points inscrits dans chaque cellule.

Cette technique a été appliquée à l'ITRF96 et constitue l'objet du paragraphe suivant ainsi que de l'étude (Sillard, 1998c). On peut, pour finir, men-

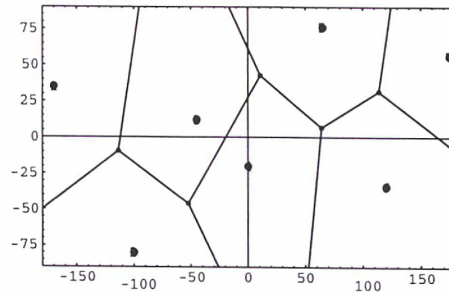


FIG. IV.3: Exemple de diagramme de Voronoï

tionner que des techniques semblables ont été utilisées dans le passé en vue de l'intégration numérique de l'intégrale de Stokes pour la réduction d'un réseau gravimétrique (Gerstl et al., 1979).

#### 1.4. Application à l'ITRF96

On cherche à découper la surface de la Terre en éléments de surface cohérents. Le problème est que le diagramme de Voronoï est originellement un graphe planaire. La surface de la Terre est donc modifiée en utilisant une projection équivalente. Il ne reste plus qu'à calculer la surface  $\delta s_i$  de chacune des cellules du graphe de Voronoï<sup>4</sup>. C'est précisément ce qui a été fait avec les 290 cellules de l'ITRF96. Avec les constantes et les méthodes utilisées, la somme des surfaces des cellules vérifie à 1 % près l'égalité à la surface totale de la Terre. Les traitements numériques ont été faits à l'aide du logiciel Mathematica. Les coordonnées de station, les vitesses par site et la variance correspondante ont été extraites du fichier de données de l'ITRF96. La projection équivalente choisie, pour le calcul du graphe de Voronoï, est la projection équivalente de Lambert (Baetslé, 1969). On trouvera à la figure IV.4 une représentation du diagramme de Voronoï du réseau ITRF96 en projection Lambert équivalente. Les problèmes de continuité en est-ouest du graphe de Voronoï ont été résolus en

<sup>4</sup>Il faut noter ici une approximation : la construction du graphe de Voronoï repose sur la distance associée à la surface traitée. Or une projection équivalente ne conserve pas les distances. Par conséquent, si on souhaite maintenir cette propriété dans la construction du graphe de Voronoï et travailler dans le plan, il faut, en toute rigueur construire le graphe de Voronoï sur la sphère (dans ce cas les cotés des cellules sont des arcs de grands cercles) puis projeter le tout à l'aide d'une projection équivalente. Néanmoins, compte tenu du grand nombre de cellules construites pour l'ITRF96, l'approximation reste très limitée et a sans doute peu d'influence sur le résultat final. On pourra se reporter à (Hase, 1998) pour plus de détails quant à la construction d'une telle figure.

rajoutant les deux bandes d'extension 180° en longitude adjacentes aux méridiens ±180°. Le calcul des surfaces élémentaires est effectué sur ce graphe régularisé.

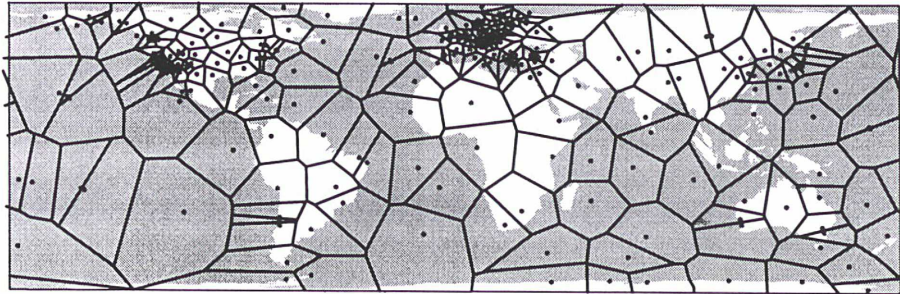


FIG. IV.4: Diagramme de Voronoï du réseau ITRF96

Le tableau (IV.1) présente les résultats de deux types de calculs considérant soit les vitesses tridimensionnelles, soit les vitesses restreintes à leurs seules composantes horizontales.

Dans les deux cas, on a cherché à estimer 7 paramètres (trois translations, un facteur d'échelle et trois rotations). Puis dans un second temps, le modèle de transformation a été réduit à 6 paramètres, l'échelle n'étant plus estimée.

	$\dot{T}_x$ mm/an	$\dot{T}_y$ mm/an	$\dot{T}_z$ mm/an	$\dot{\lambda}$ 10 <sup>-9</sup> /an	$\dot{R}_1$ mas/an	$\dot{R}_2$ mas/an	$\dot{R}_3$ mas/an
ttes vitesses	-1.4	-2.3	4.1	-0.23	0.13	0.74	-0.40
±	.11	.08	.27	.03	.02	.02	.02
ttes vitesses	-1.0	-2.1	1.9	/	0.091	0.83	-0.39
±	.11	.07	.06	/	.02	.02	.02
vit. horiz.	-3.5	1.6	1.1	-0.34	-0.11	-0.49	0.18
±	.22	.15	.54	.06	.03	.05	.03
vit. horiz.	-2.9	2.0	-2.1	/	-0.16	-0.35	0.19
±	.21	.14	.13	/	.03	.04	.03

TAB. IV.1: Valeur de la transformation minimisante : variance des vitesses complète

Le tableau précédent amène plusieurs remarques :

- L'ITRF96 est aligné sur le champ de vitesses NNR-NUVEL1A par annulation de la transformation qui permet de passer du champ ITRF au champ

NNR-NUVEL1A appliqué aux points de l'ITRF. Or NNR-NUVEL1A ne possède pas de vitesses verticales alors que la description ITRF96 des vitesses l'autorise. De sorte que la transformation entre l'ITRF96 et le système de Tisserand n'a aucune raison d'être nulle.

- L'ordre de grandeur des paramètres de transformation entre l'ITRF96 et le système d'énergie minimale est faible (2 à 3 millimètres). On peut donc légitimement en déduire que l'ITRF96 permet l'application d'une condition de non rotation qui présente un sens. Cette constatation est importante car elle permet d'envisager une nouvelle approche de la réalisation de l'ITRS sur la base de l'imposition d'une condition de non rotation, du type de celle qui a été présentée dans cette étude, dans le calcul de l'ITRF.
- Il faut insister sur le fait que la condition d'énergie minimale est appliquée sur un modèle de Terre qui autorise les vitesses verticales de déplacement de stations. C'est un point tout à fait nouveau par rapport aux champs de vitesses usuels (DeMets et al., 1994). La restriction opérée dans NNR-NUVEL1A à un champ de vitesses horizontales n'a donc plus lieu d'être.
- La table (IV.1) montre que l'échelle est un paramètre mal déterminé qui, lorsqu'il est libéré, perturbe l'estimation des autres paramètres. Cette perturbation, caractérisée statistiquement par une forte corrélation de  $\dot{T}_z$  et  $\dot{\lambda}$ , s'explique physiquement par une dissymétrie dans la répartition nord-sud des stations de l'ITRF96. Il est probable que cette dissymétrie induise une qualité médiocre de l'intégration numérique de la condition de non rotation sur l'hémisphère sud. Ainsi, la méthode d'intégration révèle-t-elle une caractéristique du réseau.

A titre pédagogique, un calcul avec les vitesses tridimensionnelles, mais en ne tenant compte que des écart-type des vitesses (et non de la variance complète) a été fait. Les résultats de ce calcul sont présentés dans le tableau (IV.2).

	$\dot{T}_x$	$\dot{T}_y$	$\dot{T}_z$	$\dot{\lambda}$	$\dot{R}_1$	$\dot{R}_2$	$\dot{R}_3$
	mm/an	mm/an	mm/an	$10^{-9}$ /an	mas/an	mas/an	mas/an
vit. horiz.	21.4	-29.1	-25.9	-0.064	-0.099	0.042	-0.003
±	.27	.27	.28	.04	.01	.01	.01
ttes vitesses	-13.1	18.3	9.5	0.58	0.38	0.14	-0.31
±	1.2	1.2	1.3	0.18	.05	.05	.04

– TAB. IV.2: Valeurs de la transformation minimisante : variance diagonale



On peut constater, au vu du tableau (IV.2) que l'ordre de grandeur de la transformation a évolué du mm/an au cm/an entre le calcul avec les variances complètes et diagonales. L'ordre de grandeur de la transformation évoquée à la table (IV.2) est dénué de tout sens physique. Cet exemple est très intéressant car il confirme l'usage indispensable de la variance complète pour faire des calculs propres sur l'ITRF96.

Pour finir, un calcul de non rotation sur le champ de vitesse déduit de NNR-NUVEL 1 aux points du réseau ITRF a été effectué et les résultats sont présentés à la table IV.3. Le but de ce calcul est de qualifier la partition de la surface de façon à quantifier « l'erreur de réseau » introduite sur la condition de non rotation.

La variance des vitesses horizontales a été choisie, unilatéralement à 3 mm/an, aucune incertitude n'ayant été estimée pour le champ de vitesse NNR-NUVEL 1 (Argus et Gordon, 1991). Ces variances ont été propagées en vitesses cartésiennes de façon à utiliser la méthode exposée précédemment. On trouvera les équations de propagation de la variance dans (Boucher et Willis, 1988).

	$\dot{T}_x$	$\dot{T}_y$	$\dot{T}_z$	$\dot{\lambda}$	$\dot{R}_1$	$\dot{R}_2$	$\dot{R}_3$
	mm/an	mm/an	mm/an	$10^{-9}$ /an	mas/an	mas/an	mas/an
NNR-NUVEL 1	-4.2	5.1	1.3	/	0.033	-0.021	0.028
±	2.1	2.1	2.2	/	1.0	1.0	.08

TAB. IV.3: Valeurs de la transformation minimisante pour NNR-NUVEL 1

Les valeurs présentées à la table IV.3 sont satisfaisantes, dans le sens où l'effet de réseau, sur la condition de non-rotation, est de l'ordre de la transformation obtenue pour l'ITRF96. Cela confirme la remarque que le champ de vitesse ITRF96 est un outil adéquat en vue de l'application des conditions de Tisserand. On peut être un peu surpris par les écart-types annoncés en rotation ( $\dot{R}_1$  et  $\dot{R}_2$ ) dans la table précédente. La raison est que les deux paramètres  $\dot{R}_1$  et  $\dot{R}_2$  sont excessivement corrélés : 99.5%. Si on contraint l'un des paramètres à être égal à 0, l'écart-type du second revient à une valeur raisonnable de 0.011mas/an.

Pour achever les commentaires de la table IV.3, on pourra remarquer que les trois rotations de NNR-NUVEL 1 sont d'un ordre de grandeur inférieur aux rotations de la transformation de l'ITRF96, et sont, rapportées à des vitesses surfaciques, de l'ordre du mm/an. Ceci signifie que le critère de non rotation

de NNR-NUVEL 1 est bien respecté au sens de ce calcul. Cette remarque donne tout son sens aux rotations observées pour l'ITRF96.

## 2. Un exemple de phénomène non linéaire : les mouvements du géocentre

Dans ce texte, nous appellerons géocentre le centre des masses instantané de la Terre. Il est l'origine naturelle du système terrestre lorsqu'on s'intéresse à sa réalisation instantanée. Par contre, l'origine du système de référence terrestre conventionnel dans le temps n'est pas *le* géocentre, mais une moyenne des géocentres sur la période d'observation des stations entrant dans la réalisation du système terrestre.

L'étude des mouvements du centre des masses constitue un exemple typique des champs d'investigation de la géodésie moderne : la précision extraordinaire atteinte par les mesures permet d'accéder à de très faibles variations dans le temps de paramètres globaux. Jusqu'à un passé récent, seules les variations locales périodiques ou linéaires de la position des stations à la surface de la Terre étaient accessibles, essentiellement en raison de l'amplitude forte de ces variations (quelques centimètres par an). Les variations saisonnières des coefficients  $J_2$ ,  $J_3$ , et  $J_4$  du champ de gravité sont également déterminées avec une excellente précision, en particulier pour  $J_2$  et  $\dot{J}_2$  (Eanes et Bettadpur, 1996; Cazenave et al., 1996).

La détermination des variations du géocentre présente un problème conceptuel puisque le centre des masses de la Terre est l'origine du système de référence instantané : en effet, elle nécessite l'introduction d'un système de référence moyen qui suppose une modélisation correcte de la dépendance temporelle de tous les paramètres du calcul.

Par annulation des premiers termes du développement du potentiel de gravitation de la Terre, le géocentre coïncide avec l'origine du système de coordonnées. Par conséquent, les variations du géocentre sont, en théorie, indéterminables par l'observation de l'orbite d'un satellite artificiel de la Terre : il faut bien définir le système de référence où l'orbite est exprimée. L'information d'origine est portée par le système de coordonnées instantané. Une méthode possible pour la détermination du mouvement consiste, dans le calcul d'orbite, à assimiler les variations du géocentre à un mouvement d'ensemble des stations mais dans ce cas, il est nécessaire de postuler *a priori*, la structure de ces variations (mouvement périodique annuel, semi annuel) qui rattache le géocentre instantané au géocentre d'origine. Cette technique est équivalente à l'analyse de séries temporelles de jeux de coordonnées si le modèle de variation postulé est identique.

L'origine du système est également un paramètre intéressant dans le sens où il est omnidirectionnel et peut synthétiser les erreurs systématiques dissymétriques propres à la technique étudiée (erreur d'orbite par exemple). On verra dans la suite de ce paragraphe qu'il convient de demeurer très vigilant sur les déterminations des variations de l'origine du système de référence avant de pouvoir les identifier comme des variations réelles du centre des masses.

Pour finir, il faut noter que les variations du centre des masses de la Terre restent un sujet fondamental pour la réalisation des systèmes de référence. En effet, le centre des masses fait partie des rares quantités physiques entrant pleinement en jeu dans la définition des systèmes de référence terrestres idéaux (cf. chapitre I). Par conséquent, s'il s'avérait que la géodésie était capable de détecter ses variations, il conviendrait dès lors de les intégrer dans la réalisation même des systèmes de référence terrestre, au même titre que la rotation de la Terre par exemple. Ainsi peut-on légitimement s'interroger sur l'impact éventuel des variations du géocentre aujourd'hui non modélisées sur les variations observées du niveau moyen des mers. Il est clair que la stabilité du système de référence terrestre devient une caractéristique majeure dans la compréhension des évolutions séculaires de notre environnement. L'étude des variations du géocentre abordée dans cette thèse, du point de vue des systèmes de référence terrestres, entre pleinement dans cette problématique.

## 2.1. Contexte

La précision du positionnement géodésique global s'est considérablement accrue depuis quelques temps, essentiellement avec l'émergence de techniques « souples » telles que DORIS ou GPS. Ainsi, dans l'ITRF96 (Boucher et al., 1998), la moitié des points sont positionnés avec une précision formelle inférieure au centimètre. Il est donc désormais possible de s'intéresser à des phénomènes physiques d'extension globale et d'amplitude inférieure au centimètre. C'est précisément le cas des variations supposées du centre des masses de la Terre. L'IERS a donc tenté de fédérer les efforts d'un certain nombre de groupes de géodésie spatiale autour du problème posé par la mesure des variations de la position du géocentre. Une campagne internationale a été organisée, sous l'égide de l'IERS durant l'année 1998 (Ray, 1999), et la conclusion de cette campagne a donné lieu, en décembre 1998, à une session spéciale de l'American Geophysical Union Fall Meeting, où divers résultats ont été présentés. Il s'avère que les techniques de géodésie spatiale sont effectivement en mesure de détecter des signaux pseudo-périodiques de l'origine du système de référence dans lequel sont exprimées les mesures individuelles (Sillard, 1999; Boucher et Sillard, 1999). Il n'en reste pas moins qu'un seuil demeure à franchir avant que les signaux observés par chaque technique soient réputés cohérents et physi-

quement compatibles.

## 2.2. Physique du phénomène

La répartition des masses du système Terre est globalement variable. Ceci implique des effets sur le centre des masses qui se traduisent par des variations de positions par rapport à une référence fixe. Le problème est d'être capable de construire une référence fixe et de la maintenir dans le temps. Au delà de ce problème, les principales causes de redistribution des masses de la Terre sont d'origine atmosphérique, océanique et environnementale. On trouvera une analyse détaillée et théorique des diverses origines dans (Dong et al., 1997). Les chiffres donnés ci-après proviennent, pour la plupart, de cette étude. L'étude des variations du géocentre est un sujet qui, du point de vue théorique, a déjà été abordé depuis fort longtemps (Stolz, 1976). Par ailleurs, des études approfondies sur la faisabilité d'une détermination, par géodésie spatiale, des variations du centre des masses de la Terre ont été développées depuis quelques années : (Vigue et al., 1992; Watkins et Eanes, 1993). Dans tous les cas, les redistributions de masses de surface engendrent indirectement des variations dans la position du centre des masses de la Terre par rapport à l'origine du système de coordonnées, par effet de charge (cf. figure IV.5). Ce sont ces effets qui actuellement sont supposés être la cause principale des variations du géocentre.

**Atmosphère** La variation due aux redistributions de masses dans l'atmosphère a pour amplitude 1 à 2 millimètres et présente, sensiblement, une signature fréquentielle annuelle et semi-annuelle.

**Océan** La variation du géocentre due à l'océan est essentiellement la conséquence de la circulation océanique indépendamment des effets de marées. L'amplitude du signal est de l'ordre du millimètre. Les effets sont également de période annuelle.

**Eau de surface** Cet aspect est basé sur l'identification des grands réservoirs d'eau douce dont les variations de niveau engendrent des variations importantes d'effet de charge sur la surface de la Terre. L'amplitude estimée est de l'ordre de 3 millimètres pour un terme annuel et 1 millimètre pour un terme semi-annuel.

Les autres effets (niveau des mers, fontes des glaciers) correspondent à des effets séculaires non significatifs sur la période couverte par les observations de géodésie spatiale (10 ans).

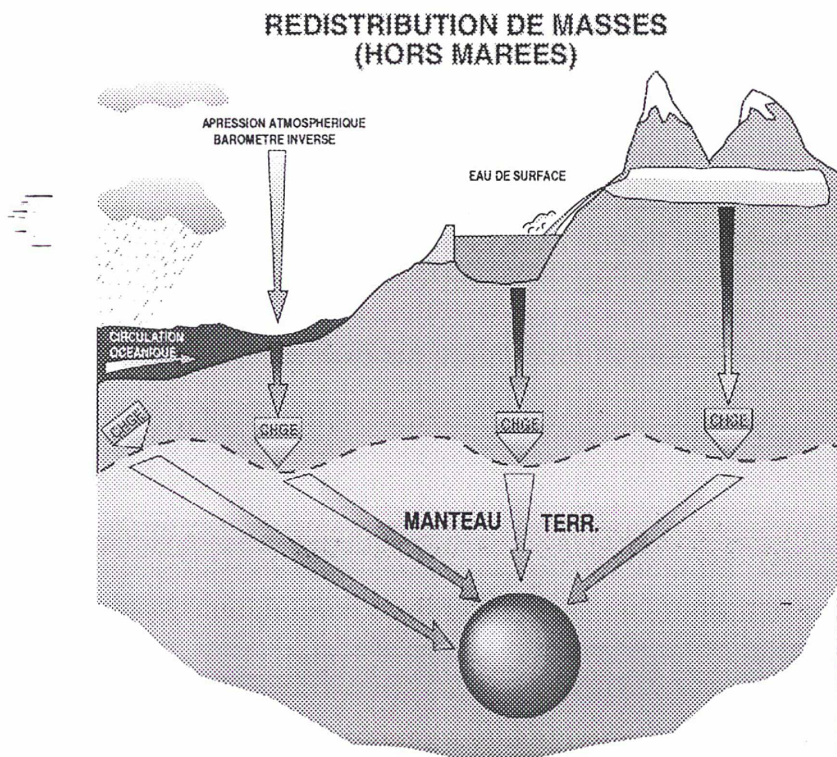


FIG. IV.5: Redistributions de masses, causes des variations du géocentre

### 2.3. La mesure géodésique

En général, le géocentre est implicitement choisi comme origine du système de coordonnées terrestre pour la dynamique du satellite. Le centre des masses instantané sera donc accessible, moyennant quelques approximations, aux techniques dynamiques de géodésie spatiale. Cette hypothèse conduit, logiquement, à s'intéresser aux variations de l'origine du système de référence dans lequel est exprimée l'orbite du satellite, et au delà, dans lequel sera exprimé le jeu de coordonnées de stations découlant de l'ajustement global orbite - positions de stations terrestres.

Supposons un géocentre de position constante dans le système de coordonnées durant la période d'intégration de l'arc d'orbite. La force de gravitation à laquelle est soumis le satellite est, en première approximation, radiale et dirigée vers ce géocentre. Si en outre on suppose que le champ de gravité est indépendant de la position du géocentre, alors le système dans lequel est intégrée l'orbite du satellite est celui centré au géocentre instantané. Le jeu de coordonnées de stations déduit de ce calcul aura pour origine le géocentre instantané.

Si au lieu de calculer un jeu de coordonnées avec un seul arc d'orbite, on impose à des arcs successifs de se raccorder, alors, les géocentres instantanés correspondent à des « positions » successives prises par le réseau de poursuite dans un système de coordonnées moyen.

Les variations du géocentre sont accessibles par l'intermédiaire de séries temporelles de jeux de coordonnées de stations, ou bien par la restitution de mouvements d'ensemble du réseau de poursuite dans le calcul d'orbite même. Ces deux approches sont physiquement identiques.

### 2.4. Traitement de données

Dans le cadre de la campagne IERS sur le géocentre, un certain nombre de séries temporelles de positions du géocentre ont été élaborées à partir des techniques dynamiques de géodésie spatiale. Les séries temporelles soumises lors de cette campagne ont été systématiquement analysées (Boucher et Sillard, 1999) à l'aide d'une régression linéaire visant à estimer un terme périodique annuel et semi-annuel. Par ailleurs, certaines séries ont été analysées plus particulièrement : pour ces séries, outre la régression linéaire, une analyse en ondelettes a été pratiquée. Cette analyse confirme que des signaux périodiques annuels sont clairement visibles dans pratiquement toutes les séries de positions du géocentre.

— Reste à comprendre les disparités en phase entre les diverses déterminations.

### 2.4.1. Régression

Une régression linéaire a été menée de façon à déterminer les termes annuels et semi annuels. Un terme constant et une dérive ont également été introduits dans le modèle de façon à rapporter les séries temporelles au même système de référence. Concrètement, pour un signal  $s(t)$ , l'équation d'observation à l'instant  $t$  s'écrit (terme annuel indicé 1 et semi-annuel 1/2) :

$$s(t) = A_0 + A'_0 t + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{1/2} \cos(\omega_{1/2} t + \varphi_{1/2}) \quad (\text{IV.30})$$

### 2.4.2. Analyse en ondelettes

Une régression linéaire ne permet d'accéder qu'à une partie prédéfinie du spectre du signal analysé. Pour analyser le spectre dans son intégralité, on peut opter pour une analyse en décomposition de Fourier. La technique utilisée ici est un peu plus générale que la décomposition de Fourier : en effet, l'analyse en ondelettes (Torrésani, 1995) est, comme la décomposition de Fourier, une décomposition du signal sur une base de fonctions orthogonales. La différence réside dans le fait que l'analyse de Fourier suppose que la fréquence associée à une fonction de base est constante sur tout le support du signal, alors que l'analyse en ondelettes autorise cette fréquence à varier dans une fenêtre définie *a priori*. De plus, le support du signal est infini dans l'analyse de Fourier, alors qu'il peut être fini dans l'analyse en ondelettes. L'image habituellement utilisée pour illustrer cette propriété est l'analyse d'un morceau de musique : pour un tel signal, un note reste audible pendant un temps limité et sa fréquence caractéristique n'existe que pendant un intervalle réduit. L'analyse de Fourier est inopérante sur de tels signaux alors que l'analyse en ondelettes est un outil approprié. En termes mathématiques, l'analyse en ondelettes associe à tout instant une fréquence instantanée autorisant ainsi une dimension supplémentaire dans l'expression de la transformée du signal original.

- Un signal  $[t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto s(t)]$
- Transformée en ondelettes  $\mathcal{T}_s(t, a)$  :
 
$$\begin{cases} \mathcal{T}_s(t, a) &= \int_{\mathbb{R}} s(x) \overline{\Psi}_{(t,a)}(x) dx \\ \Psi_{(t,a)}(x) &= \frac{1}{a} \Psi\left(\frac{x-t}{a}\right) \\ \Psi(x) &= e^{i\omega_0 x} e^{-x^2/2} \end{cases} \quad (\text{ondelette de Morlet})$$
- tracé de  $|\mathcal{T}_s(t, a)|$  avec
 

$t$	:	abscisses	(temps)
$a$	:	ordonnées	(échelle $\leftrightarrow$ période)

TAB. IV.4: Formulation de la transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes peut être perçue comme une sorte de généralisation de l'analyse de Fourier, ainsi que le montrent les figures (IV.6) et (IV.7) : elle correspond à une décomposition sur une base dans l'espace des phases, mais cet espace possède une dimension supplémentaire qui est le temps.

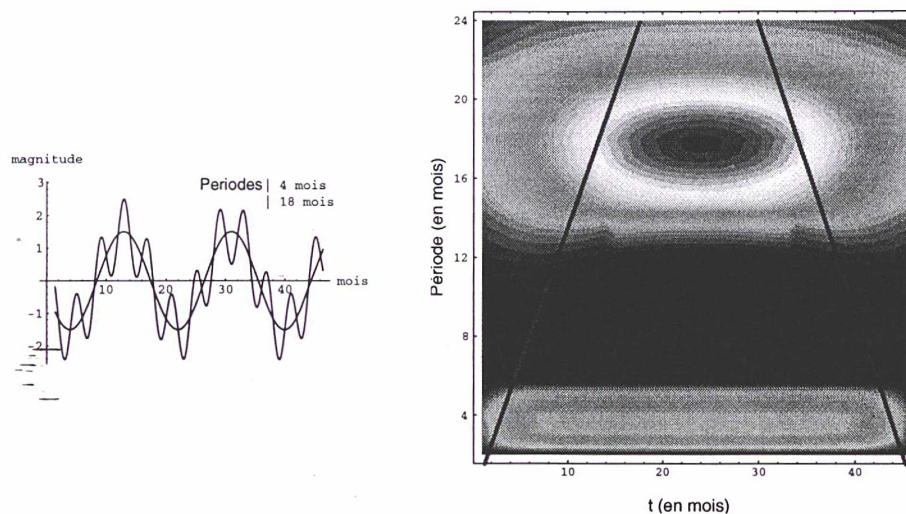


FIG. IV.6: Analyse en ondelettes d'un signal de fréquences permanentes

La figure (IV.6) montre le tracé de la transformée en ondelettes d'un signal possédant deux fréquences pures, invariantes sur tout le support du signal. La figure (IV.7) montre le même signal où le signal de modulation a vu sa fréquence divisée par deux au milieu du support. Il est clair que, pour l'analyse de Fourier, une telle modification serait oblitérée. La transformée en ondelette constate parfaitement ce décrochement. Une dernière remarque sur l'interprétation de la transformée en ondelettes : la figure (IV.6) montre le tracé d'une fenêtre d'information qui caractérise la zone du graphique sur laquelle on dispose effectivement d'une information sur la fréquence instantanée du signal. En effet, le signal étant à support borné, il est clair que la recherche de fréquence propre s'appuiera sur la corrélation qui existe entre le signal à un instant donné et le signal aux instants en décalés d'un nombre entier de cycles recherché. Par conséquent, selon la période recherchée, la zone d'information est plus ou moins limitée.

## 2.5. Résultats géodésiques

Les résultats obtenus par la géodésie sont contrastés : d'une part les indicateurs convergent vers la conclusion que les signaux détectés présentent une signature annuelle. Ainsi, la régression linéaire sur des signaux mesurés par



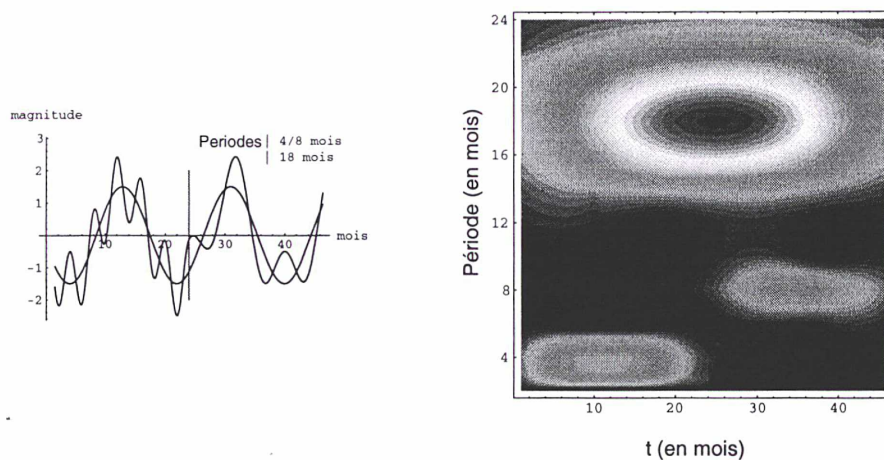


FIG. IV.7: Analyse en ondelettes d'un signal avec décrochement dans la fréquence

DORIS (calculs effectués par P. Willis - Institut Géographique National) et par télémétrie laser sur satellite (calculs effectués par Richard Eanes - Center for Space Research, Université du Texas à Austin) montre clairement des signaux annuels d'amplitude 2 à 3 mm pour la technique laser et 4 à 15 mm pour DORIS (cf. figures IV.8 et IV.9). En outre, la régression linéaire montre que le signal semi-annuel n'est, en général, pas significatif (au regard d'un test à  $1 \sigma$ ).

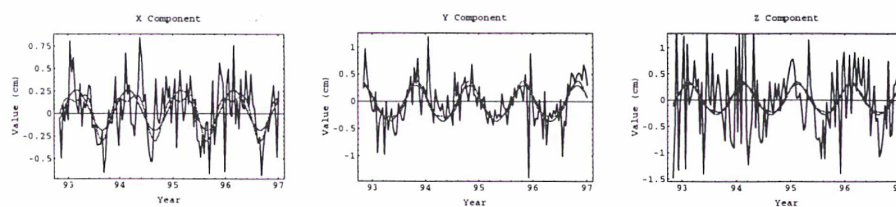


FIG. IV.8: Composantes du géocentre LASER (rouge : annuel ; bleu : annuel + semi-annuel)

Du reste, l'analyse en ondelettes confirme qu'au sein de ces signaux, seul un signal annuel est perceptible (cf. figure IV.10).

Néanmoins, une étude détaillée de ces signaux montre que la similitude entre les deux séries de géocentre évoquées en exemple s'arrête là : ni les amplitudes ni les phases des signaux mesurés ne sont cohérentes au regard d'un test d'égalité des variables aléatoires. Une analyse détaillée de ces résultats est

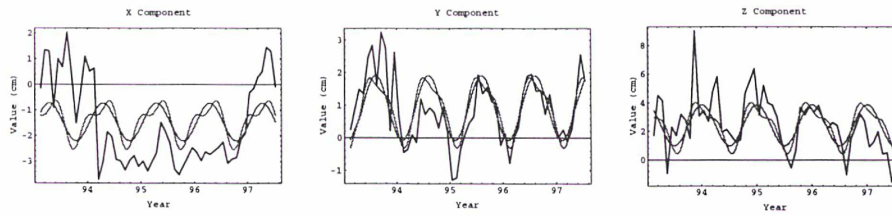


FIG. IV.9: Composantes du géocentre DORIS-IGN (rouge : annuel ; bleu : annuel + semi-annuel)

—  
—  
—

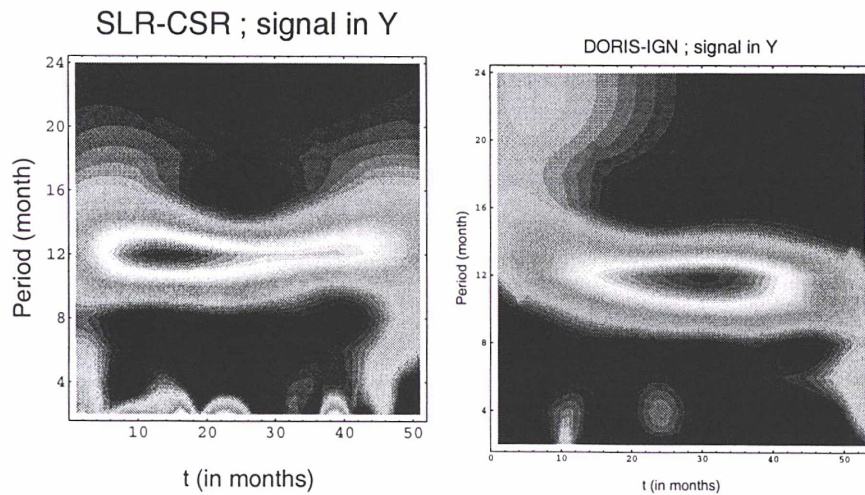


FIG. IV.10: Analyse en ondelettes de la composante Y

proposée dans (Sillard, 1998b; Sillard, 1999).

Ces quelques observations effectuées sur des séries particulières sont en fait généralisables à ce que la géodésie est aujourd'hui capable de fournir. Ainsi, la figure IV.11 montre les représentations, dans l'espace des phases, des signaux annuels et semi-annuels ajustés sur les séries temporelles du géocentre sou-mises lors de la campagne IERS sur le sujet (Ray, 1999).

On constate aisément, au vu de la figure (IV.11) que le niveau de cohérence aussi bien infra que intra-technique est encore trop faible pour apporter des conclusions fiables sur les variations du géocentre

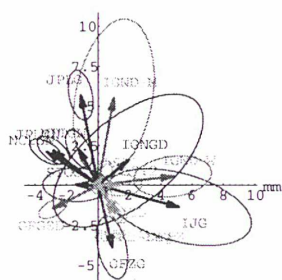
En définitive, les recherches dans ce domaine doivent se poursuivre dans le futur. En particulier, comprendre l'origine réelle des signaux observés doit permettre d'améliorer la cohérence entre les techniques. Par exemple, une erreur sur la composante troposphérique peut engendrer une signature annuelle non nulle sur le géocentre puisque cette composante est très certainement fonction de la latitude et de la saison d'observation. Ainsi, des erreurs de modèle ou de modélisation peuvent être la cause des désaccords apparents des déterminations des variations du géocentre par la géodésie. Par ailleurs, il semble que les modélisations géophysiques du phénomène soient encore sujettes à discussion et que les valeurs des paramètres qui entrent en jeu soient mal connus. D'aucuns essaient de corrélérer ce que la géodésie observe avec ce que la géophysique prédit mais pour l'instant cela ne constitue nullement une preuve de la qualité des observations géodésiques.

### 3. Apport de l'ITRF à la géodynamique globale

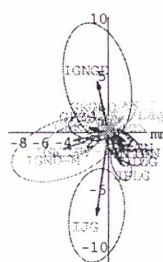
La théorie de la tectonique des plaques postule que la surface terrestre est composée de plaques d'épaisseur variable de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres et flottant sur une matière visqueuse, appelée asthénosphère. Cette théorie a été inventée en 1912 et complétée depuis, en particulier par les travaux de X. le Pichon (le Pichon, 1968) et W. J. Morgan (Morgan, 1968). Avant ces derniers, de nombreux scientifiques ont contribué à l'élaboration de cette théorie, aujourd'hui admise et vérifiée pour l'essentiel par la géodésie spatiale en particulier. On se reportera à l'intéressant article (Aubouin, 1992) qui fait le point sur la genèse de la théorie.

Il faut noter que les modèles basés sur cette théorie font appel à des observations géologiques et géophysiques de mouvements à la frontière des plaques à l'échelle de millions d'années et de l'ordre de quelques millimètres par an. L'un des résultats les plus spectaculaires de la géodésie spatiale est d'avoir constaté la permanence de ces mouvements à l'échelle de l'année (Christodoulidis et al., 1985; Tapley et al., 1985; Herring, 1986; Cazenave et Feigl, 1994). Il est en effet remarquable d'observer que des déplacements engendrés par des mouvements

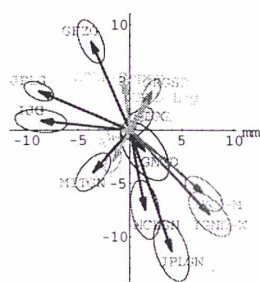
X-composante annuelle



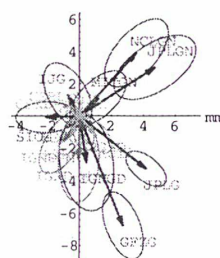
X-composante semi annuelle



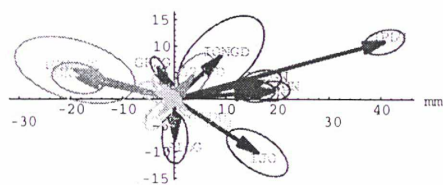
Y-composante annuelle



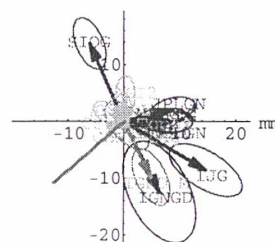
Y-composante semi annuelle



Z-composante annuelle



Z-composante semi annuelle



LASER  DORIS   
 GPS  Comb. 

FIG. IV.11: Tracé des signaux du géocentre estimés par la géodésie spatiale dans l'espace des phases

de quelques millimètres par an pendant des dizaines de millions d'années relèvent en fait de mouvements pour l'essentiel constants dans le temps.

Sur la base des observations géophysiques déjà mentionnées, un certain nombre de plaques d'extension continentale ont été identifiées. On trouvera, à la figure IV.12 une illustration du tracé des frontières de plaques telles qu'elles ont été modélisées dans le modèle de plaques NUVEL 1 (DeMets et al., 1990).

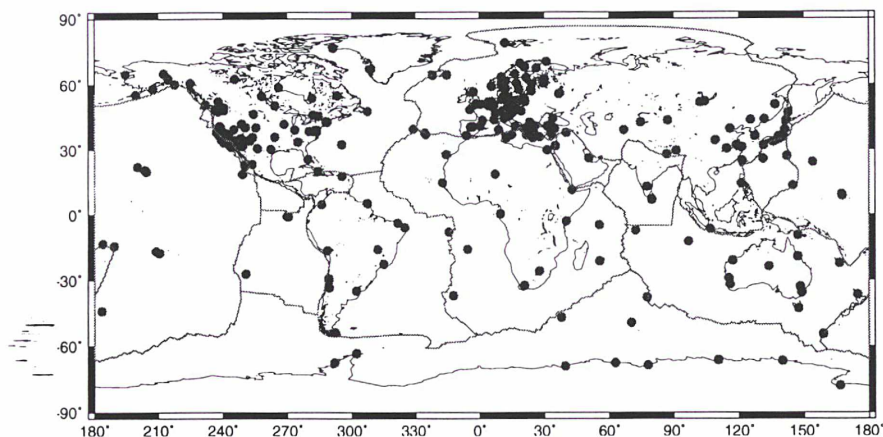


FIG. IV.12: Tracé des frontières de plaques NUVEL 1 et sites ITRF96

A côté des modèles géophysiques de déplacements tectoniques, la géodésie spatiale a permis, dans un passé récent, de développer des modèles cinématiques d'une qualité remarquable. L'une des principales difficultés rencontrées lors de la construction de modèles tectoniques basés uniquement sur des observations géodésiques réside dans la faible densité de la couverture globale des réseaux géodésiques. Les réseaux GPS globaux couvrent essentiellement les pays développés. Le réseau DORIS, mieux réparti, ne comprend qu'une soixantaine de stations. Les réseaux laser satellite et VLBI ont une répartition globale déséquilibrée . . . D'une manière générale, la mesure des déformations terrestre par la géodésie n'est pas tant limitée par la précision géodésique que par cette faiblesse de couverture. On peut signaler les tentatives de constructions de modèles tectoniques basés sur les observations d'une seule technique de géodésie spatiale (Larson et al., 1997; Crétaux et al., 1998) qui offrent malgré tout d'excellents résultats pour les plaques correctement couvertes. Une méthode pour tirer parti de l'ensemble des techniques consiste à s'appuyer sur des réseaux multi-techniques, de type ITRF, qui présentent généralement des couvertures beaucoup plus denses de la surface terrestre. Ainsi, l'ITRF96 comprend 290 sites (cf. carte IV.12) et permet une approche plus rationnelle des déformations de la surface terrestre. L'étude développée ci-après a fait l'objet d'une publication (Sillard et al., 1998). Elle présente l'intérêt, par rapport aux études basées sur des résultats géodésiques mentionnées, de n'utiliser aucune

considération géophysique pour compléter l'information géodésique. Elle permet donc d'avoir une vision claire sur l'apport objectif de la géodésie dans la construction de modèles tectoniques.

Le champ de vitesses de l'ITRF96 comprend les vitesses cartésiennes de déplacement de 290 sites répartis sur la surface terrestre. On suppose connues les frontières de plaques. La plaque d'appartenance des sites est supposée connue *a priori*. Le but est de tester cette information, d'une part en vérifiant que le point considéré appartient bien à la plaque à laquelle l'information *a priori* l'attribue, et d'autre part de tester s'il n'appartiendrait pas à une autre plaque. De ces tests découleront un modèle statistiquement cohérent de plaques tectoniques basées sur les seules informations fournies par l'ITRF96.

### 3.1. Principe d'estimation

On considère donné un jeu de vitesses cartésiennes  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  pour  $n$  points répartis à la surface terrestre. On suppose, en outre, que l'on dispose des variances associées à ces vitesses. On notera ces variances  $\Sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Supposons que l'on cherche à « expliquer » les vitesses  $V_i$  par un modèle basé sur une rotation d'ensemble. Le modèle linéarisé s'écrira, pour le point  $i$  de vitesse  $V_i$  et de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  :

$$\begin{aligned} V_i &= R_i \theta \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

où  $R_i$  est une matrice de rotation ne dépendant que du point  $i$  (explicitement, de ses coordonnées cartésiennes).

En supposant que, pour tous les points  $i$  que l'on analyse, le modèle envisagé reflète la réalité (i.e.  $\mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta)$ )<sup>5</sup>, alors, un estimateur sans biais de  $\theta$  est donné par :

$$\hat{\theta} = \left( \sum_{i=1}^n R_i^T \Sigma_i^{-1} R_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n R_i^T \Sigma_i^{-1} V_i$$

La précision de  $\hat{\theta}$  est  $\left( \sum_{i=1}^n R_i^T \Sigma_i^{-1} R_i \right)^{-1}$ .

Naturellement, la construction de l'estimateur  $\hat{\theta}$  repose sur des hypothèses qui ne sont pas vérifiées dans le cas général. C'est précisément sur les achoppements de ces hypothèses que l'on va détecter la validité du modèle postulé pour un point du groupe que l'on analyse.

<sup>5</sup> $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique

Supposons que  $\hat{\theta}$  soit sans biais. Dans ce cas, sous les deux hypothèses<sup>6</sup> :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta) \\ V_i \hookrightarrow \mathcal{N}(R_i \mathbb{E}(\theta), \Sigma_i) \end{cases}$$

le vecteur des résidus de mesure, noté  $v_i$  et défini par  $v_i = R_i \hat{\theta} - V_i$  a pour distribution  $\mathcal{N}(0, \Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T)$ , où  $N$  désigne la matrice normale du problème d'estimation de  $\theta$  (explicitement,  $N = \sum_i R_i^T \Sigma_i^{-1} R_i$ ) (Tassi, 1992; Sillard, 1998a). De ce fait, on a l'implication<sup>7</sup> :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta) \\ V_i \hookrightarrow \mathcal{N}(R_i \hat{\theta}, \Sigma_i) \end{cases} \Rightarrow \left( v_i^T \left[ \Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T \right]^{-1} v_i \hookrightarrow \chi^2(3) \right)$$

L'équation précédente régit le test de validité du modèle sur lequel on va s'appuyer (on se donne un risque de première espèce  $\alpha$ ) :

$$\begin{cases} H_0 & : \mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta) \\ H_1 & : \mathbb{E}(V_i) \neq R_i \mathbb{E}(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_i \in \left[ \xi_{\alpha/2}^3, \xi_{1-\alpha/2}^3 \right] \\ q_i \notin \left[ \xi_{\alpha/2}^3, \xi_{1-\alpha/2}^3 \right] \end{cases}$$

où  $\xi_{\beta}^p$  désigne le fractile d'ordre  $\beta$  de la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté,  $q_i$  étant la variable de décision associée à l'observation  $V_i$  :

$$q_i = v_i^T \left[ \Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T \right]^{-1} v_i \quad (\text{IV.32})$$

Naturellement, cette approche n'est valable que si, d'une part, l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}$  est sans biais, et d'autre part, si le facteur de variance du calcul est unitaire.

Pour ce qui concerne le premier problème, il est clair que le processus d'élimination d'observations doit être itératif. C'est précisément cette approche qui a été adoptée (cf. figure IV.13).

Puis, si l'on suppose que le facteur de variance n'est pas unitaire, il convient de tenir compte de l'estimation de ce facteur que l'on peut faire à l'issue de l'ajustement. Dans ce cas,  $V_i \hookrightarrow \mathcal{N}(R_i \hat{\theta}, \sigma_0^2 \Sigma_i)$ , et sous cette hypothèse,

$$\frac{1}{\sigma_0^2} v_i^T \left[ \Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T \right]^{-1} v_i \hookrightarrow \chi^2(3)$$

Or il est classique que  $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2} (\ell - p) \hookrightarrow \chi^2(\ell - p)$  (Sillard, 1998a), où  $\ell$  est le nombre d'observations de l'ajustement, et  $p$  le nombre de paramètres ajustés. Dans le

<sup>6</sup> $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  désigne la loi normale centrée en  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ ; l'écriture  $V \hookrightarrow P$  signifie que la variable aléatoire  $V$  suit la loi de probabilité  $P$

<sup>7</sup>On désigne par  $\chi^2(p)$  la loi du  $\chi^2$  à  $p$  degrés de liberté

cas qui nous intéresse,  $p = 3$  et  $\ell = 3n$  où  $n$  est le nombre de points considérés. On aboutit finalement à<sup>8</sup> :

$$\frac{v_i^T [\Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T]^{-1} v_i}{3\widehat{\sigma}_0^2} \hookrightarrow \mathcal{F}(3, 3n - 3)$$

De ce fait, l'expression du test est transformée en<sup>9</sup> :

$$\begin{cases} H_0 & : \mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta) \\ H_1 & : \mathbb{E}(V_i) \neq R_i \mathbb{E}(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q'_i & \in \left[ f_{\alpha/2}^{3, 3n-3}, f_{1-\alpha/2}^{3, 3n-3} \right] \\ q'_i & \notin \left[ f_{\alpha/2}^{3, 3n-3}, f_{1-\alpha/2}^{3, 3n-3} \right] \end{cases}$$

où la variable de décision  $q'_i$  vaut :

$$q'_i = \frac{v_i^T [\Sigma_i - R_i N^{-1} R_i^T]^{-1} v_i}{3\widehat{\sigma}_0^2} \quad (\text{IV.33})$$

Quant à l'origine du facteur  $\sigma_0^2$  significativement différent de l'unité, il a pour origine deux caractéristiques :

- il est la conséquence d'une éventuelle sous-estimation des variances des vitesses dans l'ITRF96
- il est aussi la conséquence de l'incapacité du modèle choisi à expliquer totalement la dispersion des observations : le modèle de plaque rigide a des limites...

Pour finir, il reste à étudier le cas de points qui n'ont pas été utilisés dans la compensation de  $\theta$  mais pour lesquels on souhaite néanmoins tester la cohérence potentielle de leur mouvement avec le mouvement compensé.

Soit  $\Sigma_i$  la variance de ce point. La variable aléatoire

$$w_i = V_i - R_i \widehat{\theta}$$

est telle que, sous l'hypothèse  $\mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta)$ ,

$$w_i^T [\Sigma_i + R_i N^{-1} R_i^T]^{-1} w_i \hookrightarrow \chi^2(3)$$

Ce test<sup>10</sup> sera appliqué à tous les sites de l'ITRF96 qui ne sont pas supposés appartenir au groupe de points auquel on s'est intéressé pour déterminer  $\theta$ .

<sup>8</sup> $\mathcal{F}(p, q)$  désigne la loi de Fisher-Snedecor à  $(p, q)$  degrés de liberté

<sup>9</sup> $f_{\beta}^{p, q}$  désigne le fractile d'ordre  $\beta$  de la loi de Fischer-Snedecor à  $(p, q)$  degrés de liberté

<sup>10</sup>En fait, on pourrait tenir compte du facteur  $\widehat{\sigma}_0^2$  significativement différent de 1 pour calculer la variance de  $w_i$ , et dans ce cas une légère correction serait à apporter à la distribution théorique de la variable de décision. En réalité, il s'agit d'un choix et les deux optiques sont valables à partir du moment où l'on est conscient de ce choix.



Le test de validation est construit sur la même base que les précédents tests étudiés :

$$\begin{cases} H_0 & : \mathbb{E}(V_i) = R_i \mathbb{E}(\theta) \\ H_1 & : \mathbb{E}(V_i) \neq R_i \mathbb{E}(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_i'' \in \left[ \xi_{\alpha/2}^3, \xi_{1-\alpha/2}^3 \right] \\ q_i'' \notin \left[ \xi_{\alpha/2}^3, \xi_{1-\alpha/2}^3 \right] \end{cases}$$

où

$$q_i'' = w_i^T \left[ \Sigma_i + R_i N^{-1} R_i^T \right]^{-1} w_i \quad (\text{IV.34})$$

### 3.2. Application au champ de vitesses ITRF96

La méthode générale de calcul est évoquée au paragraphe précédent. Dans le détail le processus de détermination présente les caractéristiques suivantes :

- Le risque de première espèce retenu pour les trois tests utilisés dans les calculs (équations IV.32, IV.33 et IV.34) est  $\alpha = 5\%$ .
- Les résultats des rotations estimées sont présentés sous leur forme standard (Minster et al., 1973; Larson et al., 1997; Sillard, 1998a; Crétaux et al., 1998) : pôle de rotation en coordonnées géographiques et vitesses de rotation autour de l'axe ainsi défini. Dans la méthode décrite au paragraphe précédent, on estime des angles de rotation autour des axes du repère cartésien géocentrique  $(\dot{\epsilon}, \dot{\psi}, \dot{\omega})$ . Si on note  $(\dot{\Omega}, \lambda, \varphi)$  les coordonnées eulériennes du vecteur de rotation, on a :

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = \sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\omega}^2} \\ \lambda = \text{Arctg} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\epsilon}} + v(\dot{\epsilon}, \dot{\psi}) \cdot \pi \quad \text{avec } v(\dot{\epsilon}, \dot{\psi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{\epsilon} > 0 \text{ ou bien } \dot{\psi} > \bar{0} \\ 1 & \text{si } \dot{\epsilon} < 0 \text{ ou bien } \dot{\psi} < \bar{0} \end{cases} \\ \varphi = \text{Arctg} \left[ \frac{\dot{\omega}}{\sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\psi}^2}} \right] \end{cases}$$

Si on note  $P = \frac{D(\dot{\Omega}, \lambda, \varphi)}{D(\dot{\epsilon}, \dot{\psi}, \dot{\omega})}$ , la variance du triplet  $(\dot{\Omega}, \lambda, \varphi)$  est donnée par :

$$\text{var} \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix} = P \cdot \text{var} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \cdot P^T$$

La matrice  $P$  a pour expression :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\Omega}} & \frac{\dot{\psi}}{\dot{\Omega}} & \frac{\dot{\omega}}{\dot{\Omega}} \\ -\frac{\dot{\psi}/\dot{\epsilon}^2}{1 + (\frac{\dot{\psi}}{\dot{\epsilon}})^2} & \frac{1/\dot{\epsilon}}{1 + (\frac{\dot{\psi}}{\dot{\epsilon}})^2} & 0 \\ \frac{-\dot{\omega}\dot{\epsilon}}{\dot{\Omega}^2 \sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\psi}^2}} & \frac{-\dot{\omega}\dot{\psi}}{\dot{\Omega}^2 \sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\psi}^2}} & \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\psi}^2}}{\dot{\Omega}^2} \end{pmatrix}$$

- Les résultats des différents tests sont représentés graphiquement aux figures (IV.14) et (IV.15) par l'intermédiaire de gammes de couleurs. A chaque gamme de couleur correspond un type de test échoué ou réussi selon les cas. Les points jaunes et bleus sont les points qui sont respectivement, susceptibles d'appartenir à la plaque traitée mais non codés sur elle actuellement, ou codés sur la plaque traitée et susceptibles de ne pas appartenir à cette plaque au sens du test (IV.33).
- Les pôles de rotation sont calculés sur la base des points qui sont sur la plaque traitée, au sens du test (IV.33). Il s'agit donc des points verts et rouges sur les cartes présentées ci-dessous. Les points bleus sont éliminés itérativement, sur la base du test (IV.33), le processus d'élimination s'arrêtant lorsqu'il n'y a plus de points faux, au sens du test.
- On trouvera à la figure (IV.13) une schématisation du processus utilisé pour le calcul des pôles.

Pour finir ce descriptif de l'étude numérique, on trouvera à la table (IV.5) la comparaison des déterminations NNR-NUVEL 1 (Argus et Gordon, 1991), l'étude menée à partir de données GPS par Kristine Larson (Larson et al., 1997), la présente étude sans tenir compte des corrélations entre sites (pourtant renseignées dans l'ITRF96) et, enfin, les déterminations des pôles de rotation dans un calcul unique en tenant compte des variances complètes. Ce calcul est détaillé dans le texte (Altamimi, 1998).

### 3.3. Principales conclusions de l'étude

Concernant les calculs des pôles de rotation, les résultats sont conformes aux prédictions géophysiques ainsi qu'aux résultats des études géodésiques sur le sujet, excepté pour la plaque sud-américaine. En effet, les résultats de la plaque sud-américaine diffèrent sensiblement de ceux attendus, en particulier en ce qui concerne la latitude du pôle de rotation (il n'y a pas d'erreur de signe!). Il faut noter que la qualité de l'ajustement de ce pôle est très médiocre ( $\chi^2$  de 3.5 au lieu de 2 pour les autres pôles). Par contre, le résultat annoncé dans cette étude est conforme au calcul de (Blewitt et al., 1998). Une vérification a été faite à l'aide des seuls points DORIS (au nombre de trois sur cette plaque), de façon à comparer au calcul de Jean-François Crétaux (Crétaux et al., 1998). Le pôle obtenu a pour latitude  $-6.51^\circ$ , ce qui est plus conforme à ce qui est attendu. Toutefois, dans l'ajustement, rien ne permet de mettre en doute la qualité des points utilisés, au moins individuellement. Le problème est difficile à résoudre objectivement, et il convient d'adopter, avec la plus extrême prudence, le pôle prédit par l'ITRF96.

Enfin, une estimation robuste a été menée à l'aide des M-estimateurs de Huber (Huber, 1981) (cf. §V.4.2.). Le résultat est conforme au résultat des moindres

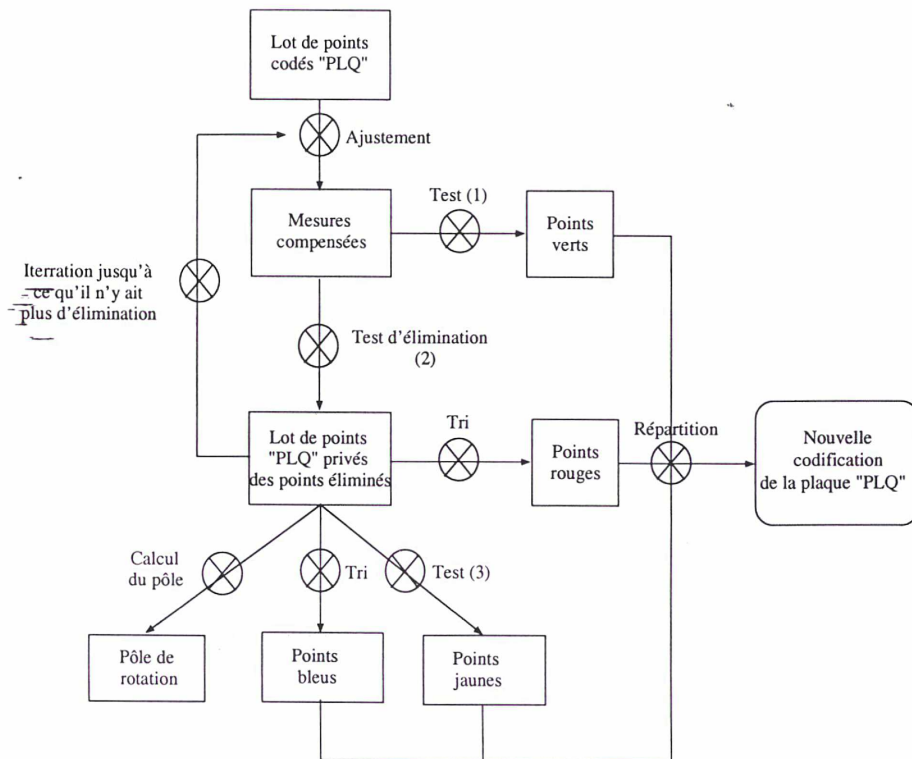
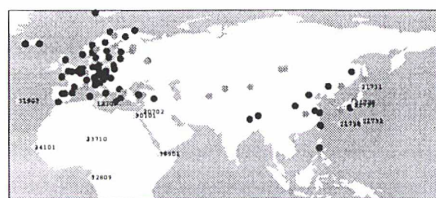
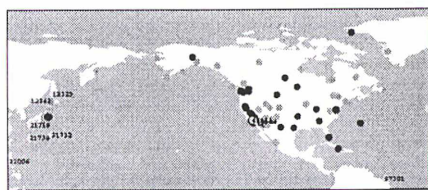


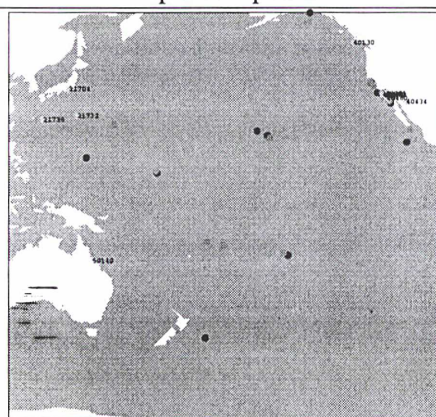
FIG. IV.13: Processus de calcul : les tests correspondent respectivement aux équations (IV.32), (IV.33) et (IV.34) ; les points verts appartiennent à la plaque sur laquelle ils sont codés ; les points rouges appartiennent éventuellement à cette plaque ; les points bleus n'appartiennent pas à la plaque sur laquelle ils sont codés ; les points jaunes sont susceptibles d'appartenir à la plaque étudiée, mais non codés comme y appartenant.



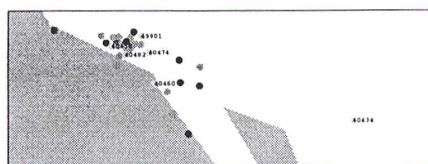
Plaque européenne



Plaque nord-américaine



Plaque pacifique



Plaque pacifique (détail)



Plaque sud-américaine

- Point situé sur la plaque
- Point probablement situé sur la plaque et codé comme tel
- Points non situés sur la plaque mais codés sur la plaque
- ⊗ Point éventuellement situé sur la plaque mais codé sur une autre plaque

FIG. IV.14: Résultats des tests numériques : plaques européennes, nord-américaines, pacifiques et sud-américaines

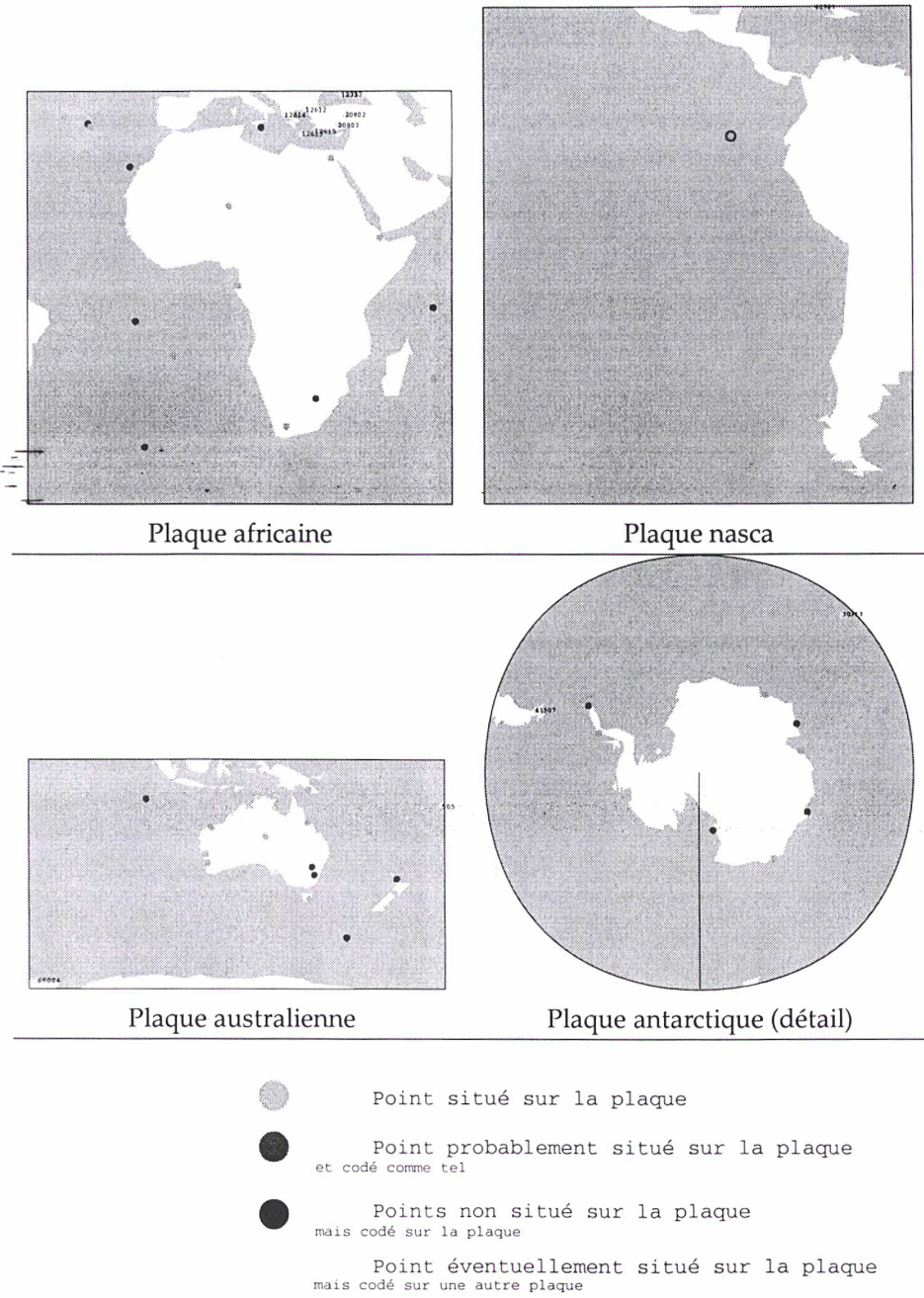


FIG. IV.15: Résultats des tests numériques : plaques africaines, nasca, australiennes et antarctique

plaque	$\dot{\Omega}$ $10^{-6}\text{deg.an}^{-1}$	$\lambda$ deg	$\varphi$ deg	$\sigma_{\dot{\Omega}}$	$\sigma_{\lambda}$	$\sigma_{\varphi}$	nombre de pts
Eurasie	0.207 <sup>1</sup>	-120.5	48.6	.006	2.82	3.2	78
	0.257 <sup>2</sup>	-98.8	58.6	.006	2.4	1.4	
	0.23 <sup>3</sup>	-112.4	50.6	/	/	/	
	0.26 <sup>4</sup>	-102.8	56.3	.02	4.1	4.3	
Amérique du nord	.174	-91.1	-11.7	0.006	1.1	2.5	49
	.199	-81.7	-1.0	.005	.6	1.2	
	.21	-86.0	-2.5	/	/	/	
	.22	-84.5	-0.4	.01	2.0	4.3	
Afrique	0.253	-89.2	51.2	0.011	4.83	2.28	20
	0.278	-79.3	52.3	.008	3.87	1.4	
	0.29	-74.0	50.6	/	/	/	
	0.26	-86.8	50.0	.01	5.3	2.8	
Australie	0.608	38.8	32.0	0.008	1.40	0.7	12
	0.635	40.7	34.7	.006	1.7	.8	
	0.65	33.2	33.8	/	/	/	
	0.61	40.7	31.4	.01	2.8	1.7	
Pacifique	0.737	99.6	-62.2	0.007	1.4	0.3	39
	0.697	92.5	-62.7	.006	1.2	.3	
	0.64	107.4	-63.0	/	/	/	
	0.70	95.9	-63.1	.01	2.3	.9	
Amérique du sud	0.149	-140.5	14.7	0.010	10.8	5.7	12
	0.134	-128.2	24.8	.013	15.5	8.2	
	0.11	-124.6	-25.4	/	/	/	
	0.16	-183.5	-21.0	.06	28.1	11.9	
Antarctique	0.198	-137.7	46.7	0.049	11.7	11.8	10
	0.239	-136.3	51.9	.035	5.7	5.4	
	0.24	-115.9	63.0	/	/	/	
	0.24	-125.7	60.5	.03	3.6	6.6	
Nazca	0.604	-103.6	60.2	0.053	13.5	69.9	3
	0.616	-99.1	54.2	.017	2.8	9.9	
	0.75	-100.2	47.8	/	/	/	
	0.70	-100.7	40.6	.05	1.8	7.6	

TAB. IV.5: Comparaison des pôles de la présente étude avec variance complète<sup>1</sup> (Altamimi, 1998), variance bloc-diagonale<sup>2</sup>, NNR-NUVEL 1A<sup>3</sup> et (Larson et al., 1997)<sup>4</sup>

carrés standards :  $(\dot{\Omega}, \lambda, \varphi) = (0.116, -152, 17.5) \pm (.009, 14, 6)$ . Ceci nous conduit à la conclusion que les données ne s'ajustent pas convenablement au modèle de plaque rigide pour la plaque sud-américaine. Une cause probable en est que trop de points codés sur cette plaque sont en fait dans des zones de déformations, zones dans lesquelles le modèle rigide ne s'applique évidemment pas (Crétaux et al., 1998). De plus, les points censés être situés dans des zones stables ne conduisent pas à des déterminations homogènes du pôle de rotation (stations en Guyane et au Brésil). En conclusion, la géodésie ne permet pas, à l'heure actuelle, une détermination fiable du pôle de rotation de la plaque sud-américaine.

Les résultats obtenus pour la plaque européenne appellent également quelques commentaires : le calcul de la plaque européenne ne pose pas de problème majeur. Néanmoins, on peut noter un effet que l'on retrouve pour le calcul du pôle de la plaque nord-américaine : certains sites qui ont été largement observés sont évalués, dans l'ITRF96, comme très précis. Ils le sont tellement que statistiquement, ces points sont trop précis comparativement aux autres points utilisés dans le calcul, et sont rejetés du calcul (Wetzell, par exemple).

Enfin, les résultats de la plaque pacifique sont cohérents avec ceux attendus. On pourra noter, sur la figure (IV.14), quelques points en Californie, codés sur la plaque nord-américaine et qui devraient se situer sur la plaque pacifique, selon le test (IV.33). Un détail de ces points est également proposé dans la même figure. Cette constatation montre que la technique statistique employée est relativement pertinente puisqu'elle confirme ce qu'une hypothétique analyse géophysique suggérerait.

En final, la méthode employée pour le calcul des pôles de rotation de l'ITRF96 conduit à des résultats satisfaisants. En extension de ces principes, il serait intéressant de développer une méthode de type « nuées dynamiques » qui permette l'élaboration d'un modèle de plaque rigides à partir de l'identification des points ayant un mouvement cohérent (i.e. de même rotation). L'objectif serait, dans ce cas, de s'affranchir de toute information sur les frontières de plaques. En effet, même si la connaissance de ces frontières n'entre qu'indirectement dans le calcul des pôles de l'ITRF, on ne peut ignorer l'influence qu'elle a sur le résultat final. Dans une vision purement métrologique de la surface terrestre, ce dernier pas reste à franchir. Et il devrait l'être rapidement car les réseaux géodésiques modernes semblent d'ores et déjà suffisants pour s'affranchir d'un maximum d'hypothèses de nature géophysique.

## CHAPITRE V

### BOÎTE À OUTILS DES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TERRESTRE

En préambule de chapitre, il est souhaitable de revenir sur quelques étapes essentielles d'un calcul de géodésie spatiale et de combinaison de données.

La mesure de géodésie spatiale (distance satellite-station, dérivée de la distance, interférométrie) dépend de paramètres inconnus que l'on cherche à estimer par moindres carrés. Dans ces paramètres, on distingue les paramètres externes et les paramètres internes. Les premiers correspondent aux inconnues qui sont dignes d'intérêt pour l'analyste qui utilisera les résultats de la compensation (coordonnées de stations, paramètres d'orientation de la Terre . . . ) ; les seconds sont nécessaires pour modéliser convenablement l'observation mais leur connaissance ne constitue pas l'objectif du calcul (forces empiriques, biais d'horloges, paramètres troposphériques . . . ). La distinction des deux classes de paramètres est très artificielle, mais elle rend plus aisée la description des stratégies de calcul.

Certains paramètres qui correspondent à l'environnement physique (orientation de la Terre, coordonnées de stations, troposphère . . . ) sont communs à tous les systèmes de mesure, et le croisement des résultats obtenus est hautement désirable : d'une part il permet la détection de fautes de mesure, d'autre part l'addition des diverses informations permet d'accéder à des estimateurs plus précis des paramètres. Ainsi, on peut cumuler les résultats de calculs DORIS et GPS, par exemple, pour obtenir des coordonnées de stations optimales, pourvu que plusieurs stations aient été observées par les deux systèmes de mesure.

Cette optique est celle de l'IERS depuis toujours.

Les stratégies de cumul de l'information sont doubles. La première méthode consiste à cumuler les mesures brutes en écrivant les équations d'observation



relatives aux deux systèmes de mesure simultanément, et à résoudre le problème ainsi formulé. Dans ce cas, les inconnues communes au traitement des deux lots de données sont automatiquement renseignées par les observations de chaque système de mesure. De plus, les modèles physiques de réduction d'observations (champ de gravité en particulier) sont communs à tous les satellites impliqués dans le calcul.

Une autre technique consiste à éliminer les paramètres internes de chaque système de mesure (par une élimination de Gauss dans l'équation normale, par exemple), puis à cumuler les systèmes résiduels pour les seuls paramètres externes.

Tant que les paramètres communs aux deux systèmes de mesure sont inclus dans les paramètres externes, les deux approches conduisent à un résultat rigoureusement équivalent. La seconde présente toutefois l'intérêt, par rapport à la première, d'être beaucoup plus souple : on ne manipule que l'information commune, et non l'information secondaire propre à chaque système.

Pour conclure ce paragraphe, si combiner est un « mal nécessaire » de la géodésie, le niveau où intervient cette combinaison n'est pas crucial. Retenir la solution la plus simple conduit à privilégier une combinaison au niveau des coordonnées, et non au niveau des mesures. Ceci étant, la combinaison au niveau des mesures rend possible l'approfondissement de la physique des phénomènes, chose qu'interdit une option de calcul où des paramètres internes potentiellement communs ont été éliminés.

## 1. Introduction

Les outils de traitement de données jouent un rôle essentiel dans la réalisation des systèmes terrestres : les observations sont relativement surabondantes par rapport aux inconnues et les techniques de synthèse de l'information sont utilisées à tous les niveaux. La technique la plus employée est la méthode des moindres carrés sur laquelle on reviendra dans le §2. de ce chapitre. On verra également dans ce même paragraphe que la modélisation de l'observation en fonction des paramètres que l'on cherche à déterminer est parfois source de problèmes. En effet, la multiplication des observations facilement acquises peut conduire à introduire des paramètres « empiriques » dans la modélisation. Ces paramètres empiriques permettent artificiellement de se débarrasser de phénomènes physiques inconnus et conduisent à une amélioration non moins artificielle de la précision estimée sur les paramètres « intéressants ». En contrepartie, l'adoption d'une telle modélisation interdit tout développement de la physique de l'observation. Ces problèmes seront abordés au §2.2.

Le paragraphe 3. est consacré au délicat calcul des composantes de la variance. Ce problème n'est pas indépendant de l'empirisme qui peut exister

dans certains calculs de géodésie spatiale. L'une des difficultés auxquelles sont confrontés les calculateurs (c'est le cas pour l'ITRF) provient du désaccord apparent qui existe entre la précision annoncée des observations et la façon dont elles s'ajustent au modèle utilisé dans la compensation. Ces désaccords sont quasiment inévitables lorsqu'entrent en jeu des populations d'origines différentes. Il est nécessaire d'étalonner leurs précisions à partir de l'intercomparaison des populations. Deux méthodes d'étalonnage ont été développées pour les besoins spécifiques de l'ITRF. Elles sont présentées au paragraphe (3.1.).

Le paragraphe 4. est dédié à la détection des fautes de mesures. En géodésie, les fautes sont peu fréquentes, mais peuvent survenir par exemple dans les rattachements entre les systèmes de mesures et d'autres points de la surface terrestres localisés dans le même site. La première technique proposée ici consiste en l'analyse de résidus de compensation. Une autre, totalement différente, s'appuie sur les méthodes d'estimation robuste.

Le paragraphe 5. de ce chapitre est dévolu à l'élaboration de critères de qualité par population lorsque le calcul de compensation conduit à en distinguer. Typiquement, une combinaison de données provenant de systèmes de mesures différents nécessite de travailler au niveau des lots de mesures. Il est donc assez naturel de chercher *a posteriori*, le niveau de qualité de chacun d'eux au travers de la compensation d'ensemble. C'est précisément l'objectif du paragraphe 5..

## 2. Principe général de la compensation de repères de référence terrestres

### 2.1. Généralités sur les moindres carrés

En métrologie comme dans beaucoup d'autres disciplines, on cherche à expliquer le comportement général d'une population à partir d'une sous-population (les observations) de la population parente. Pour expliquer le comportement général, on postule que celui-ci ne dépend que d'un lot de variables (les paramètres) de dimension inférieure à la sous-population étudiée : le problème est donc redondant. En métrologie plus que dans toute autre discipline, expliquer des observations revient à définir une physique de l'observable à laquelle le comportement de l'observation permettra d'accéder. Le point délicat est que les observations ne correspondent pas rigoureusement au modèle physique que l'on propose car, d'une part, ce modèle physique peut être erroné (ou incomplet), et d'autre part, les observations sont sujettes à erreur de mesure. Cette caractéristique du comportement de l'observation doit être prise en compte lors de l'inférence qui, basée sur l'observation, conduit à la détermination des paramètres explicatifs. Le mode de prise en compte consiste à conférer un caractère aléatoire à l'écart de l'observation au modèle. Le contexte de l'estimation sera donc probabiliste.

Mathématiquement, expliquer des observations  $y$  par un modèle  $f$  s'appuyant sur des variables  $x$  revient à résoudre en  $x$  l'équation

$$\left| \begin{array}{l} y = f(x), \quad n > p \\ f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

La redondance du problème est caractérisée par la quantité  $(n - p)$ , où  $n$  est le nombre d'observations et  $p$  le nombre de paramètres. Comme il a été mentionné plus haut, la dimension probabiliste des observations  $y$  est nécessaire du fait que  $y \notin f(\mathbb{R}^p)$ , dans le cas général. De sorte que le problème précédent ne possède pas de solution. L'idée consiste à modifier le problème précédent en un nouveau problème qui possède une solution en  $x$  et qui, dans l'hypothèse où  $y \in f(\mathbb{R}^p)$ , conduit à une solution identique au problème (V.1). On introduit donc une fonction coût  $\varphi$  :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x) = \|f(x) - y\| \end{array} \right. \quad (\text{V.2})$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe autant de choix de  $\varphi$  qu'il existe de normes de  $\mathbb{R}^n$ . Le problème (V.1) est changé en :  $\hat{x} = \varphi^{-1}[\min_x \varphi(x)]$ , où  $\hat{x}$  est solution du problème. Le critère des moindres carrés s'appuie sur une norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $\mathbb{R}^n$  est muni d'un produit scalaire identité, trouver le minimum de  $\varphi$  revient à trouver le minimum de  $[\varphi(x)]^2$ , somme des carrés des composantes du vecteur écart modèle - observé. D'où l'appellation de la technique des moindres carrés : on minimise par ce critère la somme des carrés des résidus de mesures (vecteur observé moins compensé).

Lorsque le produit scalaire  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est quelconque, alors

$$\varphi(x) = (f(x) - y)^T S (f(x) - y) \quad (\text{V.3})$$

En supposant que  $f$  est dérivable et que l'on connaît une valeur approchée  $x_0$  de  $x$  autour de laquelle  $f$  est développable au premier ordre en série de Taylor, alors on montre (Sillard, 1998a) que le minimum de  $\varphi$  est atteint en

$$\widehat{x}_S = [f'(x_0)^T S f'(x_0)]^{-1} f'(x_0)^T S (y - f(x_0)) \quad (\text{V.4})$$

Il suffit, pour démontrer ce résultat, d'annuler la dérivée première de la forme quadratique (V.3). La fonction  $\varphi$  étant une fonction convexe, l'extremum ainsi obtenu est un minimum.

Cette solution est issue d'un problème d'optimisation pure. Donner une dimension probabiliste à  $y$  permet de caractériser le produit scalaire  $S$  à utiliser. Supposons que  $\mathbb{E}(y) = f(\mathbb{E}(x))$  et que  $\text{var}(y) = \Sigma$ , alors on montre que (théorème de Gauss-Markov) l'estimateur de  $x$  le plus précis, dans la classe

des estimateurs sans biais linéaires en  $y$  est  $\widehat{x}_{\Sigma^{-1}}$ . La variance de  $\widehat{x}_{\Sigma^{-1}}$  (que l'on notera dans la suite  $\widehat{x}$ ) est

$$\text{var}(\widehat{x}) = [f'(x_0)^T \Sigma^{-1} f'(x_0)]^{-1} \quad (\text{V.5})$$

Le critère de moindres carrés repose sur des hypothèses statistiques qu'il convient en général de vérifier *a posteriori*.

- D'une part, on suppose les observations non biaisées en regard du modèle utilisé. Cette hypothèse est à vérifier *a posteriori* en s'appuyant sur deux types de tests. Le premier consiste à détecter la présence de fautes de mesures, à partir du vecteurs des résidus,  $\widehat{V} = f(\widehat{x}) - y$ , en supposant le modèle exact. Le second consiste à valider le modèle explicatif des observations en vérifiant la significativité des paramètres  $\widehat{x}$  obtenus. Le test de Fisher entre dans cette seconde catégorie de tests (Tassi, 1992). Pour plus de détails, on pourra se reporter à (Sillard, 1998a).

- D'autre part, la connaissance *a priori* du moment d'ordre 2 des observations (variance) repose elle aussi sur une hypothèse qu'il convient de vérifier. Cependant, la vérification de cette hypothèse est délicate dans la mesure où le problème d'estimation ne comporte pas suffisamment d'information pour tester l'intégralité de la structure de la variance. De plus, cette hypothèse et la précédente dépendent l'une de l'autre. On est donc réduit à vérifier une sous-partie de l'hypothèse générale sur le second moment : par exemple, on peut vérifier que l'échelle de la matrice de variance adoptée pour les observations est convenable. On supposera alors que  $\text{var}(y) = \sigma_0 \Sigma$  et on construira alors un estimateur sans biais de  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\sigma}_0 = \frac{\widehat{V}^T \Sigma^{-1} \widehat{V}}{n - p} \quad (\text{V.6})$$

sur lequel des tests pourront être menés.

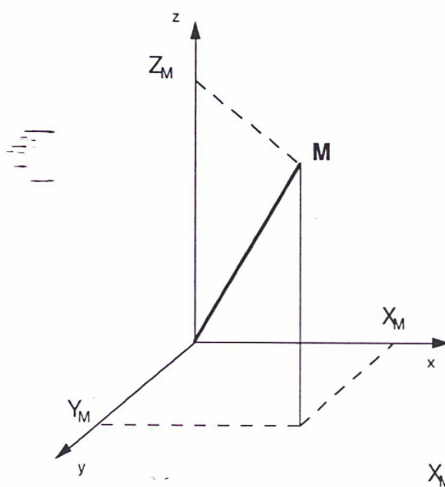
On peut aussi s'intéresser à la variance extraite de sous-populations. Dans ce cas, on peut être conduit à effectuer des tests d'homoscédasticité (variance identique de chacune des sous-populations) se basant sur des critères voisins de ceux utilisés en (V.6). Ce point s'avère de première importance dans la combinaison de jeux de coordonnées (cf. §3.).

Il convient donc d'aborder les moindres carrés avec la plus extrême prudence et de toujours garder à l'esprit les différentes hypothèses sur lesquelles ils reposent. Toutefois, même si cette méthode possède quelques défauts, sa facilité d'utilisation ainsi que le caractère explicite de l'estimateur et de sa variance, en font l'outil privilégié de la compensation d'observations discrètes. En outre, par rapport aux autres techniques comme l'estimation bayésienne (Robert, 1992) ou l'estimation par maximum de vraisemblance (Monfort, 1997), il

n'est pas indispensable de supposer une distribution *a priori* des observations et il est donc possible d'utiliser les moindres carrés dans un contexte non paramétrique. On en verra un exemple au paragraphe 4.1.. Enfin, même si en métrologie le modèle physique posé en explication de l'observable est supposé connu, il ne faut pas oublier qu'il peut être lui-même erroné et donner lieu à « erreurs de mesures ».

## 2.2. Quel modèle pour quel traitement ?

L'observable de base de la réalisation d'un système de référence terrestre est le vecteur coordonnées géocentriques d'un point, fonction du temps :



$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (V.7)$$

Le principe de la réalisation de système terrestre repose donc sur l'observation des composantes d'un vecteur position instantané. Ce vecteur découle d'observations de géodésie spatiale qui dépend, entre autre, des coordonnées des stations de poursuite du système satellitaire ou du réseau de radiotélescopes d'observation de quasars pour le VLBI. Par conséquent, la réalisation de système terrestre est un sous-produit de compensation d'observations de géodésie spatiale. Nous ne nous étendons pas sur la modélisation des observables ainsi que les techniques de réduction utilisées. Nous considérerons que les coordonnées des stations sont des pseudo-observations et que certaines stations sont observées par diverses techniques, ce qui assure un raccord entre les pseudo-observations des diverses techniques.

On l'aura compris, réaliser un système terrestre revient à positionner un lot de points à la surface de la Terre à un instant donné.

Supposons que l'on dispose de plusieurs réalisations de systèmes terrestres issues de différentes techniques de positionnement, au même instant  $t$ . On a vu au chapitre III que les observations de géodésie sont invariantes sous l'action de certaines isométries, de sorte que l'expression des coordonnées sup-

pose des choix arbitraires sur certains degrés de liberté de la définition du système de référence sous-jacent. Ainsi, l'orientation du système pour une technique satellitaire, l'origine pour des techniques interférométriques sont autant *d'a priori* qui induisent que les coordonnées des diverses réalisations ne sont pas directement comparables : en effet, **elles ne réalisent pas le même système de référence**. L'optique adoptée par le service international de la rotation terrestre (IERS) lie deux jeux de coordonnées de stations par une similitude vectorielle (cf. annexe B). Une similitude vectorielle se décompose en un changement d'origine, une homothétie et une rotation d'axe quelconque soit, en dimension 3, 7 degrés de liberté. On se donne un système de référence de travail indicé 0 et pour tout point physique  $i$  observé dans la  $j^{\text{ème}}$  réalisation, on a :

$$\vec{X}_i^j = \vec{\mathfrak{T}}^j + \mathfrak{V}^j \mathfrak{N}^j \vec{X}_i^0 \quad (\text{V.8})$$

où  $\vec{\mathfrak{T}}^j$  est le vecteur de translation entre l'origine du repère 0 et celle du repère réalisé par le jeu  $j$ ,  $\mathfrak{V}^j$  est le facteur d'homothétie et  $\mathfrak{N}^j$  est la rotation entre le repère 0 et le repère  $j$ . Explicitement,

$$\mathfrak{T}^j = \begin{pmatrix} t_x^j \\ t_y^j \\ t_z^j \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{N}^j = \begin{pmatrix} \cos\omega^j \cos\psi^j & -\cos\psi^j \sin\omega^j & \sin\psi^j \\ \cos\epsilon^j \sin\omega^j + \cos\omega^j \sin\psi^j \sin\epsilon^j & \cos\omega^j \cos\epsilon^j - \sin\omega^j \sin\psi^j \sin\epsilon^j & -\cos\psi^j \sin\epsilon^j \\ -\cos\omega^j \cos\epsilon^j \sin\psi^j + \sin\omega^j \sin\epsilon^j & \cos\epsilon^j \sin\omega^j \sin\psi^j + \cos\omega^j \sin\epsilon^j & \cos\psi^j \cos\epsilon^j \end{pmatrix} \quad (\text{V.9})$$

Les angles  $\epsilon^j$ ,  $\psi^j$  et  $\omega^j$  sont les angles de rotation autour des trois axes du repère avant rotation, également appelés angles de Cardan (Boucher, 1979).

Les divers repères géodésiques visent à réaliser au mieux le même système de référence. Les mesures sont faiblement erronées, de sorte que la transformation entre les divers système géodésiques est petite. Plus précisément, la faiblesse des écarts entre références géodésiques se traduit numériquement par un rapport d'homothétie proche de l'unité et des angles de rotation proches de 0. La similitude sera généralement assimilable à son développement de Taylor au premier ordre ( $\mathfrak{V}^j = 1 + \lambda^j$ ) :

$$\vec{X}_i^j = \vec{\mathfrak{T}}^j + \vec{X}_i^0 + \begin{pmatrix} \lambda^j & -\omega^j & \psi^j \\ \omega^j & \lambda^j & -\epsilon^j \\ -\psi^j & \epsilon^j & \lambda^j \end{pmatrix} \vec{X}_i^0 \quad (\text{V.10})$$

où  $\vec{X}_i^0$  est une valeur approchée des coordonnées  $\vec{X}_i^0$  et  $(\epsilon^j, \psi^j, \omega^j)$  sont les trois angles de rotation infinitésimaux.



où les  $v_i$  sont les composantes de la vitesse de déplacement de la station considérée. Puis, l'équation (V.8) devient

$$\begin{cases} \vec{X}_i^j = \vec{X}_i^0 + \mathcal{E}^j \mathcal{R}^j (\vec{X}_i^0 + \vec{V}^0 (t_j - t_0)) \\ \vec{V}_i^j = \vec{V}_i^0 + \mathcal{E}^j \mathcal{R}^j (\vec{X}_i^0 + \vec{V}^0 (t_j - t_0)) + \mathcal{E}^j \mathcal{R}^j (\vec{X}_i^0 + \vec{V}^0 (t_j - t_0)) + \mathcal{E}^j \mathcal{R}^j \vec{V}^0 \end{cases} \quad (V.13)$$

où l'on suppose que les paramètres de transformation sont calculés à l'instant  $t_j$  où sont exprimées les coordonnées du jeu  $j$ . Les coordonnées  $\vec{X}^0$  sont, quant à elles exprimées à l'instant  $t_0$ .

On peut noter que l'adjonction d'une relation d'observation en vitesses suppose que la transformation entre le système  $j$  et le système de travail dépend elle aussi du temps au premier ordre de petitesse. C'est précisément ce que montre, dans le cas général, l'équation (V.13).

La linéarisation des équations (V.13) s'appuie sur les mêmes hypothèses que celles utilisées pour l'obtention de la relation (V.11). En outre, on supposera que dans les intervalles de temps considérés, il est inutile de tenir compte de la variation des coordonnées approchées due au déplacement tectonique. De sorte que la relation (V.13) conduit à un système d'équations d'observations de la forme

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} \vdots & & & \vdots & \\ \dots & I & (t_j - t_0)I & \dots & A & 0 \\ \dots & 0 & I & \dots & 0 & A \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array} \right) X = Y \quad (V.14)$$

avec

$$\begin{cases} X = (\dots x_i^0 y_i^0 z_i^0 \dot{x}_i^0 \dot{y}_i^0 \dot{z}_i^0 \dots | t_x^j t_y^j t_z^j \lambda^j e^j \psi^j \omega^j \\ \quad t_x^j t_y^j t_z^j \lambda^j e^j \psi^j \omega^j)^T \\ Y = (\dots x_i^j y_i^j z_i^j \dot{x}_i^j \dot{y}_i^j \dot{z}_i^j \dots)^T \end{cases}$$

Ce modèle est, à quelques raffinements près, celui qui est implémenté dans le logiciel **CARTEF** et utilisé pour le calcul de l'ITRF96.

Un autre champ, en matière de modélisation, mérite d'être exploré. Il s'agit de l'influence de l'introduction de paramètres empiriques dans la réduction des données. Il est en effet de plus en plus fréquent d'introduire, dans la réduction des données de géodésie spatiale, des paramètres empiriques « expliquant » les observations. Comme leur nom l'indique, ces paramètres supplémentaires ne reposent sur aucune modélisation physique, mais sur leur capacité à réduire le bruit sur les paramètres estimés. Ainsi, les forces de Hill (Crétau, 1993) entrent-elles dans cette classe de paramètres. Il s'agit de forces périodiques ajoutées au modèle de forces régissant la dynamique du satellite.



La période de ces forces est généralement la période orbitale du satellite. Toutefois, dans ce cas précis, la structure du bruit auquel elles sont supposées remédier est physiquement interprétable par la structure du bilan d'erreur dans un calcul d'orbite.

Le risque existe que devant la réduction de la variance des autres paramètres de l'estimation entraînée par l'ajout des termes empiriques, l'analyste conclue au bien fondé de cet ajout. La réduction de la variance est en général la conséquence du caractère significatif, du point de vue statistique, des paramètres empiriques. Mais ce caractère significatif statistique n'implique ni la validité du modèle (structure du paramètre ajusté), ni l'intérêt calculatoire de l'introduction du paramètre : si ce paramètre est dénué de sens physique et que son estimation ne conduit qu'à absorber du bruit, il est fort possible qu'un biais soit introduit sur les autres paramètres et que l'estimation de leur variance soit sous-estimée. Il faut donc demeurer très vigilant face à l'introduction de paramètres « empiriques ».

On constate donc, à l'issue de cette présentation succincte des stratégies de compensation, que celles-ci varient en fonction de l'objectif, des hypothèses que l'on pratique, ainsi que des données elles-mêmes.

### 3. Calcul des composantes de la variance

#### 3.1. Présentation de la méthode

Dès que l'on cherche à combiner des informations d'origines diverses, on est confronté à l'incohérence statistique de ces observations : elles ont été obtenues par des systèmes de mesure différents et le bruit de mesure associé aux résultats de chacun de ces systèmes repose simplement sur leur auto-cohérence. De sorte que la confrontation des résultats va inévitablement entraîner la nécessité d'étalonner le bruit des diverses populations. C'est dans ce contexte qu'a vu le jour la technique statistique appelée « estimation des composantes de la variance ».

La méthode consiste à postuler que la variance des observations est décomposée en une somme de matrices, chacune de ces matrices étant connues à un facteur multiplicatif près (Sillard, 1997).

On peut légitimement s'interroger sur le sens de ce facteur multiplicatif inconnu : il est clair qu'il y a toujours lieu de penser que la précision découlant de la répétabilité d'un système de mesure, lorsqu'elle sera confrontée à d'autres mesures, se révélera une mesure imparfaite de la qualité des résultats. Cette difficulté trouve son origine dans le caractère imparfait de la modélisation de l'observable et des corrélations souvent non prises en compte entre les diverses observations d'un même système de mesure. La cause de cet étalonnage imparfait est donc relativement simple à comprendre. Mais alors, pourquoi prendre

en compte des « erreurs de variance » sous la forme d'un facteur multiplicatif ?

La première raison qui est sans doute la plus mauvaise consiste à affirmer qu'il faut bien faire quelque chose et que l'on ne sait pas vraiment opérer différemment. Mais on peut trouver des justifications plus pragmatiques et scientifiquement acceptables.

Supposons que l'on s'intéresse à une variable aléatoire  $X$  telle que

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = X_0 + \delta X \\ \text{var}(X) = \Sigma \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

et que la physique de l'observation soit ainsi faite qu'au lieu d'avoir accès à  $\mathbb{E}(X)$ , on soit confronté à une variable aléatoire d'espérance  $X_0$ . Dans ce cas, on peut écrire que  $\mathbb{E}(X - \delta X) = X_0$ . Donc  $(X - \delta X)$  est la variable aléatoire observable alors que l'on pense travailler sur  $X$ . Par contre, dans le contexte de l'équation (V.15),  $\delta X$  n'est pas une variable aléatoire mais une quantité déterministe.

Supposons à présent que l'on cherche à « rendre » aléatoire  $\delta X$ . Alors la variable aléatoire  $(X - \delta X)$  est la variable observée et sa variance s'écrit, en l'absence de corrélation

$$\text{var}(X - \delta X) = \Sigma + \text{var}(\delta X) \quad (\text{V.16})$$

Par conséquent, une erreur de mesure est, à priori, modélisable par un terme additif sur la variance.

Ne connaissant rien sur  $\delta X$ , tous les choix sont possibles. Alors pourquoi pas  $\text{var}(\delta X) = \varepsilon \Sigma$  ? Dans ce cas,

$$\text{var}(X - \delta X) = (1 + \varepsilon) \Sigma \quad (\text{V.17})$$

et l'on revient au facteur multiplicatif. L'intérêt de choisir  $\text{var}(\delta X) = \varepsilon \Sigma$  repose sur une réalité physique.  $\Sigma$  est à peu près la matrice de corrélation. Si une composante de  $\delta X$  est forte par le jeu des corrélations renseignées par  $\Sigma$ , d'autres composantes devraient l'être également. En outre, adopter une telle structure pour la variance de  $\delta X$  permet de ne pas modifier les corrélations entre composantes, ce qui paraît assez satisfaisant.

### 3.1.1. Estimateur par le degré de liberté

Dans cette partie, le problème général d'estimation s'écrit, en variables aléatoires ( $Y_i \equiv \overset{\circ}{Y}_i + \varepsilon_i$ )<sup>2</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangleright \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \\ \triangleright \mathbb{E}(Y_i) = \overset{\circ}{Y}_i \\ \triangleright \text{var}(Y_1^T, \dots, Y_n^T)^T = \text{diag}(\sigma_1 \Sigma_1, \dots, \sigma_n \Sigma_n) \end{array} \right. \quad (\text{V.18})$$

où  $A_i$  est la matrice modèle liant les paramètres globaux  $X$  aux observations regroupées par populations cohérentes  $Y_i$ . La variance des groupements d'observations  $Y_i$  est connue à un facteur de variance près réel  $\sigma_i$ , de sorte que  $\text{var}(Y_i) = \sigma_i \Sigma_i$ . La matrice de pondération associée aux équations d'observations du problème précédent ne tient pas compte des  $\sigma_i$ .

Le système normal associé s'écrit donc :

$$\left( \sum_{i=1}^n A_i^T \Sigma_i^{-1} A_i \right) X = \sum_{i=1}^n A_i^T \Sigma_i^{-1} Y_i \quad (\text{V.19})$$

On notera  $v$  la matrice inverse de la matrice normale. On cherche à estimer les facteurs de variance  $\sigma_i$  à partir de critères à définir, lors du calcul de compensation.

Les deux méthodes proposées ci-après permettent d'obtenir des résultats satisfaisants et cohérents. En particulier, lors de simulations numériques basées sur des reconstitutions de populations suivant une loi gaussienne, les facteurs de variance sont estimés à quelques pourcents près (moins de 10 % dans tous les cas).

On désigne par  $\widehat{V}$  le vecteur des résidus de mesures du problème d'estimation traité. La première méthode d'estimation utilisée dans  $\text{CARF}$  est inspirée de (Persson, 1982) et est basée sur une analogie de l'estimation du facteur unitaire de variance  $\sigma_0$ , pour lequel le facteur de redondance  $f$  de l'ensemble du calcul de moindres carrés est nécessaire :

$$\widehat{\sigma}_0 = \frac{\widehat{V}^T \Sigma^{-1} \widehat{V}}{f}$$

<sup>2</sup> $\overset{\circ}{Y}$  désigne la valeur exacte de la variable aléatoire  $Y$

Par analogie, on cherche à construire un estimateur  $\widehat{\sigma}_i$  des  $\sigma_i$  de la forme :

$$\widehat{\sigma}_i = \frac{\widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i}{f_i}$$

et  $f_i$  est un « estimateur » du degré de liberté associé au jeu  $i$  à construire.

Pour ce faire, on passe par l'étape intermédiaire qui consiste à identifier les  $\sigma_i$  au facteur unique global  $\sigma_0$  et à construire, par population, un estimateur du  $\sigma_0$  global, dans l'hypothèse restrictive où pour tout  $i$ ,  $\sigma_i = \sigma_0$ . Concrètement, on pose  $\text{var}(Y_i) = \sigma_0 \Sigma_i$ . L'intérêt d'une telle approche est qu'elle permet d'associer à une population un estimateur du  $\sigma_0$  et donc d'effectuer un test d'hétéroscédasticité des diverses populations (Roche, 1996). Il est alors aisé de modifier les facteurs multiplicatifs  $\sigma_i$  afin de se rapprocher du cas où le test d'égalité des variances des populations devient positif.

On désigne par  $n_i$  le nombre d'observations renseignées dans le jeu  $i$  (i.e.  $\text{rg}(\Sigma_i) = n_i$ ).

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \widehat{V} &= \left[ \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 v A_1^T \Sigma_1^{-1} & \dots & A_1 v A_n^T \Sigma_n^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n v A_1^T \Sigma_1^{-1} & \dots & A_n v A_n^T \Sigma_n^{-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{V}_1 \\ \vdots \\ \widehat{V}_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On définit  $B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{n_i, n_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\Sigma_{n_j, n_i}}$ , et on a immédiatement  $B_i^T \widehat{V} = \widehat{V}_i$ .

Calculons à présent<sup>3</sup>,

<sup>3</sup>On désigne par  $\Lambda_{i,j}(M)$  le bloc  $(i,j)$  de la matrice  $M$ , et par  $\text{tr}(M)$  la trace de la matrice  $M$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\Sigma_i^{-1} B_i^T \widehat{V} \widehat{V}^T B_i) &= \Sigma_i^{-1} B_i^T D \mathbb{E}(Y Y^T) D^T B_i \\
 &= \Sigma_i^{-1} \Lambda_{i,i} (D \mathbb{E}(Y Y^T) D^T) \\
 &= \Sigma_i^{-1} \sum_j \Lambda_{i,j} (D) \Lambda_{j,j} (\mathbb{E}(Y Y^T)) \Lambda_{j,i} (D^T) \\
 &= \Sigma_i^{-1} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \sigma_0 A_i \nu A_j^T \Sigma_j^{-1} A_j \nu A_i^T + \sigma_0 \Sigma_i - 2 \sigma_0 A_i \nu A_i^T \right) \\
 &= \sigma_0 \Sigma_i^{-1} \cdot (\Sigma_i - A_i \nu A_i^T)
 \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E} \left[ \text{tr}(\Sigma_i^{-1} B_i^T \widehat{V} \widehat{V}^T B_i) \right] = \mathbb{E}(\widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i)$ , de sorte que :

$$\mathbb{E}(\widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i) = \sigma_0 \left[ \text{tr}(I_i) - \text{tr}(\nu A_i^T \Sigma_i^{-1} A_i) \right]$$

et finalement  $\widehat{\sigma}_0^i$ , défini par ( $N_i = A_i^T \Sigma_i^{-1} A_i$  : matrice normale relative au jeu  $i$ ) :

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}_0^i &= \frac{\widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i}{f_i} \\ f_i &= n_i - \text{tr}(\nu N_i) \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

est un estimateur sans biais de  $\sigma_0$ .

Bien entendu, ce résultat ne permet pas, en l'état, d'estimer le facteur de variance associé au jeu  $i$ . Par contre, il permet de tester l'hypothèse d'égalité des composantes de la variance. Approximativement, dans le cas où les observations suivent une loi normale, la distribution des estimateurs de  $\widehat{\sigma}_i$  et  $\widehat{\sigma}_j$  de  $\sigma_0$  vérifie<sup>45</sup> :  $\frac{\widehat{\sigma}_i}{\widehat{\sigma}_j} \hookrightarrow \mathcal{F}(f_i, f_j)$  sous l'hypothèse  $H_0$ . Il y a alors rejet de l'hypothèse [ $H_0 : \sigma_i = \sigma_j$ ] en faveur de l'hypothèse [ $H_1 : \sigma_i \neq \sigma_j$ ] au seuil de signification  $\alpha$  si  $\frac{\widehat{\sigma}_i}{\widehat{\sigma}_j} > q_{\alpha/2}(f_i, f_j)$  ou bien si  $\frac{\widehat{\sigma}_i}{\widehat{\sigma}_j} < q_{\alpha/2}(f_j, f_i)$ , où  $q_\alpha(f_i, f_j)$  est le  $\alpha$ -quantile d'une loi  $\mathcal{F}(f_i, f_j)$ .

Par conséquent, par un simple jeu de proportionnalité, si on remplace dans l'estimation  $\Sigma_i$  par  $\widehat{\sigma}_0^i \Sigma_i$ , la distribution de la variable  $\frac{\widehat{\sigma}_0^i}{\widehat{\sigma}_0^j}$  suit effectivement une loi de Fisher - Snedecor de degrés de libertés correspondants, ceci n'étant vérifié que lorsque les estimateurs du  $\sigma_0$  par populations sont proches de l'unité.

On peut remarquer que  $f_i$  s'apparente à un estimateur du degré de liberté du jeu  $i$  pour le calcul de moindres carrés présent. Il ne dépend que du modèle et non des observations.

<sup>4</sup> $\mathcal{F}(f_i, f_j)$  désigne la loi de Fischer - Snedecor à  $f_i, f_j$  degrés de liberté

<sup>5</sup>le signe «  $\hookrightarrow$  » indique qu'une variable aléatoire suit la distribution de probabilité indiquée

### 3.1.2. Estimateur de Helmert

Dans le paragraphe précédent, on a supposé d'emblée que la variance était diagonale par bloc. La méthode proposée ici ne nécessite nullement une telle hypothèse et suppose simplement que la variance des observations est une somme de variances connues à un facteur multiplicatif près.

La méthode de Helmert correspond à une méthode d'estimation des composantes de la variance parfois utilisée en géodésie (Sahin et al., 1992) et mentionnée depuis quelques années dans des écrits à caractère théorique (Grafarend, 1984) de cette discipline. Toutefois, la méthode est relativement bien connue des statisticiens qui l'identifient au sein d'une classe plus large de méthodes basées sur des constructions d'estimateurs quadratiques non biaisés (estimateurs MINQUE : *minimum norm quadratic unbiased estimators* (Rao et Mitra, 1971; Rao, 1973; Rao et Kleffe, 1988; Searle, 1968).

En géodésie, on peut citer, sans être exhaustif, les travaux publiés (Grafarend et al., 1980; Grafarend et Kleusberg, 1980; Schaffrin, 1981; Koch, 1986; Koch, 1987; Ou, 1989; Zongchou, 1992; Ou et Koch, 1994; Sjöberg, 1995; Yu, 1996). Tous ces articles proposent des méthodes dérivées de la méthode générique proposée ci-dessous.

On suppose, sans hypothèse de structure sur les matrices de covariance *a priori* des observations, notées  $C_i$ , que la variance de  $Y$ , notée  $\Sigma$ , est la somme de  $\ell$  variances connues à un facteur près. Le modèle stochastique (V.18) est modifié en :

$$\left\{ \begin{array}{l} AX = Y \\ \mathbb{E}(Y) = \bar{Y} \\ \text{var}(Y) = \Sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i C_i \end{array} \right. \quad (\text{V.21})$$

Néanmoins, il convient de noter que les matrices  $C_i$  ne correspondent nullement à des sous-populations identifiées dans les observations. La seule hypothèse qui est pratiquée ici concerne la variance du vecteur des observations : celle-ci correspond à une somme quelconque de  $\ell$  termes. Ainsi, dans le cas traité au paragraphe précédent où  $n$  populations étaient identifiées, les matrices  $C_i$  auraient été de la forme  $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \Sigma_i & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

On a vu au paragraphe précédent qu'il existe une matrice  $D$  qui lie les ob-

servations aux résidus. On note  $\Sigma^0 = \Sigma(1, \dots, 1)$ . Calculons,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{V}^T \Sigma^{0-1} \widehat{V}) &= \mathbb{E}(Y^T D^T \Sigma^{0-1} D Y) \\ &= \text{tr}[D^T \Sigma^{0-1} D \Sigma] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \text{tr}(D^T \Sigma^{0-1} D C_i) \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

On peut alors remarquer que  $\Sigma^{0-1} = \Sigma^{0-1} \Sigma^0 \Sigma^{0-1} = \sum_{i=1}^{\ell} \Sigma^{0-1} C_i \Sigma^{0-1}$  donc la relation (V.22) peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{E}(\widehat{V}^T \Sigma^{0-1} C_j \Sigma^{0-1} \widehat{V}) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sigma_i \text{tr}(D^T \Sigma^{0-1} C_j \Sigma^{0-1} D \Sigma_i) \quad (\text{V.23})$$

de sorte que  $\widehat{\sigma}$  défini par

$$\begin{cases} \widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{\ell} \end{pmatrix} = H^{-1} q \\ H_{i,j} = \text{tr}(D^T \Sigma^{0-1} C_j \Sigma^{0-1} D C_i) \\ q_i = \widehat{V}^T \Sigma^{0-1} C_i \Sigma^{0-1} \widehat{V} \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

est un estimateur sans biais du vecteur aléatoire  $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell})$ .

Il faut noter que le passage de (V.22) à (V.23) suppose une décomposition non univoque de la matrice  $\Sigma^{0-1}$  de façon à faire apparaître les  $C_i$ . Il est clair qu'il existe autant de méthodes que de décomposition possibles. Toutefois, on peut montrer que celle proposée ici est celle qui conduit à une précision maximale de  $\bar{\sigma}$  (Grafarend, 1984; Koch, 1987).

$\widehat{\sigma}$  est un estimateur MINQUE (Rao, 1973) – Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimate –.

Cherchons la variance de  $\widehat{\sigma}$ .

Par construction,  $\widehat{\sigma} = H^{-1} q$ . On se place dans le cas formel où  $\bar{\sigma} = \mathbb{1}$ . Dans ce cas,

$$\widehat{\sigma}^T = H^{-1} \mathbb{E}(q q^T) H^{-1} \quad (\text{V.25})$$

On désigne par  $\Gamma_{ij}$  l'application qui à toute matrice associe le terme de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_{ij} : \mathcal{M}_{n,p} \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \Gamma_{ij}(M) = M_{ij} \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on a  $\Gamma_{ij}(\mathbb{E}(q q^T)) = \mathbb{E}(\Gamma_{ij}(q q^T))$ , par linéarité de l'espérance. Par conséquent,

$$\Gamma_{ij}(q q^T) = y^T D^T \Sigma^{0-1} C_i \Sigma^{0-1} D y y^T D^T \Sigma^{0-1} C_j \Sigma^{0-1} D y$$

donc, comme  $\mathbb{E}(yy^T) = \Sigma$ ,

$$\mathbb{E}(\Gamma_{ij}(qq^T)) = \text{tr}(D^T \Sigma^{0-1} C_i \Sigma^{0-1} D \Sigma D^T \Sigma^{0-1} C_j \Sigma^{0-1} D \Sigma)$$

Comme  $\hat{\sigma} = \mathbb{1}$ , alors  $\Sigma^0 = \Sigma$ . Il est alors aisé de vérifier, compte tenu de la structure de  $D$ , que  $\mathbb{E}(\Gamma_{ij}(qq^T)) = \text{tr}(D^T \Sigma^{0-1} C_i \Sigma^{0-1} D C_j) = H_{ij}$ . On sait enfin, que  $\mathbb{E}(\hat{\sigma}) = H^{-1} \mathbb{E}(q) = \bar{\sigma}$ , donc, pour  $\hat{\sigma} = \mathbb{1}$ ,

$$\boxed{\text{var}(\hat{\sigma}) = H^{-1}} \quad (\text{V.26})$$

Cette variance est normalisée, par conséquent, on peut obtenir un estimateur numérique de  $\text{var}(\hat{\sigma})$  lorsque  $\hat{\sigma} \neq \mathbb{1}$  en utilisant la formule

$$\text{var}(\hat{\sigma}) = \text{diag}(\sqrt{\hat{\sigma}}) \cdot H^{-1} \cdot \text{diag}(\sqrt{\hat{\sigma}})$$

car  $\hat{\sigma} = \text{diag}(\sqrt{\hat{\sigma}}) \cdot \bar{\sigma}$ , où  $\bar{\sigma} = \mathbb{1}$ . Il est clair que cette formulation n'est qu'approximative.

Dans le cas particulier d'une variance diagonale,

$$\begin{cases} \Sigma^0 &= \text{diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) \\ \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1 \Sigma_1, \dots, \sigma_n \Sigma_n) \end{cases}$$

On a vu au §3.1.1. que  $\hat{V} = DY$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{V}^T \Sigma^{0-1} \hat{V}) &= \mathbb{E}(Y^T D^T \Sigma^{0-1} D Y) \\ &= \text{tr}[D^T \Sigma^{0-1} D \Sigma] \\ &= \sum_{j=1}^n \text{tr}[\Lambda_{i,j}(D^T \Sigma^{0-1}) \cdot \Lambda_{j,i}(D \Sigma)] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i^j [n_i - 2\text{tr}(vN_i)] + \text{tr}(vN_i vN_j) \right\} \sigma_i \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}(\hat{V}^T \Sigma^{0-1} \hat{V}) = \sum_{i=1}^n \hat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \hat{V}_i$ , de sorte que le vecteur  $\hat{\sigma}$  défini par :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} = H^{-1} \cdot q \\ H_{i,j} = \delta_i^j [n_i - 2\text{tr}(vN_i)] + \text{tr}(vN_i vN_j) \\ q_i = \hat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \hat{V}_i \end{cases}}$$

est un estimateur sans biais du vecteur  $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ .



Ce dernier résultat est directement comparable aux résultats de la méthode exposée au §3.1.1.. Il permet donc d'accéder à un estimateur sans biais des facteurs de variances  $\sigma_i$  par populations, lorsque celles-ci sont indépendantes.

Enfin, on peut signaler que la méthode de Helmert ne postule nullement que les estimateurs de la variance soient positifs. De sorte qu'il est théoriquement possible d'aboutir à des estimateurs négatifs de la variance. Afin de remédier à ce problème – qui n'en est pas un pour des covariance  $Q_{i,j}$ ,  $i > j$  –, des méthodes dérivées de la méthode exposée ci-dessus ont été développées. Aucune méthode de ce type n'a été utilisée dans le cadre de cette thèse, mais il convient néanmoins de mentionner leur existence, en particulier (Rao et Mitra, 1971; Rao, 1972; LaMotte, 1973a). Enfin, pour une synthèse des différentes méthodes, on pourra se reporter avantageusement à (LaMotte, 1973b).

### 3.2. Illustration numérique sur des populations indépendantes

#### 3.2.1. Simulation

Le but de cette partie est de convaincre, avec des données simulées, que le processus de calcul des composantes de la variance avec la méthode de Helmert conduit à des résultats satisfaisants.

On opère donc un calcul de combinaison s'appuyant sur 3 jeux de 15 points chacun, les observations suivant une loi normale multidimensionnelle de variance pleine. On se reportera à (Sillard, 1996a) pour la construction détaillée de ces échantillons. Le bruit de mesure est de l'ordre de 2 à 3 cm.

La table V.1 donne les résultats de la combinaison opérée sur les données simulées et pondérées à l'aide de leur variance exacte.

	jeu 1	jeu 2	jeu 3
facteur de variance	1	1	1
facteur de variance estimé	0.959 ± .20	1.21 ± .24	0.99 ± 0.23
	facteur unitaire de variance du calcul		1.02
	emq (cm)		0.8

TAB. V.1: Calcul de combinaison, variances originales ; l'emq est l'écart du compensé à la valeur vraie des paramètres, en norme euclidienne

La table V.2 montre les résultats de la combinaison effectuée alors que le facteur de variance de chacun des jeux est modifié, en accord avec la première ligne du tableau.

Les résultats présentés aux tables V.1 et V.2 montrent que la technique fonctionne parfaitement, aux effets numériques près. Le processus d'obtention des

	jeu 1	jeu 2	jeu 3
facteur de variance	1.67	0.0224	0.135
facteur de variance estimé	$1.31 \pm .30$	$0.012 \pm 3.10^{-3}$	$0.15 \pm 0.04$
		facteur unitaire de variance du calcul	1.00
		emq (cm)	1.0

TAB. V.2: Calcul de combinaison, variances originales ; l'emq est l'écart du compensé à la valeur vraie des paramètres, en norme euclidienne

facteurs de variance est un processus itératif. Le critère d'arrêt étant que le facteur estimé ne s'écarte pas de l'unité de plus de son écart-type, par exemple. En appliquant ce critère, trois itérations ont été nécessaires pour converger lors du deuxième calcul.

### 3.2.2. Pratique

Le but de ce paragraphe est de montrer l'impact, sur le résultat d'un calcul de combinaison de populations hétérogènes, de la méthode choisie pour pondérer les observations. Le but est aussi de souligner l'attrait de la méthode de Helmert pour la résolution de ce type de problèmes.

Les méthodes d'estimation des composantes de la variance exposées au paragraphe précédent n'ont pas été utilisées lors du calcul de l'ITRF94. Toutefois, le problème du choix des pondérations était un problème crucial qui avait été résolu empiriquement à partir de l'analyse des résidus normalisés (Sillard et al., 1995). Avec les méthodes présentées ci-dessus, il est intéressant d'étudier les évolutions des valeurs de pondération et d'en évaluer l'impact sur la solution combinée déduite de ces pondérations.

L'illustration choisie est basée sur une combinaison des trois jeux DORIS utilisés pour le calcul de l'ITRF94. Ces trois jeux ont été calculés par trois centres d'analyse différents : l'Institut Géographique National (IGN), le Center for Space Research (CSR) de l'Université du Texas et le Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale - Toulouse (GRGS). La table V.3 donne les valeurs des pondérations obtenues par les trois méthodes :

- la méthode empirique utilisée lors du calcul de l'ITRF94 (Sillard et al., 1995)
- la méthode du degré de liberté exposée au §3.1.1.
- la méthode de Helmert exposée au §3.1.2.

Les valeurs des pondérations sont obtenues, dans les trois cas, par combinaison simultanée des trois jeux de coordonnées.

	ITRF94	Helmert	d° de lib.
<i>IGN</i>	39.5	1.23	3.80
<i>CSR</i>	3.06	0.462	0.608
<i>GRGS</i>	247	290	386

TAB. V.3: Facteurs de variance estimés pour les trois jeux DORIS

Comme on peut le constater au vu de la table V.3, les valeurs des pondérations sont grandement changées, les deux méthodes rigoureuses étant toutefois relativement cohérentes. Il est à prévoir que l'impact d'un tel changement de pondération sur la solution combinée est assez important. Ce fait est confirmé par l'étude des écarts moyens quadratiques entre les trois solutions combinées. Les valeurs de ces écarts sont présentés à la table V.4, les termes en gras correspondant aux écarts pondérés.

	Helmert		d° de lib.	
ITRF94	16.8	<b>14.6</b>	14.7	<b>12.7</b>
Helmert		*	3.92	<b>3.17</b>
	↑	↑		
	emq	emq pondéré		

TAB. V.4: Ecarts moyens quadratiques, en millimètres, des trois solutions combinées

Il est clair que les écarts moyens peuvent être considérés comme importants compte tenu du fait que la précision théorique des mesures DORIS est subcentimétrique. Aussi une variation de l'ordre de 1.5 cm sur la solution combinée est-elle tout à fait considérable. L'enseignement principal qu'il faut tirer de cette illustration est l'ampleur des variations que peuvent causer, sur l'estimateur des moindres carrés, les pondérations choisies pour effectuer le calcul. Il est donc essentiel de s'assurer un critère efficace de choix. Le critère de variance minimale réalisé par la méthode de Helmert est le seul raisonnable. La table V.5 confirme la caractérisation de l'estimateur de Helmert en tant qu'estimateur de variance minimale : la variance des paramètres de transformation permettant de passer du jeu du CSR au jeu combiné est minimale pour la méthode de Helmert (écart type sur la rotation en z passant de 8.4 cm pour l'ITRF94 à 3 cm pour le calcul par la méthode de Helmert). Par ailleurs, on peut également noter l'amplitude des variations sur les paramètres estimés eux-mêmes : 2.4 cm pour la rotation en z entre le calcul ITRF94 et le calcul par la méthode de

Helmert.

	$T_x$ cm	$T_y$ cm	$T_z$ cm	k $10^{-8}$	$\epsilon$ 0.001''	$\psi$ 0.001''	$\omega$ 0.001''
ITRF94	-1.77 $\pm .64$	-1.13 $\pm .64$	1.40 $\pm .85$	-3.034 $\pm .273$	.024 $\pm .756$	-.249 $\pm .467$	.461 $\pm 2.790$
d° de lib.	-1.78 $\pm .26$	-.97 $\pm .26$	1.30 $\pm .35$	-3.002 $\pm .086$	.056 $\pm .261$	-.137 $\pm .185$	-.361 $\pm 1.209$
Helmert	-1.85 $\pm .21$	-1.02 $\pm .21$	1.27 $\pm .29$	-2.992 $\pm .050$	.079 $\pm .182$	-.141 $\pm .147$	-.441 $\pm .998$

TAB. V.5: Valeur des paramètres de transformation estimés entre le jeu du CSR et le jeu combiné

Pour conclure cet exemple, on peut noter que les estimateurs de Helmert et du degré de liberté sont relativement cohérents. C'est un point positif car il faut souligner que si ces deux méthodes sont des méthodes itératives et donc, en cela comparables, la méthode du degré de liberté est beaucoup moins gourmande en temps de calcul que la méthode de Helmert. Une utilisation conjointe des deux méthodes est donc envisageable et constitue probablement l'approche à privilégier dans une optique routinière.

## 4. Analyse et validation d'une compensation par moindres carrés

### 4.1. Détection des fautes de mesures

On a coutume de qualifier d'erronée, toute observation dont l'erreur estimée (résidu) ne suit pas la distribution théorique à un seuil de confiance donné.

Par conséquent, tout processus de détection de faute de mesure s'appuiera sur :

1. des hypothèses stochastiques de distribution de l'erreur de mesure
2. une compensation par moindres carrés en introduisant un modèle liant les observations entre elles et instaurant ainsi une redondance de l'information mesurée
3. une analyse des résidus de mesure par utilisation d'un test en inférant sur la nature erronée ou non de la mesure

On postule une distribution normale de l'erreur de mesure. Toutefois, ce choix n'est ni anodin ni indispensable. La physique de l'observable en métrologie est telle qu'en multipliant les observations, on se place d'emblée dans les conditions d'application du théorème de la limite centrale (Papoulis, 1991;

Monfort, 1996). D'où le choix de la loi normale par rapport à toute autre distribution. Par ailleurs, et c'est d'ailleurs une force des moindres carrés, ceux-ci ne présupposent aucune distribution de l'erreur de mesure. La seule hypothèse de nature statistique que leur usage nécessite est l'absence de biais des observations ainsi que la connaissance du moment d'ordre 2. Par conséquent, on peut très bien bâtir des tests de détection sur la base de critères non paramétriques. C'est ainsi que l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev (Monfort, 1996)

$$\Pr(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (\text{V.27})$$

est parfaitement utilisable pour mener à bien des tests sous les hypothèses minimales évoquées plus haut. Naturellement, la sensibilité du test ainsi bâti s'en trouve dégradée, comme on le verra un peu plus loin.

Supposons que l'on traite par moindres carrés le système d'équations d'observation  $AX = Y$  sous les hypothèses stochastiques<sup>6</sup>

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(A\mathbb{E}(X), \sigma_0 \Sigma) \quad (\text{V.28})$$

où  $\sigma_0$  est inconnue. L'estimateur des moindres carrés est donné par

$$\begin{cases} \hat{X} &= (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} Y \\ \text{var}(\hat{X}) &= \sigma_0 (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

Les résidus de mesures sont reliés aux observations par la relation

$$\begin{aligned} \hat{V} &= A\hat{X} - Y \\ &= (A(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} - I) Y \end{aligned}$$

Ce qui permet de calculer la variance des résidus

$$\text{var}(\hat{V}) = \sigma_0 (\Sigma - A(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T) \quad (\text{V.30})$$

Par conséquent, sous les hypothèses (V.28),  $\hat{V} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_0 (\Sigma - A(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T))$ . Toujours sous les hypothèses (V.28), on montre (Sillard, 1998a) que  $\frac{\sigma_0}{\sigma_0} (n - p) \hookrightarrow \chi^2(n - p)$ <sup>7</sup>, en vertu de quoi,

$\frac{\Gamma_i(\hat{V})}{\sqrt{\sigma_0} \sqrt{\Gamma_{i,i}(\Sigma - A(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T)}} \in T(n - p)$ <sup>8</sup>. On parle alors de résidus « studentisé ».

Il s'agit donc de savoir si une mesure est sans biais ou si elle est biaisée. Pour cela, on va s'appuyer sur le résidu qui est un estimateur sans biais de l'erreur de mesure et tester deux hypothèses contradictoires :

$$\begin{cases} H_0 &: \mathbb{E}(\Gamma_i(\hat{V})) = 0 \\ H_1 &: \mathbb{E}(\Gamma_i(\hat{V})) \neq 0 \end{cases}$$

<sup>6</sup> $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  désigne la loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma$

<sup>7</sup> $\chi^2(u)$  désigne la loi du  $\chi^2$  à  $u$  degrés de liberté

<sup>8</sup> $T(u)$  désigne la loi de Student à  $u$  degrés de liberté

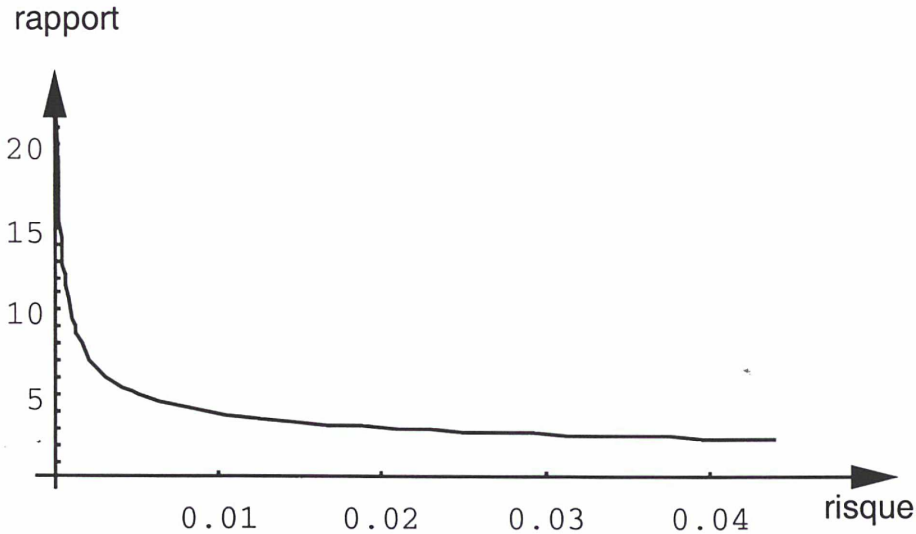


FIG. V.1: Rapport des fractiles  $1/\sqrt{\alpha}$  et  $n_{1-\alpha/2}$  en fonction du risque  $\alpha$

On se donne un risque de première espèce  $\alpha$  du test. On désigne par  $t_{1-\alpha}^{n-p}$  le fractile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi  $T(n - p)$ , et le processus de décision conduit à rejeter  $H_0$  au niveau  $\alpha$  lorsque

$$\frac{|\Gamma_i(\hat{V})|}{\sqrt{\hat{\sigma}_0} \sqrt{\Gamma_{i,i}(\Sigma - A(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T)}} \geq t_{1-\alpha}^{n-p} \quad (\text{V.31})$$

Revenons ici à nos considérations sur la statistique non paramétrique. Prenons un risque de première espèce de 5% ; le fractile de la loi de Student d'ordre 97.5% est, lors d'une forte redondance, très proche du fractile de la loi normale  $n_{1-\frac{5\%}{2}} = 1.96$ . De l'inégalité (V.27), on tire  $\Pr\left(\frac{|X - \mathbb{E}(X)|}{\sigma} \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}$ , d'où on conclut que le fractile associé à un risque de 5% est  $1/\sqrt{0.05} = 4.47$ . Cette dernière quantité comparée à 1.96 montre que le seuil de détection des fautes de mesures est plus stricte si l'on postule une distribution normale de l'erreur de mesure que si l'on ne fait aucune hypothèse.

Du reste, le rapport des deux fractiles  $n_{1-\alpha/2}$  et  $1/\sqrt{\alpha}$  (la loi normale par rapport à statistique non paramétrique) augmente à mesure que le risque diminue (cf. figure V.1). Cette propriété indique que la distribution normale apporte une information majeure sur la « queue de distribution » : la probabilité de tirages extrêmes est plus faible dans le cas de la loi normale que dans le cas général.

Ainsi, le choix de la distribution de l'erreur de mesure est un élément majeur du processus de décision.

Par ailleurs, il est important d'être conscient que si une mesure est biaisée, la

détection basée sur les résidus conduira éventuellement à en détecter d'autres par le simple jeu des corrélations entre résidus (introduites par le modèle).

Il est donc très utile, lorsque plusieurs observations font l'objet d'une détection par le test précédent, d'observer les corrélations entre les résidus correspondants.

Un autre point à retenir est que l'estimateur des moindres carrés peut être dégradé dans le cas où une observation est fautive. Par conséquent, le test lui-même peut être dégradé. Ainsi, si une observation est sujette à caution, une méthode efficace peut être de l'ôter du calcul, d'ajuster une valeur pour l'estimateur des moindres carrés indépendante de cette observation et d'effectuer un test spécifique à cette observation, compte tenu de la nouvelle valeur compensée.

Le risque de première espèce est fixé par l'utilisateur à la hauteur de  $\alpha$  (généralement,  $\alpha = 5\%$ ,  $1\%$ ,  $0.5\%$ , ...).

Le risque de deuxième espèce dépend, quant à lui, de la magnitude de la différence d'espérance que l'on considère comme significative. Il peut être parfois assez intéressant de l'estimer, même si l'opération est assez lourde et sans influence directe sur la façon de traiter le problème.

Imaginons pour finir que l'on veuille tester la présence d'un biais pour un sous-lot de résidus simultanément. On note  $v$  ce sous-lot et  $\sigma_0 Q$  la matrice de variance extraite de la variance des résidus (équation V.30) correspondant à  $v$ . Dans ce cas, on montre sans difficultés (Tassi, 1992) que

$$\frac{v^T Q^- v}{\sigma_0} \hookrightarrow \chi^2(\text{rg}(Q))$$

où  $Q^-$  désigne une inverse généralisée (cf. chapitre III et annexe B). On suppose que  $\sigma_0$  est estimée par  $\widehat{\sigma}_0$ , de sorte que

$$\frac{v^T Q^- v}{\text{rg}(Q) / \widehat{\sigma}_0} \hookrightarrow \mathcal{F}(\text{rg}(Q), n - p) \quad (\text{V.32})$$

où  $\mathcal{F}(p, q)$  désigne la loi de Fisher-Snedecor à  $p, q$  degrés de liberté.

## 4.2. Estimation robuste

### 4.2.1. Généralités

Le thème de l'estimation robuste est un thème très vaste qu'il n'est pas question d'étudier ici en détail. Néanmoins, en raison de son importance croissante dans les compensations géodésiques, il est utile de l'identifier comme un outil à part entière des réalisations de systèmes de référence. En outre, la méthode de Mallows et Schweppe (Rousseeuw et Leroy, 1987; Wilcox, 1997) présentée au paragraphe 4.2.3. a été utilisée pour le calcul du pôle de rotation

de la plaque tectonique sud-américaine dont la compensation posait problème avec les techniques classiques (cf. §3.2., chapitre IV). Les compensations par moindres carrés souffrent du manque de robustesse de la méthode : une variation faible dans la population d'observations traitée peut engendrer des variations fortes dans l'estimateur des moindres carrés. Des techniques ont donc été développées en vue de réduire la sensibilité de l'estimateur des moindres carrés aux changements mineurs dans la population traitée.

L'estimation de paramètres  $X$  liés à des observations  $Y$  via un modèle linéaire  $A$  est basée sur la minimisation d'une fonction coût

$$\min_x \varphi(X) = \sum_i \rho(A_i X - Y_i) \quad (\text{V.33})$$

où  $A_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ . Dans le cas des moindres carrés,  $\rho(x) = \frac{1}{2}x^2$ . La fonction  $\rho$  doit posséder quelques propriétés complémentaires, comme la convexité par exemple, laquelle permet d'assurer l'unicité du minimum obtenu. Si le critère des moindres carrés est un critère peu robuste, il existe d'autres normes de  $\mathbb{R}^n$  ( $\dim Y = n$ ) qui le sont davantage. En particulier, la norme  $\mathcal{L}_1$  ( $\rho(x) = |x|$ ) est un critère assez robuste. Néanmoins la fonction  $|x|$  n'est pas dérivable en 0, de sorte que minimiser  $\varphi(X) = \sum_i |A_i X - Y_i|$  n'est pas aisé : les méthodes usuelles de convergence de type Newton-Raphson ne peuvent s'appliquer et l'on est contraint d'utiliser des méthodes issues de la théorie des graphes, comme la méthode du simplexe (Barrodale et Roberts, 1973; Barrodale et Roberts, 1978; Hiriart-Urruty, 1998; Borgwardt, 1987).

Ces méthodes sont coûteuses en temps de calcul alors qu'il est possible de bâtir des critères proches de la norme  $\mathcal{L}_1$  et qui restent différentiables. C'est précisément la philosophie des techniques développées par P. J. Huber (Huber, 1973; Huber, 1981) et connues sous le nom des M-estimateurs de Huber.

Plus récemment, se sont développés dans nos disciplines, l'astrométrie en particulier, des tentatives en vue de rendre plus robustes les techniques d'assimilation de données. Un terrain d'étude particulièrement adapté a été trouvé dans les données Hipparcos, satellite astrométrique lancé en 1993 en vue de l'établissement d'un nouveau catalogue d'étoile de qualité jusqu'alors inégalée. On peut citer les travaux de M. Bougeard et J. F. Bange pour les petites planètes d'Hipparcos (Bougeard, 1997a; Bange et al., 1996; Bougeard, 1996; Bougeard et Caquineau, 1996; Bange, 1998; Michelot et Bougeard, 1994). Ces études ont concerné l'utilisation des M-estimateurs et la norme  $\mathcal{L}_1$  pour la réduction de données très délicates à traiter car ces lots de données comportent systématiquement des points de forte influence sur l'inférence, et éventuellement des fautes de mesures (cf. ci-après pour la signification de ces concepts).

Concernant les M-estimateurs de Huber, l'idée consiste à associer aux gros résidus de mesure un critère dérivé de la norme  $\mathcal{L}_1$  alors que pour les petites valeurs des résidus, le critère des moindres carrés demeure le critère adéquat.



En particulier, cette méthode permet de conserver la forme explicite des estimateurs de la variance ainsi que les équations normales. Ainsi, un tel critère pourra être de la forme

$$\rho(x) = \begin{cases} c|x| - \frac{1}{2}c^2 & \text{si } x \geq c \text{ ou } x \leq -c \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } -c \leq x \leq c \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

on note que  $\rho(x)$  est dérivable et que  $\psi(x) = \frac{d\rho}{dx}$  s'exprime par

$$\psi(x) = \max[-c, \min(x, c)] \quad (\text{V.35})$$

Le tracé de  $\rho$  est donné à la figure (V.2).

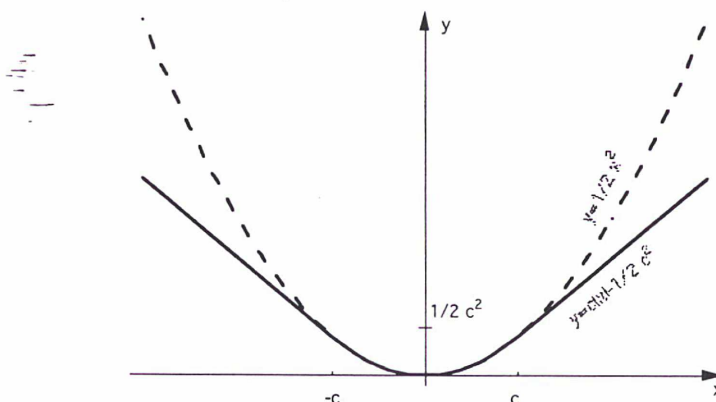


FIG. V.2: Tracé de  $\rho(x)$ , critère à minimiser pour les M-estimateurs de Huber

On constate qu'avec un système de type norme  $\mathcal{L}_1$ , le poids donné aux gros résidus avec une fonction  $\rho(x) = |x|$  est nettement moins important, dans la fonction coût, que celui qu'ils auraient en appliquant un critère ordinaire de norme  $\mathcal{L}_2$ .

Les paragraphes ci-après proposent deux algorithmes élaborés par P. J. Huber (Huber, 1981) et R. R. Wilcox (Wilcox, 1997), le second étant plus raffiné que le premier, mais aussi plus gourmand en temps de calcul. Ces deux algorithmes sont illustrés par des exemples très simples en régression linéaire.

Le premier lot de données traité concerne une régression à 20 points uniformément répartis en abscisse, et le premier point est affecté d'une erreur égale à 30 fois l'erreur standard de la population. Un graphique de l'estimation par moindres carrés est donné à la figure V.3. La table V.6 donne les résultats de l'ajustement.

Un second lot de données concerne toujours une régression à 20 points, mais l'abscisse du point faux est très décalée par rapport aux autres points de la régression (cf. figure V.4). L'erreur introduite est également 30 fois le bruit de

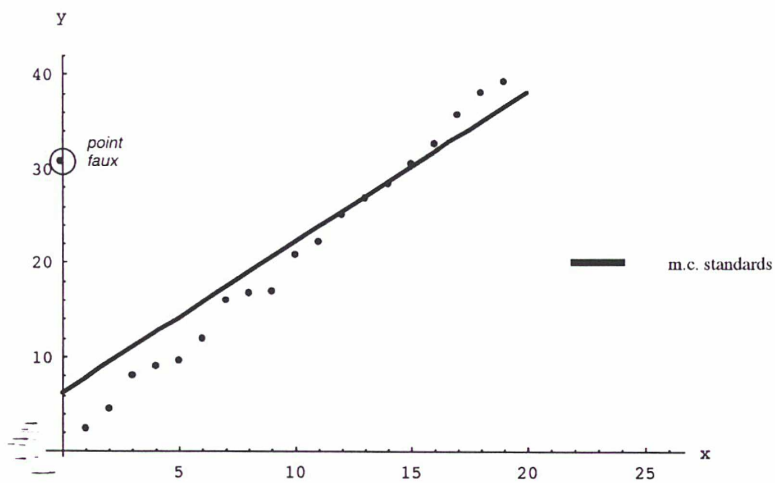


FIG. V.3: Régression linéaire par moindres carrés ; données réparties uniformément en abscisse

	$a$	$b$
vrai	2	1
m.c sans faute	$2.0 \pm 0.03$	$0.61 \pm 0.36$
m.c avec faute	$1.6 \pm 0.26$	$6.2 \pm 2.9$

TAB. V.6: Valeur des coefficients de la régression  $y = ax + b$  ; données réparties uniformément en abscisse

	$a$	$b$
vrai	2	1
m.c sans faute	$2.0 \pm 0.02$	$0.88 \pm 0.22$
m.c avec faute	$1.5 \pm 0.06$	$6.0 \pm 0.9$

TAB. V.7: Valeur des coefficients de la régression  $y = ax + b$  ; abscisse décalée du point faux

mesure standard. La table V.7 montre le résultat de l'estimation par moindres carrés en présence de faute ou non

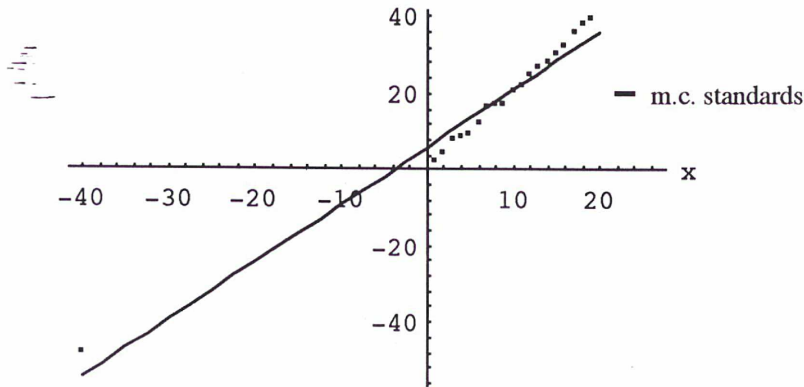


FIG. V.4: Régression linéaire par moindres carrés ; abscisse décalée du point faux

Dans tous les cas, l'estimateur des moindres carrés est très sensible aux valeurs aberrantes. Dans le cas de l'abscisse décalée, l'estimateur est encore plus sensible à cette faute de mesure, et on verra un peu plus loin qu'il est possible de construire une mesure de l'influence qu'a une observation sur les valeurs compensées. Cette mesure permettra de s'affranchir des problèmes liés à ce type d'observation.

#### 4.2.2. Algorithme de Huber

Cet algorithme est élaboré dans le cadre de la théorie des M-estimateurs de Huber. Il vise simplement à limiter l'impact des gros résidus sur la régression. L'algorithme est itératif puisqu'il n'y a pas de solution explicite à un problème de type (V.33). Le seuil d'arrêt est bâti sur un critère de stabilité entre deux itérations de l'estimateur de la solution. L'algorithme consiste à déterminer la

racine de la fonction

$$\sigma \sum_i \psi \left( \frac{\widehat{V}_i}{\sigma} \right) \quad (V.36)$$

où  $\widehat{V}$  est le vecteur des résidus de mesures et  $\sigma$  une mesure d'échelle correspondant au facteur unitaire de variance.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{X}^{(0)} = (A^T A)^{-1} A^T Y \\ \sigma^{(0)} = 1 \\ \widehat{V}^{(0)} = A \widehat{X}^{(0)} - Y \\ \Gamma_i(\widehat{V}_N^{(0)}) = \psi \left( \frac{\Gamma_i(\widehat{V}^{(0)})}{\sigma^{(0)}} \right) \sigma^{(0)} \end{array} \right.$$

Tant que  $\|\widehat{\tau}\| > \varepsilon(n, p)$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^{(i)} = \text{Sigma}(\widehat{V}^{(i)}, m) \\ \widehat{\tau} = (A^T A)^{-1} A^T \widehat{V}_N^{(i-1)} \\ \widehat{X}^{(i)} = \widehat{X}^{(i-1)} + \widehat{\tau} \\ \widehat{V}^{(i)} = -A \widehat{X}^{(i)} + Y \\ \Gamma_j(\widehat{V}_N^{(i)}) = \psi \left( \frac{\Gamma_j(\widehat{V}^{(i)})}{\sigma^{(i)}} \right) \sigma^{(i)} \\ m = \frac{\text{nbre de composantes nulles de } [\widehat{V}^{(i)} - \widehat{V}_N^{(i)}]}{n} \end{array} \right\}$$

La fonction  $\psi$  est construite selon (V.34) en prenant  $c = 1.5$ , ainsi que suggéré par Huber. Il est clair que lorsque  $c \rightarrow \infty$ , le critère utilisé est celui des moindres carrés ; lorsque  $c \rightarrow 0$ , le critère utilisé est celui de la norme  $\mathcal{L}_1$ . Ceci étant, plus  $c$  est petit, plus le critère est éloigné des moindres carrés ordinaires et plus le nombre d'itérations est grand. De sorte qu'il faut trouver un compromis entre l'efficacité du procédé et le temps de calcul. Le facteur  $c = 1.5$  semble être une valeur indiquée pour un tel compromis. Dans le cas d'une distribution normale du résidu ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ), 87% des résidus sont théoriquement inchangés.

La fonction *Sigma* indiquée dans l'algorithme est définie de la façon suivante : la variance de  $\widehat{X}$  est donnée par

$$\text{cov}(\widehat{X}) = \frac{K^2}{n-p} \frac{\sum_i \psi(\Gamma_i(\widehat{V}))^2}{\left[ \sum_i \psi'(\Gamma_i(\widehat{V}))/n \right]^2} (A^T A)^{-1} \quad (V.37)$$

Si on désigne par  $m$  la fréquence des résidus inchangés, par définition

$$m = \frac{\sum_i \psi'(\Gamma_i(\widehat{V}))}{n} \quad (\text{car } \psi'(u) = 1 \text{ si } u \in [-c, c] \text{ et } 0 \text{ ailleurs})$$

et

$$K = 1 - \frac{p}{n} \frac{(1-m)}{m} \quad (V.38)$$

Par conséquent ( $\sigma \equiv \sigma$ )

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{p}{n} \frac{(1-m)}{m}\right)^2 \frac{1}{m^2(n-p)} \sum_i \psi(r_i)^2 \quad (\text{V.39})$$

#### 4.2.3. Algorithme de Wilcox, Mallows et Schweppe (WMS)

Dans l'algorithme précédent, aucune repondération de l'information n'était prévue. L'algorithme WMS est lui basé sur une pondération qui dépend à la fois de l'ampleur du résidu associé à l'observation considérée et de l'influence qu'a l'observation dans le calcul (Wilcox, 1997; Huber, 1981). En effet, il est possible que le modèle liant les observations aux paramètres soit ainsi configuré que certaines observations revêtent une importance première dans le calcul et que l'estimateur soit extrêmement sensible à un changement dans ces observations.

Pour quantifier cette dépendance, introduisons la matrice de prédiction

$$H = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (\text{V.40})$$

qui est telle que<sup>9</sup>

$$\hat{Y} = HY \quad (\text{V.41})$$

corresponde au vecteur des observations compensées. On observe alors que  $H$  est une matrice de projection (donc  $0 \leq \Gamma_{ii}(H) \leq 1$ ) et que

$$\frac{\partial \Gamma_i(\hat{Y})}{\partial \Gamma_j(Y)} = \Gamma_{ij}(H) \quad (\text{V.42})$$

Ainsi, le coefficient  $\Gamma_{ii}(H)$  est une mesure de l'influence de l'observation  $i$  sur l'observation compensée  $i$ , via l'estimateur des moindres carrés. Si une faute survient sur une observation où  $\Gamma_{ii}(H)$  est grand (i. e. proche de 1), alors il sera impossible de la détecter puisque l'observation compensée est elle-même très dépendante de l'observation originale. On appelle ces observations « High leverage points » (points de forte influence) (Chatterjee et Hadi, 1988). Une pondération dont l'objectif est de réduire les risques de présence de faute de mesure doit impérativement limiter l'impact, sur l'estimateur des moindres carrés, de ces points de forte influence. C'est précisément l'objectif de l'algorithme WMS.

La fonction coût à minimiser est de la forme

$$\sum_i w_i V_i^2 \quad (\text{V.43})$$

<sup>9</sup> $H$  est appelée « hat matrix » en anglais car elle « met un chapeau sur  $Y$  ».

où les pondérations sont obtenues en fonction des mesures d'influence de chacune des observations sur la solution combinée. L'algorithme est le suivant ( $h_{ii} \equiv \Gamma_{ii}(\widehat{H})$ ) :

Tant que  $\|\delta\widehat{X}\| > \varepsilon(n, p)$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = A\widehat{X} - Y \\ M_k = \text{médiane des } (n - p) \text{ plus grandes valeurs des résidus } V \\ \tau = 1.48M_k \\ e = \frac{\widehat{V}}{\tau} \\ w_i = \frac{\sqrt{1 - h_{ii}}}{e_i} \psi \left( \frac{e_i}{\sqrt{1 - h_{ii}}} \right) \text{ où } \psi \text{ la fonction (V.34) avec } c = 2\sqrt{\frac{p+1}{n}} \\ \widehat{X} = [A^T \text{diag}(w_i)A]^{-1} A^T \text{diag}(w_i)Y \\ \delta\widehat{X} = \widehat{X}^{(i)} - \widehat{X}^{(i-1)} \\ \sigma = \sqrt{\frac{V^T \text{diag}(w_i)V}{n - p}} \end{array} \right\}$$

On observe dans l'algorithme précédent, que les points de forte influence ( $h_{ii}$  proche de 1) sont dépondérés, pour peu qu'ils soient associés à des résidus élevés. Des variantes de cet algorithme existent et consistent à minimiser la fonction coût

$$\sum_i w_i \rho \left( \frac{V_i}{w_i \tau} \right) \quad (\text{V.44})$$

où  $\rho$  est la fonction (V.34). Dans ce cas, on se retrouve à la tête d'un algorithme synthèse de l'algorithme de Huber et WMS.

Les pondérations proposées dans l'algorithme précédent proviennent des travaux de Mallows et Schweppe.

Enfin, il faut souligner que pour une même performance, l'algorithme WMS est plus coûteux en calcul que l'algorithme de Huber puisqu'il nécessite, à chaque itération, un recalcul du système d'équations normales ainsi que son inversion.

#### 4.2.4. Performances numériques des algorithmes précédents

On reprend les lots de données déjà évoqués au paragraphe 4.2.1.. Les deux algorithmes précédents ont été testés sur ces deux lots de données. On trouvera aux tables (V.8) et (V.9) les résultats obtenus sur chacun des lots.

Les performances d'un estimateur en norme  $\mathcal{L}_1$  ont également été indiquées. Cet estimateur est basé sur l'algorithme du simplexe. L'estimation en norme  $\mathcal{L}_1$  est alors construite à partir de contraintes inégalités. La pose du problème est conforme à (Barrodale et Roberts, 1973).

Décaler en abscisse le point faux revient à lui donner davantage d'influence dans le calcul. On trouvera à la figure (V.5) le tracé des mesures d'influence  $h_{ii}$

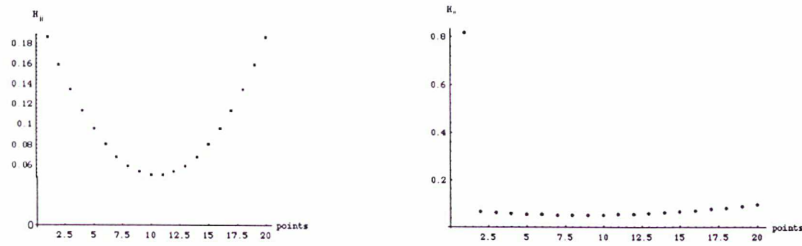


FIG. V.5: Tracé des mesures d'influence pour les deux lots de données

	$a$	$b$	nbre d'itérations	s CPU
vrai	2	1		
m.c avec faute	$1.6 \pm 0.26$	$6.2 \pm 2.9$	1	0.03
Huber	$2.0 \pm 0.04$	$0.78 \pm 0.41$	8	0.7
WMS	$2.0 \pm 0.05$	$0.57 \pm 0.62$	6	3.3
Norme $\mathcal{L}_1$	2.0	0.45		1.2

TAB. V.8: Valeur des coefficients de la régression  $y = ax + b$  à l'aide des algorithmes robuste ; données réparties uniformément en abscisse

	$a$	$b$	nbre d'itérations	s CPU
vrai	2	1		
m.c avec faute	$1.5 \pm 0.06$	$6.0 \pm 0.89$	1	0.03
Huber	$1.7 \pm 0.04$	$3.8 \pm 0.6$	34	2.9
WMS	$2.0 \pm 0.04$	$0.76 \pm 0.47$	8	4.5
Norme $\mathcal{L}_1$	2.0	1.12		1.4

TAB. V.9: Valeur des coefficients de la régression  $y = ax + b$  à l'aide des algorithmes robuste ; abscisse décalée du point faux

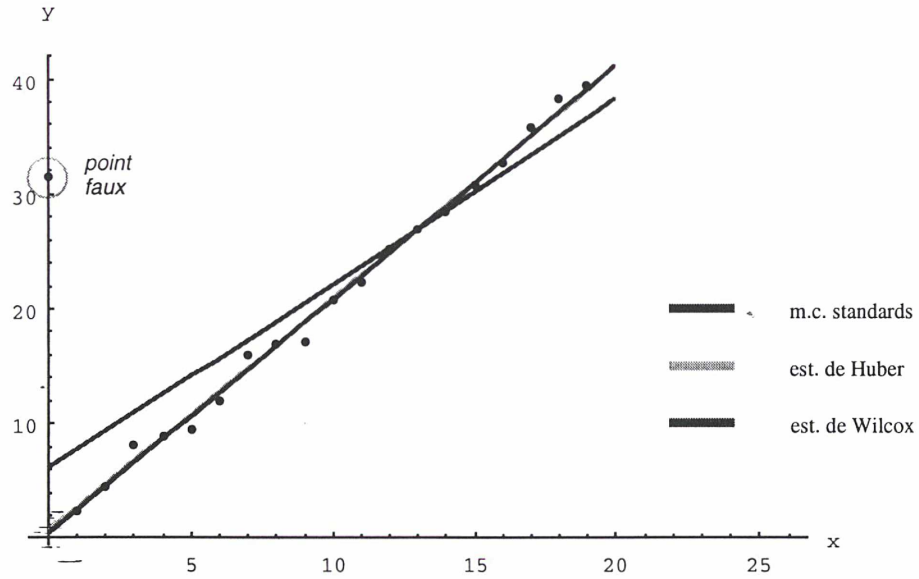


FIG. V.6: Régression linéaire par des méthodes robustes ; données réparties uniformément en abscisse

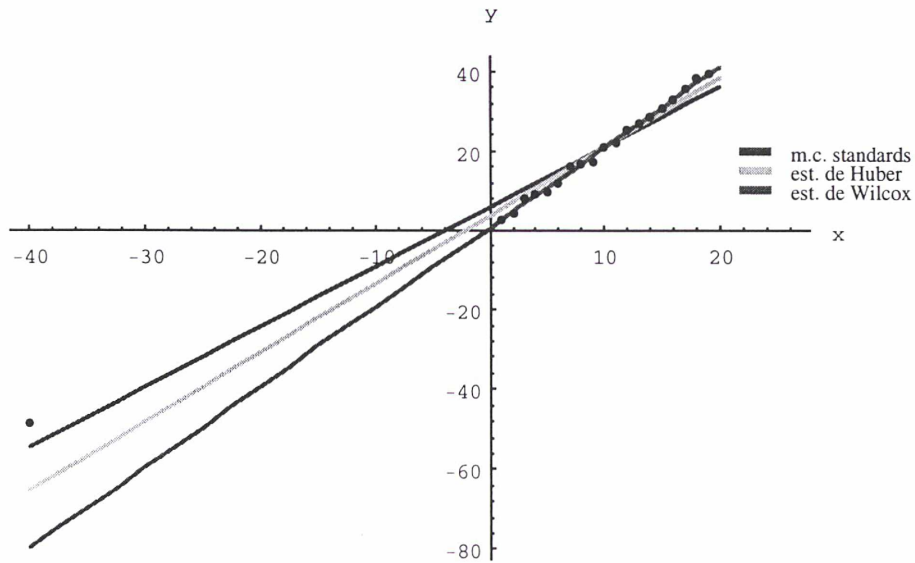


FIG. V.7: Régression linéaire par des méthodes robustes ; abscisse décalée du point faux



évoquées au paragraphe précédent et servant de support à l'algorithme WMS. Dans le cas où le point faux est de forte influence dans le calcul, l'algorithme de Huber ne fonctionne plus convenablement, ainsi que le montrent les résultats de la table (V.9) et la figure (V.7). Par contre, lorsque le point faux a la même influence dans le calcul que les autres observations, l'algorithme en question fonctionne parfaitement.

L'algorithme WMS qui est construit pour réduire l'impact des points influents dans la régression fonctionne très bien, même dans le cas où le point faux est le plus influent. Par contre, lorsque toutes les observations ont la même influence dans le calcul, il semble que les performances numériques de cet algorithme soient moindres que celle de celui de Huber (comparer les tables V.8 et V.9). Il faut ajouter, concernant le temps de calcul, que l'algorithme de Huber est moins coûteux que WMS, car il ne nécessite pas le recalcul de l'équation normale à chaque itération, ce qui est le cas pour l'algorithme WMS.

—En conclusion, les algorithmes d'estimation robuste sont de très bons outils pour détecter les fautes de mesures et devraient, normalement, conduire à des estimations plus fiables que les moindres carrés ordinaires. L'enseignement concernant les points influents est également important : l'analyse du résidu d'une telle observation ne permet jamais de conclure qu'une faute de mesure peut s'y être glissée si l'on n'a pas détecté au préalable son influence dans la régression.

## 5. Critères de qualité d'un repère de référence terrestre

Les compensations de réalisations de systèmes de référence terrestres, telles qu'elles sont pratiquées au bureau central de l'IERS, s'appuient sur le « mélange » de populations d'origine variée. Outre les problèmes d'hétéroscédasticité que cela occasionne et auxquels il faut remédier (cf. §3.), il convient, par le biais de la compensation, d'évaluer la qualité des diverses populations manipulées.

Les populations concernées sont des jeux de coordonnées et vitesses de points, de sorte qu'une « erreur moyenne quadratique » en coordonnées et en vitesse est recherchée pour chaque jeu de coordonnées – vitesses introduit dans le calcul de compensation. Il s'agit donc de construire un estimateur de la qualité (i.e. de l'erreur moyenne quadratique), variable que nous allons définir de la manière suivante :

Supposons que nous soyons en présence de  $n$  populations distinctes d'observations non biaisées,  $(Y_1, \dots, Y_n)$  deux à deux indépendantes ( $\text{var}(Y_i) =$

$\Sigma_i$ ). La  $i^{\text{me}}$  population sera telle que

$$\begin{cases} Y_i = \dot{Y}_i + \varepsilon_i \\ \dot{Y}_i = \mathbb{E}(Y_i) \end{cases} \quad (\text{V.45})$$

Avec l'écriture précédente,  $\varepsilon_i$  est l'erreur de mesure associée à la  $i^{\text{me}}$  population.

Sous l'hypothèse d'absence de biais des observations, on a :

$$\hat{V}_i = \sum_{j=1}^n A_i v A_j^T \Sigma_j^{-1} \varepsilon_j - \varepsilon_i \quad (\text{V.46})$$

où  $\hat{V}_i$  est le résidu de la compensation par moindres carrés du système des équation d'observation  $A_i X = Y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  associé à la population  $i$ .  $v$  est l'inverse de la matrice normale ( $v = [\sum_i A_i^T \Sigma_i^{-1} A_i]^{-1}$ ). Le résidu est donc lié à l'erreur de mesure via :

$$\begin{cases} \hat{V}_i = \sum_j P_{ij} \varepsilon_j \\ P_{ij} = A_i v A_j^T \Sigma_j^{-1} - \delta_{ij} I \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

On définit l'erreur moyenne quadratique pondérée par la matrice  $S$  par :

$$emq_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_i^T S \varepsilon_i}{\text{tr} S}} \quad (\text{V.48})$$

On cherche à construire un estimateur de  $emq_i$  sur la base du résidu lié à la  $i^{\text{me}}$  population  $\hat{V}_i$ . Pour cela, calculons

$$\hat{V}_i^T S \hat{V}_i = \sum_{j,k} \varepsilon_j^T P_{ij}^T S P_{ik} \varepsilon_k$$

Sous les hypothèses  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$  et  $\text{var}(\varepsilon_i) = \Sigma_i$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{V}_i^T S \hat{V}_i) &= \sum_{j,k} \text{tr} P_{ij}^T S P_{ik} \mathbb{E}(\varepsilon_k \varepsilon_j^T) \\ &= \sum_j \text{tr} P_{ij}^T S P_{ij} \mathbb{E}(\varepsilon_j \varepsilon_j^T) \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_i^T P_{ii}^T S P_{ii} \varepsilon_i) + \sum_{j \neq i} \text{tr} P_{ij}^T S P_{ij} \Sigma_j \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_i^T S \varepsilon_i) + \text{tr}(A_i^T S A_i v) - 2 \text{tr}(A_i^T S A_i v) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(\hat{V}_i^T S \hat{V}_i) = \mathbb{E}(\varepsilon_i^T S \varepsilon_i) - \text{tr}(A_i^T S A_i v) \quad (\text{V.49})$$

On observe qu'un estimateur de la forme  $\left[ \frac{\hat{V}_i^T S \hat{V}_i}{\text{tr} S} \right]^{1/2}$  serait nécessairement sous-évalué. Il convient donc de corriger cet estimateur afin d'aboutir à un estimateur convenable.

Dans la suite, on suppose en première approximation, que  $S$  est équivalente<sup>10</sup> à  $\Sigma_i^{-1}$ . En particulier, cette hypothèse est valable lorsque  $S$  correspond à la diagonale de l'inverse de variances. On construit alors l'erreur moyenne quadratique pondérée.

Effectuer une telle approximation revient, avec les notations du paragraphe (3.1.2.) à écrire

$$\begin{cases} A_i^T S A_i v \simeq N_i v \\ \widehat{V}_i^T S \widehat{V}_i \simeq \widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i \end{cases} \quad (\text{V.50})$$

de telle sorte que

$$\text{tr}(A_i^T S A_i v) \equiv (n_i - f_i) \times 1$$

Sous l'hypothèse  $\mathbb{E}(Y_i) = \dot{Y}_i$  et  $\text{var}(Y_i) = \Sigma_i$  pour tout  $i$ ,  $\mathbb{E} \left[ \frac{\widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i}{f_i} \right] = 1$  (équation V.20) et donc

$$\text{tr}(A_i^T S A_i v) = \frac{n_i - f_i}{f_i} \mathbb{E}(\widehat{V}_i^T S \widehat{V}_i) \quad (\text{V.51})$$

où  $n_i$  est le nombre d'observations dans la population  $i$ .

Finalement, on aboutit, à l'aide de l'équation (V.49), à :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i^T S \varepsilon_i) = \left( 1 + \frac{n_i - f_i}{f_i} \right) \mathbb{E}(\widehat{V}_i^T S \widehat{V}_i)$$

soit

$$\widehat{emq}_S = \sqrt{\frac{n_i}{f_i} \frac{\widehat{V}_i^T S \widehat{V}_i}{\text{tr} S}} \quad (\text{V.52})$$

est un estimateur sans biais de  $emq$ , compte tenu des approximations effectuées.

Il est évident que les approximations (V.50) ne sont plus valables lorsque  $S = I$ . Néanmoins, les ordres de grandeur induits sur (V.52) sont à retenir :

$$\widehat{emq}_I = \sqrt{\frac{V_i^T V_i}{f_i}} \quad (\text{V.53})$$

et peuvent, le cas échéant, compléter l'estimateur de l'erreur moyenne quadratique pondérée par une erreur moyenne quadratique non pondérée. Il faut noter que cette dernière n'a de sens que si les observations sont de même grandeur physique et de variance identique. En effet, si tel est le cas,  $S = kI$ ,  $k \in \mathbb{R}_*^+$ , et (V.50) devient :

$$\begin{cases} A_i^T A_i v = \frac{1}{k} N_i v \\ \widehat{V}_i^T \widehat{V}_i = \frac{1}{k} \widehat{V}_i^T \Sigma_i^{-1} \widehat{V}_i \end{cases} \quad (\text{V.54})$$

<sup>10</sup>On pourra par exemple écrire que  $S \Sigma_i = I + \varepsilon \|S\|$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$  pour une certaine norme matricielle.

Les termes multiplicatifs  $k$  s'équilibrent, de sorte que sans hypothèses complémentaires, (V.51) est toujours vraie et (V.52) s'ensuit.

A titre d'exemple, le paragraphe suivant donne la valeur des estimateurs de l'erreur moyenne quadratique pondérée par la diagonale des variances de chacun des jeux de coordonnées utilisés dans le calcul de l'ITRF96. Ces erreurs sont exprimées en coordonnées et en vitesses qui sont considérées, du point de vue de l'estimateur précédent, comme deux populations distinctes.

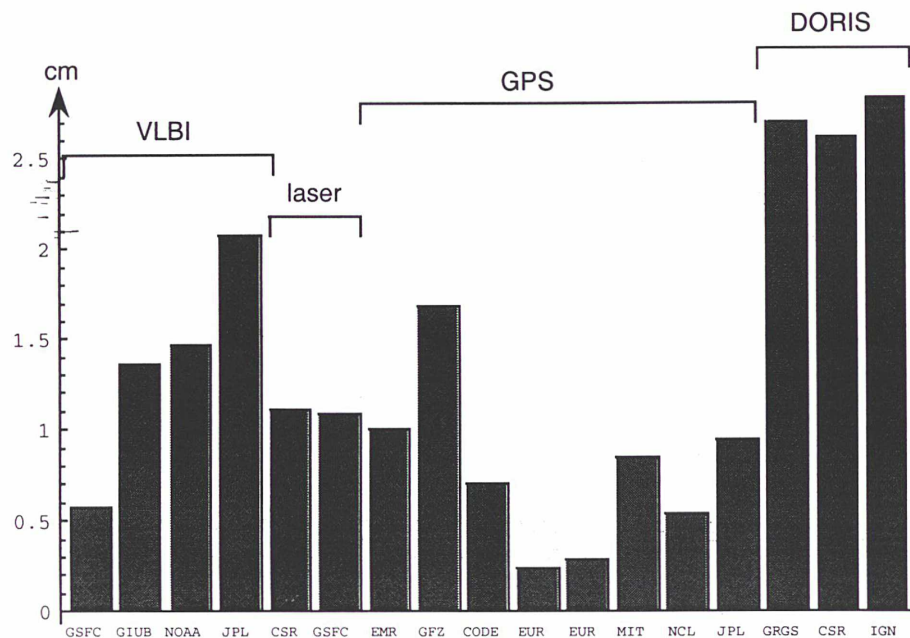


FIG. V.8: Erreur moyenne quadratique pondérée des jeux de coordonnées utilisés dans l'ITRF96 en coordonnées

L'erreur moyenne quadratique donne une idée de l'accord entre le jeu de coordonnées et l'ITRF96. Si on admet que le processus de calcul de l'ITRF est convergent vers une solution optimale (en particulier vis-à-vis des critères de variance minimale de l'estimateur), les chiffres indiqués aux figures (V.8) et (V.9) correspondent à un estimateur de la qualité de chacune des populations impliquées dans le calcul de l'ITRF96.

Il convient toutefois d'insister sur le fait que ces chiffres ne sont pas des moyennes quadratiques des résidus, lesquelles sous-évaluent l'erreur moyenne quadratique (V.48), mais sont effectivement des estimateurs sans biais de cette erreur. On vérifiera à la figure (V.10), la différence entre ces estimateurs et la moyenne quadratique  $\left[ \frac{\hat{V}_i^T S \hat{V}_i}{\text{tr}S} \right]^{1/2}$ .

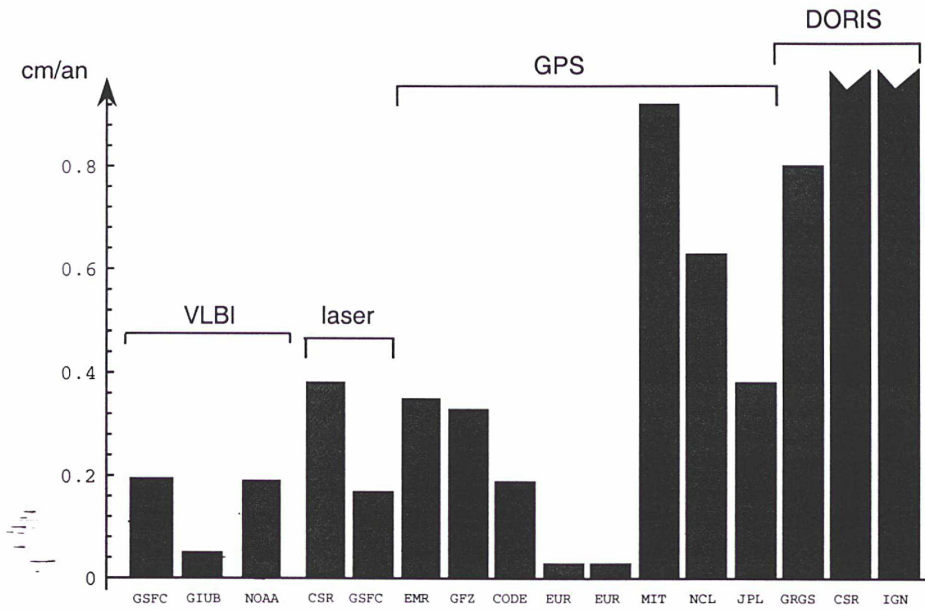


FIG. V.9: Erreur moyenne quadratique pondérée des jeux de coordonnées utilisés dans l'ITRF96 en vitesses

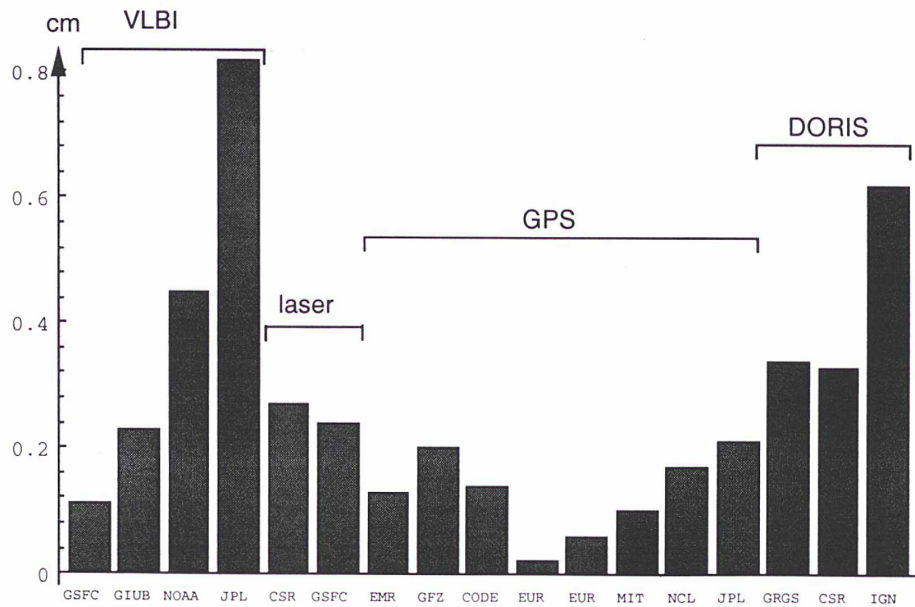


FIG. V.10: différence entre l'émq pondérée et la moyenne quadratique des résidus en position dans le calcul ITRF96

## CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de proposer un panorama d'un domaine émergent de la métrologie : les systèmes de référence terrestres. La problématique géodésique n'a finalement guère évolué depuis que les bases de cette discipline ont été posées au cours du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Clairaut puis Lagrange, Legendre et Laplace devaient y consacrer quelques unes de leurs plus belles pages (Levallois, 1988). Les réseaux géodésiques demeurent le « produit phare » de l'action des géodésiens, et si les techniques ont migré de la surface terrestre (triangulation) à quelques milliers de kilomètres d'altitude, le résultat se résume toujours en positions d'un semi de points observés. Ainsi, le problème des systèmes de référence géodésiques se pose depuis qu'on « mesure la Terre ». Néanmoins, il n'existait pas, dans le passé, de systèmes réalisés par des réseaux d'extension extra-continentale. Donc le problème de la position relative de points se posait localement et la référence était déconnectée de la géodynamique. La mesure géodésique était grossièrement insensible au centre des masses de la terre ainsi qu'à l'orientation de la planète. Ceci est aussi vrai pour les réseaux d'altitude puisque le nivellement, sensible aux accidents locaux du champ de potentiel, est très peu influencé par les grandes longueurs d'onde du champ. L'avènement des techniques spatiales, en rendant sensible la mesure géodésique au géocentre et à l'orientation de la Terre, a offert aux systèmes de référence terrestres leurs lettres de noblesse : se positionner dans un système de référence relève d'un modèle physique et plus seulement d'une convention. A cela se sont ajoutées des mesures dont la précision n'a cessé de s'améliorer. Les techniques d'analyse des systèmes de référence ainsi que leur modélisation physique ont dû s'adapter à cette amélioration. Cette thèse en témoigne. Elle succède à plus de dix années d'approfondissement des concepts et de leur adéquation à la réalité.

### **Jusqu'où cette spirale de la course à la précision se poursuivra-t-elle ?**

La géodésie terrestre, support des réseaux géodésiques du passé, possédait alors une finalité cartographique : les réseaux géodésiques constituaient l'ossature d'une cartographie nationale. Cette finalité a aujourd'hui disparu. La précision géodésique est devenue inexploitable pour la cartographie et l'on observe un déplacement des savoirs géodésiques des instituts cartographiques

vers les universités géophysiques<sup>11</sup>. C'est évidemment une tendance lourde si la géodésie ne montre pas qu'elle conserve une composante cartographique (Altamimi et Sillard, 1996).

Aujourd'hui, les mesures de géodésie spatiale permettent d'envisager une précision millimétrique du positionnement global. Cette précision est quasiment atteinte à l'issue du traitement des observations en temps différé. La réalisation des systèmes de référence terrestres est en concordance avec cette précision potentielle. Au niveau du millimètre, la « macro-métrie » rejoint la « micro-métrie » : les problèmes instrumentaux, la relation instrument-point au sol (rattachement, hauteur d'antenne), l'électronique des systèmes d'acquisition des données deviennent finalement aussi importants dans le bilan d'erreur du positionnement que la physique du signal (atmosphère, déformations). S'il a été relativement aisé d'améliorer le positionnement avec le développement de la géodésie spatiale, il semble bien que la limite du millimètre soit de nature asymptotique. Il suffit, pour s'en persuader, d'observer l'évolution de la qualité du VLBI en près de dix ans (graphique I.11) : en 1990, l'erreur moyenne identifiée dans l'ITRF était de 0.9 cm, alors qu'elle est de 0.8 cm dans l'ITRF97 (Boucher et al., 1999).

L'issue de cette apparente stagnation est à rechercher dans le temps. Non que l'accumulation d'observations dans le temps améliore la précision du positionnement à un instant donné, mais plutôt qu'elle conduise à une meilleure connaissance des comportements dans le temps des divers paramètres. En cela, la géodésie devient science des déformations. Néanmoins, cet aspect se heurte à une difficulté conceptuelle liée aux systèmes de référence terrestres.

Dans une compensation géodésique, la redondance s'appuie sur la durée de l'observation : plus elle est longue, plus la redondance est grande, mais cela suppose en contrepartie une modélisation *a priori* de la dépendance temporelle des paramètres. Dans le cas des paramètres entrant en jeu dans les systèmes de référence terrestres, cela se traduit par l'adoption d'une vitesse linéaire de déplacement. Qu'advient-il du repère conventionnel si le modèle est différent ? Le système conventionnel est modifié, donc le repère l'est aussi. Ce raisonnement dévoile un schéma en boucle : la réalisation d'un système dans le temps suppose l'adoption d'une dérive temporelle des stations observées alors que le système de référence est l'outil d'expression des dérives temporelles des positions. D'où l'ambiguïté qu'il y a à évoquer un « système de référence stable dans le temps ». Une série temporelle de jeux de coordonnées est aussi une réalisation dans le temps d'un système de référence terrestre. Son avantage est qu'elle ne nécessite pas d'hypothèse *a priori* sur la dépendance temporelle des positions de stations.

<sup>11</sup>Ce phénomène s'observe dans les pays industrialisés qui disposent d'une cartographie nationale depuis de nombreuses années. La situation est un peu différente dans les pays en voie de développement qui ont encore leur cartographie de base à élaborer.

---

**Comment rendre une série temporelle de jeux de coordonnées comparable à une autre du point de vue du système de référence ?**

Le problème n'est pas trivial mais réellement conceptuel : il est d'ailleurs l'objet du débat entre les tenants et détracteurs d'une géodésie intégrée dans laquelle les mesures devraient être combinées plutôt que les paramètres obtenus en réduction d'un calcul de géodésie spatiale. Si aucune réponse à ce jour n'est réellement satisfaisante, le débat devra être mené à son terme afin que la géodésie intègre finalement la durée d'observation dans la représentation des déformations de la Terre.

**Si la mesure des déformations permet l'exploitation de la précision millimétrique de la géodésie, elle se heurtera à la limite implacable des contraintes « micro-métrologiques ».**

L'essor des applications géodésiques est probablement à rechercher dans le temps réel où de gros progrès sont encore possibles. Aujourd'hui, le GPS avec émission de corrections différentielles permet d'atteindre une précision globale instantanée (1 m) que la géodésie atteignait avec un positionnement TRANSIT, il y a vingt ans. Dans ce domaine, la « géodésie » peut se prévaloir d'une finalité cartographique : gestion de flotte de véhicules, pilotage assisté par ordinateur et autre croisement d'information de localisation avec une base de données routière ... Tout un champ d'applications désignées par le mot « géomatique » émerge aujourd'hui. Ces techniques nécessitent un savoir-faire qui dépasse les compétences des géodésiens (télécommunications, réseaux), mais leur participation au traitement de la mesure serait certainement un gage d'amélioration de la qualité des résultats. De telles applications semblent se développer peu à peu, même si les géodésiens français les abordent avec une évidente frilosité. Pourtant, ces techniques permettraient à la géodésie de retrouver une finalité cartographique qu'elle avait perdue ces dernières années.

**Quel est alors l'avenir de systèmes de référence dans cette perspective ?**

Il est remarquable d'observer le parallélisme du développement du temps réel par rapport à ce qu'a été le développement du positionnement en temps différé, à quelques dizaines d'années d'écart. De fait, la problématique des systèmes de référence terrestres n'est pas fondamentalement modifiée par le temps réel, si ce n'est que les systèmes de référence redeviennent d'extension essentiellement locale. Il est néanmoins probable qu'à terme, on tende vers des applications globales du temps réel, ne serait-ce qu'à l'instigation des militaires. Dès lors se posera la question de la représentation des systèmes. Il est évident que cette représentation s'appuiera sur des signaux continus de positions de stations terrestres. Les séries temporelles de jeux de coordonnées entrent d'ores et déjà dans ce schéma.



## BIBLIOGRAPHIE

- Abraham R. et Mardsen J. E. (1978). *Foundations of Mechanics*. Benjamin - Cummings.
- Altamimi Z. (1990). *Combinaison de techniques spatiales pour la détermination et la maintenance d'un système de référence terrestre centimétrique*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Altamimi Z. (1998). Contribution à l'estimation d'un modèle de plaques tectoniques issu du champ de vitesses ITRF96. Publication interne MM019, LAREG.
- Altamimi Z., Boucher C., et Duhem L. (1993). The Worldwide centimetric terrestrial reference frame and its associated velocity field. *Adv. Space Res.*, 13 :11151–11160.
- Altamimi Z. et Sillard P. (1996). Le système international de référence terrestre. *Revue internationale de géomatique*, pages 305–313.
- American Geophysical Union, éditeur (1993). *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics : Earth Dynamics Geodynamics 24*. AGU.
- Argus D. et Gordon R. (1991). No-net rotation model of current plate velocities incorporating plate motion model NUVEL-1. *Geophys. Res. Lett.*, 18 :2039–2042.
- Arnaudiès J. M. et Fraysse H. (1987). *Algèbre*. Dunod.
- Aubouin J. (1992). *Tectonique des plaques – Encyclopedia Universalis*, volume 22, pages 151–160.
- Baarda W. (1973). *S-transformations and criterion matrices*. Netherlands Geodetic Commission.
- Baetslé P. L. (1969). *Cours de Géodésie théorique*. Ecole Royale Militaire de Belgique.
- Bange J. F. (1998). . Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Bange J. F., Bec-Borsenberger A., Bougeard M. L., et Caquineau C. D. (1996). Lien entre le référentiel dynamique et l'ICRS à l'aide des petites planètes Hipparcos : analyse mathématique du modèle d'estimation. In (Capitaine, 1996), pages 12–13.
- Barlier F. (1994). *Géodésie et environnement – cours de dea d'astronomie fondamentale, mécanique céleste et géodésie*. Note technique.

- Barlier F., éditeur (1996). *Compte rendu d'activité du GRGS pour 1996*. GRGS.
- Barlier F., Berger C., Falin J. L., Kockarts G., et Thuillier G. (1978). A thermospheric model based upon satellite drag data. *Ann. Geophys.*, 34 :98–24.
- Barrodale et Roberts (1973). An improved algorithm for discrete  $l_1$  linear approximation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 :839–848.
- Barrodale et Roberts (1978). An efficient algorithm for discrete  $l_1$  linear approximation with linear constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :603–611.
- Berger C., Biancale R., Ill M., et Barlier F. (1998). Improvement of the empirical thermospheric model DTM : DTM94 – a comparative review of various temporal variations and prospects in space geodesy applications. *J. of Geodesy*, 72 :161–187.
- Berrada-Baby H., Gole P., et Lavergnat L. (1988). A model for the tropospheric excess path length of radio waves from surface meteorological measurements. *Radio Science*, 23(6) :1023–1038.
- Beutler G., Bauersima I., Gurtner W., et Rothacher M. (1987). Evaluation of the 1984 alaska gps campaign with the bernese gps software. *J. Geophys. Res.*, 92 :1295–1303.
- Beutler G., Gurtner W., Rothacher M., Schildknecht T., et Bauersima I. (1986). Determination of gps orbits using double difference carrier phase observations from regional network. *Bull. Géodésique*, 60 :205–220.
- Biancale R. (1996). *Champ de gravité : réalisation et modèles*, pages 48–53. In (Barlier, 1996).
- Bjerhammar A. (1973). *Theory of errors and generalized matrix inverses*. Elsevier.
- Blaha G. (1971). Inner adjustment constraints with emphasis on range observations. Note technique 148, The Ohio State University, Department of Geodetic Science.
- Blaha G. (1982a). A note on adjustment of free networks. *Bull. Géodésique*, 56 :281–299.
- Blaha G. (1982b). Free networks : minimum norm solution as obtained by the inner adjustment constraint method. *Bull. Géodésique*, 56 :209–219.
- Blaha G. (1982c). Notes on equivalent forms of the general least-squares solution. *Bull. Géodésique*, 56 :200–230.
- Blewitt G., Heflin M. B., Webb F. H., Lindqwister U. J., et Malla R. P. (1992). Global coordinates with centimeter accuracy in the International Terrestrial Reference Frame. *Geophys. Res. Lett.*, 19 :853–856.
- Blewitt G., Kowar R. S., et Davies P. B. H. (1998). Fiducial-free Euler vectors from the GNAAC polyhedron time series. In *IGS Analysis Center workshop, Darmstadt – Germany*.

- Borgwardt K. H. (1987). *The simplex method, a probabilistic approach*. Springer-Verlag.
- Botton S., Duquenne F., Egels Y., Even M., et Willis P. (1997). *GPS : localisation et navigation*. Hermès.
- Boucher C. (1978). Relativistic correction to satellite Doppler observation. In *The mathematical structure of the Gravity Field. IAG – SSG 4 :45 meeting, Lagonissi, 1978*.
- Boucher C. (1979). Les transformations géométriques entre systèmes géodésiques. Publication interne RT/G 3, IGN/SGN.
- Boucher C. (1984). Realization of the BIH terrestrial system. In *International Symposium on Space Techniques for Geodynamics, 9–13 July 1984, Sopron, Hungary*.
- Boucher C. (1986). Relativistic effects in geodynamics. In Kovalevsky J. et Brumberg V. A., éditeurs, *Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry*, pages 241–253. International Astronomical Union.
- Boucher C. (1988). *Current intercomparisons between conventional terrestrial systems*, pages 327–348. In (Kovalevsky et al., 1988).
- Boucher C. (1990). *Definition and realization of terrestrial reference systems for monitoring Earth rotation*, pages 197–201. In (Union, 1990).
- Boucher C. et Altamimi Z. (1993). *Development of a Conventional Terrestrial Reference Frame*, pages 89–97. In (American Geophysical Union, 1993).
- Boucher C. et Altamimi Z. (1996). International Terrestrial Reference Frame. *GPS World*, September.
- Boucher C., Altamimi Z., Feissel M., et Sillard P. (1996). Results and analysis of the ITRF94. Note technique 20, Int. Earth Rotation Serv.
- Boucher C., Altamimi Z., et Sillard P. (1998). Results and analysis of the ITRF96. Note technique 24, Int. Earth Rotation Serv.
- Boucher C., Altamimi Z., et Sillard P. (1999). The 1997 International Terrestrial Reference Frame (ITRF97). (à paraître).
- Boucher C. et Feissel M. (1983a). Evolution of BIH activities for the definition, maintenance and dissemination of a conventional terrestrial system. Note technique 1, GRGS.
- Boucher C. et Feissel M. (1983b). Evolution of BIH activities for the definition, maintenance and dissemination of a conventional terrestrial system. Note technique 1, Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale.
- Boucher C. et Sillard P. (1999). *Synthesis of submitted geocenter time series*, pages 14–20. In (Ray, 1999).
- Boucher C. et Willis P. (1988). Analyse d'un logiciel de combinaison de jeux de coordonnées tridimensionnelles. Publication interne IT/G 58, IGN/SGN.

- Bougeard M. L. (1996). Estimation robuste de paramètres sous contraintes, par algorithmes de type primal-dual – Application en astrométrie –. In (Capitaine, 1996), pages 6–11.
- Bougeard M. L. (1997a). Méthodes d'estimation robuste de paramètres alternatives aux moindres carrés. In (Bougeard, 1997b), pages 44–59.
- Bougeard M. L., éditeur (1997b). *Problèmes inverses en géodésie spatiale - journées GRGS, Lyon, janvier 1997*. Institut Girard Desargues – Université Lyon I.
- Bougeard M. L. et Caquineau C. D. (1996). Parallel primal-dual algorithms for robust estimation. *Baltzer Journal*.
- Brumberg V. A. (1991). *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Adam Hilger.
- Brumberg V. A., Bretagnon P., et Guinot B. (1997). Astronomical units and constants in the general relativity framework. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*
- Capitaine N., éditeur (1996). *Systèmes de références spatio-temporels, journées 1996*. Observatoire de Paris.
- Cazenave A. et Feigl K. (1994). *Formes et mouvements de la Terre*. Belin.
- Cazenave A., Valette J. J., et Boucher C. (1992). Positioning results with DORIS on SPOT2 after a first year mission. *J. Geophys. Res.*, 97 :7109–7119.
- Cazenave A. A., Gegout P., Ferhat G., et Biancale R. (1996). Temporal variations of the gravity field from Lageos 1 and Lageos 2 observations. In Rapp R. H., Cazenave A. A., et Nerem R. S., éditeurs, *Global Gravity Field and Its Temporal Variations, IAG Symposium 116, Boulder, the 12th of July 1995*. Springer Verlag.
- Charlot P. (1989). *Structure des sources radio extragalactiques dans les observations VLBI d'astrométrie et de géodynamique*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Chatterjee S. et Hadi A. S. (1988). *Sensitivity analysis in linear regression*. John Wiley.
- Christodoulidis D. C., Smith D. E., Kolenkiewicz R., Klosko S. M., Torrence M. H., et Dunn P. J. (1985). Observing tectonic plate motions and deformations from Satellite Laser Ranging. *J. Geophys. Res.*, 90 :9249–9264.
- Clemmow P. C. et Dougherty J. P. (1990). *Electrodynamics of particles and plasmas*. Addison-Weysley.
- Cohas F. (1990). Effets relativistes en trajectographie spatiale. Mémoire de fin d'études, Ecole centrale de Paris.
- Crosilla F., Russo T., et Schaffrin B. (1989). Improved second order design and the datum choice. *Bull. Géodésique*, 63 :191–202.
- Crétaux J. F. (1993). *Orbitographie de satellites d'altitude 500 à 1500 kilomètres à l'aide du système de positionnement global (GPS)*. Thèse de doctorat, Université Paul-Sabatier.

- Crétau J. F., Soudarin L., Cazenave A., et Bouillé F. (1998). Present-day tectonic plate motions and crustal deformations from the DORIS space system. *J. Geophys. Res.*, accepté.
- Damour T., Soffel M., et Xu C. (1991). General-relativistic celestial mechanics. i : Method and definition of reference systems. *Physical Review*, 43 :3273–3307.
- Damour T., Soffel M., et Xu C. (1992). General-relativistic celestial mechanics. ii : Translational equation of motion. *Physical Review*, 45 :1017–1044.
- Damour T., Soffel M., et Xu C. (1993). General-relativistic celestial mechanics. iii : Rotational equation of motion. *Physical Review*, 47 :3124–3135.
- Damour T., Soffel M., et Xu C. (1994). General-relativistic celestial mechanics. iv : Theory of satellite motion. *Physical Review*, 49 :618–635.
- Danjon A. (1980). *Astronomie générale, 2nde édition*. Albert Blanchard.
- Deheuvels R. (1981). *Formes quadratiques et groupes classiques*. Presses Universitaires de France.
- DeMets C., Gordon R., Argus D., et Stein S. (1994). Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions. *Geophys. Res. Lett.*, 21 :2191–2194.
- DeMets C., Gordon R. G., Argus D. F., et Stein S. (1990). Current plate motions. *Geophys. J. Int.*, 101 :425–478.
- Dermanis A. (1977). Geodetic linear estimation techniques and the norm choice problem. *Manuscripta Geodaetica*, 2 :15–97.
- Dermanis A. (1985). *Optimization problems in geodetic networks with signals*, pages 221–256. In (Grafarend et Sansò, 1985).
- Dermanis A. (1994a). Free networks solutions with the Direct Linear Transformation (DLT) method. *ISPRS journal of Photogrammetry and remote Sensing*, 49 :2–12.
- Dermanis A. (1994b). The photogrammetric inner constraints. *ISPRS journal of Photogrammetry and remote Sensing*, 49 :25–39.
- Dirac P. A. M. (1996). *General theory of relativity*. Princeton Univ. Press.
- Dong D., Dickey J. O., Chao Y., et Cheng M. K. (1997). Geocenter variations caused by atmosphere, ocean and surface ground water. *Geophys. Res. Lett.*, 24 :1867–1870.
- Drewes H. (1996). Kinematische Referenzsysteme für die Landesvermessung. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, pages 277–295.
- Drewes H. (1998). Combination of VLBI, SLR and GPS determined station velocities for actual plate kinematic and crustal deformation models. In *IAG Scientific Meeting, Rio 1997*. Springer Verlag.

- Eanes R. J. et Bettadpur S. V. (1996). Temporal variability of Earth's gravitational field from Satellite Laser Ranging. In Rapp R. H., Cazenave A. A., et Nerem R. S., éditeurs, *Global Gravity Field and Its Temporal Variations, IAG symposium 116, Boulder, the 12th of July 1995*. Springer Verlag.
- Einstein A. (1961). *Relativity, the Special and the General Theory*. Crown Trade Paperbacks.
- Einstein A. (1976). *Quatre conférences sur la théorie de la relativité générale*. Gauthiers-Villars.
- Escudier P., Auriol A., Coutin-Faye S., Costes M., et all the DORIS team (1998). DORIS activities and components. In CNES, éditeur, *Journées DORIS, Toulouse, Mars 1998*.
- Exertier P. (1988). *Orbitographie des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps : possibilité d'applications*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Feissel M. et Mignard F. (1998). The adoption of ICRS on 1 January 1998 : meaning and consequences –Letter to the Editor–. *Astron. & Astrophys.*
- Ferrif B. A. (1988). *Méthodes mathématiques : géométrie*. Institut Géographique National.
- Gaposchkin et Kolaczek, éditeurs (1981). *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*. D Reidel.
- Gegout P. et Cazenave A. (1993). Temporal variations of the Earth's gravity field for 1985–1989. *Geophys. J. Int.*, 114 :347–359.
- Gerstl M., Heindl G., et Reinhart E. (1979). Interpolation and approximation by piecewise quadratic smooth functions of two variables. In IUGG, éditeur, *XVII IUGG General Assembly, Camberra, Australia, december 2-15, 1979*.
- Goldstein H. (1964). *Mécanique classique*. Presses universitaires de France.
- Gontier A. M. (1992). *Orientation et de la Terre par mesure VLBI – Contribution à la chaine d'analyse de VLBI astrométrique GLORIA*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Grafarend E. (1974). Optimisation of geodetic networks. *Boll. di Geodesia e Sc. Aff.*, 4 :351–406.
- Grafarend E. (1984). Variance-covariance-component estimation of Helmert type in the Gauss-Helmert model. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 109 :34–44.
- Grafarend E. et Kleusberg A. (1980). Expectation and variance component estimation of multivariate gyrotheodolite. *Allgemeine Vermessung-Nachrichten*, 3 :129–136.
- Grafarend E., Kleusberg A., et Schaffrin B. (1980). An introduction to the variance-covariance component estimation of Helmert type. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 4 :161–179.

- Grafarend E. et Schaffrin B. (1974). Unbiased free net adjustment. *Survey Review*, 171 :200–218.
- Grafarend E. et Schaffrin B. (1976). Equivalence of estimable quantities and invariants in geodetic networks. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 11 :485–491.
- Grafarend E. W. et Sansò F., éditeurs (1985). *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer-Verlag.
- Gripp A. E. et Gordon R. G. (1990). Current plate velocities relative the hotspots incorporating the NUVEL-1 global plate motion model. *Geophys. Res. Lett.*, 17 :1109–1112.
- Guinot B. (1997). Application of general relativity to metrology. *Metrologia*, 34 :261–290.
- Hase H. (1998). New method for the selection of additional sites for the homogenisation of an inhomogeneous cospherical point distribution. In *Towards an integrated global geodetic observing system, Munich, October 5–9, 1998*.
- Hebey E. (1997). *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*. Diderot.
- Heflin M. (1993). Generalized No-fiducial approach to global geodesy. Publication interne 335.4–93–013, JPL.
- Heiskanen W. A. et Moritz H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Compagny.
- Herring T. A. (1986). Geodesy by radio interferometry : evidence for contemporary plate motion. *J. Geophys. Res.*, 91 :8341–8347.
- Hiriart-Urruty J. B. (1998). *Optimisation et analyse convexe*. Presses Universitaires de France.
- Hotine M. (1969). *Mathematical Geodesy*. ESSA.
- Huber P. J. (1973). Robust regression : Asymptotics, conjectures and Monte Carlo. *Ann. Stat.*, 1 :799–821.
- Huber P. J. (1981). *Robust Statistics*. John Wiley and Sons.
- Jennings A. et McKeown J. J. (1992). *Matrix computation*. John Wiley.
- Jiang Z. (1997). Geoid determination in France. In (Segawa et al., 1997), pages 486–493.
- Koch K. R. (1985). *First order design : optimization of the configuration of a network by introducing small position changes*, pages 56–73. In (Grafarend et Sansò, 1985).
- Koch K. R. (1986). Maximum likelihood estimate of variance components. *J. of Geodesy*, 60 :329–338.
- Koch K. R. (1987). *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Springer-Verlag.
- Kovalevsky J. (1990). *Astrométrie moderne*. Springer-Verlag.

- Kovalevsky J., Lindegren L., Perryman M. A. C., Hemenway P. D., Johnston K. J., Kislyuk V. S., Lestrade J. F., Morrison L. V., Platais I., Röser S., Schilbach E., Tucholke H. J., de Vegt C., Vondr ak J., Arias F., Gontier A. M., Arenou F., Brosche P., Florkowski D. R., Garrington S. T., Preston R. A., Ron C., Rybka S. P., Scholz R. D., et Zacharias N. (1997). The Hipparcos Catalogue as a realisation of the extragalactic reference system. *Astronomy and Astrophysics*, 323 :620–633.
- Kovalevsky J. et Mueller I. I. (1981). *Comments on Conventional Terrestrial and Quasi-Inertial Reference Systems*. In (Gaposchkin et Kolaczek, 1981).
- Kovalevsky J. et Mueller I. I. (1988). *Introduction*, pages 1–12. In (Kovalevsky et al., 1988).
- Kovalevsky J., Mueller I. I., et Kolaczek B.,  diteurs (1988). *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. Kluwer Academic Publishers.
- LaMotte L. R. (1973a). On non-negative quadratic unbiased estimation of variance components. *J. of the American Statistical Ass.*, 68(343) :728–730.
- LaMotte L. R. (1973b). Quadratic estimation of variance components. *Biometrics*, 29 :311–330.
- Landau L. et Lifchitz E. (1989). *Théorie des champs*. Mir.
- Laplace P. S. (1812). *Théorie analytique des probabilit es*. Gauthier - Villars.
- Larson K. M., Freymuller J. T., et Philipson S. (1997). Global plate velocities from the Global Positioning System. *J. Geophys. Res.*, 102 :9961–9981.
- le Pichon X. (1968). Sea-floor spreading and continental drift. *J. Geophys. Res.*, 73 :3661–3697.
- Lelong Ferrand J. et Arnaud ies J. M. (1985). *Géométrie et cinématique*. Dunod.
- Lemoine F. G., Smith D. E., Kunz L., Smith R., Pavlis E. C., Pavlis N. K., Klosko S. M., Chinn D. S., Torrence M. H., Williamson R. G., Cox C. M., Rachlin K. E., Wang Y. M., Kenyon S. C., Salman R., Trimmer R., Rapp R. H., et Nerem R. S. (1997). The Development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model. In (Segawa et al., 1997), pages 461–469.
- Levallois J. J. (1988). *Mesurer la Terre – 300 ans de géodésie française, de la toise du Châtelet au satellite*. Presses des Ponts et Chaussées.
- Liouville J. (1859). *Addition à la connaissance des temps pour 1859*. Gauthier - Villars.
- Ma C., Arias E. F., Eubanks T. M., Fey A. L., Gontier A. M., Jacobs C. S., Sovers O. J., Archinal B. A., et Charlot P. (1998). The International Celestial Reference Frame as realized by Very Long Baseline Interferometry. *Astronomical Journal*, 116 :516–546.
- Ma C. et Feissel M.,  diteurs (1997). *Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects*. Note technique 23, Int. Earth Rotation Serv.



- McCarthy D. D., éditeur (1996). IERS Conventions (1996). Note technique 21, Int. Earth Rotation Serv.
- Meissel P. (1965). Über die innere Genauigkeit dreidimensionaler Punkthaufens. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 90 :109–118.
- Meissel P. (1969). *Zusammenfassung und Ausbau der Inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens*. Deutsche Geodätische Kommission.
- Michelot C. et Bougeard M. L. (1994). Duality results and proximal solutions of the Huber-M estimator problem. *J. Optimization Theory and applications*, 30 :203–221.
- Minster J. B., Jordan T. H., et Haines E. (1974). Numerical modelling of instantaneous plate tectonics. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 36 :541–576.
- Minster J. B., Jordan T. H., Molnar P., et Haines E. (1973). Numerical modelling of instantaneous plate tectonics. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 36 :541–576.
- Mittemayer E. (1972). Equivalence of estimable quantities and invariants in geodetic networks. *Bull. Géodésique*, 46 :281–290.
- Moisson X. (1996). Rapport journées relativité. Note technique, GRGS.
- Monfort A. (1996). *Cours de probabilités*. Économica.
- Monfort A. (1997). *Cours de statistique mathématique*. Économica.
- Morgan W. J. (1968). Rises, trenches, great faults and crustal blocks. *J. Geophys. Res.*, 73 :1959–1982.
- Moritz H. et Hoffmann-Wellenhof B. (1993). *Geometry, Relativity, Geodesy*. Wichmann.
- Moritz H. et Mueller I. I. (1987). *Earth Rotation : theory and observation*. Ungar.
- Mueller I. I. (1985). Reference coordinates systems and frames : concepts and realization. *Bull. Géodésique*, 59 :181–188.
- Munck W. H. et Macdonald G. J. F. (1975). *The rotation of the Earth : a geophysical discussion*. Cambridge University Press.
- Ou Z. (1989). Estimation of variance and covariance components. *J. of Geodesy*, 63 :139–148.
- Ou Z. et Koch K. R. (1994). Analytical expression for Bayes estimates of variance components. *Manuscripta Geodaetica*, 19(5) :284–293.
- Papoulis A. (1991). *Probability, Random variables and Stochastic processes*. Mc Graw-Hill.
- Perlmutter A. (1979). Adjustment of free networks. *Bull. Géodésique*, 53 :281–290.
- Persson C. G. (1982). Adjustment, weight - testing and detection of outliers in mixed SFF - SFS models. *Manuscripta Geodaetica*, 7(4).

- Petit G. et Wolf P. (1997). Tester la Relativité sans quitter son fauteuil. *La recherche*, 297 :38–39.
- Poutanen M., Vermeer M., et Mäkinen J. (1996). The permanent tide in GPS positioning. *J. of Geodesy*, 70 :499–504.
- Rao C. R. (1972). Estimation of variance and covariance components in linear models. *J. of the American Statistical Ass.*, 67(337) :112–115.
- Rao C. R. (1973). *Linear statistical inference and its applications*, 2nd ed. John Wiley and Sons.
- Rao C. R. et Kleffe J. (1988). *Estimation of variance components and applications*. North-Holland.
- Rao C. R. et Mitra S. K. (1971). *Generalized inverse of matrices and its applications*. John Wiley and Sons.
- Ray J., éditeur (1999). IERS analysis campaign to investigate motions of the geocenter. Note technique 25, Int. Earth Rotation Serv.
- Robert C. (1992). *L'analyse statistique bayésienne*. Économica.
- Roche L. (1996). Contribution à l'amélioration statistique des combinaisons de jeux de coordonnées. Publication interne MS003, LAREG.
- Rousseeuw P. J. et Leroy A. M. (1987). *Robust regression and outlier detection*. John Wiley.
- Sahin M., Cross P. A., et Sellers P. C. (1992). Variance components estimation applied to satellite laser ranging. *Bull. Géodésique*, 66(3).
- Saporta G. (1990). *Probabilités, analyse des données et statistiques*. Technip.
- Schaffrin B. (1981). Best invariant covariance component estimators and its application to the generalized multivariate adjustment of heterogeneous deformation observations. *J. of Geodesy*, 55 :73–85.
- Schaffrin B. (1985). *Aspects of network design*, pages 549–597. In (Grafarend et Sansò, 1985).
- Schwartz L. (1991). *Théorie des ensembles et topologie*. Hermann.
- Schwartz L. (1992). *Calcul différentiel et équations différentielles*. Hermann.
- Schwintzer P., Reigber C., Bode A., Kang Z., Zhu S. Y., Massmann F. H., Raimondo J. C., Biancale R., Balmino G., Lemoine J. M., Moynot B., Marty J. C., Barlier F., et Boudon Y. (1997). Long-Wavelength global gravity field models : GRIM4-S4, GRIM4-C4. *J. of Geodesy*, 71 :189–208.
- Searle S. R. (1968). Another look at Henderson's methods of estimating variance components. *Biometrics*, 24 :749–787.
- Segawa J., Fujimoto H., et Okubo S., éditeurs (1997). *Gravity, Geoid and Marine Geodesy, IAG international symposium, Tokyo, Japan, September 30 – October 5, 1996*. Springer.

- Sillard P. (1996a). Compensation de jeux de coordonnées : proposition de scénario de traitement. Publication interne MM013, LAREG.
- Sillard P. (1996b). Le géoïde en Relativité Générale. Publication interne CM009, LAREG.
- Sillard P. (1996c). Quelques éléments en vue d'une approche relativiste du géoïde. In (Capitaine, 1996), pages 159–164.
- Sillard P. (1997). Les combinaisons de jeux de coordonnées : un exemple type d'estimation des composantes de la variance. In (Bougeard, 1997b), pages 106–117.
- Sillard P. (1998a). *Introduction à l'estimation linéaire*. Ecole Nationale des Sciences Géographiques.
- Sillard P. (1998b). Les variations de géocentre déterminées par doris et les autres techniques de géodésie spatiale. In CNES, éditeur, *Journées DORIS, Toulouse, Mars 1998*.
- Sillard P. (1998c). No-net rotation Tisserand condition implementation. In *Towards an integrated global geodetic observing system, Munich, October 5–9, 1998*.
- Sillard P. (1999). *GPS, DORIS and SLR combined geocenter motion from reference frame time series analysis*, pages 90–103. In (Ray, 1999).
- Sillard P., Altamimi Z., et Boucher C. (1995). Analyses préalables à l'ITRF94. Publication interne MM008, LAREG.
- Sillard P., Altamimi Z., et Boucher C. (1998). The ITRF96 realization and its associated velocity field. *Geophys. Res. Lett.*, 25(17) :3223–3226.
- Sillard P. et Boucher C. (1997). Improvement of the transformation between ITRF and Doppler-realized WGS84. *J. of Geodesy*, 70 :768–780.
- Sillard P. et Boucher C. (1998). ITRF time series pilot experiment, IERS Workshop, Potsdam, Allemagne, 28 septembre–1er octobre 1998. Publication interne CM066, LAREG.
- Sillard P. et Boucher C. (1999). A review of algebraic constraints in terrestrial reference frames datum definition. *submitted to Jnl of Geodesy*.
- Sjöberg L. E. (1995). The best quadratic minimum bias non-negative definite estimator for an additive two variance component model. *Manuscripta Geodae-tica*, 20 :139–144.
- Soffel M. H. (1989). *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*. Springer-Verlag.
- Solomon S. C. et Sleep N. H. (1974). Some simple physical models for absolute plate motions. *J. Geophys. Res.*, 79 :2557–2567.
- Souëdarin L. (1995). *Positionnement précis et tectonique des plaques à partir du système spatial DORIS*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.

## Bibliographie

---

- Stolz A. (1976). Changes in the position of the geocenter due to variations in sea-level. *Bull. Géodésique*, 50 :159–168.
- Strang van Hess G. L. (1982). Variance-covariance transformation of geodetic networks. *Manuscripta Geodaetica*, 7 :1–20.
- Tapley B. D., Schutz B. E., et Eanes R. J. (1985). Station coordinates and earth Rotation from LAGEOS Laser Ranging : 1976–1984. *J. Geophys. Res.*, 90 :9235–9248.
- Tassi P. (1992). *Méthodes statistiques*. Economica.
- Teunissen P. (1985). *Zero order design : generalized inverse, adjustment, the datum problem and S-transformations*, pages 11–55. In (Grafarend et Sansò, 1985).
- Tisserand F. F. (1891). *Traité de mécanique céleste ; tome II : théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*. Gauthier - Villars.
- Torrésani B. (1995). *Analyse continue par ondelettes*. CNRS Éditions.
- Tourenne P. (1992). *Relativité et Gravitation*. Armand Collin.
- Union A. G., éditeur (1990). *AGU Geophys. Monograph 59, Variations in Earth Rotation*. AGU.
- Valette J. J. (1992). *Analyse du positionnement terrestre par le système DORIS et évaluation de ses performances – Application géophysique à un rift en Afar*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.
- van Mierlo J. (1980). *Free networks adjustment and S-transformations*, volume 252, pages 41–54. Deutsche Geodätische Kommission.
- Vanicek P. et Krakiwsky E. (1986). *Geodesy : the concepts*. Elsevier.
- Veillet C. (1985). Mesurer la distance de la terre à la Lune par laser. Note technique 4, GRGS.
- Vigue Y., Lichten S. M., Blewitt G., Heflin M. B., et Malla R. P. (1992). Precise determination of Earth's center of mass using measurements from the Global Positioning System. *Geophys. Res. Lett.*, 19 :1487–1490.
- Watkins M. M. et Eanes R. J. (1993). Long-term changes in the Earth's shape, rotation and geocenter. *Adv. in Space Res.*, 13 :251–255.
- Welsh W. M. (1986). Problems of accuracy in combined terrestrial and satellite control networks. *Bull. Géodésique*, 60 :193–203.
- Wilcox R. R. (1997). *Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing*. John Wiley.
- Will C. M., éditeur (1981). *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge Univ. Press.
- Willis P. (1989). *Méthodes de traitement de la phase GPS pour la localisation relative (statique et cinématique). Applications à la géodésie*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.

- Willis P. (1996). Le système DORIS : présentation, rôle et recherches menées à l'IGN. *Revue Internationale de Géomatique*, 6(2-3) :289-304.
- Willis P., Bar-Sever Y., Doerflinger E., et Zumberge J. (1998). Using DORIS for determining the tropospheric delay : implications on climatology and meteorology. In CNES, éditeur, *Journées DORIS, Toulouse, Mars 1998*.
- Wolf P. et Petit G. (1995). Relativistic theory for clock syntonization and the realization of geocentric coordinate time. *Astron. & Astrophys.*, 304 :653-661.
- Wolf P. et Petit G. (1997). Satellite test of special relativity using the global positioning system. *Physical Review*, 56 :4405-4409.
- Wöppelmann G. (1997). *Rattachement géodésique des marégraphes dans un système de référence mondial par techniques de géodésie spatiale*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Xu P. (1997). A general solution in geodetic non-linear rank defect models. *Boll. di Geodesia e Sc. Aff.*, 1 :1-25.
- Yu Z. C. (1996). A universal formula of maximum likelihood estimation of variance-covariance components. *J. of Geodesy*, 70 :233-240.
- Zarrouati O. (1987). *Trajectoires spatiales*. CEPADUES.
- Zhu S. Y. et Mueller I. I. (1983). Effects of adopting new precession, nutation and equinox corrections on the terrestrial reference frame. *Bull. Géodésique*, 57 :29-42.
- Zongchou Y. (1992). A generalization theory of estimation of variance-covariance components. *Manuscripta Geodaetica*, 17(5) :295-301.
- Zumberge J. F., Neilan R. E., et Mueller I. I. (1994). Densification of the IGS Global Network – Position paper 1. In Zumberge J. F. et Liu R., éditeurs, *Densification of the IERS terrestrial reference frame through regional GPS networks, IGS Workshop proceedings, November 30-December 2, 1994*.

---

# Annexes

---

## ANNEXE A

# ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

*Cette annexe contient des notes de travaux dirigés dispensés au DEA d'astronomie fondamentale, mécanique céleste et géodésie, de l'observatoire de Paris*

### 1. Dualité et calcul de Ricci

La géométrie riemannienne, et plus généralement le calcul tensoriel, s'appuient sur des conventions d'écriture fortes et significatives, en particulier concernant la manipulation d'indices. Les règles de calcul associées sont désignées sous le nom de « calcul de Ricci ». Ces règles se basent sur la dualité algébrique, sujet auquel est consacré le premier paragraphe, pour ensuite l'utiliser dans le cadre du calcul de Ricci proprement dit.

#### 1.1. Dualité

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'ensemble des formes linéaires de  $E$  sur  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , est appelé espace dual de  $E$  et noté  $E^*$ . L'application  $(x^* : x \in E \mapsto \langle x^*, x \rangle \in \mathbb{K})$  est élément de  $E^*$ . Si on se donne une base  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$ , on a alors

$$e_i^*(e_k) = \delta_{ik} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

et  $(e_i^*)_{i \in I}$  est une famille libre de  $E^*$ . Elle est génératrice si  $I$  est fini. On en déduit alors que  $e^*$  est une base de  $E^*$ .

Soit  $a \in E$ , l'application :

$$\theta_a : x^* \in E^* \mapsto \langle x^*, a \rangle \in \mathbb{K}$$

appartient à  $E^{**}$ .

On montre que  $(\theta : a \in E \mapsto \theta_a \in E^{**})$  est linéaire et que, en dimension finie,  $\theta_a$  est un isomorphisme de  $E^{**}$  sur  $E$ . Il est donc possible d'identifier, via cet isomorphisme,  $E^{**}$  à  $E$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , pour  $y^* \in F^*$ ,  $y^* \circ u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ , l'application  $(y^* \in F^* \mapsto y^* \circ u \in E^*)$  est la transposée de  $u$ , notée  ${}^t u$ .  ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ . On montre que  ${}^t u$  est linéaire. Enfin, si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ , alors

$$\forall (x, y^*) \in E \times F^*, \langle {}^t u(y^*), x \rangle = \langle y^*, u(x) \rangle$$

### 1.2. Calcul de Ricci

On attribue à  $\mathbb{R}^n$  une structure d'espace euclidien. On se donne une base  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$  quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et on note  $e = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique du même espace. Par définition,

$$\begin{cases} \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} \\ \langle e_i^*, b_j \rangle = g_{ij} \\ \langle b_i^*, b_j \rangle = \delta_{ij} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On considère un vecteur  $x$  de composantes  $(u^1, \dots, u^n)$  dans la base  $\underline{b}$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  dans la base  $\underline{e}$ . On adopte la convention d'Einstein sur les sommations d'indices soit

$$\begin{cases} x = u^i b_i \\ x = u_i e_i \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \langle e_j^*, x \rangle &= u^i \langle e_j^*, b_i \rangle \\ &= u^i g_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

et

$$\langle e_j^*, x \rangle = u_i \delta_i^j = u_j$$

soit finalement,

$$\boxed{g_{ij} u^i = u_j} \quad (\text{A.4})$$

Si on pose, en ajout des relations (A.1),  $\langle b_j^*, e_i \rangle = g^{ij}$ , on a, par symétrie

$$\boxed{u^j = u_i g^{ij}} \quad (\text{A.5})$$

De plus, comme  $\langle e_i^*, b_j \rangle = g_{ij}$ , alors, par définition,

$$\boxed{b_j = g_{ij} e_i} \quad (\text{A.6})$$



Donc, si on désigne par  $G$ , la matrice de terme générale  $g_{ij}$ , alors la matrice de terme général  $g^{ij}$  est l'inverse de  $G$ . Par conséquent, on a la relation :

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{A.7})$$

On revient sur les relations (A.2). L'information métrique de l'espace euclidien est portée par le produit scalaire  $g_{ij}$ . Dans le cas du vecteur  $x$ , pour la seconde des deux relations (A.2), cette information se situe au niveau de  $u_i$  (on parlera de composante covariante). Elle se situe au niveau de  $b_i$  pour la première (on parlera alors de vecteur covariant).  $u_i$  est une composante contravariante et il ne reste qu'à voir dans  $e_i$  un vecteur contravariant, ce qui va pouvoir être fait, à l'aide de la relation (A.6) en posant :

$$b^i \equiv e_i = g^{ij}b_j \quad (\text{A.8})$$

On a alors,

$$u_i b^i = u_i e_i = x = u^i b_i$$

Puis deux conventions, qui restent compatibles avec ce qui a été écrit jusqu'à présent ,

$$\begin{aligned} b_i b_j &= g_{ij} \\ b^i b^j &= g^{ij} \\ b^i b_j &= b_i b^j = g_i^j = \delta_i^j = \delta_j^i \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

On s'intéresse à l'effet sur une application linéaire d'une transformation d'écriture de covariant en contravariant :

Soit  $b_i = B_{ij}e_j$ , alors  $b^i = g^{ij}b_j = g^{ij}B_{jk}e_k$  et donc

$$b^i = B_k^i e_k \quad (\text{A.10})$$

si on a posé  $B_k^i = g^{ij}B_{jk}$ , ce qui est compatible avec ce qui a été décrit plus haut. Cette notation apporte donc une notation matricielle cohérente avec les notations vectorielles. On dira que  $B_{ij}$  est un tenseur 2 fois covariant,  $B_k^i$  est un tenseur une fois covariant et une fois contravariant. Cette terminologie, de même que les règles d'abaissement et d'élévation d'indice, se généralise aux tenseurs d'ordre supérieur à 2.

## 2. Morceaux de surfaces et surfaces

Un morceau de surface paramétrée  $S$  de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$  est défini par la donnée de :

- i. un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^{n-1}$  noté  $U$
  - ii. une application injective  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$
- Quand  $n \geq 3$ ,  $\mathcal{S}$  est une sous-variété différentiable.

### 2.1. Espace tangent en un point d'un morceau de surface paramétrée

Soit  $(U, f)$  une paramétrisation d'un morceau de surface de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $P \in \mathcal{S}$  fixé, l'application  $T_P f$  s'identifie à l'image de l'application linéaire injective  $Df(P)$ . L'image par  $Df(P)$  de  $T_P(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $(n - 1)$  de  $\mathbb{R}^n$  que l'on note  $T_{f(P)}\mathcal{S}$ . On appelle  $T_{f(P)}\mathcal{S}$  l'espace tangent en  $f(P)$  au morceau de surface paramétrée  $(U, f)$ .

**exemple** La différentielle de  $f$  au point  $P$  a pour expression :

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(P) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(P) \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(P) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(P) \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(P) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(P) \end{pmatrix}$$

dans les bases canoniques  $T_P(\mathbb{R}^2)$  et  $T_{f(P)}\mathbb{R}^3$ .

### 2.2. Espace fibré tangent

On considère un morceau de surface  $\mathcal{S}$  paramétrée en  $(U, f)$  de  $\mathbb{R}^n$ . La somme disjointe  $\sum_{P \in \mathcal{S}} T_P f$  sera appelé le fibré tangent à  $\mathcal{S}$  noté  $T_{\mathcal{S}}$

### 2.3. Variété riemannienne

Une variété riemannienne est un couple  $(\mathcal{S}, g)$  constitué d'une sous-variété différentiable  $\mathcal{S}$  et d'une métrique riemannienne  $g$ .  $g$  est un  $\mathcal{C}^\infty$  champ de tenseurs d'ordre 2, deux fois covariants sur  $\mathcal{S}$  et qui définit en tout point de  $\mathcal{S}$  un produit scalaire de l'espace tangent.

### 2.4. Isométries riemanniennes

- Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes, et soit de plus  $(f : M \rightarrow N)$  un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme de  $(M, g)$  sur  $(N, h)$  si pour tout  $x \in M$ ,  $f(x)$  réalise une isométrie vectorielle de  $(T_x(M), g(x))$  sur  $(T_{f(x)}(N), h(f(x)))$
- On montre (Hebey, 1997) que si  $(M, g)$  et  $(N, h)$  sont deux variétés riemanniennes de distances associées  $d_g$  et  $d_h$  et si  $(f : M \rightarrow N)$  est une

isométrie riemannienne de  $(M, g)$  sur  $(N, h)$ , alors

$$\forall (x, y) \in M^2, d_h(f(x), f(y)) = d_g(x, y) \quad (\text{A.11})$$

Réciproquement, si  $(f : M \rightarrow N)$  vérifie (A.11), alors  $f$  est une isométrie riemannienne.

- On montre que (Hebey, 1997) le groupe d'isométries d'une variété riemannienne possède une structure naturelle de groupe de Lie. De plus, si  $n$  est la dimension de la variété, alors le groupe d'isométries associé est de dimension au plus égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

### 3. Coordonnées - Paramétrage d'une surface

Lorsqu'un paramétrage d'une surface est défini, tout changement de paramétrage admissible est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$  (bijection de classe  $\mathcal{C}^k$ ). Soit donc un changement de paramétrage d'une sous-variété de dimension  $p$  :

$$x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto (u^1, \dots, u^p)$$

On a donc  $dx = \frac{\partial x}{\partial u^1} du^1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial u^p} du^p$   
 L'élément de longueur est défini par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|dx\|^2 = dx \cdot dx \\ ds^2 &= \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial x}{\partial u^j} du^i du^j \end{aligned}$$

On pose  $g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial x}{\partial u^j}$ . De sorte que

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

$g_{ij}$  est le tenseur métrique de la sous-variété. Il dépend du point de la sous-variété où il est calculé. La forme quadratique définie par l'élément de longueur est appelée première forme fondamentale de la sous-variété. En dimension 2, on a coutume de l'écrire avec les coefficients :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

### 4. Lignes géodésiques

La géodésique désigne la ligne la plus courte qui joint deux points d'une sous-variété. La ligne droite est la ligne la plus courte dans un espace euclidien. L'équation d'une telle ligne est de la forme

$$x = as + b$$

de sorte qu'une ligne géodésique vérifie l'équation

$$\boxed{\frac{d^2x}{ds^2} = 0}$$

En coordonnées curvilignes,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u^i} du^i \\ \text{et } \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \\ \text{donc } \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{d^2 u^i}{ds^2} = 0 \end{aligned}$$

On cherche à éliminer les « coordonnées canoniques »  $x$  puisqu'on cherche à exprimer la géodésique en fonction des  $u^i$ . En multipliant par  $\frac{\partial x}{\partial u^k}$ , on a :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial x}{\partial u^k}}_{\text{à éliminer}} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial x}{\partial u^k}}_{g_{ik}} \frac{d^2 u^i}{ds^2} = 0$$

Or

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial x}{\partial u^k}$$

soit en différenciant,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial x}{\partial u^k} + \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \left( \frac{1}{2} \right)$$

Par permutation circulaire sur les  $i, j, k$ , on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial x}{\partial u^i} + \frac{\partial x}{\partial u^j} \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \left( -\frac{1}{2} \right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial x}{\partial u^j} + \frac{\partial x}{\partial u^k} \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \left( \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Par combinaison de ces équations :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial x}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

Ceci nous conduit à :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + g_{ik} \frac{d^2 u^i}{ds^2} = 0 \quad (\text{A.12})$$

On pose

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

symbole de Christoffel de première espèce

de sorte que (A.12) s'écrit

$$\boxed{g_{ik} \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{kij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= g^{lk} \Gamma_{kij} \\ &= \frac{1}{2} g^{lk} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0}$$

*équation d'une géodésique*

– On peut remarquer que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

– On peut montrer que la même équation différentielle est obtenue lorsqu'on définit la géodésique comme le minimum de

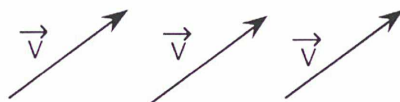
$$s_{AB} = \int_A^B \sqrt{g_{ij} du^i du^j}$$

pour A et B fixés.

## 5. Transport parallèle

Un vecteur est « transporté parallèlement » lorsque sa direction et sa norme sont inchangés dans le déplacement. La notion de transport parallèle d'un vecteur est une notion très riche qui va permettre d'accéder à la courbure de la variété sur laquelle on déplace le vecteur.

Cette notion est à rapprocher de la notion de champ de vecteurs.



Si on considère un champ de vecteurs de la variété, sa différentielle totale est nulle :

$$dv = 0$$

Or  $v = v^j b_j$ , à l'aide des vecteurs de base, donc

$$dv = b_j dv^j + v^j db_j = 0$$

On multiplie cette expression par  $b_i$  et on a :

$$\underbrace{b_i b_j}_{g_{ij}} dv^j + b_i db_j v^j = 0$$

puis,  $db_j = \frac{\partial b_j}{\partial u^k} du^k$

donc  $b_i db_j = b_i \frac{\partial b_j}{\partial u^k} du^k$

Or  $b_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$

donc  $\frac{\partial b_j}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^k}$

et donc  $b_i db_j = \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^k}$

Par définition des symboles de Christoffel de première espèce, on a :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$$

et donc  $g_{ij} dv^j + \Gamma_{ijk} v^j du^k = 0$

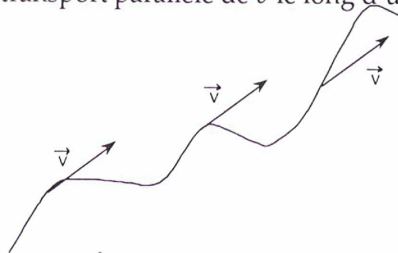
soit  $\underbrace{g^{li} g_{ij}}_{g_j^l = \delta_j^l} dv^j + \underbrace{g^{li} \Gamma_{ijk}}_{\Gamma_{jk}^l} v^j du^k = 0$

et finalement

$$dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j du^k = 0$$

Cette formule exprime donc le transport parallèle d'un vecteur contravariant. On distingue 2 composantes dans l'égalité précédente. La partie  $(\Gamma_{jk}^i v^j du^k)$  traduit la courbure de la surface (dans un espace euclidien, la caractérisation du transport parallèle est simplement  $dv^i = 0$ ). On constate que les symboles de Christoffel caractérisent un champ de vecteurs et sont aussi identifiés, à ce titre, comme les coefficients de la connexion linéaire de la variété.

Si on s'intéresse au transport parallèle de  $v$  le long d'une courbe  $u^i = u^i(s)$



La formule devient  $\frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i v^j \frac{du^k}{ds} = 0$

Considérons un arc de courbe  $x(u^i)$  tracé sur la sous-variété et son vecteur tangent  $\frac{dx}{ds}$  ( $ds$  : élément de longueur de la courbe). Par définition, on a :

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = \left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 = 1$$

$$\text{Or } \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u^i} \cdot \frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{ds} b_i$$

$\frac{du^i}{ds}$  sont les composantes du vecteur contravariant  $\frac{dx}{ds}$ . Transportons parallèlement le vecteur tangent  $\frac{dx}{ds}$  : par définition, ceci revient à identifier, dans la

formule du transport parallèle,  $v^i = \frac{du^i}{ds}$  et donc

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

est l'équation d'une géodésique.

Transporter le vecteur tangent de la courbe  $x(u^i)$  parallèlement (sans déformation) revient à le déplacer le long d'une géodésique.

## 6. Dérivée covariante

Le but de la dérivée covariante est d'exprimer la distorsion opérée sur un vecteur lors d'un déplacement qu'on lui fait subir sur la sous-variété. C'est donc une extension de la notion de transport parallèle.

Soit  $v$  un vecteur  $v = v^i b_i$ .  $dv = dv^i b_i + v^i db_i$ . En appliquant les relations construites pour le transport parallèle, on a :

$$dv = (dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j du^k) b_i$$

$$\text{et donc } \frac{dv}{ds} = \underbrace{\left( \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i v^j \frac{du^k}{ds} \right)}_{\frac{Dv^i}{ds} : \text{dérivée covariante de } v} b_i$$

Une fois encore, il est possible de distinguer l'action de la courbure sur  $\frac{dv}{ds} : \Gamma_{jk}^i v^j \frac{du^k}{ds} b_i$  ; de l'action « plane » usuelle  $\frac{dv^i}{ds} b_i$ . La courbure agit sur les vecteurs  $b_i$ .

Si on s'intéresse à présent à la dérivée covariante d'un vecteur covariant,  $w_i v^i$  est un scalaire donc

$$\begin{aligned} D(w_i v^i) &= d(w_i v^i) = v^i dw_i + w_i dv^i \\ &= w_i D(v^i) + v^i Dw_i \end{aligned}$$

Par définition,  $D(v^i) + \Gamma_{jk}^i v^j du^k$ , donc on a l'égalité

$$v^i Dw_i + w_i dv^i + w_i \Gamma_{jk}^i v^j du^k = v^i dw_i + w_i dv^i$$

$$\text{soit finalement } v^j (Dw_j - dw_j + \Gamma_{jk}^i w_i du^k) = 0$$

qui doit être vérifiée pour tout  $v^j$  donc

$$Dw_j = dw_j - \Gamma_{jk}^i w_i du^k$$

De la même manière, on définit la dérivée covariante (Landau et Lifchitz, 1989)

- d'un vecteur contravariant

$$DA^i = \left( \frac{\partial A^i}{\partial u^\ell} + \Gamma_{k\ell}^i A^k \right) du^\ell$$

- d'un tenseur deux fois covariant

$$D_\ell A_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial u^\ell} - \Gamma_{i\ell}^m A_{mk} - \Gamma_{k\ell}^m A_{im}$$

- d'un tenseur une fois covariant et une fois contravariant

$$D_\ell A_i^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial u^\ell} - \Gamma_{k\ell}^m A_m^i + \Gamma_{m\ell}^i A_k^m$$

La règle générale de dérivation d'un tenseur  $q$  fois covariant et  $p$  fois contravariant  $A_{i_1, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_p}$  est la suivante :

$$D_\ell A_{i_1, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_p} = \frac{\partial A_{i_1, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_p}}{\partial u^\ell} + \sum_{j=1}^p \Gamma_{m\ell}^{k_j} A_{i_1, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_{j-1}, m, k_{j+1}, \dots, k_p} - \sum_{j=1}^q \Gamma_{i_j \ell}^m A_{i_1, \dots, i_{j-1}, m, i_{j+1}, \dots, i_q}^{k_1, \dots, k_p}$$

## 7. Interprétation en dimension 3

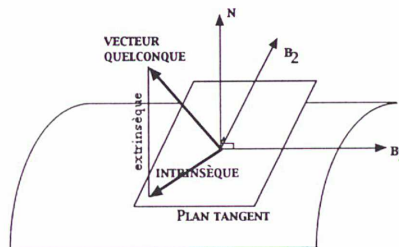
Par construction des symboles de Christoffel, on a :

$$\Gamma_{kij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u^k}}_{\text{produit scalaire}}$$

donc on peut écrire en notant  $n$  le vecteur normal à la surface

$$\underbrace{\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}}_{\text{vecteur spatial quelconque}} = \underbrace{\Gamma_{ij}^k b_k}_{\text{intrinsèque}} + \underbrace{L_{ij} n}_{\text{extrinsèque}} \quad (\text{A.13})$$





On en déduit que

$$L_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \cdot n$$

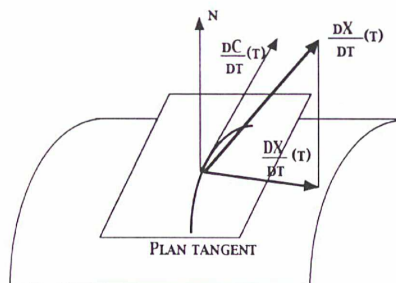
$L_{ij}$  correspond au tenseur de Gauss de deuxième ordre

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \text{ avec les notations usuelles}$$

encore appelé deuxième forme fondamentale (Ferrif, 1988; Moritz et Hoffmann-Wellenhof, 1993). (Rappel : la première forme fondamentale correspond à la métrique  $g_{ij}$ )

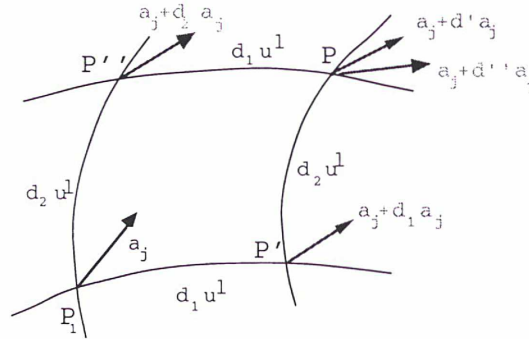
Quant à la dérivée covariante, on observe exactement le même phénomène que précédemment : la dérivation covariante associée à un champ de vecteurs tangents le long d'une courbe un autre champ de vecteurs tangents le long de cette même courbe.

Comme la dérivation ordinaire et la projection suivant la normale sont indépendantes des coordonnées, il en est de même de la dérivation covariante. La dérivée covariante est donc une quantité intrinsèque.



## 8. Courbure

La notion de courbure est définie à partir du transport parallèle : on transporte parallèlement selon deux chemins différents un même vecteur. La courbure est la mesure de la différence des deux vecteurs résultants du transport du vecteur initial.



On utilise les formules du transport parallèle covariant :

$$\begin{array}{ccc}
 P_1 \rightarrow P' & & P_1 \rightarrow P'' \\
 d_1 a_j = \Gamma_{j\ell}^i a_i d_1 u^\ell & & d_2 a_j = \Gamma_{j\ell}^i a_i d_2 u^\ell \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P_1 & & P_1
 \end{array}$$

Puis, pour passer de  $P'$  en  $P_2$ , on a besoin des symboles de Christoffel en  $P'$  donnés par :

$$\Gamma_{j\ell}^i + \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} d_1 u^k$$

et donc le passage  $P_1 \rightarrow P' \rightarrow P_2$  s'écrira, de façon différentiable,

$$d' a_j = d_1 a_j + \left( \Gamma_{j\ell}^i + \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} d_1 u^k \right) (a_i + d_1 a_i) d_2 u^\ell$$

Or  $d_1 a_j = \Gamma_{j\ell}^i a_i d_1 u^\ell$  donc  $(d_1 a_j = \Gamma_{ik}^m a_m d_1 u^\ell$  pour le second membre)

$$\begin{aligned}
 d' a_j = & \Gamma_{j\ell}^i a_i d_1 u^\ell + \Gamma_{j\ell}^i a_i d_2 u^\ell + \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} a_i d_1 u^k \wedge d_2 u^\ell \\
 & + \Gamma_{j\ell}^i \Gamma_{ik}^m a_m d_1 u^k \wedge d_2 u^\ell + \dots
 \end{aligned}$$

soit

$$d' a_j = \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} a_i + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i \right) a_i d_1 u^k \wedge d_2 u^\ell + \Gamma_{j\ell}^i a_i (d_1 u^\ell + d_2 u^\ell)$$

et finalement

$$d' a_j = \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i \right) a_i d_1 u^k \wedge d_2 u^\ell + \Gamma_{j\ell}^i a_i (d_1 u^\ell + d_2 u^\ell)$$

Par analogie, on a (on change  $k \leftrightarrow \ell$ ) :

$$d'' a_j = \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i \right) a_i d_2 u^k \wedge d_1 u^\ell + \Gamma_{j\ell}^i a_i (d_2 u^\ell + d_1 u^\ell)$$

Ceci conduit à

$$d' a_j - d'' a_j = \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^\ell} + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{m\ell}^i \right) a_i d_1 u^k \wedge d_2 u^\ell$$

La différence  $(d'a_j - d''a_j)$  est proportionnelle à un terme d'expression :

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^\ell} + \Gamma_{j\ell}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{m\ell}^i$$

appelé tenseur de courbure.

On peut aussi définir la forme covariante du tenseur de courbure, appelé tenseur de Riemann,

$$R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m$$

On peut montrer, sans difficulté, que le tenseur de courbure possède un certain nombre de symétries :

$$\begin{aligned} R_{jikl} &= -R_{ijkl} \\ R_{ijlk} &= -R_{ijkl} \\ R_{klij} &= R_{ijkl} \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0 \end{aligned}$$

On montre que pour toute sous-variété de dimension  $n$ , il n'y a que, au plus,  $n^2(n^2 - 1)/12$  coefficients indépendants dans le tenseur de courbure. Donc, pour une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $4(4 - 1)/12 = 1$ , il n'existe qu'un terme indépendant.

C'est la courbure de Gauss  $(g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix})$ ,

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})} = \frac{R_{1212}}{EG - F^2}$$

On constate donc que la courbure d'une sous-variété ne dépend que des coefficients de la métrique  $g_{ij}$ . Avec le tenseur  $L_{ij}$  (deuxième forme fondamentale), on observe que

$$K = \frac{\det L_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

## 9. Identité de Bianchi et tenseur d'Einstein

L'identité de Bianchi se présente sous la forme

$$D_m R_{ikl}^n + D_\ell R_{imk}^n + D_k R_{i\ell m}^n = 0$$

Cette identité se démontre en utilisant la définition de la dérivée covariante et en utilisant l'expression du tenseur de courbure. Le lecteur intéressé pourra retrouver cette démonstration dans (Hebey, 1997) ou (Landau et Lifchitz, 1989), par exemple.

Dorénavant, pour plus de légèreté dans les expressions, on utilisera la notation :

$$D_m A \equiv A_{;m}$$

relative à la dérivée covariante.

L'identité de Bianchi s'écrit, avec cette notation :

$$R_{ik\ell;m}^n + R_{imk;\ell}^n + R_{i\ell m;k}^n = 0$$

On se propose d'opérer sur cette identité quelques manipulations de façon à faire apparaître une forme tensorielle d'ordre 2 dont la signification physique sera fondamentale, car elle permettra de construire une relation tensorielle entre le tenseur impulsion-énergie de la relativité générale et la courbure de l'espace (i. e. la variété).

la première contraction consiste à poser  $n = \ell$  dans l'identité de Bianchi :

$$R_{ik\ell;m}^\ell + R_{imk;\ell}^\ell + R_{i\ell m;k}^\ell = 0 \quad (\text{A.14})$$

En remarquant que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle, on constate que l'on peut introduire le tenseur d'ordre 2 :

$$R_{im} = R_{i\ell m}^\ell = g^{lp} R_{lipm}$$

appelé tenseur de Ricci, de sorte que l'Eq. (A.14) devient

$$-R_{ik;m} + R_{imk;\ell}^\ell + R_{im;k} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Puis on contracte à nouveau cette dernière équation sur les indices  $i$  et  $k$ . Les deux sont covariants donc la contraction s'opère par multiplication par  $g^{ik}$  :

$$-g^{ik} R_{ik;m} + g^{ik} R_{imk;\ell}^\ell + g^{ik} R_{im;k} = 0 \quad (\text{A.16})$$

En remarquant que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle, on peut définir le scalaire

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

et l'introduire dans l'expression (A.16). Puis

$$\begin{aligned} g^{ik} R_{imk;\ell}^\ell &= g^{ik} g^{\ell\alpha} R_{\alpha imk;\ell} \\ &= g^{\ell\alpha} g^{ik} R_{\alpha imk;\ell} \\ &= g^{\ell\alpha} g^{ik} R_{ickm;\ell} \end{aligned}$$

par symétrie du tenseur de courbure. Donc

$$\begin{aligned} g^{ik} R_{imk;\ell}^\ell &= g^{\ell\alpha} R_{\alpha m;\ell} \\ &= R_{m;\ell}^\ell \\ &\equiv R_{m;k}^k \end{aligned}$$

et donc l'équation (A.16) est équivalente à :

$$R_{m,k}^k = \frac{1}{2} \delta_m^k R_{,m}$$

ou encore

$$R_{km;k} = \frac{1}{2} g_{km} R_{,k} \tag{A.17}$$

Ceci nous conduit à introduire le tenseur d'Einstein

$$E_{km} = R_{km} - \frac{1}{2} g_{km} R$$

et la relation (A.17) prouve que

$$E_{km;k} = 0$$

Le tenseur d'Einstein est à divergence nulle.

## 10. Définition du gradient à une sous-variété

On s'intéresse à une variété Riemannienne de dimension  $n$  et de métrique  $G$ . Soit  $\mathcal{H}$  une sous-variété de dimension  $n - 1$  de la variété précédente et définie par une équation implicite de la forme :

$$h(x^1, \dots, x^n) = h_0$$

où  $h$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On cherche à construire le vecteur gradient associé à la fonction  $h$  tel que ce vecteur génère en tout point de  $\mathcal{H}$  l'orthogonal à l'espace tangent à la sous-variété. Pour ce faire, on construit une paramétrisation  $(U, f)$  de la sous-variété  $\mathcal{H}$  telle que :

- i)  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$
- ii)  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est injective et dérivable

On peut écrire, si  $(x^1, \dots, x^n)$  est un point de la sous-variété :

$$h(x^1, \dots, x^n) = h(x^1, \dots, x_0^n) + (x^n - x_0^n) \frac{\partial h}{\partial x^n} + o(x^n - x_0^n)^2$$

où  $x_0^n$  est un paramètre arbitraire. On dispose alors d'une paramétrisation  $f$  de  $\mathcal{H}$  donnée par :

$$f = \begin{cases} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ [h_0 - h(x^1, \dots, x^{n-1}, x_0^n)] / \frac{\partial h}{\partial x^n} + x_0^n + o(x^n - x_0^n)^2 \end{cases}$$

Une base de l'espace tangent à  $\mathcal{H}$  en  $(x^1, \dots, x^n)$  est donnée par :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x^n} \right) Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x^n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial h}{\partial x^n} \\ -\frac{\partial h}{\partial x^1} & -\frac{\partial h}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial h}{\partial x^{n-2}} & -\frac{\partial h}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Le gradient génère l'orthogonal à l'espace tangent, soit à la matrice précédente. Explicitement,

$$Df^T \cdot G \cdot \mathbf{grad} h = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci conduit à

$$\mathbf{grad} h = \varepsilon G^{-1} \nabla h$$

où  $\varepsilon$  est un scalaire non nul quelconque.

Ce résultat est donné dans (Abraham et Marsden, 1978).

## ANNEXE B

### UN PEU D'ALGÈBRE

**Remarque** Les éléments indiqués dans ce texte sont en principe exposés dans tous les bons ouvrages d'algèbre. Ils ont pour but de préciser succinctement quelques concepts mathématiques rencontrés au fil des pages de ce mémoire. Les manuels qui ont ici servi de référence sont (Schwartz, 1991; Schwartz, 1992; Deheuvels, 1981; Arnaudiès et Fraysse, 1987; Lelong Ferrand et Arnaudiès, 1985).

- Un espace vectoriel  $E$  sur corps  $\mathbb{K}$  commutatif est un ensemble tel que
  1.  $E$  est muni d'une structure de groupe abélien (addition)
  2. il existe une application de  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ ,  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  possédant les propriétés suivantes :
    - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$
    - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\mu + \lambda)x = \mu x + \lambda x$
    - $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}}x = x$
    - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Une partie non vide  $F$  de  $E$  est appelée sous-espace vectoriel si pour tout  $x \in F, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $x + y \in F$  et  $\lambda x \in F$ . Ces opérations font de  $F$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- Soient  $(E, \mathbb{K})$  et  $(F, \mathbb{K})$  deux espaces vectoriels sur un même corps  $\mathbb{K}$ . Une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \begin{cases} f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \\ f(0_E) = 0_F \end{cases}$$

- On désigne par image de  $f$ , l'espace vectoriel sous-espace de  $F$

$$\text{Im}f = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

- On désigne par noyau de  $f$  l'espace vectoriel sous-espace de  $E$

$$\text{Ker}f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

- A l'aide de la relation d'équivalence  $[x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')]$  (i.e.  $(x - x') \in \text{Ker}f$ ), on peut construire le diagramme de décomposition canonique de l'application  $f$  ( $E/\text{Ker}f = E/\mathcal{R}$ )

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \theta \downarrow & & \uparrow i \\ E/\text{Ker}f & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Im}f \end{array}$$

où

- $\theta : x \in E \mapsto x + \text{Ker}f \in E/\text{Ker}f$  est un morphisme surjectif de  $\text{Ker}f$ .
- $i : x \in \text{Im}f \mapsto x \in F$  est un morphisme injectif de  $\text{Ker}f$ .
- $\tilde{f}$  est un isomorphisme de l'espace quotient  $E/\text{Ker}f$  sur  $\text{Im}f$ .
- $f = \theta \circ \tilde{f} \circ i$

On dira que  $f$  est injective si  $\text{Ker}f = \{0\}$  et surjective si  $\text{Im}f = F$

- En vertu du théorème de factorisation précédent, on a

$$\dim(E/\text{Ker}f) = \dim \text{Im}f$$

Or  $\dim(E/\text{Ker}f) = \dim E - \dim \text{Ker}f$  et donc

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f \\ &= \dim \text{Ker}f + \text{rg}f \end{aligned}$$

(théorème du rang)

- Supposons que l'on s'intéresse à un système linéaire  $f(x) = y$  compatible, c'est à dire tel que  $y \in \text{Im}f$ . Alors, en conséquence directe de la factorisation,  $\tilde{f}^{-1}(y) \in E/\text{Ker}f$  et donc, tout représentant  $x$  de la classe d'équivalence de  $\tilde{f}^{-1}(y)$  est un candidat possible à l'équation  $f(x) = y$ . Ce principe élémentaire est à la base de la construction des inverses généralisées. Le choix d'une inverse généralisée particulière consiste à choisir une application particulière  $\theta^- : E/\text{Ker}f \rightarrow E$  telle que  $\theta \circ \theta^-(x) = x$  (c'est possible car  $\theta$  est surjective).
- La somme de parties d'un ensemble muni d'une addition est la réunion de ces parties. Dans le cas d'espaces vectoriels, la somme de sous-espaces est la réunion de ces sous-espaces. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Supposons  $E = F + G$ , alors, quel que soit  $x_E \in E$ , il existe  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x_E = x_F + x_G$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont en somme directe lorsque  $F \cap G = \{0_E\}$ . On note alors  $E = F \oplus G$ .



- Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ . Un projecteur est un endomorphisme (application de  $E$  dans lui-même) idempotent (i. e.  $p^2 = p \circ p = p$ ). Quel que soit  $x \in E$ , on peut écrire que

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

$p(x) \in \text{Imp}$  par construction.  $(x - p(x)) \in \text{Kerp}$  car  $p(x - p(x)) = 0$ . Par conséquent,  $E = \text{Imp} + \text{Kerp}$ . Par ailleurs, si  $x \in \text{Kerp} \cap \text{Imp}$ , alors  $p(x) = 0$  et il existe  $y$  tel que  $x = p(y)$ .  $p(x) = p^2(y) = p(y) = 0$  donc  $y \in \text{Kerp}$  et  $x = 0$  donc  $\text{Kerp} \cap \text{Imp} = \{0\}$ . Finalement,

$$E = \text{Imp} \oplus \text{Kerp}$$

Il est clair que si  $p$  est un projecteur, alors  $(id_E - p)$  en est un également.

- $E$  étant un espace sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle forme sesquilinéaire sur  $E \times E$  une fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\longmapsto \mathcal{S}(u, v) \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

linéaire par rapport à la première composante et semilinéaire par rapport à la seconde. Soit explicitement

$$\begin{cases} \mathcal{S}(u + u', v) = \mathcal{S}(u, v) + \mathcal{S}(u', v) \\ \mathcal{S}(u, v + v') = \mathcal{S}(u, v) + \mathcal{S}(u, v') \\ \mathcal{S}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{S}(u, v) \\ \mathcal{S}(u, \lambda v) = \bar{\lambda} \mathcal{S}(u, v) \end{cases}$$

- Une forme sesquilinéaire est hermitienne lorsque

$$\mathcal{S}(u, v) = \overline{\mathcal{S}(v, u)}$$

- Une forme sesquilinéaire est bilinéaire lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- Une forme sesquilinéaire hermitienne est positive lorsque pour tout  $u$ ,  $\mathcal{S}(u, u) \geq 0$  et définie positive lorsque  $\mathcal{S}(u, u) > 0$
- On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne positive.
- On appelle espace hilbertien un espace préhilbertien séparé<sup>1</sup> et complet<sup>2</sup> pour la distance induite par la semi norme  $u \mapsto \|u\| = \mathcal{S}(u, u)^{1/2}$ .
- On appelle espace hermitien de dimension  $n$  tout espace complexe  $E$  de dimension  $n$  muni d'une forme hermitienne définie positive appelée produit scalaire.

<sup>1</sup>si pour tout couple  $(x, y) \in E^2$ ,  $x \neq y$ , il existe des ouverts contenant  $x$  et  $y$  disjoints.

<sup>2</sup>toute suite de Cauchy est convergente [( $n \mapsto u_n$ ) est une suite de Cauchy si et seulement si  $(\forall \varepsilon > 0), (\exists p \in \mathbb{N}), (\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \geq p, n \geq p) \Rightarrow d(u_n, u_m) \leq \varepsilon]$

- On appelle espace pseudo-hermitien d'indice  $(p, q)$  tout espace vectoriel complexe de dimension  $n = p + q$  muni d'une forme hermitienne d'indice  $(p, q)$ ,  $p$  étant la dimension du sous-espace strictement positif maximal relativement à  $\mathcal{S}$  et  $q$  la dimension du sous-espace strictement négatif maximal relativement à  $\mathcal{S}$ . On peut montrer que ces deux sous-espaces sont en somme directe.
- Munir un espace vectoriel d'une forme sesquilinéaire permet de définir des conditions d'orthogonalité de deux vecteurs :

$$u \perp v \Leftrightarrow \mathcal{S}(u, v) = 0$$

- Supposons que  $E = F \oplus G$ . On dira que  $F$  et  $G$  sont en somme directe orthogonale, et on notera  $E = F \perp G$ , lorsque

$$\forall (x, y) \in F \times G, \mathcal{S}(x, y) = 0$$

- De la même manière, on parlera de projecteur orthogonal  $p$  lorsque  $\text{Ker } p \perp \text{Im } p = E$ .

- On appelle espace euclidien un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- On appelle espace pseudo-euclidien un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée d'indice  $(p, q)$ . *Cet espace est l'espace tangent à la sous-variété de la théorie de la relativité générale. Toutefois on peut être conduit à se placer dans le contexte d'un espace pseudo-hermitien ou hermitien selon que les coordonnées sont complexes ou non.*
- On appelle espace affine  $\mathcal{E}$  sur un corps  $\mathbb{K}$  un ensemble dont les éléments sont appelés points, auxquels sont associés d'une part un espace vectoriel réel ou complexe  $E$  dont les éléments sont appelés vecteurs, et d'autre part une application

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto \overrightarrow{ab} \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes

- $\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}, \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \overrightarrow{0}$
- Quel que soit  $a \in \mathcal{E}$  fixé, l'application  $x \in \mathcal{E} \mapsto \overrightarrow{ax} \in E$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $E$ .
- On dira que  $\mathcal{E}$  est un espace affine euclidien [hilbertien] lorsque l'espace associé  $E$  est euclidien [hilbertien].
- Soit  $\mathcal{E}_n$  un espace affine euclidien.
- Une isométrie de  $\mathcal{E}_n$  est une application  $\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$  telle que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}_n^2, \|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$$

- Une similitude vectorielle de  $\mathcal{E}_n$  est une application  $f : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$  telle que :

$$\exists k \in \mathbb{R}_*^+, \forall (M, N) \in \mathcal{E}_n^2, \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$$

- Quelques éléments sur les quaternions

On désigne par  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  l'espace des matrices carrées d'ordre 2 sur le corps des nombres complexes. On note

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Les matrices précédentes anticommulent deux à deux et  $E_i^2 = -I$  pour tout  $i > 0$ . Le quadruplet  $(I, E_1, E_2, E_3)$  forme une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , et les règles de produits de deux éléments de base confèrent à  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  une structure d'algèbre. C'est l'algèbre des quaternions complexes de norme 1. La norme est donnée par ( $\|E_i\| = \det(E_i)$ ). La sous-algèbre où le corps de référence est  $\mathbb{R}$  (généralisé par  $\alpha I + \beta E_1 + \gamma E_2 + \delta E_3$  avec  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ ) est l'algèbre des quaternions proprement dite. Elle a été découverte par Hamilton<sup>3</sup>. Cette découverte est célèbre car il s'agit de la première algèbre non commutative exhibée. Hamilton cherchait à généraliser les propriétés du corps des nombres complexes dans le but de construire une algèbre jouant pour les rotations de l'espace à trois dimensions un rôle équivalent à celui des nombres complexes pour les rotations de l'espace à deux dimensions. Cette algèbre permet entre autre de démontrer que les angles d'Euler constituent une paramétrisation des isométries de  $\mathbb{R}^3$ . Pour une construction complète, le lecteur est invité à se reporter à (Deheuvels, 1981).

**Solution générale d'un système d'équations normales** On cherche ici à établir la solution générale d'un système d'équations normales ( $A : E \rightarrow F$ ) :

$$A^T A X = A^T Y \quad (\text{B.2})$$

déduit du système d'équations d'observations  $A X = Y$  ( $I$ ). On ne fait aucune hypothèse de rang sur la matrice  $A$ . On veut montrer que la solution générale est de la forme

$$\check{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y + [I - (A^T A)^{-1} A^T A] z \quad (\text{B.3})$$

pour  $z$  vecteur quelconque de  $E$ .

<sup>3</sup>astronome anglais, également célèbre pour ses travaux en mécanique céleste

Pour ce faire, démontrons tout d'abord le lemme suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Soit } A \text{ une application linéaire quelconque de } E \text{ dans } F \\
 \left. \begin{array}{l}
 A : E \rightarrow F \\
 A^T : F \rightarrow E \\
 A^T A : E \rightarrow E
 \end{array} \right\} \\
 \text{alors} \\
 \text{Im}(A^T A) = \text{Im} A^T \tag{B.4}
 \end{array}$$

De façon évidente,

$$\text{Im}(A^T A) \subset \text{Im}(A^T). \tag{B.5}$$

Montrons ensuite que  $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker} A$ . De façon claire,  $\text{Ker} A \subset \text{Ker}(A^T A)$ . Supposons,  $x \in \text{Ker}(A^T A)$ ; alors  $A^T A x = 0$  donc  $x^T A^T A x = 0$ . Cette dernière relation est vérifiée si et seulement si  $A x = 0$ . Par conséquent,  $x \in \text{Ker} A$  et

$$\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker} A \tag{B.6}$$

Par application du théorème du rang,

$$\dim F = \text{rg}(A^T) + \dim \text{Ker} A^T \tag{B.7}$$

$$\dim E = \text{rg}(A^T A) + \dim \text{Ker}(A^T A) \tag{B.8}$$

$$\dim E = \text{rg} A + \dim \text{Ker} A \tag{B.9}$$

En utilisant les relations (B.8), (B.9) et (B.6), on en déduit

$$\text{rg}(A^T A) = \text{rg} A \tag{B.10}$$

Par définition de la transposition d'applications linéaires,

$$\dim[(\text{Ker} A^T)^\perp] = \text{rg} A \tag{B.11}$$

Enfin, toujours en appliquant le théorème du rang

$$\dim F = \dim(\text{Ker}A^T)^\perp + \dim(\text{Ker}A^T) \quad (\text{B.12})$$

de sorte que, en utilisant (B.12), (B.7) et (B.11),

$$\text{rg}A^T = \dim(\text{Ker}A^T)^\perp = \text{rg}(A) \quad (\text{B.13})$$

soit, à l'aide de (B.13) et (B.10),

$$\text{rg}A^T = \text{rg}(A^T A)$$

Compte-tenu de la relation (B.5),

$$\boxed{\text{Im}(A^T A) = \text{Im}A^T} \quad (\text{B.14})$$

En vertu du lemme précédent, le système d'équations normales est compatible, c'est à dire que

$$A^T Y \in \text{Im}A^T A \quad (\text{B.15})$$

Dans ce cas, la résolution du système linéaire par inverse généralisé de type III.8 est envisageable. L'espace des solutions de (B.15) est

$$S = \check{X} + \text{Ker}A^T A$$

où  $\check{X} = (A^T A)^- A^T Y$ . A noter qu'on retrouve ici une relation compatible avec le système d'équations normales (B.5) car, comme  $\text{Im}(A^T A) = \text{Im}A^T$ , alors il existe  $u$  tel que  $A^T A u = A^T Y$  et donc  $A^T A \check{X} = A^T A (A^T A)^- A^T A u = A^T A u = A^T Y$ . Reste à trouver la forme générale de  $\text{Ker}(A^T A)$ .

Considérons l'application linéaire  $P = I - (A^T A)^- A^T A$ . Il est immédiat de vérifier que  $P$  est un projecteur (i.e.  $P^2 = P$ ). Puis  $A^T A P = 0$  donc  $\text{Im}P \subset \text{Ker}A^T A$ . Enfin  $\text{rg}[(A^T A)^- A^T A] = \text{rg}(A^T A)$  par construction. Donc d'après le théorème du rang,  $\text{rg}P = \dim\text{Ker}(A^T A)$ . De sorte que  $\text{Im}P = \text{Ker}A^T A$ .  $P$  est le projecteur de  $E$  sur  $\text{Ker}(A^T A)$ . Par conséquent  $Pz$  génère  $\text{Ker}(A^T A)$  pour tout  $z \in E$ .

On en conclut que la solution générale de (B.2) est

$$\check{X} = (A^T A)^- A^T Y + (I - (A^T A)^- A^T A)z$$

pour  $z$  vecteur quelconque de  $E$ .