



**HAL**  
open science

# Étude des orbites de satellites artificiels autour de la Lune à l'aide d'une méthode de moyennisation

Daniel Steichen

► **To cite this version:**

Daniel Steichen. Étude des orbites de satellites artificiels autour de la Lune à l'aide d'une méthode de moyennisation. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1994. Français. NNT: . tel-01958571

**HAL Id: tel-01958571**

**<https://theses.hal.science/tel-01958571>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse de Doctorat  
Label Européen**  
*en*  
**Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie**

*présentée par :*

**Daniel Steichen**  
*à*  
**l'Observatoire de Paris**

*sujet :*

**ETUDE DES ORBITES DE SATELLITES ARTIFICIELS  
AUTOUR DE LA LUNE  
A L'AIDE D'UNE METHODE DE MOYENNISATION**

*Rapporteurs :*

*Joaquim Font, Carles Simó (Université de Barcelone)*

*Jacques Henrard (Université de Namur)*

*Soutenue le 17 Mai 1994, devant le jury composé de :*

*Joaquim Font (Université de Barcelone)*

*Jacques Henrard (Université de Namur)*

*Jean Kovalevsky (Observatoire de la Côte d'Azur)*

*Paul Legendre (CNES Toulouse)*

*Christian Marchal (ONERA Chatillon)*

*Charles Marle (Université de Paris VI)*

*Irène Stellmacher (BDL, Université de Lille I)*

*Rapporteur*

*Rapporteur*

*Président du jury*

*Examineur*

*Examineur*

*Examineur*

*Directrice de Thèse*





## Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Irène Stellmacher, ma directrice de thèse pour m'avoir accordé sa confiance et dirigé tout au long de ce travail.

Je suis reconnaissant à Carles Simó de m'avoir accueilli pendant six mois à l'université de Barcelone. Ce séjour a été particulièrement fructueux et j'ai apprécié la chaleur de l'accueil qui m'avait été réservé par tous les professeurs.

Je remercie Jacques Foliard et Michel Vincent du Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse qui ont suivi avec passion ce projet.

Je tiens à remercier Jean Kovalevsky qui a accepté de présider ce jury, ainsi que Joaquim Font, Jacques Henrard, Paul Legendre, Christian Marchal et Charles Marle d'avoir bien voulu en faire partie.

Ces quelques années passés au Bureau des Longitudes ont été un véritable plaisir grâce à la bonne ambiance qui règne parmi les étudiants. Je remercie l'ensemble du BDL pour l'aide qui m'a été fournie tout au long de la réalisation de ma thèse. En particulier, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Jacques Laskar pour avoir mis à ma disposition son manipulateur algébrique sans lequel ce travail n'aurait pas pu aboutir. Un petit mot aussi pour Jean-Louis Sagnier et ses remarques perspicaces. Je n'oublie pas Alain Montintin et sa patience lorsque je bloquais les machines informatiques.

Je dédie cette thèse à Dominique, mon amie, pour sa gentillesse et le réconfort qu'elle m'a apportés pendant ces trois années.

## Résumé

Le but de cette thèse est l'étude des trajectoires de satellites artificiels sélénocentriques situés à une distance inférieure à 13000 km du centre de la Lune. Dans la première partie, le développement de la perturbation est effectué en fonction des petits paramètres utilisés. En particulier, on introduit des théories semi-analytiques du mouvement de la Lune autour de la Terre et la libration du plan de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique. La deuxième partie de cette thèse montre que le choix des variables canoniques (variables de Poincaré) va permettre d'obtenir des équations sans singularités. Il a été nécessaire d'introduire des expressions nouvelles qui soient suffisamment compactes pour être exploitables. La longitude du satellite est éliminée à l'aide de l'algorithme de Deprit utilisant les transformées de Lie. Les parties séculaires et fonctions génératrices non développées en excentricité  $y$  sont aussi exprimées. L'élimination des angles à moyenne période se fait ensuite pour obtenir un système deux fois moyenné dont les périodes sont a priori supérieures à 28 jours. Le dernier chapitre décrit les algorithmes de calculs numériques engendrés par le travail analytique. Ils sont appliqués à quelques exemples caractéristiques qui permettent de valider la méthode employée.

## Abstract

The aim of the thesis is the study of trajectories of artificial satellites at a distance from the centre of the Moon below 13000 km. In the first part, the expansion of the perturbing function into the small parameters used is made. In particular, we introduce a semi-analytic theory of the motion of the Moon around the Earth and the libration of the lunar equatorial plane. The second part of this thesis shows that the choice of the canonic Poincaré variables permits to obtain equations without singularities. It has been necessary to introduce new expressions that are sufficiently compact to be exploitable. The longitude of the satellite is eliminated using the Lie series algorithm. The expressions of the secular parts and generative functions not expanded in power of eccentricity and inclination are given. Then, by eliminating mean period angles, we obtain a twice averaged set whose periods are over 28 days. The last chapter describes the algorithms of numerical calculation, based on the analytic work. They are applied to characteristic examples, which permit to validate the method used.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCTION</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>FONCTION PERTURBATRICE</b>                                 | <b>8</b>  |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 8         |
| 2.2      | Potentiels terrestre et solaire . . . . .                     | 8         |
| 2.2.1    | Développement de Jacobi . . . . .                             | 9         |
| 2.2.2    | Energie potentielle . . . . .                                 | 11        |
| 2.3      | Potentiel lunaire exprimé en harmoniques sphériques . . . . . | 12        |
| 2.4      | Choix du système de référence . . . . .                       | 12        |
| 2.5      | Changements de repères . . . . .                              | 13        |
| 2.5.1    | Angles d'Euler . . . . .                                      | 13        |
| 2.5.2    | Plan équatorial lunaire et libration . . . . .                | 17        |
| 2.5.3    | Plan méridien écliptique . . . . .                            | 18        |
| 2.6      | Formulation hamiltonienne . . . . .                           | 19        |
| 2.7      | Développement des fonctions perturbatrices . . . . .          | 19        |
| 2.7.1    | Généralités . . . . .   | 19        |
| 2.7.2    | Développement des perturbations extérieures . . . . .         | 21        |
| 2.7.3    | Développement du potentiel lunaire . . . . .                  | 24        |
| 2.7.4    | Séparation des différents ordres . . . . .                    | 24        |
| <b>3</b> | <b>TRAVAIL ANALYTIQUE</b>                                     | <b>28</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 28        |
| 3.2      | Hamiltonien et variables canoniques . . . . .                 | 30        |
| 3.2.1    | Variables de Poincaré . . . . .                               | 30        |
| 3.2.2    | Variables utilisées et dérivées partielles . . . . .          | 34        |
| 3.2.3    | Variables utilisées et angles d'Euler . . . . .               | 38        |
| 3.3      | Première moyennisation par la méthode de Lie . . . . .        | 43        |
| 3.3.1    | Formulation générale . . . . .                                | 43        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.2    | Détails de calcul . . . . .                              | 46         |
| 3.3.3    | Expressions moyennées . . . . .                          | 53         |
| 3.3.4    | Fonctions génératrices purement périodiques . . . . .    | 60         |
| 3.4      | Seconde moyennisation par la méthode de Lie . . . . .    | 66         |
| 3.4.1    | Les fréquences fixes du hamiltonien . . . . .            | 66         |
| 3.4.2    | Les particularités de la méthode: introduction . . . . . | 67         |
| 3.4.3    | Eliminations . . . . .                                   | 68         |
| <b>4</b> | <b>APPLICATIONS A L'ETUDE DES ORBITES</b>                | <b>73</b>  |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                   | 73         |
| 4.2      | Présentation de l'algorithme . . . . .                   | 73         |
| 4.3      | Exemples . . . . .                                       | 77         |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSION</b>  | <b>94</b>  |
| <b>A</b> | <b>Hamiltoniens moyennés une fois</b>                    | <b>98</b>  |
| <b>B</b> | <b>Hamiltoniens moyennés deux fois</b>                   | <b>103</b> |
| <b>C</b> | <b>Harmoniques sphériques du potentiel lunaire</b>       | <b>107</b> |



# Chapitre 1

## INTRODUCTION

Nous assistons actuellement à un regain d'intérêt pour les missions à but scientifique sur la Lune (télescopes sur la face cachée, bases lunaires...). Dans cette perspective, il s'avère intéressant d'étudier les orbites de satellites artificiels de la Lune permettant des liaisons radio avec la Terre ou l'étude du potentiel lunaire. Dans le cadre d'un contrat avec le Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse, j'ai étudié le comportement de telles orbites sur une période de quelques années (durée caractéristique d'une mission spatiale). Je me suis attaché à construire des outils permettant : d'une part, une rapidité de calcul, et d'autre part, l'étude d'un ensemble de solutions le plus général possible. Ceci permettra de retenir les classes d'orbites les mieux adaptées à un problème donné. Toutefois, ce travail se consacre à l'étude des trajectoires situées à une distance inférieure à 13000 km et ne tient compte que des forces gravitationnelles. La fonction perturbatrice dépend alors de l'attraction terrestre, du potentiel lunaire décrit en harmoniques sphériques, de l'attraction solaire et de la libration de l'équateur lunaire sur l'écliptique.

Afin de pouvoir étudier tous les types d'orbites, les équations introduites doivent rester les plus générales possibles et permettre de trouver la solution en fonction de n'importe quelle condition initiale. L'originalité du travail repose sur la possibilité de considérer des orbites de satellite pour toute valeur de l'excentricité ou de l'inclinaison à un demi grand axe initial donné. Cette étude diffère d'autres travaux employant l'intégration numérique ou la recherche d'une écriture analytique. L'intégration numérique directe n'est pas appropriée pour les deux raisons essentielles suivantes :

- (a) les courtes périodes du satellite (périodes de révolution de celui-ci autour de la lune) nécessitent un pas d'intégration de l'ordre de la minute : ce qui se traduit par une propagation de l'erreur importante pour de longues durées et un temps de calcul prohibitif,
- (b) l'intégration numérique ne permet pas d'avoir une vue globale de l'ensemble des solutions.

En choisissant une approximation qui dépend du type d'orbite considéré, une méthode analytique permet d'obtenir une expression algébrique approchée de la position. Ce type de méthode a été employée par Roy[Roy68] qui a intégré les équations de Lagrange complètement au premier ordre et partiellement au second. Il a développé les équations en fonction de l'excentricité du satellite et a utilisé les variables  $a, e, i, M, \omega, \Omega$  non régulières pour  $e = 0$  et  $i = 0$ . Il se limite donc aux excentricités faibles et aux inclinaisons non nulles. De plus, la construction d'une telle solution devient difficile à mettre en œuvre lorsque l'on considère toutes les perturbations.

C'est pour cela qu'il est préférable d'utiliser une méthode mixte : des transformations analytiques sont effectuées sur le système qui est ensuite intégré numériquement. Puisque le satellite est suffisamment proche de la lune, il est possible d'utiliser une méthode de perturbation. Les angles à variations rapides sont supprimés à l'aide d'une transformation canonique proche de l'identité. Cette méthode particulière s'appelle une méthode de moyennisation. J'ai amélioré un travail effectué par Oesterwinter[Oes70] dans les années 70 en y intégrant des modèles plus élaborés du potentiel sphérique de la Lune et du mouvement de celle-ci par rapport à la Terre. Son étude a été étendue en utilisant les variables de Poincaré qui sont régulières lorsque l'excentricité ou l'inclinaison s'annulent. Surtout, j'ai choisi d'employer l'algorithme de Deprit[Dep80], utilisant les transformées de Lie. Cet algorithme est plus adapté à un processus itératif que la méthode de Von Zeipel (utilisée par Oesterwinter). Il a été complètement automatisé à l'aide du manipulateur algébrique de Laskar[Las89b].

Je n'ai jamais développé les expressions en fonction de l'excentricité ou de l'inclinaison. Cette approche est nouvelle lorsque les perturbations ont des origines différentes. Dans le cas considéré, les forces d'origines gravitationnelles différentes peuvent être alternativement prépondérantes : lorsque le satellite est proche de la Lune, les termes décrivant la non sphéricité du potentiel lunaire sont plus importants que ceux décrivant la perturbation terrestre, effet qui s'inverse lorsque le satellite s'en éloigne. Ce problème

m'a obligé à écrire les fonctions utiles à la méthode à l'aide d'expressions nouvelles pour mener à bien mon travail analytique et obtenir des formules relativement compactes. Cette compacité des formules a aussi été améliorée à l'aide de plusieurs changements de repères.

Dans une première partie, le développement de la perturbation est effectué en fonction des petits paramètres utilisés. En particulier, on introduit des théories semi-analytiques du mouvement de la lune autour de la Terre [CCT82] et de la libration du plan de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique [Eck81].

Une deuxième partie de ce rapport montre le choix de variables canoniques (variables de Poincaré) qui va permettre d'obtenir des équations sans singularités. Il a été nécessaire de calculer les dérivées partielles des variables classiques par rapport à celles-ci. Les parties séculaires et les fonctions génératrices non développées, qui permettent d'avoir une théorie au second ordre  $y$  sont aussi exprimées. On montrera l'élimination de la longitude moyenne du satellite et l'introduction d'une fonction génératrice par la méthode de Lie. L'élimination des angles à moyenne période se fera ensuite pour obtenir un système deux fois moyenné dont les périodes sont a priori supérieures à 28 jours.

Je termine mon exposé par la description des algorithmes de calculs numériques engendrés par le travail analytique. Je les applique à quelques exemples caractéristiques qui permettent ensuite de valider la méthode employée.



## Chapitre 2

# FONCTION PERTURBATRICE

### 2.1 Introduction

Notre étude considère le mouvement d'un satellite artificiel sélénocentrique à une distance inférieure à 13000km du centre de la Lune. Afin de valider les méthodes d'intégration présentées en introduction, nous n'avons considéré que les actions dérivant d'un potentiel gravitationnel. Il n'y a pas d'effet de frottement et l'influence de la pression de radiation est difficile à mettre en équation pour le moment. En effet, ne connaissant pas le type de satellite étudié, nous ne pouvons pas définir l'influence de celle-ci qui dépend de la forme et du coefficient de réflectivité du satellite. De toute façon, sa contribution est toujours moins importante que celle des perturbations principales. A une distance suffisamment faible du centre de la Lune, seuls trois corps ont une influence non négligeable sur un satellite lunaire : la Lune, la Terre et le Soleil. Le développement des perturbations provenant de ces trois corps est obtenu dans des repères différents. Nous montrons dans ce chapitre et les suivants comment passer d'un repère à l'autre sans toutefois compliquer l'étude. L'importance des différentes perturbations nous amène aussi à classer les orbites en fonction des conditions initiales.

### 2.2 Potentiels terrestre et solaire

On peut seulement appliquer les lois fondamentales de la dynamique dans un repère inertiel. Pour notre étude, ce repère serait centré aux barycentres

des trois corps considérés et aurait des axes fixes. Mais pour obtenir des solutions directement utilisables tout en gardant des équations canoniques, il est nécessaire de positionner l'origine de notre repère au centre de la Lune. Pour cela, nous utilisons les coordonnées de Jacobi comme l'a fait Oesterwinter [Oes70]. Nous obtenons la même expression de manière plus élégante.

## 2.2.1 Développement de Jacobi

La Lune qui a l'influence prépondérante est désignée par corps 1, la Terre est numérotée 2 et le Soleil 3. Le satellite est le corps 0.

Si  $\vec{r}_i'$  définit les coordonnées du corps  $i$  dans le repère inertiel, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{i=3} m_i \vec{r}_i' = \vec{0} \quad (2.1)$$

Les équations de Newton sont

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i' = - \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i'} \quad (2.2)$$

où  $F$ , l'énergie potentielle est définie par :

$$F = -G \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (2.3)$$

Les coordonnées de Jacobi sont classiquement utilisées pour mettre un problème sous forme canonique et bien adaptées au satellite lunaire.

Le principe consiste à repérer chaque corps par rapport au barycentre des précédents :

-Le mouvement de la Lune (corps 1) est repéré par rapport à celui du satellite (corps 0) (ou vice versa); vecteur  $\vec{r}'_0$ ,

-Le mouvement de la Terre (corps 2) est repéré par rapport au barycentre Lune satellite .C'est à dire la Lune;  $\vec{r}'_2$ ,

-Le mouvement du Soleil (corps 3) est repéré par rapport au barycentre Terre Lune satellite. C'est à dire Terre Lune;  $\vec{r}'_3$ .

Nous allons utiliser la notation,

$$\mu_{ij} = \frac{m_i}{\sum_{0 \leq k \leq j} m_k} \quad (2.4)$$

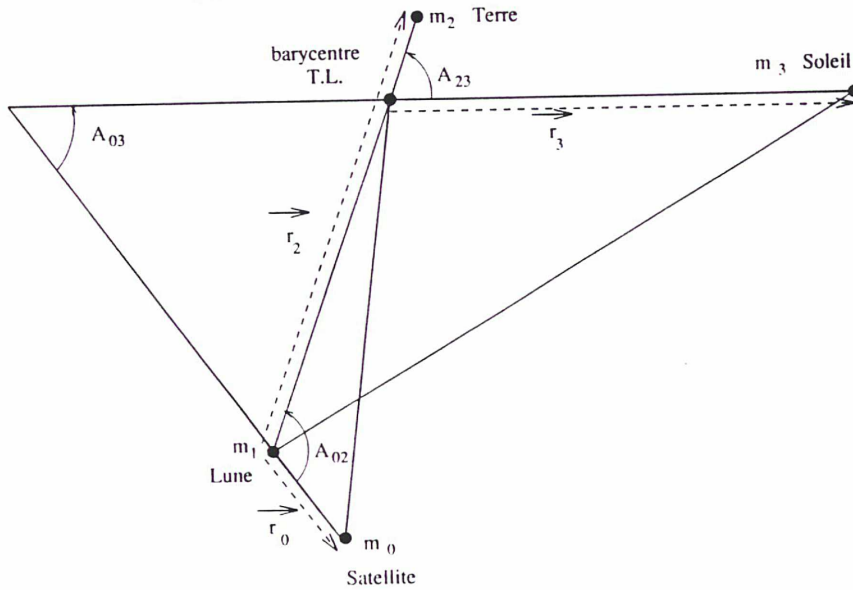
pour obtenir la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{r}'_0 \\ \vec{r}'_2 \\ \vec{r}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{03} & \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\mu_{01} & -\mu_{11} & 1 & 0 \\ -\mu_{02} & -\mu_{12} & -\mu_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}'_0 \\ \vec{r}'_1 \\ \vec{r}'_2 \\ \vec{r}'_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Cette matrice (4 4) est inversible. Nous obtenons donc :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}'_0 \\ \vec{r}'_1 \\ \vec{r}'_2 \\ \vec{r}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{11} & -\mu_{22} & -\mu_{33} \\ 1 & -\mu_{01} & -\mu_{22} & -\mu_{33} \\ 1 & 0 & \mu_{02} + \mu_{12} & -\mu_{33} \\ 1 & 0 & 0 & \mu_{03} + \mu_{13} + \mu_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{r}'_0 \\ \vec{r}'_2 \\ \vec{r}'_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

FIG. 2.1 - coordonnées de Jacobi



Afin d'obtenir une formulation hamiltonienne des équations régissant le système, nous devons connaître l'expression de l'énergie potentielle en fonction des coordonnées de Jacobi.

## 2.2.2 Energie potentielle

Les relations (2.2) et (2.6) nous permettent d'écrire :

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{1}{m_0} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_0'} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_1'} \quad (2.7)$$

D'après (2.3);

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_0 = G \left[ -\frac{m_0 m_1}{m_0 r_{01}^3} (\vec{r}_0' - \vec{r}_1') - \frac{m_0 m_2}{m_0 r_{02}^3} (\vec{r}_0' - \vec{r}_2') - \frac{m_0 m_3}{m_0 r_{03}^3} (\vec{r}_0' - \vec{r}_3') \right. \\ \left. + \frac{m_0 m_1}{m_0 r_{01}^3} (\vec{r}_1' - \vec{r}_0') + \frac{m_1 m_2}{m_0 r_{02}^3} (\vec{r}_1' - \vec{r}_2') + \frac{m_1 m_3}{m_0 r_{03}^3} (\vec{r}_1' - \vec{r}_3') \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si l'on utilise l'équation (2.7) et néglige la masse du satellite par rapport à celles des autres corps, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_0 = G \left[ -\frac{m_1}{r_0^3} \vec{r}_0 - \frac{m_2}{r_{02}^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) - \frac{m_3}{r_{03}^3} \left( \vec{r}_0 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \right) \right. \\ \left. + \frac{m_2}{r_2^3} (-\vec{r}_2) + \frac{m_3}{r_{13}^3} \left( -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

on peut obtenir une nouvelle énergie potentielle qui vérifie

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{\partial F}{\partial \vec{r}_0} \quad (2.10)$$

Cette fonction est définie par :

$$F = G \left[ -\frac{m_1}{r_0} + \frac{m_2}{r_2^3} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2 - \frac{m_2}{r_{02}} - \frac{m_3}{r_{03}} + \frac{m_3}{r_{13}^3} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_3 \right) \right] \quad (2.11)$$

Cette expression de l'énergie potentielle peut s'écrire de la façon suivante :

$$F = -\frac{\mu}{r} + F_{ext}(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

où  $-\frac{\mu}{r}$  désigne la partie principale du potentiel et  $F_{ext}(\vec{r}, t)$  la partie perturbatrice de celui-ci due aux corps extérieurs.

## 2.3 Potentiel lunaire exprimé en harmoniques sphériques

L'énergie potentielle décrivant le potentiel de gravitation lunaire est développée en harmoniques sphériques dans le plan équatorial lunaire. Son expression est donnée par :

$$F_{lun} = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 + \sum_{l=2}^{16} \sum_{m=0}^l \left( \frac{R}{r} \right)^l (C_{lm} \cos mw' + S_{lm} \sin mw') P_{lm}(\sin \varphi') \right] \quad (2.13)$$

où :

$\mu$  est la constante de gravitation lunaire,

$C_{lm}$  et  $S_{lm}$  sont les harmoniques du potentiel lunaire (voir annexe C),

$(r, w', \varphi')$  sont les coordonnées sphériques du satellite dans un repère fixe lié au plan équatorial lunaire,

$P_{lm}$  est une fonction de Legendre de première espèce [Rad91].

Cette fonction est définie sur  $[0, 1]$  par

$$P_{lm}(t) = \frac{(1-t^2)^{l/2}}{2^n} \sum_{k=0}^{k \leq (n-l)/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-l-2k)!} t^{n-l-2k} \quad (2.14)$$

Le modèle choisi est celui de Bills et Ferrari [Bil80]. Les harmoniques utilisées sont normalisées et données par les relations [Rad91] :

$$\begin{aligned} \overline{C}_{l0} &= \sqrt{2l+1} C_{l0} \\ \left\{ \begin{array}{c} \overline{C}_{lm} \\ \overline{S}_{lm} \end{array} \right\} &= \sqrt{2(2l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left\{ \begin{array}{c} C_{lm} \\ S_{lm} \end{array} \right\} \quad (1 \leq m \leq l) \end{aligned}$$

## 2.4 Choix du système de référence

L'étude des perturbations du satellite fait intervenir plusieurs repères. Le premier utilise le plan équatorial de la Lune et permet d'effectuer le développement du potentiel en harmoniques sphériques. Ce plan n'est pas inertiel et donc impropre à l'écriture des équations fondamentales de la



dynamique. Son avantage est la compacité du développement. Un repère lié au mouvement de la Lune autour de la Terre permet d'exprimer simplement la position d'un corps par rapport à l'autre mais n'est pas inertiel non plus.

Le troisième est le plan de l'écliptique qui est choisi comme système de référence pour les raisons suivantes :

- il est supposé fixe ( la durée des missions est courte )
- l'orbite de la Lune autour de la Terre est donnée de façon précise dans ce repère.
- l'orbite de la Terre autour du Soleil a une expression simple.
- le mouvement du plan de l'équateur lunaire par rapport à ce plan est calculé avec une bonne précision.
- les positions du plan de l'équateur lunaire et de l'orbite de la Lune sont définies par des inclinaisons très petites.

Les axes de référence sont donc

- $Ox$  dans le plan parallèle à l'écliptique passant par la Lune dirigé vers le point  $\gamma$  à J2000.
- $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$  dans le même plan.
- $Oz$  termine le trièdre.

## 2.5 Changements de repères

Les équations régissant le système sont toujours écrites dans le référentiel inertiel. Néanmoins, le potentiel lunaire s'exprime plus simplement dans le plan équatorial et l'expression de la perturbation terrestre se développe avec un nombre restreint de termes dans un plan méridien à l'écliptique contenant la Terre. Nous devons donc connaître l'expression des rotations qui permettent de passer d'un repère à l'autre. La formulation la mieux adaptée est celle d'Euler.

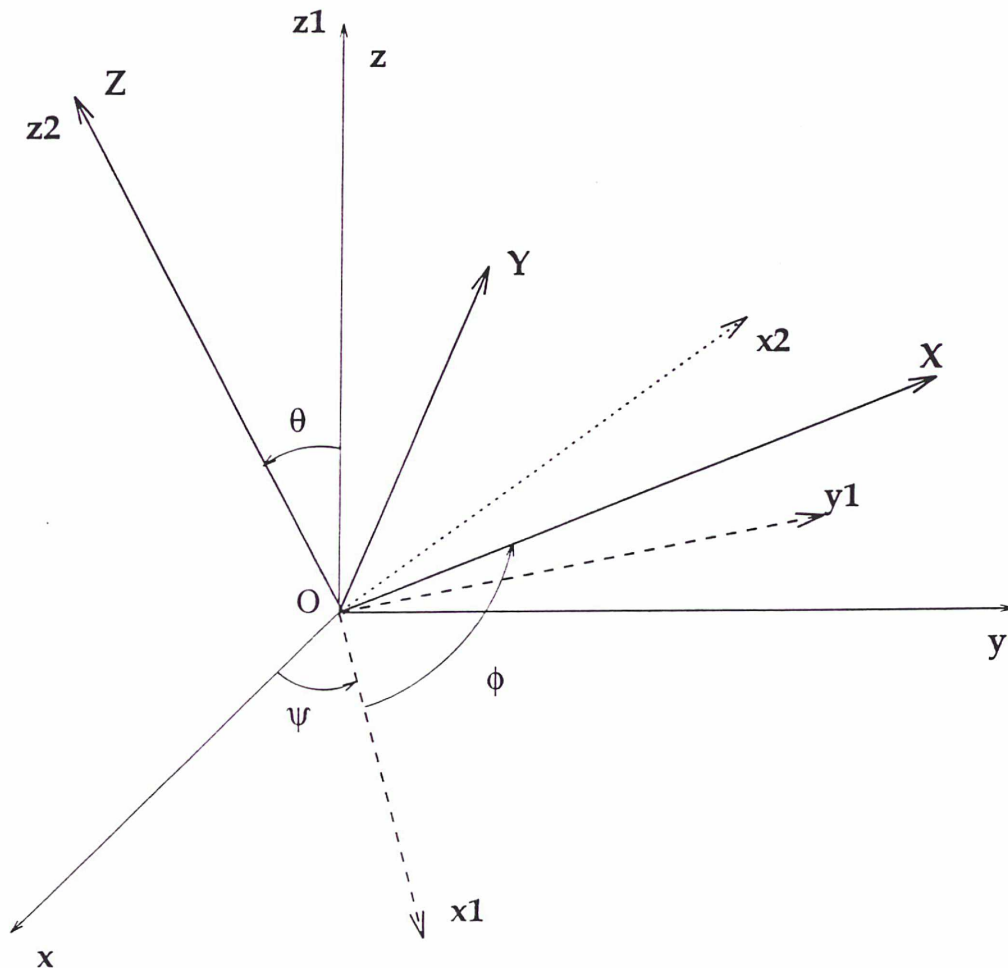
### 2.5.1 Angles d'Euler

La présentation des angles d'Euler est celle du cours de mathématiques de Lelong-Ferrand Anaudiès [LFA78]. Soit  $0xyz$  un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^3$ ,  $0XYZ$  un autre repère de même origine. On détermine  $0XYZ$  à l'aide des trois angles d'Euler :

- Le plan  $0XY$  coupe  $0xy$  suivant une droite que nous orientons suivant  $0x_1$ .

- L'angle  $\psi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox_1})$  s'appelle la précession.
- L'angle  $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OZ})$  s'appelle la nutation.
- L'angle  $\varphi = (\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{OX})$  mesuré dans le plan orienté  $0XY$ , s'appelle la rotation propre.

FIG. 2.2 - Angles d'Euler





Il ne reste qu'à déterminer la matrice de passage  $R(\varphi, \theta, \psi)$  des vecteurs unitaires de  $0xyz$  à ceux de  $0XYZ$ . Pour cela introduisons les repères intermédiaires  $0x_1y_1z_1$  et  $0x_2y_2z_2$  orthonormés directs et tels que

$$0z_1 = 0z, \quad x_2 = x_1 \quad \text{et} \quad 0z_2 = 0Z.$$

Appelons  $M$  la matrice de passage de  $(0xyz)$  à  $(0x_1y_1z_1)$ ,  $N$  celle de  $(0x_1y_1z_1)$  à  $(0x_2y_2z_2)$  et  $P$  de  $(0x_2y_2z_2)$  à  $(0XYZ)$ .

$$R(\varphi, \theta, \psi) = M N P \tag{2.15}$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

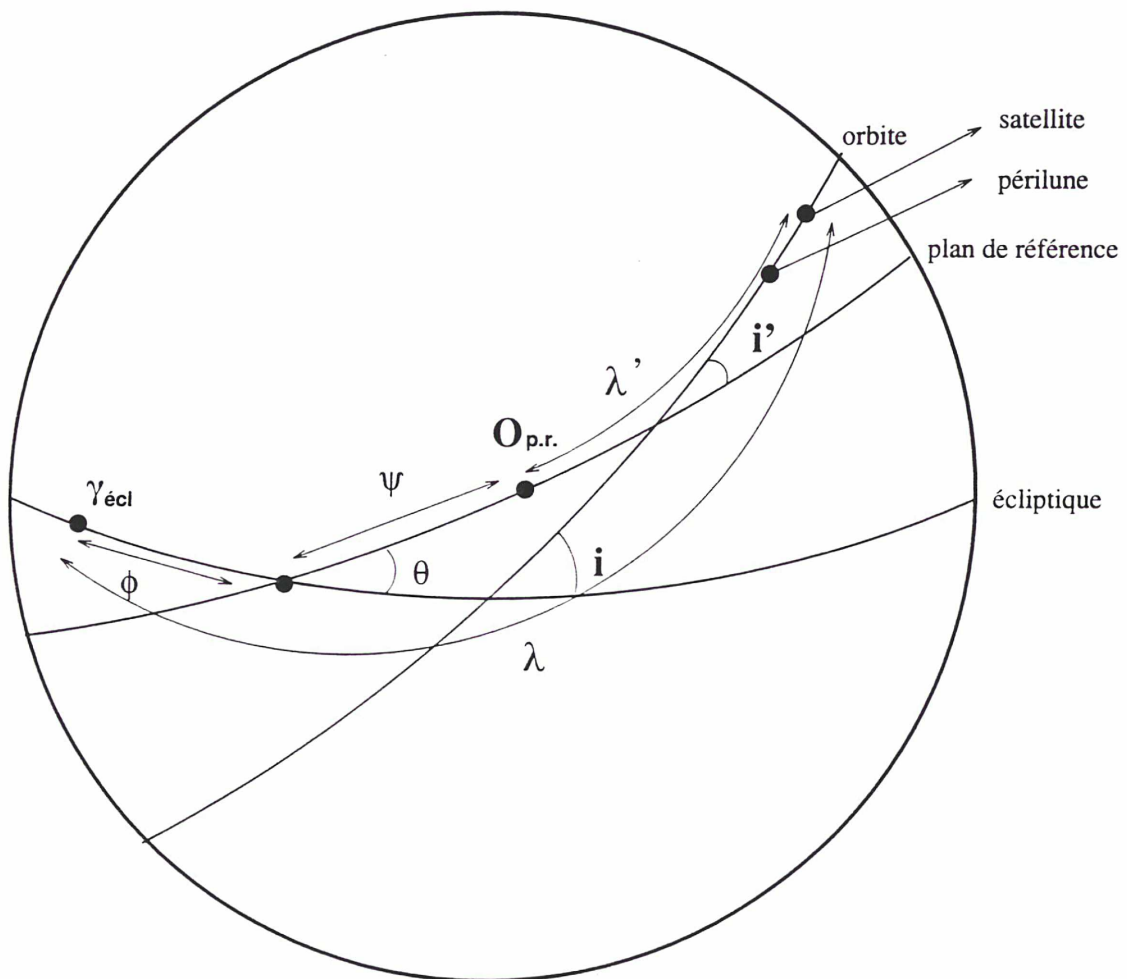
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R(\varphi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Cette équation matricielle (2.16) nous permet désormais d'exprimer les coordonnées dans un repère quelconque en fonction des coordonnées dans le repère inertiel, la matrice transposée  ${}^tR(\varphi, \theta, \psi)$  nous permet d'obtenir des relations entre les différentes dérivées partielles d'une fonction  $f$  (2.17).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} \\ \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial Z} \end{pmatrix} = {}^tR(\varphi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Nous représenterons désormais les angles à l'aide de triangles sphériques.

FIG. 2.3 - Angles d'Euler et triangles sphériques



## 2.5.2 Plan équatorial lunaire et libration

L'expression (2.13) utilise les coordonnées du satellite dans le plan équatorial lunaire. Il est nécessaire de les exprimer en fonction des coordonnées dans le repère écliptique à l'aide des angles d'Euler. La libration du plan équatorial lunaire est définie à l'aide de la théorie de Eckhart [Eck81]. Il utilise les paramètres classiques :

- $\rho$  est la libration en inclinaison,
- $\sigma$  est la libration du noeud,
- $\tau$  est la libration en longitude.

Le changement de système de référence s'exprime à l'aide des 3 angles d'Euler (voir 2.15):

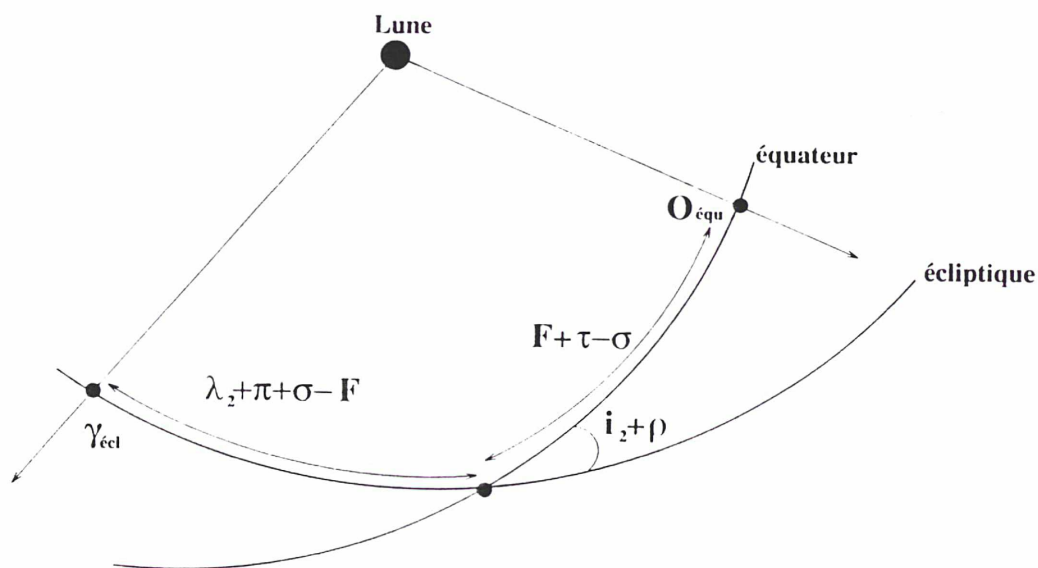
$$\begin{cases} \varphi' &= \lambda_2 - F + \pi + \sigma \\ \theta' &= I_2 + \rho \\ \psi' &= F + \tau - \sigma \end{cases} \quad (2.18)$$

$F$  est la longitude moyenne de la Lune comptée à partir du noeud ascendant de l'orbite lunaire,

$\lambda_2$  est la longitude moyenne sidérale,

$I_2$  est l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique.

FIG. 2.4 - Angles de libration

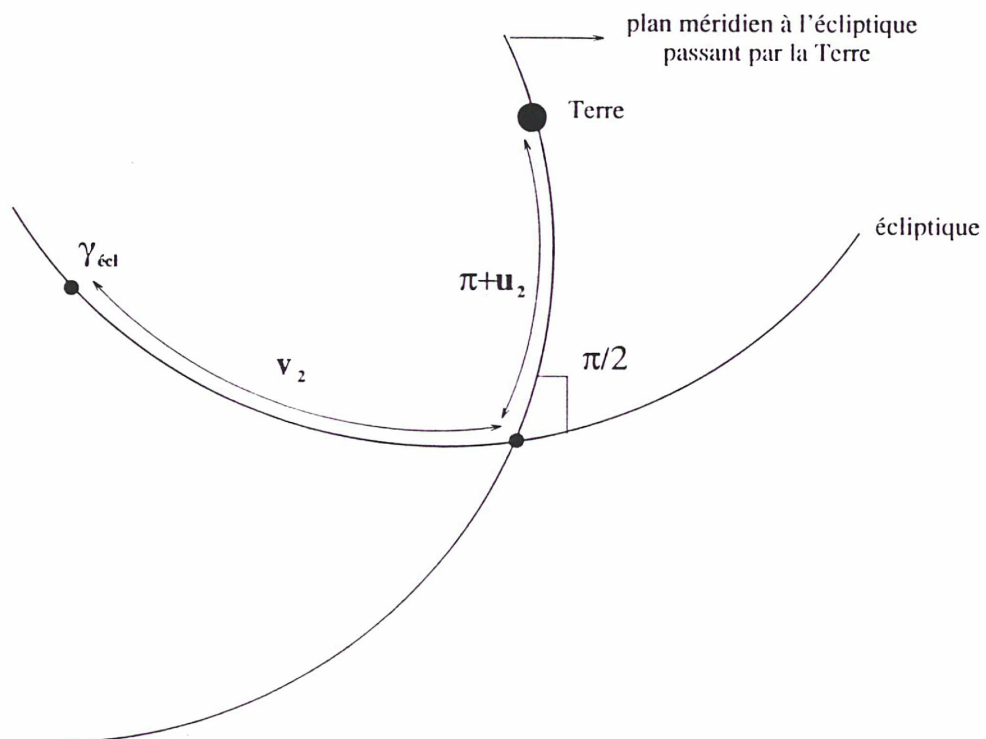


### 2.5.3 Plan méridien écliptique

Le potentiel terrestre introduit par l'équation (2.11) fait intervenir les coordonnées de la Lune par rapport à la Terre dans le plan écliptique J2000. Nous avons utilisé la théorie analytique ELP-2000 [CCT82]. Cette théorie nous donne les coordonnées sphériques  $(r_2, v_2, u_2)$  de la Lune par rapport à la Terre dans le repère écliptique J2000. Pour obtenir des séries plus compactes de la perturbation terrestre, nous exprimons, à chaque fois que cela est possible, le potentiel dans un plan méridien à l'écliptique contenant la Terre. Dans ce repère, la seule variable contenant explicitement le temps est  $r_2$ . La matrice de rotation définie pour effectuer ce changement utilise les trois angles d'Euler suivants (voir 2.15):

$$\begin{cases} \varphi'' = v_2 \\ \theta'' = \frac{\pi}{2} \\ \psi'' = \pi + u_2 \end{cases} \quad (2.19)$$

FIG. 2.5 - Passage au plan méridien écliptique



## 2.6 Formulation hamiltonienne

Nous avons défini un repère galiléen dans lequel nous connaissons les coordonnées cartésiennes du satellite. Nous pouvons donc écrire les équations canoniques. Le hamiltonien décrivant le système a pour expression

$$H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 + F(\vec{r}, t) \quad (2.20)$$

où  $\vec{r}$  et  $\dot{\vec{r}}$  sont des variables conjuguées et  $F(\vec{r}, t)$  le potentiel.

Les équations différentielles qui régissent le mouvement sont donc :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} &= -\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{\vec{r}}} &= \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La partie intégrable  $H_0 = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{\|\vec{r}\|}$  décrit le mouvement d'un corps de masse 1 autour d'une Lune ponctuelle.

Le hamiltonien s'écrit désormais de la façon suivante :

$$H = H_0 + R(\vec{r}, t) \quad (2.22)$$

où  $R(\vec{r}, t)$  est la fonction perturbatrice.

## 2.7 Développement des fonctions perturbatrices

### 2.7.1 Généralités

Les méthodes de moyennisation que nous utilisons font intervenir des développements de la fonction perturbatrice par rapport à un petit paramètre. Il est nullement nécessaire que celui-ci apparaisse explicitement mais il faut classer les perturbations en fonction de leur taille respective.

Nous allons d'abord expliquer par quel moyen nous avons pu automatiser ce classement à l'aide du manipulateur algébrique. Avant d'effectuer le développement, il est associé un entier relatif  $n(\text{constante})$  à chaque constante numérique. Cet entier définit l'amplitude de cette constante dans les expressions.



On choisit  $n(\text{constante})$  vérifiant :

$$\left| n(\text{constante}) + 10 \log \left( \frac{|constante|}{|constante \text{ équivalente du mouvement principal}|} \right) \right| < \frac{1}{2}$$

Par exemple, si une perturbation est  $10^{3.6}$  fois plus petite que le potentiel principal, on a  $n(\text{constante}) = 36$ . Par cet artifice, le découpage est fin et le logarithme transforme les produits en sommes. Surtout, les unités utilisées n'ont aucune importance. En effet, si l'on voulait directement utiliser les coefficients numériques, il serait nécessaire de ramener les demi-grands axes du satellite à l'unité. Ce que nous n'effectuons jamais.

Donc, le manipulateur trie les termes en fonction de cet entier. Les valeurs de ces entiers apparaîtront explicitement dans les parties suivantes. Nous nous refusons tout au long de l'étude d'associer un entier relatif à une variable qui ne soit pas une véritable constante. Cette contrainte nous permet de conserver des équations valables pour une large gamme de conditions initiales.

Il est néanmoins clair que la distance Terre-Lune et le rayon équatorial lunaire déterminent principalement la hiérarchie des potentiels. Roy [Roy68] l'a par ailleurs clairement montré en représentant les potentiels en fonction de la distance Lune-satellite. Aussi, ce phénomène nous amène à différencier 3 types d'orbites.

- Les orbites situées à une distance inférieure à 2 rayons lunaires sont appelées orbites **basses**. Les harmoniques du potentiel lunaire sont prépondérants.
- Les orbites **hautes** situées à une distance supérieure à 5 rayons lunaires. L'influence de la Terre sur le satellite est plus importante que celle des harmoniques du potentiel lunaire.
- Nous désignerons par **intermédiaires** des orbites qui n'entrent pas dans les 2 premières catégories. Ce sont en principe des orbites très excentrées ou des orbites de demi-grand axe 3 à 4 rayons lunaires. Pour ces orbites, nous considérons que les perturbations lunaires et terrestres sont équivalentes.

De même, l'étude considère toujours le mouvement d'un satellite à une distance inférieure à 13000 km du centre de la Lune. Lorsque celui-ci est à une distance supérieure, l'influence de la Terre est trop importante. Notre

méthode de résolution, qui consiste à considérer comme problème non perturbé un problème képlérien autour de la Lune ne peut plus s'appliquer car il y a deux masses importantes que sont la Terre et la Lune.

### 2.7.2 Développement des perturbations extérieures

L'expression en coordonnées cartésiennes (2.11) ne peut être utilisée que pour effectuer des intégrations numériques directes du système (2.21). L'algorithme d'intégration que nous allons utiliser nécessite une expression polynomiale du type (2.13). Afin de détailler  $F_{ext}$  (2.11), il est nécessaire d'introduire les angles  $\mathcal{A}_{02}$ ,  $\mathcal{A}_{03}$ ,  $\mathcal{A}_{23}$  définis par :

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2 &= r_0 r_2 \cos \mathcal{A}_{02} \\ \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_3 &= r_0 r_3 \cos \mathcal{A}_{03} \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 &= r_2 r_3 \cos \mathcal{A}_{23}\end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.6), on obtient le potentiel extérieur  $F_{ext}$  avec une précision suffisante pour toutes les orbites considérées :

$$\begin{aligned}F_{ext} &= -\frac{Gm_2}{r_2} \sum_{k=2}^{k=6} \left(\frac{r}{r_2}\right)^k P_k(\cos \mathcal{A}_{02}) \\ &\quad - \frac{Gm_3}{r_3} \left(\frac{r}{r_3}\right)^2 P_2(\cos \mathcal{A}_{03}) \\ &\quad - G \frac{m_2 m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{r^2 r_2}{r_3^4}\right) \cdot \\ &\quad \quad \left(\frac{3}{2} \cos \mathcal{A}_{23} - \frac{15}{2} \cos \mathcal{A}_{23} \cos^2 \mathcal{A}_{03} + 3 \cos \mathcal{A}_{02} \cos \mathcal{A}_{03}\right)\end{aligned}$$

$P_k$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $k$ , on peut écrire aussi ce potentiel de la façon suivante :



$$\begin{aligned}
F_{ext} = & -p^{n_1} G m_2 \left( \frac{r^2}{r_2^3} \right) \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \mathcal{A}_{02} \right) \\
& - p^{n_2} G m_2 \left( \frac{r^3}{r_2^4} \right) \left( -\frac{3}{2} \cos \mathcal{A}_{02} + \frac{5}{2} \cos^3 \mathcal{A}_{02} \right) \\
& - p^{n_3} G m_2 \left( \frac{r^4}{r_2^5} \right) \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \mathcal{A}_{02} + \frac{35}{8} \cos^4 \mathcal{A}_{02} \right) \\
& - p^{n_4} G m_2 \left( \frac{r^5}{r_2^6} \right) \left( \frac{15}{8} \cos \mathcal{A}_{02} - \frac{35}{8} \cos^3 \mathcal{A}_{02} + \frac{63}{8} \cos^5 \mathcal{A}_{02} \right) \\
& - p^{n_5} G m_2 \left( \frac{r^6}{r_2^7} \right) \left( -\frac{5}{16} + \frac{105}{16} \cos^2 \mathcal{A}_{02} - \frac{315}{16} \cos^4 \mathcal{A}_{02} + \frac{231}{16} \cos^6 \mathcal{A}_{02} \right) \\
& - p^{n_6} G m_3 \left( \frac{r^2}{r_3^3} \right) \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \mathcal{A}_{03} \right) \\
& - p^{n_7} G \frac{m_2 m_3}{m_1 + m_2} \left( \frac{r^2 r_2}{r_3^4} \right) \\
& \quad \left( \frac{3}{2} \cos \mathcal{A}_{23} - \frac{15}{2} \cos \mathcal{A}_{23} \cos^2 \mathcal{A}_{03} + 3 \cos \mathcal{A}_{02} \cos \mathcal{A}_{03} \right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$p$  est une constante valant 1 qui est remplacée par sa valeur avant intégration. Les  $n_i$  sont les entiers définis dans la partie précédente. Les  $p^{n_i}$  permettent de représenter les petits paramètres utiles à la méthode de résolution. Leurs valeurs, fonction des orbites considérées sont présentées dans le tableau 2.1.

Le temps apparaît sous forme explicite par la variable  $r_2$  et est aussi contenu dans les expressions  $\cos \mathcal{A}$ . Lorsque cela est possible, nous effectuons les rotations présentées au paragraphe 2.5.3 en utilisant le plan méridien à l'écliptique contenant la Terre. Dans ces conditions,  $F_{ext}$  est extrêmement compacte car  $\cos \mathcal{A}_{02}$  n'est fonction que de  $\frac{x''}{r}$  coordonnée cartésienne dans ce système de référence.

Bien souvent, les manipulations algébriques que nous effectuons, nécessitent des expressions dans le plan écliptique J2000. Nous utilisons alors directement la théorie ELP-2000 [CCT82] qui donne la position de la Terre en coordonnées sphériques  $(r_2, v_2, u_2)$ . La solution est exprimée sous la forme de développements en séries de Fourier dont les arguments, fonctions linéaires du temps, sont des combinaisons linéaires des arguments fondamentaux de la Lune.

La formulation est la suivante :

$$\begin{cases} v_2 = \lambda_2 + \sum_i A_i \sin L_i \\ u_2 = \sum_i B_i \cos L_i \\ r_2 = a_2 \sum_i C_i \cos L_i \end{cases} \quad (2.24)$$

$\lambda_2$  est la longitude moyenne sidérale.

$a_2, A_i, B_i, C_i$  sont des constantes numériques.

$L_i = i_1 D + i_2 F + i_3 l + i_4 l'$  et  $D, F, l$  et  $l'$  sont les arguments de Delaunay [CCT82].

Nous utilisons un mouvement simplifié du Soleil autour de la Lune. Les éléments métriques sont supposés constants et les éléments angulaires linéaires du temps.

Le calcul de l'expression (2.23) se fait maintenant facilement en négligeant a priori les termes ayant une amplitude inférieure à  $10^{-6}$  pour les orbites hautes et  $10^{-8}$  pour les orbites basses (associés à des coefficients  $n$  supérieur à 60 et 80). Nous utilisons au maximum une trentaine de termes de la théorie ELP-2000.

TAB. 2.1 - Ordre de grandeur des développements des fonctions perturbatrices terrestre et solaire en fonction des distances considérées. Ex :

$$n_1 = n\left(\frac{m_2 r_2^2}{r_2^3}\right) = n(m_2) - 3n(r_2)$$

| n(constante)             | orbite basse<br>3000km | orbite haute<br>10000km |
|--------------------------|------------------------|-------------------------|
| $n(m_1); n(m_2); n(m_3)$ | 0;-19;-74              | 0;-19;-74               |
| $n(r)$                   | 0                      | 0                       |
| $n(r_2)$                 | -21                    | -15                     |
| $n(r_3)$                 | -47                    | -42                     |
| $n_1$                    | 44                     | 26                      |
| $n_2$                    | 65                     | 41                      |
| $n_3$                    | 86                     | 56                      |
| $n_4$                    | 107                    | 71                      |
| $n_5$                    | 128                    | 86                      |
| $n_6$                    | 67                     | 52                      |
| $n_7$                    | 93                     | 79                      |

### 2.7.3 Développement du potentiel lunaire

Le potentiel lunaire (2.13) utilise les coordonnées du satellite dans un repère lié à l'équateur lunaire. Le temps n'apparaît pas sous forme explicite. Nous utilisons cette expression qui est relativement compacte chaque fois que cela est possible. Bien souvent, les manipulations algébriques que nous effectuons, utilisent des expressions dans le plan écliptique J2000. Nous utilisons alors directement la théorie de libration [Eck81] de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique présentée dans la partie 2.5.2. A la précision demandée, un développement sommaire des coefficients de libration est suffisant :

$$\begin{cases} \tau &= \tau_0 + \tau_1 \sin l' \\ I_2 + \rho &= I_2 + \rho_1 \cos l + \rho_2 \cos F \\ I_2 \sigma &= \sigma_1 \sin l + \sigma_2 \sin F \end{cases} \quad (2.25)$$

$I_2$  est l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire par rapport à l'écliptique.

$\tau_0, \tau_1, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$  sont des constantes numériques.

$l, l', F$  sont des arguments fondamentaux de la Lune [CCT82].

A l'aide de ces coefficients, il est désormais possible de développer l'expression (2.13). De la même manière que pour le potentiel terrestre, les termes ayant une amplitude inférieure à  $10^{-6}$  pour les orbites hautes et  $10^{-8}$  pour les orbites basses sont négligés (associés à des coefficients n supérieur à 60 et 80). Excepté pour les premières harmoniques, les coefficients de libration sont souvent négligeables.

### 2.7.4 Séparation des différents ordres

Dans ce paragraphe, afin d'effectuer le découpage du potentiel ; nous introduisons 4 ordres différents.

- L'ordre 0 correspond au mouvement képlérien et est défini par le moyen mouvement du satellite autour de la Lune. La longitude moyenne du satellite, qui est l'angle associé, a une période qui varie de quelques heures à quelques jours suivant la distance au centre de la Lune considérée. Cet angle est appelé "angle à **courte période**".
- L'ordre 1 permet d'introduire les **moyennes périodes** qui sont de l'ordre du mois et proviennent des arguments fondamentaux de la Lune

TAB. 2.2 - Découpage de la fonction perturbatrice. Les entiers correspondent aux valeurs limites de  $n(constante)$ . Ils sont fonction de  $n_2$  qui définit le moyen mouvement de la Lune autour de la Terre. Ex :  $14^2 \in [19; 35]$  .

|                               | orbite basse (3000km)   | orbite haute (10000km)                                     |
|-------------------------------|---|--|
| ordre 0 $n_{sat}$             | 0   | 0  |
| début<br>ordre 1 $n_2$<br>fin | (22)<br>31  | (14)<br>18   |
| début<br>ordre 2<br>fin       | 32<br>$C_{20}$ et $C_{22}$<br>Terre(L2)<br>46                         | 19<br>Terre(L2)<br>35                                      |
| début<br>ordre 3<br>fin       | 47<br>Soleil(L2)<br>harmoniques zonaux et $C_{31}$<br>Terre(L3)<br>64 | 36<br>Soleil(L2)<br>$C_{20}$<br>Terre(L3)<br>49            |
| début<br>ordre 4<br>fin       | 65<br>harmoniques tesseraux<br>Terre(L4)<br>79                        | 50<br>Terre(L4)<br>$C_{31}$ et $C_{22}$<br>Terre(L5)<br>60 |



introduits dans les potentiels par le mouvement terrestre et la libration des plans de référence. Le moyen mouvement de la Lune autour de la Terre définit alors le petit paramètre utile à la méthode. Il vaut approximativement  $10^{-2.2}$  pour les orbites basses et  $10^{-1.6}$  pour les orbites hautes (valeurs présentées dans le tableau 2.2 et calculées pour des orbites à 3000 km et 10000 km de l'origine du repère). Nous classons désormais la perturbation en trois ordres : 2, 3 et 4. Par exemple, pour l'orbite haute, le second ordre est constitué par les perturbations ayant une amplitude au voisinage de  $10^{-1.6} * 10^{-1.6}$ .

- La partie prépondérante de la perturbation est contenu dans l'ordre 2. Pour les orbites basses, il s'agit de la perturbation terrestre introduite à l'aide du polynôme de Legendre d'ordre 2, et, en ce qui concerne la Lune, de l'harmonique zonal d'ordre 2 ( $C_{20}$ ) et de l'harmonique tesséral d'ordre 2 et de degré 2 ( $C_{22}$ ). Pour les orbites hautes, nous n'utilisons que les perturbations terrestres définies à l'aide du polynôme de Legendre d'ordre 2. Ces perturbations engendrent non seulement des variations à courtes et moyennes périodes de la solution, mais aussi des effets séculaires et à longues périodes. Nous appelons **longues périodes** les périodes supérieurs ou égales à l'année.
- Les ordres 3 et 4 du potentiel sont définies automatiquement à l'aide du manipulateur algébrique. Nous obtenons un bon compromis résumé dans le tableau 2.2. Ce tableau partage les potentiels écrits dans leur plan de référence "naturel". Lorsque l'on introduit les rotations de ces plans par rapport au plan inertiel, de nombreuses autres constantes numériques apparaissent et l'obtention des ordres est moins immédiate. Par exemple, "Terre(L2)" sera présent dans tous les ordres supérieurs.

L'orbite "intermédiaire" que nous avons définie au début de cette partie est une synthèse du cas "haute" et "basse". Son calcul et sa précision sont donnés lors de son intégration effective et guidés par le nombre de termes maximum à utiliser.

Nous obtenons 3 types de fréquences bien distincts : **rapides**, **moyennes** et **lentes** qui ne peuvent pas donner de résonnances entre elles. Les seules résonnances possibles sont entre des angles à longues périodes, ce qui ne pose aucun problème puisqu'ils sont toujours conservés avant intégration.

Le tableau 2.2 met en évidence les caractéristiques principales de notre potentiel.

- Pour une orbite basse, la difficulté vient de l'équivalence entre la per-

turbation terrestre et celle du second harmonique zonal. Une autre caractéristique est la décroissance faible des harmoniques en fonction du degré. Nous avons néanmoins séparé les harmoniques zonaux et tesseraux car les premiers qui ne sont pas fonction de la rotation lunaire ont toujours une contribution séculaire alors que les seconds n'en ont qu'une extrêmement faible (elle est induite par la libration lunaire).

- Pour une orbite haute, le satellite s'éloignant du centre de la Lune, l'influence de la Terre devient proportionnellement importante et nous oblige à effectuer une intégration semi-analytique ou numérique soignée. En effet, la perturbation engendre des variations importantes de la solution qu'il faut savoir maîtriser.

## Chapitre 3

# TRAVAIL ANALYTIQUE

### 3.1 Introduction

Les méthodes de perturbation se prêtent bien à l'étude du problème du satellite artificiel ; en particulier, les méthodes par transformation, qu'elles soient de Lindstedt-Poincaré ou de Lie. De nombreux auteurs ont abordé l'étude du satellite artificiel terrestre, de cette façon. Kosai [Koz62] l'a étudiée au premier ordre en considérant seulement le second harmonique zonal, et Brouwer [Bro59] a étendu cette étude à l'ordre suivant. Les moyens informatiques de l'époque ne permettaient pas d'aller plus loin : en effet, les algorithmes de moyennisation utilisent des séries algébriques contenant un nombre impressionnant de termes. Deprit et Rom [DR70] ont pu ensuite atteindre le troisième ordre informatiquement en développant en fonction de l'excentricité le potentiel du  $J_2$ . Deprit [Dep80] a ensuite mis au point la méthode d'élimination de la parallaxe qui moyenne ce potentiel au quatrième ordre sans développements. Dans une thèse récente, Métris a obtenu un potentiel moyenné complet décrivant l'orbite d'un satellite terrestre.

A notre tour, nous allons appliquer cette méthode, au problème du satellite artificiel lunaire. Nous avons vu, dans le chapitre précédent que la perturbation terrestre est équivalente ou supérieure à celle du second harmonique zonal dans le cas du satellite lunaire. Ce phénomène physique change complètement la hiérarchie des potentiels considérés. Et si l'on utilise  $r$  (rayon vecteur) et  $v$  (anomalie moyenne) pour décrire la position du satellite, comme l'ont fait la plupart des auteurs, il est difficile d'obtenir la solution moyennée à un ordre suffisant en raison du nombre important de termes. Décrire



les perturbations extérieures pour  $E$  (anomalie excentrique) et les perturbations dues aux harmoniques pour  $v$ , comme le fait Kelly [Kel89], ne résout pas davantage le problème. Il est toujours possible de développer les expressions en fonction de l'excentricité ; nous nous refuserons de le faire, afin de conserver un système valable pour les moyennes et grandes excentricités.

Dans la première partie, nous allons introduire les variables canoniques de Poincaré qui permettent d'obtenir des équations non singulières, lorsque l'excentricité ou l'inclinaison s'annulent. Elles sont arguments de fonctions, utilisables pour décrire un potentiel d'un corps non sphérique et celui d'un corps extérieur. Ces différents types de perturbations sont chacun liés à un système de référence. Pour conserver une écriture compacte, les potentiels et les fonctions génératrices sont évalués à l'aide de variables liées aussi à ces plans de référence. Nous avons donné tous les intermédiaires qui permettent de changer de référentiel à n'importe quelle étape du calcul.

La seconde partie décrit la méthode de moyennisation du potentiel à l'aide de l'algorithme de Deprit utilisant les transformées de Lie. Seule, une description à l'aide de fonctions adéquates nous a permis d'obtenir un système moyenné à un ordre suffisant. Nous donnons tous les calculs des moyennes et des fonctions génératrices : résultats très utiles pour toutes les études de satellites, qu'ils soient lunaires ou terrestres. Contrairement à la plupart des auteurs, les fonctions génératrices restent sous forme fermée (sans développements en excentricité).

Nous terminons ce chapitre par l'élimination des angles à moyenne période. Ce travail est bien plus facile à mettre en œuvre que le précédent car les variables à éliminer y apparaissent sous forme explicite, même si le nombre de terme augmente lorsque les fonctions sont exprimées dans le plan inertiel.

Le travail analytique s'arrête ici car nous ne pouvons pas supprimer les angles lents sans faire des hypothèses nouvelles.

## 3.2 Hamiltonien et variables canoniques

### 3.2.1 Variables de Poincaré

Nous avons montré que le hamiltonien décrivant le mouvement du satellite s'exprime de la façon suivante :

$$F = F_0 + R(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

où  $F_0$  est la partie képlérienne et  $R(\vec{r}, t)$  la fonction perturbatrice.

Pour obtenir une formulation hamiltonienne autonome, il est nécessaire d'introduire une nouvelle variable  $\theta$  représentant le temps et  $\Theta$  sa variable canonique associée. L'unité de temps choisi est le mois sidéral lunaire et donc  $\Theta$  est une variable d'ordre 1 proche du moyen mouvement sidéral. Les autres variables que nous utilisons sont celles de Poincaré qui permettent d'obtenir des équations sans singularités lorsque l'excentricité ou l'inclinaison s'annulent. Nous les écrivons sous forme complexe afin d'optimiser les calculs à l'aide du manipulateur algébrique mis à notre disposition [Las89a].

Les variables sont :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda \\ \varphi_2 &= -i\bar{x} = -i\sqrt{\sqrt{\mu a}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}.e^{-i\varpi} \\ \varphi_3 &= -i\bar{y} = -i\sqrt{\sqrt{\mu a}}\sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)}.e^{-i\Omega} \\ \varphi_4 &= \theta \\ I_1 &= \Lambda = \sqrt{\mu a} \\ I_2 &= x = \sqrt{\sqrt{\mu a}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}.e^{i\varpi} \\ I_3 &= y = \sqrt{\sqrt{\mu a}}\sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)}.e^{i\Omega} \\ I_4 &= \Theta \end{aligned}$$

$a$  est le demi-grand axe du satellite.

$\lambda$  est la longitude moyenne ( $\lambda = \Omega + \omega + M$ ).

$e$  est l'excentricité.

$i$  est l'inclinaison.

$\varpi$  est la longitude du périlune ( $\varpi = \Omega + \omega$ ).

$\Omega$  est la longitude du nœud ascendant.

Ces variables sont canoniques mais les hamiltoniens s'écrivent plus simplement ( sans  $\sqrt{2}$  ) à l'aide de :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda \\
\alpha_2 &= \bar{X} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}.e^{-i\varpi} \\
\alpha_3 &= \bar{Y} = \sqrt{2}^{-1}\sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)}.e^{-i\Omega} \\
\alpha_4 &= \theta \\
\beta_1 &= \Lambda = \sqrt{\mu a} \\
\beta_2 &= X = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}.e^{i\varpi} \\
\beta_3 &= Y = \sqrt{2}^{-1}\sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)}.e^{i\Omega} \\
\beta_4 &= \Theta
\end{aligned} \tag{3.2}$$

On obtient donc :

$$F(\varphi, I) = -\frac{\mu^2}{2I_1^2} + I_4 + R(\varphi, I_1, I_2, I_3, -)$$

$-\frac{\mu^2}{2I_1^2}$  est la partie d'ordre 0 correspondant au mouvement principal.

$I_4$  est la quantité d'ordre 1.

On a aussi :

$$F'(\alpha, \beta) = -\frac{\mu^2}{2\beta_1^2} + \beta_4 + R(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, -) \tag{3.3}$$

La matrice de Jacobi associée à ce changement de variables

$$(\alpha_i, \beta_i) \mapsto (\varphi_i, I_i) \quad i = 1, \dots, 4$$

est

$$\frac{d(\varphi, I)}{d(\alpha, \beta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\frac{\beta_1}{2}} & 0 & 0 & \frac{-i\alpha_2}{2\sqrt{2\beta_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2\beta_1} & 0 & \frac{-i\alpha_3}{\sqrt{2\beta_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{2\sqrt{2\beta_1}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_3}{\sqrt{2\beta_1}} & 0 & \sqrt{2\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est :

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{d(\varphi, I)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{2}{\beta_1}} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{2\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2\beta_1}} & 0 & -\frac{\alpha_3}{2\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_2}{2\beta_1} & \sqrt{\frac{2}{\beta_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2\beta_1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\beta_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices nous permettent d'exprimer les différentes dérivées partielles. Par exemple, les équations canoniques en variables de Poincaré deviennent à l'aide des nouvelles variables :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d(\alpha, \beta)}{d(\varphi, I)} \cdot J \cdot \left[ \frac{d(\alpha, \beta)}{d(\varphi, I)} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

où  $J$  est la matrice symplectique (8 8)

Les équations du mouvement sont donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1}{dt} \\ \frac{d\alpha_2}{dt} \\ \frac{d\alpha_3}{dt} \\ \frac{d\alpha_4}{dt} \\ \frac{d\beta_1}{dt} \\ \frac{d\beta_2}{dt} \\ \frac{d\beta_3}{dt} \\ \frac{d\beta_4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_2}{2\beta_1} & -\frac{\alpha_3}{2\beta_1} & 0 & 1 & -\frac{\beta_2}{2\beta_1} & -\frac{\beta_3}{2\beta_1} & 0 \\ \frac{\alpha_2}{2\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2i}{\beta_1} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3}{2\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{2\beta_1} & -\frac{2i}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_3}{2\beta_1} & 0 & -\frac{i}{2\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_4} \end{pmatrix}$$

Ces équations différentielles paraissent plus compliquées mais se simplifient après moyennisation.

Tout au long de notre travail, aucun développement de la fonction perturbatrice n'est effectué par rapport à l'excentricité ou l'inclinaison. On peut l'écrire sous forme finie de cette manière :

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{i'=2}^4 \epsilon^{i'} \sum_j R(i', j) \cdot r^{k(j)} \cdot \exp(im(j)w) \quad (3.4)$$

$r$  est la norme du rayon vecteur Lune-satellite,

$a$  le demi-grand axe,

$w$  la longitude vraie ( $w = \varpi + v$ )

$R(i', j)$  sont des fonctions simples et non singulières de  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3$ .



L'expression (3.4) est obtenu à l'aide des formules géométriques :

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = R_1^{-2} \cdot \Re(\exp(iw) \cdot (R_3^2 + \bar{Y}^2)) \\ \frac{y}{r} = R_1^{-2} \cdot \Re(\exp(iw) \cdot \frac{1}{i} \cdot (R_3^2 - \bar{Y}^2)) \\ \frac{y}{r} = R_1^{-2} \cdot \Re(\exp(iw) \cdot \frac{2}{i} \cdot R_3 \bar{Y}) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{2}} = (1 - e^2)^{\frac{1}{4}} \\ R_3 &= \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{2} - Y\bar{Y}} = \frac{\cos \frac{i}{2}}{(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

### 3.2.2 Variables utilisées et dérivées partielles

Le choix des variables présentes dans les hamiltoniens est une chose primordiale pour mener à bien une méthode de moyennisation car il conditionne le nombre de termes des séries et permet plus ou moins facilement l'automatisation des calculs utiles à la méthode.

Pour ne pas développer le potentiel en fonction de l'excentricité, nous avons introduit la variable  $w$  pour représenter les variations rapides ; cette variable est toujours définie contrairement à  $v$ , l'anomalie moyenne. Elle est adéquate pour représenter le potentiel lunaire mais ne se justifie pas lorsque la perturbation est extérieure. Il est alors préférable d'introduire  $\tilde{E} = \varpi + E$  que l'on appelle la longitude excentrique (somme de la longitude du périlune et de l'anomalie excentrique). Mais conserver deux variables redondantes tout au long de l'étude, entraîne une explosion du nombre de termes. C'est pour cela qu'arbitrairement, nous avons décidé de n'utiliser que  $\tilde{E}$  lors des calculs. Nous aurions pu choisir  $w$  et obtenir un nombre équivalent de termes. En effet, nous avons les 4 relations géométriques (3.5) qui permettent d'écrire le potentiel (3.4) avec le même nombre de termes.

$$\begin{cases} \frac{r}{a} = R_2^2 \left(1 - \frac{X}{2R_2} \exp(-i\tilde{E})\right) \left(1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} \exp(i\tilde{E})\right) \\ \frac{r}{a} = \frac{R_1^4}{R_2^2} \left(1 + \frac{X}{2R_2} \exp(-iw)\right)^{-1} \left(1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} \exp(iw)\right)^{-1} \\ \exp(iw) = \frac{\left(1 - \frac{X}{2R_2} \exp(-i\tilde{E})\right)}{\left(1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} \exp(i\tilde{E})\right)} \exp(i\tilde{E}) \\ \exp(i\tilde{E}) = \frac{\left(1 + \frac{X}{2R_2} \exp(-iw)\right)}{\left(1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} \exp(iw)\right)} \exp(iw) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec :

$$R_2 = \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{4}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}}$$

De plus, le manipulateur "trip" que nous utilisons, ne fait que du calcul polynomial. Il est donc nécessaire de choisir une variable non singulière qui puisse décrire les dénominateurs. Il a été décidé d'utiliser  $RE = 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} \cdot e^{i\tilde{E}}$

et son conjugué  $\overline{RE} = 1 - \frac{X}{2R_2} \cdot e^{-i\tilde{E}}$ . Ceci pour deux raisons principales :

la norme du rayon vecteur s'écrit simplement à l'aide de  $RE$  et  $\overline{RE}$  et les calculs de reclassements après une manipulation sont très rapides. Nous désignons par classement : écriture d'une fonction à l'aide d'une famille donnée de générateurs. En effet, chaque potentiel peut être considéré comme un élément d'un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de  $I_\lambda \times I_\Lambda \times I_{Xreel} \times I_{Ximag} \times I_{Yreel} \times I_{Yimag} \times$  dans  $\mathbb{R}$ .  $I_{var}$  désigne l'ensemble de définition de la variable  $var$  considérée. Cet espace vectoriel est de dimension infinie. En choisissant astucieusement les générateurs, on peut obtenir une description unique et relativement compacte d'une fonction, qui devient ainsi facilement exploitable.

Après de nombreux essais, pour décrire toutes les fonctions présentes, il a été décidé de choisir les variables :  $\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R_1, R_2, R_3, RE, \overline{RE}, LE, \overline{LE}, lE, \overline{lE}$  et  $L12$ . Certaines de ces expressions ne servent pas à

décrire la fonction perturbatrice initiale et apparaissent seulement au cours de l'étude. Nous avons préféré donner la liste complète tout de suite.

La définition exacte de ces variables est :

$$\Lambda = \sqrt{\mu a}$$

$$X = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} . e^{i\varpi}$$

$$\bar{X} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}} . e^{-i\varpi}$$

$$Y = \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} . e^{i\Omega}$$

$$\bar{Y} = \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} . e^{-i\Omega}$$

$$R_1 = \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{2}} = (1 - e^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$R_2 = \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{4}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}}$$

$$R_3 = \sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{2} - Y\bar{Y}} = \frac{\cos \frac{i}{2}}{(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$e^{i\tilde{E}}$$

$$RE = 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} . e^{i\tilde{E}} = 1 - \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - e^2}}} . e^{i(\tilde{E} - \varpi)}$$

$$\overline{RE} = 1 - \frac{X}{2R_2} . e^{-i\tilde{E}} = 1 - \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - e^2}}} . e^{i(-\tilde{E} + \varpi)}$$

$$LE = \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} . e^{i\tilde{E}} \right) = \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - e^2}}} . e^{i(\tilde{E} - \varpi)} \right)$$

$$\overline{LE} = \ln \left( 1 - \frac{X}{2R_2} . e^{-i\tilde{E}} \right) = \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - e^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - e^2}}} . e^{i(-\tilde{E} + \varpi)} \right)$$

$$lE = Li_2 \left( \frac{\bar{X}}{2R_2} \cdot e^{i\bar{E}} \right) = \frac{1}{i} \int^{\bar{E}} LE d\bar{E} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{\bar{X}}{2R_2} \cdot e^{i\bar{E}} \right)^k}{k^2}$$

$$\bar{lE} = Li_2 \left( \frac{X}{2R_2} \cdot e^{-i\bar{E}} \right) = i \int^{\bar{E}} \bar{LE} d\bar{E} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{X}{2R_2} \cdot e^{-i\bar{E}} \right)^k}{k^2}$$

$$L12 = \ln \frac{R_1}{R_2} = \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{X\bar{X}}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

Dans les expressions  $LE$  et  $\bar{LE}$ ,  $\ln$  représente la détermination principale du logarithme complexe qui s'identifie d'ailleurs avec le logarithme népérien sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $Li_2$  représente le bilogarithme d'Euler qui est toujours évalué numériquement à l'aide de séries.

Les générateurs que nous utilisons pour décrire la majorité des fonctions dépendantes de la longitude moyenne du satellite sont de la forme suivante :

$$\Lambda^{n_\Lambda} \cdot Y^{n_Y} \cdot \bar{Y}^{n_{\bar{Y}}} \cdot R_1^{n_{R_1}} \cdot R_2^{n_{R_2}} \cdot R_3^{n_{R_3}} \cdot e^{in_{\bar{E}}\bar{E}} RE^{n_{RE}} \cdot \bar{RE}^{n_{\bar{RE}}} \quad (3.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} & (n_{n_\Lambda} \in \mathbb{Z}) \\ & \text{et} \\ & (n_Y \in \mathbb{N}, n_{\bar{Y}} \in \mathbb{N} \text{ et } n_Y \cdot n_{\bar{Y}} = 0) \\ & \text{et} \\ & (n_{R_3} \in \mathbb{Z}) \\ & \text{et} \\ & (n_{\bar{E}} \in \mathbb{Z}) \\ & \text{et} \\ & (n_{RE} \in \mathbb{Z}, n_{\bar{RE}} \in \mathbb{Z} \text{ et } n_{RE} \cdot n_{\bar{RE}} = 0) \\ & \text{et} \\ & ([ (n_{R_2} \in \mathbb{Z}) \text{ et } (n_{R_1} = 0 \text{ ou } n_{R_1} = 1) ] \text{ ou} \\ & [ (n_{R_1} \in \mathbb{Z}_-^*) \text{ et } (n_{R_2} = 0 \text{ ou } n_{R_2} = 1) ]) \end{aligned}$$

Pour décrire la plupart des fonctions indépendantes de la longitude, les générateurs sont du type :

$$\Lambda^{n_\Lambda} \cdot Y^{n_Y} \cdot \bar{Y}^{n_{\bar{Y}}} \cdot X^{n_X} \cdot \bar{X}^{n_{\bar{X}}} \cdot R_1^{n_{R_1}} \cdot R_2^{n_{R_2}} \cdot R_3^{n_{R_3}} \quad (3.7)$$

avec :

$$\begin{aligned}
& (n_{n_\Lambda} \in \mathbb{Z}) \\
& \quad \text{et} \\
& (n_Y \in \mathbb{N}, n_{\bar{Y}} \in \mathbb{N} \text{ et } n_Y \cdot n_{\bar{Y}} = 0) \\
& \quad \text{et} \\
& (n_X \in \mathbb{N}, n_{\bar{X}} \in \mathbb{N} \text{ et } n_X \cdot n_{\bar{X}} = 0) \\
& \quad \text{et} \\
& (n_{R_3} \in \mathbb{Z}) \\
& \quad \text{et} \\
& ((n_{R_2} \in \mathbb{Z}) \text{ et } (n_{R_1} = 0 \text{ ou } n_{R_1} = 1)) \text{ ou} \\
& [(n_{R_1} \in \mathbb{Z}^*) \text{ et } (n_{R_2} = 0 \text{ ou } n_{R_2} = 1)]
\end{aligned}$$

Les conditions que nous avons données aux  $n_{var}$  assurent l'unicité des développements. Nous devons connaître aussi les dérivées partielles de toutes ces fonctions présentes dans les hamiltoniens en fonction des "pseudo-variables" variables de Poincaré  $\lambda, \Lambda, Y, \bar{Y}, X, \bar{X}$ . Pour cela, deux méthodes s'imposent : soit utiliser les relations connues du mouvement képlérien [BC61], soit les calculer directement à l'aide de l'équation de Kepler. Nous avons choisi la deuxième qui semble plus rapide.

L'équation de Képler nous permet d'obtenir les dérivées partielles de  $\tilde{E}$ .

$$\tilde{E} - \lambda = R_2 \left( \frac{\bar{X} e^{i\tilde{E}} - X e^{-i\tilde{E}}}{2i} \right) \quad (3.8)$$

Les autres expressions s'obtiennent à l'aide des formules de composition des dérivations en sachant que les variables sont indépendantes. Nous avons données les principales dérivées dans les tableaux 3.1 et 3.2.

### 3.2.3 Variables utilisées et angles d'Euler

Dans le chapitre précédent, il a été introduit des changements de repères à l'aide des angles d'Euler. En fonction de la perturbation considérée, il est judicieux de choisir le repère qui permette d'obtenir les expressions les plus courtes. Pour cela, il est d'abord nécessaire de connaître l'expression des variables dans le nouveau repère en fonction de celles dans l'ancien. Nous verrons dans la partie suivante qu'un travail de moyennisation met en œuvre trois intermédiaires principaux : la moyenne, le calcul de primitive par rapport à l'angle rapide et le crochet de Poisson. Nous allons montrer sous quelles hypothèses il est possible de comparer ces expressions dans différents repères.



TAB. 3.1 - Dérivées partielles des fonctions utiles par rapport aux variables  $\lambda$ ,  $\Lambda$ ,  $Y$  et  $\bar{Y}$ .

|             | $\lambda$                     | $\Lambda$ | $Y$                     | $\bar{Y}$         |
|-------------|-------------------------------|-----------|-------------------------|-------------------|
| $R_1$       | 0                             | 0         | 0                       | 0                 |
| $R_2$       | 0                             | 0         | 0                       | 0                 |
| $R_3$       | 0                             | 0         | $-\frac{\bar{Y}}{2R_3}$ | $-\frac{Y}{2R_3}$ |
| $\tilde{E}$ | $\frac{1}{RE \bar{RE} R_2^2}$ | 0         | 0                       | 0                 |

TAB. 3.2 - Dérivées partielles des fonctions utiles par rapport à la variable  $X$ .

|             | $X$   |
|-------------|---|
| $R_1$       | $-\frac{\bar{X}}{4R_1}$   |
| $R_2$       | $-\frac{\bar{X}}{8R_2}$   |
| $R_3$       | $-\frac{\bar{X}}{4R_3}$   |
| $\tilde{E}$ | $\frac{-ie^{-iE}}{4RE \bar{RE} R_2^3} + \frac{3ie^{-iE}}{4RE \bar{RE} R_2} + \frac{ie^{iE} \bar{X}^2}{RE \bar{RE} R_2^3}$ |

Si l'on considère les différents changements de variables, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 (\vec{r}, \dot{\vec{r}}) & \xrightarrow{ROT_{cart}} & (\vec{r}', \dot{\vec{r}}') \\
 \downarrow CH_1 & & \downarrow CH_1 \\
 (\varphi, I) & \xrightarrow{ROT_{poin}} & (\varphi', I') \\
 \downarrow CH_2 & & \downarrow CH_2 \\
 (\alpha, \beta) & \xrightarrow{ROT_{pseudo-poin}} & (\alpha', \beta')
 \end{array}$$

**Expressions de  $(\alpha', \beta')$  en fonction de  $(\alpha, \beta)$ .**

On peut calculer  $(\alpha', \beta')$  et  $\frac{\partial(\alpha', \beta')}{\partial(\alpha, \beta)}$  en fonction de  $(\alpha, \beta)$  en utilisant les difféomorphismes  $CH_1$ ,  $CH_2$  et  $ROT_{cart}$ . Brouwer et Clemence [BC61] ont donné des relations entre les variables de Delaunay dans deux repères différents et Broucke [Bro70] les matrices jacobiennes qui définissent le passage de coordonnées osculatrices à cartésiennes. Ils nous ont permis de vérifier nos relations obtenues géométriquement.

$$\begin{aligned}
\Lambda' &= \Lambda \\
R_1' &= R_1 \\
R_2' &= R_2 \\
R_3' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (R_3^2 - Y\bar{Y}) \cos \theta + \sin \theta R_3 (Y e^{-i\varphi} + \bar{Y} e^{i\varphi}) + R_2 \right]} \\
Y' &= \frac{1}{2} e^{-i\psi} \frac{-\sin \theta (R_3^2 - Y\bar{Y}) + R_3 [(1 + \cos \theta) Y e^{-i\varphi} + (\cos \theta - 1) \bar{Y} e^{i\varphi}]}{R_3'} \\
\text{si } |Y'| > |Y| & \\
\lambda' &= \lambda + \ln \left( \frac{-R_2 \sin \theta e^{-i\varphi} + \bar{Y} (Y e^{-i\varphi} + \bar{Y} e^{i\varphi}) \sin \theta + 2 \cos \theta R_3 \bar{Y}}{2 \bar{Y}' R_3'} \right) \\
X' &= X \left( \frac{-R_2 \sin \theta e^{-i\varphi} + \bar{Y} (Y e^{-i\varphi} + \bar{Y} e^{i\varphi}) \sin \theta + 2 \cos \theta R_3 \bar{Y}}{2 \bar{Y}' R_3'} \right) \\
\text{si } |Y| > |Y'| & \\
\lambda' &= \lambda + \ln \left( \frac{R_2' \sin \theta e^{-i\psi} - Y' (Y' e^{i\psi} + \bar{Y}' e^{-i\psi}) \sin \theta + 2 \cos \theta R_3' Y'}{2 Y R_3} \right) \\
X' &= X \left( \frac{R_2' \sin \theta e^{-i\psi} - Y' (Y' e^{i\psi} + \bar{Y}' e^{-i\psi}) \sin \theta + 2 \cos \theta R_3' Y'}{2 Y R_3} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$\varphi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont les trois angles d'Euler qui définissent le changement de repères.

Ici,  $\theta$  et  $\varphi$  ne désignent pas des variables du satellite mais des angles d'Euler.

$\ln$  est la détermination principale du logarithme complexe.

$RE, \overline{RE}, LE, \overline{LE}, lE$  et  $\overline{lE}$  ne varient pas lors de cette rotation.

Les matrices jacobiennes se calculent facilement à l'aide de (3.9) qui n'introduit que des compositions de fonctions connues.

### Crochet de Poisson.

En appliquant la même rotation fonction uniquement de  $\theta$  ( $\theta = \varphi_4$  est la variable canonique) aux positions et aux vitesses, le crochet de Poisson de deux expressions **indépendantes de  $\Theta$**  demeure inchangé.

En effet, avec des notations indulgentes :

$$\left\{ f, g \right\}_{\varphi, I} = \left\{ f, g \right\}_{(\vec{r}, \theta), (\dot{\vec{r}}, \Theta)} = \left\{ f, g \right\}_{(\vec{r}', \theta), (\dot{\vec{r}}', \Theta)} = \left\{ f, g \right\}_{\varphi', I'}$$

La première égalité est assurée par le fait qu'il existe une transformation canonique entre les coordonnées de Poincaré et cartésiennes.

La dernière égalité est obtenue pour les mêmes raisons que la première.

La seconde lie les crochets de Poisson de deux fonctions exprimées dans des repères différents. Nous avons fait l'hypothèse que  $f$  et  $g$  sont indépendants de  $\Theta$ . Donc :

$$\left\{ f, g \right\}_{(\vec{r}, \theta), (\dot{\vec{r}}, \Theta)} = \left\{ f, g \right\}_{\vec{r}, \dot{\vec{r}}}$$

En utilisant la formule (2.16) que l'on étend aux vitesses, on obtient la seconde égalité en appliquant aux crochets la relation de canonicité suivante :

$$\begin{pmatrix} O & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & O \\ O & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tR & O \\ O & {}^tR \end{pmatrix}$$

$I$  est la matrice unité,  $O$  la matrice nulle et  $R$  la matrice de rotation fonction de  $\varphi_4$ .

### Moyennes.

On désigne par moyenne de  $f$  par rapport à la longitude moyenne l'expression :

$$\langle f \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\lambda$$

D'après les formules (3.9) et en supposant  $\Lambda, X, Y$  et surtout  $\theta$  constants,

$$\langle f \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda'_*}^{2\pi + \lambda'_*} f \circ R_{pseudo-poin} d\lambda'$$

$$\text{où : } \lambda'_* = \ln \left( \frac{R_2' \sin \theta e^{-i\psi} - Y' (Y' e^{i\psi} + \bar{Y}' e^{-i\psi}) \sin \theta + 2 \cos \theta R_3' Y'}{2 Y R_3} \right)$$

$f$  est une fonction développable en série de Fourier de la longitude moyenne donc

$$\langle f \rangle_\lambda = \langle f \circ R_{pseudo-poin} \rangle_\lambda$$

La moyenne est donc "conservée" par un changement de repère dont les périodes sont supérieures à un mois.

### Primitives.

La méthode nous amène à trouver la primitive de fonctions purement périodiques (sans terme constant dans son développement en série de Fourier).

$$W = \int^\lambda [f - h] d\lambda \quad \text{où} \quad h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\lambda$$

Cette intégrale est définie à une constante près. Nous choisissons la constante de façon à obtenir une primitive  $w$  purement périodique.

C'est à dire :

$$w = W - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\lambda$$

En effectuant le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, on montre que la primitive purement périodique d'une fonction purement périodique est "conservée" par une rotation dépendante de  $\theta$ .

## 3.3 Première moyennisation par la méthode de Lie

### 3.3.1 Formulation générale

Par la méthode de Lie, une grande partie du problème est résolue de façon analytique. Des transformations proches de l'identité permettent d'éliminer la longitude moyenne du satellite  $\lambda$  qui est l'angle aux variations rapides. Sa période n'excède pas deux jours pour les orbites considérées.

Les notations utilisées sont celles présentées dans le livre de Lichtenberg et M.A. Lieberman [LL83]. Ces derniers reprennent l'algorithme de Deprit [Dep80] utilisant les transformées de Lie. Nous ne rappellerons donc pas la théorie et l'appliquerons directement à notre système hamiltonien analytique proche d'un système intégrable.

Il s'agit de construire une transformation canonique voisine de l'identité

$$(\varphi_i, I_i) \mapsto (\varphi'_i, I'_i) \quad i = 1 \dots 4$$



définie par l'opérateur  $T$  :

$$\begin{aligned}
T &= I + \sum_{i=1}^{i=4} \epsilon^i T_i \\
T_1 &= -L_1 \\
T_2 &= -\frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1^2 \\
T_3 &= -\frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_1L_2 + \frac{1}{6}L_2L_1 - \frac{1}{6}L_1^3 \\
T_4 &= -\frac{1}{4}L_4 + \frac{1}{4}L_1L_3 + \frac{1}{8}L_2^2 - \frac{1}{8}L_1^2L_2 + \frac{1}{12}L_3L_1 - \frac{1}{12}L_1L_2L_1 - \frac{1}{24}L_2L_1^2 + \frac{1}{24}L_1^4
\end{aligned}$$

Les  $L_i$  sont les crochets de Poisson  $L_i = \left\{ w_i, \right\}$

On cherche les  $w_i$  de sorte que le nouveau hamiltonien  $H$  vérifie  $TF = H$  et soit indépendant de  $\lambda$ . Pour cela, il faut utiliser l'opérateur réciproque  $T^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
T^{-1} &= I + \sum_{i=1}^{i=4} \epsilon^i T_i^{-1} \\
T_1^{-1} &= L_1 \\
T_2^{-1} &= \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1^2 \\
T_3^{-1} &= \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_2L_1 + \frac{1}{6}L_1L_2 + \frac{1}{6}L_1^3 \\
T_4^{-1} &= \frac{1}{4}L_4 + \frac{1}{4}L_3L_1 + \frac{1}{8}L_2^2 + \frac{1}{8}L_2L_1^2 + \frac{1}{12}L_1L_3 + \frac{1}{12}L_1L_2L_1 + \frac{1}{24}L_2^2L_1 + \frac{1}{24}L_1^4
\end{aligned}$$

Après avoir développé  $F$  et  $H$  en série de Taylor et égalé leurs termes ordre par ordre, on obtient :

- à l'ordre 0

$$F_0 = H_0$$

- à l'ordre 1

$$\left\{ w_1, F_0 \right\} = H_1 - F_1$$

$w_1$  est choisie nulle. Nous rappelons que  $F_1 = \Theta$  est la variable métrique associée à l'angle  $\theta$ , de période le mois sidéral lunaire. Ne pas transformer  $F_1$  suppose que l'on considère  $\theta$  fixe lors d'une rotation

du satellite. Nous effectuons cette hypothèse car le rapport des deux périodes présentes est suffisamment petit (le jour et le mois). La perte d'information est comblée à l'aide de termes d'ordre 5. Par ailleurs, faire une moyennisation sur deux angles en même temps à l'aide d'expressions non développées en excentricité est quelque chose d'inextricable.

– à l'ordre 2

$$\left\{ w_2, F_0 \right\} = 2 (H_2 - F_2) - L_1(H_1 + F_1)$$

Il faut séparer la partie purement périodique et la partie séculaire qui ne contient plus la longitude moyenne du satellite.

Puisque  $F$  est développable en séries de Fourier de la variable  $\lambda$ , on obtient :

$$H_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_2 d\lambda$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \lambda} = 2 \left( \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \right)^{-1} \cdot (H_2 - F_2)$$

On impose de plus que  $w_2$  soit de moyenne nulle [Met91b]; cette contrainte diminue le nombre de manipulations algébriques et donne une solution moyennée plus proche de la moyenne de la solution réelle.  $w_2$  est alors définie de façon unique.

En posant

$$W_2 = 2 \int^\lambda \left( \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda} \right)^{-1} \cdot (H_2 - F_2) d\varphi_1$$

$$w_2 = W_2 - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} W_2 d\lambda$$

– à l'ordre 3

$$\left\{ w_3, F_0 \right\} = 3 (H_3 - F_3) - L_1(H_2 + 2 F_2) - L_2(H_1 + \frac{1}{2} F_1) - \frac{1}{2} L_1^2 F_1$$

Comme  $w_2$  est purement périodique, développable en série de Fourier par rapport à  $\lambda$ , on a uniquement :

$$H_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3 d\lambda$$

car

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_2(H_1 + \frac{1}{2} F_1) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} w_2 d\lambda = 0$$

De la même manière qu'à l'ordre 2,  $w_3$  est définie uniquement par :

$$W_3 = 3 \frac{\Lambda^3}{\mu^2} \left( \int^\lambda (H_3 - F_3) d\lambda - \frac{3}{2} \int^\lambda \frac{\partial w_2}{\partial \theta} d\lambda \right)$$

$$w_3 = W_3 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_3 d\lambda$$

- à l'ordre 4, on ne s'intéresse pas à  $w_4$  car nous ne cherchons pas  $H_5$  en général.

$$\left\{ w_4, F_0 \right\} = 4 (H_4 - F_4) - L_1(H_3 + 3 F_3) - L_2(H_2 + F_2) - \frac{1}{2} L_1^2 F_2$$

$$- L_3(H_1 + \frac{1}{3} F_1) - \frac{1}{3} L_2 L_1 F_1 - \frac{1}{6} L_1 L_2 F_1 - \frac{1}{6} L_1^3 F_1$$

Comme  $w_2$  et  $w_3$  sont purement périodiques , développables en série de Fourier par rapport à  $\lambda$ , on a :

$$H_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_4 d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left\{ w_2, F_2 \right\} d\lambda$$

### 3.3.2 Détails de calcul

Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les particularités de notre travail de moyennisation par la méthode de Lie. Nous décrivons la résolution de l'équation homologique à chaque ordre en fonction du type d'orbite considérée. Toute cette discussion fait référence au tableau 2.2 qui décrit le découpage de la fonction perturbatrice et au paragraphe 3.3.1 qui donne la formulation générale du travail de moyennisation.

Tous les calculs de moyennes et primitives sont faits automatiquement

par le manipulateur à l'aide des formules présentées dans les paragraphes 3.3.3 et 3.3.4. Les résultats sont à chaque étape réexprimés à l'aide des générateurs définis dans la partie 3.2.2. L'algorithme qui permet de le faire est très compliqué. En particulier, bien souvent, après un calcul de primitive, il y a apparition d'une singularité apparente. Un exemple de singularité apparante est le suivant : une expression  $f(variables)$  contient la variable  $X$  ( $\lim_{e \rightarrow 0} X = 0$ ) au dénominateur et ce dénominateur disparaît lorsque l'on effectue un développement de  $f(variables)$  par rapport à  $X$ . Mais nous ne voulons pas utiliser des séries développées (afin d'obtenir une solution valable aussi pour les grandes excentricités) et sommes obligés de la faire disparaître à l'aide de calculs d'"expressions conjuguées". L'exemple le plus classique d'expression conjuguée est le suivant :

$$\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

Ici, il en existe bien d'autres que nous ne pouvons pas détailler mais le choix des variables (3.2.2) a été fait pour faciliter cette tâche.

La méthode de Lie est une méthode de perturbation. Elle est d'autant plus facile à mettre en oeuvre et précise que la perturbation est petite devant le potentiel principal. Nous étudions principalement deux types d'orbites, les orbites hautes et basses ; les orbites intermédiaires étant un compromis des deux premières. Les orbites basses font apparaître une première perturbation aux alentours de  $10^{-3}$ - $10^{-4}$ , les orbites hautes, aux alentours de  $10^{-2}$ - $10^{-3}$  (voir le tableau 2.2). Pour obtenir la même précision, il est donc nécessaire d'effectuer un travail à un ordre supérieur dans le second cas.

Nous allons passer en revue les différentes perturbations présentes à chaque ordre. Nous commençons par l'ordre 2.

– Perturbation terrestre à l'ordre inférieur.

Il s'agit du premier terme du développement de la perturbation terrestre. Elle utilise le polynôme de Legendre d'ordre 2. Cette perturbation est dépendante du temps que l'on a représenté par l'angle  $\theta$ . Le calcul du générateur s'écrit normalement de la manière suivante [LL83] :

$$\frac{\mu^2}{\Lambda^3} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{\partial w}{\partial \theta} = 2(H_2 - F_2)$$



Cette équation ne peut pas être résolue sans développements des potentiels en fonction de l'excentricité. Nous pouvons séparer les intégrations à condition que les variables métriques associées à ces angles apparaissent à des ordres différents. C'est toujours le cas des théories analytiques classiques [Bro59] : on élimine les variables rapides puis les variables lentes. Ici, lorsque le satellite s'éloigne de la Lune, la séparation entre les deux ordres n'est plus évidente ; ce que nous appelons l'ordre 1 est moins de 100 fois plus petit que notre ordre 0 (voir le tableau 2.2). Néanmoins, nous ne pouvons pas développer ce potentiel par crainte d'obtenir un nombre de termes trop important, aucune condition n'étant a priori imposée à l'excentricité. Il n'y a aucun risque de résonance forte entre les deux angles, nous calculons seulement :

$$\frac{\mu^2}{\Lambda^3} \frac{\partial w}{\partial \lambda} = 2(H_2 - F_2)$$

Cette perte d'information est compensée par l'ajout d'un cinquième ordre.

Le potentiel est exprimé dans le plan méridien à l'écliptique passant par la Terre. Les résultats sont identiques comme nous l'avons prouvé dans la partie 3.2.3. et la formulation est très compacte car le temps ( $\theta$ ) n'apparaît pas explicitement. Le calcul de la moyenne  $H_2$  utilise les formules présentées au paragraphe 3.3.3. Le calcul de la fonction génératrice  $w_2$  emploie les expressions du paragraphe 3.3.4 : elle ne fait pas intervenir l'équation du centre et s'exprime exactement avec les mêmes variables que  $F_2$ . L'expression de la partie moyenne  $H_2(TerreL2)$  est donnée en annexe A.

- Perturbation due au second harmonique zonal.

C'est sur ce type de perturbation que les études les plus complètes ont été effectuées. Elle contient pratiquement toute l'amplitude de la perturbation d'un satellite terrestre bas. Dans le cas de la Lune, elle est équivalente à la perturbation terrestre pour les orbites basses. Nous l'exprimons dans le plan équatorial pour ne pas faire intervenir la libration et calculons sa moyenne. Le calcul de la fonction génératrice



centrée (purement périodique) fait intervenir l'équation du centre :

$$(w - \lambda) = \frac{1}{i} \ln \left( \frac{1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}}}{1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}}} \right) + \frac{R_2 X e^{-i\tilde{E}}}{2i} - \frac{R_2 \bar{X} e^{i\tilde{E}}}{2i}$$

Il est introduit alors les nouvelles variables  $LE$  et  $\overline{LE}$  (voir la partie 3.2.2) et l'équation devient :

$$(w - \lambda) = \frac{1}{i} \left[ \overline{LE} - LE + R_2^2 (\overline{RE} - RE) \right]$$

- Perturbation due à l'harmonique tesseral d'ordre et degré 2 ( $C_{22}$ ).  
Ce potentiel amène des variations de la période du mois lunaire sur la solution. Il est pris en considération car il est du même ordre de grandeur que  $C_{20}$ . Les calculs effectués dans le plan équatorial sont similaires aux précédents.

A l'ordre suivant, la résolution de l'équation homologique ne fait pas seulement intervenir des calculs de primitives et moyennes de potentiels initiaux. Il s'agit d'intégrer une seconde fois les fonctions génératrices dépendantes du temps. L'intérêt d'avoir choisi des fonctions génératrices purement périodiques est mis en évidence ici : elles n'apportent pas à l'ordre 3 de contribution séculaire ou à longues périodes.

- Le soleil et la Terre à l'ordre 3.  
La résolution est classique et effectuée dans les plans "naturels" (pour le calcul) de ces perturbations : un plan méridien pour la Terre et l'écliptique pour le Soleil.
- Les harmoniques zonaux et  $C_{31}$ .  
Ces perturbations font partie de l'ordre 3 seulement pour les orbites basses. Pour  $C_{31}$ , le calcul complet de  $w_3$  et  $H_3$  est effectué. Le calcul de la moyenne de la perturbation due aux harmoniques zonaux ne pose aucun problème non plus. Celui de la fonction génératrice est plus compliqué lorsque l'ordre de l'harmonique augmente. L'écrire sous forme fermée entraîne la création d'un nombre de termes trop important. L'écrire à l'aide d'un développement est impossible si l'on considère

de grandes excentricités et difficile si l'on garde la variable  $\Lambda$  à l'intérieur des expressions. Nous rappelons que  $\Lambda$  est la première variable de Delaunay ( $\Lambda = \sqrt{\mu a}$ ) et définit le demi-grand axe. Il a été décidé de ne calculer  $w_3$  seulement pour les harmoniques zonaux d'ordre 3 à 6. l'amplitude des harmoniques de plus haut degré est petite.

- $C_{20}$  à l'ordre 3 pour les orbites hautes.  
La résolution est identique à celle de l'ordre 2 pour les orbites basses.
- Calcul de la fonction génératrice associée à  $\frac{\partial w_2}{\partial \theta}$ .

Pour effectuer la dérivation de  $w_2$  par rapport à  $\theta$ ,  $w_2$  doit être exprimée dans le plan écliptique pour que le temps (variable  $\theta$ ) apparaisse explicitement. Il est nullement nécessaire d'utiliser tous les termes de  $w_2$  puisque nous voulons dériver une expression du second ordre. Dans le cas de la perturbation terrestre, seuls quelques termes de la description du mouvement de la Lune autour de la Terre sont pris en considération. L'harmonique  $C_{20}$  entraîne une fonction génératrice indépendante du temps (la libration n'engendrant que des termes du troisième ordre). Pour l'orbite basse,  $w_2(C_{22})$  fait intervenir l'inclinaison moyenne de l'équateur par rapport à l'écliptique et aucuns termes de libration.

La recherche de  $w_{13}$  définie par :

$$\frac{\mu^2}{\Lambda^3} \frac{\partial w_{13}}{\partial \lambda} = -\frac{3}{2} \frac{\partial w_2}{\partial \theta}$$

peut être effectuée de deux manières car

$$\int^\lambda \frac{\partial w_2}{\partial \theta} d\lambda = \frac{\partial}{\partial \theta} \int^\lambda w_2 d\lambda + cte$$

Nous préférons d'abord effectuer l'intégration par rapport à  $\lambda$ . Dans la partie 3.3.3, il a été mis en évidence le type d'expression possédant une fonction génératrice sans singularités apparentes avec nos variables. Les potentiels initiaux possèdent cette propriété tout comme leur fonction génératrice. Elle est induite par les développements initiaux à l'aide de polynômes de Legendre. Donc, les  $w_{13}$  calculés sont valables lorsque l'excentricité s'annule.  $w_{13}(Terre)$  n'apporte aucune

nouvelle variable tandis  $w_{13}(C_{22})$  engendre les expressions  $lE$  et  $\overline{lE}$  lors de l'intégration de l'équation du centre.

$$lE = Li_2 \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \cdot e^{i\tilde{E}} \right) = \frac{1}{i} \int^{\tilde{E}} LE d\tilde{E} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \cdot e^{i\tilde{E}} \right)^k}{k^2}$$

A l'ordre 4, les fonctions génératrices ne sont pas calculées systématiquement. Les moyennes sont obtenues classiquement exceptées  $\langle \{w_2, F_2\} \rangle_\lambda$ .

- Perturbations terrestres (TerreL4 et TerreL5).  
Ces potentiels proviennent des développements du potentiel à l'aide des polynômes de Legendre d'ordre 4 et 5. Leurs moyennes sont calculées normalement.
- $C_{31}$  et  $C_{22}$  pour les orbites hautes.  
On utilise le plan équatorial.
- Harmoniques tesseraux à l'ordre 4 pour les orbites basses  
Nous calculons seulement la moyenne des harmoniques tesseraux qui ont la plus grande amplitude. Leurs ordres vont de 2 à 5. Les autres harmoniques sont négligées car leur amplitude est trop faible et ils n'ont qu'une contribution périodique sur la solution. Néanmoins, il reste toujours la possibilité de rajouter certaines moyennes d'harmoniques particuliers lorsque l'on effectue l'intégration d'une orbite extrêmement basse (de rayon vecteur inférieur à 1.1 rayon lunaire).
- Calcul de  $\langle \{w_2, F_2\} \rangle_\lambda$   
Lorsque l'on considère les termes en  $C_{20}^2$ ,  $C_{22}^2$  et  $C_{20}C_{22}$ , le calcul est effectué dans le plan équatorial. Lorsqu'il s'agit de termes croisés Terre-harmonique, il est nécessaire d'utiliser le plan écliptique. Le calcul de  $\langle \{w_2, F_2\} \rangle_\lambda$  doit être mené soigneusement au risque d'obtenir un trop grand nombre de termes redondants et bloquer la machine. Nous avons testé deux stratégies.

La première est utilisée pour calculer  $\langle \{w_2, F_2\} \rangle_\lambda$  directement. Les dérivées partielles utiles aux calculs d'un crochet de Poisson sont écrites à l'aide des générateurs présentés dans la partie 3.2.2. Le crochet de Poisson est effectivement calculé et on le moyenne directement à l'aide des formules de la partie 3.3.3. Cette méthode

est inapplicable si les perturbations sont autres que  $C_{20}$ ,  $C_{22}$  et (*TerreL2*) en raison du nombre trop important de termes.

La seconde est plus souple et fonctionne avec tous les crochets de Poisson que l'on peut rencontrer. Un potentiel gravitationnel exprimé en coordonnées cartésiennes peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{k=1}^{k=N} f_k(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) F_k(\Lambda, RE, \overline{RE}) e^{i\bar{E}} \\
&+ \sum_{k=1}^{k=N} \bar{f}_k(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) \overline{F}_k(\Lambda, RE, \overline{RE}) e^{-i\bar{E}} \\
&+ f_0(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) F_0(\Lambda, RE, \overline{RE})
\end{aligned}$$

Les  $f_k$  sont indépendants de  $\lambda$  et donc invariants par calculs de primitives et moyennes. D'où

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{k=1}^{k=N} f_k(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) w_k(\Lambda, RE, \overline{RE}) e^{i\bar{E}} \\
&+ \sum_{k=1}^{k=N} \bar{f}_k(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) \overline{w}_k(\Lambda, RE, \overline{RE}) e^{-i\bar{E}} \\
&+ f_0(R1, R2, R3, Y, \bar{Y}) w_0(\Lambda, RE, \overline{RE})
\end{aligned}$$

où les  $w_k$  ne sont pas les fonctions génératrices centrées des  $F_k$ .  $\{w, F\}$  s'obtient alors à l'aide de crochets de Poisson partiels, nous désignons par crochet partiel, un crochet ne faisant pas intervenir toutes les variables.

L'expression de  $\frac{1}{4}\langle\{w_2(\text{terreL2}), F_2(\text{terreL2})\}\rangle_\lambda$  est donnée en annexe A.

Au cinquième ordre, on peut écrire :

$$T_5^{-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{i=5} L_i T_{5-i}^{-1} \quad \text{et} \quad H_5 = \sum_{i=0}^{i=5} T_i^{-1} F_{5-i}$$

Seul dans le cas d'une orbite haute, le cinquième ordre est utilisé, parce que les perturbations provenant de (*TerreL2*) sont importantes. On a seulement un potentiel  $F_2$ , une fonction génératrice  $w_2$  à l'ordre 2, une à l'ordre 3  $w_{13}$  et une à l'ordre 4 que l'on a pas calculée.



Comme

$$\begin{aligned}
T_0^{-1} &= I \\
T_1^{-1} &= O \\
T_2^{-1} &= \frac{1}{2}\{w_2, -\} \\
T_3^{-1} &= \frac{1}{3}\{w_{13}, -\} \\
T_4^{-1} &= \frac{1}{4}\{w_{24}, -\} + \frac{1}{8}\{w_2, \{w_2, -\}\}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
H_5 &= \left\langle \frac{1}{3}\{w_{13}, F_2\} \right. \\
&\quad + \frac{1}{4}\{w_{24}, F_1\} + \frac{1}{8}\{w_2, \{w_2, F_1\}\} \\
&\quad \left. + \frac{1}{5}\{w_{35}, F_0\} + \frac{1}{10}\{w_{13}, \{w_2, F_0\}\} + \frac{1}{15}\{w_2, \{w_{13}, F_0\}\} \right\rangle_\lambda
\end{aligned}$$

Si l'on suppose  $\langle w_{24} \rangle_\lambda = 0$ ,  $H_5$  est donné par :

$$H_5 = \left\langle \frac{1}{8}\{w_2, \{w_2, F_1\}\} \right\rangle_\lambda = \frac{1}{8} \left\langle \left\{ w_2, \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right\} \right\rangle_\lambda$$

Ce calcul est effectué de la même manière que  $\langle \{w_2, F_2\} \rangle_\lambda$ .

### 3.3.3 Expressions moyennées

Les expressions que nous allons calculer sont utilisées pour obtenir directement une théorie moyennée au troisième ordre sans effectuer de calculs de classement préliminaire. Récemment, Kelly [Kel89] a exprimé les intégrales suivantes :

$$\int \cos kv \, dM, \int \sin kv \, dM, \int \cos kE \, dM, \int \sin kE \, dM$$

et Métris [Met91a] les valeurs moyennes

$$\left\langle (v - M) \cos kv \right\rangle_M, \left\langle (v - M) \sin kv \right\rangle_M .$$

Ces intégrales sont insuffisantes pour avoir une théorie complète au second ordre d'un satellite lunaire ou d'un satellite terrestre haut. En fait,



lorsque les fonctions perturbatrices du corps extérieur et des harmoniques sont du même ordre, il est nécessaire de connaître les expressions (données en variables classiques) :

$$\left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{miw} \right\rangle_\lambda, \left\langle \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{mi\tilde{E}} \right\rangle_\lambda, \left\langle (w - \lambda) \left( \frac{r}{a} \right)^n e^{miw} \right\rangle_\lambda .$$

Elles sont des cas particuliers des intégrales que nous allons présenter. Parmi les variables que nous utilisons, seules  $e^{i\tilde{E}}$ ,  $RE$ ,  $\overline{RE}$ ,  $LE$ ,  $\overline{LE}$ ,  $LE$  et  $\overline{LE}$  contiennent la variable  $\lambda$  (voir (3.2.2)). Fort heureusement, les produits de ces variables que l'on rencontre au cours de notre travail ne sont pas quelconques. Afin d'automatiser la moyennisation, il a été décidé d'exprimer directement les expressions des moyennes les plus courantes. Il s'agit des moyennes des expressions  $A(n, m, k)$  et  $B(n, m, k)$ .

$$A(n, m, k) = RE^n \cdot \overline{RE}^m \cdot e^{ik\tilde{E}}$$

$$B(n, m, k) = RE^n \cdot \overline{RE}^m \cdot e^{ik\tilde{E}} \cdot LE$$

Pour calculer  $\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda$  et  $\langle B(n, m, k) \rangle_\lambda$ , nous utilisons seulement les deux relations géométriques (3.10) et (3.11) qui lient  $\tilde{E}$  et  $w$ . et la loi des aires.

$$e^{iw} = \frac{\left( 1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}} \right)}{\left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right)} e^{i\tilde{E}} = \frac{\overline{RE}}{RE} e^{i\tilde{E}} \quad (3.10)$$

$$e^{i\tilde{E}} = \frac{\left( 1 + \frac{X}{2R_2} e^{-iw} \right)}{\left( 1 + \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{iw} \right)} e^{iw} \quad (3.11)$$

$$d\lambda = R_2^2 \left( 1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}} \right) \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) d\tilde{E} = R_2^2 \overline{RE} RE d\tilde{E} \quad (3.12)$$

$$d\lambda = \frac{R_1^6}{R_2^4} \left( 1 + \frac{X}{2R_2} e^{-iw} \right)^{-2} \left( 1 + \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{iw} \right)^{-2} dw \quad (3.13)$$

Calcul de  $\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R E^n \overline{R E^m} \cdot e^{ik\tilde{E}} d\lambda$

Nous limitons notre calcul au cas  $k \geq 0$  car nous avons la relation de conjugaison :  $A(n, m, -k) = \overline{A(m, n, k)}$ .

En appliquant (3.12):

$$\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{E}_*}^{\tilde{E}_* + 2\pi} R_2^2 \left(1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}}\right)^{m+1} e^{ik\tilde{E}} d\tilde{E}$$

- si  $k \geq 0$  et  $m+1 \geq 0$  et  $m+1-k < 0$

$$\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{E}_*}^{\tilde{E}_* + 2\pi} R_2^2 \left(1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}}\right)^{n+1} \left(e^{i\tilde{E}} - \frac{X}{2R_2}\right)^{m+1} e^{-i(m+1-k)\tilde{E}} d\tilde{E}$$

Cette fonction est purement périodique donc

$$\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = 0$$

- si  $k \geq 0$  et  $m+1 \geq 0$  et  $m+1-k \geq 0$

Considérons la fonction  $f$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  qui à  $z$  associe

$$R_2^2 \left(1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z\right)^{n+1} \left(z - \frac{X}{2R_2}\right)^{m+1}$$

Elle est analytique sur  $\mathcal{C}$  tout entier lorsque  $X = \overline{X} = 0$  et toujours analytique sur la boule ouverte de rayon  $1 + \epsilon$  (avec  $1 + \epsilon < \frac{2R_2}{\sqrt{X\overline{X}}}$ )

lorsque  $0 < \epsilon < 1$ . En considérant le lacet  $\tilde{E} \mapsto e^{i\tilde{E}}$  ( $0 \leq \tilde{E} \leq 2\pi$ ), il vient d'après la relation de Cauchy.

$$f^{(m+1-k)}(0) = \frac{(m+1-k)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\tilde{E}}) e^{i(m+1-k)\tilde{E}} d\tilde{E}$$

Puisque  $f$  est périodique de période  $2\pi$ , les bornes sont définies à  $2\pi$  près et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\lambda &= \frac{2\pi}{(m+1-k)!} f^{(m+1-k)}(0) \\ \langle A \rangle_\lambda &= \frac{R_2^2}{(m+1-k)!} \left[ \left(1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z\right)^{n+1} \left(z - \frac{X}{2R_2}\right)^{m+1} \right]^{(m+1-k)} (0) \end{aligned}$$

En effectuant le calcul de la dérivée à l'aide de la formule de Leibnitz, il vient :

$$\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = R_2^2 \sum_{j=0}^{m+1-k} \binom{n+1}{j} \binom{m+1}{m+1-k-j} \left(-\frac{\bar{X}}{2R_2}\right)^j \left(-\frac{X}{2R_2}\right)^{j+k}$$

Les  $\binom{p}{k}$  sont définies sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ . Comme  $m+1 \geq 0$ , on peut écrire :

$$\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda = R_2^2 \left(-\frac{X}{2R_2}\right)^k \sum_{j=0}^{m+1-k} \binom{n+1}{j} \binom{m+1}{j+k} \left(\frac{1}{R_2^2} - 1\right)^j$$

Il est à noter que cette forme ne fait pas apparaître de produits redondants  $\bar{X}X$  et n'est pas singulière lorsque  $X = 0$ .

- si  $k \geq 0$  et  $m+1 < 0$

Grâce à (3.13),  $\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda$  s'écrit de la manière suivante :

$$\langle A \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{R_2^4}{R_1^2} \int_{\tilde{w}_*}^{\tilde{w}_*+2\pi} \left(1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}}\right)^{m+2} e^{ik\tilde{E}} d\tilde{w}$$

En utilisant (3.11) et (3.10), on a

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\lambda &= \frac{R_2^2}{2\pi} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^{n+m+3} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{iw}\right)^{-n-2-k} \left(1 + \frac{X}{2R_2} e^{-iw}\right)^{-m-2+k} e^{ikw} dw \\ \langle A \rangle_\lambda &= \frac{R_2^2}{2\pi} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^{n+m+3} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{iw}\right)^{-n-2-k} \left(e^{iw} + \frac{X}{2R_2}\right)^{-m-2+k} e^{-i(-m-2)w} dw \end{aligned}$$

Nous considérons la fonction holomorphe  $f$  :

$$f(z) = \left(1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} z\right)^{-n-2-k} \left(z + \frac{X}{2R_2}\right)^{-m-2+k}$$

Par la même méthode que dans le cas précédent,  $\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda$  est calculé en utilisant la relation de Cauchy.

$$\langle A \rangle_\lambda = R_2^2 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^{n+m+3} \left(\frac{X}{2R_2}\right)^{k-m-2} \sum_{j=0}^{-m-2} \binom{-n-2-k}{j} \binom{-m-2+k}{j+k} \left(\frac{1}{R_2^2} - 1\right)^j$$

A l'aide de ces simples formules, il est possible de moyenner la majorité des séries rencontrées et d'obtenir des résultats valables pour toutes les orbites quasi-périodiques rencontrées. Il est possible de les comparer avec des formules faisant intervenir  $r$  le rayon vecteur ou l'anomalie moyenne  $v$  en choisissant de façon adéquate les entiers  $m$ ,  $n$  et  $k$ .

**Calcul de  $\langle B(n, m, k) \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} LE \cdot RE^n \cdot \overline{RE}^m \cdot e^{ik\tilde{E}} d\lambda$ .**

Nous allons le calculer par une méthode similaire à celle employée pour  $\langle A(n, m, k) \rangle_\lambda$ .

- si  $m + 1 \geq 0$  et  $k - m - 1 \geq 0$

$$\langle B \rangle_\lambda = \frac{R_2^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right)^{n+1} \left( e^{i\tilde{E}} - \frac{X}{2R_2} \right)^{m+1} e^{-i(m+1-k)\tilde{E}} d\tilde{E}$$

Nous choisissons un lacet orienté dans le sens direct sur le cercle  $C(O, 1)$  de centre  $O$  et de rayon 1.

$$\langle B \rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(O,1)} R_2^2 \ln \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z \right) \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z \right)^{n+1} \left( z - \frac{X}{2R_2} \right)^{m+1} z^{k-m-2} dz$$

Comme la fonction est holomorphe ,

$$\langle B(n, m, k) \rangle_\lambda = 0$$

- si  $m + 1 \geq 0$  et  $k - m - 1 < 0$

Si l'on pose

$$f(z) = \ln \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z \right) \left( 1 - \frac{\overline{X}}{2R_2} z \right)^{n+1} \left( z - \frac{X}{2R_2} \right)^{m+1}$$

$$\langle B \rangle_\lambda = \frac{R_2^2}{2\pi i} \oint_{C(O,1)} f(z) z^{k-m-2} dz \quad (3.14)$$

Cette intégrale admet une seule singularité en  $O$  à l'intérieur du disque  $D(O, 1)$ . On en déduit par le théorème des résidus.

$$\langle B \rangle_\lambda = \frac{R_2^2}{(-k + m + 1)!} [f(z)]^{(-k+m+1)}(0)$$

En utilisant la formule du multinôme de Leibnitz ;

$$\langle B \rangle_\lambda = R_2^2 \sum_{j=0}^{-k+m+1} \binom{m+1}{j+k} \left( -\frac{X}{2R_2} \right)^{k+j} \left( -\frac{\bar{X}}{2R_2} \right)^j \sum_{l=1}^j \binom{n+1}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l}$$

Si on ajoute la condition  $k \geq 0$ , cette relation s'écrit plus simplement :

$$\langle B \rangle_\lambda = R_2^2 \left( -\frac{X}{2R_2} \right)^k \sum_{j=0}^{-k+m+1} \binom{m+1}{j+k} \left( \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)^j \sum_{l=1}^j \binom{n+1}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l}$$

Avec la condition  $k < 0$ :

$$\langle B \rangle_\lambda = R_2^2 \left( -\frac{\bar{X}}{2R_2} \right)^{-k} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \left( \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)^j \sum_{l=1}^{-k+j} \binom{n+1}{-k+j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l}$$

Dans les deux cas, il n'y a pas de singularités lorsque l'excentricité s'annule.

- si  $m+1 < 0$  et  $-m-2+k \geq 0$

En appliquant le changement de variables  $\tilde{E}$  en  $w$  (voir le calcul de  $A(m, n, k)$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_\lambda &= \frac{2}{2\pi} R_2^2 \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{n+m+3} \\ &\quad \cdot \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \left( 1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{iw} \right)^{-n-2-k} \left( 1 + \frac{X}{2R_2} e^{-iw} \right)^{-m-2+k} e^{ikw} dw \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} R_2^2 \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{n+m+3} \\ &\quad \cdot \int_0^{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{iw} \right) \left( 1 + \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{iw} \right)^{-n-2-k} \left( 1 + \frac{X}{2R_2} e^{-iw} \right)^{-m-2+k} e^{ikw} dw \end{aligned}$$

On reconnait dans la première partie de cette formule  $2 L12 A(m, n, k)$

Pour calculer la seconde, on utilise à nouveau le théorème des résidus.

Le résultat est :

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_\lambda &= R_2^2 \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{n+m+3} \sum_{j=0}^{-m-2} \binom{-m-2+k}{j+k} \left( \frac{X}{2R_2} \right)^{j+k} \left( \frac{\bar{X}}{2R_2} \right)^j \\ &\quad \cdot \left[ 2 L12 \binom{-n-2-k}{j} - \sum_{l=1}^j \binom{-n-2-k}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \right] \end{aligned}$$



Avec  $\underline{k \geq 0}$

$$\langle B \rangle_\lambda = R_2^2 \left( \frac{X}{2R_2} \right)^k \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{n+m+3} \sum_{j=0}^{-m-2} \binom{-m-2+k}{j+k} \left( \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)^j \\ \cdot \left[ 2 L_{12} \binom{-n-2-k}{j} - \sum_{l=1}^j \binom{-n-2-k}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \right]$$

Avec  $\underline{k < 0}$

$$\langle B \rangle_\lambda = R_2^2 \left( \frac{\bar{X}}{2R_2} \right)^{-k} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{n+m+3} \sum_{j=0}^{-m-2+k} \binom{-m-2+k}{j} \left( \frac{1}{R_2^2} - 1 \right)^j \\ \cdot \left[ 2 L_{12} \binom{-n-2-k}{-k+j} - \sum_{l=1}^{-k+j} \binom{-n-2-k}{-k+j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \right]$$

- **si  $m+1 < 0$  et  $-m-2+k < 0$**

L'intégrale (3.14) admet deux singularités à l'intérieur du disque  $D(O, 1)$  :

l'une en  $O$ , l'autre au point d'affixe  $\frac{X}{2R_2}$ .

Si l'on pose :

$$f(z) = \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} z \right) \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} z \right)^{n+1} \left( z - \frac{X}{2R_2} \right)^{m+1}$$

et

$$f_2(z) = \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} \left( z + \frac{X}{2R_2} \right) \right) \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} \left( z + \frac{X}{2R_2} \right) \right)^{n+1} \left( z + \frac{X}{2R_2} \right)^{k-m-2}$$

On obtient à l'aide du théorème des résidus :

$$\langle B(m, n, k) \rangle_\lambda = \frac{R_2^2}{(-k+m+1)!} [f_1(z)]^{(-k+m+1)}(0) \\ + \frac{R_2^2}{(-m-2)!} [f_2(z)]^{(-m-2)}(0)$$

La première partie a déjà été calculée et la seconde se déduit de la formule de Leibnitz.

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_\lambda = & R_2^2 \sum_{j=0}^{-k+m+1} \binom{m+1}{-k+m+1-j} \left(-\frac{X}{2R_2}\right)^{k+j} \left(-\frac{\bar{X}}{2R_2}\right)^j \sum_{l=1}^j \binom{n+1}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \\ & + R_2^2 \sum_{j=0}^{-m-2} \binom{k-m-2}{-m-2-j} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^{n+1-j} \left(\frac{X}{2R_2}\right)^{k+j} \left(-\frac{\bar{X}}{2R_2}\right)^j \\ & \cdot \left[ 2L12 \binom{n+1}{j} + \sum_{l=1}^j \binom{n+1}{j-l} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \right] \end{aligned}$$

Cette formule contient des singularités apparentes qu'il convient de faire disparaître avant intégration numérique. On peut le faire en développant l'expression  $L12$ .

### 3.3.4 Fonctions génératrices purement périodiques

Nous allons expliquer comment les fonctions génératrices  $w$  sont calculées. Pour une fonction  $F$  donnée,  $w$  se définit par :

$$\begin{aligned} W &= \int^\lambda \left[ F - \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\lambda \right) \right] d\lambda \\ w &= W - \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W d\lambda \right) \end{aligned}$$

Pour notre théorie, après avoir classer le potentiel à l'aide des générateurs présentés au paragraphe 3.2.2, les expressions dépendantes de  $\lambda$  qu'il faut intégrer sont de quatre types:  $RE^n e^{ik\bar{E}}$ ,  $\overline{RE^n e^{ik\bar{E}}}$ ,  $LE$  et  $\overline{LE}$ . Comme  $\overline{RE^n e^{ik\bar{E}}} = \overline{RE^n e^{-ik\bar{E}}}$ , nous ne calculons seulement  $w(RE^n e^{ik\bar{E}})$  et  $w(LE)$ .

#### Calcul de $w(RE^n e^{ik\bar{E}})$

Il est suffisant de connaître  $W(RE^n e^{ik\bar{E}})$  un générateur de  $RE^n e^{ik\bar{E}}$  qui ne soit pas purement périodique. On utilise ensuite les formules du paragraphe 3.3.3 pour obtenir la moyenne que l'on soustrait. Tous les générateurs sont définies à une constante près que l'on n'indique pas par soucis de place.  
si  $n > -2$

Ce calcul s'effectue sans aucune difficulté car il se ramène à une intégration polynômiale.

$$W = \int^\lambda RE^n e^{ik\bar{E}} d\lambda - \int^\lambda \left( \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\bar{E}} d\lambda \right) d\lambda$$

A l'aide de la relation (3.12), il arrive

$$W = R_2^2 \int^{\tilde{E}} \frac{\overline{RE}}{RE} RE^{n+1} e^{ik\tilde{E}} d\tilde{E} - \lambda \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda$$

Lorsque l'on développe les expressions par rapport  $e^{i\tilde{E}}$  :

$$W = R_2^2 \int^{\tilde{E}} \left[ \left( 1 - \frac{X}{2R_2} e^{-i\tilde{E}} \right) \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \left( -\frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^l e^{i(l+k)\tilde{E}} \right] d\tilde{E} - \lambda \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda$$

Par calculs de primitives ;

$$W = \frac{R_2^2}{i} \sum_{l=0; l \neq -k}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{l}}{l+k} (RE-1)^l e^{ik\tilde{E}} + \frac{R_2^2}{i} (\overline{RE}-1) \sum_{l=0; l \neq 1-k}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{l}}{l+k-1} (RE-1)^l e^{ik\tilde{E}} + (\tilde{E}-\lambda) \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda$$

Il s'agit maintenant d'employer l'équation de Képler (3.8) pour obtenir un résultat dans les bonnes variables :

$$W = \frac{R_2^2}{i} \sum_{l=0; l \neq -k}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{l}}{l+k} (RE-1)^l e^{ik\tilde{E}} + \frac{R_2^2}{i} (\overline{RE}-1) \sum_{l=0; l \neq 1-k}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{l}}{l+k-1} (RE-1)^l e^{ik\tilde{E}} + \frac{R_2^2}{i} (\overline{RE}-RE) \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda$$

L'expression  $\left( \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda \right)$  s'obtient à l'aide des formules du paragraphe 3.3.3. Il est inutile d'exprimer  $W$  à l'aide d'une famille de générateurs donnée car il faut encore lui soustraire sa moyenne pour obtenir  $w$  la fonction purement

périodique cherchée. Néanmoins, cette formulation est un bon compromis qui nécessitera peu de manipulations sur la série  $w$ .

si  $n \leq -2$  et  $k + n + 2 \leq 0$

De la même manière qu'auparavant :

$$W = R_2^2 \int^{\tilde{E}} \overline{RE} R E^{n+1} e^{ik\tilde{E}} d\tilde{E} - \lambda \int_0^{2\pi} R E^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda$$

Si l'on effectue quelques manipulations, on obtient :

$$\begin{aligned} W = & R_2^2 \int^{\tilde{E}} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{n+1} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} + \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-n-2} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & + R_2^2 \left( -\frac{X}{2R_2} \right) \int^{\tilde{E}} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{n+1} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} + \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-n-1} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & - \lambda \int_0^{2\pi} R E^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda \end{aligned}$$

Puisque  $-k - n - 2 \geq 0$ , on peut utiliser la formule de Newton ;

$$\begin{aligned} W = & R_2^2 \int^{\tilde{E}} \sum_{l=0}^{-k-n-2} \binom{-k-n-2}{l} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^l \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-l-1} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & + R_2^2 \left( -\frac{X}{2R_2} \right) \int^{\tilde{E}} \sum_{l=0}^{-k-n-1} \binom{-k-n-1}{l} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^l \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-l} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & + (-\tilde{E} + \tilde{E} - \lambda) \int_0^{2\pi} R E^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda \end{aligned}$$

En intégrant ;

$$\begin{aligned} W = & i R_2^2 \sum_{l=0; l \neq -k}^{-k-n-2} \frac{\binom{-k-n-2}{l}}{-k-l} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^l \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-l} \\ & + i R_2^2 \left( -\frac{X}{2R_2} \right) \sum_{l=0; l \neq -k+1}^{-k-n-1} \frac{\binom{-k-n-1}{l}}{-k-l+1} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^l \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k-l+1} \\ & + R_2^2 \int^{\tilde{E}} \binom{-k-n-2}{-k} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-1} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & + R_2^2 \left( -\frac{X}{2R_2} \right) \int^{\tilde{E}} \binom{-k-n-1}{-k+1} \left( \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-k+1} \left( e^{-i\tilde{E}} - \frac{\overline{X}}{2R_2} \right)^{-l} e^{-i\tilde{E}} d\tilde{E} \\ & + (-\tilde{E} + \tilde{E} - \lambda) \int_0^{2\pi} R E^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda \end{aligned}$$

En calculant  $\left(\int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda\right)$  on peut simplifier l'équation et obtenir :

$$\begin{aligned}
W = & i R_2^2 \sum_{l=0; l \neq -k}^{-k-n-2} \frac{\binom{-k-n-2}{l}}{-k-l} (1-RE)^l RE^{-k-l} e^{ik\tilde{E}} \\
& + i R_2^2 (\overline{RE} - 1) \sum_{l=0; l \neq -k+1}^{-k-n-1} \frac{\binom{-k-n-1}{l}}{-k-l+1} (1-RE)^l RE^{-k-l+1} e^{ik\tilde{E}} \\
& + \left(\int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda\right) \int^{\tilde{E}} (RE^{-1} - 1) d\tilde{E} \\
& + (\tilde{E} - \lambda) \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda
\end{aligned}$$

Le résultat final est :

$$\begin{aligned}
W = & i R_2^2 \sum_{l=0; l \neq -k}^{-k-n-2} \frac{\binom{-k-n-2}{l}}{-k-l} (RE^{-1} - 1)^l RE^{-k} e^{ik\tilde{E}} \\
& + i R_2^2 (\overline{RE} - 1) \sum_{l=0; l \neq -k+1}^{-k-n-1} \frac{\binom{-k-n-1}{l}}{-k-l+1} (RE^{-1} - 1)^l RE^{-k+1} e^{ik\tilde{E}} \\
& + i LE \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda \\
& + \frac{R_2^2}{i} (\overline{RE} - RE) \int_0^{2\pi} RE^n e^{ik\tilde{E}} d\lambda
\end{aligned}$$

$LE$  est simplement le logarithme complexe de  $RE$ .

si  $n \leq -2$  et  $k+n+2 > 0$

Ce calcul est basé sur le même principe que les précédents. Nous donnons seulement le résultat.



$$\begin{aligned}
W = & -i R_2^2 \left( \frac{2R_2}{-\bar{X}} \right)^k \sum_{l=0; l \neq n+k+1}^{k-1} (-1)^l \frac{\binom{k-1}{l}}{n+k+1-l} R E^{n+k+1-l} \\
& + i R_2^2 \left( \frac{X}{2R_2} \right) \left( \frac{2R_2}{-\bar{X}} \right)^{k-l} \sum_{l=0; l \neq n+k}^{k-2} (-1)^l \frac{\binom{k-2}{l}}{n+k-l} R E^{n+k-l} \\
& - i R_2^2 \left( \frac{2R_2}{-\bar{X}} \right)^k (-1)^{n+k+1} \binom{k-1}{n+k+1} L E \\
& + i R_2^2 \left( \frac{X}{2R_2} \right) \left( \frac{2R_2}{-\bar{X}} \right)^{k-l} (-1)^{n+k} \binom{k-2}{n+k} L E
\end{aligned}$$

Les expressions introduites dans les potentiels perturbateurs initiaux introduisent des valeurs particulières de  $k$  et  $n$  où il est possible d'obtenir une fonction génératrice purement périodique associée sans singularités apparentes.

#### Calcul de $w(LE)$

On a remarqué que lors d'une première intégration, la fonction logarithmique  $LE$  n'était pas multipliée par une autre fonction dépendant du temps. Bien souvent, il est nécessaire de la réintégrer (voir le paragraphe 3.3.2). La moyenne de  $LE$  vaut  $1 - R_2^2$ . Une fonction génératrice associée à  $LE$  est définie par :

$$W = \int^\lambda \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) d\lambda - \int^\lambda (1 - R_2^2) d\lambda$$

En effectuant le changement de variable  $\lambda$  en  $\tilde{E}$ , il arrive :

$$\begin{aligned}
W = & \int^{\tilde{E}} \left( 1 - \frac{R_2 \bar{X} e^{i\tilde{E}}}{2} - \frac{R_2 X e^{-i\tilde{E}}}{2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) d\tilde{E} \\
& - \int^{\tilde{E}} \left( 1 - \frac{R_2 \bar{X} e^{i\tilde{E}}}{2} - \frac{R_2 X e^{-i\tilde{E}}}{2} \right) (1 - R_2^2) d\tilde{E}
\end{aligned}$$

Toutes ces intégrations se font sans problème mais nous sommes obligés d'introduire une nouvelle fonction : le bilogarithme de Euler.

$$\int^{\tilde{E}} \ln \left( 1 - \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) d i \tilde{E} = i Li_2 \left( \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) = i lE$$

$lE$  est une série définie de la manière suivante :

$$lE = Li_2 \left( \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right) = \frac{1}{i} \int^{\tilde{E}} LE d\tilde{E} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \frac{\bar{X}}{2R_2} e^{i\tilde{E}} \right)^k}{k^2}$$

$Li_2$  est analytique sur la boule unité et donc définie pour les valeurs que l'on utilise. Comme sa moyenne vaut  $R_2^2 - 1$ , la fonction génératrice purement périodique associée à  $LE$  peut être calculée. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w(LE) = & i lE \\ & + i \left( 1 - 2 R_2^2 + R_2^2 (\overline{RE} - RE) \right) LE \\ & + i \left( 2 R_2^2 - R_2^4 \right) RE \\ & + i \left( -R_2^2 + R_2^4 \right) \overline{RE} \\ & + i \frac{1}{2} \left( -1 - R_2^4 \right) \end{aligned}$$

## 3.4 Seconde moyennisation par la méthode de Lie

### 3.4.1 Les fréquences fixes du hamiltonien

Après la première moyennisation du hamiltonien  $F$  faite dans ce chapitre, nous obtenons un nouveau hamiltonien  $H$  qui ne contient plus la longitude moyenne du satellite. Les fréquences les plus hautes sont celles associées à la description du mouvement de la Lune autour de la Terre et à la rotation de la Lune sur elle-même. Leurs périodes sont proches du mois lunaire.

Les théories analytiques utilisées ont introduit six variables angulaires dépendant linéairement du temps. Elles sont les suivantes :

$$\lambda_{lu}, D, F, l, l', \varpi_{te}$$

$\lambda_{lu}$  est la longitude moyenne sidérale de la Lune

$D$  est la différence des longitudes moyennes de la Terre et la Lune

$F$  est la longitude moyenne de la Lune comptée à partir du noeud ascendant

$l$  est l'anomalie moyenne de la Lune

$l'$  l'anomalie moyenne du Soleil

$\varpi_{te}$  la longitude moyenne du périhélie de la Terre

A l'intérieur du hamiltonien exprimé dans le repère écliptique, elles apparaissent sous la forme :

$$e^{i(k_1\lambda_{lu} + k_2D + k_3F + k_4l + k_5l' + k_6\varpi_{te})}$$

Afin d'isoler les fréquences intéressantes, proches de celle de la Lune dans son mouvement autour de la Terre, il est associé un entier  $n'(variable)$  à chaque fonction linéaire du temps défini par :

$$n'(k_1\lambda_{lu} + k_2D + k_3F + k_4l + k_5l' + k_6\varpi_{te}) = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

Il est possible désormais de trier les différents arguments du temps à l'aide du manipulateur :

si  $n'(variable)$  est nul, la période associée est de plus de un mois,

si  $n'(variable)$  est non nul, la fréquence associée est rapide de période inférieure au mois.

### 3.4.2 Les particularités de la méthode : introduction

Lorsque l'on effectue l'intégration du système hamiltonien moyenné une fois, il est nécessaire de choisir un pas d'intégration de plusieurs heures (une centaine de pas par mois lunaire). Ce pas est encore trop petit lorsque l'on veut connaître le comportement d'une orbite en fonction d'une large gamme de conditions initiales. Nous pouvons obtenir une orbite moyennée valable sur plusieurs jours en supprimant les angles à variations moyennes présentés dans la partie précédente. L'expression du hamiltonien permet de le faire et nous allons à nouveau appliquer l'algorithme de Deprit utilisant les transformées de Lie.

$H_0$  est désormais une intégrale première du mouvement. Les angles les plus rapides sont les angles que nous avons désignés à moyennes périodes ( $\theta$ ) et associés à la variable  $\Theta$  ( $H_1 = \Theta$ ). Les indices des potentiels et fonctions génératrices que nous allons utiliser seront conservés. Nous désignons toujours les angles à l'aide de la convention de départ.

Pour supprimer  $\theta$ , celui-ci doit apparaître explicitement. Les référentiels intermédiaires utilisés jusqu'alors ne sont plus valables et les potentiels doivent être exprimés dans le plan écliptique. Ce changement de référentiel augmente nettement le nombre de termes de chaque série qu'il faut séparer en différents ordres. Ce redécoupage n'est fait qu'après la première moyennisation sinon il eût été impossible d'obtenir des fonctions génératrices sous une forme fermée.

Bien que les séries à utiliser soient plus longues, les calculs inhérents à la méthode de moyennisation entraînent moins de difficultés que lors de la première transformation pour les raisons suivantes :

le temps apparaît explicitement à l'intérieur de fonctions trigonométriques,

les potentiels ne sont fonction que de cinq variables du mouvement du satellite,

les générateurs décrivant les potentiels sont extrêmement simples.

Néanmoins, le tableau 2.2 montre que les amplitudes de  $H_1$  et  $H_2$  sont très proches. Comme il n'y a aucun risque de résonance entre les angles que l'on supprime et ceux à longues périodes, les équations homologues sont résolues à chaque étape par une seule moyennisation et un seul calcul

de primitive. Un cinquième ordre moyen est ajouté lorsque nous n'obtenons pas une précision suffisante au quatrième ordre.

### 3.4.3 Eliminations

De la même façon que lors de l'élimination de  $\lambda$ , on introduit un opérateur symplectique  $T'$  vérifiant  $T'K = H$  tel que  $K$  le nouveau hamiltonien ne contienne plus d'angles à moyenne période.

$$T' = I + \sum_{i=1}^{i=4} \epsilon^i T'_i$$

Les  $T'_i$  sont fonction des crochet de Poisson  $L'_i = \left\{ w'_i, \right\}$ , leurs expressions sont détaillée dans la partie 3.3.1.

Après avoir développé  $H$  et  $K$  en série de Taylor et égalé leurs termes ordre par ordre, on obtient :

à l'ordre 1

$$H_1 = K_1$$

à l'ordre 2

$$\left\{ w'_1, H_1 \right\} = K_2 - H_2$$

Ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial w'_1}{\partial \theta} = K_2 - H_2$$

Il faut séparer la partie purement périodique et la partie "séculaire" qui ne contient plus les angles à moyenne période de la Lune. Chaque terme du hamiltonien a une expression de la forme suivante :

$$f(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R_1, R_2, R_3, L12) \cdot e^{i(k_1 \lambda_{lu} + k_2 D + k_3 F + k_4 l + k_5 l' + k_6 \varpi_{te})}$$

si  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ , le terme est mis dans  $K_2$ ,

sinon, il est intégré par rapport à  $\theta$  et devient :

$$f(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R_1, R_2, R_3, L12) \cdot \frac{(-i) \cdot e^{i(k_1 \lambda_{lu} + k_2 D + k_3 F + k_4 l + k_5 l' + k_6 \varpi_{te})}}{k_1 n_{\lambda_{lu}} + k_2 n_D + k_3 n_F + k_4 n_l + k_5 n_{l'} + k_6 n_{\varpi_{te}}}$$



La fonction génératrice  $w_1'$  ainsi obtenue est purement périodique. A cet ordre, le hamiltonien  $H_2$  ne contient que la variable  $\lambda_{lu}$ . Nous rappelons que  $H_2$  est exprimé désormais dans le plan écliptique et ne contient que la partie prépondérante du potentiel du second ordre introduit dans le tableau 2.2. Dans le cas de l'orbite basse, nous avons  $H_2(C_{22})$ ,  $H_2(C_{20})$  et  $H_2(terreL2)$  qui se transforment en  $K_2(C_{20})$ ,  $K_2(terreL2)$  et  $w_1'(C_{22})$ ,  $w_1'(terreL2)$ . L'orbite haute n'introduit seulement  $K_2(terreL2)$  et  $w_1'(terreL2)$ . Nous avons donné les expressions de  $H_2(terreL2)$  et  $K_2(terreL2)$  en annexe B.

### à l'ordre 3

$$\left\{ w_2', H_1 \right\} = 2 (K_3 - H_3) - \left\{ w_1', K_2 + H_2 \right\}$$

Résoudre cette équation homologique peut se faire directement mais il est préférable de la scinder et d'introduire une nouvelle notation. Nous notons  $w_{ij}$  la fonction génératrice d'ordre  $j$  obtenue après  $i$  calculs de crochets de Poisson. On emploie la même notation pour  $K_{ij}$ .

$$\begin{aligned} \left\{ w_{02}', H_1 \right\} &= 2 (K_{03} - H_3) \\ \left\{ w_{12}', H_1 \right\} &= 2 K_{13} - 2 \left\{ w_{01}', K_{02} \right\} - \left\{ \frac{\partial w_{01}'}{\partial \theta}, w_{01}' \right\} \end{aligned}$$

La résolution de la première équation ne pose aucun problème majeur mais il est à noter que  $H_3(terreL2)$  contient de nombreuses fonctions trigonométriques ayant pour argument des combinaisons linéaires de  $\lambda_{lu}$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $l$  et  $l'$ . La seconde contient une partie purement périodique  $\left\{ w_{01}', K_{02} \right\}$  et une partie mixte. Avoir conservé des potentiels sous forme fermée (non développé en excentricité) prend toute son importance ici, les crochets de Poisson considérés ont un nombre de termes très réduit. L'expression de  $K_{13}(terreL2)$  est donnée en annexe B.

### à l'ordre 4

$$\begin{aligned} \left\{ w_3', H_1 \right\} &= 3 (K_4 - H_4) \\ &\quad - \left\{ w_1', K_3 + 2 H_3 \right\} \\ &\quad - \left\{ w_2', K_2 + \frac{1}{2} H_2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ w_1', \left\{ w_1', H_2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

En utilisant les nouvelles notations :

$$\begin{aligned} \left\{ w_{03}' + w_{13}' + w_{23}', H_1 \right\} &= 3 (K_{04} - K_{14} - K_{24} - H_4) \\ &\quad - \left\{ w_{01}', K_{03} + K_{13} + 2 H_3 \right\} \\ &\quad - \left\{ w_{02}' + w_{12}', K_{02} + \frac{1}{2} H_2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ w_{01}', \left\{ w_{01}', H_2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à résoudre les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ w_{03}', H_1 \right\} &= 3 (K_{04} - H_4) \\ \left\{ w_{13}', H_1 \right\} &= 3 K_{14} - \left\{ w_{01}', K_{03} + 2 H_3 \right\} - \left\{ w_{02}', K_{02} + \frac{1}{2} H_2 \right\} \\ \left\{ w_{23}', H_1 \right\} &= 3 K_{24} - \left\{ w_{01}', K_{13} \right\} - \left\{ w_{12}', K_{02} + \frac{1}{2} H_2 \right\} - \frac{1}{2} \left\{ w_{01}', \left\{ w_{01}', H_2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

La première se résout classiquement. La dernière ne pose aucun problème non plus car les séries restent très courtes : nous évaluons exactement tous les crochets du membre de droite, puis nous les regroupons pour calculer  $K_{24}$  et  $w_{23}'$ . Pour résoudre la seconde, il est plus rapide de découper  $H_2$ ,  $K_{02}$  et  $w_{01}'$ . Qu'il s'agisse de *terreL2*,  $C_{22}$  ou  $C_{20}$ ,  $H_2$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H_2 &= f_2(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R1, R2, R3, L12) e^{2i \lambda_{lu}} \\ &\quad + f_0(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R1, R2, R3, L12) \\ &\quad + \bar{f}_2(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R1, R2, R3, L12) e^{-2i \lambda_{lu}} \end{aligned}$$

Par ce biais, toute une partie du résultat est obtenue par l'utilisation des conjugués. L'expression de  $K_{24}(\textit{terreL2})$  est par ailleurs donnée en annexe B.

### à l'ordre 5

Nous avons été obligé de calculer la fonction génératrice à l'ordre 3 pour obtenir un changement de variable cohérent avec le premier. Il devient donc facile d'obtenir le potentiel au cinquième ordre puisque celui-ci ne sera que le fruit d'un calcul de moyenne. Son calcul n'est pas nécessaire pour toutes les catégories de perturbations. L'équation homologique est la suivante :

$$\begin{aligned} \left\{ w_4', H_1 \right\} = & 4 (K_5 - H_5) \\ & - \left\{ w_1', K_4 + 3 H_4 \right\} \\ & - \left\{ w_2', K_3 + H_3 \right\} \\ & - \left\{ w_3', K_2 + \frac{1}{3} H_2 \right\} \\ & - \left\{ w_1', \left\{ w_1', H_3 \right\} \right\} \\ & - \frac{1}{3} \left\{ w_2', \left\{ w_1', H_2 \right\} \right\} \\ & - \frac{1}{6} \left\{ w_1', \left\{ w_2', H_2 \right\} \right\} \\ & - \frac{1}{6} \left\{ w_1', \left\{ w_1', \left\{ w_1', H_2 \right\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Par passage à la moyenne, on obtient  $K_5 = K_{05} + K_{15}^* + K_{15}^{**} + K_{25} + K_{35}$

avec :

$$\begin{aligned}
K_{05} &= \langle H_5 \rangle_\theta \\
K_{15}^* &= \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{01}', 3 H_4 \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{03}', \frac{1}{3} H_2 \right\} \right\rangle_\theta \\
K_{15}^{**} &= \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{02}', H_3 \right\} \right\rangle_\theta \\
K_{25} &= \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{12}', H_3 \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{13}', \frac{1}{3} H_2 \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{01}', \left\{ w_{01}', H_3 \right\} \right\} \right\rangle_\theta \\
&\quad + \frac{1}{12} \left\langle \left\{ w_{02}', \left\{ w_{01}', H_2 \right\} \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{24} \left\langle \left\{ w_{01}', \left\{ w_{02}', H_2 \right\} \right\} \right\rangle_\theta \\
K_{35} &= \frac{1}{4} \left\langle \left\{ w_{23}', \frac{1}{3} H_2 \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{12} \left\langle \left\{ w_{12}', \left\{ w_{01}', H_2 \right\} \right\} \right\rangle_\theta \\
&\quad + \frac{1}{24} \left\langle \left\{ w_{01}', \left\{ w_{12}', H_2 \right\} \right\} \right\rangle_\theta + \frac{1}{24} \left\langle \left\{ w_{01}', \left\{ w_{01}', \left\{ w_{01}', H_2 \right\} \right\} \right\} \right\rangle_\theta
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, chaque fonction est mise sous la forme :

$$A = \sum_{i=-N}^{i=N} \sum_{(k_1+k_2+k_3+k_4=i)} f_k(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, R1, R2, R3, L12) e^{i(k_1 \lambda_{1u} + k_2 D + k_3 F + k_4 l + k_5 l' + k_6 \varpi_{te})}$$

A l'aide de cette expression, nous calculons uniquement les crochets de Poisson de moyenne non nulle et nous ne conservons uniquement les termes qui ont une amplitude suffisante.

## Chapitre 4

# APPLICATIONS A L'ETUDE DES ORBITES

### 4.1 Introduction

La partie précédente a été consacrée à la construction d'une théorie de perturbation totalement analytique. Les hamiltoniens moyennés et les fonctions génératrices de la transformation gardent un sens quelques soient les inclinaisons et pour toutes les excentricités, contraignant le satellite à rester dans une zone de 13000 km autour de la Lune.

Cette construction a permis de mettre en œuvre un algorithme d'intégration rapide des orbites lunaires. Etant donné une condition initiale, cet algorithme fournit une solution exprimée dans les variables et le système de référence choisis par l'utilisateur. Une première version a été installée au Centre Nationale d'Etudes Spatiales de Toulouse.

Au cours de la présentation de l'algorithme, nous détaillerons quelques articulations fondamentales des méthodes qui le compose. Nous évaluerons ensuite, la précision des calculs sur quelques exemples significatifs.

### 4.2 Présentation de l'algorithme

La condition initiale peut être exprimée à l'aide de différentes variables (de Poincaré, cartésiennes ou elliptiques) et dans différents repères (écliptiques ou équatorial lunaire). Le vecteur position initiale peut ensuite subir



trois processus d'intégrations distincts.

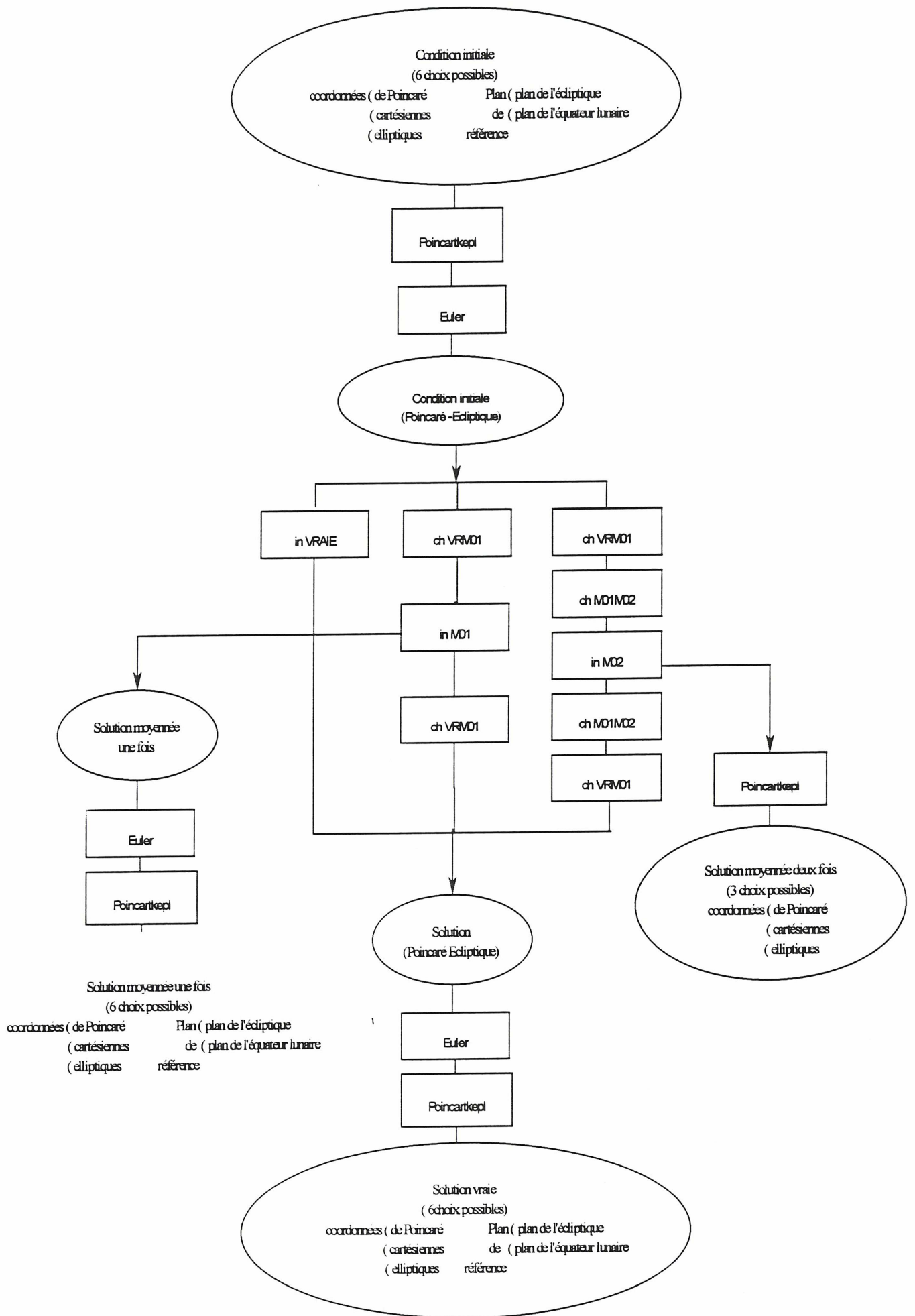
- Une intégration du système vrai prenant en compte des angles à variation rapides (la longitude moyenne du satellite) nécessite un pas d'intégration très court de moins d'un quart d'heure, et demande un temps de calcul prohibitif (10h sur une station sun4).
- Une intégration d'un système moyenné une fois met en jeu des angles de période le mois lunaire et peut être effectuée à l'aide d'un pas de quelques heures.
- Le dernier processus consiste en une intégration du système deux fois moyenné. Comme les périodes sont toutes supérieures ou égales à l'année, il est possible de choisir un pas de quelques jours. Ce qui offre une méthode extrêmement rapide pour l'obtention de la solution.

La solution obtenue après l'un des trois types d'intégration peut être conservée ou subir la transformation canonique inverse de celle qui a permis d'accéder au système d'intégration choisi. Cette transformation peut être appliquée à l'intégralité de l'orbite ou seulement sur un intervalle de temps choisi. A nouveau, il est possible d'exprimer la solution finale dans les variables et le plan de son choix.

Il existe encore actuellement quelques situations dans lesquelles l'algorithme ne peut s'appliquer. Dans le cas des orbites très basses, le potentiel moyenné et les fonctions génératrices ne décrivent pas suffisamment bien la forme dynamique de la Lune. On pourrait utiliser un potentiel moyenné plus élaboré mais développé en excentricité et inclinaison.

Dans le cas d'une orbite haute, le potentiel moyen n'est plus adapté, si l'excentricité augmente et le rayon vecteur atteint 13000 km.

Reste le cas où le satellite vient à s'écraser sur la Lune. Dans cette situation, l'intégration est stoppée.



## DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

- **Poincartkepl.c**: Cette fonction effectue des changements de coordonnées. Elle transforme des coordonnées cartésiennes, elliptiques ou de Poincaré en des variables que l'on a choisies par avance. Nous avons utilisé les formulaires de Duriez[Dur89] et Laskar[Las89a] pour le faire.
- **Euler.c**: Ce programme effectue une rotation définie par les trois angles d'Euler. Les rotations les plus utilisées nous permettent de passer du plan de l'écliptique à un plan méridien ou au plan de l'équateur lunaire. Les variables d'entrée et de sortie sont de Poincaré ou cartésiennes.
- **chVRMO1.c**: Les passages des coordonnées de Poincaré vraies aux coordonnées de Poincaré moyennées une fois se font à l'aide de la transformation de Lie. Nous évaluons seulement les dérivées partielles des fonctions génératrices utiles qui nous permettent d'obtenir une expression à l'ordre 3. Le retour s'effectue de la même façon. Les fonctions génératrices ont pour argument la longitude excentrique. Cette dernière s'obtient par résolution de l'équation de Kepler. La solution à cette équation s'obtient très rapidement et avec une grande précision en utilisant l'algorithme de Nijenhuis[Nij91].
- **chMO1MO2.c**: Nous transformons à l'aide de ce programme les variables de Poincaré moyennées une fois en des variables moyennées deux fois. A nouveau, le changement se fait à l'aide d'évaluations de séries.
- **inVRAIE.c**: Ce programme intègre le système vrai et fait appel à **Poincartkepl.c** et **Euler.c** pour obtenir des hamiltoniens dans des repères adéquats en coordonnées cartésiennes. De cette façon, le potentiel a une expression relativement compacte et il est possible d'intégrer le système complet. Le potentiel lunaire est par exemple développé jusqu'au degré et ordre 16. Comme le manipulateur algébrique a ordonné les séries, deux termes consécutifs d'une série ont des expressions similaires. Par exemple,

$$serie = a_1 x^2 y^3 z^4 + a_2 x^2 y^3 z + a_3 x^2 y^3 + \dots$$

Nous stockons le minimum d'information. C'est à dire  $(a_1, x^2, y^3, z^4)$ ,  $(a_2, -, -, z)$  et  $(a_3, -, -, z^0)$ . Les calculs de  $x^2$  et  $y^3$  ne sont effectués

qu'une seule fois. Cette astuce nous permet de réduire considérablement la durée des évaluations des seconds membres à chaque pas d'intégration.

- **inMO1.c** : Ce programme utilise **Euler.c** pour obtenir des expressions dans des repères adéquats et intègre un système moyenné une fois. La durée caractéristique d'une intégration sur une année est une demi-heure.
- **inMO2.c** : L'intégration du système moyenné deux fois est quasiment instantanée puisqu'il ne faut évaluer le second membre qu'une centaine de fois pour obtenir le mouvement du satellite sur une période de l'année.

### 4.3 Exemples

L'écriture analytique des équations montre que la perturbation terrestre est très importante dans le cas d'orbites très hautes. Afin de mettre à l'épreuve notre méthode analytique, nous choisissons de représenter des résultats numériques qui portent sur ce type d'orbite. Plus particulièrement ces résultats concernent les cas extrêmes où les méthodes traditionnelles achoppent : c'est à dire pour des excentricités et inclinaisons grandes ou des excentricités nulles. Nous comparons toujours des intégrations numériques directes du système complet à des intégrations semi-numériques d'un système incluant exactement les développements et les hypothèses présentées dans les chapitres 2 et 3.

L'intégrateur que nous utilisons ici est un intégrateur d'Adams à pas variables. Pour pouvoir valider la théorie, il est nécessaire de comparer les positions d'un satellite calculé par deux méthodes différentes aux mêmes instants. Ne voulant pas effectuer de calculs d'interpolations, il est nécessaire de se fixer un pas. Notre intégrateur le permet. Le choix du pas d'intégration est quelque chose de délicat. Pour le choisir, nous avons d'abord cherché la solution de Kepler du problème à un corps à l'aide d'une intégration directe en coordonnées cartésiennes. Le pas a été diminué jusqu'à obtenir une conservation des intégrales du mouvement. Pour déterminer de façon optimale le pas, nous avons aussi intégré le système complet pendant une durée de 10 mois et utilisé la position à l'instant  $(t_0 + 10)$  comme condition initiale pour faire une intégration dans le sens inverse. Les pas d'intégration que nous indiquons ont toujours permis de retrouver la position initiale



avec une erreur relative inférieure à  $10^{-8}$ . Les systèmes vrais sont intégrés à l'aide d'un pas de  $1 \cdot 10^{-5}$  mois sidéral lunaire (de l'ordre de la minute). Les systèmes moyennés une fois à l'aide d'un pas de 0.002 mois lunaire et les systèmes moyennés deux fois à l'aide d'un pas de 0.02 mois lunaire.

Les paramètres initiaux à la date  $J2000$  sont présentés dans le tableau 4.1.

TAB. 4.1 - Conditions initiales à  $J2000$

|                          | CONDITION I | CONDITION II | CONDITION III    |
|--------------------------|-------------|--------------|------------------|
| $a$ (rayons lunaires)    | 5.          | 5.           | 4.               |
| $e$                      | 0.14824944  | 0.           | 0.2              |
| $i$ (degrés)             | 26.094253   | 11.535783    | 85.              |
| $M$ (degrés)             | -178.54319  |              | 0.               |
| $\omega$ (degrés)        | 21.275394   |              | 40.              |
| $\Omega$ (degrés)        | 26.450916   | 84.289406    | 40.              |
| $\lambda$ (radians)      | 4.          | 4.           | 1.396263         |
| partie réelle de $X$     | 0.1         | 0.           | $3.490640e - 02$ |
| partie imaginaire de $X$ | 0.101       | 0.           | $1.979640e - 01$ |
| partie réelle de $Y$     | 0.201       | 0.01         | $5.122773e - 01$ |
| partie imaginaire de $Y$ | 0.1         | 0.1          | $4.298517e - 01$ |

Les figures 4.1 et 4.2 représentent les évolutions vraies du système complet à partir des conditions initiales I et II. Les variables utilisées sont celles de Poincaré. Nous y avons ajouté les évolutions moyennées une fois et les croix sont les évolutions vraies calculées à l'aide de inMO1 et chVRMO1.

Les figures 4.3 et 4.4 schématisent les mouvements moyennés une fois et les mouvements moyennés deux fois du système complet. Sur la figure 4.3, nous pouvons y remarquer les variations importantes des éléments métriques. Sur une période de 4 mois, l'excentricité passe d'environ 0.14 à 0.18 et l'inclinaison de 26 à 22.5 degrés. Ceci prouve bien que nous sommes aux limites d'un problème de perturbation d'un système képlérien. Lorsque l'inclinaison est forte (figure 4.4), ce phénomène est encore amplifié puisque l'excentricité varie de 0.2 à 0.75 et le satellite tombe sur la Lune en 6 mois lunaires. Le demi-grand axe a des variations périodiques de l'ordre du km (figure 4.5).



FIG. 4.1 - Mouvement vrai et mouvement moyenné une fois du système complet à partir de la condition initiale I

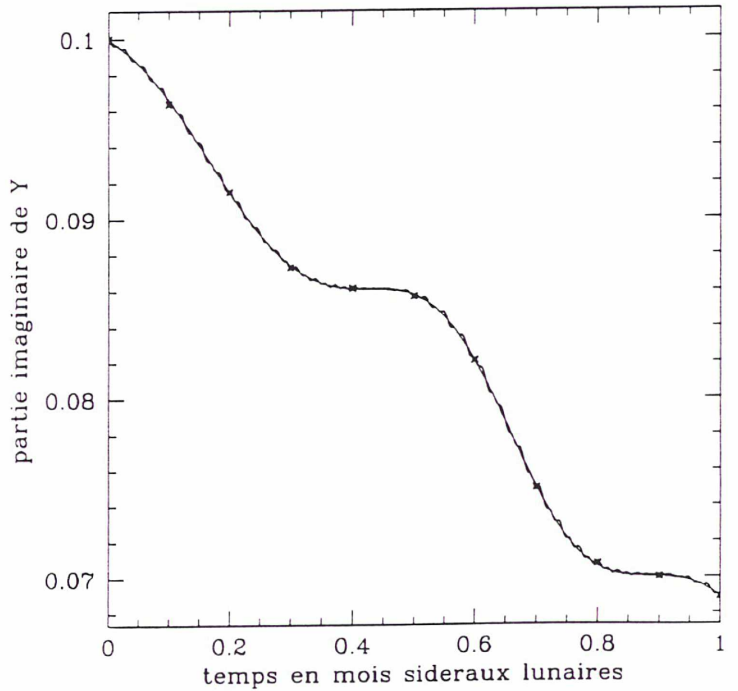
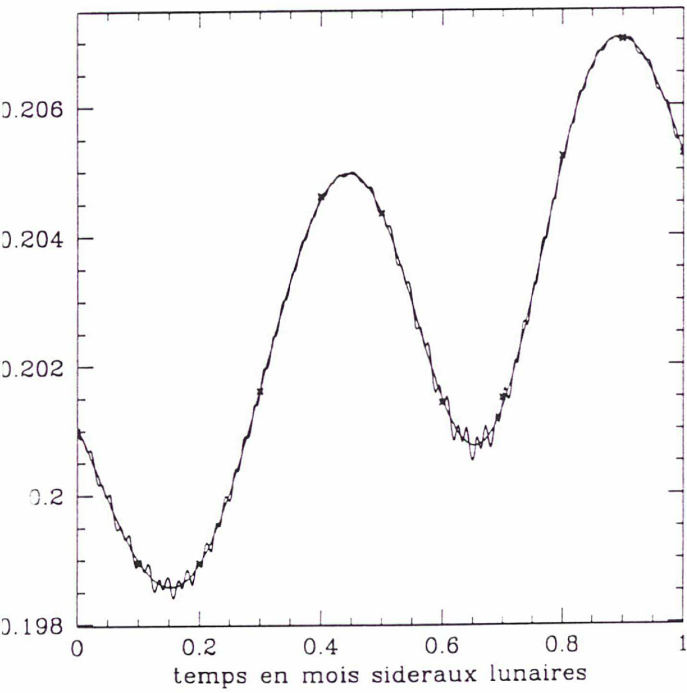
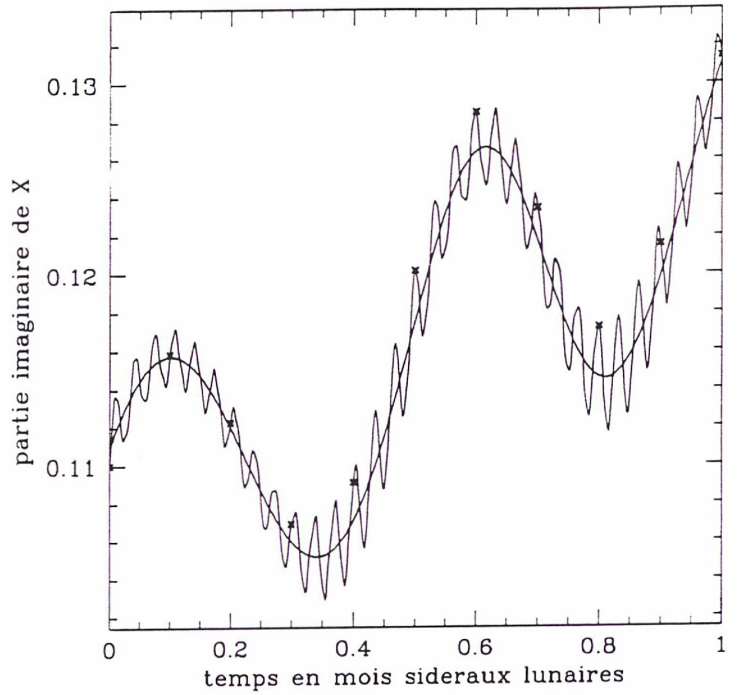
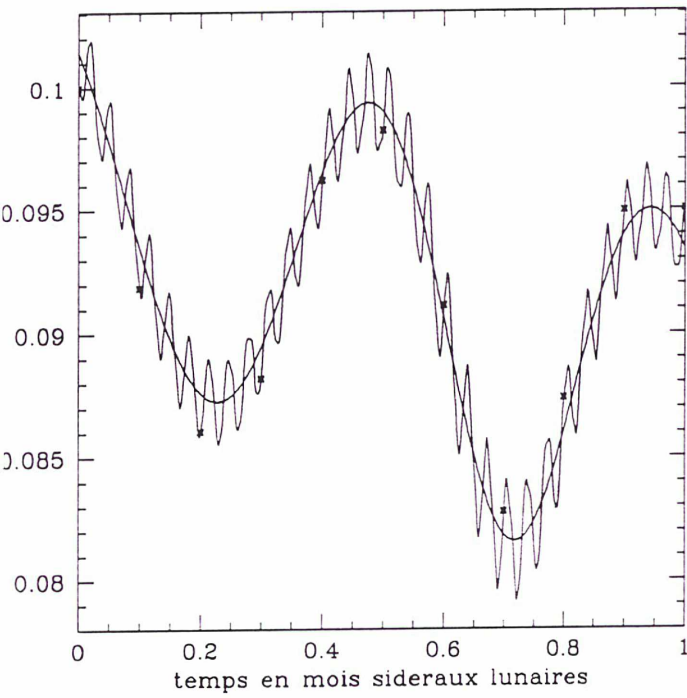


FIG. 4.2 - Mouvement vrai et mouvement moyenné une fois du système complet à partir de la condition initiale II

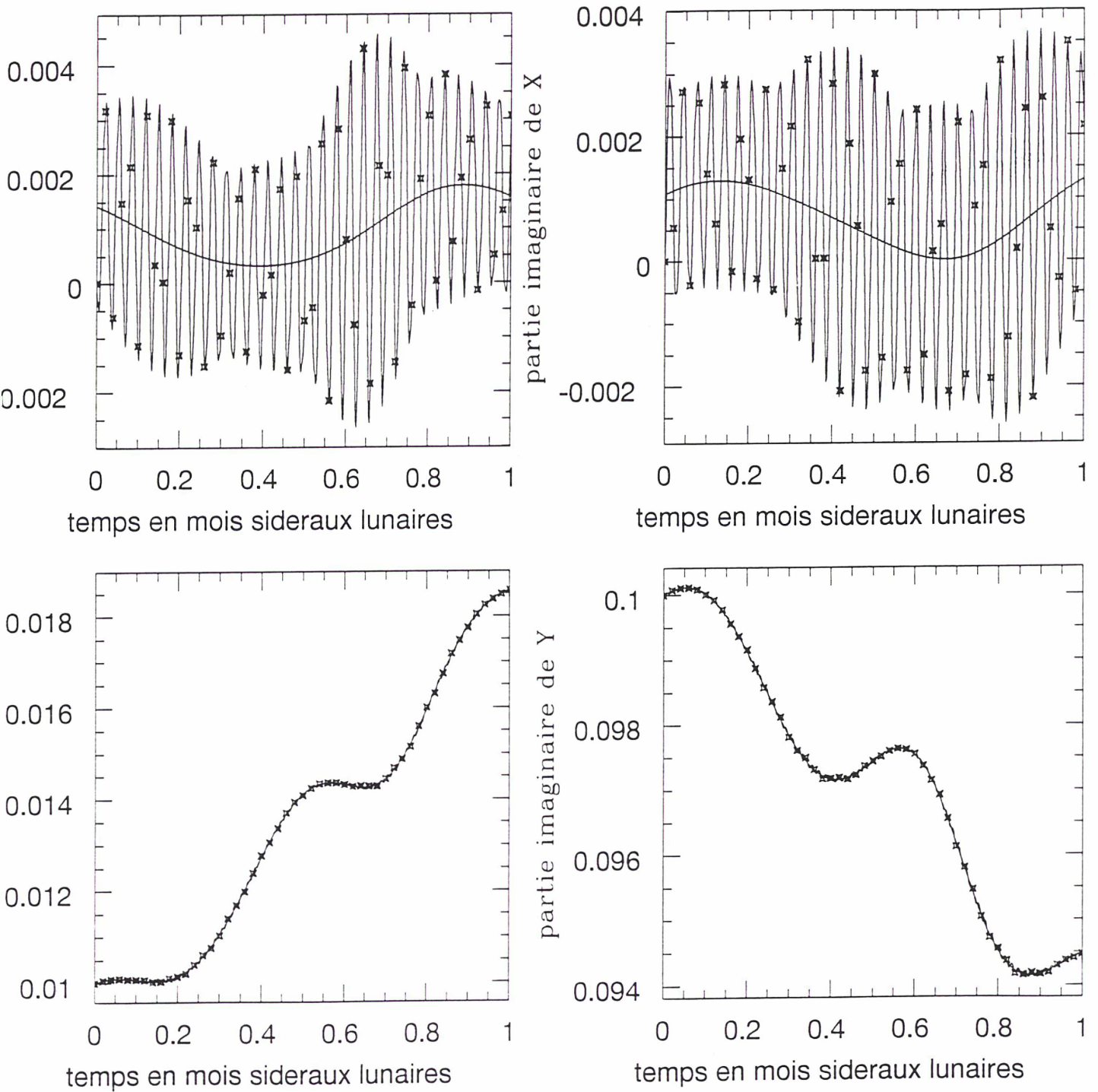


FIG. 4.3 - Mouvement moyenné une fois et mouvement moyenné deux fois du système complet à partir de la condition initiale I

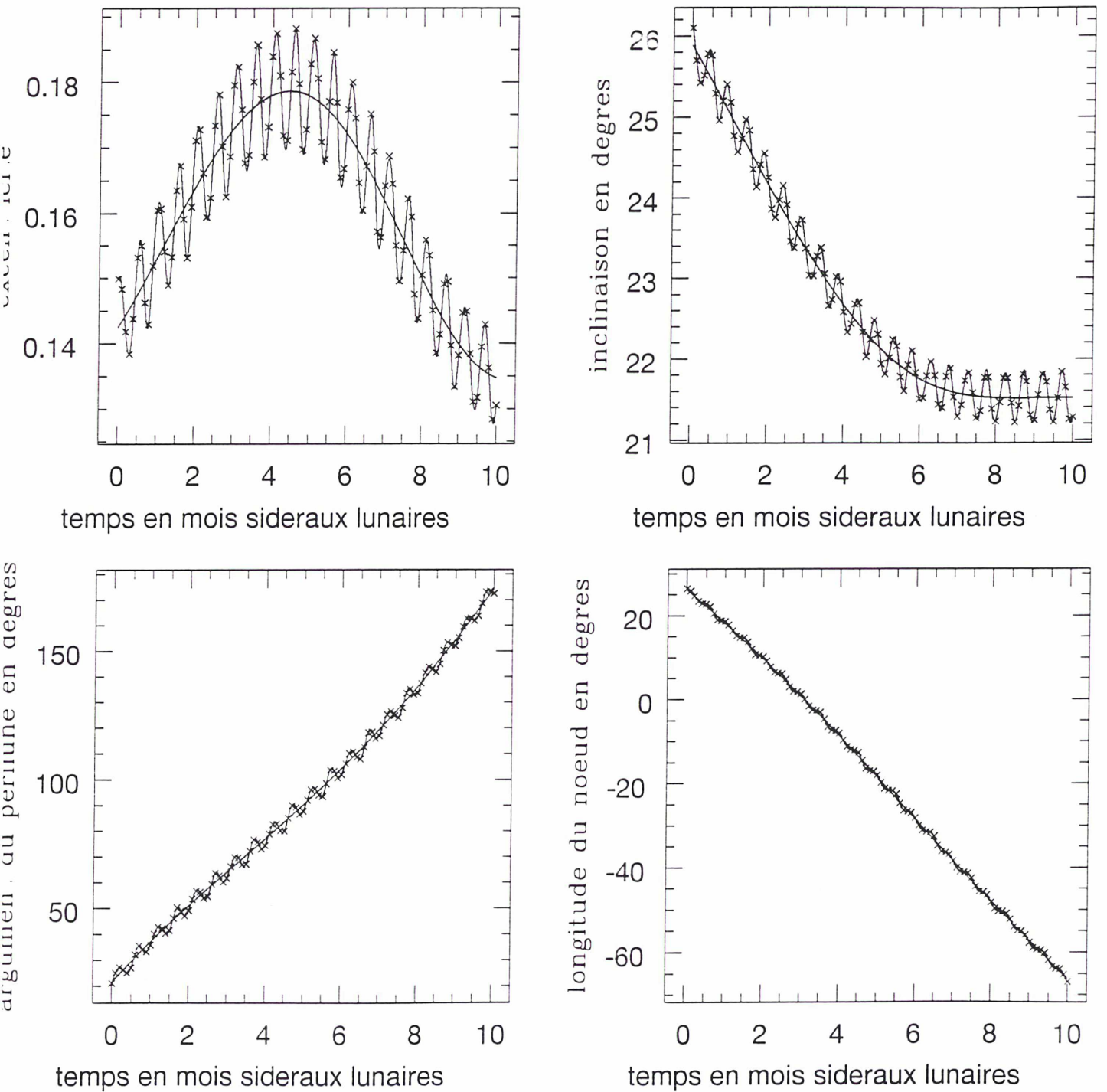


FIG. 4.4 - Mouvement moyenné une fois et mouvement moyenné deux fois du système complet à partir de la condition initiale III

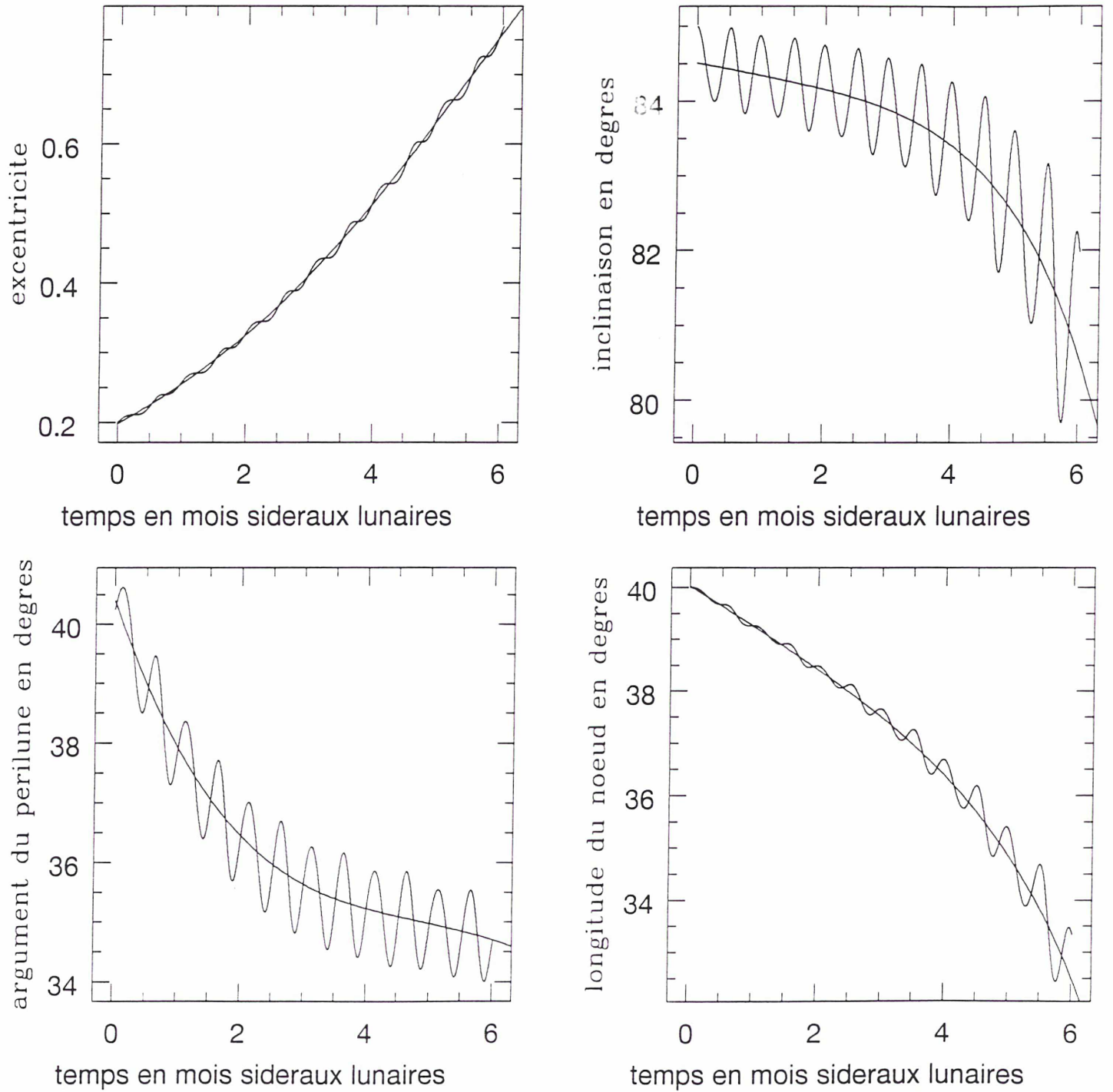
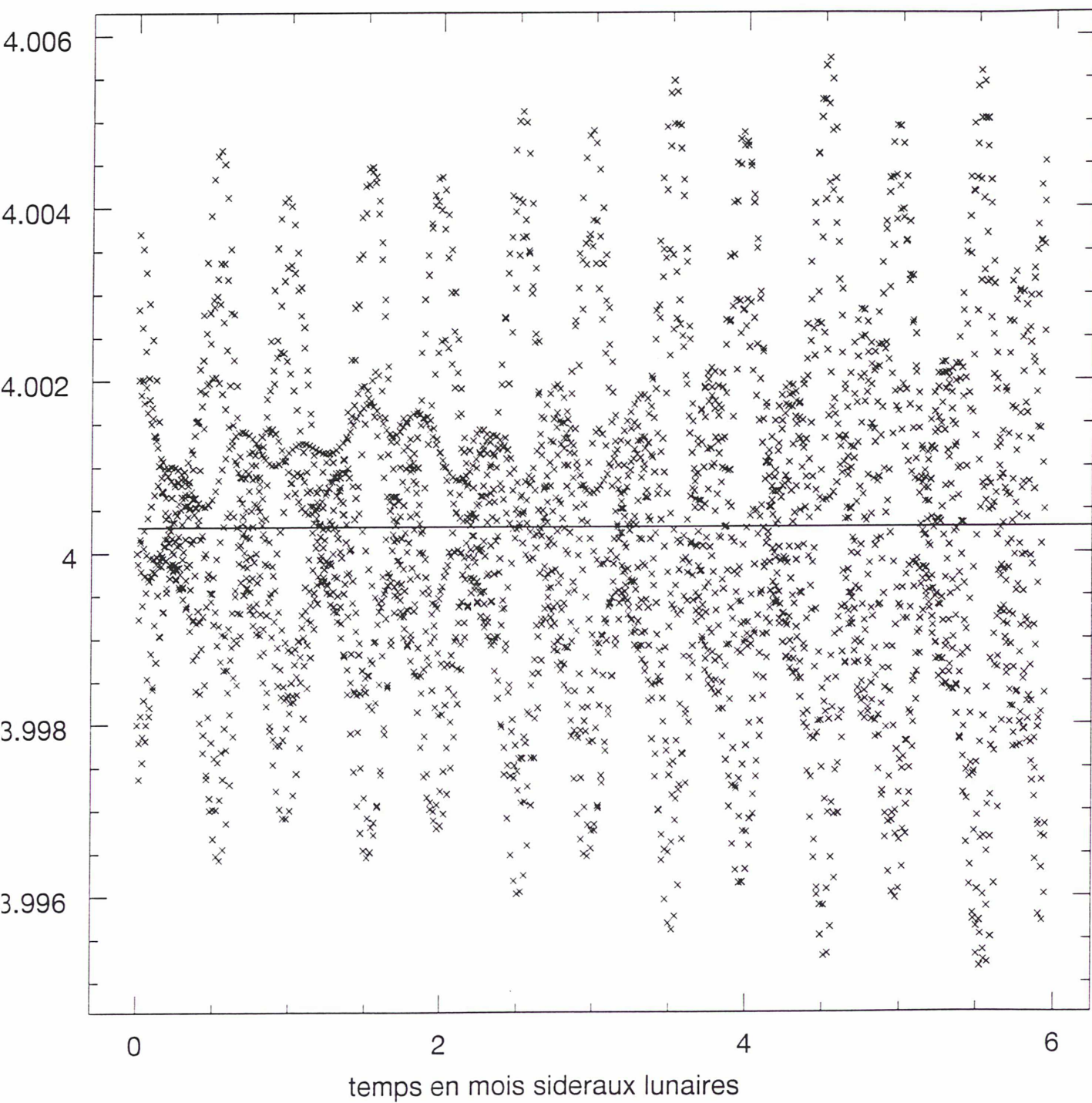




FIG. 4.5 - Variations vraies et moyennées une fois du demi-grand axe en rayons lunaires à partir de la condition initiale III





Les variations périodiques de période un demi-mois lunaire sont engendrées en grande partie par la perturbation terrestre. Le terme prépondérant de cette perturbation peut s'exprimer de la façon suivante :

$$F_{max} = Gm_2 \frac{r^2}{a_2^3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{r^2} \right)^2 \right]$$

où :

$\theta$  est la longitude moyenne sidérale lunaire,

$r, x, y$  sont des coordonnées du satellite,

l'indice 2 se rapporte à la Terre.

Nous devons porter une attention particulière à ce potentiel qui détermine le plus fortement le mouvement du satellite. Comme il a été indiqué dans le chapitre 3, l'algorithme de moyennisation a été poussé jusqu'à l'ordre 5 pour ce terme. Les résultats d'une intégration d'un potentiel restreint ne contenant que  $F_0 + F_{max}$  sont présentés sur les schémas 4.6, 4.7 et 4.8. Les conditions initiales sont les conditions I. Les figures 4.7 illustrent la différence entre une position calculée par intégration numérique directe (inVRAIE) et une intégration semi-analytique utilisant inMO1 et chVRMO1. L'erreur sur les variables de Poincaré ne dépasse jamais  $3 \cdot 10^{-5}$  au cours de cette intégration sur une période de 50 mois. Ceci est cohérent avec les hypothèses puisque le hamiltonien et la fonction génératrice ne sont développés qu'au cinquième ordre et au troisième ordre respectivement. Un maximum relatif de l'erreur sur une variable donnée correspond à un maximum relatif de la variable conjuguée (voir figures 4.6 et 4.7). Il faut rappeler que le calcul de la fonction génératrice est effectué à l'aide d'évaluations sans résolution d'équations. La figure 4.8 représente les différences entre une intégration du système vrai et une intégration semi-numérique à l'aide de chVRMO1, chMO1MO2 et inMO2. L'erreur est plus importante et atteint  $10^{-4}$ . Les schémas 4.7 et 4.8 nous donnent un aperçu de la précision optimale que l'on peut atteindre sur le système complet. En effet, dans notre étude, tous les termes d'ordre 5 sont négligés ; seuls  $H_5(F_{max})$  et  $K_5(F_{max})$  ont été conservés.

FIG. 4.6 - Mouvement moyenné une fois et mouvement moyenné deux fois du système restreint à partir de la condition initiale I

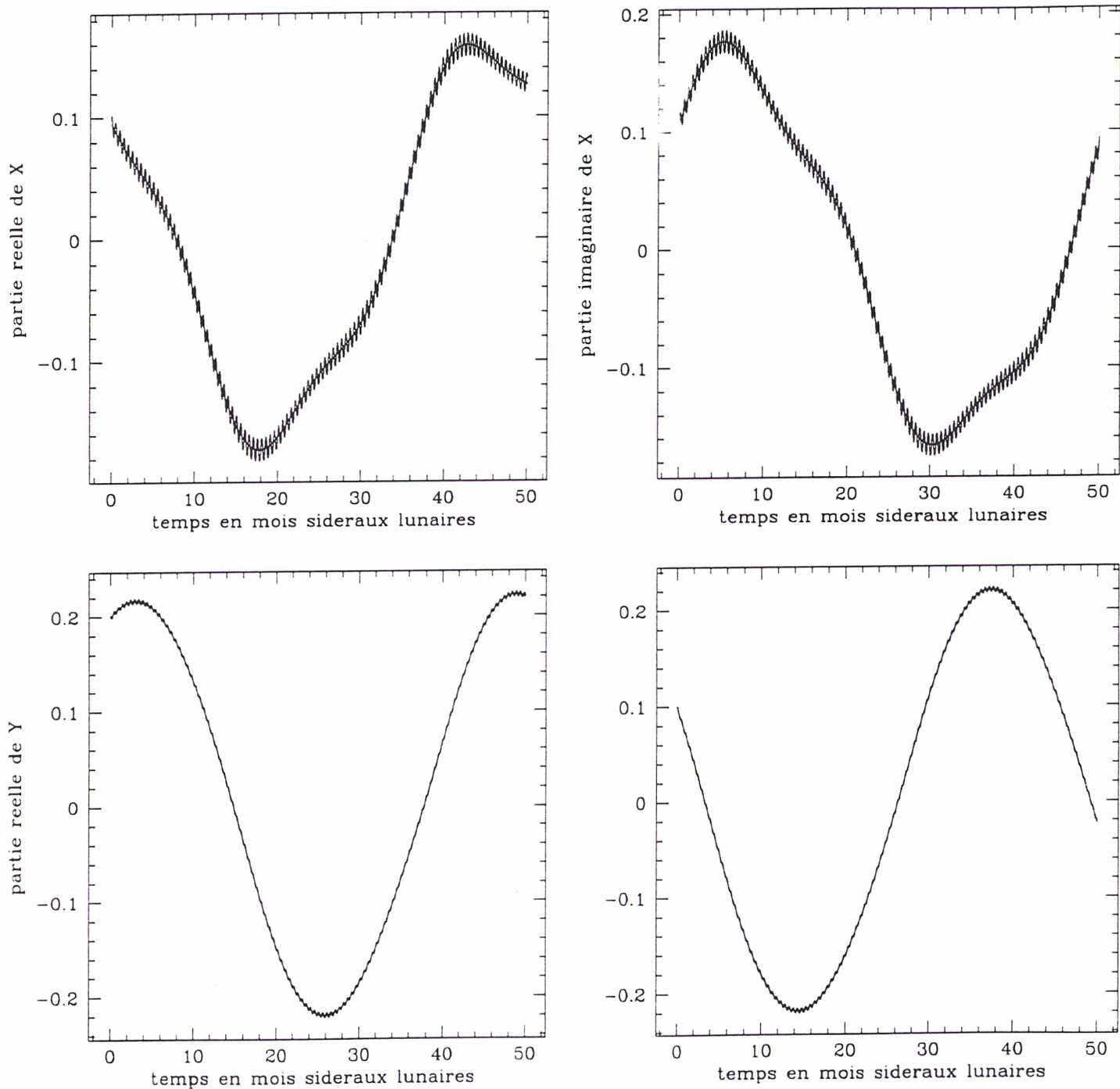


FIG. 4.7 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1 et inMO1 du système restreint à partir de la condition initiale I

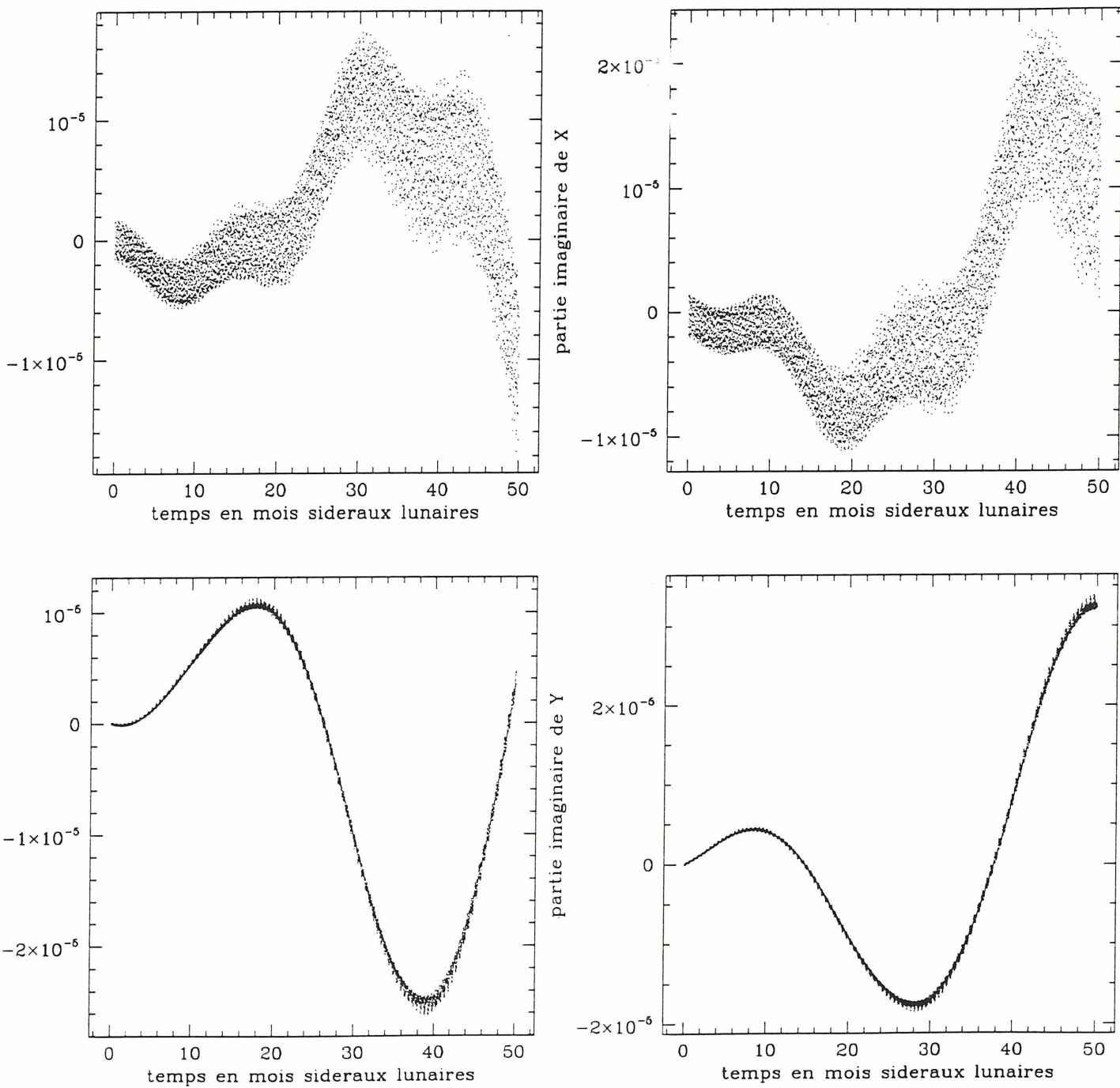
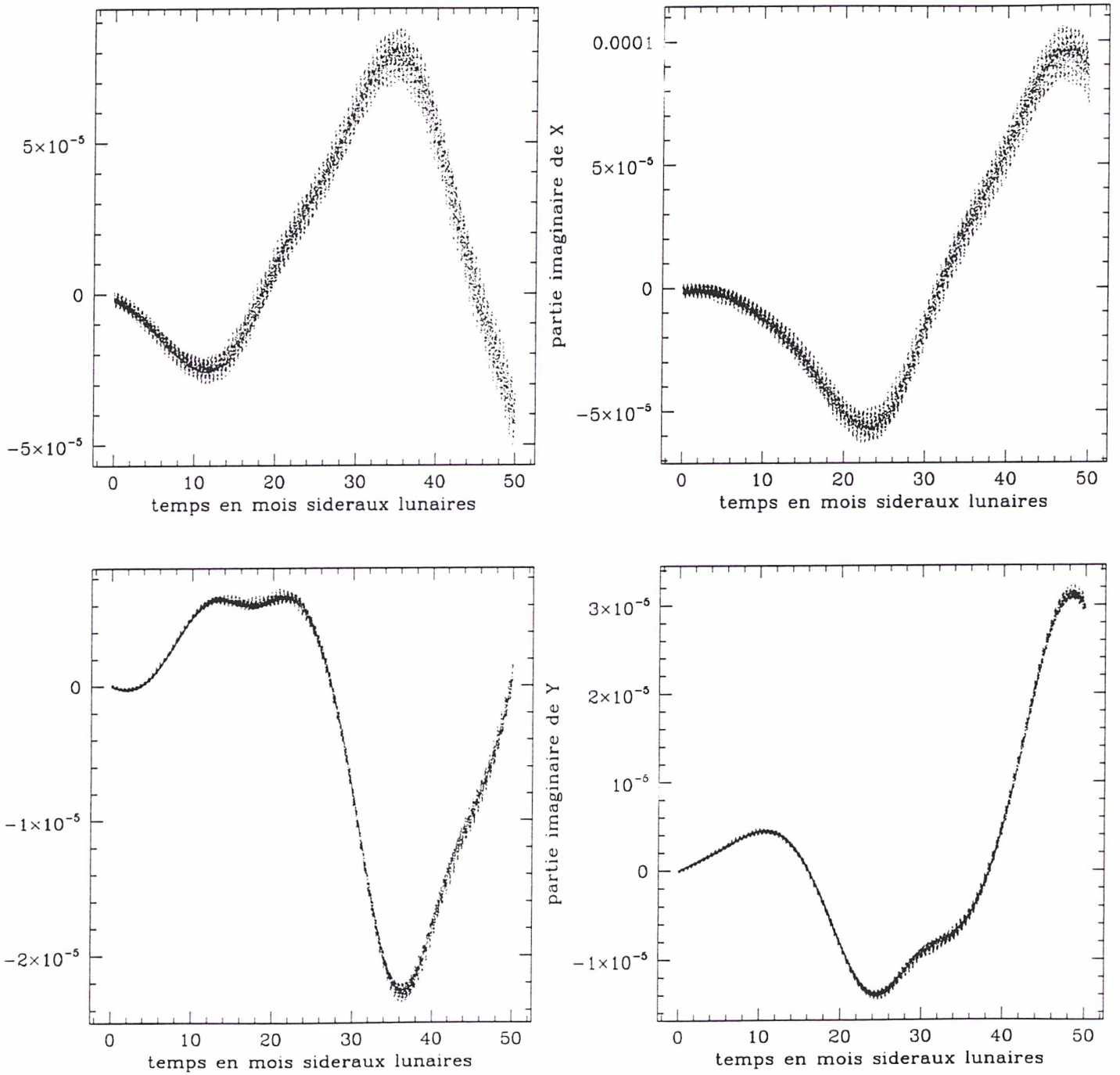


FIG. 4.8 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1, chMO1MO2 et inMO2 du système restreint à partir de la condition initiale I



Les figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13 représentent les erreurs sur le système complet intégré à partir des conditions initiales I, II et III. Au contraire des théories classiques avec développements en excentricité, il est remarquable de constater que la théorie se dégrade peu lorsque l'excentricité augmente fortement. Ces schémas montrent que les erreurs sont plus importantes que celles obtenues à partir des intégrations du système restreint. Pour les deux types d'intégration, elles ont augmenté d'un ordre de grandeur, ce qui prouve que les hypothèses effectuées étaient trop restrictives. En particulier, il est possible de noter que ces différences ont des variations périodiques de période un mois. Elles proviennent des expressions analytiques du mouvement de la Lune autour de la Terre introduite à l'aide de la théorie de Chapront-Touzé [CCT82], en particulier du fait que l'orbite lunaire n'est pas circulaire. Pour les faire disparaître, il serait nécessaire de pousser les calculs jusqu'à un ordre supérieur.

La précision obtenue est largement suffisante pour effectuer une recherche prospective soignée d'orbites intéressantes. Comme les dérivées partielles du hamiltonien deux fois moyenné contiennent toujours moins de 2000 termes, le résultat d'une intégration à l'aide de inMO2 est très rapide.



FIG. 4.9 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1 et inMO1 du système complet à partir de la condition initiale I

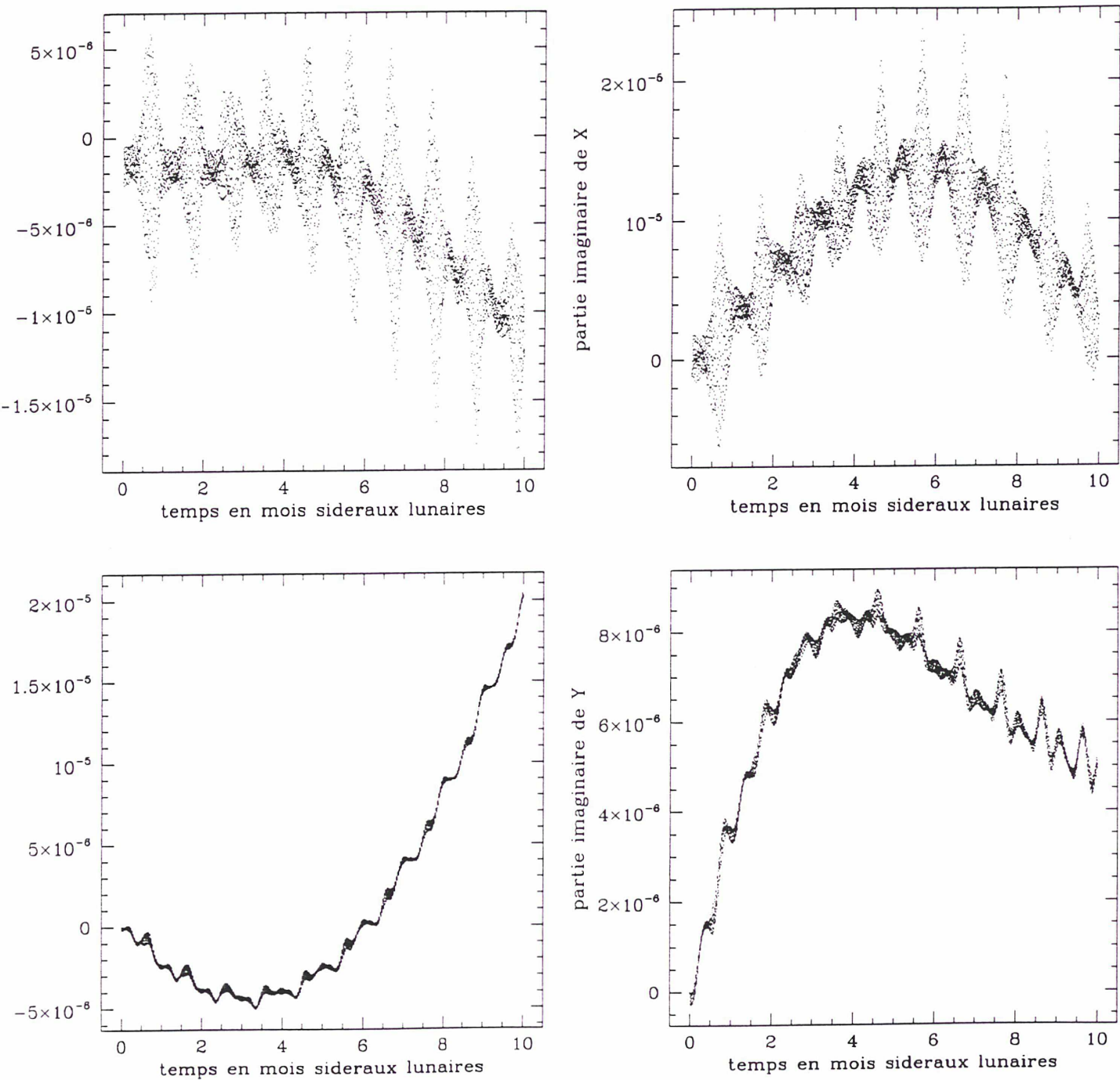


FIG. 4.10 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1 et inMO1 du système complet à partir de la condition initiale II

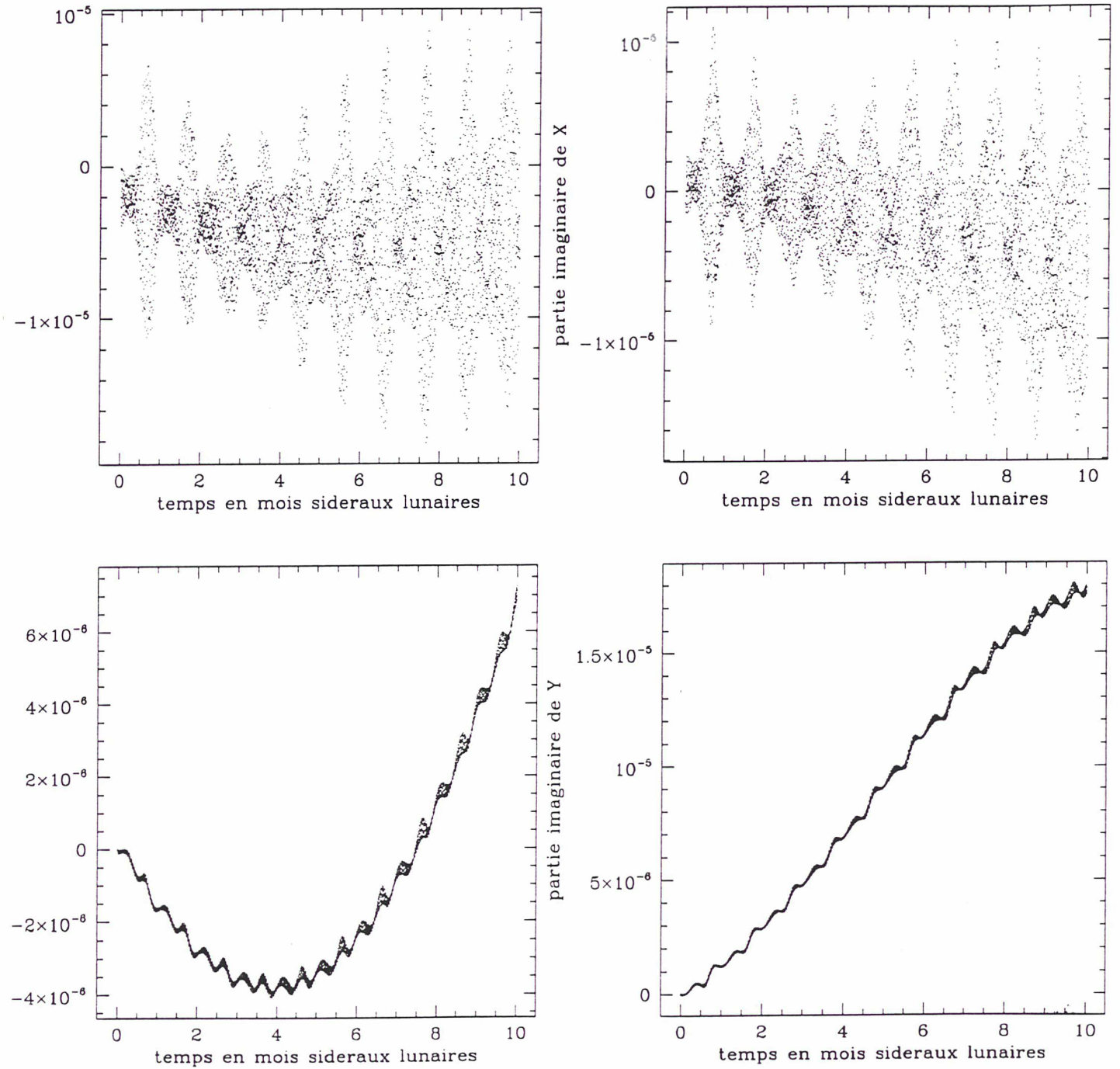


FIG. 4.11 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1, chMO1MO2 et inMO2 du système complet à partir de la condition initiale I

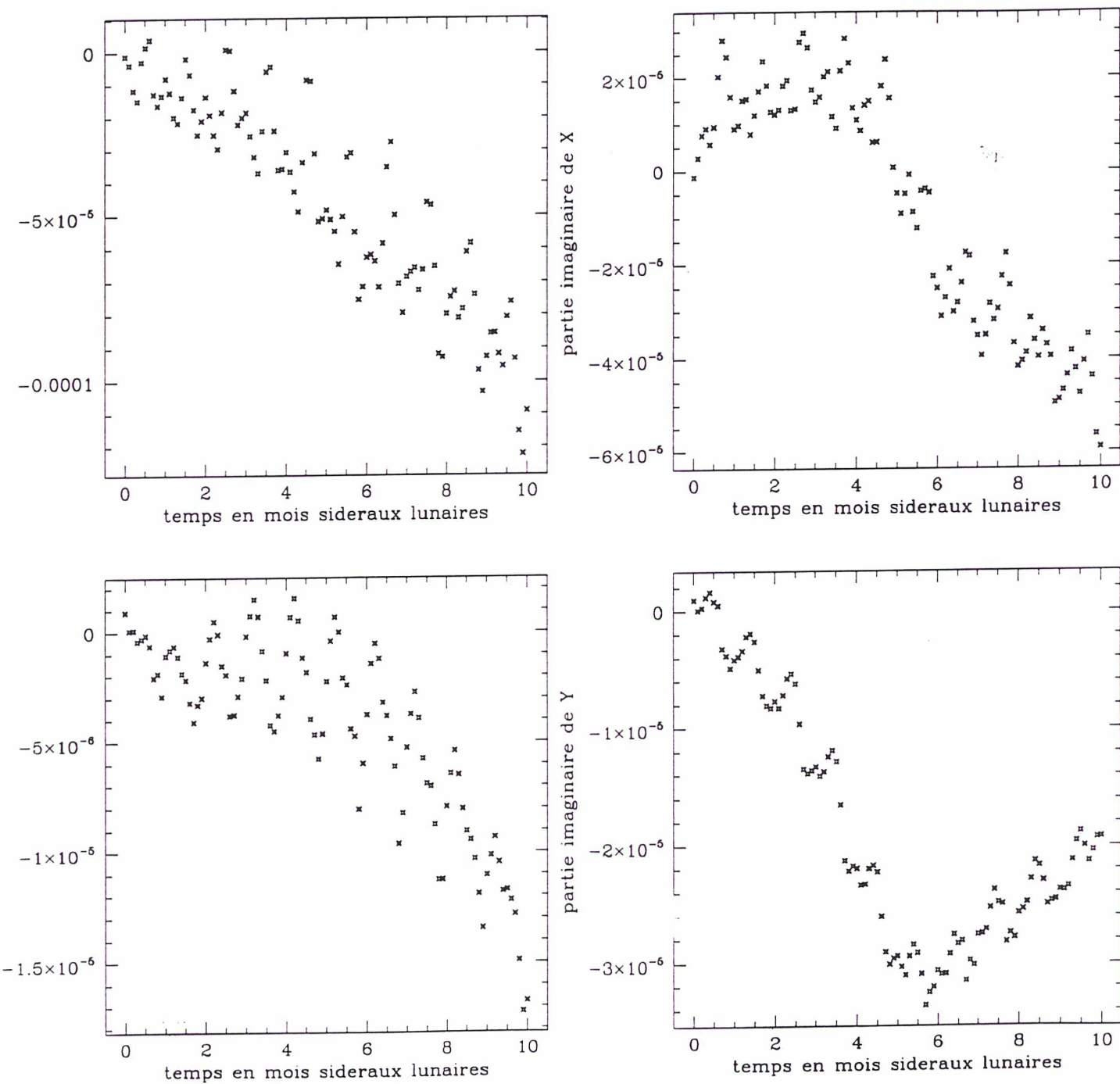


FIG. 4.12 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1, chMO1MO2 et inMO2 du système complet à partir de la condition initiale II

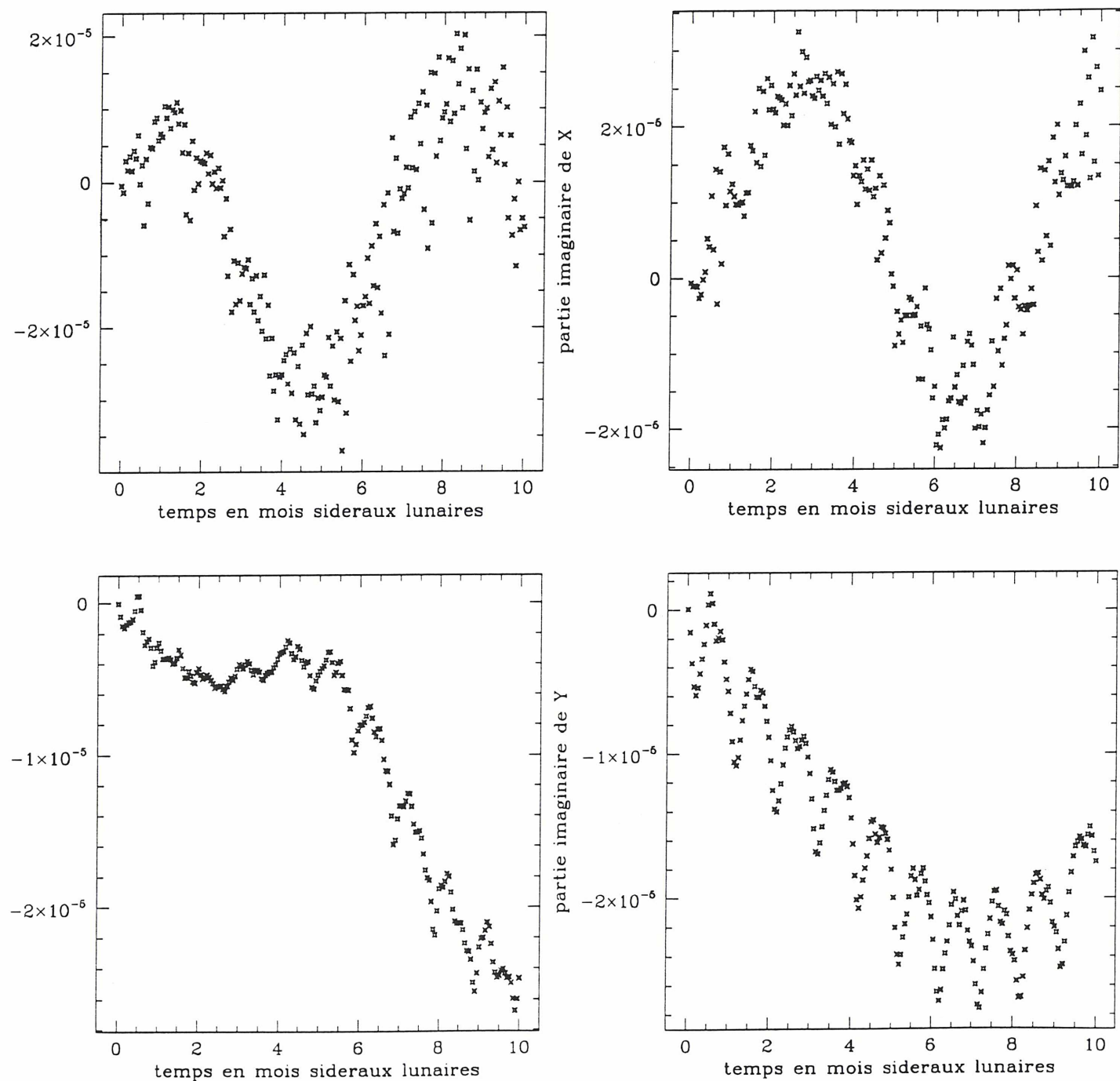
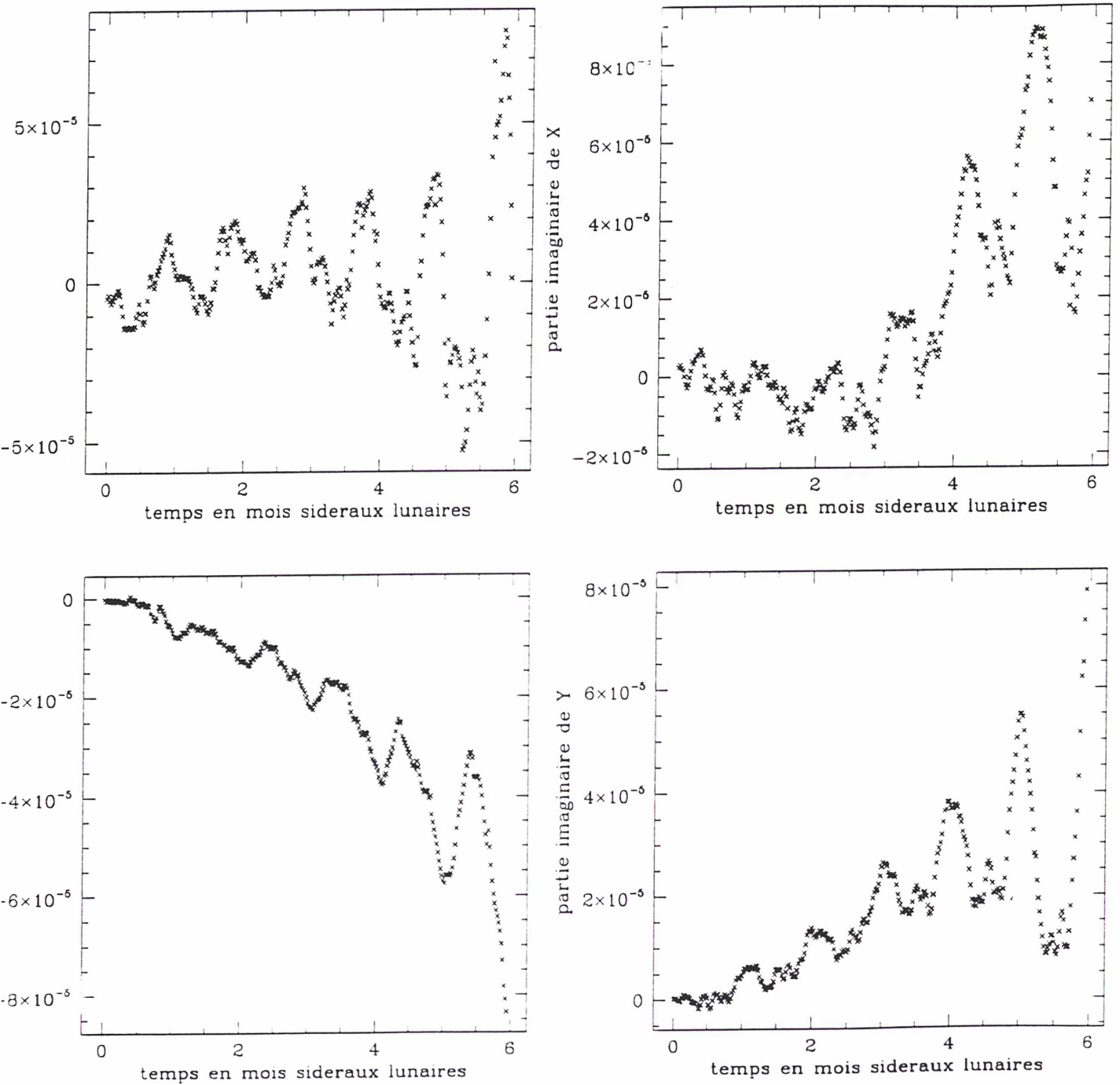


FIG. 4.13 - Différence entre la position calculée à l'aide d'une intégration directe et la position obtenue à l'aide de chVRMO1, chMO1MO2 et inMO2 du système complet à partir de la condition initiale III





## Chapitre 5

# CONCLUSION

L'approche développée dans cette étude permet de rendre compte du comportement à long terme des orbites de satellites lunaires (durée d'une mission lunaire). Elle conduit à une théorie générale capable de décrire toutes les trajectoires situées à une distance inférieure à 13000 km du centre de la Lune. Des outils informatiques, d'ores et déjà opérationnels au Centre National d'Etudes Spatiales de Toulouse, ont été construits grâce à cette théorie. En particulier, ils permettent de déterminer très rapidement la trajectoire d'un satellite en utilisant des équations moyennées.

La construction du système moyenné présentait deux difficultés importantes : une forte perturbation du problème képlérien et un potentiel possédant des termes principaux d'origines différentes. J'ai résolu ces difficultés en introduisant des expressions qui se prêtent bien aux manipulations algébriques et conduisent à une formulation compacte des fonctions génératrices et des équations du mouvement. En outre, ces expressions ont l'avantage d'être valables pour toutes excentricités et de pouvoir s'adapter à d'autres problèmes de la mécanique céleste.

Les résultats numériques présentés correspondent aux ordres des développements effectués. Il est possible d'améliorer la précision en ajoutant des termes tronqués en excentricité à des ordres supérieurs à 4 ; la théorie conserve toute sa généralité au prix d'une légère perte de rapidité dans les évaluations.

De plus, dans le cas d'orbites hautes, on peut étendre la théorie générale à l'ordre 5 au moins. Le passage du système vrai au système moyenné une

fois peut s'écrire à l'aide de générateurs non développés en excentricité jusqu'à l'ordre 4 uniquement. En effet, les termes croisés ont toujours la même origine et il sera possible d'écrire la transformation canonique associée à ces termes dans un référentiel adéquat. Dans ces conditions, il serait intéressant de considérer des orbites situées au-delà de 13000 km et d'évaluer la précision des méthodes pour une durée déterminée.

Dans le cas des orbites basses ou intermédiaires, l'absence de termes prépondérants dans le potentiel lunaire décomposé en harmoniques sphériques empêche d'étendre la théorie générale à un ordre supérieur. Pour accroître la précision, il sera nécessaire de développer les fonctions génératrices et les hamiltoniens autour d'une valeur donnée de l'excentricité.

# Bibliographie

- [BC61] D. Brouwer and G. M. Clemence. *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, 1961.
- [Bil80] A.J. Bills, B.G. et Ferrari. A harmonic analysis of lunar gravity. *Journal of Geophysical Research*, 85, 1980.
- [Bro59] D. Brouwer. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*, 64, 1959.
- [Bro70] R. A. Broucke. On the matrizant of the two-body problem. *Astronomy and Astrophysics*, 6, 1970.
- [CCT82] J. Chapront and M. Chapront-Touzé. Tables simplifiées du mouvement de la lune issues de elp-2000. Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes, Bureau des Longitudes, 1982.
- [Dep80] A. Deprit. The elimination of the parallax in satellite theory. *Celestial Mechanics*, 24, 1980.
- [DR70] A. Deprit and A Rom. The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities. *Celestial Mechanics*, 2, 1970.
- [Dur89] L. Duriez. Problème des 2 corps, p9. 1989. Les Méthodes modernes de la mécanique céleste, Editions Frontières.
- [Eck81] Donald H. Eckhart. Theory of the libration of the moon. *The Moon and the planets*, 21, 1981.
- [Kel89] T. Kelly. A note on first-order normalization of perturbed keplerian systems. *Celestial Mechanics*, 46, 1989.

- [Koz62] Y. Kozai. Second-order solution of artificial satellite theory without air drag. *Astronomical Journal*, 67, 1962.
- [Las89a] J. Laskar. Les variables de Poincaré et le développement de la fonction perturbatrice. Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes, Bureau des Longitudes, 1989.
- [Las89b] J. Laskar. Manipulations des séries, p89. 1989. Les Méthodes modernes de la mécanique céleste, Editions Frontières.
- [LFA78] J. Lelong-Ferrand and J.M. Arnaudès. *Cours de mathématiques, Algèbre, 3ème édition*. Dunod Université, 1978.
- [LL83] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, 1983.
- [Met91a] G. Metris. Mean values of particular functions in the elliptic motion. *Celestial Mechanics*, 52, 1991.
- [Met91b] G. Metris. *Théorie du Mouvement du Satellite Artificiel*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 1991.
- [Nij91] A. Nijenhuis. Solving Kepler's equation with high efficiency and accuracy. *Celestial Mechanics*, 51, 1991.
- [Oes70] C. Oosterwinter. The motion of a lunar satellite. *Celestial Mechanics*, 1, 1970.
- [Rad91] J.-C. Radix. *Répertoire géodésique*. Cépaduès éditions, 1991.
- [Roy68] A.E. Roy. The theory of the motion of an artificial lunar satellite. *Icarus*, 9, 1968.

## Annexe A

# Hamiltoniens moyennés une fois

Nous présentons ici deux séries caractéristiques du hamiltonien moyenné une fois. Elles ont été introduites au paragraphe 3.3.2. La première décrit l'expression de la moyenne de  $F_2(\text{terre}L2)$ : la partie prépondérante de la perturbation terrestre (décrite à l'aide du polynôme de Legendre d'ordre 2). La seconde est :

$$H_{14}(\text{terre}L2) = \frac{1}{4} \langle \{w_2(\text{terre}L2), F_2(\text{terre}L2)\} \rangle_\lambda$$

Ces deux expressions sont exprimées dans le plan méridien à l'écliptique. Elles donnent une idée de la formes des expressions présentes et peuvent être recalculées et vérifiées par le lecteur puisque les coefficients sont rationnelles.

$$Xb = \overline{X}, Yb = \overline{Y}, LB = \Lambda$$

\*\* désigne "à la puissance".

$rt$  est la distance Terre-Lune.



HterreL2me(R1,R2,X,Xb,Y,Yb,mt,rt,LB,G,m1,R3)=

rt\*\*-3\*mt\*G\*\*-1\*m1\*\*-2\*\*LB\*\*4\*

(

```
-      15/4      *R1**-4*R3**4
-      15/8      *R1**-4*Yb**2*R3**2
-      15/8      *R1**-4*Y**2*R3**2
-      15/32     *R1**-4*Xb**2*R3**4
-      15/16     *R1**-4*Xb**2*Y**2*R3**2
-      15/32     *R1**-4*Xb**2*Y**4
-      15/32     *R1**-4*X**2*R3**4
-      15/16     *R1**-4*X**2*Yb**2*R3**2
-      15/32     *R1**-4*X**2*Yb**4
+      15/4      *R1**-2*R3**2
-      15/32     *R1**-2*Xb**2*R3**4
-      15/16     *R1**-2*Xb**2*Y**2*R3**2
-      15/32     *R1**-2*Xb**2*Y**4
-      15/32     *R1**-2*X**2*R3**4
-      15/16     *R1**-2*X**2*Yb**2*R3**2
-      15/32     *R1**-2*X**2*Yb**4
-      1/4
+      9/4      *R3**2
+      9/4      *R3**4
+      9/8      *Yb**2*R3**2
+      9/8      *Y**2*R3**2
-      3/2      *R2**2
-      9/2      *R2**2*R3**2
+      3/2      *R2**4
```

)

HterreL2me14(R1,R2,X,Xb,Y,Yb,R3,LB,rt,mt,G,ml) =

rt\*\*-6\*mt\*\*2\*G\*\*-4\*ml\*\*-4\*LB\*\*10\*

(

- 5535/256 \*R1\*\*-8\*R3\*\*8  
- 1845/128 \*R1\*\*-8\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/512 \*R1\*\*-8\*Yb\*\*4\*R3\*\*4  
- 1845/128 \*R1\*\*-8\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/512 \*R1\*\*-8\*Y\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/128 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*2\*R3\*\*8  
- 615/512 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*2\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/256 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*2\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/128 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*2\*Y\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*2\*Y\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/4096 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*4\*R3\*\*8  
- 615/1024 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*4\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/2048 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*4\*Y\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/1024 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*4\*Y\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/4096 \*R1\*\*-8\*Xb\*\*4\*Y\*\*8  
- 615/128 \*R1\*\*-8\*X\*\*2\*R3\*\*8  
- 1845/256 \*R1\*\*-8\*X\*\*2\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/128 \*R1\*\*-8\*X\*\*2\*Yb\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-8\*X\*\*2\*Yb\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/512 \*R1\*\*-8\*X\*\*2\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/4096 \*R1\*\*-8\*X\*\*4\*R3\*\*8  
- 615/1024 \*R1\*\*-8\*X\*\*4\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/2048 \*R1\*\*-8\*X\*\*4\*Yb\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/1024 \*R1\*\*-8\*X\*\*4\*Yb\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/4096 \*R1\*\*-8\*X\*\*4\*Yb\*\*8  
+ 5535/128 \*R1\*\*-6\*R3\*\*6  
+ 1845/128 \*R1\*\*-6\*Yb\*\*2\*R3\*\*4  
+ 1845/128 \*R1\*\*-6\*Y\*\*2\*R3\*\*4  
+ 1845/256 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/128 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*R3\*\*8  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
+ 1845/256 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Y\*\*2\*R3\*\*4  
- 1845/256 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
+ 615/256 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Y\*\*4\*R3\*\*2  
- 615/128 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Y\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*2\*Y\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/2048 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*4\*R3\*\*8  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*4\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/1024 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*4\*Y\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*4\*Y\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/2048 \*R1\*\*-6\*Xb\*\*4\*Y\*\*8  
+ 1845/256 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/128 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*R3\*\*8  
+ 1845/256 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Yb\*\*2\*R3\*\*4  
- 1845/256 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
+ 615/256 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Yb\*\*4\*R3\*\*2  
- 615/128 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Yb\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Yb\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*X\*\*2\*Y\*\*2\*R3\*\*6  
- 615/2048 \*R1\*\*-6\*X\*\*4\*R3\*\*8  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*X\*\*4\*Yb\*\*2\*R3\*\*6  
- 1845/1024 \*R1\*\*-6\*X\*\*4\*Yb\*\*4\*R3\*\*4  
- 615/512 \*R1\*\*-6\*X\*\*4\*Yb\*\*6\*R3\*\*2  
- 615/2048 \*R1\*\*-6\*X\*\*4\*Yb\*\*8  
- 8481/256 \*R1\*\*-4\*R3\*\*4  
- 1485/128 \*R1\*\*-4\*R3\*\*8  
- 1473/256 \*R1\*\*-4\*Yb\*\*2\*R3\*\*2

|   |           |  |
|---|-----------|--|
| - | 495/64    | *R1** <sup>-4</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                    |
| - | 495/256   | *R1** <sup>-4</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>                    |
| - | 1473/256  | *R1** <sup>-4</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>2</sup>                     |
| - | 495/64    | *R1** <sup>-4</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                     |
| - | 495/256   | *R1** <sup>-4</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>                     |
| - | 1659/512  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                    |
| + | 1845/256  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                    |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>8</sup>                    |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup> |
| - | 1473/512  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| + | 1845/256  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 1665/256  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 429/512   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup>                     |
| + | 615/256   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 615/4096  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>4</sup> *R3** <sup>8</sup>                    |
| - | 615/1024  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>4</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 1845/2048 | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>4</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 615/1024  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>4</sup> *Y** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 615/4096  | *R1** <sup>-4</sup> *Xb** <sup>4</sup> *Y** <sup>8</sup>                     |
| - | 1659/512  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                     |
| + | 1845/256  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                     |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>8</sup>                     |
| - | 1473/512  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| + | 1845/256  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 1665/256  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 429/512   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup>                     |
| + | 615/256   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>   |
| - | 615/4096  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>4</sup> *R3** <sup>8</sup>                     |
| - | 615/1024  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>4</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 1845/2048 | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>4</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 615/1024  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>4</sup> *Yb** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 615/4096  | *R1** <sup>-4</sup> *X** <sup>4</sup> *Yb** <sup>8</sup>                     |
| + | 1473/128  | *R1** <sup>-2</sup> *R3** <sup>2</sup>                                       |
| + | 1485/64   | *R1** <sup>-2</sup> *R3** <sup>6</sup>                                       |
| + | 495/64    | *R1** <sup>-2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                    |
| + | 495/64    | *R1** <sup>-2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                     |
| - | 1659/512  | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                    |
| + | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                    |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *R3** <sup>8</sup>                    |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup> |
| - | 1473/512  | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| + | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 429/512   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup>                     |
| + | 555/256   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-2</sup> *Xb** <sup>2</sup> *Y** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 1659/512  | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>                     |
| + | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>                     |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *R3** <sup>8</sup>                     |
| - | 1473/512  | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| + | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 1665/256  | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>  |
| - | 429/512   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup>                     |
| + | 555/256   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/128   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>4</sup> *R3** <sup>4</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Yb** <sup>6</sup> *R3** <sup>2</sup>  |
| - | 555/512   | *R1** <sup>-2</sup> *X** <sup>2</sup> *Y** <sup>2</sup> *R3** <sup>6</sup>   |
| + | 49/64     |  |
| + | 1881/128  | *R3** <sup>2</sup>   |
| + | 9801/256  | *R3** <sup>4</sup>   |





|   |          |                         |
|---|----------|-------------------------|
| + | 9009/128 | *R3**6                  |
| + | 9009/256 | *R3**8                  |
| + | 1881/256 | *Yb**2*R3**2            |
| + | 3003/128 | *Yb**2*R3**4            |
| + | 3003/128 | *Yb**2*R3**6            |
| + | 3003/512 | *Yb**4*R3**4            |
| + | 1881/256 | *Y**2*R3**2             |
| + | 3003/128 | *Y**2*R3**4             |
| + | 3003/128 | *Y**2*R3**6             |
| + | 3003/512 | *Y**4*R3**4             |
| + | 1665/256 | *Xb**2*R3**6            |
| + | 1665/256 | *Xb**2*Y**2*R3**4       |
| + | 555/256  | *Xb**2*Y**4*R3**2       |
| + | 1665/256 | *X**2*R3**6             |
| + | 1665/256 | *X**2*Yb**2*R3**4       |
| + | 555/256  | *X**2*Yb**4*R3**2       |
| - | 873/16   | *R2**2                  |
| - | 9063/64  | *R2**2*R3**2            |
| - | 16191/64 | *R2**2*R3**4            |
| - | 9009/64  | *R2**2*R3**6            |
| - | 3591/64  | *R2**2*Yb**2*R3**2      |
| - | 3003/64  | *R2**2*Yb**2*R3**4      |
| - | 3591/64  | *R2**2*Y**2*R3**2       |
| - | 3003/64  | *R2**2*Y**2*R3**4       |
| - | 1347/256 | *R2**2*Xb**2*R3**4      |
| - | 1029/256 | *R2**2*Xb**2*Y**2*R3**2 |
| - | 237/256  | *R2**2*Xb**2*Y**4       |
| - | 1347/256 | *R2**2*X**2*R3**4       |
| - | 1029/256 | *R2**2*X**2*Yb**2*R3**2 |
| - | 237/256  | *R2**2*X**2*Yb**4       |
| + | 6093/32  | *R2**4                  |
| + | 10773/32 | *R2**4*R3**2            |
| + | 16191/64 | *R2**4*R3**4            |
| + | 3591/64  | *R2**4*Yb**2*R3**2      |
| + | 3591/64  | *R2**4*Y**2*R3**2       |
| - | 4347/16  | *R2**6                  |
| - | 3591/16  | *R2**6*R3**2            |
| + | 4347/32  | *R2**8                  |

)

## Annexe B

# Hamiltoniens moyennés deux fois

Nous présentons ici la partie prépondérante du hamiltonien moyenné une fois  $H_2(\text{terre}L2)$ . Il ne contient que les premiers termes du hamiltonien présenté dans l'annexe A et est exprimé dans le repère écliptique passant par la Lune. Lorsque ce dernier subit une seconde moyennisation, il intervient d'abord sa moyenne  $K_2(\text{terre}L2)$ , puis  $K_{13}(\text{terre}L2)$  à l'ordre 3, puis  $K_{24}(\text{terre}L2)$  à l'ordre 4. Toutes ces séries sont exprimées dans cette annexe. Les coefficients sont rationnels.

$$Xb = \bar{X}, Yb = \bar{Y}, LB = \Lambda$$

\*\* désigne "à la puissance".

$$L0 = \exp(i \lambda_2).$$



H2terreL2ec(R1,R2,X,Xb,Y,Yb,mt,at,LB,G,m1,R3,L0)=

at\*\*3\*mt\*\*G\*\*1\*m1\*\*2\*LB\*\*4\*

(

|   |       |                               |
|---|-------|-------------------------------|
| - | 15/4  | *R1**4*R3**4                  |
| - | 15/8  | *R1**4*Yb**2*R3**2*L0**2      |
| - | 15/8  | *R1**4*Y**2**R3**2*L0**2      |
| - | 15/32 | *R1**4*Xb**2*d**2*R3**4*L0**2 |
| - | 15/16 | *R1**4*Xb**2*Y**2*R3**2       |
| - | 15/32 | *R1**4*Xb**2*Y**4*L0**2       |
| - | 15/32 | *R1**4*X**2*R3**4*L0**2       |
| - | 15/16 | *R1**4*X**2*Yb**2*R3**2       |
| - | 15/32 | *R1**4*X**2*Yb**4*L0**2       |
| + | 15/4  | *R1**2*R3**2                  |
| - | 15/32 | *R1**2*Xb**2*R3**4*L0**2      |
| - | 15/16 | *R1**2*Xb**2*Y**2*R3**2       |
| - | 15/32 | *R1**2*Xb**2*Y**4*L0**2       |
| - | 15/32 | *R1**2*X**2*R3**4*L0**2       |
| - | 15/16 | *R1**2*X**2*Yb**2*R3**2       |
| - | 15/32 | *R1**2*X**2*Yb**4*L0**2       |
| - | 1/4   |                               |
| + | 9/4   | *R3**2                        |
| + | 9/4   | *R3**4                        |
| + | 9/8   | *Yb**2*R3**2*L0**2            |
| + | 9/8   | *Y**2*R3**2*L0**2             |
| - | 3/2   | *R2**2                        |
| - | 9/2   | *R2**2*R3**2                  |
| + | 3/2   | *R2**4                        |

)

KterreL2ec02(R1,R2,X,Xb,Y,Yb,R3,mt,at,LB,G,m1) =

at\*\* -3\*mt\*\*1\*G\*\* -1\*m1\*\* -2\*LB\*\*4\*

(

```
-      15/4      *R1** -4*R3**4
-      15/16     *R1** -4*Xb**2*Y**2*R3**2
-      15/16     *R1** -4*X**2*Yb**2*R3**2
+      15/4      *R1** -2*R3**2
-      15/16     *R1** -2*Xb**2*Y**2*R3**2
-      15/16     *R1** -2*X**2*Yb**2*R3**2
-      1/4
+      9/4       *R3**2
+      9/4       *R3**4
-      3/2       *R2**2
-      9/2       *R2**2*R3**2
+      3/2       *R2**4
```

)

KterreL2ec13(Y,Yb,X,Xb,R1,R2,R3,mt,at,LB,G,m1,nL0) =

at\*\* -6\*mt\*\*2\*G\*\* -2\*m1\*\* -4\*LB\*\*7\*nL0\*\* -1\*

(

```
-      135/16     *R1** -4*R3**6
+      405/32     *R1** -2*R3**4
+      9/16      *R3**2
+      459/32     *R3**4
+      153/16     *R3**6
-      225/16     *R2**2
-      189/4      *R2**2*R3**2
-      459/16     *R2**2*R3**4
+      675/16     *R2**4
+      189/4      *R2**4*R3**2
-      225/8      *R2**6
-      135/64     *Yb**2*X**2*R1** -4*R3**4
+      135/128    *Yb**2*X**2*R1** -2*R3**2
-      135/64     *Yb**2*X**2*R1** -2*R3**4
+      135/128    *Yb**2*X**2*R3**2
-      135/64     *Y**2*Xb**2*R1** -4*R3**4
+      135/128    *Y**2*Xb**2*R1** -2*R3**2
-      135/64     *Y**2*Xb**2*R1** -2*R3**4
+      135/128    *Y**2*Xb**2*R3**2
```

)

KterreL2ec24(Y,Yb,X,Xb,R1,R2,R3,mt,at,LB,G,m1,nL0) =

at\*\* -9\*mt\*\*3\*G\*\* -3\*m1\*\* -6\*LB\*\*10\*nL0\*\* -2\*

(

|   |           |                           |
|---|-----------|---------------------------|
|   | 10125/512 | *R1** -8*R3**8            |
| - | 10125/256 | *R1** -6*R3**6            |
| + | 14175/512 | *R1** -4*R3**4            |
| - | 20925/256 | *R1** -4*R3**8            |
| - | 2025/256  | *R1** -2*R3**2            |
| + | 20925/128 | *R1** -2*R3**6            |
| - | 2133/256  | *R3**2                    |
| - | 15471/512 | *R3**4                    |
| + | 30645/256 | *R3**6                    |
| + | 30645/512 | *R3**8                    |
| - | 675/64    | *R2**2                    |
| - | 14121/128 | *R2**2*R3**2              |
| - | 46899/128 | *R2**2*R3**4              |
| - | 30645/128 | *R2**2*R3**6              |
| + | 2025/32   | *R2**4                    |
| + | 24381/64  | *R2**4*R3**2              |
| + | 46899/128 | *R2**4*R3**4              |
| - | 3375/32   | *R2**6                    |
| - | 8127/32   | *R2**6*R3**2              |
| + | 3375/64   | *R2**8                    |
| + | 3375/512  | *Yb**2*X**2*R1** -8*R3**6 |
| - | 3375/512  | *Yb**2*X**2*R1** -6*R3**4 |
| + | 3375/512  | *Yb**2*X**2*R1** -6*R3**6 |
| + | 2025/1024 | *Yb**2*X**2*R1** -4*R3**2 |
| - | 3375/512  | *Yb**2*X**2*R1** -4*R3**4 |
| - | 8775/512  | *Yb**2*X**2*R1** -4*R3**6 |
| + | 2025/1024 | *Yb**2*X**2*R1** -2*R3**2 |
| + | 8775/512  | *Yb**2*X**2*R1** -2*R3**4 |
| - | 8775/512  | *Yb**2*X**2*R1** -2*R3**6 |
| + | 8775/512  | *Yb**2*X**2*R3**4         |
| - | 4455/512  | *Yb**2*X**2*R2**2*R3**2   |
| + | 3375/4096 | *Yb**4*X**4*R1** -8*R3**4 |
| + | 3375/2048 | *Yb**4*X**4*R1** -6*R3**4 |
| + | 3375/4096 | *Yb**4*X**4*R1** -4*R3**4 |
| + | 3375/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -8*R3**6 |
| - | 3375/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -6*R3**4 |
| + | 3375/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -6*R3**6 |
| + | 2025/1024 | *Y**2*Xb**2*R1** -4*R3**2 |
| - | 3375/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -4*R3**4 |
| - | 8775/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -4*R3**6 |
| + | 2025/1024 | *Y**2*Xb**2*R1** -2*R3**2 |
| + | 8775/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -2*R3**4 |
| - | 8775/512  | *Y**2*Xb**2*R1** -2*R3**6 |
| + | 8775/512  | *Y**2*Xb**2*R3**4         |
| - | 4455/512  | *Y**2*Xb**2*R2**2*R3**2   |
| + | 3375/4096 | *Y**4*Xb**4*R1** -8*R3**4 |
| + | 3375/2048 | *Y**4*Xb**4*R1** -6*R3**4 |
| + | 3375/4096 | *Y**4*Xb**4*R1** -4*R3**4 |

)

## Annexe C

# Harmoniques sphériques du potentiel lunaire

Nous présentons ici les harmoniques sphériques normalisés du potentiel lunaire. Le modèle choisi est celui de Bills et Ferrari [Bil80]



TABLE 2. Normalized Lunar Gravity Harmonics ( $\times 10^6$ )

| $n$ | $m$ | $C_{nm}$ | $S_{nm}$ | $\sigma(C_{nm})$ | $\sigma(S_{nm})$ |
|-----|-----|----------|----------|------------------|------------------|
| 2   | 0   | -90.53   |          | 0.51             |                  |
| 2   | 1   | -0.07    | -0.00    | 0.00             | 0.00             |
| 2   | 2   | 34.49    | 0.03     | 0.20             | 0.01             |
| 3   | 0   | -3.36    |          | 0.57             |                  |
| 3   | 1   | 21.96    | 6.63     | 1.04             | 1.19             |
| 3   | 2   | 14.14    | 4.76     | 0.14             | 0.11             |
| 3   | 3   | 15.87    | -2.45    | 1.03             | 0.96             |
| 4   | 0   | 3.91     |          | 1.10             |                  |
| 4   | 1   | -4.82    | 1.91     | 0.69             | 0.52             |
| 4   | 2   | -8.13    | -6.76    | 1.09             | 1.03             |
| 4   | 3   | 0.48     | -14.43   | 0.96             | 0.91             |
| 4   | 4   | -3.50    | -0.55    | 1.23             | 1.23             |
| 5   | 0   | -0.72    |          | 0.94             |                  |
| 5   | 1   | -9.66    | -1.53    | 1.47             | 1.57             |
| 5   | 2   | 3.71     | -2.35    | 0.88             | 0.75             |
| 5   | 3   | -0.39    | 4.91     | 1.33             | 1.32             |
| 5   | 4   | 0.56     | -6.58    | 1.40             | 1.28             |
| 5   | 5   | -6.69    | 11.60    | 1.91             | 1.95             |
| 6   | 0   | 4.92     |          | 1.36             |                  |
| 6   | 1   | 1.16     | -0.07    | 1.16             | 0.78             |
| 6   | 2   | -4.61    | -3.61    | 1.31             | 1.18             |
| 6   | 3   | -2.33    | -4.12    | 0.93             | 0.90             |
| 6   | 4   | 2.05     | -0.77    | 1.34             | 1.33             |
| 6   | 5   | 3.30     | -8.30    | 1.53             | 1.52             |
| 6   | 6   | 7.83     | -9.56    | 2.28             | 2.44             |
| 7   | 0   | 5.75     |          | 1.25             |                  |
| 7   | 1   | 2.38     | 2.23     | 1.32             | 1.25             |
| 7   | 2   | -1.76    | -0.46    | 1.18             | 1.02             |
| 7   | 3   | -0.62    | 1.05     | 1.21             | 1.19             |
| 7   | 4   | 0.89     | 0.37     | 0.95             | 0.97             |
| 7   | 5   | 2.19     | 0.93     | 1.24             | 1.24             |
| 7   | 6   | -1.98    | 6.61     | 1.44             | 1.45             |
| 7   | 7   | -11.13   | 9.18     | 2.06             | 2.12             |
| 8   | 0   | 3.62     |          | 1.06             |                  |
| 8   | 1   | -1.02    | 2.55     | 1.12             | 0.77             |
| 8   | 2   | 2.24     | -0.53    | 1.08             | 0.99             |
| 8   | 3   | -0.79    | 1.67     | 1.06             | 1.02             |
| 8   | 4   | 4.51     | -1.10    | 1.03             | 1.06             |
| 8   | 5   | -3.32    | 4.31     | 0.93             | 0.92             |
| 8   | 6   | -3.99    | -3.71    | 1.11             | 1.10             |
| 8   | 7   | -3.01    | -0.30    | 1.23             | 1.23             |
| 8   | 8   | 1.88     | -0.76    | 1.48             | 1.45             |
| 9   | 0   | -2.62    |          | 0.96             |                  |
| 9   | 1   | 1.68     | 0.71     | 1.01             | 0.97             |
| 9   | 2   | 0.93     | -1.51    | 0.88             | 0.83             |
| 9   | 3   | -1.57    | 2.26     | 0.91             | 0.91             |
| 9   | 4   | -0.88    | 2.00     | 0.86             | 0.86             |
| 9   | 5   | -1.19    | -3.54    | 0.84             | 0.83             |
| 9   | 6   | -1.60    | -0.63    | 0.82             | 0.83             |
| 9   | 7   | -2.87    | 0.52     | 0.93             | 0.94             |
| 9   | 8   | -2.82    | -3.79    | 1.00             | 0.99             |
| 9   | 9   | -0.99    | 0.92     | 1.02             | 1.03             |
| 10  | 0   | 0.77     |          | 0.82             |                  |
| 10  | 1   | 0.05     | -1.77    | 0.81             | 0.76             |
| 10  | 2   | 0.54     | -1.01    | 0.80             | 0.81             |
| 10  | 3   | 0.43     | 1.98     | 0.78             | 0.76             |
| 10  | 4   | -3.55    | 0.42     | 0.75             | 0.75             |
| 10  | 5   | 0.12     | 0.15     | 0.72             | 0.72             |
| 10  | 6   | -0.80    | -2.39    | 0.69             | 0.70             |
| 10  | 7   | -3.99    | -4.58    | 0.72             | 0.72             |
| 10  | 8   | -2.54    | 1.97     | 0.78             | 0.77             |
| 10  | 9   | -2.79    | 1.74     | 0.80             | 0.80             |
| 10  | 10  | -0.71    | -0.55    | 0.82             | 0.82             |
| 11  | 0   | -0.69    |          | 0.68             |                  |
| 11  | 1   | 0.31     | -0.01    | 0.67             | 0.67             |
| 11  | 2   | 2.16     | -0.07    | 0.68             | 0.67             |
| 11  | 3   | 0.99     | 0.75     | 0.65             | 0.64             |
| 11  | 4   | -0.50    | 4.70     | 0.63             | 0.63             |
| 11  | 5   | -0.85    | 1.59     | 0.61             | 0.61             |
| 11  | 6   | 0.97     | -2.88    | 0.58             | 0.58             |
| 11  | 7   | -0.18    | -1.85    | 0.59             | 0.59             |
| 11  | 8   | -3.10    | 0.40     | 0.62             | 0.62             |
| 11  | 9   | -3.52    | -0.48    | 0.64             | 0.65             |
| 11  | 10  | -2.92    | 1.83     | 0.66             | 0.65             |
| 11  | 11  | -0.72    | -0.57    | 0.66             | 0.66             |

TABLE 2. (continued)

| $n$ | $m$ | $C_{nm}$ | $S_{nm}$ | $\sigma(C_{nm})$ | $\sigma(S_{nm})$ |
|-----|-----|----------|----------|------------------|------------------|
| 12  | 0   | -1.00    |          | 0.57             |                  |
| 12  | 1   | -0.92    | 2.36     | 0.57             | 0.56             |
| 12  | 2   | -0.49    | 0.49     | 0.57             | 0.57             |
| 12  | 3   | -0.02    | -2.36    | 0.56             | 0.55             |
| 12  | 4   | 1.11     | 1.51     | 0.54             | 0.54             |
| 12  | 5   | 0.84     | 1.00     | 0.53             | 0.53             |
| 12  | 6   | 0.32     | 0.49     | 0.51             | 0.51             |
| 12  | 7   | 1.08     | -0.75    | 0.50             | 0.50             |
| 12  | 8   | -0.34    | -2.94    | 0.52             | 0.51             |
| 12  | 9   | -0.05    | 1.59     | 0.53             | 0.53             |
| 12  | 10  | -2.34    | -0.51    | 0.54             | 0.53             |
| 12  | 11  | -2.04    | -0.24    | 0.54             | 0.54             |
| 12  | 12  | -0.15    | -0.04    | 0.54             | 0.54             |
| 13  | 0   | 0.11     |          | 0.49             |                  |
| 13  | 1   | 0.25     | -0.28    | 0.48             | 0.47             |
| 13  | 2   | -1.94    | 0.63     | 0.47             | 0.47             |
| 13  | 3   | -0.12    | -1.15    | 0.47             | 0.47             |
| 13  | 4   | 1.41     | -1.82    | 0.45             | 0.45             |
| 13  | 5   | -1.24    | 0.17     | 0.45             | 0.45             |
| 13  | 6   | -0.27    | 1.09     | 0.44             | 0.44             |
| 13  | 7   | -1.25    | -1.27    | 0.43             | 0.43             |
| 13  | 8   | -0.34    | -1.90    | 0.43             | 0.43             |
| 13  | 9   | 0.34     | 0.20     | 0.45             | 0.45             |
| 13  | 10  | 0.46     | 2.27     | 0.45             | 0.45             |
| 13  | 11  | -1.55    | 0.21     | 0.45             | 0.46             |
| 13  | 12  | -0.75    | -1.46    | 0.46             | 0.45             |
| 13  | 13  | 0.66     | -0.09    | 0.45             | 0.45             |
| 14  | 0   | 0.11     |          | 0.42             |                  |
| 14  | 1   | 0.53     | -0.72    | 0.41             | 0.41             |
| 14  | 2   | 0.66     | -0.22    | 0.40             | 0.40             |
| 14  | 3   | 0.39     | 1.19     | 0.40             | 0.41             |
| 14  | 4   | -0.12    | -0.97    | 0.40             | 0.40             |
| 14  | 5   | -0.94    | -0.08    | 0.40             | 0.40             |
| 14  | 6   | -1.49    | 0.93     | 0.39             | 0.39             |
| 14  | 7   | -0.57    | 0.76     | 0.38             | 0.38             |
| 14  | 8   | 0.64     | 0.14     | 0.38             | 0.38             |
| 14  | 9   | 0.52     | 0.52     | 0.38             | 0.38             |
| 14  | 10  | -1.23    | 0.45     | 0.39             | 0.38             |
| 14  | 11  | -2.10    | 1.17     | 0.38             | 0.39             |
| 14  | 12  | -1.40    | 0.21     | 0.39             | 0.38             |
| 14  | 13  | 0.14     | -0.75    | 0.38             | 0.38             |
| 14  | 14  | 0.81     | -0.38    | 0.38             | 0.38             |
| 15  | 0   | 1.13     |          | 0.34             |                  |
| 15  | 1   | -1.12    | 0.16     | 0.34             | 0.33             |
| 15  | 2   | 1.24     | 1.15     | 0.30             | 0.30             |
| 15  | 3   | -1.11    | 0.42     | 0.27             | 0.27             |
| 15  | 4   | -1.03    | -2.63    | 0.31             | 0.31             |
| 15  | 5   | -0.19    | -0.29    | 0.29             | 0.29             |
| 15  | 6   | -0.67    | 1.77     | 0.28             | 0.28             |
| 15  | 7   | 2.65     | 2.59     | 0.28             | 0.28             |
| 15  | 8   | 1.49     | 1.85     | 0.27             | 0.27             |
| 15  | 9   | -0.67    | -1.12    | 0.29             | 0.29             |
| 15  | 10  | -0.15    | 0.46     | 0.33             | 0.33             |
| 15  | 11  | -2.02    | 0.22     | 0.34             | 0.34             |
| 15  | 12  | -2.19    | 0.08     | 0.34             | 0.33             |
| 15  | 13  | -0.69    | -0.20    | 0.33             | 0.33             |
| 15  | 14  | 0.15     | 0.17     | 0.33             | 0.33             |
| 15  | 15  | 0.28     | 0.03     | 0.33             | 0.33             |
| 16  | 0   | 0.63     |          | 0.31             |                  |
| 16  | 1   | -0.56    | -0.45    | 0.27             | 0.27             |
| 16  | 2   | 0.05     | -0.01    | 0.30             | 0.30             |
| 16  | 3   | -0.20    | 0.60     | 0.27             | 0.27             |
| 16  | 4   | -0.52    | 0.21     | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 5   | 0.61     | -0.70    | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 6   | 0.63     | -1.46    | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 7   | -0.47    | -0.35    | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 8   | -0.01    | 1.15     | 0.28             | 0.27             |
| 16  | 9   | -0.45    | -0.16    | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 10  | -0.06    | 0.25     | 0.29             | 0.28             |
| 16  | 11  | 0.16     | 0.98     | 0.28             | 0.28             |
| 16  | 12  | -1.15    | -0.31    | 0.27             | 0.27             |
| 16  | 13  | -0.18    | -0.17    | 0.27             | 0.27             |
| 16  | 14  | 0.05     | -0.20    | 0.27             | 0.26             |
| 16  | 15  | 0.18     | -0.02    | 0.26             | 0.26             |
| 16  | 16  | -0.04    | 0.94     | 0.24             | 0.24             |

