



HAL
open science

Diffusion de comètes du nuage de Oort vers le système solaire

Frédérique Rémy

► **To cite this version:**

Frédérique Rémy. Diffusion de comètes du nuage de Oort vers le système solaire. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1984. Français. NNT: . tel-01958581

HAL Id: tel-01958581

<https://theses.hal.science/tel-01958581>

Submitted on 18 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU
DOCTORAT DE 3^{eme} CYCLE

À L'OBSERVATOIRE DE PARIS

N° 84 OBSP 0001

par

Frédérique Remy

Spécialité : Astronomie et Techniques Spatiales

Sujet :

Diffusion de comètes
du nuage de Oort vers le système solaire

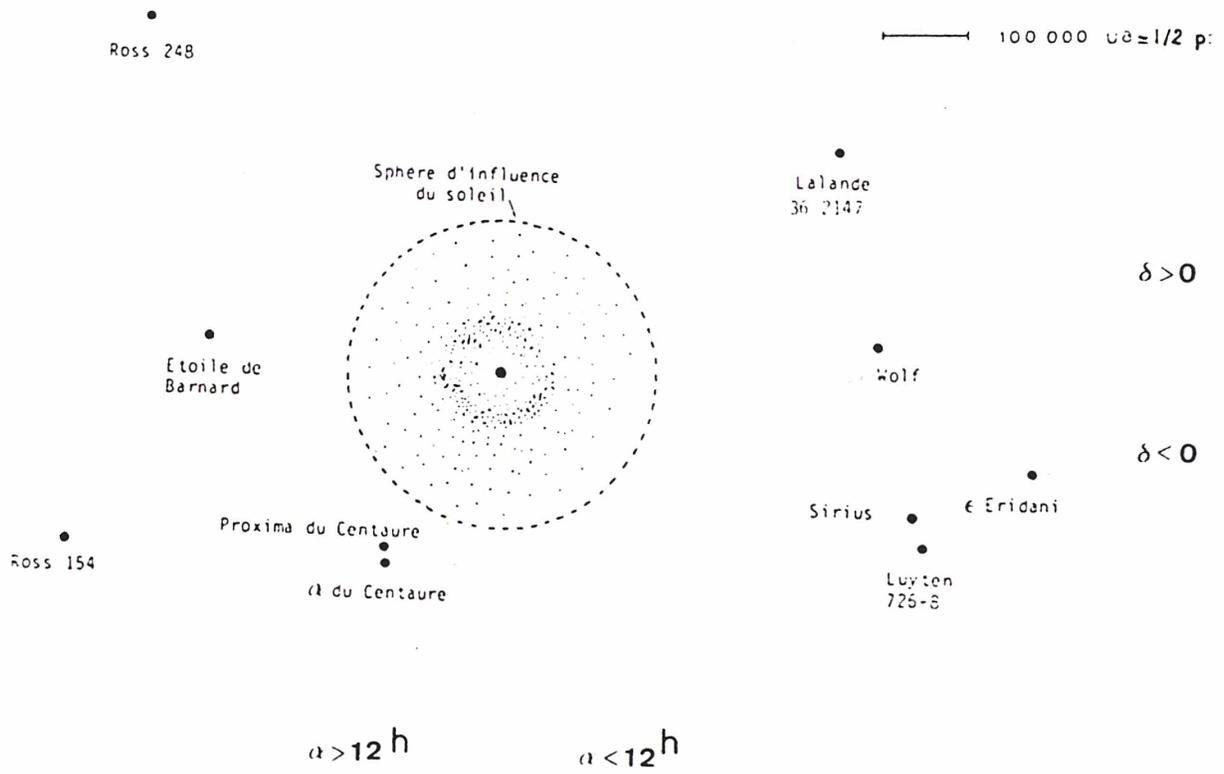
Soutenue le vendredi 13 avril 1984, au

CENTRE D'ÉTUDES ET DE RECHERCHES
GÉODYNAMIQUES ET ASTRONOMIQUES,

devant le Jury :

MM. Fernand NAHON, Président
Jean DELHAYE
Jean KOVALEVSKY
Bernard LAGO
François MIGNARD





Le nuage de Oort

SOMMAIRE

NOTATIONS

INTRODUCTION

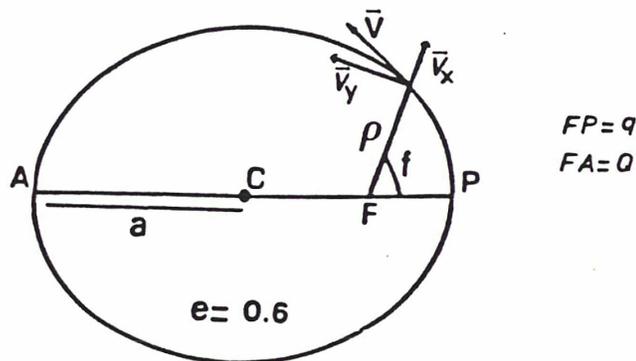
	P. 5
I - <u>EFFET DU PASSAGE D'UNE ETOILE SUR UNE ORBITE COMETAIRE</u>	P.11
1. <u>Présentation du problème</u>	P.12
1.1. Type d'orbite attendu	
1.2. Etoiles du voisinage solaire	
2. <u>Modèle dynamique</u>	P.16
2.1. Justification du modèle impulsif	
2.2. Formule analytique de l'impulsion	
2.3. Conditions de validité	
3. <u>Effet de perturbation sur une orbite cométaire</u>	P.26
3.1. Etude de l'espace des phases	
3.2. Applications et exemples	
3.3. Perturbations stellaires	
II - <u>MODELE DE WEISSMAN : DUPLICATION, PUIS EXTENSION CRITIQUE</u>	P.37
1. <u>Principe et rappel des résultats de Weissman</u>	P.38
1.1. Perturbations dues aux étoiles durant une révolution cométaire	
1.2. Structure et but de simulation	
1.3. Dépendance des états finaux en fonction du périhélie	
1.4. Influence de l'aphélie	
2. <u>Etudes analytiques</u>	P.48
2.1. Espérance de l'aphélie et nombre moyen de révolutions fonction du temps écoulé	
2.2. Probabilité pour qu'un périhélie donné entre dans la sphère d'influence des planètes	
2.3. Estimation de la population actuelle	
2.4. Fonction de distribution de q	
3. <u>Extension de la simulation et critique du modèle</u>	P.59
3.1. Histogramme de l'excentricité	
3.2. Etude dans le plan (Q,e)	
3.3. Perturbations ailleurs qu'à l'aphélie	
3.4. Conclusion	
III - <u>AUTRE MODELE : PRESENTATION ET EVOLUTION DE QUELQUES NUAGES DE COMETES</u>	P.69
1. <u>Principe</u>	P.70
1.1. Comment simuler le voisinage solaire ?	
1.2. Comment traduire une rencontre ?	
1.3. Organigramme	
2. <u>Présentation de quelques nuages</u>	P.76

3. <u>Caractéristiques et remarques</u>	P. 89
3.1. Stellaires	
3.2. Planétaires	
IV - <u>ETUDE ANALYTIQUE DES PERTURBATIONS STELLAIRES ET APPLICATIONS</u>	P. 95
1. <u>Passages proches</u>	P. 99
1.1. Distribution de l'impulsion	
1.2. Fonction de distribution d'une coordonnée de l'impulsion	
1.3. Probabilité pour qu'une comète soit éjectée	
2. <u>Passages lointains</u>	P.104
2.1. Expression de l'impulsion	
2.2. Fonction de distribution de l'impulsion	
2.3. Fonction de distribution des coordonnées de l'impulsion	
2.4. Evaluation de l'apport des étoiles passant au delà de 200 000 UA	
3. <u>Dispersion et stabilité</u>	P.111
3.1. Dispersion	
3.2. Stabilité	
3.3. Applications aux planétaires	
CONCLUSION	P.120
ANNEXES	P.123
<u>Annexe A</u> : Expression analytique des variations des éléments orbitaux	
<u>Annexe B</u> : Marche aléatoire avec une borne absorbante en dimension 1	
<u>Annexe C</u> : Résolution de l'équation de Kepler	
BIBLIOGRAPHIE	P.145

*

NOTATIONS

a) Ayant trait aux comètes



Les comètes sont aussi repérées par M , anomalie moyenne, leur plan orbital par (i, Ω, ω) .

On pose $\mu = GM$ et $V_c = \sqrt{\mu/\rho}$ est la vitesse circulaire du lieu.

Si x est métrique, $\tilde{x} = \frac{x}{\rho}$, si x est une vitesse $\tilde{x} = \frac{x}{V_c}$.

b) Ayant trait aux étoiles

V_* , M_* vitesse et masse.

$K = \frac{2GM_*}{V_*}$, paramètre stellaire ($K = 8.8 \cdot 10^6$ UA (cm/s))

$\Delta(d)$ = distance minimale d'approche du Soleil (de la comète) $\Delta \in [\Delta_m, \Delta_M]$.
 t = temps écoulé en année, depuis le début du système solaire.

k est tel que le nombre d'étoiles N , passant en t années, à moins de Δ du Soleil vérifie : $N = k \Delta^2 t$.

($k \doteq 5.1 \cdot 10^{-6}$ / (an \times pc²) ou $k = 1.2 \cdot 10^{-16}$ / (an \times UA²)).

c) Ayant trait aux études analytiques

L'impulsion I a pour coordonnées (α, β, γ) .

$\alpha_0 (\beta_0, \gamma_0)$ = variable aléatoire normale centrée, d'écart type 1.

u = nombre uniformément réparti de 0 à 1.

ϵ = variable aléatoire = ± 1 .

z et f = quantités sans unité traduisant une marche au hasard.

Dans le II $f = (2q / (1.15 \cdot 10^{-15} Q^{7/2}))^{1/2}$ et dans le IV $z = \frac{1.5 \cdot 10^9}{\rho^{3/2}}$

$a = \frac{K}{R_M}$, dans les passages proches, impulsion minimale correspondant aux passages les plus éloignés.

$X_M = \frac{K \rho}{\Delta^2_m}$, dans les passages lointains, impulsion maximale correspondant aux passages les plus proches.

$X_m = \frac{K \rho}{\Delta^2}$, constante intervenant dans le calcul de l'impulsion : peut être vue comme un écart type théorique.

*

INTRODUCTION *****

Dès qu'une comète s'approche à moins de quatre ou cinq unités astronomiques du Soleil, l'équilibre thermique sous l'influence du rayonnement incident conduit à une élévation de la température du noyau, qui commence à se sublimer. Il libère ainsi des gaz et des poussières qui engendrent autour de lui une nébulosité diffusant de la lumière.

C'est pourquoi, depuis des siècles, l'homme peut observer des comètes ; c'est aussi pourquoi il a très vite compris que les comètes, perdant ainsi de la matière à chaque passage au périhélie, ne pouvaient pas être éternellement actives.

On sait maintenant qu'une comète comme Arend-Roland perd jusqu'à 75 tonnes de poussières par seconde au moment de son passage à 0.32 UA du Soleil. On estime qu'avec une telle perte de matière, les comètes ont une durée de vie comprise entre 100 et 1000 révolutions orbitales. Une observation plus précise permet même de vérifier sur des comètes comme Encke ou Tempel 2 une baisse systématique de l'éclat.

Cette lente évolution est parfois accélérée par la fusion du noyau, le plus bel exemple étant celui de la comète de West en 1976. Il ne faut pas non plus oublier que l'on connaît une quinzaine de groupes de deux à trois comètes dont les éléments orbitaux sont si proches les uns des autres qu'il est difficile d'en rendre compte autrement que par l'éclatement d'une comète "mère". Plus d'une dizaine d'essaims de météorites sont aussi attribués aux particules laissées par des comètes sur leur trajectoire.

Toutes ces observations montrent que les comètes ont une durée de vie courte devant l'âge du Système solaire et incitent à chercher une source.

Dès le début du XIXe siècle, deux hypothèses sont avancées. La première est due à Pierre-Simon de Laplace en 1813 ; il fut en effet le premier à chercher une origine interstellaire. D'après lui, les comètes sont "de petites nébuleuses, errant de systèmes planétaires en systèmes planétaires" capturées par la sphère d'influence du Soleil. Pour cela, il doit faire

intervenir des mécanismes assez lourds, mais cohérents. Un des derniers défenseurs de cette hypothèse est Lyttleton un peu avant 1950, avec sa théorie du "banc de sable".

La seconde est due à Joseph-Louis Lagrange en 1814. Pour lui, les comètes sont des corps éjectés des grosses planètes. En 1874, l'anglais Proctor pensait que la tache rouge de Jupiter était un volcan duquel seraient éjectées les comètes. Ainsi les familles de comètes de planètes ont une origine planétaire, comme le groupe de Kreutz (les comètes qui frôlent le Soleil) a une origine solaire. Malgré les très grandes vitesses d'éjection qu'elle impose (jusqu'à 67 km/s pour Jupiter), cette hypothèse est assez séduisante pour que les astronomes comme Chamberlain (début 1900) ou Crommelin (1925) y travaillent ardemment. Un de ses derniers défenseurs fut le russe Vsekhsviatsky qui, encore en 1950, faisait naître les comètes à la surface des satellites des planètes, ce qui permettait d'obtenir des vitesses d'éjection plus acceptables.

Toute théorie à une origine possible doit être capable d'expliquer les observations. Celle de Lagrange explique difficilement la prédominance d'orbites elliptiques de grande excentricité. Celle de Laplace explique difficilement la répartition très uniforme des inclinaisons des orbites à longue période sur l'écliptique.

En fait, le milieu du XXe siècle est un tournant doublement fatidique pour toutes ces hypothèses puisque c'est entre 1948 et 1951 que Van Worken et Oort exposèrent dans une série d'articles la théorie communément acceptée. A la base, les études comportaient des analyses statistiques sur 19 comètes. En faisant l'histogramme de l'inverse de leur demi-grand axe, ils s'aperçurent que celui-ci avait un pic correspondant à un aphélie compris entre 40 000 et 150 000 UA. Oort en a déduit l'existence d'un vaste réservoir de comètes aux confins du système solaire.

En 1973, Marsden et Sekanina reprirent ce travail, en ne considérant que les comètes dont le périhélie est supérieur à 3 UA, ce qui permet d'avoir un échantillon non sensible aux forces gravitationnelles, permettant des calculs d'aphélie plus précis. Ils donnent alors une valeur du pic plus proche de 50 000 UA, plus étroit autour de cette valeur, les aphélies pouvant atteindre tout de même 100 000 UA.

Il semble peu vraisemblable que les comètes aient été formées à ces distances, le milieu ambiant y étant trop ténu ; il est aussi peu vraisemblable qu'elles proviennent d'une zone proche du Soleil, la chaleur y étant

suffisante pour empêcher la glace de se former. C'est Oort lui-même qui suggéra que les comètes furent formées près d'Uranus et de Neptune, puis éjectées par les perturbations de ces dernières sur des orbites de grands aphélies. Oort est le premier à examiner l'influence des étoiles sur le nuage et à montrer que les perturbations stellaires limitent l'extension du nuage à 200 000 UA. D'après lui, ce réservoir devrait comporter environ cent milliards de comètes.

Par ailleurs, Whipple en 1964 et Safranov en 1969 étudièrent quantitativement l'effondrement de la nébuleuse proto-solaire dans l'hypothèse de Kant et de Laplace. Des similitudes chimiques entre Uranus, Neptune et les comètes les amenèrent à penser que ces deux planètes avaient été formées avec des "cométésimes" comme les planètes telluriques l'avaient été avec des "planétésimes". Leur modèle fait intervenir une ceinture de comètes au niveau de Neptune. Elle aurait été par la suite perturbée dès que Neptune eût atteint une certaine taille. Le nuage de Oort devient alors en plus une nécessité et une conséquence naturelle des hypothèses cosmogoniques. La présomption en fut donc accentuée.

Un dernier indice en faveur de l'existence du nuage, est donné à travers l'énorme travail d'Everhart. En 1974, à partir de simulation numérique, il a montré que la distribution des orbites de courte période peut résulter des perturbations d'une population de comètes quasi-paraboliques ayant leur périhélie entre Jupiter et Neptune, mais certainement pas d'une population de comètes à longue période telles qu'on les observe. Donc, uniquement à partir de données orbitales, il met en évidence deux populations de comètes qui entraînent l'existence de comètes, non observables à très longue période.

Aux distances impliquées par la dimension du nuage, les comètes sont sensibles aux passages d'étoiles et finalement, sa dynamique doit être régie par le passage d'étoiles proches. En particulier, ce serait ces passages qui injecteraient les comètes vers l'intérieur du Système solaire, là où les perturbations planétaires deviennent sensibles. Tout comme le saumon, la comète revient mourir sur les lieux qui l'ont vu naître.

Ce processus se fait en deux étapes distinctes :

- 1) Les perturbations des étoiles amèneraient des comètes vers les régions des planètes géantes.

- 2) A ce moment là, leur mouvement est régi par les perturbations dues à ces planètes, lesquelles feraient décroître leur demi-grand axe progressivement jusqu'aux régions internes terrestres, là où la comète devient visible pour les observateurs.

Dans le travail qui suit, nous allons nous intéresser à la dynamique du nuage de Oort en général et à cette première étape en particulier.

Avant tout, il est indispensable de faire un rapide tour des travaux récents qui vont servir de base à notre travail. Deux questions "clés" nous intéressent :

- "Que savons-nous du nuage" ? Implicitement cela revient à se demander :
Quelle origine lui est attribuée ?

- "Quelle évolution a-t-il pu subir" ? Autrement dit, que nous apprennent les études passées sur l'évolution dynamique ?

Actuellement, il existe deux scénarios ayant trait à la formation du nuage. Le premier considère que les comètes seraient à Neptune ce que les astéroïdes sont à Mars. Les pères de cette théorie sont Oort (1950) et Kuiper (1951). Puis, comme nous l'avons mentionné, en 1969 Safranov appuie cette théorie à partir de considérations chimiques. Les comètes initialement sur orbites circulaires auraient été éjectées par Neptune sur des orbites très elliptiques. En 1981, Ip et Fernandez montrent numériquement que dans ce cas, les orbites perturbées ont des aphélies essentiellement situés vers 40 000 UA : l'échelle de temps requise est le milliard d'année et il n'est pas dit que ce processus ne soit plus en vigueur.

Mais parallèlement Everhart montre que la population des comètes quasi-paraboliques observées, ne peut en aucune façon résulter des perturbations d'une population de comètes ayant eu des orbites peu excentriques dans la région des planètes. Un second scénario est alors introduit par Safranov (1977) et Cameron (1978). D'après eux, les comètes sont les restes de la nébuleuse protosolaire et se sont formées entre 30 000 et 100 000 UA du Soleil. En fait, en se basant uniquement sur les données orbitales, les comètes à courte période pourraient avoir été produites à l'intérieur du système planétaire, mais alors leur identité physique avec celles formées plus loin, ne s'explique pas. Il semble donc plus satisfaisant d'admettre que toutes les comètes que nous voyons dérivent de la même

population originale, produite au delà de 30 000 UA (Malaise 1982).

Donc ces deux scénarios entraînent des distances aphéliques similaires mais impliquent des positions de périhélie très différentes, donc des classes d'excentricités bien distinctes. Actuellement, le scénario qui semble le plus communément accepté est celui de Fernandez. La première partie de notre travail va être essentiellement l'étude des types d'orbites entraînés par cette hypothèse de façon à choisir un modèle dynamique de perturbations approprié

Les effets des perturbations stellaires sur les orbites cométaires ont déjà été étudiés par de nombreux chercheurs. Déjà Oort en 1951 montrait que le nuage avait été "thermalisé" par les perturbations stellaires. Des études analytiques postérieures ont été faites par Faintich (1971) et Yabushita (1972). A partir d'expressions analytiques ils montrent que les variations du moment cinétique des orbites cométaires suffisent à faire décroître substantiellement le périhélie des comètes.

Depuis les études les plus intéressantes sur les perturbations stellaires ont été les études numériques de Fernandez (1980-1981) et celles plus complètes de Weissman (1977, 1980, 1982). Le point de départ de la seconde partie de notre travail sera le modèle de Weissman que nous commenterons en détail. Finalement l'essentiel de l'exposé consistera à modifier les travaux de Weissman pour pallier les insuffisances, notamment au niveau de la position de la comète sur son orbite au moment de la rencontre et au niveau de l'expression même de la perturbation. Nous essayerons par ailleurs de traiter parallèlement études numériques (simulations) et études analytiques.

Pour être complet, disons dès maintenant que nos conclusions vont dans le sens de l'existence du nuage de Oort, comme réservoir de comète. Nuage dont l'existence n'est cependant pas acceptée par tout le monde. En particulier Witkowski (1972), Yabushita et Hasegawa (1978) se font les défenseurs d'une origine interstellaire des comètes, pendant que l'origine planétaire de Lagrange est encore soutenue par Mendis (1973) et Vsekhsyatsky (1972). Le plus fervent détracteur est probablement Lyttleton (1974) qui attaque violemment la méthode de Oort et conteste point par point toutes ses conséquences. Clube et Napier (1981), enfin, qui sans rejeter l'existence du nuage en nient l'efficacité dans la mesure où ils pensent que celui-ci est régulièrement vidé par l'approche d'un nuage moléculaire géant.

*

I. EFFET DU PASSAGE D'UNE ÉTOILE SUR UNE ORBITE COMÉTAIRE

Comment traduire le passage d'une étoile ? Quels en sont les effets sur une orbite cométaire ?

Pour pouvoir répondre à ces questions, il faut tout d'abord avoir une idée sur la nature des comètes concernées et sur les quantités liées aux étoiles du voisinage solaire. Nous pourrions alors choisir un modèle dynamique approprié. Ensuite, nous essayerons d'en dégager les effets ainsi que les limitations liées aux hypothèses.

Les formules analytiques exprimant les variations des éléments orbitaux sont données dans l'annexe A.

1. PRESENTATION DU PROBLEME

1.1. Type d'orbite attendu

L'étude des comètes quasi-paraboliques donne une valeur approximative du rayon du nuage de comètes, donc de l'aphélie des orbites. En revanche, nous n'avons plus aucune information sur la distance du périhélie avant la perturbation décisive. Ce sont des raisonnements indirects qui permettent d'évaluer cette distance entre 20 et 50 UA. Nous allons toujours donner une préférence à ces types d'orbites mais sans jamais oublier que ce périhélie peut prendre des valeurs de l'ordre du millier d'UA.

Pour traduire le passage des étoiles, nous allons être amenés à faire des hypothèses sur la nature de l'interaction puis sur l'effet de cette interaction. Autant les problèmes d'orbites modérément elliptiques nous sont assez familiers, autant il est rare de rencontrer des orbites d'excentricité très proche de 1.

Il peut être intéressant de regarder d'un peu plus près le type d'orbite du nuage. Pour cela, nous avons étudié l'évolution en fonction du temps, de l'anomalie vraie, de la distance au foyer et de la vitesse pour un objet en orbite d'excentricité très grande.

Nous avons fixé le demi-grand axe à 25 000 UA ; l'excentricité prend les valeurs 0.999, 0.99, 0.9 et 0.5 correspondant à des périhélies à 25, 250, 2500 et 12 500 UA.

L'unité de temps est la période de l'orbite T . Nous nous occupons uniquement de la première moitié de l'ellipse ; l'objet évolue donc du périhélie ($t/T = 0$) à l'aphélie ($t/T = 1/2$). L'unité de vitesse est la vitesse circulaire du lieu ($V_c = \sqrt{GM/R}$), où R est la distance de l'objet au corps central à t .

On trouve souvent dans la littérature que les comètes passent le plus clair de leur temps à l'aphélie ; voici une illustration probante de ce fait : pour ces quatre excentricités, est donné dans le tableau 1 le temps t/T que l'objet passa à moins de k degré de l'aphélie. La période commune est d'environ 4 millions d'années.

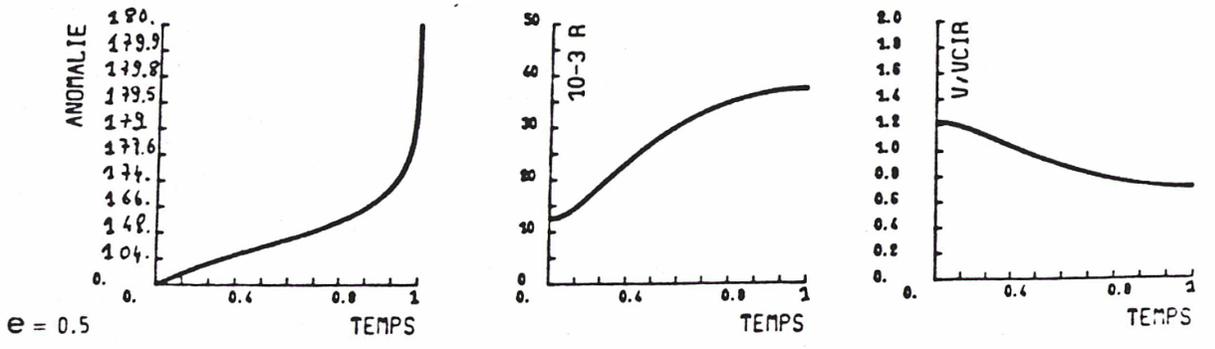
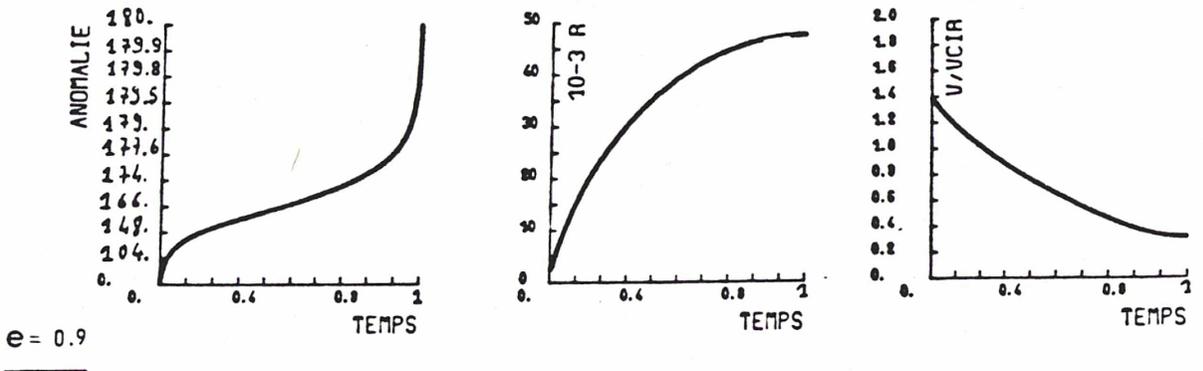
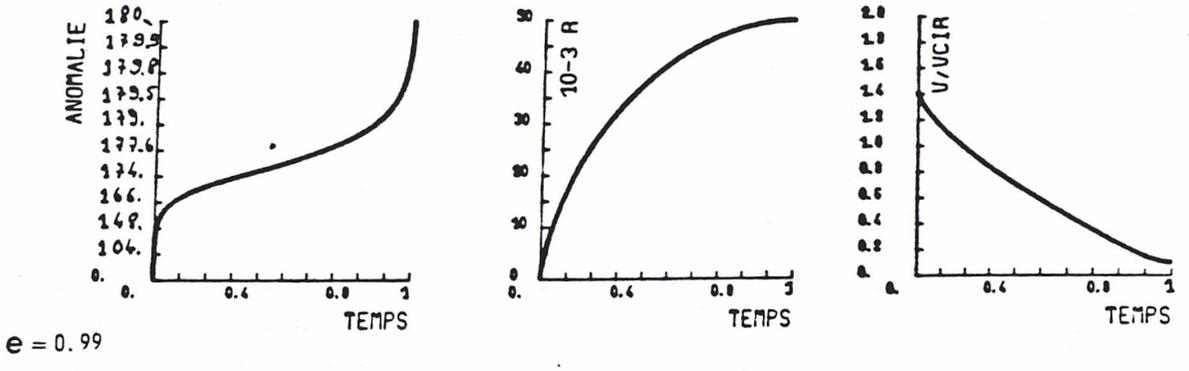
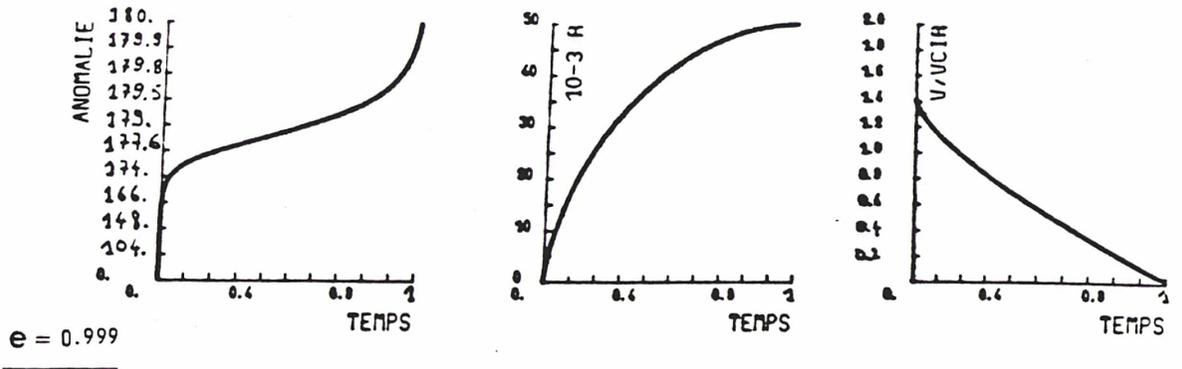


FIG (1). Evolution de l'anomalie vraie, de la distance au foyer et de la vitesse, par rapport au temps, d'un objet en orbite.

$e \backslash k$	1°	2°	3°	10°
0.999	0.45	0.74	0.96	0.993
0.99	0.15	0.30	0.63	0.876
0.9	0.04	0.10	0.24	0.43
0.5	0.015	0.03	0.07	0.14

TAB (1). t/T passé à moins de k° , fonction de e .

La série des figures (1) montre bien l'évolution de certaines quantités en fonction de la partie du temps écoulée. Par exemple, on lit que pour $e = 0.999$, l'objet passe la moitié du temps à une distance supérieure à 40 000 UA (soit à 0.8 fois son aphélie), avec une vitesse inférieure à 75 m/s. En fait, sa vitesse varie de 8 km/s au périhélie à 4.3 m/s à l'aphélie. Pour une excentricité de 0.99, cette vitesse varie de 2.6 km/s au périhélie à 13 m/s à l'aphélie. Les autres quantités évoluent de la même façon que pour $e = 0.999$. L'allure de ces courbes commence à changer de façon significative seulement pour $e = 0.9$, c'est à dire, ici, pour des périhélies supérieurs à 2500 UA.

En résumé, les types d'orbites cométaires que l'on s'attend à rencontrer donnent lieu à une vitesse au périhélie de l'ordre du km/s et à l'aphélie de l'ordre du m/s ; les comètes passent la majeure partie de la période orbitale au voisinage de l'aphélie.

1.2. Etoiles du voisinage solaire

Les étoiles de la Galaxie ont une vitesse relative due à la rotation galactique et une vitesse particulière d'agitation. A partir du mouvement propre et des vitesses radiales des étoiles proches et en supposant qu'à chaque point de la Galaxie il existe un référentiel local dont l'origine est affectée du mouvement systématique, nous pouvons déduire les constantes de Oort qui traduisent la rotation galactique. Ces constantes sont $0.015 \text{ km s}^{-1} \text{ pc}^{-1}$ et $-0.010 \text{ km s}^{-1} \text{ pc}^{-1}$, ce qui signifie que les étoiles du groupe local, à quelques dizaines de parsecs du Soleil, ont un écart de vitesse

dû à la rotation galactique, inférieur au km/s^{-1} . Pourtant, les étoiles proches ont des vitesses relatives souvent supérieures à 10 km/s. Il est donc clair qu'à notre échelle, le mouvement des étoiles est essentiellement dû à l'agitation. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de ce mouvement, on se place dans un référentiel lié au Soleil et on moyenne la vitesse d'agitation des étoiles. Déjà en s'aidant des vitesses radiales des étoiles proches, Campbell et Moorde en 1925 trouvent une vitesse moyenne de 21.3 km/s et, s'aidant des mouvements propres, trouvent 19 km/s.

En fait, nous avons besoin aussi des moments d'ordre supérieur, mais nous ne disposons de façon précise que des deux premiers. La vitesse résultante est alors comprise dans un ellipsoïde dit "ellipsoïde de Schwarzschild", ce qui donne la valeur moyenne de la vitesse d'agitation.

Dans tout ce qui suit, on supposera que les étoiles traversent le voisinage solaire, sans direction privilégiée, à une vitesse de 20 km/s.

2. MODELE DYNAMIQUE

2.1. Justification du modèle impulsif

Le chapitre précédent nous incite à considérer que, lors du passage d'une étoile, la comète est à son aphélie ou, tout du moins, dans son voisinage immédiat. Supposons que la comète soit sensible à tout ce qui se passe dans une sphère dont le rayon est de l'ordre de sa distance au Soleil. Le temps t_i d'interaction est donc de l'ordre du temps mis par l'étoile pour traverser cette sphère.

$$t_i \approx \frac{Q}{V_*}$$

où Q est la distance aphélie et V_* la vitesse de l'étoile.

La période est T :

$$T = \frac{Q^{3/2}}{(1 + e)^{3/2}}$$

d'où

$$T_i/T \approx \frac{1}{V_* \sqrt{Q}}$$

Pour $Q = 40\ 000$ UA, T_i/T est inférieur à $1.2/100$; pour $60\ 000$ UA, il est inférieur à $0.9/100$.

On voit clairement, avec l'aide de la série de figure (1) que, pendant un temps de l'ordre du centième de la période, au voisinage de l'aphélie, la distance au Soleil et l'anomalie sont constantes. Par ailleurs nous savons que la trajectoire de l'étoile par rapport à la comète est symétrique par rapport à la droite reliant le point d'approche le plus proche de la trajectoire, à la comète. L'interaction ayant lieu pendant un temps très court, il paraît légitime de l'appliquer exactement lorsque l'étoile passe au plus proche et ainsi d'étudier ces perturbations en maintenant la comète fixée pendant l'interaction ;

c'est l'approximation impulsive : le passage de l'étoile s'effectue dans un temps suffisamment bref pour que seul le vecteur vitesse de la comète soit affecté, mais pas sa position spatiale.

Dans un référentiel lié au Soleil (Fig.2), le mouvement de la comète est repéré par son rayon vecteur $\rho \vec{I}$ et sa vitesse \vec{V} . Lorsque l'étoile passe au plus près de la comète, elle lui donne une impulsion $\Delta \vec{V}_C$; lorsqu'elle passe au plus près du Soleil, elle lui donne une impulsion $\Delta \vec{V}_S$.

Dans ce référentiel et après la perturbation, la comète est repérée par $\rho \vec{I}$ et sa vitesse est $\vec{V} + \Delta \vec{V}_C - \Delta \vec{V}_S$.

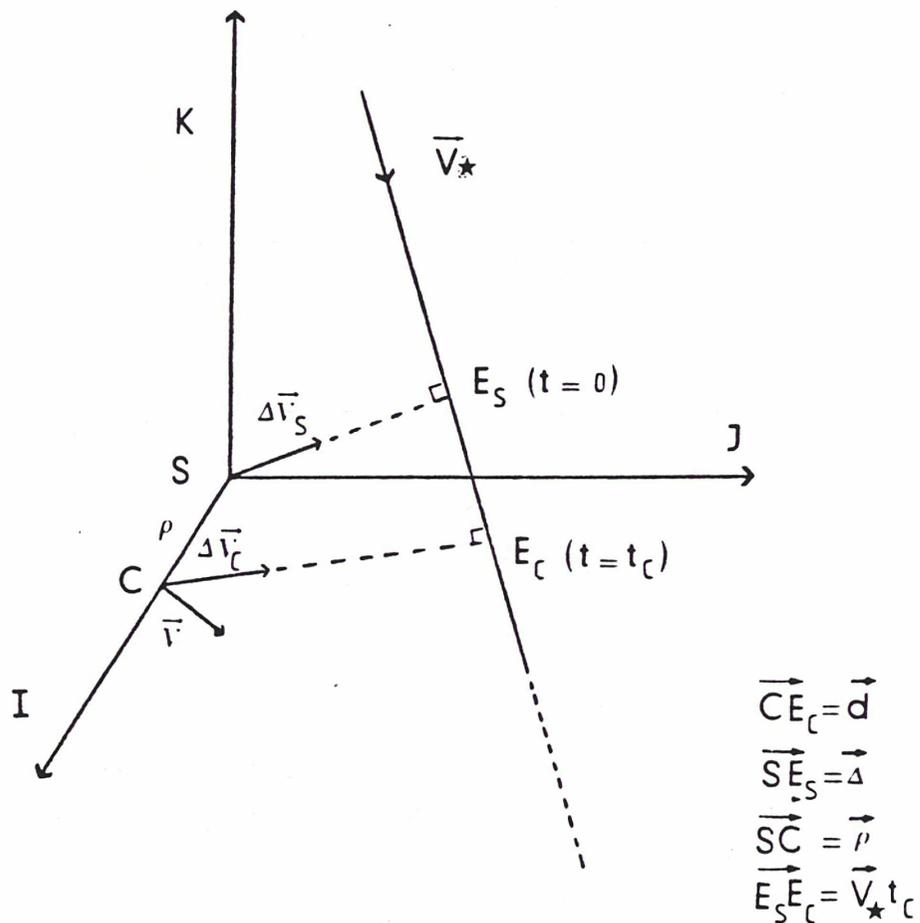


FIG (2). Perturbations causées par le passage d'une étoile sur le Soleil et sur la comète, dans un référentiel lié au Soleil.

Par construction \vec{SE}_S et \vec{CE}_C sont orthogonaux à \vec{V}_* .

Seul l'effet différentiel (perturbations sur la comète moins perturbations sur le Soleil) intervient dans la modification de l'orbite de la comète.

Finalement, ce problème à trois corps se décompose en deux problèmes à deux corps que nous allons étudier séparément. En effet, dans le cas de l'interaction comète-étoile, la masse de la comète est si négligeable qu'il s'agit là d'un problème à un corps.

2.2. Formule analytique de l'impulsion

a) Interaction Comète-étoile

Si l'on se place dans un repère lié à l'étoile, la trajectoire de la comète initialement rectiligne, est déviée d'un angle θ .

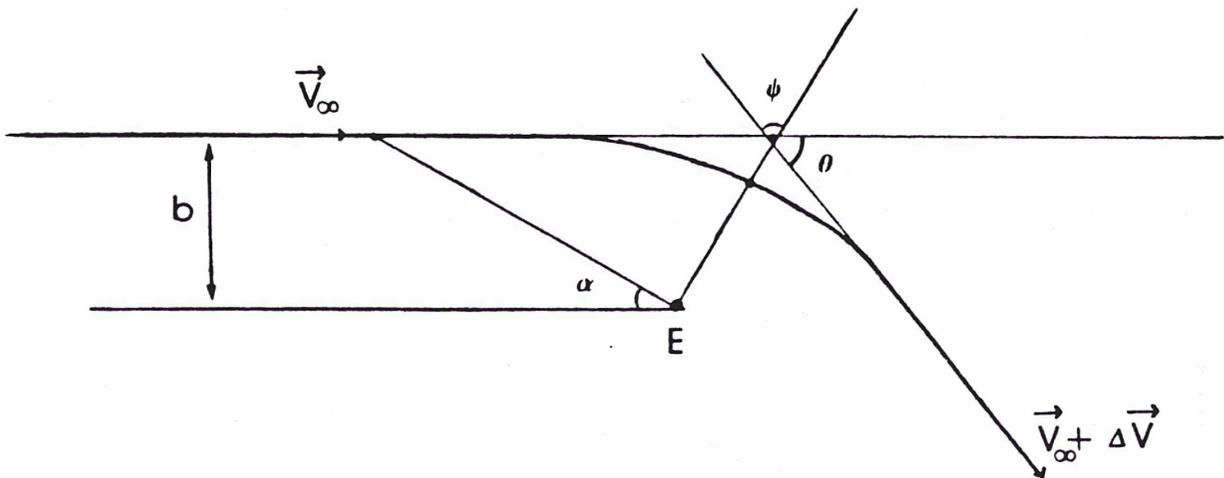


FIG (3). Trajectoire de la comète par rapport à un référentiel lié à l'étoile.

Le mouvement a lieu dans un champ de force central ; la trajectoire est donc symétrique par rapport à la droite passant par l'étoile et le point de rencontre le plus proche. Les deux asymptotes coupent cette droite suivant le même angle ψ , tel que $\theta = \pi - 2\psi$.

La conservation du moment cinétique s'écrit :

$$R^2 \dot{\alpha} = \text{cte} = c$$

où α est l'angle polaire.

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$GM/R + 1/2 (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\alpha}^2) = 1/2 V_\infty^2$$

De ces deux équations, nous obtenons :

$$d\alpha = c/R^2 dt$$

$$dR = (V_\infty^2 - 2GM/R - c^2/R^2)^{1/2} dt$$

Nous pouvons alors calculer ψ

$$\psi = \int_0^\psi d\alpha = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{c}{R^2} dt = \int_{R_{\min}}^{-\infty} \frac{c dR}{\sqrt{V_\infty^2 - \frac{2GM}{R} - \frac{c^2}{R^2}}}$$

en posant $R = 1/U$ et en intégrant, nous trouvons :

$$\psi = \pi/2 + \operatorname{arctg}\left(\frac{GM/c}{\sqrt{V_\infty^2 + \left(\frac{GM}{c}\right)^2}}\right)$$

d'où $\operatorname{tg}(\theta/2) = GM/cV_\infty$

avec $c = V_\infty b$ (où b est la distance d'impact) :

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = GM/(b V_\infty^2)$$

(1)

Ordre de grandeur

Nous avons vu qu'il fallait s'attendre à des vitesses d'étoile de 20 km/s ; pour une étoile d'une masse solaire, GM/V_∞^2 vaut 2.2 UA.

Donc, même pour une rencontre extrêmement proche à 1000 UA, l'angle peut être confondu avec sa tangente, avec une erreur relative inférieure à 10^{-6} .

L'équation (1) devient dans tous les cas :

$$\theta = 2GM/bV_\infty^2 \tag{2}$$

L'impulsion est dirigée du point d'impact vers l'étoile et vérifie donc :

$$\|\Delta \vec{V}\| / \|\vec{V}\| = \theta$$

Soit :

$$\boxed{\vec{\Delta V} = (2GM/b^2 V_\infty) \vec{b}} \quad (3)$$

En fait, on savait que cette déviation serait très petite et, par conséquent, nous pouvons employer une méthode plus élégante qui consiste à remplacer l'impulsion $\vec{\Delta V}$ par la composante orthogonale du mouvement.

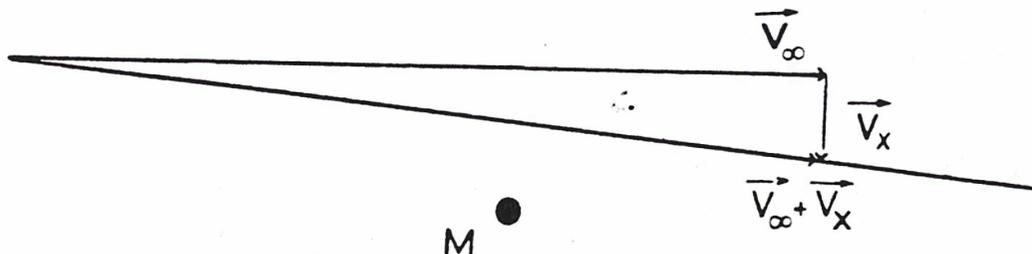


FIG (4). Trajectoire approchée de la comète un repère lié à l'étoile.

L'équation
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{GM}{R^3} \vec{R}$$

projetée perpendiculairement au mouvement, s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{GM}{R^3} b$$

Le temps et ces paramètres sont liés par :

$$R^2 = b^2 + V^2 t^2$$

d'où,

$$V_X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV_X}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-GM}{(b^2 + V^2 t^2)^{3/2}} dt = -2 \int_0^{\infty} \frac{GM dt}{b(1 + \frac{V^2}{b^2} t^2)^{3/2}}$$

après avoir posé

$$X = \frac{V^2 t^2}{b^2}$$

on obtient
$$V_X = \frac{-2 GM}{bV} \left[\frac{X}{\sqrt{1 + X^2}} \right]_0^{\infty} = 2 GM / (bV)$$

Cette composante orthogonale est dirigée suivant le vecteur \vec{b}/b , soit :

$$\vec{V}_X = 2GM/(b^2v) \vec{b}$$

Pour une étoile d'une masse solaire passant à 1 pc, cette impulsion vaut 43 cm/s.

b) Interaction étoile-Soleil

Considérons tout d'abord deux corps P_1, P_2 de masse M_1, M_2 , comparables.

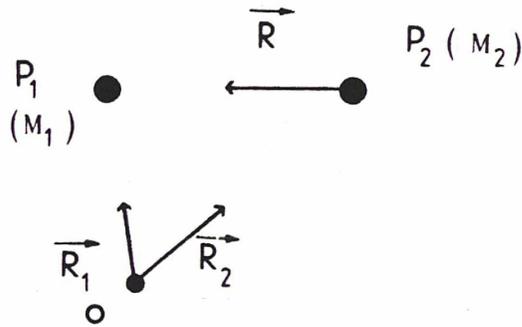


FIG (5)

O est un point référentiel galiléen, $\vec{OP}_1 = \vec{R}_1$ et $\vec{OP}_2 = \vec{R}_2$. La position de P_1 vue de P_2 est donnée par \vec{R} tel que

$$\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \tag{4}$$

Le système d'équations liant \vec{R}, \vec{R}_1 et \vec{R}_2 est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} = - GM_2/R^3 \vec{R} \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \vec{R}_2}{dt^2} = GM_1/R^3 \vec{R} \end{array} \right. \tag{6}$$

Lequel, avec (4), donne :

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = - G(M_1 + M_2)/R^3 \vec{R} \tag{7}$$

On trouve bien que dans le problème des deux corps, le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre, rapporté à des axes parallèles à un système d'axes galiléens, est celui qui serait dû à l'attraction d'une masse centrale égale à la somme des masses des deux corps sur l'autre.

Nous pouvons alors employer la même méthode que précédemment et affirmer que l'angle θ , duquel P_2 est dévié, vu de P_1 , est tel que :

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = G(M_1 + M_2) / (V^2 b)$$

Au niveau numérique, cet angle est du même ordre de grandeur que celui mentionné précédemment. Il peut donc être aussi confondu avec sa tangente. On obtient donc, pour les mêmes raisons que précédemment :

$$\overrightarrow{\Delta V} = 2G (M_1 + M_2) / (V b^2) \overrightarrow{b} \quad (8)$$

où \overrightarrow{b} est le vecteur liant le point d'impact de l'orbite de P_2 à P_1 .

Ce qui nous intéresse dans le cas présent est la variation de vitesse du Soleil dans un référentiel inertiel et non la variation de vitesse relativement à l'étoile.

Nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{R}_2 = -M_1 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{R} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{R}_2 = -M_1 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{R} \end{array} \right. \quad (10)$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{V} \\ \overrightarrow{V}_2 = -M_1 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{V} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{V} \\ \overrightarrow{V}_2 = -M_1 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{V} \end{array} \right. \quad (12)$$

soit :

$$\overrightarrow{\Delta V}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \overrightarrow{\Delta V} = -2 GM_2 / (V b^2) \overrightarrow{b}$$

Le mouvement absolu n'est donc traduit que par les paramètres relatifs et, la variation de vitesse absolue du Soleil après le passage de l'étoile

est donnée par :

$$\Delta \vec{V} = -2 GM_{\star} / (V_{\star} b^2) \vec{b} \quad (13)$$

où M_{\star} est la masse de l'étoile et V_{\star} sa vitesse relative.

Remarque L'équation (8) est la somme de deux "équations 13", l'une pour la variation de vitesse absolue du Soleil, et l'autre, pour celle de l'étoile.

Nous aurions pu aussi tout de suite raisonner dans un référentiel inertiel. En effet, si l'on élimine \vec{R} des équations (5) et (9), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} = - \left[GM_2^3 / (M_1 + M_2)^2 \right] \vec{R}_1 / R_1^3$$

Nous retrouvons ici le fait que tout se passe comme si chaque corps était attiré par le centre de gravité où serait concentrée la masse $M_0 = M^3 / (M' + M)^2$, M étant la masse du corps considéré et M' , celle de l'autre.

Alors, si θ' est l'angle absolu de déviation, on obtient aisément :

$$\text{tg}(\theta'/2) = G \left[M_2^3 / (M_1 + M_2)^2 \right] / (V_1^2 b_1)$$

avec, cette fois :

$$\begin{cases} b_1 = M_2 / (M_1 + M_2) b \\ \vec{V}_1 = M_2 / (M_1 + M_2) \vec{V} \end{cases}$$

d'où $\text{tg}(\theta/2) = GM_2/(Vb)$.

En fait, $\theta' = \theta$, et comme le laissent prévoir les équations (9) et (10), les mouvements absolu et relatif sont homothétiques.

Variations de vitesse de la comète par rapport au référentiel lié au Soleil

La variation de vitesse de la comète se traduit par l'effet différentiel dû à ces deux impulsions (fig. 2).

Appelons Δ la distance minimum Soleil-étoile.

Appelons d la distance minimum comète-étoile.

Appelons ρ la distance invariante comète-Soleil.

L'impulsion Soleil-étoile s'écrit $\vec{I}_S = \frac{2GM_\star}{V_\star \Delta^2} \vec{\Delta}$ <eq(3)>

L'impulsion comète-étoile s'écrit $\vec{I}_C = \frac{2GM_\star}{V_\star d^2} \vec{d}$ <eq(13)>

La variation de vitesse de la comète s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{\Delta V} = \frac{2GM_\star}{V_\star} \left(\frac{\vec{d}}{d^2} - \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^2} \right)} \quad (\text{cf. Fig.(2)})$$

2.3. Conditions de validité

Depuis 1950, cette formule donnant l'impulsion a été fréquemment utilisée sans que l'on en connaisse vraiment les conditions de validité, c'est à dire à partir de quel moment le double problème des deux corps doit céder la place à un problème des trois corps.

En 1982, H. Scholl, A. Cazenave et A. Brahic, ont étudié précisément l'effet du passage d'une étoile sur une comète. Les buts de leur étude étaient d'étudier quantitativement la dépendance des paramètres et les configurations susceptibles d'injecter une comète vers les régions planétaires. C'est seulement à partir de cet article que le modèle impulsif a été testé par intégration numérique. Ils n'ont considéré que des passages d'étoiles proches de la comète, donc que l'interaction comète-étoile ; dans ce cas :

$$\vec{\Delta V} = \frac{2GM_\star \vec{d}}{d^2 V_\star}$$

Au moment de la rencontre, la comète est un peu en deçà de son aphélie située à 100 000 UA et la plus petite distance étoile-comète est de 2000 UA.

Les paramètres variables sont celui de la configuration géométrique (inclinaison relative du plan de l'orbite par rapport à la trajectoire de l'étoile), celui de l'orbite de la comète (excentricité) et ceux de l'étoile (masse et vitesse).

Le test se fait à partir du calcul de la variation du périhélie déduit de la formule d'impulsion d'une part, et par intégration numérique du problème complet d'autre part.

Il est évident que l'approximation deviendra critique pour une étoile massive se déplaçant lentement.

Si l'on se fixe une précision de 0.01, l'étoile critique a une masse de deux masses solaires et une vitesse de 10 km/s, indépendamment de la géométrie du problème. D'après Jahreiss (81), cela représente environ 8 % des étoiles. Dans ce cas, la formule de l'impulsion sous-estime l'effet de l'étoile. On peut donc dans plus de 90 % des cas appliquer sans conteste le modèle impulsif.

3. EFFET D'UNE PERTURBATION SUR UNE ORBITE COMETAIRE

3.1. Etude de l'espace des phases

A un temps t , un objet est repéré par (\vec{R}_0, \vec{V}_0) dans l'espace à six dimensions. A un temps $t + dt$, il est repéré par $(\vec{R}_0, \vec{V}_0 + \Delta\vec{V}_0)$.

La donnée des six éléments $\vec{R}_0, \vec{V}_0 + \Delta\vec{V}_0$ suffit à reconstituer les six éléments orbitaux de l'orbite, mais il est souvent délicat d'en sortir aisément des informations qualitatives. De plus, nous avons l'habitude d'étudier les trajectoires dans l'espace réel à trois dimensions où il est très difficile d'apprécier l'effet d'un changement de vitesse.

En fait, le problème peut être vu différemment ; cet objet est soumis à la loi de gravitation universelle, c'est à dire vérifie :

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = - \frac{GM}{R^2} \vec{I} \quad (\text{voir Fig (1) notation}) \quad (1)$$

et il a pour conditions initiales $(\vec{R}_0, \vec{V}_0 + \Delta\vec{V}_0)$. Quelle est sa trajectoire ?

Puisque le mouvement est connu pour être plan, on peut ramener les conditions initiales à deux coordonnées de position (X_0, Y_0) et deux de vitesse (V_{X_0}, V_{Y_0}) .

L'état du système est régi par (1) et est complètement défini par le rayon vecteur $\vec{R}(t)$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, c'est à dire par un point dans l'espace à quatre dimensions. Une solution de (1) ayant $(X_0, Y_0, V_{X_0}, V_{Y_0})$ comme conditions initiales sera une trajectoire dans l'espace des phases.

Une question que l'on est amené à se poser est :

"Quel est le lien entre les ellipses képlériennes et ces trajectoires" ?

L'équation paramétrique est :

$$\begin{cases} X = X(t) & ; & Y = Y(t) \\ V_X = V_X(t) & ; & V_Y = V_Y(t) \end{cases}$$

et l'élimination du temps entre $X(t)$ et $Y(t)$ donnera les trajectoires dans le sous-espace (X, Y) . En d'autres termes, les ellipses connues sont des "projections" de trajectoires dans l'espace des phases sur le plan (X, Y) .

En faisant cela, on perd délibérément une partie des informations de l'espace des phases, notamment tout ce qui a trait à la vitesse. Donc chaque fois que l'on est devant un problème de changement de vitesse (frottement atmosphérique, force non gravitationnelle, impulsion...), on est dépourvu d'appui intuitif. Ceci nous a incité à étudier les courbes de la trajectoire projetée sur le plan $(V_X; V_Y)$.

Notons que notre étude est différente de l'hodographe puisqu'elle est basée sur l'étude du vecteur vitesse dans un repère tournant lié à l'objet. Par exemple nous verrons qu'une orbite circulaire dont l'hodographe est un cercle sera représentée ici par un point. L'intérêt en sera donc différent, en particulier cette étude est bien adaptée pour l'étude des quantités distances aphéliques ou périhéliques dans le cas d'une orbite très excentrique.

Equations

Nous étudions le mouvement plan ; nous avons donc besoin de quatre paramètres : le demi-grand axe a , l'excentricité e , la position du périhélie ω et l'instant de passage au périhélie τ . L'objet est repéré par son anomalie vraie f par rapport au périhélie. Son équation polaire est donc :

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (2)$$

Dans le repère tournant lié à l'objet, la vitesse s'écrit :

$$\vec{V} = V_X \vec{I} + V_Y \vec{J}$$

avec

$$V_X = \sqrt{\frac{GM}{a}} (1 - e^2)^{-1/2} e \sin f \quad (3)$$

$$V_Y = \sqrt{\frac{GM}{a}} (1 - e^2)^{1/2} a/R \quad (4)$$

En arrangeant (2), (3) et (4), on obtient :

$$V_X^2 + V_Y^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{2a}{R} - 1 \right)$$

soit :

$$a = \frac{GMR}{2GM - RV^2} \quad (5)$$

ce qui est sans ambiguïté puisque nous ne considérons que des ellipses, donc que des trajectoires vérifiant $V < \sqrt{2} V_C$.

L'équation (4) donne alors l'excentricité :

$$e = \left(1 - \frac{(V_Y R)^2}{GMa} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Le vecteur de Laplace $\vec{k} = \vec{V} \wedge \vec{C} - \mu \frac{\vec{R}}{R}$ donne l'anomalie vraie :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ RV_Y \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mu = GM)$$

$$d'où \vec{k} \cdot \vec{I} = RV_Y^2 - \mu = \mu e \cos f$$

$$\vec{k} \cdot \vec{J} = -RV_Y V_X = \mu e \sin f$$

En éliminant les cas de chute libre ($V_Y=0$) et le cas de l'orbite circulaire ($V_X=0$), on obtient :

$$\cotg f = - \frac{\mu - RV_Y^2}{R^2 V_Y V_X} \quad (7)$$

Si l'objet évolue du périhélie à l'aphélie, $V_X > 0$, alors $f \in [0, \pi]$.

En fait, le problème peut être vu différemment : on se trouve à une distance R du Soleil et on donne à un objet une vitesse V_X, V_Y . Quelle est l'allure de la trajectoire ?

L'unité de distance peut donc être prise comme la distance objet-Soleil au moment où sa vitesse est V_X, V_Y .

Ceci équivaut à prendre comme unité de vitesse la vitesse circulaire du lieu où l'on se trouve.

Les trois dernières équations deviennent :

(si x est une quantité métrique $\tilde{x} = x/R$, si x est une vitesse $\tilde{x} = x/V_C$)

$$\tilde{a} = \frac{1}{2 - \tilde{V}^2} \quad (8)$$

$$e = \left(1 - \tilde{V}_Y^2 (2 - \tilde{V}^2) \right)^{1/2} \quad (9)$$

$$\cotg f = \frac{\tilde{V}_Y^2 - 1}{\tilde{V}_X \tilde{V}_Y} \quad (10)$$

Courbes dans l'espace $(\tilde{V}_X, \tilde{V}_Y)$

Nous allons nous intéresser uniquement aux grandeurs traduisant la forme de la courbe, c'est à dire a , e , Q et q . Puisque l'on se restreint au cas elliptique, il ne faut considérer que l'intérieur du cercle centré en 0 et de rayon $\sqrt{2}$, correspondant aux trajectoires paraboliques. Le choix des axes interdit les mouvements rétrogrades ; on ne peut donc considérer que le demi-plan $V_Y > 0$.

- Demi-grand axe

Les courbes $a = \text{const.}$ sont données par :

$$\tilde{V}_X^2 + \tilde{V}_Y^2 = (2 - 1/\tilde{a}) \quad (11)$$

On obtient donc une famille de cercles concentriques de rayon $(2 - 1/\tilde{a})^{1/2}$.
Puisque $0 < R < 2a$, \tilde{a} est toujours supérieur à 0.5.

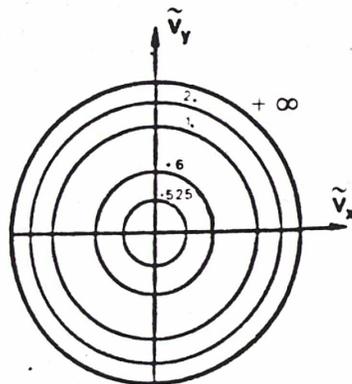


FIG (6). Espace des phases. Courbes de demi-grand axe constant.

Excentricité

Les courbes $e = \text{cte}$ sont données par :

$$\tilde{V}_Y^2 (\tilde{V}_X^2 + \tilde{V}_Y^2 - 2) = e^2 - 1.$$

Les orbites circulaires $e = 0$ sont représentées par le point $(0,1)$ puisque $V_X = 0$ et $\tilde{V}_Y = \tilde{V}_C = 1$.

Les courbes d'excentricité 1 sont représentées par le demi-cercle de rayon $\sqrt{2}$. Il s'agit de parabole ou de chute libre. Dans le cas de la parabole, le demi-grand axe est infini (partie supérieure du cercle $\tilde{V}_Y > 0$) ; dans le cas de la chute libre, il est égal à la moitié de la distance à laquelle est lâché le corps (axe $O\tilde{V}_X$). Sinon, on obtient une courbe fermée partant du point $(0, \sqrt{1+e})$ correspondant au périhélie et passant par le point $(0, \sqrt{1-e})$ correspondant à l'aphélie.

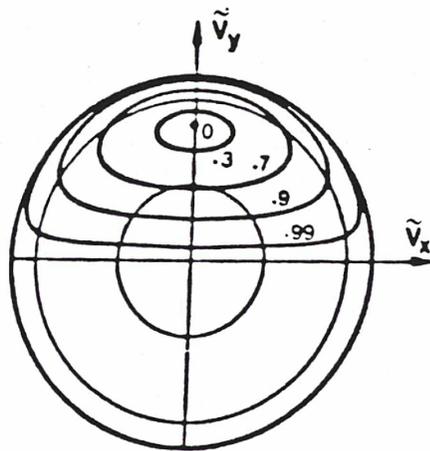


FIG (7). Espace des phases. Courbes d'excentricité constante (sont conservées les courbes $\tilde{a} = 0.6$ et $\tilde{a} = 2$).

Puisque e n'a pas de dimension, ces courbes ne sont pas assujetties aux unités ; ce sont donc les seules courbes qui correspondent aux ellipses képlériennes. Chacune de ces courbes coupe des courbes $\tilde{a} = \text{cte}$, du périhélie où $\tilde{a} = 1/(1-e)$, et à l'aphélie où $\tilde{a} = 1/(1+e)$.

Une orbite est donc maintenant entièrement définie par $(\tilde{V}_X, \tilde{V}_Y)$. On peut aussi caractériser l'orbite par la donnée du périhélie q et de l'aphélie Q .

On a $\tilde{q} = \tilde{a}(1 - e)$
 $\tilde{Q} = \tilde{a}(1 + e)$

Avec les équations (8) et (9), on obtient :

$$\frac{\tilde{V}_X^2}{2\left(\frac{\tilde{Q}-1}{\tilde{Q}}\right)} + \frac{\tilde{V}_Y^2}{2\frac{\tilde{Q}}{\tilde{Q}+1}} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{\tilde{V}_X^2}{2\frac{(1-\tilde{q})}{\tilde{q}}} - \frac{\tilde{V}_Y^2}{2\frac{\tilde{q}}{(\tilde{q}+1)}} = -1 \quad (14)$$

En faisant varier \tilde{Q} dans (13), on obtient une famille d'ellipses d'axe OV_Y . Les deux membres extrêmes de cette famille sont les segments :

$$\tilde{V}_Y \in [0,1] \text{ et } \tilde{V}_X = 0 \text{ pour } \tilde{Q} = 1$$

et le demi-cercle de rayon $\sqrt{2}$ pour $Q \rightarrow \infty$

(14) représente une famille d'hyperboles qui dégénère vers l'axe OV_X pour $q = 1$ et vers le segment:

$$\tilde{V}_Y \in [1, V_C] \text{ et } \tilde{V}_X = 0 \text{ pour } \tilde{q} \rightarrow 0$$

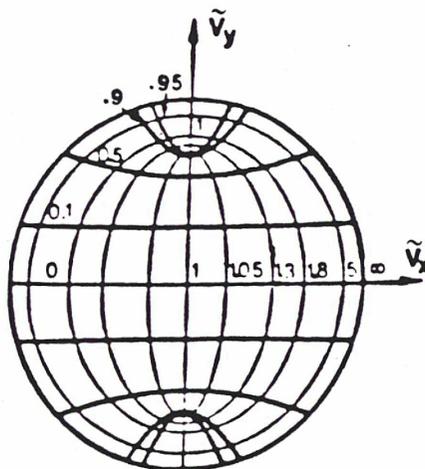


FIG (8). Espace des phases. Courbes de distances aphélique (ellipses) et périhélique (hyperboles) constantes.

3.2. Applications et exemples

Dans le repère tournant lié à son mouvement, un corps est repéré par R, V_X, V_Y ou par V_C, V_X, V_Y . A son orbite, correspond un point M du plan (V_X, V_Y) de coordonnées $(V_X/V_C, V_Y/V_C)$. Ce corps subit une impulsion $\Delta \vec{V}$, ce qui correspond à translater M en M' de $(\Delta V_X / V_C, \Delta V_Y / V_C)$. Puisque l'unité de distance n'a pas changé à partir de M' , nous lisons les nouvelles valeurs relatives de a, e, q, Q .

Nous pouvons avoir tout de suite des informations qualitatives sur le sens de variations. La courbure des courbes indique par exemple que, si la perturbation est radiale, les signes de da, dq et dQ sont les mêmes que ΔV_X , si la perturbation est tangentielle, ces signes sont les mêmes que ΔV_Y . Si les perturbations vont à l'encontre du mouvement, alors a, q et Q décroissent et inversement.

Plus V_C est petit, plus les changements de vitesses relatives seront importants. Les régions où les perturbations seront le plus efficaces sont donc vers l'aphélie.

De telles considérations peuvent être faites à partir des équations de l'annexe A mais donnent souvent lieu à de fastidieux calculs.

Satellites

- Frottement atmosphérique

Les frottements atmosphériques ont pour effet de freiner le satellite lors de son passage au périhélie. Dans ce cas, $\Delta V_Y < 0$, on voit sur les figures (7) et (8) que cela a pour effet de circulariser l'orbite et de faire décroître demi-grand axe, périhélie et aphélie.

- Ariane

Mettre un satellite géosynchrone sur orbite se fait en deux étapes. La première consiste à le placer sur une orbite dite de transfert dont le périhélie est à 200 km d'altitude et dont l'aphélie correspond au rayon de l'orbite synchrone, c'est à dire 42 000 km. L'orbite finale doit être circulaire de rayon 42 000 km.

Sur la figure (9), l'orbite de transfert est en A, l'orbite synchrone en C ; il est donc clair qu'il faut appliquer à l'aphélie une impulsion tangentielle et positive d'environ $0.5 V_C$ soit 1,5 km/s.

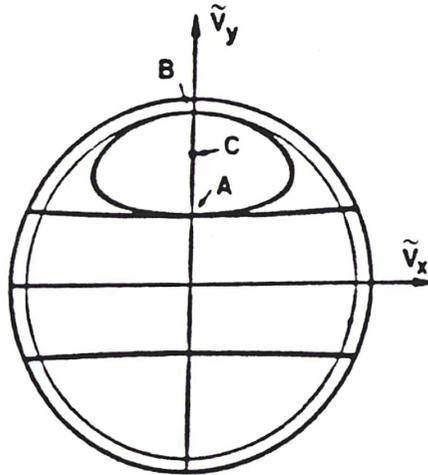


FIG (9). Espace des phases : illustration des méthodes requises pour mettre un satellite géosynchrone sur orbite.

- Navette spatiale

La navette a une orbite circulaire à 200 km d'altitude (point C) ; on veut obtenir une orbite allongée d'aphélie 42 000 km (point B) ; il faut donc donner un changement de vitesse de $0.3 V_C$ soit 2.4 km/s.

On peut faire le même type de démonstration pour comprendre le problème des orbites de transfert pour mettre un satellite en orbite autour de Mars en partant de la Terre.

Comètes

- Forces non-gravitationnelles

L'éjection de gaz et de poussières dans la direction opposée au Soleil fait l'effet d'un "moteur à réaction". Ceci ne se traduit pas vraiment par une impulsion mais cette force ne joue un rôle que lorsque la comète s'approche très près du Soleil et est donc localisée extrêmement près du Soleil.

Si le noyau n'est pas en rotation, ces forces sont purement radiales. On voit que ceci a peu d'influence sur le demi-grand axe ou sur l'aphélie mais, en revanche, fait décroître substantiellement le périhélie (c'est probablement l'explication du groupe de Kreutz, les autres forces n'agissant pas assez rapidement pour avoir permis à ces comètes de survivre). Notons au passage que, dans ce cas, la variation de périhélie est indépendante du sens de la variation. Si le noyau est en rotation, ces forces ont en plus une composante tangentielle au mouvement qui agit alors sur le demi-grand axe, donc sur la période. Ceci explique entre autres les deux heures de retard de la comète Encke ($T = 3.3$ ans).

3.3. Perturbations stellaires

Revenons à notre problème. Les perturbations, nous l'avons dit, auront lieu à l'aphélie, le point du plan (V_x, V_y) correspondant ayant pour coordonnées $(0, \sqrt{1-e})$ où $\sqrt{1-e}$ sera souvent proche de 0.

L'allure des courbes en ce point nous indique que :

- seule une perturbation tangentielle sera susceptible de modifier l'excentricité et le périhélie (les perturbations radiales n'agissant qu'au second ordre) ;
- seule une perturbation radiale sera susceptible de modifier l'aphélie ;
- les accroissements du périhélie et de l'excentricité seront plus notables que les diminutions, ceci pour deux changements de vitesses de coordonnées tangentielles opposées ;
- l'aphélie ne pourra que croître et ceci, de façon infime ;
- les variations de demi-grand axe ne sont pas tributaires du lieu de rencontre et se reporteront donc sur les variations du périhélie.

Ces remarques sont importantes dans la mesure où tous les modèles actuellement utilisés ne font intervenir que des rencontres à l'aphélie. Prenons deux exemples quantitatifs :

Une comète a un périhélie de 50 UA et un aphélie de 50 000 UA ; son orbite a donc une excentricité de 0.998. Pour qu'elle soit sujette aux perturbations planétaires, son périhélie doit entrer dans la sphère d'influence de Jupiter que l'on admet avoir un rayon de 14.3 UA. La nouvelle excentricité devra être au moins supérieure à 0.9994. Il faut donc passer

du point (0,0.0447) au point (0,0.0236), soit appliquer une perturbation tangentielle négative de $0.21 V_C$, donc de 3 m/s. Si la géométrie de la rencontre est propice, ceci correspond à une distance minimale d'approche d'environ 30 000 UA.

Notons que la même perturbation, mais de sens contraire, ferait passer au point (0,0.0657), ce qui correspond à une excentricité de 0.995, soit à un périhélie de 108 UA.

Dans le premier cas, le périhélie se rapprochait de 36 UA, dans l'autre il s'éloignait de 58 UA.

Prenons maintenant une orbite d'aphélie Q . Nous voulons un accroissement de 5 % de Q , soit un nouvel aphélie de $1.05 Q$; nous lisons sur la figure (8) qu'il faut une variation de vitesse dont la composante radiale soit égale à $0.3 V_C$, soit 39 m/s pour un aphélie de 50 000 UA, ce qui, même pour une configuration des plus favorables, demande un passage d'étoile à moins de 2 300 UA.

Les mêmes remarques peuvent être faites à partir des équations donnant les variations de ces quantités que l'on peut trouver en annexe.

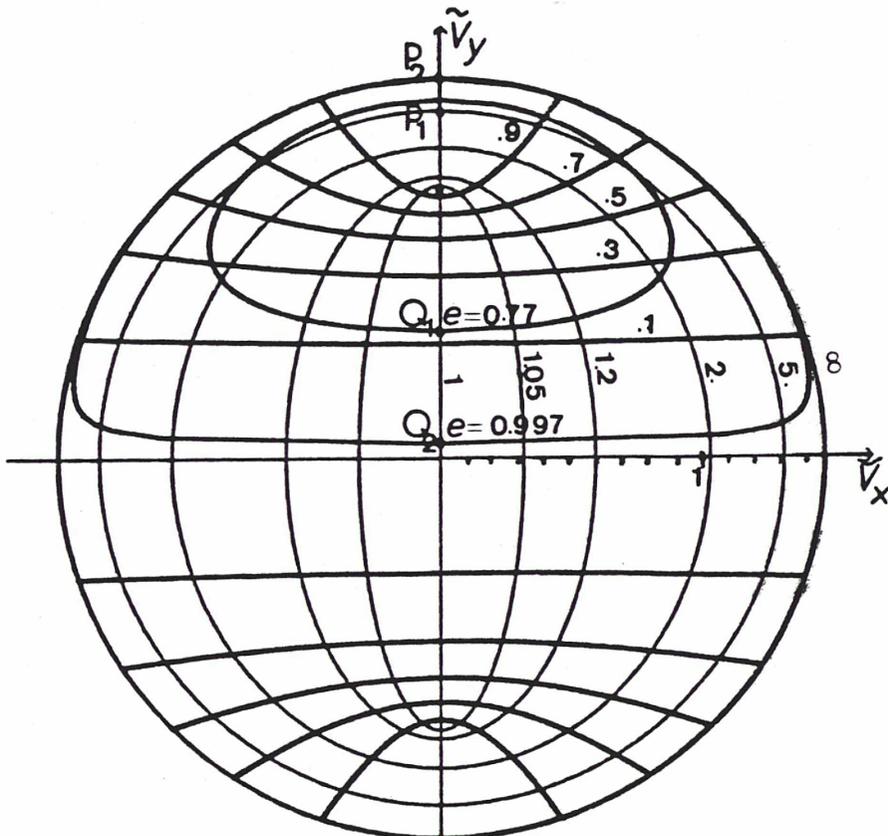


FIG (10). Espace des phases : deux courbes d'excentricité constante correspondant à deux orbites typiques du nuage ($Q=40\ 000$ UA et $q=50$ UA, ou 5000 UA). P_i et Q_i correspondent aux périhélies et aux aphélies.

II. MODELE DE WEISSMAN : DUPLICATION, PUIS EXTENSION CRITIQUE

L'étude de l'effet d'un passage d'étoile sur des comètes nous montre qu'il y a très peu de chance pour que celles-ci soient injectées d'un coup dans les régions planétaires. C'est manifestement l'effet cumulatif de nombreux passages d'étoiles qui régit la dynamique du nuage.

Il convient donc de suivre l'évolution d'un ensemble de comètes sur une longue échelle de temps et d'en faire une étude statistique.

C'est aussi un moyen de tester l'efficacité des perturbations sur un nuage que nous cherchons, afin d'appuyer ou de condamner une hypothèse. Rappelons que les premières études statistiques sur les comètes remontent au début du XIXe siècle et que c'est ainsi que Laplace, comparant la proportion d'orbites paraboliques et hyperboliques déduite de sa théorie avec la proportion observée, infirma son hypothèse.

Dans cette partie, nous ne parlerons que du seul type de simulation de perturbations stellaires sur le nuage de Oort, introduit par Weissman en 1982.

Dans un premier temps, nous allons retrouver ses résultats afin de s'assurer de la validité de notre simulation. Nous essayerons ensuite d'en faire une étude analytique puis d'approfondir la simulation afin d'en faire la critique.

1. PRINCIPE ET RAPPEL DES RESULTATS

1.1. Perturbations dues aux étoiles durant une révolution cométaire

Puisque le Soleil se déplace par rapport aux étoiles proches à une vitesse V , pendant un temps T , N étoiles passent à moins d'une distance donnée Δ_M du Soleil. N est proportionnel à la densité ρ d'étoiles proches et au volume balayé $\pi \Delta_M^2 VT$.

Si l'on compte les étoiles faisant actuellement partie du voisinage solaire, nous trouvons 33 étoiles ou 24 systèmes d'étoiles à moins de 4 pc et 83 étoiles ou 64 systèmes à moins de 6 pc. En tenant compte des fluctuations statistiques, nous obtenons une densité de 0.1 étoile par pc^3 ou 0.08 système par pc^3 .

Ici, il est plus raisonnable de considérer la densité de système d'étoiles. Si en plus on suppose que cette densité est restée constante, nous trouvons :

$$N = 5.1 \cdot 10^{-6} \Delta_M^2 T \quad (T \text{ en an, } \Delta_M \text{ en pc}) \quad (1)$$

En un million d'années, 5 étoiles s'approchent à moins de 1 pc du Soleil. Durant les quatre millions d'années d'une révolution orbitale de comète, le Soleil rencontre une vingtaine d'étoiles à moins de 1 pc.

Le principe de la simulation est d'appliquer la perturbation résultante de cette vingtaine d'étoiles, exactement lorsque la comète est à son aphélie. En effet, on a vu que si l'orbite de la comète est de forte excentricité, la comète se trouve pratiquement tout le temps très près de l'aphélie.

C'est la différence entre l'impulsion due à la rencontre comète-étoile et celle due à la rencontre Soleil-étoile qui détermine la perturbation de l'orbite par rapport au Soleil. Cet effet différentiel joue un rôle d'autant moins important que le passage s'effectue près du Soleil ou près de la comète, donc que l'effet du passage est important, c'est pour cela que Weissman ne considère que les passages proches, ceux où l'impulsion s'écrit

$$\vec{\Delta V} = \epsilon \frac{2GM_*}{R^2 V_*} \vec{R}$$

où ϵ est égal à +1 si le passage est proche de la comète, et -1 si il est proche du Soleil, et où R est le paramètre d'impact de l'étoile par rapport au Soleil ou à la comète.

Il n'y a aucune direction d'étoile privilégiée donc aucune direction d'impulsion privilégiée, on supposera donc que $\overline{\Delta V}$ est aléatoire et a une distribution maxwellienne, c'est à dire que n'importe quelle coordonnée sur n'importe quel repère est distribué suivant une loi normale. Le seul paramètre à maîtriser est l'écart quadratique.

Une étoile passant à une distance comprise entre R_1 et R_2 provoque une perturbation d'énergie par unité de volume $(\overline{\Delta V})^2$ telle que :

$$\overline{\Delta V^2} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} (\Delta V)^2 4 \pi R^2 dR}{\int_{R_1}^{R_2} 4 \pi R^2 dR}$$

avec $\Delta V = \frac{2GM_*}{RV_*}$

$$\text{d'où } (\overline{\Delta V})^2 = \left(\frac{2GM_*}{V_*} \right)^2 \frac{\int_{R_1}^{R_2} dR}{\int_{R_1}^{R_2} R^2 dR}$$

$$= 12 \left(\frac{GM_*}{V_*} \right)^2 \frac{R_2 - R_1}{R_2^3 - R_1^3} \quad (2)$$

R_1 peut être considéré comme la distance en deçà de laquelle une étoile éjecterait la comète, donc telle que l'impulsion donnée soit de l'ordre de grandeur de la vitesse d'évasion - A 50.000 UA , la vitesse d'évasion est 188 m/s, pour une étoile d'une masse solaire, de vitesse 20 km/s cela correspond à un paramètre d'impact de 472 UA.

R_2 est de l'ordre du rayon du nuage, on peut donc négliger R_1 devant R_2 et réécrire l'équation (2).

$$(\overline{\Delta V})^2 = 12 \left(\frac{GM_*}{V_* R} \right)^2 \quad (3)$$

La relation masse-luminosité nous indique la distribution de la masse des étoiles. En moyenne, les systèmes d'étoiles ont une masse de $0.8 M_{\odot}$, mais nous prendrons $1 M_{\odot}$ de façon à être en accord avec le modèle de Weissman.

$$\text{Ainsi } (\Delta V^2) = \frac{0.55}{R^2}, \text{ où si } R \text{ est en pc, } \Delta V \text{ est en m/s.}$$

Nous cherchons l'écart type de la perturbation pendant une révolution cométaire :

$$\text{Pour } N \text{ rencontres, on a } \sigma = \sqrt{N(\overline{dV})^2}$$

connaissant N (eq.1) et supposant que tous les systèmes d'étoiles sont typiques, on déduit de (3)

$$\boxed{\sigma = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{T}} \quad T \text{ en année et } \sigma \text{ en m/s.} \quad (4)$$

Remarques - Prenons une comète de périhélie 30 UA et d'aphélie 50 000 UA. Celle-ci a une période de 3.9 millions d'années, donc subit des perturbations à chaque révolution d'écart type 3.4 m/s, alors que sa vitesse à l'aphélie est de 4.6 m/s.

- Dans l'annexe A, nous montrons que les variations des éléments orbitaux ayant trait aux angles i, Ω, ω ou ν sont de l'ordre de V/γ , où V est la composante de l'impulsion normale au plan orbital et γ la vitesse de la comète au moment de l'impulsion, ce qui donne des variations de l'ordre de 1Rd par révolution pour i, Ω ou ω . Ce procédé est donc très efficace au niveau de la position et de l'orientation des orbites.

- La vitesse circulaire à 50 000 UA est 132 m/s, la perturbation est donc de l'ordre de 0.03 dans les unités de vitesse circulaire. Nous voyons sur les courbes du plan (V_x, V_y) que les quantités a, e, q ou Q ne sont pas modifiées de façon notable pendant une révolution. Si l'orbite est repérée par un point de ce plan, le mouvement de ce point est une marche au hasard de pas 0.03, l'orbite est tout de même rendue méconnaissable en quelques dizaines de révolutions (une comète de période de quatre millions d'années a effectué environ mille révolutions depuis la formation du système solaire).

Notons aussi que pendant 4.5 milliards d'années l'écart type attendu est de 114 m/s; ce qui correspond à la vitesse d'évasion à 135 000 UA, s'il y a eu des comètes à cet endroit, il est peu probable qu'il en reste.

1.2. Structure et but de la simulation

Le principe est très simple : on se fixe six éléments orbitaux, à chaque révolution on applique une impulsion $\Delta\vec{V}$, à la comète lors de son passage à l'aphélie et on recalcule ses éléments orbitaux.

D'une révolution à l'autre, le temps s'est écoulé de T, on suit ainsi l'évolution d'une orbite.

Cette impulsion s'écrit dans les axes tournants de la comète (α, β, γ) avec :

$$\alpha = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{T} \alpha_0$$

$$\beta = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{T} \beta_0$$

$$\gamma = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{T} \gamma_0$$

où ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$) sont trois nombres aléatoires de distribution gaussienne, de moyenne 0 et d'écart quadratique 1.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

-Un de ces trois nombres prend une telle valeur que la comète est éjectée du nuage.

-L'aphélie est si loin que la force de "marée galactique" l'emporte sur l'attraction solaire. Cette distance* limite est de 200 000 UA ; de telles comètes seront baptisées "stellaires".

*On peut calculer cette distance assez rapidement, en cherchant la localisation du point de Lagrange L_2 .

Si $\mu = \frac{M_\odot}{M_{\text{Galaxie}}} \approx \frac{1}{2 \cdot 10^{11}}$ alors le point L_2 est distant du Soleil de $SL_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ si l'unité est la distance Soleil-centre de la galaxie - soit $SL_2 = 1.2 \cdot 10^{-4} \times 10^4 \text{ pc} \sim 1 \text{ pc} \sim 200 \text{ 000 UA}$.

-Le périhélie est si bas que les perturbations des planètes ne peuvent plus être négligées. Les sphères d'influence de Jupiter et de Saturne sont fixées à 1.5 fois leur distance au Soleil, soit à 14.3 UA et 7.8 UA. Les comètes entrant ainsi dans ces sphères d'influence ne sont pas forcément capturées, on considère brutalement que 5.8 % des comètes sortent de la sphère d'influence de Saturne et 34.7 sortent de celle de Jupiter. Celles-ci retourneront dans le nuage avec les mêmes éléments orbitaux, les autres seront qualifiées de "planétaires".

Notons qu'entre temps (fin 83) Weissman a montré que le flux de comètes nouvelles au niveau de Jupiter valait cinq fois le flux au niveau de la Terre, c'est à dire que 80 % des comètes ne franchissent pas la barrière de Jupiter.

Dans les autres cas, la simulation s'arrête 4.5 milliards d'années après, les comètes restantes étant les " survivantes ".

En fait, c'est uniquement l'état final d'une condition initiale donnée qui nous intéresse et cet état ne dépend que de la valeur q_0 du périhélie et de celle Q_0 de l'aphélie. Ce seront donc les deux seuls paramètres cométaires qui varieront.

1.3. Dépendance des états finaux en fonction du périhélie

La figure (1) et le tableau (1) représentent la dépendance du nombre relatif de planétaires, stellaires ou survivantes, ceci pour sept valeurs du périhélie distinctes. Nous nous sommes toujours imposés d'obtenir au moins 600 comètes survivantes de façon à pouvoir les étudier statistiquement.

Périhélie	Excentricité	$N(\text{planétaire})/N_0$	$N(\text{stellaire})/N_0$	$N(\text{survivante})/N_0$
50	0.997	0.724	0.023	0.252
250	0.987	0.522	0.048	0.429
500	0.975	0.429	0.059	0.511
2 500	0.882	0.229	0.124	0.646
5 000	0.777	0.157	0.178	0.664
10 000	0.60	0.096	0.252	0.650
20 000	0.33	0.065	0.409	0.525

TAB (1). Dépendance des états finaux fonction du périhélie initial. L'aphélie initial est toujours égal à 40 000 UA et les rencontres ont lieu à l'aphélie.

Pour les comètes de périhélie initial inférieur à 1 000 UA la diffusion vers les régions planétaires est de loin le mécanisme de perte le plus efficace, alors que pour celle de périhélie initial supérieur à 10 000 UA, les marées galactiques sont les seuls mécanismes de perte important.

Il faut noter qu'il n'y a pas de comète éjectée ; cela vient du fait que les perturbations ont lieu à l'aphélie où la vitesse est très faible devant la vitesse d'éjection, ceci est un biais systématique du modèle que nous cherchons à supprimer plus tard.

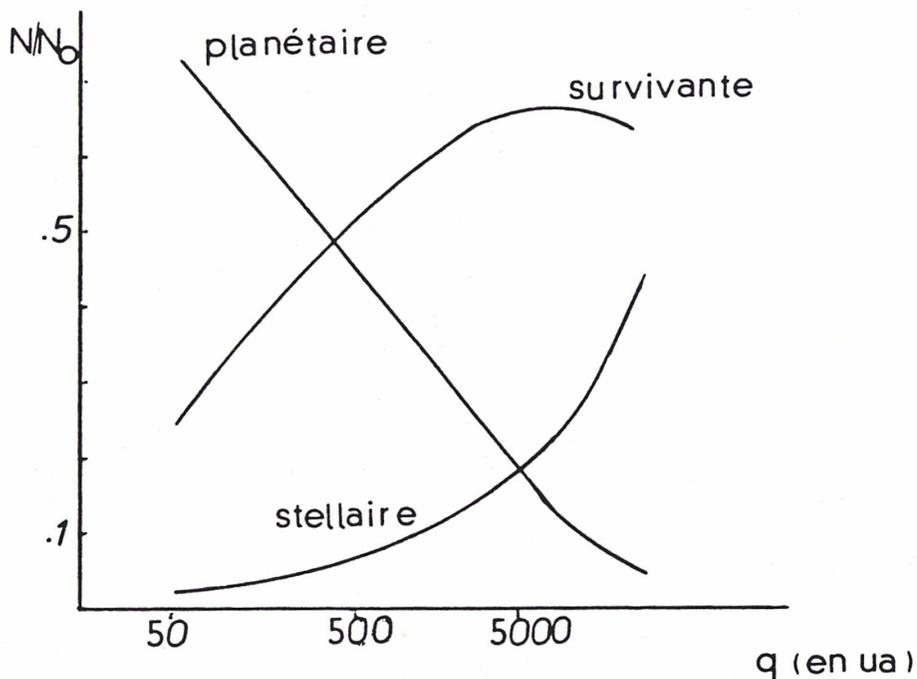


FIG (1). Dépendance des états finaux - $Q_0 = 40\ 000$ UA; Les rencontres ont lieu à l'aphélie.

Il est curieux de constater sur la figure (1) que la dépendance du nombre relatif de planétaire est linéaire en $\ln q$. Si l'on ajuste les valeurs, on trouve :

$$\frac{N(\text{planétaire})}{N} = - 0.126 \ln q + 1.2, \text{ ceci avec une erreur nettement inférieure au centième, tant que } q \leq 5\ 000 \text{ UA.}$$

Un autre intérêt de la simulation est de regarder la diffusion des comètes qui font encore partie du nuage. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la diffusion de l'aphélie, du périhélie, du demi grand axe et de son inverse.

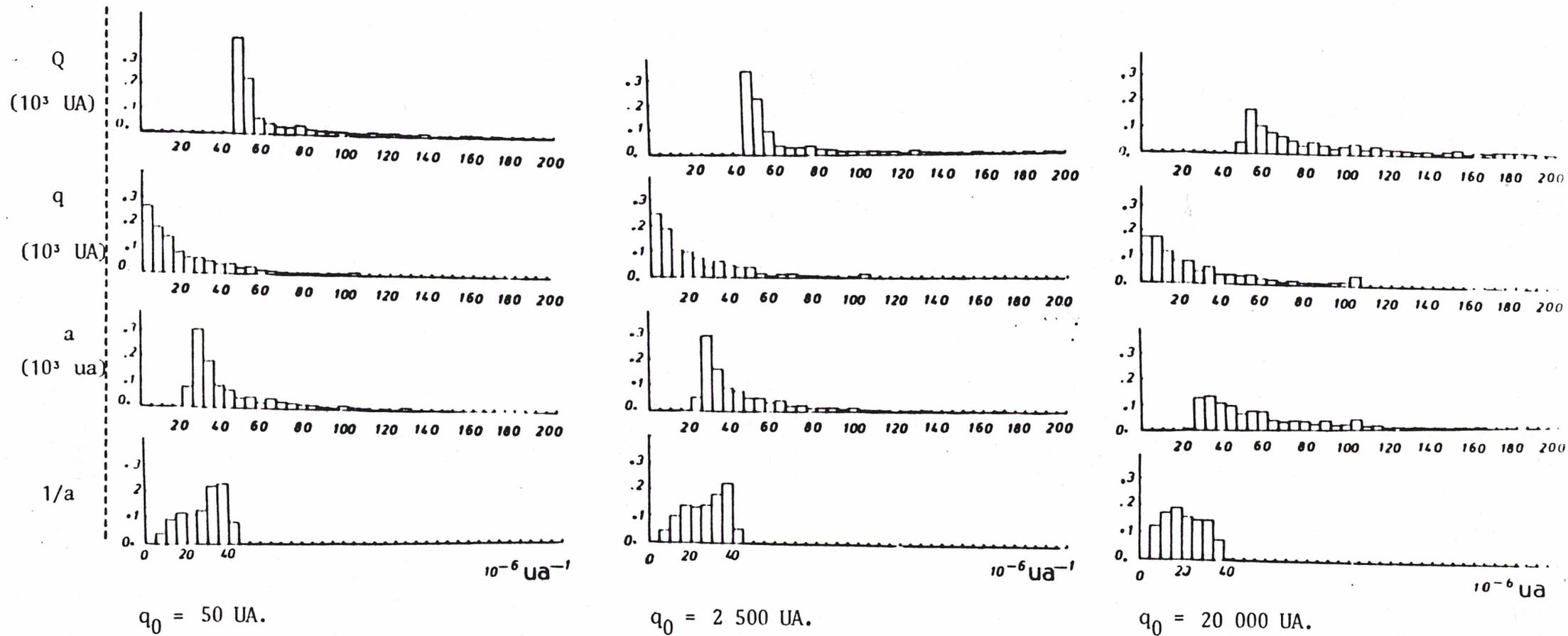


FIG (2). Diffusion de l'aphélie, du périhélie, du demi-grand axe et de son inverse, (de haut en bas), pour différentes valeurs de périhélie (de gauche à droite). Les rencontres ont lieu à l'aphélie et $Q_0 = 40\,000 \text{ UA.}$

A ces quatre quantités correspondent donc les quatre histogrammes de la figure (2) pour trois valeurs distinctes de périhélie initial : 50 UA, 2 500 UA et 20 000 UA.

Pour toutes les valeurs de périhélie initial inférieures à 5 000 UA, ces histogrammes ont une ressemblance évidente. Les conditions initiales ont donc été oubliées, pourtant elles jouent un rôle manifeste au niveau du devenir des comètes (Tableau 1), on comprend implicitement que ces orbites se diffusent assez vite vers un état commun, le flux des comètes sortantes étant fort au début puis tendant vers une constante.

On ne rencontre aucun aphélie en deça de 45 000 UA et celui-ci est bien diffusé de 45 000 à 60 000 UA. Ceci est une conséquence directe du modèle : lors d'une perturbation de vitesse à l'aphélie, dQ est toujours positif et du 2ème ordre. La distance aphélie ne peut donc que croître. Par contre, le périhélie est nettement diffusé, puisque indépendamment de la valeur initiale 75 % des orbites ont un périhélie supérieur à 5 000 UA. On peut faire la même constatation au niveau de l'énergie : celle-ci comprise initialement entre 30 et $40 \cdot 10^{-6}$ UA, s'est diffusée vers des valeurs inférieures.

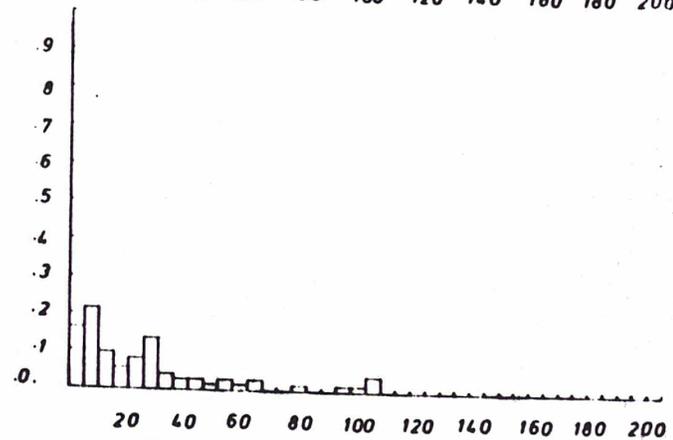
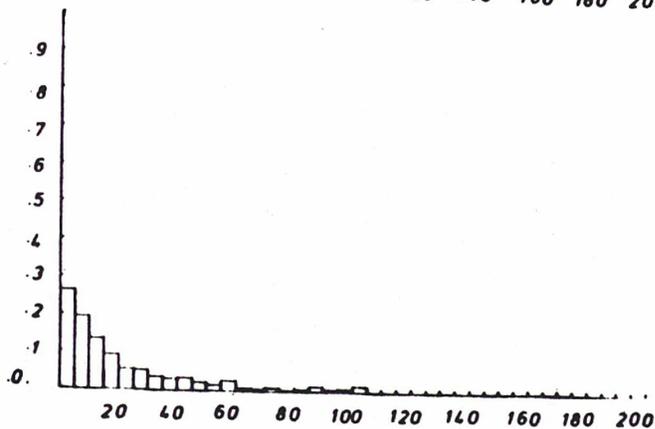
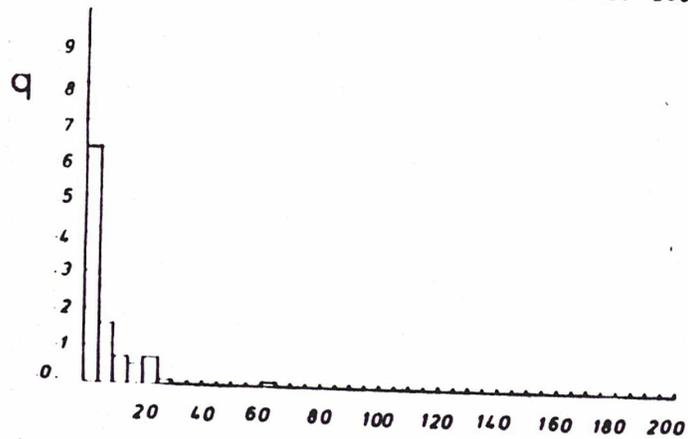
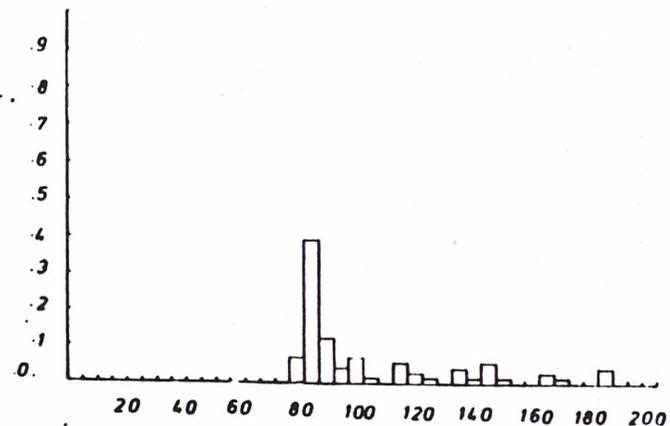
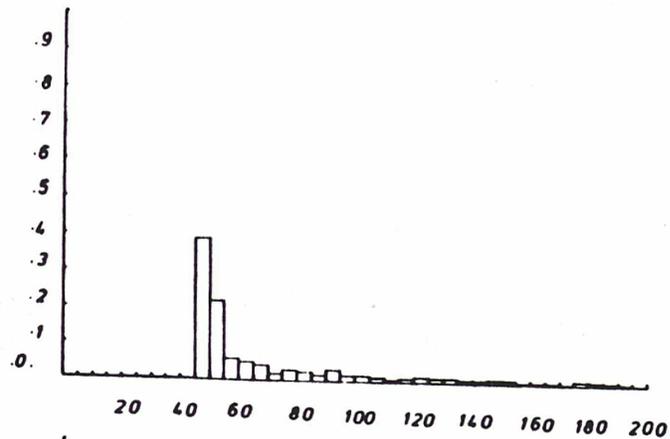
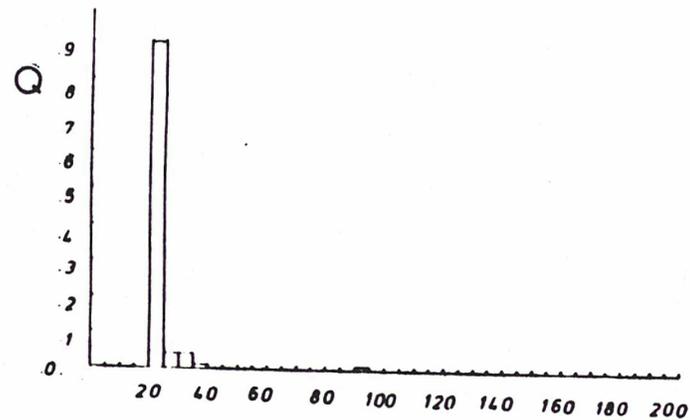
1.4. Influence de l'aphélie

Nous avons remarqué dans la première partie que l'effet d'un changement de vitesse était d'autant plus efficace que la vitesse circulaire était petite. Autrement dit, les perturbations d'une orbite sont d'autant plus fortes que l'aphélie est éloigné. Ceci explique clairement la variation de pourcentage de stellaire du tableau 2 ainsi que la variation de la distribution de l'aphélie ou du périhélie de la figure (3).

La dépendance des planétaires est dans chaque cas toujours linéaire en $\ln q$, mais sa dépendance en distance aphélie est plus délicate à analyser. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Aphélie	Périhélie	Excentricité	$N(\text{planétaire})/N_0$	$N(\text{stellaire})/N_0$	$N(\text{survivante})/N_0$
20 000	50	0.995	0.78	0	0.22
	500	0.95	0.36	0	0.64
	5 000	0.6	0.065	0.009	0.925
40 000	50	0.997	0.72	0.02	0.25
	500	0.975	0.42	0.06	0.51
	5 000	0.777	0.16	0.18	0.66
60 000	50	0.998	0.60	0.15	0.24
	500	0.983	0.41	0.22	0.37
	5 000	0.846	0.19	0.42	0.38

TAB (2). Dépendance des états finaux fonction de l'aphélie initial.



$Q = 20\ 000\ \text{UA}.$

$Q = 40\ 000\ \text{UA}.$

$Q = 60\ 000\ \text{UA}.$

FIG (3). Diffusion de l'aphélie et du périhélie à périhélie initial constant (5 00 UA). Les rencontres ont lieu à l'aphélie.

2. ETUDES ANALYTIQUES

Nous allons maintenant essayer de dégager analytiquement quelques résultats afin de nous familiariser avec le modèle et d'être capable par la suite de comprendre les conséquences de certaines hypothèses.

A chaque quantité x , associons une suite (x_n) tel que

$$x_{n+1} = x_n + \frac{dx_n}{dn}$$

Le développement au second ordre de $\frac{dx_n}{dn}$, en fonction de la perturbation de vitesse conduit à un terme du premier ordre de signe variable et à un terme de second ordre de signe constant. Nous pouvons remplacer ces deux termes par l'espérance de leur valeur absolue et par conséquent écrire :

$\frac{dx_n}{dn} = a_n \epsilon_n + b_n$, où a_n et b_n dépendent de la valeur des éléments osculateurs à la n ème révolution et où ϵ_n est une variable aléatoire égale à ± 1 .

Au premier ordre $a_n \epsilon_n$ régit le mouvement et b_n apporte un effet systématique assez vite non négligeable.

Ecrivons donc $x_{n+1} = x_n + a_n \epsilon_n + b_n$, les valeurs de a_n et b_n étant données dans l'annexe A.

(x_n) traduit donc l'évolution de la quantité x au cours des révolutions et suit alors un mouvement de marche au hasard de pas $(-a_n + b_n)$ à "gauche" et $(a_n + b_n)$ à "droite".

Dans toute la suite, nous supposons que l'excentricité reste tout le temps proche de 1.

2.1. Espérance de l'aphélie et nombre moyen de révolutions fonction du temps écoulé

Nous savons (annexe A) que, dans les unités conventionnelles, l'espérance de la variation de Q par révolution est

$$\frac{dQ}{Q^2} = \frac{K^2 T}{2} \quad \text{avec } K = \frac{1.7 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{\mu}} = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ (UA.an)}^{-1/2} \quad (1)$$

L'évolution du temps au cours des révolutions se traduit par :

$$dt = T_n dn \quad \text{où } T_n \text{ est la } n^{\text{ème}} \text{ période} \quad (2)$$

A la $n^{\text{ème}}$ révolution (1) s'écrit :

$$\frac{dQ_n}{Q_n^2} = \frac{K^2 T_n}{2} dn \quad (3)$$

Soit :

$$\frac{dQ_n}{Q_n^2} = \frac{K^2}{2} dt$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{Q_0} - \frac{1}{Q_F} = \frac{K^2}{2} \tau} \quad (4)$$

où si τ est l'âge du système solaire Q_F est l'espérance de l'aphélie actuellement. Voici quelques valeurs numériques dont on se servira par la suite :

$$Q_0 = 20\ 000 \text{ UA} \quad Q_F = 23\ 400 \text{ UA}$$

$$Q_0 = 40\ 000 \text{ UA} \quad Q_F = 56\ 300 \text{ UA}$$

$$Q_0 = 60\ 000 \text{ UA} \quad Q_F = 106\ 000 \text{ UA}$$

$$Q_0 = 82\ 000 \text{ UA} \quad Q_F = 200\ 000 \text{ UA.}$$

Nous avons donc très peu de chance de pouvoir observer des comètes ayant eu un aphélie vers 80 000 UA.

De la relation (3) nous pouvons ainsi déduire le nombre moyen de révolutions effectuées en τ années.

$$\text{en effet } N = \int_0^N dn$$

$$\text{soit avec (3) et sachant que } T_n = \frac{Q_n^{3/2}}{2^{3/2}}$$

$$N = \frac{2^{3/2}}{K^2} \int_{Q_0}^{Q_F} \frac{dQ_n}{Q_n^{7/2}}$$

$$N = \frac{2^{3/2}}{5K^2} \left(\frac{1}{Q_0^{3/2}} - \frac{1}{Q_F^{3/2}} \right)$$

soit avec (4)

$$N = \frac{2^{3/2}}{5K^2 Q_0^{3/2}} \left(1 - \left(1 - \frac{K^2 \tau Q_0}{2} \right)^{3/2} \right) \quad (5)$$

$$Q = 20\ 000\ \text{UA} \quad N = 4020$$

$$Q = 40\ 000\ \text{UA} \quad N = 1260$$

$$Q = 60\ 000\ \text{UA} \quad N = 600.$$

Nous avons assez d'informations pour trouver la fonction de distribution d'autres quantités et pour calculer la probabilité de telle ou telle issue. Vu la lourdeur des calculs, nous nous occuperons essentiellement du devenir du périhélie, puisque c'est la seule quantité dont l'évolution est susceptible de nous intéresser.

En fait, c'est aussi la quantité la moins sensible à l'approximation de la forte excentricité.

D'une part, la capture par les planètes semble se faire assez vite, à un moment où l'excentricité est encore proche de 1. En effet, puisque la valeur du périhélie se fait peu ressentir sur les histogrammes alors qu'elle joue un rôle important au niveau de la probabilité d'être planétaire, c'est que la capture par les planètes se fait avant l'oubli des conditions initiales.

D'autre part, il est peu probable qu'une comète dont le périhélie est inférieur à 15 UA ait eu, à un moment donné, une excentricité faible, impliquant par là un périhélie très éloigné.

Partons donc de l'équation de l'annexe A, donnant dq pour e proche de 1.

$$dq = \frac{K}{2^{1/4}} \sqrt{q} Q^{3/4} \epsilon + \frac{K^2}{2\sqrt{2}} Q^{3/2}$$

et posons $C = \frac{K^2}{2\sqrt{2}} Q^{3/2}$ (6)

alors $dq = \sqrt{2qC\epsilon + C}$

L'allure de cette équation incite à poser $f = \sqrt{\frac{2q}{C}}$

Par l'intermédiaire de C, f dépend de Q, mais on peut montrer que les variations de f causées par cette dépendance sont très inférieures à celles causées par q. $\left(\frac{df}{f} \propto 10^{-15} Q^{3/2}\right)$

Nous pouvons alors écrire :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) dq = \frac{dq}{\sqrt{2qc}}$$

soit : $df = \epsilon + 1/f$ (7)

l'évolution de f, peut être comparée à une suite (f_n) vérifiant :

$$\frac{df_n}{dn} = \epsilon_n + 1/f_n$$
 (8)

f suit donc une marche au hasard de pas $1 + 1/f_n$ à "droite" et $-1 + 1/f_n$ à "gauche". Nous pouvons ainsi écrire que f_n suit une marche au hasard de pas 1, équiprobable et subit une "dérive" de $1/f_n$.

Appelons \hat{f}_n son espérance, nous avons :

$$\frac{d\hat{f}_n}{dn} = 1/\hat{f}_n \quad \text{soit } \hat{f}_n^2 = f_0^2 + 2n$$
 (9)

pour $Q = 40\ 000$, C est de l'ordre de 14, donc comme nous l'avons constaté f_n oublie très vite ses conditions initiales et tend vers $\sqrt{2n}$.

A partir des équations (8) et (9) nous pouvons déduire la distribution de q et la probabilité d'atteindre les régions planétaires.

2.2. Probabilité pour qu'un périhélie donné entre dans la sphère d'influence des planètes

Cette probabilité se traduit par celle qui existe un f_n susceptible d'atteindre f_i ; f_i correspondant à $q = 14.3$ UA. Ce f_i vaut 1.42 pour $Q = 40\ 000$ UA et est une fonction décroissante de Q .

Une des conditions de validité de ce modèle est que $\forall n, f_n > 1$. En effet, la relation (8) s'écrit :

$$f_{n+1} = f_n + \varepsilon_n + 1/f_n \quad \text{or } f_n + 1/f_n > 2, \forall f_n$$

Si l'on extrait une suite décroissante de (f_n) celle-ci tendra vers 1, sans jamais l'atteindre. Si $Q = 50\ 000$ UA alors $f_i = 1$. Si l'on se fixe comme limite $Q < 45\ 000$ UA, nous assurons $f_i > 1.15$.

Appelons $P_{f_1 \rightarrow f_2}$, la probabilité partant de f_1 , d'atteindre f_2 en ne faisant que des pas de 1.

$$P_{f_1 \rightarrow f_2} \times P_{f_2 \rightarrow 0} = P_{f_1 \rightarrow 0}$$

soit :

$$P_{f_1 \rightarrow f_2} = \frac{P_{f_1 \rightarrow 0}}{P_{f_2 \rightarrow 0}}$$

Par ailleurs, en dimension 1, si un mobile est habilité à faire un même pas en avant ou en arrière équiprobable, la probabilité pour que partant de $f > 0$, il soit absorbé en 0 en n pas est $P_{n,f}$ telle que

$$P_{n,f} = \frac{f}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-f^2/(2n)} \quad (\text{voir annexe B})$$

Ici le problème est légèrement différent puisque notre variable dépend du nombre de pas effectués.

Donc $P_{n,f} = P_{n,f(n)}$

La probabilité d'être absorbé en moins de n pas est donc

$$P_{f \rightarrow 0} = \sum_{n_{\min}}^{\max} P_{n,f(n)} = \int_{n_{\min}}^{n_{\max}} P_{n,f(n)} \, dn$$

$f(n)$ est la valeur de f au n ème pas, prenons donc $f(n) = \hat{f}_n$, dans ce cas, en reportant l'équation 9 dans notre dernière équation, nous obtenons

$$P_{f \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{n_{\min}}^{n_{\max}} \frac{\sqrt{f^2 + 2n}}{n^{3/2}} e^{-\frac{f^2 + 2n}{2n}} \, dn$$

n_{\min} . est de l'ordre de f , n_{\max} . est le nombre maximum de révolution que la comète peut effectuer en 4.5 milliards d'années.

Posons $u = \frac{f^2}{2n} = \frac{q}{nC}$

alors $P_{f \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-1} \sqrt{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{u+1}}{u} e^{-u} \, du$

$u_1 < 1$ et $u_2 > 1$.

$\frac{\sqrt{u+1}}{u} e^{-u}$ est une fonction qui décroît très vite, elle est équivalente à $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ dès que $u > 1$ et à $\frac{1}{u}$ dès que $u < 1$, et l'intégration entre les bornes $(1, u_2)$ est négligeable devant l'intégration entre les bornes $(u_1, 1)$.

par conséquent $\int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{u+1}}{u} e^{-u} du = -\ln u,$

avec $u_1 = \frac{f^2}{2n_{\max}} = \frac{f^2}{2N}$

d'où $P_{f \rightarrow 0} = \sqrt{\pi} e^{-1} \ln(f^2/2N)$

et $P_f = \ln(f^2/2N) / \ln(f_i^2/2N)$

Pour être en accord avec le modèle de Weissman, il ne faut pas oublier que seulement 2/3 des comètes entrant dans la sphère de rayon 14.3 UA deviennent planétaires, les autres seront "épargnées" et se retrouveront donc avec un périhélie moyen de $f_i + 1/f_i$ à la révolution suivante.

La probabilité $P_{pla}(f)$ s'écrit donc :

$$P_{pla}(f) = P_f \times (2 + P_{(f_i + 1/f_i)}) / 3$$

Ce dernier terme est en fait un terme correctif directement lié au modèle, il peut être vu comme la probabilité d'être planétaire à $q = 14.3$ UA, il ne dépend que de l'aphélie et sera noté $\mathcal{E}(Q)$. C'est une fonction décroissante de Q , il vaut pratiquement 1 pour $Q = 20\ 000$ et 0.96 pour $Q = 40\ 000$. La barrière causée par Jupiter est plus efficace sur les orbites à aphélie éloigné. Nous avons déjà dit que Weissman (84) a montré entre temps que cette barrière ne laissait passer que 20 % des comètes. Dans ce cas $\mathcal{E}(Q)$ vaut 0.9 pour $Q = 40\ 000$ UA.

En revenant à la variable q , avec $q = \frac{f^2 C}{2}$ nous obtenons :

$$P(q) = \frac{\ln(CN/q)}{\ln(CN/q_i)} \tag{10}$$

L'équation (6) donnant C et l'équation (5) donnant N entraînent

$$CN = \frac{4}{5} Q \left(1 - \left(1 - \frac{K^2}{2} \tau Q\right)^{5/2}\right) \tag{11}$$

La probabilité pour une comète de périhélie q d'être capturée par les planètes géantes est :

$$P_{pla} = \epsilon(Q) \frac{\ln(CN/q)}{\ln(CN/q_1)} \quad (12)$$

où $q = 14,3$ UA, CN est une fonction du temps donnée par 11 et $\epsilon(Q)$ est un terme correctif voisin de 1.

Pour $Q = 40\,000$ UA, $\epsilon(Q)$ vaut 0.96 et à 4,5 milliards d'années, CN vaut 18 300 UA, soit $P_{pla} = 0.13 \ln q + 1.3$, ce qui est relativement en bon accord avec les résultats de la simulation.

Remarque. Pour avoir une chance d'être planétaire, une comète doit avoir en permanence un périhélie inférieur à CN . Entre autres, cela entraîne que CN soit constamment supérieur à 14,3 UA, donc que l'aphélie Q soit supérieur à 1000 UA.

2.3. Estimation de la population actuelle

Il est clair qu'en deçà d'une certaine taille, les comètes nous sont à jamais invisibles. S'il en existe, il est alors impensable d'en estimer le nombre. Donc, dès que nous parlerons d'estimation de population, nous entendrons estimation du nombre de comètes dont la taille les rend visibles à quelques unités astronomiques de la Terre.

L'observation nous donne une estimation du nombre de comètes passant à moins de 4 ou 5 unités astronomiques du Soleil, et, à partir de cela, nous verrons s'il est possible de remonter au nombre de comètes entrant dans la sphère d'influence des planètes. L'étape manquante pour remonter à la population du nuage est le passage du nuage à la sphère d'influence des planètes. Il nous faut donc établir le taux de comètes par an dont le périhélie est susceptible d'atteindre 14.3 UA, ce qui n'est rien d'autre que :

$$N_0 \left(\frac{\partial P_{pla}(t)}{\partial t} \right)_t$$

Par l'intermédiaire de CN, P_{pla} est une fonction du temps. D'où :

$$\left(\frac{\partial P_{pla}(t)}{\partial t} = \frac{\partial P_{pla}}{\partial (CN)} \right) \cdot \frac{\partial (CN)}{\partial t} \quad (13)$$

(11) entraîne :

$$\frac{\partial (CN)}{\partial t} = K^2 Q^2 \left(1 - \frac{K^2}{2} t Q \right)^{3/2} \quad (14)$$

et (12) :

$$\frac{\partial P_{pla}}{\partial (CN)} = \frac{\mathcal{E}(Q)}{CN \ln(CN/q_0)} (1 - P_{pla}) \quad (15)$$

Par ailleurs, nous avons vu que pour toutes les comètes de périhélie inférieur à 500 UA, la diffusion vers les régions planétaires était le mécanisme de perte le plus important ; on peut donc écrire que le nombre de comètes restantes ne dépend que du nombre de comètes capturées par les planètes.

$$\text{Soit } N_0 = N_a / (1 - P_{pla}) \quad (16)$$

les équations (13), (15) et (16) reportées dans l'expression du flux \mathcal{F} de comète dont le périhélie est susceptible d'atteindre 14,3 UA donnent :

$$\mathcal{F} = N_a \times \frac{\mathcal{E}(Q)}{CN \ln(CN/q_0)} \times \frac{\partial (CN)}{\partial t} \quad (17)$$

Soit pour $Q = 40\ 000$ et $t = 4.5 \cdot 10^9$ ans

$$N_a = 4.10^{10} \mathcal{F}$$

On observe réellement entre 3 et 5 comètes par an dont le périhélie est inférieur à 4 UA, mais ce nombre n'est que la limite inférieure des comètes dites "observées" et doit être considérablement augmenté compte tenu des possibilités d'observations. Entre 1840 et 1967, on estime que 8 000 comètes sont passées à

leur périhélie à moins de 4 UA du Soleil. Par ailleurs, toutes ne sont pas nouvelles : être nouvelle au sens de Oort, signifie ne jamais avoir été perturbée par les planètes, donc avoir une énergie minimale correspondant à $1/a_0 < 100 \cdot 10^{-6} \text{UA}^{-1}$ ce qui est le cas pour environ 30 % des comètes observées, aussi seulement 2 000 comètes sont passées à leur périhélie entre 1840 et 1967. Il faut aussi tenir compte des comètes passant plus loin, Oort suppose que les perturbations stellaires ont uniformisé le périhélie de 0 à 15 UA, ce qui multiplie le nombre de comètes par 3 ou 4. Finalement on obtient un taux de 60 comètes entrant par an dans la sphère de Jupiter.

Ici nous obtenons donc une population de $2.4 \cdot 10^{12}$ comètes dans le nuage actuel.

Notons que si l'on reprend le travail de Oorten tenant compte du travail d'Everhart et des observations récentes on trouve une population de $1.4 \cdot 10^{12}$ comètes (au lieu de $2 \cdot 10^{11}$).

2.4. Fonction de distribution de q

Faisons grossièrement l'hypothèse que $f_n = \hat{f}_n + \sum_0^n \varepsilon_n$.

Nous pouvons alors affirmer que f_n a une distribution gaussienne, centrée en \hat{f}_n , d'écart quadratique $\sqrt{n} \times \sigma(\varepsilon)$ soit \sqrt{n} .

f_n a donc pour fonction de distribution φ telle que

$$\varphi(f_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{(f_n - \hat{f}_n)^2}{2n}\right) \quad (18)$$

avec $\hat{f}_n = \sqrt{f_0^2 + 2n}$

Le retour à la distribution en q, se fait en posant

$$Z = \frac{f_n - \hat{f}_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{2qn}{c}} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$$

où Z est une variable normale centrée en 0, d'écart type 1.

On a alors $\varphi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2}$

avec $q = \left(\sqrt{\frac{cn}{2}} Z + \sqrt{cn}\right)^2$

L'espérance de q est $E(q)$ telle que

$$E(q) = E\left(\frac{Cn}{2} Z^2 + 2\sqrt{Cn}\sqrt{\frac{Cn}{2}} Z + Cn\right) = \frac{Cn}{2} + Cn = \frac{3}{2} Cn$$

et son écart type est σ tel que

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) &= E(q^2) - [E(q)]^2 \\ &= 3\left(\frac{Cn}{2}\right)^2 + \left(\frac{C^2 n^2}{2}\right) + C^2 n^2 - E(q)^2 \end{aligned}$$

puisque $E(Z^2) = 1$

$$\text{d'où } \sigma(q) = \frac{5}{2} Cn.$$

En résumé, q a une espérance $\frac{3}{2} Cn$ et un écart type $\frac{5}{2} Cn$. Cn étant une fonction croissante de Q , indépendante de q , nous trouvons que plus l'aphélie est grande, plus l'espérance de q est grande et plus sa répartition est large.

Pour les trois valeurs de Q de la simulation nous trouvons les valeurs du tableau (3), pour $\tau = 4.5 \cdot 10^9$ ans.

Q	$E(q)$ en UA	$\sigma(q)$ en UA
20 000	7 676	8 072
40 000	27 670	29 170
60 000	54 245	44 300

La fonction de distribution de q , s'écrit

$$\varphi(q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi NCq}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{2q} - \sqrt{2CN})^2}{2NC}\right) \quad (19)$$

CN étant donné (11) ceci correspond bien aux histogrammes vus précédemment.

3. EXTENSION DE LA SIMULATION ET CRITIQUE DU MODELE

3.1. Histogramme de l'excentricité

Autant la proportion des comètes devenant planétaires montre qu'un certain nombre d'orbite garde une forte excentricité, autant l'étude de la diffusion du périhélie montre qu'il faut aussi s'attendre à trouver de très faibles excentricités.

En effet, une orbite, dont le périhélie et l'aphélie atteindraient leurs espérances mathématiques, aurait une excentricité de 0.44, 0.26 ou 0.17 respectivement pour les trois valeurs numériques de Q citées précédemment.

Nous voyons sur la figure (4) une série d'histogrammes correspondant à un aphélie initial de 40 000 UA, pour les 7 valeurs de périhélies déjà utilisées. La colonne de gauche correspond aux histogrammes de l'excentricité des comètes dites survivantes, celle de droite correspond aux mêmes histogrammes auxquels on a ajouté les comètes devenues stellaires. La très haute diffusion de l'excentricité est assez manifeste.

Reprenons la formule donnant la variation infinitésimale de l'excentricité donnée dans l'annexe A

$$de = - \frac{2K\sqrt{1-e}}{(1+e)^{3/2}} Q^{5/2} \epsilon + \frac{(1-5e)K^2}{2e(1+e)^{3/2}} Q^{5/2}$$

Pour simplifier l'écriture posons $u = \frac{KQ^{5/2}}{(1+e)^{3/2}}$

$\frac{1}{(1+e)^{3/2}}$ variant de 0.6 à 1 nous pouvons supposer que u est essentiel-

lement une fonction de Q.

$$d'où de = - 2\sqrt{1-e} u \epsilon + \frac{(1-5e)}{2e} u^2 \quad (1)$$

C'est essentiellement le terme en u qui régit les variations de e, toutefois le terme du second ordre apporte un effet systématique, puisqu'il est

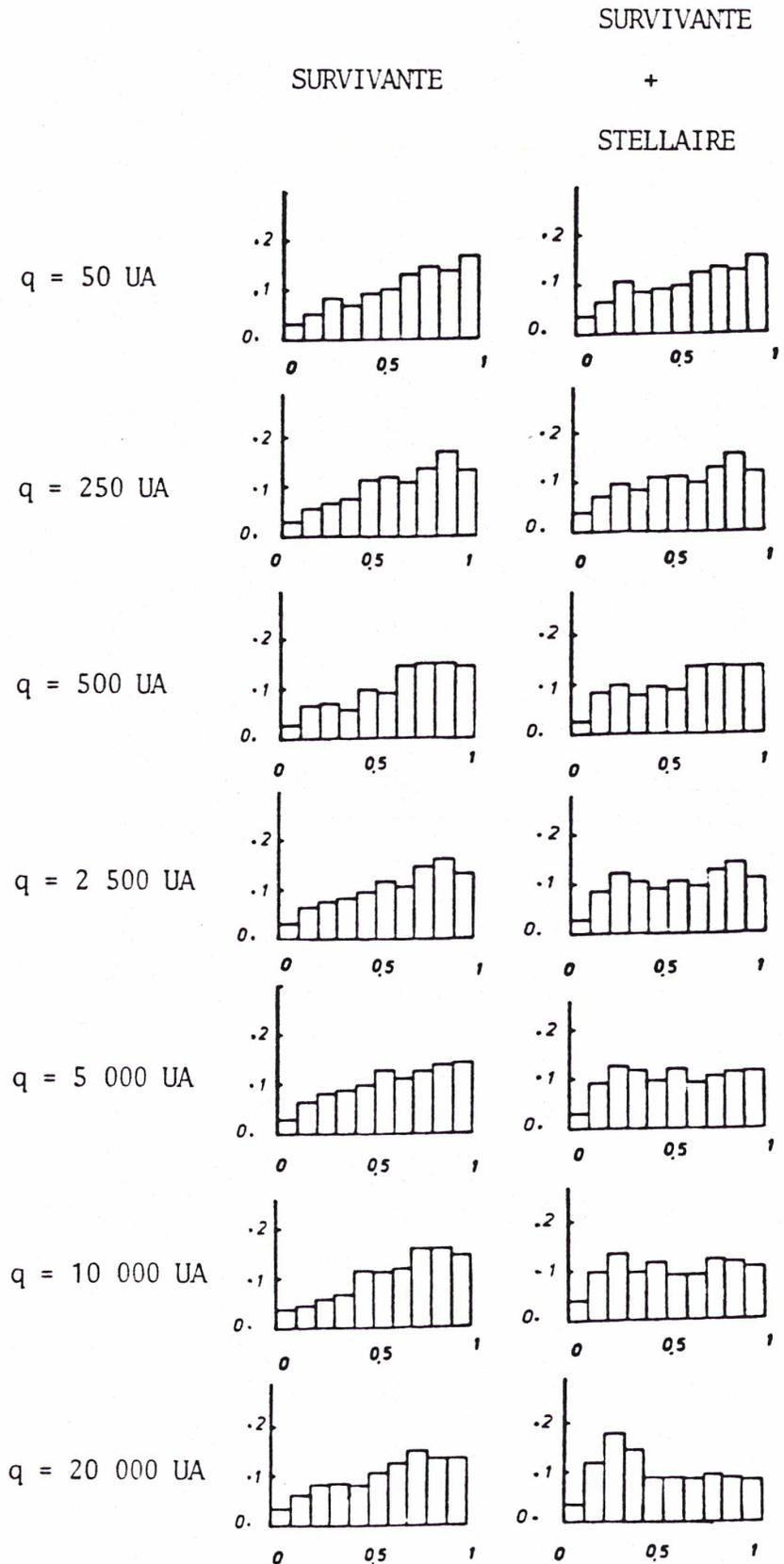


FIG (4). Diffusion de l'excentricité à l'aphélie constant (40 000 UA).
Les rencontres ont lieu à l'aphélie.

positif si $e < 0.2$ et négatif si $e > 0.2$, la présence seule de ce terme conduirait à une distribution très resserrée en 0.2. Oublions le dans un premier temps, alors de $= -2\sqrt{1-e} u \epsilon$ soit $d(\sqrt{1-e}) = -u \epsilon, \sqrt{1-e}$ en tant que somme de termes aléatoires est donc distribuée suivant la gaussienne d'espérance $\sqrt{1-e}$ et d'écart type $\sqrt{N} u$. Pour $Q = 40\ 000, \sqrt{N} u$ vaut 1.25, l'effet seul de ce terme suffit donc à perdre la valeur initiale.

Prenons par exemple une excentricité de 0.9 et un aphélie de 60 000 UA, la valeur absolue du premier terme n'est que 10 fois supérieure à l'espérance du second, c'est à dire qu'après 100 perturbations l'écart type dû au premier terme est égal à l'espérance due au second. L'effet petit mais cumulatif du terme en u^2 joue donc un rôle assez important, d'autant plus important que l'aphélie est éloigné. Ceci est assez visible sur les histogrammes de la colonne de gauche. Le pic vers 0.2 ~ 0.3 est d'autant plus marqué que le pourcentage de stellaires est important (40 % pour $e_0 = 0.33$).

Par ailleurs n'oublions pas que les variations de l'aphélie sont inversement proportionnelles à l'excentricité. Après quelques centaines de révolutions, l'effet cumulatif du second terme commence à favoriser une excentricité proche de 0.2 favorisant à son tour une forte augmentation de la distance aphélique. Les comètes dites stellaires seront essentiellement amenées par ce processus.

3.2. Etude dans le plan (Q,e)

L'évolution de l'aphélie et de l'excentricité semble très liée et ce que nous venons de voir incite à identifier les couples (Q,e). A chaque orbite correspond un point du plan (Q,e) et la diffusion des orbites sera plus parlante en terme de diffusion dans ce plan.

La variation de l'impulsion ne dépend que de la période, donc du demi-grand axe $Q/(1+e)$, les lieux où l'impulsion est constante seront donc représentés par une droite du plan.

Sur la figure (5) en trait plein, figurent des droites correspondant à $I = 5, 10, 15$ m/s.

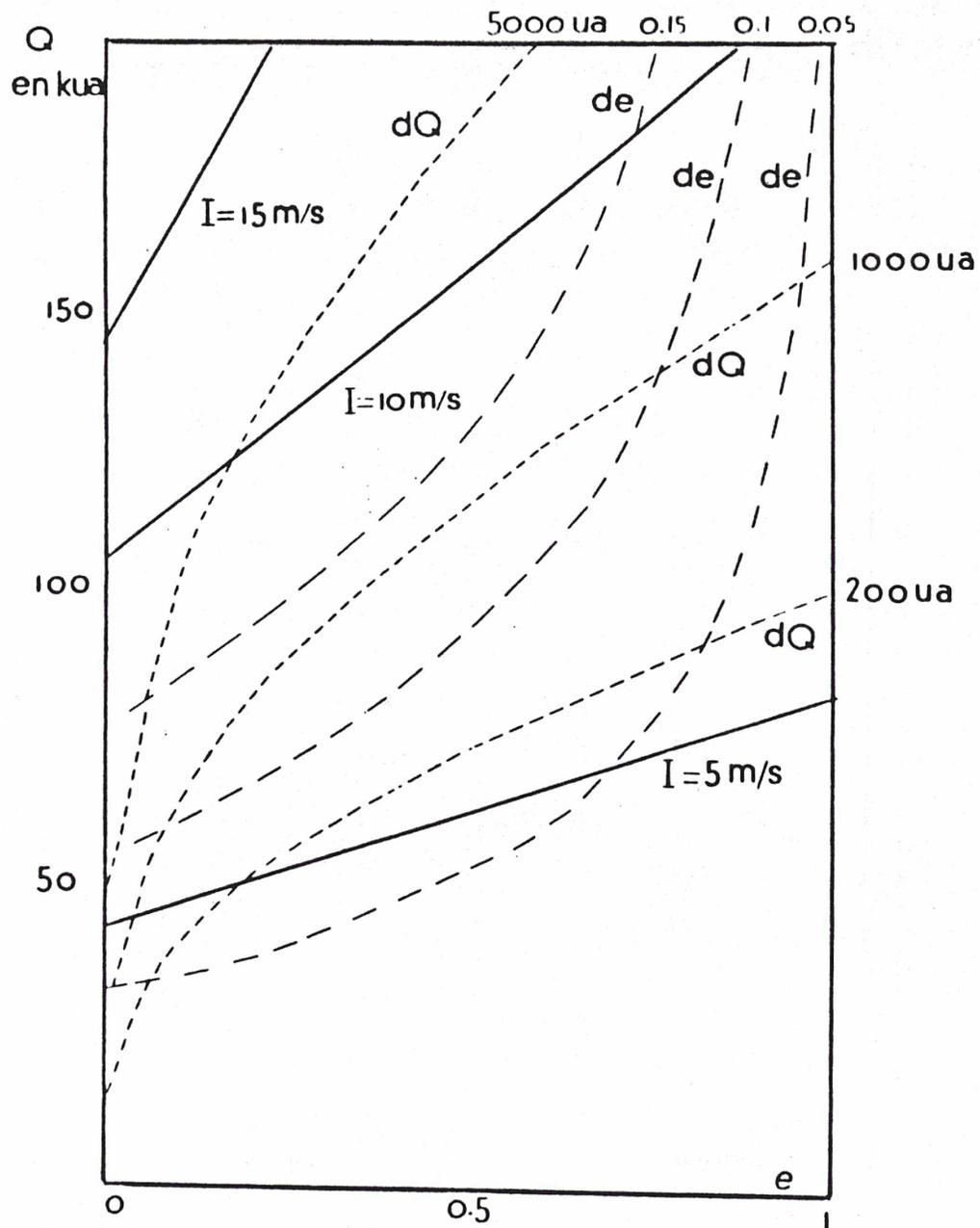


FIG (5). Courbes I , dQ , de constants.

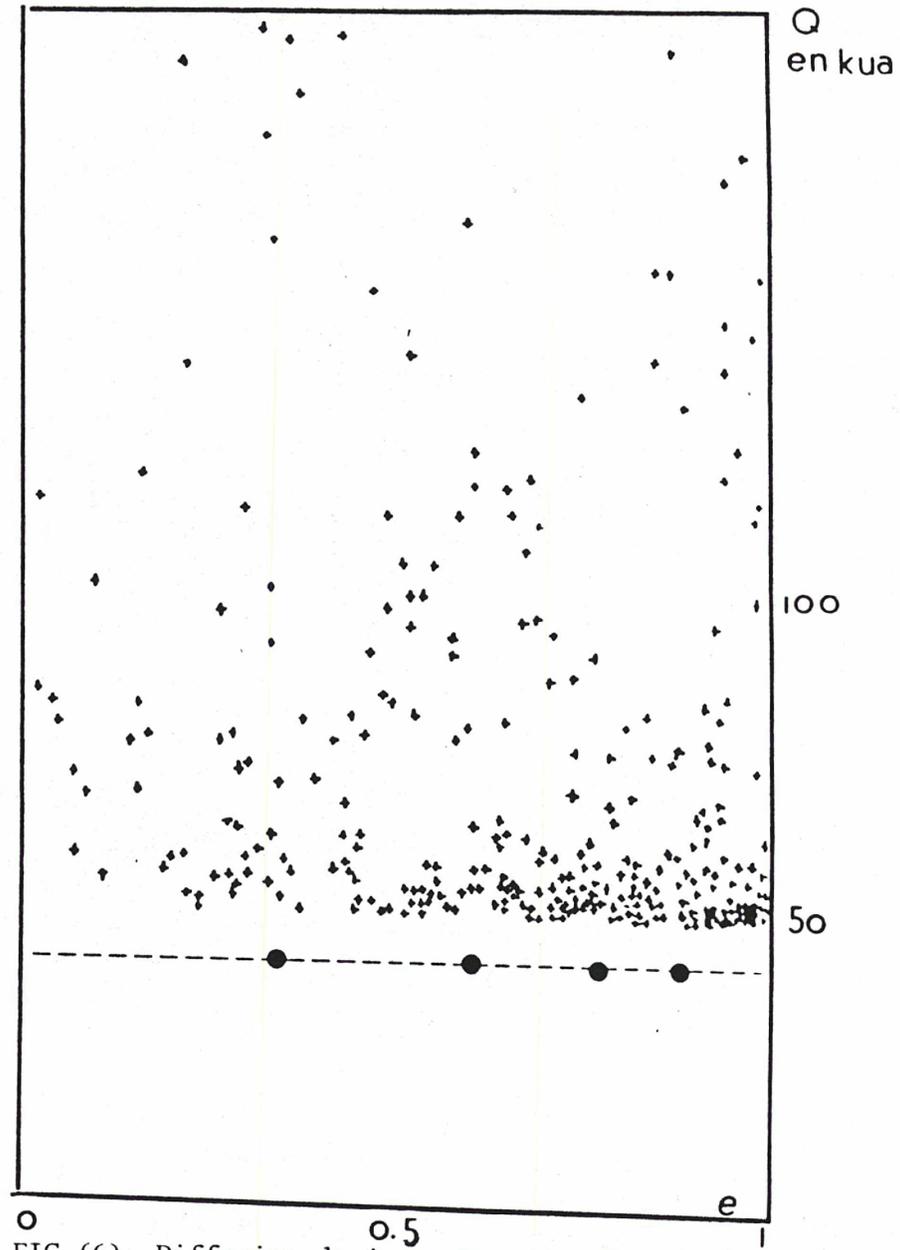


FIG (6). Diffusion de 4 nuages dans le plan (Q, e) .

En pointillé, sont représentées les courbes où $dQ = \text{cte}$, pour $dQ = 200, 1\ 000$ et $5\ 000$ UA.

En "grand pointillé" sont représentées les courbes où $de = \text{cte}$, pour $de = 0.05, 0.1$ et 0.15 .

L'évolution d'une orbite au cours du temps se traduit par une marche au hasard d'un point du plan. En abscisse, ce point fait des pas de (de) à gauche ou à droite, par contre en ordonnée ce point est condamné à progresser vers les Q croissant par pas de dQ .

Plus l'aphélie est grand ou plus l'excentricité est petite, plus leurs variations respectives sont importantes. Les zones situées au dessus de $dQ = \text{cte}$ ou $de = \text{cte}$ sont donc peu stables, puisque un point en sortira plus vite. Par contre les zones situées au dessous de ces courbes seront plus stables, donc plus denses en points représentatifs.

Sur la figure (6) est représentée l'évolution de quatre orbites initiales de même aphélie, notée par quatre cercles ($Q = 40\ 000$ UA, $e = 0.33, 0.6, 0.77, 0.88$).

A un moment donné, nous avons arrêté l'évolution et placé tous les points correspondants à toutes les orbites.

Les zones très denses (petite aphélie et grande excentricité) correspondent à des régions où les variations sont très petites et par conséquent à des régions où les orbites sont stables.

De ces quatre simulations, à de très rares exceptions près, les stellaires ont une excentricité finale comprise entre 0.1 et 0.5 .

Il y a donc lieu de penser qu'elles proviennent des régions dépeuplées $Q > 100\ 000$ UA et $e < 0.5$.

Il est clair, d'après les histogrammes de l'excentricité qu'il y a une forte proportion d'orbites à faible excentricité. Leur allure voisine montre que cette diffusion est indépendante des conditions initiales. Même si l'on pense

qu'initialement l'excentricité est très proche de 1, ceci est faux à la fin. L'étude dans le plan (Q,e) montre aussi l'existence d'orbites à aphélie modéré, c'est à dire susceptibles de jouer encore un rôle dans le nuage, ayant une faible excentricité.

On en tire une conclusion très importante pour la modélisation.

L'hypothèse que les rencontres ont lieu exactement lorsque la comète est à son aphélie ne semble plus légitime.

Avant toutefois de revoir ce type de modèle, regardons l'influence de la longitude du lieu rencontre.

3.3. Perturbations ailleurs qu'à l'aphélie

Maintenant nous allons perturber l'orbite systématiquement lorsque l'anomalie f a une valeur donnée différente de 180° . Ceci a aucune signification physique mais montre très clairement l'influence de f .

Dans le tableau (3), nous avons ajouté aux trois issues courantes, le nombre relatif de comètes éjectées qui n'est plus toujours négligeables. Les rencontres n'ayant plus lieu à l'aphélie, la vitesse est plus élevée, donc a plus de chance d'atteindre la vitesse d'éjection.

Périhélie	Excentricité	N(planétaire)/ N_0	N(Stellaire)/ N_0	N(Survivante)/ N_0	N(Ejecté)/ N_0
50	0.997	0.39	0.44	0.13	0.04
250	0.987	0.27	0.36	0.34	0.03
500	0.975	0.185	0.395	0.40	0.02
2 500	0.882	0.07	0.27	0.66	0
20 000	0.333	0	0.51	0.49	0

TAB. (3) Dépendance des états finaux fonction du périhélie initial. L'aphélie est toujours égal à 40 000 UA mais les rencontres ont lieu lorsque $f = 179^\circ$.

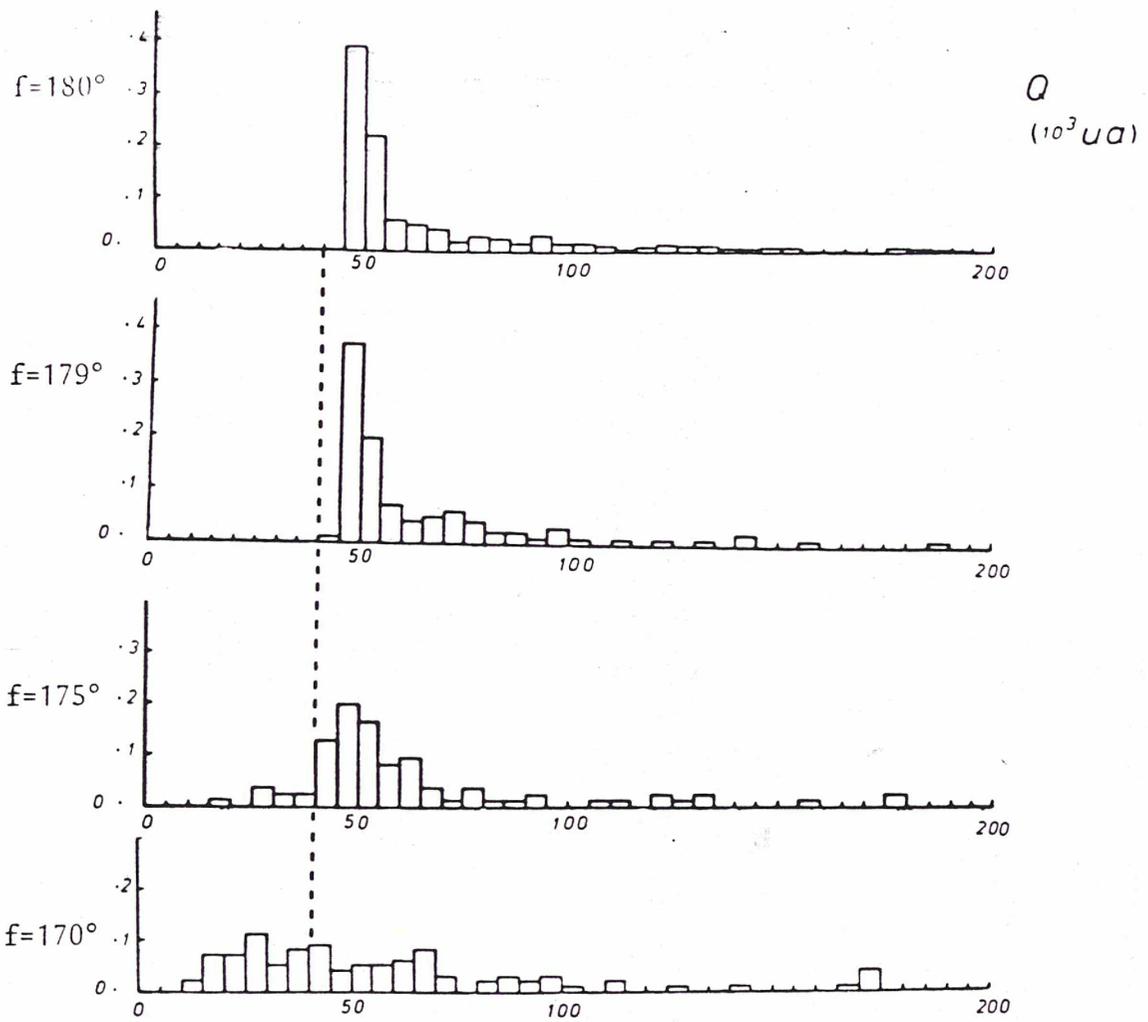


FIG (7). Diffusion de l'aphélie pour différentes longitudes du lieu de rencontre en pointillé. $Q_0 = 40\ 000 \text{ UA}$, valeur initiale ($q_0 = 50 \text{ UA}$).

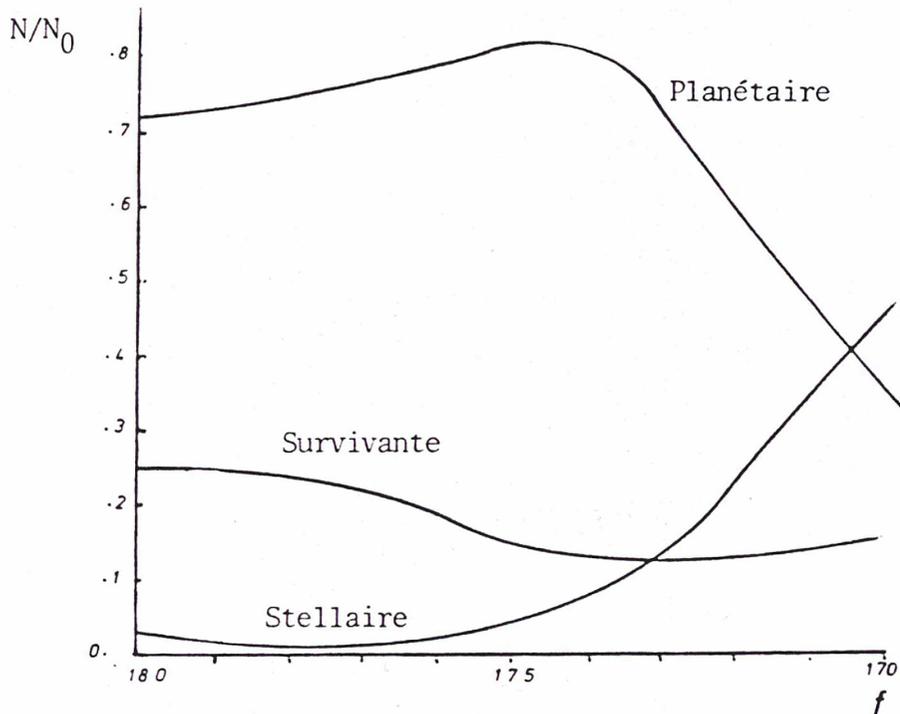


FIG (8). Evolution des différents mécanismes de perte de comète, en fonction de la longitude f du lieu de perturbation.
($Q_0 = 40\ 000 \text{ UA}$ - $q_0 = 50 \text{ UA}$).

Dans tous les cas, la diffusion hors du système solaire est de loin le mécanisme de perte le plus efficace. On pouvait s'en douter, puisque les variations de l'aphélie sont maintenant du premier ordre. Nous verrons aussi que l'aphélie est bien plus diffusé.

La diffusion vers les régions planétaires est nettement moins importante que pour les rencontres à $f = 180^\circ$, mais le nombre de planétaires reste linéaire en $\ln q$. Si l'on revient à l'espace des phases (Figure I.8), on voit que les courbes $q = \text{cte}$ sont parallèles à l'axe Ox au voisinage de l'aphélie. Les variations du périhélie sont donc indépendantes de la position exacte de la comète on comprend alors que la probabilité d'être planétaire garde la même forme, seuls les coefficients dépendants de Q sont changés.

En fait, Q intervenait au niveau de l'impulsion à travers l'expression de la période et surtout au niveau de la distance au Soleil, au moment de la rencontre. Nous avons vu que les variations des quantités métriques sont proportionnelles à cette distance et à l'inverse de la vitesse circulaire, donc sont proportionnelles à $R^{-3/2}$. Pour une excentricité de 0.997 des perturbations à $f = 170^\circ$ au lieu de 180° , entraîneront des variations 15 fois moins importantes sur les quantités métriques (et 2.5 fois moins sur les quantités non métriques, angles et excentricité).

Dès que l'on est à quelques centièmes de degré de l'aphélie, le premier ordre de Q est comparable au second ordre et la distance aphélie peut alors décroître. L'espérance de dQ reste néanmoins toujours positive, seul l'écart type après plusieurs perturbations est très nettement supérieur.

La figure (7) montre l'évolution de l'histogramme de l'aphélie, pour différentes longitudes du lieu de rencontre. Il faut atteindre $f = 175^\circ$ pour voir les premières valeurs de Q inférieures à l'aphélie initial de 40 000 UA. (la valeur commune du périhélie est 50 UA). C'est aussi à partir de cette valeur que le nombre de stellaires augmente substantiellement (figure 8).

La probabilité d'être planétaire est maximale vers $f = 175^\circ$. Cela vient du choix du périhélie initial assez bas pour lequel la fonction correctrice $\mathcal{E}(Q)$ rend la probabilité d'être planétaire décroissante. Les planétaires ne disparaissent substantiellement que pour laisser la place aux stellaires.

3.4. Conclusion

Lors de l'étude de l'influence du lieu de rencontre, nous avons pu remarquer, notamment à partir des figures 7 et 8, que des rencontres à moins de 2 ou 3 degrés de l'aphélie ont les mêmes conséquences que des rencontres aphéliques. Par ailleurs, en nous reportant dans l'étude I-1, notamment à partir de la figure 1 ou du tableau 1, nous voyons qu'une comète passe 80 % du temps à moins de $2,5^\circ$ de l'aphélie, si $e = 0.999$, au 45 % du temps si $e = 0.99$. Dès que l'excentricité est inférieure à 0.9, la comète ne passe plus de 15 % de son temps à moins de $2,5^\circ$ de l'aphélie. Ce modèle est donc valable pour le début de la simulation ou pour les comètes qui sont susceptibles d'intégrer les régions planétaires.

Dans le cas où cette hypothèse n'est plus licite, elle a pour première conséquence de bloquer l'aphélie tout en diffusant excessivement les autres paramètres. Cette conséquence minimise déjà le nombre de comètes perdues hors du système solaire donc fausse considérablement leur possibilité d'intégrer les régions planétaires.

Par ailleurs, nous avons remarqué la forte influence de Q , alors, dans la mesure où l'aphélie est en fait amené à pouvoir s'approcher du Soleil, cela entraînera de fortes conséquences sur l'évolution de certaines orbites.

Il semble donc important d'appliquer un ensemble de perturbations tout au long de l'orbite et non plus juste à l'aphélie.

De plus, n'oublions pas que les calculs de l'écart type des perturbations stellaires sont eux aussi basés sur des rencontres aphéliques, modifier ce modèle ne consiste pas seulement à appliquer une perturbation n'importe où sur l'orbite.

Quitte à reconcevoir entièrement ce modèle, il nous a paru intéressant de simuler "réellement" ce qu'il se passe.

Dans toute la suite nous allons considérer chaque passage d'étoiles séparément et appliquer la perturbation due à cette étoile sur un nuage de comètes. Entre chaque passage d'étoiles nous considérerons l'avance des comètes sur leur orbite et suivrons ainsi l'évolution du nuage au cours du temps.

Ceci permet aussi de calculer pour chaque passage d'étoiles et chaque comète la perturbation réelle, c'est à dire de tenir compte de l'effet différentiel très lié à la géométrie du problème. Rappelons que dans tous les travaux faits jusqu'à maintenant on ne prend en compte que des passages proches d'étoiles sans tenir compte de l'effet différentiel. Là aussi il nous a paru raisonnable d'essayer de rendre plus réaliste le modèle.

*

III. AUTRE MODELE : PRESENTATION ET EVOLUTION DE QUELQUES NUAGES DE COMETES

Nous venons de parler longuement du modèle de Weissman, de ses principes et de ses conséquences.

Comme nous l'avons mentionné, certaines de ses hypothèses nous ont paru critiquables, d'autant plus qu'elles semblent avoir de lourdes conséquences.

Dans un premier temps nous allons expliquer les principes d'un modèle qui semble être moins tributaire des hypothèses communément admises, puis, à partir de l'évolution de plusieurs types de nuage, nous essayerons de tirer des conclusions plus générales sur les caractéristiques, l'évolution dynamique et l'allure actuelle d'un nuage de comète formé il y a 4.5 milliards d'années.

1. PRINCIPE

On définit un nuage de comètes par la donnée des éléments orbitaux de N comètes en mouvement par rapport au Soleil. De temps à autre, une étoile de masse M_* animée par rapport au Soleil de la vitesse V_* , passe à proximité du nuage et de ce fait perturbe l'ensemble des éléments orbitaux. Après le passage, on obtient une nouvelle distribution des éléments orbitaux, donc un nouveau nuage.

Entre deux arrivées consécutives d'une étoile, chaque comète suit un mouvement orbital Klepérien elliptique, ce qui permet de déterminer la position des comètes lors du passage de l'étoile.

1.1. Comment simuler le voisinage solaire ?

Il serait déraisonnable d'espérer tenir compte d'un très grand nombre d'étoiles. Il faut donc s'astreindre à ne considérer que celles passant dans une sphère de rayon Δ_M donné.

La majorité des comètes ont des aphélies en deça de 100 000 UA, il faut tenir compte de tout ce qui se passe jusqu'à une distance d'au moins leur distance au Soleil, donc de tout ce qui se passe dans une sphère d'au moins 200 000 UA.

Afin de ne pas trop alourdir la simulation nous ne considérons que les étoiles passant en deça de cette limite. Nous serons amenés par la suite à montrer que l'apport des étoiles passant plus loin est négligeable.

Nous avons déjà vu (II.1.1.) que pendant un temps t , le système solaire voit passer N étoiles à moins de Δ_M , où

$$N = k \Delta_M^2 t$$

si t est année, alors k vaut $5.1 \cdot 10^{-6}$ si Δ_M est en pc, ou $1.2 \cdot 10^{-16}$ si Δ_M est en UA, puisque la densité d'étoiles est 0.08 par pc³.

Donc même si l'on se fixe une distance maximale de 200 000 UA, il faudra tenir compte de plus de 22 000 étoiles, entrant dans la zone d'influence au cours de $4.5 \cdot 10^9$ ans.

- On peut choisir comme intervalle de temps séparant deux passages, à moins de Δ_M , t_i tel que $N = 1$, c'est à dire $t_i = 8.10^{15} / \Delta_M^2$, soit pour $\Delta_M = 200\ 000$ UA $t_i = 2.10^5$ ans.

- Il faut convenir d'une distance minimale de passage, en effet une étoile passant à quelques UA du Soleil provoquait un effet catastrophique qui coupant la continuité de la simulation ne voudrait rien dire. Une telle distance peut être prise comme celle en deça de laquelle il y a eu au plus un passage en 4.5 milliards d'années : $\Delta_m = (10^{-16} \cdot 4.5 \cdot 10^9)^{-1/2} = 1\ 400$ UA.

Nous prendrons 2 000 UA dans la simulation.

- On considère que la direction d'arrivée de l'étoile par rapport au Soleil est aléatoire, quant à sa distance minimale d'approche, elle doit être distribuée de façon à ce que la densité à n'importe quel moment soit constante.

Considérons que le Soleil est immobile au centre d'une sphère. Privilégions une direction d'étoile donnée. Dans un disque perpendiculaire à cette direction la densité d'impact par unité de surface sera constante. Puisque ce disque est perpendiculaire à la direction des étoiles, ces impacts correspondent à la plus proche approche de l'étoile.

Le nombre d'impact à moins de Δ du Soleil sera donc proportionnel à la surface Δ^2 , autrement dit la probabilité d'avoir un Δ inférieur à Δ_0 donné doit être proportionnel à Δ_0^2 : il suffit pour cela de prendre Δ comme la racine d'un nombre distribué de façon uniforme.

Dans la simulation, nous prendrons $\Delta = \Delta_m + \Delta_M \sqrt{u}$, mais nous supposerons par la suite que Δ_m est négligeable devant Δ_M . (u est uniforme de 0 à 1).

Une fois que la distance minimale Δ est déterminée, la donnée de deux angles suffit à déterminer le point d'impact noté E_s , sur la sphère de rayon Δ . Par construction, nous savons que la trajectoire de l'étoile sera dans le plan tangent à cette sphère, la donnée d'un dernier angle suffira alors à la repérer par rapport au méridien local.

En résumé, en deça d'une distance Δ_M , il passe en moyenne une étoile tous les $8.10^{15} \Delta_M^{-2}$ ans, dont la distance minimale d'approche est

$\Delta_m + \Delta_M \sqrt{u}$, où u est uniforme de 0 à 1. Nous considérerons toujours que $\Delta_M = 200\ 000$ UA.

Le paramètre stellaire le plus mal connu est probablement la densité d'étoiles. Nous n'avons même, à priori, aucun indice sur cette densité il y a quelques milliards années. Un point intéressant de cette méthode est que ce paramètre n'intervient que dans le calcul de l'intervalle de temps entre le passage de deux étoiles. Modifier la densité stellaire équivaut donc à modifier l'échelle de temps.

Si nous comptons le temps en "passages d'étoiles" et non en années, nous nous libérons complètement de ce paramètre.

1.2. Comment traduire une rencontre ?

Puisque nous voulons faire agir plusieurs étoiles sur un ensemble de comètes, il est indispensable de choisir un repère indépendant des étoiles et des comètes.

Le paramètre stellaire à maîtriser est la distance de plus proche approche du Soleil, notée Δ . En supposant que l'étoile est en E_S , à ce moment là elle se déplace dans un plan orthogonal à SE_S . La position de l'étoile, à tout instant t , est donc repérée par quatre éléments Δ , λ , θ coordonnées sphériques de E_S et μ angle de la trajectoire par rapport au méridien local.

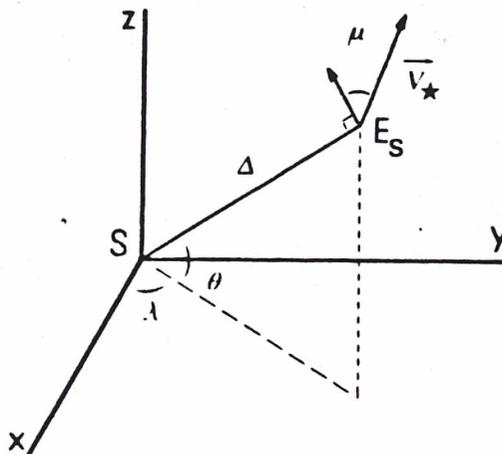


FIG (1). Détermination de la trajectoire de l'étoile par rapport à un référentiel héliocentrique.

Si en $t = 0$, l'étoile est en E_s , l'équation paramétrique de sa trajectoire est $X_e = \Delta \cos \theta \cos \lambda + V_x t$

$$Y_e = \Delta \sin \lambda \cos \theta + V_y t$$

$$Z_e = \Delta \sin \theta + V_z t$$

avec $V_x = V_* (\sin \lambda \sin \mu + \cos \lambda \sin \theta \cos \mu)$

$$V_y = V_* (\cos \lambda \sin \mu - \sin \lambda \sin \theta \cos \mu)$$

$$V_z = V_* \cos \theta \cos \mu.$$

La comète est repérée par ses éléments osculateurs ($a, e, i, \omega, \Omega, M$). M étant l'anomalie moyenne, auxquels sont liés ses trois paramètres de position (X_c, Y_c, Z_c) et ses trois paramètres de vitesse.

L'étoile passe au plus près de la comète en E_c , tel que

$$\vec{V}_* \cdot \vec{CE}_c = 0 \quad (\text{cf. Figure I.2})$$

c'est à dire lorsque

$$t_c = \frac{1}{V_*^2} (V_x (X_e - X_c) + V_y (Y_e - Y_c) + V_z (Z_e - Z_c))$$

Nous connaissons alors \vec{CE}_c et pouvons obtenir l'expression de la perturbation de vitesse :

$$\vec{I} = K \left(\frac{\vec{CE}_c}{\|\vec{CE}_c\|^2} - \frac{\vec{SE}_s}{\|\vec{SE}_s\|^2} \right)$$

La connaissance de six paramètres position et vitesse de la comète et ce changement de vitesse nous suffit pour recalculer les six éléments osculateurs

Tant que les perturbations avaient lieu au même point de l'orbite, nous pouvions faire évoluer le temps en ajoutant après chaque perturbation une période. Maintenant que c'est un événement indépendant du mouvement des comètes qui détermine le lieu de la perturbation, il faut prendre comme sixième élément

osculateur, l'anomalie moyenne. Puisque à chaque passage d'étoiles il faut connaître la position des comètes nous serons amenés à résoudre l'équation de Kepler :

$$E - e \sin E = M.$$

Nous avons vu qu'en 4.5 milliards d'années passaient au moins 20 000 étoiles donc si nous voulons avoir un nuage représentatif d'au moins 200 comètes, il nous faudra résoudre cette équation 4 millions de fois. Ce n'est donc pas de la malchance si nous tombons parfois dans des cas où les valeurs initiales classiquement utilisées à cette résolution font diverger les itérations successives.

Par ailleurs, si nous voulons que le "coût" de ce type de simulation reste raisonnable il faut essayer de trouver des valeurs approchées amenant à un minimum d'itérations.

Le principe de résolution de l'équation de Kepler est de trouver le zéro de $f(E) = E - M - e \sin E$, par la méthode d'approximation de Newton. On considère donc une suite E_j , telle que

$$E_{j+1} = E_j - f(E_j) / f'(E_j)$$

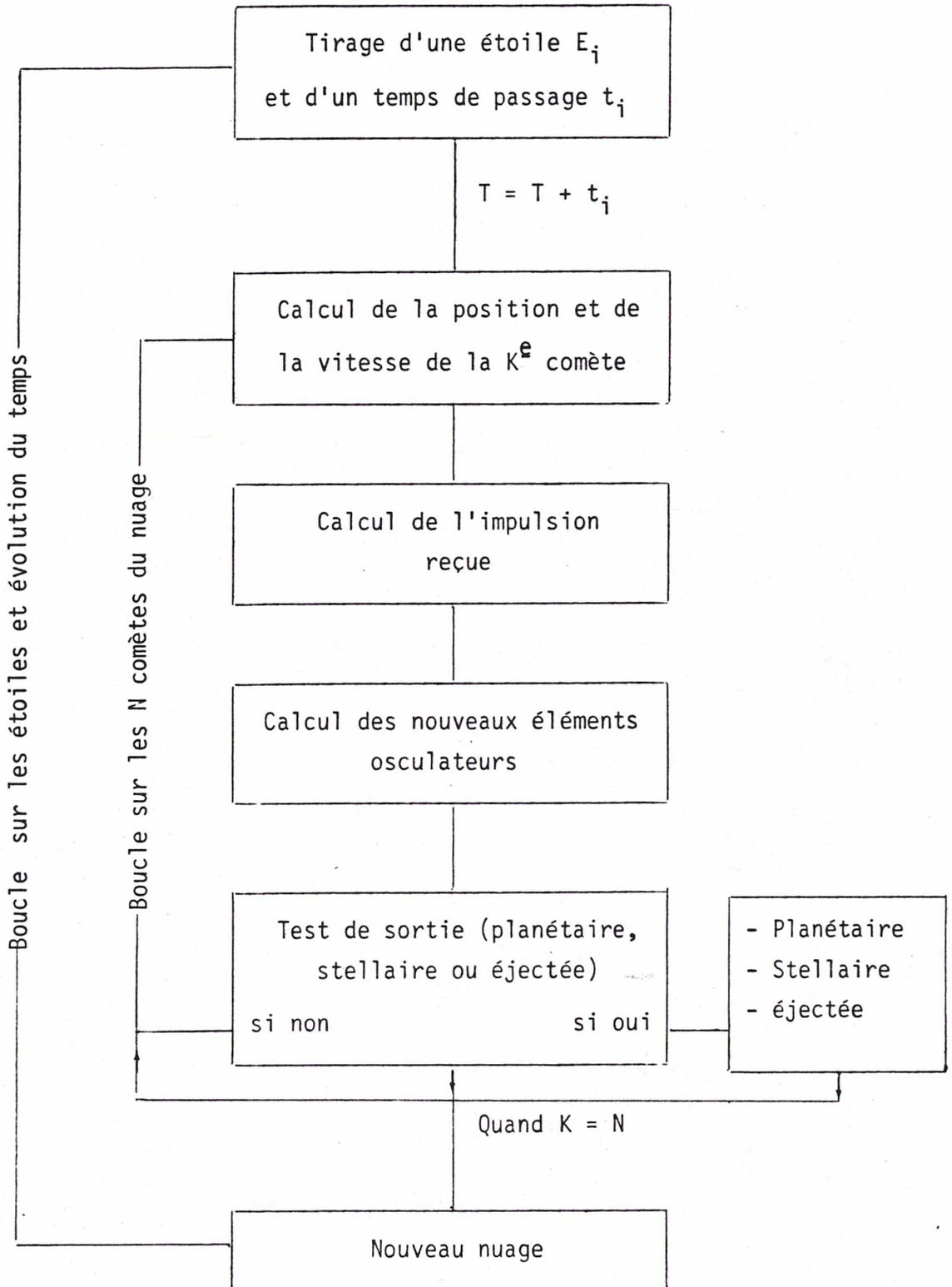
laquelle en cas de convergence, converge vers E .

C'est du choix de la valeur initiale dont dépend la convergence et le nombre d'itération.

Nous montrons en annexe que l'on pourra toujours choisir la valeur de démarrage E_0 suivante :

$$\begin{cases} E_0 = M + e & \text{si } e < 0.8 \\ E_0 = A \left(1 + \frac{A^2}{60}\right) \left(1 - A \frac{(1 - e)}{3M}\right) & \text{si } e > 0.8 \text{ avec } A = \left(\frac{6M}{e}\right)^{1/3} \end{cases}$$

1.3. Organigramme



2. PRESENTATION DE QUELQUES NUAGES

Les comètes sont repérées par les six éléments osculateurs classiques ($a, e, i, \Omega, \omega, M$).

Les hypothèses de formation du nuage donnent des indications sur les distances périhéliques et aphéliques, donc sur les deux premiers éléments osculateurs.

Par contre, nous n'avons aucun indice sur les quatre autres. Si l'on pense que les comètes ont été injectées dans le nuage par des perturbations planétaires alors il y a tout lieu de supposer que la position du plan de son orbite par rapport à un plan quelconque (Ω) et la position du périhélie par rapport au plan orbital (ω) sont réparties de façon uniforme de 0 à 2π .

M représente la position de la comète sur son orbite au moment du commencement de la simulation, on peut donc le prendre uniformément réparti de 0 à 2π .

Autant les comètes à courte période ont en général des orbites peu inclinées sur l'écliptique, autant celles à longue période n'ont aucune inclinaison privilégiée. Il est donc raisonnable de penser que le nuage est réparti de façon isotrope dans l'espace et par conséquent de considérer $\sin i$ réparti uniformément entre 0 et 1.

Les nuages sont représentés dans le plan (Q, e), d'une part parce que nous avons déjà remarqué les fortes corrélations entre ces deux variables, d'autre part parce que la diffusion d'orbites est plus parlante en dimension deux qu'à partir d'histogrammes.

La simulation commence à $t = 0$ et finit à $t = 4.5$ milliards d'années. Tous les 7 000 passages d'étoiles, soit tous les $1.5 \cdot 10^9$ ans, l'état du nuage nous est donné : diffusion dans le plan (Q, e), histogramme des six éléments osculateurs.

Après avoir présenté quelques nuages, nous résumons leurs principales caractéristiques, dans le tableau 1.

Les quatre premières colonnes indiquent d'une part le pourcentage de comètes devenues planétaires et stellaires, d'autre part le taux correspondant, par an et par comète, les taux indiqués entre parenthèse correspondent au flux à la fin de la simulation (environ pendant le dernier milliard d'années).

La cinquième colonne donne le nombre de passages d'étoiles suffisant à "vider de moitié le nuage". En le multipliant par le temps moyen séparant deux passages d'étoiles, il peut être vu comme un temps de durée de vie.

Les trois dernières ont trait à la dispersion moyenne des perturbations de vitesse ; X_m est une constante intervenant dans l'étude analytique, et σ l'écart type numérique en cm/s, correspondant à une rencontre.

NUAGE A

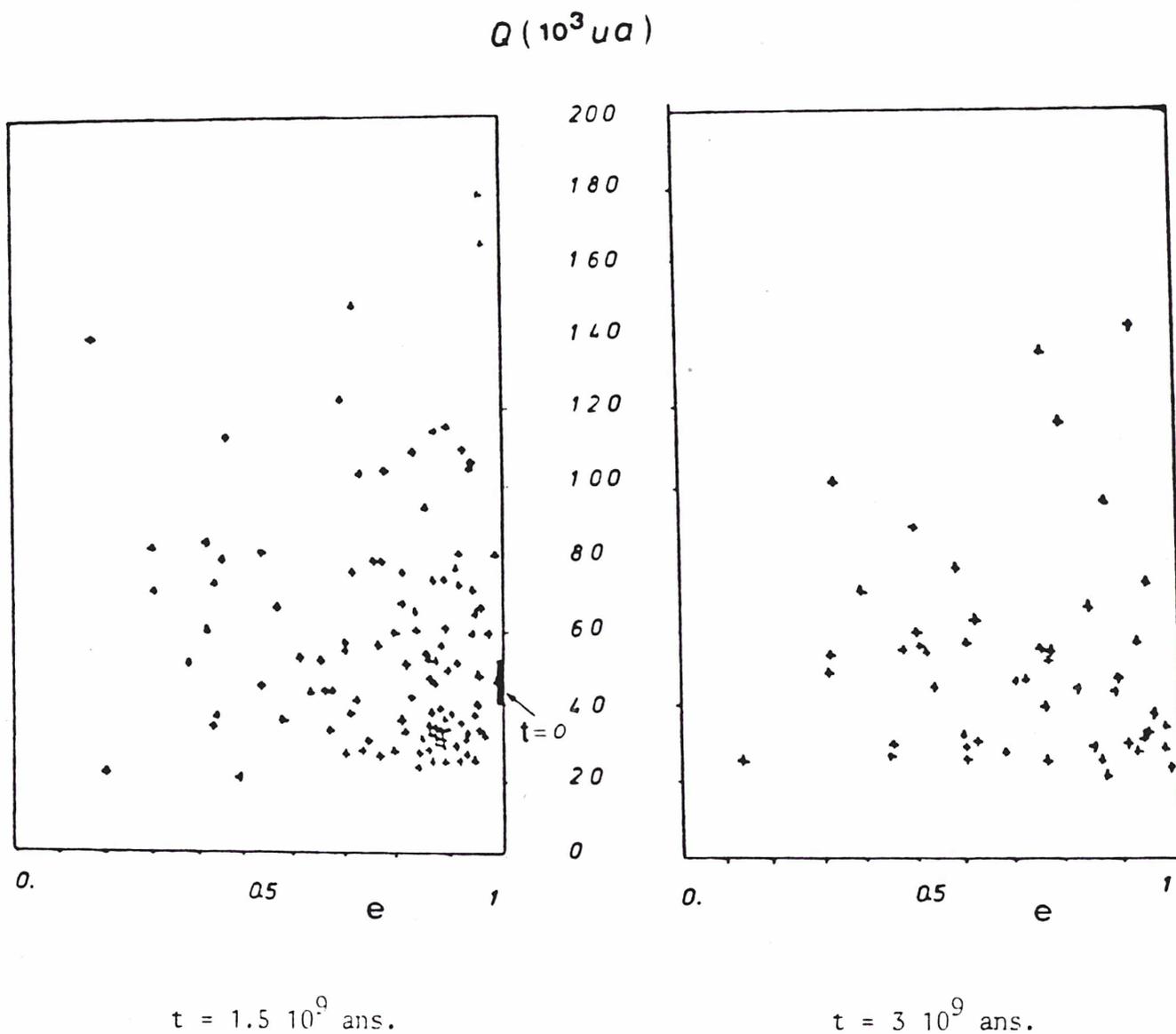
Ce nuage correspond à l'hypothèse la plus communément adoptée. Le périhélie q est réparti uniformément de 200 à 300 UA, l'aphélie Q de 40 000 à 50 000 UA. Dans tous les cas l'excentricité est supérieure à 0.98, ce nuage est donc initialement confiné dans le petit rectangle de la figure de gauche.

Il reste 55 % de la population initiale après $1.5 \cdot 10^9$ ans.

(25 % à $t = 3 \cdot 10^9$ ans, 15 % à $t = 4.5 \cdot 10^9$ ans)

35 % sont devenus planétaires, 43 % stellaires.

8 % ont été éjectés.



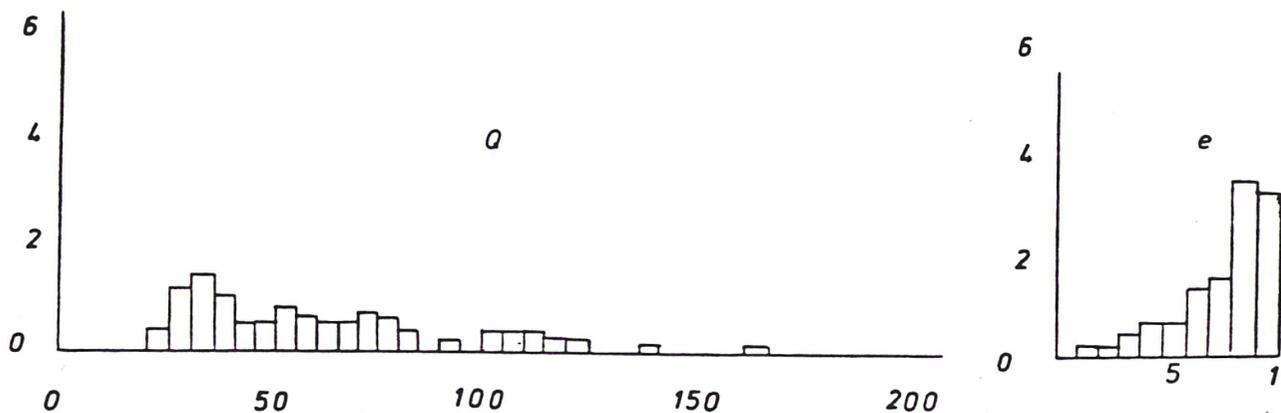


FIG (2). $t = 1.5 \cdot 10^9$ ans : distribution de la distance aphélique et de l'excentricité.

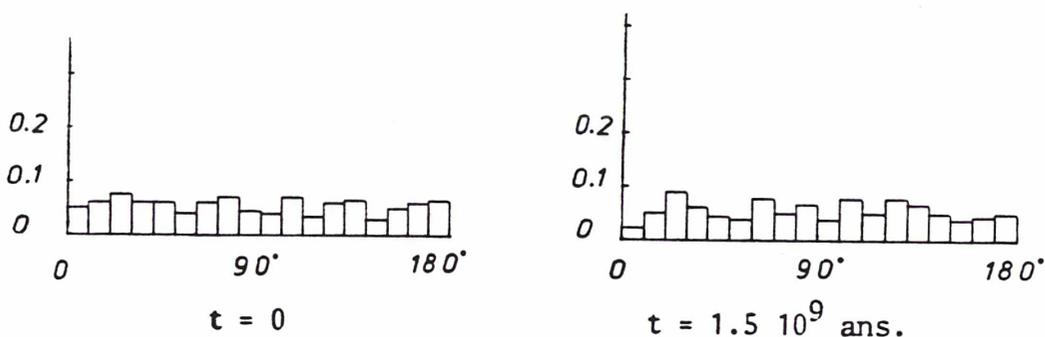


FIG (3). Initialement, nous avons réparti i uniformément, $1.5 \cdot 10^9$ ans après la répartition se fait uniformément suivant $\sin i$.

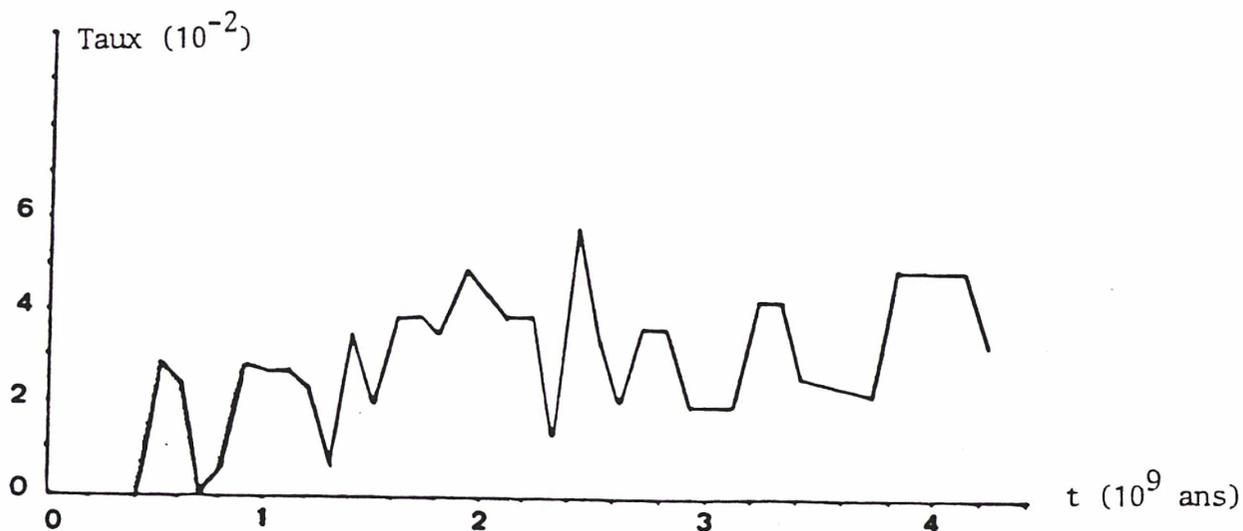


FIG (4). Taux de stellaires par comète et par 10^8 ans (ou par 500 passages d'étoiles).

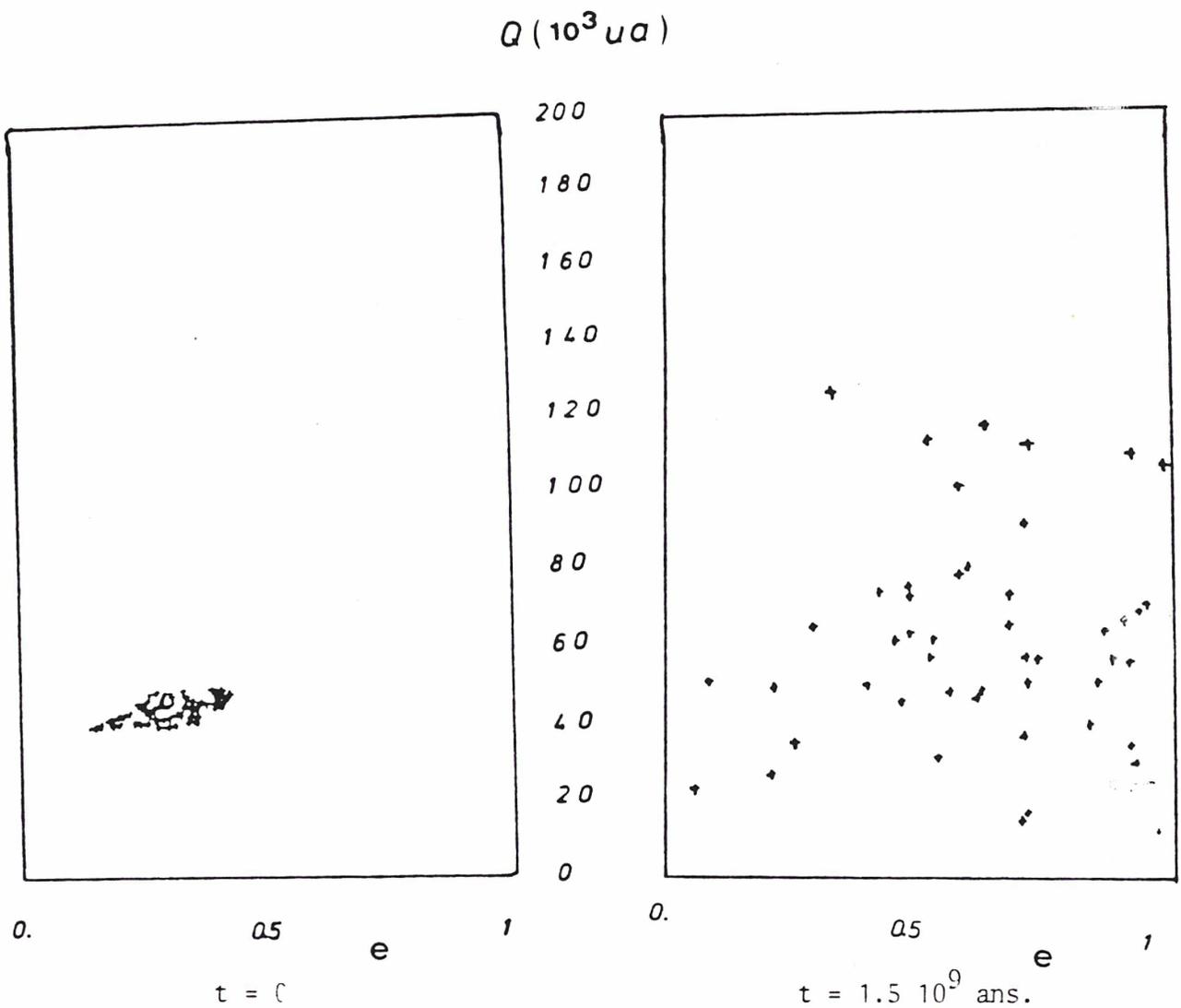
NUAGE B

Ce nuage correspondrait à un nuage formé par les restes de la nébuleuse protosolaire. L'aphélie est encore réparti de 40 000 à 50 000 UA, mais le périhélie l'est de 20 000 à 30 000 UA. L'excentricité varie donc de 0.15 à 0.4.

Il reste moins de 50 % de la population initiale après $1.5 \cdot 10^9$ ans.
(10 % à $3 \cdot 10^9$ ans, 6 % à $4.5 \cdot 10^9$ ans)

80 % de la population sont devenus stellaires, 4 % planétaires.

10 % ont été éjectés.



NUAGE C

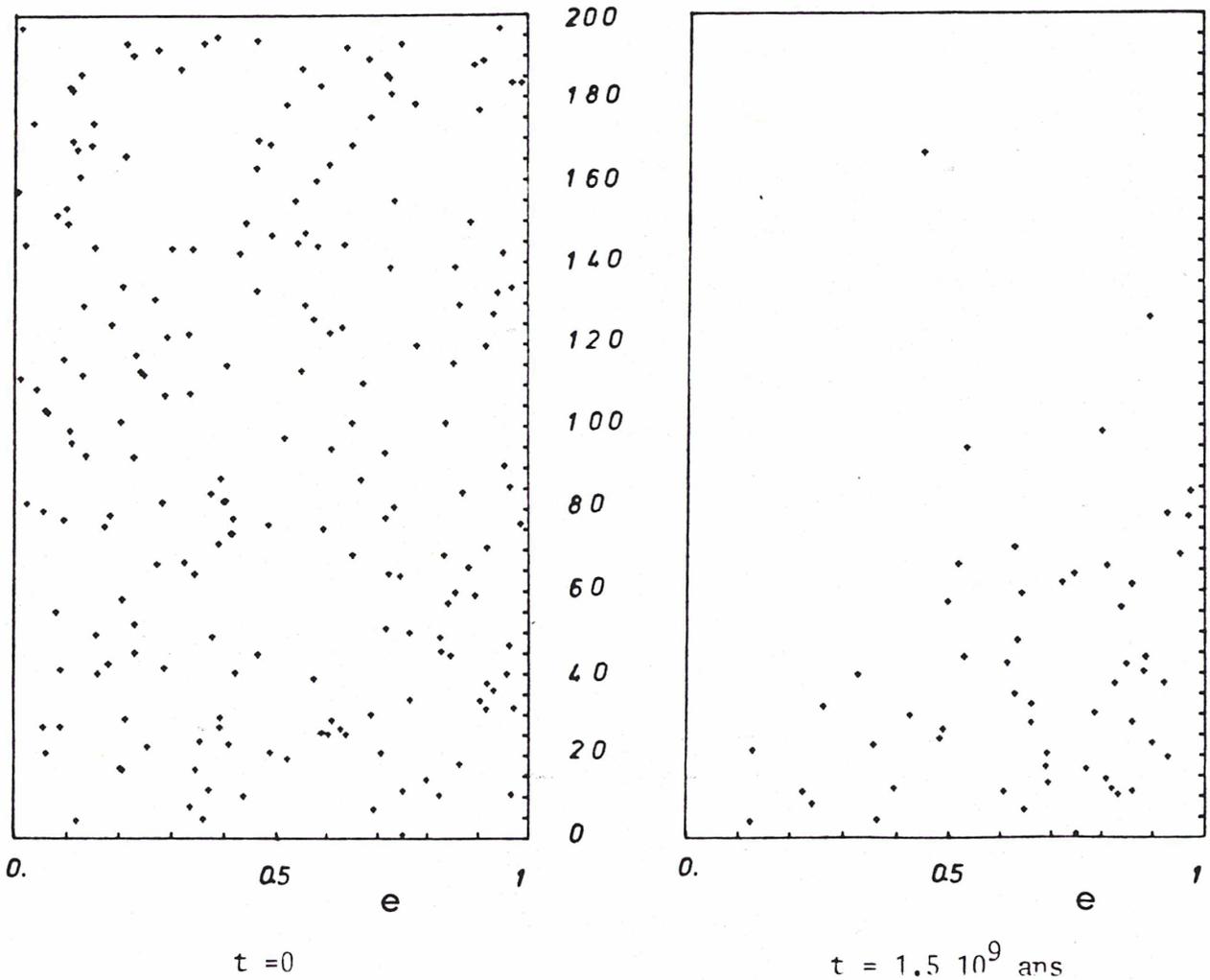
Autant l'importance relative des différents mécanismes de perte sont extrêmement liés à l'allure du nuage, autant la diffusion dans le plan (Q, e) semble tendre vers un même état. Il nous a paru alors intéressant de regarder l'évolution d'un nuage uniformément réparti dans ce plan.

Dès $1.5 \cdot 10^9$ ans, 70 % des comètes ont quitté ce nuage

La majorité d'entre elles sont devenues stellaires (80 % sur les 90 % perdus pendant la simulation). Il n'y a eu que 4 % de planétaires.

6 % ont été éjectés.

$Q (10^3 ua)$



$t = 0$

$t = 1.5 \cdot 10^9$ ans

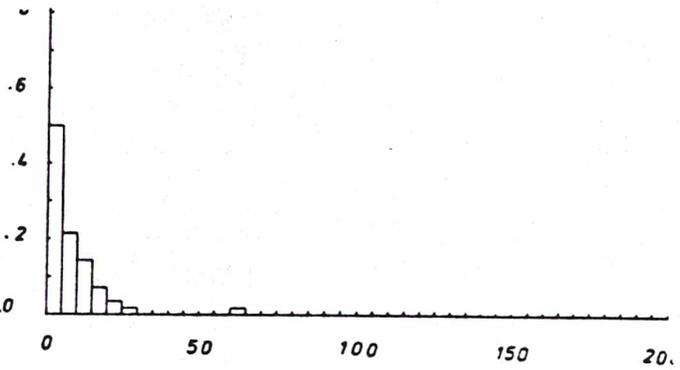
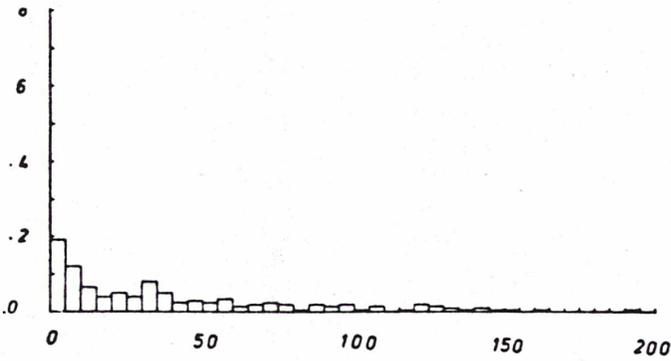


FIG (5). Distribution du périhélie.

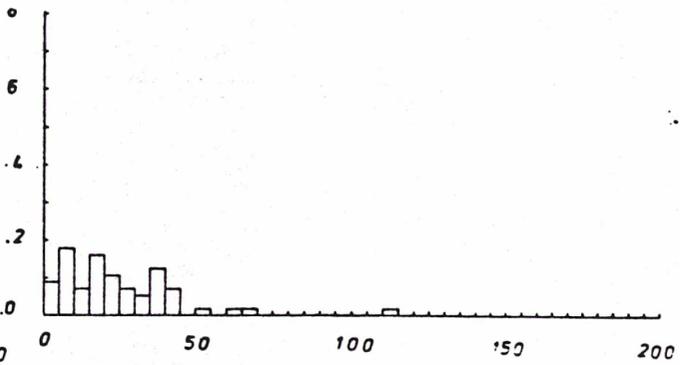
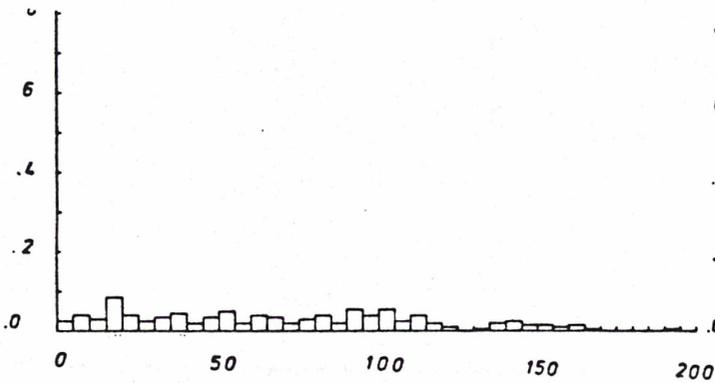


FIG (6). Distribution du demi-grand axe.

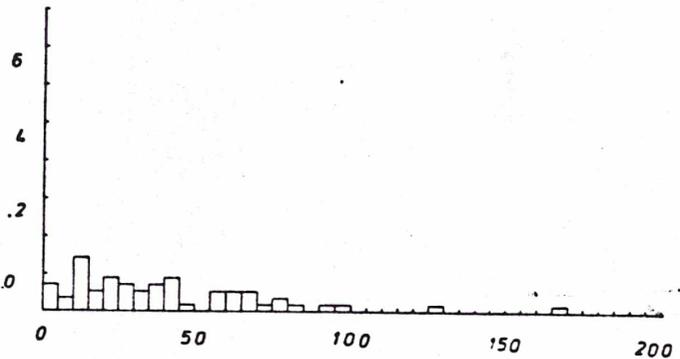
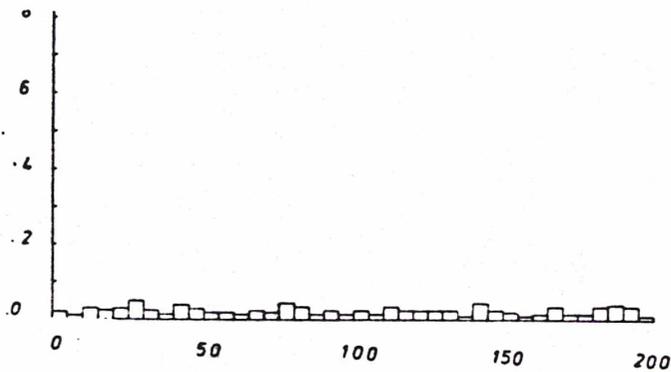


FIG (7). Distribution de l'aphélie.

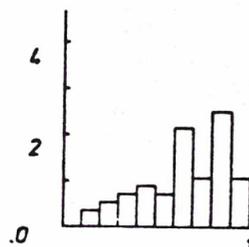
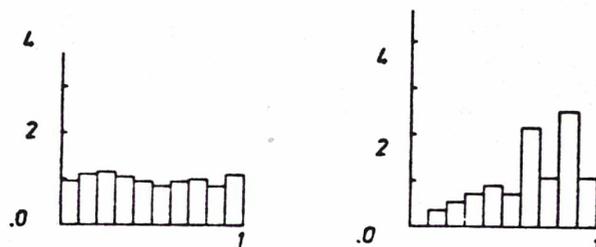


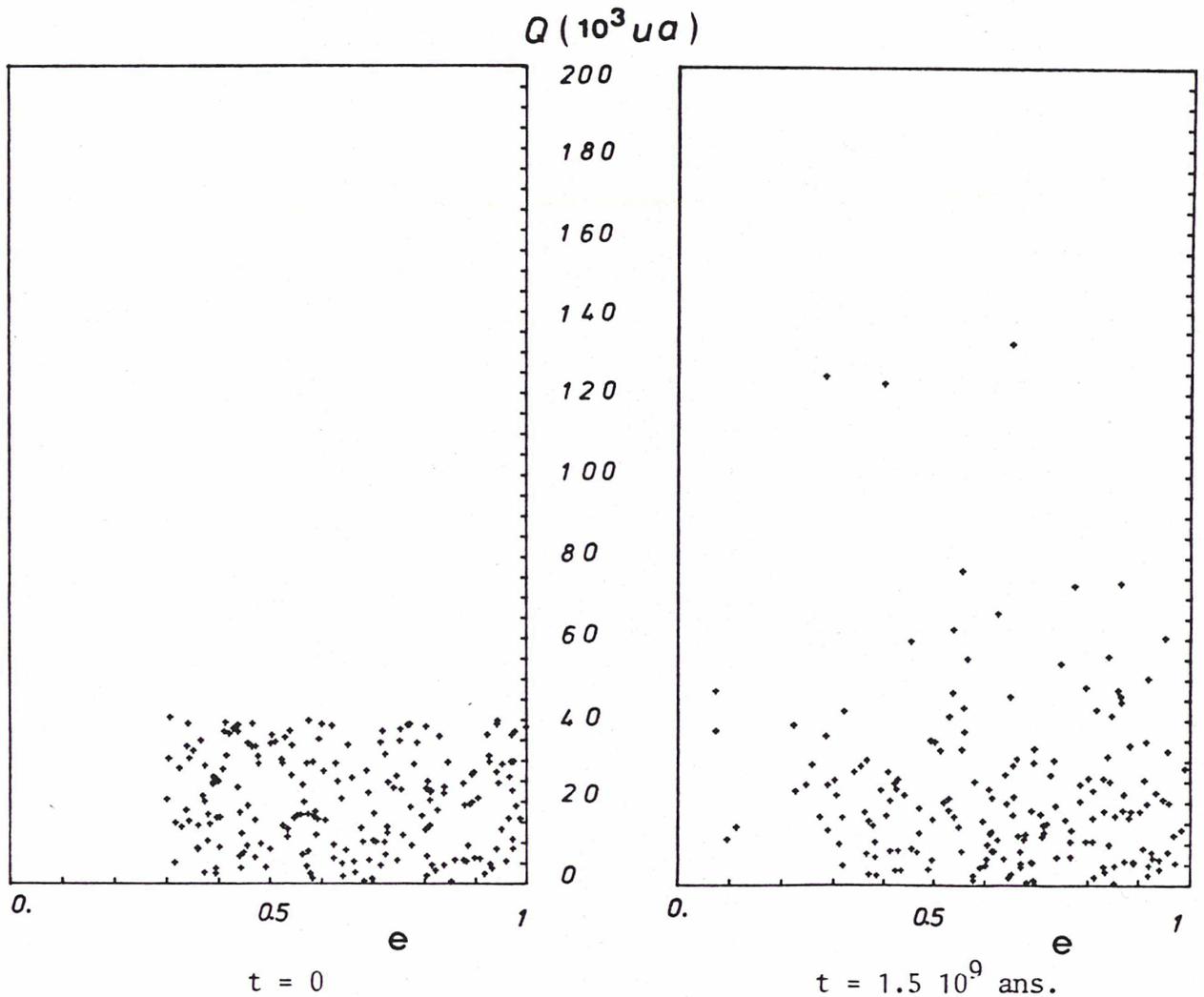
FIG (8). Distribution de l'excentricité.

NUAGE D

Les comètes dont l'aphélie est très éloigné ou dont l'orbite a une faible excentricité semblent quitter très vite le nuage. Nous avons alors confiné celui-ci dans des régions apparemment stables. Q est uniformément réparti de 0 à 40 000 UA et e de 0.3 à 1.

Ainsi il reste près de 90 % de la population initiale après $1.5 \cdot 10^9$ ans. (75 % à $t = 3 \cdot 10^9$ ans, 60 % à $t = 4.5 \cdot 10^9$ ans).

La diffusion hors du système solaire reste tout de même le mécanisme de perte le plus important : 26 % des pertes contre 5 % de planétaires. 9 % ont été éjectés.



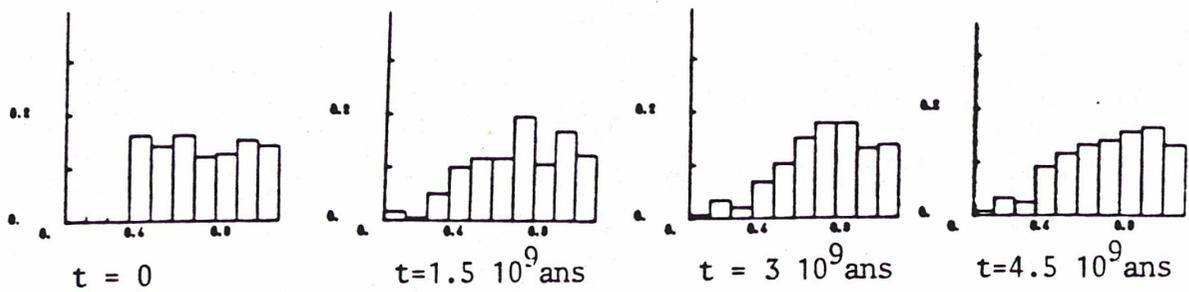


FIG (9). Evolution de l'excentricité.

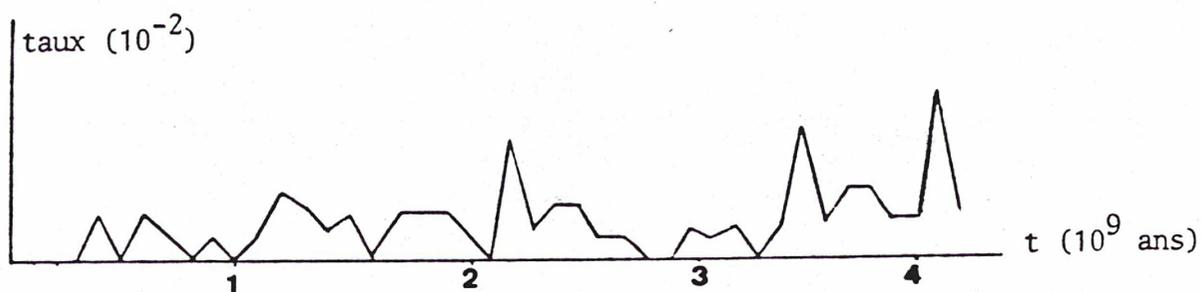


FIG (10). Taux de stellaires par comète et par 10^8 ans.

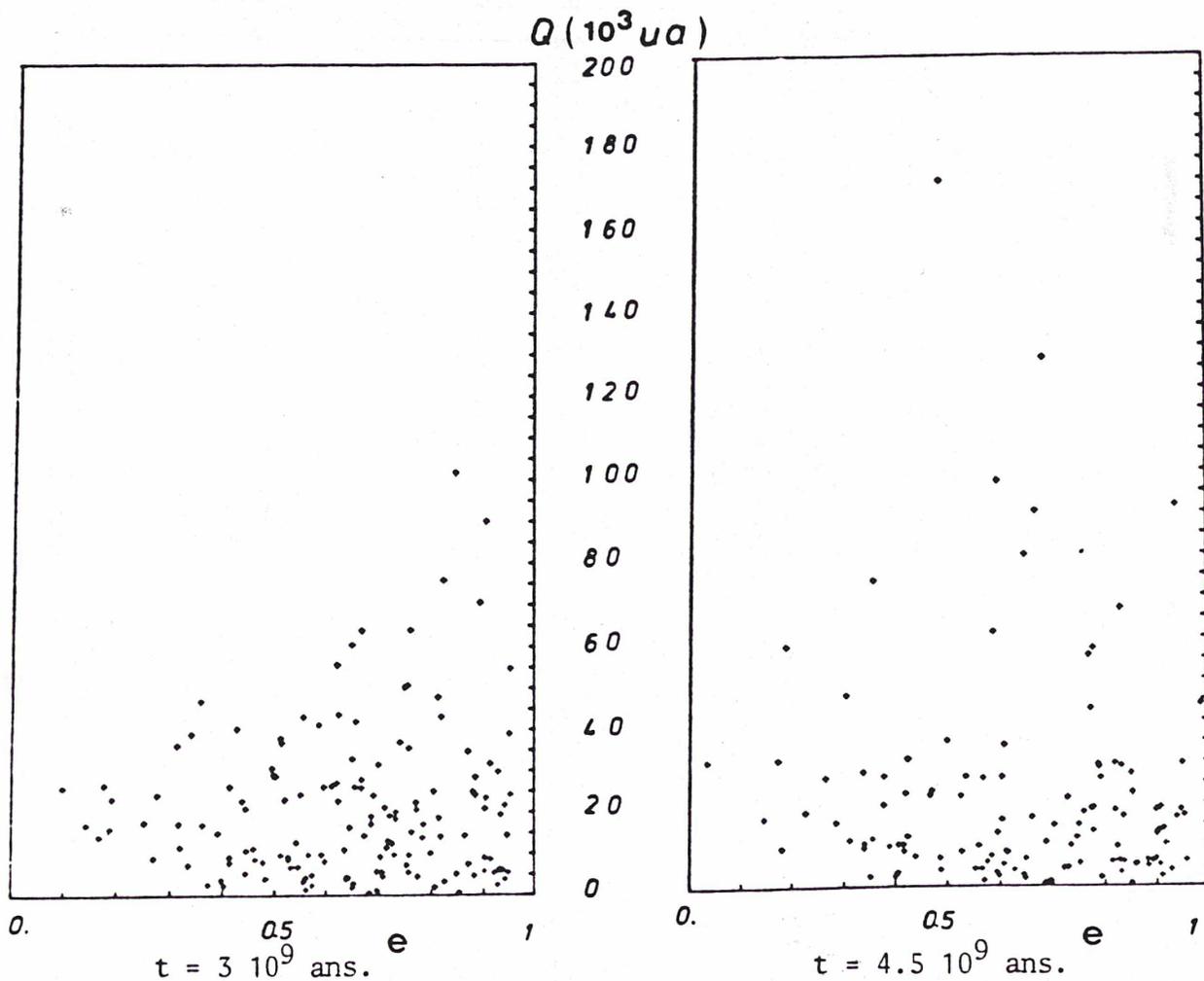
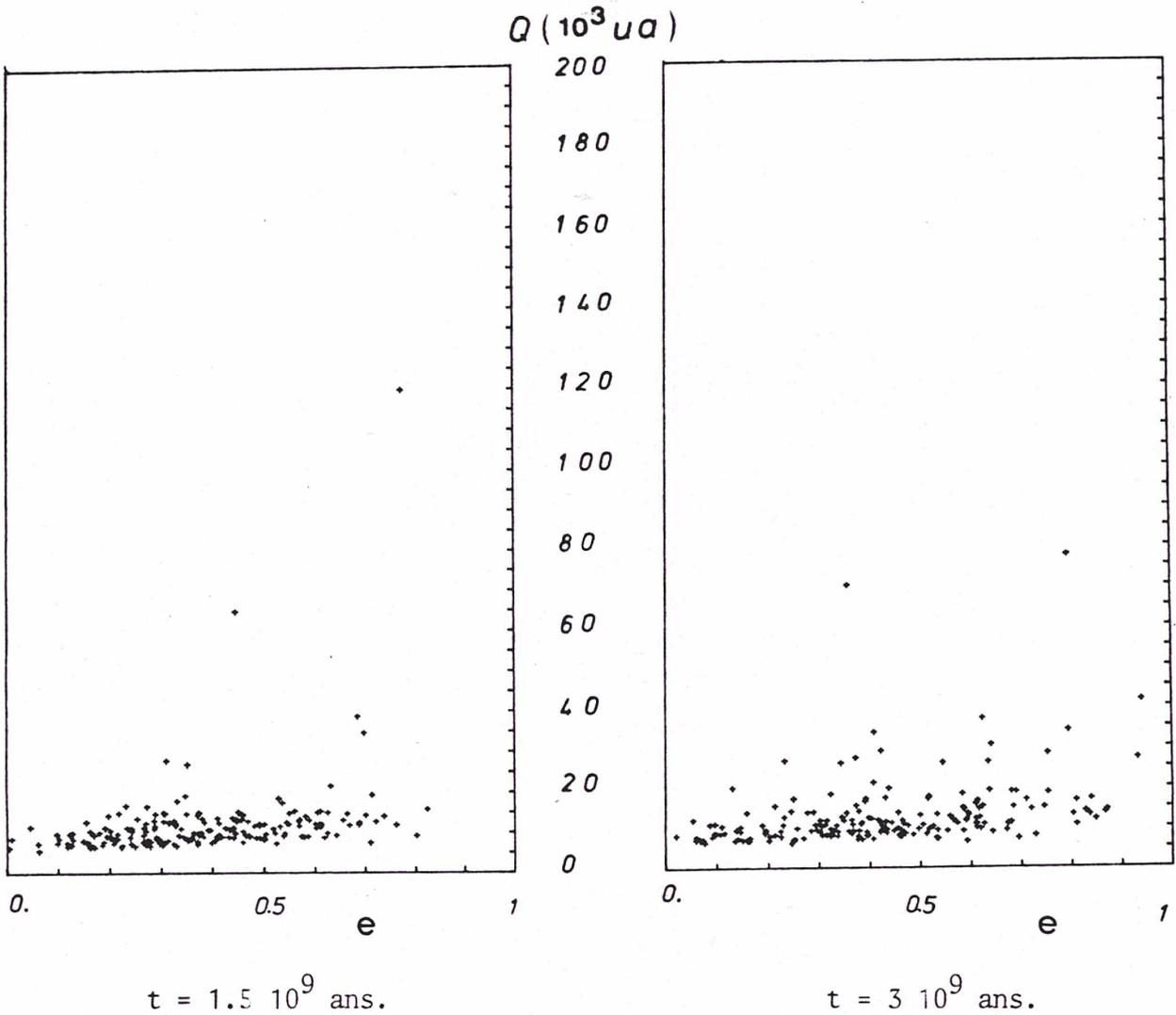


FIG (11). Evolution dans le plan (Q, e) .

NUAGE E

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons confiné ce nuage vers des régions proches du Soleil. Ici c'est le demi-grand axe qui est réparti de 5 000 à 10 000 UA. Par contre l'excentricité y est plus faible puisque répartie de 0.1 à 0.6.

Nous avons directement représenté l'état du nuage à $t = 1.5 \cdot 10^9$ ans puis à $t = 3 \cdot 10^9$ ans. Dans ce dernier cas il reste encore 98 % des comètes.



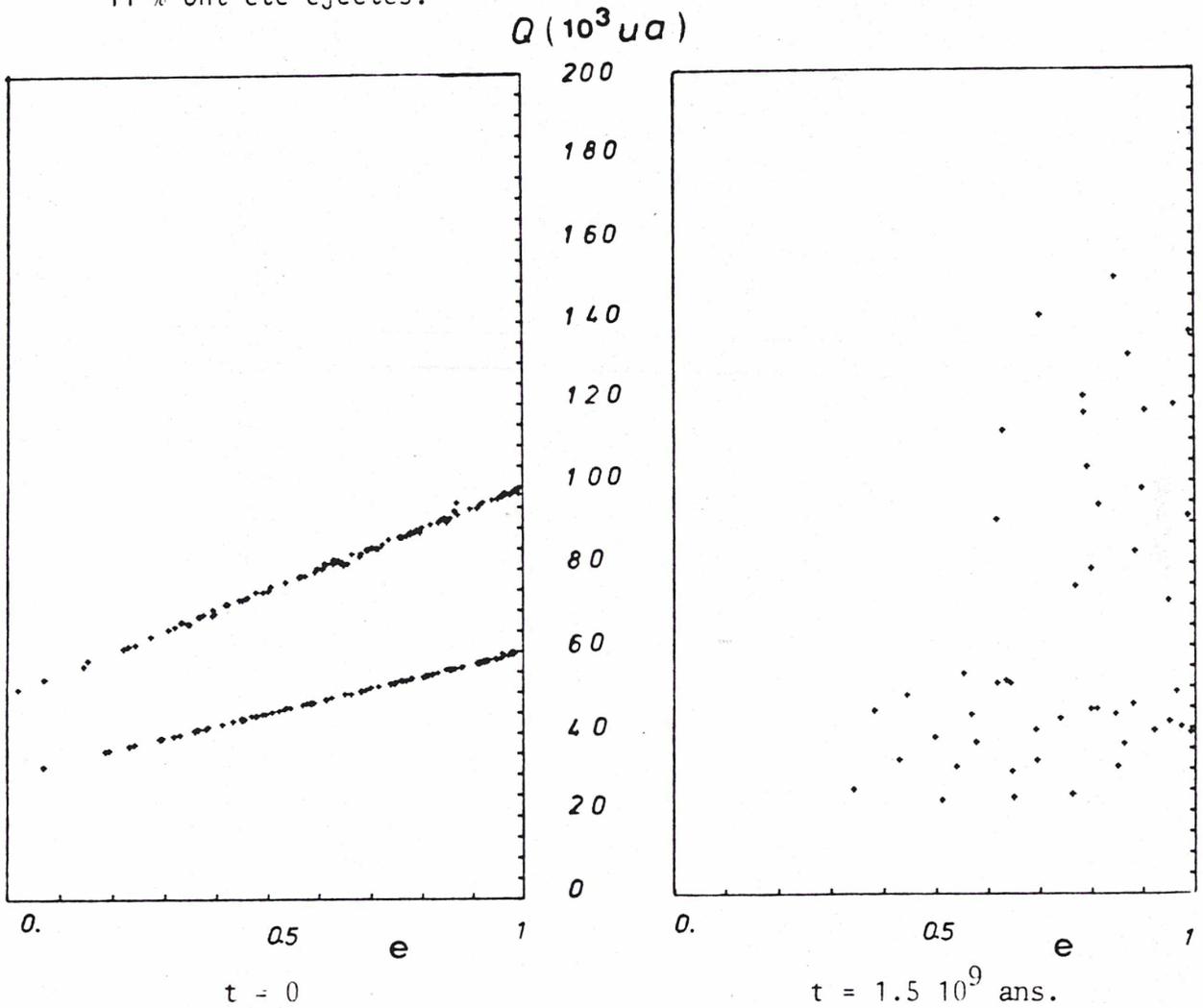
NUAGE F

Comme nous l'avons remarqué à partir des histogrammes, la fonction de distribution de l'excentricité semble devenir linéaire en e et peut alors être approchée par une fonction du type $f(e) = e/2$, correspondant à $e = \sqrt{u}$ où u est uniforme de 0 à 1. Nous avons alors essayé de créer un nuage d'excentricité ainsi répartie et vérifiant $a = 30\ 000$ UA ou $a = 50\ 000$ UA.

A $t = 1.5 \cdot 10^9$ ans, il ne reste que 25 % des comètes (à peine 5 % à la fin de la simulation).

75 % sont devenus stellaires, 9 % planétaires.

11 % ont été éjectés.

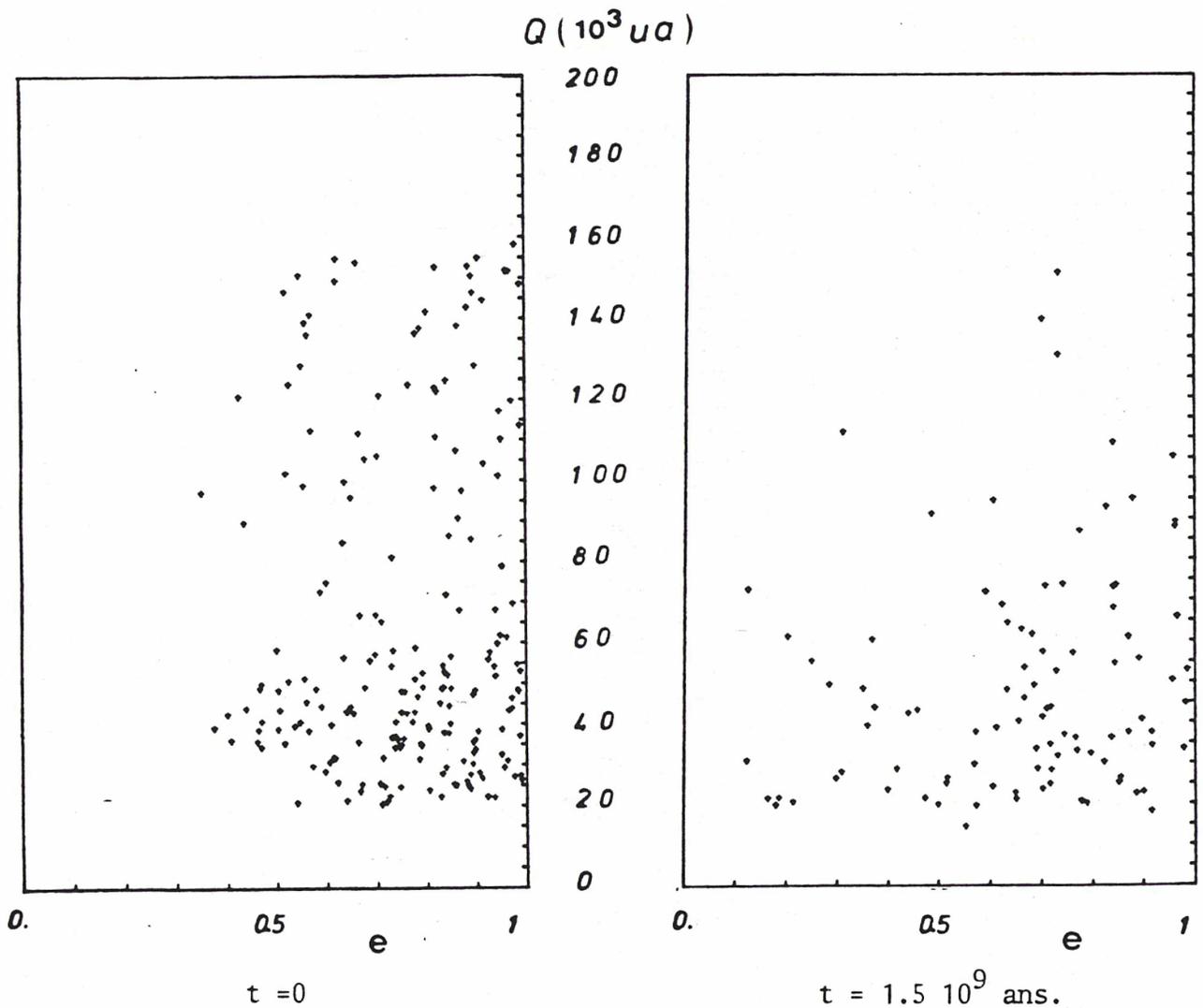


NUAGE G

Ici, nous avons essayé de créer un nuage ressemblant à l'état des autres (essentiellement du nuage A) en cours de simulation. Nous avons alors choisi une distribution de l'excentricité du type de la précédente, mais en favorisant les plus fortes valeurs : $e = \sqrt{0.3 + 0.7 u_1}$, et nous nous sommes fortement inspirés de l'allure de l'histogramme de l'aphélie du nuage A à $t = 1.5 \cdot 10^9$ ans. Nous avons superposé deux populations : $Q = (20\ 000 + 140\ 000 u_2)$ UA et $Q = (20\ 000 + 40\ 000 u_3)$ UA où u_1, u_2, u_3 sont répartis uniformément de 0 à 1.

Comme le nuage A, il se vide de moitié tous les 7 000 passages d'étoiles. Nous obtenons 66 % de stellaires et 9 % de planétaires.

9 % ont également été éjectés.



	STADES FINAUX : importance relative						Nombre de passages à partir desquels le nuage est vidé de moitié	Dispersion de l'impulsion	
	Planétaire		Stellaire		Ejectée	Survivante		χ_m **	σ ***
	Probabilité	Taux* (10 ⁻¹¹)	Probabilité	Taux* (10 ⁻¹¹)				cm/s	cm/s
A	0.35	7.8 (3.3)	0.43	9.5 (20)	0.08	0.14	8 000	9.5 ± 0.5	17,5
B	0.04	0.88 (5.3)	0.80	17.7 (26)	0.10	0.06	6 000	--	--
C	0.04	0.88 (3.33)	0.79	17.5 (10)	0.06	0.11	1 400	9.0 ± 1	16.5
D	0.05	1.1 (1.33)	0.26	5.7 (26)	0.09	0.60	> 22 000	4.3 ± 0.2	11
E	0.005	0.11	0.01	0.2	0.005	0.98	>> 22 000		8
F	0.09	2 (0)	0.75	16.6 (26)	0.11	0.05	4 000	12.0 ± 1	19
G	0.09	2 (4)	0.66	14.6 (26)	0.09	0.16	6 000	9.5 ± 0.5	17.5

TAB (1). Principales caractéristiques des différents nuages de comètes

* Taux par an et par comète durant la simulation - entre parenthèses = durant le dernier milliard d'années.

** Constante intervenant dans le calcul de la dispersion - peut être comparée à un écart type théorique (voir pages 98,109)

*** écart type numérique par comète et par rencontre.

3. CARACTERISTIQUES ET REMARQUES

La diffusion de tous ces nuages semble tendre plus ou moins vite vers un état commun. Seules les régions en deça d'environ 30 000 UA sont invariantes sur l'échelle de temps considéré.

Des trois mécanismes de perte, seule l'éjection sur orbites paraboliques est un phénomène dont le taux est indépendant du temps écoulé depuis le commencement de la simulation. Nous aurons l'occasion de voir qu'il peut être expliqué uniquement à partir des passages proches et qu'il suit une loi exponentielle. Weissman (1980) avait déjà remarqué qu'environ 10 % des comètes avaient dû être éjectées du nuage par des étoiles passant très près. Il en avait conclu qu'une distribution maxwellienne des vitesses n'était pas représentative, ce qui ne l'empêche pas d'en faire usage dans les simulations.

Les autres mécanismes de perte sont très liés dans un premier temps à l'allure du nuage initial, puis semblent tendre vers un taux plus constant en cours de simulation

3.1. Stellaires

La diffusion hors du système solaire est de très loin le mécanisme de perte le plus important. Il atteint environ le quart des comètes d'aphélie compris entre 30 000 et 40 000 UA. Pour des aphélies d'environ 50 000 UA, ce nombre varie de 0.45 si l'excentricité est proche de 1 à 0.80 si elle est proche de 0.3

Une comète dont l'aphélie initial est vers 80000UA a environ 99 % de chance de devenir stellaire. Toutes les comètes d'aphélie supérieur à 100 000 UA sont condamnées à être emportées en moins de $4 \cdot 10^8$ ans.

Lorsque le nuage a oublié ses conditions initiales, le taux de stellaire semble devenir constant ; pour la majorité des nuages ce taux en fin de simulation est d'environ $2.5 \cdot 10^{-10}$ par comète et par an.

Contrairement à ce que nous avons remarqué dans le II, la distribution de l'excentricité des stellaires (fig. (12)) n'a rien d'original par rapport

à celles des comètes ordinaires ; celle-ci semble aussi linéaire en e. Ici, la différence entre ce modèle et le modèle de Weissman est assez flagrante ; d'une part pour le même type d'orbite les marées galactiques sont un mécanisme de perte nettement plus important, d'autre part il atteint les orbites sans considération d'excentricité.

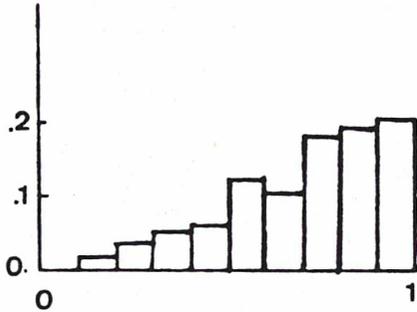


FIG (12). Histogramme de l'excentricité des Stellaires.

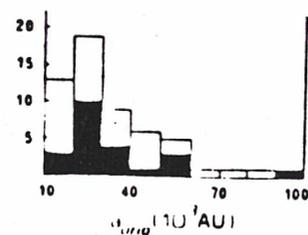
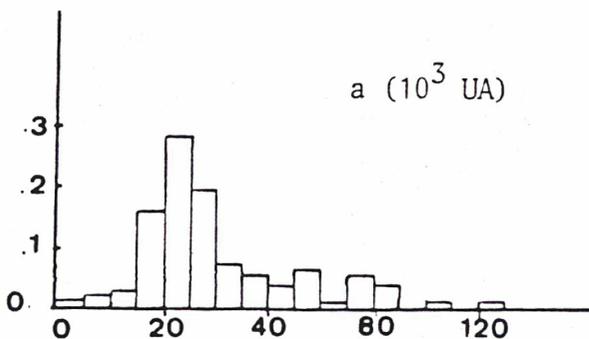
3.2. Planétaires

a) demi-grand axe

L'étude du demi-grand axe des planétaires est des plus importante dans la mesure où c'est la seule comparaison avec l'observation que nous ayons.

Nous avons préféré l'étude du demi-grand axe, à celle de son inverse, dans la mesure où elle est plus précise. Souvenons nous que R.A Lyttleton (1974), un des plus fervents détracteurs du nuage ne s'est pas retenu de rejeter entièrement la théorie de Oort, essentiellement parce que celle-ci repose sur l'étude de l'inverse du demi-grand axe.

Dans un premier temps, nous avons regardé la distribution des demi-grands axes (Fig. (13)) pour toutes les planétaires des sept nuages, celle-ci pouvant traduire le type de comètes aspirant à devenir planétaire . L'histogramme de droite est celui de Marsden et Sekanina (1973), les parties foncées correspondent aux comètes de périhélie supérieur à 2 UA, celles qui, n'étant pas sujettes aux forces non gravitationnelles, constituent un échantillon plus fiable.



(d'après Fernandez (1980))

FIG (13). Distribution du demi-grand axe des planétaires.

Rappelons qu'en 1950, Oort sur un échantillon de 19 comètes, trouvait une répartition en 1/a correspondant à 14 comètes de demi-grand axe supérieur à 20 000 UA et 4 de demi-grand axe compris entre 10 000 et 20 000 UA.

L'étroite ressemblance de ces histogrammes confirme nettement la présomption d'un nuage. On peut alors se demander si l'échantillon de planétaires obtenu pendant le dernier milliard d'années pour chaque nuage, ne peut pas suffire à reconnaître les nuages les plus représentatifs. Si oui, alors le nuage A semble de loin le plus apte à injecter de nos jours des comètes comme nous les observons. Le nuage F est aussi assez proche de la réalité mais se vide trop vite ; il lui faudrait une population nettement supérieure à celle couramment adoptée pour parvenir à expliquer le flux actuel.

b) estimation de la population

La population actuelle N_a doit vérifier

$$N_a \times P_{pla} (t = 4 \cdot 10^9 \text{ ans}) = \mathcal{F} \quad (\text{eq. (II)})$$

et nous avons vu dans le II-2 que le flux était supposé être de 60 comètes par an.

$P_{pla} (t = 4 \cdot 10^9 \text{ ans})$ correspond au flux obtenu à la fin de la simulation. Nous pouvons donc avoir une estimation de la population actuelle pour chaque nuage. Par ailleurs, pour chacun de ces nuages, connaissant la probabilité de survie nous pouvons remonter à la population initiale N_i .

NUAGE	A	B	C	D	G	MOYENNE
N_a en 10^{12}	1.8	1.1	1.8	4.6	1.5	2.16 ± 1
N_i en 10^{12}	13	18	16	8	9.3	12.8 ± 4

TAB (2). Estimation de la population actuelle et initiale pour différents nuages.

Nous avons omis les nuages E et F parce qu'ils n'ont donné aucune planétaire durant le dernier milliard d'années.

Il est curieux de constater que cette population ne dépend pas énormément de l'allure du nuage. Le nombre actuel de comètes est d'environ deux fois supérieur à celui évalué par Weissman.

En résumé, la population actuelle peut être estimée à $(2 \pm 1) 10^{12}$ comètes et la population initiale à $(1.3 \pm 0.4) 10^{13}$ comètes.

Nous avons vu que le taux de stellaires actuellement pouvait être estimé à $2.5 10^{-10}$ par an et par comète, quant aux comètes éjectées du système solaire, constituant un phénomène indépendant du temps écoulé, leur taux peut être égal à $0.09 / 4.5 10^9$ soit à $2 10^{-11}$ par comète et par an.

Dans ce cas, il y aurait par an, environ 500 comètes emportées par les marées galactiques, 40 mises sur orbites hyperboliques et 60 planétaires.

Il est fréquent de traduire la population du nuage en masse terrestre. Bien que la connaissance de la composition et de la taille des comètes soit suffisamment incertaine pour que cette évaluation ne paraisse pas douteuse, cette unité de mesure est intéressante pour des raisons de cosmogonie.

Supposons donc qu'une comète soit une boule de glace d'un kilomètre de rayon, sa masse est donc $4.2 10^{15}$ g. Sachant que la masse de la Terre est $6 10^{27}$ g., la masse initiale du nuage était environ $10 M_{\odot}$, et actuellement $1.5 M_{\odot}$.

Comètes interstellaires

L'énorme quantité de comètes perdues par an, mérite réflexion, d'une part sur la densité actuelle des comètes interstellaires, d'autre part sur le nombre de comètes d'origine interstellaire pouvant avoir été capturées par le Soleil.

En effet, si nous supposons grossièrement que toutes les étoiles du voisinage solaire perdent comme le Soleil, environ 500 comètes par an, alors sachant qu'il y a une étoile pour 10 pc^3 , nous trouvons que la densité de comète interstellaire s'accroît de $50/\text{pc}^3$ par an. Si nous appelons ρ_c la densité de comètes dans l'espace nous avons donc $\rho_c = 50 T$ où T est l'âge au moment considéré du système solaire.

D'autre part, nous arrivons à une densité actuelle de $2.25 \cdot 10^{11}$ comètes/pc³. Or, la sphère d'attraction d'une étoile comme le Soleil de rayon 1 pc, balaie par an un volume de $5 \cdot 10^{-5}$ pc³ (πV_*), ce qui signifie qu'actuellement le Soleil rencontre environ 10^7 comètes par an.

D'autre part, le Soleil depuis T années a rencontré N_C comètes où $N_C = \rho_C \pi V_* T$, à moins de 1 pc soit $50 V_* T^2$ ou $6.4 \cdot 10^{16}$ comètes. Si nous supposons comme Valtonen et Innanen (1982) que la probabilité de capture d'une comète interstellaire est de $2 \cdot 10^{-13}$ par comète, alors nous pouvons espérer posséder environ 10^4 comètes d'origine interstellaire.

En conclusion, si ce raisonnement grossier n'est pas trop éloigné de la réalité, autant la densité de comètes interstellaires est élevée, autant la proportion capturée par le Soleil reste négligeable devant la population présumée du nuage.

*

IV. ETUDE ANALYTIQUE DES PERTURBATIONS STELLAIRES ET APPLICATIONS

Après avoir étudié les deux cas limites (passages proches et passages lointains), nous allons essayer de donner une expression analytique de l'espérance des variations de vitesses causées par les passages d'étoiles à proximité du voisinage solaire, sur les orbites cométaires.

Les raisons en sont nombreuses : nous verrons qu'il est alors facile d'interpréter certains résultats, de comprendre l'évolution dynamique du nuage ou d'en prévoir les conséquences.

Mise à part l'intérêt intellectuel manifeste, il est aussi important d'avoir une expression exacte de la loi de probabilité de l'impulsion. En effet, à ce moment là, nous pourrions générer les perturbations stellaires de façon exacte et alléger de façon considérable toutes simulations futures. Celles-ci pourront alors tenir compte d'un nombre de comètes beaucoup plus important, ce qui permettra d'obtenir des résultats plus fins.

A chaque passage d'étoiles et cela pour chaque comète, nous avons calculé les composantes de la variation de vitesse dans le repère lié à la comète et dans le repère intrinsèque de base.

Nous avons pu ainsi, obtenir la fonction de distribution de ces composantes et en calculer l'espérance, l'écart type, les moments d'ordre 3 et 4, pour une rencontre et cela à partir d'environ un million de cas.

Nous avons ainsi obtenu une série de courbes, parfaitement symétriques en zéro, identiques au sein d'un même nuage et très proches d'allure d'un nuage à l'autre. Seule la coordonnée le long du rayon vecteur est toujours positive mais son espérance ne dépasse jamais 1 cm/s.

Le fait le plus marquant est la grande différence entre ces courbes et les gaussiennes employées jusqu'à maintenant.

De façon générale, la variance d'une coordonnée quelconque de l'impulsion sur l'intervalle $[-1 \text{ m/s}, 1 \text{ m/s}]$ est de l'ordre de 300 (cm/s)^2 et le moment d'ordre 4 de l'ordre de 10^6 (cm/s)^4 . Dans ce cas le coefficient d'aplatissement de Fisher** est positif, la fonction de distribution a donc des "ailes" plus étendues que dans le cas d'une distribution gaussienne.

Ne pas tenir compte de l'effet différentiel surestime énormément l'effet d'une rencontre. C'est pourquoi il fallait s'attendre à une distribution si serrée en 0. (fig. (1)). Par ailleurs nous allons voir que les fonctions de distributions ne répondent pas aux hypothèses du théorème central limite car leur comportement asymptotique interdit la convergence sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$.

Les quatre fonctions de distribution que l'on a représentées, correspondent à quatre nuages de " X_m croissant" (cf. Tab.III-1). Nous montrerons qu'il y a une probabilité de $1 - \frac{1}{\pi}$ (0.68) pour qu'une coordonnée de l'impulsion se trouve entre $-X_m$ et $+X_m$ et que X_m ne dépend que de la distance moyenne de la comète au Soleil.

** On appelle μ_n le moment d'ordre n , $E \left[(x - m)^n \right]$, où m est l'espérance de la variable aléatoire x . Dans ce cas, le coefficient d'aplatissement de Fisher est $\gamma = \mu_4 / \mu_2^2 - 3$. S'il est nul, alors la fonction de distribution de x a le même aplatissement qu'une gaussienne, s'il est négatif, celle-ci est plus aplatie qu'une gaussienne, s'il est positif celle-ci est moins aplatie, plus pointue.

L'étude théorique exacte de ces fonctions de distributions amène à de très lourds calculs, mais les deux cas limites (passages proches - passages lointains) semblent être en très bon accord avec la réalité et sont susceptibles d'expliquer beaucoup de résultats.

Nous en détaillerons la première partie mais indiquerons juste le procédé et les résultats de la seconde, ceci pour éviter de long développement de calcul.

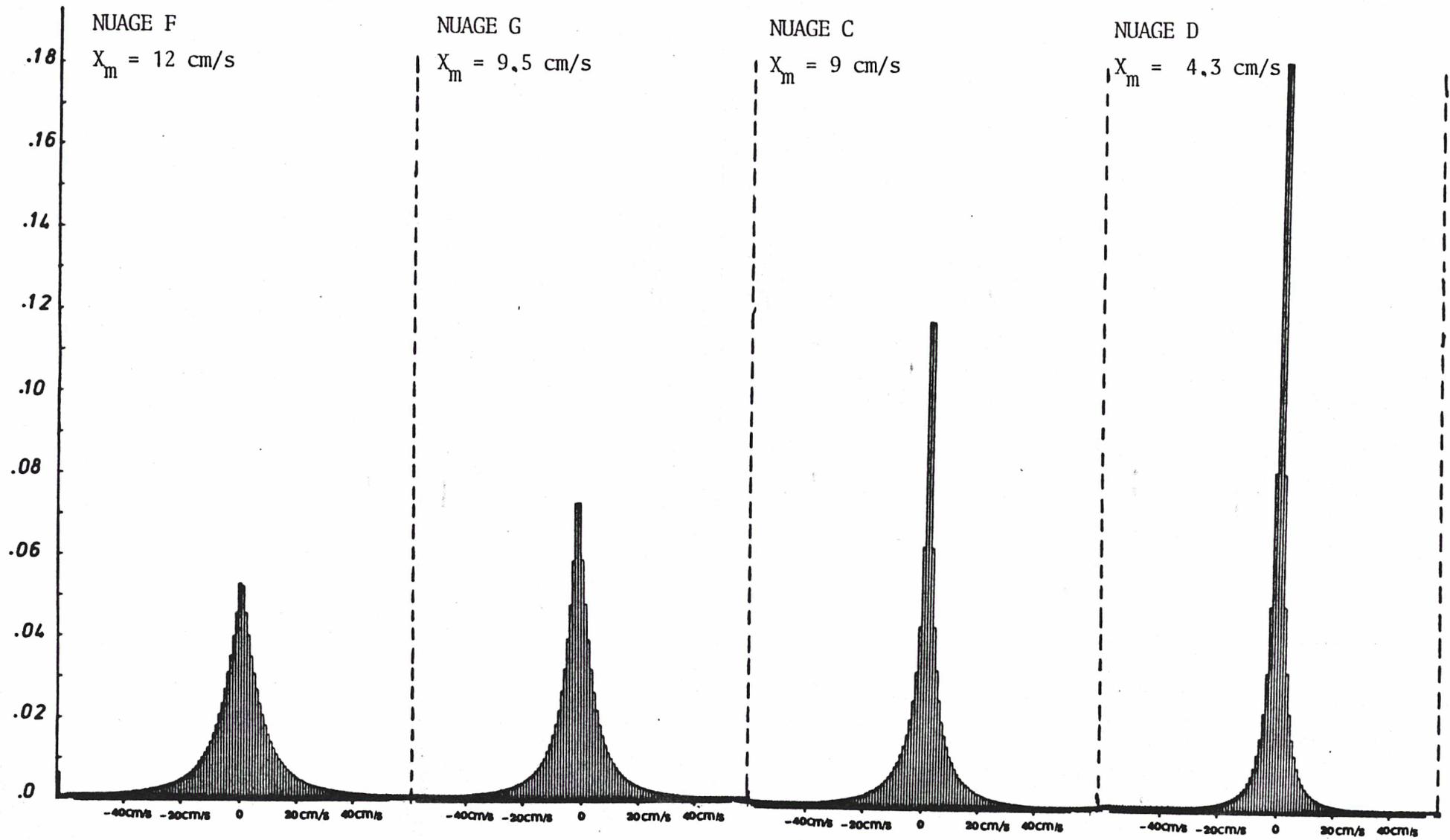


FIG (1). Distribution de la perturbation de vitesse pour quatre nuages.

1. PASSAGES PROCHES

1.1. Distribution de l'impulsion

Par passages proches, nous entendons passages à moins d'une certaine distance notée R_M , du Soleil ou de la comète, en deça de laquelle l'effet différentiel est négligeable.

$$\text{Dans ce cas l'impulsion s'écrit } \vec{I}_p = \frac{2GM_*}{V_* R^2} \vec{R} \quad (1)$$

Que R soit mesuré à partir du Soleil ou à partir de la comète, il vérifie toujours $R = R_M \sqrt{u}$, où u est uniformément réparti de 0 à 1.

$$\text{Son module s'écrit donc } I_p = \frac{2GM_*}{V_* R_M \sqrt{u}}$$

Ce module est forcément supérieur à $\frac{2GM_*}{V_* R_M}$ que nous noterons dorénavant a .

I_p est une fonction de la variable aléatoire u , sa fonction de distribution f vérifie :

$$f(I_p) dI_p = \frac{\varphi(u)}{\left(\frac{dI_p}{du}\right)} du \quad \text{où } \varphi(u) \text{ est celle de } u, \varphi(u) = 1$$

$$\text{Soit } \boxed{\forall I_p \in [a, +\infty], f(I_p) dI_p = \frac{2a^2}{I_p^3} dI_p} \quad (2)$$

Remarques - L'espérance de I_p est $\int_a^{+\infty} I_p f(I_p) dI_p = 2a$ (3)

- Cette distribution n'admet ni d'écart type ni moment d'ordre supérieur, car les intégrales alors divergent.

- De la fonction de distribution, on déduit facilement la loi de

probabilité, qui nous sera utile plus tard :

$$P (I_p > I_0) = \frac{a^2}{I_0^2} \quad (\text{On vérifie : } P (I_p > a) = 1) \quad (4)$$

1.2. Fonction de distribution d'une coordonnée de l'impulsion

Problème Connaissant la fonction de distribution de I quelle est celle de ses composantes par rapport à un repère donné ?

Par le calcul direct, on peut montrer que cette distribution est isotrope. Si elle est connue pour l'être, on peut directement écrire :

$$J f (\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma = f (I) dI f (\Omega) d\Omega$$

où J est le jacobien du changement de variable $(I, \Omega) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$ et $f (\Omega) = \frac{1}{4\pi}$.

L'équation (2) donnant f (I), on obtient finalement :

$$f (\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma = \frac{2 a^2}{4 \pi} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5)$$

Pour connaître la distribution marginale de α , il suffit d'intégrer (5) par rapport à β, γ .

Après avoir posé $\rho^2 = \beta^2 + \gamma^2$, nous obtenons

$$f (\alpha) = \frac{- a^2}{3} \left[\frac{1}{(\alpha^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{\rho_m}^{\rho_M}$$

$\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}$ représentant l'impulsion est donc compris entre a et $+\infty$.

Deux cas se présentent :

a) $|\alpha| > a$ dans ce cas $\rho_m^2 = 0$ et $\rho_M^2 = +\infty$

alors $f (\alpha) = \frac{a^2}{3 \alpha^2}$

b) $|\alpha| < a$

alors $\rho_m^2 = a^2 - \alpha^2$ et $\rho_M^2 = +\infty$

d'où $f(\alpha) = \frac{1}{3a} = \text{cte}$

Distribution de vitesse dans le cas de passages proches

si $|\alpha| < a$ $f(\alpha) = \frac{1}{3a}$

si $|\alpha| > a$ $f(\alpha) = \frac{a^2}{3\alpha^3}$

(6)

où $a = \frac{2GM_*}{V_* R_M}$, impulsion minimale correspondant à l'impact le plus éloigné autorisé.

Nous n'avons pas, ici non plus, d'écart type, nous ne pouvons en aucun cas appliquer le théorème central limite et donc affirmer qu'après N passages la distribution sera gaussienne.



FIG (2). Distribution de la perturbation de vitesse dans le cas où l'on ne tient pas compte de l'effet différentiel.

La figure (2) a été obtenue par simulation, pour 10^5 rencontres nous avons pris l'équation (1) pour impulsion. Ici R_M valait 200 000 UA, donc $a = 44$ cm/s,

le système d'équation (6) montre que si $|\alpha| < 44$ cm/s alors $f(\alpha) = 0.0075$,

$$\text{sinon } f(\alpha) = \frac{1.9 \cdot 10^{-5}}{\alpha^3} .$$

1.3. Probabilité pour qu'une comète soit éjectée

A une distance ρ du Soleil, la vitesse d'évasion est $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}}$. Nous avons vu dans le I qu'une comète passe le plus clair de son temps en des lieux où sa vitesse est de l'ordre de m/s, donc où sa vitesse est négligeable devant la vitesse d'éjection du lieu.

Dans ce cas, pour procurer à une comète cette impulsion, une étoile doit passer à moins de $\frac{\sqrt{2\mu\rho}}{V_*}$ du Soleil ou de la comète.

A 40 000 UA du Soleil, cette distance est d'environ 400 UA, il s'agit donc de passages proches.

Nous venons de remarquer (eq. 4) que la probabilité d'obtenir une impulsion supérieure à une vitesse donnée I est $\frac{a^2}{I^2}$. La probabilité d'être éjectée est

$$\text{donc } \frac{a^2 \rho}{2\mu} .$$

La probabilité de ne pas être éjectée après N passages : $(1 - \frac{a^2 \rho}{2\mu})^N$.

La probabilité d'être éjectée en moins de N passages est donc $1 - (1 - \frac{a^2 \rho}{2\mu})^N$.

N est le nombre d'étoiles passant à moins de R_M de la comète $N = k R_M^2 t$ (eq.II.1)

(Nous avons interdit de telle distance au Soleil).

En remplaçant a et N par leur valeur alors

$$P_{eje} = 1 - \left(1 - \frac{2(GM_*)^2 \rho}{R_M^2 V_*^2 \mu} \right)^{kt R_M^2} .$$

R_M étant très grand, nous pouvons écrire :

$$\boxed{P_{eje} = 1 - \exp(-\lambda \rho t)} \quad (7)$$

$$\text{où } \lambda = \frac{2(GM_*)}{V_*^2} k = 4.5 \cdot 10^{-16} \text{ UA}^{-1} \text{ an}^{-1}.$$

Pour $t \simeq 4.5 \cdot 10^9$ ans, et $\rho = 40\,000$ UA, nous trouvons 0.09 ce qui est en très bon accord avec la simulation. Il y a donc 2 % de comètes éjectées par milliards d'années.

Cette probabilité n'est rien d'autre qu'une loi d'attente exponentielle, de paramètres $1/\lambda\rho$, traduisant la loi de probabilité de survie d'un phénomène de durée de vie moyenne $1/\lambda\rho$. En poussant la comparaison avec les systèmes d'attente poissoniens, nous pouvons affirmer que pendant le temps t , il y a en moyenne $n = Nt\lambda\rho$ éjections (si N est le nombre de comètes du nuage) et que la probabilité qu'il y ait, pendant de même temps, exactement k éjections est $\frac{n^k}{k!} e^{-n}$.

2. PASSAGES LOINTAINS

2.1. Expression de l'impulsion

$$\vec{I} = K \left(\frac{\vec{d}}{d^2} - \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^2} \right) \quad (\text{cf. Chapitre I - Fig. (2)}).$$

avec $K = \frac{2GM_{\star}}{V_{\star}}$

Δ et d étant les distances d'impact respectivement du Soleil et de la comète, nous comprenons que si le passage de l'étoile s'effectue loin des deux alors Δ et d sont du même ordre de grandeur et \vec{I} est en 0 ($\vec{\Delta} - \vec{d}$). Ecrivons donc $\vec{d} = \vec{\Delta} + \vec{\delta}$ et cherchons l'expression de $\vec{\delta}$.

Nous avons la relation vectorielle $\vec{d} = \vec{CE}_C = \vec{CS} + \vec{SE}_S + \vec{E}_S \vec{E}_C$

où $\vec{d} = -\vec{\rho} + \vec{\Delta} + \vec{V}_{\star} t_c$. (Figure I-2).

t_c est le moment où l'étoile passe au plus près de la comète. Par construction, nous avons $\vec{\Delta} \cdot \vec{V}_{\star} = 0$ et $\vec{d} \cdot \vec{V}_{\star} = 0$.

En multipliant la dernière équation par \vec{V}_{\star} , nous obtenons $t_c = \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{V}_{\star})}{V_{\star}^2}$, qui

reporté dans l'expression de \vec{d} entraîne :

$$\vec{\delta} = -\vec{\rho} + \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{V}_{\star})}{V_{\star}^2} \vec{V}_{\star}$$

Cette expression vectorielle est assez intéressante dans la mesure où elle est assez simple et tout le temps valable.

Nous pouvons développer \vec{I} en fonction de δ et finalement obtenir :

$$\vec{I}_1 = K \left(-\frac{\vec{\rho}}{\Delta^2} + \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{V}_{\star}) \vec{V}_{\star}}{V_{\star}^2 \Delta^2} + \frac{2(\vec{\Delta} \cdot \vec{\rho}) \cdot \vec{\Delta}}{\Delta^4} \right)$$

L'indice 1 étant pour noter qu'il s'agit d'un passage lointain.

Les vecteurs $\vec{\Delta}$ et \vec{V}_* ont des directions isotropes dans l'espace, l'un par construction, l'un par la nature des passages. Seul le vecteur $-\frac{K\rho}{\Delta^2}$ apporte un effet systématique, donc l'espérance, nous l'avons vu est de l'ordre du cm/s.

Le carré de la norme de I s'écrit
$$\frac{\rho^2}{\Delta^4} - \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{V}_*)^2}{V_*^2 \Delta^4}$$

Il existe θ , tel que $\vec{\rho} \cdot \vec{V}_* = \rho V_* \sin \theta$, θ est l'angle entre le rayon vecteur de la comète et le plan orthogonal à la distance de l'étoile. Nous obtenons finalement

$$I = \frac{K \rho \cos \theta}{\Delta^2} \quad (8)$$

Remarque - On montre facilement dans le cas général que $I = \frac{K \rho \cos \theta}{d \Delta}$. Dans le

cas de passages lointains d tend vers Δ et l'on retrouve l'équation (8). Dans le cas général $\vec{\delta}$ étant un vecteur de direction aléatoire, d reste en moyenne égal à Δ , si bien que cette expression simplifiée admet un très large domaine de validité et représente très bien les valeurs numériques obtenues par la simulation.

2.2. Fonction de distribution de l'impulsion

A chaque trajectoire d'étoile correspond un référentiel héliocentrique unique. Il suffit de choisir (Sz) parallèle à la trajectoire de l'étoile et de choisir le plan (xSy) tel que (Sx) contienne un point de la trajectoire.

Dans ce repère, la comète est repérée en coordonnées sphériques par (ρ, θ, μ) où θ est l'angle défini précédemment et où μ appartient à (xSy).

Puisque la trajectoire de l'étoile n'a pas de direction privilégiée, il faut s'attendre à ce que θ et μ soient répartis uniformément sur un grand nombre d'étoiles.

On peut alors employer un artifice de calcul qui consiste à considérer I comme la valeur absolue d'une des coordonnées d'un vecteur plan X de norme $\frac{K \rho}{\Delta^2}$.

$$\text{Poson } X_m = \frac{K \rho}{\Delta^2} \quad (9)$$

Sachant que $\Delta = \Delta_M \sqrt{u}$, nous obtenons $X = \frac{X_m}{u}$.

N'oublions pas que ceci est valable sur un certain domaine, limité aussi par une distance minimale d'approche en deça de laquelle l'approximation du "dipôle" n'est plus valable. Cette distance correspondra à une impulsion maximale notée X_M .

La fonction de distribution sur le domaine (X_m, X_M) est donc

$$f(X) dX = \left(\frac{1}{X_m} - \frac{1}{X_M} \right)^{-1} \frac{X_m}{X^2} dX \approx \frac{X_m}{X^2} dX.$$

Si X a pour coordonnée (I, J) , la fonction de distribution du couple vérifie

$$f(I, J) dI dJ = X_m \frac{XdX d\theta}{X^3 \pi/2} = \frac{2X_m}{\pi} \frac{dI dJ}{(I^2 + J^2)^{3/2}}$$

La loi marginale de I s'écrit alors

$$f(I) dI = \frac{2}{\pi} \frac{X_m}{I^2} \left[\frac{J}{\sqrt{I^2 + J^2}} \right]_{J_m}^{J_M} dI$$

avec $X_m^2 < I^2 + J^2 < X_M^2$.

- si $I < X_m$, alors $J_m^2 = X_m^2 - I^2$ et $J_M^2 = X_M^2 - I^2$

sur cet intervalle, I est inférieur à X_M , nous pouvons alors écrire directement

$$f(I) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{I^2} (X_m - \sqrt{X_m^2 - I^2}) \quad (10)$$

- si $I > X_m$, alors $J_m = 0$ et $J_M^2 = X_M^2 - I^2$

$$\text{et } f(I) = \frac{2 X_m}{\pi I^2} \left(\frac{\sqrt{X_M^2 - I^2}}{X_M} \right) \quad (11)$$

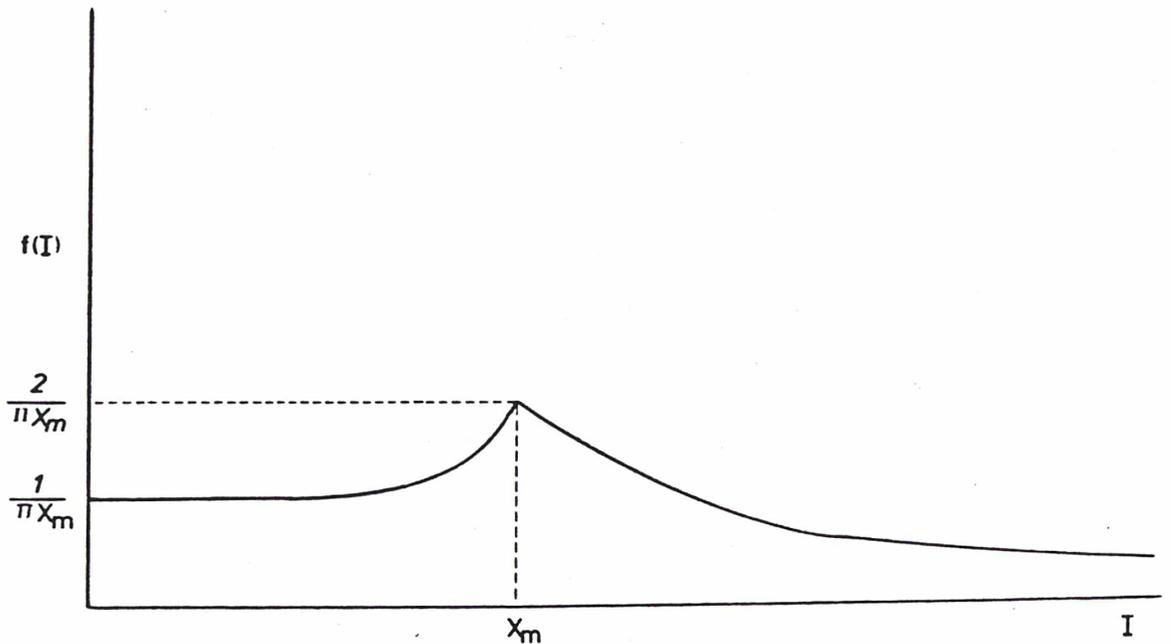


FIG (3). Fonction de distribution de l'impulsion dans le cas de passages lointains.

Remarques - La probabilité que I soit supérieur à X_m est donnée par l'intégrale de (11) et vaut $2/\pi$.

- L'espérance de I est donnée par l'intégrale de $I f(I)$ sur les deux domaines avec un développement limité au voisinage de $I = 0$, nous obtenons

$$E(I) = \frac{2 X_m}{\pi} \left(\frac{\rho^2}{2 \Delta^2} - \ln \frac{\rho}{\Delta} \right), \quad (12)$$

au cinquième ordre près en $\frac{\rho}{\Delta}$.

2.3. Fonction de distribution des coordonnées de l'impulsion

Nous cherchons maintenant la fonction de distribution d'une composante dont nous connaissons la distribution de la norme.

Il faut donc chercher la loi de distribution du triplet (α, β, γ) puis la loi marginale de l'un d'entre eux. Dans le cas où la norme est supérieure à X_m , il faut distinguer deux cas selon que α est ou n'est pas supérieur à X_m (comme dans le 1.2.). Dans le cas contraire ($I < X_m$) il suffira d'intégrer la loi de distribution du triplet et α sera évidemment toujours inférieur à X_m .

Dans le tableau (1) où nous résumons ces résultats, on appelle $P(x)$ la probabilité que x soit dans un intervalle donné et $f(x)$ sa fonction de distribution dans cet intervalle. α étant symétrique par rapport à 0, on ne regarde que sur $(0, X_M)$.

	0	X_m	X_M
P (I)	$1 - \frac{2}{\pi}$		$\frac{2}{\pi}$
f (I) dI	$\frac{2}{\pi I^2} \left(X_m - \sqrt{X_m^2 - I^2} \right) dI$		$\frac{2 X_m}{I^2} \left(\frac{\sqrt{X_M^2 - I^2}}{X_M} \right) dI$
P (α)	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}$		$\frac{1}{2\pi}$
f (α) d α	$\frac{d\alpha}{2\pi X_m} + \varphi(\alpha) d\alpha$		$\frac{X_m}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{X_M^2} \right) d\alpha$

$$\text{avec } \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\frac{X_m}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{X_m^2} \right) - \frac{\sqrt{X_m^2 - \alpha^2}}{2\alpha^2} - \frac{1}{4X_m} \ln \left(\frac{X_m - \sqrt{X_m^2 - \alpha^2}}{X_m + \sqrt{X_m^2 - \alpha^2}} \right) \right] d\alpha$$

A chaque nuage correspond une distance moyenne au Soleil ρ , nous connaissons alors $X_m = \frac{K\rho}{\Delta^2}$ pour chaque nuage, donc la loi de densité des composantes des variations de vitesse.

Il est très intéressant de constater que la probabilité qu'une composante soit inférieure à X_m est une constante.

L'allure des courbes (1) donnant plusieurs distributions de ces composantes est alors claire : si le nuage est resserré sur le Soleil, (p.e nuage E), alors X_m est petit (ici 4.3 cm/s). Si le nuage est très dispersé (p.e nuage F), alors X_m est plus grand. (Pour F, $X_m = 12$ cm/s) ; mais dans tous les cas il y a la même probabilité pour que soit inférieur à X_m , donc plus X_m est petit, plus la fonction de distribution correspondante est pointue. Nous avons volontairement oublié le nuage E, dans la mesure où X_m étant de l'ordre de cm/s, la valeur du pic est trois fois plus élevée que pour D.

Remarque - Ces fonctions de distributions sont très éloignées des gaussiennes, et il est délicat d'en traduire la dispersion. Mais X_m peut être vu par analogie à un écart type. Nous savons que si nous avons une loi gaussienne la probabilité de tirer une valeur comprise entre $\pm \sigma$ est 0.6826, or ici la probabilité de tirer α entre $\pm X_m$ est $1 - \frac{1}{\pi}$ c'est à dire 0.6817.

2.4. Evaluation de l'apport des étoiles passant au delà de 200 000 UA

Dans toute la simulation, nous n'avons pris en compte que les étoiles traversant une sphère de 200 000 UA de rayon. Nous sommes maintenant apte à en évaluer la conséquence. Dans ce cas, il ne s'agit exclusivement que de passages lointains. Nous pouvons donc appliquer nos derniers résultats.

On ne considère que les N étoiles passant entre R_a et R_b , dans ce cas l'impulsion est toujours inférieure à $X_M = \frac{K\rho}{R_a^2}$, et X_m vaut $\frac{K\rho}{R_b^2}$.

La projection sur un axe quelconque a une probabilité $1 - \frac{2}{\pi}$ d'être comprise entre 0 et X_a , et $\frac{2}{\pi}$ entre X_a et X_b .

Nous pouvons donc encadrer la perturbation totale causée par N étoiles

$$N \left(0, X_b^2 + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) X_a^2 \right) < \sigma^2 < N \left(\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) X_b^2 + \frac{2}{\pi} X_a^2 \right)$$

-Prenons $R_a = 200\ 000$ UA et $R_b = 250\ 000$ UA,
alors $N \simeq 9\ 000$ et (11) devient $6.7\ \text{m/s} < \sigma < 7.4\ \text{m/s}$.

Si maintenant $R_a = 250\ 000$ UA et $R_b = 300\ 000$ UA (11) devient $4\ \text{m/s} < \sigma < 6\ \text{m/s}$

Nous avons remarqué que l'espérance numérique du carré de l'impulsion était de l'ordre de $300\ (\text{cm/s})^2$ par étoiles, soit d'environ $26\ \text{m/s}$ pour toute la simulation. En mettant la distance maximale de passage à $300\ 000$ UA, nous aurions obtenu $27\ \text{m/s}$. Compte tenu de l'alourdissement considérable du temps de calcul (il y aurait eu deux fois plus d'étoiles), il paraît légitime de n'avoir compté que les étoiles passant à moins de $200\ 000$ UA.

3. DISPERSION ET STABILITE

3.1. Dispersion

Il serait souhaitable , de pouvoir évaluer l'espérance de la perturbation causée par l'ensemble des étoiles passant pendant un intervalle donné. Il est alors indispensable de définir ce que l'on pourrait appeler une dispersion.

Toutes les évaluations faites dans des études similaires partent de l'hypothèse que les composantes de l'impulsion sont distribuées de façon gaussienne. Dans ce cas, l'emploi de l'écart type $\sqrt{E(\alpha^2) - E(\alpha)^2}$ est un bon paramètre. Pour les fonctions de distribution que nous avons obtenue, l'écart type perd toute sa signification dans la mesure où l'espérance du carré de l'impulsion tend vers l'infini.

Nous prendrons donc comme paramètre l'espérance de la norme de l'impulsion.

Puisqu'il s'agit en fait, d'un problème de diffusion, nous pouvons nous inspirer d'une définition établie en 1905 par Einstein, pour les mouvements Browniens.

Considérons l'espace des vitesses. Avant le premier passage nous sommes à l'origine, après chaque passage nous faisons un pas d'espérance $E(I)$ dans n'importe quelle direction. Ce que démontre Einstein, c'est que nous obtenons dans ce cas les mêmes résultats que pour un réseau dans l'espace et qu'il n'est même pas nécessaire que la longueur des pas soit uniforme : après n étapes, la distance moyenne à l'origine est égale à la longueur moyenne d'une étape multipliée par \sqrt{n} . Autrement dit, dans l'espace, notre vecteur "changement de vitesse" suit une dérive en \sqrt{n} , alors que son chemin parcouru varie comme n . En fait, on sait maintenant que dans le cas de mouvement Brownien, il faut modifier la formule de la racine carrée, pour pouvoir tenir compte de facteurs comme la température ou la viscosité.

Ici ce type de définition semble particulièrement bien adapté dans la mesure où en plus, le problème est discret.

Evaluons d'abord l'espérance de l'impulsion pour un passage quelconque.

Notre comète est à une distance ρ du Soleil. Supposons alors que tous les passages à moins de $\rho/2$ de la comète ou du Soleil, soient considérés comme proches. Les autres sont considérés comme lointains. Souvenons nous que le nombre d'étoiles traversant une sphère de rayon R est proportionnel à R^2 , dans la mesure où les deux cas mentionnés sont indépendants, nous pouvons écrire que la probabilité P_p qu'un passage soit proche est $2 (\rho^2 / (4 \Delta^2))$, le coefficient 2 vient du fait que l'étoile peut passer près du Soleil comme près de la comète. La probabilité P_l qu'un passage soit lointain est $1 - P_p$.

Nous pouvons alors définir l'espérance de l'impulsion pour un passage :

$$E(I) = P_p E(I_p) + P_l E(I_l).$$

L'équation (3) entraîne :

$$P_p E(I_p) = \frac{2 K \rho}{\Delta^2} = 2 X_m.$$

L'équation (12) :

$$P_l E(I_l) = \frac{2}{\pi} X_m \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \left(\frac{A^2}{2} - \ln A\right) \text{ où } A = \rho / \Delta.$$

Lors d'un passage d'étoiles, une comète située à une distance ρ du Soleil reçoit une impulsion dont l'espérance vérifie :

$$E(I) = \frac{2 K}{\Delta^2} \rho \left[1 + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \left(\frac{A^2}{2} - \ln A\right) \right] \text{ où } A = \frac{\rho}{\Delta}. \quad (13)$$

Les fluctuations du terme non linéaire en ρ peuvent être négligées et l'on peut par conséquent écrire :

$$E(I) = 6.5 \cdot 10^{-6} \rho, \text{ si } \rho \text{ est en UA, alors } E(I) \text{ est en m/s.}$$

Nous retiendrons que $E(I) = C\rho$ avec $C \approx 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ UA}^{-1} \text{ (m/s)}$ (14)

Nous venons de voir que le vecteur impulsion suivait un mouvement Brownien, par conséquent après n passages cette espérance deviendra : $\sqrt{n} E(I)$. L'équation II-1 nous donnant n en fonction du temps, entraîne :

$$E_t(I) = 1.42 \cdot 10^{-8} \sqrt{t} \rho \quad (t \text{ est en année}).$$

Ceci correspond au σ du II établi par Weissman, (nous avons alors $\sigma = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{t}$) ; ici l'espérance est proportionnelle à la distance et est de l'ordre de celle de Weissman pour $\rho = 100 \text{ 000 UA}$.

Nous avons vu dans la partie I que si une perturbation avait lieu à une distance ρ du Soleil, alors les variations des quantités métriques étaient proportionnelles à $\frac{I\rho}{V_c}$ (V_c = vitesse circulaire du lieu) et les variations des quantités non métriques en $\frac{I}{V_c}$. Ici les variations des quantités métriques varient donc en $\rho^{5/2}$ et les quantités non métriques en $\rho^{3/2}$.

Si l'on projette cette impulsion sur trois axes quelconques, alors chaque coordonnée aura une espérance nulle et la même espérance du carré soit $\sqrt{\frac{E(I^2)^2}{3}}$ dans la mesure où $E(I)^2$ est du même ordre que $E(I^2)$. "L'écart type" d'une coordonnée pour un passage est donc de l'ordre de $3.75 \cdot 10^{-6} \rho$. Ceci correspond à ce que l'on a noté σ dans le tableau (1) du III-2. Il est clair que ce σ est proportionnel à X_m . Pour $\rho \approx 45 \text{ 000}$, alors $X_m \approx 10 \text{ cm/s}$ et $\sigma = 17 \text{ cm/s}$, ceci est donc en très bon accord avec les résultats numériques de la simulation. (Dans ce tableau X_m est calculé de façon à ajuster les courbes de la fonction de distribution analytiquement, avec celles obtenues numériquement).

3.2. Stabilité

Nous pouvons maintenant évaluer ce que l'on pourrait appeler la stabilité d'une orbite donnée. Prenons une orbite de demi-grand a , d'excentricité e . La longueur moyenne dans le temps du rayon vecteur est $a(1 + e^2/2)$, la vitesse moyenne \bar{V} est de l'ordre de na , soit $\sqrt{\mu/a}$. Notons ρ cette distance moyenne. Alors $\bar{V} = \sqrt{\mu/\rho} \times \sqrt{1+e^2/2}$ or $\sqrt{1+\frac{e^2}{2}} \in [1 ; 1.2]$ nous pouvons donc écrire

$\bar{V} = \sqrt{\mu/\rho}$, sachant que $E(I) = C\rho$.

Nous pouvons écrire : $d\bar{V} \sim E(I) = C\rho = \frac{C\mu}{V^2}$, où C est la constante de eq (14).

$$\text{alors } d\left(\frac{\bar{V}^3}{3 C\mu}\right) = 1$$

$$\text{Soit } d\left(\frac{\sqrt{\mu}}{3 C \rho^{3/2}}\right) = 1 \quad (15)$$

A une orbite du plan (0, e) correspond une quantité z, vérifiant

$$z = \frac{\sqrt{\mu}}{3 C \rho^{3/2}} \quad \text{et } dz = 1 \quad (\text{variation pour une rencontre}) \quad (16)$$

Traduisons ce résultat en terme probabiliste : A une orbite cométaire correspond z_0 à $t = 0$, après le premier passage l'orbite est perturbée et son paramètre z_1 vérifie $z_1 = z_0 \pm 1$.

Nous pouvons alors appliquer tous les résultats connus des marches au hasard uniquement dans la mesure où l'on sait que pour que ces résultats soient applicables il suffit que la longueur "des pas" ait une longueur moyenne.

La stabilité relative des zones est très claire sur le figure (4). A ρ correspond z, après une perturbation, z est en $z \pm 1$, le ρ correspondant est alors compris entre ρ_- et ρ_+ .

Intuitivement, on comprend que les zones en deça de 30 000 UA sont nettement plus stables que celles au delà. Tant que la pente est en valeur absolue supérieure à 1, les variations de ρ restent faibles, mais dès que celle-ci est inférieure à 1, la moindre variation de z entraîne des perturbations considérables.

Après n pas, la distance moyenne à l'origine est $\sqrt{2n/\tau}$. Après les 22 000 passages, cette distance moyenne est donc 118. Sur la figure (4) nous avons indiqué l'intervalle moyen dans lequel se trouvera ρ final pour deux valeurs distinctes initiales.

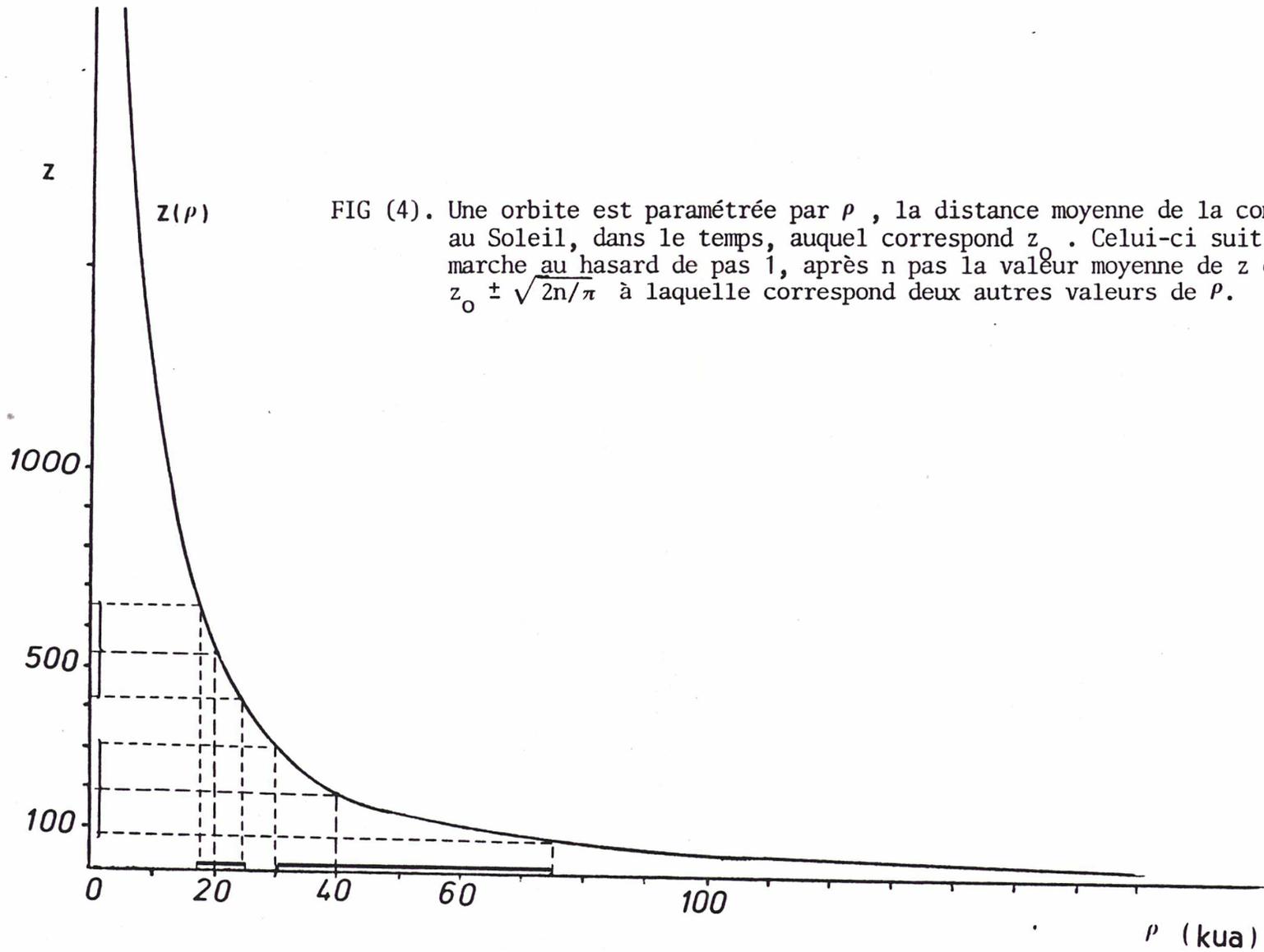


FIG (4). Une orbite est paramétrée par ρ , la distance moyenne de la comète au Soleil, dans le temps, auquel correspond z_0 . Celui-ci suit une marche au hasard de pas 1, après n pas la valeur moyenne de z est $z_0 \pm \sqrt{2n/\pi}$ à laquelle correspond deux autres valeurs de ρ .

En terme probabiliste, le z pour 200 000 UA est une barrière absorbante. Nous pouvons alors écrire que le flux de comètes par unité de "passages d'étoiles" est la probabilité $u_{z,n}$ d'atteindre cette borne en n coups.

$$\text{Soit } u_{z,n} = \frac{(z - z_0)}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{2n}\right) \text{ (annexe B)} \quad (17)$$

où $z_0 = z(200\ 000) = 17$.

Les courbes de l'annexe B sont donc à comparer aux courbes du III-2, donnant le flux de stellaires.

Prenons par exemple une comète typique du nuage A.

Son aphélie vaut 45 000 UA, son excentricité 1. Sa distance moyenne au Soleil est donc 34 000 UA, l'équation (16) indique alors que $z = 240$. La figure (4) montre que ρ final sera en moyenne compris entre 26 000 UA et 55 000 UA. L'équation (17) nous indique que sa probabilité actuelle d'être stellaire est d'environ $1.5 \cdot 10^{-5}$ par passage. Autrement dit, le flux actuel de stellaire est $1.5 \cdot 10^{-5}$ par passage, soit $8 \cdot 10^{-11}$ par an.

Notons au passage que ce flux est maximum en $z^2/3$, c'est à dire aux alentours du vingt millième passage, donc maintenant.

Le même raisonnement appliqué au nuage B ($e \approx 0.3$) montre que le nuage est réparti de 27 000 UA à 60 000 UA et que le flux actuel est $2.1 \cdot 10^{-10}$ par comète et par an. (Son maximum est atteint après 15 000 passages).

A partir des courbes de l'annexe B, donnant la probabilité d'être absorbé à une distance z en n coups, nous pouvons constater que plus on est proche initialement de la borne absorbante, plus on a de chance d'être absorbé rapidement. Nous pouvons aussi remarquer que pour plusieurs conditions initiales différentes mais relativement proches, les asymptotes se rejoignent c'est ce qu'il se passe en fin de simulation pour les valeurs initiales de z correspondant à la plupart des nuages. Autrement dit, le flux de stellaires actuel est pratiquement constant pour des distances moyennes initiales variant de 40 000 UA à 60 000 UA.

Ceci explique d'une part qu'il n'y a pas de maximum net sur les courbes du flux du III-2 et d'autre part, que ce flux actuel soit quasiment constant d'un nuage à l'autre.

La valeur numérique de ce flux est $2.6 \cdot 10^{-11}$ par comète et par an et la valeur théorique est entre 10^{-11} et $2.6 \cdot 10^{-11}$. Le modèle de la marche au hasard a donc l'air bien adapté.

Comme nous l'avons remarqué dans le II, il existe une zone autour du Soleil dans laquelle les comètes ne sont pratiquement pas sensibles aux perturbations stellaires, ou en tout cas, pas suffisamment pour que leur orbite soit modifiée de façon substantielle. Si une comète se trouve ou entre dans cette zone, nous pouvons la considérer perdue : sur une très longue échelle de temps elle ne pourra ni en sortir ni intégrer les régions planétaires.

Nous sommes donc plus près de la réalité si nous considérons le problème précédent avec deux barrières absorbantes. Il existe un z minimal correspondant à la distance au delà de laquelle les comètes ne sont plus sensibles à la force d'attraction du Soleil, et il existe un z maximal qui correspond à la distance (à déterminer) en deçà de laquelle les comètes ne sont plus sensibles aux passages d'étoiles.

En appelant n , la distance entre ces deux z , nous pouvons affirmer que :

- La probabilité de sortir de la sphère d'influence du Soleil est $1 - \frac{z}{n}$, celle de sortir de la zone d'influence stellaire est $\frac{z}{n}$.

- La durée moyenne de survie d'une comète est $z(n-z)$.

Nous avons vu dans le III., que si l'aphélie est de l'ordre de 50 000 UA et l'excentricité de l'ordre de 0.3, alors environ 80 % des comètes étaient emportées par les marées galactiques. Une telle orbite a un rayon vecteur moyen de $\frac{Q}{(1+e)}(1 + e^2 / 2)$ c'est à dire de 40 000 UA. Dans ce cas nous trouvons $n \approx 1\ 000$.

L'équation (16) nous indique que dans ce cas ρ vaut 13 000 UA. Les zones où $a(1 + e^2 / 2) < 13\ 000$ UA, ne sont donc pas sensibles aux perturbations stellaires.

Nous pouvons maintenant évaluer la durée de vie moyenne d'une comète d'orbite donnée. Souvenons nous d'un des paradoxes célèbres du problème dit de "ruine" : Si un joueur joue contre quelqu'un d'infiniment riche, ce joueur est certain de perdre, mais la durée moyenne d'une partie est infinie. Bien que les marées galactiques ne soient pas l'unique mécanisme de perte, le problème est similaire dans la mesure où ce mécanisme est de loin le plus impardonnable. Par exemple une comète d'orbite très excentrique, d'aphélie 40 000 UA, a 70 chances sur 100 de devenir stellaire, mais avant elle peut errer pendant 200 000 "passages d'étoiles", soit pendant $4 \cdot 10^{10}$ ans.

3.3. Applications aux planétaires

Intuitivement, on comprend qu'une comète susceptible d'intégrer les régions planétaires ne doit pas être trop près du Soleil, car alors les perturbations ne suffiront jamais à modifier assez le périhélie, mais ne doit pas être trop loin du Soleil, car alors la forte probabilité d'être emportée rend difficile toute autre issue.

Le paramètre approprié, pour traduire l'efficacité d'une zone est la durée de vie moyenne. Une fois que le nuage est "thermalisé", c'est à dire aux environs d'un milliard d'années (tab. (III.1)), les comètes susceptibles d'atteindre les sphères d'influence des planètes sont celles dont la durée de vie n'est pas nulle.

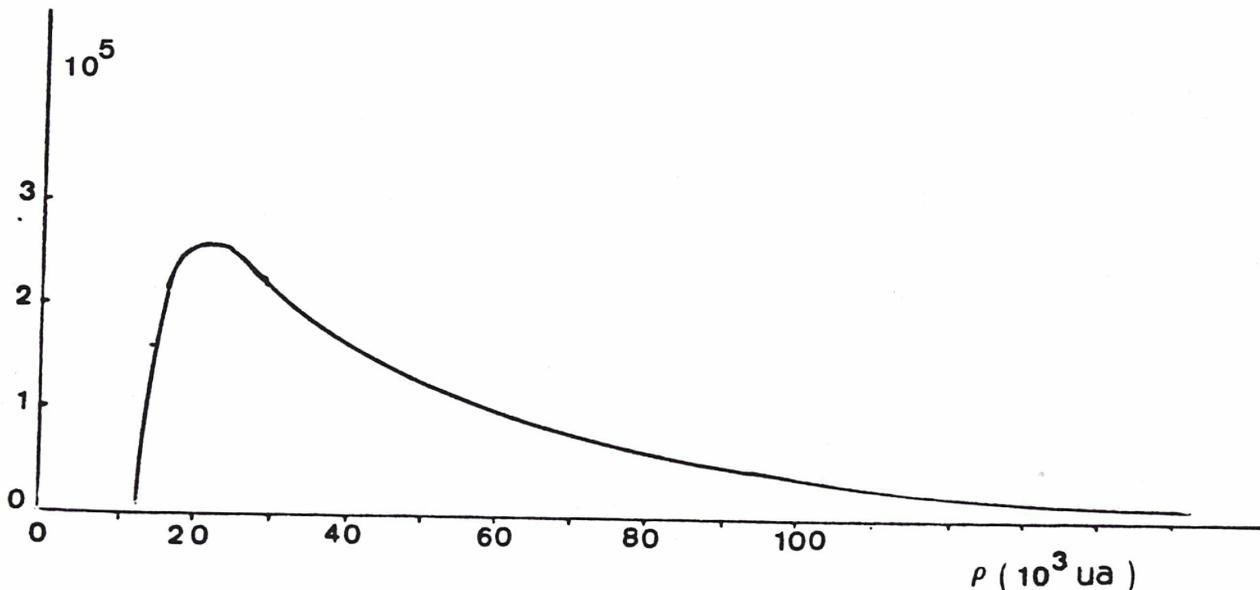


FIG (5). Durée de vie d'une comète, fonction de sa distance moyenne au Soleil, dans le temps. (l'unité de durée de vie est le temps entre deux passages d'étoiles).

La ressemblance entre la figure (5) et l'histogramme du demi-grand axe des planétaires (figure III-13) est notable. En fait cette figure met en évidence les zones de l'espace qui permettent aux comètes y gravitant, de pénétrer dans les régions planétaires.

La figure (5) peut donc être vue comme la probabilité pour une comète d'être capturée par les planètes géantes, après "thermalisation" du nuage. Il existe donc un effet de sélection naturelle, qui nous cache sûrement une partie du nuage.

*

CONCLUSION

La simulation que nous venons d'exposer a l'avantage d'être dégagée de deux des hypothèses communément adoptées qui, nous l'avons vu, n'étaient pas toujours licites.

Les orbites cométaires étaient supposées être très excentriques, dans ce cas il était raisonnable de considérer que la comète passe le plus clair de son temps au voisinage de l'aphélie, toutes les perturbations stellaires avaient donc lieu à ce moment là. Sur ce point nous avons clairement montré que l'excentricité diffuse beaucoup et qu'il y a dans le nuage une proportion non négligeable d'orbites assez circulaires. Par ailleurs, nous avons fait ressortir l'importance de la longitude du lieu de rencontre. Des perturbations à l'aphélie ou bien dans son voisinage immédiat entraînent des changements dans les paramètres orbitaux très différents. Un des points intéressants de ce travail a donc été de mettre en place un modèle où la distribution de la longitude du lieu de rencontre se fait de façon naturelle.

Au niveau des rencontres proprement dites : il est évident qu'une comète est beaucoup plus sensible aux étoiles passant près d'elle qu'aux étoiles passant loin. Ceci a conduit dans les études antérieures à la nôtre à ne tenir compte que des rencontres proches, d'autant plus que dans ce cas le modèle dynamique est relativement simple puisqu'il ne fait intervenir qu'une seule interaction. Là aussi il nous a paru nécessaire de considérer le problème exact, c'est à dire de tenir compte de l'effet différentiel dû à l'interaction "Soleil-étoile" et "comètes-étoile". Nous montrons alors que la distribution des perturbations de vitesse est assez éloignée de la distribution gaussienne, adoptée jusqu'alors. Nos calculs confirment donc le doute émis par Weissman (1980) sur la validité d'une représentation gaussienne pour simuler les impulsions perturbatrices.

Ceci étant, notre étude est loin d'être exhaustive. Rappelons toutefois quelques résultats qui s'en sont dégagés.

Tout d'abord, ce que l'on pourrait appeler le temps de relaxation d'un nuage donné est en général plus court que l'âge du système solaire. A l'heure actuelle le nuage a donc oublié ses conditions initiales. Ceci veut dire, d'une part qu'il semble difficile par le biais de l'étude des orbites que nous observons de remonter à l'origine des comètes, d'autre part que les deux hypothèses de formation envisagées tendent assez vite vers un état commun. Quelque soit le type initial d'orbite que nous leur attribuons, il semble qu'il y ait eu $1.5 \cdot 10^{13}$ comètes à l'origine dont $2 \cdot 10^{12}$ graviteraient encore dans le nuage, ceci étant bien entendu basé sur le flux de comètes entrant dans les régions intérieures du système solaire. Il s'agit clairement d'un problème de diffusion, et par ce biais nous sommes arrivés à une estimation analytique des principaux mécanismes de perte (marées galactiques, éjection sur orbites hyperboliques ou capture par les planètes géantes).

Le point probablement le plus important est que nous soyons arrivés par simulation à "capturer" des comètes dont l'orbite a les caractéristiques des orbites des comètes visibles, une fois que l'on a oté l'effet des perturbations planétaires, ce qui va donc fortement dans le sens de l'existence du nuage de Oort. Notons au passage que la zone de transition entre les régions où les perturbations stellaires sont trop fortes pour qu'une comète y subsiste et celles où les perturbations ne sont pas assez fortes pour faire décroître le périhélie, coïncide avec le pic de la distribution des aphélies des comètes observées. Donc la déduction de Oort, quant à l'existence d'un nuage de comètes, présentant une concentration maximum pour des aphélies de l'ordre de 50 000 UA, ne s'applique en toute rigueur qu'à la composante de ce nuage qui produit les comètes observables. Il est fort probable que le nuage est beaucoup plus homogène dans sa distribution, mais seule une zone de demi-grand axe assez étroite permet aux comètes de pénétrer plus profondément dans les zones intérieures du système solaire. En somme, il y a eu un effet de sélection observationnelle, impossible à éviter car on peut parler que de ce qui est observable, qui empêche de remonter à la structure du nuage à partir des comètes présentes dans la zone planétaire.

Nous avons vu aussi que pour une soixantaine de comètes capturées par les planètes par an, il y en a environ une cinquantaine mises sur orbites hyperboliques et environ dix fois plus qui s'échappent de la sphère d'influence du Soleil. Ceci conduit à une densité de comètes interstellaires actuelle de l'ordre de $2.25 \cdot 10^{11}$ par pc^3 , mais ne suffit tout de même pas à contribuer de façon notable à la population du nuage.

Parallèlement, nous avons obtenu une expression analytique de la distribution des perturbations de vitesse causées par le passage des étoiles. Ceci va permettre dans l'avenir, d'alléger considérablement le coût des simulations qui pourront alors être plus nombreuses. Nous pourrons ainsi voir l'importance de certains paramètres, ou modifier la valeur d'autres, par exemple il pourra être intéressant de considérer des étoiles moins massives (de $0.8 M_{\odot}$ au lieu de 1), qui seront plus réalistes. Nous pourrons, surtout considérer des nuages plus denses et obtenir des résultats plus fins qui permettront d'orienter des études analytiques plus précises. N'oublions pas que l'échantillon de comètes nouvelles observables ne s'agrandit que de trois ou quatre comètes par an.

*

- ANNEXE -

Annexe A : Expression analytique des variations des éléments orbitaux
* Éléments ayant trait à la position du plan
* Éléments ayant trait à la forme de l'orbite
* Expression de ces termes dans le cas de modèle de Weissman.

Annexe B : Marche aléatoire avec une borne absorbante en dimension 1.

Annexe C : Résolution de l'équation de Kepler.

**

- ANNEXE A -

EXPRESSION ANALYTIQUE DES NOUVEAUX ELEMENTS ORBITAUX

A.1. Détermination du nouveau plan de l'orbite

Dans tout ce qui suit, nous appellerons (α, β, γ) les coordonnées de l'impulsion dans le repère tournant lié à la comète.

Depuis 1609 (1^e loi de Kepler), on sait que le mouvement d'un corps soumis à la gravitation est plan. Soit P ce plan avant la perturbation, soit P' ce plan après la perturbation.

Puisque la comète n'a pas bougé pendant la rencontre, son rayon vecteur appartient aux deux plans. On peut donc obtenir P' à partir de P₀ en faisant une rotation d'angle φ autour de \vec{I} .

Dans les nouveaux axes, la vitesse s'écrit

$$X' \vec{I}' + Y' \vec{J}' = \vec{V}'$$

dans l'ancien, au même moment

$$\vec{V}' = (X + \alpha) \vec{I} + (Y + \beta) \vec{J} + \gamma \vec{K}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} X' = X + \alpha & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y' = \sqrt{(Y + \beta)^2 + \gamma^2} & (2) \end{cases}$$

l'angle φ est alors déterminé par (cf. fig.1)

$$\text{tg } \varphi = \frac{\gamma}{Y + \beta} \quad (3)$$

-Si $Y + \beta > 0$ alors $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et est alors du signe de γ .

-Si $Y + \beta < 0$, la perturbation est telle que le sens du mouvement est inversé, φ est alors du signe inverse de γ , mais ce cas est improbable, dans la mesure où β est toujours négligeable devant Y .

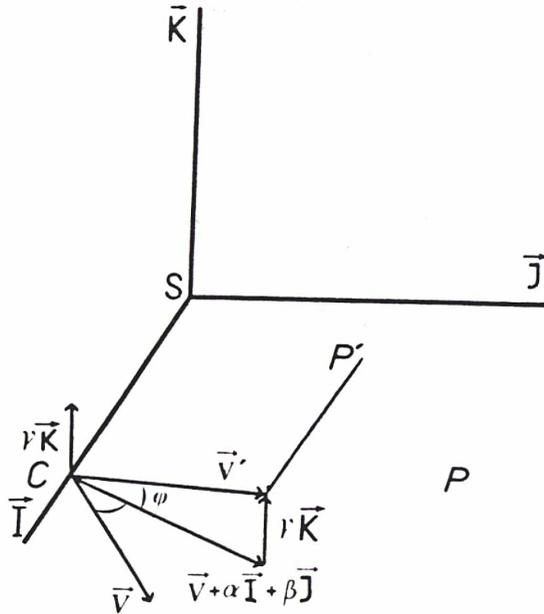


FIG (1).

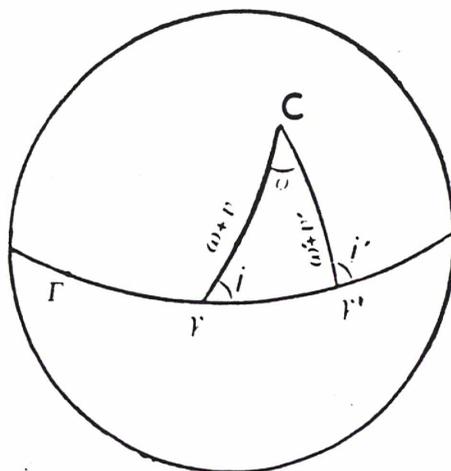
La donnée de cet angle suffit à déterminer par la trigonométrie sphérique tous les autres angles liés à la géométrie du problème.

Considérons une sphère centrée en S, de rayon ρ (cf. Fig.2)

γC représente P

$\gamma' C$ représente P'

S γ et S γ' représentent les lignes des noeuds des 2 plans P et P'.



$$\widehat{\Gamma \gamma} = \Omega$$

$$\widehat{\Gamma \gamma'} = \Omega'$$

FIG (2)

La trigonométrie sphérique nous donne

$$\cos i' = \cos i \cos \varphi - \sin \varphi \cos (\omega + \nu) \sin i$$

$$\begin{cases} \sin (\Omega' - \Omega) \cdot \sin i' = \sin (\omega + \nu) \sin \varphi \\ \cos (\Omega' - \Omega) \cdot \sin i' = \cos \varphi \sin i + \sin \varphi \cos i \cos (\omega + \nu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin (\omega' + \nu') \sin i' = \sin i \sin (\omega + \nu) \\ \cos (\omega' + \nu') \sin i' = \cos i \sin \varphi + \sin i \cos \varphi \cos (\omega + \nu) \end{cases}$$

on pose $\begin{cases} i' = i + \Delta i \\ \omega' + \nu' = \omega + \nu + \Delta (\omega + \nu) \\ \Omega' = \Omega + \Delta \Omega \end{cases}$

En développant au 1er ordre en φ supposé petit on obtient

$$\Delta i = \cos(\omega + \nu) \varphi \tag{4}$$

$$\Delta \Omega = \frac{\sin (\omega + \nu)}{\sin i} \varphi \tag{5}$$

$$\Delta (\omega + \nu) = \frac{- \sin (\omega + \nu)}{\operatorname{tgi}} \varphi \tag{6}$$

Maintenant posons $\operatorname{tg} \varphi \sim \varphi$ et $\frac{\gamma}{\gamma + \beta} \sim \frac{\gamma}{\gamma}$ (4), (5) et (6) combinés avec (3) deviennent :

$$\varphi = \frac{\gamma}{\gamma} \tag{7}$$

$$\Delta i = \cos(\omega + \nu) \frac{\gamma}{\gamma} \tag{8}$$

$$\Delta \Omega = \frac{\sin (\omega + \nu)}{\sin i} \frac{\gamma}{\gamma} \tag{9}$$

$$\Delta (\omega + \nu) = - \frac{\sin (\omega + \nu)}{\operatorname{tgi}} \frac{\gamma}{\gamma} \tag{10}$$

- Si $i = 0$ le rayon vecteur du lieu de la perturbation sera la ligne des noeuds. On obtient (cf. Fig. 2) : $i' = \varphi$; $\Delta \Omega = \omega + \nu$; $\omega' + \nu' = 0$.

A.2. Détermination analytique de a, e, q, Q.

Dans le plan, la perturbation radiale est α (eq.(1))

la perturbation tangentielle vérifie

$$Y' = \sqrt{(Y+\beta)^2 + Y^2} \quad (\text{eq.}(2))$$

soit :

$$Y' = Y \left[\left(1 + \frac{\beta}{Y}\right)^2 + \frac{Y^2}{Y^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= Y \left(1 + \frac{\beta}{Y} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + Y^2}{Y^2} + 0(3)\right)$$

$$\Delta Y = \beta + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{Y} + 0(3) \quad (11)$$

Dans un premier temps nous négligerons les termes de 2ème ordre. Reprenons les équations sans dimension de la première partie 3-1.

$$\tilde{a} = \frac{1}{2 - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2}$$

$$1 - e^2 = \tilde{Y}^2 (2 - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2)$$

$$\text{Nous trouvons da} = \left. \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{X}} \right)_{\alpha=0} \alpha + \left. \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{Y}} \right)_{\beta=0} \beta = \frac{2 \tilde{X} \alpha}{(2 - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2)^2} + \frac{2 \tilde{Y} \beta}{(2 - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2)^2}$$

$$de = \left. \frac{\partial e}{\partial \tilde{X}} \right)_{\alpha=0} \alpha + \left. \frac{\partial e}{\partial \tilde{Y}} \right)_{\beta=0} \beta = \frac{1}{2e} \left(2\tilde{X}\tilde{Y}^2 \alpha + (-2\tilde{Y}(2-\tilde{V}) + 2\tilde{Y}^3) \beta \right)$$

On remplace $2 - \tilde{V}^2$ par $\frac{1}{\tilde{a}}$ et \tilde{Y}^2 par $\tilde{a} (1-e^2)$

$$\text{Nous obtenons} \left\{ \begin{array}{l} d\tilde{a} = 2\tilde{a}^2 (\tilde{X} \alpha + \tilde{Y} \beta) \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} de = \frac{1 - e^2}{e} \tilde{a} \tilde{X} \alpha - \frac{1 - \tilde{a}^2 (1 - e^2)}{\tilde{a} e} \tilde{Y} \beta \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\text{Sachant que} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{q} = \tilde{a} (1 - e) \\ \tilde{Q} = \tilde{a} (1 + e) \end{array} \right.$$

On obtient par substitution

$$d\tilde{q} = \frac{-\tilde{a}^2 (1 - e^2)^2}{e} \tilde{X} \alpha + \frac{(1 - \tilde{a}^2 (1 - e^2)^2)}{e} \tilde{Y} \beta \quad (14)$$

$$d\tilde{Q} = \frac{\tilde{a}^2 (1 + e)^2}{e} \tilde{X} \alpha + \left(\frac{\tilde{a}^2 (1 + e)^2 - 1}{e} \right) \tilde{Y} \beta \quad (15)$$

- Conditions de validité

a) l'orbite initiale est circulaire

On a $e = 0$, $\tilde{a} = 1$, $\tilde{X} = 0$, $\tilde{Y} = 1$.

$$e' \text{ vérifie } e'^2 = 1 - (1 + \beta)^2 (2 - \alpha^2 - (1 + \beta)^2) \\ = \alpha^2 + 4\beta^2 + 0 \quad (3)$$

soit : $e' = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}$

$$\begin{cases} d\tilde{q} = d\tilde{a} - \tilde{a}de \\ d\tilde{Q} = d\tilde{a} + \tilde{a}de \end{cases} \quad \text{avec } d\tilde{a} = 2\beta$$

d'où si l'orbite initiale est circulaire

$$\begin{cases} d\tilde{a} = 2\beta \\ de = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} \\ d\tilde{q} = 2\beta - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} \\ d\tilde{Q} = 2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} \end{cases}$$

Puisque $e = 0$, nous avons implicitement supposé que la petite quantité était e et non plus α, β .

b) la rencontre a lieu lorsque la comète est à son périhélie

Nous avons vu alors $\tilde{X} = 0$, $\tilde{Y} = \sqrt{1 + e}$, $\tilde{a} = \frac{1}{1 - e}$.

On vérifie alors que dq est nul au 1er ordre.

Comme nous l'avons déjà mentionné, ce point fera partie de la nouvelle orbite, le nouveau périhélie sera donc forcément plus près du Soleil. On peut vérifier que dq est toujours négatif et du second ordre.

c) la rencontre a lieu lorsque la comète est à son aphélie

Dans ce cas $\tilde{X} = 0$, $\tilde{Y} = \sqrt{1 - e}$, $\tilde{a} = \frac{1}{1 + e}$

On vérifie que dQ est nul au premier ordre. Avec le même raisonnement que précédemment on s'attend à ce que dQ ne fasse intervenir que des termes du 2ème ordre et soit constamment positif.

d) l'orbite initiale est très excentrique

Une comète évoluant sur une orbite très excentrique restera longtemps au voisinage de son aphélie au $\tilde{X} = 0$ et $\tilde{Y} = \sqrt{1 - e}$, dans ce cas $\tilde{Y}\beta$ est du second ordre et il n'est pas légitime de négliger les termes en β^2 , α^2 et γ^2 .

- Développement au 2ème ordre dans le cas d'une rencontre à l'aphélie

$$\tilde{a} = \frac{1}{2 - \tilde{V}^2}, \text{ on peut vérifier que } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{X}^2} &= 2 \tilde{a}^2 + 8 \tilde{a}^3 \tilde{X}^2 \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{Y}^2} &= 2 \tilde{a}^2 + 8 \tilde{a}^3 \tilde{Y}^2 \\ \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}} &= 8 \tilde{a}^3 \tilde{X} \tilde{Y} \end{aligned} \right\}$$

à l'aphélie $\tilde{X} = 0$, $\tilde{a} = \frac{1}{1+e}$, et $\tilde{Y}^2 = 1 - e$.

Il ne faut pas oublier que β doit être remplacé par $\beta + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{Y}$

alors
$$\tilde{d\tilde{a}} = \frac{2}{(1+e)^2} \left[\tilde{Y} \beta + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{(5 - 3e)}{2(1+e)} \beta^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right] \quad (16)$$

$$* \quad e^2 = 1 - 2 \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\chi}^2 \gamma^2 + \tilde{\gamma}$$

$$e \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \tilde{\chi}^2} \right) + \left(\frac{\partial e}{\partial \tilde{\chi}} \right)^2 = \tilde{\gamma}^2 \implies \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \tilde{\chi}^2} \right) = \frac{\tilde{\gamma}^2}{e} - \frac{\tilde{\chi}^2 \tilde{\gamma}^4}{e^3}$$

$$e \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \tilde{\gamma}^2} \right) + \left(\frac{\partial e}{\partial \tilde{\gamma}} \right)^2 = -2 + 6\tilde{\gamma}^2 + \tilde{\chi}^2$$

$$\implies \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \tilde{\gamma}^2} \right) = \frac{1}{e} (-2 + \tilde{\chi}^2 + 6\tilde{\gamma}^2) - \frac{1}{e^2} (\tilde{\gamma}\tilde{\chi}^2 - 2\tilde{\gamma} + 2\tilde{\gamma}^3)^2$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{de = -2 \tilde{\gamma} \beta + \frac{(1-e)}{2e} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2} \quad (17)$$

$$* \quad d\tilde{Q} = (1+e) d\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} de + d\tilde{\alpha} e$$

Les termes du 1er ordre s'annulent, il ne reste que

$$\text{en } \alpha^2 = \frac{1+e}{(1+e)^2} + \tilde{\alpha} \frac{(1-e)}{2e} = \frac{1}{2e}$$

$$\text{en } \beta^2 = \frac{5-3e}{(1+e)} - \tilde{\alpha} - \frac{4\tilde{\gamma}^2}{(1+e)^2} = \frac{1}{1+e} \left[(4-3e)(1-e) - 4 + 4e \right] = 0$$

$$\text{en } \gamma^2 = \frac{1}{1+e} - \tilde{\alpha} = 0$$

$$\text{d'où } \boxed{d\tilde{Q} = \frac{\alpha^2}{2e}} \quad (18)$$

$$* d\tilde{q} = (1-e) d\tilde{a} - \tilde{a} de - d\tilde{a}de$$

$$\text{Les termes en } \beta = \frac{2(1-e)}{(1+e)^2} \tilde{\gamma} + 2\tilde{a} \tilde{\gamma} = \frac{4\tilde{\gamma}}{(1+e)^2}$$

$$\text{en } \alpha^2 = \frac{(1-e)}{(1+e)^2} - \frac{\tilde{a}(1-e)}{2e} = \frac{-(1-e)^2}{2e(1+e)^2}$$

$$\text{en } \beta^2 = \frac{(1-e)(5-3e)}{(1+e)^3} + \tilde{a} + \frac{4\tilde{\gamma}^2}{(1+e)^2} = \frac{2(5-3e)}{(1+e)^3}$$

$$\text{en } \gamma^2 = \frac{(1-e)}{(1+e)^2} + \tilde{a} = \frac{2}{(1+e)^2}$$

$$d'où \quad d\tilde{q} = \frac{4\tilde{\gamma}}{(1+e)^2} \beta + \frac{2\gamma^2}{(1+e)^2} - \frac{(1-e)^2}{2e(1+e)^2} \alpha^2 + \frac{2(5-3e)}{(1+e)^3} \beta^2 \quad (19)$$

Cas d'une orbite de forte excentricité

$$d\tilde{a} = \frac{1}{2} \tilde{\gamma} \beta + \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$de = -2\tilde{\gamma} \beta - \gamma^2 - \beta^2$$

$$d\tilde{q} = \tilde{\gamma} \beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$$

$$d\tilde{Q} = \frac{\alpha^2}{2}$$

** Si R est la distance à laquelle a lieu la perturbation, il faut diviser $\tilde{a}, \tilde{q}, \tilde{Q}$ par R et α, β, γ par $\sqrt{\frac{\mu}{R}}$ pour rétablir l'homogénéité.

	CAS GENERAL	RENCONTRE A L'APHELIE	RENCONTRE A L'APHELIE & ORBITE TRES EXCENTRIQUE
$d\tilde{a}$	$2\tilde{a}^2 (\tilde{X}\alpha + \tilde{Y}\beta)$	$\frac{2}{(1+e)^2} \left[\tilde{Y}\beta + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{(5-3e)}{2(1+e)}\beta^2 \right]$	$\frac{1}{2}\tilde{Y}\beta + \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \nu^2)$
de	$\frac{(1-e)^2}{e} \tilde{\alpha}\tilde{X}\alpha - \frac{(1-\tilde{a}^2(1-e^2))}{ae} \tilde{Y}\beta$	$-2\tilde{Y}\beta + \frac{1-e}{2e}\alpha^2 - \beta^2 - \nu^2$	$-2\tilde{Y}\beta - \nu^2 - \beta^2$
$d\tilde{q}$	$\frac{-\tilde{a}^2(1-e^2)^2}{e} \tilde{X}\alpha + \frac{(1-\tilde{a}^2(1-e^2))}{e} \tilde{Y}\beta$	$\frac{4\tilde{Y}\beta}{(1+e)^2} + \frac{2\nu^2}{(1+e)^2} - \frac{(1-e)^2}{2e(1+e)^2}\alpha^2 + \frac{2(5-3e)}{(1+e)^3}\beta^2$	$\tilde{Y}\beta + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$
$d\tilde{Q}$	$\frac{\tilde{a}^2(1+e)^2}{e} \tilde{X}\alpha + \frac{(\tilde{a}^2(1+e)^2 - 1)}{e} \tilde{Y}\beta$	$\frac{\alpha^2}{2e}$	$\frac{\alpha^2}{2}$

Variations infinitésimales de a, e, q et Q au second ordre.

A.3 Espérance des variations des quantités Q, e, a, q dans le cas du modèle de Weissman

Les équations donnant les variations d'une quantité x ont un premier terme dominant dx_1 , qui peut être positif ou négatif et qui régit le mouvement sur un petit nombre d'itérations et un second terme dx_2 de signe constant qui apporte un effet systématique très vite non négligeable.

Ecrivons ces équations sous la forme :

$$dx = E(|dx_1|) \epsilon + E(dx_2)$$

où $\epsilon = \pm 1$, et $E(dx)$ est l'espérance de dx.

On suppose que (α, β, γ) sont des nombres aléatoires, de distribution gaussienne, d'espérance nulle et d'écart quadratique σ .

Dans toute la suite on remplace α, β , et γ par $\epsilon\sigma$ où $\epsilon = \pm 1$.

Alors $E(\alpha) = E(\beta) = E(\gamma) = 0$

$$E(|\alpha|) = E(|\beta|) = E(|\gamma|) = \sigma$$

$$E(\alpha^2) = E(\beta^2) = E(\gamma^2) = \sigma^2$$

Reprenons donc les équations donnant les variations de x dans le cas des rencontres à l'aphélie.

Demi-grand axe

$$d\tilde{a}_1 = \frac{2}{(1+e)^2} \tilde{\gamma}\beta$$

$$d\tilde{a}_2 = \frac{2}{(1+e)^2} \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{(5-3e)}{2(1+e)} \beta^2$$

$$E(d\tilde{a}_2) = \frac{7-e}{(1+e)^3} \sigma^3$$

Sachant que $\tilde{\gamma} = \sqrt{1-e}$, on obtient :

$$d\tilde{a} = \frac{2\sqrt{1-e}}{(1+e)^2} \sigma \epsilon + \frac{(7-e)}{(1+e)^3} \sigma^2$$

Excentricité

$$de_2 = \frac{1-e}{2e} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = \frac{1-5e}{2e}$$

$$de = -2\sqrt{1-e} \sigma \varepsilon + \left(\frac{1-5e}{2e} \right) \sigma^2$$

Ici le terme du second ordre est positif si $e < 0.2$.

C'est à dire il a tendance à faire croître l'excentricité si celle-ci est inférieure à 0.2, à la faire décroître dans le cas contraire.

Périhélie

On montre de même que :

$$d\tilde{q} = \frac{4\sqrt{1-e}}{(1+e)^2} \sigma \varepsilon + \left(\frac{-(1+e)^3 + 28e - 4e^2}{2e(1+e)^3} \right) \sigma^2$$

Aphélie

$$d\tilde{Q} = \frac{\alpha^2}{2e}$$

Dans le cas du modèle de Weissman, $\sigma = 1.7 \cdot 10^{-3} \sqrt{T}$ soit dans nos unités

$$\tilde{\sigma} = 1.7 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{T}Q}{\sqrt{\mu}} = K \frac{Q^{5/4}}{(1+e)^{3/4}}$$

Le tableau suivant donne les dx_n en unités conventionnelles, pour une excentricité quelconque puis pour $e = 1$.

Dans le cas $e = 1$, on posera $2a = Q$ soit $1-e = \frac{2q}{Q}$.

	CAS GENERAL	e PROCHE DE 1
da	$\frac{K2\sqrt{1-e}}{(1+e)^{1/4}} Q^{3/4} \varepsilon + \frac{(7-e) K^2}{(1+e)^{3/2}} Q^{7/2}$	$\frac{K}{2^{3/4}} \sqrt{q} Q^{7/4} \varepsilon + \frac{3}{2^{7/2}} K^2 Q^{7/2}$
de	$\frac{-2K\sqrt{1-e}}{(1+e)^{3/4}} Q^{5/4} \varepsilon + \frac{(1-5e) K^2}{2e(1+e)^{3/2}} Q^{5/2}$	$-2^{3/4} K\sqrt{q} Q^{3/4} \varepsilon + \frac{K^2 Q^{5/2}}{2}$
dq	$\frac{4\sqrt{1-e}}{(1+e)^{1/4}} K Q^{3/4} \varepsilon + \frac{K^2 \left[-(1+e)^3 + 28e - 4e^2 \right]}{2e(1+e)^{3/2}} Q^{7/2}$	$\frac{K\sqrt{q}}{2^{1/4}} Q^{7/4} \varepsilon + \frac{K^2 Q^{7/2}}{2\sqrt{2}}$
dQ	$\frac{K^2 Q^{7/2}}{2e(1+e)^{3/2}}$	$\sqrt{2} K^2 Q^{7/2}$

Variations infinitésimales de a, e, q et Q au second ordre, appliquées au modèle de Weissman, durant une révolution.

*

MARCHE ALEATOIRE AVEC UNE BORNE ABSORBANTE

Problème :

Un objet est condamné à évoluer suivant une droite, en avant ou en arrière, par pas constant. Il a une probabilité p d'aller à droite, q d'aller à gauche. ($p + q = 1$), de surcroît à une certaine distance de sa position initiale se trouve une borne absorbante. Quelle est la probabilité qu'il atteigne cette borne ?

On sait qu'en dimension un ou deux, si on a le temps "tous les chemins mènent à Rome", (en dimension trois, seulement un sur trois). Le problème est plus délicat si l'objet est astreint à atteindre la borne en un temps fini, ou s'il a plus de chance de s'en éloigner que de s'en rapprocher. Si cet objet matérialise les périhélie successifs d'une même comète, alors ces deux difficultés sont présentes.

Résolution analytique

Appelons $u_{z,n}$, la probabilité d'être absorbé en n coups, partant d'une distance z (l'unité de distance est le pas). Il faut évidemment que n soit au moins supérieur à z et de la même parité.

Après le premier pas, l'objet se trouve en $z - 1$ ou $z + 1$. Nous avons donc

$$u_{z, n+1} = pu_{z+1, n} + qu_{z-1, n} \quad (1)$$

Cette équation incite à employer la méthode des fonctions génératrices.

$$\text{Posons donc } U_z(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{z, n} s^n$$

$$\text{avec } u_{0,0} = 1 \text{ et } u_{z,0} = 0$$

$$u_{0,n} = U_{\infty, n} = 0 \text{ si } n > 1.$$

L'équation (1) entraîne

$$U_z(s) = ps U_{z+1}(s) + qs U_{z-1}(s)$$

On sait que la solution d'un tel système est :

$$U_z(s) = A(s) \lambda_1^z(s) + B(s) \lambda_2^z(s).$$

où $A(s)$ et $B(s)$ dépendent des conditions limites et où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation : $ps\lambda^2 + qs = \lambda$.

$$\text{soit : } \lambda_1(s) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 pqs^2}}{2 ps} \quad \lambda_2(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 pqs^2}}{2 ps}$$

et les conditions limites sont :

$$\begin{cases} A(s) + B(s) = 1 \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} (A(s)\lambda_1 + B(s)\lambda_2) = 0 \end{cases}$$

d'où $U_z(s) = \lambda_2^z(s)$

$$\text{soit : } U_z(s) = \left(\frac{1}{2 ps} \right)^z \left(1 - \sqrt{1 - 4 pqs^2} \right)^z = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{z,n} s^n$$

En égalisant les deux formes développées, on obtient

$$u_{z,n} = \frac{z}{n} \binom{n}{\frac{n+z}{2}}_p \binom{\frac{n-z}{2}}{q} \binom{\frac{n+z}{2}}{2} \tag{2}$$

La probabilité d'être absorbées en moins de N pas est donc

$$P_N(z) = \sum_{n=z}^N u_{z,n} \quad (n \text{ et } z \text{ de même parité})$$

Cas particulier - Formule approchée

Prenons $p = q = \frac{1}{2}$

alors $u_{z,n}$ s'écrit

$$u_{z,n} = \frac{z}{n} \binom{n}{\frac{n+z}{2}} \frac{1}{2^n} \quad (3)$$

dès que n est suffisamment grand, on peut prendre une forme approchée du coefficient du binôme, c'est à dire

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(r - np)^2}{2 npq}\right)$$

ce qui nous donne ici

$$u_{z,n} = \frac{z}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2n}\right)$$

Cette formule est acceptable dès que $npq > 2$ et représente très bien la réalité dès que $npq > 5$. Cette probabilité est maximale en $n = \frac{z^2}{3}$ et vaut $\frac{0.92}{z^2}$.

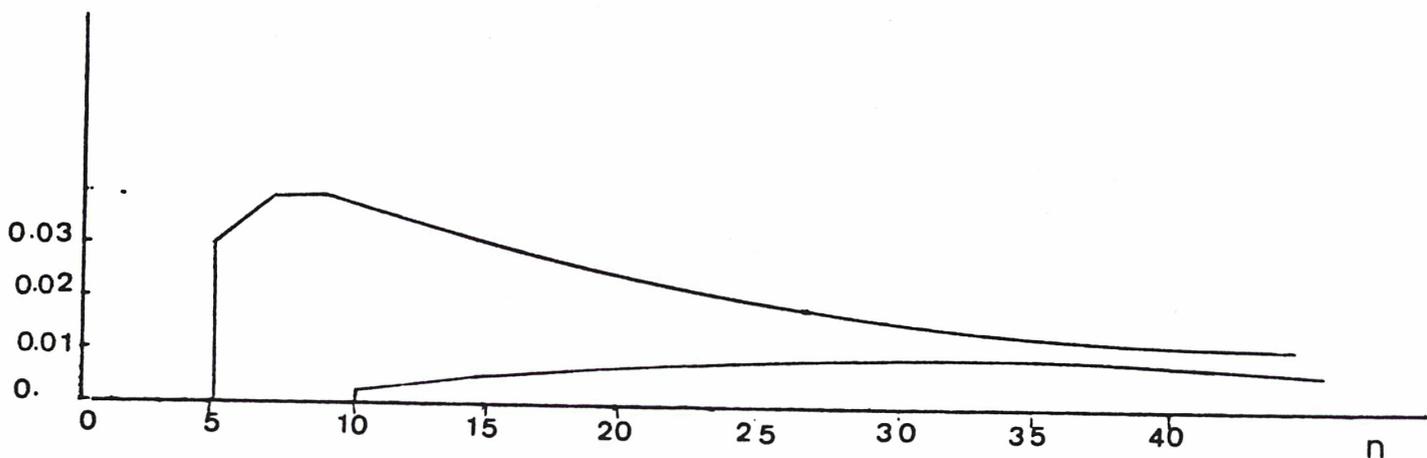


FIG (1). Probabilité d'être absorbée en n pas pour $z_0 = 5$ et $z_0 = 10$.

*

- ANNEXE C -

RESOLUTION DE L'EQUATION DE KEPLER

Le principe de résolution de l'équation de Kepler est de trouver le zéro de $f(E) = E - M - e \sin E$, par la méthode d'approximation de Newton. On considère donc une suite E_i , telle que

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= E_i - f(E_i) / f'(E_i) \\ &= E_i + (M - E_i + e \sin E_i) / (1 - e \cos E_i) \end{aligned}$$

laquelle, en cas de convergence, converge vers E.

C'est du choix de la valeur initiale dont dépend la convergence et le nombre d'itération. Le but de cette annexe est de trouver des valeurs initiales conciliant la maniabilité, la minimisation du nombre d'itération, et l'assurance de la convergence, ceci à des fins d'économie de temps de calcul.

Il faut garder en mémoire que le temps de calcul d'une addition est négligeable, que le temps de calcul d'un sinus ou d'une puissance non entière est environ 15 fois supérieur à un temps de calcul d'une multiplication. Le coût d'une itération est donc équivalent au coût du calcul de deux sinus.

Choix de valeurs initiales

Ce problème est symétrique par rapport à π , il suffit donc de ramener M et E entre 0 et π , dans ces bornes f est une fonction croissante, f(M) y est négatif, f(M+e) positif. La solution est donc comprise entre M et M+e. Considérons S_n , compris entre M et M+e. La tangente en $f(S_n)$ à la courbe coupe l'axe des X en S_{n+1} et il est clair que si S_n est bien choisi S_{n+1} est une bonne approximation.

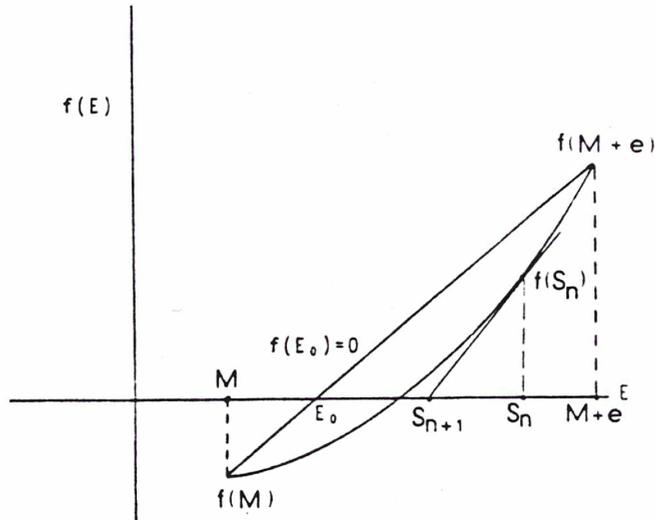


FIG (1). Principe de résolution d'équation par la méthode de Newton.

La méthode de Newton consiste donc à s'approcher de la solution en quelques itérations de ce type.

La valeur de départ classiquement utilisée est M . Elle nécessite beaucoup d'itérations dès que l'excentricité s'approche de 1 et diverge si en plus M tend vers zéro, car alors dans cette zone "critique", f' tend vers zéro.

Par ailleurs, on sait que la méthode de Newton donne une bonne approximation si l'on choisit pour cela x , tel que $f(x) f''(x) > 0$. Ici $f''(x)$ étant constamment positif, la bonne supérieure $M+e$ peut donc aussi être retenue.

Il existe dans la littérature d'autres valeurs. Nous avons éliminé celle dont le calcul dépasse celui de plusieurs itérations et n'avons retenu que $E_0 = M + e \sin M$, qui consiste à résoudre l'équation de Newton au 1er ordre en considérant que E est proche de M et que $e \sin M$ est petit devant les deux ; cette valeur est donc adaptée pour les petites excentricités.

G.M. Smith conseille aussi en première valeur, la résolution de l'équation par la méthode des cordes, c'est à dire telle que

$$\frac{0 - f(M)}{E_0 - M} = \frac{f(M+e) - f(M)}{(M+e) - M}$$

qui donne $E_0 = M+e \sin M / (1 - \sin(M+e) + \sin M)$.

Nous avons aussi cherché une solution appropriée à la zone critique du plan (M,e), c'est à dire où M est petit et e proche de 1.

L'équation de départ est :

$$E - e \sin E = M$$

soit en développant jusqu'à E^5

$$E (1-e) + e E^3 / 6 - e E^5 / 120 = M$$

puisque $(1-e)$ et E^5 sont petits nous pouvons prendre comme solution au premier ordre $A = (6 M / e)^{1/3}$; puis en reportant et en développant en fonction de A on obtient comme solution approchée :

$$E_0 = A (1 + A^2 / 60) (1 - A (1 - e) / (3 M)).$$

Il faut donc comparer ces cinq valeurs initiales. Un moyen de tester "l'efficacité" d'une valeur initiale est de faire des statistiques sur une région donnée du plan (M,e) cela sur un certain nombre de couples (M,e).

G.M. Smith considère la région critique $e \in [0.95, 0.999]$ et $M \in [0.005, 0.4]$ e prend toutes les valeurs de cet intervalle de millièème en millièème, et M de centièème en centièème. Il fait donc des statistiques sur 2050 couples. On détermine alors le nombre moyen N d'itérations, et sa dispersion σ .

A quatre de ces valeurs de départ, nous avons rajouté la dernière mentionnée

VALEUR DE DEPART	N	σ
M	6.56	1.37
M + e	3.59	0.87
M + e sin M	5.84	0.93
M + e sin M / (1 - sin (M + e) + sin M)	3.69	0.95
A (1 + A ² / 60) (1 - A (1 - e) / (3 M))	1.83	0.36

Il est donc évident que sur ce domaine, cette dernière solution a non seulement l'avantage de converger mais aussi d'atteindre la précision souhaitée, ($f(E) < 5.10^{-8}$) en un minimum de coups.

Pour des valeurs de e inférieures à 0.5, la méthode de Newton converge très vite, quelque soit la valeur de départ prise dans l'intervalle $[M, M + e]$. Il est donc tout de même intéressant de comparer le nombre d'itérations utiles pour atteindre la même précision, en partant de M ou de $M+e$. Pour cela, on fait varier e de 0 à 0.5 par pas de 0.05 et M de 0 à π , par pas de 0.1 rd.

E_0	N	σ
M	2.61	0.59
M + e	2.15	0.61

Dans cette zone nous utiliserons donc $M + e$ comme valeur initiale. Dans la région critique, comme dans cette dernière région, le choix d'une valeur particulière est sans conteste. Regardons ce qu'il se passe lorsque e est supérieur à 0.7 quelque soit M .

Nous avons séparé cette région intermédiaire en deux, selon que M est supérieur ou inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

e varie de 0.7 à 0.99 de centième en centième et M de 0.05 rd en 0.05 rd varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ puis de $\frac{\pi}{2}$ à π .

VALEUR DE DEPART	N, $M (0, \frac{\pi}{2})$	N, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$	N, $\forall M$
-M	4.59	3.11	3.85
M + e	2.75	2.16	2.45
M + e sin M	3.50	2.70	3.11
M + e sin M / (1 - sin (M + e) + sin M)	2.33	1.91	2.12
A (1 + A ² / 60) (1 - A (1 - e) / (3 M))	2.12	2.11	2.13

Des considérations sur le temps de calcul nous poussent à éliminer la solution qui est la plus rapide pour tout M, puisque son faible écart avec les deux autres, déjà mentionnés, ne justifie pas le calcul de deux sinus. Les deux valeurs de départ retenues précédemment restent donc toujours les plus "économiques".

Reste à trouver le e critique à partir duquel il est intéressant d'employer la dernière valeur du tableau. Pour cela, considérons la fonction qui à e fait correspondre le nombre moyen sur M d'itération.

Si l'on emploie comme valeur initiale $M + e$, cette fonction reste pratiquement égale à 2.4 pour e variant de 0.5 à 1, à condition toutefois que M soit supérieur à 0.1 rd.

Si l'on emploie l'autre, cette fonction décroît doucement de 2.5 à 2. Par conséquent, prendre 0.8 comme excentricité critique semble être la solution la plus appropriée.

En résumé, pour résoudre l'équation de Kepler

$$E - e \sin E = M$$

nous employons la méthode d'itération de Newton avec comme valeur de départ

$$M + e \quad \text{tant que } e \leq 0.8$$

et $A (1 + A^2 / 60) (1 - A (1 - e) / (3 M))$ avec $A = (6 M / e)^{1/3}$ si $e > 0.8$.

*

BIBLIOGRAPHIE

- Cameron, A.G.W. 1978. The primitive solar accretion disc and the formation of the planets. In the Origin of the Solar System, ed. S. F. Dermott, John Wiley & Sons, New York, pp. 49-75, 1978.
- Clube, S.V.M., and Napier, W.M. 1982. Spiral arms, comets, and terrestrial catastrophism. *Quart. J. Roy. Astron. Soc.* 23 : 45-66.
- Clube, S.V.V., and Napier, W.M. 1984. Comet Capture from molecular clouds : a dynamical constraint on star and planet formation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, in press.
- Everhart, E. 1973. Examination of several ideas of comet origins. *Astron. J.* 78 : 329-337.
- Everhart, E. 1974. Conference at Goddard Space Flight Center.
- Faintich, M.B. 1971. Interstellar gravitational perturbations of cometary orbits. Ph.D. dissertation, Univ. Illinois.
- Fernandez, J.A. 1980. Evolution of comet orbits under the perturbing influence of the giants planets and nearby stars. *Icarus* 42 : 406-421.
- Fernandez, J.A., and Ip. W.H. 1981. Dynamical evolution of a cometary swarm in the outer planetary region. *Icarus* 47 : 470-479.
- Kuiper, G.P. 1951. Origin of the solar system. In *Astrophysics*, ed. J.A. Hynek, McGraw Hill Book Co., New York, pp. 357-424.
- Lago, B., and Cazenave, A. 1983. Evolution of cometary perihelion distances in Oort cloud : another statistical approach, *Icarus*, 53-68.
- Lyttleton, R.A. 1974. The non existence of the Oort cometary shell, *Astroph. and Sp. Sc.* 33 : 385-401.
- Malaise, D. 1982. Les comètes et l'origine du système solaire ; compte-rendu A.T.P. planétologie.
- Marsden, B.G., and Sekanina, Z. 1973. On the distribution of original orbits of comets of large perihelion distance, *Astron. J.* 78 : 1118-1124.
- Marsden, B.G., and Sekanina, Z., and Everhart, E. 1978. New osculating orbits for 110 comets and analysis of original orbits for 200 comets. *Astron. J.* 83 : 64-71.
- Mendis, D.A. 1973. *Astrophys. Space Sc.* Vol. 20 : 165-176.
- Oort, J.H. 1950. The structure of the cometary cloud surrounding the solar system and a hypothesis concerning its origin. *Bull. Astron. Neth.* 11 : 91-110.
- Rémy, F., Mignard, F. 1984. The two body problem, a diagrammatic solution, *American Journal of Physics.*, in press.

- Rickman, H. 1976. Stellar perturbations of orbits of long-period comet and their significance for cometary capture. *Bull. Astron. Czech.* 27 : 92-105.
- Safranov, V.S. 1969. Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the Earth and planets. NASA TT F-677, 206 pp.
- Safranov, V.S. 1977. In *comets - Asteroids - Meteorites* : ed. Delsemme, Univ. Toledo Press, 483.
- Scholl, H., Cazenave, A., and Brahic, A. 1982. The effect of star passages on cometary orbits in the Oort cloud, *Astron. Astrophys.* 112-157-166.
- Smith, G.R. 1978. A simple efficient starting value for the iterative solution of Kepler's equation, *Celestial Mechanics*, 19 : 163-166.
- Valtonen, M.J., and Innanen, K. 1982. The capture of interstellar comets *Astrophys. J.* 255 : 307-315.
- Vsekhsviatsky, S.K. 1950. *Astron. Zh.* 27-23.
- Vsekhsviatsky, S.K. 1972. In the motion evolution of orbits and origin of the comets, *IUA Symposium. N° 45.*
- Weissman, P.R. 1979. Physical and dynamical evolution of long-period comets, In *dynamics of the solar system*; ed. R.L. Duncombe, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, pp. 277-282.
- Weissman, P.R. 1980. Stellar perturbations of the cometary cloud. *Nature* 288 : 242-243.
- Weissman, P.R. 1982. Dynamical history of the Oort cloud. In *comets*, ed. L.L. Wilkening, Univ. Arizona Press, Tucson, pp. 637-658.
- Weissman, P.R. 1983. Diffusion of Oort cloud comets into the planetary region. *Bull. Amer. Astron. Soc.* 15 : 869.
- Weissman, P.R. 1984. *Communications personnelles.*
- Whipple, F.L. 1964. Evidence for a comet belt beyond Neptune. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 51 : 711-718.
- Witkowski, J. 1972. In the motion evolution of orbits, and origin of comets, *IAU Symposium, N°45.*
- Woerkom, A.J.J. Van. 1948. On the origin of comets *Bull. Astr. Inst.* 10 : 445-472.
- Yabushita, S. 1972. Stellar perturbations of orbits of long-period comets, *Astron. Astrophys.* 16 : 395-403.

*

Je tiens à remercier François Mignard, qui fut mon initiateur et dont les remarques et conseils m'ont considérablement aidée tout en me laissant entière liberté. Les suggestions et nombreuses idées auront probablement fait plus que m'orienter dans ce travail.

Je garde un excellent souvenir de mon année de DEA à l'Observatoire de Paris, et c'est pourquoi je tiens à remercier Jean Delhaye d'avoir bien voulu être membre du jury et Fernand Nahon de le présider.

Je suis très reconnaissante à Jean Kovalevsky et Bernard Lago de s'être intéressés à ce travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais enfin remercier le secrétariat du CERGA et tout particulièrement Martine Perrin, de m'avoir aidé à rendre ce travail présentable.



RÉSUMÉ

Le nuage de Oort est un réservoir de comètes situé aux confins du système solaire, dont la dynamique est régie par le passage d'étoiles à proximité du Soleil. Après l'étude de l'espace des phases des comètes, nous en déduisons la probabilité qu'elles intègrent les régions planétaires. Après simulation du voisinage solaire pendant 4.5 milliards d'années, nous regardons l'évolution de ce nuage, et en s'appuyant sur les observations, essayons de remonter à la population initiale. Puisqu'il s'agit d'un problème de diffusion, nous comparons l'évolution d'une orbite donnée avec un mouvement brownien et en déduisons sa durée de vie moyenne.

Mots clés : Comètes - Système Solaire - Perturbations Stellaires - Diffusion.