



**HAL**  
open science

# Sur la régularisation des collisions doubles et la recherche des formes normales au voisinage de l'équilibre dans les systèmes hamiltoniens

Ahmed Karaballi

► **To cite this version:**

Ahmed Karaballi. Sur la régularisation des collisions doubles et la recherche des formes normales au voisinage de l'équilibre dans les systèmes hamiltoniens. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1986. Français. NNT: . tel-01958578

**HAL Id: tel-01958578**

**<https://theses.hal.science/tel-01958578>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

A L'OBSERVATOIRE DE PARIS

86 OBSP 0001

par

Ahmed KARABALLI

pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences

*Sujet de la thèse :* SUR LA REGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES  
ET LA RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE  
DE L'EQUILIBRE DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS

*Soutenue le 21 février 1986 devant le jury composé de :*

M.	J. DELHAYE	<i>Président</i>
M.	J. CHAPRONT	<i>Examineur</i>
Mme	L. LOSCO	<i>Rapporteur</i>
MM.	C. MARCHAL	<i>Rapporteur</i>
	C.M. MARLE	<i>Examineur</i>
	F. NAHON	<i>Rapporteur</i>

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

A L'OBSERVATOIRE DE PARIS

par

Ahmed KARABALLI

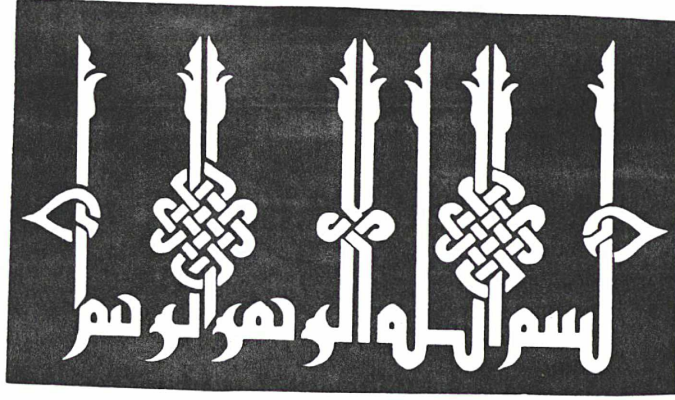
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences



*Sujet de la thèse :* **SUR LA REGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES  
ET LA RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE  
DE L'EQUILIBRE DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS**

*Soutenue le 21 février 1986 devant le jury composé de :*

<i>M.</i>	<i>J. DELHAYE</i>	<i>Président</i>
<i>M.</i>	<i>J. CHAPRONT</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mme</i>	<i>L. LOSCO</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>MM.</i>	<i>C. MARCHAL</i>	<i>Rapporteur</i>
	<i>C.M. MARLE</i>	<i>Examineur</i>
	<i>F. NAHON</i>	<i>Rapporteur</i>





*Je tiens à assurer de mon affection profonde et reconnaissante mes parents, mes frères et soeurs et tous ceux qui partagent avec moi cet instant de grande joie que représente la soutenance de ma thèse.*

## AVANT-PROPOS

Je tiens à remercier Monsieur J. DELHAYE, Astronome à l'Observatoire de Paris, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ma thèse.

Je profite de cette occasion pour exprimer toute ma reconnaissance et mes respectueux remerciements à Monsieur F. NAHON, Professeur à l'Université de Paris VI. Ses conseils incessants et instructifs m'ont permis de mener à bien la première partie de ce travail dont il m'a proposé le sujet. Je lui témoigne ma profonde gratitude pour les efforts considérables qu'il a faits en s'occupant personnellement pendant mon absence de tout ce qui est en rapport avec l'aspect administratif et matériel de ce travail.

Je voudrais souligner la part importante prise par Monsieur C. MARCHAL, Conseiller Scientifique à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.) qui a bien voulu me proposer le sujet de la deuxième partie de mon travail. Je lui exprime ma profonde gratitude et lui adresse mes sincères remerciements pour ses précieux conseils et l'aide constante qu'il m'a apportée.

Je voudrais témoigner ma plus profonde gratitude à Madame L. LOSCO, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micro-Mécanique de Besançon (E.N.S.C.M.M.B.) qui m'a accueilli à mes débuts, initié à la recherche dans le domaine de la Mécanique Analytique et Céleste et qui n'a pas ménagé ses peines en dirigeant avec dévouement ma thèse de 3e cycle. Je la remercie vivement pour l'honneur qu'elle me fait de participer à ce jury.

J'adresse mes respectueux et sincères remerciements à Monsieur J. CHAPRONT, Directeur du Bureau des Longitudes, et à Monsieur C. MARLE, Professeur à l'Université de Paris VI, pour l'honneur qu'ils me font d'être membres du jury.

.../...

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mes amis :  
M. N. EL TARAZI, Professeur d'Analyse Numérique à l'Université du  
Koweït et O. F. ABOU GHALOUN, Professeur de Chimie Minérale à  
l'Université d'Alep (Syrie), pour leurs sincères encouragements  
et leur soutien permanent aux moments difficiles.

Mes remerciements vont également à Madame B. RABAN qui s'est occupée,  
avec une remarquable dextérité et un grand soin, de la dactylographie  
de cette thèse.

A. Karaballi



SUR LA REGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES  
ET LA RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE DE L'EQUILIBRE  
DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS

SUR LA RÉGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES  
ET LA RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE DE L'ÉQUILIBRE  
DANS LES SYSTÈMES HAMILTONIENS

~ ~ ~ ~ ~

INTRODUCTION

Cette thèse comprend deux parties.

La première, dirigée par le Professeur Nahon, étudie la régularisation des collisions doubles dans un champ de forces central  $U = M/r^\alpha$ .

Pour le cas newtonien,  $\alpha = 1$ , on connaît deux méthodes de régularisation : la régularisation analytique de Sundman et la régularisation géométrique au sens d'Easton. Elles sont équivalentes. Or elles ne le sont pas dans le cas d'un système différentiel de deux équations du premier ordre possédant une singularité à l'origine. Mac Gehee a proposé de les comparer dans le cas du champ de forces central.

Soit  $\gamma = 2/(\alpha+2)$  ; le résultat principal est que la méthode de Sundman est applicable pour  $\gamma = p/q$ ,  $0 < p < q$ ,  $p$  premier avec  $q$ , et  $q$  impair. La méthode d'Easton n'est applicable que pour  $\alpha < 2$ , lorsque :

$$p/q = n/(2n - 1)$$

Dans ce cas, les deux régularisations sont possibles et interprétables comme une régularisation par réflexion pour  $n$  pair et par transmission pour  $n$  impair.

Elles sont d'ailleurs équivalentes à une troisième méthode, la transformation de Levi-Civita.

La deuxième partie, dirigée par Monsieur Marchal, étudie la forme normale de Birkhoff au voisinage d'une position d'équilibre ou d'une solution périodique. Elle est inspirée par l'appendice 7 du livre d'Arnold, "Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique". Considérons le voisinage d'une position d'équilibre dans le cas douteux, celui où il y a stabilité linéaire et soit :

$$H = H_2 + H_3 + \dots$$

le hamiltonien, avec :

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (p_j^2 + q_j^2)$$

On appelle forme normale de Birkhoff de degré  $s$  un polynôme  $H_s$  de degré  $s$  qui est en réalité un polynôme de degré  $s/2$  des variables d'action :

$$I_j = \frac{p_j^2 + q_j^2}{2}$$

Si  $H$  se réduit à  $H_s$ , le système est intégrable.

Pour  $H$  quelconque, le résultat principal est le suivant :

Si les fréquences  $\omega_j$  ne vérifient aucune relation rationnelle d'ordre  $\leq s$ , il existe un changement de variables canonique tel que  $H$  ne diffère de  $H_s$  que par des termes de degré supérieur.

Après avoir établi ce théorème suivant les indications d'Arnold, nous en tirons les conséquences pour l'existence de quasi-intégrales au sens de Monsieur Marchal, et la stabilité à l'ordre  $s$ . Nous étudions ensuite le cas où les fréquences sont rationnellement dépendantes et nous mettons en évidence deux cas particuliers où l'on peut conclure sur la stabilité à l'ordre  $s$ .

Dans le dernier chapitre, nous généralisons ces résultats au voisinage d'une solution périodique. Il faut introduire la fréquence supplémentaire  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  où  $T_0$  est la période de la solution périodique de référence.

PLAN

PREMIERE PARTIE : REGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRAL.

CHAPITRE I : Rappel des résultats concernant les équations aux variations ; théorie de Floquet et théorème de Hartman.

CHAPITRE II : Collision double du problème plan des deux corps en attraction non newtonienne.

Nous généralisons le changement de variables de Mac Gehee et nous étudions le flot dans l'espace :

$$v = r^\alpha \frac{dr}{dt}$$

$$w = r^{1+(\alpha/2)} \frac{d\theta}{dt}$$

pour  $\alpha < 2$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\alpha > 2$ .

CHAPITRE III : Les changements de variables de Mac Gehee et Siegel.

Nous définissons ces deux types de changement de variables ; nous appliquons celui de Siegel pour définir la variété de collision double. La dimension de cette variété est différente pour  $\alpha < 2$  et  $\alpha > 2$ .

Nous donnons les premiers termes des développements en série correspondants pour quelques valeurs de  $\alpha$ .

CHAPITRE IV : Régularisation de la collision double du problème plan des deux corps en attraction newtonienne.

Nous définissons la régularisation analytique de Sundman et la régularisation géométrique d'Easton et nous établissons le théorème exposé dans l'introduction.

Nous montrons ensuite dans quel cas elles sont équivalentes à la transformation de Levi-Civita.

APPENDICE : Etude du champ répulsif en  $U(r) = -1/r^2$  pour trois corps alignés.

Nous établissons un résultat intéressant, signalé par Moser, qui montre une propriété supplémentaire du champ en  $1/r^2$ . Dans ce cas répulsif, les trois corps supposés de même masse échangent leurs vitesses lorsqu'on passe de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ .

DEUXIEME PARTIE : RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE DE L'EQUILIBRE DANS LES SYSTEMES HAMILTONIENS.

CHAPITRE I : Problème de la stabilité.

Nous donnons la définition de la stabilité au sens de Liapounov et rappelons les propriétés des changements de variables canoniques dont nous aurons besoin par la suite.

CHAPITRE II : Forme normale d'un système conservatif au voisinage d'une position d'équilibre placée à l'origine.

Nous nous plaçons dans le cas critique où l'équilibre est linéairement stable ; soient  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  les fréquences qui ne sont pas nécessairement toutes de même signe. Nous définissons la forme normale de Birkhoff de degré  $s$  et nous démontrons le théorème exposé dans l'introduction, dans le cas où ces fréquences sont rationnellement indépendantes. Nous étudions ensuite le cas des résonances et explicitons deux cas particuliers où l'on peut conclure à la stabilité ou à l'instabilité à un ordre donné  $s$ .

CHAPITRE III : Voisinage d'une solution périodique.

Soit  $T_0$  la période de cette solution et  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  la fréquence correspondante. Nous démontrons que dans le cas où les fréquences  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$  sont rationnellement indépendantes, on peut généraliser le théorème du chapitre II. Nous examinons ensuite le cas où il y a une ou deux relations de résonance.

~ ~ ~ ~ ~

PREMIÈRE PARTIE

RÉGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES

DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRAL



CHAPITRE I

EQUATIONS AUX VARIATIONS : [1], [2], [3].

Soit un système de deux équations différentielles, qui détermine deux fonctions  $x$  et  $y$  d'une variable indépendante  $t$  :

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(x, y, t) \quad \dot{y} = g(x, y, t) \quad (\dot{\phantom{x}} \equiv \frac{d}{dt} ( \phantom{x} ) )$$

et soit une solution de ce système  $\phi(t) = (x(t), y(t))$ .

Pour étudier les solutions voisines, faisons le changement de fonctions inconnues :

$$x = x(t) + \xi \quad y = y(t) + \eta$$

Par substitution, en développant les seconds membres par la formule de Taylor et compte tenu d'une réduction évidente, car les équations transformées doivent être vérifiées pour  $\xi = 0, \eta = 0$ , nous obtenons les deux équations :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \xi \eta + \dots \\ \dot{\eta} = \frac{\partial g}{\partial x} \xi + \frac{\partial g}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \xi^2 + \dots \end{array} \right.$$

dans les dérivées partielles successives, les variables  $x$  et  $y$  doivent être remplacées par les expressions  $x(t), y(t)$  de la solution de départ.

Puisque l'on considère des solutions voisines de la solution  $\phi(t)$ , c'est-à-dire puisque les accroissements  $\xi$  et  $\eta$  sont petits, on peut faire une étude approchée de ces solutions en réduisant les équations (1.2) aux termes linéaires :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta \\ \dot{\eta} = \frac{\partial g}{\partial x} \xi + \frac{\partial g}{\partial y} \eta \end{array} \right.$$

Les équations (1.3), linéaires en  $\xi, \eta$  sont les équations aux variations dites aussi équations variationnelles ou équations linéarisées relatives aux équations (1.1) et la solution  $\phi(t)$ .

On remarque que les équations (1.3) peuvent dépendre explicitement de la variable  $t$ , même si les équations (1.1) n'en dépendent pas, par exemple les équations du premier ordre :

$$\dot{x} = x^2 + 1 \quad \dot{x} = \frac{1}{2x}$$

admettent respectivement les solutions  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $x = \sqrt{t}$  et les équations aux variations correspondantes sont :

$$\dot{\xi} = 2\xi \operatorname{tg} t \quad \dot{\xi} = -\frac{\xi}{2t}$$

En résumé :

Les équations (1.3) forment un système linéaire dont les coefficients dépendent de  $t$ , fondamental pour l'étude du voisinage de la solution particulière  $\phi(t)$  et pour l'étude de sa stabilité. De nombreuses études ont été faites sur ce sujet (Liapounov, Floquet, Poincaré [1]).

En général :

Considérons un système différentiel quelconque :

$$(S) \quad \frac{dx}{dt} = X(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

dont  $\bar{x}(t)$  est une solution particulière ; alors les équations aux variations associées à  $\bar{x}(t)$  sont :

$$(\Sigma) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}} \xi_j \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

ou sous une forme matricielle :

$$(\Sigma) \quad \dot{\xi} = M\xi$$

Propriétés générales :

Nous énoncerons ici un certain nombre de propriétés simples des équations aux variations dont on trouvera une démonstration dans [11].

1°) La solution générale des équations aux variations ( $\Sigma$ ) est une combinaison linéaire de  $n$  solutions particulières indépendantes.

2°) La matrice  $\Phi(t)$  formée par les  $n$  solutions particulières  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  est appelée matrice résolvante :  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ . Pour  $t = 0$ ,  $\Phi(0) = I$  et en plus  $\dot{\Phi} = M\Phi$ , ces deux propriétés caractérisent la matrice  $\Phi$  et l'on a alors :

$$\xi = \Phi \xi_0$$

3°) Une solution particulière des équations aux variations est  $\overline{dx}/dt$ , et plus généralement si cette solution dépend d'un paramètre  $\mu$  :  $\partial \overline{x}/\partial \mu$  est solution des équations aux variations.

a) Voisinage d'une solution d'équilibre  $\overline{x} = x_0$  :

Les équations aux variations ( $\Sigma$ ) sont alors des équations linéaires à coefficients constants :

$$(\Sigma) \quad \dot{\xi} = M\xi$$

$M$  est une matrice constante donc  $\xi = e^{tM} \xi_0$  d'où la matrice résolvante  $\Phi = e^{tM}$  et l'étude de la stabilité se fait par la réduction de  $M$ . Si  $\vec{u}$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $\vec{u}$  est vecteur propre de  $\Phi(t)$  associé à la valeur propre  $e^{\lambda t}$ . Les  $\lambda$  s'appellent exposants caractéristiques.

b) Voisinage d'une solution périodique (Théorie de Floquet) [1] :

Supposons que la solution  $\overline{x}(t)$  soit périodique, de période  $T$ , les équations ( $\Sigma$ ) sont alors des équations linéaires à coefficients périodiques. Pour intégrer ( $\Sigma$ ) il faut faire appel à la théorie de Floquet :

Soit  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  la matrice résolvante telle que

$$\xi = \Phi \xi_0 \quad \Phi(0) = I \quad \dot{\Phi} = M\Phi$$

On constate que  $\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi(T)$  car les deux membres sont égaux pour  $t = 0$  et satisfont à  $\dot{\Phi} = M\Phi$ .

$\Phi(T)$  étant une matrice régulière, il existe une matrice constante  $B$  telle que  $\Phi(T) = e^{BT}$  ; posons  $\pi = \Phi(t)e^{-BT}$  alors  $\pi$  est une matrice périodique de période  $T$  :

$$\Phi = \pi e^{tB}$$

La réduction de B conduit à la conclusion suivante :

Il existe une base de solutions de  $(\Sigma)$  de la forme  $e^{\lambda t} P(t)$  où  $P$  est un polynôme en  $t$  de degré strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de  $t$ .

La solution générale est une combinaison linéaire de ces solutions. Les  $\lambda$  sont appelés exposants caractéristiques.

Une remarque :

En fait, ce qui joue un rôle important ce n'est pas B mais la matrice  $\Phi(T)$  dite monodromique dont les valeurs propres sont  $\mu = e^{\lambda T}$ . Donc  $\lambda T = \text{Log } \mu$ , par conséquent les exposants caractéristiques sont définis module  $2\pi i/T$  à chaque couple  $(\mu, \vec{u})$  tel que  $\Phi(T)\vec{u} = \mu\vec{u}$ , il correspond une solution particulière de  $(\Sigma)$  qui vérifie  $\xi(t+T) = \mu\xi(t)$ . Elle est telle qu'il existe une fonction  $T$ -périodique  $P(t)$  (telle que  $P(0) = \vec{u}$ ) et un réel  $\lambda$  ( $e^{\lambda T} = \mu$ ) tels que  $\xi(t) = e^{\lambda t} P(t)$ .

Théorème de Liapounov :

Soit le système différentiel (S) :  $\dot{x} = f(x)$  où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $(\Sigma)$   $\dot{\xi} = M\xi$  est le système d'équations aux variations associé à (S) ou  $M$  est calculée le long d'une solution d'équilibre  $\bar{x}$  placée à l'origine 0.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M$ . Posons :

$$\lambda = \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \text{Re}(\lambda_j)$$

alors :

$\lambda > 0$  le système (S) est exponentiellement instable ;

$\lambda < 0$  le système (S) a une stabilité "asymptotique" (et même exponentielle).

Pour  $\lambda = 0$  (cas critique) la stabilité dépend des termes d'ordre supérieur.

Le théorème suivant, dit de Hartman, donne la version la plus moderne du théorème de Liapounov :

Théorème de Hartman :

Soit le système  $\dot{x} = f(x) = Mx + g(x)$  où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M$  est une matrice réelle dont les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $g(x)$  est un vecteur de dimension  $n$  aux composantes réelles continûment différentiables au voisinage de l'origine  $0$  et tel que  $g(0) = 0$ ,  $(\partial g / \partial x)_{x=0} = 0$ .

Si  $\forall k \in \{1, \dots, n\} \operatorname{Re} \lambda_k \neq 0$ , il existe alors un homéomorphisme  $x = u(\xi)$  dans un voisinage de  $\xi = 0$  tel que les systèmes  $\dot{x} = f(x)$  et  $d\xi/dt = M\xi$  soient équivalents.

Ce théorème est démontré par Siegel [6], lorsque celui-ci démontre le théorème de Liapounov.

Dans le cas de valeurs propres réelles, le théorème de Hartman s'applique à un système :

$$\begin{aligned}
 (\Sigma) \quad & \left\{ \begin{aligned} dx_i/dt &= \lambda_i x_i + f_i(x, y) \\ dy_j/dt &= -\lambda_j y_j + g_j(x, y) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$i \in \{1, \dots, k\}$  la matrice  $M$  a  $k$  valeurs propres positives

$j \in \{k+1, \dots, n\}$  la matrice  $M$  a  $(n-k)$  valeurs propres négatives.

Ce système admet des solutions du type  $\xi = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$ ; l'équation  $x = u(\xi)$  donne alors les solutions pour  $x$ . Le système  $(\Sigma)$  admet des solutions asymptotiques.

C'est Poincaré qui a introduit la notion de solutions asymptotiques découlant de celle d'exposants caractéristiques. Ces derniers, en effet, servent à l'étude de la stabilité de solutions voisines d'une solution périodique et à connaître celles qui s'en éloignent ou s'en approchent quand  $t \rightarrow \infty$ .

Lorsque les parties réelles des exposants  $\lambda$  sont positives, les expressions du type  $e^{\lambda t}$  qui apparaissent dans les solutions des équations aux

variations tendent vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ , ce sont ces solutions que l'on appelle asymptotiques (il y a stabilité dans le passé).

Ainsi, dans le cas du système  $(\Sigma)$ , Siegel montre qu'il y a deux familles de solutions, les unes asymptotiques à la position d'équilibre lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  (il y a stabilité dans le futur), les autres lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ , suivant le nombre de valeurs propres positives ou négatives.

Problème :

Considérons un système différentiel quelconque :

$$(S) : \dot{x} = X(x) ; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

soit  $\bar{x}$  une solution d'équilibre de (S) placée à l'origine 0 et :

$$(\Sigma) : \dot{\xi} = M\xi ; \quad M = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x=\bar{x}}$$

le système d'équations aux variations associé.

Trouver pour le système différentiel complet (S) une famille de solutions qui tendent vers 0 (solution d'équilibre) lorsque  $t \rightarrow -\infty$ .

Supposons que  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  soient  $k$  valeurs propres distinctes de  $M$  et aient toutes leur partie réelle strictement positive.

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2 &= \xi_2(0)e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \xi_k &= \xi_k(0)e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

On constate que  $\xi_i \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$  ;  $i = 1, \dots, k$ .

Si l'on pose dans (1.4)  $\xi_i(0) = a_i$ , on obtient une famille à  $k$  paramètres  $u_1, \dots, u_k$  tels que :

$$u_1 = a_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, u_k = a_k e^{\lambda_k t}$$

et la solution complète s'écrit :

$$(1.5) \quad \left\| \begin{array}{l} x_1 = f_1(u_1, \dots, u_k) \\ \vdots \\ x_n = f_n(u_1, \dots, u_k) \end{array} \right.$$

où les  $f_i$  sont des séries entières tendant vers 0 lorsque  $t \rightarrow -\infty$ .

Exemple : considérons le mouvement :

$$(1.6) \quad \ddot{x} = x + x^2$$

c'est un système lagrangien où :

$$(1.7) \quad L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3$$

Posons :  $\dot{x} = y$ , le système (1.6) prend la forme générale  $\dot{x} = X(x) :$

$$(1.8) \quad \dot{x} = y \quad \dot{y} = x + x^2$$

c'est un système hamiltonien où :

$$(1.9) \quad H = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3, \quad x \text{ et } y \text{ sont conjuguées}$$

Les positions d'équilibre de (1.8) :

Elles satisfont le système :  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$  d'où il existe deux positions d'équilibre :  $O(0,0)$  et  $A(-1,0)$ .

La nature de  $O(0,0)$  :

Le système linéarisé associé à (1.8) en  $(0,0)$  s'écrit :

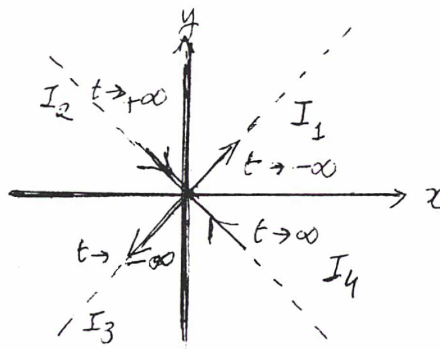
$$(1.10) \quad \begin{array}{l} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = \xi \end{array}$$

d'où la matrice  $M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  qui admet deux valeurs propres réelles de signes opposés :  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  et le point  $O$  est par conséquent un col, donc instable.

En effet, le système linéarisé (1.10) admet deux solutions de la forme :

$$(1.11) \quad (\xi = ae^t, \eta = ae^t) \quad \text{et} \quad (\xi = ae^{-t}, \eta = -ae^t)$$

et le graphe au voisinage du point  $O$  consiste en deux droites  $\eta = \pm \xi$  dans le plan  $(x,y)$ , on voit sur la figure que  $I_2$  et  $I_4$  sont stables et  $I_1, I_3$  sont instables d'où l'instabilité de  $O$ .



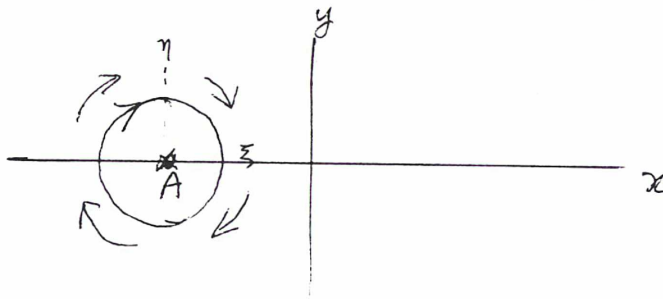
La nature de  $A(-1,0)$  :

En ce point, la matrice  $M$  du système linéaire devient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et elle admet deux valeurs propres imaginaires pures  $\lambda_1 = -i$ ,  $\lambda_2 = i$ , et le point  $A$  est par conséquent un centre, donc stable.

En effet, le système linéarisé a comme solution ( $\xi = a \cos t$ ,  $\eta = a \sin t$ ), donc si l'on met un point au voisinage de  $A$ , alors il va décrire un cercle autour de  $A$  d'où la stabilité de  $A$  pour l'étude linéarisée.



Etude générale : Revenons à l'équation du mouvement et écrivons à l'aide de

(1.9) l'intégrale de l'énergie  $H = h$ , soit :

$$(1.12) \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + h$$

Nous allons étudier les courbes pour les différentes valeurs de  $h$ .

Cas du col  $O(0,0)$  : On a  $x = y = 0$ , donc  $h = 0$  d'où la courbe d'équation :

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$



On remarque que les équations (1.3) peuvent dépendre explicitement de la variable  $t$ , même si les équations (1.1) n'en dépendent pas, par exemple les équations du premier ordre :

$$\dot{x} = x^2 + 1 \quad \dot{x} = \frac{1}{2x}$$

admettent respectivement les solutions  $x = \operatorname{tgt}$ ,  $x = \sqrt{t}$  et les équations aux variations correspondantes sont :

$$\dot{\xi} = 2\xi \operatorname{tgt} \quad \dot{\xi} = -\frac{\xi}{2t}$$

En résumé :

Les équations (1.3) forment un système linéaire dont les coefficients dépendent de  $t$ , fondamental pour l'étude du voisinage de la solution particulière  $\phi(t)$  et pour l'étude de sa stabilité. De nombreuses études ont été faites sur ce sujet (Liapounov, Floquet, Poincaré [1]).

En général :

Considérons un système différentiel quelconque :

$$(S) \quad \frac{dx}{dt} = X(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

dont  $\bar{x}(t)$  est une solution particulière ; alors les équations aux variations associées à  $\bar{x}(t)$  sont :

$$(\Sigma) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}} \xi_j \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

ou sous une forme matricielle :

$$(\Sigma) \quad \dot{\xi} = M\xi$$

Propriétés générales :

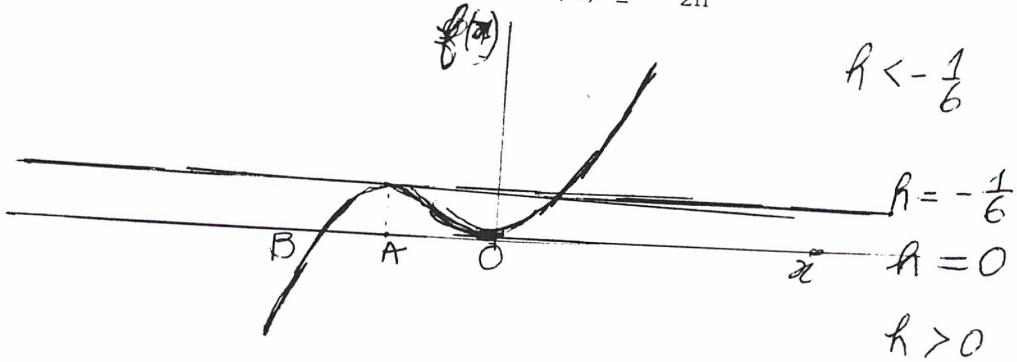
Nous énoncerons ici un certain nombre de propriétés simples des équations aux variations dont on trouvera une démonstration dans [11].

1°) La solution générale des équations aux variations  $(\Sigma)$  est une combinaison linéaire de  $n$  solutions particulières indépendantes.

En général, on a :

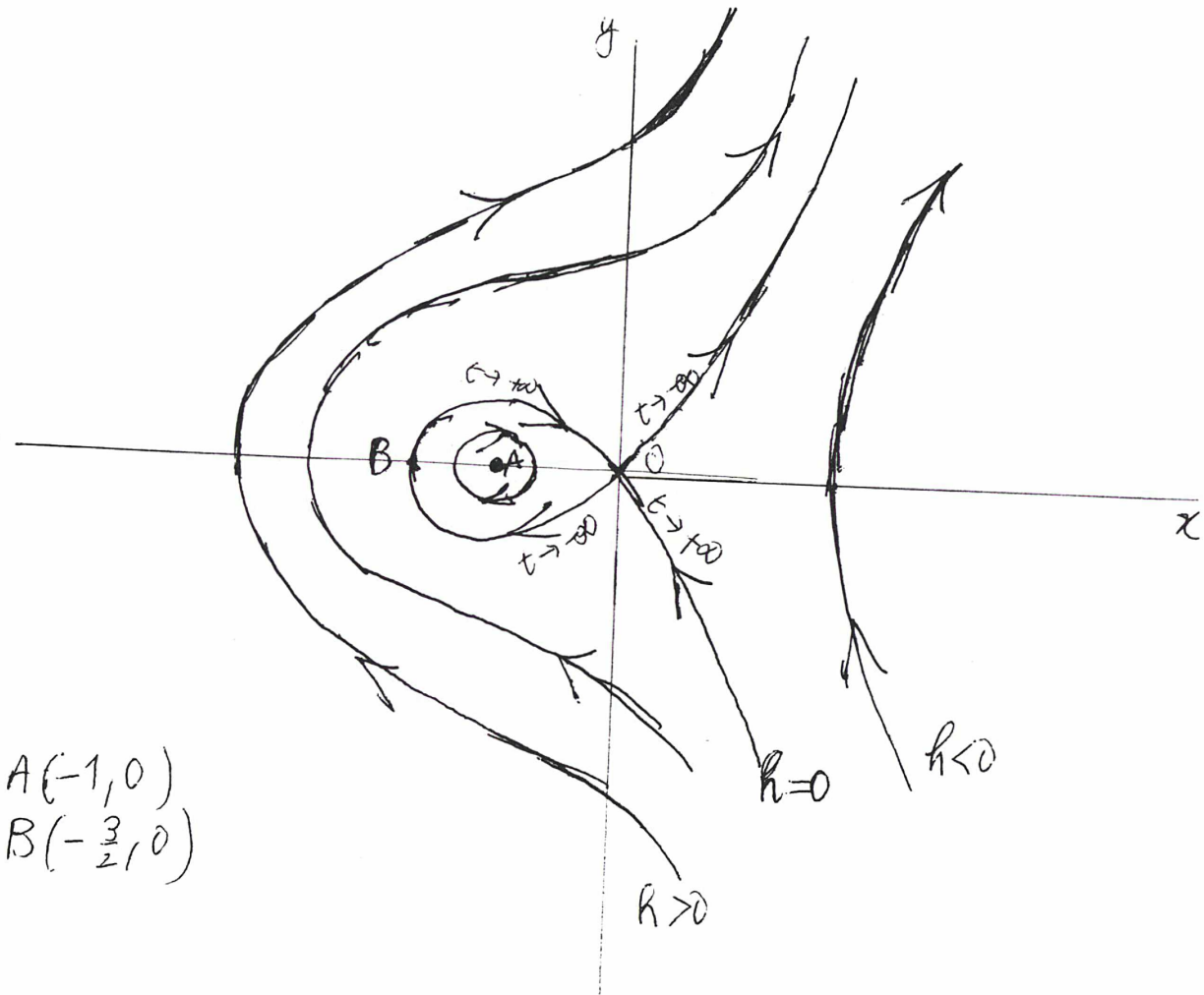
$$y^2 = x^2 + \frac{2}{3} x^3 + 2h = f(x) + 2h = \phi(x)$$

$$\phi(x) \geq 0 \iff f(x) \geq -2h$$



On constate l'existence des solutions périodiques lorsque  $-1/6 < h < 0$ .

La figure suivante représente le flot du champ de vecteurs donné par (1.8) dans l'espace des phases  $(x,y)$ .



Nous allons chercher les équations paramétriques des différentes branches :

$B_1, B_2, B_3, B_4$ .

$$\text{On a } h = 0, \text{ donc } y^2 = x^2 + \frac{2}{3} x^3 = \frac{x^2}{9} (9 + 6x)$$

$$y = \pm \frac{x}{3} \sqrt{9 + 6x}$$

(+) pour les branches  $B_1$  et  $B_2$

(-) pour les branches  $B_3$  et  $B_4$

Cherchons donc l'équation paramétrique de  $x$  :

a) Pour la branche  $B_3$  on a :  $-3/2 < x < 0$ , il est normal donc de poser  $x = -\frac{3}{2} \sin^2\phi$  d'où  $y = -\frac{3}{2} \sin^2\phi \cos\phi$ .

$$\text{Or : } y = \dot{x} \quad dt = 2 \frac{d\phi}{\sin\phi}$$

$$\text{donc : } t = 2 \log \text{tg} \frac{\phi}{2} \quad \text{ou} \quad \text{tg} \frac{\phi}{2} = e^{t/2}$$

par conséquent :

$$(1.13) \quad x = -\frac{6e^t}{(1+e^t)^2} \quad y = -6e^t \frac{1-e^t}{(1+e^t)^3}$$

On trouve la même expression pour la branche  $B_2$  et ceci se justifie parce que sur la branche  $B_3$  :  $x \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$ , et sur la branche  $B_2$  :  $x \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

b) Pour les branches  $B_1$  et  $B_4$  on pose  $x = \frac{3}{2} \text{sh}^2 u$ , on trouve :

$$(1.4) \quad x = \frac{6e^t}{(e^t - 1)^2} \quad y = \pm 6e^t \frac{e^t + 1}{(e^t - 1)^3}$$

Sur la branche  $B_1$  on a :  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x = 0, \lim_{t \rightarrow 0} x = \infty$

et sur la branche  $B_4$  on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0, \lim_{t \rightarrow 0} x = \infty$

Utilisation de (1.5) pour la solution complète :

Nous avons montré que les équations linéarisées (1.10) au voisinage de la position d'équilibre  $O(0,0)$  admettent deux solutions de la forme (1.11).

$$\text{Posons : } u = ae^t \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} u = 0)$$

d'où la solution complète sera de la forme :

$$(1.15) \quad \left\| \begin{array}{l} x = f(u) \\ y = \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial u} \dot{u} = f'(u)u = g(u) \\ \dot{y} = g'(u)u = h(u) \end{array} \right.$$

f et g sont deux séries entières en u, pour les trouver on écrit :

$$f(u) = u + au^2 + bu^3 + \dots$$

donc : 
$$g(u) = u + 2au^2 + 3bu^3 + \dots$$

et : 
$$h(u) = u + 4au^2 + 9bu^3 + \dots$$

d'après (1.8) on a :  $h(u) = f + f^2$ , donc :

$$u + 4au^2 + 9bu^3 + \dots = u + (a + 1)u^2 + (b + 2a)u^3 + \dots$$

d'où : 
$$a = 1/3 \quad , \quad b = 1/12 \quad , \quad \dots$$

par conséquent :

$$(1.16) \quad \left\| \begin{array}{l} x = u + \frac{1}{3} u^2 + \frac{1}{12} u^3 + \dots \\ y = u + \frac{2}{3} u^2 + \frac{1}{4} u^3 + \dots \\ u = ae^t \end{array} \right.$$

$a > 0$  pour la branche  $B_3$  ;  $A < 0$  pour la branche  $B_1$

Remarque : Pour les variétés instables  $B_2$  et  $B_4$  on prend comme paramètre

$$v = be^{-t}$$

Changement de variable temporelle :

a) Système Hamiltonien :

Considérons un système hamiltonien à n degrés de liberté :

$$(1.17) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\partial H / \partial \vec{q} \quad , \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \partial H / \partial \vec{p}$$

$\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$  les variables d'état.

On considère la matrice S dite symplectique et définie :

$$S = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$

et on pose  $x = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$ , d'où le système (1.17) s'écrit sous la forme matricielle :

$$(1.18) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = S \vec{\text{grad}} H$$

Supposons que le hamiltonien ne contienne pas explicitement la variable indépendante  $t$  (système conservatif) et considérons le niveau  $h$  d'énergie

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = h$$

Par changement temporel défini par :

$$(1.19) \quad \begin{aligned} dt &= \mu d\tau \quad ; \quad \mu = \mu(\vec{p}, \vec{q}, t) \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} &= \mu \frac{d\vec{x}}{dt} = \mu S \vec{\text{grad}} H \end{aligned}$$

$$\text{Or :} \quad \vec{\text{grad}} \mu(H - h) = (H - h)\vec{\text{grad}} \mu + \mu \vec{\text{grad}}(H - h)$$

mais pour les mouvements d'énergie  $h$  on a  $H - h = 0$  d'où :

$$\mu \vec{\text{grad}} H = \mu \vec{\text{grad}}(H - h) = \vec{\text{grad}} \mu(H - h)$$

donc :

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = S \vec{\text{grad}} \mu(H - h) = S \vec{\text{grad}} K$$

et l'on peut énoncer :

(1.20)  $\left\| \begin{array}{l} \text{Par le changement temporel } dt = \mu d\tau \quad ; \quad \mu = \mu(\vec{p}, \vec{q}, t), \text{ les} \\ \text{trajectoires d'énergie } H = h \text{ du hamiltonien } H \text{ deviennent} \\ \text{les trajectoires d'énergie } K = 0 \text{ du hamiltonien } K = \mu(H - h). \end{array} \right.$

b) système Lagrangien :

Considérons les équations de Lagrange  $[L] = 0$  supposées conservatives, elles sont hamiltoniennes pour  $H = \vec{p}\vec{q} - L$ . Par le changement temporel (1.19) les trajectoires d'énergie  $h$  deviennent les trajectoires d'énergie nulle de  $K = \mu[H - h] = \mu[\vec{p}\vec{q} - L - h] = \vec{p}\vec{q}' - \mu(L + h)$  puisque  $\vec{q}' = \mu\dot{\vec{q}}$ , or au hamiltonien  $K$  correspond le lagrangien :

$$L^* = \mu(L + h) = \mu[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}} = \vec{q}'/\mu) + h]$$

et l'on peut énoncer :

(1.21)  $\left\| \begin{array}{l} \text{Par le changement temporel } dt = \mu d\tau, \text{ les trajectoires} \\ \text{d'énergie } h \text{ du Lagrangien } L \text{ deviennent les trajectoires} \\ \text{d'énergie nulle du lagrangien} \end{array} \right.$

$$L^* = \mu(L + h)$$

Ainsi, si :

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

alors :

$$L^* = \mu [L_2(q'_1/\mu) + L_1(q'/\mu) + L_0 + h]$$

ou encore :

$$(1.22) \quad L^* = \frac{1}{\mu} L_2(\vec{q}') + L_1 + \mu(L_0 + h)$$

CHAPITRE II

COLLISION DOUBLE DU PROBLEME PLAN DE DEUX CORPS

EN ATTRACTION NON NEWTONIENNE

Equations du mouvement :

On considère un système de deux corps en attraction non Newtonienne et pour simplifier l'étude on place le centre de gravité de deux corps à l'origine du plan du mouvement, le problème se réduit donc au problème d'un seul corps  $P(x,y)$  de masse égale à l'unité, attiré par l'origine.

Soit  $U(r)$  la fonction de force :

$$(2.1) \quad \left\| \begin{array}{l} U(r) = r^{-\alpha} ; \quad \alpha > 0 \\ \\ r = |\vec{op}| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

d'où les équations du mouvement :

$$(2.2) \quad \left\| \begin{array}{l} \ddot{x} = \partial U / \partial x = -\alpha r^{-\alpha-2} x \\ \\ \ddot{y} = \partial U / \partial y = -\alpha r^{-\alpha-2} y \end{array} \right.$$

On constate que l'origine est un point singulier du système réduit (2.2) et d'après (2.1) on a  $\lim_{r \rightarrow 0} U(r) = \infty$ . Nous dirons lorsque  $r \rightarrow 0$  qu'il y a une singularité de collision double. Mac Gehee démontre [4] que la collision double est la seule singularité de la solution du système (2.2), c'est-à-dire que la singularité de la solution de (2.2) est celle des équations différentielles du mouvement.

Le système (2.2) est lagrangien avec :

$$(2.3) \quad L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + r^{-\alpha} ; \quad \alpha > 0 , \quad ( )' \equiv \frac{d}{dt} ( )$$

Nous allons considérer les coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta$$

d'où le Lagrangien (2.3) s'écrit :

$$(2.4) \quad L(\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + r^{-\alpha} ; \quad \alpha > 0$$

ou encore :

$$(2.5) \quad \left\| \begin{aligned} L(\dot{\rho}, \dot{\theta}, \rho, \theta) &= \frac{1}{2} e^{2\rho} (\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2) + e^{-\rho\alpha} ; \quad \alpha > 0 \\ r &= e^{\rho} \end{aligned} \right.$$

Effectuons le changement temporel (1.19) avec  $\mu = r^{1+(\alpha/2)} = e^{\rho(1+(\alpha/2))}$ , d'après (1.22) on écrit :

$$L^* = e^{-\rho(1+\alpha/2)} e^{2\rho} \left( \frac{\rho'^2 + \theta'^2}{2} \right) + e^{\rho(1+\alpha/2)} (e^{-\rho\alpha} + h)$$

soit :

$$(2.6) \quad \left\| \begin{aligned} L^* &= e^{\rho(1-\alpha/2)} \left[ \frac{1}{2} (\rho'^2 + \theta'^2) + 1 + h e^{\rho\alpha} \right] \\ ( )' &= \mu ( )' = \frac{d}{d\tau} ( ) \\ h &: \text{l'intégrale de l'énergie en variables } (\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta). \end{aligned} \right.$$

Equations de Lagrange :

$$(2.7) \quad \left\| \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \rho'} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \rho} = 0 \right.$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = 0 \right.$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \rho'} = e^{\rho(1-\alpha/2)} \rho'$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \theta'} = e^{\rho(1-\alpha/2)} \theta'$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \rho} = \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) e^{\rho(1-\alpha/2)} \left[ \frac{1}{2} (\rho'^2 + \theta'^2) + 1 + h e^{\rho\alpha} \right] + e^{\rho(1-\alpha/2)} h \alpha e^{\rho\alpha}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \theta} = 0$$

d'où la première équation de (2.7) donne :

$$\frac{d}{d\tau} (e^{\rho(1-\alpha/2)} \rho') - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) e^{\rho(1-\alpha/2)} \left( \frac{1}{2} \rho'^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 + 1 + h e^{\rho\alpha} \right) - h \alpha e^{\rho(1+\alpha/2)} = 0$$



ou :

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \rho'^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - 1 - h e^{\rho\alpha}\right) - h \alpha e^{\rho\alpha} + \rho'' = 0$$

or :

$$(2.8) \quad \frac{1}{2}(\rho'^2 + \theta'^2) = 1 + h e^{\rho\alpha} \quad \text{de l'intégrale de l'énergie}$$

donc la première équation de Lagrange s'écrit :

$$(2.9) \quad \rho'' = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\theta'^2 + h \alpha e^{\rho\alpha}$$

la deuxième équation de (2.7) donne :

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \theta'} \right) = 0$$

d'où l'intégrale du moment cinétique :

$$(2.10) \quad e^{\rho(1-\alpha/2)} \theta' = C$$

que l'on peut écrire :

$$(2.11) \quad \theta'' = - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \rho' \theta'$$

posons dans (2.9) et (2.11)  $\theta' = w$  et  $\rho' = v$  et éliminons  $h$  entre (2.8) et (2.9), il vient :

$$w' = - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v w$$

$$v' = w^2 + \frac{\alpha}{2} v^2 - \alpha$$

En résumé :

Le système (2.2) est équivalent à deux systèmes séparés :

$$(2.12) \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} = v \\ \frac{d\theta}{d\tau} = w \end{array} \right.$$

$$(2.13) \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{dw}{d\tau} = - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v w \\ \frac{dv}{d\tau} = \alpha \frac{v^2}{2} + w^2 - \alpha \end{array} \right.$$

avec :

$$dt = r^{(1+\alpha/2)} d\tau$$

Les intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique s'écrivent successivement en variables  $r, v, w$  :

$$(2.14) \quad h = \frac{r^{-\alpha}}{2} (v^2 + w^2 - 2)$$

$$(2.15) \quad c = r^{(1-\alpha/2)} w$$

Propriétés du système (2.13) :

1°) Considérons la fonction  $\Lambda$  définie par :

$$\Lambda = |c|^\alpha \cdot |2h|^{1-\alpha/2}$$

en tenant compte des (2.14) et (2.15), elle s'écrit donc :

$$(2.16) \quad \Lambda = |w|^\alpha |v^2 + w^2 - 2|^{1-\alpha/2}$$

Nous allons montrer que  $\Lambda$  est intégrale première du système (2.13) :

En effet :

$$\log \Lambda = \alpha \log |w| + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \log |v^2 + w^2 - 2|$$

et la dérivée par rapport à  $\tau$  de deux membres donne :

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda'}{\Lambda} &= \alpha \frac{w'}{w} + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{2vv' + 2ww'}{v^2 + w^2 - 2} \\ &= -\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{2\left(\frac{\alpha}{2} v^3 + w^3 v - \alpha v - w^2 v + \frac{\alpha}{2} w^2 v\right)}{v^2 + w^2 - 2} \\ &= -\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v + \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) v \equiv 0 \end{aligned}$$

donc  $d\Lambda/d\tau \equiv 0$ , par conséquent  $\Lambda = \text{constant}$ .

2°) Pour  $\alpha = 2$ , le système (2.13) devient :

$$w' = 0$$

$$v' = v^2 - 2$$

3°) Pour  $h = 0$  ce qui est équivalent d'après (2.14) à  $v^2 + w^2 = 2$ , le système (2.13) devient :

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\alpha}{2} (2 - w^2) + w^2 - \alpha = w^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ce qui signifie que  $dv/d\tau$  a un signe constant, positif si  $\alpha < 2$  et négatif si  $\alpha > 2$ .

d'autre part, on a  $\theta' = w$  donc :

$$\frac{dv}{d\theta} = \pm \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{2 - v^2}$$

on peut donc intégrer et trouver :

$$v = v(\theta)$$

$$w = w(\theta)$$

$$\theta = \theta(\tau)$$

Variété de collision double :

Revenons à l'intégrale de l'énergie (2.14) :

$$v^2 + w^2 - 2 = 2hr^\alpha \quad \text{ou} \quad v^2 + w^2 - 2 = 2he^{\rho\alpha} ; \quad r = e^\rho$$

On constate que  $v^2 + w^2 - 2 \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$  (ou  $\rho \rightarrow -\infty$ ) et de même  $v^2 + w^2 - 2 \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , par conséquent à la singularité ( $r \rightarrow 0$  ou  $\rho \rightarrow -\infty$ ) tout se passe comme si  $h = 0$ .

Considérons la fonction  $F = 2 - v^2 - w^2$ , à l'aide de (2.13) on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} &= -2\left(v \frac{dv}{d\tau} + w \frac{dw}{d\tau}\right) \\ &= -2\left[\left(\frac{\alpha}{2}v^2 + w^2 - \alpha\right)v - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)vw^2\right] \\ &= -2\left(\frac{\alpha}{2}v^2 + w^2 - \alpha - w^2 + \frac{\alpha}{2}w^2\right)v \\ &= -\alpha(v^2 + w^2 - 2)v \\ &= -\alpha Fv \end{aligned}$$

d'où :

$$F(\tau) = F(0)e^{-\alpha \int v d\tau}$$

ce qui signifie que  $F(\tau) = 0 \forall \tau$  ssi  $F(0) = 0$ , par conséquent le cercle d'équation  $w^2 + v^2 = 2$  est invariant, d'où la variété invariante de la collision double :

$$(2.17) \quad N = \{(r, \theta, w, v) ; r = 0 \quad \text{et} \quad w^2 + v^2 = 2\}$$

Nous allons, dans la suite, nous borner à l'étude du flot du champ de vecteurs défini par le système (2.13) seulement, en effet nous avons vu que le système (2.13) ne contient ni  $r$  ni  $\theta$ , une fois que (2.13) est intégré le système (2.12) donne  $r(\tau)$  et  $\theta(\tau)$ .

Dans le cas où  $h \neq 0$  on peut se servir de l'intégrale (2.14) pour déterminer  $r(\tau)$ . D'autre part, nous allons étudier les orbites du système (2.13) en étudiant l'intégrale première de ce système, à savoir  $\Lambda$  donnée par (2.16).

Positions d'équilibre du système (2.13) :

Elles vérifient simultanément les deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} vw = 0 \\ \frac{\alpha}{2} v^2 + w^2 - \alpha = 0 \end{array} \right.$$

d'où il existe quatre positions d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^- : (w, v) = (0, -\sqrt{2}) \\ E^+ : (w, v) = (0, \sqrt{2}) \\ L^- : (w, v) = (-\sqrt{\alpha}, 0) \\ L^+ : (w, v) = (\sqrt{\alpha}, 0) \end{array} \right.$$

D'une part on constate que  $E^-$  et  $E^+$  sont situés sur la variété  $N$  et d'autre part nous allons montrer que l'orbite de collision intersecte l'orbite  $h = 0$  aux points  $E^-$ ,  $E^+$  et qu'elle lui est tangente.

Les équations aux variations :

Ce sont les équations linéarisées du système (2.13) au voisinage de chacune des positions d'équilibre  $(\bar{w}, \bar{v})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} (\delta w) = - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \bar{v} \delta w - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \bar{w} \delta v \\ \frac{d}{d\tau} (\delta v) = 2\bar{w} \delta w + \alpha \bar{v} \delta v \end{array} \right.$$

d'où la matrice associée :

$$M = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \bar{v} & -\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \bar{w} \\ 2\bar{w} & \alpha \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

Nous allons donner les valeurs propres de M en chaque position d'équilibre :

$$\begin{aligned}
 M/E^- &= \begin{pmatrix} (1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\alpha\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1 = (1 - \frac{\alpha}{2})\sqrt{2} \quad \lambda_2 = -\alpha\sqrt{2} \\
 M/E^+ &= \begin{pmatrix} (-1+\frac{\alpha}{2})\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \alpha\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \quad \lambda_1 = -(1 - \frac{\alpha}{2})\sqrt{2} \quad \lambda_2 = \alpha\sqrt{2} \\
 M/L^- &= \begin{pmatrix} 0 & (1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\alpha} \\ -2\sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2\alpha(1-\alpha/2)} \quad i = \sqrt{-1} \\
 M/L^+ &= \begin{pmatrix} 0 & -(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\alpha} \\ 2\sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2\alpha(1-\alpha/2)}
 \end{aligned}$$

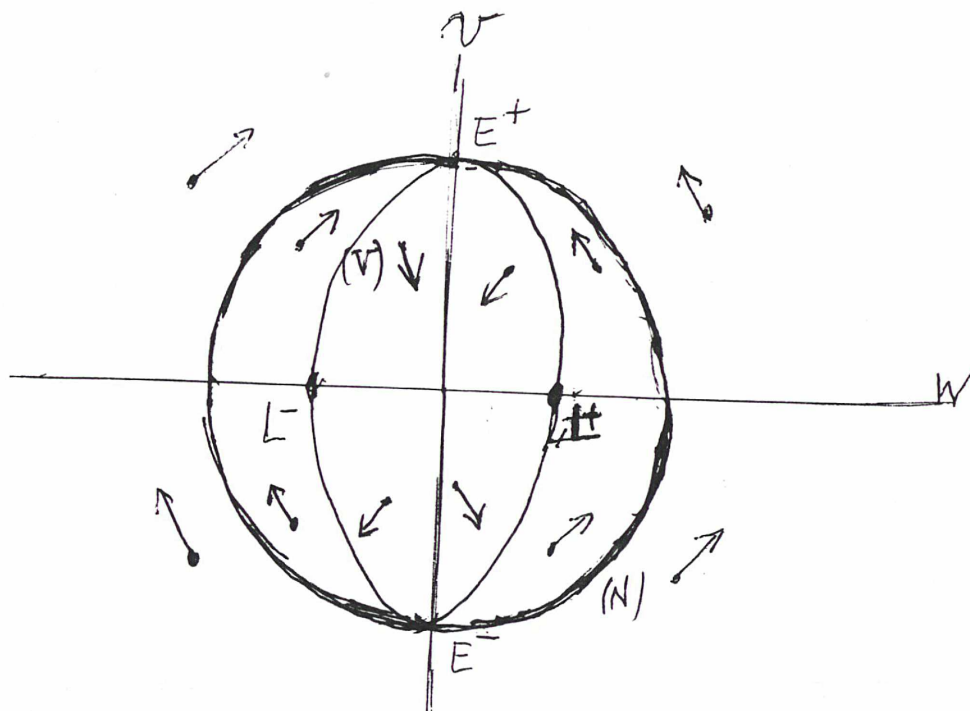
Nous allons distinguer trois cas suivant les valeurs de  $\alpha$  :

1°)  $\alpha < 2$  : (Le cas képlérien rentre dans ce cadre avec  $\alpha = 1$ ).

Soient  $W(u,v)$  et  $V(w,v)$  les seconds membres du système (2.13) alors dans le plan  $(w,v)$  on obtient les positions d'équilibre  $E^-, E^+, L^-, L^+$  comme l'intersection des courbes d'équation :

$$\begin{aligned}
 &W = 0 : \text{les axes des } w \text{ et des } v \\
 &V = 0 : \text{l'ellipse } \frac{w^2}{\alpha} + \frac{v^2}{2} = 1 \text{ dont le grand axe est} \\
 &\quad \text{sur l'axe des } v.
 \end{aligned}$$

Pour le sens des flèches dans les différentes régions, il suffit de constater que  $W > 0$  dans les quadrants  $Q_{II}$  et  $Q_{IV}$  et que  $V > 0$  à l'extérieur de l'ellipse  $\frac{w^2}{\alpha} + \frac{v^2}{2} = 1$ . D'autre part, notons que  $h = 0$  sur la variété  $N$  et que  $h > 0$  à l'extérieur de  $N$ .



A)  $h \geq 0$  (orbites paraboliques ou hyperboliques dans le cas képlérien où  $\alpha = 1$ ).

On distingue 2 cas :

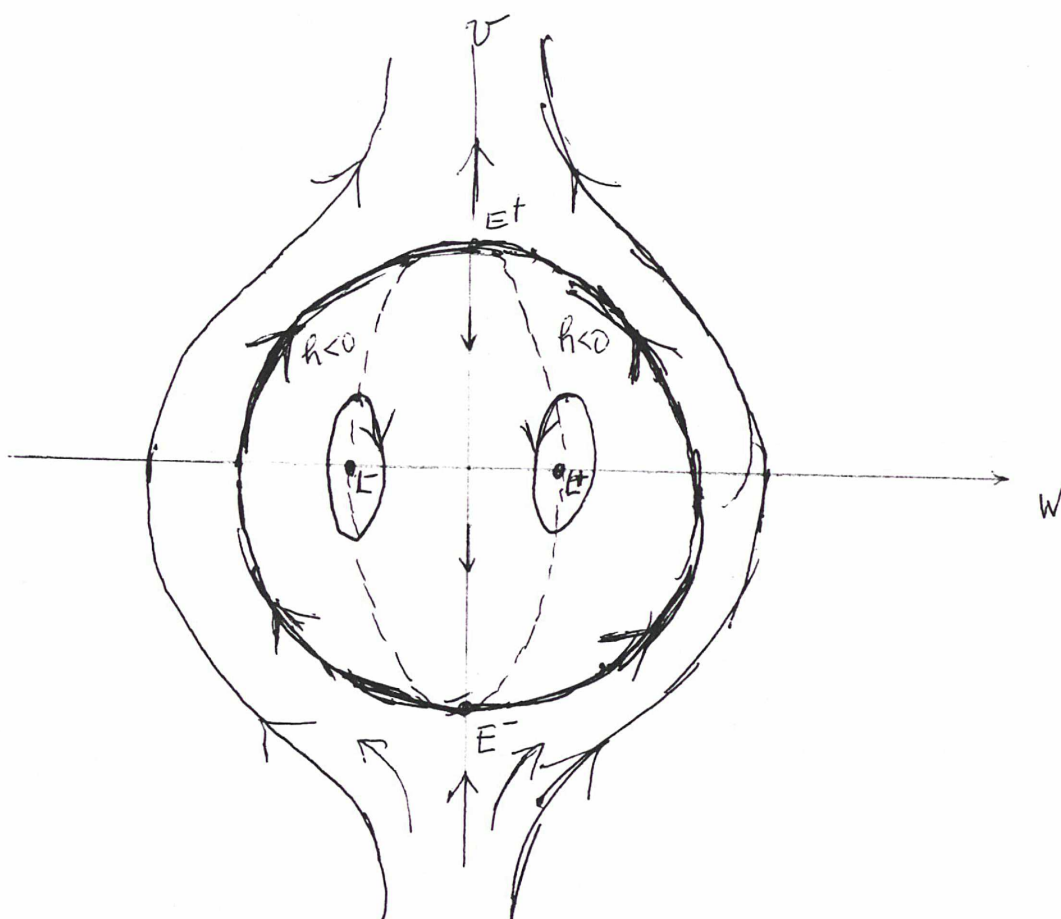
a)  $w = 0$ , c'est-à-dire que le moment cinétique est nul. Ce sont les intervalles  $(-\infty, E^-]$ ,  $[E^+, \infty)$  de l'axe des  $v$ . On constate que des orbites partent de la collision en  $E^+$  et que d'autres aboutissent à la collision en  $E^-$ .

b)  $w \neq 0$  : les orbites viennent de l'infini et partent pour l'infini.

B)  $h < 0$  (orbites elliptiques dans le cas képlérien)

C'est la région qui se trouve à l'intérieur de la variété  $N$ , où toutes les solutions seront bornées.

d'où la figure suivante qui résume et montre le comportement des courbes intégrales dans les différentes régions.



Notons que  $E^-$  et  $E^+$  sont cols, donc instables, par contre les positions  $L^-$  et  $L^+$  sont stables, elles sont en effet centres.

On aurait abouti à ce résultat en examinant la nature de ces points moyennant les valeurs propres, par exemple nous avons montré que les valeurs propres de  $M$  au point  $E^+$  sont réelles de signes opposés, le point  $E^+$  est donc un col et la pente des séparatrices qui le traversent

est donnée par  $m = \frac{\lambda - a}{b} = \frac{a'}{\lambda - b'}$  où l'on a :

$$a = -(1 - \frac{\alpha}{2})\sqrt{2} \quad a' = 0$$

$$b = 0 \quad b' = \alpha\sqrt{2}$$

donc :  $m_1 = 0$  correspond à la parallèle de l'axe des  $w$

$m_2 = \infty$  correspond à l'axe des  $v$ .

On peut faire la même analyse pour les autres points

2°)  $\alpha = 2$  : Le système (2.13) devient :

$$w' = 0$$

$$v' = v^2 + w^2 - 2$$

la première équation montre que la variable  $w$  reste constante, c'est en effet l'intégrale du moment cinétique comme le montre (2.15) et par la même occasion signalons que la variable  $v$ , elle aussi, devient une intégrale lorsque  $h = 0$ , comme le montre (2.14).

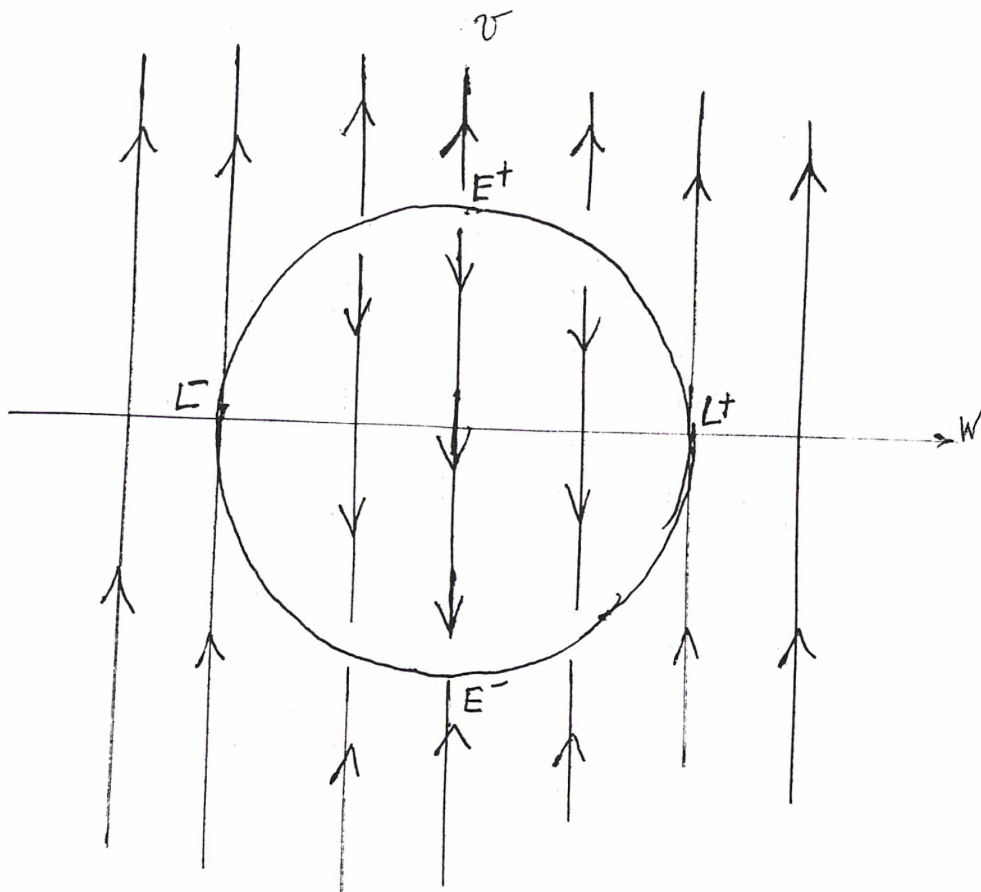
Avant d'étudier le flot, notons que non seulement les points  $E^-$ ,  $E^+$ ,  $L^-$ ,  $L^+$  sont les points d'équilibre, mais également tout point du cercle  $w^2 + v^2 = 2$ , de plus, notons que les points  $L^-$  et  $L^+$  sont eux aussi sur le cercle.

Traçons la courbe  $(V) : v^2 + w^2 - 2 = 0$ , c'est donc la variété elle-même, on constate que :

$$v < 0 \text{ à l'intérieur du cercle } (h < 0)$$

$$v > 0 \text{ à l'extérieur du cercle } (h > 0)$$

d'où on résume le flot sur la figure suivante :



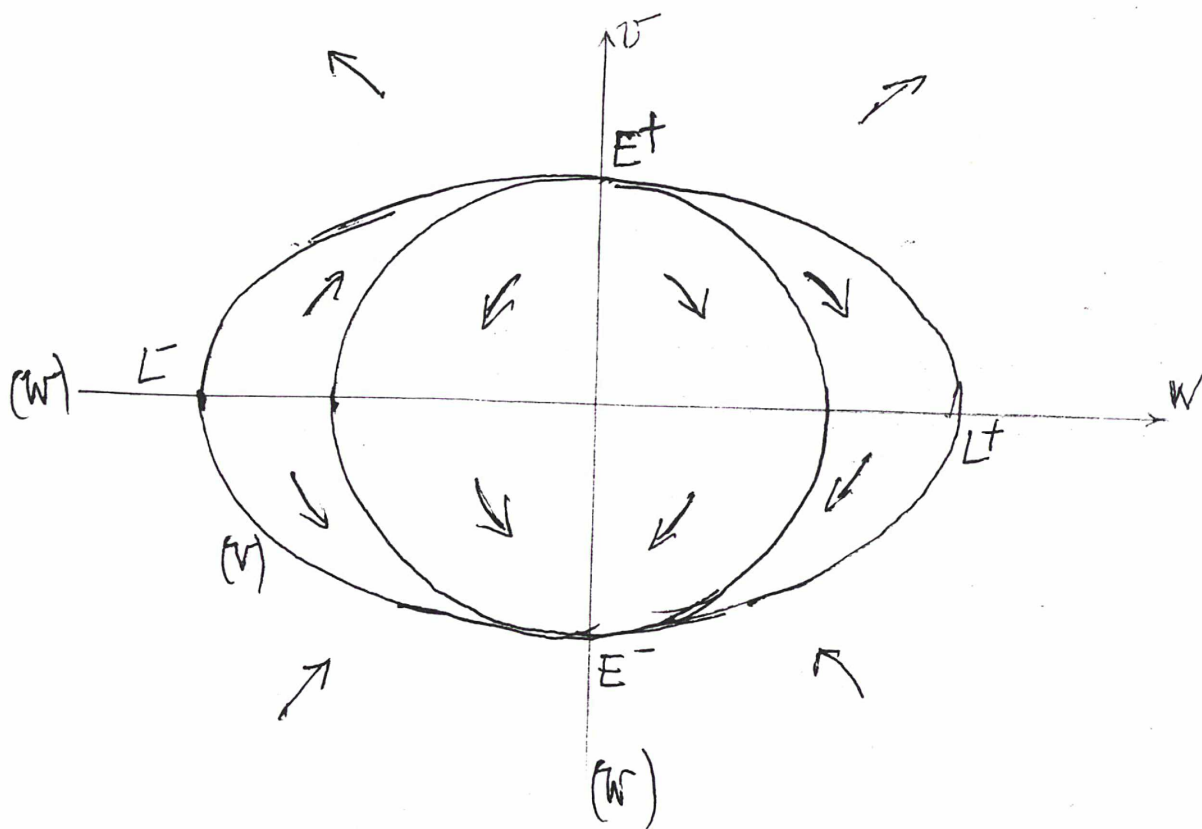


A)  $h > 0$  : on distingue deux cas :

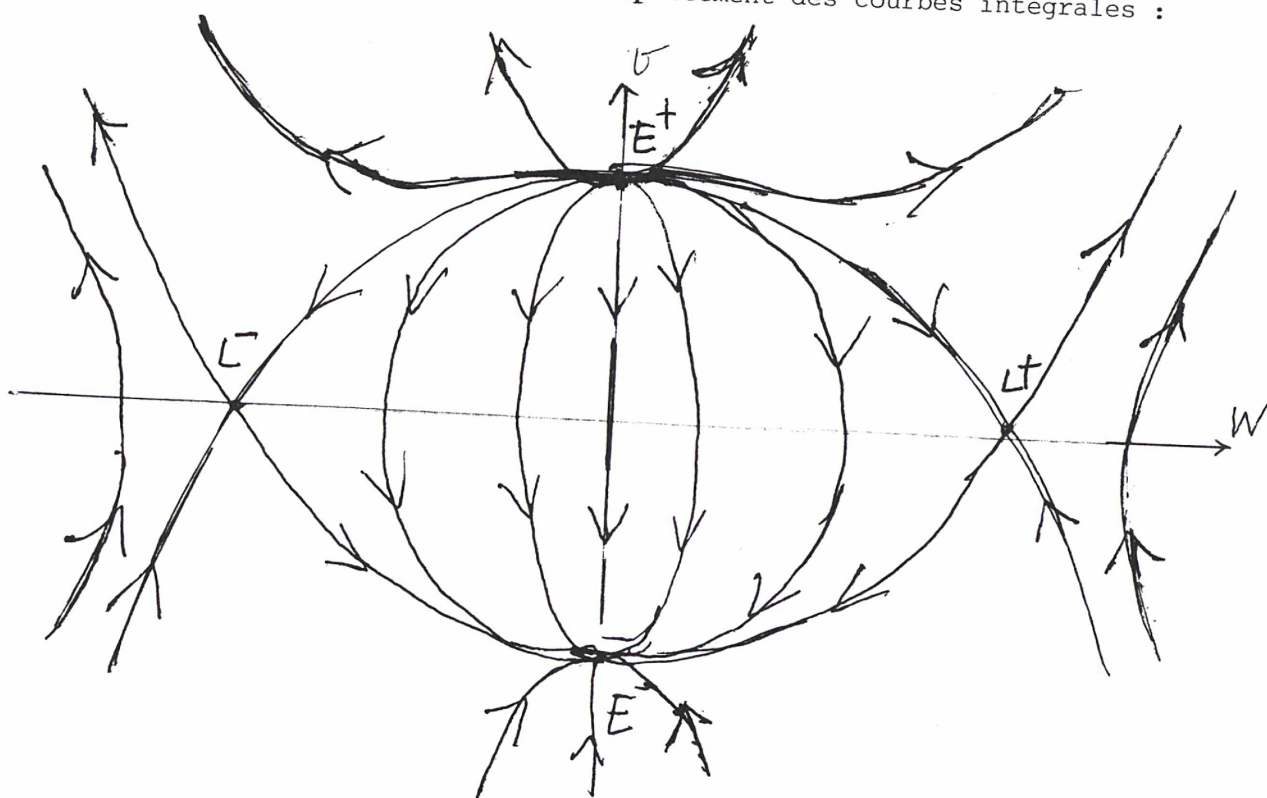
a)  $|w| \leq \sqrt{2}$  : toute solution partira pour l'infini si elle commence par une collision et aboutira à une collision si elle vient de l'infini.

b)  $|w| > \sqrt{2}$  : toute solution vient de l'infini et part pour l'infini.

3°)  $\alpha > 2$  : comme dans le premier cas désignons d'abord le sens des flèches, sachant que dans ce cas on a  $w > 0$  dans les quadrants  $Q_1, Q_{III}$  et  $v > 0$  à l'extérieur de l'ellipse, d'où l'on trouve la figure suivante :



La figure suivante montre le comportement des courbes intégrales :



$h > 0$  : il y a des orbites qui viennent de l'infini pour partir à l'infini il y a aussi des orbites de collision ; certaines commencent par une collision en  $E^+$  et partent à l'infini, d'autres viennent de l'infini et aboutissent à une collision en  $E^-$ .

$h \leq 0$  : toute solution commence par une collision en  $E^+$  et aboutit à une collision en  $E^-$  sauf les solutions où ( $h = 0$  et  $c = 0$ ), alors dans ce cas la solution commence par une collision ou aboutit à une collision partant à l'infini dans l'autre direction.

Notons que  $E^-$  et  $E^+$  sont des noeuds tandis que  $L^-$  et  $L^+$  sont des cols. On aurait abouti à ce résultat en considérant les valeurs propres. Prenons, par exemple, les valeurs propres de  $M$  en  $E^+$ , elles sont réelles et toutes les deux sont positives, le point  $E^+$  est par conséquent un noeud instable (noeud répulsif), la pente de la tangente commune des orbites passant par

$(E^+)$  est donnée par :

$$m_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{a'}{\lambda_1 - b'} = 0 \quad ; \quad \lambda_1 = - (1 - \frac{\alpha}{2})\sqrt{2} > 0$$

ce qui correspond à la parallèle de l'axe des  $w$  passant par  $E^+$ .

La pente de l'intégrale singulière est donnée par :

$$m_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{a'}{\lambda_2 - b'} = \infty \quad ; \quad \lambda_2 = \alpha\sqrt{2} > 0$$

de même pour  $E^-$  sauf qu'il est un noeud stable (noeud attractif) où les valeurs propres sont réelles et toutes les deux sont négatives.

Pour terminer, notons que suivant le sens de parcours le point  $E^+$  s'appelle "source" et le point  $E^-$  s'appelle "puits";

notons encore que la fonction  $\Lambda$  donnée par (2.16) est indéterminée en  $E^-$  et  $E^+$  (elle est de la forme  $\frac{0}{0}$ ) et est nulle pour les points de l'intervalle  $(E^-, E^+)$  et devient infinie sur  $N - \{E^-, E^+\}$ .

CHAPITRE III

LES CHANGEMENTS DE VARIABLES DE MAC GEHEE ET DE SIEGEL

Madame Losco [5] a groupé ces deux changements de variables sous la remarque suivante :

Soit  $U(q)$  une fonction homogène de degré  $-\alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

Considérons le problème du lagrangien  $L$  et du hamiltonien  $H$  :

$$\begin{aligned} L(\dot{q}, q) &= \frac{1}{2} \dot{q}^2 + U(q) & ; & & q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \\ H(p, q) &= \frac{1}{2} p^2 - U(q) & ; & & p_i, q_i \text{ sont conjuguées l'une de l'autre} \end{aligned}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$(3.1) \quad \ddot{q} = \partial U / \partial q$$

ou :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \partial U / \partial q = U'_q \end{aligned} \right.$$

Considérons la transformation :

$$g_\rho : (p, q) \rightarrow (P, Q)$$

définie par :

$$(3.3) \quad q = \rho Q \quad p = \rho^{-\alpha/2} P$$

où  $\rho$  est une fonction positive arbitraire de  $(t, q)$  et non pas un paramètre.

Dérivons (3.3) par rapport à  $t$ , il vient :

$$\dot{q} = \dot{\rho} Q + \rho \dot{Q} = \dot{\rho}^{-\alpha/2} P$$

$$\dot{p} = -\frac{\alpha}{2} \rho^{-(\alpha/2)-1} \dot{\rho} P + \rho^{-\alpha/2} \dot{P} = \rho^{-\alpha-1} U'_Q$$

Moyennant (3.3) les équations du mouvement s'écrivent dans l'espace  $(P, Q)$  sous la forme :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^{1+\alpha/2} \dot{Q} = -\rho^{-1} \rho^{1+\alpha/2} \dot{\rho} Q + P \\ \rho^{1+\alpha/2} \dot{P} = \frac{\alpha}{2} \rho^{-1} \rho^{1+\alpha/2} \dot{\rho} P + U'_{,Q} \end{array} \right.$$

On constate que le système (3.4) possède une singularité pour  $\rho = 0$ . Grâce au changement de variable temporelle définie par :

$$(3.5) \quad dt = \rho^{1+\alpha/2} d\tau$$

la singularité disparaît et le système (3.4) devient :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q' = P - \lambda Q \\ P' = \frac{\alpha}{2} \lambda P + U'_{,Q} \\ \lambda = \rho^{-1} \rho' \\ ( )' = \frac{d}{d\tau} ( ) \text{ la dérivation par rapport à } \tau. \end{array} \right.$$

Ecrivons l'intégrale de l'énergie dans l'espace  $(p, q)$  :

$$(3.7) \quad p^2 = 2U(q) + 2h$$

or  $U(q) = U(\rho Q) = \rho^{-\alpha} U(Q)$  car  $U(q)$  est supposée homogène de degré  $-\alpha$ .

L'intégrale (3.7) devient alors dans l'espace  $(P, Q)$  :

$$2h = \rho^{-\alpha} P^2 - 2\rho^{-\alpha} U(Q) = \rho^{-\alpha} [P^2 - 2U(Q)] = \rho^{-\alpha} (2H)$$

donc :

$$(3.8) \quad h(p, q) = \rho^{-\alpha} H(P, Q)$$

Ceci nous montre que dans l'espace  $(P, Q)$  nous n'avons plus l'intégrale première de l'énergie car  $\rho$  varie avec le temps, on perd donc l'intégrale de l'énergie lorsque l'on étudie le mouvement dans l'espace  $(P, Q)$ , on perd également l'intégrale du moment cinétique :

$$\vec{c} = \vec{\Sigma}_q \wedge \vec{p} = \Sigma \rho \vec{Q} \wedge \rho^{-\alpha/2} \vec{P} = \rho^{1-\alpha/2} \vec{\Sigma}_Q \wedge \vec{P}$$

donc :

$$(3.9) \quad \vec{c} = \rho^{1-\alpha/2} \vec{C}$$

soit  $c = |\vec{c}|$  le module de  $\vec{c}$  :

$$c^\alpha h^{1-\alpha/2} = \rho^{\alpha(1-\alpha/2)} c^\alpha \rho^{-\alpha(1-\alpha/2)} H^{1-\alpha/2}$$

On a donc :

$$c^\alpha h^{1-\alpha/2} = C^\alpha H^{1-\alpha/2}$$

et la fonction  $\Lambda = C^\alpha H^{1-\alpha/2}$  est par conséquent une intégrale première du mouvement dans l'espace  $(P, Q)$ .

Revenons à (3.8) :

$$H(P, Q) = \rho^\alpha h(p, q) \quad ; \quad h = \text{const.}$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \alpha \rho^{\alpha-1} \frac{d\rho}{d\tau} h = \alpha \rho^{-1} \rho^1 \rho^\alpha h = \alpha \lambda H$$

$$dH/H = \alpha \lambda d\tau \quad \text{d'où :} \quad H = H_0 e^{\int \alpha \lambda d\tau}$$

donc si  $H_0 = 0$  alors  $H \equiv 0$  .

Par conséquent  $H = 0$  est une variété invariante, indépendante de  $h$  et le système (3.6) détermine le flot sur cette variété. Comme les solutions d'énergie nulle dans l'espace  $(p, q)$  sont sur la surface d'équation  $h = 0$ , alors les solutions correspondantes dans l'espace  $(P, Q)$  seront sur la surface d'équation  $H = 0$ , car d'après (3.8) on a :

$$h = 0 \iff H = 0$$

la fonction  $\rho$ , et par conséquent la fonction  $\lambda$ , pourront être déterminées par le choix d'une liaison entre les variables  $P$  et  $Q$  du type  $F(P, Q) = 1$ .

Premier choix : On obtient le changement de variable de Mc Gehee pour

$$F(P, Q) \equiv |Q|^2 = 1$$

On se place donc sur la surface  $Q^2 = 1$

Or  $\vec{q} = \rho \vec{Q}$  donc  $|\vec{q}|^2 = \rho^2 |\vec{Q}|^2$

si  $|Q|^2 = 1$ , alors  $|\vec{q}|^2 = \rho^2$  et  $\rho = |\vec{q}| > 0$  .

et si  $\rho = |\vec{q}|$ , alors  $\rho^2 = |\vec{q}|^2 |\vec{Q}|^2$  et  $|\vec{Q}|^2 = 1$ .

Par conséquent :

$$(3.10) \quad |\vec{Q}|^2 = 1 \iff \rho = |\vec{q}|$$

d'autre part  $|\vec{Q}|^2 = 1$  implique  $\vec{Q} \cdot \vec{Q}' = 0$  d'où  $\vec{Q} \cdot (\vec{P} - \lambda \vec{Q}) = 0$  ou encore  $\vec{Q} \cdot \vec{P} = \lambda$ , donc le système (3.6) s'écrit sous la forme :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{Q}' = \vec{P} - \lambda \vec{Q} \\ \vec{P}' = \vec{U}'_{\vec{Q}} + \frac{\alpha}{2} \lambda \vec{P} \\ \lambda = \vec{P} \cdot \vec{Q} \end{array} \right.$$

c'est un système différentiel d'ordre  $(2n - 1)$ , on dira qu'on a réduit par homothétie [Madame Losco] ou (3.11) permettra d'étudier la trajectoire à une homothétie près.

Deuxième choix : On obtient le changement de variable de Siegel pour

$$(3.12) \quad \rho^{1+\alpha/2} = t$$

d'où en posant  $s$  au lieu de  $\tau$  dans (3.5) :

$$dt = t ds \quad \text{ou} \quad t = e^s$$

Posons :

$$\frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

le changement (3.12) s'écrit donc :

$$\rho(t) = t^\gamma \quad \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

Revenons au système (3.1) avec  $\vec{q} = (x, 0, \dots, 0)$  c'est-à-dire nous considérons le mouvement rectiligne sur l'axe des  $x$ , d'autre part considérons la solution de (3.1) pour  $h = 0$ , alors le théorème de l'énergie s'écrit sous la forme :  $\dot{q}^2 = 2U(q)$ , soit :

$$(3.13) \quad \dot{x}^2 = 2M|x|^{-\alpha}$$

où :  $U(q) = U(x, 0, \dots, 0) = M|x|^{-\alpha}$

Pour  $x > 0$ , la solution de (3.1) s'écrit :

$$x(t) = kt^\gamma \quad 0 < t < \infty$$

En substituant dans (3.13) on trouve en effet :

$$k^2 \gamma^2 t^{2\gamma-2} = 2Mk^{-\alpha} t^{-\alpha\gamma}$$

puisque  $\gamma = \frac{2}{2+\alpha}$  et il reste  $k^{2+\alpha} = 2M/\gamma^2$  c'est-à-dire :

$$k = (\sqrt{2M} \frac{1}{\gamma})^\gamma$$

En résumé : soit la solution d'éjection :

$$(3.14) \quad \left\| \begin{array}{l} q_1 = x > 0 \quad q_2 = \dots = q_n = 0 \\ x = kt^\gamma \quad k = (\sqrt{2M} \frac{1}{\gamma})^\gamma \quad \text{et} \quad \gamma = 2/(2+\alpha) \end{array} \right.$$

Le changement de variables :

$$(3.15) \quad \left\| \begin{array}{l} q = \rho(t)Q \\ p = \rho^{\alpha/2}(t)P \\ \rho(t) = t^\gamma \\ dt = tds \iff t = e^s \end{array} \right.$$

transforme le système (3.1) en (3.6) avec  $\lambda = \gamma$ , c'est-à-dire :

$$(3.16) \quad \left\| \begin{array}{l} dQ/ds = P - \gamma Q \\ dP/ds = U'_Q + \frac{\alpha}{2} \gamma P = U'_Q + (1 - \gamma)P \end{array} \right.$$

qui est celui utilisé par Siegel pour la collision triple [6].

Or  $Q = t^{-\gamma}q$ , la solution d'éjection  $q = (kt^\gamma, 0, \dots, 0)$  se transforme en  $Q = (k, 0, \dots, 0)$ .

D'autre part :

$$U'_Q = t^{2-\gamma} U'_q = t^{2-\gamma} \ddot{q}$$

mais pour  $q_1 = kt^\gamma$  on a  $\ddot{q}_1 = k\gamma(\gamma - 1)t^{\gamma-2}$  d'où :

$$(3.17) \quad U'_{Q_1} = k\gamma(\gamma - 1) \quad k = Q_1$$

Les positions d'équilibre du système (3.16) :

Pour les trouver, il suffit de résoudre simultanément le système suivant :

$$dQ/ds = 0 \quad \text{et} \quad dP/ds = 0$$

par conséquent, il faut trouver les solutions communes des équations :

$$P - \gamma Q = 0$$

$$U'_Q + (1 - \gamma)P = 0$$



la première donne  $P = \gamma Q$  d'où l'équation :

$$(3.18) \quad U'_Q = \gamma(\gamma - 1)Q$$

qui admet la solution particulière :

$$(3.19) \quad \tilde{Q}_1 = Q_1 = k \quad Q_2 = \dots = Q_n = 0$$

comme on peut le vérifier et le prévoir à priori, il suffit de comparer entre (3.17) et (3.18).

L'intérêt du système (3.16) :

Posons  $Q = \tilde{Q} + \xi$  et  $P = \tilde{P} + \eta$  où  $(\tilde{Q}, \tilde{P})$  désigne une position d'équilibre.

Ecrivons donc les équations aux variations correspondantes :

$$(3.20) \quad \begin{cases} d\xi/ds = -\gamma\xi + \eta \\ d\eta/ds = U''_{\tilde{Q}}\xi + (1 - \gamma)\eta = \gamma(\gamma - 1)\xi + (1 - \gamma)\eta \end{cases}$$

Considérons une famille de solutions particulières :

$$(3.21) \quad \xi = A_i e^{m_i s}$$

avec  $m_i > 0$ , de sorte que  $(\xi \rightarrow 0$  pour  $s \rightarrow -\infty)$  ou, ce qui est équivalent,  $(\xi \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow 0^+)$ .

A cette famille correspond une solution complète du système (3.1) du type :

$$(3.22) \quad q = t^\gamma F(A_1 e^{m_1 s}, A_2 e^{m_2 s}, \dots, A_k e^{m_k s})$$

où  $m_1, \dots, m_k$  désignent les solutions positives des exposants caractéristiques de la matrice associée aux équations aux variations.

On obtient ainsi toutes les solutions qui aboutissent pour  $t \rightarrow 0^+$  à une collision : conséquence du théorème de Liapounov (1.5).

Application au cas de Mc Gehee : ( $n = 2$ )

Nous allons appliquer ce qui précède au cas de Mc Gehee traité au 2e chapitre. Nous avons donc :

$$\vec{q} = (x, y) \quad \vec{Q} = (X, Y) \quad U(q) = |\vec{q}|^{-\alpha} \quad \alpha > 0$$

où  $M = 1$  (pour simplifier).

Eliminons d'abord la variable  $P$  du système (3.16) :

la première équation donne :

$$P = \frac{dQ}{ds} + \gamma Q$$

d'où :

$$\frac{dP}{ds} = \frac{d^2Q}{ds^2} + \gamma \frac{dQ}{ds} = U'_Q + (1 - \gamma) \left( \frac{dQ}{ds} + \gamma Q \right)$$

en tenant compte de la deuxième équation de (3.16).

On obtient ainsi l'équation différentielle en  $Q$  :

(3.23)

$$\frac{d^2Q}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{dQ}{ds} + \gamma(1 - \gamma)Q + U'_Q$$

cas particulier : Dans le cas particulier considéré, l'équation (3.23) se traduit comme la suite :

$$\vec{Q} = (X, Y) \quad U(X, Y) = (X^2 + Y^2)^{-\alpha/2}$$

ceci donne, en posant :

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad U'_X = P(X, Y) \quad U'_Y = Q(X, Y)$$

les équations différentielles en  $X$  et  $Y$  :

$$(3.24) \quad \begin{cases} d^2X/ds^2 = (1 - 2\gamma) \frac{dX}{ds} + \gamma(1 - \gamma)X + P(X, Y) \\ d^2Y/ds^2 = (1 - 2\gamma) \frac{dY}{ds} + \gamma(1 - \gamma)Y + Q(X, Y) \\ P(X, Y) = U'_X = -\alpha XR^{-(\alpha+2)}, Q(X, Y) = U'_Y = -\alpha YR^{-(\alpha+2)} \end{cases}$$

Les solutions d'équilibre du système (3.24) :

Pour les trouver, on annule  $dX/ds$ ,  $dY/ds$ ,  $d^2X/ds^2$ ,  $d^2Y/ds^2$  dans (3.24), il vient :

$$\begin{cases} \gamma(1 - \gamma)X - \alpha XR^{-(\alpha+2)} = 0 \\ \gamma(1 - \gamma)Y - \alpha YR^{-(\alpha+2)} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\gamma(1 - \gamma) - \alpha R^{-(\alpha+2)} = 0$$

Or d'après (3.14) on a  $k = (2/\gamma^2)^{\gamma/2}$  et  $\alpha + 2 = 2/\gamma$ , donc :

$$R^{\alpha+2} = \frac{\alpha}{\gamma(1-\gamma)} = \frac{2}{\gamma^2} = k^{\alpha+2}$$

par conséquent, les solutions d'équilibre sont tous les points du cercle :

$$R = (\sqrt{2}/\gamma) \quad Y = k$$

Nous allons donner dans la suite le formulaire des dérivées partielles de  $U = R^{-\alpha}$  ;  $R^2 = X^2 + Y^2$ , ainsi nous allons calculer les valeurs de ces dérivées le long d'une solution particulière considérée :

$$w = (k, 0)$$

Rappelons que  $P(X, Y) = U'_X$  et  $Q(X, Y) = U'_Y$

$P(X, Y) = -\alpha X R^{-(\alpha+2)}$	$Q(X, Y) = -\alpha Y R^{-(\alpha+2)}$
$\frac{\partial P}{\partial X} = \alpha [(\alpha+1)X^2 - Y^2] R^{-(\alpha+4)}$	$\frac{\partial Q}{\partial X} = \alpha(\alpha+2)XYR^{-(\alpha+4)}$
$\frac{\partial P}{\partial Y} = \alpha(\alpha+2)XYR^{-(\alpha+4)}$	$\frac{\partial Q}{\partial Y} = \alpha [-X^2 + (\alpha+1)Y^2] R^{-(\alpha+4)}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \alpha(\alpha+2)X [-(\alpha+1)X^2 + 3Y^2] R^{-(\alpha+6)}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = -\alpha(\alpha+2)Y [(\alpha+3)X^2 - Y^2] R^{-(\alpha+6)}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} = -\alpha(\alpha+2)Y [(\alpha+3)X^2 - Y^2] R^{-(\alpha+6)}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial Y} = \alpha(\alpha+2)X [X^2 - (\alpha+3)Y^2] R^{-(\alpha+6)}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \alpha(\alpha+2)X [X^2 - (\alpha+3)Y^2] R^{-(\alpha+6)}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} = \alpha(\alpha+2)Y [3X^2 - (\alpha+1)Y^2] R^{-(\alpha+6)}$
Notons que : $\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial X}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial Y}$	

(1)

$w = (k, 0) \quad \alpha = \frac{2(1-\gamma)}{\gamma} \quad \alpha + 1 = \frac{2-\gamma}{\gamma} \quad \alpha + 2 = \frac{2}{\gamma} \quad k = \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma}\right)\gamma \quad k^{\alpha+2} = k^{2/\gamma} = \frac{2}{\gamma^2}$	
$\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_w = \alpha(\alpha+1)k^{-(\alpha+2)} = (1-\gamma)(2-\gamma)$	$\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_w = 0$
$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_w = 0$	$\left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_w = -\alpha k^{-(\alpha+2)} = -\gamma(1-\gamma)$
$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\right)_w = -\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)k^{-(\alpha+3)} = \frac{-2(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k}$	$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}\right)_w = 0$
$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y}\right)_w = 0$	$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial Y}\right)_w = \alpha(\alpha+2)k^{-(\alpha+3)} = \frac{2(1-\gamma)}{k}$
$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}\right)_w = \alpha(\alpha+2)k^{-(\alpha+3)} = \frac{2(1-\gamma)}{k}$	$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}\right)_w = 0$

(2)

Equations aux variations de (3.24) :

Considérons la solution particulière d'équilibre  $w(k, 0)$  et écrivons au voisinage de cette solution :

$$X = k + \xi \quad Y = \eta$$

d'où :

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\xi}{ds} + [\gamma(1 - \gamma) + \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_w] \xi + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_w \eta$$

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\eta}{ds} + \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_w \xi + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_w + \gamma(1 - \gamma)\right] \eta$$

et d'après le tableau (2) on écrit :

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\eta}{ds} + [\gamma(1 - \gamma) + (1 - \gamma)(2 - \gamma)] \xi$$

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\eta}{ds} + [-\gamma(1 - \gamma) + \gamma(1 - \gamma)] \eta$$

d'où :

(3.25)

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\xi}{ds} + 2(1 - \gamma)\xi$$

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = (1 - 2\gamma) \frac{d\eta}{ds}$$

Pour trouver les solutions du système initial, nous allons chercher des solutions de (3.25) du type :  $\xi = Ae^{m\rho}$ ,  $\eta = Be^{m\rho}$  avec  $m > 0$ .

Pour l'équation en  $\xi$  :  $m$  vérifie l'équation :

$$m^2 - (1 - 2\gamma)m - 2(1 - \gamma) = 0$$

qui admet les deux racines :  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = 2(1 - \gamma)$ .

Or  $0 < \gamma < 1$  par définition ( $\gamma = \frac{2}{\alpha + 2}$  ;  $\alpha > 0$ ), la seule racine convenable est  $m = m_2 = 2(1 - \gamma) > 0$ , elle fournit :

$$x = t^Y X = t^Y (k + \xi + \dots) = t^Y (k + Ae^{2(1-\gamma)\rho} + \dots)$$

c'est-à-dire :

$$(3.26) \quad x = t^Y X = t^Y (k + At^{2(1-\gamma)} + \dots) ; \quad k = (\sqrt{2}/\gamma)^Y$$

Pour l'équation en  $\eta$  :  $m$  vérifie l'équation :

$$m^2 - (1 - 2\gamma)m = 0$$

qui admet les deux racines  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1 - 2\gamma$ .

La seule racine positive est  $m_2 = 1 - 2\gamma$  à condition que  $2\gamma < 1$ , ce qui est équivalent à la condition  $\alpha > 2$ , et dans ce cas :

$$(3.27) \quad y = t^Y (Bt^{1-2\gamma} + \dots) Bt^{1-\gamma} + \dots$$

Etude générale :

Revenons au système (3.24) et écrivons les équations associées dans le cas général (1.2) :

$$(3.28) \quad \begin{cases} \xi'' = (1 - 2\gamma)\gamma' + 2(1 - \gamma)\xi - \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} \xi^2 + \frac{1-\gamma}{k} \eta^2 + \dots \\ \eta'' = (1 - 2\gamma)\eta' + \frac{2(1 - \gamma)}{k} \xi\eta + \dots, \quad ( )' \equiv \frac{d}{ds} ( ) \end{cases}$$

Nous allons distinguer deux cas :

1°)  $\alpha < 2$  : Le système (3.28) admet au premier ordre la solution :

$$\xi = At^{2(1-\gamma)} \quad \eta = 0$$

$A$  est un paramètre.

Pour trouver les solutions d'ordre plus élevé, posons :

$$u = At^{2(1-\gamma)} = Ae^{2(1-\gamma)s}$$

d'où :

$$u' = 2(1-\gamma)u \quad \text{et} \quad u'' = 4(1-\gamma)^2u$$

Cherchons une solution générale de la forme :

$$\xi = u + a_1u^2 + a_2u^3 + \dots$$

$$\eta = b_1u^2 + b_2u^3 + \dots$$

donc :

$$\xi' = 2(1-\gamma)u + 4(1-\gamma)a_1u^2 + 6(1-\gamma)a_2u^3 + \dots$$

$$\eta' = 4(1-\gamma)b_1u^2 + 6(1-\gamma)b_2u^3 + \dots$$

$$\xi'' = 4(1-\gamma)^2u + 16(1-\gamma)^2a_1u^2 + 36(1-\gamma)^2a_2u^3 + \dots$$

$$\eta'' = 16(1-\gamma)^2b_1u^2 + 36(1-\gamma)^2b_2u^3 + \dots$$

Portons  $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta''$  dans (3.28), il vient :

$$4(1-\gamma)^2u + 16(1-\gamma)^2a_1u^2 + 36(1-\gamma)^2a_2u^3 + \dots \equiv 2(1-\gamma)(u + a_1u^2 + a_2u^3 + \dots) +$$

$$+ (1-2\gamma) \left[ 2(1-\gamma)u + 4(1-\gamma)a_1u^2 + 6(1-\gamma)a_2u^3 + \dots \right] - \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} (u^2 + 2a_1u^3 + \dots) +$$

$$+ 16(1-\gamma)^2b_1u^2 + 36(1-\gamma)^2b_2u^3 + \dots \equiv (1-2\gamma) \left[ 4(1-\gamma)b_1u^2 + 6(1-\gamma)b_2u^3 + \dots \right] +$$

$$+ \frac{2(1-\gamma)}{k} b_1u^3 + \dots$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} 16(1-\gamma)^2a_1 = 2(1-\gamma)a_1 + 4(1-2\gamma)(1-\gamma)a_1 - \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} \\ 36(1-\gamma)^2a_2 = 2(1-\gamma)a_2 + 6(1-2\gamma)(1-\gamma)a_2 - \frac{2(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} a_1 \\ 16(1-\gamma)^2b_1 = 4(1-2\gamma)(1-\gamma)b_1 \\ 36(1-\gamma)^2b_2 = 6(1-2\gamma)(1-\gamma)b_2 + \frac{2(1-\gamma)}{k} b_1 \end{array} \right.$$

Or  $\frac{1}{2} < \gamma < 1$  ;  $1 - \gamma \neq 0$ ,  $3 - 2\gamma \neq 0$  et par conséquent :

$$a_1 = -\frac{2 - \gamma}{2(5 - 4\gamma)\gamma k} \quad a_2 = \frac{(2 - \gamma)^2}{4(7 - 6\gamma)(5 - 4\gamma)\gamma^2 k^2}$$

$$b_1 = b_2 = 0$$

donc :

$$(3.29) \quad \xi = u - \frac{2 - \gamma}{2(5 - 4\gamma)\gamma k} u^2 + \frac{(2 - \gamma)^2}{4(7 - 6\gamma)(5 - 4\gamma)\gamma^2 k^2} u^3 + \dots$$

$$\eta = 0$$

mais  $x = k + \xi$   $y = \eta$  et  $x = t^\gamma X$   $y = t^\gamma Y$

d'où :

$$(3.30) \quad x = t^\gamma \left[ k + u - \frac{2 - \gamma}{2(5 - 4\gamma)\gamma k} u^2 + \frac{(2 - \gamma)^2}{4(7 - 6\gamma)(5 - 4\gamma)\gamma^2 k^2} u^3 + \dots \right]$$

$$y = 0$$

$$k = (\sqrt{2}/\gamma)^\gamma \quad u = At^{2(1-\gamma)} \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1$$

On a donc une famille de solutions à un paramètre du type (3.22)

d'où :

Proposition (3.1) :

Pour  $\alpha < 2$  ( $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ ), le système (3.1) avec  $n = 2$  admet une famille à un paramètre de solutions d'éjection " $r(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow 0^+$ " donnée par :

$$x(t) = t^\gamma F[At^{2(1-\gamma)}] ; F(0) = k = (\sqrt{2}/\gamma)^\gamma$$

$$y(t) = 0$$

Exemple : Prenons  $\alpha = 1$  donc  $\gamma = 2/3$

Les équations (3.24) deviennent :

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = -\frac{1}{3} \frac{dX}{ds} + \frac{2}{9} X + P(X, Y)$$

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = -\frac{1}{3} \frac{dY}{ds} + \frac{2}{9} Y + Q(X, Y)$$

et les équations aux variations (3.28) associées :

$$\xi'' = -\frac{1}{3}\xi' + \frac{2}{3}\xi + \frac{1}{3k}(-2\xi^2 + \eta^2) + \dots$$

$$\eta'' = -\frac{1}{3}\eta' + \frac{1}{3k}\eta + \dots$$

Le système linéarisé en  $\xi$  :  $\xi'' + \frac{1}{3}\xi' - \frac{2}{3}\xi = 0$  admet une seule solution d'éjection  $\xi = Ae^{2s/3} = At^{2/3}$  et l'autre sera rejetée ( $\xi = Ae^{-s} = At^{-1}$ ).

De même pour le système linéarisé en  $\eta$ , on trouve deux solutions :

$$\eta = B \quad \eta = Be^{-s/3} = Bt^{-1/3}$$

elles seront donc rejetées car on s'intéresse seulement aux solutions d'éjection.

$$\text{Posons donc : } u = Ae^{2s/3} = At^{2/3}$$

Les équations (3.29) s'écrivent :

$$\xi = u - \frac{3}{7k}u^2 + \frac{1}{7k^2}u^3 + \dots$$

$$\eta = 0$$

or :

$$u = At^{2/3} \quad k = (9/2)^{1/3} :$$

$$x(t) = t^{2/3} \left[ \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} + At^{2/3} - \frac{3}{7} \left(\frac{2}{9}\right)^{1/3} A^2 t^{4/3} + \frac{1}{7} \left(\frac{2}{9}\right)^{2/3} A^3 t^2 + \dots \right]$$

$$y(t) = 0$$

2°)  $\alpha > 2$  : Le système (3.28) tenant compte des (3.26) et (3.27) admet au premier ordre la solution :

$$\xi = At^{2(1-\gamma)} \quad \eta = Bt^{1-2\gamma} \quad A \text{ et } B \text{ sont des paramètres.}$$

Comme dans le cas précédent, posons :

$$u = At^{2(1-\gamma)} = Ae^{2(1-\gamma)s}$$

$$v = Bt^{1-2\gamma} = Be^{(1-2\gamma)s}$$

donc :

$$u' = 2(1-\gamma)u \quad u'' = 4(1-\gamma)^2 u$$

$$v' = (1-2\gamma)v \quad v'' = (1-2\gamma)^2 v$$

d'où :



$$\begin{aligned}
 \xi &= u + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots \\
 \xi' &= 2(1-\gamma)u + 4(1-\gamma)a_1 u^2 + (3-4\gamma)a_2 uv + 2(1-2\gamma)a_3 v^2 + 6(1-\gamma)a_4 u^3 + \\
 &\quad + (5-6\gamma)a_5 u^2 v + 2(2-3\gamma)a_6 uv^2 + 3(1-2\gamma)a_7 v^3 + \dots \\
 \xi'' &= 4(1-\gamma)^2 u + 16(1-\gamma)^2 a_1 u^2 + (3-4\gamma)^2 a_2 uv + 4(1-2\gamma)^2 a_3 v^2 + \\
 &\quad + 36(1-\gamma)^2 a_4 u^3 + (5-6\gamma)^2 a_5 u^2 v + 4(2-3\gamma)^2 a_6 uv^2 + 9(1-2\gamma)^2 a_7 v^3 + \dots \\
 \eta &= v + b_1 u^2 + b_2 uv + b_3 v^2 + b_4 u^3 + b_5 u^2 v + b_6 uv^2 + b_7 v^3 + \dots \\
 \eta' &= (1-2\gamma)v + 4(1-\gamma)b_1 u^2 + (3-4\gamma)b_2 uv + 2(1-2\gamma)b_3 v^2 + 6(1-\gamma)b_4 u^3 + \\
 &\quad + (5-6\gamma)b_5 u^2 v + 2(2-3\gamma)b_6 uv^2 + 3(1-2\gamma)b_7 v^3 + \dots \\
 \eta'' &= (1-2\gamma)^2 v + 16(1-\gamma)^2 b_1 u^2 + (3-4\gamma)^2 b_2 uv + 4(1-2\gamma)^2 b_3 v^2 + \\
 &\quad + 36(1-\gamma)^2 b_4 u^3 + (5-6\gamma)^2 b_5 u^2 v + 4(2-3\gamma)^2 b_6 uv^2 + 9(1-2\gamma)^2 b_7 v^3 + \dots \\
 \xi^2 &= u^2 + 2a_1 u^3 + 2a_2 u^2 v + 2a_3 uv^2 + \dots \\
 \eta\xi &= uv + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + a_1 u^2 v + a_2 uv^2 + a_3 v^3 + \dots \\
 \eta^2 &= v^2 + 2b_1 u^2 v + 2b_2 uv^2 + 2b_3 v^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Portons  $\xi, \xi', \xi'', \xi^2, \eta, \eta', \eta'', \eta^2, \xi\eta$  dans (3.28), il vient :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 16(1-\gamma)^2 a_1 \equiv 4(1-\gamma)(1-2\gamma)a_1 + 2(1-\gamma)a_1 - \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} \\
 2) \quad & (3-4\gamma)^2 a_2 \equiv (3-4\gamma)(1-2\gamma)a_2 + 2(1-\gamma)a_2 \\
 3) \quad & 4(1-2\gamma)^2 a_3 \equiv 2(1-2\gamma)^2 a_3 + 2(1-\gamma)a_3 + \frac{1-\gamma}{k} \\
 4) \quad & 36(1-\gamma)^2 a_4 \equiv 6(1-\gamma)(1-2\gamma)a_4 + 2(1-\gamma)a_4 - \frac{2(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} a_1 \\
 5) \quad & (5-6\gamma)^2 a_5 \equiv (5-6\gamma)(1-2\gamma)a_5 + 2(1-\gamma)a_5 - \frac{2(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} a_2 + \frac{1-\gamma}{k} b_1 \\
 6) \quad & 4(2-3\gamma)^2 a_6 \equiv 2(2-3\gamma)(1-2\gamma)a_6 + 2(1-\gamma)a_6 - \frac{2(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma k} a_3 + 2 \frac{1-\gamma}{k} b_2 \\
 7) \quad & 9(1-2\gamma)^2 a_7 \equiv 3(1-2\gamma)^2 a_7 + 2(1-\gamma)a_7 + \frac{2(1-\gamma)}{k} b_3 \\
 8) \quad & 16(1-\gamma)^2 b_1 \equiv 4(1-\gamma)(1-2\gamma)b_1 \\
 9) \quad & (3-4\gamma)^2 b_2 \equiv (3-4\gamma)(1-2\gamma)b_2 + \frac{2(1-\gamma)}{k} \\
 10) \quad & 4(1-2\gamma)^2 b_3 \equiv 2(1-2\gamma)^2 b_3 \\
 11) \quad & 36(1-\gamma)^2 b_4 \equiv 6(1-\gamma)(1-2\gamma)b_4 + \frac{2(1-\gamma)}{k} (a_1 + b_2) \\
 12) \quad & (5-6\gamma)^2 b_5 \equiv (5-6\gamma)(1-2\gamma)b_5 + \frac{2(1-\gamma)}{k} (a_1 + b_2) \\
 13) \quad & 4(2-3\gamma)^2 b_6 \equiv 2(2-3\gamma)(1-2\gamma)b_6 + \frac{2(1-\gamma)}{k} (a_2 + b_3) \\
 14) \quad & 9(1-2\gamma)^2 b_7 \equiv 3(1-2\gamma)^2 b_7 + \frac{2(1-\gamma)}{k} a_3
 \end{aligned}$$

Pour trouver les  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) nous allons commencer par ceux qui sont nuls et nous rappelons que nous traitons le cas  $\alpha > 2$ , ce qui est équivalent à :  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ , d'où :

$$\begin{aligned} (2) &\implies a_2 = 0 \\ (8) &\implies b_1 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (2) \\ (8) \end{aligned}} \right\} \text{ donc (5) } \implies a_5 = 0$$

$$(10) \implies b_3 = 0 \implies a_7 = 0$$

$$(11) \implies b_4 = 0 \text{ car } b_1 = 0$$

$$(13) \implies b_6 = 0 \text{ car } a_2 = b_3 = 0$$

$$(3.32) \quad \left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{-(2-\gamma)}{2(5-4\gamma)\gamma k} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{-(1-\gamma)}{2(3-4\gamma)\gamma k} \\ a_4 &= \frac{(2-\gamma)^2}{4(5-4\gamma)(7-6\gamma)\gamma^2 k^2} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{(1-\gamma)(2-3\gamma+3\gamma^2)}{2(1-2\gamma)(5-6\gamma)(3-4\gamma)\gamma^2 k^2} \\ a_7 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= \frac{1}{(3-4\gamma)k} \\ b_3 &= 0 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= \frac{-3(1-\gamma)}{2(5-6\gamma)(5-4\gamma)\gamma k^2} \\ b_6 &= 0 \\ b_7 &= \frac{-(1-\gamma)^2}{6(1-2\gamma)(3-4\gamma)\gamma k^2} \end{aligned} \right\}$$

donc :

$$\begin{aligned} \xi &= u + a_1 u^2 + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_6 u v^2 + \dots \\ \eta &= v + b_2 u v + b_5 u^2 v + b_7 v^3 + \dots \end{aligned}$$

$$(3.33) \quad \begin{aligned} x &= t^\gamma \left[ k + u - \frac{(2-\gamma)}{2(5-4\gamma)\gamma k} u^2 - \frac{1-\gamma}{2(3-4\gamma)\gamma k} v^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2-\gamma)}{4(5-4\gamma)(7-6\gamma)\gamma^2 k^2} u^3 + \frac{(1-\gamma)(2-3\gamma+3\gamma^2)}{2(1-2\gamma)(3-4\gamma)(5-6\gamma)\gamma^2 k^2} uv^2 + \dots \right] \\ y &= t^\gamma \left[ v + \frac{1}{(3-4\gamma)k} uv - \frac{3(1-\gamma)}{2(5-6\gamma)(5-4\gamma)\gamma k^2} u^2 v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\gamma)^2}{6(1-2\gamma)^2(3-4\gamma)\gamma k^2} v^3 + \dots \right] \\ k &= (\sqrt{2}/\gamma)^\gamma ; 0 < \gamma < \frac{1}{2} \quad u = At^{2(1-\gamma)} \quad v = Bt^{1-2\gamma} \end{aligned}$$

soient :

$$F(u,v) = k + u + a_1 u^2 + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_6 uv^2 + \dots$$

$$G(u,v) = 1 + b_2 u + b_5 u^2 + b_7 v^2 + \dots$$

donc :

$$x = t^\gamma F(u,v) \quad y = Bt^{1-\gamma} G(u,v)$$

On constate que  $x$  est une fonction paire de  $B$ , tandis que  $y$  est une fonction impaire de  $B$ , de plus  $F(0,0) = k$  et  $G(0,0) = 1$ , d'où :

Proposition 3.2 :

Pour  $\alpha > 2$  ( $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ), le système (3.1) avec  $n = 2$

admet une famille à deux paramètres de solutions

d'éjections ( $\lim_{t \rightarrow 0^+} r(t) = 0$ ) :

$$x = t^\gamma F [At^{2(1-\gamma)}, Bt^{(1-2\gamma)}] ; F(0,0) = k = (\sqrt{2}/\gamma)^\gamma$$

$$y = Bt^{1-\gamma} G [At^{2(1-\gamma)}, Bt^{(1-2\gamma)}] ; G(0,0) = 1$$

Exemple : Prenons  $\alpha = 4$  donc  $\gamma = 1/3$

Les équations (3.24) deviennent :

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = \frac{1}{3} \frac{dX}{ds} + \frac{2}{9} X + P(X,Y)$$

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = \frac{1}{3} \frac{dY}{ds} + \frac{2}{9} Y + Q(X,Y)$$

et les équations aux variations (3.28) s'écrivent :

$$\xi'' = \frac{1}{3} \xi' + \frac{4}{3} \xi + \frac{2}{3k} (-5\xi^2 + \eta^2)$$

$$\eta'' = \frac{1}{3} \eta' + \frac{4}{3k} \xi\eta + \dots$$

Le système linéarisé en  $\xi$  :  $\xi'' - \frac{1}{3} \xi' - \frac{4}{3} \xi = 0$  d'où l'équation caractéristique  $3m^2 - m - 4 = 0$  qui admet la racine  $m = 4/3 > 0$ , l'autre racine est rejetée  $m = -1 < 0$ .

De même on trouve deux racines de l'équation associée au système linéarisé en  $\eta$  :  $m = 0$  (rejetée) et  $m = 1/3 > 0$ .

Posons donc :

$$u = Ae^{4s/3} = At^{4/3}$$

$$v = Be^{s/3} = Bt^{1/3}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{15}{22k} & a_3 &= \frac{3}{5k} & a_4 &= \frac{5}{88k} & a_6 &= \frac{12}{5k^2} \\ b_2 &= \frac{3}{5k} & b_5 &= -\frac{3}{11k^2} & b_7 &= -\frac{6}{5k^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \xi &= u - \frac{15}{22k} u^2 - \frac{3}{5k} v^2 + \frac{5}{88k} u^3 + \frac{12}{5k^2} uv^2 + \dots \\ \eta &= v + \frac{3}{5k} uv - \frac{3}{11k^2} u^2v - \frac{6}{5k^2} v^3 + \dots \end{aligned}$$

et

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= t^{1/3} \left[ k + At^{4/3} - \frac{15}{22k} A^2 t^{8/3} - \frac{3}{5k} B^2 t^{2/3} + \frac{5}{88k} A^3 t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{5k^2} AB^2 t^2 + \dots \right] \\ y &= Bt^{2/3} \left[ 1 + \frac{3}{5k} At^{4/3} - \frac{3}{11k^2} A^2 t^{8/3} - \frac{6}{5k^2} B^2 t^{2/3} + \dots \right] \end{aligned} \right.$$

avec :

$$k = \sqrt[3]{18}$$

Exemple : Etudions le cas où  $\alpha = 2$ , c'est-à-dire  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Les équations (3.4) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{ds^2} &= \frac{1}{2} X + P(X, Y) \\ \frac{d^2Y}{ds^2} &= \frac{1}{2} Y + Q(X, Y) \end{aligned}$$

et les équations aux variations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \xi'' &= \xi - \frac{3}{2k} \xi^2 + \frac{1}{2k} \eta^2 + \dots \\ \eta'' &= \frac{1}{k} \xi\eta + \dots \end{aligned}$$

Pour le système linéarisé  $\xi'' = \xi$  l'équation  $m^2 - 1 = 0$  admet une seule racine strictement positive  $m = 1$ .

Pour le système linéarisé  $\eta'' = 0$  l'équation  $m^2 = 0$  n'a aucune racine strictement positive.

On a donc pour le système linéarisé une famille de solutions

$$\xi = Ae^s \quad \eta = 0$$

par conséquent il y a un seul paramètre  $u = Ae^s = At$ .

Cherchons une solution du système complet :

$$\xi = u + a_1 u^2 + a_2 u^3 + \dots$$

$$\xi' = u + 2a_1 u^2 + 3a_2 u^3 + \dots$$

$$\xi'' = u + 4a_1 u^2 + 9a_2 u^3 + \dots$$

$$\eta = b_1 u^2 + b_2 u^3 + \dots$$

$$\eta' = 2b_1 u^2 + 3b_2 u^3 + \dots$$

$$\eta'' = 4b_1 u^2 + 9b_2 u^3 + \dots$$

$$\xi^2 = u^2 + 2a_1 u^3 + \dots$$

$$\eta^2 = b_1^2 u^4 + \dots$$

$$\xi\eta = b_1 u^3 + \dots$$

donc :

$$u + 4a_1 u^2 + 9a_2 u^3 + \dots = u + a_1 u^2 + a_2 u^3 - \frac{3}{2k}(u^2 + 2a_1 u^3) + \dots$$

$$4b_1 u^2 + 9b_2 u^3 + \dots = \frac{1}{2k} b_1 u^3$$

$$4a_1 = a_1 - \frac{3}{2k} \implies a_1 = -\frac{1}{2k}$$

$$9a_2 = a_2 - \frac{3}{k} a_1 \implies a_2 = \frac{3}{16k^2}$$

$$4b_1 = 0 \implies b_1 = 0$$

$$9b_2 = \frac{1}{2k} b_1 \implies b_2 = 0$$

d'où :

$$\xi = u - \frac{1}{2k} u^2 + \frac{3}{16k^2} u^3 + \dots$$

$$\eta = 0$$

or

$$k = \sqrt[4]{8} \quad u = At$$

$$x(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt[4]{8} + At + \frac{1}{2\sqrt[4]{8}} A^2 t^2 + \frac{3}{32\sqrt[4]{2}} A^3 t^3 + \dots \right]$$

$$y(t) = 0$$

Une remarque sur h et c du mouvement voisin :

Soient :  $u = At^{2(1-\gamma)} \quad v = Bt^{1-2\gamma}$

d'où  $x = t^\gamma F(u, v) \quad y = Bt^{1-\gamma} G(u, v)$

où F et G sont séries entières en u et v

$$\frac{dx}{dt} = \gamma t^{\gamma-1} F + t^\gamma \frac{dF}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = B(1-\gamma)t^{-\gamma} G + Bt^{1-\gamma} \frac{dG}{dt}$$

donc on vérifie que :

$$\frac{dx}{dt} t^{\gamma-1} \phi(u, v)$$

$$\frac{dy}{dt} = t^{\gamma-1} \psi(u, v)$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont également des séries entières en u et v.

D'autre part :

$$h = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - r^{-\alpha}$$

$$c = x\dot{y} - y\dot{x}$$

h et c sont constants au cours du mouvement, donc il existe deux fonctions H et  $\Gamma$  telles que :

$$h = H(A, B)$$

$$c = \Gamma(A, B)$$

On cherche d'abord le développement des fonctions H et  $\Gamma$  et pour cela on cherche :

$$h = H(0, 0) + A \frac{\partial H}{\partial A} + B \frac{\partial H}{\partial B} + \dots = \delta h$$

$$c = (0, 0) + A \frac{\partial \Gamma}{\partial A} + B \frac{\partial \Gamma}{\partial B} + \dots = \delta c$$

où  $\delta h$  et  $\delta c$  désignent les valeurs que prennent h et c pour le mouvement voisin donne par les équations aux variations :

$$x = t^\gamma [k + At^{2(1-\gamma)} + \dots]$$

$$y = B^{1-\gamma} [1 + \dots]$$

en négligeant les points de suspension.

Posons :

$$x = At^{2(1-\gamma)}t^\gamma = At^{2-\gamma}$$

$$y = Bt^{1-\gamma}$$

avec :

$$x = kt^\gamma \quad y = 0$$

Calcul de  $\delta h$  :

$$h = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{r^\alpha}$$

$$\begin{aligned} \delta h &= \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - \alpha r^{-\alpha-1}\delta r \\ &= \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - \alpha r^{-\alpha-1}(r^{-1}x\delta x + r^{-1}y\delta y) \\ &= \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - \alpha r^{-\alpha-2}(x\delta x + y\delta y) \end{aligned}$$

avec :

$$x = kt^\gamma \text{ et } y = 0 \text{ par conséquent :}$$

$$\dot{x} = k\gamma t^{\gamma-1} \text{ et } \dot{y} = 0$$

or :

$$R_0 = k, \quad k^{-(\alpha+2)} = \frac{\gamma^2}{2}, \quad r_0 = t^\gamma R_0, \quad r_0^{-(\alpha+2)} = \frac{\gamma^2}{2t^2}$$

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x) = A(2-\gamma)t^{1-\gamma}$$

$$\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}(\delta y) = B(1-\gamma)t^{-\gamma}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta h &= \gamma kt^{\gamma-1}A(2-\gamma)t^{1-\gamma} - \alpha \frac{\gamma^2}{2t^2}(kt^\gamma At^{2-\gamma}) \\ &= kA\gamma(2-\gamma - \frac{\alpha\gamma}{2}) \\ &= kA\gamma \end{aligned}$$

Calcul de  $\delta c$  :

$$c = x\dot{y} - y\dot{x}$$

$$\begin{aligned} \delta c &= x\delta\dot{y} + \dot{y}\delta x - y\delta\dot{x} - \dot{x}\delta y \\ &= k_0 t^\gamma B(1-\gamma)t^{-\gamma} - k\gamma t^{\gamma-1} Bt^{1-\gamma} \\ &= kB(1-2\gamma) \end{aligned}$$

d'où les formules :

$$\delta h = kA\gamma$$

$$\delta c = kB(1-2\gamma)$$

Conclusion : Méthode de Siegel.

Considérons les équations du mouvement :

$$\ddot{x} = \partial U / \partial x \quad \ddot{y} = \partial U / \partial y$$

avec :

$$U = r^{-\alpha} ; \alpha > 0$$

On cherche une solution tendant vers  $(x = 0, y = 0)$  lorsque  $t \rightarrow 0$

1°)  $h = 0, c = 0$  : cela revient à chercher une solution

$$\ddot{x} = \partial U / \partial x \quad \dot{x}^2 / 2 = U(x)$$

$$y = 0 \quad x > 0 \text{ (pour simplifier)}$$

2°) On fait le changement :

$$x = t^\gamma X \quad y = t^\gamma Y \quad dt = t ds$$

$$t = e^s \text{ donc } t \rightarrow 0 \iff s \rightarrow -\infty$$

à priori il existe une solution  $X = k, Y = 0$  lorsque  $s \rightarrow -\infty$ , c'est un point d'équilibre instable (col)

$$X = k + \xi \quad Y = \eta$$

On cherche une solution de la forme :

$$\xi = A e^{m_1 s} = u$$

$$\eta = B e^{m_2 s} = v$$

la solution complète

$$\xi = F(u, v) = u + \phi_2(u, v) + \phi_3(u, v) + \dots$$

$$\eta = G(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots$$

$\phi_k$  les termes de degré  $k$  en  $u$  et  $v$ .

Cette méthode nous a conduit à la proposition (3.1) pour  $\alpha < 2$  et à la proposition (3.2) pour  $\alpha > 2$ .

Mac Gehee [4] établit les mêmes propositions par une autre méthode qui nous semble plus compliquée ; il étudie aussi le cas  $\alpha = 2$ .



CHAPITRE IV

REGULARISATION DE LA COLLISION DOUBLE DU PROBLEME PLAN DE DEUX CORPS

EN ATTRACTION NON NEWTONIENNE

La régularisation au sens de Sundman :

Revenons au champ  $U(r) = \mu r^{-\alpha}$  ;  $\alpha > 0$ , et considérons le mouvement pour lequel  $h = 0$  et  $c = 0$  (qui a pour image  $E^-$  et  $E^+$ ), nous allons nous intéresser donc à l'étude des mouvements rectilignes dans le champ  $U(r)$ .

Le problème posé : Intégrer l'équation

$$(4.1) \quad d^2r/dt^2 = -\alpha\mu r^{-\alpha-1} \quad ; \quad r > 0$$

pour les conditions initiales :

$$(4.2) \quad t = 0 \quad ; \quad r_0 = \xi \quad \text{et} \quad (dr/dt)_0 = \eta$$

et l'intégrale première :

$$(4.3) \quad \left\| \begin{array}{l} \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 - 2\mu r^{-\alpha} = 2h \\ \text{où} \\ \eta^2 - 2\mu\xi^{-\alpha} = 2h \end{array} \right.$$

En écrivant (4.3) sous la forme :

$$r^{\alpha} \dot{r}^2 = 2\mu + 2hr^{\alpha} \quad ; \quad ( ) \cdot \equiv \frac{d}{dt} ( )$$

On constate que si  $r \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow t^*$ , alors  $|\dot{r}| \rightarrow \infty$  mais le produit  $r^{\alpha} \dot{r}^2$  tend vers la limite  $2\mu$ , indépendante de  $h$ .

Ce qui nous intéresse c'est le comportement de  $r(t)$  pour  $r \rightarrow 0$  ; on peut donc se borner au cas  $h = 0$ . Alors (4.3) donne :

$$(4.4) \quad r^{\alpha/2} dr = \pm \sqrt{2\mu} dt$$

avec le signe  $\pm$  qui est celui de la vitesse initiale  $\eta$ .

Prenons le cas  $\eta > 0$  :

L'équation (4.4) donne en posant  $\frac{\alpha}{2} + 1 = \gamma^{-1}$  :

$$\gamma r^{1/\gamma} = \sqrt{2\mu} t + \gamma \xi^{1/\gamma}$$

Posons :  $\gamma \xi^{1/\gamma} = \sqrt{2\mu} \tau$  d'où :

$$r^{1/\gamma} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma} (t + \tau)$$

En résumé, posons :

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} k^{1/\gamma} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma} \\ \xi = k\tau^\gamma \end{array} \right.$$

Alors, l'équation (4.1) avec les conditions initiales :

$$(4.6) \quad r_0 = \xi \quad \dot{r}_0 = \sqrt{2\mu\xi^{-\alpha}}$$

admet la solution :

$$(4.7) \quad r = k(t + \tau)^\gamma$$

Discussion :

a) cette solution est définie pour  $-\tau < t < \infty$ , c'est une solution d'éjection :

b) Remarquons que si l'équation (4.1) admet la solution  $r = f(t)$ , elle admet aussi la solution  $f(t - t_0)$  quel que soit  $t_0$ .

En prenant  $\tau = t_0$ , on peut mettre la solution (4.7) sous la forme :

$$(4.8) \quad r(t) = kt^\gamma \quad 0 < t < \infty$$

La relation  $(\xi, t)$  définie par (4.5) donne alors la durée du "lancement".

Solutions associées :

Désignons par  $r^{(1)}(t)$  la solution (4.8) et remarquons que si l'équation (4.1) admet la solution

$$r^{(1)}(t) = f(t) \quad \theta = 0$$

$$(a) \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rightarrow \\ \text{0} \end{array} \quad 0 < t < \infty$$

elle admet aussi la solution :

$$r^{(2)}(t) = f(-t)$$

$$\theta = 0$$



$$-\infty < t < 0$$

et la solution :

$$r^{(3)}(t) = -f(t)$$

$$\theta = \pi$$



$$0 < t < \infty$$

donc la solution :

$$r^{(4)}(t) = -f(-t)$$

$$\theta = \pi$$



$$-\infty < t < 0$$

A la solution :

$$r^{(1)}(t) = kt^\gamma$$

définie pour  $t > 0$ , on peut donc associer deux autres solutions définies pour  $t < 0$  ; à savoir les solutions :

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \end{array} \quad \begin{array}{l} r^{(2)}(t) = k(-t)^\gamma \\ \theta = 0 \end{array} \quad -\infty < t < 0$$

et :

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \end{array} \quad \begin{array}{l} r^{(4)}(t) = -k(-t)^\gamma \\ \theta = \pi \end{array} \quad -\infty < t < 0$$

On n'a pas intérêt à considérer la solution  $r^{(3)}(t)$  qui est simplement la symétrique de  $r^{(1)}(t)$ .

#### Prolongement analytique :

On part de la solution (a) définie pour  $t > 0$  et on cherche si cette solution prolonge l'une des solutions définies pour  $t < 0$  ; c'est-à-dire :

Soit la solution (b) ; alors il y a "réflexion" ou choc : collision (b) suivie d'éjection (a) ;

soit la solution (d) ; alors il y a "transmission" : collision (d) suivie d'éjection (a).

Règle de Sundman relative à l'accordement des solutions : le point de vue analytique :

Ecrivons les trois solutions sous la forme :

$$x^{(1)} = kt^\gamma \quad 0 < t < \infty$$

$$x^{(2)} = k(-t)^\gamma > 0 \quad -\infty < t < 0$$

$$x^{(3)} = -k(-t)^\gamma > 0 \quad -\infty < t < 0$$

Nous dirons que  $x^{(2)}$  ou  $x^{(3)}$  prolonge analytiquement la solution  $x^{(1)}$  s'il existe une fonction analytique telle que  $x^{(1)}$  et  $x^{(2)}$  ou  $x^{(3)}$  soient deux branches de la même fonction  $x^{(1)}$  réelle pour  $t > 0$ ,  $x^{(2)}$  ou  $x^{(3)}$  réelle pour  $t < 0$ .

Conditions nécessaires :

1°) Le point  $t = 0$  doit être un point critique algébrique, donc

$$\gamma = \frac{2}{\alpha + 2} = \frac{p}{q}$$

$0 < p < q$  ;  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux et

$p$  est inférieur à  $q$  car  $\gamma < 1$

si en plus  $q$  est impair, alors la condition est aussi suffisante, car alors on pose  $s = t^{1/q}$  d'où  $x = ks^p$  ;  $t$  change de signe avec  $s$  (donc passe de  $t < 0$  à  $t > 0$ ).

Par exemple, pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  ( $\alpha = 2$ ) on a :

$$x = k\sqrt{t}$$

donc  $t = s^2$  et  $x = ks$

$t$  ne change pas de signe, donc on ne peut pas passer de  $t < 0$  à  $t > 0$ . Nous dirons que la singularité n'est pas régularisable au sens de Sundman.

2°) Supposons que  $\gamma = p/q$ , alors la fonction  $z = kt^{p/q}$  pour  $t = \rho e^{i\sigma}$  possède les  $m$  branches :

$$\begin{aligned} z_m &= k\rho^{p/q} e^{i(p\sigma/q)} e^{i2m\pi(p/q)} \quad ; \quad 0 \leq \sigma < 2\pi \\ &= k\rho^{p/q} e^{i(\sigma+2m\pi)p/q} \end{aligned}$$

Les branches réelles pour  $t < 0$  sont les branches réelles pour  $\sigma = \pi$  ( $t = -\rho$ ), c'est-à-dire :

$$(1 + 2m) \frac{p}{q} = N \text{ entiers}$$

$$(d'où  $z_m = ke^{p/q} e^{iN\pi}$ )$$

ce qui donne, puisque  $q$  premier avec  $p$  :

$$1 + 2m = q$$

donc :

$$p = N$$

$$z_m = ke^{p/q} e^{ip\pi}$$

Si  $p$  est pair, la solution  $z$  est réelle positive, elle coïncide avec  $x^{(2)}(t)$  ;

si  $p$  est impair, la solution  $z$  est réelle négative, elle coïncide avec  $x^{(4)}(t)$ .

En résumé :

(4.9)		Il y a prolongement analytique (régularisation au sens de Sundman) si et seulement si :
		$\gamma = p/q$ ; $0 < p < q$
		$p$ premier avec $q$ et $q$ impair.

Si  $p$  est pair,  $x^{(1)}$  prolonge  $x^{(2)}$  ce qui est interprétable par un choc élastique "régularisation avec réflexion".

Si  $p$  est impair,  $x^{(1)}$  prolonge  $x^{(4)}$  ce qui est interprétable par une traversée à vitesse infinie "régularisation avec transmission".

Par exemple, le problème képlérien pour lequel  $\alpha = 1$  donc  $\gamma = 2/3$ ,  $p = 2$ ,  $q = 3$  la singularité est par conséquent régularisable, par réflexion.

## II.- Régularisation géométrique :

Revenons au système différentiel du mouvement donné par (2.12) et (2.13) :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} = v \\ \frac{d\theta}{d\tau} = w \\ \frac{dw}{d\tau} = (\beta - 1)wv \\ \frac{dv}{d\tau} = w^2 + \beta(v^2 - 2) \end{array} \right. \quad \text{avec } \beta = \alpha/2$$

Considérons la variable angulaire  $\chi$  définie par :

$$(4.11) \quad w + iv = \sqrt{2} e^{i\chi} \quad ; \quad -\pi/2 < \chi < \pi/2 \quad (i = \sqrt{-1})$$

alors, sur la variété N définie (2.17) par  $w^2 + v^2 = 2$  ( $h = 0$ ) la dernière équation de (4.10) devient :

$$dv/d\tau = (1 - \beta)w^2$$

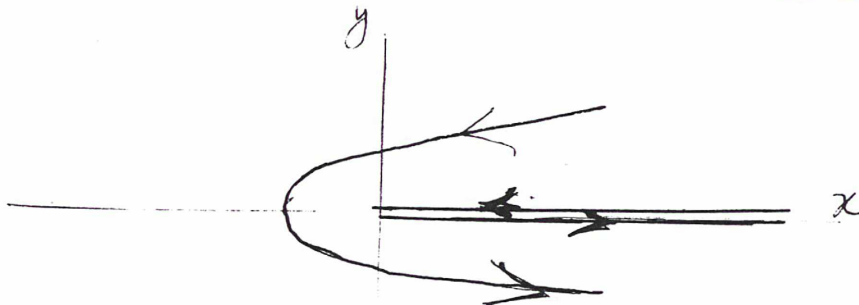
Or :

$$v = \sqrt{2} \sin\chi \quad \text{donc} \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{d\chi} \frac{d\chi}{d\tau} = \sqrt{2} \cos\chi \frac{d\chi}{d\tau} = w \frac{d\chi}{d\tau}$$

d'où le système (4.10) restreint à la variété N devient :

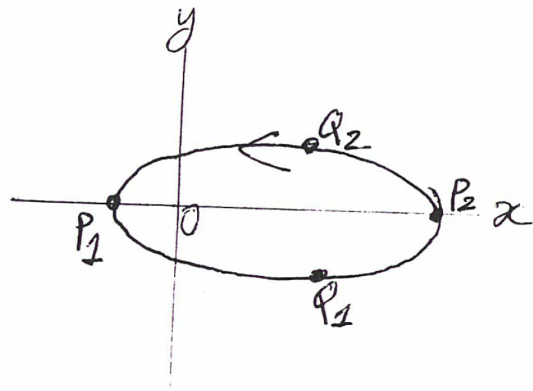
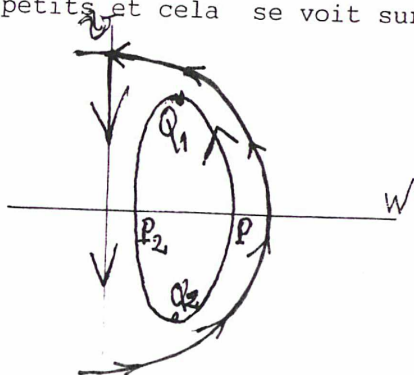
$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\theta/d\tau = w \\ d\chi/d\tau = (1 - \beta)w \end{array} \right.$$

Avant de traiter le cas général considérons le cas képlérien, c'est-à-dire le cas où  $\alpha = 1$  ( $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \frac{2}{3}$ ). Nous avons trouvé que la singularité est régularisable par la méthode analytique de Sundman. On peut étudier la trajectoire  $r(\theta)$  pour  $h = 0$  et pour  $c \neq 0$  très petit.



On constate que l'orbite part avec des conditions initiales voisines de la solution  $x = k(-t)^{2/3}$  ;  $t < 0$  et termine avec des conditions finales voisines de  $x = k(t)^{2/3}$  ;  $t > 0$ .

C'est encore le cas pour  $h \neq 0$  et  $c \neq 0$  tous les deux très petits et cela se voit sur le diagramme,  $w, v$  :



On voit que la portion de l'orbite elliptique  $(Q_2 P_1 Q_1)$  très voisine de  $h = 0$  (c'est-à-dire  $r \rightarrow 0$ ) est représentée dans le plan  $(wv)$  par la portion d'orbite voisine de  $F \equiv w^2 + v^2 - 2 = 0$ .

Problème :

Soit donc une solution proche de la collision : voisine de la solution  $w = 0$  de  $Q_1$  à  $Q_2$  et ensuite voisine de  $h = 0$  c'est-à-dire de  $w^2 + v^2 = 2$  de  $Q_2$  en  $P_1$  et en  $Q_1$ . Le problème est de calculer  $\Delta\theta$  le long de cette solution voisine.

Pour ce faire, nous constatons que  $\Delta\theta \approx 0$  le long de  $\overline{Q_1 P_2 Q_1}$  et pour calculer  $\Delta\theta$  le long de la solution  $\overline{Q_2 P_1 Q_1}$  on a :

$$d\theta/d\chi = 1/(1-\beta) \text{ d'après (4.12)}$$

donc :

$$\Delta\theta \approx (1-\beta)^{-1} \Delta\chi$$

Or :

$$\Delta\chi = \pi \text{ le long de } \overline{Q_2 P_1 Q_1} \text{ d'où}$$

(4.13)

$$\Delta\theta \approx (1-\beta)^{-1} \pi$$

La relation (4.13) signifie que les orbites proches de la collision se détournent par un angle  $\Delta\theta \approx \pi/(1-\beta)$  dans le plan  $xy$ . Si cet angle est multiple de  $\pi$ , alors la particule émerge dans la même direction sans prendre en considération le fait que la particule soit à gauche ou à droite de la collision.

Imposons  $\beta = 1 - n^{-1}$ , c'est-à-dire  $\Delta\theta = n\pi$ , alors l'orbite qui va prolonger l'orbite singulière sera une rotation d'angle  $n\pi$  et l'on a :

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{une réflexion pour } n \text{ pair} \\ \text{et} \\ \text{une transmission pour } n \text{ impair} \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous allons étudier les cas généraux  $\alpha < 2$  et  $\alpha > 2$ , ainsi que certains cas particuliers :  $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 4/3$ .

1°)  $\alpha < 2$  : Nous allons étudier le comportement des orbites  $h = 0$  pour  $\alpha < 2$  et  $\gamma = p/q$  avec  $q$  impair (rappelons que  $\gamma = \frac{1}{1+(\alpha/2)} = \frac{1}{1+\beta}$ ).

Pour trouver l'orbite  $r(\theta)$  considérons les deux premières équations du système (4.10) ainsi que (4.11), il vient :

$$\frac{dr}{r} = \frac{v}{w} d\theta = \frac{\sin\chi}{\cos\chi} d\theta$$

or :

$$\theta = n\chi \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{1 - (\alpha/2)} = \frac{1}{1 - \beta}$$

d'où :

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\theta/n}{\cos\theta/n} d\theta$$

donc :

$$(4.15) \quad r = \frac{b}{\cos^n(\theta/n)}$$

Pour trouver l'horaire, posons :

$$w = \sqrt{2} \frac{1}{\text{ch}\psi} \quad v = \sqrt{2} \text{th}\psi$$



la troisième équation de (4.10) donne :

$$d\psi = (\sqrt{2}/n) d\tau \quad \text{donc} \quad \psi = (\sqrt{2}/n)\tau$$

Or :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = w \quad d\theta = \sqrt{2} \frac{1}{\text{ch}\psi} d\tau = n \frac{d\psi}{\text{ch}\psi}$$

d'où :

$$\theta = n \text{tg}^{-1} \text{sh}\psi \quad \psi = (\sqrt{2}/n)\tau$$

ou :

$$\frac{1}{\cos(\theta/n)} = \text{ch} \frac{\sqrt{2}}{n} \tau$$

qui s'écrit, en tenant compte de (4.15) :

$$b^{-1/n} r^{1/n} = \text{ch} \frac{\sqrt{2}}{n} \tau$$

En résumé :

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{b}{\cos^n(\theta/n)} = b \text{ch}^n \psi \\ \theta = n \text{tg}^{-1} \text{sh}\psi \\ \psi = \frac{\sqrt{2}}{n} \tau \quad n = \frac{1}{1-\beta} \end{array} \right.$$

Remarque :

Ecrivons l'intégrale du moment cinétique tenant compte de (4.16)

il vient :

$$c = r^{(1-\alpha/2)} w = r^{(1-\beta)} w = r^{1/n} \sqrt{2} \frac{1}{\text{ch}\psi} = b^{1/n} \text{ch}\psi \sqrt{2} \frac{1}{\text{ch}\psi}$$

d'où :

$$(4.17) \quad b = (c/\sqrt{2})^n$$

Cas particuliers :

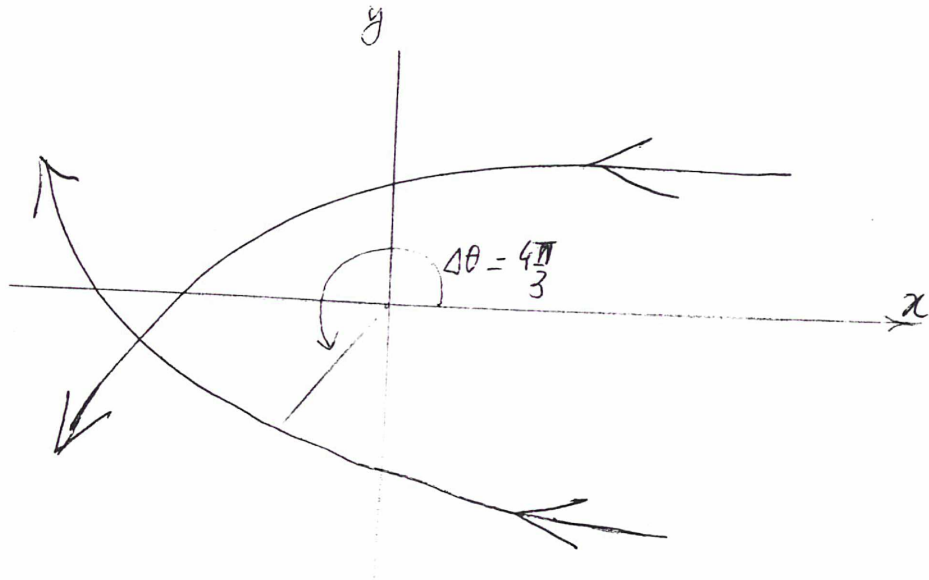
$$a) \underline{\alpha = \frac{1}{2}} : \beta = \frac{1}{4} \quad \gamma = \frac{4}{5} \quad n = \frac{4}{3} \quad \Delta\theta = \frac{4}{3} \pi$$

Notons tout d'abord que la singularité est régularisable par réflexion d'après la règle de Sundman (4.9).

Revenons à  $\Delta\theta = 4\pi/3$ , nous constatons que l'orbite qui commence par une branche parabolique dans la direction  $\theta = \theta_0$ , se termine par une branche parabolique dans la direction

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{4}{3}\pi$$

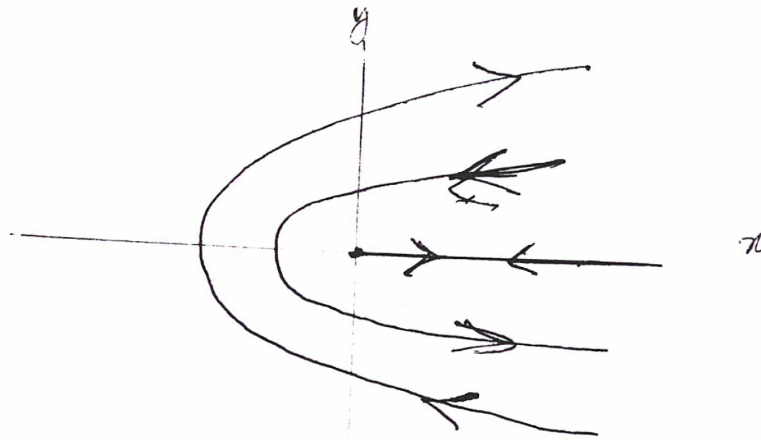
Donc la singularité n'est pas régularisable géométriquement d'un point de vue intuitif.



b)  $\alpha = 1$  :  $\beta = \frac{1}{2}$      $\gamma = 2/3$      $n = 2$      $\Delta\theta = 2\pi$

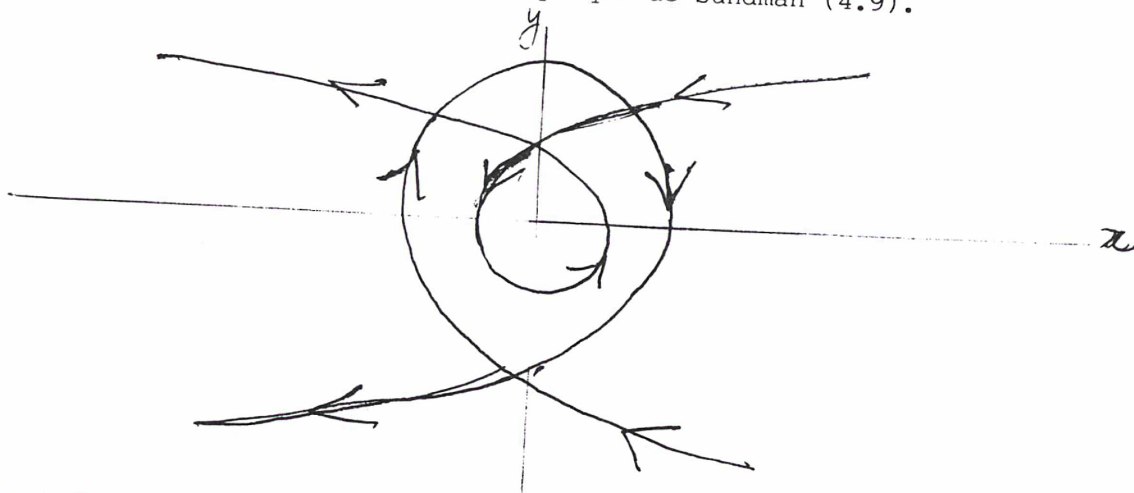
C'est le problème képlérien où la singularité, comme nous l'avons montré, est régularisable analytiquement par réflexion (choc élastique).

D'après le résultat (4.14), la singularité est régularisable géométriquement par réflexion car  $n = 2$  pair.



c)  $\alpha = 4/3 : \beta = 2/3 \quad \gamma = 3/5 \quad n = 3 \quad \Delta\theta = 3\pi$

L'orbite commençant par une branche parabolique dans la direction  $\theta_0$  se termine par une branche parabolique dans la même direction  $\theta_1 = \theta_0 + 3\pi$ , donc il y a régularisation géométrique par transmission, toujours d'un point de vue intuitif, c'est d'ailleurs le résultat fourni par la règle (4.14) où  $n = 3$  impair, d'autre part, c'est le même résultat que celui obtenu par la méthode analytique de Sundman (4.9).



2°)  $\alpha > 2$  : Pour trouver l'orbite et l'horaire dans le cas où  $h = 0$ , la méthode décrite pour  $\alpha < 2$  est aussi applicable à  $\alpha > 2$ , mais il y a une infinité de trajectoires qui partent ou aboutissent à la singularité et il n'est plus question de régularisation géométrique.

Prenons par exemple  $\alpha = 3$  donc  $\beta = 3/2$  et  $n = -3 < 0$  et la singularité n'est pas régularisable géométriquement, cependant il y a régularisation par réflexion d'après Sundman.

Résultat : On a

$$n = \frac{1}{1 - \beta}$$

donc l'entier  $n$  est positif si et seulement si  $\beta < 1$  (ou  $\alpha > 2$ ) d'où l'on peut énoncer le résultat relatif à la régularisation géométrique :

(4.18)  $\left\| \begin{array}{l} \text{La singularité est réalisable géométriquement (méthode} \\ \text{d'Easton) pour } h = 0 \text{ si et seulement si } \beta = 1 - n^{-1} \text{ avec} \\ \text{n entier positif.} \end{array} \right.$

Conséquence : On constate que pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha |x|^{-\alpha-2} x\end{aligned}$$

la singularité est régularisable par la méthode de Sundman (prolongement analytique) si elle l'est par la méthode d'Easton (régularisation géométrique) ; en effet, supposons qu'on puisse régulariser géométriquement, alors on a d'après (4.18) :

$$\beta = 1 - n^{-1}$$

$\gamma = p/q$  où  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, d'où  $\frac{p}{q} = \frac{1}{1 + \beta} = \frac{n}{2n - 1}$ , donc  $q = 2n - 1$  est impair, la singularité est par conséquent régularisable au sens de Sundman d'après (4.9).

Si  $p = n$  est pair, il y a régularisation par réflexion et par transmission si  $p = n$  est impair.

En général, la régularisation géométrique n'entraîne pas la régularisation par prolongement analytique, par exemple, considérons le système :

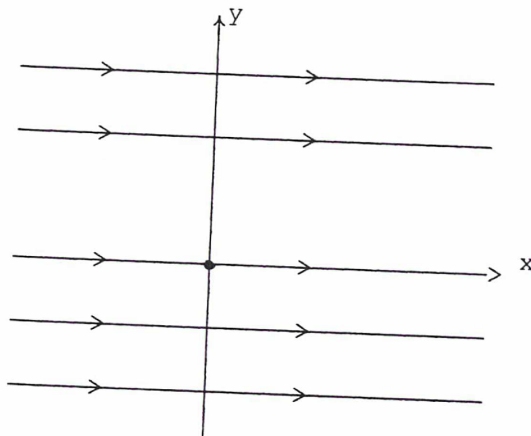
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{2}(t^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y(t) &= 0 \end{aligned} \quad t < t^*$$

une solution particulière commençant d'un point de l'axe des  $x < 0$  et tendant vers l'origine 0 quand  $t \rightarrow t^*$ .

Pour  $t > t^*$  :  $(t^* - t)^{\frac{1}{2}}$  est complexe et il n'est pas question du prolongement analytique, par contre la représentation suivante dans l'espace des phases du système :



montre que la régularisation géométrique est possible.

D'autres exemples se trouvant dans [7] dont l'exemple précédent est tiré montrent que la méthode de Sundman et celle d'Easton ne sont pas comparables : une extension par rapport à l'une n'implique pas une extension par rapport à l'autre. Reste à savoir si l'on peut trouver un exemple où il y a deux extensions (géométrique et analytique) mais différentes.

### III.- Transformation de "Levi-Civita" :

Considérons le lagrangien :

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + U(x, y) + h$$

et posons :

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

$$i = -\sqrt{-1}$$

donc L s'écrit en variables complexes  $z, \dot{z}$

$$L = \frac{1}{2} |\dot{z}|^2 + U + h$$

Effectuons une transformation conforme  $z = f(Z)$  et appelons :

$$(4.19) \quad J(X, Y) = |f'(Z)|^2 / 2$$

donc :

$$L = J(X, Y) |\dot{Z}|^2 + U(\bar{x}, \bar{y}) + h$$

Effectuons ensuite le changement temporel défini par :

$$(4.20) \quad dt = Jd\tau$$

alors le lagrangien (4.19) devient :

$$(4.21) \quad L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + J(U + h)$$

l'intégrale de l'énergie s'écrit :

$$(4.22) \quad \frac{1}{2} |Z'|^2 = J(U + h)$$

Application : Revenons au champ  $U(r) = M/r^\alpha$  ;  $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| = |f|$

donc :

$$L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + |f'|^2 \left( \frac{M}{|f|^\alpha} + h \right)$$

et l'intégrale de l'énergie :

$$\frac{1}{2} |Z'|^2 = |f'|^2 \left( \frac{M}{|f|^\alpha} + h \right) \approx M \frac{|f'|^2}{|f|^\alpha}$$

Pour que  $|Z'| < +\infty$  quand  $f \rightarrow 0$ , il faut que  $f' \rightarrow 0$  et  $|f'|^2/|f|^\alpha < \infty$

Supposons que

$$(4.23) \quad z = f(Z) = Z^n \text{ avec } n \text{ entier}$$

d'où :

$$\frac{|f'|^2}{|f|^\alpha} = n^2 \frac{|Z|^{2n-2}}{|Z|^{\alpha n}} = n^2 |Z|^{2n-2-\alpha n}$$

il faut donc choisir  $n$  de telle sorte que  $2n - 2 - \alpha n = 0$  c'est-à-dire :

$$n = \frac{2}{2 - \alpha} = \frac{1}{1 - (\alpha/2)} = \frac{1}{1 - \beta} \quad \alpha \neq 2$$

pour ce choix :

$$J = |f'|^2 = n^2 |f|^\alpha = n^2 |Z|^{n\alpha}$$

$$(4.24) \quad L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + Mn^2 + hn^2 |Z|^{2n-2}$$

Soit :

$$\alpha' = 2n - 2 = n\alpha = 2\alpha/(2-\alpha)$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2-\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

Posons :

$$z = re^{i\theta} \quad Z = Re^{i\psi}$$

$$z = f(Z) = Z^n \text{ donne}$$

$$(4.25) \quad r = R^n \quad \theta = n\psi + 2k\pi$$

Trouvons la relation entre :  $c = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  et  $c' = R^2 \frac{d\psi}{d\tau}$

$$c = r^2 \frac{d\theta}{dt} = R^{2n} \frac{d\theta}{d\psi} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = R^{2n} \times n \times \frac{d\psi}{d\tau} \frac{1}{n^2 R^{n\alpha}} = \frac{R^2}{n} \frac{d\psi}{d\tau}$$

donc :

$$c' = nc$$

En résumé :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} |\dot{z}|^2 + (M/r^\alpha) + h \\ L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + M'R^{\alpha'} + h' \\ M' = n^2h, \quad h' = n^2M, \quad \alpha' = 2\alpha/(2-\alpha) = n\alpha \\ c' = nc \end{array} \right.$$

Discussion :

1°) h = 0 ( $M' = 0$ ) :

$$L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + h' = \frac{X'^2 + Y'^2}{2} + n^2M$$

Les orbites  $Z(\tau)$  sont alors rectilignes : l'intégrale de l'énergie devient  $|Z'|^2 = 2h'$ , soit :

$$X'^2 + Y'^2 = 2n^2M$$

Posons :

$$X' = \sqrt{2n^2M} \cos \sigma \quad Y' = \sqrt{2n^2M} \sin \sigma$$

et bornons-nous à  $\sigma = 0$  :

$$X' = \sqrt{2n^2M} \quad Y' = 0$$

d'où :

$$X = \sqrt{2n^2M} \tau \quad Y = a$$

$$c' = |XY' - YX'| = aX' = a\sqrt{2n^2M}$$

or :

$$c' = nc \quad c = a\sqrt{2M} \quad \text{ou } a = c/\sqrt{2M}$$

On constate que  $c$  est petit si et seulement si  $a$  est petit.

Pour étudier les trajectoires du système initial (en variables  $x$  et  $y$ ), nous avons :

$$r = R^n \quad \theta = n\psi + 2k\pi$$

donc :

$$Y = R \sin \psi = a \quad \text{donne} \quad r^{1/n} \sin \frac{\theta}{n} = a$$

Posons  $b = a^n$ , donc

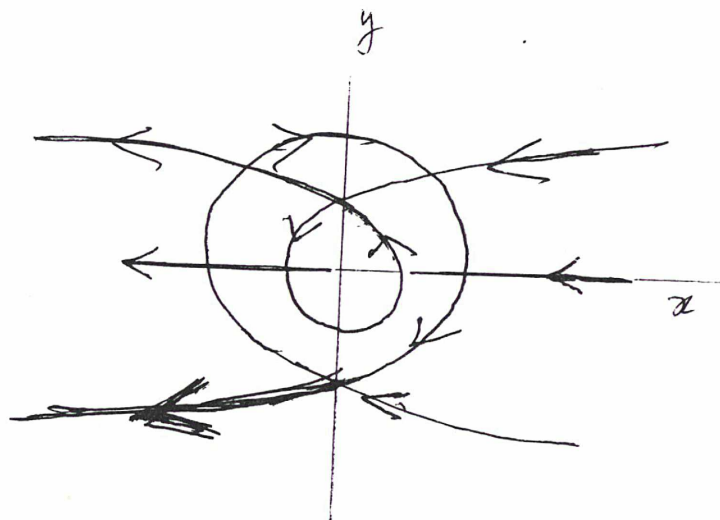
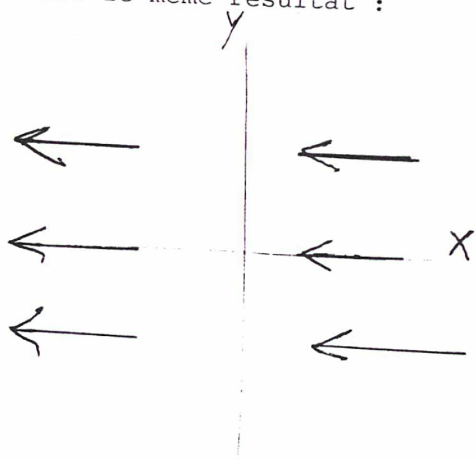
$$(4.27) \quad r = \frac{b}{\sin^n(\theta/n)} \quad \text{avec} \quad b = (c/\sqrt{2M})^n$$

On retrouve alors les orbites déjà calculées (4.15) avec la même interprétation pour  $b$  (4.17).

Exemples :

a) Pour  $\alpha = 4/3$  on a  $n = 3$ .

Nous avons montré que la singularité est régularisable par transmission aussi bien analytiquement que géométriquement. De même on obtient ici le même résultat :



$$X = 3\sqrt{2M} \tau$$

$$Y = a = (c\sqrt{2M})$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \frac{b}{\sin^3(\theta/3)} \quad b = (c\sqrt{2M})^3$$

b) Pour  $\alpha = 1$ , on a  $n = 2$  et la transformation considérée est celle de Levi-Civita pour le problème képlérien  $z = Z^2$ .



2°)  $h \neq 0$  : On a, d'après (4.26) :

$$L^* = \frac{1}{2} |Z'|^2 + M'R^{\alpha'} + h'$$

Le système différentiel engendré par  $L^*$  est régulier si et seulement si  $\alpha' > 0$ .

Or :  $\alpha' = n\alpha \quad n = \frac{1}{1 - (\alpha/2)} = \frac{1}{1 - \beta}$

(4.28)  $\left\| \begin{array}{l} \text{Le système différentiel engendré par } L^* \text{ est régulier si et} \\ \text{seulement si } n \text{ est entier positif.} \end{array} \right.$

On constate donc l'équivalence entre la régularisation géométrique et celle par la transformation de Levi-Civita.

A P P E N D I C E

ETUDE DU CHAMP REPULSIF EN  $U(r) = -1/r^2$  POUR TROIS CORPS ALIGNES

Le problème sur le champ répulsif en  $U = -1/r^2$  est un peu hors du sujet, en effet les corps s'écartent et il n'y a pas de collision. Cependant, ce problème est intéressant parce qu'il montre une propriété du champ  $U(r) = 1/r^\alpha$  avec  $\alpha = 2$  et pour un problème des trois corps.

Soient  $M_1, M_2, M_3$ , trois corps de masses égales à l'unité, alignés sur l'axe des  $x$  dans l'ordre  $M_1, M_3, M_2$  et se repoussent mutuellement avec une force  $|\vec{F}_{ij}| = 2/r_{ij}^3$  ( $i \neq j ; 1, 2, 3$ )

Soient  $x_1 \leq x_3 \leq x_2$  les abscisses des trois corps par rapport à leur centre de gravité :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Le lagrangien du système est alors donné par :

$$(A.1) \quad \left\| \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + U(r) \\ U(r) &= - \left[ \frac{1}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \right] \end{aligned} \right.$$

On prend des conditions initiales quelconques.

Problème :

$$(A.2) \quad \left\| \begin{aligned} &\text{Etudier le mouvement à l'infini et prouver le résultat suivant} \\ &\text{signalé par Moser :} \\ &\text{pour } t \rightarrow -\infty: x_1 \sim v_1 t + a_1, x_2 \sim v_2 t + a_2, x_3 \sim v_3 t + a_3 \\ &\text{pour } t \rightarrow +\infty: x_1 \sim v'_1 t + a'_1, x_2 \sim v'_2 t + a'_2, x_3 \sim v'_3 t + a'_3 \end{aligned} \right.$$

où  $\sim$  signifie qu'on écrit les premiers termes d'un développement en série, les termes non écrits tendent vers zéro comme  $1/t$  ou plus vite.

De plus, ce qui est d'ailleurs remarquable, les relations suivantes sont vérifiées par les coefficients :  $v_1, a_1, \dots$

$$(A.3) \quad \left\| \begin{array}{l} v'_1 = v_2 \quad v'_2 = v_1 \quad v'_3 = v_3 \\ a'_1 = a_2 \quad a'_2 = a_1 \quad a'_3 = a_3 \end{array} \right.$$

Introduisons les variables de Lagrange-Jacobi définies par :

$$(A.4) \quad \left\| \begin{array}{l} X = x_2 - x_1 \\ Y = x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Or : } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad X = x_2 - x_1 \text{ et } Y = \frac{3}{2} x_3$$

On peut vérifier que :

$$(A.5) \quad \left\| \begin{array}{l} 3x_1 = -\left(\frac{3}{2}X + Y\right) \\ 3x_2 = \frac{3}{2}X - Y \\ 3x_3 = 2Y \end{array} \right.$$

d'où :

$$2T = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = \frac{1}{4} \dot{X}^2 + \frac{1}{9} \dot{Y}^2 + \frac{1}{3} \dot{X}\dot{Y} + \frac{1}{4} \dot{X}^2 + \frac{1}{9} \dot{Y}^2 - \frac{1}{3} \dot{X}\dot{Y} + \frac{4}{9} \dot{Y}^2$$

donc :

$$(A.6) \quad 2T = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{2}{3} \dot{Y}^2$$

d'autre part  $U$  s'écrit en variables  $X$  et  $Y$  en tenant compte de (A.5) :

$$(A.7) \quad U(X, Y) = -\left[ \frac{1}{X^2} + \frac{1}{\left(\frac{X}{2} + Y\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{X}{2} - Y\right)^2} \right]$$

d'où le lagrangien (A.1) devient :

$$(A.8) \quad L(\dot{X}, \dot{Y}, X, Y) = \frac{\dot{X}^2}{4} + \frac{\dot{Y}^2}{3} - \left[ \frac{1}{X^2} + \frac{1}{\left(\frac{X}{2} + Y\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{X}{2} - Y\right)^2} \right]$$

Effectuons le changement de variables :

$$(A.9) \quad \begin{array}{l} X = \sqrt{2} r \cos \theta \\ Y = \sqrt{3/2} r \sin \theta \end{array}$$

d'où :

$$(A.10) \quad \left\| \begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{2} \dot{r} \cos\theta - \sqrt{2} r \sin\theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \sqrt{3/2} \dot{r} \sin\theta + \sqrt{3/2} r \cos\theta \dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

donc (A.6) s'écrit :

$$(A.11) \quad 2T = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} U &= - \left[ \frac{2}{r^2(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2} + \frac{2}{r^2(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)^2} + \frac{1}{2r^2\cos^2\theta} \right] \\ &= - \frac{4(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)^2 \cos^2\theta + 4(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2 \cos^2\theta + (\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2 (\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)^2}{2r^2(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2 (\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)^2 \cos^2\theta} \\ &= - \frac{4(2\cos^2\theta + 6\sin^2\theta)\cos^2\theta + (\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)}{2r^2\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)^2} \\ &= - \frac{9\cos^4\theta + 9\sin^4\theta + 18\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^2(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta)^2} \\ &= - \frac{9(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2}{2r^2\cos^23\theta} \end{aligned}$$

d'où :

$$(A.12) \quad U = - \frac{9}{2r^2\cos^23\theta}$$

Le lagrangien s'écrit en variables  $r$  et  $\theta$  :

$$(A.13) \quad \left\| \begin{aligned} L(\dot{r}, \dot{\theta}, r, \theta) &= \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{M(\theta)}{r^2} \\ M(\theta) &= \frac{9}{2} (\cos 3\theta)^{-2} \end{aligned} \right.$$

Prenons comme conditions initiales pour  $t = 0$  :

$$(A.14) \quad \left\| \begin{aligned} x_1 &= -\ell & \dot{x}_1 &= u_1 & \ell > 0 \\ x_2 &= \ell & \dot{x}_2 &= u_2 \\ u_1 &\text{ et } u_2 && \text{ de signe quelconque} \end{aligned} \right.$$

Calculons les valeurs initiales de  $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$  :

Or  $x_3 = -(x_2 + x_1)$  ;  $\dot{x}_3 = -(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$  ;  $X = x_2 - x_1$  ;  $Y = \frac{3}{2} x_3$   
 donc pour  $t = 0$

$$x_3 = 0 \quad \dot{x}_3 = -(u_1 + u_2) \text{ et par conséquent}$$

$$X = 2\ell \quad Y = 0 \quad \dot{X} = u_2 - u_1 \quad \dot{Y} = -\frac{3}{2}(u_1 + u_2)$$

et d'après (A.9) et (A.10) on a les valeurs initiales :

$$(A.15) \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Pour } t = 0 \\ \theta = 0 \\ r = \sqrt{2}\ell \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} \dot{\theta} = (\sqrt{3}/2\ell)(u_1 + u_2) \\ \dot{r} = (1/\sqrt{2})(u_2 - u_1) \end{array} \right.$$

Intégration des équations du système :

Considérons le lagrangien donné par (A.13) et effectuons le changement temporel  $dt = r^2 d\tau$  ( $\mu = r^2$ ), alors d'après (1.22)  $L$  se transforme en

$$\left\| \right. \quad L^* = \frac{1}{r^2} \frac{r'^2 + r^2 \theta'^2}{2} + r^2 \left[ -\frac{M(\theta)}{r^2} + h \right] \text{ avec}$$

$$h^* = 0 \quad ( )' \equiv \frac{d}{d\tau} ( )$$

où :

$$(A.16) \quad L^* = \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} + \theta'^2 \right) + hr^2 - M(\theta)$$

avec l'intégrale de l'énergie :

$$(A.17) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} + \theta'^2 \right) = hr^2 - M(\theta)$$

Le système engendré par  $L^*$  montre que les variables  $r, \theta$  sont séparées, donc le changement temporel considéré ramène l'intégration du système engendré par  $L$  (A.13) à celui de deux équations :

$$\frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} = hr^2 + k_1$$

$$\frac{1}{2} \theta'^2 = -M(\theta) + k_2$$

avec :

$$k_1 + k_2 = k^* = 0 \text{ d'après (A.17)}$$

Posons  $k = k_2 = -k_1$  et tenons compte de la donnée de  $M( )$ , alors les deux intégrales premières précédentes s'écrivent :

$$(A.18) \quad \left\| \right. \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{r'^2}{r^2} = 2hr^2 - 2k \\ \theta'^2 = 2k - 9(\cos 3\theta)^{-2} \end{array} \right.$$

h et k dépendent des conditions initiales ; posons :

$$(A.19) \quad h = k/a^2 \quad 2k = 9(\cos 3\alpha)^{-2}$$

de sorte que quel que soit  $\tau$ , les seconds membres du système (A.18) soient  $\geq 0$ , c'est-à-dire  $r \geq a$ ,  $|\theta| \leq \alpha \leq \pi/6$  et nous achevons de définir les conditions initiales par

$$(A.20) \quad \left\| \begin{array}{l} \theta_0 = 0 \quad r_0 = \frac{a}{\cos \phi_0} \quad (\text{avec } 0 \leq \phi_0 < \pi/2) \\ (d\theta/d\tau)_0 > 0 \quad (dr/d\tau)_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

On fait le changement de variable :

$$(A.21) \quad 2k\tau = s$$

d'où le système à intégrer s'écrit :

$$(A.22) \quad \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{r^2}{a^2} - 1 \\ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{\cos^2(3\alpha)}{\cos^2(3\theta)} \end{array} \right.$$

Intégration de la première équation de (A.22) :

On peut utiliser  $r = a \cosh \psi$ , mais nous allons utiliser

$$r = a/\cos \phi \quad \text{d'où } (r^2/a^2) - 1 = \operatorname{tg}^2 \phi$$

d'autre part :

$$\operatorname{Log} r = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} \cos \phi$$

donc :

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{d\phi}{ds} = \operatorname{tg} \phi \frac{d\phi}{ds}$$

d'où l'équation à intégrer s'écrit :

$$\operatorname{tg}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \phi$$

comme  $(dr/ds)_0 > 0$  la dernière équation donne  $d\phi/ds = 1$ , d'où :

(A.23)

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi = \phi_0 + s \\ r = \frac{a}{\cos(\phi_0 + s)} \end{array}}$$

Intégration de la deuxième équation de (A.22) :

D'après les conditions initiales  $\theta_0 = 0$ ,  $(d\theta/d\tau)_0 > 0$  on a  $(d\theta/ds) \geq 0$ .

L'équation à intégrer montre que  $\cos^2 3\theta \geq \cos^2 3\alpha$ , c'est-à-dire  $|\theta| \leq \alpha < \pi/6$  (car pour  $\alpha \rightarrow \pi/6$ ,  $k \rightarrow \infty$ ). Elle s'écrit :

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 3\theta}{\cos^2 3\theta}$$

ce qui suggère de poser  $\sin 3\theta = \sin 3\alpha \sin u$  d'où :

$$3\cos 3\theta \frac{d\theta}{ds} = \sin 3\alpha \cos u \frac{du}{ds}$$

or

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin 3\alpha \cos u}{\cos 3\theta} \quad (\text{avec le signe (+) à cause de } \left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0 > 0)$$

(A.24)

$u = 3s$  $\sin 3\theta = \sin 3\alpha \sin 3s$
---

Limites pour  $|t| \rightarrow \infty$  :

Remarquons d'abord que  $dt = r^2 d\tau$  entraîne :

$$\sqrt{2k} dt = r^2 ds = a^2 \frac{ds}{\cos^2(\phi_0 + s)} \quad \text{d'après (A.22)}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\sqrt{2k}}{a^2} t = \text{tg}(\phi_0 + s)$$

d'où :

$$t \rightarrow +\infty : s \rightarrow s^+ \quad \text{et} \quad \phi_0 + s^+ = \pi/2$$

$$t \rightarrow -\infty : s \rightarrow s^- \quad \text{et} \quad \phi_0 + s^- = -\pi/2$$

donc :

(A.25)

$r \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad  t  \rightarrow \infty$
---

Calcul de  $\theta^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta$

D'après (A.24) on a :

$$\begin{aligned} \sin 3\theta^+ &= \sin 3\alpha \cdot \sin 3s^+ \\ &= \sin 3\alpha \cdot \sin 3\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) \end{aligned}$$

d'où :

(A.26)

$$\sin 3\theta^+ = -\sin 3\alpha \cos \phi_0$$

Calcul de  $\theta^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta$

De même que pour  $\theta^+$  on a :

(A.27)

$$\sin 3\theta^- = \sin 3\alpha \cos \phi_0$$

Les résultats (A.26) et (A.27) montrent que quel que soit  $\alpha, \phi_0$  on a :

$$\sin 3\theta^+ + \sin 3\theta^- = 0$$

et comme  $0 < |\theta| < \pi/6$ , cela implique :

(A.28)

$$\theta^+ + \theta^- = 0$$

ce qui signifie que la relation entre  $\theta^-$  et  $\theta^+$  est indépendante des conditions initiales.

Nous allons démontrer dans la suite l'équivalence des conditions initiales (A.14) avec les conditions initiales (A.19) et (A.20), et pour cela il suffit de calculer  $a_1 \phi_0, \alpha$  en fonction de  $\ell, u_1, u_2$  (on supposera  $u_2 - u_1 \geq 0, u_1 + u_2 < 0$ ).

Nous avons vu (A.15) les conditions initiales de  $r, \theta, dr/dt, d\theta/dt$



or  $\frac{d(\ )}{d\tau} \equiv r^2 \frac{d(\ )}{dt}$  c'est-à-dire  $(\ )' \equiv r^2 (\ )$

$$r'_0 = \sqrt{2}\ell^2(u_2 - u_1) > 0$$

$$\theta'_0 = -\sqrt{3}\ell(u_1 + u_2) < 0$$

d'où :

$$u_2 > 0 \quad \text{et} \quad |u_1| < u_2$$

1°) L'équation  $r_0 = \sqrt{2}\ell = a/(\cos\phi_0)$  donne :

$$(A.29) \quad a = \sqrt{2} \ell \cos\phi_0$$

2°) L'équation  $\theta'^2 = 2k - 9(\cos 3\theta)^{-2}$  (A.18) donne avec (A.19) et (A.20) :

$$\theta'^2_0 = 9\text{tg}^2 3\alpha$$

donc :

$$3\ell^2(u_1 + u_2) = 9\text{tg}^2 3\alpha$$

c'est-à-dire, en tenant compte du signe :

$$(A.30) \quad \ell(u_1 + u_2) = -\sqrt{3}\text{tg} 3\alpha$$

3°) L'équation  $r'^2/r^2 = 2hr^2 - 2k$  (A.18) donne avec (A.19) et (A.20) :

$$\left(\frac{r'}{r}\right)_0^2 = 2k\left(\frac{r^2_0}{a^2} - 1\right) = \frac{9}{\cos^2 3\alpha} \text{tg}^2 \phi_0$$

donc :

$$(A.31) \quad \ell(u_2 - u_1) = 3 \frac{\text{tg} \phi_0}{\cos 3\alpha}$$

Les relations (A.29), (A.30), (A.31) permettent, connaissant  $\ell, u_1, u_2$  de calculer  $\alpha$ , puis  $\phi_0$ , puis  $a$ .

Il y a donc équivalence entre les conditions initiales ; on pourra déduire l'état final des vitesses  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  de l'état final de  $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ .

#### Calcul des vitesses limites :

A/ Pour  $t \rightarrow +\infty$  : Nous avons vu (A.25) que  $r \rightarrow +\infty$  et  $\theta \rightarrow \theta^+$ . D'autre part,  $r\dot{\theta} = \frac{1}{r} \theta' \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0$  car  $|\theta'|$  est borné donc le théorème de l'énergie :

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = -\frac{2M}{r^2} + 2h$$

donne :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \rightarrow \sqrt{2h} \quad \text{car} \quad \dot{r} > 0 \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

En résumé :

(A.32)

$$\begin{array}{l}
 r \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \theta^+ \\
 t \rightarrow +\infty : \\
 \dot{r} \rightarrow \sqrt{2h}, \dot{\theta} \rightarrow 0
 \end{array}$$

B/ Passons à (A.9) et (A.10), on en déduit :

$$\dot{X} \rightarrow \sqrt{2} \dot{r} \cos \theta^+$$

$$\dot{Y} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{r} \sin \theta^+$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} \dot{X} + \dot{Y} &\rightarrow \frac{3}{2} \sqrt{2} \dot{r} \cos \theta^+ + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{r} \sin \theta^+ = \sqrt{6} \dot{r} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta^+ + \frac{1}{2} \sin \theta^+ \right) \\
 &= \sqrt{6} \dot{r} \cos \left( \theta^+ - \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

de même :

$$\frac{3}{2} \dot{X} - \dot{Y} \rightarrow \sqrt{6} \dot{r} \cos \left( \theta^+ + \frac{\pi}{6} \right)$$

C/ Passons à :

$$3\dot{x}_1 = - \left( \frac{3}{2} \dot{X} + \dot{Y} \right)$$

$$3\dot{x}_2 = + \left( \frac{3}{2} \dot{X} - \dot{Y} \right)$$

Nous aurons :

$$\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_1^+ = - \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{r} \cos \left( \theta^+ - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\dot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_2^+ = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{r} \cos \left( \theta^+ + \frac{\pi}{6} \right)$$

c'est-à-dire :

(A.33)

$$\begin{array}{l}
 \dot{x}_1^+ = - 2\sqrt{h/3} \cos \left( \theta^+ - \frac{\pi}{6} \right) \\
 t \rightarrow +\infty : \\
 \dot{x}_2^+ = 2\sqrt{h/3} \cos \left( \theta^+ + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{array}$$

D/ Pour  $t \rightarrow -\infty$  : Il faut changer  $\dot{r}$  en  $-\sqrt{2h}$  et  $\theta^+$  en  $\theta^- = -\theta^+$ , ce qui donne :

(A.34)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^- &= 2\sqrt{h/3} \cos(\theta^+ + \frac{\pi}{6}) \\ t \rightarrow -\infty : \\ \dot{x}_2^- &= -2\sqrt{h/3} \cos(\theta^+ - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\dot{x}_1^- = \dot{x}_2^+ > 0$$

$$\dot{x}_2^- = \dot{x}_1^+ < 0$$

d'où :

$$\dot{x}_3^- = \dot{x}_3^+ \text{ puisque } \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$$

Lorsque  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , il y a donc échange de vitesses des points extrêmes  $M_1$  et  $M_2$ .

DEUXIÈME PARTIE

RECHERCHE DES FORMES NORMALES  
AU VOISINAGE DE L'ÉQUILIBRE  
DANS LES SYSTÈMES HAMILTONIENS

## CHAPITRE I

### I.- PROBLEME DE LA STABILITE :

Nous allons donner dans la suite la définition de la stabilité, selon Liapounov, des solutions d'un système arbitraire d'équations.

Soit :

$$(1.1) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = f(t, \vec{x}) ; \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

l'écriture vectorielle d'un système normal arbitraire d'équations d'ordre 1 dont les seconds membres ainsi que leurs dérivées  $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t, \vec{x})$  sont définis et continus dans un certain ensemble ouvert  $\Gamma$  de l'espace des variables  $t, \vec{x}$ . Désignons par  $\phi(t)$  la solution de l'équation (1.1) correspondant aux valeurs initiales  $t_0, \vec{x}_0$ .

#### Définition (1.1) :

La solution  $\phi(t)$  de l'équation (1.1) pour les valeurs initiales  $t_0, \vec{x}_0$  est dite stable selon Liapounov si les conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Il existe un nombre positif  $\rho$  tel que si  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| < \rho$ , la solution  $\phi(t, t_0, \vec{x}_1)$ , en particulier la solution  $\phi(t)$  elle-même, est définie pour tous les  $t \geq t_0$ .

2°) Pour tout nombre positif  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir un nombre positif  $\delta(\varepsilon) \leq \rho$  tel que pour  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| < \delta$  on ait l'inégalité :

$$|\phi(t, t_0, \vec{x}_1) - \phi(t)| < \varepsilon \quad \text{quand } t \geq t_0$$

Définition (1.2) :

La solution stable selon Liapounov  $\phi(t)$  de l'équation (1.1) pour les valeurs initiales  $t_0, \vec{x}_0$  est dite asymptotiquement stable s'il existe un nombre positif  $\sigma \leq \rho$  tel que pour  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| < \sigma$  on ait :

$$|\phi(t, t_0, \vec{x}_1) - \phi(t)| \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \rightarrow \infty$$

Les définitions (1.1) et (1.2) sont invariantes par rapport à un choix arbitraire des valeurs initiales  $t_0, \vec{x}_0$  de la solution  $\phi(t)$ .

Dans le cas particulier où le système (1.1) est autonome ( $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(x)$ ) et la solution  $\phi(t)$  une position d'équilibre, les définitions de la stabilité sont identiques à celle que nous venons de donner.

Dans le cas des systèmes (1.1) dont les seconds membres dépendent périodiquement de  $t$  avec une période  $\tau$  :

$$f(t + \tau, \vec{x}) = f(t, \vec{x}) \quad ; \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

On fait appel à la théorie de Floquet [1]. Pour étudier le comportement des solutions de l'équation (1.1) à proximité de la solution  $\phi(t)$  on introduit une nouvelle fonction vectorielle inconnue  $\vec{\xi}$  en posant :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(t) + \vec{\xi}$$

et on obtient le système d'équations aux variations (système d'équations linéarisées) associé à (1.1) :

$$(1.2) \quad d\vec{\xi}/dt = M(t)\vec{\xi}$$

où  $M(t)$  est la matrice périodique des éléments  $(\partial f^i / \partial x^j)(t, \vec{\phi}(t))$  :

$$M(t+\tau) = M(t)$$

On a :

$$\vec{\xi}(t) = M(t)\vec{\xi}_0$$

donc :

$$\vec{\xi}(\tau) = M(\tau)\vec{\xi}_0$$

$$\vec{\xi}(t+\tau) = M(t)\vec{\xi}(\tau) = M(t)M(\tau)\vec{\xi}_0$$

d'où :

$$\vec{\xi}(n\tau) = M^n(\tau)\vec{\xi}_0$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $M(\tau)$ , alors il existe un vecteur  $\vec{V} \neq \vec{0}$  tel que :

$$M(\tau)\vec{V} = \lambda \cdot \vec{V}$$

d'où :

$$M^2(\tau)\vec{V} = M(\tau)(M(\tau)\vec{V}) = M(\tau)\lambda\vec{V} = \lambda M(\tau)\vec{V} = \lambda^2\vec{V}$$

et, en général :

$$M^n(\tau)\vec{V} = \lambda^n\vec{V}$$

On distingue les cas suivants :

- 1°) Si  $|\lambda| > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^n| = \infty$  et l'on dit qu'il y a divergence exponentielle ou instabilité exponentielle ;
- 2°) Si  $|\lambda| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^n| = 0$  et il y a convergence exponentielle ou stabilité exponentielle ;
- 3°) Si  $|\lambda| = 1$ , alors  $|\lambda^n| = 1$ , c'est un cas critique.

Notons qu'en général la stabilité du système (1.1) est la même que celle du système (1.2) d'équations linéarisées associé, sauf peut-être dans les cas critiques où la matrice  $M(\tau)$  a un ou plusieurs exposants caractéristiques ayant leur partie réelle nulle, et pour étudier le comportement des solutions de (1.1) au voisinage d'une solution périodique on ne peut pas se limiter au système linéarisé et l'étude des termes d'ordre supérieur devient nécessaire pour décider la stabilité ou l'instabilité du système (1.1).

Signalons finalement que notre étude conduit à définir plusieurs types d'instabilité :

- 1°) La classique instabilité exponentielle : la vitesse d'évasion  $\varepsilon$  du voisinage de la solution périodique étudiée est de l'ordre de  $\varepsilon$  ; distance du point considéré de l'espace des phases à la solution périodique de "référence" ;

2°) L'instabilité "puissance" : il existe  $n > 1$  tel que  $\varepsilon' = O(\varepsilon^n)$  ;

3°) La "diffusion d'Arnold" :

$$\forall n, \text{ pour } \varepsilon \text{ voisin de zéro : } \varepsilon' = O(\varepsilon^n).$$

par exemple :  $\varepsilon' = \exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$ .

Le temps nécessaire pour s'évader d'une très petite distance  $\delta$  à une distance finie  $a$  est de l'ordre de  $\log \delta$  dans le premier cas, de l'ordre de  $\delta^{(1-n)}$  dans le second cas et beaucoup plus dans le troisième cas qui en définitive diffère très peu de la stabilité dans les questions physiques réelles ordinaires.

## II.- SYSTEMES D'EQUATIONS HAMILTONIENNES :

Soit  $h(\vec{p}, \vec{q}, t)$  une fonction des  $(2n+1)$  variables  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  où :

- $\vec{p}, \vec{q}$  : les variables d'état, elles sont conjuguées l'une de l'autre ;
- $t$  : le paramètre de description, il représente le temps en général ;
- $h$  : fonction de Hamilton ou encore hamiltonien.

Un système d'équations hamiltoniennes (ou encore de Hamilton) est le système des  $2n$  équations formées avec les  $2n$  dérivées partielles de la fonction  $h$  :

$$(1.3) \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_j} \quad ; \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial h}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n$$

c'est un système dit à "n degrés de liberté", il s'écrit encore sous la forme vectorielle suivante :

$$(1.4) \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \partial h / \partial \vec{p} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = - \partial h / \partial \vec{q}$$



Pour un mouvement déterminé du système dynamique, les variables  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$  sont des fonctions de  $t$  et donc :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

soit, compte tenu de (1.4) :

$$dh/dt = \partial h/\partial t$$

d'où la conséquence fondamentale :

Si la fonction  $h$  ne contient pas la variable indépendante  $t$ , mais seulement les  $2n$  variables conjuguées  $\vec{p}, \vec{q}$ , alors  $h(\vec{p}, \vec{q})$  est une intégrale première du mouvement sur toutes les trajectoires :

$$h(\vec{p}(t), \vec{q}(t)) = \text{constante}$$

Dans ce cas, les équations (1.4) forment un système différentiel d'ordre  $2n$  dit autonome, et l'intégrale première  $h = c$  est dite l'intégrale de l'énergie.

Les intégrales premières sont des outils essentiels pour l'étude des problèmes de Mécanique, mais il est aussi utile de connaître des fonctions d'état aux variations extrêmement lentes, nous les appellerons quasi-intégrales [15].

De telles quasi-intégrales sont généralement "sans variations séculaires à tous les ordres" (comme par exemple les demi-grands axes des orbites planétaires du système solaire). Malheureusement, ceci n'implique pas une invariance stricte, mais cela conduit parfois à des variations si lentes que le problème en devient pratiquement intégrable.

D'autre part, si  $h$  est non autonome, nous allons nous intéresser au cas où  $h$  est périodique par rapport à  $t$  de période  $\tau$  :

$$h(\vec{p}, \vec{q}, t+\tau) = h(\vec{p}, \vec{q}, t)$$

On considère pour le système (1.4) une solution périodique dite "nominale" et notée par  $(\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t))$ , alors la période  $\tau_0$  de cette solution est nécessairement multiple de  $\tau$  :

$$\vec{p}_0(t+\tau_0) = \vec{p}_0(t) \quad \vec{q}_0(t+\tau_0) = \vec{q}_0(t)$$

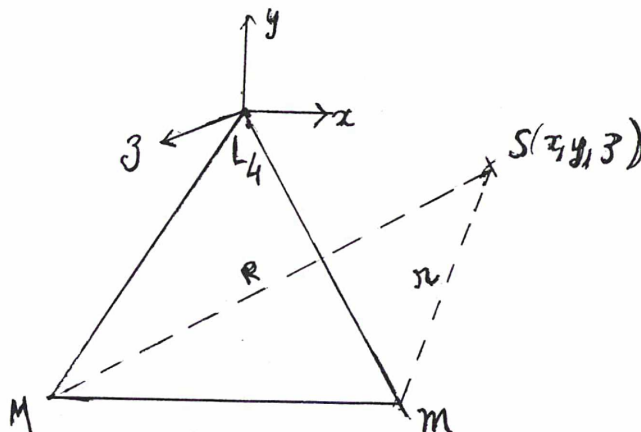
$$\tau_0 = k\tau \quad k > 0 \text{ (entier)}$$

Exemple de Hamiltonien périodique par rapport au temps :

Dans le problème restreint elliptique le Hamiltonien s'écrit :

$$h(\vec{p}, \vec{q}, v) = \frac{1}{2} [(n+y)^2 + (p-x)^2 + q^2 + z^2] - \frac{1}{1 + \ell \cos v} \left[ M \left( \frac{1}{R} + \frac{R^2}{2} \right) + m \left( \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2} \right) \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = (n, p, q), \quad \vec{q} = (x, y, z) : \text{coordonnées "tournantes-pulsantes"} ; \\ t = v : \text{l'anomalie vraie} ; \ell = \text{excentricité des orbites } M \text{ et } m ; \\ R^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + z^2 \\ r^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + z^2 \end{array} \right\} \text{ En prenant l'origine au point } L_4$$



On constate facilement que  $h(\vec{p}, \vec{q}, v)$  est périodique par rapport à  $v$  de période  $\tau = 2\pi$ .

### III.- TRANSFORMATIONS CANONIQUES GENERALES :

Une des méthodes les plus employées en Mécanique Céleste pour résoudre les équations est la méthode du changement de variables. Cette méthode s'avère particulièrement efficace lorsque les équations sont écrites sous forme canonique. Elle consiste essentiellement à transformer les variables  $\vec{p}, \vec{q}$  en de nouvelles variables  $\vec{P}, \vec{Q}$  telles que les équations écrites par rapport à ces nouvelles variables soient plus simples. Si, en plus, le nouveau système d'équations est canonique, nous dirons que le changement de variables est canonique. Ce changement fait partie d'un type de transformations dites canoniques, elles sont définies par le fait qu'elles conservent la forme hamiltonienne du système différentiel étudié.

Les changements de variables dépendant du temps conduisent à des transformations canoniques avec changement de hamiltonien. C'est la recherche d'un nouvel hamiltonien nul qui conduit à la théorie de Jacobi.

On utilise généralement la transformation canonique associée à l'une ou à l'autre des fonctions génératrices  $S$  suivantes :

$$1^\circ) S = S(\vec{p}, \vec{Q}, t, H)$$

$$\vec{P} = \partial S / \partial \vec{Q} \quad \vec{q} = \partial S / \partial \vec{p} \quad T = \partial S / \partial H \quad h = \partial S / \partial t$$

$$2^\circ) S = S(\vec{P}, \vec{q}, T, h)$$

$$\vec{p} = \partial S / \partial \vec{q} \quad \vec{Q} = \partial S / \partial \vec{P} \quad t = \partial S / \partial h \quad H = \partial S / \partial T$$

$$3^\circ) S = S(\vec{p}, \vec{Q}, T, h)$$

$$\vec{P} = \partial S / \partial \vec{Q} \quad \vec{q} = \partial S / \partial \vec{p} \quad t = - \partial S / \partial h \quad H = - \partial S / \partial T$$

$$4^\circ) S = S(\vec{P}, \vec{q}, t, H)$$

$$\vec{p} = \partial S / \partial \vec{q} \quad \vec{Q} = \partial S / \partial \vec{P} \quad T = - \partial S / \partial H \quad h = - \partial S / \partial t$$

## CHAPITRE II

### FORME NORMALE D'UN SYSTEME CONSERVATIF AU VOISINAGE

#### D'UNE POSITION D'EQUILIBRE PLACÉE A L'ORIGINE

Pour étudier le comportement des solutions de l'équation de Hamilton au voisinage d'une position d'équilibre on ne peut pas toujours se limiter à l'équation linéarisée. En effet, les positions asymptotiquement stables des systèmes hamiltoniens sont impossibles en vertu du théorème de Liouville sur la conservation du volume. Donc la stabilité du système linéarisé est toujours neutre : les valeurs propres de la partie linéaire du hamiltonien d'un champ de vecteurs dans une position d'équilibre stable sont toutes situées sur l'axe imaginaire.

Pour les systèmes génériques d'équations différentielles cette stabilité neutre peut être perturbée par l'addition de termes non linéaires arbitrairement petits. Pour les systèmes hamiltoniens la situation est plus compliquée. Supposons, par exemple, que la partie quadratique de la fonction de Hamilton (qui définit la partie linéaire du champ de vecteurs) soit définie positive ou négative dans une position d'équilibre. Alors, la fonction de Hamilton possède un maximum ou un minimum dans cette position. Donc cette position d'équilibre est stable (au sens de Liapounov, mais pas asymptotiquement) non seulement pour le système linéarisé mais pour tout le système non linéaire.

Cependant, la partie quadratique de la fonction de Hamilton n'est pas forcément définie positive ou négative dans la position d'équilibre stable. Un exemple simple est celui de la fonction [16, page 390] :

$$H = p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2$$

L'étude de la stabilité de systèmes possédant une telle partie quadratique doit tenir compte des termes suivants du développement taylorien de la fonction de Hamilton et, avant tout, des termes au cube. Cette étude est commode à effectuer si la fonction de Hamilton est ramenée à la forme la plus simple possible par un changement canonique de variables convenable. En d'autres termes, pour étudier les solutions, il faut choisir un système de coordonnées canoniques au voisinage de la position d'équilibre qui permette d'écrire la fonction de Hamilton et les équations de mouvement dans une forme plus simple.

Ce problème se résout facilement pour les champs de vecteurs non hamiltoniens. Ici, le cas général est celui où, au voisinage de la position d'équilibre, le champ de vecteurs est linéaire dans un système de coordonnées convenables (les théorèmes de Poincaré et Siegel correspondants figurent, par exemple, dans [6]).

Dans le cas hamiltonien, la situation est plus compliquée. La première difficulté est que d'une façon générale il est impossible de ramener un champ hamiltonien à une forme linéaire normale par un changement de coordonnées canoniques. On s'affranchit de cette difficulté en choisissant une forme normale non linéaire qui prenne en considération la variation des fréquences.

L'idée de la réduction des systèmes hamiltoniens aux formes normales remonte à Lindstedt et Poincaré [17, Vol. I]; les formes normales au voisinage de la position d'équilibre ont été étudiées en détail par Birkhoff [18].

Définition (2.1) : [16]

On appelle forme normale de Birkhoff de degré s pour un hamiltonien un polynôme de degré s des coordonnées canoniques  $(P_j, Q_j)$  qui en réalité est un polynôme (de degré s/2) de variables  $I_j = (P_j^2 + Q_j^2)/2$ .

Etude au voisinage d'une position d'équilibre placée à l'origine :

On considère un système hamiltonien autonome à n degrés de liberté

$$(2.1) \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \vec{p}} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{\partial h}{\partial \vec{q}} \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \text{ et } \vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$$

où le hamiltonien  $h = h(\vec{p}, \vec{q})$  s'écrit sous une forme ordonnée en polynômes homogènes de degré croissant :

$$(2.2) \quad h = h_2 + h_3 + \dots + h_m + \dots$$

$(h_m = \text{polynôme homogène de degré } m \text{ en } \vec{p} \text{ et } \vec{q})$

1° Etude du système linéarisé :

Considérons les équations aux variations associées au système (2.1), on les obtient en tronquant h à  $h_2$ , elles sont donc linéaires et l'on peut les écrire sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} d\vec{p}/dt \\ d\vec{q}/dt \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

L'étude spectrale de la matrice M indique que le système des équations linéarisées peut être l'un des systèmes suivants :

- système n-hyperbolique ;
- système (n-k)-hyperbolique et k-elliptique ;  $n-k > 0$  ;
- système (n-m-k)-hyperbolique, m-parabolique et k-elliptique ;  $n-m-k > 0$  ;
- système n-parabolique "cas limite ;
- système n-elliptique.

Dans les trois premiers cas, il y a instabilité exponentielle et c'est au dernier cas que nous allons nous intéresser.

cas simple ( $n = 1$ ) :

Soit  $M$  une application linéaire canonique du plan  $(p, q)$ .  $M$  conserve l'aire  $dp \wedge dq$ , donc  $|M| = 1$ . L'étude spectrale de la matrice  $M$  conduit aux cas suivants [19] :

1°) L'équation caractéristique  $|M - \lambda E| = 0$  admet deux racines réelles  $\lambda_1, \lambda_2$  telles que  $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$ . On dit dans ce cas que le point fixe  $O$  est un point hyperbolique et il est instable. Il résulte des théorèmes classiques de l'algèbre linéaire que chaque application  $M$  de ce type ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réelles) est une rotation hyperbolique, c'est-à-dire qu'elle s'écrit après un changement de variables convenable, sous la forme :  $P, Q \rightarrow \lambda P, \frac{1}{\lambda} Q$  ;

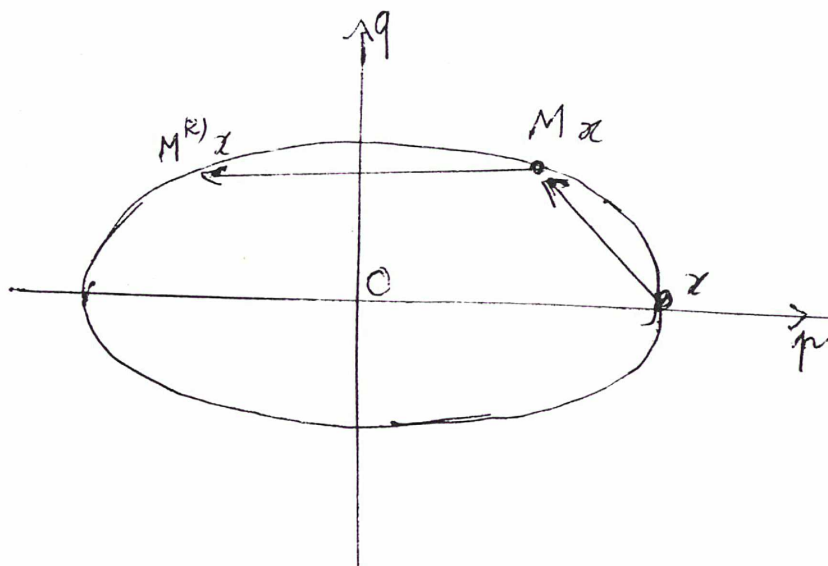
2°) La matrice  $M$  admet deux valeurs propres imaginaires conjuguées :

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Dans ce cas le point fixe  $O$  est dit elliptique et la rotation d'angle  $\alpha$  appartient à ce type ( $\lambda_1 = e^{-i\alpha}$ ,  $\lambda_2 = e^{i\alpha}$ ) :

$$p, q \rightarrow p \cos \alpha - q \sin \alpha, \quad p \sin \alpha + q \cos \alpha$$

Un changement de variables linéaire transforme cette rotation en une "rotation elliptique". Evidemment, le point fixe  $O$  est stable.

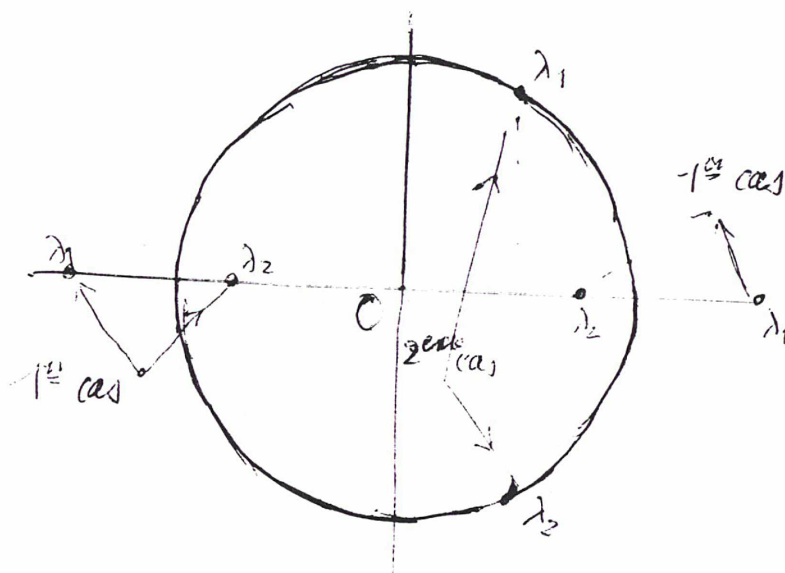


Les points  $Mx, M^{(2)}x, \text{ etc } \dots$ , sont situés sur une même ellipse.

3°)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1, (\lambda^2 = 1)$

On dit dans ce cas que le point fixe 0 est parabolique, c'est un cas critique.

La figure suivante montre la distribution des valeurs propres de la matrice M dans l'espace des phases (p,q) :



Nous allons nous borner au deuxième cas, c'est-à-dire que nous allons considérer le cas d'un système hamiltonien possédant une position d'équilibre stable à l'origine.

L'hypothèse de l'équilibre stable à l'origine entraîne les conséquences suivantes [20] :

- a) Les équations aux variations obtenues en tronquant  $h$  à  $h_2$  admettent une solution sinusoïdale de fréquence  $\omega$ ; il est équivalent de dire que la matrice M de ces équations linéaires admet les deux valeurs propres imaginaires conjuguées  $\pm i\omega$  ;
- b) Considérons les courbes  $h(p,q) = \text{cste}$ , qui sont les trajectoires dans l'espace des phases. Dans un voisinage assez petit de l'origine, ces courbes sont fermées : donc les mouvements sont périodiques. Soit  $T(h)$



la période et  $I(h)$  l'aire du domaine intérieur à la trajectoire  $h(p,q) = \text{cste}$ . On démontre que [21] :

$$T(h) = dI/dh$$

et on en déduit l'existence d'un changement de variables canonique  $(p,q) \rightarrow (I,w)$  tel que :

- 1)  $I, w$  jouent le rôle de coordonnées polaires, c'est-à-dire  $I > 0$  et  $p, q$  fonctions périodiques de période  $2\pi$  de la variable angulaire  $w$  ;
- 2) le hamiltonien avec les nouvelles variables ne dépend que de la variable d'action  $I$ , donc les équations du mouvement ont pour solution :

$$\begin{cases} I = I_0 \\ w = \omega(I_0)t + w_2 \end{cases}$$

On peut conclure :

Dans le plan rapporté aux coordonnées polaires  $(I, w)$ , le mouvement se réduit à une rotation différentielle autour de la position d'équilibre.

Ce résultat se généralise pour un nombre de degrés de liberté quelconque ; énonçons pour  $n = 2$  le théorème de Liouville :

Soit un système hamiltonien à deux degrés de liberté possédant une position d'équilibre à l'origine. L'hypothèse de l'équilibre stable entraîne les conséquences suivantes :

- a) les équations aux variations admettent deux solutions sinusoïdales de fréquences  $\omega_1, \omega_2$ . Il revient au même de dire que la matrice  $M$  de ces équations linéaires admet les quatre valeurs propres  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ .
- b) Il existe un changement de variables canoniques :

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \rightarrow (I_1, I_2, w_1, w_2)$$

tel que :

- 1)  $I_1, I_2$  soient positifs et  $w_1, w_2$  deux variables angulaires ;
- 2) le nouvel hamiltonien ne dépende que de  $I_1, I_2$ .

Les solutions du mouvement sont donc :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= c_1 \\ I_2 &= c_2 \end{aligned} \right\} \text{ (constantes)}$$

$$I_2 = c_2$$

$$w_1 = v_1 t + c'_1$$

$$w_2 = v_2 t + c'_2$$

$v_1, v_2$  = deux fonctions de  $c_1, c_2$  qui ont pour parties principales  $\omega_1, \omega_2$ , lorsque  $c_1, c_2 \rightarrow 0$ .

On peut énoncer : les mouvements correspondants à deux valeurs données  $c_1, c_2$  des intégrales premières  $I_1, I_2$  sont des mouvements sur un tore, définis par les deux rotations  $w_1, w_2$ .

Les variables  $I$  et  $w$  sont appelées variables canoniques, où  $I$  est la variable d'action et  $w$  variable angulaire [16], [21], elles sont conjuguées l'une de l'autre, ce choix de variables  $(I, w)$  s'appelle choix de variables actions-angles. Le hamiltonien en variables action-angle dépend de  $I$  seulement, on dit que  $h$  est sous forme normale ou de Poincaré.

Revenons au système (2.1) et supposons que dans l'approximation linéaire la position d'équilibre de ce système hamiltonien à  $n$  degrés de liberté est stable et que les  $n$  valeurs propres  $i\omega_1, \dots, i\omega_n$  (ou les  $n$  fréquences propres  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ) sont toutes distinctes. Alors la partie quadratique du hamiltonien, c'est-à-dire  $h_2$  se ramène par une transformation canonique linéaire à la forme :

$$h_2 = \frac{1}{2} \omega_1 (p_1^2 + q_1^2) + \dots + \frac{1}{2} \omega_n (p_n^2 + q_n^2)$$

où certains  $\omega_k$  peuvent être négatifs.

Les équations linéarisées s'écrivent :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp_j/dt = - \partial h_2 / \partial q_j = - \omega_j q_j \\ dq_j/dt = \partial h_2 / \partial p_j = \omega_j p_j \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n)$$

$\omega_j$  est la vitesse angulaire (fréquence propre) dans le plan  $(p_j, q_j)$  :

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = \omega_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

## 2°) Etude générale :

On considère le hamiltonien (2.2) :

$$(2.4) \quad h = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (p_j^2 + q_j^2) + h_3 + \dots + h_m + \dots$$

et la transformation linéaire  $(\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{P}, \vec{Q})$  définie par la fonction génératrice  $S(\vec{p}, \vec{Q})$  telles que :

$$(2.5) \quad \vec{P} = \partial S / \partial \vec{Q} \quad \vec{q} = \partial S / \partial \vec{p}$$

On prend :

$$(2.6) \quad S = \vec{p} \vec{Q} + S_m(\vec{p}, \vec{Q})$$

où  $S_m$  est une fonction homogène de degré  $m$  en  $\vec{p}, \vec{Q}$ , donc  $\partial S_m / \partial \vec{Q}$ ,  $\partial S_m / \partial \vec{p}$  et par conséquent  $(\vec{p} - \vec{P})$ ,  $(\vec{q} - \vec{Q})$  sont de degré  $(m - 1)$ .

Soit :

$$H(\vec{P}, \vec{Q}) = H_2 + \dots + H_m + \dots$$

le nouvel Hamiltonien en variables  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$ . Supposons que  $H_2, \dots, H_{m-1}$  aient les mêmes expressions que  $h_2, \dots, h_{m-1}$  :

$$(2.7) \quad h = h_2 + \dots + h_{m-1} + h_m + O(|p| + |q|)^{m+1} \equiv \\ \equiv H_2 + \dots + H_{m-1} + H_m + O(|P| + |Q|)^{m+1}$$

mais, d'après (2.5), on écrit :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = \vec{P} - (\partial S_m / \partial \vec{Q}) \\ \vec{q} = \vec{Q} + (\partial S_m / \partial \vec{p}) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2) - (P^2 + Q^2) &= - \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}} (2\vec{p} + \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}}) + \frac{\partial S_m}{\partial \vec{P}} (2\vec{q} - \frac{\partial S_m}{\partial \vec{P}}) \\ &= - 2(\vec{p} \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}} - \vec{q} \frac{\partial S_m}{\partial \vec{P}}) + o(|P| + |Q|)^{m+1} \end{aligned}$$

donc  $(h_2 - H_2)$  est de degré  $m$  et  $(h_3 - H_3)$  est de degré  $m+1, \dots$ , donc l'hypothèse d'identité d'expression de  $h_2$  et  $H_2$ ,  $h_3$  et  $H_3$ ,  $\dots$ ,  $h_{m-1}$  et  $H_{m-1}$  était justifiée. Pour trouver l'expression de  $H_m$  à partir de celle de  $h_m(\vec{p}, \vec{q})$  on considère (2.7), en effet on a :

$$\begin{aligned} H_m &= h_m + h_2 - H_2 + o(|P| + |Q|)^{m+1} \\ &= h_m + \sum_{j=1}^n \omega_j (q_j \frac{\partial S_m}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial S_m}{\partial Q_j}) + o(|P| + |Q|)^{m+1} \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dS_m}{dt} &= \sum_{j=1}^n (\frac{\partial S_m}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial S_m}{\partial Q_j} \frac{dQ_j}{dt}) \\ &= \sum_{j=1}^n (- \frac{\partial S_m}{\partial p_j} \frac{\partial h_2}{\partial q_j} + \frac{\partial S_m}{\partial Q_j} \frac{\partial h_2}{\partial p_j}) + o(|P| + |Q|)^{m+1} \\ &= \sum_{j=1}^n (- \omega_j q_j \frac{\partial S_m}{\partial p_j} + \omega_j p_j \frac{\partial S_m}{\partial Q_j}) + o(|P| + |Q|)^{m+1} \end{aligned}$$

(d'après (2.3)).

Par conséquent :

$$(2.9) \quad \left\| \begin{aligned} H_m &= h_m - \frac{dS_m}{dt} + o(|P| + |Q|)^{m+1} \\ \frac{dS_m}{dt} &= \sum_{j=1}^n \omega_j (p_j \frac{\partial S_m}{\partial Q_j} - q_j \frac{\partial S_m}{\partial p_j}) + o(|P| + |Q|)^{m+1} \end{aligned} \right.$$

Considérons un système de coordonnées complexes :

$$z_j = p_j + iq_j$$

donc :

$$\bar{z}_j = p_j - iq_j$$

d'où :

$$(2.10) \quad p_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j) \quad q_j = \frac{i}{2}(z_j - \bar{z}_j)$$

a) Ecriture de h en  $z, \bar{z}$  :

Remplaçons dans (2.4) les  $p_j$  et  $q_j$  par  $z_j$  et  $\bar{z}_j$  à l'aide de (2.10),

il vient :

$$(2.11) \quad h = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j z_j \bar{z}_j + h_3(z_j, \bar{z}_j) + \dots + h_m + \dots$$

les  $h_k$  sont des fonctions homogènes de degré  $k$  par rapport à  $z_j$  et  $\bar{z}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

b) Les équations linéarisées :

Remarquons que :

$$\left( \sum_{j=1}^n p_j dq_j \right) - H dt$$

s'écrit :

$$- \frac{i}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j - 2iH dt \right]$$

à une différentielle totale exacte près,

donc le système canonique s'écrit :

$$dz_j/dt = 2i (\partial h / \partial \bar{z}_j)$$

d'où on obtient les équations linéarisées en tronquant  $h$  à  $h_2$  :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} dz_j/dt = 2i(\partial h_2 / \partial \bar{z}_j) = i\omega_j z_j \\ d\bar{z}_j/dt = -2i(\partial h_2 / \partial z_j) = -i\omega_j \bar{z}_j \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n)$$

c) L'expression de  $H_m$  en variables complexes :

Il s'agit de trouver l'expression équivalente à (2.9) mais en variables  $z$  et  $\bar{z}$ , et pour cela nous allons calculer  $dS_m/dt$  en supposant

que  $S_1$  est fonction des  $z$  et  $\bar{z}$  (c'est-à-dire fonction des  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$  au lieu des  $\vec{p}$  et  $\vec{Q}$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{dS_m}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial S_m}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial S_m}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n i\omega_j \left( z_j \frac{\partial S_m}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial S_m}{\partial \bar{z}_j} \right) + O(|z|, \bar{z})^{m+1} \end{aligned}$$

d'où :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} H_m(z, \bar{z}) &= h_m - \frac{dS_m}{dt} + O(z, \bar{z})^{m+1} \\ \frac{dS_m}{dt} &= \sum_{j=1}^n i\omega_j \left( z_j \frac{\partial S_m}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial S_m}{\partial \bar{z}_j} \right) + O(z, \bar{z})^{m+1} \end{aligned}$$

signalons que les dérivées partielles dans (2.13) sont "formelles".

D'autre part, nous allons considérer un monôme  $M(z, \bar{z})$  de  $h_m$  :

$$(2.14) \quad \begin{aligned} M &= A_M \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} & A_M &= \text{constante} \\ \sum_{j=1}^n (k_{jM} + \ell_{jM}) &= m \end{aligned}$$

Définition (2.2) :

Les vitesses angulaires  $\omega_1, \dots, \omega_n$  vérifient une relation rationnelle d'ordre  $s$  s'il existe une série de nombre entiers  $k_1, \dots, k_n$  non tous nuls telle que :

$$(2.15) \quad \sum_{j=1}^n k_j \omega_j = 0 \quad \sum_{j=1}^n |k_j| = s$$

Annulation d'un monôme  $M(z, \bar{z})$  de  $H_m$  :

On considère un monôme  $M(z, \bar{z})$  de  $h_m$  donnée par (2.14). Soit  $M(z, \bar{z})$  le monôme correspondant de  $H_m$ . Pour annuler ou simplifier  $M$  nous allons

considérer un monôme correspondant à  $M$  dans  $S_m$ , soit :

$$(2.16) \quad m = B_M \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \quad B_M = \text{cste}$$

ce monôme, on a donc :

$$m = \rho M \quad \rho = \text{cste}$$

et le monôme  $\mathcal{M}$  s'écrit, d'après (2.13) :

$$\mathcal{M} = M - \frac{dm}{dt} + o(|z|)^{m+1}$$

ou :

$$(2.17) \quad \mathcal{M} = M - \rho \frac{dM}{dt} + o(|z|)^{m+1}$$

Calcul de  $dM/dt$  :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial M}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ k_{jM} \frac{M}{z_j} i\omega_j z_j + \ell_{jM} \frac{M}{\bar{z}_j} (-i\omega_j \bar{z}_j) \right] + o(|z|)^{m+1} \end{aligned}$$

d'où :

$$(2.18) \quad \frac{dM}{dt} = iM \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - \ell_{jM}) + o(|z|)^{m+1}$$

revenons à (2.17)

$$\mathcal{M} = M - \rho M \sum_{j=1}^n \mu_j (k_{jM} - \ell_{jM}) + o(|z|)^{m+1}$$

où :

$$\mu_j = i\omega_j$$

donc, pour que  $\mathcal{M} = o(|z|)^{m+1}$  il faut prendre si possible :

$$(2.19) \quad \rho = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mu_j (\ell_{jM} - k_{jM})} \quad \mu_j = i\omega_j$$

Conséquences :

1°) On ne peut simplifier les monômes tels que :

$$k_{jM} = \ell_{jM} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

2°) supposons que toutes les vitesses angulaires  $\omega_j$  ne vérifient aucune relation rationnelle d'ordre  $\leq s$ , donc  $\sum_{j=1}^n \mu_j (\ell_{jM} - k_{jM})$  est non nul d'après la définition (2.2), sauf si notre monôme

de degré  $m$  s'exprime en fonction des produits  $z_j \bar{z}_j = 2I_j$ , c'est-à-dire lorsque tous les  $k_{jM}$  sont égaux aux  $l_{jM}$ . Nous pouvons donc jusqu'à un degré quelconque  $N$  supprimer tous les monômes de degré  $N$  à l'exception de ceux qui sont fonctions de  $I_j$  seulement (c'est-à-dire de somme  $P_j^2 + Q_j^2$  seulement). En faisant  $N = 3, 4, \dots, s$  nous obtenons le résultat suivant :

THEOREME (2.1) :



Si les vitesses angulaires  $\omega_1, \dots, \omega_n$  ne vérifient aucune relation rationnelle d'ordre  $\leq s$ , alors il existe un système canonique de coordonnées au voisinage de la position d'équilibre tel que la fonction de Hamilton s'y écrive sous la forme de Birkhoff de degré  $s$  aux termes près de degré  $s+1$  :

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = H_s(\vec{P}, \vec{Q}) + o(|\vec{P}| + |\vec{Q}|)^{s+1}$$

En se servant du théorème de Birkhoff, il est utile de remarquer qu'un système dont le hamiltonien est une forme normale est intégrable. Plus exactement, considérons les "coordonnées canoniques polaires"  $I_j, \phi_j$  où  $I_j$  est la variable d'action et  $\phi_j$  la variable angulaire, en fonction desquelles  $P_j$  et  $Q_j$  s'expriment par les formules :

$$(2.20) \quad P_j = \sqrt{2I_j} \cos \phi_j \quad Q_j = \sqrt{2I_j} \sin \phi_j$$

Démontrons que dans ce cas on a :

$$z_j \bar{z}_j = c_j \text{ ou } P_j^2 + Q_j^2 = c_j \quad j = 1, \dots, n$$

en effet :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = \bar{z}_j \frac{dz_j}{dt} + z_j \frac{d\bar{z}_j}{dt}$$

or :

$$\begin{aligned} dz_j/dt &= 2i(\partial H/\partial \bar{z}_j) \\ &= 2i \frac{\partial H}{\partial (z_j \bar{z}_j)} \cdot \frac{\partial (z_j \bar{z}_j)}{\partial \bar{z}_j} \end{aligned}$$



$$(2.21) \quad \frac{dz_j}{dt} = -2i z_j \frac{\partial H}{\partial(z_j \bar{z}_j)}$$

de même :

$$(2.22) \quad \frac{d\bar{z}_j}{dt} = -2i \bar{z}_j \frac{\partial H}{\partial(z_j \bar{z}_j)}$$

donc :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i z_j \bar{z}_j \frac{\partial H}{\partial(z_j \bar{z}_j)} - 2i z_j \bar{z}_j \frac{\partial H}{\partial(z_j \bar{z}_j)} = 0$$

par conséquent :

$$(2.23) \quad z_j \bar{z}_j = p_j^2 + q_j^2 = 2I_j = c_j \quad j = 1, \dots, n$$

Comme le hamiltonien ne s'exprime qu'en fonction des coordonnées d'action  $I_j$ , le système est intégrable et décrit des mouvements quasi-périodiques de vitesses angulaires  $\omega = \partial H / \partial I$  sur les tores  $I = \text{cste}$ . En particulier, la position d'équilibre  $P = Q = 0$  est stable pour la forme normale.

Soient :

$$\omega_j = d\theta_j / dt = f_j(R_1, \dots, R_n) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

où :

$$R_j = (z_j \bar{z}_j)^{\frac{1}{2}} = (p_j^2 + q_j^2)^{\frac{1}{2}} = \text{cste}$$

On a donc un système de rotation différentielle autour de la position d'équilibre.

3°) Supposons que les vitesses angulaires  $\omega_j$  sont rationnellement liées, c'est-à-dire qu'elles vérifient une relation de la forme

$$(2.24) \quad \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j - \ell_j) = 0 \quad \sum_{j=1}^n |k_j - \ell_j| = s$$

pour des entiers  $k_j$  et  $\ell_j$  bien choisis avec  $(k_j - \ell_j)$  non tous nuls. En plus, supposons que le hamiltonien  $h$  ait la forme suivante :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} h &= h_2 + h_m + \text{ordre sup} \\ h_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j z_j \bar{z}_j \\ h_m &= \sum_b M_b \quad M_b = A_b \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jb}} \bar{z}_j^{\ell_{jb}} \end{aligned}$$

$h_m$  contient au moins un terme tenant compte de la relation (2.24) de rationalité

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \forall b \quad \sum_{j=1}^n (k_{jb} + \ell_{jb}) &= m \\ \forall b \quad \sum_{j=1}^n (k_{jb} - \ell_{jb}) \omega_j &= 0 \end{aligned}$$

Etude de l'évolution de  $z_j \bar{z}_j$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) &= \bar{z}_j \frac{dz_j}{dt} + z_j \frac{d\bar{z}_j}{dt} \\ &= 2i \left( \bar{z}_j \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} - z_j \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) \end{aligned}$$

d'après (2.25) il vient :

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \omega_j z_j + \sum_b \ell_{jb} \frac{M_b}{\bar{z}_j}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \omega_j \bar{z}_j + \sum_b k_{jb} \frac{M_b}{z_j}$$

d'où :

$$(2.27) \quad \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i \sum_b M_b (\ell_{jb} - k_{jb}) + o(|z|)^{m+1}$$

On constate donc que l'évolution de  $z_j \bar{z}_j$  dépend de  $M_b$  et pour cette raison nous allons examiner l'évolution de  $M_b$  :

$$\begin{aligned} dM_b/dt &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M_b}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial M_b}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ k_{jb} \frac{M_b}{z_j} \left( 2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} \right) + \ell_{jb} \frac{M_b}{\bar{z}_j} \left( -2i \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) \right] \\ &= 2iM_b \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{jb}}{z_j} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\ell_{jb}}{\bar{z}_j} \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) \\ &= 2iM_b \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j \bar{z}_j} \left( k_{jb} \bar{z}_j \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} - \ell_{jb} z_j \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) + o(|z|)^{2m+1} \end{aligned}$$

soit c l'un des b :

$$\begin{aligned} dM_c/dt &= 2iM_c \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j \bar{z}_j} \left( k_{jc} \bar{z}_j \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} - \ell_{jc} z_j \frac{\partial h}{\partial z_j} \right) \\ &= 2iM_c \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j \bar{z}_j} \left[ k_{jc} \bar{z}_j \left( \frac{1}{2} \omega_j z_j + \frac{1}{z_j} \sum_b \ell_{jb} M_b \right) - \right. \\ &\quad \left. - \ell_{jc} z_j \left( \frac{1}{2} \omega_j \bar{z}_j + \frac{1}{z_j} \sum_b k_{jb} M_b \right) \right] \\ &= 2iM_c \sum_j \frac{1}{2} \omega_j (k_{jc} - \ell_{jc}) + 2iM_c \sum_{j=1}^n \sum_b \frac{1}{z_j \bar{z}_j} (k_{jc} \ell_{jb} - k_{jb} \ell_{jc}) M_b \end{aligned}$$

tenant compte de (2.26), il vient :

$$(2.28) \quad \frac{dM_c}{dt} = 2iM_c \sum_{j=1}^n \sum_b \frac{M_b}{z_j \bar{z}_j} (k_{jc} \ell_{jb} - \ell_{jc} k_{jb}) + o(|z|)^{2m-1}$$

Calcul de  $dh_m/dt$  :

D'après (2.25), on a :

$$h_m = \sum_c M_c$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{dh_m}{dt} &= \sum_c \frac{dM_c}{dt} \\ &= 2i \sum_j \sum_b \sum_c \frac{M_b M_c}{z_j \bar{z}_j} (k_{jc} \ell_{jb} - \ell_{jc} k_{jb}) + o(|z|)^{2m-1} \end{aligned}$$

mais :

$$\sum_b \sum_c M_b M_c (k_{jc} \ell_{jb} - \ell_{jc} k_{jb}) \equiv 0$$

d'où :

$$(2.29) \quad \frac{dh_m}{dt} = o(|z|)^{2m-1}$$

Calcul de  $dh_2/dt$  :

D'après (2.25) et tenant compte de (2.27), il vient :

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j 2i \sum_b M_b (\ell_{jb} - k_{jb}) + o(|z|)^{m+1} \\ &= i \sum_b M_b \sum_{j=1}^n \omega_j (\ell_{jb} - k_{jb}) + o(|z|)^{m+1} \end{aligned}$$

mais :

$$\sum_{j=1}^n \omega_j (\ell_{jb} - k_{jb}) = 0 \text{ suivant (2.26)}$$

d'où :

$$(2.30) \quad dh_2/dt = o(|z|)^{m+1}$$

En conséquence :

$$(2.31) \quad dh/dt = o(|z|)^{m+1}$$

Cas particulier (I) :

On considère un hamiltonien ayant la forme suivante :

$$(2.32) \quad h = h_2 + M + \bar{M} + o(|z|)^{m+1}$$

avec :

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j z_j \bar{z}_j & z_j &= p_j + iq_j \\ M &= A \prod_{j=1}^n z_j^{k_j} \bar{z}_j^{\ell_j} \\ \bar{M} &= \bar{A} \prod_{j=1}^n z_j^{\ell_j} \bar{z}_j^{k_j} \\ \sum_{j=1}^n (k_j + \ell_j) &= m \end{aligned} \right.$$

l'hamiltonien  $h$  est donc la somme de  $h_2$  et de deux monômes de degré  $m$ , conjugués l'un de l'autre.

On a, d'après (2.18) :

$$(2.34) \quad \frac{dM}{dt} = M \sum_{j=1}^n \mu_j (k_j - \ell_j) + O(|z|)^{m+1} \quad \mu_j = i\omega_j$$

d'où la condition pour que  $dM/dt = O(|z|)^{m+1}$  est :

$$(2.35) \quad \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j - \ell_j) = 0$$

Calcul de  $(d/dt)(z_j \bar{z}_j)$  :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = \bar{z}_j \frac{dz_j}{dt} + z_j \frac{d\bar{z}_j}{dt}$$

mais :

$$\begin{aligned} dz_j/dt &= 2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = 2i \left( \frac{\partial h_2}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial M}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{z}_j} \right) \\ &= 2i \left( \frac{1}{2} \omega_j z_j + \ell_j \frac{M}{z_j} + k_j \frac{\bar{M}}{\bar{z}_j} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$(2.36) \quad \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i(\ell_j - k_j)(M - \bar{M}) + O(|z|)^{m+1}$$

Conséquences :

1°) si  $l_j - k_j = 0$  alors  $(d/dt)(z_j \bar{z}_j) = O(|z|)^{m+1}$  et  $z_j \bar{z}_j = c_j$  est une quasi-intégrale ;

2°) si  $l_j - k_j \neq 0 \forall j$  alors :

$$(2.37) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{z_j \bar{z}_j}{k_j - l_j} \right) = 4\mathfrak{J}_m(M)$$

d'où :

$$(2.38) \quad \frac{z_a \bar{z}_a}{k_a - l_a} - \frac{z_b \bar{z}_b}{k_b - l_b} = \text{cste} \quad a, b \in \{1, \dots, n\}$$

Calcul de  $dM/dt$  :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial M}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n M i \omega_j (k_j - l_j) + 2i \frac{MM}{z_j \bar{z}_j} (k_j^2 - l_j^2) + O(|z|)^{2m-1} \end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte de (2.35) :

$$(2.39) \quad \boxed{\frac{dM}{dt} = 2i MM \sum_{j=1}^n \frac{k_j^2 - l_j^2}{z_j \bar{z}_j}}$$

on constate donc que  $dM/dt$  est imaginaire pur et si l'on revient à (2.37)

on aura la conclusion suivante :

$$(2.40) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si les } (k_j^2 - l_j^2) \text{ "ou les } (k_j - l_j) \text{ " sont tous de même} \\ \text{signe, alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_m(M) = \infty \text{ d'où l'instabilité.} \\ \text{Si, par contre, certains } (k_j - l_j) \text{ sont de signes opposés,} \\ \text{alors il y aura stabilité à l'ordre étudié.} \end{array} \right\}$$

Cette dernière affirmation résulte de la formule (2.38) qui montre que les  $(z_j \bar{z}_j)$  sont bornés.

Cas particulier (II) :

On considère un hamiltonien ayant la forme suivante :

$$(2.41) \quad h = h_2 + M + \bar{M} + M_2 + o(|z|)^{m+1}$$

avec :

$$(2.42) \quad \left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j z_j \bar{z}_j & z_j &= p_j + iq_j \\ M &= A \prod_{j=1}^n z_j^{k_j} \bar{z}_j^{\ell_j} \\ \bar{M} &= \bar{A} \sum_{j=1}^n z_j^{\ell_j} \bar{z}_j^{k_j} \\ M_2 = \bar{M}_2 &= A_2 \prod_{j=1}^n (z_j \bar{z}_j)^{m_j} \\ \sum_{j=1}^n (k_j + \ell_j) &= m & \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j - \ell_j) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (2m_j) &= k \leq m \end{aligned} \right\}$$

par des calculs analogues à celui fait dans le cas précédent on obtient

$$(2.43) \quad \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i(\ell_j - k_j)(M - \bar{M}) + o(|z|)^{m+1}$$

ce qui signifie que le monôme  $M_2$  n'a, à l'ordre étudié, aucun effet sur l'évolution de  $(z_j \bar{z}_j)$ .

Conséquences :

- 1°) Si  $\ell_j = k_j$  alors  $z_j \bar{z}_j = c_j$  est une quasi-intégrale ;
- 2°) si  $\ell_j - k_j \neq 0 \quad \forall j$ , alors :

$$(2.44) \quad \left\| \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{z_j \bar{z}_j}{k_j - l_j} \right) &= 4\mathcal{J}_m(M) & \forall j = 1, \dots, n \\ \frac{z_a \bar{z}_a}{k_a - l_a} - \frac{z_b \bar{z}_b}{k_b - l_b} &= \text{cste} & \forall a, b = 1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

Calcul de  $dM/dt$  :

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial M}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z_j} = k_j \frac{M}{z_j} \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{z}_j} = l_j \frac{M}{\bar{z}_j}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = 2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = 2i \left( \frac{1}{2} \omega_j z_j + l_j \frac{M}{\bar{z}_j} + k_j \frac{\bar{M}}{z_j} + m_j \frac{M_2}{\bar{z}_j} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[ M i \omega_j (k_j - l_j) + 2i \frac{M \bar{M}}{z_j \bar{z}_j} (k_j^2 - l_j^2) \right. \\ &\quad \left. + 2i M M_2 \frac{m_j}{z_j \bar{z}_j} (k_j - l_j) \right] + o(|z|)^{2m+1} \end{aligned}$$

mais on a :

$$\sum_{j=1}^n \omega_j (k_j - l_j) = 0$$

d'où :

$$(2.45) \quad \boxed{\frac{dM}{dt} = 2im \sum_{j=1}^n \frac{(k_j - l_j)}{z_j \bar{z}_j} (M \bar{k}_j + \bar{M} l_j + M_2 m_j) + o(|z|)^{2m-1}}$$

Calcul de  $dM_2/dt$  :

$$\frac{dM_2}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial M_2}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt} + \frac{\partial M_2}{\partial \bar{z}_j} \frac{d\bar{z}_j}{dt} \right)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial z_j} = m_j \frac{M_2}{z_j} \quad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{z}_j} = m_j \frac{M_2}{\bar{z}_j}$$



d'où :

$$(2.46) \quad \frac{dM_2}{dt} = 2iM_2(M - \bar{M}) \sum_{j=1}^n \frac{m_j(\ell_j - k_j)}{z_j \bar{z}_j} + o(|z|)^{2m-1}$$

On peut montrer facilement à l'aide de (2.45) et (2.46) que :

$$\frac{d}{dt} (M + \bar{M} + M_2) = o(|z|)^{2m-1}$$

par conséquent :

$$(2.47) \quad M + \bar{M} + M_2 = \text{cste}$$

En résumé :

Si deux  $(k_j - \ell_j)$  ont des signes opposés, alors il y aura stabilité (à l'ordre étudié) car les  $z_j \bar{z}_j$  restent bornés.

CHAPITRE III

VOISINAGE D'UNE SOLUTION PERIODIQUE

Nous allons essayer dans ce chapitre de généraliser l'étude précédente et pour cela, nous allons considérer un système d'équations hamiltoniennes avec une fonction de Hamilton dépendant du temps  $t$  et périodique par rapport à  $t$  de période  $\tau_0$  :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}}{dt} = -\partial h / \partial \vec{q} \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \partial h / \partial \vec{p} \\ h = h(\vec{p}, \vec{q}, t) \quad ; \quad \vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \quad \vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \\ h(\vec{p}, \vec{q}, t + \tau_0) = h(\vec{p}, \vec{q}, t) \end{array} \right.$$

Première simplification :

Nous allons d'abord placer l'orbite nominale à l'origine par une transformation canonique faisant passer des  $\vec{p}, \vec{q}, t, h$  aux  $\vec{P}, \vec{Q}, T, H$  ; nous prendrons toujours  $t = T$  et le système (3.1) se transforme en :

$$(3.2) \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = -\partial H / \partial \vec{Q} \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \partial H / \partial \vec{P}$$

Considérons la première fonction génératrice citée dans le premier chapitre, à savoir :

$$S = tH + S_1(\vec{p}, \vec{Q}, t)$$

Nous voulons que la solution nominale périodique  $\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t)$  devienne  $\vec{P}_0 = 0$  et  $\vec{Q}_0 = 0$ , donc en  $(\vec{p}_0, 0, t)$  il nous faut :

$$\partial S / \partial \vec{Q} = \vec{P}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \partial S / \partial \vec{p} = \vec{q}_0$$

d'où :

$$(3.3) \quad S = tH + \vec{p}\vec{q}_0(t) + \vec{p}\vec{Q} - \vec{p}_0(t)\vec{Q} + S_2(t)$$

or :

$$\vec{P} = \partial S / \partial \vec{Q} \quad \vec{q} = \partial S / \partial \vec{p} \quad h = \partial S / \partial t$$

donc :

$$\vec{P} = \vec{p} - \vec{p}_0(t)$$

$$\vec{q} = \vec{q}_0(t) + \vec{Q}$$

$$h = H + \vec{p} \frac{d\vec{q}_0(t)}{dt} - \frac{d\vec{p}_0(t)}{dt} \vec{Q} + \frac{dS_2(t)}{dt}$$

soit, en exprimant les nouvelles variables en fonction des anciennes :

$$\vec{P} = \vec{p} - \vec{p}_0(t)$$

$$\vec{Q} = \vec{q} - \vec{q}_0(t)$$

$$H = h - \vec{p} \frac{d\vec{q}_0}{dt} + \frac{d\vec{p}_0}{dt} (\vec{q} - \vec{q}_0(t)) - \frac{dS_2}{dt}$$

afin que l'on ait  $H = 0$  sur la solution nominale on prendra :

$$0 = h[\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t), t] - \frac{dS_2}{dt} - \vec{p}_0(t) \frac{d\vec{q}_0}{dt}$$

donc :

$$\frac{dS_2}{dt} = h[\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t), t] - \vec{p}_0(t) \frac{d\vec{q}_0}{dt}$$

et :

$$\begin{aligned} H(\vec{P}, \vec{Q}, t) &= h(\vec{p}, \vec{q}, t) - h[\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t), t] + \vec{p}_0(t) \frac{d\vec{q}_0}{dt} - \vec{p} \frac{d\vec{q}_0}{dt} + \\ &+ \frac{d\vec{p}_0(t)}{dt} \vec{q} - \frac{d\vec{p}_0}{dt} \vec{q}_0(t) \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{aligned} (3.4) \quad & \vec{P} = \vec{p} - \vec{p}_0(t) \quad ; \quad P_0(t) = 0 \\ & \vec{Q} = \vec{q} - \vec{q}_0(t) \quad ; \quad Q_0(t) = 0 \\ & H(\vec{P}, \vec{Q}, t) = h[\vec{P} + \vec{p}_0(t), \vec{Q} + \vec{q}_0(t), t] - \vec{P} \left( \frac{\partial h}{\partial \vec{p}} \right)_0 - \left( \frac{\partial h}{\partial \vec{q}} \right)_0 \vec{Q} - \\ & \quad - h[\vec{p}_0(t), \vec{q}_0(t), t] \end{aligned}$$

Conséquences :

1°) Les fonctions  $H$ ,  $\partial H / \partial \vec{P}$ ,  $\partial H / \partial \vec{Q}$  sont nulles sur la solution nominale, soit en  $\vec{P} = \vec{Q} = 0$

2°) Le nouvel hamiltonien  $H(\vec{P}, \vec{Q}, t)$  est périodique par rapport à  $t$  de période  $\tau_0$  :

$$H(\vec{P}, \vec{Q}, t + \tau_0) \equiv H(\vec{P}, \vec{Q}, t)$$

3°) si la fonction  $h(\vec{p}, \vec{q}, t)$  est analytique, alors  $H(\vec{P}, \vec{Q}, t)$  l'est aussi et l'on peut écrire :

$$H = H_2 + H_3 + \dots + H_m \dots$$

avec  $H_m$  est fonction homogène de degré  $m$  en  $\vec{P}, \vec{Q}$ , ainsi :

$$H_2 = \frac{1}{2} \vec{P} A \vec{P} + \vec{P} B \vec{Q} + \frac{1}{2} \vec{Q} C \vec{Q}$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  étant trois tenseurs réels périodiques en  $t$  de période  $\tau_0$  (on prendra  $A$  et  $C$  symétriques).

Deuxième simplification :

Nous voulons dans la suite obtenir  $H_2$  réel, constant et avec très peu de termes par une transformation linéaire périodique qui nous est fournie par la théorie de Floquet [1].

Etude linéarisée : Que se passe-t-il sur une période  $\tau_0$  lorsque l'on néglige  $H_3$ ,  $H_4$ , etc... ?

La transformation conduisant de  $\vec{P}_a, \vec{Q}_a$  à l'instant  $t$  à  $\vec{P}_b, \vec{Q}_b$  à l'instant  $t + \tau_0$  est alors linéaire, soit  $M$  la matrice de cette transformation :

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_b \\ \vec{Q}_b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{P}_a \\ \vec{Q}_a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $M$  sont indépendantes de l'instant  $t$  choisi pour origine et si l'on considère plusieurs périodes :

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_c \\ \vec{Q}_c \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{P}_b \\ \vec{Q}_b \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} \vec{P}_a \\ \vec{Q}_a \end{pmatrix} \text{ etc ...}$$

On a  $\det M = 1$  et de plus  $M$  est symplectique, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante dite de symplecticité :

$$M^T J M = J$$

où  $M^T$  est le transposé de  $M$  et  $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

Dans ce cas [16] si  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  alors,  $\bar{\lambda}$ ,  $1/\lambda$ ,  $1/\bar{\lambda}$  le sont aussi.

Si toutes les valeurs propres sont différentes l'une de l'autre, alors à chaque instant  $t$  il y aura  $(2n)$  vecteurs propres distincts et formant une base. Ce sont bien entendu ces directions propres qu'il faut à chaque instant prendre pour directions principales (tout au moins quand elles sont réelles).

Considérons une valeur propre déterminée  $\lambda$  et un vecteur propre correspondant  $\vec{u}_\lambda = (\vec{P}_\lambda(t), \vec{Q}_\lambda(t))$ .

En ne prenant que  $H = H_2$  on obtient :

$$\frac{d\vec{Q}_\lambda}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial \vec{P}_\lambda} (\vec{P}_\lambda, \vec{Q}_\lambda, t)$$

$$\frac{d\vec{P}_\lambda}{dt} = - \frac{\partial H_2}{\partial \vec{Q}_\lambda}$$

et :

$$M \begin{pmatrix} \vec{P}_\lambda(t) \\ \vec{Q}_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_\lambda(t+\tau_0) \\ \vec{Q}_\lambda(t+\tau_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{P}_\lambda(t) \\ \vec{Q}_\lambda(t) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\vec{P}_\lambda(t + \tau_0) = \lambda \vec{P}_\lambda(t) \quad \text{et} \quad \vec{Q}_\lambda(t + \tau_0) = \lambda \vec{Q}_\lambda(t)$$

et si l'on considère plusieurs périodes, on aura :

$$\vec{p}_\lambda(t + n\tau_0) = \lambda^{n\tau_0} \vec{p}_\lambda(t) \quad \text{et} \quad \vec{q}_\lambda(t + n\tau_0) = \lambda^{n\tau_0} \vec{q}_\lambda(t)$$

La discussion classique conduit à :

1°) Si une ou plusieurs valeurs propres  $\lambda$  ont un module supérieur à un, alors la solution nominale étudiée n'est pas stable et en son voisinage la divergence est exponentielle ;

2°) Sinon toutes les valeurs propres  $\lambda$  ont un module égal à un.

Le but de la deuxième simplification, si toutes les valeurs propres sont différentes est d'arriver à :

$$H_2 = \sum_{j=1}^n b_j p_j q_j$$

avec :

$$b_j = \frac{1}{\tau_0} \text{Log} \lambda_j$$

Pour  $\lambda$  de module égale à un on prendra plutôt des termes réels de la forme

$$\frac{1}{2} a_j (p_j^2 + q_j^2) \quad \text{avec} \quad a_j = \frac{\log \lambda_j}{i\tau_0}$$

Troisième simplification (celle de  $H_{III}$ ) :

Considérons une transformation canonique faisant passer des variables

$(\vec{p}, \vec{q}, t)$  aux variables  $(\vec{P}, \vec{Q}, t)$  définie par sa fonction génératrice  $S$  :

$$\begin{aligned} (3.5) \quad & \left. \begin{aligned} S &= tH + \vec{p}\vec{Q} + S_m(\vec{p}, \vec{Q}, t) \\ \vec{P} &= \partial S / \partial \vec{Q} & \vec{q} &= \partial S / \partial \vec{p} & h &= \partial S / \partial t \end{aligned} \right\} \\ & S_m \text{ est une fonction homogène de degré } m \text{ en } \vec{P}, \vec{Q} \text{ et} \\ & \text{périodique en } t. \end{aligned}$$

Comme au deuxième chapitre, supposons que les fonctions  $H_2, \dots, H_{m-1}$ , aient les mêmes expressions que  $h_2, h_3, \dots, h_{m-1}$  :

$$\begin{aligned}
 h &= H + \frac{\partial S_m}{\partial t} = h_2 + h_3 + \dots + h_{m-1} + h_m + \dots \\
 &= H_2 + H_3 + \dots + H_{m-1} + H_m + \dots
 \end{aligned}$$

mais d'autre part :

$$\vec{P} = \frac{\partial S}{\partial \vec{Q}} = \vec{p} + \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}} = \vec{p} + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^m$$

$$\vec{q} = \frac{\partial S}{\partial \vec{p}} = \vec{Q} + \frac{\partial S_m}{\partial \vec{p}} \quad \text{d'où :} \quad \vec{Q} = \vec{q} + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^m$$

par ailleurs,  $H_2$  et  $h_2$  ayant la même expression en  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  et  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ , on peut écrire :

$$H_2 - h_2 = (\vec{P} - \vec{p}) \frac{\partial h_2}{\partial \vec{p}} + (\vec{Q} - \vec{q}) \frac{\partial h_2}{\partial \vec{q}} + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^{m+1}$$

donc :

$$H_2 - h_2 = \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}} \frac{\partial h_2}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial S_m}{\partial \vec{p}} \frac{\partial h_2}{\partial \vec{q}} + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)$$

et :

$$H_m = h_m - \frac{\partial S_m}{\partial \vec{Q}} \frac{d\vec{q}}{dt} - \frac{\partial S_m}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} - \frac{\partial S_m}{\partial t} + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^{m+1}$$

(3.6)

$$\begin{aligned}
 H_m(\vec{P}, \vec{Q}, t) &= H_m(\vec{p}, \vec{q}, t) + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^{m+1} \\
 &= h_m(\vec{p}, \vec{q}, t) - \frac{dS_m}{dt}(\vec{p}, \vec{q}, t) + o(|\vec{p}| + |\vec{q}|)^{m+1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \frac{\partial S_m}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial S_m}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial S_m}{\partial t} \text{ c'est la dérivée de } S_m \text{ le}$$

long de la solution locale

Nous allons dans la suite adopter les variables complexes :

$$z_j = p_j + iq_j \quad j = 1, \dots, n$$

Nous rappelons les équations de Hamilton :

$$(3.7) \quad \frac{dz_j}{dt} = 2i \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} \quad \frac{d\bar{z}_j}{dt} = -2i \frac{\partial h}{\partial z_j} \quad j = 1, \dots, n$$

Dans le cas où il n'y a pas divergence exponentielle nous utiliserons l'expression :

$$h_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (p_j^2 + q_j^2)$$

d'où :

$$h_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j z_j \bar{z}_j$$

et le système linéarisé s'écrit :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} dz_j/dt = i\omega_j z_j \quad d\bar{z}_j/dt = -i\omega_j \bar{z}_j \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

$\omega_j$  est la  $j$ -ième vitesse angulaire

Considérons un monôme  $M$  de  $h_m$  :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \phi(t) \\ \sum_{j=1}^n (k_{jM} + \ell_{jM}) = m \end{array} \right.$$

Pour essayer d'annuler ou de simplifier ce monôme  $M$  nous allons prendre dans  $S_m$  un monôme correspondant :

$$m = \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \psi(t)$$

avec  $\psi(t)$  comme  $\phi(t)$  périodique de période  $\tau_0$ .

Le monôme correspondant de  $H_m$  sera d'après (3.6) :

$$\mathcal{M} = M - \frac{dM}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \phi(t) - \prod_{j=1}^n \left[ z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \psi(t) \sum_{j=1}^n i\omega_j (k_{jM} - \ell_{jM}) \right] - \\ &\quad - \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}$$



d'où :

$$(3.10) \quad \mathcal{M} = \left[ \phi(t) - \kappa \psi(t) - \frac{d\psi}{dt} \right] \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \frac{1}{z_j^{\ell_{jM}}}$$

$$\kappa = \sum_{j=1}^n \mu_j (k_{jM} - \ell_{jM}) \quad ; \quad \mu_j = i\omega_j$$

appelons  $\omega_0$  la vitesse angulaire correspondant à la période  $\tau_0$  :

$$\omega_0 = 2\pi/\tau_0$$

et l'on peut décomposer  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\omega_0 t} \\ \psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\omega_0 t} \end{array} \right.$$

$$\phi(t) - \kappa \psi(t) - \frac{d\psi}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k - \kappa B_k - ik\omega_0 B_k) e^{ik\omega_0 t}$$

ou en tenant compte de (3.10) :

$$(3.12) \quad \phi(t) - \kappa \psi(t) - \frac{d\psi}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ A_k - k\mu_0 + \sum_{j=1}^n \mu_j (k_{jM} - \ell_{jM}) B_k \right\} e^{ik\omega_0 t}$$

donc pour que  $\mathcal{M} = 0$  il suffit d'après (3.10) et (3.12) de prendre :

$$A_k = B_k \left[ k\mu_0 + \sum_{j=1}^n \mu_j (k_{jM} - \ell_{jM}) \right] \quad \mu_j = i\omega_j$$

Discussion :

$$1^\circ) \text{ si } k\omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - \ell_{jM}) \neq 0 \text{ on prendra :}$$

$$B_k = \frac{A_k}{k\mu_0 + \sum_{j=1}^n \mu_j (k_{jM} - l_{jM})}$$

2°) S'il y a un terme pour lequel  $k\omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - l_{jM}) = 0$  alors ce terme ne peut être annulé, et dans ce cas on posera  $B_k = 0$ .

On obtient donc deux cas possibles :

(3.13)

1°)  $\sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - l_{jM})$  n'est pas multiple de la vitesse angulaire  $\omega_0$  et l'on peut réduire à zéro le monôme  $\mathcal{M}$ .

2°)  $k\omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - l_{jM}) = 0$  et l'on réduit  $\mathcal{M}$  à :

$$\mathcal{M} = A_k e^{k\mu_0 t} \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{l_{jM}}$$

$$\text{avec : } \sum_{j=1}^n (k_{jM} + l_{jM}) = m$$

Remarque (3.1) :

On peut revenir aux petites lettres  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $z$ ,  $\bar{z}$  à chaque étape et pousser la simplification à un ordre fini  $N$  quelconque. Le monôme  $\mathcal{M}$  sera écrit  $M_1, \dots$  etc.

Quatrième simplification :

Elle consiste à considérer la transformation suivante :

$$(3.14) \quad z_j = z_j e^{-i\omega_j t} \quad z_j = p_j + iq_j \quad \text{et} \quad \bar{z}_j = p_j - iq_j$$

On a donc :

$$(3.15) \quad \begin{cases} p_j = p_j \cos \omega_j t + q_j \sin \omega_j t \\ q_j = q_j \cos \omega_j t - p_j \sin \omega_j t \end{cases}$$

Nous allons démontrer que cette transformation est canonique, en effet considérons la fonction  $S = S(\vec{p}, \vec{Q}, t, H)$  définie par :

$$(3.16) \quad S = tH + \sum_{j=1}^n \left[ tg(\omega_j t) \frac{p_j^2 + Q_j^2}{2} + \frac{p_j Q_j}{\cos \omega_j t} \right]$$

d'après le paragraphe III du premier chapitre on écrit :

$$q_j = \frac{\partial S}{\partial p_j} = \frac{p_j \sin \omega_j t + Q_j}{\cos \omega_j t} \quad \text{d'où } Q_j = q_j \cos \omega_j t - p_j \sin \omega_j t$$

$$P_j = \frac{\partial S}{\partial Q_j} = \frac{Q_j \sin \omega_j t + p_j}{\cos \omega_j t} \quad \text{d'où } P_j = q_j \sin \omega_j t + p_j \cos \omega_j t$$

on retrouve donc (3.15) et la fonction  $s$  définie par (3.16) est une fonction génératrice de la transformation canonique (3.14).

En plus, nous avons :

$$h = \frac{\partial S}{\partial t} = H + \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{\cos^2 \omega_j t} \left( \frac{p_j^2 + Q_j^2}{2} + p_j Q_j \sin \omega_j t \right)$$

mais :

$$\frac{p_j^2 + Q_j^2}{2} + p_j Q_j \sin \omega_j t = \frac{1}{2} (p_j^2 + q_j^2) \cos^2 \omega_j t$$

d'où :

$$(3.17) \quad h = H + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (p_j^2 + q_j^2) = H + h_2$$

donc le hamiltonien  $h$  se transforme par (3.14) en :

$$(3.18) \quad H = H_3 + \dots + H_m + \dots \equiv h - h_2 \equiv h_3 + \dots + h_m + \dots$$

et les équations de Hamilton s'écrivent :

$$(3.19) \quad \frac{dz_j}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j} \quad \frac{d\bar{z}_j}{dt} = -2i \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad j = 1, \dots, n$$

d'autre part, le monôme  $M$  se transforme par (3.14) en :

$$\begin{aligned}
 M &= A_k e^{ik\omega_0 t} \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} e^{i\omega_j t (k_{jM} - \ell_{jM})} \\
 &= A_k e^{ik\omega_0 t} e^{it \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - \ell_{jM})} \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}} \\
 &= A_k e^{it [k\omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - \ell_{jM})]} \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}}
 \end{aligned}$$

soit, tenant compte de (3.13) :

(3.20)

$$M = A_k \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}}$$

On constate donc que le hamiltonien transformé (3.18) est indépendant du temps à l'ordre où l'on a poussé la transformation, avec en plus pour tous les monômes une relation :

$$(3.21) \quad k\omega_0 + \sum_{j=1}^n \omega_j (k_{jM} - \ell_{jM}) = 0$$

Conséquences :

1°) Le hamiltonien  $H = H_3 + \dots + H_m + \dots$  est une quasi-intégrale (pas de variation séculaire à tous les ordres).

2°) Ecrivons :

$$H = \sum_b M_b = \sum_b A_b \prod_{g=1}^n z_g^{k_{gb}} \bar{z}_g^{\ell_{gb}}$$

et calculons :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = \bar{z}_j \frac{dz_j}{dt} + z_j \frac{d\bar{z}_j}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i \bar{z}_j \sum_b \frac{\mu_b^{\ell_{jb}}}{z_j} - 2i z_j \sum_b \frac{\mu_b^{k_{jb}}}{z_j}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = 2i \sum_b \mu_b (\ell_{jb} - k_{jb})$$

on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n a_j z_j \bar{z}_j \right) = 2i \sum_b \mu_b \sum_{j=1}^n a_j (\ell_{jb} - k_{jb})$$

donc :

$$(3.22) \quad \sum_{j=1}^n a_j z_j \bar{z}_j$$

est une quasi-intégrale pourvu que :

$$(3.23) \quad \sum_{j=1}^n a_j (\ell_{jb} - k_{jb}) = 0 \quad \forall b$$

Soit  $\vec{W}$  le vecteur à  $(n+1)$  composantes :

$$(3.24) \quad \vec{W} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

A tout monôme  $M$  associons le vecteur  $\vec{K}_M$  à  $(n+1)$  composantes entières :

$$(3.25) \quad \vec{K}_M = (k, k_{1M} - \ell_{1M}, \dots, k_{nM} - \ell_{nM})$$

L'équation (3.21) est équivalente à :

$$(3.26) \quad \forall M, \quad \vec{K}_M \cdot \vec{W} = 0$$

1er cas : Il n'y a aucune relation rationnelle entre les  $\omega_0, \dots, \omega_n$ .

Donc :

$$\vec{K}_M \cdot \vec{W} = 0 \quad \text{implique} \quad \vec{K}_M = \vec{0}$$

et il y a  $n$  vecteurs  $\vec{A} = (0, a_1, \dots, a_n)$  indépendants satisfaisant à  $\vec{K}_M \cdot \vec{A} = 0$ . Donc on peut en (3.22) prendre  $a_j = 1$  et les autres nuls.

En résumé :

Si les vitesses angulaires  $\omega_0, \dots, \omega_n$  ne vérifient aucune relation rationnelle d'ordre  $\leq s$ , alors on a le résultat du théorème (2.1) dans le cas des systèmes autonomes.

En effet on peut jusqu'à un degré quelconque  $N$  supprimer tous les monômes tels que  $\vec{k}_M \neq \vec{0}$  et si l'on néglige les termes de degré  $(N+1)$  et plus, alors le hamiltonien  $H$  sera fonction des produits  $(z_j \bar{z}_j)$  seulement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) &= 2i \bar{z}_j \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j} - 2i z_j \frac{\partial H}{\partial z_j} \\ &= 2i \left[ \bar{z}_j \frac{\partial H}{\partial (z_j \bar{z}_j)} z_j - z_j \frac{\partial H}{\partial (z_j \bar{z}_j)} \bar{z}_j \right] = 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

donc les  $(z_j \bar{z}_j)$  sont  $n$  quasi-intégrales.

Revenons à :

$$H = \sum_b \mathcal{M}_b = \sum_b A_b \prod_{g=1}^n z_g^{k_{gb}} \bar{z}_g^{\ell_{gb}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial (z_j \bar{z}_j)} = \sum_b \frac{\partial \mathcal{M}_b}{\partial (z_j \bar{z}_j)} = \frac{1}{z_j \bar{z}_j} \sum_b k_{jb} \mathcal{M}_b$$

d'où :

$$\frac{dz_j}{dt} = 2i z_j \frac{\partial H}{\partial (z_j \bar{z}_j)} = 2i \frac{1}{z_j \bar{z}_j} \left( \sum_b k_{jb} \mathcal{M}_b \right) z_j$$

Posons :

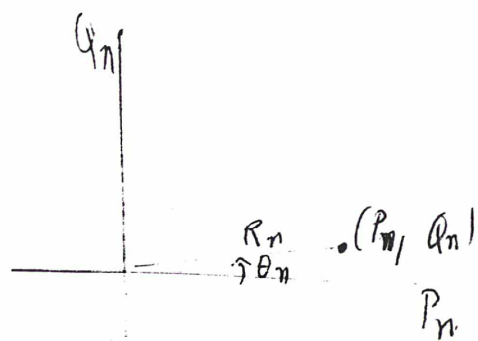
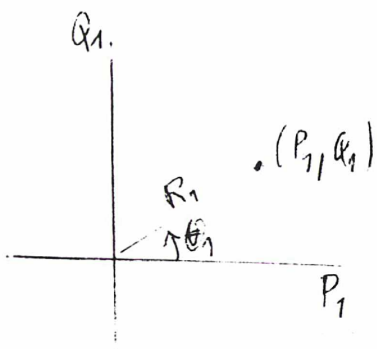
$$(3.27) \quad \omega_j = \frac{2}{z_j \bar{z}_j} \sum_b k_{jb} A_b \prod_{g=1}^n (z_g \bar{z}_g)^{k_{gb}}$$

donc :

$$(3.28) \quad dz_j/dt = i \omega_j z_j \quad j = 1, \dots, n$$

ce qui signifie que  $\omega_j$  définie par (3.27) est la vitesse angulaire de  $z_j$ .

On a donc, à n'importe quel ordre fini, un système de rotation différentielle autour de  $\vec{P} = \vec{Q} = 0$ .



$$\omega_j = d\theta_j/dt = f_j(R_1, \dots, R_n)$$

$$R_j = |z_j| = \sqrt{P_j^2 + Q_j^2}$$

$$j = 1, \dots, n$$

2e cas :

Les vitesses angulaires  $\omega_0, \dots, \omega_n$  sont rationnellement liées par une seule relation.

Supposons donc qu'il y ait une seule série d'entiers :

$$a_0, \dots, a_n$$

telle que :

$$(3.29) \quad \sum_{j=0}^n a_j \omega_j = 0$$

On constate que le vecteur  $\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)$  est proportionnel au vecteur  $\vec{K}_M$  quel que soit  $M$  et l'on peut écrire :

$$(3.30) \quad \vec{K}_M = K_M \vec{a} \quad K_M \text{ est entier}$$

$$(3.31) \quad \forall M : \quad k/a_0 = \frac{k_{1M} - \ell_{1M}}{a_1} = \dots = \frac{k_{nM} - \ell_{nM}}{a_n} = K_M$$

Considérons le vecteur  $\vec{A} = (0, 1/a_1, -1/a_2, 0, \dots, 0)$  on a donc :

$$\vec{A} \cdot \vec{K}_M = \frac{1}{a_1} (k_{1M} - \ell_{1M}) - \frac{1}{a_2} (k_{2M} - \ell_{2M}) = K_M - K_M = 0$$

On en déduit, tenant compte de (3.22) et (3.23) que :

$$\frac{z_1 \bar{z}_1}{a_1} - \frac{z_2 \bar{z}_2}{a_2}$$

est une quasi-intégrale et, en généralisant à tout  $j$  :

$$(3.32) \quad z_j \bar{z}_j = a_j f(t) + (z_j \bar{z}_j)_0 \quad j = 1, \dots, n$$

En conséquence :

(3.33) S'il y a des  $a_j$  de signes opposés, alors il y a stabilité (ou diffusion d'Arnold) car les produits  $z_j \bar{z}_j$  sont réels positifs et la variation de  $f(t)$  est donc bornée.

Si, par contre, tous les  $a_j \geq 0$  (ou  $\leq 0$ ) alors, la question de la stabilité se pose.

Partons des  $(Z_j \bar{Z}_j)_0 \approx 0$  et étudions les solutions telles que :

$$(3.34) \quad Z_j \bar{Z}_j = a_j f(t) \quad H = 0$$

il faut étudier les variations de  $f(t)$  :

Posons :

$$Z_j = R_j e^{i\theta_j} \quad \text{donc } Z_j \bar{Z}_j = R_j^2 = a_j f(t)$$

et le monôme :

$$\mathcal{M} = A_M \sum_{j=1}^n Z_j^{k_{jM}} \bar{Z}_j^{\ell_{jM}}$$

se transforme en :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= A_M \prod_{j=1}^n R_j^{(k_{jM} + \ell_{jM})} e^{i\theta_j (k_{jM} - \ell_{jM})} \\ &= A_M e^{i \sum_{j=1}^n \theta_j (k_{jM} - \ell_{jM})} \prod_{j=1}^n a_j^{(k_{jM} + \ell_{jM})/2} f^{(k_{jM} + \ell_{jM})/2}(t) \\ &= A_M e^{iK_M \sum_{j=1}^n a_j \theta_j} f^{m/2}(t) \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}(k_{jM} + \ell_{jM})} \end{aligned}$$

On définit l'angle :

$$(3.35) \quad u = \sum_{j=1}^n a_j \theta_j$$

et l'on pose :

$$(3.36) \quad C_M = A_M \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}(k_{jM} + \ell_{jM})}$$

il vient :

(3.37)

$$\mathcal{M} = C_M e^{iK_M u} f^{m/2}(t)$$

On obtient un hamiltonien à un seul degré de liberté :

$$(3.38) \quad H(u, f) = \sum_b \mathcal{M}_b = \sum_b C_{M_b} e^{iK_{M_b} u} f^{m/2}(t)$$



avec les équations hamiltoniennes :

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{aligned} df/dt &= -\partial H/\partial u = -i \sum_b K_{M_b} \mathcal{M}_b \\ du/dt &= \partial H/\partial f = \sum_b \frac{m}{2f} \mathcal{M}_b \end{aligned} \right.$$

Ainsi le problème se ramène à un système hamiltonien à un seul degré de liberté. Si sur la variété (3.34) l'origine 0 est isolée, alors il y aura stabilité à n'importe quel ordre (c'est-à-dire soit stabilité réelle soit diffusion d'Arnold), sinon il y aura instabilité au voisinage de 0.

3e cas : Supposons qu'il y ait deux relations rationnelles indépendantes entre les vitesses angulaires  $\omega_0, \dots, \omega_n$  :

$$\sum_{j=0}^n a_j \omega_j = 0 \quad \sum_{j=0}^n b_j \omega_j = 0$$

où  $(a_0, \dots, a_n)$  et  $(b_0, \dots, b_n)$  sont deux séries d'entiers non tous nuls et premiers entre eux dans leur ensemble.

Posons :

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{a} &= (a_0, \dots, a_n) \\ \vec{b} &= (b_0, \dots, b_n) \\ \vec{K}_M &= (k, k_{1M} - \ell_{1M}, \dots, k_{nM} - \ell_{nM}) \end{aligned} \right.$$

on a donc :

$$(3.14) \quad \vec{a} \cdot \vec{W} = \vec{b} \cdot \vec{W} = \vec{K}_M \cdot \vec{W} = 0$$

Ecrivons  $\vec{K}_M$  comme une combinaison linéaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  :

$$\vec{K}_M = K_{M_a} \vec{a} + K_{M_b} \vec{b} \quad K_{M_a}, K_{M_b} \text{ entiers}$$

revenons à :

$$\frac{d}{dt} (Z_j \bar{Z}_j) = -2i \sum_M \mathcal{M} (k_{jM} - \ell_{jM})$$

ou :

$$(3.42) \quad \frac{d}{dt} (Z_j \bar{Z}_j) = -2i \sum_M \mathcal{M} (K_{M_a} a_j + K_{M_b} b_j)$$

Posons :

$$(3.43) \quad \left. \begin{aligned} \frac{df}{dt} &= -2i \sum_M \mathcal{M}_{M_a} \\ \frac{dg}{dt} &= -2i \sum_M \mathcal{M}_{M_b} \end{aligned} \right\} \quad \mathcal{M} = A_M \prod_{j=1}^n z_j^{k_{jM}} \bar{z}_j^{\ell_{jM}}$$

Portons (3.43) dans (3.42), il vient :

$$\frac{d}{dt} (z_j \bar{z}_j) = a_j \frac{df}{dt} + b_j \frac{dg}{dt}$$

soit :

$$(3.44) \quad z_j \bar{z}_j = (z_j \bar{z}_j)_0 + a_j f(t) + b_j g(t)$$

D'autre part, le monôme  $\mathcal{M}$  devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= A_M \prod_{j=1}^n R_j^{(k_{jM} + \ell_{jM})} e^{i\theta_j (k_{jM} - \ell_{jM})} \\ &= A_M e^{i \sum_{j=1}^n \theta_j (k_{jM} - \ell_{jM})} \prod_{j=1}^n (a_j f + b_j g)^{(k_{jM} + \ell_{jM})/2} \\ &= A_M e^{iK_M a \sum_{j=1}^n a_j \theta_j} \cdot e^{iK_M b \sum_{j=1}^n b_j \theta_j} \prod_{j=1}^n (a_j f + b_j g)^{(k_{jM} + \ell_{jM})/2} \end{aligned}$$

On définit les angles :

$$(3.45) \quad u = \sum_{j=1}^n a_j \theta_j \quad v = \sum_{j=1}^n b_j \theta_j$$

donc :

$$(3.46) \quad \mathcal{M} = A_M e^{iK_M a u} e^{iK_M b v} \prod_{j=1}^n [a_j f(t) + b_j g(t)]^{\frac{1}{2}(k_{jM} + \ell_{jM})}$$

On obtient alors un hamiltonien à deux degrés de liberté :

$$H(f, g, u, v)$$

Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} df/dt = - \partial H / \partial u \\ du/dt = \partial H / \partial f \\ dg/dt = - \partial H / \partial v \\ dv/dt = \partial H / \partial g \end{array} \right.$$

### CONCLUSION

Les résultats classiques obtenus pour les systèmes hamiltoniens autonomes à un ou deux degrés de liberté peuvent être étendus aux systèmes hamiltoniens autonomes ou périodiques à plusieurs degrés de liberté.

Un système hamiltonien dont la fonction de Hamilton est  $\tau_0$ -périodique peut être ramené à celui d'un système autonome, mais il faut tenir compte de  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 =$  la vitesse angulaire correspondant à la période  $\omega_0$ .

Au voisinage d'une solution périodique stable, le mouvement est à tous les ordres équivalent à une rotation différentielle généralisée pourvu qu'il n'y ait aucune résonance entre les fréquences propres ( $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ) du système.

Dans le cas où il y a une seule relation de résonance d'ordre (s) :  $\sum_{j=0}^n a_j \omega_j = 0$ , nous mettons en évidence (n-1)-quasi-intégrales indépendantes :

$$\frac{z_j \bar{z}_j}{a_j} - \frac{z_k \bar{z}_k}{a_k} ; \quad \{j,k\} = \{1, \dots, n\}$$

et le hamiltonien à l'ordre (s) se réduit à celui d'un seul degré de liberté  $H(f,u)$  où  $f(t)$  est une fonction convenable telle que :

$$z_j \bar{z}_j = a_j f(t) + (z_j \bar{z}_j)_0$$

et  $u$  est l'angle définit par :

$$u = \sum_{j=0}^n a_j \text{Arg}(z_j)$$

Le nombre de quasi-intégrales indépendantes se réduit à (n-2) dans le cas où il y a deux relations indépendantes de résonance :

$$\sum_{j=0}^n a_j \omega_j = 0 \quad , \quad \sum_{j=0}^n b_j \omega_j = 0$$

et l'on obtient un hamiltonien à deux degrés de liberté  $H(f,g,u,v)$ .

Ces résultats peuvent être généralisés et il serait intéressant de voir ce qui se passe lorsqu'il y a plusieurs relations de résonance et j'ai l'intention d'en faire l'objet d'un travail ultérieur.

~ ~ ~ ~ ~

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] NEMITSIKI et STEPANOV (1960). Qualitative theory of differential equations. Princeton University Press.
- [ 2 ] WHITTAKER, E. (1959). "A treatise on the analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies". 4th ed., Cambridge University Press, London and New York.
- [ 3 ] CHAZY, J. (1953). Mécanique Céleste, Equations Canoniques et Variations des Constantes. Chap. III, Presses Université de France.
- [ 4 ] MAC GEHEE, R. (1981). Double Collisions for a Classical Particle System with Non Gravitational Interactions. (Comment. Mat. Helvetici, 56, p. 524-557).
- [ 5 ] LOSCO, L. (1981). Sur une étude de stabilité par analogie avec la collision triple. (Celst. Mech., n° 25, p. 159-167).
- [ 6 ] SIEGEL, C., and MOSER, J. (1971). Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag.
- [ 7 ] MAC GEHEE, R. (1974). Triple Collision in Newtonian Gravitational Systems, Lecture Notes in Physics, vol. 38, p. 550-572.
- [ 8 ] SZEBEHELY, V. (1967). Theory of orbits, p. 17, Academic Press, New York.
- [ 9 ] LEVI-CIVITA (1903). C.R. Acad. Sc. Paris, t. 136, p. 221.
- [10] THIRY, Y. (1969). Les Fondements de la Mécanique Céleste, Gordon Breach.
- [11] KARABALLI, A. (1979) Transformations Infinitésimales et Stabilité des Systèmes Hamiltoniens. (Thèse de 3e cycle, Besançon).

- [12] LOSCO, L. (1978). Les exposants caractéristiques des systèmes hamiltoniens. Séminaire, Paris, 17 mars 1978.
- [13] EKELAND, I. (1984). Le calcul, l'imprévu, Editions du Seuil.
- [14] HENON, M. (1969). Numerical Study of Quadratic Area-Preserving Mappings. Quarterly of applied Mathematics, Vol. 27, N°
- [15] MARCHAL, C. (1980). The Quasi Integrals (Celest. Mech., n° 21, p. 183- ).
- [16] ARNOLD, V. (1976). Methodes Mathématiques de la Mécanique Classique. Mir, Moscou.
- [17] POINCARÉ, H. (1857). Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Dower Publications inc., New York.
- [18] BIRKHOFF, G.D. (1927). Dynamics Systems, New York.
- [19] ARNOLD, V. et AVEZ, A. (1967). Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique, Gauthier-Villars Editeur, Paris.
- [20] NAHON, F. (1967). Sur les mouvements plans d'un point matériel. C.N.R.S., Colloque "Les NOuvelles Méthodes de la Dynamique Stellaire" (Besançon).
- [21] LANDAU et LIFSHITZ. Mécanique, Editions Mir, Moscou.

TABLE DES MATIERES

	Page
INTRODUCTION .....	1
PLAN .....	4
PREMIERE PARTIE : REGULARISATION DES COLLISIONS DOUBLES DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRAL .....	7
CHAPITRE I : .....	8
CHAPITRE II : Collision double du problème plan de 2 corps en attraction non newtonienne .....	22
CHAPITRE III : Les changements de variable de Mc Gehee et de Siegel .....	35
CHAPITRE IV : Régularisation de la collision double du pro- blème plan de 2 corps en attraction non newtonienne .....	56
APPENDICE : Etude du champ relatif en $U(r) = - 1/r^2$ pour 3 corps alignés .....	73
DEUXIEME PARTIE : RECHERCHE DES FORMES NORMALES AU VOISINAGE DE L'EQUILIBRE .....	83
CHAPITRE I : .....	84
CHAPITRE II : Forme normale d'un système conservatif au voi- sinage d'une position d'équilibre placée à l'origine .....	91
CHAPITRE III : Voisinage d'une solution périodique .....	113
CONCLUSION .....	131
BIBLIOGRAPHIE .....	133
TABLE DES MATIERES .....	135

~ ~ ~ ~ ~

