



**HAL**  
open science

# Conception et étude d'infrastructures de transports à énergie positive : de la modélisation thermomécanique à l'optimisation de tels systèmes énergétiques

Nicolas Le Touz

## ► To cite this version:

Nicolas Le Touz. Conception et étude d'infrastructures de transports à énergie positive : de la modélisation thermomécanique à l'optimisation de tels systèmes énergétiques. Thermique [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2018. Français. NNT : 2018ECDN0038 . tel-01959310

**HAL Id: tel-01959310**

**<https://theses.hal.science/tel-01959310v1>**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES  
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : *Énergétique, thermique, combustion*

Par

**Nicolas LE TOUZ**

## **Conception et étude d'infrastructures de transports à énergie positive : de la modélisation thermomécanique à l'optimisation de tels systèmes énergétiques**

Thèse présentée et soutenue à Bouguenais, le 20 novembre 2018

Unité de recherche : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Wahbi JOMAA  
Monica SIROUX

Professeur des Universités  
Professeure des Universités

Université de Bordeaux  
Institut National des Sciences  
Appliquées de Strasbourg

### **Composition du Jury :**

Président du jury :	Rachid BENNACER	Professeur des Universités	École Normale Supérieure Paris-Saclay
Examineurs :	Frédéric GRONDIN	Professeur des Universités	École Centrale de Nantes
	Patrick PERRÉ	Professeur des Universités	CentraleSupélec
Directeur de thèse	Pierre HORNYCH	Ingénieur Divisionnaire des Travaux Publics de l'État – Habilitation à diriger des recherches	Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux
Encadrant	Jean DUMOULIN	Chargé de Recherche	Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux

### **Invité**

Jean-Michel PIAU

Ingénieur Général des Ponts, des Eaux et des Forêts

Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux



# Remerciements

Je tiens à remercier avant tout les membres de l'équipe d'encadrement, et en premier lieu Jean Dumoulin, sans qui rien n'aurait été possible à la fois pour ses conseils et remarques scientifiques, qui ont toujours été très utiles pour l'avancée de cette thèse, mais aussi pour la qualité de l'encadrement et pour m'avoir supporté tout au long de ces trois années de thèse. Jamais je ne me serai attendu, en venant pour la première fois dans ce bureau au début de l'année 2014, à ce que cette collaboration parvienne à ces résultats.

Des remerciements aussi à l'IFSTTAR pour avoir financé cette thèse, et au ministère de la transition écologique et solidaire (MTES) et à la direction générale des infrastructures, des transports et de la mer (DGITM) pour son soutien au volet expérimental.

Je dois aussi beaucoup à Jean-Michel Piau, dont je n'ai pas toujours saisi le sens des remarques immédiatement, mais qui avec du recul se sont toujours avérées très pertinentes et ont permis de faire mûrir les travaux. Je remercie également Pierre Hornych, mon directeur de thèse, pour les échanges réguliers, notamment au cours de la dernière ligne droite, qui ont là aussi contribué à l'avancement de cette thèse.

L'implication de Frédéric Bourquin, directeur du département Composants et Systèmes (COSYS), doit aussi être saluée, tant pour ses apports scientifiques que pour sa confiance et son appui au projet des routes de cinquième génération (R5G) dans lequel s'inscrit cette thèse. R5G, ce projet fédérateur de l'IFSTTAR, initié par Chantal De La Roche et porté par Nicolas Hautière, que je remercie aussi chaleureusement.

Je remercie également Rachid Bennacer pour avoir bien voulu présider mon jury. J'ai aussi une attention particulière pour Monica Siroux et Wahbi Jomaa, les rapporteurs, dont la lecture aura rendu possible la finalisation et l'approfondissement de certains points, et pour les autres membres du jury, Patrick Perré et Frédéric Grondin avec qui les échanges auront permis là aussi de poser des questions pertinentes sur certains éléments de ces travaux.

Des remerciements doivent également être adressés aux membres du comité de suivi de thèse, Sébastien Bourguignon et Laurent Ibos.

Ces trois années de thèse n'auraient pas non plus été possibles sans le soutien de l'ensemble des équipes du laboratoire SII, avec ses directeurs successifs Louis-Marie Cottineau et Vincent Le Cam, mais aussi l'équipe projet I4S dirigée par Laurent Mével. Un grand merci également à ceux qui auront été de fantastiques collègues : stagiaires, doctorants et post-docs pour la qualité du travail que nous avons pu accomplir.

Il me faut évidemment remercier tous ceux qui m'auront accompagné au cours de ces trois ans, en plus de ceux déjà mentionnés et qui mériteraient de l'être encore une fois. Merci donc au personnel du bâtiment Darcy : Yveline pour la préparation des missions, David pour la préparation du café, Yvan pour les discussions souvent animées, Jean-Luc pour ses connaissances encyclopédiques, Arthur, Quentin et tous ceux que j'oublie.

Des remerciements encore pour David, dont la soutenance viendra également rapidement, et pour le bonhomme Ludo, même si c'est difficile de le reconnaître. Un grand merci aussi à tous ceux qui auront été mes cobureaux pendant ces trois années, notamment Jordan dont les travaux ont influencé une partie de ce travail. Une pensée aussi pour Yingying, dont j'espère la réussite en Chine, pour les stagiaires, ainsi que pour Thomas et Charles qui ont dû me supporter quelques mois. Je ne peux évidemment pas ne pas remercier Guillaume, qui aura partagé le bureau presque jusqu'à la fin de cette thèse, même si les parties de scrabble que nous avons faites sont parfois allées trop loin. Merci aussi pour la licorne qui aura pu voyager jusqu'à l'autre bout du monde et passer à la télé. Enfin, merci au futur docteur Thibaud, pour le travail que nous avons pu réaliser ensemble et surtout pour le choix des couleurs qui aura eu une



très grande influence sur ce travail. Merci également pour avoir bien voulu m'accompagner pendant deux jours à Paris juste avant la remise de ce manuscrit pour piocher une boule noire et ramener un robot de cuisine. Bon courage dans tes futures responsabilités.

Merci aussi à toute la famille pour son soutien, au chat pour sa contribution chaque fin d'année à l'écriture d'articles, aux amis de Dijon, notamment Guillaume et Olivier pour les parties d'échecs à distance que nous avons pu faire, et à Sofia (promis la prochaine fois je ne jouerai pas au tennis la veille du départ). Enfin, merci à Armand Jammot, grâce à qui j'ai pu voyager dans toute la France et même en Belgique et rencontrer beaucoup de nouvelles personnes, dont, à Nantes, Élisabeth et Claudette que je remercie également pour leur soutien et sans qui il aurait été bien difficile de débiter cette thèse.

Et merci aussi à tous les autres, et plus particulièrement à ceux qui ne sont plus là.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Table des figures</b>	<b>12</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>16</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>18</b>
<b>2 Contexte et position du problème : état de l'art sur les chaussées à énergie positive</b>	<b>21</b>
2.1 Structure d'une route . . . . .	21
2.2 Prévention du gel . . . . .	22
2.2.1 Salage de la route . . . . .	22
2.2.2 Chauffage de la chaussée par effet Joule . . . . .	24
2.2.3 Chauffage de la surface par solution hydraulique . . . . .	24
2.2.4 Autres méthodes . . . . .	24
2.2.5 Régulation du système de chauffage . . . . .	25
2.3 Récupération de l'énergie . . . . .	25
2.3.1 Cas des systèmes hydrauliques . . . . .	25
2.3.2 Stockage de l'énergie thermique . . . . .	26
2.3.3 Récupération de l'énergie thermique pour la production d'électricité . . . . .	26
2.3.4 Utilisation de cellules photovoltaïques . . . . .	26
2.3.5 Autre méthode de récupération de l'énergie : utilisation de l'énergie mécanique . . . . .	26
2.4 Synthèse . . . . .	27
<b>3 Étude bibliographique sur les aspects connexes à la modélisation multiphysique</b>	<b>28</b>
3.1 Rayonnement solaire . . . . .	28
3.1.1 Nature du rayonnement solaire . . . . .	29
3.1.2 Calcul du rayonnement solaire extraterrestre . . . . .	29
3.1.3 Rayonnement reçu sans atmosphère, pour un lieu donné . . . . .	30
3.1.4 Rayonnement solaire reçu par temps clair . . . . .	34
3.1.5 Rayonnement reçu en présence de nuages . . . . .	40
3.1.6 Détermination des irradiances directe et diffuse . . . . .	41
3.1.7 Estimation de l'irradiance journalière à partir de données météorologiques journalières . . . . .	43
3.2 Coefficient d'échange convectif . . . . .	45
3.2.1 Corrélations pour l'estimation du coefficient d'échange convectif . . . . .	46
3.2.2 Synthèse . . . . .	48
3.3 Rayonnement atmosphérique . . . . .	49
3.3.1 Introduction . . . . .	49
3.3.2 Corrélations donnant l'émissivité du ciel par temps clair . . . . .	51
3.3.3 Prise en compte de la nébulosité . . . . .	53
3.3.4 Synthèse . . . . .	55
3.4 Température de rosée . . . . .	55
3.4.1 Introduction . . . . .	55
3.4.2 Corrélations . . . . .	55
3.4.3 Obtention de l'humidité relative à partir de l'humidité absolue . . . . .	56

3.4.4	Calcul de la température de rosée à partir de la pression de vapeur . . . . .	58
3.4.5	Point de givrage . . . . .	58
3.5	Synthèse . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Composantes physiques des ROutes Solaires HYbrides : formulation et résolution</b>	<b>61</b>
4.1	Diffusion thermique . . . . .	61
4.1.1	Équation de la chaleur . . . . .	62
4.1.2	Détermination de paramètres caractéristiques . . . . .	63
4.1.3	Application de la méthode des éléments finis . . . . .	64
4.1.4	Cas de la modélisation thermique du changement de phase . . . . .	65
4.1.5	Synthèse . . . . .	69
4.2	Convection hydraulique . . . . .	69
4.2.1	Introduction . . . . .	69
4.2.2	Mise en équation . . . . .	69
4.2.3	Résolution analytique dans le cas d'un régime permanent établi . . . . .	80
4.2.4	Synthèse . . . . .	83
4.3	Transferts radiatifs . . . . .	83
4.3.1	Mise en équation - Rayonnement émis par un corps . . . . .	84
4.3.2	Établissement de l'équation de transfert radiatif . . . . .	87
4.3.3	Méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif . . . . .	94
4.3.4	Application de la méthode des éléments finis à l'équation de transfert radiatif . . . . .	99
4.4	Mise en place sur un cas test . . . . .	108
4.4.1	Synthèse . . . . .	109
4.5	Choix de la méthode de discrétisation spatiale . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Modélisation multiphysique des routes solaires hybride (RoSHy)</b>	<b>111</b>
5.1	Résolution spatiale . . . . .	111
5.2	Schéma de résolution temporel . . . . .	112
5.2.1	$\theta$ -schéma . . . . .	112
5.2.2	Méthode de Runge-Kutta . . . . .	113
5.2.3	Utilisation des polynômes de Lagrange . . . . .	115
5.2.4	Utilisation des séries de Taylor . . . . .	116
5.2.5	Synthèse . . . . .	116
5.3	Mise en place des couplages multiphysiques . . . . .	116
5.3.1	Couplage entre la diffusion thermique et la convection hydraulique . . . . .	116
5.3.2	Couplage entre la diffusion thermique et les transferts radiatifs . . . . .	117
5.3.3	Couplage multiphysique . . . . .	121
5.4	Comparaison avec la solution analytique 1D pour le couplage diffusion thermique / convection hydraulique en régime permanent . . . . .	122
5.5	Validation sur un démonstrateur . . . . .	123
5.5.1	Obtention de la vitesse du fluide . . . . .	124
5.6	Validation sur une maquette de route solaire hybride . . . . .	129
5.7	Application du modèle aux matériaux à changement de phase . . . . .	133
5.8	Synthèse . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Évaluation du potentiel de récupération d'énergie</b>	<b>138</b>
6.1	Étude de la réponse du système à une excitation . . . . .	138
6.1.1	Comparaison avec la relation analytique établie pour le régime permanent . . . . .	139
6.1.2	Détermination des caractéristiques de la réponse temporelle du système . . . . .	139
6.1.3	Discussion des résultats . . . . .	140
6.2	Données nécessaires au fonctionnement du modèle numérique . . . . .	141
6.3	Notion de degré jour unifié . . . . .	143
6.3.1	Fonctionnement en chauffage . . . . .	145
6.3.2	Fonction <i>Cooling</i> . . . . .	146
6.3.3	Évaluation des DJU <i>cooling</i> . . . . .	147
6.4	Résultats en récupération d'énergie . . . . .	147

6.5	Synthèse . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Optimisation et contrôle commande</b>	<b>152</b>
7.1	Données climatiques . . . . .	152
7.2	Évaluation des besoins en énergie avec les DJU . . . . .	152
7.3	Formulation du problème . . . . .	154
7.3.1	Présentation du problème . . . . .	154
7.3.2	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	154
7.4	Introduction aux problèmes inverses . . . . .	156
7.4.1	Introduction . . . . .	156
7.4.2	Formulation . . . . .	157
7.4.3	Régularisation . . . . .	157
7.5	Résolution du problème de minimisation avec la méthode de l'état adjoint . . . . .	159
7.5.1	Problème direct . . . . .	159
7.5.2	Problème linéaire tangent . . . . .	160
7.5.3	Application de la méthode de l'état adjoint . . . . .	160
7.5.4	Linéarité du problème . . . . .	161
7.5.5	Minimisation de la fonctionnelle . . . . .	162
7.6	Contrôle de l'état de santé de la couche poreuse : extension à la reconstruction de plusieurs paramètres . . . . .	162
7.6.1	Présentation du problème . . . . .	163
7.6.2	Application à la reconstruction de propriétés physiques dans une paroi par couplage avec une méthode basée sur l'électromagnétisme . . . . .	167
7.7	Application de la méthode de l'état adjoint pour le contrôle en température . . . . .	177
7.7.1	Application de la méthode de l'état adjoint à des conditions environnementales sinusoïdales . . . . .	177
7.7.2	Cas de l'optimisation de la température d'injection sur une période de quelques jours	180
7.7.3	Mise en place d'une stratégie d'optimisation de la température d'entrée du fluide avec actualisation des prévisions météorologiques . . . . .	182
7.8	Résultats pour plusieurs zones climatiques . . . . .	185
7.9	Étude d'un dispositif de chauffage électrique . . . . .	185
7.9.1	Présentation de la structure étudiée . . . . .	185
7.9.2	Réponse temporelle du système . . . . .	186
7.9.3	Commande du système par l'application de la méthode de l'état adjoint . . . . .	187
7.9.4	Conditions environnementales . . . . .	187
7.9.5	Ajout de contraintes sur l'utilisation des câbles électriques . . . . .	189
7.9.6	Contrainte fréquentielle . . . . .	189
7.9.7	Contrainte sur la valeur du terme source . . . . .	190
7.10	Synthèse . . . . .	193
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>
	<b>Annexes</b>	<b>209</b>
	<b>A Solution en régime permanent pour la convection hydraulique</b>	<b>210</b>
	<b>B Méthode des éléments finis - Obtention des matrices</b>	<b>214</b>
B.1	Détail de l'obtention du système linéaire de l'équation de transfert radiatif . . . . .	214
B.2	Expressions des matrices éléments finis dans le cas de fonctions d'interpolation linéaires . . . . .	216
B.2.1	Fonctions d'interpolation linéaires . . . . .	216
B.2.2	Cas de la diffusion thermique et de la convection hydraulique . . . . .	219
B.2.3	Ajout de la diffusion numérique - Méthode de Petrov-Galerkin . . . . .	221
B.2.4	Cas des transferts radiatifs . . . . .	222
	<b>C Couplage entre les transferts radiatifs et la diffusion thermique : description de la méthode de Rosseland</b>	<b>225</b>

<b>D</b>	<b>Application de la méthode de l'état adjoint</b>	<b>227</b>
D.1	Rappel des problèmes direct et linéaire tangent . . . . .	227
D.2	Détermination du gradient du terme de résidu . . . . .	228
D.2.1	Réécriture de la fonctionnelle à minimiser . . . . .	228
D.2.2	Introduction du problème adjoint . . . . .	229
D.2.3	Minimisation du terme de résidu . . . . .	231
<b>E</b>	<b>Résolution des problèmes d'électromagnétisme</b>	<b>232</b>
E.1	Hypothèses effectuées . . . . .	232
E.2	Excitation utilisée . . . . .	233
E.3	Conditions aux limites . . . . .	233
E.4	Résolution du problème direct . . . . .	234
E.5	Résolution du problème inverse d'électromagnétisme . . . . .	238

# Nomenclature

## Grandeurs introduites au cours du chapitre 3

$\beta$	pende
$\delta$	angle de déclinaison
$\gamma$	angle azimutal de surface ou humidité absolue [g.m <sup>-3</sup> ]
$\lambda$	longueur d'onde
$\omega$	angle horaire
$\phi$	latitude
$\rho$	masse volumique
$\sigma$	constante de Stefan
$\tau$	coefficient de transmission
$\tau_r$	coefficient de transmission pour la diffusion de Rayleigh
$\theta$	angle d'incidence
$\theta_z$	angle azimutal du Soleil
$\theta_z$	angle de zénith
$\varepsilon$	émissivité
$\varepsilon_c$	émissivité du ciel
$G_0$	rayonnement solaire extraterrestre
$G_c$	densité de flux solaire par temps clair
$G_d$	densité de flux solaire direct
$G_s$	densité de flux solaire diffus
$h_c$	coefficient d'échange convectif [W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$K_t$	coefficient de transmission total
$M$	longueur atmosphérique traversée par les rayons solaires
$n$	nébulosité (fraction du ciel recouvert de nuages) ou numéro du jour dans l'année
$p_{eau}$	pression partielle en eau [mbar]
$p_{glace}$	pression partielle en eau [mbar]
$p_{sat}$	pression saturante [mbar]
$R(n)$	distance Terre-Soleil le $n^{\text{ème}}$ jour de l'année
$R_m$	distance moyenne entre la Terre et le Soleil
$RH$	humidité relative
$T$	température

$T_{\text{air}}, T_a$  température de l'air

$T_{\text{ciel}}, T_c$  température de ciel

$T_{dp}$  point de rosée

$T_g$  point de givrage

$V_w$  vitesse du vent [m.s<sup>-1</sup>]

#### Grandeurs introduites au cours du chapitre 4

[ $C$ ] matrice masse

[ $K$ ] matrice raideur

$\beta$  coefficient d'extinction [m<sup>-1</sup>]

$\delta$  paramètre de stabilisation de Petrov-Galerkin

$\kappa$  coefficient d'absorption [m<sup>-1</sup>]

$L_\nu$  luminance énergétique monochromatique [W.s.m<sup>-2</sup>.sr<sup>-1</sup>]

$\nu$  fréquence [s<sup>-1</sup>]

$\Omega$  angle solide [sr]

$\Omega$  densité d'étude

$\omega$  albédo de diffusion :  $\omega = \frac{\kappa}{\kappa + \sigma}$

$\Phi$  densité de flux

$\phi$  porosité

$\rho$  masse volumique

$\rho$  réflectance

$\sigma$  coefficient de diffusion [m<sup>-1</sup>]

$\theta$  température extérieure

$\vec{u}$  vitesse d'écoulement (de Darcy)

$\vartheta$  direction

{ $F$ } vecteur source

$f$  phase fluide

$s$  phase solide

$c$  capacité thermique massique

$D$  diffusivité thermique

$H$  enthalpie

$h$  constante de Planck :  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  J.s

$h$  taille du maillage

$k$  conductivité thermique

$k_B$  constante de Boltzmann :  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup>

$L$  longueur de l'écoulement

$M$  émittance

$p$  fonction de phase

$q$  source thermique

$s$  abscisse curviligne [m]



$S_{rad}$  terme source radiatif

$T_0$  température initiale

### **Grandeurs introduites au cours du chapitre 5**

$\delta t$  pas de temps pour la résolution temporelle

$e$  écart

$T_{in}$  température d'injection du fluide

$T_{out}$  température de sortie du fluide

### **Grandeurs introduites au cours du chapitre 6**

$L$  luminance énergétique [ $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ ]

$DJU_{cooling}$  degré jour unifié pour la fonction *cooling*

$DJU_{heating}$  degré jour unifié pour la fonction *heating*

$E$  potentiel de récupération d'énergie

$T_{cons}$  température de consigne

$T_{eq}$  température équivalente

### **Grandeurs introduites au cours du chapitre 7**

$\chi$  fonction de contraste

$\mathcal{M}$  espace des mesures

$\mathcal{U}$  espace des paramètres

$\varepsilon$  paramètre de Tikhonov

$\varepsilon_r$  permittivité relative

$J$  fonctionnelle à minimiser

$J_u$  fonctionnelle  $J$  linéarisée au point  $u$

$U_r$  fonction de contraste

# Table des figures

2.1	Schéma d'une structure routière . . . . .	22
3.1	Comparaison des spectres solaires extraterrestre et mesuré au niveau de la mer [142] . . .	29
3.2	Principaux angles intervenant dans le calcul du rayonnement solaire (d'après [73]) . . . .	31
3.3	Correction due à la variation de la vitesse de rotation de la Terre en fonction du jour de l'année . . . . .	32
3.4	Évolution de l'angle azimutal en fonction du temps à Paris pour les solstices . . . . .	33
3.5	Densité de flux solaire le 21 juin sur une surface plane . . . . .	33
3.6	Densité de flux solaire le 21 décembre sur une surface plane . . . . .	34
3.7	Densité de flux solaire pour différentes dates à Paris sur une surface plane . . . . .	34
3.8	Comparaison de corrélations donnant la densité de flux solaire par temps clair . . . . .	37
3.9	Coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde pour certains composants de l'atmosphère (d'après [191]) . . . . .	39
3.10	Coefficient d'absorption du rayonnement solaire prenant en compte l'absorption par les différents gaz qui constituent l'atmosphère et pour un rayonnement vertical (d'après [191])	39
3.11	Flux solaire global reçu sur une surface plane en fonction de la nébulosité pour plusieurs corrélations . . . . .	42
3.12	$K$ en fonction de $K_t$ pour plusieurs corrélations . . . . .	43
3.13	Coefficient d'échange convectif $h_c$ pour $V_w = 3 \text{ m.s}^{-1}$ . . . . .	48
3.14	Coefficient d'échange convectif $h_c$ pour $V_w = 6 \text{ m.s}^{-1}$ . . . . .	48
3.15	Coefficient d'échange convectif pour différents corrélations et vitesses de vent . . . . .	48
3.16	Rayonnement entre deux corps . . . . .	49
3.17	Rayonnement reçu de la part de l'atmosphère . . . . .	50
3.18	Émissivité du ciel en fonction du point de rosée pour plusieurs corrélations . . . . .	53
3.19	Comparaison entre les différentes corrélations donnant le point de rosée en fonction de l'humidité relative . . . . .	57
3.20	Température de givrage en fonction de la température de rosée . . . . .	59
4.1	Diagramme de phase $\text{H}_2\text{O} / \text{NaCl}$ . . . . .	67
4.2	Passage de la saumure de l'état liquide à l'état solide . . . . .	68
4.3	Variations d'enthalpie pour des solution de chlorure de sodium comprenant 25 (à gauche) et 200 g (à droite) de sel par litre d'eau . . . . .	68
4.4	Chaussée avec une couche drainante . . . . .	69
4.5	Représentation 1D du problème . . . . .	80
4.6	Longueur caractéristique en fonction de la vitesse du vent $V_w$ et de la température de l'air	81
4.7	Températures de la couche de surface et du fluide pour diverses conditions environnementales	82
4.8	Températures minimale du fluide $T_f(0)$ en fonction de données environnementales pour $L = 1$ et $L = 2 \text{ m}$ . . . . .	83
4.9	Représentation de la luminance énergétique de corps noir calculée par la loi de Planck . .	84
4.10	Représentation de $F(x)$ . . . . .	87
4.11	Apports et pertes intervenant dans l'équation de transfert radiatif . . . . .	91
4.12	Frontières d'entrée et de sortie pour une direction donnée . . . . .	92
4.13	Bilan radiatif au niveau des frontières d'entrée . . . . .	93
4.14	Cas étudié : deux plaques planes encadrant un milieu semi-transparent . . . . .	95

4.15	Coordonnées sphériques . . . . .	102
4.16	Exemple d'élément obtenu avec la discrétisation angulaire à pas constant . . . . .	103
4.17	Directions avec la quadrature $T_4$ . . . . .	103
4.18	Directions avec la quadrature $S_4$ . . . . .	104
4.19	Quadrature utilisant des icosaèdres . . . . .	105
4.20	Quadrature utilisant des Octaèdres . . . . .	106
4.21	Température de givrage en fonction de la température de rosée . . . . .	109
4.22	Comparaison entre les températures obtenues avec la méthode des éléments finis et la moyenne de quatre études (gauche) et erreur relative (droite) . . . . .	110
5.1	Cas étudié : deux plaques planes encadrant un milieu semi-transparent . . . . .	118
5.2	Comparaison entre les résultats de [238] et ceux issus de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour $\omega = 0.1$ . . . . .	119
5.3	Comparaison entre les résultats de [238] et ceux issus de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour $\omega = 0.9$ . . . . .	120
5.4	Structure étudiée . . . . .	122
5.5	Température d'entrée du fluide nécessaire pour conserver une température positive en surface de la chaussée . . . . .	123
5.7	Données extérieures mesurées . . . . .	125
5.8	Volume de fluide cumulé sur la durée de l'expérience . . . . .	125
5.9	Données mesurées aux sondes . . . . .	126
5.10	Volume de fluide cumulé sur les premières heures de la simulation . . . . .	126
5.11	Maillage spatial . . . . .	127
5.12	Températures mesurées et calculées au niveau de quelques sondes . . . . .	128
5.13	Écart selon la vitesse utilisée pour la simulation numérique . . . . .	129
5.14	Erreur sur les sondes selon la position de la chute de la hauteur d'eau . . . . .	129
5.15	Images obtenues après calibrations . . . . .	130
5.16	Images obtenues après calibrations . . . . .	131
5.17	Maillage de la maquette . . . . .	131
5.18	Flux incident à la surface de la maquette en régime permanent . . . . .	131
5.19	Évolution de la température mesurée au niveau d'un pixel . . . . .	132
5.20	Évolution de la température mesurée au niveau d'un pixel . . . . .	133
5.21	Schémas de la structure avec les inclusions . . . . .	133
5.22	Variations de l'enthalpie pour le SP5 pendant son changement d'état . . . . .	134
5.23	Variations de l'enthalpie pour la saumure pendant son changement d'état . . . . .	134
5.24	Évolution de la température de l'air au cours du temps . . . . .	135
5.25	Vues en coupe de champs de températures . . . . .	135
5.26	Différence de température à la surface sur un segment entre le bloc d'asphalte avec inclusions et le bloc sain . . . . .	136
5.27	Vues en coupe des positions des sondes pour le bloc d'asphalte avec inclusions (à gauche) et pour le bloc sain (à droite) . . . . .	136
5.28	Évolution des températures mesurées et calculées pour les positions de certaines sondes . . . . .	136
5.29	Écart entre les températures mesurées et calculées à la surface avec et sans inclusions . . . . .	137
6.1	Comparaison du modèle numérique et de la formulation analytique en régime permanent en fonction de la distance au point d'injection du fluide . . . . .	139
6.2	Température de surface en fonction du temps et de l'éloignement au point d'injection . . . . .	140
6.3	Retard en fonction de la distance au point d'injection du fluide . . . . .	140
6.4	Paramètre $A$ . . . . .	141
6.5	Paramètres $b_1$ et $b_2$ . . . . .	141
6.6	Paramètres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ . . . . .	142
6.7	Données du problème . . . . .	142
6.8	Intégration des données au schéma numérique . . . . .	143
6.9	Synthèse des données climatiques . . . . .	144
6.10	Synthèse des données climatiques durant la période de récupération d'énergie . . . . .	145
6.11	Synthèse des DJU <i>cooling</i> . . . . .	147

6.12	Synthèse des résultats en récupération d'énergie	148
6.13	Synthèse des résultats en efficacité	148
6.14	Amélioration des performances avec un revêtement semi-transparent	149
6.15	Potentiel d'énergie récupérable fonction des DJU <i>cooling</i> pour les 53 villes étudiées	149
6.16	Potentiel d'énergie récupérable moyen en fonction de la distance au point d'injection du fluide	150
6.17	Potentiel surfacique d'énergie récupérable moyen en fonction de la distance au point d'injection du fluide	150
6.18	Efficacité de l'échange thermique en fonction de la distance au point d'injection du fluide	151
7.1	Principales données climatiques entre novembre et mars	153
7.2	Synthèse des DJU <i>heating</i>	154
7.3	Baisse relative des DJU <i>heating</i> entre les deux approches	155
7.4	Domaines et frontières étudiés	155
7.5	Problème inverse	157
7.6	Représentation du cas étudié	163
7.7	Sous-domaines pour le problème de thermique	171
7.8	Sous-domaines pour le problème de thermique	173
7.9	Reconstruction par le GPR	173
7.10	Sous-domaines pour la reconstruction thermique	174
7.11	Propriétés thermiques reconstruites avec les informations <i>a priori</i> apportées par le GPR	174
7.12	Reconstruction de l'inclusion avec les informations <i>a priori</i>	175
7.13	Propriétés thermiques reconstruites sans les informations <i>a priori</i> apportées par le GPR	175
7.14	Reconstruction de l'inclusion sans informations <i>a priori</i>	176
7.15	Reconstruction de la position de l'inclusion d'air avec et sans les informations <i>a priori</i> du GPR	177
7.16	Reconstruction de la position de l'inclusion d'acier avec et sans les informations <i>a priori</i> du GPR	177
7.17	Évolutions des conditions environnementales en fonction du temps	178
7.18	Température de surface sans régulation de la température d'injection du fluide	179
7.19	Résultats avec les trois scénarii	179
7.20	Température d'injection du fluide avec et sans loi de commande	180
7.21	Températures de l'air et de ciel et densité de flux solaire	180
7.22	Température minimale de surface avec et sans loi de commande	181
7.23	Température d'injection du fluide avec loi de commande et avec maintien d'une température d'injection égale à 40.5°C	181
7.24	Température minimale de surface avec et sans loi de commande	182
7.25	Conditions climatiques sur quarante jours à Nancy	183
7.26	Température d'injection du fluide avec et sans loi de commande	184
7.27	Température minimale de la surface avec et sans loi de commande	184
7.28	Position du problème	186
7.29	Réponse en température normalisée suite à un échelon de puissance	186
7.30	Conditions environnementales	188
7.31	Température minimale de la surface cible	188
7.32	Fonctionnement des câbles électriques	189
7.33	Température minimale de la surface cible et termes sources avec la méthode de l'adjoint	190
7.34	Température minimale de la surface cible et termes sources avec la méthode de l'adjoint	190
7.35	Température minimale de la surface cible et termes sources avec un régulateur tout ou rien ( <i>tor</i> : fonctionnement en tout ou rien, <i>sc</i> fonctionnement sans loi de commande)	191
7.36	Température minimale de la surface cible et termes sources avec un régulateur tout ou rien, les périodes de fonctionnement sont représentées en vert	192
7.37	Température minimale sur la surface en fonctionnement en tout ou rien pour deux valeurs de terme source	192
7.38	Température de surface en fonctionnement en tout ou rien pour deux valeurs de terme source	193

7.39	Comparaison des résultats en terme source et en température de surface pour les fonction- nement sans commande (indice <i>sc</i> ), avec l'adjoint (indice <i>co</i> ), et en tout ou rien (indice <i>tor</i> ) . . . . .	193
E.1	Excitation de type ricker . . . . .	233
E.2	Onde électrique subissant une condition limite de Higdon (en haut) ou une condition PML (en bas). À droite, l'onde est observée 5 ns après ce qui est représenté à gauche . . . . .	234
E.3	Cellules de Yee ([92, 259]) . . . . .	235
E.4	Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu calcaire homogène . . . . .	239
E.5	Décomposition d'une onde en une partie incidente et une partie diffuse (à gauche le champ électrique total, au milieu le champ incident et à droite le champ diffus) . . . . .	240

# Liste des tableaux

4.1	Estimation des vitesses maximales (au sens de Darcy) pouvant être considérées pour quelques températures sous l'hypothèse d'un régime de Darcy . . . . .	71
4.2	Répartition spectrale du rayonnement . . . . .	87
4.3	Position des résultats en température pour le cas test avec la méthode des éléments finis . . . . .	109
5.1	Position des résultats de température adimensionnée ( $T/T_1$ ) comparés entre [238] et la méthode des éléments finis en température adimensionnée avec de la diffusion . . . . .	119
5.2	Écart entre les résolutions analytique et numérique pour les différentes conditions étudiées	123
5.3	paramètres utilisés pour la simulation . . . . .	127
5.4	Écart moyen pour les vitesses d'écoulement étudiées . . . . .	130
5.5	Propriétés thermiques du matériau [11, 68, 225] . . . . .	132
5.6	Conditions environnementales . . . . .	132
7.1	Propriétés électriques et thermiques des matériaux . . . . .	173
7.2	Longueurs utilisées pour générer les sous-domaines . . . . .	174
7.3	Propriétés électriques et thermiques de l'air et de l'acier . . . . .	176
7.4	Propriétés des inclusions reconstruites . . . . .	178
7.5	Synthèse des résultats en apport d'énergie pour la prévention du gel . . . . .	185
7.6	Consommation énergétique totale au cours de la période d'une semaine étudiée . . . . .	191

# Chapitre 1

## Introduction générale

Ce travail de thèse permet d'introduire des structures routières intégrant de nouvelles fonctionnalités liées à la gestion de l'énergie. En effet, si les routes sont utilisées pour les flux de circulation, les structures sont aussi soumises à des contraintes mécaniques et environnementales. Les chaussées étudiées au cours de ce manuscrit visent à remplir plusieurs objectifs liés aux échanges thermiques s'y produisant. En particulier, les apports énergétiques provenant du rayonnement solaire peuvent être en partie récupérés et donc évacués de ces structures, réduisant ainsi les contraintes thermiques.

Dans cette optique, nous proposons dans ce manuscrit d'étudier en détail les échanges thermiques qui se produisent à l'intérieur et au niveau des interfaces de ces nouvelles routes en élaborant un modèle numérique multiphysique couplant les différents phénomènes qui ont lieu.

Ce modèle multiphysique est appliqué à des données météorologiques afin d'évaluer les performances énergétiques de ces nouvelles structures. Des adaptations de ce modèle permettent une application au contrôle en température des routes afin de réduire les contraintes thermomécaniques mais aussi pour prévenir de l'apparition de phénomènes dangereux tels que le verglas ou l'accumulation de neige.

L'aspect climatique est particulièrement étudié dans ce mémoire à l'aide de cartographies des conditions climatiques et des performances énergétiques potentielles. L'influence de certains paramètres sur ces performances est notamment discutée.

Le développement et le maintien d'un réseau routier représentent un enjeu sociétal majeur. Il s'agit en effet d'établir le bon fonctionnement de flux de circulation, mais aussi d'assurer la sécurité des usagers en maintenant la route en état de fonctionnement, tout en minimisant les impacts négatifs, notamment environnementaux, le coût de ces structures mais également les nuisances sur les usagers (infrastructure de qualité, peu d'embouteillages) ou les riverains (nuisances sonores, pollution et accroissement du flux de circulation).

Afin d'améliorer la qualité du réseau routier, l'IFSTTAR est à l'origine du projet des routes de cinquième génération (R5G), qui vise à développer de nouvelles routes afin d'améliorer les performances des structures actuelles tout en réduisant les impacts négatifs de celles-ci. Ce projet renferme ainsi plusieurs volets<sup>1</sup>. Il s'agit ainsi de

- *rendre les infrastructures plus durables, peu émissives et économes en ressources naturelles* en augmentant la durée de vie des matériaux, en facilitant l'accès aux réseaux souterrains, en réduisant les nuisances sonores ou en promouvant l'usage de matériaux recyclés pour réduire l'utilisation des ressources naturelles, 70000 km de routes étant notamment rénovées chaque année.
- *privilégier les routes à énergie positive* en favorisant le développement de la voiture électrique avec un plus grand nombre de stations de recharge mais aussi en offrant la possibilité de recharger son véhicule tout en roulant. Profiter de la surface recouverte par les routes et notamment du rayonnement solaire qui y est absorbé pourrait permettre de récupérer de l'énergie, que ce soit au travers d'une transformation de la route en chauffe-eau solaire ou par l'intégration de panneaux photovoltaïques
- *renforcer la résilience des routes face aux événements climatiques et aléas naturels* en étudiant les risques de catastrophes naturelles (séisme, inondation, effondrement) qui pourraient impacter la route et adapter sa construction en conséquence

---

1. [www.ifsttar.fr/fileadmin/redaction/dossiers-thematiques/Mobilites/R5G/10169\\_INFRA\\_R5G\\_FR\\_interactif.pdf](http://www.ifsttar.fr/fileadmin/redaction/dossiers-thematiques/Mobilites/R5G/10169_INFRA_R5G_FR_interactif.pdf)

- *encourager l'auto-diagnostic des structures* en détectant l'apparition d'endommagements causés à la suite d'un grand nombre de cycles de roulage à la surface ou de variations de températures. Pour cela, des capteurs peuvent être intégrés à la chaussée et permettre d'estimer plus précisément les charges auxquelles sont soumises les routes et donc mieux prévoir leur durée de vie.
- *favoriser une gestion coopérative et innovante du trafic* en développant le concept de la route automatisée. Le trafic pourrait ainsi être régulé et éventuellement redirigé, notamment dans le cas de la circulation de véhicules autonomes ou capables de communiquer avec l'infrastructure de transport.
- *penser des infrastructures plus sûres et efficaces* afin d'améliorer la qualité du déplacement en anticipant les risques dus à la conduite, qu'ils soient dus à la qualité de la chaussée, à un risque particulier d'accident ou à des facteurs météorologiques.
- *répondre aux enjeux précédents par des infrastructures connectées et coopératives* en intégrant progressivement des capteurs aux infrastructures de transport et en enrichissant les données apportées aux conducteurs. Les équipements pourraient ensuite être modifiés plus en profondeur en allant jusqu'à « réguler automatiquement la circulation ».

Le but est ainsi de faire des routes davantage que des "voies de communication terrestres carrossables" (définition du dictionnaire Larousse<sup>2</sup>) en ajoutant de nouvelles fonctionnalités, de nouveaux services et en réduisant leurs nuisances.

Cette thèse s'inscrit ainsi principalement dans le volet des routes à énergie positives : il s'agit de participer au développement de nouvelles infrastructures de transport ajoutant une fonction de gestion de l'énergie. Au cours de la période estivale, de l'énergie provenant des apports solaires est récupérée et peut être réutilisée pour alimenter des équipements (feux, signalisation, éclairage), pour participer à l'alimentation d'un réseau de chaleur urbain ou pour être stockée dans des réservoirs.

Plusieurs systèmes ont été développés pour cela, en s'appuyant principalement sur des panneaux photovoltaïques ou sur des écoulements de fluide.

Cette énergie récupérée, lorsqu'elle est stockée en période estivale, peut ensuite être réutilisée pendant l'hiver afin de chauffer la surface de la route et d'empêcher la formation de verglas ou l'accumulation de neige, en particulier pour certaines zones exposées comme les ponts. En effet, l'utilisation de sel, comme cela est souvent pratiqué, présente des inconvénients à la fois économiques, et environnementaux. Plusieurs méthodes alternatives ont ainsi été développées depuis la fin des années 1940 en s'appuyant sur un chauffage basé notamment sur l'utilisation d'un fluide chaud, ou par effet Joule (chauffage électrique).

Tous ces systèmes sont introduits et détaillés au cours du chapitre 2. Dans le cadre de cette thèse, une focalisation est effectuée sur le concept de la route solaire hybride. Ces routes ont l'avantage de présenter une structure multicouche similaire à celle des chaussées traditionnellement construites, ce qui permet de conserver les mêmes méthodes de construction. Cependant, certaines de ces couches sont modifiées. En particulier, un écoulement en milieu poreux ainsi que des transferts radiatifs s'effectuent à l'intérieur de la structure, modifiant ainsi les transferts thermiques par rapport à des chaussées traditionnelles. Des cellules photovoltaïques peuvent aussi être intégrées.

L'un des objectifs de ce mémoire est d'établir les performances énergétiques de ces routes solaires hybrides. Pour cela, s'il faut connaître les transferts thermiques liés aux différents phénomènes se produisant à l'intérieur de la structure, une connaissance précise des interactions avec l'environnement est primordiale pour estimer les gains et pertes en énergie du système liés à cet environnement.

En particulier, la densité de flux solaire reçue, les échanges convectifs avec l'air ambiant ainsi que les échanges radiatifs avec l'atmosphère doivent être connus. Pour cela, le chapitre 3 permet d'introduire les principaux paramètres climatiques et de présenter, grâce à une étude bibliographique qui se veut la plus exhaustive possible, des corrélations ayant pour but d'estimer ces gains et pertes en énergie. Ces corrélations sont à chaque fois comparées et discutées afin d'en dégager une qui soit la plus pertinente dans le cadre de cette étude.

Connaissant les conditions environnementales et leur évolution, les performances énergétiques des routes solaires hybrides peuvent être déterminées. Une étude numérique est ainsi menée et plusieurs phénomènes doivent être modélisés afin de connaître le comportement thermique de la structure. Au cours du chapitre 4, les phénomènes de diffusion thermique, de convection hydraulique et les transferts radiatifs ainsi que leurs traitements numériques sont ainsi détaillés. En particulier, la structure des équations différentielles est discutée. L'utilisation de la méthode des éléments finis pour chacun de ces phénomènes est

---

2. <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/route/70110>



explicitée et des stabilisations numériques sont introduites lorsque la structure de l'équation différentielle le requiert.

Un couplage de ces phénomènes est ensuite proposé et détaillé dans le chapitre 5. Un modèle multiphysique est implémenté sous un noyau Matlab®, ce qui permet de résoudre ces différents problèmes simultanément à la fois en espace et en temps connaissant l'évolution des données météorologiques. Ce couplage est validé à partir de cas tests, et notamment à partir de l'analyse de données portant sur un démonstrateur et sur une maquette de route solaire hybride.

Des données météorologiques horaires recouvrant une année complète pour plusieurs zones climatiques en France sont ensuite présentées dans le chapitre 6 afin de cartographier les différents climats de la France métropolitaine. L'exécution du modèle multiphysique avec ces données climatiques permet alors de simuler le fonctionnement de la route solaire hybride durant une année. Des résultats en récupération d'énergie sont cartographiés, discutés et permettent d'évaluer les influences climatiques ainsi que de mettre en évidence le potentiel de récupération d'énergie de ces structures. Un outil d'évaluation des performances énergétiques nécessitant seulement la connaissance des conditions climatiques est aussi introduit, permettant à l'ingénieur d'estimer de façon rapide le potentiel de récupération d'énergie.

Le fonctionnement hivernal est ensuite traité au cours du chapitre 7 afin de prévenir de la formation de verglas ou de l'accumulation de neige à la surface des routes solaires hybrides. Pour cela, un problème de minimisation est introduit en prenant à la fois en compte la contrainte de prévention du gel et les dépenses énergétiques pour le chauffage de la structure. Pour cela, il est fait appel à des méthodes de contrôle optimal. La méthode de l'état adjoint est ainsi présentée pour la commande en température de la route solaire hybride et plusieurs cas d'étude sont traités. De nouveau, des données climatiques horaires sont utilisées pour la mise en application de cette loi de commande, et les besoins en énergie sont estimés. L'influence de la teneur en eau de l'air (*i.e.* sa température) sur le besoin en chauffage est notamment discutée. La prise en compte de ce couple de paramètres montre qu'il est possible d'aboutir à des économies d'énergie parfois conséquentes pour certaines zones climatiques.

Cette application de la méthode de l'état adjoint est ensuite généralisée à la reconstruction de paramètres physiques en s'appuyant et en modifiant des travaux précédemment menés au sein de l'IFSTTAR. En particulier, cette généralisation de la méthode de l'état adjoint peut être appliquée à la recherche de défauts dans des parois afin, par exemple, de détecter des variations de propriétés thermophysiques dans la couche poreuse liées à un encrassement. Un couplage avec une reconstruction de signaux issus de mesures par radar géophysique est proposée afin d'améliorer la qualité de la reconstruction. Enfin, le fonctionnement d'un système alternatif à la route solaire hybride est étudié, de nouveau en utilisant la méthode de l'état adjoint. Ce système est basé sur un chauffage électrique et la commande porte alors sur l'alimentation en électricité.

Finalement, des conclusions et perspectives sur les routes solaires hybrides ainsi que sur les résultats obtenus sont proposées et discutées.

## Chapitre 2

# Contexte et position du problème : état de l'art sur les chaussées à énergie positive

Les chaussées étudiées dans cette thèse visent à remplir deux objectifs : empêcher la formation de verglas et l'accumulation de la neige en période hivernale, et récupérer de l'énergie thermique issue du rayonnement solaire au cours de la période estivale.

Après avoir décrit la structure des routes, nous présentons ensuite, dans ce chapitre, la technique la plus utilisée pour empêcher la formation de verglas, le salage des routes, et développons les effets de cette méthode. Des alternatives permettant de réchauffer la surface de la route, par l'utilisation d'une source thermique ou par alimentation électrique, sont ensuite détaillées.

Un état de l'art sur la récupération d'énergie par les routes est enfin dressé avec, en particulier, un approfondissement sur les techniques permettant de récupérer de l'énergie en été et de la restituer, en partie, durant les périodes de froid en hiver.

### 2.1 Structure d'une route

Une chaussée routière se présente sous la forme d'une structure multicouche. Selon le niveau de trafic, plusieurs structures différentes existent et on n'utilisera pas le même type de structure, ni les mêmes matériaux, pour une route de campagne peu fréquentée, pour une autoroute, un boulevard ou un parking. Le climat a aussi une influence sur le choix de la composition de la chaussée, tout comme la durée de vie prévue. La chaussée est installée sur un ensemble appelé plate-forme support de chaussée constituée du sol tassé surmonté généralement d'une couche de forme [57], comme cela est représenté sur la figure 2.1.

La couche de forme est située entre le sol support et le corps de la chaussée et permet de remplir deux fonctions : protéger le sol support au cours de la phase de travaux et améliorer les caractéristiques des matériaux de remblai ou du terrain en place. Elle peut être composée de matériaux granulaires, traités ou non selon la route considérée. Son épaisseur peut aller de 15 à 50 cm selon le type de chaussée.

Au-dessus, la couche d'assise est composée de deux sous couches : une couche de fondation et une couche de base. Chacune a pour objectif d'apporter à la chaussée la résistance mécanique nécessaire pour supporter les charges verticales dues à la circulation des véhicules à la surface et de répartir les pressions sur la plate-forme support de chaussée pour que les déformations restent admissibles. Cette couche a une épaisseur variant généralement entre 10 et 40 cm.

Enfin, la couche de surface peut comporter une ou deux sous couches : la couche de roulement et éventuellement la couche de liaison. Elle doit permettre d'assurer la sécurité et le confort des usagers, qui sont en contact direct avec celle-ci. En particulier, cette couche doit être unie, avec le moins possible de défauts géométriques tels que des ornières. Cette couche doit aussi permettre l'adhérence des véhicules ainsi que l'évacuation des eaux de pluie. Cette couche de surface doit également maintenir l'intégrité de la chaussée en protégeant la structure d'influences extérieures telles que le salage ou des entrées d'eau, ainsi

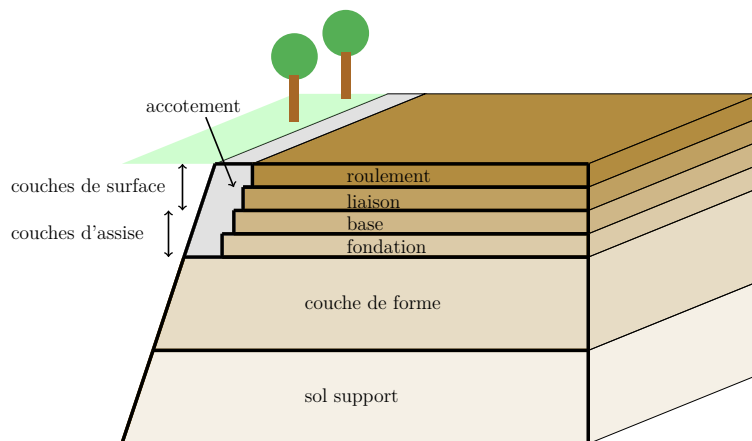


FIGURE 2.1 – Schéma d'une structure routière

que de la remontée de fissures des couches d'assise. L'impact de la couche de surface sur l'environnement doit aussi être minimisé, notamment en évitant la pollution des eaux de ruissellement ou en diminuant le bruit du passage des véhicules. Enfin, la composition de cette couche de roulement doit être telle que des interventions pour l'entretien soient possible et que des réparations puissent être effectuées.

Nous nous intéressons, dans le cadre de cette thèse, au comportement thermique de la structure soumise aux conditions environnementales. L'influence de celles-ci se faisant ressentir près de la surface, nous nous focalisons ici sur l'étude de structures modifiées au niveau des couches de surface et d'assise.

## 2.2 Prévention du gel

Les routes solaire hybrides étudiées au cours de cette thèse visent à prévenir de la formation de neige ou de verglas à la surface des routes durant l'hiver. Pour cet objectif, des techniques existent déjà, les principales étant une fonte de la glace par des moyens chimiques (salage) et un chauffage de la chaussée, par micro-ondes, par effet Joule ou par des échangeurs thermiques intégrés à la structure de la route.

### 2.2.1 Salage de la route

La prévention du verglas ou la fonte de la glace par des moyens chimiques s'effectue à l'aide de dépôt de sel ou de sable sur la route. Le salage des routes, par du chlorure de sodium permet d'abaisser la température de fusion de la saumure ainsi formée, et ainsi de modifier son état qui passe de solide à liquide si le dosage est suffisant. Cependant, l'efficacité du salage des routes par du chlorure de sodium décroît pour des températures très basses, en dessous de  $-9^{\circ}\text{C}$  [175, 197]. Un autre sel, le chlorure de calcium, peut alors être épandu jusqu'à environ  $-60^{\circ}\text{C}$ . Cependant, son coût, vingt fois plus élevé que le chlorure de sodium, fait qu'il est relativement peu utilisé, en particulier pour des régions tempérées où l'occurrence de températures fortement négatives est très faible [189].

Pour des régions avec peu de dégel pendant l'hiver, l'utilisation de sable est privilégiée. Si celui-ci ne fait pas fondre la glace, il permet néanmoins d'améliorer l'adhérence des véhicules.

Le salage des routes présente deux inconvénients majeurs, son coût économique et son impact sur l'environnement.

En raison de l'augmentation de la taille du réseau routier ainsi que de l'utilisation de la voiture, la consommation de sel pour les routes a beaucoup augmenté au cours de ces dernières décennies, 0.2 million de tonnes par an en 1940 à 9 millions en 1970 [42] puis 15 millions dans les années 1990 pour les États-Unis [222]. Pour le Canada, cette quantité s'élève à 4.9 Mt. En France, l'apport en sel est estimé à environ 1 Mt par an pour les hivers rigoureux [189]. Le coût de la tonne de sel pouvant être estimé à 100 euros, le salage des routes a donc un impact économique non négligeable pour la société. En plus de l'achat du sel, il faut aussi prendre en compte la mobilisation du personnel ainsi que l'achat et l'entretien des chasse-neiges et saleuses.

Cependant, le coût du salage des routes ne se limite pas à l'achat et à l'épandage de celui-ci car il faut aussi prendre en compte les dégâts causés par le sel, en particulier au travers de la corrosion, qui affecte à la fois les véhicules, mais aussi les infrastructures. Cette corrosion peut être causée directement par les projections des véhicules, mais aussi par l'air chargé en sel suite à l'évaporation des gouttelettes d'eau salée, ce qui représente environ 1 à 1.5 % de la quantité de sel épandue [175]. Cette corrosion s'applique principalement aux parties des véhicules en contact avec les projections, c'est-à-dire principalement le châssis, la carrosserie et le système de freinage, mais aussi le système électrique. Les équipements routiers sont aussi soumis à l'impact de la corrosion, notamment les ponts. En cas de manque d'entretien, ceux-ci peuvent perdre une partie de leur résistance mécanique, voire s'effondrer [24]. L'impact de la corrosion ne se limite de plus pas aux véhicules et aux infrastructures routières puisque la corrosion provoquée par le sel s'attaque également aux canalisations souterraines ainsi qu'aux câbles téléphoniques et aux lignes électriques [135].

Cet impact financier est doublé d'un impact écologique. En effet, le sel, une fois déposé sur la route, engendre de la saumure qui peut être projetée sur les bas-côtés par les véhicules et qui ruisselle là encore jusqu'aux cours d'eau et peut pénétrer dans le sous-sol.

Ces projections provoquent ainsi un stress hydrique chez les plantes qui y sont soumises avec une modification de la perméabilité des cellules ce qui peut modifier l'équilibre de la plante. Les ions sodium et chlorure peuvent aussi inhiber la production de certaines enzymes et de la chlorophylle, affectant ainsi la photosynthèse, la respiration et la croissance de la plante [60]. Cependant, beaucoup de plantes sont en sommeil pendant l'hiver et les projections n'ont pas une influence aussi importante que le ruissellement de la saumure sur l'environnement.

L'écoulement de la saumure entraîne en effet une augmentation bien documentée de la concentration en ions chlorure et sodium dans les cours d'eau situés près des infrastructures routières, en particulier pour les petites rivières où la dilution est moins importante [42, 66, 94]. Si ces concentrations sont élevées après la fin des épisodes de froid, elles redescendent néanmoins en quelques jours dans les rivières [205] à cause de l'écoulement de l'eau. Dans les étangs et les lacs, la décroissance de la teneur en sel est beaucoup plus lente et la concentration peut rester élevée au printemps et en été [209] (d'après [197]). Cette teneur élevée en chlorure et en sodium entraîne une augmentation de la densité de l'eau et une stratification du lac ou de l'étang. L'eau salée reste alors au fond de l'étendue d'eau et les effets convectifs ne sont plus suffisants pour mélanger l'eau située au fond du lac avec l'eau de surface [129]. Cette stratification empêche une oxygénation suffisante des eaux de profondeur, ce qui impacte directement les espèces, principalement animales, vivant au fond des étendues d'eau, vers (oligochètes) et larves, et a donc un effet sur la chaîne alimentaire en touchant les poissons s'alimentant de ces espèces [106]. L'augmentation de la concentration en sel dans l'eau peut également modifier l'écosystème en favorisant le développement de cyanobactéries [37].

Les plantes situées près de cours d'eau soumis au ruissellement des eaux chargées en sel de déneigement subissent aussi cette augmentation de la concentration via l'absorption par les racines, ce qui peut entraîner une réduction de la croissance, des chutes de feuilles, de branches voire la mort des plantes [175].

D'autre part, le ruissellement souterrain de l'eau salée peut modifier la composition du sol. En effet, les ions potassium, calcium et magnésium, essentiels à la croissance des plantes, peuvent être remplacés par des ions sodium, d'où une possible perte de végétation ainsi que de l'érosion.

De plus, le sel est transporté par le ruissellement jusque dans les aquifères où l'eau potable est pompée, ce qui a une influence sur la qualité de l'eau consommée par la population. La concentration en ions chlorure peut ainsi parfois dépasser les recommandations [175]. Cette augmentation de la concentration peut aussi avoir une influence sur les activités industrielles comme la production de boissons alimentaires ou de lait.

Il est également possible de réguler davantage l'apport en sel sur des zones bien déterminées en mettant en place un système de pulvérisation, en particulier près des ponts. Des pulvérisateurs de solutions contenant du chlorure de sodium, du chlorure de calcium, du chlorure de magnésium, de l'acétate de magnésium ou de l'acétate de potassium [194] peuvent être installés, en étant soit intégrés dans la chaussée, soit situés en surplomb de la route, au-dessus d'une barrière, sur les rebords de trottoirs ou sur un parapet par exemple [258]. En plus du pulvérisateur, ces systèmes comportent également un réservoir, des pompes et des capteurs afin de pouvoir pulvériser la solution antigel lorsque cela s'avère nécessaire. Il est en particulier possible de commander le système pour que celui-ci ne se mette en action que si la température de la chaussée est suffisamment basse, si des précipitations sont prévues et si le délai

avec la précédente pulvérisation est suffisant. De tels systèmes ont été mis en place en Amérique du nord ainsi qu'en Europe [203]. Si ces systèmes n'ont pas un coût de fonctionnement important et s'ils réduisent le nombre d'accidents, des problèmes ont néanmoins lieu lors de leur activation, de l'entretien et du fonctionnement. Il semble ainsi que ces systèmes ne soient appropriés que pour des zones de danger restreintes et bien définies [258].

### 2.2.2 Chauffage de la chaussée par effet Joule

Deux moyens de chauffage de la chaussée par effet Joule sont répertoriés dans la littérature : par un revêtement conducteur électrique ou par des inclusions de câbles électriques à la structure routière.

Dans le cas d'un revêtement électriquement conducteur, des fibres de fer ou des copeaux sont ajoutés au béton bitumineux. Des essais mécaniques ont été réalisés avec des prototypes vérifiant les contraintes règlementaires sans qu'il n'y ait d'accident signalé dû à des personnes touchées par la charge électrique [239]. De plus, ce système permet d'éviter des variations trop importantes de température, que cela soit en espace ou en temps et le coût de fonctionnement semble peu important [260].

La seconde méthode, basée sur l'inclusion de câbles électriques sous le revêtement, à quelques centimètres de la surface, est davantage traitée dans la littérature et a été mise en œuvre dès 1961 aux États-Unis [108]. Les câbles électriques sont reliés à un générateur. La mise en circulation du courant électrique et l'effet Joule permettent alors un chauffage au niveau des câbles électriques, ce qui entraîne, si le système est bien dimensionné, un déneigement. Si ce système est efficace, facile d'installation et demande peu d'entretien, il a néanmoins l'inconvénient de nécessiter une consommation électrique qui peut être importante et représenter un coût conséquent [49] et la circulation des véhicules peut provoquer à terme l'arrachement des fils électriques [239].

### 2.2.3 Chauffage de la surface par solution hydraulique

Deux systèmes s'appuyant sur des échanges thermiques liés à l'apport de chaleur d'un fluide sont évoqués dans la littérature : le fluide peut circuler dans des canalisations enterrées ou dans une couche poreuse située en-dessous du revêtement bitumineux.

Le système basé sur des canalisations enfouies a été le premier à être développé, dès 1948, à Klamath Falls en Oregon [265] et était alors basé sur de la géothermie. Ce premier système a été maintenu en fonctionnement jusqu'en 1997, date à laquelle une fuite est apparue, causée par la corrosion des canalisations en fer. De nombreux autres systèmes également basés sur des canalisations ont depuis été mis en place, notamment aux États-Unis, en Islande, en Suisse (SERSO), au Japon (GAIA) en Norvège ou en Pologne [79, 169, 188, 265]. Le principe est alors d'avoir un fluide chaud qui s'écoule dans des canalisations intégrées à la chaussée routière. La diffusion thermique permet alors au fluide d'apporter sa chaleur à la chaussée. Des solutions à base de saumure, de propylène ou de glycol peuvent être utilisées [14, 265], tout comme de l'eau [87].

L'élévation en température du fluide calorifique peut se faire de différentes façons, soit directement à partir de combustibles fossiles, avec une chaudière ou alors à partir d'une source géothermique. Dans ce cas, une pompe à chaleur récupère une partie de l'énergie thermique de l'eau souterraine ou du sol lui-même afin de vaporiser un réfrigérant tel que le fréon qui relâche ensuite la chaleur au niveau du condenseur de l'échangeur thermique. Le fluide calorifique servant à réchauffer le revêtement récupère alors cette chaleur [14, 169].

Une autre technique similaire, basée sur le chauffage par la circulation d'un fluide, a été conçue et développée par l'IFSTTAR en utilisant non pas des canalisations mais une couche poreuse située en-dessous du revêtement. Une étude conjointe a ainsi été réalisée [11]. Cette technique présente notamment l'avantage de permettre la conservation d'une structure multicouche et donc de conserver les mêmes méthodes de construction des routes, sans surcoût. L'énergie distribuée par le fluide est également augmentée à cause d'une surface d'échange plus élevée entre le fluide et le solide [190]. Une imperméabilisation de la couche poreuse est néanmoins nécessaire.

### 2.2.4 Autres méthodes

Un système existe pour lutter contre le verglas, basé sur l'utilisation de micro-ondes. De la taconite concassée est ajoutée comme agrégat au bitume. Le passage d'un véhicule équipé d'un générateur de

micro-ondes permet alors la production de chaleur dans la chaussée, en particulier près de la surface, la glace étant alors facilement détachable [112].

Une utilisation de matériaux à changement de phase, inclus dans la chaussée, est également évoquée en perspectives par [158].

### 2.2.5 Régulation du système de chauffage

Un contrôle du système de chauffage est nécessaire pendant la période hivernale afin d'éviter un chauffage trop important tout en maintenant l'objectif d'une température de surface suffisamment élevée. Pour cela, il est possible de s'inspirer de ce qui est effectué en thermique du bâtiment. En effet, le système de chauffage de la route peut être assimilé à un chauffage en bâtiment avec la contrainte de maintenir une température située dans une zone de confort dépendant également de l'humidité et de l'utilisation qui est faite de la structure.

Plusieurs techniques existent en thermique du bâtiment pour la régulation du chauffage. Il est ainsi possible de se baser sur des contrôleurs proportionnels, intégraux et dérivés (PID) [136, 185]. Des outils plus avancés peuvent aussi être mis en œuvre comme des algorithmes génétiques [257] ou des réseaux de neurones [172].

Des matériaux à changement de phase peuvent aussi être utilisés pour réguler la température de la chaussée. Les quelques études publiées s'intéressent au cas de conditions estivales. En effet, maintenir la surface hors gel durant plusieurs jours de froid demanderait une quantité d'énergie importante alors que, lors du fonctionnement en conditions estivales, les pics de chaleurs ne durant que quelques heures, ils peuvent être absorbés pendant la journée avant que l'énergie thermique ne soit relâchée au cours de la nuit suivante.

Le matériau à changement de phase (paraffine) est ici intégré à la chaussée, ce qui permet, si la température de changement d'état se situe un peu en-dessous de valeurs pouvant accélérer l'orniérage, de retarder l'apparition des pics de chaleur pour la chaussée et de la atténuer [49, 158].

Les matériaux à changement de phase peuvent aussi être associés à d'autres dispositifs. En thermique du bâtiment par exemple, les panneaux photovoltaïques peuvent être accompagnés de matériaux à changement de phase pour éviter des variations trop importantes de température et allonger ainsi leur durée de vie [118].

## 2.3 Récupération de l'énergie

Les systèmes de maintien hors gel des chaussées nécessitent un apport en énergie. Or les routes occupent une importante surface, soumise à un rayonnement solaire conséquent, en particulier pendant la saison estivale. Récupérer une partie de cette énergie thermique au travers de la route pourrait rentabiliser davantage la surface occupée par les infrastructures routières en leur apportant une fonction supplémentaire : en plus de permettre la circulation des véhicules, une importante quantité d'énergie, renouvelable de surcroît, serait récupérée grâce à de tels systèmes.

Nous présentons dans cette partie d'abord le fonctionnement estival des systèmes hydrauliques présentés dans le paragraphe 2.2.3 ainsi que le stockage de cette énergie en vue de son utilisation au cours de la période hivernale, puis la récupération d'énergie thermique par d'autres moyens, comme des conduites d'air ou des cellules photovoltaïques.

### 2.3.1 Cas des systèmes hydrauliques

Les systèmes hydrauliques présentés dans le paragraphe 2.2.3 agissent comme des échangeurs thermiques. Si la chaussée permet d'abaisser la température du fluide qui circule à l'intérieur de celle-ci en hiver pour les deux types de systèmes, à canalisation ou à couche poreuse, et donc d'augmenter la température de la chaussée, l'effet inverse se produit en conditions estivales. L'apport d'énergie thermique via le rayonnement solaire est transmis au fluide qui monte en température pendant son écoulement. Au lieu d'avoir un écoulement de la source chaude vers la source froide comme en conditions hivernales, l'écoulement se fait de la source froide vers la source chaude. L'écoulement du fluide permet alors d'évacuer l'énergie thermique due au rayonnement solaire.

En plus de la récupération possible de cette énergie, son évacuation permet de réduire l'effet de l'îlot de chaleur urbain et d'abaisser la température de la structure, température qui peut atteindre 70°C sans

traitement [103], ce qui peut entraîner de l'orniérage et diminuer la durée de vie des chaussées routières [160].

### 2.3.2 Stockage de l'énergie thermique

Afin d'alimenter en énergie les systèmes hydrauliques pendant l'hiver en vue de générer une source chaude, l'énergie collectée pendant l'été peut être stockée dans le sous-sol.

L'énergie thermique peut notamment être stockée dans d'épaisses couches de sable [157], éventuellement située sous les nappes phréatiques [242]. D'autres solutions de stockage de l'énergie thermique, *a priori* non utilisées actuellement pour le cas spécifique des routes, sont aussi évoquées dans la littérature, comme l'utilisation de l'eau, que ce soit dans des réservoirs ou dans des aquifères, ou, pour le stockage par chaleur latente, l'utilisation de matériaux à changement de phase, comme des paraffines ou des hydrates de sel [104].

### 2.3.3 Récupération de l'énergie thermique pour la production d'électricité

Des systèmes fonctionnant sur un principe similaire à celui des échangeurs hydrauliques sont évoqués dans la littérature. Au lieu d'utiliser un fluide calorifique comme de l'eau ou une solution liquide, de l'air circule dans des conduites, là aussi enterrées.

Sous des conditions estivales, la différence de température entre la chaussée et l'environnement permet de mettre de l'air en mouvement dans les conduites. Des turbines situées en surplomb de la chaussée sont alors utilisées pour récupérer ce flux d'air et produire de l'électricité [88]. Comme pour l'utilisation d'un fluide liquide, ces conduites permettent d'évacuer la chaleur de la chaussée et donc d'en diminuer la température et donc d'augmenter la durée de vie des structures qui en sont équipées [52, 88]. Cette solution présente l'avantage de réduire les effets des fuites, notamment sur la durabilité de la structure, par rapport au cas de l'utilisation d'un fluide caloporteur, mais l'efficacité de la récupération d'énergie thermique est fortement diminuée [52].

Il est à noter que [88] évoque aussi la possibilité d'utiliser ce système en hiver, mais sans en étudier la faisabilité et l'efficacité.

### 2.3.4 Utilisation de cellules photovoltaïques

Deux façons d'utiliser les cellules photovoltaïques sont évoquées dans la littérature. D'abord, des panneaux photovoltaïques peuvent être installés au-dessus des voies de circulation ou au-dessus de parkings [95] afin d'alimenter directement le réseau électrique, mais aussi pour réduire l'exposition des chaussées au rayonnement solaire et donc les protéger de températures trop importantes.

L'autre méthode repose sur des cellules photovoltaïques intégrées à la chaussée. Peu de références académiques traitent de ces systèmes. De nombreux brevets ont cependant été déposés par des entreprises et plusieurs systèmes ont été installés ces dernières années comme Solar Roadways, SolaRoad (Pays-Bas) ou WattWays (Colas, France) [71].

Pour le système Solar Roadways, la structure utilisée est constituée de trois couches, une couche de surface transparente résistante à la contrainte exercée par le roulement des véhicules. Le rayonnement solaire peut ainsi atteindre les collecteurs solaires. La couche située en-dessous est une couche contenant un microprocesseur. Enfin, la troisième couche permet de distribuer le signal électrique aux infrastructures reliées à la route [70].

### 2.3.5 Autre méthode de récupération de l'énergie : utilisation de l'énergie mécanique

Il est à noter que l'énergie thermique n'est pas la seule à être disponible au niveau des chaussées routières. La circulation des véhicules à la surface peut aussi être une source d'énergie mécanique. Il existe deux principaux types de générateurs électriques : piézoélectrique et électromagnétique [71].

Dans le cas d'un générateur piézoélectrique, l'énergie mécanique de la pression du roulement ou des vibrations est convertie en énergie électrique. Le matériau piézoélectrique est ainsi polarisé par l'effet de la contrainte mécanique et permet un apport en électricité [20]. Un système nommé Cymbal a ainsi été développé par l'université de Pennsylvanie [261].



Les générateurs électromagnétiques reposent quant à eux sur l'induction électromagnétique et la loi de Faraday. Le déplacement de la surface dû au roulement des véhicules est converti en un mouvement circulaire au niveau d'un générateur électrique qui convertit ainsi l'énergie mécanique reçue en énergie électrique. Des systèmes hydrauliques, pneumatiques ont ainsi été développés pour actionner le générateur électrique. De nombreux brevets ont ainsi été déposés dont certains sont recensés par [71].

## 2.4 Synthèse

Ce chapitre a permis d'introduire différents systèmes permettant de remplir les objectifs de maintien de la surface des routes hors gel et/ou de récupérer de l'énergie à partir de celles-ci.

Éviter la présence de verglas ou de neige à la surface des routes est un problème important, le plus souvent résolu aujourd'hui par l'épandage de millions de tonnes de sel sur les routes, ce qui a un impact à la fois économique et environnemental. Des méthodes visant à maintenir la surface des routes à une température suffisamment élevée pour que la glace ne s'y forme pas ont ainsi été développées.

La mise hors gel de la surface peut s'effectuer au moyen de différents apports en énergie, thermique par la circulation d'un fluide dans une couche poreuse, ou par des conduites enterrées dans la chaussée, ou par effet Joule grâce à la circulation d'un courant électrique.

Une source d'énergie est donc nécessaire pour alimenter de tels systèmes. Si des générateurs peuvent apporter cette énergie, il est intéressant de s'appuyer sur l'utilisation d'une énergie thermique stockée pendant l'été lorsque l'apport en énergie thermique provenant du rayonnement solaire est maximal. De nouveau, des systèmes hydrauliques peuvent être mis en place pour collecter une partie de cette énergie. Ces systèmes présentent aussi l'avantage, en évacuant une partie de la chaleur, de pouvoir limiter la montée en température des chaussées durant les pics de température et donc d'accroître la durée de vie des structures routières qui en sont équipées.

L'utilisation de systèmes hydrauliques est ainsi particulièrement intéressante puisque ces systèmes sont réversibles : l'énergie qu'ils évacuent durant l'été peut être stockée dans le sous-sol ou dans des réservoirs pour ensuite être utilisée au cours de l'hiver afin de maintenir la surface hors gel.

Dans la suite de cette thèse, nous étudierons plus en détail le fonctionnement de chaussées utilisant une couche poreuse, qui permettent en particulier, comme cela a déjà été décrit dans le paragraphe 2.2.3, de conserver un système multi-couches et donc les mêmes méthodes de construction, et qui n'engendrent donc pas de surcoût, contrairement aux chaussées équipées de canalisations.

Une des particularités de ce travail provient d'une modification de la couche de surface par rapport aux routes à couche poreuse évoquées dans la littérature [11, 58, 190] : celle-ci est ici remplacée par une couche semi-transparente qui filtre une partie du rayonnement incident. Plus précisément, les basses longueurs d'ondes, et en particulier les principales longueurs d'ondes pour l'émission du rayonnement solaire, sont en grande partie transmises à travers cette couche et sont donc absorbées plus en profondeur. Cela permet, en été, d'avoir un chauffage plus important du fluide et donc d'évacuer davantage d'énergie à travers celui-ci. Le matériau semi-transparent est en revanche opaque aux grandes longueurs d'onde et, en particulier, les échanges atmosphériques s'effectuent à la surface de la route.



## Chapitre 3

# Étude bibliographique sur les aspects connexes à la modélisation multiphysique

Nous présentons dans ce chapitre la modélisation des conditions environnementales qui agissent sur le comportement thermique des routes solaires hybrides. Celui-ci est particulièrement influencé par des paramètres météorologiques tels que le rayonnement solaire reçu, les échanges avec l'atmosphère ou la vitesse du vent. Un autre paramètre important, non traité ici, est la gestion des hydrométéores et notamment les effets de la pluie ou de la neige sur le comportement thermique de la structure. En effet, le traitement de ce paramètre nécessiterait la connaissance de nombreux autres facteurs tels que l'écoulement des eaux pluviales à la surface de la route, la texture de celle-ci, l'évolution de la quantité d'eau tombée ou la vitesse d'évaporation.

Dans le cadre de la commande en température de la structure, l'objectif est d'éviter l'apparition de verglas à la surface des routes or les conditions de formation de celui-ci sont liées à l'humidité : du verglas peut se former pour une température faiblement négative par temps humide alors que cela ne sera pas le cas pour un air sec. Une étude sera ainsi menée sur l'humidité et le point de rosée, et en particulier le point de givrage sera introduit.

Cette étude bibliographique permet de déterminer quelles seront les corrélations retenues par la suite pour estimer ces effets extérieurs. Pour cela, des comparaisons entre les principales corrélations de la littérature sont effectuées en vue de choisir une corrélation donnant des valeurs de paramètres situées dans la moyenne des valeurs de l'ensemble des corrélations répertoriées ici.

### 3.1 Rayonnement solaire

Le rayonnement solaire est un mode de transfert de l'énergie qui utilise les ondes électromagnétiques, ondes qui peuvent se déplacer dans un matériau ou dans le vide. Lorsque les ondes électromagnétiques émises par le Soleil atteignent une surface liquide ou gazeuse, elles sont alors réfléchies, absorbées par le milieu et transmises. C'est en particulier le cas lorsque le rayonnement solaire atteint l'atmosphère terrestre. Le rayonnement transmis à travers l'atmosphère atteint ensuite le sol où il est en partie absorbé et permet donc un apport en énergie thermique.

Nous cherchons donc dans cette partie à déterminer la densité de flux solaire qui est absorbée par le sol, et notamment par le revêtement des routes. La valeur du flux solaire reçu peut être mesurée à l'aide d'un pyranomètre. On ne dispose cependant pas toujours de ces capteurs et il peut être nécessaire d'évaluer la valeur de la densité de flux solaire reçue en utilisant d'autres mesures, comme la température ou l'humidité.

Connaissant la position d'un lieu, il est d'abord possible de connaître le rayonnement reçu au-dessus de l'atmosphère qui surmonte ce lieu pour une date et une heure données. Cependant, pour connaître la valeur de la densité de flux solaire reçus à la surface de la Terre, l'absorption et la diffusion du rayonnement par l'atmosphère terrestre doivent être pris en compte. Selon les données dont on dispose, des modèles

plus ou moins précis peuvent être utilisés.

### 3.1.1 Nature du rayonnement solaire

Le Soleil est, de loin, l'étoile la plus proche de la Terre et l'énergie provenant de son rayonnement est la principale source d'énergie dont dispose le système solaire et donc la Terre. Il est constitué de plusieurs couches concentriques avec un noyau au centre, à une température de 15 à 40 millions de Kelvin [123] où se produisent les réactions de fusion nucléaire qui permettent la formation d'hélium à partir d'hydrogène et d'où provient la chaleur de l'étoile. Cette énergie se propage vers l'extérieur du Soleil d'abord principalement par rayonnement puis par convection jusqu'à atteindre sa surface, aussi appelée photosphère. C'est le rayonnement émis par cette couche qui parvient ensuite jusqu'à la Terre.

Historiquement, le spectre solaire extraterrestre, c'est-à-dire en dehors de l'atmosphère, a été déterminé à partir de mesures effectuées au sol en comparant les spectres obtenus pour différentes altitudes et angles zénithaux, et donc pour différentes épaisseurs de l'atmosphère traversées par les rayons solaires [173, 230]. Ce spectre solaire peut être assimilé à celui d'un corps noir ayant une température de 5777 K [73].

Le spectre du rayonnement solaire est ainsi centré sur les longueurs d'onde visibles, mais il comprend aussi tous les types de rayonnements, du rayonnement gamma aux ondes radios.

Ce spectre solaire est en partie modifié lors de la traversée des ondes électromagnétiques à travers l'atmosphère. Le spectre solaire reçu à la surface de la Terre ne correspond ainsi pas au spectre solaire sans effets atmosphériques, aussi appelé spectre solaire extraterrestre. Cette altération du spectre est d'autant plus importante que certains composants de l'atmosphère, comme le dioxyde de carbone, l'ozone ou la vapeur d'eau sont présents dans l'atmosphère. Une comparaison entre les spectres du rayonnement solaire extraterrestre et le rayonnement reçu à la surface de la Terre est présentée sur la figure 3.1.

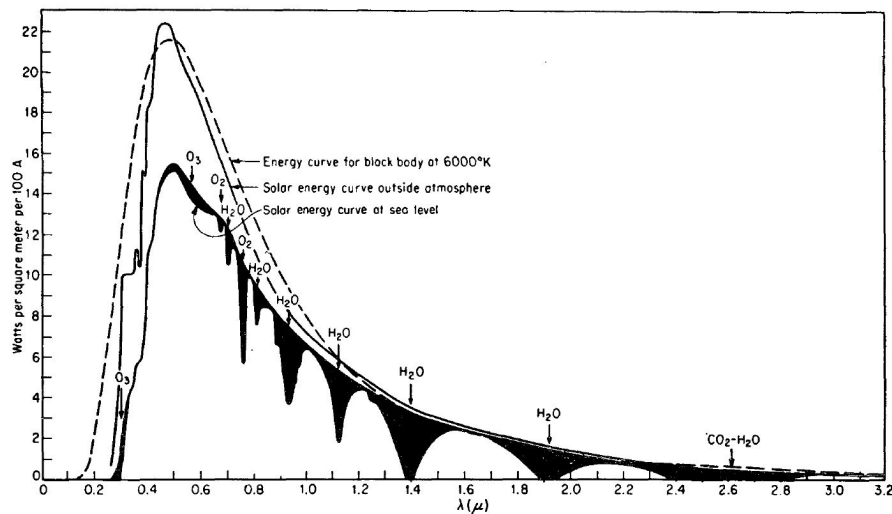


FIGURE 3.1 – Comparaison des spectres solaires extraterrestre et mesuré au niveau de la mer [142]

### 3.1.2 Calcul du rayonnement solaire extraterrestre

Le rayonnement solaire atteint la Terre après un peu plus de huit minutes depuis son émission par la photosphère. La Terre, au sommet de son atmosphère, reçoit alors un rayonnement moyen de  $1367 \text{ W/m}^2$  au cours de l'année, dans un plan orthogonal aux rayons du Soleil. Ce rayonnement n'est pas constant au cours de l'année, la Terre décrivant une orbite elliptique autour du Soleil. La distance Terre-Soleil fluctue ainsi d'environ 3.5 % autour de sa valeur moyenne pendant l'année. Ce rayonnement fonction de la date est appelé rayonnement solaire extraterrestre.

Le calcul de ce rayonnement solaire extraterrestre pour le  $n^{\text{ème}}$  jour de l'année,  $G_0(n)$ , s'effectue à partir de la connaissance des variations de la distance Soleil-Terre.  $G_0(n)$  s'exprime ainsi sous la forme :

$$G_0(n) = G_{sc} \times \left( \frac{R_m}{R(n)} \right)^2 \quad (3.1)$$

Où  $R(n)$  est la distance Terre-Soleil pour le  $n^{\text{ème}}$  jour de l'année,  $R_m$  est la distance moyenne entre le Soleil et la Terre et  $G_{sc}$  est la valeur moyenne du rayonnement solaire au sommet de l'atmosphère terrestre dans le plan orthogonal aux rayons.  $G_{sc}$  est aussi appelée constante solaire. Nous la prendrons égale à  $1367 \text{ W/m}^2$  [72].

Le ratio  $\left( \frac{R_m}{R(n)} \right)^2$  a été déterminé sous la forme de série trigonométrique par Spencer [220] :

$$\left( \frac{R_m}{R(n)} \right)^2 = 1.00011 + 0.034221 \cos B + 0.00128 \sin B - 0.000719 \cos 2B + 0.000077 \sin 2B \quad (3.2)$$

Avec  $B = 360 \times \frac{n-1}{365}$ .

Cette expression est utilisée telle quelle par Davies [63], mais certains auteurs comme Duffie et Beckmann la simplifient en ne conservant que les deux premiers termes :

$$\left( \frac{R_m}{R(n)} \right)^2 = 1 + 0.033 \cos B \quad (3.3)$$

Il faut en effet noter que les imprécisions les plus importantes dans le calcul du rayonnement solaire au sol sont dues aux phénomènes atmosphériques et sont bien plus importantes que les termes présentés ici qui ont une incidence d'environ 0.1 % sur le rayonnement total.

Nous avons ici considéré une surface orthogonale aux rayons du Soleil. L'inclinaison de la surface étudiée, qu'elle soit due à la position géographique (latitude et longitude) ou la pente de la surface doit être considérée.

### 3.1.3 Rayonnement reçu sans atmosphère, pour un lieu donné

Nous utilisons des considérations géométriques afin de déterminer le rayonnement solaire qui serait reçu à la surface de la Terre en l'absence d'atmosphère sur une surface plane ou inclinée. Pour cela, nous cherchons à connaître la position du Soleil dans le ciel, ce qui peut être réalisé en connaissant l'angle que font les rayons du Soleil avec la verticale de la surface étudiée,  $\theta$ , c'est-à-dire l'angle d'incidence, compris entre 0 et 90°, ainsi que l'angle d'azimut, la direction de la projection du rayon dans un plan horizontal par rapport à la direction du Sud, avec une orientation positive vers l'Est.

Le calcul de l'angle d'incidence  $\theta$  fait intervenir plusieurs paramètres :

- $\phi$  : la latitude, la position angulaire du lieu étudié par rapport au plan de l'équateur, positive au Nord de l'équateur, négative au Sud.
- $\delta$  : la déclinaison, la position angulaire du Soleil au midi solaire par rapport au plan de l'équateur, avec une orientation positive vers le Nord.
- $\beta$  : la pente, l'angle entre l'horizontale et la surface étudiée
- $\gamma_s$  : l'angle azimutal du Soleil, la position angulaire de la projection des rayons solaires sur une surface plane. L'angle azimutal solaire est nul pour une projection vers le Sud et est orienté positif vers l'Ouest.
- $\gamma$  : l'angle d'azimutal de la surface, la déviation sur une surface horizontale de la normale à la surface étudiée, avec une orientation positive vers l'Ouest et une valeur nulle pour une normale orientée vers le Sud.
- $\omega$  : l'angle horaire, la position du Soleil à l'Ouest ou à l'Est du méridien local. Cet angle permet de prendre en compte la rotation de la Terre sur elle-même au rythme de  $15^\circ$  par heure. L'angle est négatif le matin et positif l'après-midi :  $\omega = 15 \times (h_{\text{sol}} - 12)$  avec  $h_{\text{sol}}$  l'heure solaire et  $\omega$  en degrés.
- $\theta_z$  : l'angle de zénith, l'angle d'incidence du rayonnement solaire sur une surface plane

Les angles  $\theta_z$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_s$  et  $\gamma$  sont représentés sur la figure 3.2.

Pour une surface plane, avec  $\beta = 0$ , la position du Soleil dans le ciel peut donc s'obtenir en connaissant l'angle de zénith  $\theta_z$  et l'angle azimutal  $\gamma_s$ .

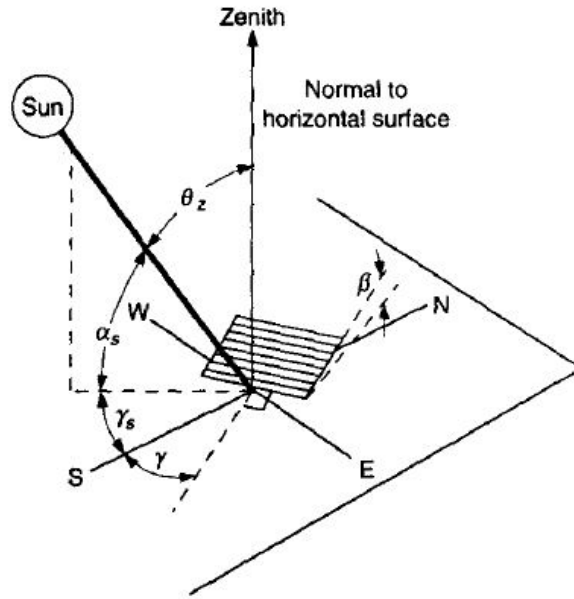


FIGURE 3.2 – Principaux angles intervenant dans le calcul du rayonnement solaire (d’après [73])

La latitude  $\phi$ , la pente  $\beta$ , l’angle azimutal de la surface  $\gamma$  et l’heure sont supposées connus. L’angle de déclinaison  $\delta$ , exprimé en degrés pour le  $n^{\text{ème}}$  jour de l’année, s’écrit, d’après [56] :

$$\delta = 23.45 \sin \left( \frac{284 + n}{365} \times 360 \right) \quad (3.4)$$

### Détermination de l’heure solaire

L’heure solaire est le temps basé sur la position angulaire du Soleil dans le ciel, et tel que, au midi solaire, le Soleil est aligné avec le méridien local. Le temps solaire ne coïncide généralement pas avec le temps légal, c’est-à-dire avec l’heure qu’il est sur le fuseau horaire auquel appartient le lieu étudié. Il est ainsi nécessaire d’appliquer deux corrections.

Étant donné que l’heure légale est relative à un fuseau horaire, celui de l’heure UTC+X, lui-même relié à un méridien de référence, il faut d’abord corriger l’heure légale pour qu’elle corresponde à celle du méridien de référence. Pour cela, étant donné que le Soleil met 4 minutes pour parcourir chaque degré de longitude, la valeur de cette première correction s’écrit, en minutes :  $4 \times (L_{leg} - L_{loc})$ , où  $L_{leg}$  et  $L_{loc}$  sont respectivement les longitudes du méridien légal et du méridien local (en degrés), avec  $L_{loc} = 15 \times X$ . Il est à noter que cette correction tient compte de l’heure d’été et de l’heure d’hiver. Ainsi, à Paris, pour la longitude  $2.35^\circ$ , à l’heure d’été (UTC+2), le méridien local est  $30^\circ$ , qui passe par l’Europe de l’Est (Finlande, Russie, Ukraine) et donc la correction à apporter, par rapport à l’heure légale, est d’une heure et cinquante minutes à retirer.

La seconde correction à apporter provient des variations de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. Cette seconde correction  $E$  (en minutes) s’écrit, pour le  $n^{\text{ème}}$  jour de l’année, d’après [220]<sup>1</sup> :

$$E = 229.2 (0.0000075 + 0.001868 \cos B - 0.032077 \sin B - 0.014615 \cos 2B - 0.040849 \sin 2B) \quad (3.5)$$

Avec  $B = 360 \times \frac{n - 1}{365}$ . La variation de cette correction au cours du temps est représentée sur la figure 3.3.

On a donc la différence suivante, exprimée en heures, entre l’heure solaire  $h_{sol}$  et l’heure légale  $h_{leg}$  :

1. les corrélations données par [72] et [123] avec 0.000075 et 0.4089 au lieu de respectivement 0.0000075 et 0.40849 semblent provenir d’une erreur dans la première version de [220] ainsi que d’une erreur lors de la copie des coefficients (voir [http://pvlib-python.readthedocs.io/en/latest/\\_modules/pvlib/solarposition.html](http://pvlib-python.readthedocs.io/en/latest/_modules/pvlib/solarposition.html) et <https://www.mail-archive.com/sundial@uni-koeln.de/msg01050.html>)

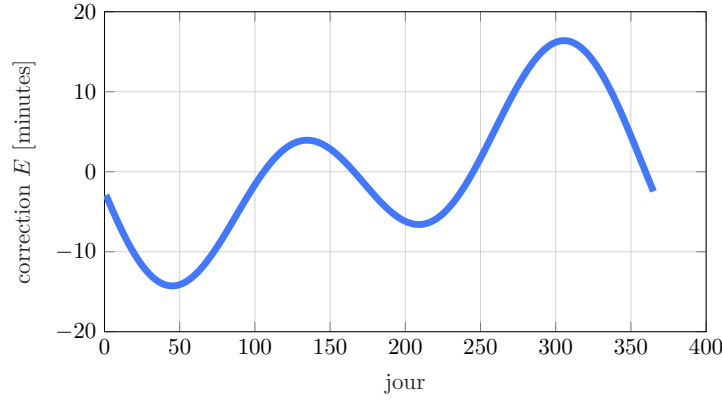


FIGURE 3.3 – Correction due à la variation de la vitesse de rotation de la Terre en fonction du jour de l'année

$$h_{\text{sol}} - h_{\text{leg}} = \frac{4}{60} \times (L_{\text{loc}} - L_{\text{leg}}) + \frac{E}{60} \quad (3.6)$$

### Détermination de l'angle d'incidence

L'angle d'incidence peut alors être déterminé à l'aide des relations (3.7) ou (3.8) (d'après Duffie et Beckmann, [73])

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \delta \sin \phi \cos \beta \\ &\quad - \sin \delta \cos \phi \sin \beta \cos \gamma \\ &\quad + \cos \delta \cos \phi \cos \beta \cos \omega \\ &\quad + \cos \delta \sin \phi \sin \beta \cos \gamma \cos \omega \\ &\quad + \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \sin \omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\cos \theta = \cos \theta_z \cos \beta + \sin \theta_z \sin \beta \cos (\gamma_s - \gamma) \quad (3.8)$$

Pour une surface plane, avec  $\beta = 0$ , la relation (3.7) permet d'avoir :

$$\cos \theta = \cos \theta_z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos \omega \quad (3.9)$$

### Détermination de l'angle d'azimut

L'angle d'azimut des rayons solaires,  $\gamma_s$ , peut aussi être obtenu à partir de considérations géométriques, par la relation (3.10) [72] :

$$\gamma_s = \text{sign}(\omega) \left| \arccos \left( \frac{\cos \theta_z \sin \phi - \sin \delta}{\sin \theta_z \cos \phi} \right) \right| \quad (3.10)$$

L'évolution de l'angle azimutal en fonction du temps pour deux dates est représenté en fonction de l'heure de la journée sur la figure 3.4.

Le décalage entre les deux courbes pendant la nuit provient du changement d'heure. On retrouve bien dans les deux cas que le Soleil se lève à l'Est (azimut négatif) et se couche à l'Ouest (azimut positif).

### Détermination du rayonnement solaire incident

Le rayonnement extraterrestre reçu sur une surface s'écrit :

$$G = G_0 \cos \theta \quad (3.11)$$

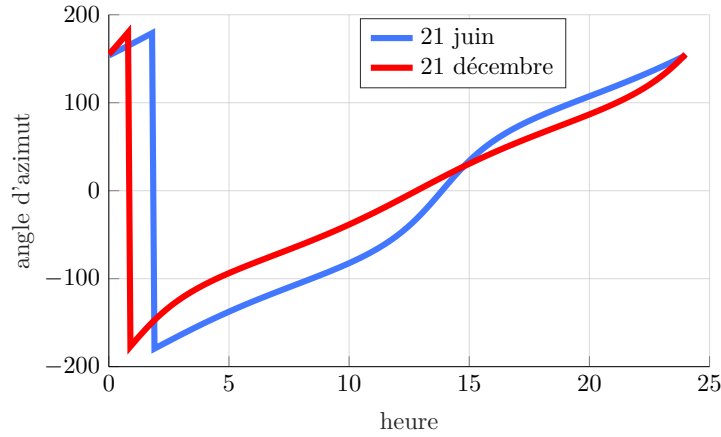


FIGURE 3.4 – Évolution de l’angle azimutal en fonction du temps à Paris pour les solstices

Il est à noter que l’angle d’azimut n’apparaît pas explicitement ici. L’azimut sert ici à connaître la position du Soleil dans le ciel, et donc à connaître la direction des rayons, et non pas seulement leur inclinaison par rapport à la verticale.

Pour obtenir la densité de flux solaire arrivant sur une surface, seule la connaissance de l’angle de zénith est nécessaire. Dans le cas d’une surface plane, il suffit donc de disposer des coordonnées géographiques du lieu étudié et de l’heure solaire. Dans le cas d’une surface non plane, l’obtention de l’azimut est un préalable nécessaire.

À partir des relations précédemment établies, le rayonnement solaire reçu, sans atmosphère, peut être déterminé en tout point de la Terre et pour toute date, pourvu qu’on dispose de ses coordonnées géographiques. L’évolution de la densité de flux solaire est représentée pour quelques villes dans le monde sur les figures 3.5 et 3.6, respectivement pour le 21 juin et le 21 décembre. L’évolution de la densité de flux solaire peut aussi être représentée pour un lieu donné à différentes dates, comme c’est le cas pour la figure 3.7.

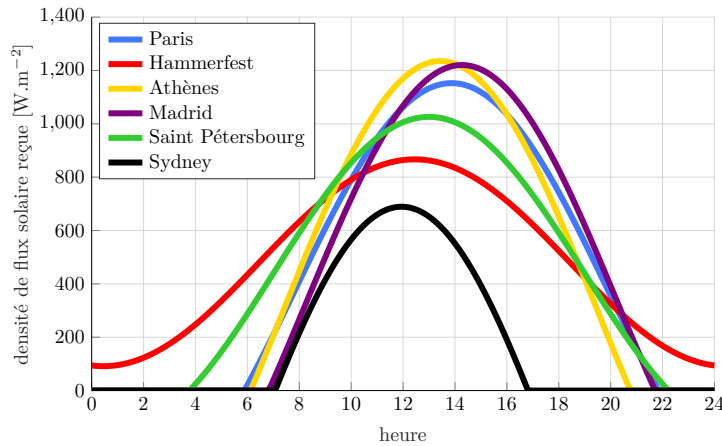


FIGURE 3.5 – Densité de flux solaire le 21 juin sur une surface plane

La figure 3.5, pour le solstice d’été, fait apparaître le phénomène du Soleil de minuit, avec, pour Hammerfest, ville située au-delà du cercle polaire, avec le Soleil visible pendant toute la journée. La durée du jour est supérieure à 12 heures pour les villes de l’hémisphère Nord et cette durée est d’autant plus importante que la ville est située au Nord. L’intensité du rayonnement solaire est cependant maximale au niveau du tropique du Capricorne.

Au contraire, au moment du solstice d’hiver, la durée d’éclairement augmente lorsqu’on se dirige vers le Sud, avec un Soleil non visible au-delà du cercle polaire arctique.

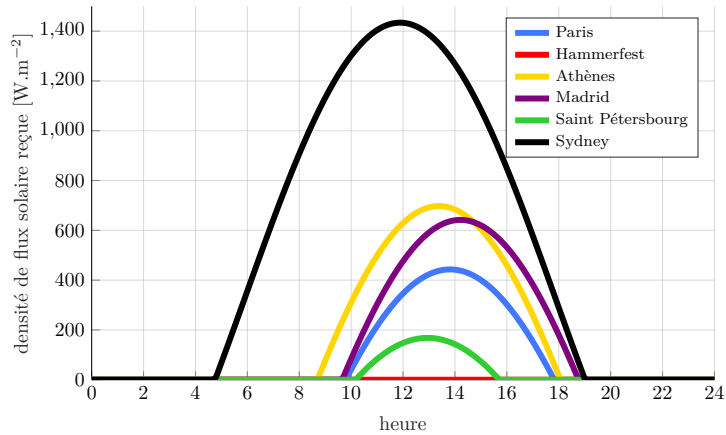


FIGURE 3.6 – Densité de flux solaire le 21 décembre sur une surface plane

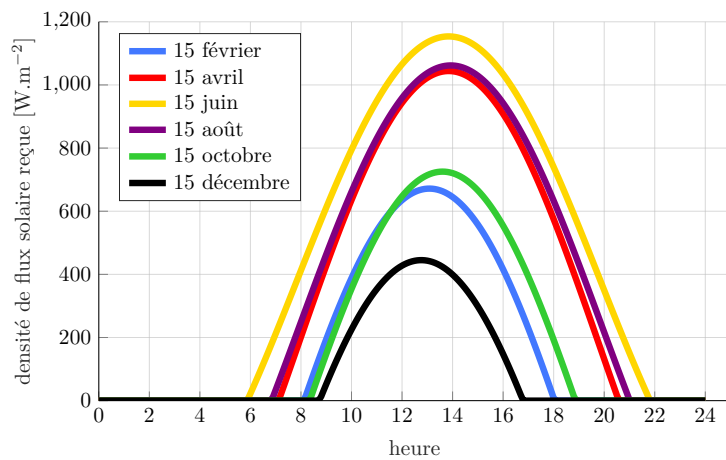


FIGURE 3.7 – Densité de flux solaire pour différentes dates à Paris sur une surface plane

### 3.1.4 Rayonnement solaire reçu par temps clair

Le paragraphe précédent a permis de connaître le rayonnement qui serait reçu en un lieu donné en l'absence d'atmosphère. Celle-ci absorbe une quantité non négligeable du rayonnement solaire. Pour comprendre ce phénomène d'absorption, il faut décomposer le rayonnement solaire selon les longueurs d'onde et obtenir ainsi son spectre : s'il est proche de celui d'un corps noir en dehors de l'atmosphère, certains composants de l'atmosphère absorbent le rayonnement, en particulier près de certaines longueurs d'ondes.

Nous présentons donc dans ce paragraphe d'abord le spectre solaire, puis des corrélations, avec différents niveaux de précision, afin de déterminer la densité de flux solaire reçue à la surface de la Terre. Plusieurs cas sont ainsi étudiés, d'abord pour un temps clair, en l'absence de nébulosité, puis pour un temps couvert.

#### Détermination du rayonnement solaire reçu par temps clair, sans prise en compte explicite de données atmosphériques

Le flux solaire reçu à la surface de la Terre, donc après traversée de l'atmosphère, peut être divisé en deux composantes : un flux solaire direct  $G_d$ , orienté selon la direction Soleil-Terre, et un flux solaire diffus  $G_s$ , pour le rayonnement orienté selon les autres directions. Ce dernier provient de la déviation d'une partie du rayonnement solaire direct au cours de sa traversée de l'atmosphère par des phénomènes optiques, et en particulier des effets de réflexion et de réfraction par les gouttelettes d'eau présentes dans l'atmosphère et dans les nuages. Ainsi, [117] estime que, par temps clair et pour un Soleil à son zénith (angle d'incidence nul), 72 % du rayonnement solaire extraterrestre parvient au sol sous forme directe

et 7 % sous forme diffuse. 18 % du rayonnement est absorbé par l'atmosphère et 3 % est renvoyé à l'atmosphère.

Lorsque l'humidité est élevée, que l'air est pollué ou plus généralement lorsque le Soleil n'est pas visible dans le ciel, c'est le rayonnement solaire diffus qui est à l'origine de la luminosité. Par temps clair, ce sera au contraire le rayonnement direct qui sera prépondérant. On a donc  $G = G_d + G_s$ .

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques corrélations simples permettant d'obtenir une approximation du flux solaire reçu à la surface de la Terre par temps clair connaissant l'angle de zénith  $\theta$  du Soleil. Nous noterons par la suite  $G_c$ ,  $G_{dc}$  et  $G_{sc}$  respectivement le flux solaire total, le flux solaire direct et le flux solaire diffus reçus à la surface de la Terre sur une surface plane par temps clair. Ces corrélations prennent en compte seulement la longueur d'atmosphère que doivent traverser les rayons du Soleil, elle-même liée à l'angle de zénith  $\theta_z$  : en première approximation, la longueur d'atmosphère traversée, aussi appelée masse d'air, est proportionnelle à  $\frac{1}{\cos \theta_z}$ .

- Corrélation de Daneshyar-Paltridge, issue de l'analyse de données australiennes pour le rayonnement direct [186]<sup>2</sup> et de données américaines pour le rayonnement diffus [61]<sup>3</sup>. Le terme  $\cos \theta$  de la corrélation (3.12) vient du fait que cette corrélation permet initialement le calcul du rayonnement direct selon la direction de l'azimut.

$$G_{dc} = 950 \left( \exp \left( -1.3 \times 10^{-3} (\theta_z - 90) \right) \right) \cos \theta \quad (3.12)$$

$$G_{sc} = 25.3 + 0.606 (90 - \theta_z) \quad (3.13)$$

$$G_c = G_{dc} + G_{sc} \quad (3.14)$$

- Corrélation de Kasten et Czeplak, issue de l'analyse de données pour la ville de Hambourg [133] :

$$G_c = 910 \cos \theta_z - 30 \quad (3.15)$$

- Corrélation de Haurwitz, obtenue à partir de mesures réalisées dans le Massachusetts [105] :

$$G_c = 1097 \cos \theta_z \exp \left( \frac{-0.059}{\cos \theta_z} \right) \quad (3.16)$$

- Corrélation de Adnot (d'après [12]) :

$$G_c = 951.39 \cos (1.15\theta_z) \quad (3.17)$$

- Corrélation de Allen, obtenue à partir de l'intégration de la loi de Beer [3]. Cette corrélation donne le coefficient de transmission par temps clair, c'est-à-dire le ratio entre le rayonnement reçu à la surface de la Terre et le rayonnement extraterrestre :

$$\tau_g = \exp \left( \frac{-0.0018P}{K_{tb} \cos \theta_z} \right) \quad (3.18)$$

Où  $K_{tb}$  est un coefficient de clarté, compris entre 0.5 et 1, la valeur 0.5 correspondant à un air très pollué et la valeur 1 à un air pur.  $P$  est la pression atmosphérique en kPa. La valeur de  $G_c$  est donc donnée par :

$$G_c = G_0 \tau_g \cos \theta \quad (3.19)$$

- Corrélation de Meinel, établie d'après des mesures réalisées dans l'Ohio, donnée par [117]. Elle permet d'exprimer la composante directe du flux solaire reçu à la surface de la Terre :

$$G_d = 1353 \times 0.7^{M^{0.678}} \times \cos \theta \quad (3.20)$$

---

2. la représentation graphique de la corrélation d'origine fait apparaître une incohérence avec une augmentation de  $G_{dc}$  pour de petits angles d'incidence. De plus, il est précisé dans [186] que "If the sun were vertically overhead [ $G_{dc}$ ] would be 950 W.m<sup>-2</sup>". Une adaptation a donc été faite

3. Une erreur d'un facteur 10 semble être présente dans cet article, donnant des valeurs trop faibles pour le rayonnement diffus. [12] applique, sans l'expliquer, un coefficient correcteur égal à 10 que nous reproduisons ici.



Où la valeur 1353 correspond à la constante solaire utilisée par Meinel, la valeur 0.7 à la part de rayonnement solaire transmise à travers l'atmosphère pour un parcours minimal à travers celle-ci et  $M$  est la masse d'air traversée. Cette corrélation peut s'écrire à l'aide d'un coefficient de transmission pour le rayonnement direct,  $\tau_d$  défini de la façon suivante :

$$G_d = \tau_d G_0 \cos \theta_z \quad (3.21)$$

Avec ici  $\tau_d = 0.7^{M^{0.678}}$ . Pour obtenir  $M$ , Armstrong (2010) [8] utilise la relation donnée par Kasten [132] :

$$M = \frac{1}{\cos(\theta_z) + 0.50572(96.07995 - \theta_z)^{-1.6364}} \quad (3.22)$$

Pour Hu [117] qui reprend la corrélation de Meinel, pour un éclaircissement vertical lors d'une journée sans nuage, en plus de 72 % de rayonnement extraterrestre qui parvient à la surface de la Terre de façon directe, 7 % y arrive en étant diffusé de façon approximativement isotrope. Armstrong [8] généralise cela pour toute heure d'une journée ensoleillée en proposant pour le rayonnement total :

$$G = 1.1 \times G_d \quad (3.23)$$

- Corrélation de Hottel, établie à partir de mesures réalisées pour différents climats et différentes altitudes. Cette corrélation introduit, comme pour celle de Adnot, un coefficient de transmission, mais pour le rayonnement direct  $\tau_d$ , qui dépend de l'altitude et du lieu étudié :

$$\tau_d = a_0 + a_1 \exp\left(\frac{-k}{\cos \theta_z}\right) \quad (3.24)$$

Avec :

$$a_0 = r_0(0.4237 - 0.00821(6 - h)^2) \quad (3.25)$$

$$a_1 = r_1(0.5055 + 0.00595(6.5 - h)^2) \quad (3.26)$$

$$k = r_k(0.2711 + 0.01858(2.5 - h)^2) \quad (3.27)$$

Où  $h$  est l'altitude du lieu considéré (en km) et les coefficients  $r_i$  sont des facteurs de correction qui dépendent du climat et sont compris entre 0.95 et 1.03.

Par temps clair, le rayonnement diffus peut s'obtenir en considérant, comme pour la corrélation de Meinel (3.23), qu'il représente 10 % du rayonnement direct.

Une comparaison de ces corrélations est proposée sur la figure 3.8. Cette figure laisse apparaître une cohérence entre les corrélations représentées, la corrélation basée sur les travaux de Paltridge et Daneshyar surestime la densité de flux solaire par rapport aux autres corrélations alors qu'Adnot la sous-évalue. Pour un même angle d'incidence, les valeurs obtenues pour la densité de flux solaire appartiennent à un intervalle s'étendant sur environ 200 W.m<sup>-2</sup>.

La corrélation de Meinel donne ici des valeurs de densité de flux solaire dans la moyenne des autres corrélations et pourra donc être utilisée par la suite.

### Prise en compte détaillée des phénomènes d'absorption

Des considérations géométriques basées uniquement sur l'utilisation des angles azimutaux ne permet pas de prendre en compte dans le détail les phénomènes d'absorption et de diffusion qui s'y produisent. Ces corrélations ne prennent en particulier pas en compte la concentration dans l'atmosphère des composants qui dévient la trajectoire des rayons lumineux, c'est pourquoi nous présentons, dans ce paragraphe, des modèles plus détaillés permettant d'avoir une estimation de l'impact de chacun des phénomènes optiques sur le rayonnement solaire reçu au sol.

La densité de flux solaire direct  $G_d$  reçue à la surface de la Terre par temps clair peut ainsi être défini comme étant le flux solaire extraterrestre atténué par les phénomènes d'absorption et de diffusion intervenant dans l'atmosphère [28, 150]. Le flux solaire diffus résulte, quant à lui, des phénomènes de diffusion atmosphérique et des réflexions multiples entre le sol et les couches nuageuses.

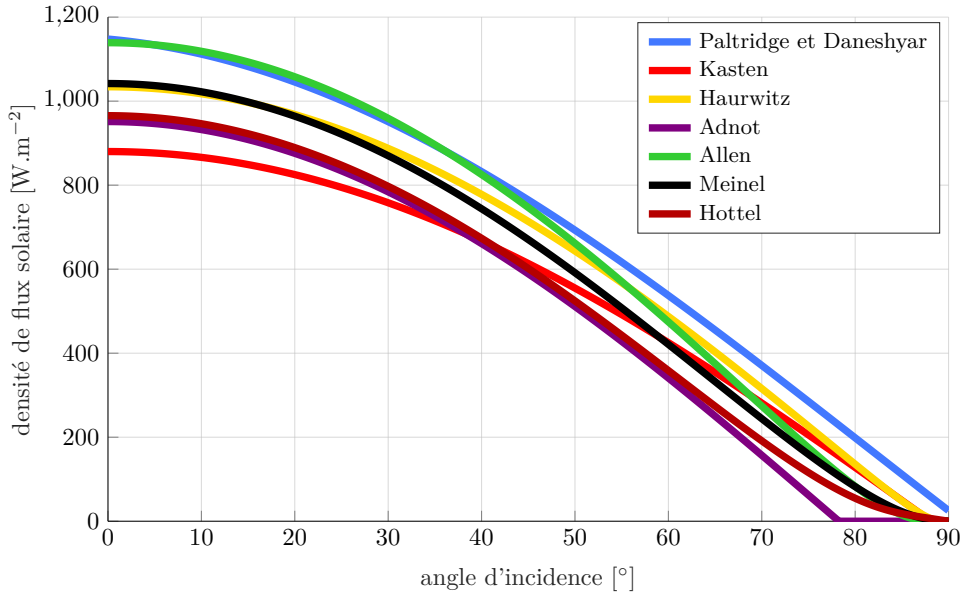


FIGURE 3.8 – Comparaison de corrélations donnant la densité de flux solaire par temps clair

Il est alors possible de définir des coefficients de transmission relatif à chacun de ces phénomènes, et nous noterons dans la suite de ce paragraphe  $\tau_r$ ,  $\tau_o$ ,  $\tau_w$ ,  $\tau_a$ ,  $\tau_u$  et  $\tau_c$  les coefficients de transmission associés respectivement à la diffusion de Rayleigh, à l'absorption par l'ozone, à l'absorption par la vapeur d'eau, à l'absorption et à la diffusion par les aérosols, à l'absorption et la diffusion par les autres gaz de l'atmosphère et à l'absorption et la diffusion par la couverture nuageuse.

Les phénomènes d'absorption et de diffusion étant dépendants de la longueur d'onde du rayonnement, on peut aussi exprimer ces coefficients de transmission pour chaque longueur d'onde. Ils représentent alors l'irradiance (flux par unité de longueur d'onde) transmise pour chaque phénomène pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée.

Nous présentons donc par la suite ces coefficients de transmission pour chacun des phénomènes atmosphériques.

**Diffusion de Rayleigh** La diffusion de Rayleigh est un phénomène qui se produit lorsqu'une onde électromagnétique traverse une particule dont la taille est beaucoup plus petite que la longueur d'onde. En effet, l'onde électromagnétique, qui peut être décrite comme un champ électrique, déforme le nuage électronique des atomes et modifie ainsi la répartition des polarités à l'intérieur de l'atome, créant ainsi un dipôle électrostatique qui va réémettre une partie des ondes le traversant dans toutes les directions, cette diffusion étant inversement proportionnelle à la puissance quatre de la longueur d'onde.

Ce sont ainsi les émissions aux longueurs d'onde les plus faibles qui sont le plus soumises à la diffusion de Rayleigh, et c'est pourquoi le ciel apparaît bleu par temps clair. Au début et à la fin de la journée, lorsque la distance que doivent parcourir les rayons du Soleil à travers l'atmosphère est maximale, et donc lorsque le nombre de particules à travers lesquelles se produit la diffusion de Rayleigh augmente, la diffusion des longueurs d'onde plus élevées (jaune et rouge) devient plus importante et le ciel prend alors des teintes plus orangées.

Plusieurs corrélations existent pour estimer le coefficient de transmission  $\tau_{r\lambda}$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  existant dans la littérature. On peut par exemple citer celles de [134] donnée par (3.28) (d'après [28]) ou (3.29) de [150].

$$\tau_{r\lambda} = \exp(-M' / [\lambda^4 (115.6406 - 1.335/\lambda^2)]) \quad (3.28)$$

$$\tau_{r\lambda} = \exp(-0.008735\lambda^{-4.08}) \quad (3.29)$$

$M'$  est la masse d'air relative corrigée :  $M' = M \frac{P}{P_0}$  avec  $P$  la pression au niveau du sol (en mb)

et  $P_0=1013$  mb.  $M$  est la masse d'air relative, qui représente la longueur d'atmosphère traversée par le rayonnement solaire, et dépend donc l'angle d'incidence  $\theta_z$ .  $M$  peut s'obtenir de différentes manières. Une des corrélations donnant ce paramètre provient d'une approximation de l'intégration de la masse d'air sous la forme :

$$M = \frac{1}{\cos \theta_z + a (b - \theta_z)^{-c}} \quad (3.30)$$

Kasten (1965) calcule les coefficients  $a = 0.15$ ,  $b = 93.885^\circ$  et  $c = 1.253$ , repris par le modèle de Josefsson [26, 63]. Une correction est apportée par Kasten (1989) [132] et reprise plus tard par [8] à cause de valeurs trop faibles dues à une erreur de calcul pour de faibles élévations du Soleil dans le ciel. Les coefficients suivants sont retenus :  $a = 0.50572$ ,  $b = 96.07995^\circ$  et  $c = 1.6364$ .

Une autre corrélation est utilisée par [63, 142] :

$$M = \frac{35}{\left(1 + 1224 (\cos \theta_z)^2\right)^{0.5}} \quad (3.31)$$

De façon plus simple, on peut aussi utiliser, d'après [73] :

$$M = \frac{1}{\cos \theta} \quad (3.32)$$

D'autres expressions permettent de déterminer un coefficient de transmission global  $\tau_r$ , correspondant au rayonnement solaire total transmis par temps clair, comme celles associées aux modèles de Bird [27], de McMaster [63] ou de Josefsson (d'après [63]) :

$$\tau_r = \exp \left( -0.0903 M^{0.84} [1 + M' - M'^{1.01}] \right) \quad (3.33)$$

$$\tau_r = \frac{X}{1 + X} \quad (3.34)$$

Avec  $X = 8.688234 M a$  et  $a = 0.0279286 \ln M - 0.806955$ .

$$\begin{aligned} \tau_r = & 0.9768 - 0.0874 M + 0.010607552 M^2 - 8.46205 \times 10^{-4} M^3 \\ & + 3.57246 \times 10^{-5} M^4 - 6.0176 \times 10^{-7} M^5 \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Diffusion par les composants de l'atmosphère** Les gaz présents dans l'atmosphère absorbent une partie du rayonnement solaire, et ceci en particulier autour de certaines longueurs d'ondes spécifiques à chaque composant de l'atmosphère, et cette absorption est d'autant plus forte que la concentration du composant est élevée.

Cette absorption par les constituants de l'atmosphère à certaines longueurs d'onde provient des quanta d'énergie : l'énergie  $E$  d'un système ne peut, d'après la mécanique quantique, pas prendre n'importe quelle valeur et seuls certains niveaux d'énergie sont possibles. Ainsi, les variations d'énergie  $\Delta E$  que peut subir un système sont dites quantifiées. Un système passant d'un niveau d'énergie  $E_1$  à un autre niveau d'énergie  $E_2$  supérieur absorbe ainsi un photon d'énergie  $E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$  où  $h$  est la constante de Planck ( $h = 6.63 \times 10^{-34}$  J.s) et  $\nu$  la fréquence du photon.

Le phénomène inverse existe : un système passant d'un niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau d'énergie inférieur  $E_2$  émet un photon de fréquence  $\nu$  vérifiant  $E_1 - E_2 = h\nu$ .

Ce sont ces variations d'énergie qui provoquent l'absorption du rayonnement pour certaines longueurs d'ondes qui permettent de passer d'un niveau d'énergie à un autre.

Les principaux absorbeurs de rayonnement solaire dans l'atmosphère sont le méthane, le protoxyde d'azote, l'ozone, le dioxyde de carbone et la vapeur d'eau. C'est en particulier l'ozone qui absorbe les rayonnements les plus énergétiques, notamment le rayonnement UV, pour des longueurs d'ondes inférieures à 300 nm. Une représentation des coefficients d'absorption pour chacun de ces composants de l'atmosphère est présentée sur la figure 3.9, issue de [191]. Le rayonnement solaire arrivant à la surface est ainsi absorbé par chacun de ces composants. Le coefficient d'absorption global, pour un rayonnement vertical, est représenté sur la figure 3.10, d'après [191].

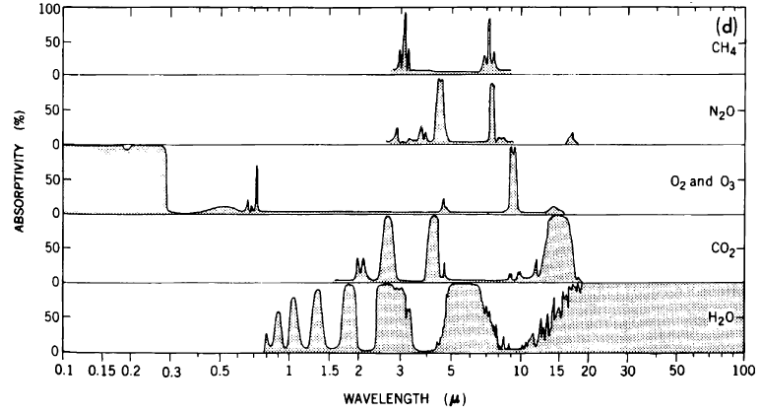


FIGURE 3.9 – Coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde pour certains composants de l'atmosphère (d'après [191])

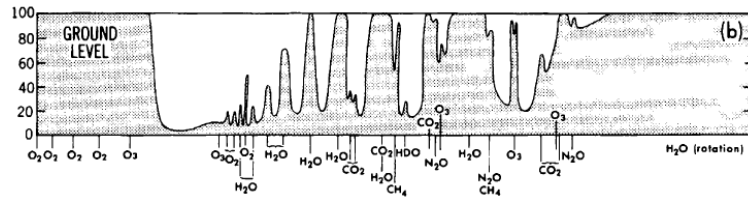


FIGURE 3.10 – Coefficient d'absorption du rayonnement solaire prenant en compte l'absorption par les différents gaz qui constituent l'atmosphère et pour un rayonnement vertical (d'après [191])

**Corrélations détaillées pour le calcul du rayonnement par temps clair** Plusieurs corrélations dans la littérature proposent d'utiliser des paramètres physiques, autres que l'angle d'incidence, pour déterminer la densité de flux solaire qui parvient au sol. En particulier, l'humidité intervient dans ces calculs.

- Modèle de Barbaro : Le flux solaire direct par temps clair  $G_{dc}$  s'écrit ici, connaissant le flux solaire total  $G_c$  :

$$G_{dc} = G_c [a_1 + b_1 W - a_3 (d - 400)] \exp(-[a_2 + b_2 W + b_3 (d - 400)] M) \quad (3.36)$$

Où  $d$  est la quantité de particules par  $\text{cm}^2$ ,  $W$  est la hauteur d'eau (en mm),  $M$  est la masse d'air, obtenue en fonction de l'angle d'incidence par (3.30), (3.31) ou (3.32).

Les valeurs suivantes des coefficients sont utilisées :  $a_1 = -0.1349$ ,  $a_2 = 0.13708$ ,  $a_3 = 3.68 \times 10^{-5}$ ,  $b_1 = -4.28 \times 10^{-3}$ ,  $b_2 = 2.61 \times 10^{-3}$  et  $b_3 = 1.131 \times 10^{-4}$ .

Soit de plus  $G_w$  le flux solaire qui serait transmis par temps clair en l'absence de diffusion, c'est-à-dire en ne prenant en compte que les phénomènes d'absorption.  $G_w$  s'écrit, selon ce modèle, :

$$G_w = G_c (0.938 \exp(-0.00154 MW)) + 2.97 \times 10^{-3} (MW)^{2.1} - 7.73 \times 10^{-6} (MW)^3 + 85.1 \frac{1 + MW}{1 + 10(MW)^2} \quad (3.37)$$

Le flux solaire diffus  $G_{sc}$  s'exprime par :

$$G_{sc} = 0.5 (\cos \theta)^{1/3} (G_w - G_{dc}) \quad (3.38)$$

- Modèle de Allen (1996) [3, 4]

Ce modèle permet d'exprimer les coefficients de transmission pour les rayonnements direct  $\tau_d$  et diffus  $\tau_s$ , définis comme le ratio entre le rayonnement direct ou diffus reçu et le rayonnement extraterrestre incident sur une surface plane. Ce modèle permet en particulier de prendre en compte la hauteur d'eau présente dans l'atmosphère :

$$\tau_d = 0.98 \exp \frac{-0.00146P}{K_{tb} \cos \theta} - 0.091 \left( \frac{W}{\cos \theta} \right)^{0.25} \quad (3.39)$$

Avec  $P$  la pression atmosphérique (en kPa),  $W$  la hauteur d'eau dans l'atmosphère (en cm).  
 $W$  peut être obtenue par Garrison (1990) [89], mentionnée par [3] :

$$W = 0.014e_d P + 0.21 \quad (3.40)$$

Avec  $e_d$  la pression de vapeur (en kPa). Le coefficient de transmission pour l'irradiance diffuse est ensuite donné par :

$$\tau_s = \begin{cases} 0.35 - 0.33\tau_d & \text{pour } \tau_d \geq 0.15 \\ 0.18 + 0.82\tau_d & \text{pour } \tau_d < 0.15 \end{cases} \quad (3.41)$$

- Modèle de MacMaster
- des modèles plus détaillés (Bird [28], Davies [64], Josefsson [63]) sont présentés en annexe

### 3.1.5 Rayonnement reçu en présence de nuages

Les nuages ont un double effet sur le rayonnement solaire qui parvient à la surface de la Terre : une partie du rayonnement extraterrestre est absorbé par les gouttelettes d'eau et une autre est déviée. Le rayonnement qui parvient au sol est alors généralement plus faible que par temps clair et la composante diffuse est plus importante.

La nébulosité est généralement évaluée en considérant la fraction de ciel recouverte par des nuages. Nous notons  $n$  cette fraction, comprise entre 0, pour un ciel entièrement dépourvu de nuages, et 1 pour un ciel complètement couvert.

Plusieurs corrélations proposent de prendre en compte la nébulosité en atténuant la densité de flux solaire directe. La contribution du rayonnement diffus dans le rayonnement total reçu est accrue.

Pour plus de clarté dans les notations, nous ajoutons l'indice  $c$  aux grandeurs calculées pour un temps clair :  $G_{dc}$ ,  $G_{sc}$  et  $G_c$  sont alors respectivement les densités de flux solaire directe, diffuse et totale par temps clair.

Pour le rayonnement direct, la plupart des auteurs considèrent qu'il est proportionnel à la fraction de ciel non recouverte de nuages [16, 61, 174] :

$$G_d = (1 - n)G_{dc} \quad (3.42)$$

Plusieurs corrélations existent dans la littérature pour chiffrer le rayonnement diffus en fonction de la nébulosité :

- Daneshyar [61]<sup>4</sup> :

$$G_s = 25.33 + 0.606(90 - \theta_z) + 200.7n \quad (3.43)$$

- Barbaro [16] : Cette corrélation revient à considérer que le rayonnement diffus est la somme de deux composantes : le rayonnement diffus par temps clair qui passe à travers les parties du ciel non recouvertes de nuages et le rayonnement total par temps clair en partie transmis par les nuages.

On a :

$$G_s = (1 - n)G_{sc} + k^*n(G_{dc} + G_{sc}) \quad (3.44)$$

Avec  $k^*$  un coefficient de transmission dépendant de la latitude, compris entre 0.32 et 0.36 entre 0 et 50° [16].

Dans cette corrélation, les effets des réflexions du rayonnement entre le sol et la base des nuages sont aussi pris en compte lors du calcul du rayonnement total. Celui-ci est alors le produit de la somme des rayonnements direct et diffus et d'un terme correctif :

$$G = \frac{G_d + G_s}{1 - \alpha(0.2 + 0.5n)} \quad (3.45)$$

Avec  $\alpha$  l'albédo du sol, compris entre 0 pour une surface qui absorbe tout le rayonnement et 1 pour une surface parfaitement réfléchissante.

---

4. [61] considère des coefficients égaux à 2.533 et 0.0606 qui aboutissent à des valeurs de rayonnement diffus incohérentes avec l'approximation faite par temps clair d'un rayonnement diffus qui représente 10 % du rayonnement direct (voir l'équation (3.23))

- Munro [174] : Pour cette corrélation, la prise en compte des réflexions multiples entre le sol et la base des nuages est réalisée lors du calcul du rayonnement diffus. Celui-ci comporte alors trois composantes : le rayonnement diffus qui passe à travers la partie non nuageuse du ciel, le rayonnement qui traverse les nuages et donc le rayonnement issu des réflexions multiples entre le sol et la base des nuages. On a alors  $G_s = G_{s1} + G_{s2} + G_{s3}$  avec :

$$G_d = G_{dc}(1 - n) \quad (3.46)$$

$$G_{s1} = (1 - n)G_{sc} \quad (3.47)$$

$$G_{s2} = nG_{dc}(1 - a_n - \alpha_n) \quad (3.48)$$

$$G_{s3} = (G_d + G_{s1} + G_{s2}) \frac{\alpha_b \alpha}{1 - \alpha_b \alpha} \quad (3.49)$$

Avec  $a_n$  un coefficient d'absorption pour les nuages,  $\alpha_n$  un coefficient de réflexion pour le haut des nuages,  $\alpha_b$  le coefficient de réflexion de la base des nuages et  $\alpha$  l'albédo du sol.

[186] considère une valeur de 0.18 pour  $a_n$ . Le coefficient de réflexion de la base des nuages dépend de la nature des nuages. [64] utilise des valeurs comprises entre 0.2 pour un cirrus et 0.66 pour un nimbostratus. Le coefficient de réflexion pour le haut des nuages est donné par la corrélation suivante, issue d'une adaptation d'une expression de [84] par [174]<sup>5</sup> :

$$\alpha_n = 1 + \frac{\exp(-0.5656M\chi) [\chi(1 - 1.48M) + \frac{3.54}{M} - 2.62] - \frac{3.54}{M} - 2.62}{\chi + 5.24} \quad (3.50)$$

Avec  $\chi$  le rapport entre l'épaisseur des nuages et le libre parcours moyen du rayonnement direct dans les nuages, pris égal à 1.5 par [12].

Il est à noter que le modèle de Munro s'inspire de celui de Paltridge [186], qui prend de plus en compte les différentes couches de nuages dans le ciel.

- Corrélation de Liu et Jordan [154] : cette corrélation s'appuie aussi sur les coefficients de transmission et introduit le coefficient de transmission pour le rayonnement diffus  $\tau_s$ , défini de la façon suivante :

$$\tau_d = \frac{G_d}{G_0 \cos \theta_z} \quad (3.51)$$

La corrélation est la suivante :

$$\tau_s = 0.2710 - 0.2939\tau_d \quad (3.52)$$

Et  $\tau_d$  peut être obtenu en considérant que le rayonnement direct reçu est proportionnel à la fraction de ciel dégagé :

$$\tau_d = \frac{(1 - n)G_{dc}}{G_0 \cos \theta_z} \quad (3.53)$$

Le rayonnement global en fonction de la nébulosité est représenté sur la figure 3.11 pour chacune de ces corrélations. Le cas test étudié ici est celui d'un rayonnement incliné de 45° par rapport au zénith. La corrélation de Meinel est utilisée pour obtenir les valeurs de densités de flux solaire par temps clair.

Les valeurs de densité de flux solaire ainsi calculées s'étendent sur un intervalle inférieur à 50 W.m<sup>-2</sup> quelle que soit la nébulosité.

### 3.1.6 Détermination des irradiances directe et diffuse

D'autres corrélations permettent de connaître les rayonnements direct et diffus à partir du rayonnement global reçu, en travaillant sur le rayonnement reçu pendant une journée.

Nous introduisons ici la notion d'irradiance : il s'agit de l'intégrale du rayonnement sur une durée donnée. Les indices  $d$ ,  $s$  et  $0$  font référence, comme pour le rayonnement, aux irradiances directe, diffuse et extraterrestre. On a :

5. Une erreur semble être présente dans l'expression donnée par Munro [174] : le +1 apparaît au dénominateur. Cependant, la formulation initiale donnant  $\alpha_n$  de [84], même si elle est un peu différente, laisse à penser que ce +1 n'est pas situé à la bonne place suite à une erreur de parenthèse. Badescu [12] donne aussi la corrélation que nous utilisons ici

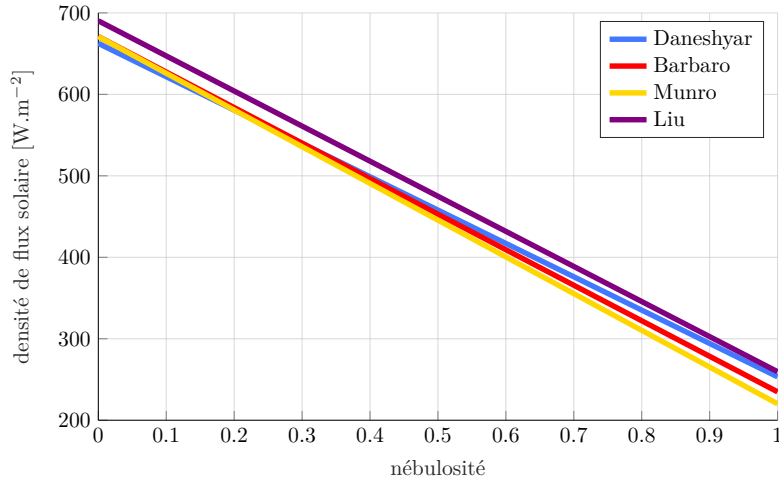


FIGURE 3.11 – Flux solaire global reçu sur une surface plane en fonction de la nébulosité pour plusieurs corrélations

$$H_d = \int_t G_d dt \quad (3.54)$$

$$H_s = \int_t G_s dt \quad (3.55)$$

$$H_0 = \int_t G_0 \cos \theta_z dt \quad (3.56)$$

Soient de plus  $K_t$  le rapport entre l'irradiance globale reçue et l'irradiance extraterrestre pour une surface plane (coefficient de transmission pour le rayonnement global), et  $K$  la part d'irradiance diffus dans l'irradiance globale. En réutilisant les notations introduites précédemment, on a :

$$K_t = \frac{H_s + H_d}{H_0} \quad (3.57)$$

$$K = \frac{H_s}{H_s + H_d} \quad (3.58)$$

Quelques unes de ces corrélations sont écrites dans la suite de ce paragraphe :

- Corrélation de Reindl [198] : En plus de  $K_t$ , d'autres données comme la température ambiante  $T_a$ , l'humidité relative  $RH$  (fractionnelle) et l'angle d'incidence  $\theta$  peuvent être utilisées :

$$K = \begin{cases} 1.000 - 0.232K_t + 0.0239 \cos \theta - 0.000682T_a + 0.0195RH & \text{pour } 0 \leq K_t \leq 0.3 \\ 1.329 - 1.716K_t + 0.267 \cos \theta - 0.00357T_a + 0.106RH & \text{pour } 0.3 < K_t \leq 0.78 \\ 0.426K_t - 0.256 \cos \theta + 0.00349T_a + 0.0734RH & \text{pour } K_t > 0.78 \end{cases} \quad (3.59)$$

Cette corrélation peut être simplifiée si on ne dispose que de l'angle d'incidence :

$$K = \begin{cases} 1.020 - 0.254K_t + 0.0123 \cos \theta & \text{pour } 0 \leq K_t \leq 0.3 \\ 1.400 - 1.749K_t + 0.177 \cos \theta & \text{pour } 0.3 < K_t \leq 0.78 \\ 0.486K_t - 0.182 \cos \theta & \text{pour } K_t > 0.78 \end{cases} \quad (3.60)$$

Dans le cas où on ne dispose pas non plus de l'angle d'incidence, la corrélation de Reindl devient :

$$K = \begin{cases} 1.020 - 0.248K_t & \text{pour } 0 \leq K_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67K_t & \text{pour } 0.3 < K_t \leq 0.78 \\ 0.147 & \text{pour } K_t > 0.78 \end{cases} \quad (3.61)$$

— Corrélation de Orgill [183]

$$K = \begin{cases} 1.0 - 0.249K_t & \text{pour } 0 \leq K_t \leq 0.35 \\ 1.557 - 1.84K_t & \text{pour } 0.35 < K_t \leq 0.75 \\ 0.177 & \text{pour } K_t > 0.75 \end{cases} \quad (3.62)$$

— Corrélation de Erbs [78] :

$$K = \begin{cases} 1.0 - 0.09K_t & \text{pour } 0 \leq K_t \leq 0.22 \\ 0.9511 - 0.1604K_t + 4.388K_t^2 - 16.638K_t^3 + 12.336K_t^4 & \text{pour } 0.22 < K_t \leq 0.80 \\ 0.165 & \text{pour } K_t > 0.80 \end{cases} \quad (3.63)$$

— Corrélation de Collares-Pereira et Rabl [55], prolongée par [72] :

$$K = \begin{cases} 0.99 & \text{pour } K_t \leq 0.17 \\ 1.188 - 2.272K_t + 9.473K_t^2 - 21.865K_t^3 + 14.648K_t^4 & \text{pour } 0.17 < K_t \leq 0.75 \\ -0.54K_t + 0.632 & \text{pour } 0.75 < K_t \leq 0.80 \\ 0.2 & \text{pour } K_t \geq 0.80 \end{cases} \quad (3.64)$$

Une comparaison de ces corrélations est proposée sur la figure 3.12. Il est à noter que la corrélation d'Orgill semble donner des valeurs dans la moyenne de celles présentées ici.

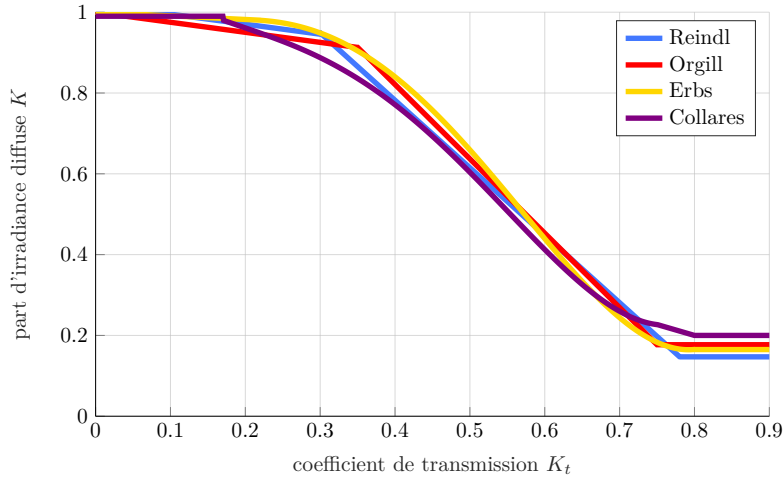


FIGURE 3.12 –  $K$  en fonction de  $K_t$  pour plusieurs corrélations

### 3.1.7 Estimation de l'irradiance journalière à partir de données météorologiques journalières

Plusieurs corrélations de la littérature permettent d'évaluer l'irradiance journalière, c'est-à-dire le rayonnement solaire reçu pendant une journée, à partir de données météorologiques comme le nombre d'heures d'ensoleillement ou les minima et maxima de température. Connaissant l'irradiance extraterrestre, obtenue en intégrant le rayonnement solaire extraterrestre sur la journée, l'objectif de ce paragraphe est de déterminer la part de cette irradiance extraterrestre qui parvient au sol, c'est-à-dire la transmittance  $K_t$ .

#### Corrélation de Angström (1924) [6]

Cette corrélation permet d'exprimer le coefficient de transmission global  $K_t$  en fonction du nombre d'heures d'ensoleillement  $n$  et du nombre d'heures d'ensoleillement maximal  $N$  :

$$K_t = a + b \frac{n}{N} \quad (3.65)$$



Avec  $a = 0.2$  et  $b = 0.5$ . Des valeurs locales de ces coefficients sont données pour le Chili par [167].

Il est à noter que cette corrélation est évoquée dans de nombreuses références [50, 166, 167] avec ces coefficients. Cependant, ceux-ci n'apparaissent pas dans l'article [6] où seul le rapport entre le rayonnement solaire reçu et le maximum possible (au lieu étudié, au niveau du sol, donc non extraterrestre) est évoqué, avec des valeurs de coefficients différentes.

Le nombre d'heures d'ensoleillement maximal s'exprime par [13, 166] :

$$N = \frac{2}{15} \cos^{-1}[-\tan \phi \tan \delta] \quad (3.66)$$

Avec  $\phi$  la latitude et  $\delta$  la déclinaison solaire.

### Corrélation de Bahel (1987) [13]

Cette corrélation prend en compte, comme celle d'Angström, le rapport entre le nombre d'heures d'ensoleillement et la durée maximale possible, mais en rajoutant des termes du second et du troisième ordre :

$$K_t = a + b \frac{n}{N} + c \left( \frac{n}{N} \right)^2 + d \left( \frac{n}{N} \right)^3 \quad (3.67)$$

Avec :  $a = 0.16$ ,  $b = 0.87$ ,  $c = -0.61$  et  $d = 0.34$ .

### Modèle de Hargreaves (1985) [102]

Ce modèle propose de déterminer le coefficient de transmission pour des durées de l'ordre du mois en utilisant la différence moyenne de température entre les maxima et les minima. Le coefficient de transmission global s'écrit :

$$K_t = K_r (T_{\max} - T_{\min})^{0.5} \quad (3.68)$$

Avec  $T_{\max}$  et  $T_{\min}$  respectivement les températures maximales et minimales moyennées sur un mois.  $K_r$  est un coefficient empirique :  $K_r = 0.16$ . Pour [4], la valeur 0.16 correspond à des régions continentales. Pour des régions côtières, il est préconisé d'utiliser  $K_r = 0.19$ .

L'influence de l'altitude est aussi prise en compte par [4] qui propose la corrélation suivante, valable jusqu'à 1500 mètres d'altitude :  $K_r = K_{ra} (P_z/P_0)^{0.5}$  avec  $P_z$  la pression atmosphérique à l'altitude  $z$  et  $K_{ra} = 0.17$  ou 0.20 respectivement pour les régions continentales et côtières.

### Modèle de Bristow et Campbell (1984) [38]

Ce modèle permet d'estimer l'irradiance journalière globale à partir de la connaissance de données géographiques (latitude, altitude du lieu), de la position du Soleil, du jour étudié ainsi que de la température et des précipitations. En effet, une faible amplitude thermique ou la présence de précipitations impliquent un temps nuageux, susceptible de réduire l'irradiance reçue sur la journée.

Le modèle de Bristow et Campbell propose d'exprimer le coefficient de transmission global sur la journée  $K_t$  en fonction de l'amplitude thermique :

$$K_t = K_{t,\max} [1 - \exp(-B\Delta T^C)] \quad (3.69)$$

Avec  $K_{t,\max}$  la transmittance maximale par temps clair, qui dépend de l'altitude et de la qualité de l'air,  $\Delta T$  l'amplitude thermique :  $\Delta T = T_{\max}(J) - \frac{T_{\min}(J) + T_{\min}(J+1)}{2}$  où  $J$  fait référence au jour étudié. L'utilisation de la température du jour suivant permet de réduire les effets du passage d'une masse d'air chaud qui, sans la prise en compte de la température minimale du jour suivant, augmenterait l'amplitude thermique sans pour autant avoir d'effet sur l'irradiance.  $B$  et  $C$  sont des coefficients empiriques décrivant la manière dont le maximum de transmittance est atteint lorsque l'amplitude de température augmente. Pour des journées avec précipitations, un facteur 0.75 est apporté sur l'amplitude de température, de même si l'amplitude de température du jour  $J - 1$  est inférieure de plus de 2°C à celle du jour  $J - 2$ .

Pour Bristow et Campbell, le coefficient  $A$  dépend du lieu. Trois valeurs différentes (0.70, 0.72 et 0.77) sont ainsi utilisées pour les trois jeux de données utilisées. Une valeur de 2.4 est utilisée pour  $C$ . Enfin,  $B$  varie suivant le mois de l'année ; la corrélation suivante est utilisée :

$$B = 0.036 \exp(-0.154\overline{\Delta T}) \quad (3.70)$$

Avec  $\overline{\Delta T}$  l'amplitude moyenne de la température pour le jour étudié et les 29 précédents.

Des ajouts ont été apportés par Thornton et Running [231] pour cette corrélation, visant à élaborer une expression utilisable en tout lieu.

L'expression alors utilisée pour établir le coefficient de transmittance est telle qu'elle permet de fixer un minimum pour le ratio  $K_t/K_{t,\max}$  obtenu à partir des données étudiées. Ce minimum est pris égal à 0.1 et l'expression donnant la transmittance se réécrit :

$$K_t = K_{t,\max} [1 - 0.9 \exp(-B\Delta T^C)] \quad (3.71)$$

La transmittance maximale  $K_{t,\max}$  est obtenue à partir de considérations physiques en prenant en compte l'altitude via la diminution de la pression, l'élévation du Soleil dans le ciel ainsi que l'humidité. L'expression suivante est utilisée :

$$K_{t,\max} = \left[ \frac{\sum_{s=ss} R_{\text{pot},s} \times \tau_{0,\text{nadir,dry}}^{(P_z/P_0)M}}{\sum_{s=sr} R_{\text{pot},s}} \right] + \alpha e \quad (3.72)$$

Où  $sr$  et  $ss$  font référence aux heures de lever et de coucher du Soleil,  $R_{\text{pot},s}$  est le rayonnement solaire extraterrestre,  $\tau_{0,\text{nadir,dry}}$  est le coefficient de transmission pour un éclairage depuis la verticale du lieu avec un air sec : Thornton et Running prennent  $\tau_{0,\text{nadir,dry}} = 0.87$ .  $M$  est l'épaisseur optique.  $P_z$  est la pression atmosphérique à l'altitude  $z$ ,  $e$  est la pression de vapeur (en Pa) et  $\alpha$  est un coefficient empirique :  $\alpha = -6.1 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ .

Thornton et Running proposent la corrélation suivante pour le coefficient  $B$  :  $B = b_0 + b_1 \exp(-b_2 \times \overline{\Delta T})$ , avec  $b_0 = 0.031$ ,  $b_1 = 0.201$  et  $b_2 = 0.185$ .

Par rapport au modèle proposé par Bristow et Campbell, deux changements portent sur  $\Delta T$  : c'est le coefficient de transmission global qui est cette fois-ci affecté par la multiplication par 0.75 et non plus  $\Delta T$  pour les journées pluvieuses. Il n'est par contre pas spécifié si cette pondération est également appliquée lorsqu'on a seulement  $\Delta T(J-1) < \Delta T(J-2) - 2$ . D'autre part, utiliser une valeur moyenne pour la température minimale ne semble pas apporter d'amélioration au résultat, d'où  $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$ .

### Modèle de Armstrong (2010) [8]

Ce modèle part de corrélations établies par Meinel en 1976 et reprises par Hu en 1983 [117] permettant de déterminer le rayonnement solaire direct par temps clair et d'estimer le rayonnement diffus (3.20) reçu sur des périodes mensuelles. Pour des journées couvertes, Wenham (2007) [253] propose de considérer que le rayonnement reçu est entièrement diffus et égal à 20 % de la valeur du rayonnement direct donné par Meinel (1976).

Pour obtenir une estimation plus fine, en particulier pour le cas de journées partiellement nuageuses, Armstrong (2010) propose de tenir compte de l'intensité nuageuse : pour un ciel couvert à moins de 15 %, le ciel est qualifié de clair, pour une couverture nuageuse allant de 15 à 60 %, le ciel est lumineux et au-delà, il est couvert.

Le rayonnement reçu par temps clair reste inchangé. Pour un ciel lumineux, le rayonnement reçu est égal à 60 % de celui reçu par temps clair et pour un ciel couvert, le rayonnement reçu vaut 10 % de celui reçu par temps clair. Le flux solaire diffus est ensuite déterminé à partir du flux solaire total reçu en utilisant les corrélations de Reindl déjà évoquées dans le paragraphe (3.1.6).

## 3.2 Coefficient d'échange convectif

La convection désigne le phénomène de mise en mouvement d'un fluide sous l'effet de variations de température et de pression à l'intérieur de celui-ci. Des différences de température à l'intérieur d'un fluide tel que l'air ou l'eau entraînent en effet des différences de masse volumique qui conduisent à l'établissement de mouvements dans le fluide. C'est le cas par exemple lorsqu'une casserole est chauffée par le dessous, ce qui engendre des mouvements à l'intérieur de l'eau, ou pour les lampes à lave pour lesquelles la cire, chauffée lorsqu'elle est en bas de la lampe, voit sa masse volumique diminuer et peut alors s'élever dans

l'appareil jusqu'à ce qu'elle soit soumise à des températures plus faibles et que sa masse volumique se mette à décroître.

Dans le cas qui nous intéresse ici, ce sont à la fois le chauffage du sol et le vent qui provoquent la mise en mouvement de l'air. Celui-ci voit sa température augmentée par la conduction thermique avec le sol, et est déplacé laissant ainsi la place à un air plus froid qui va à son tour être réchauffé par le sol. Il y a donc un échange, qualifié de convectif, entre le sol et l'air, qui sera d'autant plus important que le renouvellement de l'air se fera rapidement et que la différence de température entre la surface du sol et l'air sera élevée.

Les échanges convectifs du sol avec l'atmosphère peuvent être exprimé sous la forme d'un flux thermique  $\phi_{\text{conv}}$  qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\phi_{\text{conv}} = h_c (T_a - T_{\text{sol}}) \quad (3.73)$$

Avec  $h_c$  le coefficient d'échange convectif (en  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ),  $T_a$  la température de l'air, hors de la couche limite, c'est-à-dire en dehors de la zone où la température de l'air est influencée par les échanges convectifs avec le sol, et  $T_{\text{sol}}$  la température du sol.

Plusieurs corrélations existent dans la littérature pour quantifier le coefficient d'échange convectif  $h_c$ . Dans la suite de cette partie, nous allons étudier certaines de ces corrélations et les comparer. Ces corrélations font, pour la plupart, dépendre le coefficient d'échange convectif de la vitesse du vent, mais celle-ci n'est souvent pas mesurée ou prise en compte à la même hauteur par rapport au sol.

### 3.2.1 Corrélations pour l'estimation du coefficient d'échange convectif

#### Corrélation de Nusselt-Jürges ([180] d'après [187])

Il s'agit de la première corrélation ayant été établie en 1922, basée sur des mesures réalisées sur une plaque de cuivre située dans une soufflerie. Pour une vitesse de vent  $V_w$ , le coefficient d'échange convectif  $h_c$  s'écrit :

$$h_c = 7.13V_w^{0.78} + 5.35 e^{-0.6V_w} \quad (3.74)$$

Le second terme de la corrélation (3.74) peut être négligé pour des vitesses élevées, supérieures à  $5\text{m.s}^{-1}$ .

#### Corrélation de MacAdams ([159] d'après [187])

Cette corrélation se base aussi sur les mesures de Nusselt-Jürges et permet d'obtenir une relation linéaire entre la vitesse du vent et le coefficient d'échange convectif. D'après Duffie et Beckman [73], les effets radiatifs seraient inclus dans cette corrélation.

$$h_c = \begin{cases} 5.7 + 3.8V_w & \text{pour } V_w \leq 5 \text{ m.s}^{-1} \\ 6.47V_w^{0.78} & V_w > 5 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \quad (3.75)$$

#### Corrélation de Test et al. [227]

Cette corrélation a été établie sur une plaque de cuivre inclinée de  $40^\circ$  par rapport à l'horizontale, exposée au vent en extérieur. Le vitesse du vent est mesurée 1 m au-dessus de la plaque.

$$h_c = (8.55 \pm 0.86) + (2.56 \pm 0.32) V_w \text{ pour } V_w \leq 5 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.76)$$

#### Corrélations de Kumar et al.

Deux corrélations ont été établies par Kumar et al.. La première, de 1997 [141], a été obtenue à partir de mesures réalisées en intérieur, sur une surface plane exposée à un écoulement d'air forcé de vitesse  $V_w$ .

$$h_c = (10.03 + 4.687V_w) \pm 3.25\% \text{ pour } V_w \leq 4 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.77)$$

La seconde, de 2010 [140], a été établie à partir de mesures réalisées en extérieur, sur le toit d'un immeuble de 8.33 m de hauteur. La vitesse est mesurée à 15 cm au-dessus de la plaque expérimentale.

$$h_c = (6.90 \pm 0.05) + (3.87 \pm 0.13) V_w \text{ pour } V_w \leq 1.12 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.78)$$

### Corrélation de Sharples et Charlesworth [212]

Les auteurs ont étudié un bâtiment soumis au vent. Les mesures de vitesses du vent ont été réalisées à une hauteur de 1.5 m au-dessus du bâtiment, soit à 6.1 m au-dessus du sol. Cette corrélation est la suivante :

$$h_c = 6.5 + 3.3V_w \pm 4.7 \text{ pour } 0.8 \leq V_w \leq 6.2 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.79)$$

Cette corrélation est aussi formulée avec une loi en puissance, bien que le coefficient de corrélation avec les mesures soit moins important :

$$h_c = 9.5V_w^{0.48} \pm 4.7 \text{ pour } 0.8 \leq V_w \leq 6.2 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.80)$$

### Corrélation de Hagishima et al. [99]

Comme pour les corrélations de Liu *et al.* et la seconde corrélation de Kumar *et al.*, cette corrélation a été établie à l'aide de mesures réalisées sur le toit d'un immeuble, à 60 cm au-dessus de la plaque en cuivre étudiée :

$$h_c = 6.42 + 3.96V_w \text{ pour } V_w \leq 6 \text{ m.s}^{-1} \quad (3.81)$$

### Corrélation de FEMMASSE

Cette corrélation est issue d'un logiciel traitant des transferts thermiques appelé FEMMASSE. Cette corrélation est utilisée dans plusieurs articles scientifiques portant sur les transferts thermiques dans les structures routières [11, 162].

$$h_c = \begin{cases} 5.6 + 4.0V_w & , V_w \leq 5 \text{ m.s}^{-1} \\ 7.2V_w^{0.78} & , V_w > 5 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \quad (3.82)$$

Les valeurs obtenues sont très proches des coefficients de la corrélation de Nüsselt-Jürges.

### Corrélation de Vehrencamp [243]

Cette corrélation a été obtenue en 1953 à l'aide de mesures réalisée sur un lac asséché. Contrairement aux précédentes corrélations, celle-ci a donc été établie sur le sol. Les effets radiatifs sont pris en compte et un coefficient d'échange convectif empirique fonction de la différence entre la température de la surface  $T_s$  (en K) et celle de l'air  $T_a$  (en K, prise à une hauteur de 2 m au-dessus du sol) et de la vitesse du vent (prise à une hauteur de 2 m au-dessus du sol).

$$h_c = 698.24 \times \left( 1.44 \times 10^{-3} T_m^{0.3} V_w^{0.7} + 9.7 \times 10^{-4} (T_s - T_a)^{0.3} \right) \quad (3.83)$$

Avec  $T_m$  la moyenne de  $T_a$  et  $T_s$  exprimée en kelvins. Cette corrélation a été établie pour des vitesses de vent allant de 0.8 à 8.5 m.s<sup>-1</sup>. et pour des différences de température allant de 6.7 à 27 °C.

Cette corrélation est utilisée dans de nombreuses publications traitant des échanges convectifs entre des chaussées et l'air [31, 110, 168, 160]. En particulier, afin de pouvoir utiliser cette corrélation en conditions hivernales, lorsque  $T_s < T_a$ , [110] propose d'utiliser une valeur absolue pour le deuxième terme de la corrélation :

$$h_c = 698.24 \times \left( 1.44 \times 10^{-3} T_m^{0.3} V_w^{0.7} + 9.7 \times 10^{-4} |T_s - T_a|^{0.3} \right) \quad (3.84)$$

Le coefficient d'échange convectif est représenté en fonction des températures de la surface et de l'air pour des vitesses de vent égales à 3 et 6 m.s<sup>-1</sup> sur les figures 3.13 et 3.14.

Elle a cependant le désavantage d'introduire dans la corrélation la température de la surface, grandeur qu'on cherche à déterminer. La valeur d'un coefficient d'échange convectif obtenu avec cette corrélation est donc tributaire, dans le cas où on cherche à déterminer un champ de température dans le sol, de

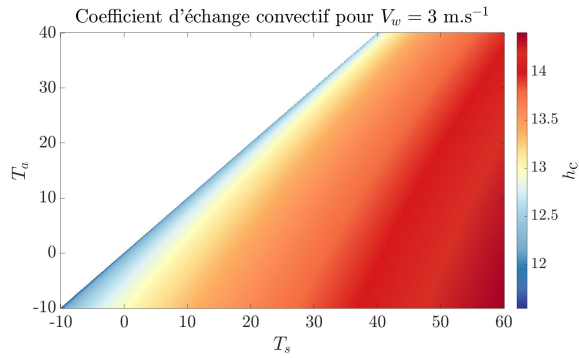


FIGURE 3.13 – Coefficient d'échange convectif  $h_c$  pour  $V_w = 3 \text{ m.s}^{-1}$

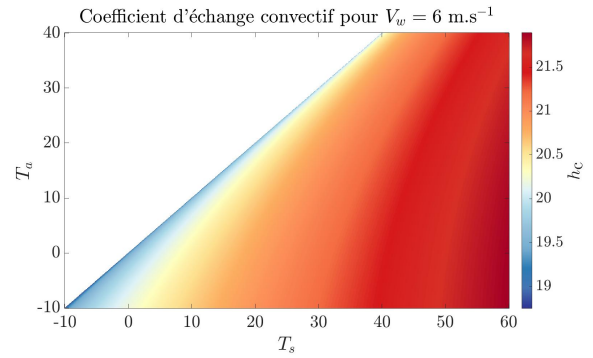


FIGURE 3.14 – Coefficient d'échange convectif  $h_c$  pour  $V_w = 6 \text{ m.s}^{-1}$

résultats numériques dépendant d'hypothèses liées notamment à des couplages avec d'autres modes de transferts thermiques. Introduire la température de la surface dans la corrélation du coefficient d'échange convectif implique alors de rajouter des incertitudes à ce terme.

### Corrélations pour des surfaces inclinées

D'autres corrélations présentes dans la littérature proposent d'établir le coefficient d'échange convectif pour des surfaces inclinées [212] ou pour des murs verticaux, face au vent [30, 65, 155, 251]. Pour ce dernier cas, la structure de la couche limite est telle que le coefficient d'échange convectif est moins élevé, quelle que soit la vitesse du vent.

### 3.2.2 Synthèse

Dans cette section, nous avons analysé plusieurs corrélations permettant d'obtenir le coefficient d'échange convectif. La représentation graphique du coefficient d'échange convectif en fonction de la vitesse du vent sur la figure 3.15 permet une comparaison de ces corrélations.

Pour la première représentation de la corrélation de Vehrencamp, nous avons considéré des conditions de températures hivernales, avec  $T_a = -5^\circ\text{C}$  et  $T_s = 0^\circ\text{C}$ . Dans la seconde représentation, nous avons pris des conditions estivales, avec  $T_a = 30^\circ\text{C}$  et  $T_s = 60^\circ\text{C}$ .

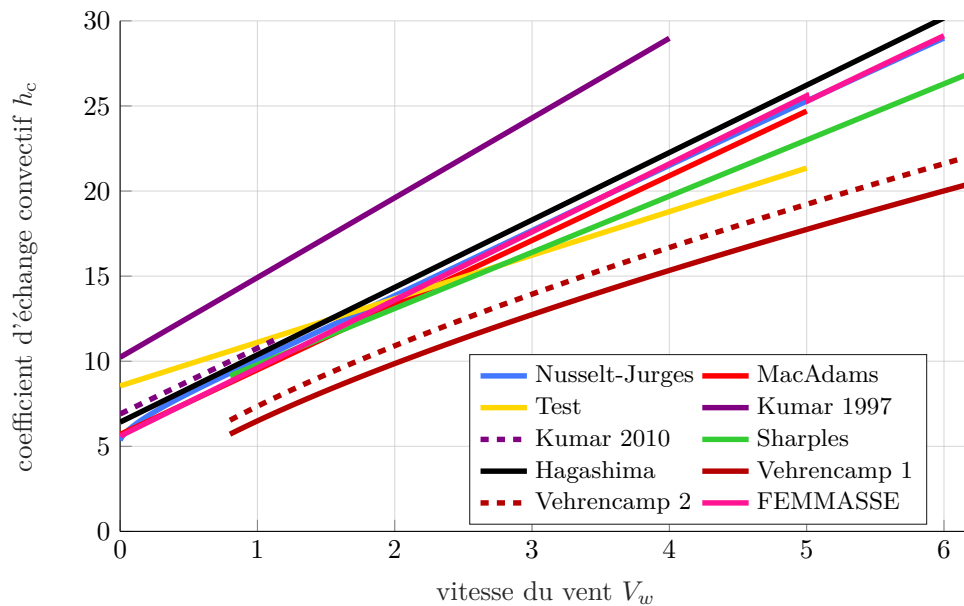


FIGURE 3.15 – Coefficient d'échange convectif pour différents corrélations et vitesses de vent

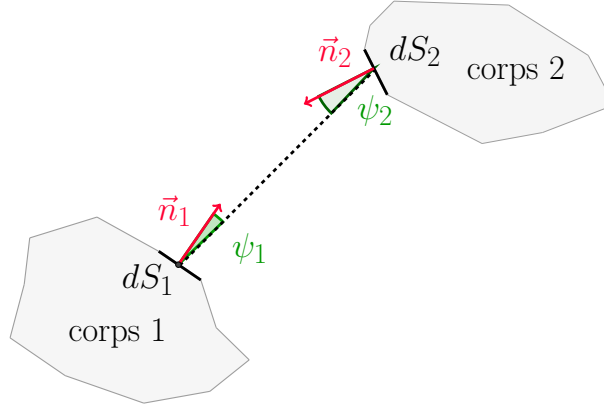


FIGURE 3.16 – Rayonnement entre deux corps

Les valeurs obtenues pour les coefficients d'échange convectif sont assez proches, en particulier pour les corrélations de Nusselt-Jürges, MacAdams, Test, Kumar (2010), Sharples et Hagashima. La corrélation de Kumar établie en 1997 semble surévaluer ce coefficient, ce qui pourrait être dû à l'utilisations de ventilateurs industriels émetteurs de tourbillons [140]. Au contraire, la corrélation de Vehrencamp semble sous-évaluer le coefficient d'échange convectif, ce qui peut s'expliquer par le fait que cette corrélation a été établie au niveau du sol, contrairement aux autres corrélations qui ont été obtenues, lorsqu'elles reposent sur des mesures sur des bâtiments, à plusieurs mètres de hauteur.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous souhaitons utiliser une corrélation permettant d'estimer ce coefficient d'échange convectif à partir des données, notamment de vent, dont nous disposons. Or ces corrélations sont établies pour différentes conditions, en soufflerie ou en conditions naturelles, à des hauteurs variables du sol. Afin de réduire le risque d'erreur, nous comparons les corrélations représentées sur la figure 3.15 et prenons en considération pour la suite de cette étude une corrélation qui ne correspond pas aux extrema. Nous choisissons ici d'utiliser la corrélation de MacAdams, dont le coefficient d'échange convectif qui est ainsi obtenu s'éloigne assez peu du coefficient obtenu avec les autres corrélations, établies dans d'autres conditions. Ce choix permet de réduire le risque d'erreur sur l'estimation de ce paramètre important pour le comportement thermique du système. Il est cependant à noter qu'un tel choix peut néanmoins amener à des erreurs conséquentes sur le flux convectif échangé, notamment en présence de configurations particulières (milieu fortement urbanisé, route surélevée ou, au contraire, abaissée).

### 3.3 Rayonnement atmosphérique

#### 3.3.1 Introduction

Le sol échange de l'énergie sous forme de rayonnement avec le milieu environnant, qu'il s'agisse de bâtiments, de relief ou de ciel.

Comme pour le Soleil, tout corps ayant une température positive (en Kelvins) rayonne. C'est donc en particulier le cas pour le sol, l'atmosphère ou plus généralement l'environnement. Ainsi un corps de température  $T$  et d'émissivité  $\varepsilon$  émet une densité de puissance  $\phi$  s'écrivant, d'après la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\phi = \sigma \varepsilon T^4 \quad (3.85)$$

Avec  $\sigma$  la constante de Stefan :  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ .

Le corps 2 émet, depuis la surface infinitésimale  $dS_2$ , pour une direction orientée d'un angle  $\psi_2$  par rapport à la normale, une puissance radiative égale à  $\frac{\sigma}{\pi} T_2^4 \cos \psi_2 d\omega_2 dS_2$ .

Inversement, la surface  $dS_1$  reçoit de la surface  $dS_2$  une puissance radiative égale à  $\frac{\sigma}{\pi} T_2^4 \cos \psi_1 d\omega_1 dS_1$ , où  $\omega_1$  correspond à l'angle solide infinitésimal que représente la surface  $dS_2$  vue depuis  $dS_1$  :  $d\omega_1 = \frac{\cos \psi_2 dS_2}{r^2}$  avec  $r$  la distance entre  $dS_1$  et  $dS_2$ .

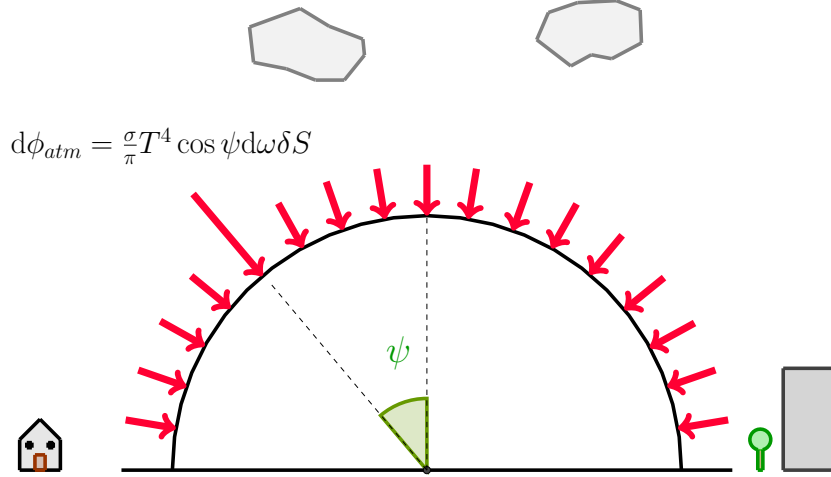


FIGURE 3.17 – Rayonnement reçu de la part de l’atmosphère

Nous considérons maintenant qu’une surface  $\delta S$  est soumise à un rayonnement de la part d’un hémisphère. La température  $T$  dépend alors de la position dans l’hémisphère. Il peut s’agir de celle de l’atmosphère, de celle des nuages, ou même de celle de la végétation, du relief ou de bâtiments (voir la figure 3.17). L’énergie radiative reçu sur une surface infinitésimale  $\delta S$  en provenance de tout l’hémisphère s’écrit alors :

$$\delta\phi_{\text{atm}} = \int_{2\pi} \frac{\sigma}{\pi} T^4 \cos \psi d\omega \delta S \quad (3.86)$$

Soit, en considérant de plus une coordonnée longitudinale  $\theta$  :

$$\delta\phi_{\text{atm}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi/2} \frac{\sigma}{\pi} T(\psi, \theta)^4 \cos \psi \sin \psi d\psi d\theta \delta S \quad (3.87)$$

Nous introduisons la température de ciel  $T_c$  définie de la façon suivante :

$$T_c^4 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi/2} T(\psi, \theta)^4 \cos \psi \sin \psi d\psi d\theta \quad (3.88)$$

Dans le cas où  $T$  est constante et ne dépend pas de la position dans l’hémisphère, on a alors  $T_c = T$ . Le rayonnement atmosphérique émis par le ciel et reçu à la surface de la Terre s’écrit alors :

$$\phi_{\text{atm}} = \sigma T_c^4 \quad (3.89)$$

En notant  $\varepsilon$  l’émissivité du sol, la densité de flux thermique provenant des échanges radiatifs avec le ciel s’écrit :

$$\phi_r = \varepsilon \sigma (T_c^4 - T_s^4) \quad (3.90)$$

Avec  $T_s$  la température de la surface.

Ce rayonnement atmosphérique, compte tenu des températures en jeu, a un spectre centré sur des longueurs d’onde plus élevées que le rayonnement solaire, située dans les infrarouges proches, et de l’ordre de 3 à 100  $\mu\text{m}$ , c’est pourquoi il est aussi appelé *long-wave radiation*. Les échanges radiatifs sont aussi généralement plus faibles que ceux provenant du rayonnement solaire, de l’ordre de 70 à 105  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  [29].

Il est cependant à noter que, pour un milieu fortement urbanisé, ou bien dans des vallées, le ciel peut être assez peu visible depuis le sol. Dans ce cas, une grande partie de l’hémisphère vu par la surface émettrice est constituée de bâtiments ou de reliefs. En particulier, durant l’été, ceux-ci ayant une température plus importante que celle de l’atmosphère, les pertes par rayonnement sont réduites, ce qui a une influence lors du refroidissement nocturne pendant l’été et contribue, en ville, à l’effet d’îlot de chaleur urbain.

Pour pouvoir obtenir la densité de flux atmosphérique  $\phi_r$ , deux approches existent dans la littérature. Si des corrélations se basent sur la température de ciel présentée précédemment, d'autres introduisent la notion d'émissivité du ciel, notée ici  $\varepsilon_c$ . Dans ce cas, le rayonnement atmosphérique incident s'écrit :

$$\phi_{\text{atm}} = \sigma T_c^4 = \varepsilon_c \sigma T_a^4 \quad (3.91)$$

Où  $T_a$  est la température de l'air exprimée ici en Kelvins.

### 3.3.2 Corrélations donnant l'émissivité du ciel par temps clair

#### Corrélation de Angström (1918) [41]

Cette corrélation permet d'exprimer l'émissivité du ciel par temps clair en fonction de la pression en vapeur d'eau  $p_{\text{eau}}$  exprimée en millibar. En effet, le flux radiatif émis par l'atmosphère est dû principalement à des émissions de la vapeur d'eau, du dioxyde de carbone et de l'ozone [122], et seule la quantité de vapeur d'eau dans l'atmosphère varie significativement au cours du temps, modifiant ainsi le rayonnement de l'atmosphère.

La corrélation d'Angström s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon_c = A - B \exp(-C p_{\text{eau}}) \quad (3.92)$$

Où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes empiriques situées respectivement dans les intervalles  $[0.75, 0.82]$ ,  $[0.15, 0.33]$  et  $[0.09, 0.22]$  d'après [22]. Les valeurs les plus utilisées sont le triplet  $A = 0.806$ ,  $B = 0.236$  et  $C = 0.092$  ([22], [137]). Une liste des valeurs possibles est donnée par [138].

La pression en vapeur d'eau, toujours exprimée en mbar, peut être reliée à la température de rosée  $T_{dp}$ , donnée en °C, comme cela est expliqué dans la section 3.4. En adaptant la corrélation (3.129), on a :

$$p_{\text{eau}} = \frac{a}{100} \exp\left(\frac{b T_{dp}}{T_{dp} + c}\right) \quad (3.93)$$

#### Corrélation de Brunt (1932) [41]

Cette corrélation est similaire à celle de Angström, est valable aussi par temps clair, mais n'utilise que deux constantes empiriques :

$$\varepsilon_c = a + b \sqrt{p_{\text{eau}}} \quad (3.94)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont des coefficients compris respectivement entre 0.34 et 0.71 et entre 0.023 et 0.110 [22]. Une liste des valeurs possibles est donnée par [138]. La pression partielle en vapeur d'eau  $p_{\text{eau}}$  est exprimée en mbar. Monteith (1961) [171] propose d'utiliser  $a = 0.53$  et  $b = 0.065$ .

#### Corrélations de Melchor (1982) [165]

Ces corrélations reprennent celles de Angström et de Brunt mais en prenant de plus en compte l'altitude  $h$  (en km) du lieu étudié et en se basant sur l'humidité absolue  $\gamma$  (en  $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ ) :

$$\varepsilon_c = \left[0.1508 + 0.0249 (0.6017)^h\right] (4.7189 - 0.9153^\gamma) \quad (3.95)$$

$$\varepsilon_c = \left[5.7723 + 0.9555 (0.6017)^h\right] (946.25 + 46.56\sqrt{\gamma}) \times 10^{-4} \quad (3.96)$$

Il est à noter que l'humidité absolue (en  $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ ) peut être reliée à la pression partielle de vapeur d'eau  $p_{\text{eau}}$  (en mbar) et à la température  $T$  (en K) par une relation issue de la loi des gaz parfaits :

$$\gamma = 219 \frac{p_{\text{eau}}}{T} \quad (3.97)$$



### Corrélation de Clark et Allen (1978) [181] d'après [22]

Cette corrélation permet d'exprimer l'émissivité du ciel par temps clair en fonction de la température de rosée  $T_{dp}$  (exprimée en degrés Celsius) :

$$\varepsilon_c = 0.787 + 0.764 \ln \left( \frac{T_{dp} + 273}{273} \right) \quad (3.98)$$

### Corrélation de Berdahl et Fromberg (1981) [22]

Cette corrélation permet, comme pour la corrélation de Clark et Allen, d'exprimer l'émissivité du ciel par temps clair en fonction du point de rosée, mais elle différencie le jour de la nuit :

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 0.741 + 0.0062T_{dp} & \text{(pendant la nuit)} \\ 0.727 + 0.0060T_{dp} & \text{(pendant la journée)} \end{cases} \quad (3.99)$$

Le point de rosée est, ici encore, exprimé en degrés Celsius. La différence entre le jour et la nuit provient d'une correction permettant la prise en compte de l'influence du rayonnement solaire.

### Corrélation de Berger et al. (1984) [23]

Comme pour la corrélation de Berdahl et Fromberg, elle exprime l'émissivité du ciel par temps clair en fonction du point de rosée en différenciant le jour de la nuit :

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 0.752 + 0.0048T_{dp} & \text{(pendant la nuit)} \\ 0.77 + 0.0038T_{dp} & \text{(pendant la journée)} \end{cases} \quad (3.100)$$

### Corrélation de Bliss (1961) [29]

L'émissivité du ciel par temps clair s'obtient à partir de la température de rosée :

$$\varepsilon_c = 0.8 + \frac{T_{dp}}{250} \quad (3.101)$$

Avec  $T_{dp}$  en degrés Celsius.

### Corrélation de Swinbank (1963) [224]

Cette corrélation est basée sur des mesures du flux radiatif de l'atmosphère  $R$  reliées à la température de l'air  $T_a$ , exprimée en Kelvins :

$$R = 5.31 \times 10^{-13} T_a^6 \quad (3.102)$$

Cette corrélation permet d'établir des relations donnant l'émissivité du ciel et la température du ciel :

$$\varepsilon_c = 9.37 \times 10^{-6} T_a^2 \quad (3.103)$$

$$T_c = 0.0553 T_a^{1.5} \quad (3.104)$$

### Corrélation de Idso et Jackson (1969) [122]

Cette corrélation permet d'exprimer l'émissivité du ciel en fonction de la température de l'air (en K) sous la forme :

$$\varepsilon_c = 1 - c \exp \left[ -d (273 - T_a)^2 \right] \quad (3.105)$$

Avec  $c = 0.261$  et  $d = 7.77 \times 10^{-4}$ .

Il est à noter que cette corrélation, comme celle de Swinbank, ne fait pas intervenir l'humidité.

## Autres corrélations donnant la température du ciel

Ces corrélations sont données par [59] et permettent d'obtenir une estimation de la température du ciel en fonction de la température de l'air :

$$T_c = T_a - c \quad (3.106)$$

Avec  $c$  une constante empirique comprise entre 0 et 20.

La valeur  $c = 6$  K est parfois citée dans la littérature [100]

## Comparaison des corrélations prenant en compte l'humidité

Dans ce paragraphe, nous proposons de comparer les émissivités du ciel données par les corrélations faisant intervenir l'humidité, que cela soit au travers de l'humidité absolue, de la pression partielle en vapeur d'eau ou de la température de rosée. Les corrélations de Angström, Brunt, Melchor, Clark et Allen, Berdahl et Fromberg, Berger et Bliss sont ainsi étudiées ici.

Lorsque cela est nécessaire, nous considérons de plus une température de l'air égale à 20°C et une altitude nulle (niveau de la mer).

Une comparaison des valeurs d'émissivités obtenues pour ces corrélations est présentée sur la figure 3.18.

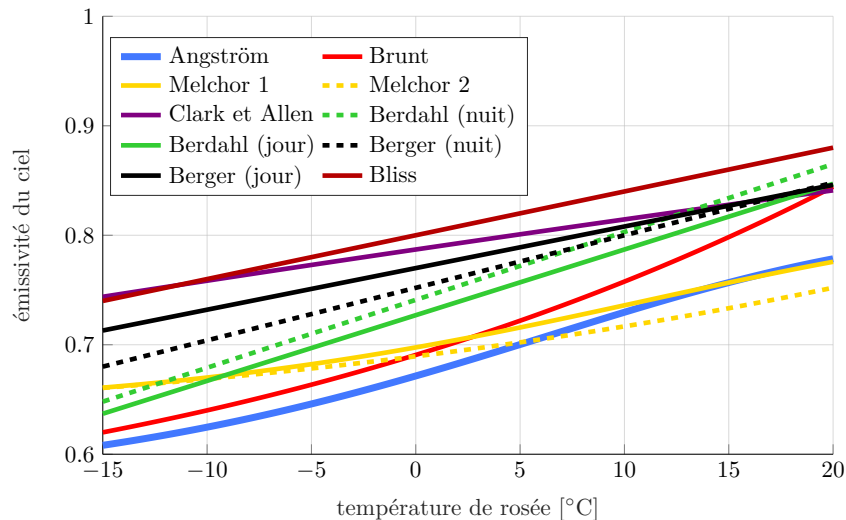


FIGURE 3.18 – Émissivité du ciel en fonction du point de rosée pour plusieurs corrélations

L'intervalle entre la plus faible et la plus grande émissivité du ciel est d'environ 0.15, quelle que soit l'humidité considérée. Dans tous les cas, l'émissivité augmente avec la quantité d'eau présente dans l'atmosphère, ce qui peut s'expliquer par le fait que, le nombre de molécules d'eau présentes dans l'atmosphère étant plus élevé, l'émission de l'atmosphère augmente elle aussi.

### 3.3.3 Prise en compte de la nébulosité

La nébulosité a tendance à diminuer les pertes par rayonnement avec l'atmosphère. En effet, au lieu que des échanges radiatifs aient lieu entre le sol et la partie supérieure de l'atmosphère, ils ont lieu entre le sol et la base de la couverture nuageuse, située à une altitude moindre, et donc généralement à une température plus élevée. Cela est en particulier visible au cours des nuits d'hiver : un ciel complètement dégagé entraînera des pertes radiatives importantes et les gelées seront alors fréquentes. Au contraire, avec un ciel couvert, les déperditions d'énergie au niveau du sol sont plus faibles et le risque de gel réduit.

Nous appelons, dans la suite de cette partie,  $R_0$  l'apport radiatif de l'atmosphère par temps clair,  $R_n$  l'apport radiatif pour une fraction de ciel couvert  $n$ ,  $\epsilon_{cn}$  l'émissivité du ciel avec une fraction  $n$  de couverture nuageuse,  $\epsilon_{c0}$  étant alors l'émissivité du ciel par temps clair.

### Corrélation de Kondratyev (1969)

Kondratyev [138] propose la relation suivante entre  $R_n$  et  $R_0$  :

$$R_n = R_0 [1 + (c_l n_l + c_m n_m + c_a n_a)] \quad (3.107)$$

Où  $n_l$ ,  $n_m$  et  $n_a$  sont respectivement les fraction de couvertures nuageuses pour les nuages de basse, moyenne et haute altitude, et  $c_l$ ,  $c_m$  et  $c_a$  des constantes empiriques déterminées par plusieurs auteurs et regroupées dans le livre de Kondratyev.

On a aussi :

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{c0} [1 + (c_l n_l + c_m n_m + c_a n_a)] \quad (3.108)$$

### Corrélation de Berdahl (1981)

Berdahl [22] relie l'émissivité du ciel par temps couvert à l'émissivité par temps clair à l'aide de la corrélation :

$$(1 - \varepsilon_{cn}) = (1 - \varepsilon_{c0}) c_n \quad (3.109)$$

Avec  $c_n$  le facteur de couverture nuageuse fonction de la couverture nuageuse  $n$  et du type de nuage.

Pour obtenir  $c_n$ , Berdahl préconise d'utiliser une interpolation linéaire et exprime ce facteur sous la forme :

$$c_n = 1 - \Gamma n \quad (3.110)$$

Avec  $\Gamma$  un paramètre dépendant du type de nuage, petit pour des nuages de haute altitude (0.16 pour des cirrus à 12.2 km d'altitude) et proche de l'unité (0.88 pour des stratocumulus à 1200 m d'altitude) pour des nuages de basse altitude.

Cette corrélation revient donc à utiliser :

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{c0} (1 - \Gamma n) + \Gamma n \quad (3.111)$$

### Corrélation de Melchor (1982) [165]

Cette corrélation se base sur la corrélation (3.96) et prend en compte la fraction du ciel occupée par la nébulosité  $n$ , l'altitude  $h$  (en km) et l'humidité relative de l'air  $RH$  (en %) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cn} = & (1 - n) \left( 5.7723 + 0.9555 (0.6017)^h \right) \times 10^{-4} T_a^{1.1893} RH^{0.0665} \\ & + n \left( 1 - (3000 + 1751h^{0.652}) RH^{-3/2} T_a^{-1} \right)^4 \end{aligned} \quad (3.112)$$

### Corrélation de Bolz (1969) ([210] d'après [9])

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{c0} (1 + kc^2) \quad (3.113)$$

Avec  $k$  un coefficient dépendant du type de nuage.

### Corrélation de Unsworth et Monteith ([240] d'après [9])

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{c0} + c (1 - \varepsilon_{c0}) \left( \frac{T_c}{T_a} \right)^4 \quad (3.114)$$

Avec  $T_c$  la température à la base des nuages.

### Corrélation de Clark et Allen (d'après [250])

En présence de nuages, la corrélation de Clark et Allen donnée dans le paragraphe 3.3.2 peut être écrite à partir de l'émissivité par temps clair qui y a été donnée.

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{c0} (1 + 0.0224n - 0.0035n^2 + 0.00028n^3) \quad (3.115)$$

#### 3.3.4 Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté comment le rayonnement atmosphérique peut être calculé en introduisant les notions de température de ciel et d'émissivité du ciel.

Des corrélations ont été présentées pour estimer ces paramètres, d'abord par temps couvert puis par temps nuageux. Une comparaison de ces corrélations a aussi été proposée.

Nous pouvons une nouvelle fois privilégier, dans la suite de ce travail, une corrélation se trouvant dans la moyenne de ce qui existe dans la littérature. Ici, les corrélations de Berger et de Berdahl semblent convenir. Celle de Brunt, bien que présentant des valeurs un peu en dessous des autres corrélations pour des températures de rosée faibles, peut aussi convenir dans la mesure où il n'est alors pas nécessaire de dissocier le jour et la nuit.

## 3.4 Température de rosée

### 3.4.1 Introduction

Les effets de l'humidité interviennent principalement au cours de l'hiver, dans le cadre du maintien hors gel de la structure. En effet, l'humidité influe sur la température à laquelle des cristaux de glace apparaissent sur des parois.

L'humidité est ainsi liée à la température de rosée, définie comme étant la température jusqu'à laquelle il faut refroidir de l'air, à pression de vapeur constante, pour que cette pression de vapeur devienne égale à la pression de vapeur saturante [32]. Il s'agit donc de la température telle que, lors d'un refroidissement de l'air, celui-ci arrive à saturation et des gouttelettes d'eau liquides se forment. Ainsi, plus la température de l'air est proche de sa température de rosée, plus cet air est proche de la saturation.

Cette température est importante dans le cadre du sujet étudié, principalement pour le contrôle thermique de la structure de chaussée modifiée. En effet, si, pour une température de l'air donnée, la température de la surface de la structure atteint la température de rosée associée, de la condensation se forme dans l'air ambiant et se dépose sur la structure : c'est le phénomène de rosée.

Ici, l'objectif est d'empêcher la formation de cristaux de glace et de prévenir ainsi de la formation de verglas. Pour cela, la notion de point de givrage est introduite en se basant sur le point de rosée. Pour des conditions hivernales, il sera alors nécessaire que la température de la surface de la structure soit maintenue au-dessus de ce point de givrage, avec un coefficient de sécurité.

La prise en compte du point de givrage présente l'avantage de ne pas avoir à maintenir une température systématiquement positive. En effet, pour un air froid, mais sec, la température de rosée peut-être très en-dessous de 0 °C, et le fait que la température de surface soit négative n'entraîne pas pour autant de condensation.

La connaissance du point de rosée est aussi importante pour calculer la température du ciel et déterminer le rayonnement atmosphérique (voir la section 3.3), beaucoup de corrélations reliant la température de rosée à la température de ciel.

### 3.4.2 Corrélations

De nombreuses corrélations permettent d'évaluer la température de rosée. Elles font généralement apparaître la température de l'air, notée ici  $t$  (en °C) ou  $T$  (en K), l'humidité  $RH$  comprise entre 0 pour un air sans vapeur d'eau et 1 pour un air saturé en vapeur d'eau. L'humidité peut aussi être exprimée en pourcentage. La température de rosée (« dew point ») correspond à  $RH = 1$  et est notée  $t_{dp}$  ou  $T_{dp}$  selon qu'on soit respectivement en degrés Celsius ou en Kelvin.

L'une des corrélations les plus utilisées semble être celle de Magnus [144] :

$$t_{dp} = \frac{B_1 \alpha(t, RH)}{A_1 - \alpha(t, RH)} \quad (3.116)$$

Avec  $\alpha(t, RH) = \ln(RH) + \frac{A_1 t}{B_1 + t}$

$A_1$  et  $B_1$  sont deux constantes :  $A_1 = 17.625$  et  $B_1 = 243.04^\circ\text{C}$ .

Cette corrélation est basée sur une expression donnant la pression de vapeur, avec une erreur inférieure à 0.4 % pour des températures  $t$  comprises entre  $-40$  et  $+50^\circ\text{C}$ .

La relation de Clausius-Clapeyron, qui exprime la différentielle de la pression de vapeur saturante par rapport à la température, permet d'établir la corrélation suivante [144] :

$$T_{dp} = T \left( 1 - \frac{T \ln RH}{L/R_w} \right)^{-1} \quad (3.117)$$

Avec  $R_w$  la constante des gaz pour la vapeur d'eau :  $R_w = 461.5 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ .  $L$  est l'enthalpie de vaporisation de l'eau, qui vaut  $2.501 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$  à  $T = 273.15^\circ\text{C}$  et  $2.257 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$  à  $T = 373.15^\circ\text{C}$ . L'hypothèse est alors faite que cette enthalpie de changement d'état reste constante sur l'intervalle de températures étudié. Des erreurs apparaissent donc lorsque la température de rosée s'éloigne de la température de l'air, pour laquelle l'enthalpie de changement d'état a été calculée, donc lorsque l'humidité est basse.

En tenant compte du fait que, pour une humidité supérieure à 50 %, la température de l'air décroisse d'environ  $1^\circ\text{C}$  lorsque l'humidité décroît de 5 %, la corrélation suivante peut être établie [144] :

$$t_{dp} = t - 20(1 - RH) \quad (3.118)$$

D'autres relations s'appuient sur cette approximation linéaire en ajoutant des corrections :

$$t_{dp} = t - K_0 + 100 \times K_1 RH \quad (3.119)$$

Avec  $K_0 = 17.9$  et  $K_1 = 0.18$  pour  $0.65 \leq RH \leq 1$  et  $K_0 = 22.5$  et  $K_1 = 0.25$  pour  $0.45 \leq RH < 0.65$ . Avec une correction au second ordre :

$$t_{dp} = (19.8 + 0.17t)RH + 0.84t - 19.2 \quad (3.120)$$

Cette corrélation permet d'obtenir le point de rosée avec une erreur inférieure à  $1^\circ\text{C}$  pour une humidité supérieure à 0.4 et une température  $t$  comprise entre 0 et  $30^\circ\text{C}$ .

En tenant compte de l'erreur sur la corrélation (3.118), cette dernière peut être corrigée [144] :

$$t_{dp} = t - 20(1 - RH) \left( \frac{T}{300} \right)^2 - 13.5(RH - 0.84)^2 + 0.35 \quad (3.121)$$

L'erreur ne dépasse pas  $0.3^\circ\text{C}$  pour une humidité comprise entre 0.5 et 1 et pour une température comprise entre 0 et  $30^\circ\text{C}$ .

La température de rosée peut être déterminée à partir de ces corrélations pour plusieurs valeurs de température de l'air  $t$ . Une comparaison entre ces corrélations est proposée sur la figure 3.19

### 3.4.3 Obtention de l'humidité relative à partir de l'humidité absolue

L'humidité absolue est la masse de vapeur d'eau contenue dans un kilogramme d'air sec. Cette grandeur s'exprime généralement en g/kg. Elle est notée  $a_{eau}$ , dans la suite de cette section. Une variante qui est rencontrée dans la littérature consiste à exprimer l'humidité absolue en gramme par mètre cube d'air sec. Nous noterons  $\gamma_{eau}$  cette quantité.

Pour  $a_{eau}$  en g/kg et  $\gamma_{eau}$  en  $\text{g/m}^3$ , on a la relation suivante :

$$\gamma_{eau} = a_{eau} \rho_{air} \quad (3.122)$$

Où  $\rho_{air}$  est la masse volumique de l'air sec.

Connaissant l'humidité absolue et la température de l'air, il est possible de déterminer la pression de vapeur et la pression de vapeur saturante puis de déduire l'humidité relative.

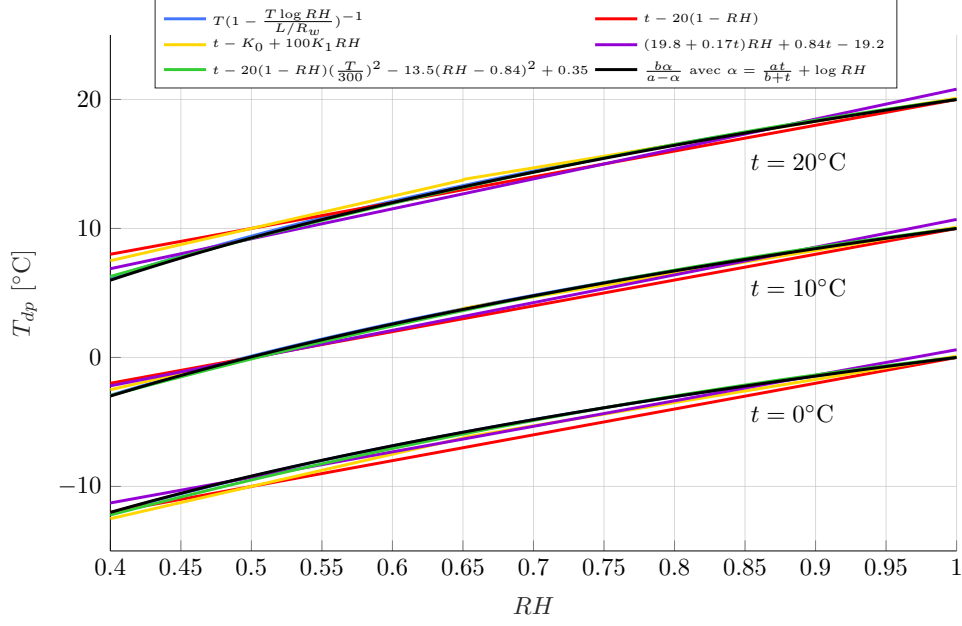


FIGURE 3.19 – Comparaison entre les différentes corrélations donnant le point de rosée en fonction de l’humidité relative

### Calcul de la masse volumique de l’air

La masse volumique de l’air  $\rho_{air}$  s’obtient à partir de la loi des gaz parfaits :

$$\rho_{air} = \frac{p_{air}}{r_{air}T} \quad (3.123)$$

Avec  $p_{air}$  la pression en air sec exprimée en Pa,  $r_{air} = \frac{R}{M_{air}}$  avec  $R = 8.3144621 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits et  $M_{air} = 28.965338 \text{ g.mol}^{-1}$  la masse molaire de l’air.

La pression en air sec peut s’obtenir en fonction de l’altitude à partir du modèle de l’atmosphère standard. Les hypothèses suivantes sont alors faites : l’accélération de la pesanteur  $g$  ne varie pas avec l’altitude et est égale à sa valeur au niveau de la mer, approximativement  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ , le gradient de température est constant, égal à  $a = -0.0065 \text{ K.m}^{-1}$ . Sous ces hypothèses, la pression en air sec entre 0 et 11 000 m d’altitude s’écrit :

$$p_z = p_0 \left( 1 - \frac{az}{T_0} \right)^{\frac{g_0 M_{air}}{aR}} \quad (3.124)$$

Avec  $z$  l’altitude en m,  $p_0$  la pression atmosphérique au niveau de la mer ( $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  pour l’atmosphère standard),  $T_0$  la température au niveau de la mer, égale à  $15^\circ\text{C}$  pour l’atmosphère standard,  $M_{air}$  la masse molaire de l’air sec et  $R$  la constante des gaz parfaits.

La masse d’eau par unité de volume d’air sec est alors donnée par  $\gamma_{eau} = \rho_{air} a_{eau}$ .

### Calcul de la pression partielle en vapeur d’eau

La pression partielle en eau est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$p_{eau} = r_{eau} T \gamma_{eau} \quad (3.125)$$

Avec  $r_{eau} = \frac{R}{M_{eau}}$  avec  $M_{eau} = 18.01528 \text{ g.mol}^{-1}$  la masse molaire de l’eau. Pour une pression en vapeur d’eau  $p_{eau}$  exprimée en mbar, l’humidité absolue  $\gamma_{eau}$  exprimée en  $\text{g/m}^3$  s’écrit :

$$\gamma_{eau} = 219 \frac{p_{eau}}{T} \quad (3.126)$$

En reprenant l'expression donnant la masse d'eau par unité de volume d'air sec, on a alors :

$$p_{eau} = \frac{M_{air}}{M_{eau}} p_0 a_{eau} \quad (3.127)$$

### Calcul de la pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante peut être obtenue à partir de plusieurs corrélations s'écrivant sous la forme :

$$p_{eau,sat} = a \exp\left(\frac{bT}{T+c}\right) \quad (3.128)$$

Avec  $T$  donnée en °C et  $p_{eau,sat}$  en mbar,  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant des coefficients issus de corrélations, par exemple celle de Bolton [33], valable pour des températures comprises entre -30 et +35°C avec une précision de 0.1 % :  $a = 6.112$ ,  $b = 17.67$  et  $c = 243.5$ . D'autres jeux de paramètres, valables pour différents intervalles, sont donnés par [43].

La pression en vapeur d'eau, qui correspond à la pression de vapeur saturante pour la température de rosée, s'écrit alors :

$$p_{eau} = a \exp\left(\frac{bT_{dp}}{T_{dp}+c}\right) \quad (3.129)$$

Une autre écriture possible est :

$$p_{eau,sat} = a \exp\left(\frac{((b-T/d)T)}{T+c}\right) \quad (3.130)$$

### Calcul de l'humidité relative

L'humidité relative, notée  $RH$ , est alors égale au rapport entre la pression de vapeur et la pression de vapeur saturante :

$$RH = \frac{p_{eau}}{p_{eau,sat}} \quad (3.131)$$

#### 3.4.4 Calcul de la température de rosée à partir de la pression de vapeur

La pression de vapeur  $p_{eau}$  est, d'après l'équation (3.127), directement liée à l'humidité absolue  $a$ . Elle peut aussi être liée à la température de rosée en revenant à la définition de celle-ci : il s'agit de la température telle que la pression de vapeur est égale à la pression de vapeur saturante, soit  $p_{eau,sat}(T) = p_{eau}$ .

La relation (3.128) permet d'obtenir :

$$T_{dp} = \frac{c \ln(p_{eau}/a)}{b - \ln(p_{eau}/a)} \quad (3.132)$$

De même, on a, avec la relation (3.130) :

$$T_{dp} = \frac{d}{2} \left[ b - \ln(p_{eau}/a) + \sqrt{(b - \ln(p_{eau}/a))^2 - 4c \ln(p_{eau}/a)/d} \right] \quad (3.133)$$

#### 3.4.5 Point de givrage

Le point de givrage est la température à laquelle, en maintenant inchangées les autres paramètres climatiques, l'air devient saturé en vapeur d'eau par rapport à la glace. C'est donc la température à partir de laquelle du verglas peut se former. Elle n'est définie que pour une température de l'air négative et est supérieure à la température de rosée, la pression de vapeur saturante en glace étant inférieure à celle en eau liquide. Une diminution de la température, à teneur en eau constante, provoquera donc d'abord la formation de glace solide.

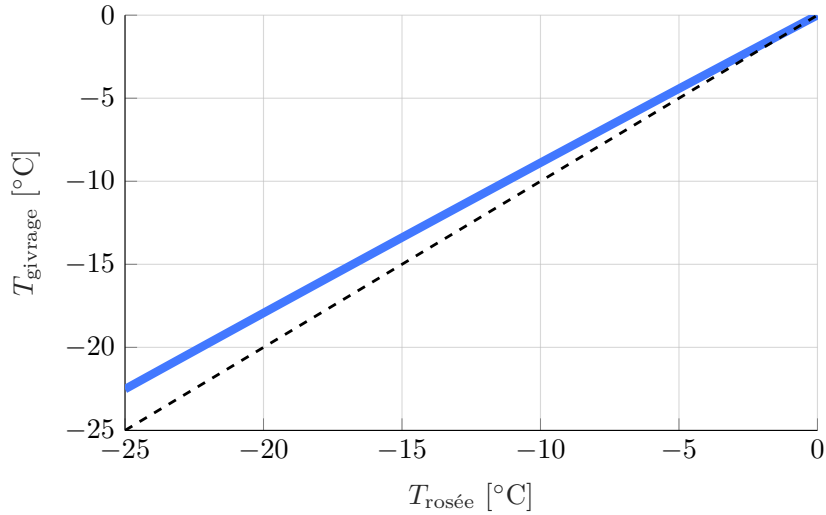


FIGURE 3.20 – Température de givrage en fonction de la température de rosée

Le point de givrage et le point de rosée se rejoignent pour une température de l'air nulle (en degrés Celsius). Le cas d'une température de l'air comprise entre la température de rosée et la température de givrage correspond alors à un état de surfusion.

La pression de vapeur saturante en glace peut s'exprimer de la même façon que la pression de vapeur saturante en liquide :

$$p_{glace,sat} = a_g \exp\left(\frac{b_g T}{T + c_g}\right) \quad (3.134)$$

ou

$$p_{glace,sat} = a_g \exp\left(\frac{((b_g - T/d_g) T)}{T + c_g}\right) \quad (3.135)$$

Seuls les coefficients  $a_g$ ,  $b_g$ ,  $c_g$  et  $d_g$  diffèrent : on peut par exemple utiliser, d'après [43]  $a_g = 6.1115$ ,  $b_g = 22.452$  et  $c_g = 272.55$  entre  $-50$  et  $0^\circ\text{C}$ , avec une erreur inférieure à  $0.02^\circ\text{C}$ .

Le point de givrage peut aussi être calculé à partir de la température de rosée : cette dernière permet de connaître la pression de vapeur, l'expression de la température de givrage en fonction de cette pression de vapeur permettant d'en déduire le point de givrage.

$$T_g = \frac{c_g \left[ \ln\left(\frac{a_d}{a_g}\right) + \frac{b_d T_{dp}}{T_{dp} + c_d} \right]}{b_g - \ln\frac{a_d}{a_g} - \frac{b_d T_{dp}}{T_{dp} + c_d}} \quad (3.136)$$

Les coefficients  $a_d$ ,  $b_d$  et  $c_d$  font référence aux coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  utilisés pour le calcul du point de rosée.

Le point de givrage est représenté en fonction du point de rosée sur la figure 3.20. La température de givrage est environ  $0.1^\circ\text{C}$  plus élevée que la température de rosée par degré inférieur à  $0^\circ\text{C}$ .

### 3.5 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté les phénomènes extérieurs qui vont influencer sur notre système thermique : le rayonnement solaire, les échanges convectifs avec l'air, le rayonnement atmosphérique et les points de rosée et de givrage.

Pour l'étude de chacun de ces phénomènes, un état de l'art a été réalisé, afin de déterminer les effets qu'ont ces phénomènes sur notre système. En particulier il a été montré que de nombreuses corrélations existent dans la littérature pour permettre le calcul du rayonnement solaire arrivant au sol, du coefficient



d'échange convectif, de la température de ciel et du point de rosée. Une étude du point de givrage a de plus été effectuée, permettant d'introduire un seuil minimal de température fonction de l'humidité de l'air pouvant ainsi permettre de réduire le besoin en chauffage.

Ces corrélations s'appuient à chaque fois sur des données qui peuvent être géographiques (latitude, longitude, altitude) ou météorologiques (température de l'air, vitesse du vent, nébulosité, humidité). Une comparaison des corrélations de la littérature a ainsi été proposée et a permis de mettre en évidence la cohérence entre les corrélations analysées. Dans la suite, nous privilégierons des corrélations donnant des valeurs dans la moyenne de ce qui existe dans la littérature mentionnée ici.

Par la suite, ces corrélations pourront être utilisées à partir des données disponibles pour les sites d'étude. En particulier, ces corrélations permettront de faire le lien entre les données climatiques et géographiques et les modèles numériques utilisés. Ces corrélations permettront de définir certaines des variables d'entrée de nos modèles numériques et influenceront sur les résultats obtenus.

Les excitations thermiques étudiées au cours de ce paragraphe s'appliquent à la surface de la structure. Pour l'étude des routes récupératrices d'énergie, aucune sollicitation n'intervient a priori en profondeur. Compte tenu des profondeurs caractéristiques liées aux fréquences des phénomènes, en particulier journalières, l'influence des excitations thermiques ne se fait ressentir que sur les couches situées près de la surface. C'est pourquoi nous nous focalisons ici sur la partie de la structure située près de la surface.

Il est à noter que d'autres phénomènes extérieurs sont susceptibles d'intervenir dans le cadre du fonctionnement du système de route solaire hybride. L'influence des précipitations, ou hydrométéores, n'est ainsi pas prise en compte, tout comme celle de la circulation des véhicules.

## Chapitre 4

# Composantes physiques des ROutes Solaires HYbrides : formulation et résolution

Dans le précédent chapitre, Les phénomènes se produisant à l'extérieur de la structure et ayant un impact sur la route solaire hybride ont été décrits. Dans ce chapitre, nous présentons maintenant les phénomènes ayant un effet sur le comportement thermique qui se produisent à l'intérieur de la route solaire hybride. Leur modélisation doit permettre d'aboutir ensuite à un modèle numérique et à la connaissance du comportement thermique de la structure.

Comme les structures routières traditionnelles, la route solaire hybride est constituée d'une superposition de couches. Cependant, pour répondre aux objectifs de récupération d'énergie et de protection du gel, certaines innovations ont été effectuées. La couche de surface devient ainsi semi-transparente, c'est-à-dire qu'une partie du rayonnement extérieur pénètre à l'intérieur de cette couche, et la couche de liaison est poreuse avec un fluide qui peut s'écouler à l'intérieur.

En plus de la conduction thermique qui se produit dans toute la structure, d'autres phénomènes d'échanges thermiques interviennent ici. Des échanges radiatifs ont lieu dans la couche de roulement semi-transparente et des échanges convectifs sont induits par l'écoulement de fluide dans la couche de liaison.

La modélisation de ces trois phénomènes est décrite au cours de ce chapitre. Le but est alors de déterminer la température de la structure en couplant ces trois phénomènes. Ceux-ci se produisant simultanément, les méthodes choisies pour la modélisation devront prendre en compte cette contrainte.

Pour cela, nous utilisons une méthode se basant sur l'utilisation d'un maillage pour résoudre des équations aux dérivées partielles, comme les volumes finis ou les éléments finis. L'outil développé dans le cadre de cette thèse pouvant être amené à être utilisé pour de la mécanique avec prise en compte de l'usure de la structure ou recherche de défauts ou inclusions, nous proposons d'utiliser ici la méthode des éléments finis. Cette méthode s'appuie sur la formulation faible des équations aux dérivées partielles et l'utilisation de produits scalaires dans des espaces de fonctions liées au maillage.

Les phénomènes de diffusion thermique, de convection hydraulique et des transferts radiatifs sont d'abord présentés, puis mis en équation avec la méthode des éléments finis.

### 4.1 Diffusion thermique

Nous présentons dans cette partie le phénomène de diffusion thermique, phénomène qui permet d'expliquer les transferts de chaleur à l'intérieur d'un domaine sous l'effet de la conduction thermique. Dans le cadre de ce travail, la diffusion thermique intervient dans les structures modélisées et peut être couplée à d'autres phénomènes tels que la convection hydraulique (voir la section 4.2) ou les échanges radiatifs (voir la section 4.3). En particulier, la diffusion thermique intervient ici dans toute la structure étudiée. Les apports de chaleur du rayonnement solaire ou les pertes par temps froid ont ainsi une influence sur le champ de température à l'intérieur de la chaussée, en particulier près de la surface.

Ce chapitre permet aussi d'introduire les modèles numériques qui seront davantage développés ensuite pour intégrer les couplages avec les autres phénomènes mentionnés.

### 4.1.1 Équation de la chaleur

La diffusion thermique est régie par l'équation de la chaleur. Nous notons ici  $\Omega$  le domaine considéré, de frontières  $\partial\Omega$ .

La conservation de l'énergie dans le domaine permet d'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = q \quad (4.1)$$

Avec  $\rho$  la masse volumique,  $c$  la capacité thermique massique,  $T$  la température,  $t$  la variable temporelle,  $\phi$  le flux thermique et  $q$  la source thermique volumique.

La loi de Fourier permet d'exprimer le flux thermique  $\phi$  sous la forme :

$$\phi = -k\nabla T \quad (4.2)$$

Où  $k$  est la conductivité thermique.

La diffusion thermique est donc régie par le système d'équations aux dérivées partielles suivant [46, 91] :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla T) = q & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ k\nabla T \cdot \vec{n} = \Phi & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x, t = 0) = T_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Avec  $\Phi$  une densité de flux thermique,  $\vec{n}$  la normale extérieure à la frontière et  $T_0$  le champ de température initial. Dans le cadre du problème de détermination du champ de température en des instants  $t > 0$ , ces données, tout comme les propriétés thermiques (conductivité et capacité thermiques, masse volumique) sont supposées connues.

Le flux thermique aux frontières  $\Phi$  provient des sollicitations extérieures. Il peut comporter plusieurs composantes :

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_r + \Phi_s \quad (4.4)$$

Avec :

- $\Phi_c$  les échanges convectifs avec l'atmosphère, qui peuvent s'écrire sous la forme  $\Phi_c = h(T_a - T)$ , avec  $h$  le coefficient d'échange convectif entre le fluide et la paroi et  $T_a$  la température du fluide, en l'occurrence ici l'air. Des corrélations pour déterminer le coefficient d'échange convectif ont été données dans le paragraphe 3.2.
- $\Phi_r$  les échanges radiatifs avec le ciel, qui peuvent s'écrire sous la forme  $\Phi_r = \varepsilon\sigma(T_c^4 - T^4)$  avec  $\varepsilon$  l'émissivité de la paroi et  $T_c$  la température du ciel.

On peut également écrire :

$$\Phi_r = \varepsilon\sigma(T_c^2 + T^2)(T_c + T)(T_c - T) \quad (4.5)$$

Dans le cas où les températures  $T_c$  et  $T$  sont proches, on peut introduire une température moyenne  $\bar{T}$  telle que [72] :

$$\bar{T}^3 = \frac{1}{4}(T_c^2 + T^2)(T_c + T) \quad (4.6)$$

Il est alors possible d'introduire un coefficient d'échange radiatif  $h_r = \sigma\varepsilon\bar{T}^3$  permettant de retrouver une expression similaire à celle donnant les échanges convectifs :

$$\Phi_r = h_r(T_c - T) \quad (4.7)$$

Des corrélations ont été données dans le paragraphe 3.3 pour évaluer la température de ciel.

- $\Phi_s$  les apports du rayonnement solaire, pour lesquels des détails ont été donnés dans le paragraphe 3.1.

De façon plus générale, l'équation de la chaleur (4.3) peut se réécrire en faisant intervenir des conditions aux limites de type Robin :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = q & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ k \nabla T \cdot \vec{n} = \Phi + \sum_i h_i (\theta_i - T) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x, t = 0) = T_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

#### 4.1.2 Détermination de paramètres caractéristiques

L'équation de la chaleur peut être résolue analytiquement, dans le cas unidimensionnel, à l'aide de séries de Fourier [83]. En particulier, la diffusion de la chaleur dans un milieu semi-infini peut être évoquée ici : il s'agit de déterminer la température en fonction de la profondeur connaissant une excitation périodique menée à la surface, ce qui permet notamment d'introduire des paramètres caractéristiques.

La température à la surface, en  $z = 0$ , s'écrit alors  $T(0, t) = T_0 + \Delta T \cos(\omega t - \phi)$  et nous cherchons  $T(z, t)$ .

Une séparation des variables est effectuée :  $T$  est réécrit sous la forme  $T = T_0 + \alpha(t)\beta(z)$ . La condition limite en  $z = 0$  permet d'obtenir  $\alpha(t) = \cos(\omega t - \phi)$ .

L'équation de la chaleur se réduit alors à :

$$\frac{k}{\rho c} \beta(t) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \alpha = 0 \quad (4.9)$$

Nous notons  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  des nombres complexes tels que  $\Re(\tilde{\alpha}) = \alpha$  et  $\Re(\tilde{\beta}) = \beta$ . On peut ainsi considérer  $\alpha = \exp(j(\omega t - \phi))$ . En introduisant de plus la diffusivité thermique  $D = \frac{k}{\rho c}$ , l'équation (4.9) devient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\alpha}}{\partial x^2} - j \frac{\omega}{D} \tilde{\alpha} = 0 \quad (4.10)$$

La solution s'écrit alors :

$$\tilde{\alpha} = A \exp\left(\sqrt{\frac{j\omega}{D}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{j\omega}{D}} x\right) \quad (4.11)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Avec  $j = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^2$  on a :

$$\tilde{\alpha} = A \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \exp\left(j\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \exp\left(-j\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \quad (4.12)$$

La température étant une grandeur finie, en particulier pour  $z \rightarrow +\infty$ , on a nécessairement  $A = 0$ . On a donc :

$$\tilde{\alpha} \tilde{\beta} = B \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \exp\left(j\left(\omega t - \phi - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right)\right) \quad (4.13)$$

En repassant en grandeurs réelles, et en identifiant avec la condition en  $z = 0$ , on obtient  $B = \Delta T$  et :

$$T(z, t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \cos\left(\omega t - \phi - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \quad (4.14)$$

Par linéarité de l'équation de la chaleur par rapport aux excitations thermiques, pour une température de surface s'écrivant  $T(0, t) = T_0 + \sum_{i=1}^N \Delta T_i \cos(\omega_i t - \phi_i)$ , la solution au problème s'écrit :

$$T(z, t) = T_0 + \sum_{i=1}^N \Delta T_i \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_i}{2D}} z\right) \cos\left(\omega_i t - \phi_i - \sqrt{\frac{\omega_i}{2D}} z\right) \quad (4.15)$$

La chaleur se diffuse donc dans le sol en s'atténuant, avec une longueur caractéristique  $\gamma$  qui dépend de la diffusivité thermique et de la période de l'excitation thermique de surface,  $\omega = \frac{2\pi}{P}$  où  $P$  est la période. On a :

$$\gamma = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{DP}{\pi}} \quad (4.16)$$

Ainsi, pour une période journalière, et en considérant une diffusivité thermique égale à  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , la longueur caractéristique vaut  $\gamma = 17 \text{ cm}$ . Pour une période annuelle,  $\gamma = 3.17 \text{ m}$ .

La pénétration de la chaleur dans le sol est donc limitée, c'est pourquoi nous nous focalisons ici sur les couches de surface qui sont les plus affectées par les sollicitations extérieures.

### 4.1.3 Application de la méthode des éléments finis

Dans le cas général de l'équation de la chaleur, des méthodes numériques doivent être mises en œuvre pour résoudre le problème de la diffusion thermique.

Soit  $L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  et  $H^1(\Omega)$  l'espace de Sobolev défini par :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega)\} \text{ telles que } \sum_{k=0}^1 \int_{x \in \Omega} \left( \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right)^2 d\Omega < \infty \quad (4.17)$$

Nous travaillons ici dans un sous espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions polynomiales sur chaque élément du maillage de degré inférieur ou égal à  $k \in \mathcal{N}$ . Nous notons  $W_h^k$  cet espace et  $(\varphi^i)$  une base de  $W_h^k$ . Nous revenons à l'équation de la chaleur (4.3) et supposons  $(\rho, c, k) \in L^\infty(\Omega)^3$ ,  $\Phi \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $q \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ ,  $T_0 \in L^2(\Omega)$ . Dans ce cas, le système (4.3) admet une unique solution [2].

La méthode des éléments finis est ici appliquée : le champ de température  $T$  est décomposé sur la base  $(\varphi)$  liée aux  $N$  nœuds du maillage :  $T = \sum_k^N \varphi^k T^k$ , où  $T_k$  est la température au  $k^{\text{ème}}$  nœud. En notant de plus  $x_j$  la position spatiale du  $j^{\text{ème}}$  nœud, on a  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , avec  $\delta$  le symbole de Kronecker.

Pour appliquer la méthode des éléments finis, l'équation de la chaleur (4.8) est intégrée sur le domaine  $\Omega$  afin d'obtenir la forme faible. Pour toute fonction  $w \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) - q \right) w d\Omega = 0 \quad (4.18)$$

La méthode de Galerkin est ici utilisée : la fonction  $w$  de l'équation (4.18) est choisie comme étant une fonction de la base des  $(\varphi)$  :  $w = \varphi^i$ .  $N$  équations similaires à (4.18) sont ainsi obtenues, pour chaque fonction  $\varphi^i$  de la base de  $W_h^k$ . En effectuant une intégration par parties en espace et en utilisant les conditions limites pour chacune de ces  $N$  équations, on obtient, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} & \sum_j \left\{ \frac{\partial T^j}{\partial t} \int_{\Omega} \rho c \varphi^i \varphi^j d\Omega + T^j \left[ \int_{\partial\Omega} \sum_l h_l \varphi^i \varphi^j d\Gamma + \int_{\Omega} k \nabla \varphi^i \nabla \varphi^j d\Omega \right] \right\} \\ & - \left[ \int_{\Omega} q \varphi^i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \Phi \varphi^i + \sum_l h_l \theta_l \varphi^i \right) d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'application de la méthode des éléments finis permet donc d'obtenir un système matriciel d'équations de la forme [90, 225] :

$$[C] \frac{\partial T}{\partial t} + [K] T = [F] \quad (4.20)$$

Avec, ici :

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \rho c \varphi^i \varphi^j d\Omega \quad (4.21)$$

$$K_{ij} = \int_{\partial\Omega} \sum_l h_l \varphi^i \varphi^j d\Gamma + \int_{\Omega} k \nabla \varphi^i \nabla \varphi^j d\Omega \quad (4.22)$$

$$F_i = \int_{\Omega} q \varphi^i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \Phi \varphi^i + \sum_l h_l \theta_l \varphi^i \right) d\Gamma \quad (4.23)$$

Nous introduisons  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Gamma}$  les produits scalaires sur  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\partial\Omega)$  définis par :

- $\forall u, v \in L^2(\Omega)$ ,  $\langle u|v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega$
- $\forall u, v \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $\langle u|v \rangle = \int_{\partial\Omega} uv d\Gamma$

Les matrices éléments finis pour la diffusion thermique se réécrivent alors :

$$C_{ij} = \langle \rho c \varphi^j | \varphi^i \rangle \quad (4.24)$$

$$K_{ij} = \left\langle \sum_l h_l \varphi^j | \varphi^i \right\rangle_{\Gamma} + \langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle \quad (4.25)$$

$$F_i = \langle q | \varphi^i \rangle + \langle \Phi + \sum_l h_l \theta_l | \varphi^i \rangle_{\Gamma} \quad (4.26)$$

Les expressions de ces matrices sont données pour le cas d'une interpolation linéaire dans l'annexe B.2.

#### 4.1.4 Cas de la modélisation thermique du changement de phase

##### Introduction

Dans certain cas, le matériau étudié peut être amené à changer d'état, en particulier à passer de l'état solide à l'état liquide. Dans ce cas, la libération ou l'apport de chaleur latente modifie le comportement thermique du domaine étudié au voisinage de la zone soumise au changement d'état. C'est en particulier le cas pour les matériaux à changement d'état ou pour certaines solutions.

Les matériaux à changement de phase ou MCP sont parfois utilisés afin d'écrêter les variations brusques de températures. Les MCP peuvent par exemple être contenus dans la paroi qu'on souhaite protéger sous la forme d'inclusions.

L'objectif est d'utiliser la chaleur latente de ces matériaux, le changement d'état, de l'état solide vers l'état liquide, devant se produire sur la plage de température étudiée. En cas de chauffage d'une paroi par exemple, le matériau à changement de phase va, au moment du changement d'état, absorber la chaleur sans s'échauffer, et ainsi empêcher la paroi de monter trop haut en température. Cette énergie accumulée par le MCP peut ensuite être restituée en cas de baisse de la température de la paroi, le changement d'état libérant cette fois ci la chaleur accumulée.

Plusieurs éléments sont nécessaires pour qu'un matériau à changement de phase soit efficace et permette d'écrêter les variations brusques de température :

- la température de changement d'état doit se produire sur la plage de température étudiée. Utiliser de l'eau (température de fusion à 0°C) pour lutter contre les fortes chaleurs dans le bâtiment n'est pas utile.
- la chaleur latente doit être importante, de telle sorte que la chaleur pouvant être absorbée puisse être importante et avoir une réelle influence sur la température de la paroi étudiée.
- L'encapsulation du MCP dans la paroi doit pouvoir résister aux cycles de fusion/solidification en étant prévue pour contenir les dilatations et rétractions du matériau. Cette encapsulation doit de plus être résistante dans le temps et les propriétés thermiques du MCP doivent pouvoir être préservées pendant les cycles d'utilisation

##### Modélisation

L'équation de la chaleur (4.8) ne prend pas en compte les phénomènes de changement d'état. Afin d'établir une nouvelle formulation de l'équation de la chaleur, nous repartons de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = q \quad (4.27)$$

Avec  $H$  l'enthalpie et  $\phi$  le flux thermique donné par la loi de Fourier :  $\phi = -k \nabla T$ .

L'objectif est ici de retrouver une équation similaire à celle de la diffusion thermique introduite précédemment en faisant intervenir un terme de dérivée de température par rapport au temps. L'équation (4.27) peut ainsi se réécrire :

$$\frac{\partial H}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \phi = q \quad (4.28)$$

Il est donc nécessaire de déterminer le terme  $\frac{\partial H}{\partial T}$ .

L'enthalpie  $H$  est la somme de l'enthalpie sensible  $h$ , qui peut s'exprimer en fonction de la température, et de l'enthalpie latente  $s$  qui dépend de l'état du matériau (solide, fluide ou gazeux) [247] :

$$H(T) = h(T) + s \quad (4.29)$$

L'enthalpie sensible peut être liée aux variations de températures :  $dh = C dT$  par définition de la capacité thermique volumique. En particulier, pour un système multiphasique, comprenant à la fois un liquide et un solide de capacités respectives  $C_l$  et  $C_s$  et de fractions massiques  $f_l$  et  $f_s$ , on a :  $dh = f_l C_l dT + f_s C_s dT$ .

L'enthalpie de chaleur latente dépend de la fraction volumique de liquide : elle vaut  $L$  (enthalpie de changement d'état) pour un matériau complètement liquide, avec  $f_l = 1$  et 0 pour un matériau purement solide. La variation infinitésimale d'enthalpie de chaleur latente s'écrit donc [247] :  $ds = L df_l$ .

On a donc, pour l'enthalpie [1] :

$$dH = f_l C_l dT + f_s C_s dt + L df_l \quad (4.30)$$

L'équation (4.28) se réécrit alors, en prenant de plus en compte  $f_s = 1 - f_l$  :

$$\left( C_l f_l + C_s (1 - f_l) + L \frac{\partial f_l}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = q \quad (4.31)$$

On note  $T_s$  la température du solidus,  $T_l$  la température du liquidus. Dans le cas d'une fusion isotherme, on a  $T_f = T_l$ . On se place ici dans le cas  $T_s \neq T_l$ , en prenant  $T_l = T_s + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$  si nécessaire.

L'hypothèse est faite que la fraction volumique de fluide est une fonction linéaire de la température [248] :

$$f(T) = \begin{cases} 0 & \text{pour } T < T_s \\ \frac{T - T_s}{T_l - T_s} & \text{pour } T_s \leq T \leq T_s \\ 1 & \text{pour } T > T_l \end{cases} \quad (4.32)$$

En injectant (4.32) dans (4.31), on obtient :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = q & \text{pour } T < T_s \text{ ou } T > T_l \\ \left( \rho_{eq} c_{eq} + \frac{L}{T_l - T_s} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = q & \text{pour } T_s \leq T \leq T_l \end{cases} \quad (4.33)$$

Avec  $\rho_{eq} c_{eq} = f_l C_l + (1 - f_l) C_s$  la capacité thermique équivalente.

Nous retrouvons donc une formulation similaire à l'équation de la chaleur (4.8). La résolution numérique peut donc être réalisée de la même manière, avec la méthode des éléments finis. La capacité thermique équivalente obtenue prend en compte l'enthalpie de changement d'état et devient donc, dans le cas général, une fonction de la température. On retrouve, à travers cette augmentation de la capacité thermique équivalente au moment du changement d'état les effets du stockage de l'énergie, ce qui constitue le principal intérêt de ces matériaux.

Un autre type de modélisation du changement de phase consiste à considérer que le changement d'état se produit à une température donnée et non pas sur un intervalle [97].

### Cas des mélanges diphasés

Nous généralisons dans ce paragraphe l'approche utilisée pour les matériaux à changement de phase dans le paragraphe précédent. Nous considérons ici des mélanges diphasés, comme la saumure. Dans ce cas, deux phases peuvent coexister sur une plage donnée de température, dans des proportions qui dépendent de la température. Une partie du diagramme de phase pour une solution de chlorure de sodium est représentée sur la figure 4.1. L'abscisse de cette figure,  $x_{NaCl}$ , représente la masse de sel par kg de saumure (liquide).

Lors du refroidissement d'un mélange eau+sel vérifiant  $x_{NaCl} < 0.2331$ , c'est-à-dire ayant moins de 303 g de sel par kg d'eau, le mélange est d'abord liquide, comme indiqué sur la figure 4.2. Puis des cristaux de glace pure commencent à se former au passage de l'eutectique. La proportion de sel dans la

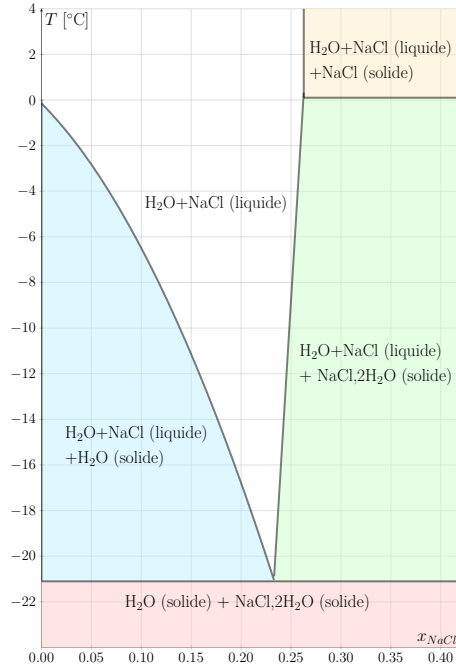


FIGURE 4.1 – Diagramme de phase H<sub>2</sub>O / NaCl

phase liquide du mélange et la proportion de glace augmentent progressivement, de telle sorte que l'état du système suit la courbe eutectique jusqu'au point de l'eutectique à  $-21.1^{\circ}\text{C}$  et  $x_{\text{NaCl}} = 0.2331$ . À ce moment là, la saumure passe entièrement à l'état liquide le mélange est alors constitué de cristaux de glace pure et de cristaux d'un composé de NaCl, 2H<sub>2</sub>O (dihydrate de chlorure de sodium).

Dans le cas où la solution initiale contient plus de 360 g de sel par litre d'eau à  $0^{\circ}\text{C}$  ( $x_{\text{NaCl}} > 0.2628$ ), le mélange est alors saturé en sel et un dépôt de sel se forme au-dessus de  $0.1^{\circ}\text{C}$  [223]. En dessous, c'est du dihydrate de chlorure de sodium qui apparaît. Au-dessus de  $-21.1^{\circ}\text{C}$ , la phase liquide est alors à saturation en NaCl et en-dessous de cette valeur, on retrouve un mélange solide de glace et de dihydrate de chlorure de sodium.

Dans le cas  $x_{\text{NaCl}} < 0.2331$ , la température de formation des premiers cristaux de glace  $T_l$  peut être estimée en fonction de la concentration en chlorure de sodium  $C$  dans le mélange. Une relation  $T_l = f(C)$  peut être établie. À partir des données de [1], on peut approximer  $T_l = -197.7C^2 - 43.64C$  avec  $C$  en kg par kg de saumure.

Lors du changement d'état du mélange, les variations de température entraînent une variation de la masse de glace et donc de la masse de saumure alors que la masse de sel reste constante. Des variations de concentration en sel dans la saumure se produisent donc en même temps que la quantité de saumure varie.

Une variation infinitésimale de la masse de saumure  $dm_{\text{saumure}}$  provoque une variation infinitésimale de concentration en sel dans la saumure. Par définition de  $C$ , on déduit  $dm_{\text{saumure}} = \frac{-m_{\text{saumure}}^2}{m_{\text{NaCl}}} dC$ . Puis, par définition de la fraction liquide,  $m_{\text{saumure}} f_l m_{\text{totale}}$ , on en déduit :

$$df_l = \frac{-f_l^2}{C_0} dC \quad (4.34)$$

Où  $C_0$  est la fraction massique en sel du mélange.

De plus, connaissant pour le changement de phase l'évolution de la température en fonction de la concentration, l'enthalpie de l'équation (4.30) peut s'exprimer en fonction de la température.

Lors du passage du mélange eutectique de l'état liquide à l'état solide, à  $-21.1^{\circ}\text{C}$ , la même méthode de calcul peut être appliquée, pour un changement d'état sur un intervalle infinitésimal de température. L'enthalpie de changement d'état du mélange eutectique a été évaluée à  $233 \text{ kJ.kg}^{-1}$  par [101].

Il est ainsi possible de connaître, selon la quantité de sel présente en solution, l'enthalpie à apporter pour élever la température d'un kg de solution de  $1^{\circ}\text{C}$  selon la quantité de sel apportée à la solution. La



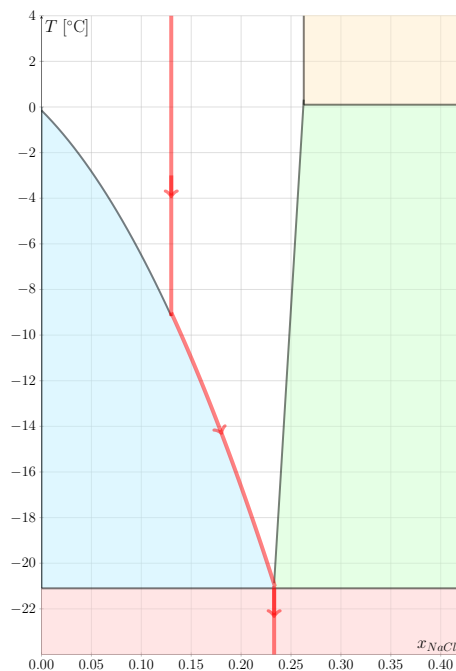


FIGURE 4.2 – Passage de la saumure de l'état liquide à l'état solide

figure 4.3 représente les variations d'enthalpie pour des solutions contenant 25 g (à gauche) et 200 g (à droite) de sel par kg d'eau, soit des fractions massiques de 0.024 et 0.167.

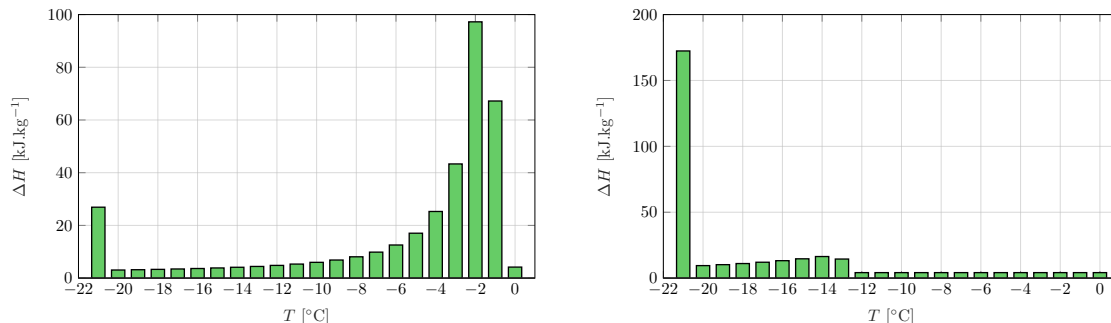


FIGURE 4.3 – Variations d'enthalpie pour des solution de chlorure de sodium contenant 25 (à gauche) et 200 g (à droite) de sel par litre d'eau

Ces deux figures laissent apparaître un pic de variation d'enthalpie au niveau du changement d'état de l'eutectique, à  $-21.1^{\circ}\text{C}$ , ce pic étant d'autant plus important que la quantité de saumure à cette température est élevée et donc que la quantité de sel dans la solution est importante. Lorsque la fraction massique de sel atteint la valeur de 0.2331, le mélange eutectique se comporte comme un corps pur et le changement d'état se produit entièrement à  $-21.1^{\circ}\text{C}$ .

Un autre pic apparaît entre  $-21.1$  et  $0^{\circ}\text{C}$  et correspond à la formation ou à la fonte de la glace. Ce pic est d'autant plus important que la quantité de sel est faible, le maximum étant atteint pour le cas d'une solution d'eau pure. Dans ce cas, on retrouve un comportement de corps pur, sans pic de l'eutectique.

On retrouve également sur cette figure le fait que la formation ou la fonte de la glace s'effectue à une température qui se rapproche de  $0^{\circ}\text{C}$  lorsque la quantité de sel diminue, comme cela était déjà visible sur le diagramme de phase de la figure 4.1.

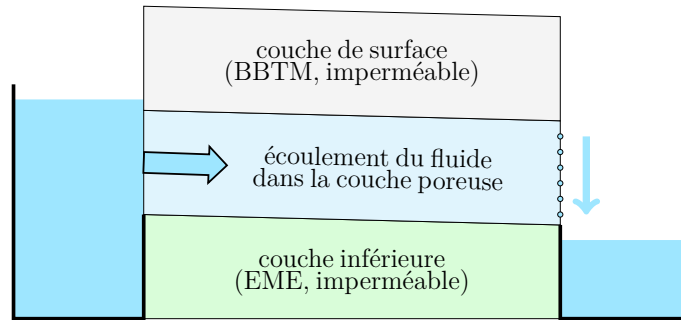


FIGURE 4.4 – Chaussée avec une couche drainante

### 4.1.5 Synthèse

Cette section a permis d'introduire la diffusion thermique ainsi que le système d'équations obtenu suite à l'application de la méthode des éléments finis.

Si l'application de la méthode des éléments finis au problème de la diffusion thermique est bien documentée dans la littérature, quelques adaptations ont été introduites afin de prendre en compte notamment la présence de matériaux à changement de phase et de traiter ce problème en présence d'inclusions.

## 4.2 Convection hydraulique

### 4.2.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions le comportement thermique d'un milieu poreux en présence d'un écoulement de fluide, ce qui correspond, pour notre étude, à l'étude du comportement thermique de la couche poreuse, située en-dessous de la couche de roulement.

La présence d'une légère pente de l'ordre de 1 à 2 % pour le dévers permet au fluide de s'écouler à l'intérieur de cette couche et d'engendrer des transferts thermique (figure 4.4). En particulier, lors de conditions estivales, l'objectif est d'introduire un fluide froid qui va ensuite se réchauffer au cours de son écoulement et voir son énergie thermique accrue à la sortie de la chaussée. Pour des conditions hivernales, une source chaude en entrée permet de délivrer de la chaleur à la structure et en particulier d'augmenter, par diffusion thermique, la température de la surface.

Comme pour les échanges convectifs avec l'air présentés dans la section 3.2, la différence de température entre la phase solide du milieu et le fluide contenu dans les pores provoque l'établissement d'un transfert thermique entre les deux phases.

Nous proposons dans cette section d'abord d'établir les propriétés de l'écoulement du fluide à l'intérieur du milieu poreux, puis de modéliser les transferts thermiques qui se produisent à l'intérieur de ce milieu entre le fluide et le matériau poreux. La méthode des éléments finis est de nouveau utilisée et une adaptation est introduite pour prendre en compte la structure du système d'équations régissant le problème.

### 4.2.2 Mise en équation

La mise en mouvement d'un fluide demande un apport énergétique lié à une diminution du potentiel énergétique du fluide. Ce potentiel énergétique provient, pour l'écoulement de fluide dans une couche poreuse, de deux effets : l'effet des forces de pression, de potentiel  $\varphi_p$  et celui des forces gravitationnelles, de potentiel  $\varphi_g$ . Lorsqu'un fluide est immobile, la somme de ces deux potentiels est constante. Pour que le fluide se mette en mouvement, il faut que des variations du potentiel total  $\varphi = \varphi_p + \varphi_g$  existent dans l'espace.

## Loi de Darcy

En 1856, Dans son ouvrage sur l'alimentation hydraulique de la ville de Dijon [62] écrit, suite à des mesures expérimentales dans un milieu poreux uniforme, unidimensionnel et saturé, une relation entre la vitesse moyenne de l'écoulement  $U$  et le gradient de pression :

$$U = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.35)$$

Avec  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide (en Pa.s) et  $k$  la perméabilité intrinsèque. La vitesse moyenne de l'écoulement  $\vec{U}$ , aussi appelée vitesse de Darcy, n'est pas la vitesse du fluide dans le milieu poreux, mais correspond à un débit passant à travers une section donnée.

La vitesse locale de l'écoulement, notée  $\vec{u}$  et de valeur moyenne  $\bar{\vec{u}}$  est reliée à la vitesse de Darcy de l'écoulement par l'intermédiaire de la porosité  $\phi$  par la relation :

$$\vec{U} = \phi \bar{\vec{u}} \quad (4.36)$$

La loi de Darcy a depuis été étendue au cas tridimensionnel en faisant intervenir le gradient de potentiel :

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} \nabla \varphi \quad (4.37)$$

La perméabilité peut être calculée à partir de la relation de Kozeny-Carman [19] :

$$k = \frac{d_m^2 \phi}{175(1 - \phi)^2} \quad (4.38)$$

Où  $d_m$  est la taille moyenne des pores.

La loi de Darcy (4.37) exprimée sous forme potentielle permet de retrouver le fait qu'une variation de potentiel est nécessaire pour entraîner un mouvement du fluide. Nous présentons maintenant le calcul des deux potentiels qui interviennent ici, gravitationnel et de pression.

Le potentiel gravitationnel est lié à la force gravitationnelle. En un point du milieu de masse volumique  $\rho$  situé à une hauteur  $z$  (algébrique) au-dessus d'un point de référence, on a :

$$\varphi_g = \rho g z \quad (4.39)$$

Le potentiel de pression est quant à lui lié aux forces de pression qui s'exercent dans le milieu et qui augmentent lorsque la profondeur s'accroît. Il est positif dans le cas d'un milieu saturé et augmente linéairement avec la profondeur. Il est alors lié à la hauteur de colonne d'eau ou profondeur de submersion  $h$  à l'aide de la relation :

$$\varphi_p = \rho g h \quad (4.40)$$

Le potentiel total s'écrit donc sous la forme :

$$\varphi = \rho g (h + z) \quad (4.41)$$

On retrouve ainsi un potentiel constant en tout point pour un milieu entièrement submergé avec un niveau d'eau constant. Dans ce cas, le fluide ne se met pas en mouvement par des effets mécaniques.

La loi de Darcy (4.37) peut alors s'écrire, sous sa forme généralisée :

$$u = -K(h) \nabla H \quad (4.42)$$

Où  $H = h + z$  est la hauteur piézométrique, et  $K$  la conductivité hydraulique (exprimée en m.s<sup>-1</sup>). Celle-ci s'obtient à partir de la perméabilité  $k$  par la relation :

$$K = k \frac{\rho g}{\mu} \quad (4.43)$$

La loi de Darcy (4.42) n'est cependant valable que sous les conditions d'un écoulement stationnaire, d'une couche saturée en fluide et d'une vitesse de pore faible et uniforme.

Si l'hypothèse de vitesse de pore faible n'est pas respectée, on retrouve l'équation de Darcy-Forchheimer (4.68), qui rajoute un terme non linéaire à l'équation de Darcy. L'apparition de ce terme se fait de façon progressive lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement fluide est de l'ordre de  $10^2$  [179].

En prenant en compte une perméabilité  $K = 2.18 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$  [11] et une viscosité cinématique de l'eau à différentes températures, des estimations des vitesses maximales de Darcy peuvent être obtenues et sont données sur la table 4.1.

$T$ [K]	$\nu$ [ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ] [68]	$u_{max}$ [ $\text{m.s}^{-1}$ ]
290	$1.080 \times 10^{-6}$	$7.3 \times 10^{-4}$
300	$0.855 \times 10^{-6}$	$5.8 \times 10^{-4}$
330	$3.02 \times 10^{-6}$	$3.3 \times 10^{-4}$

TABLE 4.1 – Estimation des vitesses maximales (au sens de Darcy) pouvant être considérées pour quelques températures sous l'hypothèse d'un régime de Darcy

### Loi de Richards

La loi de Darcy peut être généralisée au cas d'un milieu non saturé en eau. Dans ce cas, l'écoulement du fluide dans le milieu poreux est modifié du fait de la hauteur de submersion  $h$ .

Le potentiel de pression peut ainsi être négatif dans le cas d'un milieu poreux ou en présence de canaux capillaires : le fluide est aspiré lorsqu'il entre dans un tube de diamètre suffisamment faible. La hauteur de l'ascension capillaire dans un tube s'écrit alors (loi de Jurin) [176] :

$$h_J = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad (4.44)$$

Où  $\sigma$  est la tension superficielle du fluide,  $\alpha$  l'angle de contact du fluide sur la surface et  $r$  le rayon du capillaire. Ainsi, dans un capillaire, les points du fluide situés entre la surface du fluide en-dehors du capillaire (hauteur de référence nulle) et  $h_J$  ont une profondeur de submersion négative et un potentiel de pression négatif.

Ce phénomène d'aspiration capillaire se produit notamment à l'intérieur du sol dans certains conduits du réseau de pores. La perméabilité intrinsèque est alors fonction du matériau et de la teneur en eau  $\theta$  présente dans le matériau (qui peut être liée à la hauteur de submersion  $h$  par des corrélations).

L'écoulement est alors modifié par l'absence de fluide dans certaines zones. Ceci est en particulier visible dans le sol. Dans une nappe phréatique, saturée en eau, la profondeur de submersion  $h$  diminue linéairement avec la hauteur et la hauteur piézométrique  $H$  est constante : il n'y a pas d'écoulement dû aux forces de gravité ou de pression. En revanche, au-dessus de la surface libre de la nappe phréatique, la présence de capillaire entraîne une baisse plus rapide de la profondeur de submersion avec la hauteur. En conséquence, la hauteur piézométrique décroît aussi avec l'altitude. Cette baisse s'accroît davantage près du sol où les phénomènes d'évaporation apparaissent. Cette baisse de la hauteur piézométrique provoque une tendance à la remontée de l'eau dans le sol non saturé.

L'écoulement est alors régi par la loi de Richards, formulée en 1931 [199], qui est une généralisation de la loi de Darcy aux milieux non saturés.

En plus de la hauteur de submersion déjà présentée précédemment, nous introduisons la notion de teneur en eau : il s'agit du volume occupé par l'eau par unité de volume de pore. Dans le cas d'un milieu saturé en eau, on a  $\theta = \theta_s \leq 1$ , teneur en eau à saturation.

L'évolution de la teneur en eau  $\theta$  peut être décrite en utilisant la loi de Darcy ainsi que l'équation de continuité. L'équation de continuité s'obtient à partir de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{U} \quad (4.45)$$

D'où, en utilisant la loi de Darcy (4.42) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\theta) \nabla (h + z)] \quad (4.46)$$

En décomposant le terme de droite, la relation (4.46) peut s'exprimer en fonction de la teneur en eau sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot [K(\theta) \nabla h] = \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (4.47)$$

Pour exprimer la relation (4.46) en fonction de la profondeur de submersion  $h$ , la capacité hydraulique  $c(h)$  est introduite, définie par :

$$c(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h} \quad (4.48)$$

On a alors :

$$c(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot [K(h) \nabla h] = \frac{\partial K(h)}{\partial z} \quad (4.49)$$

Les équations (4.47) et (4.49) ont une structure similaire à l'équation de la chaleur, avec ici la teneur en eau ou la hauteur de submersion en inconnue au lieu de la température. Les termes capacitif  $c(h)$  et diffusif  $K(h)$  ou  $K(\theta)$  dépendent fortement de la teneur en eau et de la hauteur de submersion et diminuent rapidement lorsque la teneur en eau diminue : l'écoulement de l'eau est fortement ralenti en milieu non saturé. Ces coefficients sont donnés par des corrélations dont certaines sont listées dans les articles de Kosugi et al. (2002) [139] ou de Leij et al. (1997) [151]. Des valeurs de paramètres physiques (teneur en eau résiduelle, à saturation, paramètres empiriques) peuvent être obtenues avec l'article de Carsel et Parrish (1988) [45].

### Mise en équation dans le cas général

Dans les précédents paragraphes, nous avons cherché à déterminer les caractéristiques de l'écoulement en milieu poreux, en l'absence d'effets thermiques. Nous allons maintenant partir des équations générales qui régissent l'écoulement en milieu poreux et les transferts de chaleur s'y produisant pour en extraire des équations mettant en jeu la température, les caractéristiques mécaniques de l'écoulement ainsi que les échanges thermiques avec la phase solide.

Pour cela, l'hypothèse est faite que le fluide étudié est newtonien et incompressible. Il est également supposé que la masse volumique, la viscosité et la conductivité thermique sont des constantes pour la gamme de températures considérées.

L'indice  $f$  fait référence aux grandeurs relatives au fluide, qui vérifie au niveau microscopique les équations de Navier-Stokes [241] :

— conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \rho_f \vec{u}_f = 0 \quad (4.50)$$

— conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_f \left( \frac{\partial \vec{u}_f}{\partial t} + \vec{u}_f \cdot \nabla \vec{u}_f \right) = -\nabla p_f + \rho_f \vec{g} + \mu_f \nabla^2 \vec{u}_f \quad (4.51)$$

— conservation de l'énergie :

$$\rho_f c_{pf} \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_f T_f) \right) = k_f \nabla^2 T_f \quad (4.52)$$

Avec  $p_f$  la pression.

La phase solide, indiquée  $s$  est supposée immobile. Elle vérifie, là aussi au niveau microscopique, la conservation de l'énergie :

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \nabla^2 T_s \quad (4.53)$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement du fluide au niveau microscopique nécessitent, pour être entièrement résolues, un très grand raffinement spatial : il faut en effet prendre en compte les effets de la turbulence de façon détaillée, et donc avoir une discrétisation avec des tailles d'éléments de l'ordre des tailles des particules étudiées [241].

L'étude menée ici ne vise pas à déterminer de façon aussi détaillée l'écoulement du fluide : l'objectif est d'établir, comme pour la diffusion de la chaleur dans la section précédente, des équations au niveau macroscopique pour pouvoir ensuite obtenir le comportement thermique global de la structure.

Pour cela, nous nous plaçons dans un *Volume Élémentaire Représentatif* ou VER. Ce volume élémentaire représentatif représente une partie du domaine étudié dont les dimensions sont grandes par rapport à l'échelle des turbulences, mais petites devant la taille du domaine. L'objectif de l'utilisation du VER est alors de moyenniser les relations (4.50), (4.51), (4.52) et (4.53) définies à l'échelle microscopique afin d'obtenir des relations utilisables au niveau macroscopique. Les inconnues du problème ne sont dès lors plus les grandeurs microscopiques, mais leurs moyennes sur ces VER, qui ne prennent donc pas en compte le détail des phénomènes, notamment de turbulences, qui interviennent à l'échelle microscopique.

L'idée est pour cela de faire en sorte que les VER aient des dimensions grandes devant celles des particules ce qui permet d'avoir un comportement moyen qui ne soit pas influencé par le comportement particulier d'une seule particule, tout en faisant en sorte que les dimensions du VER restent petites devant celles des pores du matériau poreux afin de pouvoir discrétiser l'équation obtenue sur le domaine.

Il est possible de décomposer une variable  $w$  en une valeur moyennée sur le VER  $\langle w \rangle$  et en variations autour de cette valeur moyenne  $w'$ . En notant  $\Delta V$  le VER, on a :

$$w = \langle w \rangle + w' \quad (4.54)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} w dV \quad (4.55)$$

Nous notons également  $\Delta V_f$  le volume occupé par la phase fluide à l'intérieur du VER. Si le milieu poreux est saturé en fluide, alors la porosité locale  $\Delta V_f$  s'écrit en fonction de la porosité locale  $\phi$  :

$$\Delta V_f = \phi \Delta V \quad (4.56)$$

Nous définissons aussi la décomposition sur  $\Delta V_f$  par :

$$w = \langle w \rangle_f + w'_f \quad (4.57)$$

Avec :

$$\langle w \rangle_f = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} w dV \quad (4.58)$$

Pour une grandeur  $w$  relative au fluide, on a  $w = 0$  sur le domaine solide et donc [96] :

$$\langle w \rangle = \phi \langle w \rangle_f \quad (4.59)$$

Les théorèmes de dérivation permettent d'exprimer des moyennes de grandeurs dérivées en fonction des dérivées des grandeurs moyennes [216, 254]. On a, pour une grandeur scalaire  $w$  ou un vecteur  $\vec{w}$  :

$$\langle \nabla w \rangle = \nabla \langle w \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{S_{fs}} w \vec{n}_{fs} dS \quad (4.60)$$

$$\langle \nabla \cdot \vec{w} \rangle = \nabla \cdot \langle \vec{w} \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{S_{fs}} \vec{w} \cdot \vec{n}_{fs} dS \quad (4.61)$$

$$\langle \nabla \vec{w} \rangle = \nabla \langle \vec{w} \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{S_{fs}} \vec{w} \otimes \vec{n}_{fs} dS \quad (4.62)$$

La dérivation temporelle s'écrit, pour un champ  $w$  scalaire ou vectoriel [96] :

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial t} - \frac{1}{\Delta V} \int_{S_{fs}} w \vec{u}_{fs} \cdot \vec{n}_{fs} dS \quad (4.63)$$

Avec  $S_{fs}$  les frontières entre fluide et solide à l'intérieur du VER,  $\vec{n}_{fs}$  la normale à la frontière fluide/solide orientée du fluide vers le solide et  $\vec{u}_{fs}$  la vitesse du fluide sur cette interface. Les équations

de Navier-Stokes (4.50),(4.51) et (4.52) peuvent se moyenner et s'écrire, en faisant intervenir les grandeurs moyennes :

$$\langle \nabla \cdot \vec{u}_f \rangle = 0 \quad (4.64)$$

$$\rho_f \left( \left\langle \frac{\partial \vec{u}_f}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{u}_f \cdot \nabla \vec{u}_f \rangle \right) = -\langle \nabla p_f \rangle + \langle \rho_f \vec{g} \rangle + \langle \mu_f \nabla^2 \vec{u}_f \rangle \quad (4.65)$$

$$\rho_f c_{pf} \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial t} \right\rangle + \rho_f c_{pf} \langle \nabla \cdot (\vec{u}_f T_f) \rangle = k_f \langle \nabla^2 T_f \rangle \quad (4.66)$$

L'objectif est de faire apparaître des relations mettant en jeu les valeurs moyennes de grandeurs :  $\langle \vec{u}_f \rangle$ ,  $\langle p_f \rangle$  et  $\langle T_f \rangle$  Pour l'équation de continuité, nous faisons l'hypothèse que les parois séparant le matériau solide du fluide sont imperméables :  $\vec{u}_f \cdot \vec{n}_{fs} = 0$ , et indéformables :  $\vec{u}_{fs} \cdot \vec{n}_{fs} = 0$ .

Le théorème de dérivation appliqué à l'équation de continuité (4.64), (4.65) et (4.66), en se plaçant sur la phase fluide et en appliquant (4.59), permet d'obtenir :

$$\nabla \cdot (\langle \vec{u}_f \rangle) = 0 \quad (4.67)$$

Le traitement de l'équation de conservation du moment nécessite l'utilisation de l'équation de continuité (4.67) et donc des hypothèses déjà effectuées pour son obtention. En plus de cela, nous supposons que les variations spatiales de la viscosité et de la porosité sont faibles, que les dimensions du VER sont bien choisies et que l'écoulement est quasi-permanent et donc que les effets inertiels peuvent être négligés.

L'intégration de la relation (4.65) sur le VER permet d'obtenir une équation mettant en jeu les grandeurs moyennes des grandeurs physiques sur le VER ainsi que leurs variations au niveau microscopique. Afin de ne conserver que des grandeurs macroscopiques, les termes des échelles microscopiques sont estimés à partir des grandeurs macroscopiques : il s'agit de relations de fermeture.

Avec ces hypothèses, et en utilisant des relations de fermeture pour les variations de pressions et de vitesse, l'équation de conservation du moment se réécrit sous la forme de l'équation de Darcy-Forchheimer [255, 256] :

$$\langle \vec{u}_f \rangle = \frac{-\vec{K}}{\mu_f} (\nabla \langle p_f \rangle_f - \rho_f \vec{g}) - \vec{F} \cdot \langle \vec{u} \rangle_f \quad (4.68)$$

Dans le cas d'un écoulement à faible Reynolds, c'est-à-dire à faibles effets inertiels microscopiques,  $\vec{F}$  est négligeable [256] et on retrouve la loi de Darcy :

$$\langle \vec{u}_f \rangle = \frac{-\vec{K}}{\mu_f} (\nabla \langle p_f \rangle_f - \rho_f \vec{g}) \quad (4.69)$$

Pour l'équation de conservation de l'énergie dans le fluide, les théorèmes de dérivation et les hypothèses d'imperméabilité et de non déformation des parois sont de nouveau utilisées. On suppose également que les variations spatiales de la porosité sont négligeables. Pour simplifier les notations, nous notons  $T$  la valeur  $\langle T \rangle$  et  $u_D$  la vitesse de Darcy  $u_D = \langle u \rangle$ .

Sous ces hypothèses et avec ces notations, les équations (4.66) et (4.53) peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} \phi \rho_f c_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f c_{pf} \nabla \cdot (\vec{u}_D T_f) &= \phi k_f \nabla^2 T_f + \rho_f c_{pf} \nabla \cdot (A_D \cdot \nabla T_f) \\ &+ k_f \nabla \cdot [G (\nabla T_f - \sigma \nabla T_s)] + h_{fs} a_{fs} (T_s - T_f) \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$(1 - \phi) \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \phi) k_s \nabla^2 T_s + k_s \nabla \cdot \left[ G \left( \nabla T_s - \frac{1}{\sigma} \nabla T_f \right) \right] + h_{fs} a_{fs} (T_f - T_s) \quad (4.71)$$

Avec :

- $A_D \cdot \nabla T_f$  la dispersion thermique, qui représente l'effet des variations du produit  $u T_f$  à l'échelle microscopique. Le coefficient  $A_D$  dépend de la diffusivité thermique et du nombre de Péclet. Il est donné par [116, 241, 51].

- $k_f G (\nabla T_f - \sigma \nabla T_s)$  est la tortuosité thermique qui reflète la complexité géométrique de l'interface entre le fluide et le solide. Le coefficient  $G$  est le paramètre de tortuosité, donné par [115, 241], qui dépend notamment des conductivités thermiques du fluide et du solide.  $\sigma = \frac{k_s}{k_f}$  est le ratio des conductivités thermiques.
- $h_{fs} a_{fs} (T_s - T_f)$  est le terme représentant les échanges thermiques qui se produisent aux interfaces entre le fluide et le solide par unité de volume avec  $a_{fs} = \frac{A_{fs}}{V} = \frac{6(1-\varphi)}{d_p}$  l'aire spécifique de l'interface.  $d_p$  est le diamètre des particules et  $h_{fs}$  le coefficient d'échange thermique interfacial, ou coefficient volumique de transfert convectif. Ce coefficient est donné par la corrélation suivante [115, 179] :

$$\frac{1}{h_{fs}} = \frac{d_p}{Nu_{fs} k_f} + \frac{d_p}{\beta k_s} \quad (4.72)$$

Où  $\beta$  est un facteur de forme égal à 10 pour des particules sphériques et  $Nu_{fs}$  est le nombre de Nusselt pour l'interaction fluide-solide, qui est lié au nombre de Reynolds  $Re_p$  basé sur la taille des particules  $d_p$ . On a, pour  $0.1 \leq Re_p \leq 12.4$  [249] :

$$Nu_{fs} = 2 + 1.1 Pr^{1/3} Re_p^{0.6} \left( \frac{\varphi d_p}{d_h} \right)^{0.6} \quad (4.73)$$

Avec  $d_h$  le diamètre des pores.

Certains auteurs [184, 249] négligent le second terme de l'expression (4.72) et utilisent l'expression suivante :

$$h_{fs} = \frac{(2 + 1.1 Re_p^{0.6} Pr^{1/3}) k_f}{d_p} \quad (4.74)$$

Le cas d'un équilibre thermique local, avec  $T_s = T_f = T$  peut être considéré et permet de simplifier le système d'inconnues précédentes en ne conservant qu'une seule inconnue. L'approximation de l'équilibre thermique n'est cependant pas possible lorsque, par exemple, le solide a une conductivité thermique élevée par rapport à celle du fluide et que l'écoulement est important [21]. Les relations (4.70) et (4.71) peuvent se sommer [241] :

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{pf} \nabla \cdot (\vec{U} T) = k_m \nabla^2 T + \rho_f c_{pf} \nabla \cdot (A_D \cdot \nabla T) \quad (4.75)$$

Avec  $(\rho c_p)_m = \phi \rho_f c_{pf} + (1 - \phi) \rho_s c_s$  la capacité thermique du mélange solide-fluide et  $k_m$  la conductivité équivalente.

La conductivité équivalente peut s'obtenir de plusieurs manières [19, 21, 179] : pour une conduction thermique s'effectuant en parallèle entre le solide et le fluide, avec des propriétés relativement proches, on a :

$$k_m = \phi k_f + (1 - \phi) k_s \quad (4.76)$$

Si la structure de la couche poreuse est telle que la conduction s'effectue par le solide et le fluide en série, on a :

$$k_m = \left[ \phi k_f^{-1} + (1 - \phi) k_s^{-1} \right]^{-1} \quad (4.77)$$

Lorsque les valeurs de conductivités équivalentes pour des structures série et parallèle sont proches, une troisième expression peut être utilisée [178, 202] :

$$k_m = k_s^{1-\phi} k_f^\phi \quad (4.78)$$

Une autre corrélation présente dans la littérature est celle de Veinberg [244], reprise notamment par [19, 252] pour des situations avec des changements d'état entre des phases liquide et solide. Cette expression non-linéaire est, d'après [244], applicable de façon universelle pour un milieu ayant des inclusions sphériques réparties aléatoirement :



$$k_m + \phi \frac{k_s - k_f}{k_f^{1/3}} k_m^{1/3} - k_s = 0 \quad (4.79)$$

Les termes de dispersion thermique et de tortuosité thermique de l'équation (4.70) sont généralement négligeables par rapport aux autres sauf dans certains cas, comme lors d'une importante convection forcée pour des structures en colonne [21]. Dans la suite de cette section, ces deux termes seront négligés, comme cela est également fait par [179].

Les équations (4.70) et (4.71) qui décrivent les évolutions des températures du solide et du fluide s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} (1 - \phi) \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \phi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + h_{fs} a_{fs} (T_f - T_s) \\ \phi \rho_f c_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho_f c_{pf}) \vec{U} \cdot \nabla T_f = \phi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + h_{fs} a_{fs} (T_s - T_f) \end{cases} \quad (4.80)$$

De la même manière que pour la diffusion thermique, les conditions limites peuvent s'écrire :

$$k_f \vec{n} \cdot \nabla T_f = \Phi_f + \sum_i h_{f,i} (\theta_{f,i} - T_f) \quad (4.81)$$

$$k_s \vec{n} \cdot \nabla T_s = \Phi_s + \sum_i h_{s,i} (\theta_{s,i} - T_s) \quad (4.82)$$

Avec  $\vec{u}_D$  la vitesse de Darcy donnée par :

$$\vec{u}_D = \frac{-K \rho_f g}{\mu_f} \nabla \left( \frac{p}{\rho_f g} + z \right) \quad (4.83)$$

Dans le cas de l'équilibre thermique, on a alors :

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_f c_{pf}) \vec{U} \cdot \nabla T = k_m \nabla^2 T \quad (4.84)$$

### Résolution du problème de convection hydraulique avec la méthode des éléments finis

Nous présentons dans ce paragraphe l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution du système d'équations (4.80). Pour cela, nous utilisons de nouveau les notations introduites dans le paragraphe 4.1.2 et décomposons les deux champs de température sur la même base  $(\varphi_i)$  de  $W_h^k$ .

La première équation, relative à la phase solide, a une structure similaire à celle de l'équation de la chaleur avec un terme source  $q = h_{fs} a_{fs} T_f = h_{fs} a_{fs} \sum_j \varphi_j T_{f,j}$ . Cette équation se réécrit donc sous la forme matricielle :

$$[C_s] \frac{\partial T_s}{\partial t} + [K_s] T_s + [A] (T_s - T_f) = [F_s] \quad (4.85)$$

Les matrices éléments finis s'obtiennent à partir des matrices de la diffusion thermique (4.24) :

$$C_{s,ij} = \langle (1 - \phi) \rho_s c_s \varphi^j | \varphi^i \rangle \quad (4.86)$$

$$K_{s,ij} = \langle \sum_l h_{s,l} \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Gamma + (1 - \phi) \langle k_s \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle \quad (4.87)$$

$$A_{ij} = \langle h_{fs} a_{fs} \varphi^j | \varphi^i \rangle \quad (4.88)$$

$$F_{s,i} = \langle \Phi_s + \sum_l h_{s,l} \theta_{s,l} | \varphi^i \rangle_\Gamma \quad (4.89)$$

De façon similaire, l'équation du système (4.80) pour la phase fluide permet d'obtenir le système matriciel suivant :

$$[C_f] \frac{\partial T_f}{\partial t} + ([U] + [K_f]) T_f + [A] (T_f - T_s) = [F_f] \quad (4.90)$$

Avec :

$$C_{f,ij} = \langle \phi \rho_f c_f \varphi^j | \varphi^i \rangle \quad (4.91)$$

$$K_{f,ij} = \langle \sum_l h_{f,l} \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Gamma + \phi \langle k_f \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle \quad (4.92)$$

$$U_{ij} = \langle (\vec{u} \cdot \nabla \varphi_j) | \varphi^i \rangle \quad (4.93)$$

$$F_{f,i} = \langle \Phi_f + \sum_l h_{f,l} \theta_{f,l} | \varphi^i \rangle_\Gamma \quad (4.94)$$

Le système d'équations (4.80) se réécrit donc :

$$\begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_s \\ T_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s + A & -A \\ -A & U + K_f + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ T_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_f \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Cependant, la résolution du système (4.95) peut provoquer l'apparition d'oscillations non physiques. Pour éviter cela, nous présentons une méthode permettant de stabiliser la résolution numérique en modifiant la formulation de Galerkin.

### Méthode de Petrov-Galerkin

**Présentation de la méthode** L'équation du système (4.80) portant sur le fluide est une équation d'advection-diffusion faisant intervenir un terme de transport  $\vec{U} \cdot \nabla T$  et un terme de diffusion  $\nabla \cdot (k \nabla T)$ . Dans le cas général d'une vitesse  $\vec{U}$  non nulle, cette équation présente une structure hyperbolique et la résolution du système (4.95), issu de l'application de la méthode des éléments finis sur (4.80), présente le risque de produire des oscillations non physiques [128, 200, 164], en particulier lorsque la solution exacte du problème présente des discontinuités. C'est notamment le cas lorsque la température d'entrée du fluide varie brutalement : la propagation de la variation de température dans le milieu poreux fait apparaître, dans la solution exacte du problème, une discontinuité dans le champ de température.

Le problème de l'apparition d'oscillations non physique ne se limite pas à cette équation, mais est aussi à l'origine de nombreux travaux sur les problèmes de convection-diffusion, et en particulier sur les écoulements de fluide.

Un exemple connu est le problème de Riemann en 1D. Ce problème s'écrit, sur un domaine sur un domaine  $[0, L] \times [0, T]$  sur le plan  $(x, t)$  sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u_l(t) \\ u(L, t) = u_r(t) \end{cases} \quad (4.96)$$

Lorsque le champ initial  $u_0$  présente des discontinuités, celles-ci se déplacent à la vitesse  $a$ . La représentation graphique d'une solution à ce problème fait alors apparaître une discontinuité dans le plan  $(x, t)$  appelée caractéristique.

L'utilisation de différences finies centrées, assimilables en 1D à la méthode de Galerkin, associée à un schéma temporel explicite, permet d'obtenir une solution numérique s'obtenant de façon itérative. Pour un maillage régulier en espace  $\Delta x$  et en temps  $\Delta t$  et en notant  $u_i^n$  la solution numérique du problème au  $i^{\text{ème}}$  nœud spatial et au  $n^{\text{ème}}$  nœud temporel, on a :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a}{2\Delta x/\Delta t} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (4.97)$$

L'utilisation de cette méthode de résolution produit inconditionnellement des oscillations non physiques à cause de la discontinuité de la solution réelle  $u$  du problème [236]. La solution numérique obtenue au niveau des nœuds du maillage ( $u_i^n$ ) présente alors des oscillations de plus en plus fortes lorsque  $t$  augmente.

L'utilisation de schémas numériques introduisant un terme de diffusion numérique permet alors d'établir une solution  $\tilde{u}$  à un problème se rapprochant du précédent. Cette solution  $\tilde{u}$  à ce nouveau problème ne présente alors plus de discontinuité. Si des conditions sont respectées, en particulier sur le nombre de

courant (*condition CFL*), La solution numérique obtenue pour ce nouveau problème  $\tilde{u}_i^n$  ne présente plus d'oscillations non physiques.

Le même type de problème intervient ici dans les équations d'advection : la nature hyperbolique de celles-ci peut provoquer l'apparition d'oscillations non physiques au niveau des discontinuités, en particulier lorsque la diffusion est faible devant l'advection.

Pour éviter ces problèmes, la méthode de *streamline diffusion modification* a été introduite dans les années 1970 et 1980 par Brooks et Hughes [127, 39]. Cette méthode vise à modifier la formulation faible d'un problème hyperbolique en rajoutant un terme de diffusion numérique (*streamline diffusion*) pour la fonction d'interpolation :  $\varphi$  est alors remplacé par  $\varphi + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi$ .

Afin de présenter la formulation de Petrov-Galerkin du problème d'advection-diffusion dans le milieu poreux, nous généralisons d'abord l'équation portant sur la phase fluide du système (4.80) en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (D\nabla T) + aT = q \quad (4.98)$$

Avec  $D$  la diffusivité thermique  $D = \frac{k}{\rho c}$  et  $a$  un coefficient d'échange.

La formulation faible de (4.98) s'écrit alors, avec la notation du produit scalaire et pour toute fonction  $\varphi$  de  $H^1(\Omega)$  :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (D\nabla T) + aT - q \mid \varphi \right\rangle = 0 \quad (4.99)$$

La formulation faible (4.98) est projetée dans  $W_h^k$  avec le champ inconnu réécrit sous la forme  $T = \sum_j \varphi^j T^j$ . Cependant, au lieu de prendre comme fonctions d'interpolations les fonctions  $(\varphi^i)$  de la base de  $W_h^k$  comme c'était le cas précédemment avec la méthode de Galerkin, nous utilisons ici les fonctions  $\varphi^i + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i$ .

L'équation (4.99) se réécrit donc, en faisant apparaître les conditions limites, pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T + aT - q \mid \varphi^i + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \right\rangle + \langle D\nabla T \mid \nabla\varphi^i \rangle - \langle \nabla \cdot (D\nabla T) \mid \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \rangle \\ + \left\langle \sum_k h_k (T - \theta_k) - \Phi \mid \varphi^i \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad (4.100) \end{aligned}$$

$\delta$  est un coefficient dont l'expression sera discutée dans le paragraphe 4.2.2. Ce coefficient peut notamment être défini à partir de la taille du maillage  $h$  (rayon de la sphère dans laquelle l'élément est inscrit), de la vitesse  $\vec{u}$  et de la diffusivité  $D$ .

Dans le cas de fonctions d'interpolation linéaires, le terme de diffusivité  $\langle \nabla \cdot (D\nabla T) \mid \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \rangle$  est nul, et il peut être considéré comme négligeable dans le cas général [229, 246] et le système matriciel s'écrit :

$$[C_\delta] \frac{\partial T}{\partial t} + ([U_\delta] + [K] + [A_\delta]) T = [F] \quad (4.101)$$

Avec :

$$C_{\delta,ij} = \langle \varphi^j \mid \varphi^i + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \rangle \quad (4.102)$$

$$K_{ij} = \left\langle \sum_k h_k \varphi^j \mid \varphi^i \right\rangle_{\Gamma} + \langle D\nabla\varphi^j \mid \varphi^i \rangle \quad (4.103)$$

$$U_{\delta,ij} = \langle \vec{u} \cdot \nabla\varphi^j \mid \varphi^i + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \rangle \quad (4.104)$$

$$A_{\delta,ij} = \langle a\varphi^j \mid \varphi^i + \delta\vec{u} \cdot \nabla\varphi^i \rangle \quad (4.105)$$

**Détermination de l'erreur commise avec la méthode de Petrov-Galerkin** Une comparaison des erreurs commises avec les méthodes de Galerkin et de Petrov-Galerkin est ici présentée. Afin d'étudier les effets de l'introduction de cette méthode sur les résultats numériques, des notations sont introduites :

—  $H^m$  l'espace de Sobolev d'ordre  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , muni de la norme usuelle  $\| \cdot \|_{H^m}$

$$- |v| = \left( \int_{\partial\Omega} v^2 |\vec{n} \cdot \vec{u}| d\sigma \right)^{1/2}$$

Dans le cas où la méthode standard de Galerkin est utilisée sur un problème hyperbolique du type  $\vec{u} \cdot \nabla v + \gamma v = 0$ , l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique vérifie l'inégalité [126, 128] :

$$\|v - v^h\| + |v - v^h| \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}} \quad (4.106)$$

Cela montre que, si la solution exacte  $v$  présente une discontinuité, ce qui est possible dans le cas où la diffusivité  $D$  est nulle ou trop faible, on a alors  $\|v\|_{H^{k+1}} = +\infty$  et l'erreur n'est pas majorée : il peut donc y avoir une divergence de la solution numérique.

Avec le rajout du terme de diffusion numérique, l'erreur vérifie, dans le cas  $\delta = h$  [126, 128] :

$$\| \|v - v^h\| \| \leq Ch^{k+1/2} \|v\|_{H^{k+1}} \quad (4.107)$$

Avec  $\| \| \cdot \| \|$  la norme définie par :

$$\| \|v\| \| = \left( h \|\vec{u} \cdot \nabla v\|^2 + \|v\|^2 + \frac{1+h}{2} |v|^2 \right)^{1/2} \quad (4.108)$$

Ce résultat sur l'erreur montre que, dans le cas d'une solution lisse, le rajout de la diffusion numérique réduit l'erreur d'un facteur  $h^{1/2}$ . Cependant, le fait que  $\|v\|_{H^m} = +\infty$  dès lors que la fonction  $v$  présente une discontinuité ne permet pas d'affirmer à partir de ce résultat que les résultats numériques sont meilleurs avec la *streamline diffusion* lorsque la solution au problème n'est pas lisse.

L'amélioration de la qualité des résultats avec la *streamline diffusion* peut s'expliquer par les longueurs sur lesquelles des perturbations peuvent se propager transversalement aux directions de propagation. [126] montre que les effets d'une perturbation, telle que celle introduite par la diffusion numérique, se dissipent de façon exponentielle sur une longueur caractéristique de l'ordre de  $\sqrt{h}$  perpendiculairement à la caractéristique passant par la perturbation (*crosswind direction*). La propagation de la perturbation s'effectue alors principalement dans le sens de la caractéristique [131]. Pour la méthode de Galerkin standard, les oscillations numériques non physiques, provenant de discontinuités, se propagent avec un faible amortissement [125]. La méthode de la *streamline diffusion* présente de plus l'avantage d'être une méthode numérique consistante [131, 200].

**Choix du paramètre de stabilisation** Dans l'estimation de l'erreur, le paramètre  $\delta$  était pris égal à  $h$ , la taille d'une maille du maillage. Dans le cas où une faible diffusion est présente dans l'équation  $\vartheta \cdot \nabla u + \gamma u - \nabla \cdot [\epsilon \nabla u] = 0$  avec  $\epsilon < h$ , le paramètre de diffusion numérique peut être ramené à  $h - \epsilon$ .

Pour une résolution de l'équation d'advection diffusion avec la méthode de Petrov-Galerkin, de nombreuses publications proposent de prendre en compte le nombre de Péclet, défini comme le rapport entre les échanges par convection et ceux par conduction, ainsi que le ratio entre la taille des éléments et la vitesse de l'écoulement.

La première relation introduite est celle permettant la superconvergence, c'est-à-dire l'obtention d'une solution exacte aux nœuds [39] en 1D :

$$\delta = \frac{h}{2\|\vec{u}\|} \left( \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \right) \quad (4.109)$$

Cette formulation du paramètre de stabilité est également présente dans [69, 121]

D'autres formulations ont depuis été proposées. Parmi les plus utilisées, une relation permet d'assurer la stabilité numérique de la résolution numérique de l'équation d'advection-diffusion tout en assurant une précision d'ordre 2 [53, 69] :

$$\delta = \frac{h}{2\|\vec{u}\|} \left( 1 + \frac{1}{Pe} + \frac{ha}{2\|\vec{u}\|} \right)^{-1} \quad (4.110)$$

Une formulation avec une précision à l'ordre 4 est donnée par les travaux de [211] :

$$\delta = \frac{h}{2\|\vec{u}\|} \left( 1 + \frac{9}{Pe^2} + \left( \frac{ha}{2\|\vec{u}\|} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (4.111)$$

En multidimensionnel, plusieurs possibilités existent quant à la formulation du paramètre  $\delta$ . Il est ainsi possible de généraliser les relations précédentes en introduisant une matrice  $[\delta]$  dépendant des matrices de raideur, de masse et de réaction [39, 54, 120].

Dans le cas d'éléments linéaires, il est cependant possible de conserver les corrélations précédentes avec un  $\delta$  scalaire [121, 228].

Pour une intégration à l'aide des éléments finis effectuée dans les domaines spatial et temporel, [229] propose l'expression suivante :

$$\delta = \left( \frac{1}{\tau_{S1}^r} + \frac{1}{\tau_{S2}^r} + \frac{1}{\tau_{S3}^r} \right)^{-1/r} \quad (4.112)$$

$$\text{Avec } \tau_{S1} = \frac{h}{2\|\vec{u}\|}, \tau_{S2} = \frac{\Delta t}{2}, \tau_{S3} = \frac{h^2}{4D}.$$

### 4.2.3 Résolution analytique dans le cas d'un régime permanent établi

Dans cette partie, nous proposons une modélisation simplifiée de la convection hydraulique à l'intérieur de la route solaire hybride en considérant un régime permanent établi. Une expression analytique permettant le calcul de la température dans la couche poreuse ainsi qu'à la surface de la chaussée est proposée.

#### Solution analytique

Le fluide est supposé s'écouler horizontalement dans le repère choisi, la verticale étant alors orthogonale à la direction de l'écoulement.

Nous faisons l'hypothèse que les variations de la température sont beaucoup plus importantes selon la direction verticale que selon la direction horizontale, ce qui revient à considérer que le gradient de température est orienté selon la verticale, et donc que les échanges thermiques s'effectuent dans cette direction. Les échanges thermiques peuvent alors être décrits de façon unidimensionnelle, en fonction de l'éloignement  $x$  à la section d'injection du fluide.

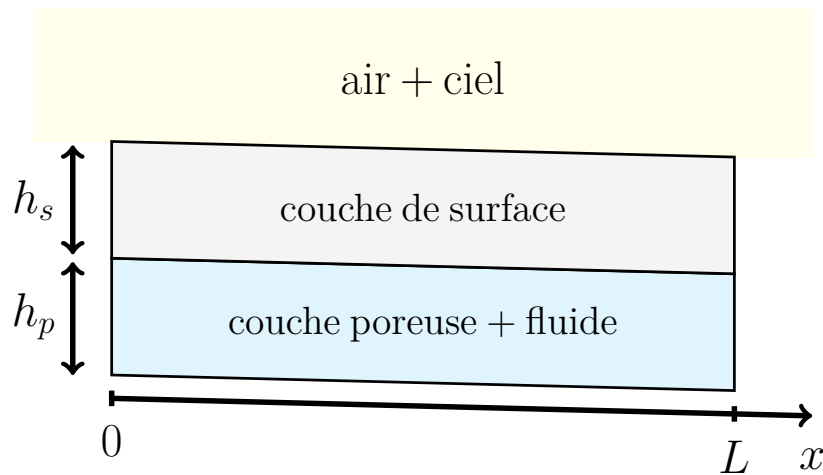


FIGURE 4.5 – Représentation 1D du problème

La conservation de l'énergie pour le fluide (indice  $f$ ), la couche de surface (indicée  $s$ ) et la couche poreuse (indicée  $p$ ) permet d'obtenir un système d'équations différentielles (4.113) mettant également en jeu l'air indicé  $a$  et le ciel indicé  $c$  de températures supposées connues. Les détails des calculs sont donnés en annexe A.

$$\begin{bmatrix} \rho_f c_f h_p u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} T_f \\ T_p \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{p/f} & -r_{p/f} & 0 \\ -r_{p/f} & r_{p/f} + r_{p/s} & -r_{p/s} \\ 0 & -r_{s/p} & r_{s/p} + r_{p/a} + r_{s/c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_f \\ T_p \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Où  $T_i(x)$  est la température du milieu  $i$  pour un éloignement  $x$  de l'injection du fluide,  $u$  est la vitesse de Darcy,  $r_{i/j}$  est un coefficient d'échange entre les milieux  $i$  et  $j$  dont le calcul est donné en annexe A et  $\Phi$  est un flux imposé sur la couche de surface.

La résolution de ce système conduit à une expression analytique pour la température de la couche de surface et pour le fluide :

$$T_f(x) = T_f(0) e^{-x/\kappa} + T_\infty (1 - e^{-x/\kappa}) \quad (4.114)$$

$$T_s(x) = \frac{r_{p/s}T_f(x) + r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi}{r_{p/s} + r_{s/a} + r_{s/c}} \quad (4.115)$$

Avec :

$$\kappa = \frac{\rho_f c_f h_p u (r_{p/s} + r_{s/a} + r_{s/c})}{r_{p/s}(r_{s/a} + r_{s/c})} \quad (4.116)$$

$$T_\infty = \frac{r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi}{r_{s/a} + r_{s/c}} \quad (4.117)$$

Le paramètre  $\kappa$  correspond à une longueur caractéristique alors que  $T_\infty$  correspond à la température du fluide après une longueur importante. Cette dernière est une moyenne pondérée des températures de l'air et du ciel ainsi que du rayonnement solaire. La longueur caractéristique dépend principalement de la vitesse du vent et décroît avec celle-ci. Une représentation de la longueur caractéristique en fonction de la vitesse du vent et de la température de l'air est proposée sur la figure 4.6. Les températures du fluide et de la surface vont donc se rapprocher plus vite de  $T_\infty$  en présence de vent.

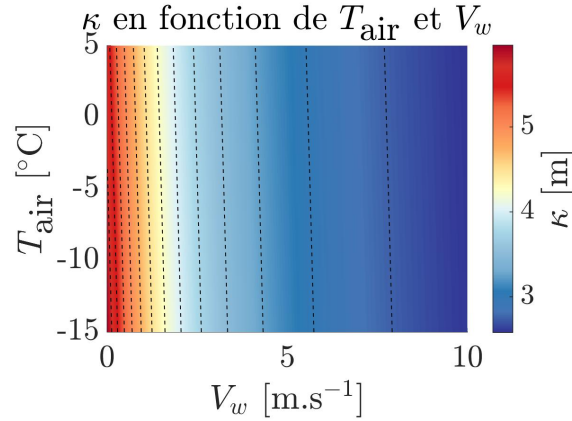


FIGURE 4.6 – Longueur caractéristique en fonction de la vitesse du vent  $V_w$  et de la température de l'air

L'évolution des températures de surface et du fluide peuvent être représentées pour plusieurs conditions environnementales, comme cela est fait sur les figures 4.7a et 4.7b. Dans ces deux cas, la température du ciel a été prise égale à  $T_{\text{air}} - 6$  et la température d'injection du fluide  $T_f(0) = 12^\circ\text{C}$ .

L'influence des paramètres  $T_\infty$  et  $\kappa$  est visible sur ces figures. La chute de température est d'autant plus rapide que la vitesse du vent est élevée et donc que la longueur caractéristique  $\kappa$  est faible, la décroissance se faisant de façon exponentielle.

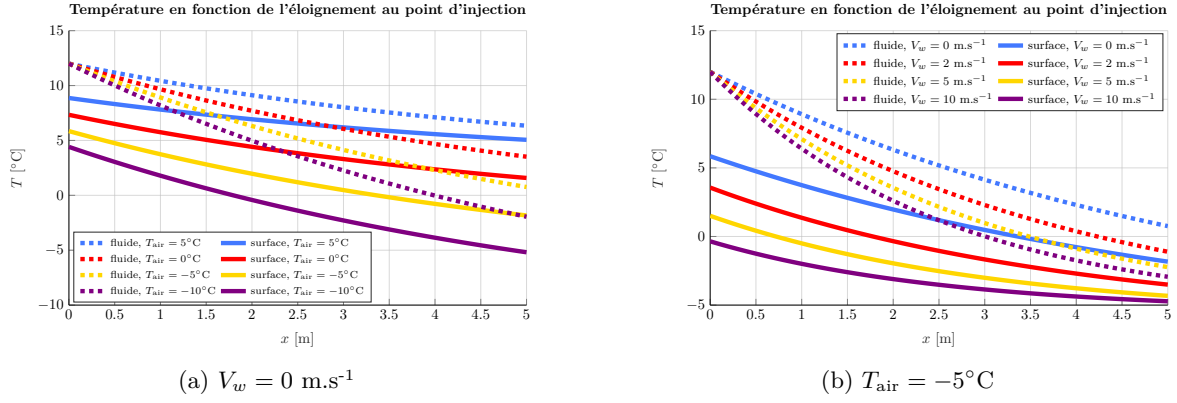


FIGURE 4.7 – Températures de la couche de surface et du fluide pour diverses conditions environnementales

### Application au maintien hors gel de la surface

Connaissant la température de la couche de surface, il est possible de résoudre le problème inverse visant à déterminer la température d'injection du fluide permettant d'obtenir une température donnée en certains points de la surface en fonction des conditions météorologiques.

En conditions hivernales, avec une température de l'air négative, le fluide injecté dans la chaussée est refroidi au fur et à mesure qu'il s'écoule. Ce fluide fournit de la chaleur à la surface, ce qui entraîne, comme pour le fluide, une diminution de la température en surface lorsqu'on s'éloigne du point d'injection du fluide. La température en surface est donc la plus basse lorsqu'on se situe au niveau du point le plus éloigné de la source d'injection.

Pour conserver une température positive tout au long de la surface d'une chaussée, il suffit donc, avec cette approximation, que la température au point le plus éloigné de l'injection de fluide ait une température positive.

On note  $L$  la distance entre le point d'injection du fluide et le point de la chaussée le plus éloigné de celui-ci qu'on souhaite maintenir à une température positive.

On a, d'après (4.115) :

$$T_s(L) = \frac{r_{p/s}T_f(L) + r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi}{r_{p/s} + r_{s/a} + r_{s/c}} \quad (4.118)$$

et donc :

$$T_s(L) > 0 \iff T_f(L) > \frac{1}{r_{p/s}} (-r_{s/a}T_a - r_{s/c}T_c - \Phi) \quad (4.119)$$

Dans le cas  $r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi \geq 0 \iff T_\infty \geq 0$ , la température au sol reste positive quelle que soit la température d'injection du fluide.

On a de plus, d'après (4.114) :

$$T_f(L) = T_f(0) e^{-L/\kappa} + T_\infty (1 - e^{-L/\kappa}) \quad (4.120)$$

D'où la condition :

$$T_s(L) > 0 \iff T_f(0) > e^{L/\kappa} \left[ \frac{1}{r_{D_r/s}} (-r_{s/c}T_c - r_{s/e}T_e - \Phi) - T_\infty (1 - e^{-L/\kappa}) \right] \quad (4.121)$$

En réutilisant la relation (4.117), et en réarrangeant l'expression (4.121), on obtient finalement :

$$T_f(0) > -e^{L/\kappa} T_\infty \left( \frac{r_{s/a} + r_{s/c}}{r_{p/s}} + 1 - e^{-L/\kappa} \right) \quad (4.122)$$

La température du fluide à injecter augmente donc de façon exponentielle avec la longueur de la structure à traiter et avec la baisse de la longueur caractéristique, et évolue approximativement de façon linéaire avec  $T_\infty$ . La température  $T_f(0)$  est représentée sur les figures 4.8a et 4.8b en fonction de la vitesse du vent et de la température de l'air.

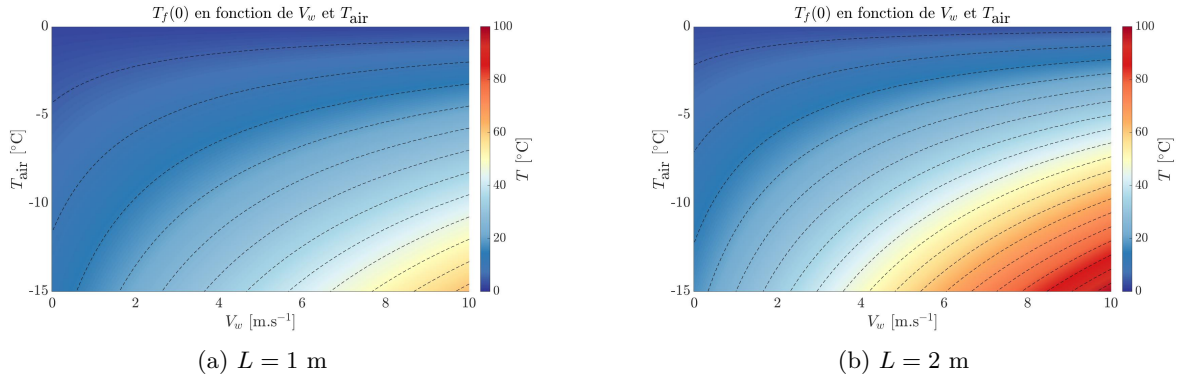


FIGURE 4.8 – Températures minimale du fluide  $T_f(0)$  en fonction de données environnementales pour  $L = 1$  et  $L = 2$  m

Sous des conditions défavorables, avec un vent fort et une température de l'air fortement négative, la température d'entrée du fluide nécessaire pour maintenir toute la largeur de la surface hors gel devient rapidement élevée, atteignant environ 60°C pour une longueur d'un mètre et 95° pour une longueur de deux mètres.

Ces évaluations de la température d'entrée du fluide montrent les limitations du système au niveau de la largeur de la chaussée. Le cas de la prévention du gel sera étudié en détail dans le chapitre 7.

#### 4.2.4 Synthèse

Une étude de la convection hydraulique et en particulier des transferts thermiques liés à ce phénomène a été menée. Une étude de la littérature a permis d'établir des équations au niveau macroscopique à partir des équations de Navier-Stokes de l'échelle microscopique.

La résolution du système d'équation avec les éléments finis a fait apparaître la structure hyperbolique du problème et donc le risque d'apparition d'oscillations non physiques pour la solution. La méthode de stabilisation de Petrov-Galerkin a pour cela été présentée et son application détaillée avec notamment l'obtention de la nouvelle formulation du problème.

Le cas particulier du régime permanent établi a permis l'établissement d'une solution analytique. Avec celle-ci, une application au cas particulier du maintien hors gel a pu être présentée.

### 4.3 Transferts radiatifs

Dans cette section, nous présentons les transferts radiatifs et leur modélisation à l'intérieur d'un corps. D'après la troisième loi de la thermodynamique, tout corps ayant une température supérieure à 0 K émet un rayonnement. Cependant, pour des milieux qualifiés d'opaques, le rayonnement à l'intérieur du corps est émis puis absorbé après avoir parcouru une infime distance, ce qui a une influence négligeable sur le comportement thermique du système par rapport à la conduction thermique. Dans le cadre de notre étude la couche semi-transparente a des propriétés optiques telles que le rayonnement peut se propager sur des distances plus élevées pour certaines plages de longueurs d'ondes. L'influence des transferts radiatifs sur le comportement thermique de la structure n'est alors plus négligeable. Nous cherchons donc dans cette section à étudier la propagation du rayonnement dans la couche semi-transparente. En particulier, les effets de la propagation des rayonnements extérieurs (atmosphérique et solaire) sont détaillés.



Une modélisation des transferts radiatifs à l'aide de la méthode des éléments finis est proposée, avec, comme pour la convection hydraulique, une modification de la formulation de Galerkin. Des simplifications au problème étudié sont également proposées, en prenant en compte les propriétés optiques du corps.

### 4.3.1 Mise en équation - Rayonnement émis par un corps

Le rayonnement est l'un des trois modes de transmission de l'énergie avec la conduction thermique et la convection. Tout corps émet vers l'extérieur un rayonnement et en reçoit des autres corps, ces échanges étant d'autant plus importants que la température du corps émettant est élevée.

Le transfert du rayonnement dans le milieu semi-transparent est régi par trois phénomènes qui s'y produisent simultanément ; l'absorption, la diffusion et l'émission propre, qui peuvent chacun être mis en équation pour un élément infinitésimal. L'évolution du rayonnement, le long d'un chemin infinitésimal, a été établie par Chandrasekhar en 1960 [48] et est aussi appelée Équation de Transfert Radiatif (ETR, ou, en anglais, RTE, pour *Radiative Transfer Equation*).

#### Loi de Planck

Nous notons  $L_\lambda$  la luminance énergétique monochromatique émise par un corps. Il s'agit de la densité de flux directionnelle émise par unité de longueur d'onde. Cette grandeur dépend, dans le cas général, de la température du corps  $T$ , de la direction  $\vartheta$  considérée ainsi que des propriétés de surface du corps. De façon similaire, nous introduisons  $L_\nu$  la luminance énergétique fréquentielle. Une étude du rayonnement d'un corps au niveau fréquentiel plutôt qu'au regard de la longueur d'onde a l'avantage de ne pas entraîner de variations de la grandeur considérée, ici la fréquence, lors d'un changement de milieu. L'onde radiative voit en effet sa longueur d'onde modifiée lors d'un changement d'indice de réfraction alors que la fréquence est une grandeur intrinsèque à l'onde.

Nous notons  $L_\lambda^0$  ou  $L_\nu^0$  la luminance énergétique monochromatique ou fréquentielle émise par un corps noir. Un corps noir est un corps émettant, pour une température donnée  $T$ , une luminance énergétique maximale. Ce maximum de luminance est régi par la loi de Planck et est isotrope, c'est-à-dire émis uniformément dans toute les directions. La luminance énergétique d'un corps noir est donc fonction de la température et vérifie, pour une fréquence  $\nu$  donnée [114] :

$$L_\nu^0(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (4.123)$$

La luminance énergétique est représentée pour une température de 300 K en fonction de la fréquence sur la figure 4.9.

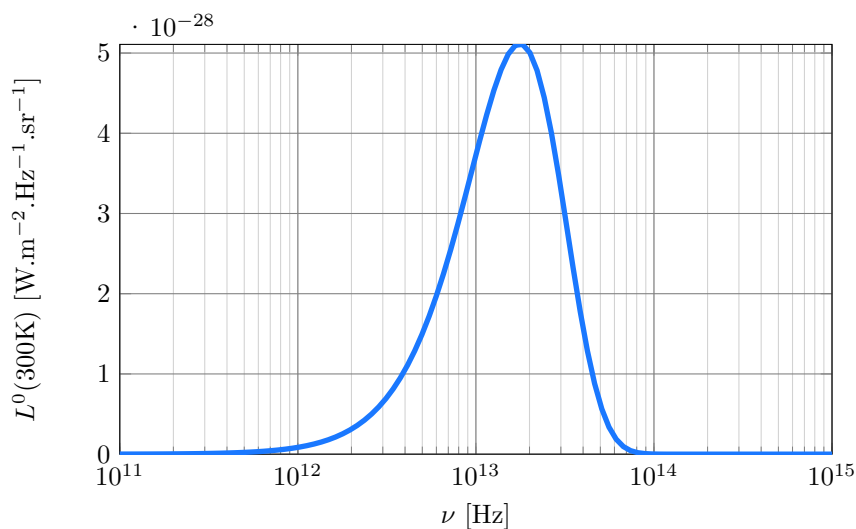


FIGURE 4.9 – Représentation de la luminance énergétique de corps noir calculée par la loi de Planck

La loi de Planck peut aussi être écrite en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  : on a, sur une bande spectrale  $d\nu$  et la bande de longueur d'onde  $d\lambda$  correspondante :

$$L_\nu^0(T)d\nu = -L_\lambda^0(T)d\lambda \quad (4.124)$$

Avec de plus  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  soit  $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$ . On a donc l'expression de la loi de Planck en fonction de la longueur d'onde :

$$L_\lambda^0 = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (4.125)$$

En intégrant la luminance énergétique sur les fréquences, on obtient la densité de flux  $L$  émise par unité d'angle solide. Pour un corps noir, on a :

$$L^0(T) = \frac{2\pi^4 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4 = n^2 \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (4.126)$$

Avec :

- $\sigma$  : la constante de Stefan ( $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ )
- $h$  : la constante de Planck ( $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ )
- $c$  : la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu ( $c = \frac{c_0}{n}$  avec  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide ( $c_0 = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ) et  $n$  l'indice de réfraction). La luminance d'un corps noir est donc d'autant plus importante que son indice de réfraction est élevé (évolution en  $n^2$ ).
- $k_B$  : la constante de Boltzmann ( $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ )

L'intégration de la luminance énergétique sur un hémisphère permet d'obtenir l'émittance  $M$ , l'émittance monochromatique  $M_\lambda$  ou l'émittance fréquentielle  $M_\nu$  : il s'agit alors de la densité de flux émise par une surface, éventuellement pour une longueur d'onde ou une fréquence donnée :

$$M_\nu = \int_{2\pi} L_\nu d\vartheta \quad (4.127)$$

$$M = \int_{2\pi} L d\vartheta = \int_{2\pi} \int_\nu L_\nu d\vartheta \quad (4.128)$$

$$(4.129)$$

La densité de flux  $M_b$  émise par un corps noir s'écrit alors :

$$M_b = \int_{2\pi} \int_{\nu=0}^{+\infty} L_\nu^0 d\nu d\Omega = n^2 \pi \sigma T^4 \quad (4.130)$$

Pour un corps réel, un coefficient  $\varepsilon_\nu \leq 1$  appelé émissivité (sans unité) peut être introduit, de telle sorte que la luminance énergétique émise par un corps quelconque s'écrit sous la forme  $L_\nu(\vartheta) = \varepsilon_\nu(\vartheta) L_\nu^0$ . L'émissivité exprime donc le rapport entre ce que le corps noir émet et l'émission d'un corps idéal. Un corps noir a ainsi une émissivité égale à 1 quelle que soit la fréquence considérée. Si un corps a une émissivité constante selon la fréquence, celui-ci est qualifié de corps gris. D'autres émissivités peuvent aussi être définies : en plus de l'émissivité fréquentielle (ou monochromatique) directionnelle  $\varepsilon_\nu(\vartheta)$ , nous introduisons l'émissivité directionnelle  $\varepsilon(\vartheta)$ , l'émissivité fréquentielle  $\varepsilon_\nu$  et l'émissivité  $\varepsilon$ . On a :

$$\varepsilon(\vartheta) = \frac{L(\vartheta)}{L^0} \quad (4.131)$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{M_\nu}{M_{b,\nu}} \quad (4.132)$$

$$\varepsilon = \frac{M}{M_b} \quad (4.133)$$

$$(4.134)$$

En plus de l'émissivité, un coefficient d'absorption  $\alpha_\nu$  peut être introduit, de telle sorte que la luminance énergétique fréquentielle absorbée par une paroi soumise au rayonnement d'un corps de température  $T$  s'écrit  $\alpha_\nu(\vartheta)\pi L^0(T)$ .

La loi de Kirschhoff permet d'écrire, dans le cas de l'équilibre thermique  $\alpha_\nu(\vartheta) = \varepsilon_\nu(\vartheta)$ . Connaissant les propriétés radiatives d'un corps, la densité de flux provenant de l'extérieur et pénétrant à l'intérieur du corps peut donc être déterminée.

### Loi de déplacement de Wien

Une analyse fréquentielle de l'émission du corps noir issue de la loi de Planck (4.123) en fonction de sa longueur d'onde peut être menée afin de déterminer, en fonction de la température, quelles sont les bandes d'émissions maximales.

La loi de déplacement de Wien permet de connaître la longueur d'onde, et donc la fréquence pour laquelle le rayonnement de corps noir  $B_\nu(T)$  est maximal.

Elle s'obtient à partir de la loi de Planck exprimée pour la longueur d'onde  $\lambda$  (4.125) et permet d'écrire la longueur d'onde du maximum d'émission  $\lambda_{max}$  sous la forme [114] :

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{\alpha k_B} \quad (4.135)$$

Où  $\alpha \approx 4.96511423$  est solution de l'équation  $e^{-\alpha} + 0.2\alpha - 1 = 0$ . On a donc :

$$\lambda_{max}T = 2897.7686 \text{ } \mu\text{m.K} \quad (4.136)$$

La fréquence maximale d'émission  $\nu_{max}$  s'obtient en dérivant la relation (4.123). On a alors :

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.876 \times 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \quad (4.137)$$

### Répartition fréquentielle de l'émission d'un corps noir

Connaissant l'émission d'un corps noir par la loi de Planck (cf relation (4.123)), il est possible de calculer précisément la contribution au rayonnement d'intervalles infinitésimaux de fréquence  $L_\nu^0(T)d\nu$ .

On note pour cela  $f(x) = \frac{15}{\pi^4} \frac{x^3}{e^x - 1}$ . On a alors :

$$\frac{L_\nu^0(T)d\nu}{L^0(T)} = f(x(\nu))dx \quad (4.138)$$

Avec  $x(\nu) = \frac{h\nu}{k_B T}$  la fréquence normalisée où  $k_B$  et  $h$  sont définis dans le paragraphe 4.3.1.

Une primitive  $F$  de  $f$  peut s'obtenir en utilisant le développement en série de  $(e^x - 1)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$  puis en intégrant par parties le terme  $x^3(e^x - 1)^{-1}$ . On a alors [114] :

$$F(x) = \int_{u=0}^x f(u)du = 1 - \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \left( x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{6x}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \quad (4.139)$$

Cette fonction  $F$  est représentée sur la figure 4.10.

La série infinie de la relation (4.139) converge rapidement pour  $x$  suffisamment grand [114]. Il est ainsi possible de se limiter aux trois premiers termes de la série.

Il est aussi possible de faire apparaître des polylogarithmes dans la relation (4.139). La fonction polylogarithme  $\text{Li}_s$  est définie par [182] :

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^s} \quad (4.140)$$

Avec  $s \in \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ .

On a alors :

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} [-6\text{Li}_4(e^{-x}) - 6x\text{Li}_3(e^{-x}) - 3x^2\text{Li}_2(e^{-x}) + x^3 \ln(1 - e^{-x})] + 1 \quad (4.141)$$

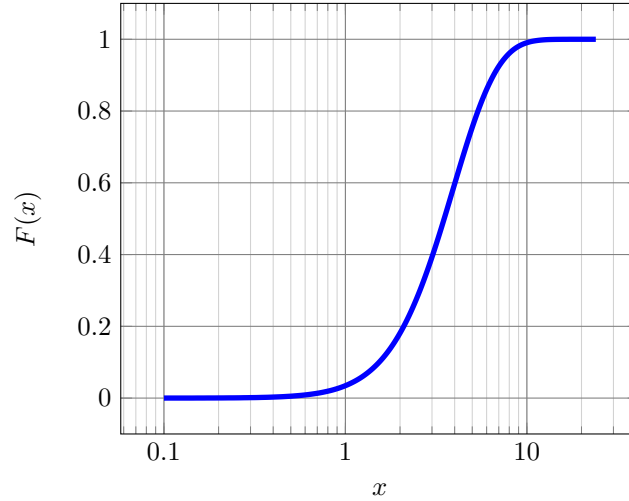


FIGURE 4.10 – Représentation de  $F(x)$

En utilisant la relation (4.141), il est possible de connaître la répartition spectrale du rayonnement émis par un corps noir de température  $T$ . Cette répartition est donnée dans la table 4.2, où le cumul fait référence à la fraction de rayonnement cumulée sur l'intervalle considéré.

cumul	$\lambda T \times 10^3$ [m.K]	$(\nu/T) \times 10^{-10}$ [Hz.K <sup>-1</sup> ]	$T = 5777$ K [ $\times 10^{-12}$ Hz]	$T = 300$ K [ $\times 10^{-12}$ Hz]
1 %	0 à 1.45	0 à 1.31	0 à 75.7	0 à 3.93
2.5 %	0 à 1.66	0 à 1.84	0 à 106	0 à 5.52
5 %	0 à 1.89	0 à 2.40	0 à 139	0 à 7.20
10 %	0 à 2.20	0 à 3.19	0 à 184	0 à 9.57
25 %	0 à 2.90	0 à 4.87	0 à 281	0 à 14.6
50 %	0 à 4.11	0 à 7.30	0 à 422	0 à 21.9
75 %	0 à 6.16	0 à 10.3	0 à 595	0 à 30.9
90 %	0 à 9.39	0 à 13.6	0 à 786	0 à 40.8
95 %	0 à 12.5	0 à 15.9	0 à 919	0 à 47.7
97.5 %	0 à 16.3	0 à 18.1	0 à 1046	0 à 54.3
99 %	0 à 22.9	0 à 20.7	0 à 1196	0 à 62.1

TABLE 4.2 – Répartition spectrale du rayonnement

La table 4.2 montre que les rayonnements solaire et ambiant ont des fréquences d'émissions très différentes, avec un spectre centré sur l'infrarouge proche, le visible et les ultraviolets pour le rayonnement solaire et un spectre centré sur l'infrarouge lointain pour le rayonnement ambiant.

### 4.3.2 Établissement de l'équation de transfert radiatif

Nous présentons maintenant la propagation du rayonnement dans un corps en considérant un chemin infinitésimal  $ds$  parcouru par le rayonnement. L'équation de transfert radiatif s'obtient à partir d'un bilan d'énergie sur ce chemin.

On note  $\Omega$  le domaine spatial étudié ( $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , avec  $d \in \{2, 3\}$ ), de frontière  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$  et  $S^{d-1}$  le cercle ( $d = 2$ ) ou la sphère unité ( $d = 3$ ) de  $\Omega$ .

Le bilan énergétique s'appuie sur la notion de luminance énergétique monochromatique ou intensité  $L_\nu$ , qui est la puissance rayonnée  $dQ$  par unité d'angle solide  $d\Omega$  centré autour d'une direction  $\vartheta \in S^d$ , par unité de surface projetée  $dS$  [237], en une position  $s \in \Omega$  donnée et pour un intervalle  $d\nu$  centré sur une fréquence  $\nu$  donnée. On a ainsi :

$$L_\nu(s, \vartheta) = \frac{dQ}{dS \cos(\varphi) d\vartheta d\nu} \quad (4.142)$$

Avec  $\varphi$  l'angle polaire

La fréquence  $\nu$  peut être reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $\lambda\nu = c$ .

Pour établir l'équation de transfert radiatif, nous considérons un volume de contrôle de longueur  $ds \subset \Omega$ . Un rayonnement de luminance  $L_\nu(s, \vartheta, t)$  en entrée du volume de contrôle ressort avec une luminance  $L_\nu(s + ds, \vartheta, t + dt)$ ,  $ds$  et  $dt$  étant liés par la relation  $ds = cdt$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

La variation de luminance entre l'entrée et la sortie du rayonnement du volume de contrôle  $dL_\nu(s, \vartheta, t)$  vérifie alors :

$$L_\nu(s + ds, \vartheta, t + dt) = L_\nu(s, \vartheta, t) + dL_\nu(s, \vartheta, t) \forall (s, \vartheta) \in \Omega \times S^{d-1} \quad (4.143)$$

Cette variation de la luminance est due à l'absorption, à la diffusion et à l'émission propre.

L'absorption et la diffusion se produisent lorsque les ondes électromagnétiques interagissent avec des particules. Durant cette interaction, l'énergie de l'onde électromagnétique est en partie transférée à l'énergie thermique de la particule à travers des phénomènes absorption et d'émission, et peut aussi être diffusée vers d'autres directions.

### Pertes radiatives

Nous considérons ici un rayonnement selon une direction donnée  $\vartheta$  sur un chemin infinitésimal  $ds$ . Sur ce chemin, le rayonnement est en partie absorbé par le milieu et diffusé vers d'autres directions.

Sur ce chemin, les pertes par absorption peuvent être écrites sous la forme  $\kappa_\nu L_\nu ds$  où  $\kappa_\nu$  est le coefficient d'absorption monochromatique, exprimé en  $m^{-1}$ . Il correspond à la part de luminance énergétique absorbée par unité de longueur. Il est à noter que si la longueur caractéristique pour l'absorption  $\frac{1}{\kappa_\nu}$  est très petite devant les échelles des phénomènes étudiés, le matériau peut être considéré comme opaque.

La diffusion est le phénomène entraînant un changement de direction d'une partie du rayonnement incident : celui-ci est dévié vers une autre direction, par des effets de réflexion, de réfraction, de transmission et de diffraction à l'intérieur ou aux frontières des particules. La diffusion se produit sans perte d'énergie, au niveau de chaque particule traversée par le rayonnement, l'intensité de la diffusion dépendant alors de la densité des particules diffusantes, de leurs formes, de leurs tailles, de leurs distributions, des propriétés du matériau et de la fréquence considérée.

Deux types de diffusion existent : la diffusion élastique, pour laquelle le rayonnement dévié conserve la même fréquence que le rayonnement incident et la diffusion non-élastique, pour laquelle ce n'est pas le cas, comme pour la fluorescence ou la diffusion de Raman [114].

La diffusion du rayonnement entraîne, sur un plan énergétique et pour une direction donnée, à la fois une perte de luminance à cause de la diffusion vers les autres directions, mais aussi un gain à cause de la diffusion du rayonnement provenant d'autres directions.

Pour obtenir les pertes par diffusion pour la luminance énergétique liée à la direction  $\vartheta$ , un coefficient de diffusion  $\sigma_\nu$  peut être introduit de telle sorte de la luminance énergétique de la direction  $\vartheta$  diffusée vers les autres directions s'écrit  $\sigma_\nu L_\nu ds$ . Là aussi,  $\sigma_\nu$  s'exprime en  $m^{-1}$  et représente la part de luminance énergétique pour la direction  $\vartheta$  diffusée vers les autres directions par unité de longueur.

Les coefficients d'absorption et de diffusion peuvent être déterminés à partir de considérations microscopiques. L'hypothèse est faite que, lorsqu'un rayon lumineux traverse un volume élémentaire comprenant des particules, des agglomérats ou des gaz, les propriétés de diffusion et d'absorption au niveau macroscopique  $\sigma_\nu$  et  $\kappa_\nu$  sont la somme des contributions de chacune des particules, ce qui est valable pour la plupart des applications [114] :

$$\sigma_\nu = \sum_{\text{particules}} \sigma_{\nu, \text{particule}} \quad (4.144)$$

$$\kappa_\nu = \sum_{\text{particules}} \kappa_{\nu, \text{particule}} \quad (4.145)$$

En considérant des particules de même type et de même taille, les relations (4.144) et (4.145) peuvent ainsi se réécrire :

$$\sigma_\nu = N\sigma_{\nu,\text{particule}} \quad (4.146)$$

$$\kappa_\nu = N\kappa_{\nu,\text{particule}} \quad (4.147)$$

Où  $N$  est le nombre de particules par unité de volume, en  $\text{m}^{-3}$ .

$\sigma_\nu$  et  $\kappa_\nu$  ayant pour dimension l'inverse d'une longueur, les coefficients au niveau microscopique des particules  $\sigma_{\nu,\text{particule}}$  et  $\kappa_{\nu,\text{particule}}$  ont la dimension d'une surface. Ils correspondent à la surface effective des particules qui absorbe ou dévie les ondes électromagnétiques. Des facteurs d'efficacité adimensionnels  $Q_{\nu,\sigma}$  et  $Q_{\nu,\kappa}$  peuvent être déduits en calculant le rapport entre les coefficients microscopiques et la section de la particule atteinte par les ondes électromagnétiques. Pour le cas de particules sphériques de diamètre  $D$ , on a :

$$\sigma_\nu = N\pi\frac{D^2}{4}Q_{\nu,\sigma} \quad (4.148)$$

$$\kappa_\nu = N\pi\frac{D^2}{4}Q_{\nu,\kappa} \quad (4.149)$$

Pour le cas de particules petites devant la longueur d'onde, avec un paramètre de taille  $\xi = \frac{\pi D}{\lambda}$  vérifiant  $\xi \lesssim 0.3$ , la théorie de Rayleigh est utilisée. Dans celle-ci, la diffusion s'effectue de façon proportionnelle à l'inverse de la puissance quatrième de la longueur d'onde. Historiquement, c'est cette théorie qui a permis d'expliquer, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la couleur bleue du ciel. En effet, la longueur d'onde de la couleur bleue est d'environ 400 nm, contre plus de 700 nm pour la couleur rouge. La lumière bleue est donc environ dix fois plus diffusée que la lumière rouge dans l'atmosphère. Lorsque les rayons solaires doivent traverser une plus grande longueur d'atmosphère, comme c'est le cas au lever et au coucher du Soleil, la diffusion est encore plus importante, entraînant une forte atténuation de la composante bleue du spectre solaire devant la composante rouge et donc une couleur rouge pour le Soleil.

On note  $\xi = \frac{\pi D}{\lambda}$  le paramètre de taille et  $\bar{n}$  les indices de réfraction complexes :  $\bar{n} = n - ki$ . Pour un milieu non absorbant, d'indice de réfraction  $\bar{n}_1 = n_1$  et des particules d'indice de réfraction  $\bar{n}_2 = n_2 - ki$ . La théorie de Rayleigh permet d'obtenir [114] :

$$Q_{\lambda,\sigma} = \frac{8}{3}\xi^4 \left| \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} \right|^2 \quad (4.150)$$

$$Q_{\lambda,\kappa} = -4\xi\Im \left( \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} \right) \quad (4.151)$$

Avec  $\bar{n} = \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}$  et  $\Im$  la partie imaginaire.

Pour des longueurs d'onde plus importantes, la théorie de Rayleigh peut être prolongée par la théorie de Lorenz-Mie, qui est valable pour toutes les dimensions de particules. La théorie de Lorenz-Mie permet notamment d'expliquer la couleur blanche des nuages, qui provient de la diffusion du rayonnement solaire par des gouttelettes d'eau ayant une taille comparable aux longueurs d'ondes du rayonnement solaire.

La théorie de Lorenz-Mie permet de décrire les interactions des ondes électromagnétiques avec des particules sphériques homogènes ou multicouches. Les expressions analytiques des coefficients de diffusion et d'absorption font alors intervenir des séries de fonctions de Riccati-Bessel alors que celles de la fonction de phase font intervenir des séries de polynômes de Legendre.

Pour le cas de particules de taille un peu plus grande que la limite d'application de la théorie de Rayleigh, c'est-à-dire  $\xi \gtrsim 0.3$ , les séries peuvent se réduire à leurs premiers termes. Dans le cas  $\xi < 0.3$ , on retrouve la théorie de Rayleigh en conservant le premier terme de la série.

$$Q_{\lambda,\sigma} = \frac{8}{3}\xi^4 \left| \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{\bar{n}^2 - 2}{\bar{n}^2 + 2} \xi^2 \right) \right|^2 \quad (4.152)$$

$$Q_{\lambda,\kappa} = -4\xi\Im \left\{ \left( \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} \right) \left[ 1 + \frac{\xi^2}{15} \left( \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} \right) \left( \frac{\bar{n}^4 + 27\bar{n}^2 + 38}{2\bar{n}^2 + 3} \right) \right] \right\} \quad (4.153)$$

## Gains radiatifs

La luminance énergétique s'accroît sur le chemin  $ds$  suite à deux types d'apports : l'émission propre et la diffusion depuis les autres directions.

L'émission propre provient de l'émission du matériau. Dans le cas d'un équilibre thermodynamique local, et en appliquant la loi de Kirchhoff, le gain provenant de l'émission propre s'écrit [48] :

$$\kappa_\nu L_\nu^0(T(s, t))ds \quad (4.154)$$

D'autre part, la luminance énergétique pour la direction  $\vartheta$  reçoit des contributions de la part des luminances énergétiques des autres directions par diffusion. Les gains de luminance par diffusion dépendent alors de la façon dont celle-ci s'effectue. Pour exprimer ces gains, on utilise une densité de probabilité  $p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta)$  qui représente la fraction du rayonnement diffusée par une autre direction  $\tilde{\vartheta}$  et redirigée vers la direction  $\vartheta$ . Le gain de rayonnement s'écrit alors :

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \sigma_\nu p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(s, \tilde{\vartheta}, t) d\tilde{\vartheta} ds \quad (4.155)$$

Avec  $|S^1| = 2\pi$  et  $|S^2| = 4\pi$ .

Cette fonction de phase vérifie, pour qu'il y ait conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) d\tilde{\vartheta} = 1, \quad \forall \vartheta \in S^d \quad (4.156)$$

Nous faisons de plus l'hypothèse que la fonction de phase ne dépend que de l'angle  $\theta$  entre la direction d'entrée et la direction de sortie. La fonction de phase peut ainsi se réécrire en fonction de  $\cos \theta = \vartheta \cdot \tilde{\vartheta}$ . On a alors :

$$p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) = p_\nu(\theta) \quad (4.157)$$

Pour un problème tridimensionnel, la condition (4.156) se réécrit alors :

$$\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} p_\nu(\theta) \sin \theta d\theta = 1 \quad (4.158)$$

Dans le cas d'une diffusion isotrope, c'est à dire d'un rayonnement dévié uniformément dans toutes les directions, on a  $p_\nu(\theta) = 1$ , ce qui ne se produit pas dans la nature [114], en particulier pour des milieux fibreux pour lesquels la diffusion vers l'avant ou la rétrodiffusion peuvent être importantes [145]. La diffusion est en réalité anisotrope, même si l'approximation d'une diffusion isotrope peut être utilisée pour des milieux denses en particules comme le sable ou la neige.

Comme pour les coefficients d'absorption et de diffusion, la fonction de phase dépend surtout du rapport entre les dimensions des particules et la longueur d'onde.

Plusieurs expressions existent donc pour approximer la fonction de phase :

— diffusion de Rayleigh [114] :

$$p_\nu(\theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.159)$$

— diffusion linéaire anisotropique :

$$p_\nu(\theta) = 1 + g \cos \theta \quad (4.160)$$

Où  $g$  est un coefficient pouvant prendre toute valeur réelle

— fonction de phase de Delta-Eddington : utilisation des polynômes de Legendre jusqu'au second ordre et prise en compte de la diffusion vers l'avant avec une fonction de Dirac

$$p_\nu(\theta) = 2f\delta(1 - \cos \theta) + (1 - f)(1 + 3g' \cos \theta) \quad (4.161)$$

Avec  $f = \frac{1}{2} \int_{\cos \theta = -1}^1 p_\nu(\theta) P_2(\cos \theta) d \cos \theta$  où  $P_2$  est le deuxième polynôme de Legendre :  $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$ ,  $g' = \frac{g - f}{1 - f}$  et  $g = \frac{1}{2} \int_{\cos \theta = -1}^1 \cos \theta p_\nu(\cos \theta) d \cos \theta$

- fonction de phase de Henyey-Greenstein : cette fonction de phase permet l'obtention de résultats proches de ceux de la théorie de Lorenz-Mie lorsqu'elle est utilisée avec la méthode des ordonnées discrètes ou les harmoniques sphériques. Elle est utilisée dans de nombreuses publications [15, 109, 86].

$$p_\nu(\theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}} \quad (4.162)$$

Où  $g$  est un coefficient indiquant l'intensité du pic de diffusion, compris entre 0 (pour une diffusion isotropique) et 1 (diffusion vers l'avant).

### Équation de transfert radiatif

La somme des contributions de l'absorption, de la diffusion et de l'émission propre représentées sur la figure 4.11 permettent d'obtenir la variation de la luminance sur un chemin infinitésimal  $ds$  :

$$\begin{aligned} dL_\nu(s, \vartheta, t) = & -\kappa_\nu L_\nu(s, \vartheta, t) ds - \sigma_\nu L_\nu(s, \vartheta, t) ds + \kappa_\nu L_\nu^0(T(s, t)) ds \\ & + \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \sigma_\nu p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(s, \tilde{\vartheta}, t) d\tilde{\vartheta} ds \end{aligned} \quad (4.163)$$

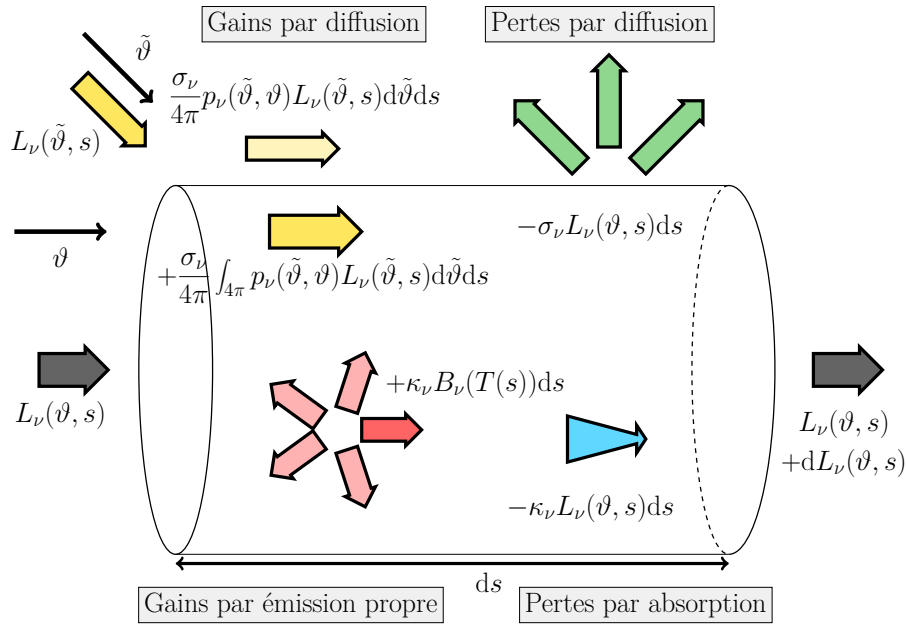


FIGURE 4.11 – Apports et pertes intervenant dans l'équation de transfert radiatif

On a de plus :

$$dL_\nu(s, \vartheta, t) = \frac{\partial L_\nu(s, \vartheta, t)}{\partial s} ds + \frac{\partial L_\nu(s, \vartheta, t)}{\partial t} dt \quad (4.164)$$

En utilisant de plus la relation  $ds = c dt$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\nu(s, \vartheta, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial L_\nu(s, \vartheta, t)}{\partial t} = & -\kappa_\nu L_\nu(s, \vartheta, t) - \sigma_\nu L_\nu(s, \vartheta, t) + \kappa_\nu B_\nu(T(s, t)) \\ & + \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \sigma_\nu p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(s, \tilde{\vartheta}, t) d\tilde{\vartheta} \end{aligned} \quad (4.165)$$

Étant donnée la vitesse de propagation du rayonnement dans le milieu qui est très grande, dans notre cas d'étude, devant la vitesse de propagation des ondes thermiques, on peut considérer que le



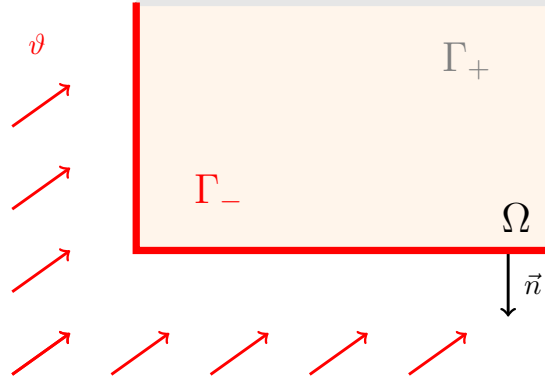


FIGURE 4.12 – Frontières d'entrée et de sortie pour une direction donnée

terme temporel de la relation (4.165) est négligeable devant le terme de variation spatiale. La lenteur des phénomènes en jeu ici nous permet donc de négliger ce terme transitoire [114]. Dans la suite, et sauf ambiguïté, la variable temporelle sera omise. On a ainsi, en 3D :

$$\vartheta \cdot \nabla L_\nu(s, \vartheta) = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \vartheta) + \kappa_\nu B_\nu(T(s)) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{S^2} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(s, \tilde{\vartheta}) d\tilde{\vartheta} \quad (4.166)$$

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont à définir sur la frontière entrante  $\Gamma_-$  du domaine  $\Omega \times S^d$ . Cette frontière est représentée sur la figure 4.12 pour une direction  $\vartheta$  donnée et est définie par :

$$\Gamma_- = \{(s, \vartheta) \in \Gamma \times S^{d-1} / \vec{n} \cdot \vartheta < 0\} \quad (4.167)$$

Avec  $\vec{n}$  la normale extérieure en  $s$ . Le signe de  $\vec{n} \cdot \vartheta$  définit la direction du flux radiatif : s'il est négatif, alors le flux radiatif est entrant comme c'est le cas pour  $\Gamma_-$ . Dans le cas contraire, il est sortant. À noter que la structure hyperbolique de l'équation de transfert radiatif fait qu'il n'est nécessaire d'imposer une condition limite que sur la frontière entrante  $\Gamma_-$  [128], la luminance pouvant alors être déterminée sur les autres frontières à partir de l'ETR et des conditions sur  $\Gamma_-$ .

Nous considérons ici une interface avec un milieu extérieur à la température  $T_{ext}$  avec une émissivité  $\varepsilon_{ext}$ . Le milieu semi-transparent est supposé de plus être soumis à un autre rayonnement donné de luminance énergétique  $L_{ext, \nu}(\vartheta)$ . La luminance sur les directions d'entrée correspond alors à la somme des contributions extérieures et du rayonnement réfléchi par les parois vers l'intérieur du corps semi-transparent, ce qui est représenté sur la figure 4.13.

On suppose ici que la frontière du matériau semi-transparent est à réflexion diffuse, c'est-à-dire que la réflexion d'un rayon lumineux se fait, quelle que soit la direction d'incidence, de la même façon dans toutes les directions du demi-espace.

Le flux radiatif spectral incident à la surface en  $s \in \Gamma$  (émittance) est donné par :

$$M^+(s) = \int_{\vec{n} \cdot \vartheta > 0} L_\nu(s, \vartheta) |\vec{n} \cdot \vartheta| d\vartheta \quad (4.168)$$

L'émittance réfléchi  $M^-$ , est alors égale à  $\rho_\nu M^+(s)$ , avec  $\rho_\nu$  la réflectance de la frontière.

La réflexion étant diffuse, la luminance sur les frontières d'entrée s'écrit  $(s, \vartheta) \in \Gamma_-$ , en 3D ( $d = 3$ ) [170] :

$$L_\nu(s, \vartheta) = (1 - \rho_\nu)(\varepsilon_{ext, \nu} L_\nu^0(T_{ext}) + L_{ext, \nu}) + \frac{\rho_\nu}{\pi} \int_{\vec{n} \cdot \tilde{\vartheta} > 0} L_\nu(s, \tilde{\vartheta}) |\vec{n} \cdot \tilde{\vartheta}| d\tilde{\vartheta} \quad (4.169)$$

La condition limite en entrée peut être généralisée en distinguant les contributions intérieures et extérieures. Pour  $(s, \vartheta) \in \Gamma_-$  :

$$L_\nu(s, \vartheta) = g_{ext}(s, \vartheta) + g_{int}(L_\nu, s, \vartheta) \quad (4.170)$$

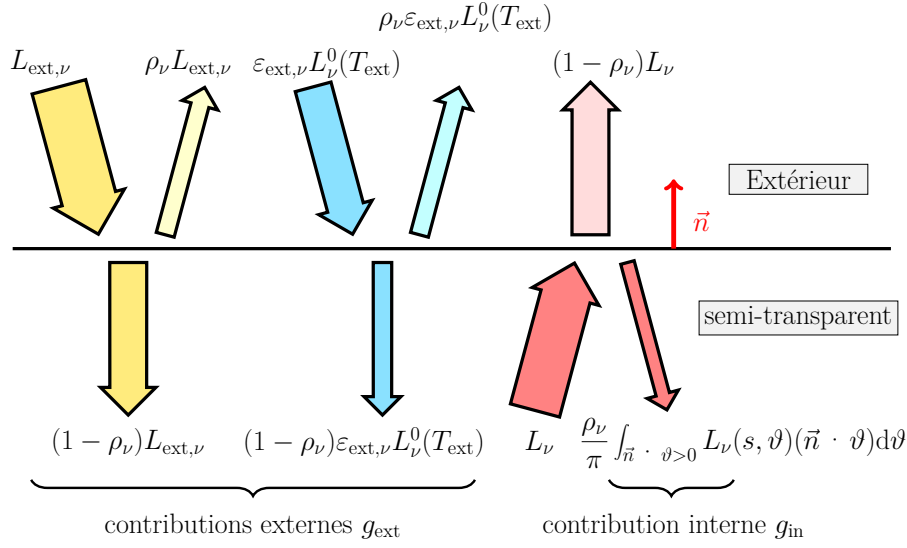


FIGURE 4.13 – Bilan radiatif au niveau des frontières d'entrée

Avec  $g_{ext}$  les apports extérieurs et  $g_{int}$  le rayonnement sortant de  $\Omega$  et réfléchi vers l'intérieur. En particulier, dans le cadre de notre étude, les contributions extérieures peuvent se référer aux rayonnements solaire et atmosphérique. En notant  $\Gamma_{air}$  la frontière du domaine  $\Omega$  en contact avec l'air et  $\Gamma_{sol}$  le reste de la frontière, on a :

$$g_{int,\nu}(L_\nu, s, \vartheta) = \frac{\rho_\nu}{\pi} \int_{\vec{n} \cdot \tilde{\vartheta} > 0} L_\nu(s, \tilde{\vartheta})(\vec{n} \cdot \tilde{\vartheta}) d\tilde{\vartheta} \quad (4.171)$$

$$g_{ext,\nu}(s, \vartheta) = (1 - \rho_\nu)(\varepsilon_{ext,\nu} L_\nu^0(T_{ext}) + L_{ext,\nu}) \quad (4.172)$$

En particulier, pour le cas où on considère les contributions des rayonnements solaire et atmosphérique, on a :

$$g_{ext,\nu}(\vartheta) = (1 - \rho_\nu) \left( L_\nu^0(T_c) + \frac{G_{s,\nu}}{\pi} + \delta(\vartheta - \vartheta_s) G_{d,\nu} \right) \quad (4.173)$$

Avec  $G_{s,\nu}$  la densité de flux solaire diffuse,  $G_{d,\nu}$  la densité de flux solaire directe,  $\vartheta_s$  la direction du rayonnement solaire direct et  $\delta$  la fonction de Dirac.

### Absorption du rayonnement

Le rayonnement absorbé dans le milieu semi-transparent apporte de l'énergie à ce milieu, ce qui peut être représenté sous la forme de termes sources. Ceux-ci peuvent avoir deux origines : l'absorption du rayonnement au sein même du corps semi-transparent, avec une source alors volumique ou l'absorption aux frontières de sortie du corps semi-transparent, au niveau de l'interface avec un autre corps opaque.

Le premier terme source radiatif représente la puissance absorbée dans le domaine issue des phénomènes radiatifs. Il s'obtient à partir de la luminance par [170] :

$$S_{rad} = -\nabla \cdot \vec{q}_{rad} \quad (4.174)$$

Avec  $\vec{q}_{rad}$  le flux radiatif défini par :

$$\vec{q}_{rad}(s) = \int_{\nu=0}^{+\infty} \int_{S_2} L_\nu(s, \vartheta) \vartheta d\vartheta d\nu \quad (4.175)$$

Ce terme source peut aussi s'écrire, en utilisant (4.174) et (4.175), en réinjectant l'expression du gradient de luminance donnée par l'équation de transfert radiatif et en utilisant la définition de la fonction de phase :

$$S_{rad} = \int_{\nu=0}^{+\infty} \kappa_{\nu} \int_{S_2} (L_{\nu}(s, \vartheta) - L_{\nu}^0(T)) d\vartheta d\nu \quad (4.176)$$

En plus du terme source radiatif reçu à l'intérieur du domaine  $\Omega$ , un flux radiatif est absorbé au niveau des frontières lorsque le milieu extérieur est opaque. Le flux radiatif monochromatique absorbé  $\Phi_a$  à la frontière s'écrit [114] :

$$\Phi_{a,\nu} = \int_{S^2} L_{\nu}(s, \vartheta) (\vartheta \cdot \vec{n}) dS \quad (4.177)$$

Soit, en considérant les conditions aux limites pour  $\vartheta \cdot \vec{n} < 0$  (équation (4.169)) :

$$\Phi_{a,\nu} = \int_{\vartheta \cdot \vec{n} > 0} L_{\nu}(s, \vartheta) (\vartheta \cdot \vec{n}) dS - \left( \varepsilon_{\nu} \pi L_{\nu}^0(T) + \rho_{\nu} \int_{\vartheta \cdot \vec{n} > 0} L_{\nu}(s, \tilde{\vartheta}) |\tilde{\vartheta} \cdot \vec{n}| dS \right) \quad (4.178)$$

Et donc :

$$\Phi_{a,\nu} = (1 - \rho_{\nu}) \int_{\vartheta \cdot \vec{n} > 0} L_{\nu}(s, \vartheta) (\vartheta \cdot \vec{n}) dS - \varepsilon_{\nu} \pi L_{\nu}^0(T) \quad (4.179)$$

### 4.3.3 Méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif

Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre l'équation de transfert radiatif. Il est possible de résoudre analytiquement l'équation pour des cas d'étude simple, notamment en 1D [170]. Pour des cas plus complexes, il faut une résolution numérique du problème, mais qui peut parfois s'appuyer sur la solution analytique unidimensionnelle.

Pour simplifier les notations, nous omettons dans la suite de cette partie la dépendance de la luminance énergétique et des grandeurs associées par rapport au temps  $t$ . Nous noterons également  $\beta_{\nu}$  le coefficient d'extinction monochromatique :  $\beta_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}$ .

#### Solution analytique

L'équation de transfert radiatif peut être intégrée le long d'un rayon, donc en 1D. Cette solution analytique est notamment utilisée pour le méthode des tracés de rayons.

En notant  $\beta_{\nu} = \sigma_{\nu} + \kappa_{\nu}$  le coefficient d'extinction,  $\tau_{\nu} = \int_0^s \beta_{\nu} ds'$  le chemin optique et  $\omega_{\nu} = \frac{\kappa_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}}$  l'albédo de diffusion, l'équation de transfert radiatif (4.166) se réécrit, pour le cas d'un domaine 3D :

$$\frac{dL_{\nu}(\tau_{\nu}, \vartheta)}{d\tau_{\nu}} = -L_{\nu}(\tau_{\nu}, \vartheta) + (1 - \omega_{\nu}) L_{\nu}^0(T(\tau_{\nu})) + \frac{\omega_{\nu}}{4\pi} \int_{S^2} L_{\nu}(\tau_{\nu}, \tilde{\vartheta}) p_{\nu}(\tilde{\vartheta}, \vartheta) d\tilde{\vartheta} \quad (4.180)$$

On note  $\hat{L}_{\nu}$  la fonction source :

$$\hat{L}_{\nu}(\tau_{\nu}) = (1 - \omega_{\nu}) L_{\nu}^0(T(\tau_{\nu})) + \frac{\omega_{\nu}}{4\pi} \int_{S^2} L_{\nu}(\tau_{\nu}, \tilde{\vartheta}) p_{\nu}(\tilde{\vartheta}, \vartheta) d\tilde{\vartheta} \quad (4.181)$$

L'équation (4.180) se réécrit donc :

$$\frac{dL_{\nu}(\tau_{\nu}, \vartheta)}{d\tau_{\nu}} + L_{\nu}(\tau_{\nu}, \vartheta) = \hat{L}_{\nu}(\tau_{\nu}) \quad (4.182)$$

On a alors :

$$L_{\nu}(\tau_{\nu}, \vartheta) = L_{\nu}(0, \vartheta) e^{-\tau_{\nu}} + \int_0^{\tau_{\nu}} \hat{L}_{\nu}(\tau'_{\nu}, \vartheta) e^{-(\tau_{\nu} - \tau'_{\nu})} d\tau'_{\nu} \quad (4.183)$$

### Application à un cas test

Dans certains cas, une solution peut être donnée. Nous abordons notamment ici le cas du rayonnement entre deux plaques planes parallèles infinies. Chacune de ces deux plaques rayonne vers l'intérieur d'un domaine semi-transparent et réfléchit une partie du rayonnement incident. L'espace entre les deux plaques est constitué d'un matériau pouvant absorber et diffuser le rayonnement. La configuration étudiée est présentée sur la figure 4.14. Ce cas de figure a notamment été abordé par [107, 114, 170, 245].



FIGURE 4.14 – Cas étudié : deux plaques planes encadrant un milieu semi-transparent

On note  $\beta_\nu = \sigma_\nu + \kappa_\nu$  le coefficient d'extinction,  $\tau_\nu(s) = \int_{s^*=0}^s \beta_\nu ds^*$  le chemin optique,  $\tau_{\nu,D} = \int_{s=0}^D \beta_\nu ds$  l'épaisseur optique du domaine étudié et  $\omega_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\beta_\nu}$  l'albédo de diffusion. Dans le cas de coefficients  $\kappa_\nu$  et  $\sigma_\nu$  constants sur le domaine, on a  $\tau_\nu(s) = \beta_\nu s$  et  $\tau_{\nu,D} = \beta_\nu D$ .

La luminance le long d'un chemin optique vérifie l'équation (4.180) (cf paragraphe 4.3.3 et [114, 170]). Dans le cas d'une diffusion isotrope, cette équation devient :

$$\frac{dL_\nu(\tau_\nu, \vartheta)}{d\tau_\nu} = -L_\nu(\tau_\nu, \vartheta) + (1 - \omega_\nu) L_\nu^0(T(\tau_\nu)) + \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} L_\nu(\tau_\nu, \tilde{\vartheta}) d\tilde{\vartheta} \quad (4.184)$$

On note  $\hat{L}_\nu$  la fonction source, qui est alors indépendante de la direction :

$$\hat{L}_\nu(\tau_\nu) = (1 - \omega_\nu) L_\nu^0(T(\tau_\nu)) + \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} L_\nu(\tau_\nu, \tilde{\vartheta}) d\tilde{\vartheta} \quad (4.185)$$

On note  $\mu = \cos \theta$  l'angle entre la direction considérée et  $\vec{e}_z$ ,  $L_\nu^+(\tau_\nu, \mu)$  la luminance pour les directions orientées positivement selon  $z$  ( $\mu > 0$ ) et  $L_\nu^-(\tau_\nu, \mu)$  la luminance pour les directions orientées négativement selon  $z$  ( $\mu < 0$ )

La luminance s'écrit, d'après l'équation (4.183), sous la forme :

$$\begin{cases} L_\nu^+(\tau_\nu, \mu) = L_\nu^+(0, \mu) e^{-\tau_\nu/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_\nu} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu^*)/\mu} d\tau_\nu^* & \text{pour } 0 < \mu \leq 1 \\ L_\nu^-(\tau_\nu, \mu) = L_\nu^+(\tau_{\nu,D}, \mu) e^{-(\tau_\nu - \tau_{\nu,D})/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu^*=\tau_{\nu,D}}^{\tau_\nu} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu^*)/\mu} d\tau_\nu^* & \text{pour } -1 \leq \mu < 0 \end{cases} \quad (4.186)$$

Par invariance du problème selon les directions  $x$  et  $y$ , le terme source et le flux radiatif ne dépendent que de la variable  $z$ . On a donc  $S_{rad} = -\nabla \cdot \vec{q}_{rad} = -\frac{\partial q_{rad}(\tau_\nu)}{\partial z}$ .

Le flux radiatif fréquentiel s'écrit :

$$q_{rad,\nu}(\tau_\nu) = \vec{q}_{rad,\nu} \cdot \vec{e}_z = 2\pi \int_{\mu=0}^1 (L_\nu^+(\tau_\nu, \mu) - L_\nu^-(\tau_\nu, \mu)) \mu d\mu \quad (4.187)$$

Dans leur livre [114], Howell et Siegel introduisent la famille de fonctions des exponentielles intégrales définies de la façon suivante :

$$E_n(x) = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt = \int_{\mu=0}^1 \mu^{n-2} e^{-x/\mu} d\mu \quad (4.188)$$

Avec  $n$  un entier strictement positif et  $x \geq 0$  (sauf pour  $n = 1$  où  $x > 0$ )

Le terme source s'écrit, en partant de la relation (4.176), :

$$S_{rad}(\tau_\nu) = \int_{\nu=0}^{+\infty} 2\pi\kappa_\nu \int_{\mu=0}^1 (L_\nu^+(\tau_\nu, \mu) + L_\nu^-(\tau_\nu, -\mu) - 2L_\nu^0(T)) d\theta d\nu \quad (4.189)$$

Soit, en faisant apparaître les exponentielles intégrales :

$$S_{rad}(\tau_\nu) = 4\pi \int_{\nu=0}^{+\infty} \kappa_\nu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{J_{\nu,1}}{\pi} E_2(\tau_\nu) + \frac{J_{\nu,2}}{\pi} E_2(\tau_{\nu,D} - \tau_\nu) \right) + \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) E_1(|\tau_\nu - \tau_\nu^*|) d\tau_\nu^* \right] - L_\nu^0(T) d\nu \quad (4.190)$$

Avec :

$$\hat{L}_\nu(\tau_\nu) = (1 - \omega_\nu) L_\nu^0(T(\tau_\nu)) + \frac{\omega_\nu}{2} \left[ \frac{J_{1\nu}}{\pi} E_2(\tau_\nu) + \frac{J_{2\nu}}{\pi} E_2(\tau_{\nu,D} - \tau_\nu) + \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) E_1(|\tau_\nu - \tau_\nu^*|) d\tau_\nu^* \right] \quad (4.191)$$

$J_{1\nu}$  et  $J_{2\nu}$  sont les flux radiatifs orientés vers le domaine étudié respectivement en  $s = 0$  et  $s = D$ . On suppose ici que les frontières sont diffuses. Les luminances quittant les frontières ne dépendent pas de l'angle  $\mu$  et on a :

$$\begin{cases} L_\nu^+(0, \mu) = L_\nu^+(0) = \frac{J_{1\nu}}{\pi} \\ L_\nu^+(\tau_{\nu,D}, \mu) = L_\nu^+(\tau_{\nu,D}) = \frac{J_{2\nu}}{\pi} \end{cases} \quad (4.192)$$

Ces deux termes proviennent des émissions des interfaces ainsi que de la réflexion du rayonnement interne sur l'interface [214]. Ils s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} J_{1\nu} = \varepsilon_{1\nu} \pi L_\nu^0(T_1) + \rho_{1\nu} \int_{\mu=0}^1 L(0, -\mu) \mu d\mu \\ J_{2\nu} = \varepsilon_{2\nu} \pi L_\nu^0(T_2) + \rho_{2\nu} \int_{\mu=0}^1 L(\tau_\nu, \mu) \mu d\mu \end{cases} \quad (4.193)$$

En réutilisant les expressions précédentes donnant la luminance, on a [114] :

$$\begin{cases} J_{1\nu} = \varepsilon_{1\nu} \pi L_\nu^0(T_1) + 2\rho_{1,\nu} \left[ J_{2\nu} E_3(\tau_{\nu,D}) + \pi \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) E_2(\tau_\nu^*) d\tau_\nu^* \right] \\ J_{2\nu} = \varepsilon_{2\nu} \pi L_\nu^0(T_2) + 2\rho_{2,\nu} \left[ J_{1\nu} E_3(\tau_{\nu,D}) + \pi \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*) E_2(\tau_{\nu,D} - \tau_\nu^*) d\tau_\nu^* \right] \end{cases} \quad (4.194)$$

$J_{\nu,1}$  et  $J_{\nu,2}$  peuvent finalement se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l}
J_{1\nu} = \frac{1}{1 - 4(1 - \varepsilon_{1\nu})(1 - \varepsilon_{2\nu})E_3^2(\tau_{\nu,D})} \left[ \varepsilon_{1\nu}\pi L_\nu^0(T_1) \right. \\
+ 2(1 - \varepsilon_{1\nu})E_3(\tau_{\nu,D})\pi\varepsilon_{2\nu}L_\nu^0(T_2) \\
+ 4\pi(1 - \varepsilon_{1\nu})(1 - \varepsilon_{2\nu})E_3(\tau_{\nu,D}) \int_{\tau_1^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*)E_2(\tau_{\nu,D} - \tau_\nu^*)d\tau_\nu^* \\
\left. + 2\pi(1 - \varepsilon_{1\nu}) \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*)E_2(\tau_\nu^*)d\tau_\nu^* \right] \\
J_{2\nu} = \frac{1}{1 - 4(1 - \varepsilon_{1\nu})(1 - \varepsilon_{2\nu})E_3^2(\tau_{\nu,D})} \left[ \varepsilon_{2\nu}\pi L_\nu^0(T_2) \right. \\
+ 2(1 - \varepsilon_{2\nu})E_3(\tau_{\nu,D})\pi\varepsilon_{1\nu}L_\nu^0(T_1) \\
+ 4\pi(1 - \varepsilon_{1\nu})(1 - \varepsilon_{2\nu})E_3(\tau_{\nu,D}) \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*)E_2(\tau_\nu^*)d\tau_\nu^* \\
\left. + 2\pi(1 - \varepsilon_{2\nu}) \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_{\nu,D}} \hat{L}_\nu(\tau_\nu^*)E_2(\tau_{\nu,D} - \tau_\nu^*)d\tau_\nu^* \right]
\end{array} \right. \quad (4.195)$$

### Méthode des éléments finis

L'équation de transfert radiatif (4.166) peut être résolue numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis [75, 131, 164, 200]. Cette méthode des éléments finis s'applique pour la discrétisation spatiale et peut aussi s'appliquer pour la discrétisation angulaire.

L'un des inconvénients majeurs de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour une résolution numérique de l'équation de transfert radiatif provient de la structure de l'ETR. En effet, cette équation différentielle est hyperbolique et l'utilisation de la méthode des éléments finis sur celle-ci peut entraîner de fausses oscillations de la solution numérique [128], comme cela a déjà été expliqué pour la convection hydraulique (cf paragraphe 4.2.2). Il est nécessaire d'adopter une méthode permettant une régularisation de la solution.

Il est aussi possible de modifier la structure de l'équation en s'appuyant sur une décomposition de la luminance énergétique en deux quantités, symétrique et antisymétrique par rapport à la direction de propagation, comme l'ont montré Fiveland et Jessee [82] ou Becker et al. [17]. Cette méthode avait déjà été étudiée sur la méthode des ordonnées discrètes, par Song et Park en 1992 [219] :

L'équation de transfert radiatif (4.166) exprimée pour les directions  $\vec{u}$  et  $-\vec{u}$  permet alors d'obtenir un système couplé d'équations différentielles qui peut ensuite se simplifier en une équation différentielle du second ordre parabolique qu'il est possible de discrétiser en position et en direction à l'aide de la méthode de Galerkin.

Une autre possibilité de régularisation est d'introduire, lors de l'application de la méthode de Galerkin, une fausse diffusion [128, 213], ou bien d'utiliser une formulation du second ordre, plus stable numériquement [262].

### Méthode des ordonnées discrètes

Cette méthode a été initialement introduite par Chandrasekhar en 1960 [48] et est depuis devenue populaire à cause de la simplicité de sa mise en œuvre ainsi que la précision obtenue pour un temps de calcul relativement faible [81, 233]. Elle permet une discrétisation de l'équation de transfert radiatif selon la direction en effectuant une quadrature de Gauss-Legendre. L'équation de transfert radiatif peut alors se réécrire sous forme discrétisée, pour toute direction  $\vartheta$  et pour des poids  $w_m$  associés aux directions discrétisées  $\vartheta_m$  :

$$\vartheta \cdot \nabla L_\nu(s, \vartheta) = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \vartheta) + \kappa_\nu L_\nu^0(T(s)) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_k p_\nu(\vartheta_k, \vartheta) L_\nu(s, \vartheta_k) w_k \quad (4.196)$$

Chandrasekhar [48] effectuait initialement la résolution spatiale de l'équation à l'aide de différences finies. Depuis, d'autres méthodes ont été utilisées, notamment les volumes finis qui permettent, dans le

cas d'un couplage avec l'équation de la chaleur par exemple, de ne pas avoir à effectuer d'interpolations entre les deux maillages [233].

La méthode des ordonnées discrètes présente cependant plusieurs défauts [47] : les valeurs de luminance obtenues peuvent être incohérentes vis à vis des résultats attendus à cause des effets de diffusion numérique, en particulier pour des rayons ayant des directions obliques par rapport au maillage spatial. Un autre problème important est l'effet de rayon qui est dû à la discrétisation angulaire : au lieu de se propager comme ils le feraient physiquement de façon continue selon la direction, ils se déplacent selon un nombre fini de directions. Ainsi, si une petite partie d'une surface chaude rayonne sur une surface parallèle éloignée froide, cette dernière ne recevra un rayonnement qu'au niveau des points situés dans le prolongement des directions issues de la partie chaude de la première surface.

### Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste en l'intégration d'une équation différentielle sur un volume de contrôle permettant, comme pour la méthode des ordonnées discrètes, d'obtenir un système d'équations. Cependant, contrairement à la méthode des ordonnées discrètes, les intégrales directionnelles sont calculées, non pas à partir d'une quadrature, mais par intégration sur un angle de contrôle. L'équation de transfert radiatif est également intégrée sur un angle de contrôle.

Comme pour la méthode des ordonnées discrètes, il est nécessaire de suivre un ordre de parcours pour la résolution du problème lié à la direction de propagation du rayonnement.

Cette méthode a été introduite pour l'équation de transfert radiatif par Raithby et Chui en 1990 [196] afin de résoudre cette équation sur des maillages similaires à ceux utilisés pour résoudre d'autres équations différentielles. Cette méthode présente aussi l'avantage, tout comme la méthode des ordonnées discrètes, de pouvoir être utilisée sur des maillages non structurés.

### Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo a été développée dans un premier temps afin d'analyser le comportement des premières armes nucléaires en suivant le parcours de neutrons, les méthodes d'analyse disponibles à l'époque n'étant pas suffisantes pour obtenir une estimation précise du comportement de ces armes [113].

La méthode de Monte-Carlo tire son nom de la ville, réputée pour ses jeux de hasard. En effet, cette méthode consiste à suivre des photons émis aléatoirement dans des directions aléatoires. L'évolution de ces photons dans le milieu étudié dépend alors des phénomènes de diffusion et d'absorption se produisant à l'intérieur de celui-ci.

Le principal avantage de cette méthode est de pouvoir prendre en compte tous les effets du transfert radiatif sans approximation. Cependant, pour obtenir une bonne précision, il faut émettre un grand nombre de photons, ce qui peut rendre cette méthode très coûteuse en temps de calcul.

### Méthode des harmoniques sphériques

La méthode des harmoniques sphériques consiste en une décomposition de la luminance sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques, fonctions liées aux polynômes de Legendre. En utilisant l'orthogonalité de ces polynômes, il est alors possible d'obtenir à partir de l'équation de transfert radiatif un système d'équations différentielles n'ayant plus de dépendance directionnelle, et relativement simples à résoudre [170]. Il est possible d'utiliser différents ordres pour les polynômes de Legendre, suivant la précision qu'on souhaite obtenir. Pour cette méthode, les approximations les plus utilisées sont celles d'ordre 1 et 3, aussi appelées  $P_1$  et  $P_3$ . Plus généralement, pour une approximation à l'ordre  $N$  avec la méthode des harmoniques sphériques,  $N$  étant impair, on parle de méthode  $P_N$ .

Cette méthode a comme principal désavantage de ne pas être très précise pour des milieux fortement anisotropiques, et la précision augmente peu pour des approximations d'ordre supérieur, alors que la complexité mathématique augmente rapidement.

### Méthode des tracés de rayons

Cette méthode est similaire à celle de Monte-Carlo dans la mesure où des rayons lumineux sont suivis pendant leur parcours. Il n'y a cependant aucune intervention de l'aléatoire dans cette méthode.

La méthode des tracés de rayons a été introduite par Lockwood et Shah en 1981 [76] pour des calculs de rayonnement en chambre de combustion. Elle consiste à suivre des rayons lumineux émis par une surface jusqu'à ce qu'ils atteignent une autre surface du domaine. La luminance du rayon au cours de son trajet dans le domaine peut alors s'obtenir à partir d'une résolution unidimensionnelle de l'équation de transfert radiatif. Les pertes par absorption ou diffusion sont alors réparties sur chaque élément du maillage traversé par le rayon.

Cette méthode apparaît simple mathématiquement et applicable sur des géométries complexes, mais la mise en œuvre pour des maillages non structurés peut demander des temps de calculs importants.

La mise en pratique de cette méthode est expliquée dans l'article de Lockwood et Shah [76] ou celui de Farhat et Radhouani [80].

### Méthode des différences finies

La méthode des différences finies appliquée à l'équation de transfert radiatif permet de discrétiser celle-ci en 2D ou 3D [221]. Le schéma numérique obtenu est stable, quelle que soit l'épaisseur du domaine étudié, et permet d'obtenir une luminance positive, ce qui correspond à la physique. Cette méthode présente cependant plusieurs désavantages, notamment des problèmes de précision en présence de forts gradients ainsi qu'une convergence lente pour un albédo élevé [221, 200].

### Méthodes à deux flux

Nous présentons dans ce paragraphe deux méthodes permettant de résoudre le problème des transferts radiatifs utilisant l'approximation des deux flux. Cette approximation vise à considérer un problème unidimensionnel, avec deux directions d'étude : vers l'amont et vers l'aval de la direction spatiale. Il est à noter que ces méthodes ont été développées pour l'étude de la structure stellaire au début du XX<sup>ème</sup> siècle, donc avant l'étude détaillée de l'équation de transfert radiatif. Ces approximations ont ainsi été développées pour des couches de l'atmosphère dont le comportement était supposé pouvoir être décrit de manière unidimensionnelle [215].

**Méthode de Milne-Eddington** Cette méthode correspond à l'application de la méthode des harmoniques sphériques en considérant les équations pour les moments d'ordres 0 et 1 [114].

L'équation de transfert radiatif est, pour la première équation, multipliée par  $(\cos\theta)^0$ , et pour la deuxième, par  $(\cos\theta)^1$  avant d'être intégrée sur la sphère unité.

L'hypothèse de luminance isotrope permet d'obtenir deux équations appelées équations de Milne-Eddington.

**Méthode de Schuster-Schwarzschild** Comme pour la méthode de Milne-Eddington, la luminance est supposée isotrope sur chacun des deux hémisphères. Cependant, cette hypothèse intervient avant l'intégration sur la sphère unité.

Le point de départ est, là aussi, l'équation de transfert radiatif, considérée pour les deux directions d'étude, qui représentent alors chacun des hémisphères. L'intégration des deux équations permet d'obtenir un système semblable à celui obtenu avec la méthode de Milne-Eddington [114].

Cette méthode correspond à la méthode des ordonnées discrètes avec deux directions.

### 4.3.4 Application de la méthode des éléments finis à l'équation de transfert radiatif

L'objectif de cette partie est de présenter un schéma de résolution numérique de l'équation de transfert radiatif (4.166). Pour cela, le champ de luminance est discrétisé en direction et en espace. Deux discrétisations sont donc nécessaires à la résolution numérique de l'équation de transfert radiatif.

Nous présentons dans cette section chacune de ces deux discrétisations. La méthode des éléments finis est utilisée ici pour la discrétisation spatiale, la discrétisation angulaire étant réalisée à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes.

Il est néanmoins possible d'effectuer la discrétisation angulaire avec des éléments finis [131]. Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont bons dans le cas où la luminance est une fonction n'ayant pas de variations trop importantes en angle. La méthode des éléments finis appliquée pour la dépendance



angulaire n'apporte de meilleurs résultats que dans le cas de l'étude d'un rayon dans un milieu optiquement épais [131].

L'équation de transfert radiatif étant hyperbolique à cause du terme de transport  $\vartheta \cdot \nabla L_\nu$ , sa résolution numérique avec la méthode des éléments finis présente le risque de produire des oscillations non physiques [128, 200, 164], comme cela a déjà été vu dans le paragraphe 4.2.2. C'est en particulier le cas lorsque la solution exacte du problème présente des discontinuités, pour des rayons lumineux orientés par exemple avec des ombres : des divergences de la solution numérique peuvent se produire au niveau des frontières des zones ombragées.

Nous rappelons la forme générale de l'équation de transfert radiatif et de l'équation d'advection diffusion :

$$\begin{aligned} \vartheta \cdot \nabla L_\nu(s, \vartheta) &= -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \vartheta) + \kappa_\nu L_\nu^0(T(s)) \\ &\quad + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{S^2} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(s, \tilde{\vartheta}) d\tilde{\vartheta}, \quad \forall (s, \vartheta) \in \Omega \times S^2 \end{aligned} \quad (4.197)$$

$$L_\nu(s, \vartheta) = g_{ext}(s, \vartheta) + g_{int}(L_\nu, s, \vartheta), \quad \forall (s, \vartheta) \in \Gamma_- \quad (4.198)$$

Avec  $W = \{u \in L^2(\Omega \times S^2) / \forall \vartheta \in S^2, \vartheta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega \times S^2)\}$ ,  $\kappa_\nu, \sigma_\nu \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$  et  $p_\nu \in C^\infty(S^2 \times S^2, \mathbb{R}^+)$ .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T + aT - \nabla \cdot [D\nabla T] = f + aT_0 \quad (4.199)$$

L'équation de transfert radiatif a la même structure que l'équation d'advection-diffusion du paragraphe 4.2.2 :

- le terme de capacité  $\frac{\partial T}{\partial t}$  de l'équation d'advection-diffusion est ici nul mais, dans la formulation générale de l'ETR (4.165), un terme fait intervenir une dérivée temporelle :  $\frac{1}{c} \frac{\partial L_\nu}{\partial t}$ . Pour rappel, les distances en jeu ici sont de l'ordre du mètre, le régime stationnaire pour les transferts radiatifs est donc atteint en une durée négligeable par rapport aux transferts thermiques par conduction. Ce terme est donc négligé dans l'ETR.
- le terme de réaction en  $aT$  pour l'équation d'advection diffusion devient  $\kappa_\nu L_\nu$  pour l'ETR.
- le terme de transport  $\vec{u} \cdot \nabla T$  devient, pour l'ETR  $\vartheta \cdot \nabla L_\nu$ . La « vitesse » d'advection pour l'ETR est donc unitaire.
- le terme source  $aT_0$  provenant des apports de la phase solide dans l'équation d'advection-diffusion devient  $\kappa_\nu L_\nu^0$  pour l'ETR.
- le terme de diffusion  $\nabla \cdot (D\nabla T)$  de l'équation d'advection-diffusion devient :

$$\sigma_\nu \left( -L_\nu + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu L_\nu d\tilde{\vartheta} \right).$$

La principale différence entre ces deux problèmes réside dans leurs dimensions : l'équation d'advection-diffusion est formulée sur l'espace  $\Omega$ , c'est-à-dire en 3D, alors que l'équation de transfert radiatif est formulée sur  $\Omega \times S^2$ , en 5D.

Il faut cependant noter que la discrétisation directionnelle de l'équation de transfert radiatif permet d'obtenir, pour chaque direction du maillage directionnel, une équation sur  $\mathcal{R}^3$ . Le terme de diffusion avec le paramètre  $\sigma_\nu$  devient alors un terme de réaction, et il n'y a plus de diffusion, au sens des équations différentielles, dans l'équation de transfert radiatif discrétisée en direction. Cette absence de diffusion aggrave le risque d'instabilité numérique en l'absence de stabilisation. Comme pour l'équation d'advection-diffusion, il est donc nécessaire, pour éviter des oscillations non physiques, de modifier la formulation de Galerkin. Pour cela, nous utilisons de nouveau la formulation de Petrov-Galerkin, permettant d'introduire de la diffusion numérique.

Les deux discrétisations sont maintenant présentées. Le domaine  $S^2 \times \Omega$  étudié est muni de deux maillages : en direction et en espace. L'équation de transfert radiatif est d'abord discrétisée en direction afin d'obtenir un système d'équations différentielles semi-discret. Ce système est ensuite discrétisé en espace.

## Discrétisation angulaire - Application de la méthode des ordonnées discrètes

**Introduction** La discrétisation directionnelle est effectuée à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes. Cette méthode consiste en une approximation des termes intégraux sur la sphère unitaire à l'aide d'une quadrature angulaire :

$$\int_{S^2} u(\vartheta) d\vartheta \approx \sum_{i=1}^{N_S} w_i u(\vartheta_i) \quad (4.200)$$

Où les  $w_i$  sont les poids associés aux directions  $\vartheta_i$ . Ces poids vérifient :  $\sum_{i=1}^{N_S} w_i = 4\pi$ .

Différentes méthodes de discrétisation angulaire existent dans la littérature, comme la discrétisation angulaire à pas constant, les quadratures angulaires  $S_N$  et  $T_N$  ou une discrétisation basée sur des polyèdres réguliers.

Dans tous les cas, le but est de réécrire les équations (4.197) et (4.198) pour toutes les directions  $\vartheta_k$  du maillage angulaire. On note  $\Theta$  l'ensemble de ces directions.

L'opérateur de diffusion  $\mathcal{S}_{\sigma,\nu}$  se discrétise alors en :

$$\mathcal{S}_{\sigma,\nu} u(s, \vartheta) \approx \sigma_\nu u(s, \vartheta) - \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l p_\nu(\vartheta_l, \vartheta) u(s, \vartheta_l) \quad (4.201)$$

En considérant les directions du maillage directionnel, les équations (4.197) et (4.198) permettent d'obtenir, dans le cas général, un système couplé à  $N_S$  équations :

$$\begin{aligned} \vartheta_k \cdot \nabla L_\nu(s, \vartheta_k) &= -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \vartheta_k) + \kappa_\nu L_\nu^0(T(s)) \\ &+ \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l p_\nu(\vartheta_l, \vartheta_k) L_\nu(s, \vartheta_l), \quad \forall (s, \vartheta_k) \in \Omega \times \Theta \end{aligned} \quad (4.202)$$

$$L_\nu(s, \vartheta_k) = g_{ext}(s, \vartheta_k) + g_{int}(L_\nu, s, \vartheta_k), \quad \forall (s, \vartheta_k) \in \Gamma_- \quad (4.203)$$

En l'absence de diffusion, le couplage entre ces  $N_S$  équations disparaît et elles peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

Pour symétriser le système (4.202) et (4.203), un facteur  $w_k$  est appliqué à chacune des équations, ce qui revient à appliquer la méthode de Galerkin avec des fonctions d'interpolations constantes sur chaque élément :

$$\begin{aligned} w_k \vartheta_k \cdot \nabla L_\nu(s, \vartheta_k) &= -w_k (\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \vartheta_k) + w_k \kappa_\nu L_\nu^0(T(s)) \\ &+ \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l w_k p_\nu(\vartheta_l, \vartheta_k) L_\nu(s, \vartheta_l), \quad \forall (s, \vartheta_k) \in \Omega \times \Theta \end{aligned} \quad (4.204)$$

$$w_k L_\nu(s, \vartheta_k) = w_k g_{ext}(s, \vartheta_k) + w_k g_{int}(L_\nu, s, \vartheta_k), \quad \forall (s, \vartheta_k) \in \Gamma_- \quad (4.205)$$

Les équations (4.204) et (4.205) sont alors valables quelle que soit la position  $s$  choisie. La méthode des ordonnées discrètes est aussi appliquée au terme de réflexion diffuse  $g_{int}$  :

$$g_{int}(L_\nu, s, \vartheta_k) \approx \frac{\rho_\nu}{\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l L_\nu(s, \vartheta_l) \max(\vec{n} \cdot \vartheta_k, 0) \quad (4.206)$$

Les coefficients  $w_k$  peuvent être obtenus par plusieurs méthodes, aussi appelées quadratures.

**Quadrature angulaire à pas constant** Cette discrétisation se base sur des éléments rectangulaires dans la sphère unité. La direction  $\vartheta$  qui s'écrit dans un repère cartésien donné sous la forme  $\vartheta = \mu \vec{e}_x + \eta \vec{e}_y + \zeta \vec{e}_z$ , peut être caractérisée par un angle polaire  $\varphi$  (tel que  $0 < \varphi < \pi$ ) et un angle azimutal  $\theta$  (tel que  $0 < \theta < 2\pi$ ). Les angles de ces coordonnées sphériques sont représentés sur la figure 4.15. Cette décomposition correspond à l'utilisation de longitudes et de latitudes.

On a alors :

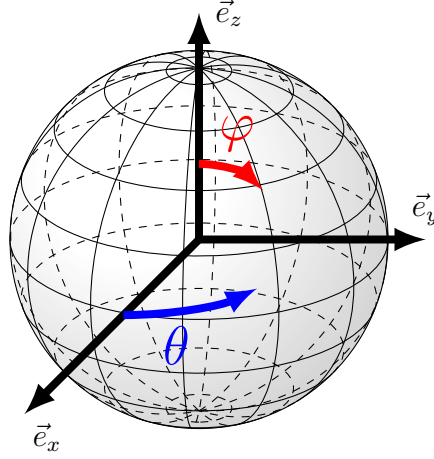


FIGURE 4.15 – Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} \mu = \sin \varphi \cos \theta \\ \eta = \sin \varphi \sin \theta \\ \zeta = \cos \varphi \end{cases} \quad (4.207)$$

On note  $\varphi_m$  le  $m^{\text{ème}}$  noeud du maillage utilisé pour l'angle polaire,  $N_\varphi$  le nombre de ces noeuds,  $\theta_n$  le  $n^{\text{ème}}$  noeud du maillage pour l'angle azimutal et  $N_\theta$  le nombre de ces noeuds. On a alors :

$$\begin{cases} 0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{N_\varphi} = \pi \\ 0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{N_\theta+1} = 2\pi \end{cases} \quad (4.208)$$

**Remarque**

$\theta_1$  et  $\theta_{N_\theta+1}$  représentent le même angle : le  $N_\theta^{\text{ème}}$  élément pour l'angle azimutal est situé entre  $\theta_{N_\theta}$  et  $\theta_1$ .

La sphère unité est découpée en  $N_\varphi \times N_\theta$  éléments. On note :

$$\Delta S_{mn}^2 = \{\vartheta = \mu(\varphi, \theta)\vec{e}_x + \eta(\varphi, \theta)\vec{e}_y + \zeta(\varphi, \theta)\vec{e}_z \mid \varphi_m \leq \varphi < \varphi_{m+1} \text{ et } \theta_n \leq \theta < \theta_{n+1}\} \quad (4.209)$$

La direction  $\vartheta_{mn}$  associée à l'élément  $\Delta S_{mn}^2$  a des angles polaires  $\varphi$  et azimutaux  $\theta$  qui vérifient :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\varphi_m + \varphi_{m+1}}{2} \\ \theta = \frac{\theta_n + \theta_{n+1}}{2} \end{cases} \quad (4.210)$$

La direction  $\vartheta_{mn}$  correspondant à  $\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_{m+1}$  et  $\theta_n \leq \theta \leq \theta_{n+1}$  est représentée sur la figure 4.16.

Le poids  $\omega_{mn}$  associé à la direction  $\vartheta_{mn}$  est la surface de l'élément angulaire  $\Delta S_{mn}^2$  projeté sur la sphère unité.

On a :

$$\begin{aligned} \omega_{mn} &= \int_{\Delta S_{mn}^2} \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} d\theta \int_{\varphi_m}^{\varphi_{m+1}} \sin \varphi d\varphi \\ &= (\theta_{n+1} - \theta_n) (\cos \varphi_m - \cos \varphi_{m+1}) \end{aligned} \quad (4.211)$$

Si cette quadrature est facile à réaliser, elle présente cependant l'inconvénient d'introduire un axe de symétrie dans les directions des pôles, alors que cet axe n'a aucune existence physique. Cela provient du

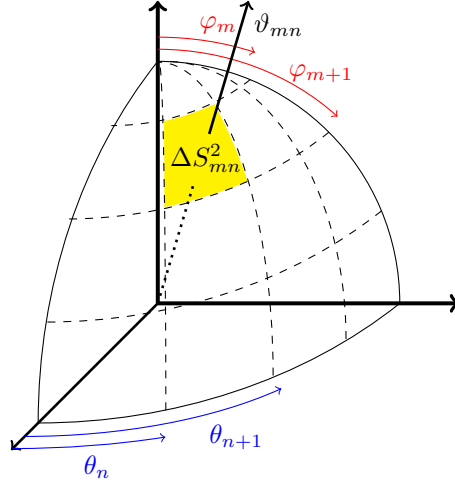
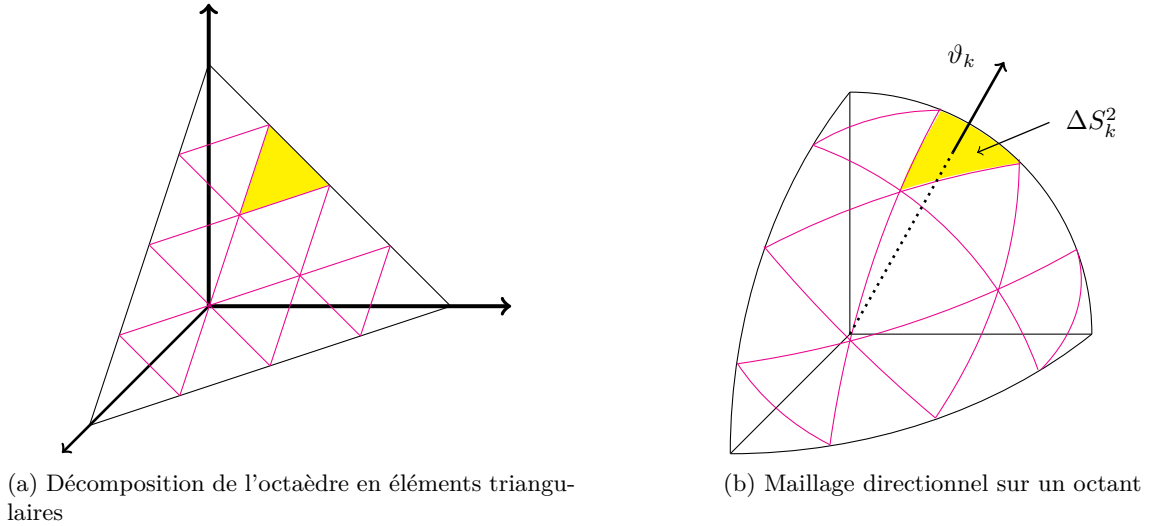


FIGURE 4.16 – Exemple d'élément obtenu avec la discrétisation angulaire à pas constant



(a) Décomposition de l'octaèdre en éléments triangulaires

(b) Maillage directionnel sur un octant

FIGURE 4.17 – Directions avec la quadrature  $T_4$

fait que les éléments directionnels situés près des pôles dégèrent de plus en plus lorsque le raffinement du maillage s'accroît [131]. Il est préférable d'utiliser une quadrature angulaire dont les directions sont réparties de façon régulière sur la sphère unité avec des angles solides associés approximativement de même taille [164].

Pour éviter d'introduire de fausses symétries ou de fausses directions de propagation, il est possible d'utiliser des quadratures telles que les directions forment un groupe fermé par rotation de  $90^\circ$  autour des axes de coordonnées cartésiennes ou par réflexion sur ces axes [232].

**Quadrature  $T_N$**  La quadrature  $T_N$  permet d'établir une discrétisation directionnelle à partir d'un octaèdre régulier inscrit dans la sphère unité et dont les sommets sont placés sur les axes des coordonnées cartésiennes. Les arêtes sont décomposées en  $N$  segments de longueurs égales, permettant l'introduction de  $N - 1$  nœuds sur chaque arête. Sur chaque face de l'octaèdre, les nœuds sont reliés en traçant des lignes parallèles aux arêtes, comme cela est représenté sur la figure 4.17a. Les directions sont alors définies comme passant par le centre de chaque triangle ainsi défini. Le poids associé est l'angle solide issu de la projection du triangle sur la sphère unité, comme cela est représenté sur la figure 4.17b [17].

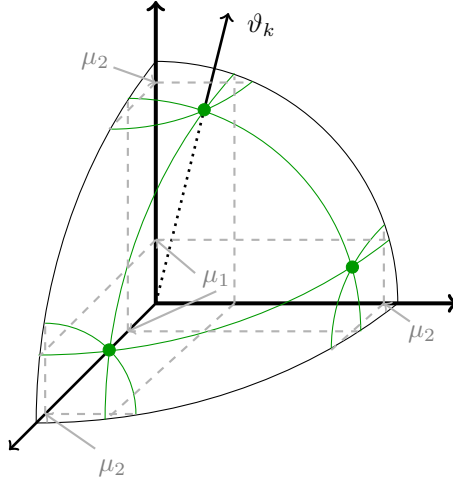


FIGURE 4.18 – Directions avec la quadrature  $S_4$

**Quadrature  $S_N$**  La quadrature  $S_N$  s'appuie sur des niveaux  $\mu_i$  tracés sur un octant,  $i \in [1, N/2]$  avec  $N$  un entier pair. Un niveau est l'intersection entre la sphère unité et un plan situé à une coordonnée cartésienne  $\mu_i$ . Les directions sont alors définies comme les intersections entre les niveaux (cf figure 4.18). L'ensemble des directions se déduit par des rotations de  $90^\circ$  autour des axes.

Chaque direction a alors des coordonnées qui s'écrivent sous la forme [143] :

$$(\mu_i, \mu_j, \mu_{N/2+2-i-j}) \quad (4.212)$$

Avec  $i \in [1, N/2]$  et  $j \in [1, N/2 - i + 1]$ .

Pour que les directions appartiennent à la sphère unité, on a nécessairement [143] :

$$\mu_i^2 = \mu_1^2 + (i - 1)\Delta \quad (4.213)$$

$$\text{Avec } \Delta = 2 \frac{1 - 3\mu_1^2}{N - 2}.$$

Il existe plusieurs types de quadratures  $S_N$  selon la condition qu'on rajoute pour fixer  $\mu_1$ . Il est par exemple possible d'utiliser des quadratures qui vont vérifier une condition en moment du type :

$$\int_0^1 \mu^i d\mu = \sum_{j=1}^{N/2} \omega_j \mu_j^i \quad (4.214)$$

Où  $\omega_j$  est la somme des poids associés aux directions du niveau  $j$ .

Ces conditions en moments peuvent par exemple s'appliquer sur les moments de 0 à  $N/2$  ou sur les moments pairs de 0 à  $N$ . Ces exemples présentent cependant l'inconvénient d'être limités respectivement à  $N = 22$  et  $N = 10$ , des poids négatifs apparaissant au-delà de ces valeurs.

Les valeurs des niveaux  $\mu_i$  et des poids  $w_j$  peuvent être obtenues avec [143] ou [170].

**Quadratures basées sur les solides de Platon** Les solides de Platon sont des polyèdres réguliers. Il est ainsi possible, en se basant sur les centres de leurs faces ou sur leurs sommets d'obtenir une quadrature où tous les éléments ont le même poids et où les directions sont réparties uniformément sur la sphère unité.

Nous présentons ici les quadratures basées sur des octaèdres et des icosaèdres réguliers.

**Icosaèdre** Cette quadrature se base sur un icosaèdre (polyèdre régulier ayant 20 faces faites de triangles équilatéraux). Les directions sont les centres de chaque face projetés sur la sphère unité, et le poids est l'angle solide issu de la projection de la face sur la sphère unité. Chaque direction a donc le même poids.

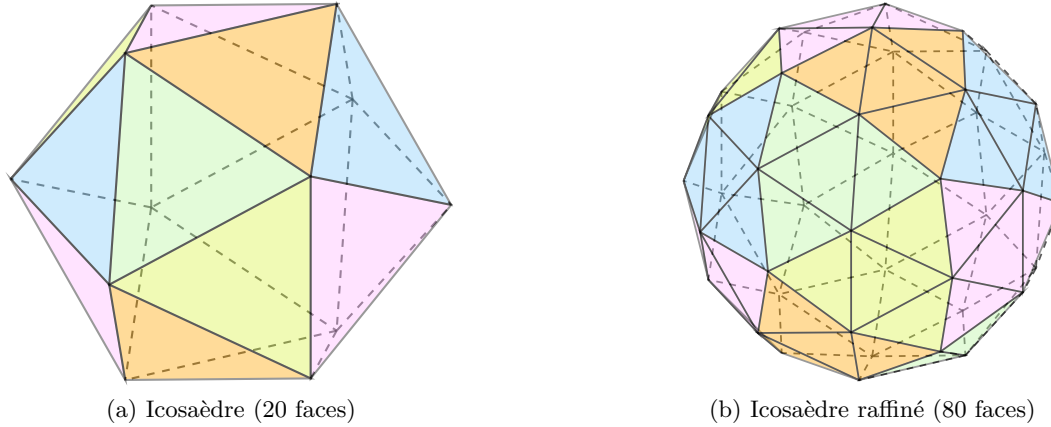


FIGURE 4.19 – Quadrature utilisant des icosaèdres

Cette méthode de quadrature permet d'assurer une répartition régulière des directions sur la sphère unité, de ne pas avoir à utiliser des conditions de symétrie qui seraient alors redondantes, et d'éviter des artefacts au niveau des pôles [200, 131].

Un raffinement peut être apporté à ce maillage en décomposant chacune des faces de l'icosaèdre en quatre triangles équilatéraux, cela étant obtenu en joignant les milieux de chaque côté du triangle initial. Il est alors possible d'avoir 20 (icosaèdre initial, figure 4.19a), 80 directions (figure 4.19b) ou davantage.

Les coordonnées des nœuds  $N_i$  de l'icosaèdre s'écrivent sous la forme :

$$N_i = \left\{ \begin{array}{l} \left( \pm \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}, 0 \right) \\ \left( \pm \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}, 0, \pm \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \right) \\ \left( 0, \pm \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \right) \end{array} \right. \quad (4.215)$$

Avec  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or.

Les directions sont obtenue en déterminant les centres de chacun des éléments.

Une autre possibilité est de s'appuyer uniquement sur les 12 sommets de l'icosaèdre. Les directions normalisées correspondant à ces sommets sont alors les directions associées aux éléments du polyèdre dual de l'icosaèdre : le dodécaèdre (polyèdre à 12 faces).

**Octaèdre** Comme l'icosaèdre, l'octaèdre est constitué de faces triangulaires. Le solide initial est constitué de 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes.

Les coordonnées des nœuds  $N_i$  de l'octaèdre s'écrivent sous la forme :

$$N_i = \left\{ \begin{array}{l} (\pm 1, 0, 0) \\ (0, \pm 1, 0) \\ (0, 0, \pm 1) \end{array} \right. \quad (4.216)$$

### Discrétisation spatiale - Application de la méthode des éléments finis

L'objectif de cette partie est de discrétiser les équations (4.204) et (4.205) en espace. Pour cela, nous utilisons la méthode des éléments finis avec la méthode de Petrov-Galerkin.

**Formulation faible** Nous reprenons dans cette partie les notations introduites dans le paragraphe 4.2.2.

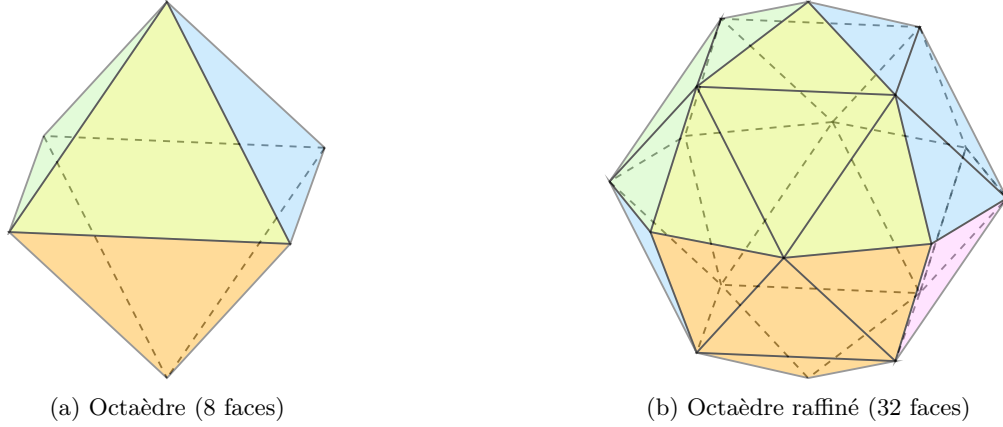


FIGURE 4.20 – Quadrature utilisant des Octaèdres

Le système semi-discret (4.204) peut s'écrire sous la forme faible, pour toute fonction  $\varphi \in W_\Omega$  et tout  $k \in \llbracket 1, N_S \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle w_k \vartheta_k \cdot \nabla L_\nu(\cdot, \vartheta_k) | \varphi \rangle_{W_\Omega} &= -\langle w_k (\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(\cdot, \vartheta_k) + w_k \kappa_\nu L_\nu^0(T) | \varphi \rangle_{W_\Omega} \\ &\quad + \langle \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l w_k p_\nu(\vartheta_l, \vartheta_k) L_\nu(\cdot, \vartheta_l) | \varphi \rangle_{W_\Omega} \end{aligned} \quad (4.217)$$

Soit  $(\varphi^i)$  une base du sous espace de  $W_\Omega$  constitué des fonctions polynomiales par éléments, et  $N_\Omega$  la dimension de ce sous-espace. La luminance pour chaque direction  $\vartheta_k$  peut s'écrire sous la forme  $L_\nu(\cdot, \vartheta_k) = \sum_{j=1}^{N_\Omega} \varphi^j L_{\nu,k}^j$ . Nous notons de plus  $L_{\nu,k}^j = L_\nu(s_j, \vartheta_k)$ . L'application de la méthode de Petrov-Galerkin permet d'obtenir le système suivant, pour tout  $i \in \llbracket 1, N_\Omega \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N_\Omega} \langle w_k \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^j L_{\nu,k}^j | \varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^j \rangle_{W_\Omega} \\ &= -\sum_{j=1}^{N_\Omega} \langle w_k (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \varphi^j L_{\nu,k}^j + w_k \kappa_\nu L_\nu^0(T^j) | \varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{W_\Omega} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \langle \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \sum_{l=1}^{N_S} w_l w_k p_\nu(\vartheta_l, \vartheta_k) L_{\nu,l}^j | \varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{W_\Omega} \end{aligned} \quad (4.218)$$

Le système (4.218) conduit à un système matriciel pouvant s'écrire sous la forme (voir annexe B.1) :

$$(T_h + M_h(\kappa_\nu) + S_h(\sigma_\nu) - R_h(\rho_\nu)) L_\nu = M_h(\kappa_\nu) B_\nu + Q_h G \quad (4.219)$$

Où :

- $T_h L_\nu$  représente le transport d'énergie radiative.
- $M_h(\kappa_\nu) L_\nu$  représente les pertes par absorption.
- $S_h(\sigma_\nu) L_\nu$  représente les pertes par diffusion ((pertes de la direction  $\vartheta_k$  vers les autres directions)-(gains provenant des autres directions)).
- $R_h(\rho_\nu) L_\nu$  représente le rayonnement provenant de l'intérieur du domaine et réfléchi par les bords.
- $M_h(\kappa_\nu) B_\nu$  représente les gains par émission.
- $Q_h G$  représente les gains radiatifs provenant de l'extérieur du domaine (rayonnement solaire, apports du ciel)

Le vecteur des inconnues  $L_\nu$  s'écrit sous la forme :

$$L_\nu = \left[ L_{\nu,k=1}^{j=1} \quad L_{\nu,1}^2 \quad \cdots \quad L_{\nu,1}^{N_\Omega} \quad L_{\nu,2}^1 \quad \cdots \quad L_{\nu,N_S}^{N_\Omega} \right]^T \quad (4.220)$$

**Choix du paramètre  $\delta$**  Le choix du paramètre de diffusion  $\delta$  a déjà été discuté dans le cas de l'équation d'advection diffusion dans le paragraphe 4.2.2. Nous présentons dans ce paragraphe quelques expressions définies de façon spécifique pour les transferts radiatifs.

Les expressions du paragraphe 4.2.2 font intervenir le coefficient  $\frac{h}{2\|\vec{u}\|}$ , où  $\vec{u}$  est la vitesse de l'écoulement. Ici, avec  $\|\vartheta\| = 1$ , nous pouvons prévoir que  $\delta = \mathcal{O}(h)$ .

Afin d'étudier plus en détail les effets de l'introduction de cette méthode sur les résultats numériques, nous introduisons quelques notations :

- $W_k$  le sous-espace de  $W_\Omega$  constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$
- $H^m$  l'espace de Sobolev d'ordre  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , muni de la norme usuelle  $\|\cdot\|_{H^m}$
- $L_{\nu,\vartheta}^h$  la solution numérique à l'équation de transfert radiatif, pour la direction  $\vartheta$ ,  $L_{\nu,\vartheta}^h \in W_k$
- $|u| = \left( \int_{\partial\Omega} u^2 |\vec{n} \cdot \vartheta| d\sigma \right)^{1/2}$

Pour le cas spécifique de l'équation de transfert radiatif, lorsque la diffusion est faible devant la taille des éléments du maillage, quelques expressions plus adaptées peuvent être trouvées dans la littérature pour  $\delta$ .

[130] montre que la forme bilinéaire  $\langle \mathcal{A}_{\sigma,\nu} L_\nu | \varphi + \delta \cdot \nabla \varphi \rangle_{W_\Omega} + \langle \mathcal{B}_\nu L_\nu | \varphi \rangle_{W_{0,\vartheta}}$  est bornée et coercitive vis-à-vis de la norme  $\|\cdot\|_W$  si :

$$\delta \leq \min \left( \frac{1}{\kappa_\nu}, \frac{1}{\sigma_\nu} \right) \quad (4.221)$$

Avec  $\|\cdot\|_W$  la norme définie par :

$$\|u\|_W = \sqrt{\|\sqrt{\delta}\vartheta \cdot \nabla u\|^2 + |u|^2 + \|\sqrt{\kappa}u\|^2 + \|\sqrt{\sigma}\Pi u\|^2} \quad (4.222)$$

$\Pi$  est la projection orthogonale sur le complémentaire du noyau de  $\mathcal{S}_{\sigma,\nu}$ .

Certains auteurs utilisant la *streamline diffusion* donnent quelques indications sur les choix possibles du paramètre  $\delta$ . Dans le cas général des équations de convection-diffusion  $-\nabla \cdot [\epsilon \nabla u] + \vartheta \cdot \nabla u + \sigma u = f$ , [263] propose d'utiliser  $\delta = \mathcal{O}(h)$  lorsque le coefficient de diffusion  $\epsilon$  vérifie  $\epsilon \ll h$ . Toujours dans le cas de l'équation de convection-diffusion, Johnson [126, 128] propose d'utiliser  $\delta = h - \epsilon$ .

Des expressions plus adaptées au cas de l'équation de transfert radiatif étudiée dans cette partie peuvent être trouvées dans la littérature pour quantifier le paramètre  $\delta$ .

Le paramètre  $\delta$  peut être pris de façon proportionnelle à la taille du maillage. Becker [18] propose l'approximation :

$$\delta \sim h_K \min \left( \frac{1}{\kappa_\nu}, \frac{1}{\sigma_\nu} \right) \quad (4.223)$$

Avec  $h_K$  le diamètre de l'élément  $K$ .

Long [156] propose l'expression suivante pour la valeur de  $\delta$  sur un élément  $K$  du maillage :

$$\delta_K = \frac{Ch_K}{1 + h_k(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \quad (4.224)$$

Avec  $C$  une constante comprise entre 0.3 et 0.6. Dans le cadre de cet article, portant sur des applications biomédicales de la tomographie optique, pour des dimensions de l'ordre du mm ou du cm, et des coefficients  $\kappa_\nu = 0.02 \text{ mm}^{-1}$  et  $\sigma = 5 \text{ mm}^{-1}$ , l'auteur précise que la valeur de la constante  $C$  n'influe pas sur les résultats obtenus pour des maillages suffisamment fins. Cette expression vérifie de plus l'inégalité (4.221).

Tarvainen [226] propose de prendre en compte l'éloignement à la source  $r$  avec l'expression suivante :

$$\delta_K = \min \left( \frac{1}{2(\sigma_\nu + \kappa_\nu)}, \frac{5}{r(\sigma_\nu + \kappa_\nu)} \right) \quad (4.225)$$

Kanschat [131] propose aussi d'utiliser :

$$\delta_K \approx \begin{cases} 0.3h_K & \text{pour } \kappa_\nu + \sigma_\nu < 1 \\ 0 & \text{pour } \kappa_\nu + \sigma_\nu \gg 1 \end{cases} \quad (4.226)$$



L'utilisation de cette expression permet de vérifier la condition (4.221) dès lors que les mailles sont suffisamment petites. Cette expression est également utilisée par [146].

Le même auteur suggère aussi l'expression suivante [130] :

$$\delta_K = Ch_K \frac{h_K}{h_K + \kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (4.227)$$

La remarque peut cependant être faite que  $h_K$  a la dimension d'une longueur et  $\kappa_\nu$  et  $\sigma_\nu$  ont les dimensions d'inverses de longueurs. La formulation (4.227), si elle vérifie bien la relation (4.221) pour  $h_K$  suffisamment petit, n'est donc pas correcte du point de vue dimensionnel.

Ces expressions semblent être obtenues de façon empirique, sans que les études ayant mené à ces formulations ne soient mentionnées. La seule contrainte existant sur  $\delta$  est le respect de la condition (4.221).

Le lien peut être fait avec la formulation initiale de la méthode de Petrov-Galerkin, pour des phénomènes de transport avec peu de diffusion, comme cela a déjà été étudié dans le paragraphe 4.2.2. [204] se base ainsi sur des expressions données par [39] en 1982 lorsqu'il présente la méthode de Petrov-Galerkin pour des écoulements de fluide.

En 2D, [204] propose d'utiliser  $\delta = \frac{\xi u_\xi h_\xi + \eta u_\eta h_\eta}{2}$  avec :

$$\xi = \coth(\alpha_\xi) - \frac{1}{\alpha_\xi}, \quad \eta = \coth(\alpha_\eta) - \frac{1}{\alpha_\eta} \quad (4.228)$$

$$\alpha_\xi = \frac{u_\xi h_{xi}}{2D}, \quad \alpha_\eta = \frac{u_\eta h_\eta}{2D} \quad (4.229)$$

Où  $D$  représente un terme de diffusivité.

## 4.4 Mise en place sur un cas test

Nous présentons dans cette partie un cas test de la littérature afin de valider notre approche basée sur les éléments finis pour la résolution du problème des transferts radiatifs.

Nous considérons ici le rayonnement entre deux plaques planes parallèles dont les températures sont supposées connues et constantes. Le problème est alors résolu en régime permanent. Il s'agit du cas dont la solution analytique en luminance a été présentée dans le paragraphe 4.3.3. La connaissance de la luminance peut alors permettre de connaître le champ de température à l'intérieur du milieu semi-transparent, en l'absence de diffusion thermique. En effet, à l'équilibre, les pertes et gains radiatifs s'équilibrent et le terme source radiatif devient nul.

La résolution de l'équation de transfert radiatif avec la méthode des éléments finis en itérant la température  $T$  par  $T \leftarrow T + \delta S_{rad}$  permet d'aboutir, pour un coefficient  $\delta$  bien choisi, à une solution numérique au problème.

La température de la plaque 1 est égale à  $T_1 = 500$  K. Celle de la plaque 2 vaut  $T_2 = 300$  K. La longueur  $D$  est telle que l'épaisseur optique  $\tau_D = 1$ .

Le maillage utilisé est constitué de tétraèdres dont l'assemblage permet d'obtenir un maillage structuré tel que représenté sur la figure 4.21. Pour tenir compte du fait que les plaques soient infinies, des conditions limites particulières sont utilisées sur les faces latérales : La valeur de la luminance en un nœud sur ces faces est égale à la valeur au nœud correspondant de la face opposée.

Les résultats obtenus sont présentés sur la table 4.3 et représentés sur les figures 4.22a et 4.22b. Les valeurs des quatre études de la littératures étant très proches, une moyenne a été considérée pour la représentation graphique.

Les résultats obtenus avec l'application de la méthode des éléments finis sont très proches de ceux obtenus à partir de méthodes basées sur l'utilisation d'une solution analytique exacte. Une différence significative apparaît néanmoins aux extrémités du domaine, en  $\tau = 0$  et en  $\tau = 1$ , mais avec une erreur relative inférieure à 1 %.

Il n'y a ici pas de problèmes d'instabilités numériques dues à la nature hyperbolique de l'équation de transfert radiatif. En effet, pour que de telles instabilités numériques apparaissent, il faudrait que des discontinuités spatiales de la luminance interviennent. Or, en considérant deux plaques infinies, les problèmes de discontinuités spatiales pour une direction donnée ne se posent pas.

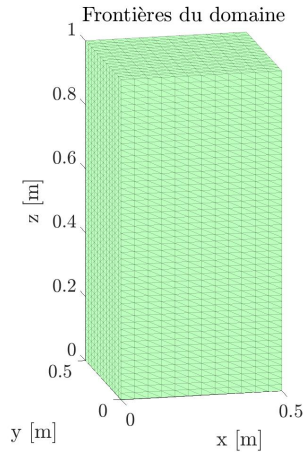


FIGURE 4.21 – Température de givrage en fonction de la température de rosée

TABLE 4.3 – Position des résultats en température pour le cas test avec la méthode des éléments finis

$\tau$	cette étude	[98]	[208]	[206]	d'après [208]	[107]
0	469.69	471.03	471.29		471.21	471.31
0.1	462.58	463.29	462.79		462.82	462.83
0.2	455.54	456.01	455.54		455.56	455.57
0.3	448.41	447.76	448.38		448.39	448.39
0.4	441.09	441.73	441.05		441.06	441.07
0.5	433.45	433.75	433.43		433.45	433.45
0.6	425.40	424.67	425.39		425.41	425.42
0.7	416.77	417.57	416.76		416.78	416.79
0.8	407.37	406.70	407.30		407.32	407.33
0.9	396.89	395.75	396.50		396.49	396.50
1.0	385.13	382.36	381.80		382.04	382.83

#### 4.4.1 Synthèse

Cette partie a permis d'introduire les transferts radiatifs. Après une description de ce phénomène, une mise en équation a été effectuée en s'appuyant sur la notion de luminance énergétique.

Une description des méthodes utilisées pour résoudre ce problème a été présentée avec une focalisation sur la méthode des éléments finis. Celle-ci, utilisée pour la discrétisation en espace, a été associée à la méthode des ordonnées discrètes pour la discrétisation directionnelle. Comme pour les transferts radiatifs, la stabilisation de Petrov-Galerkin a été mise en œuvre et un système discrétisé à la fois en direction et en espace a été obtenu.

La résolution d'un cas test de façon numérique suite à l'implémentation de la méthode des éléments finis a finalement permis de valider cette approche.

## 4.5 Choix de la méthode de discrétisation spatiale

Les études bibliographiques menées pour chacun des trois phénomènes physiques mettent en évidence la possibilité d'utiliser deux méthodes pour la discrétisation spatiale : les éléments finis et les volumes finis. Ces méthodes permettent notamment d'utiliser un maillage quelconque et donc de considérer le même maillage pour les trois problèmes. Il n'est alors pas nécessaire de réaliser des interpolations entre des grandeurs définies pour l'un ou l'autre de ces phénomènes.

L'approximation d'une fonction par décomposition sur une base a été introduite par Ritz en 1908 [201] et Galerkin en 1915 [85] puis la méthode des éléments finis actuelle a été présentée en 1955 par

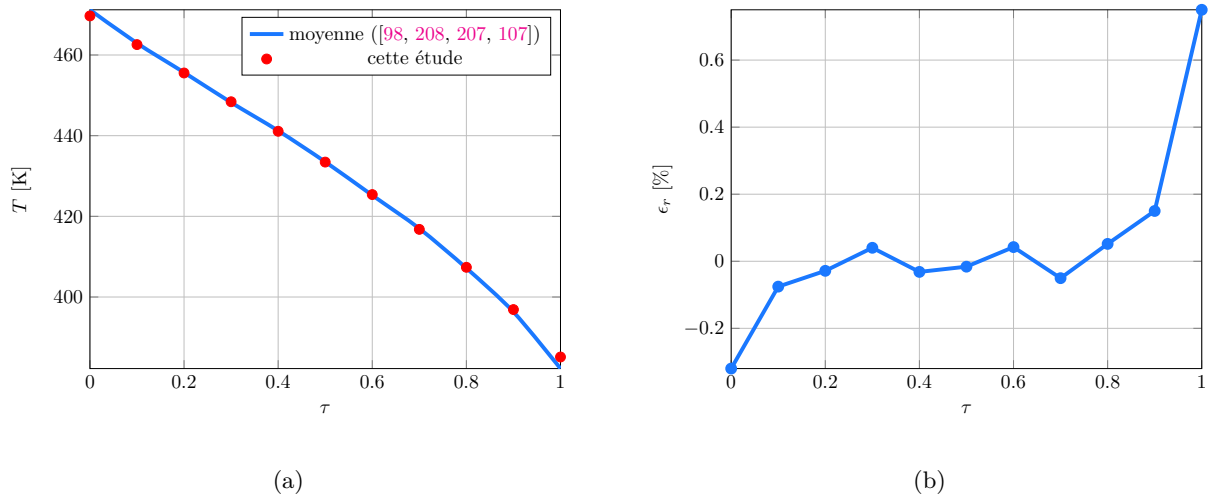


FIGURE 4.22 – Comparaison entre les températures obtenues avec la méthode des éléments finis et la moyenne de quatre études (gauche) et erreur relative (droite)

Argyris [7].

Les éléments finis sont largement documentés pour l'utilisation en diffusion thermique et pour les problèmes elliptiques et paraboliques [90, 225, 264] mais nécessitent une stabilisation pour les problèmes hyperboliques comme cela a été montré pour la convection hydraulique et les transferts radiatifs.

Les volumes finis proviennent du besoin de méthodes numériques plus adaptées à la résolution des équations de mécanique des fluides. Cette méthode a été introduite en 1971 par McDonald [161] puis développée à partir des années 1980, d'où des développements théoriques plus récents et moins nombreux. Comme la méthode des éléments finis, elle permet l'utilisation d'un maillage quelconque mais présente en plus l'avantage d'être moins coûteuse en ressources de calculs.

Cependant, la méthode des volumes finis est surtout utilisée pour des équations hyperboliques et il existe assez peu de développements de cette méthode pour des équations paraboliques comme l'équation de la chaleur. Dans le cadre de cette thèse, la diffusion thermique intervient dans tous les problèmes et notamment pour l'étude des matériaux à changement de phase. Le choix a donc été fait de privilégier la méthode des éléments finis malgré le besoin de ressources supplémentaires dû à l'utilisation de la diffusion numérique.

## Chapitre 5

# Modélisation multiphysique des routes solaires hybride (RoSHy)

Au cours du précédent chapitre, chacun des trois phénomènes physiques intervenant à l'intérieur de la structure - diffusion thermique, convection hydraulique et transferts radiatifs - a été décrit indépendamment des autres, comme cela avait déjà été le cas au cours du chapitre 3 pour chacune des conditions environnementales susceptibles d'affecter la structure sur un plan thermique.

Connaissant l'évolution des conditions environnementales, et en particulier la température de l'air, le rayonnement atmosphérique ainsi que le rayonnement solaire en fonction du temps, l'évolution des échanges énergétiques entre le système et son environnement peut être connue (cf chapitre 3). La connaissance du comportement énergétique du système au travers de la diffusion thermique, de la convection hydraulique et des transferts radiatifs permet alors de déterminer des grandeurs physiques comme la température ou la luminance énergétique (cf chapitre 4).

L'objectif est maintenant d'associer tous ces phénomènes physiques et en particulier de coupler les modélisations présentées au cours du chapitre 4 afin d'établir les performances énergétiques de la structure. Pour cela, une connaissance de la température à l'intérieur de la structure, et notamment de son évolution, est nécessaire.

Un couplage est ainsi mis en place afin de connaître l'évolution de la température à l'intérieur de la structure en prenant en compte simultanément les phénomènes qui s'y produisent. La connaissance de la température et de son évolution permettra, au chapitre suivant, le calcul des performances énergétiques de la route solaire hybride.

Nous décrivons donc d'abord les schémas spatiaux et temporels de résolution des équations au dérivées partielles avant de présenter le couplage numérique entre les trois phénomènes, qui repose sur un couplage fort entre diffusion thermique et convection hydraulique et sur un couplage faible entre diffusion thermique et transferts radiatifs : l'énergie absorbée par le milieu semi-transparent est traduite dans la diffusion thermique à l'aide d'un terme source.

### 5.1 Résolution spatiale

La discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis de chacun des phénomènes physiques effectuée dans le chapitre 4 a permis d'obtenir des systèmes s'écrivant sous la forme  $[C]\dot{X} + [K]X = F$ . Les matrices  $[C]$  et  $[K]$  ainsi que le vecteur source  $F$  sont obtenus à partir de fonctions d'interpolation linéaires, ce qui permet notamment de simplifier l'obtention de la matrice  $[K]$  et en particulier du terme de diffusion dans le cas du rajout de diffusion numérique avec la méthode de Petrov-Galerkin.

Les expressions de ces matrices pour le cas de fonctions d'interpolations linéaires sont données dans les annexes B.2 et B.1.

Une précision à l'ordre 1 est ainsi obtenue pour la résolution spatiale.

## 5.2 Schéma de résolution temporel

Comme pour la dépendance spatiale ou directionnelle traitée dans le précédent chapitre, nous introduisons dans cette partie une discrétisation temporelle. Le domaine temporel est compris ici entre  $t = 0$  et  $t = t_a$  l'horizon temporel. Les nœuds de ce maillage sont notés  $(t_n)$ ,  $n \in [0, N]$  avec  $t_0 = 0$  et  $t_N = t_a$ . Nous notons aussi  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  le pas de temps. Lorsque celui-ci est constant, il est noté  $\Delta t$  et on a alors  $t_n = n\Delta t$ .

Nous travaillons ici sur un système d'équations semi-discrétisé s'écrivant sous la forme :

$$[C] \dot{T} + [K] T = F \quad (5.1)$$

L'objectif est, connaissant  $T^n$  la solution en  $t = t_n$ , de déterminer la température  $T^{n+1}$  au pas de temps suivant. Pour cela, il est nécessaire de discrétiser l'équation (5.1) en temps.

Pour cela, comme pour les discrétisations en espace réalisées précédemment, la formulation faible du système (5.1) peut être établie, pour toute fonction  $w \in H^1([0, t_a])$  :

$$\int_{t=0}^{t_a} ([C] \dot{T} + [K] T - F) w dt = 0 \quad (5.2)$$

En particulier, sur l'élément  $[t_n, t_{n+1}]$ , on a :

$$\int_{t=t_n}^{t_{n+1}} ([C] \dot{T} + [K] T - F) w dt = 0 \quad (5.3)$$

### 5.2.1 $\theta$ -schéma

En première approximation, on peut considérer que  $T$  peut être interpolée au premier ordre entre  $t = t_n$  et  $t = t_{n+1}$  :

$$T(t) = T^n + \frac{t - t_n}{\Delta t} (T^{n+1} - T^n) \quad (5.4)$$

Cela revient à considérer une dérivée temporelle de la température constante sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$\dot{T} = \frac{1}{\Delta t} (T^{n+1} - T^n) \quad (5.5)$$

On considère une base de fonctions linéaires  $\varphi$  sur chaque élément de  $[0, t_a]$  dans  $H^1([0, t_a])$ . Sur l'élément  $[t_n, t_{n+1}]$ , les fonctions de base s'écrivent alors  $\varphi^1 = \frac{t-t_n}{\Delta t}$  et  $\varphi^2 = 1 - \varphi^1$ . On a donc, sur cet élément temporel :

$$T = \varphi^1 T^{n+1} + \varphi^2 T^n \quad (5.6)$$

En injectant (5.6) dans (5.3) et en développant, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt (T^{n+1} - T^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1 w dt (K T^{n+1} - F^{n+1}) + \left(1 - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1 w dt\right) (K T^n - F^n) = 0 \quad (5.7)$$

En notant  $\theta = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1 w dt}{\int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt}$ , et en considérant une fonction  $w$  de norme usuelle non nulle sur  $[t_n, t_{n+1}]$ ,

on obtient le schéma de résolution pour le  $\theta$ -schéma :

$$(C + \theta \Delta t K) T^{n+1} = (C - (1 - \theta) \Delta t K) T^n + \Delta t (\theta F^{n+1} + (1 - \theta) F^n) \quad (5.8)$$

Le coefficient  $\theta$  dépend alors de la fonction test choisie  $w$ .

En considérant les relations donnant  $T$  et  $\dot{T}$  ((5.4) et (5.5)) à un instant  $t_n + \alpha \Delta t$  ( $\theta \in [0, 1]$ ) et en les réinjectant dans la formulation forte (5.1) du problème, le même schéma de résolution temporelle est obtenu, avec  $\theta = \alpha$ . Le problème est alors équivalent au choix d'une fonction test  $w = \delta(t + \alpha \Delta t)$ , avec  $\delta$  l'impulsion de Dirac, et le calcul de  $\theta$  donne  $\theta = \alpha$ .

La méthode des éléments finis temporels peut aussi être appliquée. Dans ce cas, l'assemblage des matrices conduit à la résolution d'un système matriciel de la forme  $[\mathcal{A}] [T] = [\mathcal{F}]$ . Cependant, la précision, pour une interpolation linéaire n'est que d'ordre 1 alors que la taille du système matriciel à inverser est  $N$  fois plus élevée que pour les méthodes itératives.

Une interpolation bilinéaire peut aussi être mise en place pour obtenir une précision d'ordre 2 avec, dans ce cas, une base de fonctions sur l'élément considéré constituée de  $(\varphi^1, 1 - \varphi^1, \varphi^1(1 - \varphi^1))$ . Dans ce cas, on a :

$$T = \varphi^1 T^{n+1} + (1 - \varphi^1) T^n + \varphi^1(1 - \varphi^1) \tilde{T}^{n+1} \quad (5.9)$$

Avec  $\tilde{T}$  une variable interne. La relation (5.7) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt (T^{n+1} - T^n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1 w dt (KT^{n+1} - F^{n+1}) + \left(1 - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1 w dt\right) (KT^n - F^n) \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt}(\varphi^1(1 - \varphi^1)) w dt M \tilde{T}^{n+1} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^1(1 - \varphi^1) w dt K \tilde{T}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

En développant l'équation (5.10) et en notant  $\tilde{\theta} = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\varphi^1)^2 w dt}{\int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt}$ , on a :

$$(C + \theta \Delta t K) T^{n+1} + (1 - 2\theta)(C \tilde{T}^{n+1}) + (\theta - \tilde{\theta})(K \tilde{T}^{n+1}) = (C - (1 - \theta) \Delta t K) T^n + \Delta t (\theta F^{n+1} + (1 - \theta) F^n) \quad (5.11)$$

Le choix d'une fonction  $w$  telle que  $\tilde{\theta} = \theta = 0.5$  permet d'annuler le terme  $(1 - 2\theta)(C \tilde{T}^{n+1}) + (\theta - \tilde{\theta})(K \tilde{T}^{n+1})$  rajouté par rapport au cas d'une interpolation linéaire. On retrouve alors le même système itératif que pour le  $\theta$ -schéma mais avec une précision d'ordre 2 : il s'agit de la méthode de Crank-Nicolson, inconditionnellement stable.

Deux autres valeurs de  $\theta$  sont privilégiées dans la littérature :

- $\theta = 0$  : il s'agit du schéma d'Euler explicite. La température à  $t = t_{n+1}$  dépend explicitement de la température à  $t = t_n$ . Ce schéma est stable sous conditions.
- $\theta = 1$  : schéma d'Euler implicite. Il est inconditionnellement stable.

Le  $\theta$ -schéma peut s'écrire sous la forme  $T^{n+1} = AT^n + F$  avec  $A = (C + \theta \Delta t K)^{-1}(C - (1 - \theta) \Delta t K)$  Pour être stable, il faut que les valeurs propres de la matrice  $A$  soient toutes de valeur absolue inférieure ou égale à 1. En écrivant  $A$  sous forme scalaire, on a alors la condition :

$$\left| \frac{\tilde{c} - (1 - \theta) \Delta t \tilde{k}}{\tilde{c} + \theta \Delta t \tilde{k}} \right| \leq 1 \quad (5.12)$$

Cette condition est nécessairement vérifiée si  $\theta \geq 0.5$ . Le schéma numérique est alors inconditionnellement stable. Dans le cas  $\theta < 0.5$ , une condition supplémentaire doit être respectée :  $\alpha \Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\theta}$  avec  $\alpha = \frac{\tilde{k}}{\tilde{c}}$  la diffusivité.

Ainsi, dans le cas d'un élément linéique de longueur  $h$ , on a  $\tilde{c} = \int_0^h c(x/h)^2 dx = \frac{1}{3} ch$  et  $\tilde{k} = \int_0^h k/h^2 dx = \frac{k}{h}$  soit  $\alpha = \frac{\tilde{k}}{\tilde{c}} = \frac{3k}{ch^2}$  et le pas de temps doit vérifier :

$$\Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\theta} \frac{ch^2}{3k} \quad (5.13)$$

## 5.2.2 Méthode de Runge-Kutta

Cette méthode propose d'utiliser une formulation intégrale pour établir la solution au pas de temps  $n + 1$  connaissant la solution au  $n^{\text{ème}}$  pas. Pour cela, nous considérons ici le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \text{ connu} \end{cases} \quad (5.14)$$

La solution exacte en  $t = t_{n+1}$  peut s'écrire sous forme intégrale :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \quad (5.15)$$

L'intégrale peut être approximée à l'aide d'une somme :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx \sum_{i=1}^q b_i f(t_n + c_i \Delta t, x(t_n + c_i \Delta t)) \quad (5.16)$$

Où les  $b_i$  vérifient  $\sum_{i=1}^q b_i = 1$  et  $c_i \in [0, 1]$  pour tout  $i$ . Les  $x(t_n + c_i \Delta t)$  étant inconnus, ils sont calculés de la façon suivante :

$$x(t_n + c_i \Delta t) = x(t_n) + \int_{t=t_n}^{t_n + c_i \Delta t} f(t, x(t)) dt \quad (5.17)$$

En utilisant de nouveau une somme, le terme intégral se réécrit :

$$\int_{t=t_n}^{t_n + c_i \Delta t} f(t, x(t)) dt \approx \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t, x(t_n + c_j \Delta t)) \quad (5.18)$$

Avec  $\sum_j a_{ij} = c_i$

Le terme  $f(t_n + c_j \Delta t, x(t_n + c_j \Delta t))$  est ainsi supposé connu, pour tout  $j < i$ . La méthode de Runge-Kutta est donc une méthode itérative : la première itération, pour  $c_1 = 0$ , consiste à initialiser l'algorithme en partant de la connaissance de  $x(t_n)$ . À la deuxième itération, connaissant  $x(t_n + c_1 \Delta t)$  et  $a_{21}$ ,  $x(t_n + c_2 \Delta t)$  peut être estimé à partir des relations (5.17) et (5.18). De même, à la  $i^{\text{ème}}$  itération,  $i \leq q$ , connaissant les  $x(t_n + c_j \Delta t)$ ,  $j < i$  et les  $a_{ij}$ , ces deux relations permettent d'obtenir  $x(t_n + c_i \Delta t)$ .

Finalement, connaissant tous les  $x(t_n + c_i \Delta t)$ ,  $i \in [1, q]$ , l'utilisation de (5.15) et (5.16) permet d'obtenir  $x(t_{n+1})$ . Ce schéma nécessite plus de calculs que le  $\theta$ -schéma mais la précision peut être accrue tout en conservant un schéma explicite. Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, les coefficients sont les suivants

$$c = [0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1] \quad (5.19)$$

$$b = [1/6 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/6] \quad (5.20)$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Cela signifie que l'intégrale est approchée par la quadrature de Simpson :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{1}{6} \left( f(t_n, x(t_n)) + 4f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\delta t}{2}\right)\right) + f(t_n + \Delta t, x(t_n + \Delta t)) \right) \quad (5.22)$$

Afin de réduire l'erreur sur l'estimation du terme  $f\left(t_n + \frac{\delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\delta t}{2}\right)\right)$ , celui-ci est estimé d'une part par la méthode d'Euler explicite et d'autre part par la méthode d'Euler implicite. Les erreurs de ces deux méthodes étant de signes opposés et proches, l'erreur en est réduite :

$$4f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) = 2f_e\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) + 2f_i\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \quad (5.23)$$

$$f_e\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x(t_n) + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x(t_n))\right) \quad (5.24)$$

$$f_i\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x(t_n) + \frac{\Delta t}{2} f_e\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)\right) \quad (5.25)$$

Cette méthode étant explicite, le choix du pas de temps est conditionné à la taille du maillage  $h$  dans le cas où  $f$  n'est pas contractante [67]. Si ce n'est pas le cas, la condition de CFL à imposer s'écrit sous la forme :

$$\Delta t = Ch^{2p}2^p - 1 \quad (5.26)$$

Où  $C$  est une constante indépendante du maillage dépendant de la fonction  $f$  et  $p$  est l'ordre du schéma. Il est à noter que pour le schéma d'Euler explicite, qui correspond à un schéma de Runge-Kutta d'ordre 1, on a, d'après le paragraphe 5.2.1,  $C = \frac{2c}{3k}$  dans le cas 1D. Pour les cas 2D et 3D, une expression plus générale est donnée par [119].

### 5.2.3 Utilisation des polynômes de Lagrange

Au lieu de considérer des dérivées, il est possible, pour déterminer  $T^{n+1}$ , d'utiliser plusieurs valeurs de  $T$  calculées précédemment :  $T^n, T^{n-1}, \dots$  sans faire apparaître explicitement les dérivées.

Au lieu de considérer une base des fonctions polynomiales de degré 1 de  $H^1([t_n, t_{n+1}])$ , une base des fonctions polynomiales de degré  $p$  de  $H^1([t_{n-p+1}, t_{n+1}])$  peut être utilisée. En particulier, cette base peut s'appuyer sur les polynômes de Lagrange  $\ell_j, j \in [-p+1, 1]$  :

$$T(t) = \sum_{j=1-p}^1 \ell_j(t) T^{n+j}, \quad \forall t \in [t_{n-p+1}, t_{n+1}] \quad (5.27)$$

Avec :

$$\ell_j(t) = \prod_{\substack{k=1-p \\ k \neq j}}^1 \frac{t - t_{n+k}}{t_{n+j} - t_{n+k}} \quad (5.28)$$

La forme faible (5.3) se réécrit alors, pour toute fonction  $w \in H^1([t_n, t_{n+1}])$  :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \sum_{j=1-p}^1 (\dot{\ell}_j C + \ell_j K) T_{n+j} - \ell_j F_{n+j} \right) w(t) dt \quad (5.29)$$

Ainsi, à l'ordre 2, c'est-à-dire en utilisant  $T^n$  et  $T^{n-1}$  pour calculer  $T^n$ , on a :

$$\ell_1 = \frac{(t - t_{n-1})(t - t_n)}{(t_{n+1} - t_{n-1})(t_{n+1} - t_n)} \quad (5.30)$$

$$\ell_0 = \frac{(t - t_{n-1})(t - t_{n+1})}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n+1})} \quad (5.31)$$

$$\ell_{-1} = \frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})}{(t_{n-1} - t_n)(t_{n-1} - t_{n+1})} \quad (5.32)$$

les calculs d'intégrales permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} + \theta_1 \right) C + \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) K \right) T^{n+1} + \left( \frac{-2\theta_2}{\Delta t} C + (1 - \theta_2) \right) T^n \\ & + \left( \frac{1}{\Delta t} \left( -\frac{1}{2} + \theta_1 \right) C + \frac{1}{2} (-\theta_1 + \theta_2) K \right) T^{n-1} \\ & - \left( \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) F^{n+1} + (1 - \theta_2) F^n + \frac{1}{2} (-\theta_1 + \theta_2) F^{n-1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Avec :



$$\theta_1 = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{t - t_n}{\Delta t} w dt}{\int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt} \quad (5.34)$$

$$\theta_1 = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{t - t_n}{\Delta t} \right)^2 w dt}{\int_{t_n}^{t_{n+1}} w dt} \quad (5.35)$$

## 5.2.4 Utilisation des séries de Taylor

Des méthodes permettent l'intégration temporelle en s'appuyant sur des séries de Taylor. Le terme  $T^{n+1}$  s'écrit alors :

$$T^{n+1} = T^n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} (T^n)^{(i)} \quad (5.36)$$

En tronquant la série à l'ordre  $p$  puis en intégrant de la même manière que pour la formulation faible (5.3), ou en considérant la formulation forte en  $t = t_{n+1}$  et en écrivant les séries de Taylor pour les dérivées successives, un schéma d'ordre  $p$  peut être obtenu [264]. Cependant, ces méthodes nécessitent la connaissance à l'instant initial de ces dérivées successives, ce qui n'est pas le cas pour notre problème.

## 5.2.5 Synthèse

Plusieurs schémas de discrétisation temporelle ont été décrits dans cette section. Étant donné que nous considérons, en espace, des éléments finis linéaires, et donc une précision d'ordre 1, il n'est pas nécessaire d'avoir une précision accrue en temps. Dans un but de simplicité algorithmique, nous choisissons pour la suite d'utiliser un schéma de Crank-Nicolson, inconditionnellement stable, et ayant une précision d'ordre 2.

Il est à noter que ce schéma d'ordre 2 en temps est ici associé à un schéma d'ordre 1 en espace. Cependant, le choix de ce schéma ne modifie pas la complexité de la résolution numérique par rapport à un schéma d'ordre 1 comme le schéma d'Euler implicite.

## 5.3 Mise en place des couplages multiphysiques

Nous présentons maintenant le couplage multiphysique qui a été mis en œuvre afin de déterminer l'évolution de la température dans la structure de route solaire hybride.

Pour cela, nous supposons que les données extérieures (température de l'air, rayonnement atmosphérique, coefficient d'échange), les propriétés thermiques internes (capacité et conductivité thermique), les propriétés du milieu poreux (conductivité hydraulique, porosité) et les propriétés optiques (absorption, diffusion, émissivité) sont connues.

Connaissant tous ces paramètres, les équations de la diffusion thermique (4.20), de la convection hydraulique (4.95) et des transferts radiatifs (4.219) peuvent être utilisées et permettent de déterminer la température ou la luminance énergétique. Le couplage entre ces équations, pour obtenir simultanément ces grandeurs physiques, est maintenant décrit.

### 5.3.1 Couplage entre la diffusion thermique et la convection hydraulique

Les équations de la diffusion thermique et de la convection hydraulique peuvent être couplées en émettant l'hypothèse que le champ de température pour la phase solide est continu entre le milieu poreux et le milieu non poreux. Dans ce cas, la diffusion thermique et la convection hydraulique permettent d'obtenir un seul système d'équations s'écrivant, après application de la méthode des éléments finis, sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\tilde{C}_s + \tilde{C}_{sp}] & [0] \\ [0] & [C_{fp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_s}{\partial t} \\ \frac{\partial T_{sp}}{\partial t} \\ \frac{\partial T_{fp}}{\partial t} \end{array} \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{K}_s + \tilde{K}_{sp} + \tilde{A}_p] & [-\hat{A}_p] \\ [-\hat{A}_p^T] & [K_{fp} + A_p + U_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ T_{sp} \\ T_{fp} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} [\tilde{F}_s + \tilde{F}_{sp}] \\ [F_{fp}] \end{bmatrix} \tag{5.37}
\end{aligned}$$

avec  $_s$  la référence au milieu non poreux solide,  $_{sp}$  la phase solide dans le milieu poreux,  $_{fp}$  la phase fluide dans le milieu poreux. Les notations  $\tilde{\cdot}$  et  $\hat{\cdot}$  correspondent à des adaptations des tailles des matrices et vecteurs.

### 5.3.2 Couplage entre la diffusion thermique et les transferts radiatifs

Nous présentons dans ce paragraphe le couplage entre les transferts radiatifs et la diffusion thermique. Pour cela, nous introduisons d'abord la méthode de Rosseland, bien documentée dans la littérature, puis décrivons la méthode qui a été mise en place dans le cadre de cette thèse.

#### Méthode de Rosseland

Cette méthode permet d'imposer un couplage fort entre l'équation de transfert radiatif et l'équation de la diffusion thermique. Le problème des transferts radiatifs est intégré dans l'équation de la diffusion thermique sous la forme d'un terme de conduction thermique supplémentaire. La résolution de l'équation de diffusion thermique ainsi obtenue permet d'obtenir le champ de température à l'intérieur du domaine sans avoir à déterminer explicitement le champ de luminance dans le milieu.

L'équation permettant le couplage rayonnement/conduction s'obtient à partir de l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_e \nabla T) \tag{5.38}$$

Où  $k_e$  est la conductivité effective, qui vérifie  $k_e = k + k_r$ , avec  $k$  la conductivité thermique du matériau et  $k_r$  la conductivité équivalente de Rosseland.

On suppose de plus que la luminance dépend seulement d'une direction  $z$  et que le milieu étudié est optiquement épais, c'est-à-dire que les photons ont un libre parcours moyen très inférieur aux dimensions du domaine et donc que les variations locales de luminance énergétique sont très faibles. Sous ces hypothèses, le flux radiatif  $\vec{q}$  peut alors s'écrire sous une forme approchée :

$$\vec{q} = \int_{\nu} \int_{4\pi} L_{\nu} \vartheta d\vartheta d\nu \tag{5.39}$$

$$= k_r \frac{\partial T}{\partial z} \tag{5.40}$$

Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe C. La conductivité équivalente de Rosseland est donnée par :

$$k_r = \frac{16\sigma T^3}{3\beta_r} \tag{5.41}$$

où  $\beta_r$  est le coefficient d'extinction de Rosseland, obtenu par :

$$\frac{1}{\beta_r} = \frac{\int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\partial L_{\nu}^0(T)}{\partial T} \frac{1}{\beta_{\nu}} d\nu}{\int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\partial L_{\nu}^0(T)}{\partial T} d\nu} \tag{5.42}$$

Cette méthode ne peut cependant s'utiliser que pour des milieux optiquement épais, donc pour des épaisseurs optiques  $\gg 1$  [114], à cause de l'approximation faite au premier ordre sur les faibles variations

spatiales de la luminance. Dans le cadre de cette thèse, avec un revêtement semi-transparent d'une épaisseur de l'ordre du centimètre, les propriétés optiques (coefficients de diffusion et d'absorption) ne sont pas, *a priori*, suffisamment élevées pour que le milieu puisse être considéré comme optiquement épais et cette méthode, aisée à mettre en place, ne pourra pas être utilisée.

### Méthode de Runge-Kutta

Le but est ici de coupler deux systèmes d'équations, le premier étant celui de la diffusion thermique et convection hydraulique de l'équation (5.43) et le second celui des transferts radiatifs (5.44) issu du système (4.219). L'énergie absorbée provenant du rayonnement  $S(L, T)$  est donnée par le paragraphe 4.3.2.

$$[C] \dot{T} + [K] T = [F(t)] + [S(L(t, T))] \quad (5.43)$$

$$[\Gamma] L = [\mathcal{B}(T)] + [\mathcal{F}(t)] \quad (5.44)$$

Où  $[\mathcal{B}(T)]$  représente les émissions internes (opérateur provenant du terme  $\kappa L^0(T)$  de l'ETR) et  $[\mathcal{F}(t)]$  les contributions externes au rayonnement (rayonnements atmosphérique et solaire).

L'utilisation d'un  $\theta$ -schéma en schéma temporel permet d'obtenir :

$$(C + \theta \Delta t K) T^{n+1} = (C - (1 - \theta) \Delta t K) T^n + \Delta t \left( \theta (F^{n+1} + S(t_{n+1}, L(T^{n+1}))) + (1 - \theta) (F^n + S(t_n, L(T^n))) \right) \quad (5.45)$$

À cause de la non linéarité de l'opérateur  $\mathcal{B}$  vis à vis de la température, la relation (5.45) ne permet pas d'obtenir  $T^{n+1}$  de façon immédiate à cause de la nature implicite du  $\theta$ -schéma. Il est donc préférable d'utiliser un schéma explicite. Par exemple, un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2 peut être utilisé :

$$T^{n+1} = T^n + \frac{\Delta t}{2} (k_1 + k_2) \quad (5.46)$$

$$k_1 = C^{-1} (-KT^n + F(t_n) + S(L(t_n, T^n), T^n)) \quad (5.47)$$

$$k_2 = C^{-1} (-K(T^n + \Delta t k_1) + F(t_n + \Delta t) + S(L(t_n + \Delta t, T^n + \Delta t k_1), T^n + \Delta t k_1)) \quad (5.48)$$

Ce schéma numérique est appliqué à un cas test de la littérature. Nous considérons deux plaques planes parallèles infinies de températures données séparées par un milieu semi-transparent de température initiale  $T_0 = 0$  K et étudions l'évolution de la température à l'intérieur de ce milieu. Contrairement au premier cas test présenté dans le paragraphe 4.4, nous nous plaçons ici en régime dynamique, avec des diffusions optique et thermique non nulles.



FIGURE 5.1 – Cas étudié : deux plaques planes encadrant un milieu semi-transparent

Deux cas, avec deux valeurs de diffusion optique, sont étudiés par Tsai [238] : dans le premier, l'albédo de diffusion (rapport entre le coefficient de diffusion et celui de d'extinction) est égal à 0.1. Dans le second, il est pris égal à 0.9. Pour les deux cas, le coefficient d'extinction vaut  $2 \text{ m}^{-1}$ , de telle sorte que l'épaisseur optique du domaine situé entre les deux plaque vaut 2.

[238] utilise des paramètres adimensionnés :  $N = \frac{k\beta}{4n^2\sigma T_1^3}$  pour le paramètre de conduction-radiation et  $\xi = \frac{k\beta^2 t}{\rho c}$  pour le temps adimensionné. Les valeurs suivantes sont utilisées :  $N = 0.01$  et  $\xi = 0.01$ .

En plus de cela, nous fixons des valeurs de conductivité et de capacité unitaires :  $k = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\rho c = 1 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ .

Les valeurs calculées pour ce cas test sont les suivantes :

- $t_{fin} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ s}$
- $T_1 = 959 \text{ K}$
- $T_2 = 0 \text{ K}$

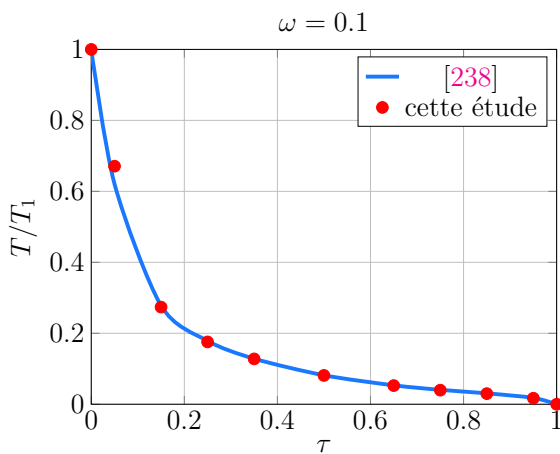
La distance optique  $\tau$  vaut 0 au niveau de la plaque 1 et vaut 2 au niveau de la plaque 2. La température initiale est supposée nulle entre les deux plaques. C'est l'apport radiatif de la plaque 1 qui va permettre de chauffer progressivement l'espace entre les deux plaques. La conduction thermique permet ensuite de diffuser davantage la chaleur.

Concernant les conditions numériques, 32 directions sont considérées (octaèdre raffiné une fois) et 5000 pas de temps sont effectués. Le maillage comporte 9504 éléments et 1600 nœuds.

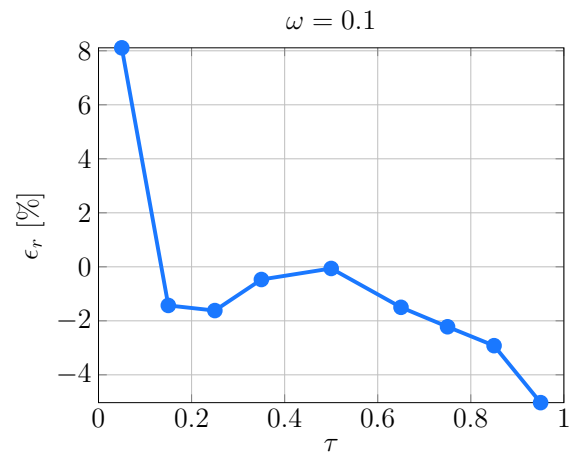
Les résultats issus de la simulation numérique, donnés en température adimensionnée, c'est-à-dire la température rapportée à  $T_1 = 959 \text{ K}$ , et comparés avec ceux de [238] sont présentés sur la table 5.1 et sur les figures 5.2 et 5.3.

TABLE 5.1 – Position des résultats de température adimensionnée ( $T/T_1$ ) comparés entre [238] et la méthode des éléments finis en température adimensionnée avec de la diffusion

$\tau/\tau_0$	$\omega = 0.1$		$\omega = 0.9$	
	[238]	EF	[238]	EF
0	1	1	1	1
0.05	0.6209	0.6709	0.5167	0.5252
0.15	0.2778	0.2738	0.0948	0.0928
0.25	0.1785	0.1756	0.0542	0.0515
0.35	0.1284	0.1278	0.0466	0.0441
0.5	0.0817	0.0812	0.0372	0.0351
0.65	0.0534	0.0526	0.0291	0.0274
0.75	0.0406	0.0397	0.0242	0.0227
0.85	0.0308	0.0299	0.0194	0.0180
0.95	0.0179	0.0170	0.0114	0.0104
1.0	0	0	0	0



(a) Résultats



(b) Écart relatif

FIGURE 5.2 – Comparaison entre les résultats de [238] et ceux issus de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour  $\omega = 0.1$

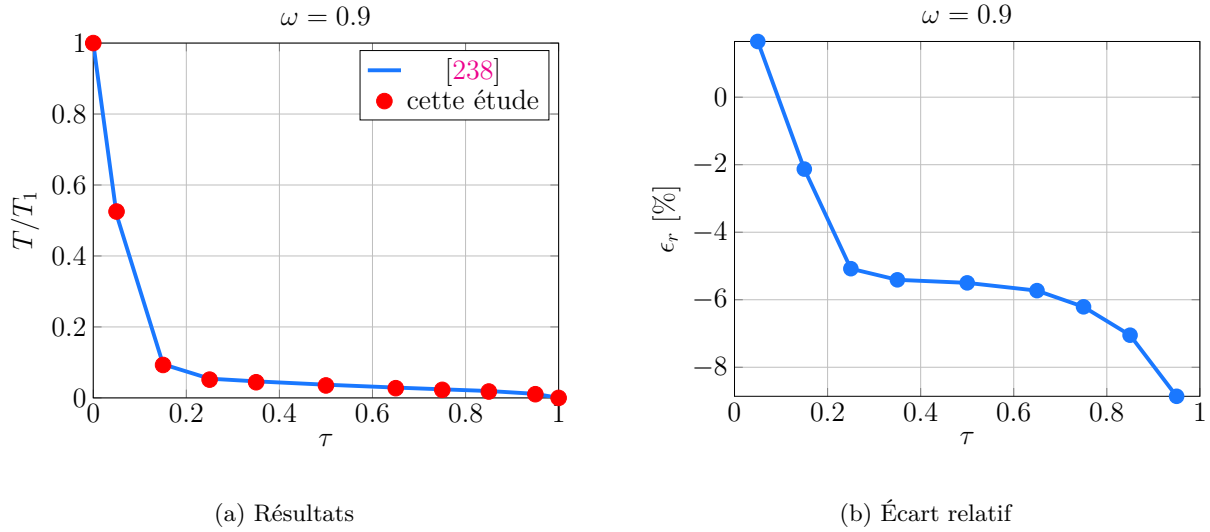


FIGURE 5.3 – Comparaison entre les résultats de [238] et ceux issus de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour  $\omega = 0.9$

Les différences entre les résultats donnés par Tsai [238] et ceux obtenus avec la méthode des éléments finis font apparaître des différences, principalement près des plaques, et en particulier au niveau de la plaque 1. Ces différences peuvent s'expliquer par la discrétisation qui a dû être réalisée pour utiliser la méthode des éléments finis. 32 directions ont ici été prises en compte, un maillage à seulement 20 directions donnant des écarts globalement plus importants.

### Simplification du problème

Dans le cadre de l'étude de la route solaire hybride, les propriétés optiques du matériau semi-transparent sont telles qu'il peut être considéré comme opaque aux grandes longueurs d'ondes, au-delà des principales longueurs d'ondes du rayonnement solaire. En effet, l'objectif du revêtement semi-transparent est de permettre au rayonnement solaire de pénétrer à l'intérieur de la structure tout en réduisant les pertes par rayonnement afin de créer un effet de serre. Pour cela, il est préférable que la couche de surface soit opaque pour le rayonnement ambiant et peu absorbante pour le rayonnement solaire.

Comme cela avait été montré dans le tableau 4.2, moins de 1% du rayonnement solaire a lieu pour des fréquences inférieures à  $70 \times 10^{12}$  Hz alors que plus de 99 % du rayonnement pour un corps à une température de 300 K se produit en-dessous de cette valeur. Ainsi, si le matériau est bien choisi, les transferts radiatifs ne se produisent que pour des fréquences supérieures à des valeurs de l'ordre de  $10^{14}$  Hz. Pour ces valeurs de fréquences, le rayonnement émis par le matériau à une température autour de 250 à 350 K est alors inférieur à des valeurs allant de 1 % de 200 à 900  $\text{W.m}^{-2}$ , ce qui est très inférieur aux contributions du rayonnement solaire, de l'ordre de  $10^2$  à  $10^3$   $\text{W.m}^{-2}$ .

Dans l'équation de transfert radiatif, pour les plaques de semi-transparence du matériau, on a alors  $L^0(T) \ll L$  en présence de rayonnement solaire. L'équation de transfert radiatif se réécrit alors :

$$\vartheta \cdot \nabla L(s, \vartheta) = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu)L(s, \vartheta) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu L_\nu(s, \vartheta') d\vartheta' \quad (5.49)$$

L'injection de ce terme source dans l'équation de la diffusion permet de réécrire le système (5.43) et (5.44) sous la forme simplifiée suivante :

$$[C] \dot{T} + [K] T = [F(t)] + [S(L)] \quad (5.50)$$

$$[\Gamma] L = [\mathcal{F}(t)] \quad (5.51)$$

La luminance énergétique devient alors indépendante de la température du milieu et ne dépend plus, dès lors, que des apports extérieurs supposés ici connus et des propriétés optiques du milieu. La luminance

énergétique devient donc une fonction du temps. De plus, les contributions extérieures proviennent des rayonnements solaire et atmosphérique, or ce dernier possède un spectre proche de celui de l'émission d'un corps à la température du ciel. La quasi totalité des fréquences d'émission du rayonnement atmosphérique appartient donc aux plages d'opacité du matériau semi-transparent. Comme pour l'émission propre, le rayonnement atmosphérique reçu est ainsi négligeable devant le rayonnement solaire. La source radiative  $\mathcal{F}$  de l'équation (5.51) est alors une fonction linéaire de la densité de flux solaire :

$$\mathcal{F}(\Phi_{\text{sol}}) = \frac{\Phi_{\text{sol}}}{1\text{W.m}^{-2}} \times \mathcal{F}(1) \quad (5.52)$$

Le terme source  $S$  est adapté de la relation (4.176) :

$$S(L) = \int_{\nu > \nu_c} \kappa_\nu \int_{S_2} L_\nu(s, \vartheta) d\vartheta d\nu \quad (5.53)$$

Où  $\nu_c$  représente une fréquence de coupure, liée aux propriétés optiques du matériau. Le terme source  $S$  est donc une fonction linéaire de la luminance énergétique, qui est elle même une fonction linéaire des apports extérieurs provenant du rayonnement solaire. Ce terme  $S$  décrit alors la façon selon laquelle le rayonnement solaire est absorbé dans le milieu semi-transparent et la répartition spatiale de cette absorption. On a :

$$S(\Phi_{\text{sol}}) = \frac{\Phi_{\text{sol}}}{1\text{W.m}^{-2}} S(1) \quad (5.54)$$

La connaissance du terme source pour une densité de flux solaire unitaire permet alors l'obtention du terme source pour toute valeur de densité de flux solaire et un seul calcul de la luminance énergétique devient alors nécessaire.

L'utilisation du  $\theta$ -schéma, avec  $\theta = 0.5$  (schéma de Crank-Nicolson) devient alors possible et permet de retrouver un schéma temporel à l'ordre 2 :

$$(C + \theta\Delta tK) T^{n+1} = (C - (1 - \theta)\Delta tK) T^n + \Delta t (\theta(F^{n+1} + S(L^{n+1})) + (1 - \theta)(F^n + S(L^n))) \quad (5.55)$$

Soit, en prenant en compte la linéarité vis à vis de la densité de flux solaire :

$$\begin{aligned} (C + \theta\Delta tK) T^{n+1} &= (C - (1 - \theta)\Delta tK) T^n \\ &+ \theta\Delta t (F^{n+1} + \Phi_{\text{sol}}(t_{n+1})S(L(\Phi_{\text{sol}} = 1))) \\ &+ (1 - \theta) (F^n + \Phi_{\text{sol}}(t_n)S(L(\Phi_{\text{sol}} = 1))) \end{aligned} \quad (5.56)$$

L'utilisation d'un schéma de Crank-Nicolson, en plus de réduire le nombre de calculs, permet aussi d'avoir un schéma inconditionnellement stable, tout en maintenant l'ordre de la précision temporelle.

### 5.3.3 Couplage multiphysique

En vue de coupler la diffusion thermique, la convection hydraulique et les transferts radiatifs, nous utilisons le système issu du couplage de la diffusion thermique et de la convection hydraulique (5.37) et le système issu du couplage entre la diffusion thermique et les transferts radiatifs (5.50) et (5.51).

Les sources thermiques issues de l'absorption du rayonnement peuvent être injectées dans la partie solide non poreuse (correspondant à la couche de surface) du système (5.37) et on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [\tilde{C}_s + \tilde{C}_{sp}] & [0] \\ [0] & [\tilde{C}_{fp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_s}{\partial t} \\ \frac{\partial T_{sp}}{\partial t} \\ \frac{\partial T_{fp}}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{K}_s + \tilde{K}_{sp} + \tilde{A}_p] & [-\hat{A}_p] \\ [-\hat{A}_p^T] & [K_{fp} + A_p + U_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s \\ T_{sp} \\ T_{fp} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [F_s + S(L)] \\ [F_{sp}] \\ [F_{fp}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$[\Gamma] L = \Phi_{\text{sol}} [\mathcal{F}(1)] \quad (5.58)$$

L'application d'un schéma de Crank-Nicolson permet alors de déterminer l'évolution de la température dans la structure.

## 5.4 Comparaison avec la solution analytique 1D pour le couplage diffusion thermique / convection hydraulique en régime permanent

Nous considérons dans ce paragraphe la solution analytique en régime permanent pour le cas de l'écoulement dans la couche poreuse introduite dans le paragraphe 4.2.3 et la comparons avec les résultats issus du modèle numérique.

Pour cela, nous reprenons le cas d'une couche poreuse située entre deux couches imperméables et opaques présenté par [11] et nous reprenons en particulier les propriétés physiques qui y ont été utilisées dans un but de réalisme. Pour la vitesse d'écoulement du fluide, nous prenons de nouveau une valeur de référence  $u_{\text{ref}} = 1.82 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ .

Le modèle numérique est ici considéré comme étant bidimensionnel étant donné l'invariance du problème selon la longueur de la route.

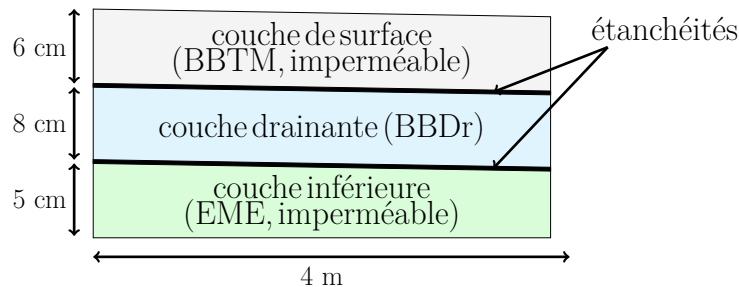


FIGURE 5.4 – Structure étudiée

La température minimale du fluide à injecter permettant de maintenir la surface hors-gel est déterminée à partir de la formulation de la partie 4.2.3. La température d'injection du fluide doit vérifier la relation (5.59) :

$$T_f(0) > -e^{L/\kappa} \left( \frac{1}{r_{Dr/s}} + \frac{1}{r_{s/e} + r_{s/c}} \left( 1 - e^{-L/\kappa} \right) \right) (r_{s/c}T_c + r_{s/e}T_e + \Phi) \quad (5.59)$$

$$T_f(0) > -e^{L/\kappa} T_\infty \left( \frac{r_{s/a} + r_{s/c}}{r_{p/s}} + 1 - e^{-L/\kappa} \right) \quad (5.60)$$

Avec la température à un éloignement infini de l'injection  $T_\infty$  et la longueur caractéristique  $\kappa$  données par :

$$T_\infty = \frac{r_{s/a}T_a + r_{s/c}T_c + \Phi}{r_{s/a} + r_{s/c}} \quad (5.61)$$

$$\kappa = \frac{\rho_f c_f h_{Dr} u (r_{Dr/s} + r_{s/e} + r_{s/c})}{r_{Dr/s} (r_{s/e} + r_{s/c})} \quad (5.62)$$

$L$  étant la longueur de la chaussée, prise égale à 4 m.

La température du fluide à injecter en fonction de la température de l'air, de la vitesse du vent et de la vitesse d'écoulement du fluide dans les deux cas, numérique et analytique, est représentée sur la figure 5.5.

Les températures d'injection du fluide sont cohérentes entre les deux résolutions du problème. La température du fluide à injecter augmente lorsque la température de l'air diminue, augmente lorsque la vitesse du vent augmente, et diminue lorsque la vitesse d'écoulement du fluide augmente.

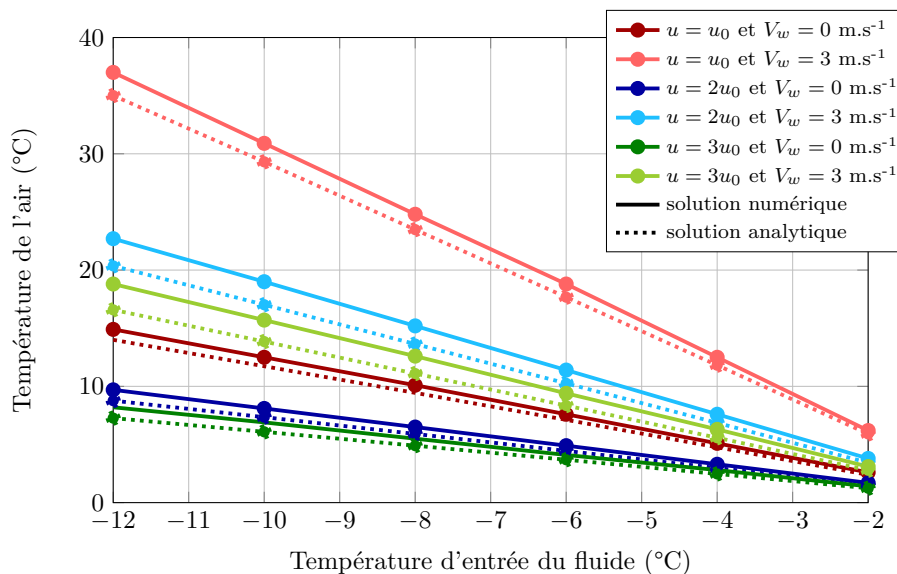


FIGURE 5.5 – Température d’entrée du fluide nécessaire pour conserver une température positive en surface de la chaussée

$V_w \backslash u$	$u_{\text{ref}}$	$2u_{\text{ref}}$	$3u_{\text{ref}}$
$0.0 \text{ m.s}^{-1}$	6.6 %	10.2 %	13.3 %
$3.0 \text{ m.s}^{-1}$	5.4 %	11.6 %	13.4 %

TABLE 5.2 – Écart entre les résolutions analytique et numérique pour les différentes conditions étudiées

L’écart entre les deux solutions se situe, sur les cas étudiés, entre 5.4 % et 13.4 %. Cette erreur semble augmenter avec la vitesse d’écoulement mais assez peu dépendre du vent et pas du tout de la température de l’air.

Une valeur moyenne des erreurs obtenue sur les différentes températures de l’air est présentée dans le tableau 5.2.

Dans tous les cas, la température numérique est surestimée par rapport à la température analytique. Cette différence peut provenir du fait que, avec la résolution analytique, les échanges thermiques sont considérés uniquement dans la direction verticale. La diffusion thermique selon la direction horizontale n’est donc pas prise en compte ce qui peut expliquer une partie de cet écart.

De plus, la température à l’intérieur des couches n’est en réalité pas constante selon l’épaisseur, comme cela est approché avec la solution analytique, ces variations étant prises en compte avec la résolution numérique. La température de la couche de surface obtenue avec la solution analytique 1D correspond donc à une position située sous la surface, et donc plus près de la source thermique issue de l’écoulement du fluide dans la couche poreuse, d’où un apport nécessaire en énergie réduit pour un maintien hors gel par rapport à une modélisation multidimensionnelle.

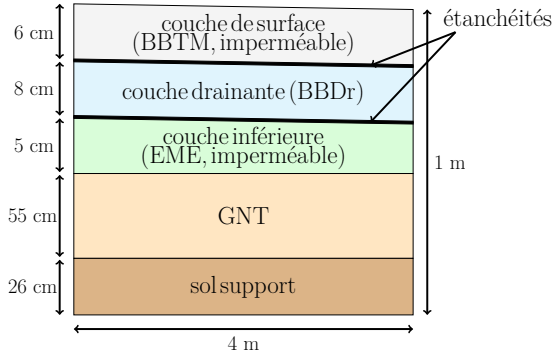
## 5.5 Validation sur un démonstrateur

### Description

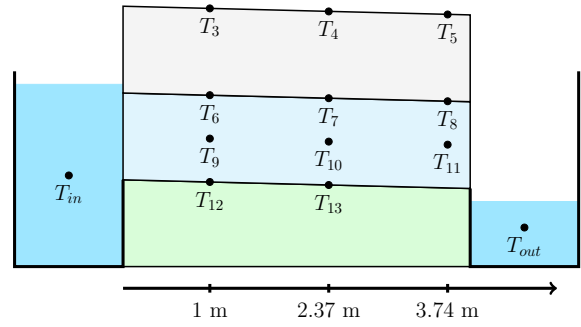
Un démonstrateur de route à couche de liaison poreuse et couche de roulement opaque a été mis en place à Égletons, en Corrèze.

Les conditions environnementales ont été mesurées et des sondes de température placées à l’intérieur de la structure ainsi que dans les réservoirs de fluide situés en amont et en aval de la couche poreuse. L’emplacement de ces sondes est représenté sur la figure 5.6b.





(a) Structure du démonstrateur modélisé



(b) Chaussée drainante avec les sondes

Les simulations sont effectuées, sauf indication contraire, sur une durée de 6 jours avec un pas de temps égal à 10 s. Le pas de temps des mesures vaut aussi 10 s.

Les conditions extérieures relevées expérimentalement sont les suivantes :

- la température de l'air  $T_{air}$  (figure 5.7a)
- la température du fluide en entrée  $T_{in}$  (figure 5.7c, courbe bleue)
- la température du fluide en sortie  $T_{out}$  (figure 5.7c, courbe rouge)
- les rayonnements solaire  $\Phi_{sol}$  et atmosphérique  $\Phi_{atm}$  (figure 5.7b)
- la vitesse du vent  $V_w$  et le coefficient d'échange convectif  $h$  associé (figure 5.7d)
- le volume d'eau écoulé, qui permet d'obtenir la vitesse d'écoulement du fluide à l'intérieur de la couche poreuse, représenté sur la figure 5.8.

### 5.5.1 Obtention de la vitesse du fluide

La vitesse du fluide à l'intérieur de la couche poreuse s'obtient à partir du volume d'eau cumulé, qui évolue de façon quasi linéaire dans le temps. Nous le considérerons donc par la suite constant.

$$u_{ref} = \frac{30200 \times 10^{-3}}{6 \times 86400 \times 0.08 \times 4} \quad (5.63)$$

$$= 1.82 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} \quad (5.64)$$

Soit un débit de 210 L.h<sup>-1</sup>, une valeur relativement proche de celles utilisées dans [10].

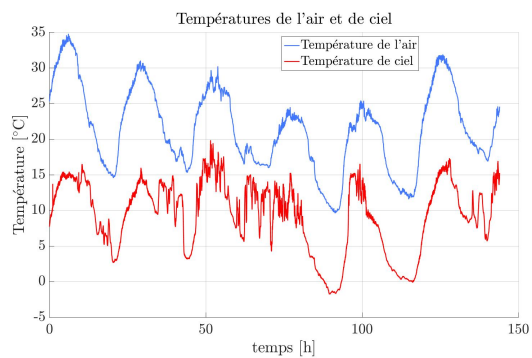
### Analyse des données expérimentales

Les mesures de températures aux différentes sondes sont représentées par couche, sur les figures 5.9a, 5.9b et 5.9c.

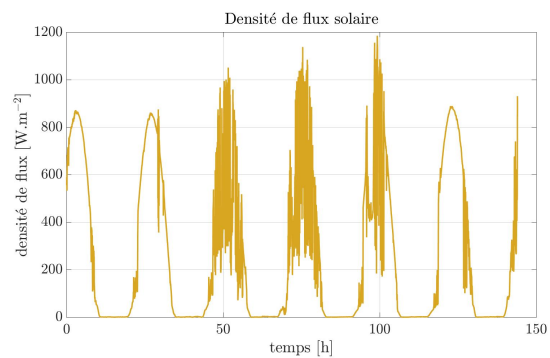
L'influence de l'écoulement du fluide est visible sur ces figures à travers l'amplitude des oscillations, en particulier au milieu et en-dessous de la couche drainante : cette amplitude s'accroît au cours de l'écoulement, surtout entre 1 et 2.37 m de l'injection du fluide. L'augmentation de cette amplitude s'explique par les apports solaires qui apportent de l'énergie au fluide tout au long de l'écoulement pendant la journée mais pas durant la nuit. Un autre effet visible de l'écoulement du fluide se situe dans la position temporelle des extrema : ceux-ci sont retardés lorsqu'on s'éloigne du point d'injection du fluide.

Il peut également être observé que les maxima de température décroissent avec la profondeur : les variations de température sont atténuées du fait de la diffusion thermique.

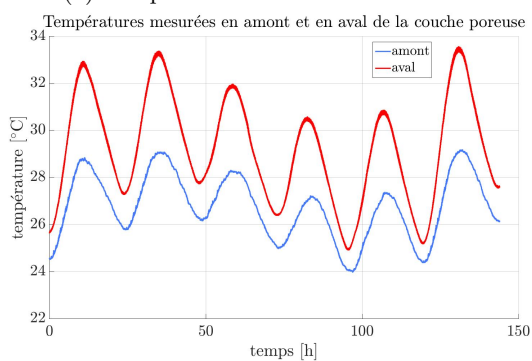
Ces données issues des sondes présentent cependant quelques anomalies. Comme cela est visible sur les figures 5.9a à 5.9c, des oscillations importantes se produisent en l'espace d'un pas de temps avec des variations pouvant dépasser 2°C. Sur la figure 5.9a, l'amplitude des oscillations journalières augmente entre les sondes 6 et 7 (à 1 et 2.37 m du point d'injection) avant de redescendre au niveau de la sonde 8, ce qui ne semble pas cohérent avec les observations produites pour les autres sondes situées à 3.74 m du point d'injection. Des sauts sont également présents dans le volume cumulé de fluide représenté sur la figure 5.8 et dont un grossissement est proposé sur la figure 5.10. Le volume cumulé augmente de



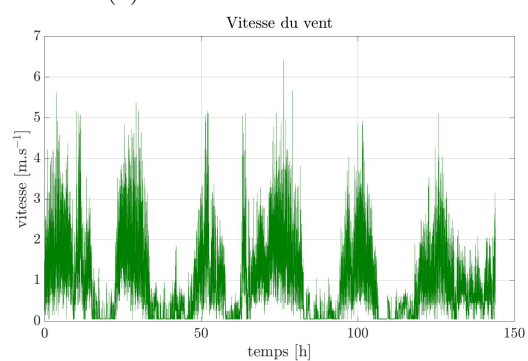
(a) Températures de l'air et de ciel



(b) Densité de flux solaire



(c) Température du fluide en amont (bleu) et en aval (rouge) de la couche poreuse



(d) vitesse du vent

FIGURE 5.7 – Données extérieures mesurées

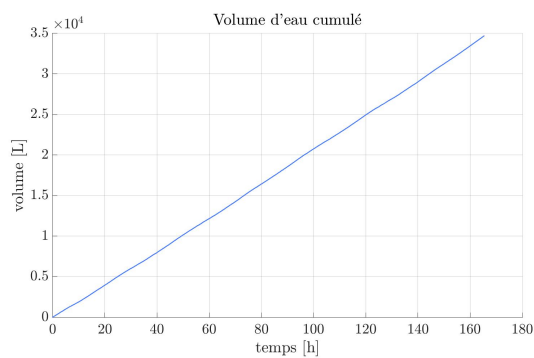
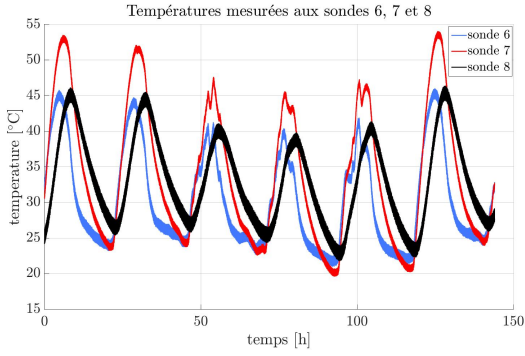
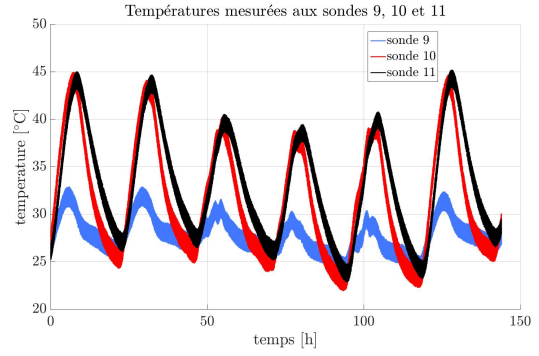


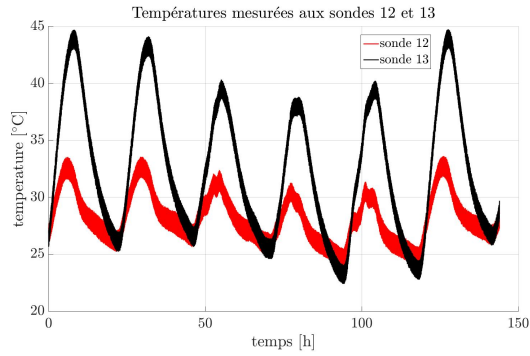
FIGURE 5.8 – Volume de fluide cumulé sur la durée de l'expérience



(a) Températures mesurées aux sondes 6, 7 et 8



(b) Températures mesurées aux sondes 9, 10 et 11



(c) Température mesurée aux sondes 12 et 13

FIGURE 5.9 – Données mesurées aux sondes

plus de façon régulière entre ces sauts, qui peuvent laisser penser qu'une fuite est présente au niveau des étanchéités de la couche poreuse.

### Comparaison du modèle numérique et des mesures expérimentales

Les caractéristiques de la chaussée (propriétés thermiques, épaisseurs des couches) correspondent à celles utilisées par [10] et sont indiquées sur la table 5.3.

Pour davantage se rapprocher de la réalité, une couche de granulat ainsi qu'une partie du sol support ont été rajoutés pour la modélisation en-dessous de la structure présentée par [11].

Les températures du fluide en entrée et en sortie de la couche drainante sont supposées être égales à celles des bacs amont  $T_{in}$  et aval  $T_{out}$ .

Nous considérons, pour les conditions initiales, un gradient de température constant tel que la température de surface soit de 40°C et celle à 1 m de profondeur de 15°C.

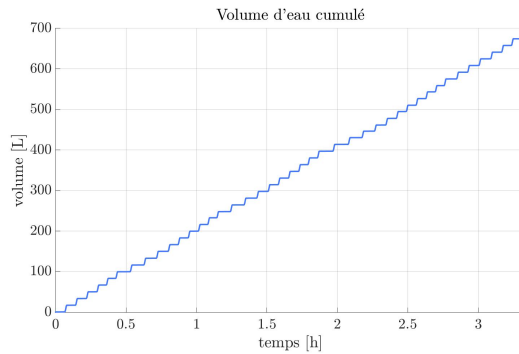


FIGURE 5.10 – Volume de fluide cumulé sur les premières heures de la simulation

	paramètre	valeur
BBTM	$k$	$2.34 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$2\,144\,309 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
BBDr	$k$	$1.56 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$1\,769\,723 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
EME	$k$	$1.76 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$2\,676\,728 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
GNT	$k$	$2.08 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$1\,947\,505 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
étanchéités	$k$	$0.75 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$1\,196\,000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
eau	$k$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
	$\rho c$	$4\,181\,000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
porosité	$\phi$	0.2
émissivité	$\varepsilon$	0.96
coefficient d'échange volumique	$a$	$10^5 \text{ W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
coefficient d'échange convectif	$h$	$h = 5.8 + 4.1V_w$ [10]

TABLE 5.3 – paramètres utilisés pour la simulation

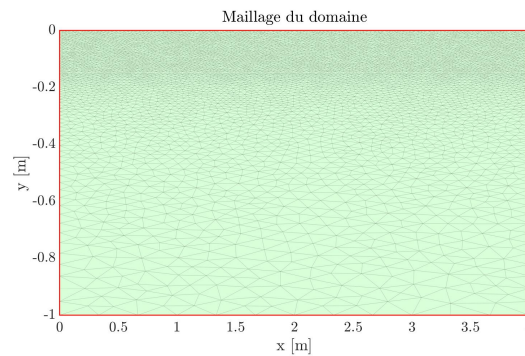


FIGURE 5.11 – Maillage spatial

Étant donnée l'invariance du problème selon la longueur de la route, une modélisation 2D est proposée. L'équation de la chaleur est résolue avec la méthode des éléments finis en espace et avec un schéma de Crank-Nicolson en temporel. Le maillage utilisé pour la méthode des éléments finis est représenté sur la figure 5.11.

La différence entre les mesures des sondes et la simulation numérique étant importante sur la base du premier calcul, les calculs ont été refaits pour plusieurs valeurs de vitesse d'écoulement, inférieures ou supérieures à la valeur de référence calculée précédemment  $1.82 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ . Des comparaisons entre les données simulées et les mesures pour certaines sondes sont représentées sur les courbes de la figure 5.12.

Pour la sonde 5, la température obtenue numériquement avec la vitesse de référence se rapproche de celle issue des mesures de la sonde, en particulier lors des périodes de refroidissement. En revanche, pour la sonde 6, située à 1 m de l'injection du fluide, au-dessus de la couche poreuse, une vitesse d'écoulement de l'ordre de  $1 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ , deux fois inférieure environ à la vitesse de référence, permet d'obtenir de meilleurs résultats. Cette diminution de la vitesse est amplifiée à 2.36 m du point d'injection, à la sonde 7 où l'absence d'écoulement ou une vitesse nulle donnent une meilleure correspondance avec les mesures. Ces observations peuvent être confirmées pour d'autres sondes. Pour la sonde 12, située en-dessous de la sonde 6, en bas de la couche poreuse, la vitesse donnant les résultats numériques se rapprochant le plus

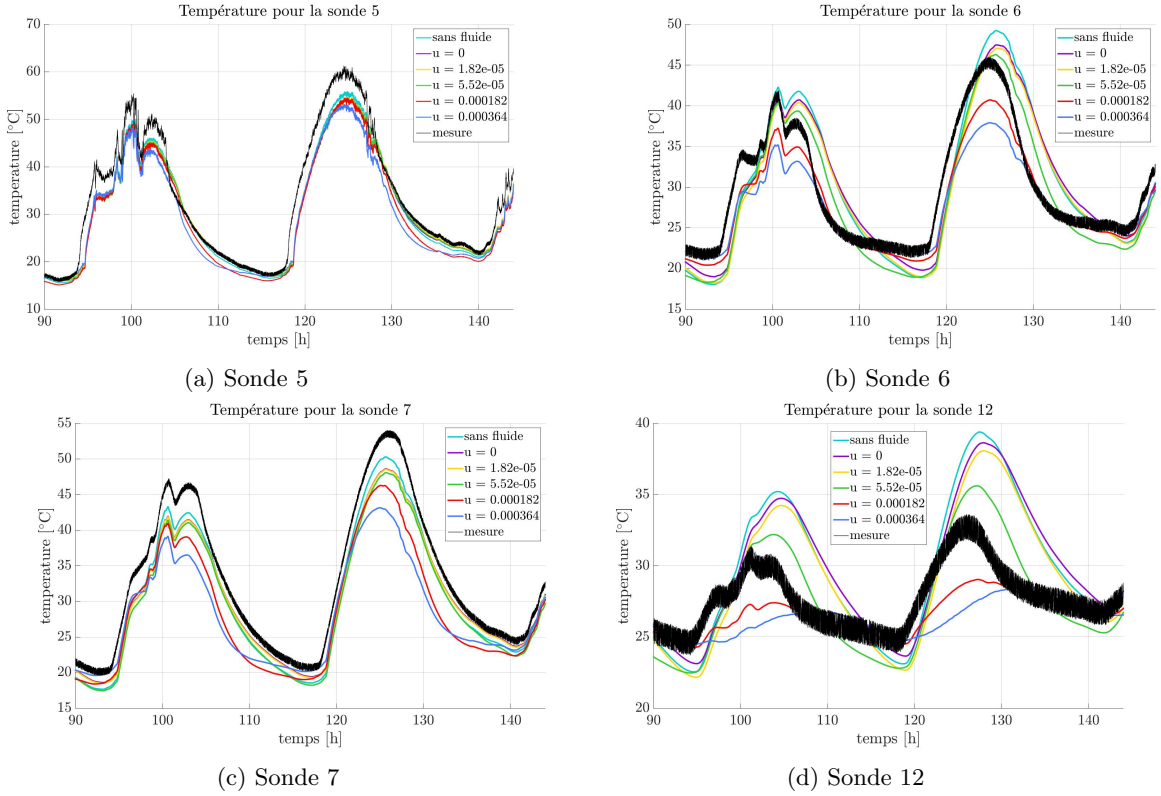


FIGURE 5.12 – Températures mesurées et calculées au niveau de quelques sondes

des mesures est à nouveau de l'ordre de  $1 \times 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ .

Afin de pouvoir comparer plus aisément les courbes, nous définissons l'écart  $e_i$  à la sonde  $i$  située au point  $P_i$  par :

$$e_i = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{N_t} (T_{\text{num}}(P_i, t_n) - T_{\text{exp}}(P_i, t_n))^2}}{N_t} \quad (5.65)$$

avec  $N_t$  le nombre de mesures. L'écart est donné pour toutes les sondes et pour plusieurs valeurs de vitesse d'écoulement sur la figure 5.13.

Les écarts sont relativement proches, quelle que soit la vitesse, pour les sondes 3, 4 et 5, situées en surface. Seule une vitesse plus élevée que la vitesse de référence entraîne une augmentation sensible de l'écart. Au niveau de la couche poreuse, les sondes 6, 9 et 12, situées à 1 m de l'injection du fluide, donnent un écart minimal pour des vitesses d'écoulement comprises entre 0.5 et 1 fois la vitesse de référence, avec de faibles variations de l'écart sur cet intervalle, mais une forte augmentation en-dehors. Pour les autres sondes, à 2.36 et 3.72 m de l'injection du fluide, l'écart augmente avec la vitesse et une vitesse d'écoulement inférieure à  $0.1u_{\text{ref}}$  minimise cet écart.

Les mesures obtenues via les sondes correspondent donc, à 1 m du point d'injection, à une vitesse d'écoulement de l'ordre ou un peu inférieure à la vitesse de référence calculée à partir des mesures de volume d'eau cumulé et, à 2.36 et 3.72 m du point d'injection, à une vitesse d'écoulement quasi nulle ou à une absence de fluide.

Ces observations indiquent donc qu'une fuite se produit à l'intérieur de la structure, vraisemblablement entre 1 et 2.36 m du point d'injection. Cette fuite entraîne une baisse du débit dans la couche poreuse, d'où une baisse de hauteur d'eau à l'intérieur de celle-ci ainsi qu'une baisse de vitesse.

Des simulations supplémentaires ont été réalisées afin de localiser cette fuite en faisant varier la localisation de celle-ci, la longueur sur laquelle elle se produit, et les profils de vitesse et de hauteur d'eau. Une fuite située à 1 m de l'entrée du fluide, avec une hauteur d'eau passant de 8 cm (saturation) à 1 cm

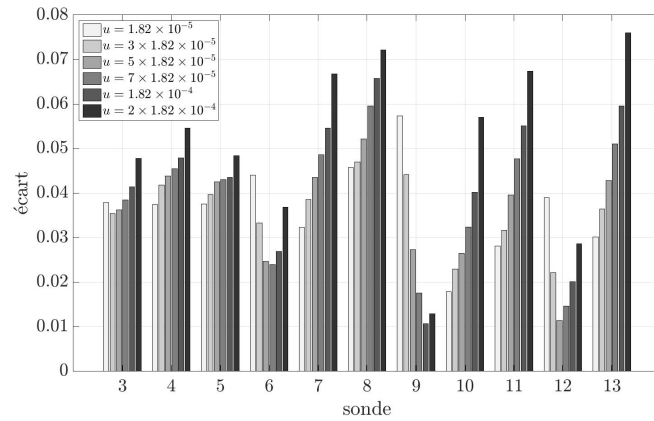


FIGURE 5.13 – Écart selon la vitesse utilisée pour la simulation numérique

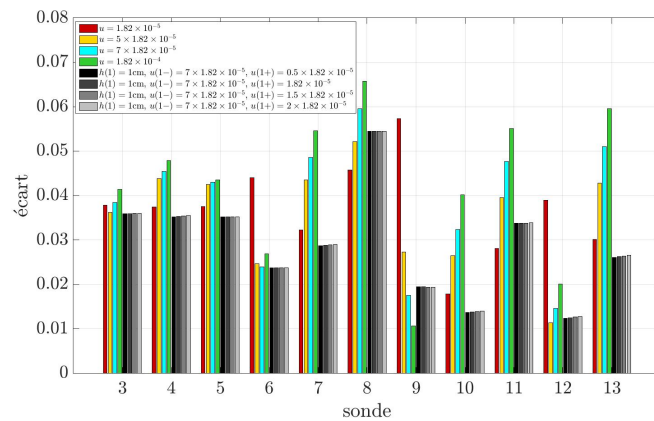


FIGURE 5.14 – Erreur sur les sondes selon la position de la chute de la hauteur d'eau

et une vitesse allant de  $0.7u_{\text{ref}}$  à moins de  $0.1u_{\text{ref}}$ . Une comparaison des différents écarts avec ce scénario est proposée sur la figure 5.14 et sur la figure 5.4.

Ces résultats ne sont pas incompatibles avec la présence d'importantes bulles d'air empêchant le bon écoulement du fluide.

## 5.6 Validation sur une maquette de route solaire hybride

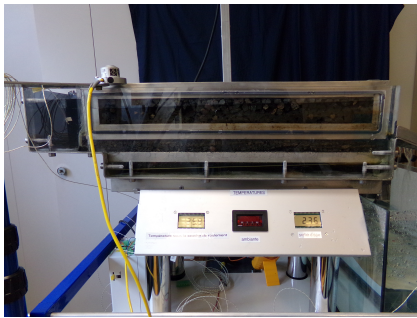
Une maquette de route solaire hybride a été construite à l'occasion de la COP 21. Cette maquette, photographiée sur la figure 5.15a et représentée schématiquement sur la figure 5.15b est constituée de trois couches : une couche de surface semi-transparente, une couche de liaison poreuse et une couche de base. Deux réservoirs s'ajoutent à cette structure : un en amont, qui permet l'entrée du fluide dans la couche poreuse et un autre en aval de l'écoulement pour récupérer le fluide sortant de la route. Ce système fonctionne en réseau fermé : le fluide arrivant dans le réservoir aval retourne ensuite dans le réservoir amont grâce à une pompe.

Pour alimenter cette pompe, des panneaux photovoltaïques sont installés sous la couche de surface semi-transparente. Le rayonnement absorbé permet ainsi d'activer la pompe. Une lampe halogène à 1500 W et 3000 K est située au-dessus de la maquette pour simuler le rayonnement solaire.

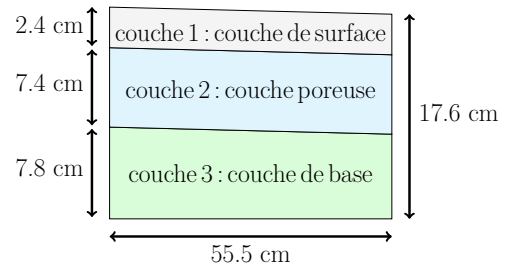
Le but est ici de comparer des mesures réalisées sur la maquette de route solaire hybride en fonctionnement, c'est-à-dire excitée par le rayonnement de la lampe, avec les résultats issus de la simulation numérique.

$u$	écart moyen $\times 10^2$
pas de fluide	3.84
0	3.78
$0.1u_{\text{ref}}$	3.69
$0.3u_{\text{ref}}$	3.56
$0.5u_{\text{ref}}$	3.55
$0.7u_{\text{ref}}$	3.88
$u_{\text{ref}}$	4.29
$2u_{\text{ref}}$	5.24
$u(x < 1\text{m}) = 0.7u_{\text{ref}}$ , $h(x < 1\text{m}) = 8\text{cm}$	
$u(x > 1\text{m}) = 0.1u_{\text{ref}}$ , $h(x > 1\text{m}) = 1\text{cm}$	2.92

TABLE 5.4 – Écart moyen pour les vitesses d'écoulement étudiées



(a) Maquette de route solaire hybride



(b) Schéma de la maquette

FIGURE 5.15 – Images obtenues après calibrations

Pour obtenir les données environnementales, nécessaires au fonctionnement du modèle numérique, une station météorologique et un pyranomètre permettent de relever l'humidité relative, la température ambiante et la densité de flux solaire. Quatre thermocouples ont aussi été utilisés : un dans chacun des réservoirs, un à la surface de la maquette et un dernier au niveau de l'interface entre la couche de surface et la couche de liaison poreuse.

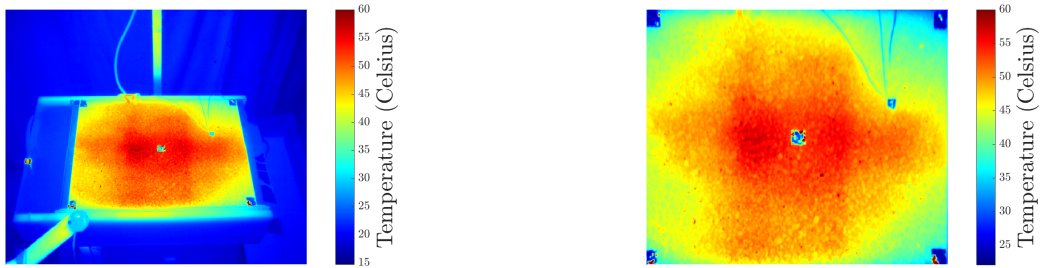
Pour mesurer la température à la surface de la maquette, une caméra infrarouge FLIR A65 a été installée. Deux calibrations sont réalisées, d'abord avec un corps noir, puis en prenant en compte la scène géométrique. À l'issue de ces calibrations, la température à la surface de la maquette peut être obtenue [149]. Des exemples de mesures obtenues après chacune de ces calibrations sont présentées sur les figures 5.16a et 5.16b.

La vitesse d'écoulement du fluide est déterminée expérimentalement, en mesurant le volume de fluide s'écoulant pendant une durée donnée. La vitesse d'écoulement obtenue vaut  $u = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ , valeur 16 fois plus élevée que pour le démonstrateur d'Égletons. Cet important écart peut s'expliquer par le fait que le fluide a tendance à s'écouler de façon accélérée près des bords de la maquette, n'étant alors que peu freiné par les interactions avec la phase solide du milieu poreux.

Afin d'utiliser le modèle numérique, la densité de flux est estimée. Étant donnée la taille de la lampe halogène, petite devant la taille de la maquette, et la distance entre la lampe et la maquette, inférieure au mètre, la densité de flux reçue ne peut pas être considérée comme constante et doit donc être déterminée en fonction de la position à la surface. Pour cela, la valeur retournée par le pyranomètre est corrélée à l'aide d'une carte de calibration utilisant une interpolation bicubique avec neuf points de mesure. La densité de flux reçue à la surface peut ainsi être calculée sur chaque élément frontière du maillage. Cette densité de flux est représentée sur la figure 5.18.

Les propriétés thermiques de la maquette sont estimées d'après des valeurs extraites de la littérature pour des matériaux similaires et sont données dans la table 5.5. L'expérimentation a été réalisée dans une chambre climatisée, avec maintien d'une température de l'air  $T_a$  quasi constante au cours du temps. Le réservoir en sortie est supposé suffisamment volumineux pour que la température du fluide y soit constante, même pendant le fonctionnement de la lampe. Le fluide entrant dans le réservoir amont





(a) Exemple d'image obtenue après calibration par un corps noir

(b) Exemple d'image obtenue après calibration géométrique

FIGURE 5.16 – Images obtenues après calibrations

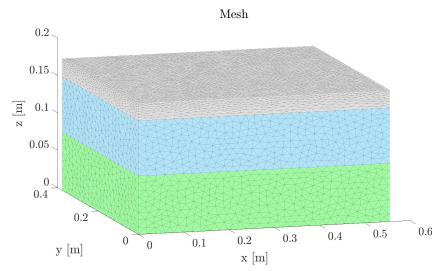


FIGURE 5.17 – Maillage de la maquette

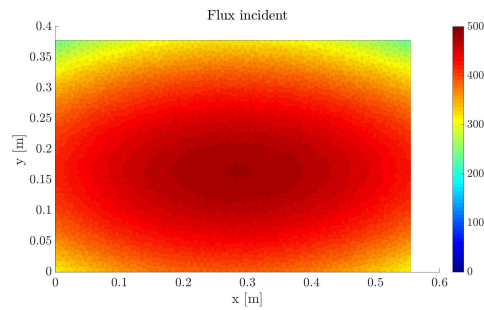


FIGURE 5.18 – Flux incident à la surface de la maquette en régime permanent



provenant directement du réservoir de sortie, la température d'entrée du fluide est supposée constante au cours du temps. Les valeurs de températures sont données dans la table 5.6.

	couche 1	couche 2	couche 3	fluide (eau)
$k$ [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ]	0.85	1.03	1.40	0.60
$\rho c$ [ $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ ]	$2.27 \times 10^6$	$1.84 \times 10^6$	$2.25 \times 10^6$	$4.18 \times 10^6$

TABLE 5.5 – Propriétés thermiques du matériau [11, 68, 225]

$T_a$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$T_{f,in}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$h_{\text{conv}}$ [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ ]
30	24	5.7

TABLE 5.6 – Conditions environnementales

L'évolution de la température au cours du temps pour un pixel de la surface de la maquette est représentée sur la figure 5.19.

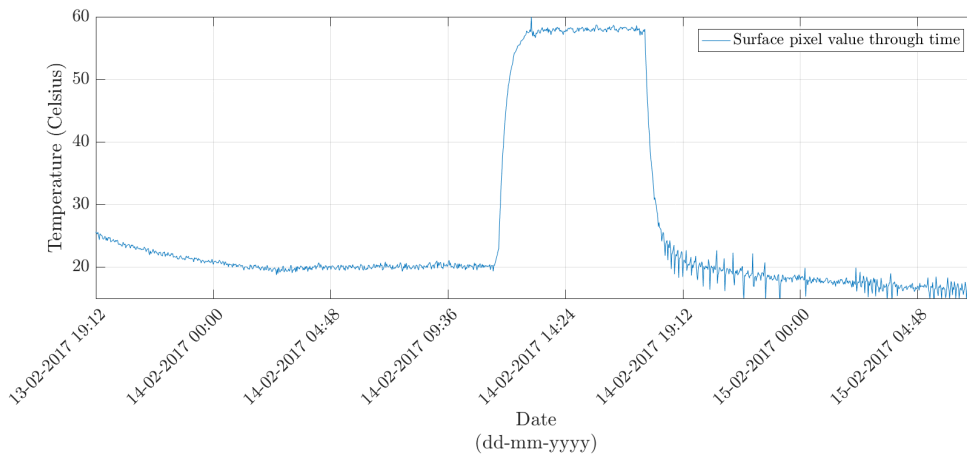


FIGURE 5.19 – Évolution de la température mesurée au niveau d'un pixel

Une comparaison a été réalisée entre les mesures de surface par caméra infrarouge et les résultats issus du modèle numérique, en régime permanent, plusieurs heures après la mise en fonctionnement de la lampe halogène. Cette comparaison est représentée sur la figure 5.20 à travers la différence entre la température calculée et la température mesurée.

Cette figure laisse apparaître une différence moyenne sur la surface entre les mesures et les températures calculées de  $2.98^{\circ}\text{C}$ . En se limitant à une zone située au centre de la maquette, donc éloignée des bords, cette différence moyenne descend à  $1.41^{\circ}\text{C}$ .

Cette différence est relativement faible comparée aux échelles de températures considérées ici, allant de  $20^{\circ}\text{C}$  pour l'air à plus de  $60^{\circ}\text{C}$  pour la surface de la maquette. Cette différence peut notamment s'expliquer par l'émissivité, qui n'est pas bien connue et est seulement estimée ici. Une telle estimation produit un effet à la fois sur le modèle numérique et sur les mesures infrarouges. La texture de la maquette a aussi un effet sur l'émissivité et peut la faire varier localement. Les propriétés géométriques utilisées ainsi que les interpolations réalisées durant les mesures créent également un biais. Enfin, les panneaux photovoltaïques situés à l'interface entre la couche de surface et la couche poreuse modifient aussi la diffusion de la chaleur, sans que cela soit pris en compte dans le modèle numérique.

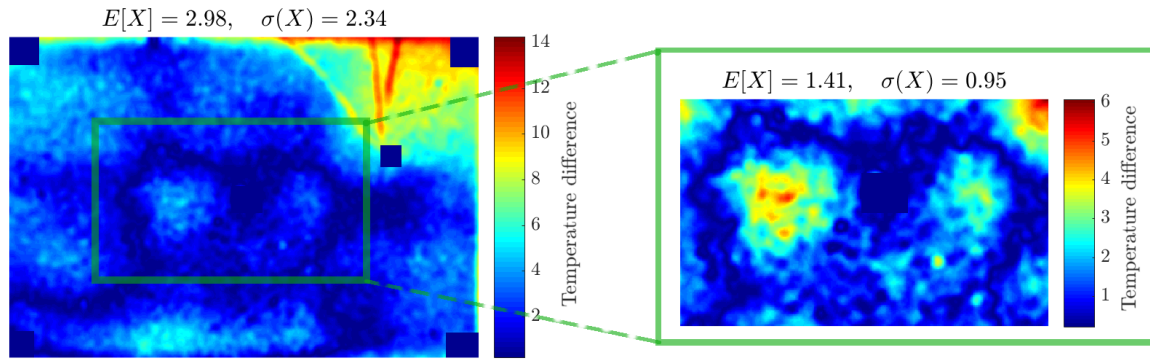
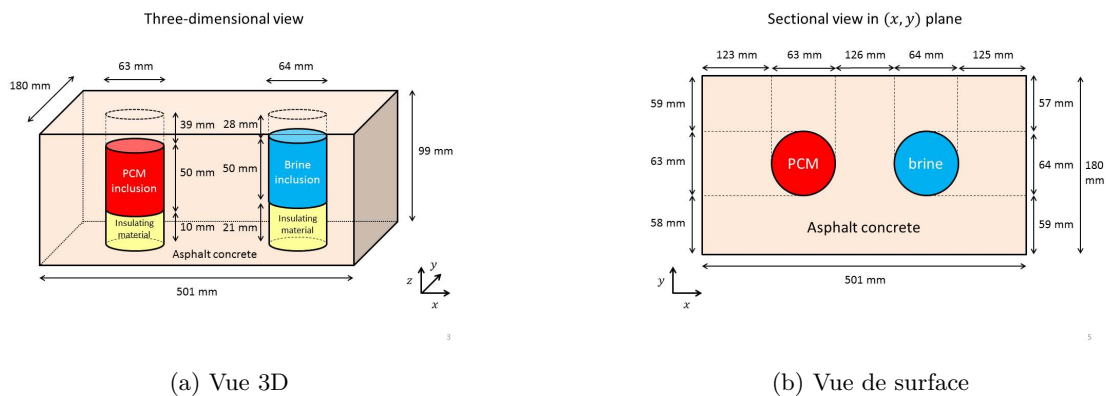


FIGURE 5.20 – Évolution de la température mesurée au niveau d'un pixel



(a) Vue 3D

(b) Vue de surface

FIGURE 5.21 – Schémas de la structure avec les inclusions

## 5.7 Application du modèle aux matériaux à changement de phase

En plus des chaussées étudiées précédemment, Le modèle multiphysique développé au cours de cette thèse peut aussi être utilisé en régime dynamique pour étudier le comportement thermique de matériaux à changement de phase [148]. Un bloc d'asphalte est ici étudié. Celui-ci comprend deux inclusions, une de Rubitherm SP5 (matériau à changement de phase) et une d'eau salée à une concentration de 80 g de chlorure de sodium par litre d'eau. La structure étudiée est représentée par les schémas de la figure 5.21.

Cette structure est ici placée dans une chambre climatique dont la température est contrôlée. Un autre bloc d'asphalte, sain sans inclusions, est soumis aux mêmes conditions environnementales.

Connaissant l'évolution de la température de l'air dans l'enceinte, également mesurée par des capteurs, le champ de température à l'intérieur des blocs d'asphalte peut être calculé puis comparé aux valeurs mesurées grâce à des thermocouples présents à la surface des blocs ou à l'intérieur de ceux-ci.

L'étude du comportement thermique du pavé d'asphalte fait appel à la diffusion thermique ainsi qu'aux transferts thermiques lors des changements de phase dont la modélisation a été présentée au cours du paragraphe 4.1.4.

La distribution des variations de l'enthalpie pour le Rubitherm SP5 est donnée par le fournisseur et est représentée sur la figure 5.22. Pour la saumure, on se retrouve dans le cas d'un mélange diphasé dont l'étude détaillée a été faite dans le paragraphe 4.1.4. Les variations d'enthalpie ainsi calculées sont représentées pour la saumure sur la figure 5.23.

La température de l'air est contrôlée et est représentée sur la figure 5.24.

Les effets thermiques de la présence des inclusions se font principalement ressentir près de celles-ci, comme cela est visible sur la figure 5.25a. La différence de température avec le bloc d'asphalte sain, représentée sur la figure 5.25b, montre que l'écart de température peut atteindre 3°C au niveau des inclusions contre des valeurs inférieures ou de l'ordre du degré en surface. Elle montre également la

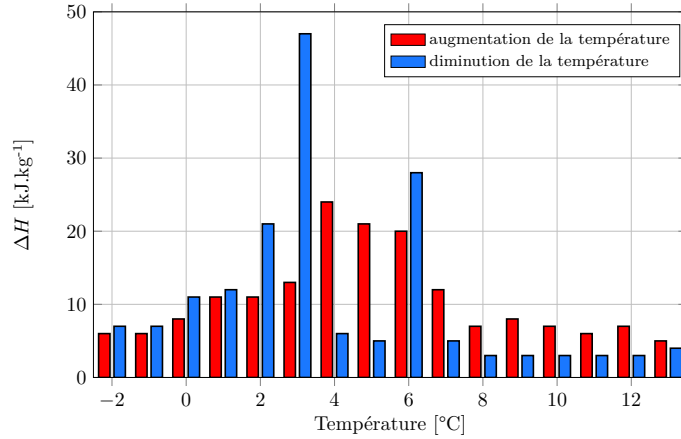


FIGURE 5.22 – Variations de l'enthalpie pour le SP5 pendant son changement d'état

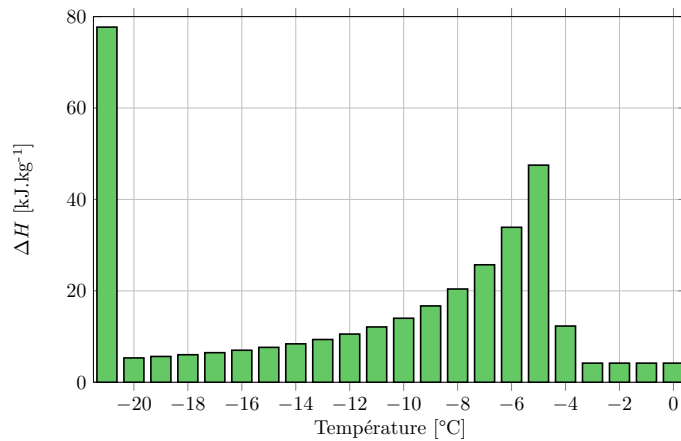


FIGURE 5.23 – Variations de l'enthalpie pour la saumure pendant son changement d'état

libération de chaleur provoquée par le passage de l'état liquide à l'état solide du SP5.

Les effets des changements de phase au cours du temps peuvent être représentés en étudiant l'évolution de la température le long d'un segment, ici celui situé en surface en  $y = 0.09$  m pour  $x$  allant de 0 à 0.50 m. La différence entre le bloc d'asphalte avec les inclusions et le bloc sain est représentée sur la figure 5.26. Sur cette figure, les écarts de températures liés principalement à la présence du SP5 sont situés en haut et ceux dus à la saumure sont en bas. La présence des matériaux à changement de phase ne modifie le comportement thermique que pendant le changement de phase et pendant une courte période après celui-ci. La figure 5.26 montre également que si le SP5 subit de nombreux changements d'état plus ou moins complets, ce n'est le cas pour l'inclusion de saumure que lorsque l'air est maintenu une dizaine d'heures environ à  $-10^{\circ}\text{C}$ , 70 heures environ après le début de l'expérience.

Des sondes ont été placées à l'intérieur et sur le bloc d'asphalte à des positions représentées sur les schémas de la figure 5.27. Les évolutions comparées de la température pour certaines de ces sondes sont proposées sur la figure 5.28 et les écarts pour les sondes de surface sont présentés sur la figure 5.29. La différence entre la température mesurée et la température issue du modèle numérique reste en-dessous de  $1.5^{\circ}\text{C}$  durant la quasi totalité de la durée de l'expérience.

## 5.8 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté le couplage multiphysique ainsi que son utilisation dans plusieurs cas afin de vérifier sa validité.

Le schéma de résolution du couplage multiphysique entre la diffusion thermique, la convection hy-

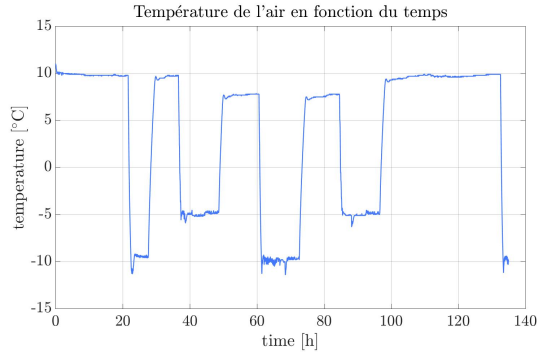


FIGURE 5.24 – Évolution de la température de l'air au cours du temps

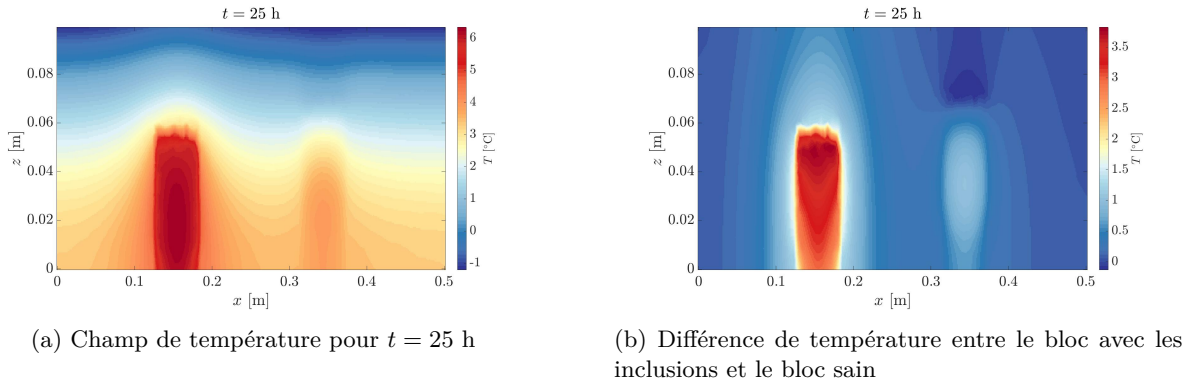


FIGURE 5.25 – Vues en coupe de champs de températures

draulique et les transferts radiatifs a d'abord été décrit, en introduisant la notion de schéma de résolution temporel. Un couplage a ainsi pu être proposé en se basant sur la méthode des éléments finis en espace et direction et sur une méthode de Runge-Kutta en temporel. Des hypothèses sur les propriétés optiques des structures étudiées ont permis une simplification du schéma temporel et l'utilisation d'un schéma de Crank-Nicolson.

Une comparaison entre le modèle numérique et un cas test issu de la littérature a ensuite conduit à la validation de notre couplage entre diffusion thermique et transferts radiatifs. Des essais sur un démonstrateur ont aussi permis la validation du couplage entre diffusion thermique et convection hydraulique. Enfin, une maquette et les mesures qui y ont été réalisées ainsi que des essais ont amené à l'utilisation du couplage entre les trois phénomènes, conduisant à des résultats numériques proches des résultats expérimentaux. Le cas particulier du traitement des matériaux à changement de phase a aussi été décrit sur un essai, mettant là aussi en évidence le bon fonctionnement du modèle numérique développé.

Ce modèle numérique, qui a été validé au cours de ce chapitre, peut maintenant être utilisé afin d'évaluer les performances énergétiques des routes solaires hybrides.

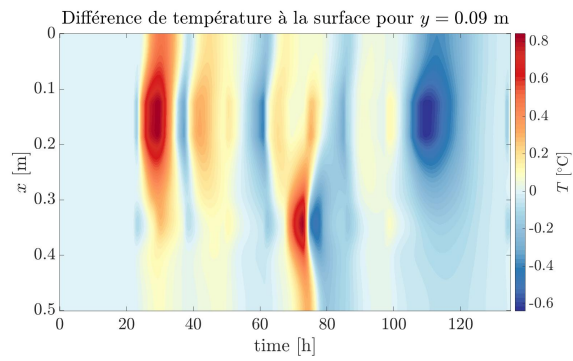


FIGURE 5.26 – Différence de température à la surface sur un segment entre le bloc d’asphalte avec inclusions et le bloc sain

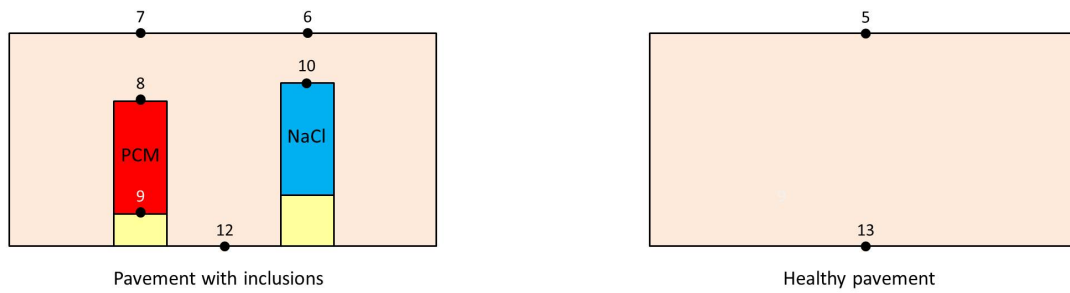


FIGURE 5.27 – Vues en coupe des positions des sondes pour le bloc d’asphalte avec inclusions (à gauche) et pour le bloc sain (à droite)

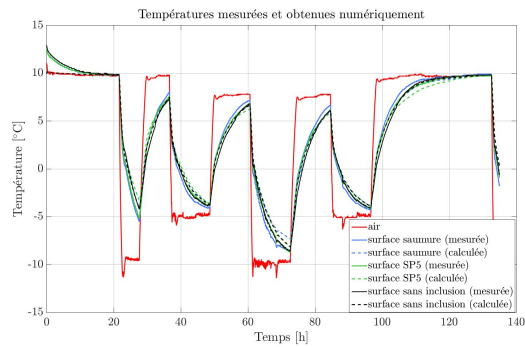


FIGURE 5.28 – Évolution des températures mesurées et calculées pour les positions de certaines sondes

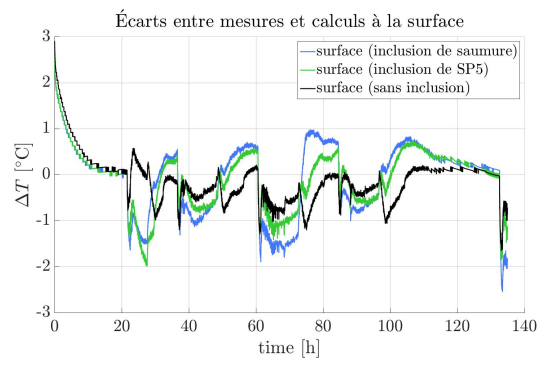


FIGURE 5.29 – Écart entre les températures mesurées et calculées à la surface avec et sans inclusions

## Chapitre 6

# Évaluation du potentiel de récupération d'énergie

Les précédents chapitres ont permis l'élaboration d'un modèle numérique permettant le calcul du champ de température à l'intérieur de la route solaire hybride avec un couplage multiphysique.

Dans ce chapitre, ce modèle est utilisé pour évaluer les performances énergétiques des routes solaires hybrides dans le mode de récupération de l'énergie. Plusieurs villes, aux climats différents, sont étudiées. La connaissance de l'évolution des conditions climatiques durant l'année permet d'utiliser le modèle multiphysique et de calculer l'évolution du champ de température à l'intérieur de la structure au cours du temps.

La température du fluide durant son écoulement dans la couche poreuse peut ainsi être connue, et notamment la variation de sa température entre l'amont et l'aval de la couche poreuse, pouvant donc amener à déterminer l'énergie absorbée par le fluide.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur l'aspect récupération d'énergie grâce à l'écoulement du fluide dans la couche poreuse même si certaines notions introduites au cours de ce chapitre seront plus largement utilisées dans le chapitre suivant. Cette récupération d'énergie peut s'effectuer lorsque l'environnement permet un apport en énergie suffisant pour contrer les pertes énergétiques de la structure, ce qui ne peut être obtenu que durant une certaine période de l'année, qualifiée ici d'estivale bien que s'étendant au-delà de l'été.

Après avoir étudié la réponse du système de route solaire hybride à une excitation, les principales données climatiques utilisées sont décrites et un indicateur est construit à partir de celles-ci afin d'évaluer la quantité d'énergie disponible provenant de l'environnement et de comparer celle-ci entre plusieurs positions géographiques. Cet indicateur s'appuie sur les données climatiques et peut s'appliquer aussi bien en été qu'en hiver pour évaluer et comparer les pertes d'énergie, cette fois en vue de préserver la structure du gel.

Des cartes de l'énergie potentielle disponible ainsi que des apports environnementaux peuvent finalement être tracées, tout comme un indicateur évaluant l'efficacité de l'échange thermique. Une comparaison entre les différents climats et les revêtements semi-transparent et opaque est menée et une discussion est effectuée sur ces résultats.

Le modèle développé ici peut aussi être appliqué à d'autres types de structures, notamment des milieux présentant des inclusions de matériaux à changement de phase.

### 6.1 Étude de la réponse du système à une excitation

Cette section vise à caractériser l'évolution de la température du fluide et de la température de surface suite à l'application d'une excitation thermique au système. Celle-ci consiste en un échelon sur la température d'injection du fluide. Une étude est en particulier menée sur la distance au point d'injection du fluide et une discussion est tenue sur la largeur de la chaussée.

La route solaire hybride étudiée mesure 4 mètres de largeur et l'épaisseur considérée est de 1.5 mètre. Les propriétés thermiques des couches sont les suivantes :

— couche de surface :  $k = 0.85 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho c = 2700 \times 840 \times 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$

- couche poreuse :  $k = 1.03 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho c = 1.84 \times 10^6 \text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
- EME :  $k = 1.40 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\rho c = 2.254 \times 10^6 \text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$

Des conditions environnementales constantes sont utilisées :

- température de l'air :  $T_{air} = -10^\circ\text{C}$
- température du ciel :  $T_{ciel} = -16^\circ\text{C}$
- vitesse du vent :  $V_w = 3 \text{m.s}^{-1}$
- densité de flux solaire :  $\Phi_{sol} = 0 \text{W.m}^{-2}$

La vitesse d'écoulement du fluide est constante, égale à  $1.0 \times 10^{-4} \text{m.s}^{-1}$ . La température d'injection du fluide est d'abord maintenue constante, égale à  $10^\circ\text{C}$  afin d'établir un régime permanent. Un échelon est ensuite appliqué, faisant passer la température d'injection du fluide à  $20^\circ\text{C}$ .

### 6.1.1 Comparaison avec la relation analytique établie pour le régime permanent

Une comparaison des résultats en régime permanent établi avec la formulation analytique introduite dans le paragraphe 4.2.3 est présentée sur les figures 6.1a et 6.1b.

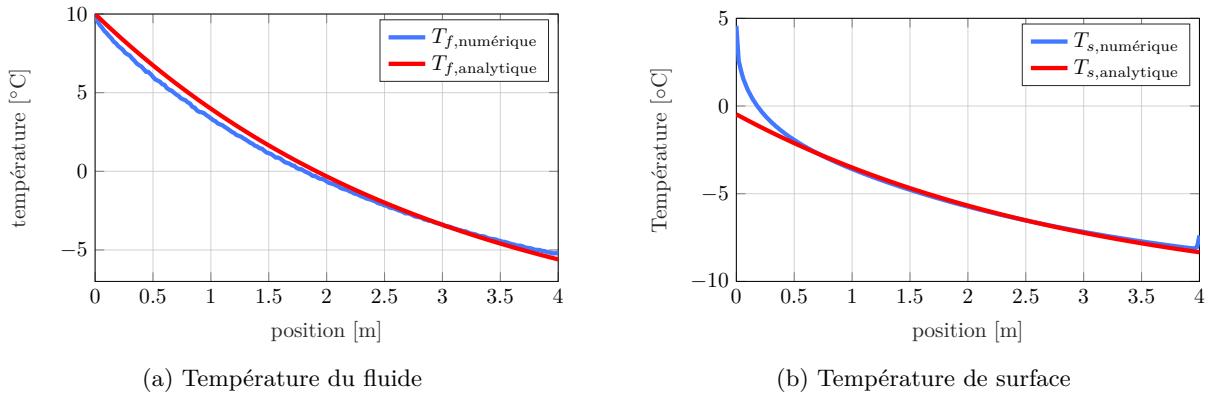


FIGURE 6.1 – Comparaison du modèle numérique et de la formulation analytique en régime permanent en fonction de la distance au point d'injection du fluide

Dans les deux cas, les températures correspondent, la différence de température restant inférieure à  $1^\circ\text{C}$  pour la température du fluide quel que soit l'éloignement au point d'injection, et même inférieure à  $0.1^\circ\text{C}$  entre 0.7 et 3.9 mètres pour la température de surface. Pour celle-ci, les conditions limites en adiabaticité, qui se sont pas prises en compte dans la solution analytique, ont une influence près des frontières verticales du domaine, en particulier près de l'injection du fluide et, dans une moindre mesure, près de la sortie.

### 6.1.2 Détermination des caractéristiques de la réponse temporelle du système

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer quelles sont les caractéristiques du système, notamment temporelle, en vue de pouvoir le réguler.

Un échelon est appliqué sur la température d'entrée du fluide : celle-ci passe de  $10$  à  $20^\circ\text{C}$ , les autres conditions restant inchangées.

La figure 6.2 représente l'évolution de la température en surface pour plusieurs distances par rapport à l'emplacement de l'injection du fluide.

Cette figure permet d'observer que le retard du système est d'autant plus important que l'éloignement au point d'injection est grand à cause de la durée mise par le fluide pour traverser la structure pendant son écoulement. La réponse du système s'allonge elle aussi.

À partir des données de températures de surface, il est possible de déterminer le retard du système en fonction de la distance au point d'injection du fluide. Nous nous basons ici sur le temps de réponse à 1 %, c'est-à-dire la durée, en une position donnée, que met le système pour que la température augmente de 1 % de son accroissement final. L'évolution de ce retard en fonction de la position est représentée sur la figure 6.3.



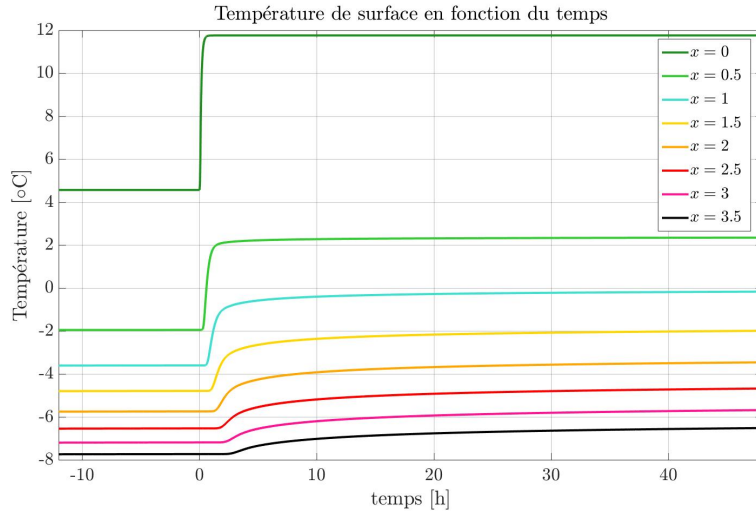


FIGURE 6.2 – Température de surface en fonction du temps et de l'éloignement au point d'injection

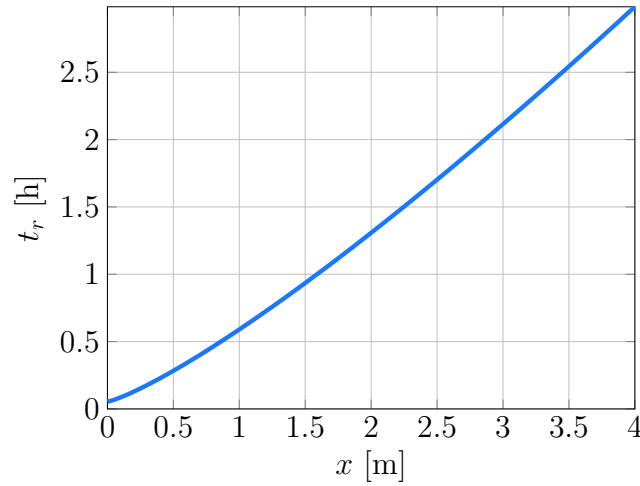


FIGURE 6.3 – Retard en fonction de la distance au point d'injection du fluide

Le retard  $t_r$  peut s'interpoler de la façon suivante :

$$t_r = 194 + 1930x^{1.226} \quad (6.1)$$

La réponse temporelle du système en une position  $x$  donnée peut s'approcher par une somme de systèmes du premier ordre. La température en une position donnée  $T_x$  peut être approximée de la façon suivante, pour  $t > t_r$  :

$$T_x(t - t_r) = A(1 - b_1 \exp(\lambda_1 t) - b_2 \exp(\lambda_2 t)) \quad (6.2)$$

Avec  $0 \leq b_1 \leq 1$ ,  $0 \leq b_2 \leq 1$  et  $b_1 + b_2 = 1$ .

Les coefficients  $A$ ,  $b_1$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (ces deux derniers étant exprimés ici en  $s^{-1}$ ) peuvent être interpolés et sont représentés sur les figures 6.4, 6.5 et 6.6.

### 6.1.3 Discussion des résultats

Les figures 6.3 et 6.6 montrent que l'influence d'une variation de la température d'injection du fluide se fait ressentir en moins de trois heures sur les quatre premiers mètres de la chaussée. Cependant, le

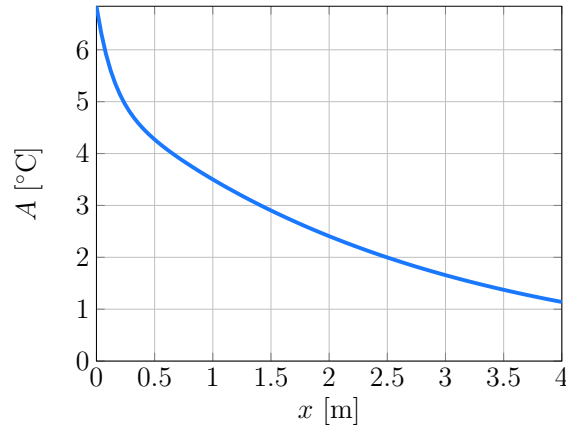


FIGURE 6.4 – Paramètre  $A$

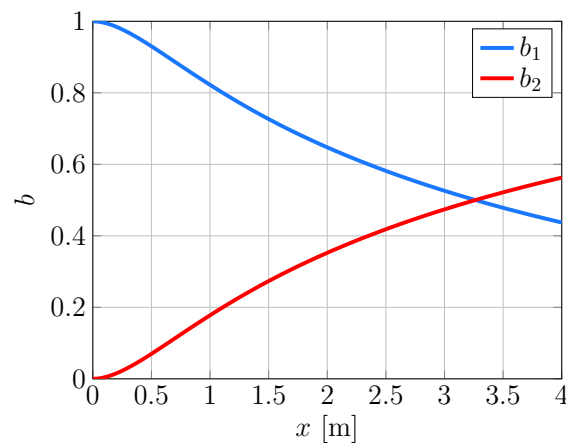


FIGURE 6.5 – Paramètres  $b_1$  et  $b_2$

temps de montée en température est beaucoup plus long, avec, à quatre mètres de l'injection, deux modes d'intensités comparables ayant des constantes de temps d'environ 5 et 35 heures.

Cette réponse à un échelon montre donc qu'il faut plusieurs heures voire dizaines d'heures pour que le système réponde à une sollicitation. En particulier, il sera nécessaire de tenir compte de ces constantes de temps lors de l'établissement de loi de commande, ce qui sera l'objet du chapitre 7, même si l'intensité de la réponse, représentée sur la figure 6.4, décroît avec la longueur de l'écoulement, ce qui peut nécessiter une importante élévation de la température à l'injection pour une longueur d'écoulement élevée.

## 6.2 Données nécessaires au fonctionnement du modèle numérique

Le modèle numérique permet d'établir la température à l'intérieur de la structure en fonction du temps. Pour fonctionner, un certain nombre de données est nécessaire, comme cela est schématisé sur la figure 6.7.

Les propriétés du système doivent ainsi être connues, en particulier les propriétés thermiques, conductivité et capacité thermique. Les propriétés optiques de la couche de surface semi-transparente et les propriétés de l'écoulement dans le milieu poreux (coefficient d'échange, porosité, vitesse de Darcy de l'écoulement) doivent aussi être déterminées. Pour cela, il est possible de réaliser de mesures sur le système pour estimer ces paramètres ou de s'appuyer sur des valeurs de la littérature.

Des données extérieures au système sont aussi nécessaires. Selon le niveau de précision souhaité ainsi que des données climatiques dont on dispose, plusieurs jeux de données peuvent être utilisés.

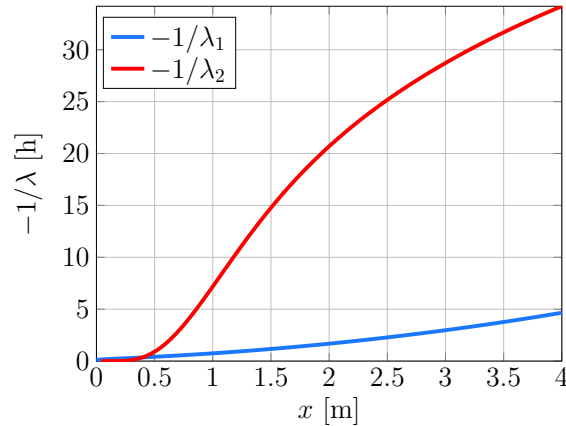


FIGURE 6.6 – Paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

Les fichiers météorologiques sont ici extraits du site EnergyPlus<sup>1</sup> ou de MeteoNorm (version 7)<sup>2</sup>. Ces fichiers comprennent notamment les coordonnées géographiques du lieu étudié, le rayonnement solaire diffus  $\Phi_s$ , le rayonnement solaire direct reçu sur une surface normale à la direction du rayonnement  $\Phi_{N,d}$ , le rayonnement atmosphérique, la température de l'air, la vitesse du vent et le point de rosée. Il est à noter que les deux bases de données ne peuvent être associés, les valeurs moyennes, que ce soit en températures ou en densités de flux étant le plus souvent plus basses pour les données issues d'EnergyPlus. En outre, les valeurs moyennes sur un mois ou sur l'année extraites de MeteoNorm se rapprochent davantage des valeurs données par Meteo France<sup>3</sup>, en particulier en ce qui concerne la température moyenne.

Dans le cas où certaines de ces données sont absentes, les corrélations présentées dans le chapitre 3 permettent d'utiliser les données présentes pour estimer celles qui manquent.

Le modèle multiphysique présenté au cours du chapitre 5 et schématisé sur la figure 6.8 permet de déterminer la luminance énergétique, et les champs de températures pour les phases fluide et solide au cours du temps.

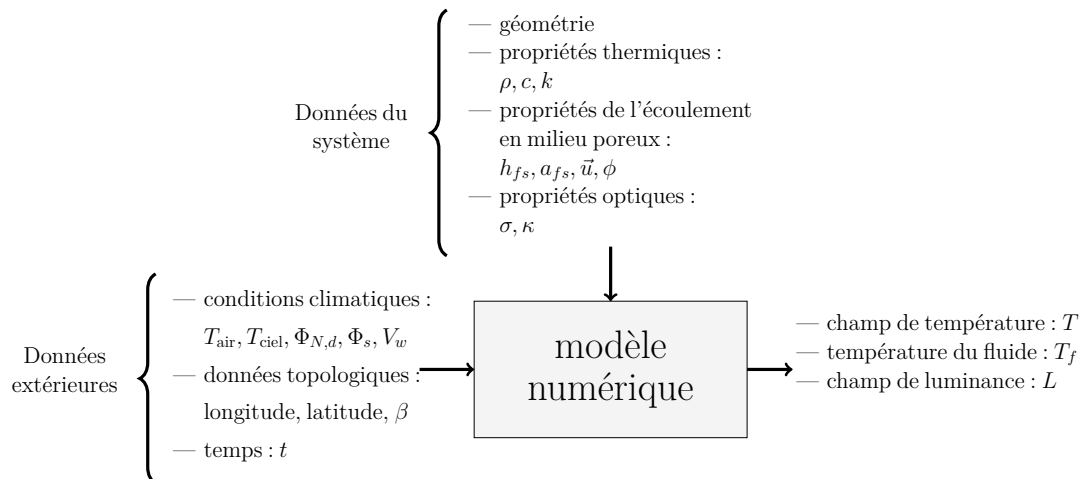


FIGURE 6.7 – Données du problème

Une synthèse des principales données climatiques pour quelques villes est présentée sur les figures 6.9. Une grande variété de conditions climatiques peut ainsi être prise en compte, avec des villes ayant :

- un climat océanique frais et humide (Nord-Ouest de la France).
- un climat océanique doux et humide (bassin Aquitain).

1. données en accès libre : <https://energyplus.net/weather>

2. <http://www.meteonorm.com/>

3. <http://www.meteofrance.com/climat/france>

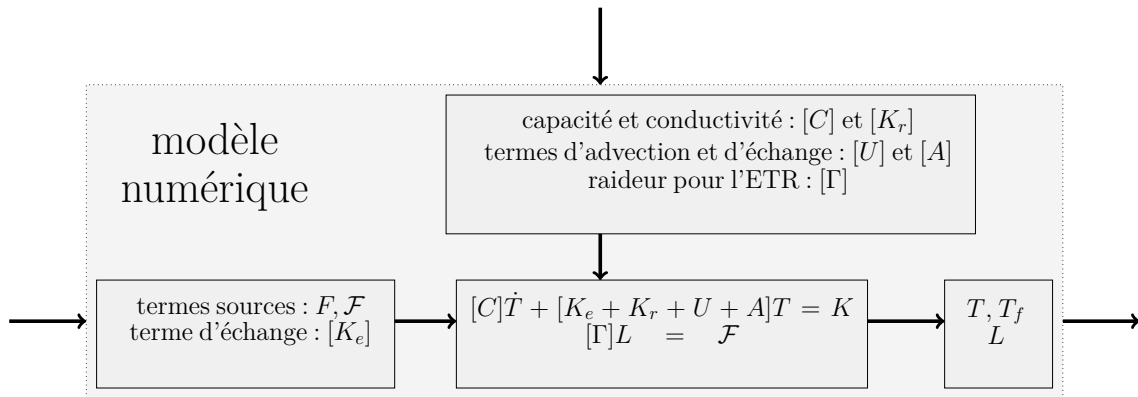


FIGURE 6.8 – Intégration des données au schéma numérique

- un climat océanique dégradé à influences continentales (Nord-Est), frais et plus sec que le climat océanique, avec notamment une température de ciel plus basse que pour la façade Ouest.
- un climat méditerranéen, doux, sec et plus ensoleillé qu'ailleurs
- un climat montagnard, frais et sec, dans le Massif Central et les Alpes. L'influence des Pyrénées n'est pas représentée ici.
- l'influence de l'effet d'îlot de chaleur urbain est également visible ici pour Paris avec une température de l'air plus élevée qu'ailleurs et un air plus sec.

Dans ce chapitre, l'étude menée porte principalement sur la fonction de récupération d'énergie qui se produit durant les mois les plus chauds de l'année. Les résultats présentés ici ne portent donc pas sur l'année complète, mais sur la période allant de mai à octobre, le choix de ce dernier mois étant lié à l'inertie thermique qui permet de conserver un sol encore relativement chaud en octobre. Une synthèse des principales données climatiques pour cette période de l'année est présentée sur les figures 6.10.

### 6.3 Notion de degré jour unifié

Nous cherchons dans cette section à construire un indicateur permettant à la fois d'évaluer les possibilités de récupération d'énergie et les besoins d'apports en énergie à partir de données climatiques, donc sans avoir besoin d'exécuter le modèle numérique, ce qui permet notamment d'apporter un outil à l'ingénieur pour estimer les performances énergétiques.

Cet indicateur doit pouvoir s'adapter à tout type de système permettant la récupération d'énergie ou un apport énergétique. En cela, l'indicateur doit se limiter à la prise en compte des conditions environnementales sans considérer les propriétés (géométriques, thermiques ou optiques) du système.

L'indicateur construit ici s'appuie sur la notion de degré jour. Il s'agit d'intégrer la différence entre une température déduite des données environnementales et un seuil lorsque cette différence est d'un signe donné.

Deux types de degrés jours sont ainsi définis : les degrés jours pour la fonction de chauffage de la structure, ou *heating*, lorsqu'il est nécessaire d'injecter un fluide chaud pour prévenir de la formation de verglas à la surface, et les degrés jours de refroidissement, ou *cooling*, lorsque la structure évacue la chaleur apportée par l'environnement.

Ces degrés jours sont utilisés dans la littérature principalement en agronomie et en thermique du bâtiment. L'indice de gel utilisé pour le dimensionnement des chaussées utilise également une formulation similaire [25].

Dans le domaine de l'agronomie, certains processus comme le développement des plantes ou la croissance de leurs feuilles nécessitent une température minimale pour que des réactions enzymatiques se produisent [163]. La croissance est alors d'autant plus importante que la température de l'air est grande devant ce seuil de température minimale. Au contraire, au-delà d'une autre température donnée, ces réactions peuvent ne plus se produire et la croissance sera d'autant plus faible que la température de l'air s'élèvera et se rapprochera de ce seuil [34].

En thermique du bâtiment, une température de l'air trop élevée entraîne, au-delà d'une certaine valeur,

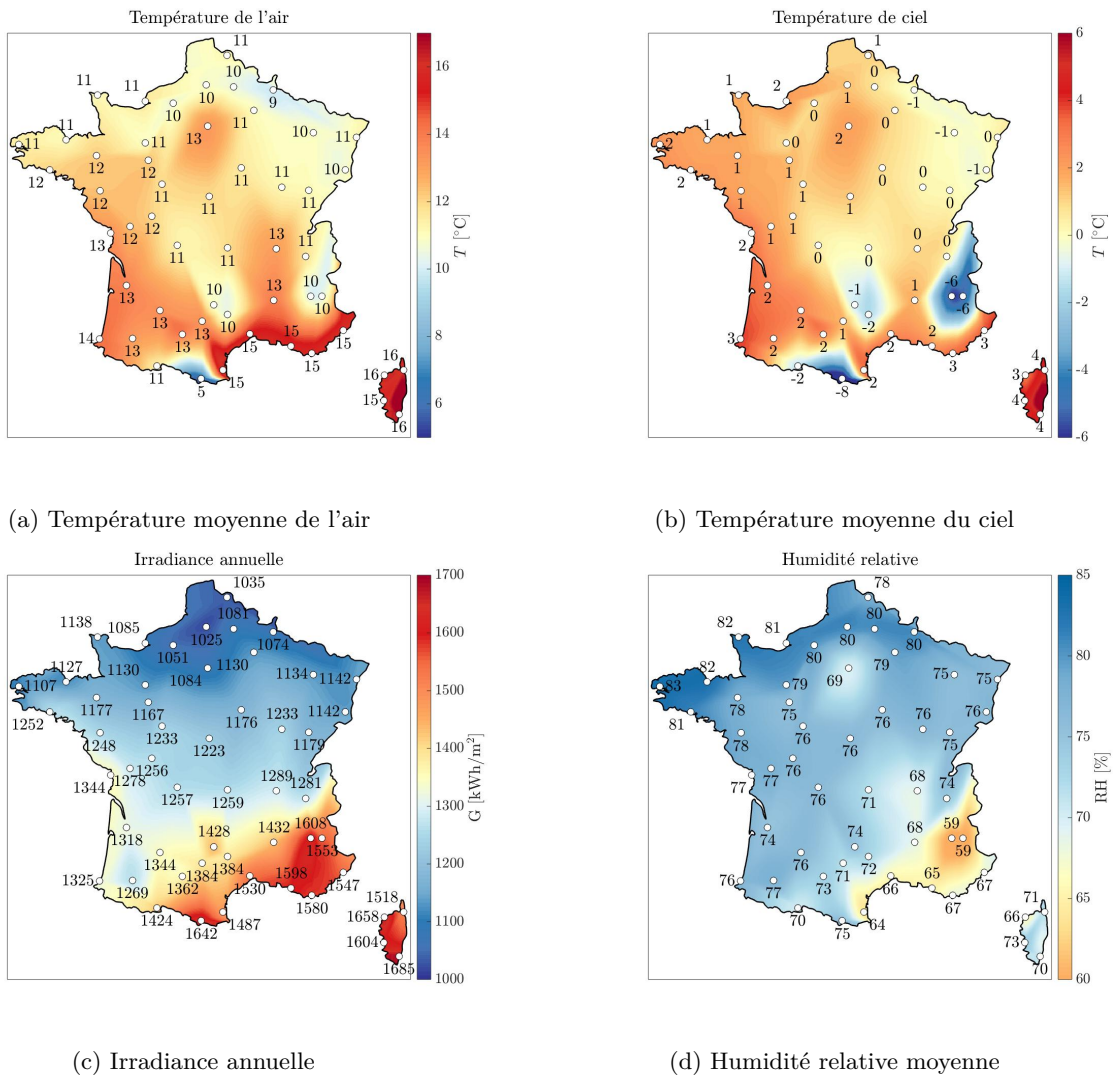


FIGURE 6.9 – Synthèse des données climatiques

des besoins en climatisation qui seront d'autant plus importants que la température de l'air sera élevée. Les besoins en consommation énergétique peuvent alors s'évaluer à partir de l'intégrale de la différence entre la température extérieure  $T_e$  et une température de consigne  $T_{\text{cons}}$ . Les degrés jours unifiés pour la fonction *cooling* s'écrivent alors :

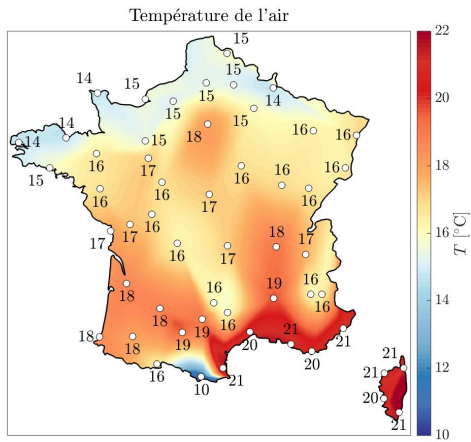
$$DJU_{\text{cooling}} = \int_t (T_e - T_{\text{cons}})^+ dt \quad (6.3)$$

Où  $(\cdot)^+$  fait référence à la partie positive :  $(a)^+ = \max(a, 0)$ . La température de consigne s'obtient à partir de la température souhaitée dans le bâtiment, corrigée en prenant en compte les gains provenant des apports solaires, des occupants, de la lumière, etc..

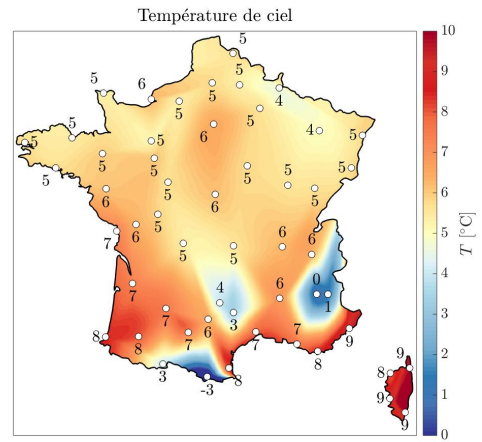
Connaissant le coefficient de perte thermique du bâtiment,  $K$ , exprimé en  $\text{W.K}^{-1}$ , et l'efficacité du système de climatisation  $\eta_c$ , la consommation annuelle en climatisation  $Q_c$  peut s'écrire [5] :

$$Q_c = \frac{K}{\eta_c} DJU_{\text{cooling}}(T_{\text{cons}}) \quad (6.4)$$

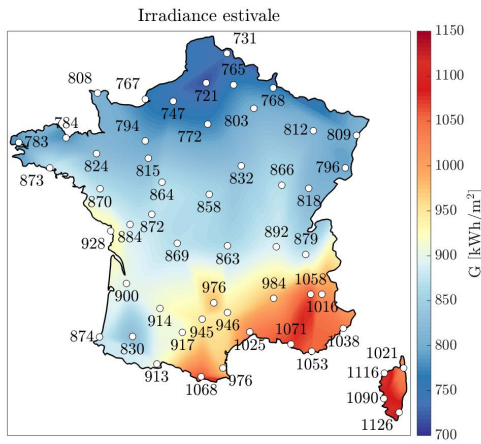
Au contraire, une température extérieure trop basse fait intervenir des besoins en chauffage, d'autant plus importants qu'il fait froid. Il est de nouveau possible d'introduire des degrés jours unifiés, cette fois-ci pour la fonction *heating* :



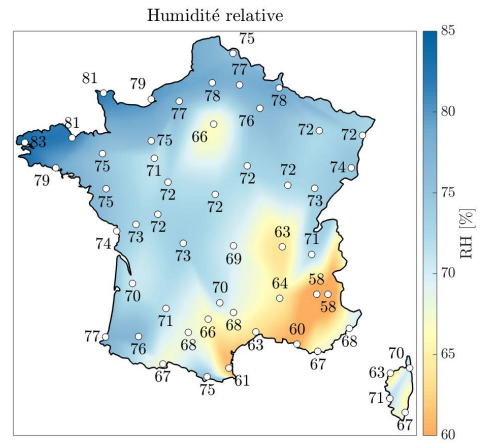
(a) Température moyenne de l'air de mai à octobre



(b) Température moyenne du ciel de mai à octobre



(c) Irradiance de mai à octobre



(d) Humidité relative moyenne de entre mai et octobre

FIGURE 6.10 – Synthèse des données climatiques durant la période de récupération d'énergie

$$DJU_{\text{heating}} = \int_t (T_{\text{cons}} - T_e)^+ dt \quad (6.5)$$

Et la consommation annuelle en chauffage  $Q_h$  peut s'estimer par [5] :

$$Q_h = \frac{K}{\eta_h} DJU_{\text{heating}}(T_{\text{cons}}) \quad (6.6)$$

Avec  $\eta_h$  l'efficacité du système de chauffage.

### 6.3.1 Fonctionnement en chauffage

Nous proposons dans ce paragraphe d'adapter la formulation donnée pour les  $DJU_{\text{heating}}$  en thermique du bâtiment. Contrairement au bâtiment qui voit la plupart de ses échanges thermiques se produire avec le milieu extérieur à la température  $T_e$ , et qui voit les apports solaires intégrés à la température de consigne, il n'est pas nécessaire ici de maintenir le sous-sol à une température donnée, et l'action doit se faire sur la surface de la route.

L'objectif est ainsi de faire en sorte que la température de la surface de la chaussée durant la période hivernale soit supérieure à un seuil de température donné, suffisamment élevé pour que le risque de

formation de verglas sur la route soit nul à ce seuil, ce qui reviendrait, en thermique du bâtiment, à maintenir la partie extérieure du mur au-dessus d'un seuil.

L'énergie apportée à la structure doit permettre d'accroître, lorsque c'est nécessaire, la température de surface pour atteindre le seuil. Il est supposé par la suite que l'énergie à apporter à la surface est proportionnelle à cette différence lorsque la température de surface est inférieure au seuil.

La température de la surface peut être estimée connaissant les conditions environnementales, comme cela a été fait dans le paragraphe 4.2.3. Afin de n'utiliser que des considérations climatiques, il est supposé que la surface de la route n'échange thermiquement qu'avec l'environnement extérieur, via les échanges radiatifs et convectifs ainsi que par les apports solaires. Les DJU représentent alors l'énergie à apporter depuis les couches souterraines pour élever la température de la surface.

Cette température de surface, considérée ici à l'équilibre thermique, est par la suite appelée température équivalente car prenant en compte les températures de l'air et du ciel ainsi que la densité de flux solaire. Elle est notée  $T_{\text{eq}}$  et s'obtient par :

$$T_{\text{eq}} = \frac{h_{\text{conv}}T_{\text{air}} + h_{\text{rad}}T_{\text{ciel}} + \Phi_{\text{solaire}}}{h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}}} \quad (6.7)$$

Avec  $h_{\text{conv}}$  le coefficient d'échange convectif,  $h_{\text{rad}} = 4\varepsilon\sigma T_{\text{ciel}}^3$  le coefficient d'échange radiatif,  $T_{\text{ciel}}$  la température du ciel,  $T_{\text{air}}$  la température de l'air et  $\Phi_{\text{solaire}}$  la densité de flux solaire.

La température seuil  $T_{\text{seuil}}$  est la température sous laquelle on souhaite que la température équivalente ne descende pas. Elle doit être telle qu'il n'y a pas de risque de formation de verglas lorsque la surface de la route se trouve à cette température.

Deux approches sont étudiées ici pour ce seuil de température. En première approche, on peut considérer qu'une température positive permet d'éviter l'apparition de verglas. En ajoutant un coefficient de sécurité, on peut alors écrire ce seuil sous la forme  $T_{\text{seuil}} = a$  avec, par exemple,  $a = 4^\circ\text{C}$ .

Il est aussi possible de prendre en compte l'humidité dans le calcul de ce seuil. En effet, si l'air est suffisamment sec, celui-ci n'est pas saturé en vapeur d'eau et il ne peut y avoir de dépôt de glace sur la chaussée. La température de saturation en vapeur d'eau, à humidité constante, correspond alors au point de givrage, ce qui signifie que, pour une température de surface supérieure au point de givrage, il ne peut pas y avoir formation de verglas. Ce point de givrage a été présenté plus en détail dans le paragraphe 3.4.5. De nouveau, un coefficient de sécurité  $a$  est rajouté au point de givrage  $T_g$ . Dans le cas où le point de givrage calculé est positif, le seuil peut être considéré comme égal au coefficient de sécurité appliqué par rapport au point de fusion de l'eau, d'où un second seuil s'écrivant  $T_{\text{seuil}} = \min(a, T_g + a)$ . De nouveau, le coefficient de sécurité  $a = 4^\circ\text{C}$  est utilisé.

Il est à noter qu'on a, dès lors que le coefficient de sécurité est le même pour les deux approches, un premier seuil de température supérieur ou égal au second et donc les DJU *heating* pour le seuil constant sont plus élevés que ceux pour lesquels le point de givrage est considéré : la première approche nécessite un chauffage plus important que la seconde.

### 6.3.2 Fonction *Cooling*

Dans le cadre de cette étude, deux objectifs peuvent être étudiés pour la fonction *cooling*. Comme pour la fonction *heating*, l'objectif peut être de ne pas franchir un seuil donné, ici un maximum à ne pas dépasser afin que la chaussée ne subisse pas une dégradation de ses performances mécaniques et de réduire le risque d'ornièrage. La formulation des degrés jours unifiés est alors similaire à celle de la prévention du verglas, avec une température équivalente de la surface, définie par (6.7), qui doit rester inférieure à un seuil donné. Ces degrés jours *cooling* représentent alors la quantité d'énergie à évacuer de la route pour la refroidir suffisamment.

Un second objectif est celui de la récupération d'énergie. Il est supposé ici que l'énergie thermique récupérée par le fluide durant son écoulement peut être en partie récupérée afin d'être soit directement utilisée (réseau de chaleur urbain), soit stockée en vue d'une utilisation en hiver pour cette fois-ci réchauffer la surface de la chaussée. Pour cela, il faut que le fluide ressorte plus chaud de la couche poreuse qu'il n'y est rentré. Le fait que la surface soit à une température supérieure à celle du fluide permet un apport en énergie au fluide et un échauffement de celui-ci. Nous supposons donc ici que la température de consigne est celle du fluide, en entrée, supposée connue et que la température extérieure est la température équivalente de surface.



Il est à noter que ces deux derniers types de degrés jours, s'ils sont définis par des relations similaires, ne représentent pas les mêmes échanges thermiques : dans le cas où on cherche à ne pas monter trop haut en température, on considère des apports de l'extérieur à la couche de surface qu'il faut évacuer alors que dans le second cas, on a affaire à une énergie disponible de l'extérieur pouvant être transmise au fluide.

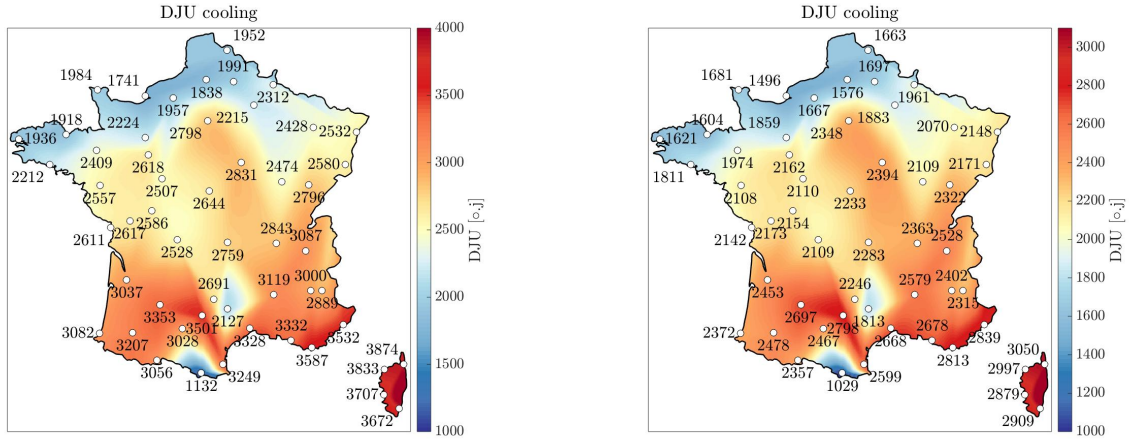
Une comparaison des DJU *heating*, pour le chauffage de la couche de surface en hiver et des DJU *cooling* pour la récupération d'énergie en été ne permet ainsi pas de comparer les besoins en chauffage avec le potentiel de récupération d'énergie.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous focalisons sur l'aspect récupération d'énergie, donc sur les DJU *cooling*. Le volet concernant la prévention du gel et l'étude des DJU *heating* seront l'objet du chapitre 7.

### 6.3.3 Évaluation des DJU *cooling*

Dans ce paragraphe, des valeurs de DJU sont données, établies à partir de fichiers contenant des données climatiques annuelles. Les DJU sont calculés à partir de la relation (6.3) en utilisant la température équivalente donnée par (6.7) et une température d'injection du fluide supposée constante, égale à 13°C, proche de la température dans le sol.

Une synthèse des DJU *cooling* est représentée sur la figure 6.11. Dans les deux cas, les cartes des DJU *cooling* entre les villes étudiées présentent des variations similaires à celle de la température moyenne de l'air de la figure 6.9a.



(a) DJU *cooling* annuels

(b) DJU *cooling* de mai à octobre

FIGURE 6.11 – Synthèse des DJU *cooling*

## 6.4 Résultats en récupération d'énergie

Il est supposé ici que l'énergie thermique récupérée par le fluide au cours de son écoulement dans la couche poreuse peut être captée. L'hypothèse est ainsi faite que c'est l'augmentation de la température du fluide entre son injection et sa sortie de la couche poreuse qui est à l'origine du potentiel d'apport en énergie. Ces apports d'énergie sont ici présentés rapportés à une surface.

Cet apport potentiel surfacique noté ici  $E$ , peut ainsi être calculé de la façon suivante :

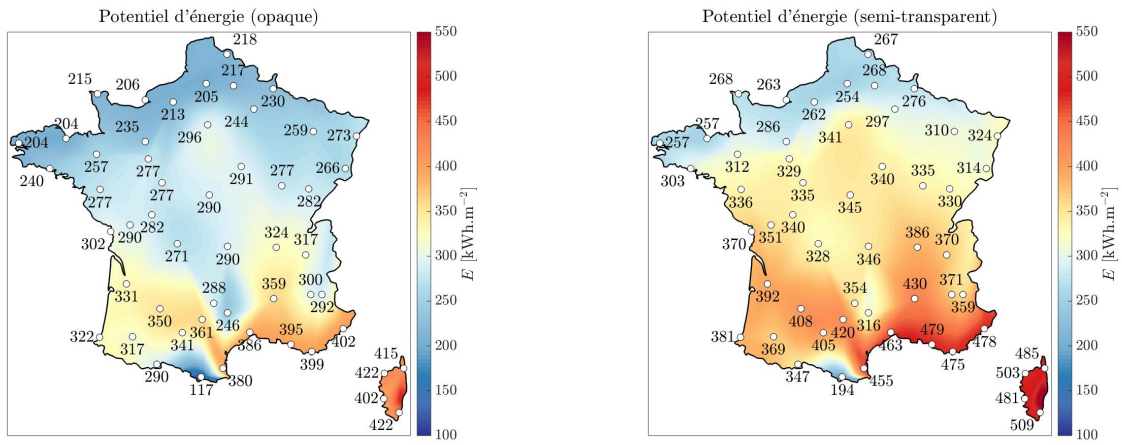
$$E = \int_t (\rho c)_f S u (T_{f,\text{out}} - T_{f,\text{in}})^+ dt \quad (6.8)$$

Avec  $S$  la section de l'écoulement,  $u$  la vitesse de l'écoulement,  $T_{f,\text{in}}$  la température d'injection du fluide et  $T_{f,\text{out}}$  sa température à la sortie de la couche poreuse.

Les conditions climatiques horaires annuelles synthétisées au cours des précédents paragraphes sont utilisées pour faire fonctionner le modèle numérique et permettent d'obtenir des résultats en potentiel de récupération d'énergie. En particulier, les effets du revêtement, opaque ou semi-transparent, sont analysés.



Le potentiel de récupération d'énergie  $E$  est représenté sous forme de carte pour les deux revêtements sur les figures 6.12. À chaque fois, le potentiel d'énergie calculé porte sur la période allant de mai à octobre.



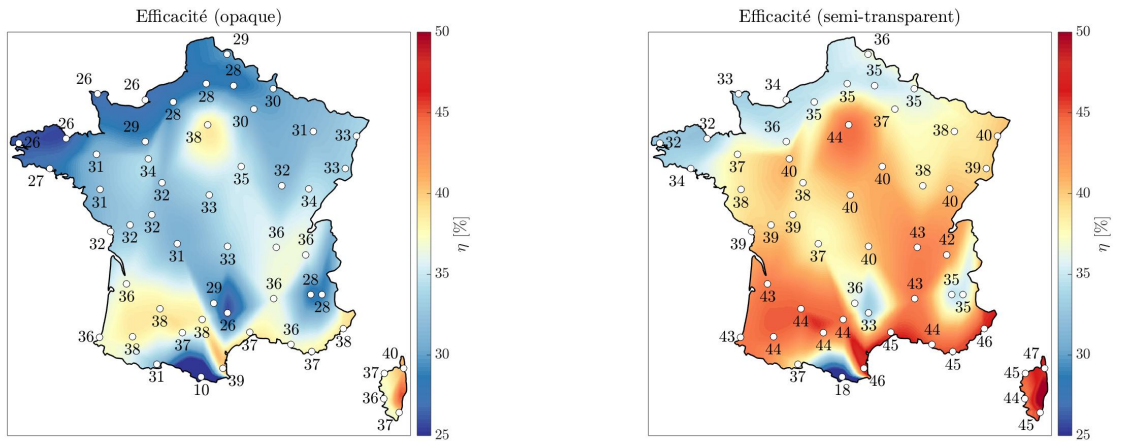
(a) Couche de surface opaque

(b) Couche de surface semi-transparente

FIGURE 6.12 – Synthèse des résultats en récupération d'énergie

En notant  $G$  l'irradiance surfacique reçue, l'efficacité du système, notée  $\eta$  est introduite. Cette grandeur permet d'évaluer la fraction de l'irradiance solaire pouvant potentiellement être collectée. On a ainsi  $\eta = \frac{E}{G}$ .

Cette efficacité est représentée pour les deux types de couches de surface sur les figures 6.13.



(a) Couche de surface opaque

(b) Couche de surface semi-transparente

FIGURE 6.13 – Synthèse des résultats en efficacité

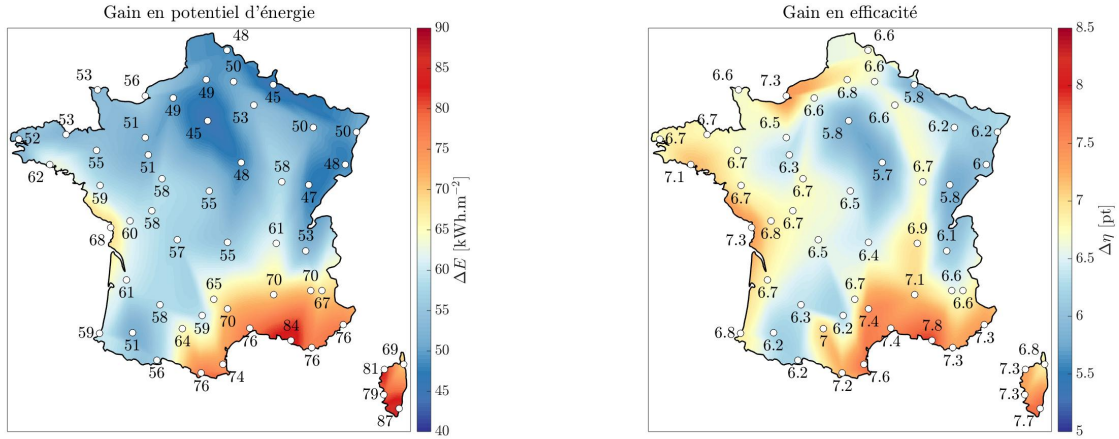
Pour les deux types de couches de surface, le potentiel d'énergie augmente lorsqu'on se dirige vers le Sud, là où les températures moyennes ainsi que l'irradiance sont les plus élevées. Les variations observées sur les cartes sont également similaires et les résultats obtenus sont cohérents avec les estimations de DJU *cooling* de la carte 6.11 avec en particulier un maximum à Paris et des minima en montagne.

Les cartes d'efficacité ressemblent quant à elles davantage à celles des températures moyennes 6.10a et 6.10b avec des valeurs plus basses en montagne et sur le Nord-Ouest de la France.

Étant donné qu'un revêtement semi-transparent permet une pénétration plus profonde du rayonnement solaire dans le sol, une énergie plus importante est captée en présence d'une couche de surface

semi-transparente, celle-ci étant d'autant plus importante que le matériau est transparent pour les principales longueurs d'ondes du rayonnement solaire.

Les augmentations du potentiel de récupération d'énergie et de l'efficacité sont représentées sur les figures 6.14a et 6.14b.



(a) Augmentation de  $E$

(b) Augmentation de l'efficacité  $\eta$

FIGURE 6.14 – Amélioration des performances avec un revêtement semi-transparent

L'augmentation du potentiel de récupération d'énergie présente des similarités avec la carte de l'irradiance estivale 6.10c avec en particulier une augmentation plus importante le long de la façade atlantique, du Pays Basque jusqu'à la pointe bretonne ainsi que dans le Sud-Est de la France. Ailleurs, les valeurs sont assez homogènes même s'il peut être noté que l'accroissement de  $E$  est minimal à Paris ce qui pourrait indiquer une influence négative ou très faible de la température et des DJU *cooling* sur les variations de  $E$  étant donné que les zones montagneuses ne semblent pas non plus se détacher des régions de plaine.

L'augmentation de l'efficacité, en moyenne de 6.7 pt, est quant à elle assez uniforme sur le pays avec des valeurs allant de 5.7 pt à 7.8 pt, ce qui signifie que le choix d'un revêtement semi-transparent plutôt qu'opaque permet d'avoir un gain important de potentiel de récupération d'énergie au regard de l'irradiance. L'augmentation de l'efficacité semble une nouvelle fois être plus importante avec l'irradiance, la façade atlantique ainsi que les régions méditerranéennes présentant des augmentations plus élevées.

Un rapprochement des résultats sur le potentiel d'énergie récupérable avec les DJU *cooling* peut être effectué en représentant la grandeur  $E$  en fonction des DJU *cooling* pour les villes étudiées, ce qui a été réalisé sur la figure 6.15.

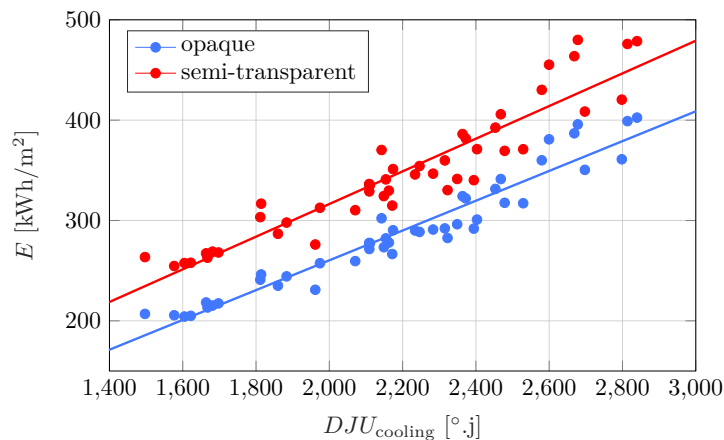


FIGURE 6.15 – Potentiel d'énergie récupérable fonction des DJU *cooling* pour les 53 villes étudiées

Les courbes de tendance obtenues permettent d'estimer le potentiel en récupération d'énergie dans le cas étudié ici par une corrélation linéaire :

$$E_{\text{opaque}} = 0.1645 \times DJU_{\text{cooling}} - 11.07 \quad (6.9)$$

$$E_{\text{semi-transparent}} = 0.1517 \times DJU_{\text{cooling}} - 43.37 \quad (6.10)$$

Il faut cependant noter que les résultats présentés ici ne sont valables que pour une longueur de 4 m et un matériau semi-transparent ayant les propriétés utilisées ici. En particulier, si le fluide peut absorber beaucoup d'énergie thermique au début de son écoulement, son échauffement fait que l'absorption d'énergie se fait ensuite de moins en moins bien. Ainsi, si l'énergie potentielle totale représentée sur la figure 6.16 continue d'augmenter avec la longueur de l'écoulement, l'énergie potentielle surfacique  $E$  (figure 6.17) diminue tout comme l'efficacité de l'échangeur thermique (figure 6.18).

Ces figures ont été obtenues en relevant la température par tranches de 20 cm d'éloignement du point d'injection du fluide puis en en déduisant les performances énergétiques.

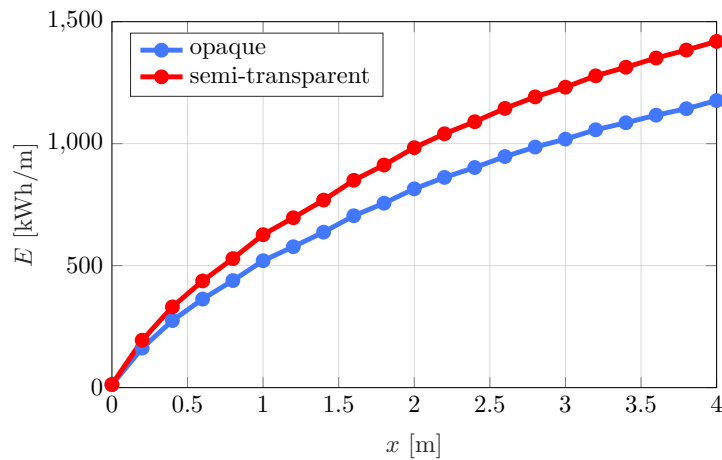


FIGURE 6.16 – Potentiel d'énergie récupérable moyen en fonction de la distance au point d'injection du fluide

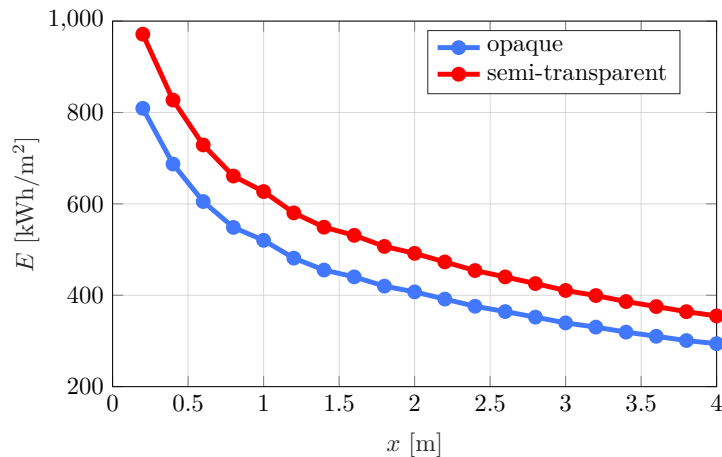


FIGURE 6.17 – Potentiel surfacique d'énergie récupérable moyen en fonction de la distance au point d'injection du fluide

La figure 6.18 fait apparaître une efficacité supérieure à 100 % sur les premiers centimètres de la route. En effet, au cours de la période estivale, la température de l'air est le plus souvent supérieure à celle du fluide au moins au début de son écoulement. L'air contribue ainsi en partie au chauffage du fluide.

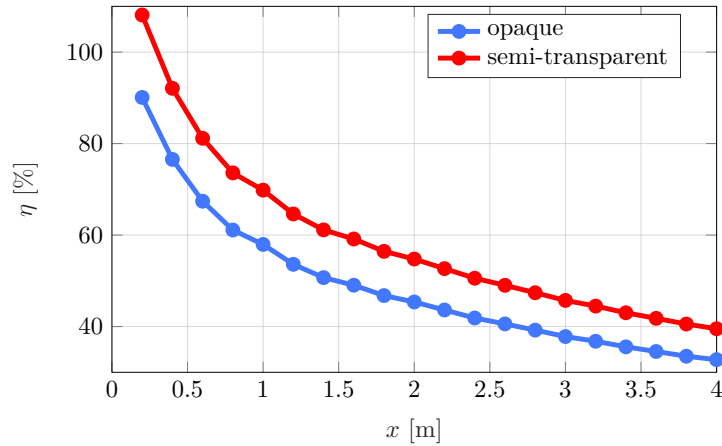


FIGURE 6.18 – Efficacité de l'échange thermique en fonction de la distance au point d'injection du fluide

Cette efficacité décroissant avec la longueur de l'écoulement, le choix d'un compromis entre l'efficacité de l'échange thermique et le coût de l'infrastructure est donc nécessaire.

## 6.5 Synthèse

Au cours de ce chapitre, les conditions environnementales auxquelles le système de route solaire hybride pourrait être soumis *in situ* ont été présentées et ont permis d'introduire la notion de degré jour unifié ou DJU. Cet indicateur permet, pendant la période estivale, d'identifier les zones géographiques pouvant apporter le plus d'énergie au système.

Le modèle numérique introduit au cours des chapitres précédents a pu être utilisé sur des données climatiques annuelles afin d'obtenir l'évolution du champ de température dans la route solaire hybride au cours du temps pendant l'année. De ces résultats, des données de potentiel d'énergie récupérable ont pu être dégagées. La représentation de ces résultats a permis de mettre en évidence une similarité de la carte obtenue avec celle des DJU *cooling* mais aussi d'estimer un important potentiel d'énergie.

Pour ce cas d'étude avec une longueur d'écoulement de quatre mètres, le potentiel d'énergie calculé moyen sur la France, rapporté à l'irradiance, montre qu'environ 33 % de l'apport solaire pourrait être collecté avec un revêtement opaque et ce chiffre est encore accru pour une couche de surface semi-transparente, atteignant environ 39 % ici.

Il faut cependant noter que ces performances dépendent fortement de nombreux paramètres. En plus l'influence des conditions environnementales qui a été développée dans ce chapitre, la longueur de l'écoulement joue aussi un rôle important. Si son augmentation accroît la surface d'apports solaire, elle réduit aussi fortement l'efficacité de l'échange thermique.

## Chapitre 7

# Optimisation et contrôle commande

Après avoir étudié dans le chapitre précédent l'aspect récupération d'énergie à l'aide des routes solaires hybrides, nous développons dans ce chapitre l'aspect prévention du gel. Pour ce faire, de l'énergie qui a pu être stockée à la suite de la période de récupération d'énergie est apportée au système afin de réchauffer le fluide. Au cours de son écoulement, celui-ci permet d'augmenter la température de la couche poreuse, chaleur qui en se diffusant atteint la surface. Si le fluide est injecté suffisamment chaud, il ne peut y avoir formation de verglas à la surface de la route.

Comme pour le chapitre précédent, des considérations climatiques sont d'abord exposées, afin de déterminer les régions les plus susceptibles d'avoir recours à ce type de dispositif.

Le contrôle en température du fluide injecté est ensuite détaillé. À partir du modèle direct présenté dans les chapitres précédents, un problème de minimisation est introduit, ce qui amène à l'utilisation de la méthode de l'état adjoint. Celle-ci permet non seulement de déterminer la température d'injection du fluide, mais aussi de reconstruire les paramètres thermiques intervenant dans l'équation de diffusion de la chaleur.

Une application de cette méthode d'optimisation est alors proposée, en s'appuyant sur des données climatiques relatives à plusieurs climats. Les performances énergétiques des routes solaires hybrides peuvent ainsi être discutées.

### 7.1 Données climatiques

Les principales données climatiques en période hivernale (températures de l'air et de ciel, humidité et irradiance) sont représentées sur les figures 7.1.

Ces cartes montrent que c'est une grande moitié Nord-Ouest de la France qui est la plus soumise au risque de formation de verglas avec des températures moyennes plus qu'à proximité des façades maritimes. Les zones montagneuses sont tout particulièrement concernées par ce risque avec des températures de l'air plus basses qu'ailleurs et un écart encore plus conséquent pour les températures de ciel à cause d'un ciel souvent plus dégagé, ce qui apparaît également sur la carte d'humidité (figure 7.1c). Celle-ci se situe entre 80 et 85% sur une grande partie de la France, seul le Sud-Est, les zones montagneuses et dans une moindre mesure la région parisienne conservent un taux d'humidité plus faible.

L'irradiance, à cause de la position plus basse du Soleil dans le ciel, est beaucoup plus faible que lors de la période estivale et représente, sur ces cinq mois, environ 20 % du total annuel. Son influence sur le champ de température de la route solaire hybride est donc fortement réduite.

### 7.2 Évaluation des besoins en énergie avec les DJU

Les DJU, dont le calcul a été présenté dans le paragraphe 6.3.2 sont ici calculés de deux manières, en considérant deux différents seuils de température en-dessous desquels on ne souhaite pas que la température de la surface de la route descende. Dans le premier cas, ce seuil est constant, égal à un coefficient de sécurité par rapport à 0°C, ici choisi à  $T_{\text{sec}} = +4^\circ\text{C}$  pour prendre en compte à la fois les imprécisions des données du problème ainsi que celles du modèle. On a alors  $T_{\text{seuil}} = T_{\text{sec}}$ .

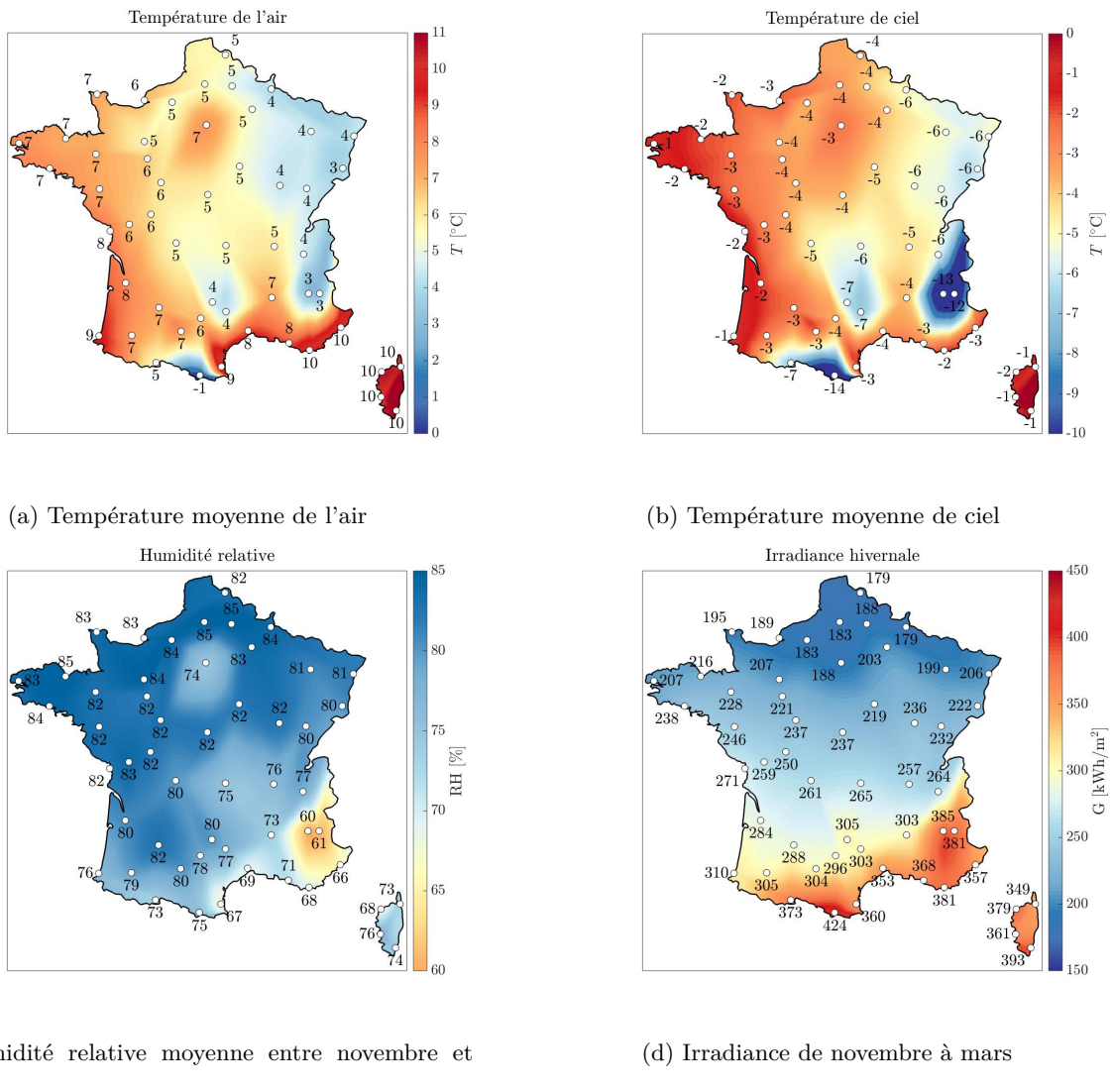


FIGURE 7.1 – Principales données climatiques entre novembre et mars

Dans le second cas, cette marge de sécurité est ajoutée au point de givrage  $T_g$  de telle sorte qu'on a  $T_{\text{seuil}} = \min(T_g + T_{\text{sec}}, T_{\text{sec}})$ . Seul le cas d'une température de givrage calculée positive permet alors d'avoir  $T_{\text{seuil}} = T_{\text{sec}}$ .

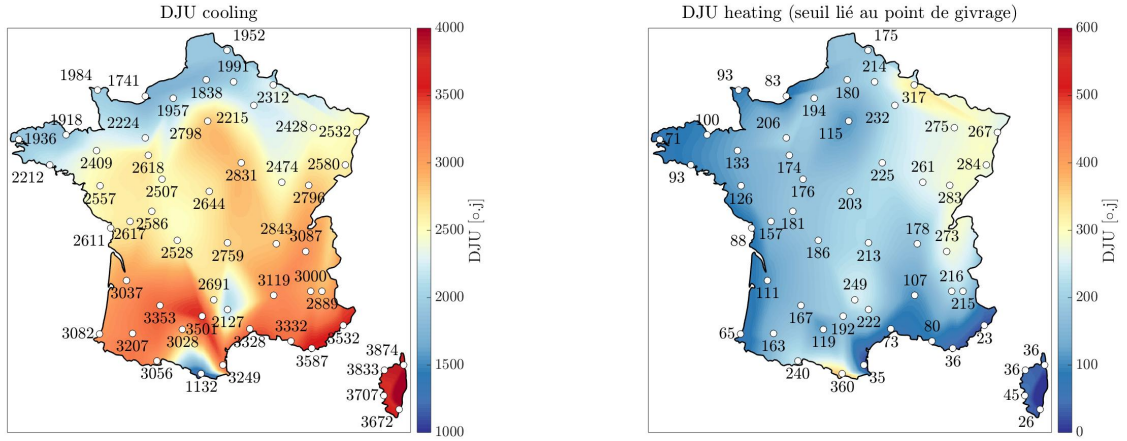
Des données de DJU *heating* sont représentées sur les figures 7.2.

Les deux cartes 7.2 présentent des allures similaires, les zones présentant les valeurs de DJU *heating* les plus élevées ou les plus basses étant assez similaires à chaque fois. Ces cartes présentent des similitudes avec celles des températures de l'air et de ciel (figures 7.1a et 7.1b) avec des besoins *a priori* de chauffage plus élevés dans une grande moitié Nord-Est de la France et en particulier sur les massifs montagneux.

Cependant, des variations importantes sont présentes entre ces deux cartes. La baisse, en %, des DJU *heating* entre les deux seuils de température est ainsi représentée sur la figure 7.3.

Cette figure fait apparaître une différence relative plus importante entre les deux types de DJU *heating* calculés lorsque le climat est sec. En particulier, si la baisse est faible pour le climat océanique de l'Ouest de la France (de 10 à 20 %), elle est plus importante dans l'Est là où l'influence continentale se fait ressentir (de -30 à -35 %) et est encore plus élevée en montagne avec des baisses dépassant les 60 %. Près de la mer méditerranéenne, la baisse est moins sensible que pour le reste de la moitié Est de la France mais les valeurs initiales des DJU *heating* étaient déjà faibles. La carte 7.3 est ainsi assez proche de celle de l'humidité moyenne de la figure 7.1c avec une baisse plus importante dans une moitié Sud-Est de la France, là où l'humidité est globalement la plus basse.





(a) DJU *heating* annuels pour le seuil  $T_{\text{seuil}} = +4^\circ\text{C}$

(b) DJU *heating* annuels pour le seuil  $T_{\text{seuil}} = \min(T_g + 4, +4^\circ\text{C})$

FIGURE 7.2 – Synthèse des DJU *heating*

Cette baisse des DJU *heating* obtenue en se basant sur le point de givrage signifie que le besoin en chauffage sera davantage réduit sur l'Est de la France et en montagne, ces besoins devenant d'autant plus faibles que le climat est sec et donc que le point de givrage est bas. En particulier, c'est dans les zones montagneuses, qui sont les plus soumises au risque de verglas, que l'économie apparaît comme étant la plus importante.

## 7.3 Formulation du problème

### 7.3.1 Présentation du problème

Dans cette partie, nous cherchons à maintenir la surface de la structure hors gel en minimisant le coût énergétique requis pour le chauffage du fluide caloporteur en entrée du système.

Pour cela, nous considérons un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  constitué d'une superposition de couches solides, dont une est poreuse. Ce domaine possède un élément de frontière  $\Gamma_S \subset \partial\Omega$  à travers lequel des échanges thermiques ont lieu entre le domaine et l'environnement.

La phase fluide contenue dans la couche poreuse constitue un domaine noté  $\Omega_f$ , de frontière  $\partial\Omega_f$ . Le fluide est injecté au travers de l'élément de frontière d'entrée  $\Gamma_f \subset \partial\Omega_f$  puis s'écoule de façon gravitaire à travers les pores de la couche poreuse (figure 7.4).

Nous nous plaçons dans le cas où la température sur la surface  $\Gamma_S$  doit être supérieure à un seuil donné, noté  $T_{\text{seuil}}$ , typiquement pour éviter les risques de gel, tout en minimisant les dépenses énergétiques. Ce seuil de température peut évoluer en fonction du temps et correspondre au point de givrage corrigé d'un coefficient de sécurité.

Une fonction coût est introduite et permet de prendre en compte le coût du chauffage du fluide sous la contrainte  $T_{\text{surf}} \geq T_{\text{seuil}}$ .

### 7.3.2 Formulation du problème d'optimisation

Nous notons  $[0, t_a]$  l'intervalle de temps étudié,  $t_a$  étant l'horizon temporel. La température de surface et la température d'entrée du fluide vérifient alors  $T_{\text{surf}} \in L^2(\Gamma_S, [0, t_a])$  et  $T_{f,\text{in}} \in L^2([0, t_a])$ . De plus,  $T_{f,\text{ref}}$  désigne une température de référence pour le fluide. Cette température de référence est celle du stockage du fluide dans un réservoir et est telle que la dépense énergétique pour avoir une température du fluide en entrée égale à cette valeur soit donc nulle. La température de surface  $T_{\text{surf}}$  est alors la réponse sur  $\Gamma_S$  du système à la température d'injection du fluide. En notant  $\hat{f}$  la réponse du modèle thermique à la surface, on peut noter  $T_{\text{surf}} = \hat{f}(T_{f,\text{in}})$ .

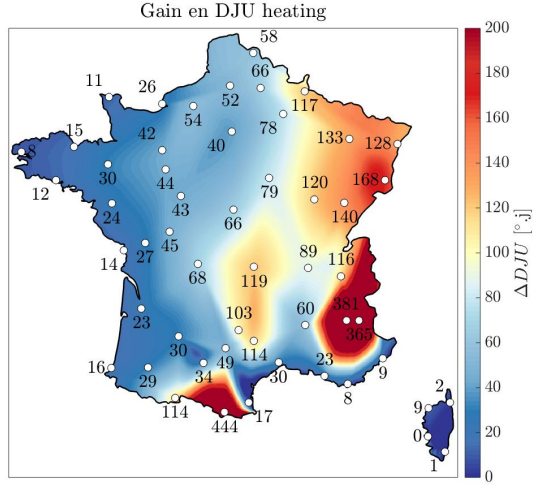


FIGURE 7.3 – Baisse relative des DJU *heating* entre les deux approches

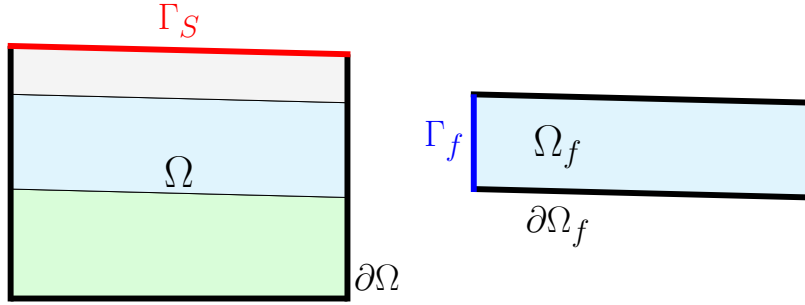


FIGURE 7.4 – Domaines et frontières étudiés

L'espace des paramètres est noté  $\mathcal{U} = L^2([0, t_a])$ , auquel est associé le produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{U}}$  défini, pour tout  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ , par :

$$\langle u_1 | u_2 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_{t=0}^{t_a} u_1(t)u_2(t)dt \quad (7.1)$$

Ce produit scalaire est associé à la norme notée  $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$ .

La fonction coût  $J_{energ}$  associée à la minimisation des dépenses énergétiques correspond alors à la différence entre la température du fluide injecté et la température de référence  $T_{f,ref}$  :

$$J_{energ}(T_{f,in}) = \frac{1}{2} \|\max(0, T_{f,in} - T_{f,ref})\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.2)$$

Le problème de minimisation est alors le suivant :

$$\text{déterminer } u \in \mathcal{U} \text{ tel que } u = \arg \min_{T_{f,in} \in \mathcal{U}} J_{energ}(T_{f,in}) \text{ et } T_{surf} \geq T_{seuil} \quad (7.3)$$

Le problème est reformulé en terme de problème de minimisation sans contrainte, de sorte que la contrainte  $T_{surf} \geq T_{seuil}$  est réécrite en contrainte faible.

Pour cela, l'espace des mesures, noté  $\mathcal{M}$ , est introduit ; il s'agit de l'espace contenant le champ de température à la surface :  $\mathcal{M} = L^2(\Gamma_S, [0, t_a])$ . Le produit scalaire usuel sur  $\mathcal{M}$  est noté  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  et est défini, pour tout  $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ , par :

$$\langle v_1 | v_2 \rangle_{\mathcal{M}} = \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_S} v_1(x, t)v_2(x, t)dSdt \quad (7.4)$$



La norme  $\| \cdot \|_{\mathcal{M}}$  est associée à ce produit scalaire. Pour tout  $v \in \mathcal{M}$  :

$$\|v\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle v|v \rangle_{\mathcal{M}} \quad (7.5)$$

La fonction coût associée au terme de contrainte  $J_{\text{cont}}$  doit être pénalisante lorsque la température de surface  $T_{\text{surf}} = \hat{f}(T_{f,\text{ref}})$  est inférieure au seuil  $T_{\text{seuil}}$ . Si  $T_{\text{surf}} \geq T_{\text{seuil}}$ , la pénalisation n'est pas nécessaire. Nous proposons d'écrire ce terme sous la forme :

$$J_{\text{cont}}(T_{f0}) = \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(T_{f,\text{in}}) - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.6)$$

En notant  $u$  le paramètre à minimiser, ici  $u = T_{f,\text{in}}$ , la fonctionnelle  $J$  à minimiser s'écrit comme la somme du résidu en surface  $J_{\text{res}}$  et des dépenses énergétiques  $J_{\text{energ}}$  :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u - T_{f,\text{ref}}\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.7)$$

Où  $\lambda > 0$  est une constante, permettant d'ajuster l'intensité de la contrainte.

En notant  $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$ , la fonctionnelle  $J$  peut être réécrite, à une constante multiplicative près :

$$J(u) = \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u - T_{f,\text{ref}}\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.8)$$

Le second terme de (7.8) correspond alors à un terme de Tikhonov et permet de régulariser le problème. Le problème de minimisation s'écrit alors :

$$\text{déterminer } u \in \mathcal{U} \text{ tel que } u = \arg \min_{T_{f,\text{in}} \in \mathcal{U}} J(T_{f,\text{in}}) \quad (7.9)$$

Ce problème peut alors être vu comme un problème de reconstruction, l'objectif étant de reconstruire la température d'injection du fluide amenant à une température de surface supérieure ou égale au seuil donné, avec un terme de régularisation prenant en compte les dépenses énergétiques.

## 7.4 Introduction aux problèmes inverses

### 7.4.1 Introduction

La démarche habituelle de modélisation consiste à déterminer la réponse d'un modèle à partir de données d'entrée. Il s'agit de reproduire les relations physiques entre des causes (les entrées) et certains effets (les sorties). Ces types de problème sont appelés *problèmes directs* dans la mesure où ils respectent le principe de causalité, à savoir qu'une cause, les entrées, entraîne des effets, les sorties.

Contrairement aux problèmes directs, les problèmes inverses consistent à déterminer les causes d'un phénomène physique à partir d'observations partielles de ses effets. L'objectif de la résolution de ces problèmes est alors de déterminer un ensemble de données d'entrée, les paramètres habituellement connus dans le cas du problème direct, à partir de mesures indiquant l'état du système.

Le but est alors d'utiliser le modèle de façon indirecte, à travers une procédure d'optimisation. Ceci est schématisé sur la figure 7.5.

Une caractéristique des problèmes inverses est leur caractère mal posé [235] qui provient du non respect de la causalité physique. Ceci renvoie à la notion d'identifiabilité d'une part, et au besoin de régularisation d'autre part.

Un système est identifiable si la quantité d'informations disponible (les données) permet de déterminer de façon unique la solution au problème. La solution au problème ne dépendant pas de façon continue des données à cause du non respect du principe de causalité, la résolution du problème est instable et il faudra faire appel à des techniques de régularisation afin d'obtenir une solution approchée de manière stable.

De nombreux domaines font appel à des problèmes inverses. En astrophysique, les propriétés des corps célestes (masse, composition, éventuellement taille) n'étant pas directement accessibles, ce sont des observations (vitesse ou luminosité par exemple) qui permettent d'obtenir ces données. En médecine, de nombreux outils utilisent tels l'IRM, le scanner, la radiographie ou l'échographie. Les climatologues sont capables, à partir d'étude d'échantillons qui nous sont parvenus (carottes glaciaires ou prélèvements de roches) et de modèles, de retracer l'histoire climatique, et ainsi de prévoir l'évolution future du climat.

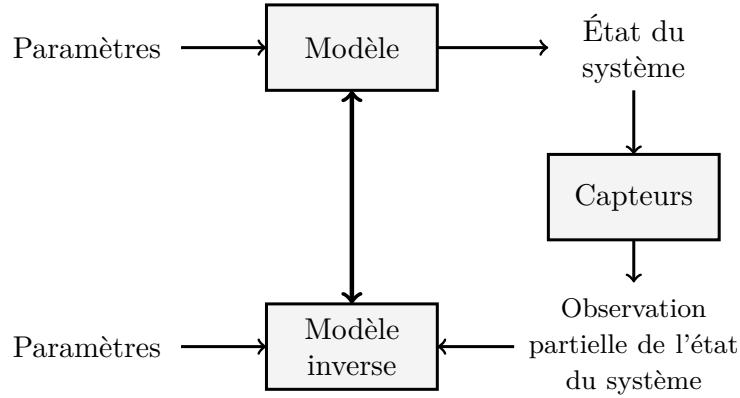


FIGURE 7.5 – Problème inverse

### 7.4.2 Formulation

L'objectif du problème inverse est de déterminer un ensemble de paramètres  $u$  appartenant à l'espace des paramètres  $\mathcal{U}$  tel que les résultats  $f(u)$  obtenus à l'aide du modèle  $f$  soient les plus proches possible des mesures  $m$  de l'espace des mesures  $\mathcal{M}$ .

Il s'agit donc de déterminer  $u \in \mathcal{U}$  tel que la norme  $\|f(u) - m\|_{\mathcal{M}}$  soit minimale. On cherche donc :

$$\arg \min_{u \in \mathcal{U}} \|f(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.10)$$

D'un point de vue mathématique, la formulation (7.10) n'assure cependant pas l'unicité de la solution du problème à cause de la non-linéarité de  $f$ . Dans un premier temps, on considère  $f$  linéaire ( $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ ) avant d'étendre les résultats au cas général.

### 7.4.3 Régularisation

Le problème (7.10) est alors équivalent à l'équation normale [77] :

$$f^* f(u) = f^*(m) \quad (7.11)$$

Où  $f^*$  est l'opérateur adjoint de  $f$ .

On peut définir l'opérateur  $f^+$ , appelé inverse généralisé, tel que :

$$f^+ = (f^* f)^{-1} f^* \quad (7.12)$$

L'équation (7.11) se réécrit alors sous la forme :

$$u = f^+(m) = (f^* f)^{-1} f^*(m) \quad (7.13)$$

Afin d'étudier la stabilité de l'opérateur  $f^+$ , nous allons utiliser la théorie spectrale et en particulier la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur  $f$ , [77] : il existe une suite  $(\sigma_n)_n$  positive strictement décroissante convergente vers 0 et deux familles orthogonales  $\{v_n\}_n$  et  $\{w_n\}_n$  telles que :

$$\begin{cases} f(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \langle u; v_n \rangle w_n \\ f^*(m) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \langle m; w_n \rangle v_n \end{cases} \quad (7.14)$$

On a alors :

$$f^* f(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n^2 \langle u; v_n \rangle v_n \quad (7.15)$$

L'opérateur autoadjoint  $f^*f$  peut donc se diagonaliser sur la base de ses vecteurs propres  $\{v_n\}_n$ . On montre alors [77] :

$$u = f^+(m) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\langle f^*(m); v_n \rangle}{\sigma_n^2} v_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\langle m; w_n \rangle}{\sigma_n} v_n \quad (7.16)$$

L'équation (7.16) fait apparaître une instabilité de l'opérateur  $f^+$  à cause de la convergence vers 0 des  $\sigma_n$ .

L'équation (7.16) fait aussi apparaître des manières d'approcher ce problème des valeurs singulières  $\sigma_n$  qui tendent vers 0 : il s'agit de la *régularisation* du problème inverse.

Nous allons nous intéresser par la suite à deux méthodes de régularisation qui ont été mises en œuvre pour la résolution des deux problèmes inverses étudiés ici : thermique et électromagnétique.

La principale différence entre ces deux problèmes réside dans la possibilité d'utiliser une hypothèse de linéarité.

La première méthode de régularisation, qui apparaît aussi comme la plus évidente à la vue de la relation (7.16) consiste à tronquer cette série et à calculer :

$$u_N = \sum_{n=1}^N \frac{\langle m; w_n \rangle}{\sigma_n} v_n \quad (7.17)$$

Cette méthode permet de filtrer les hautes fréquences et, de cette manière, de contenir l'instabilité. Elle est appelée *troncature spectrale*. C'est cette méthode qui sera utilisée pour le problème inverse électromagnétique car on peut faire l'hypothèse que ce problème est linéaire. Au contraire, le problème inverse de thermique n'est pas linéaire et cette méthode de régularisation ne pourra donc pas lui être appliquée.

La décomposition en valeurs singulières (7.16) avait permis d'obtenir :

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle f^* m; v_n \rangle v_n \quad (7.18)$$

Nous utiliserons alors la méthode de régularisation de Tikhonov. L'idée consiste à remplacer le terme en  $\frac{1}{\sigma_n^2}$  par un terme filtré  $g_\epsilon(\sigma_n)$  avec  $\epsilon > 0$ , qui ne présente pas de pôle à l'origine et vérifiant [77] :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_\epsilon(\sigma_n) > 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(\sigma_n) = \frac{1}{\sigma_n^2} \end{cases} \quad (7.19)$$

On retrouve donc bien, pour ces types de filtres,  $g_0(\sigma_n) = \frac{1}{\sigma_n^2}$  ainsi qu'un filtrage des hautes fréquences (qui correspondent à  $n \rightarrow +\infty$ ).

Le filtre de la régularisation de Tikhonov vérifie ces critères et s'écrit [234] :

$$g_\epsilon(\sigma_n) = \frac{1}{\epsilon + \sigma_n^2} \quad (7.20)$$

En appelant  $u_\epsilon$  la solution régularisée du problème inverse, l'équation (7.16) se réécrit alors :

$$u_\epsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma_n}{\epsilon + \sigma_n^2} \langle m; w_n \rangle v_n \quad (7.21)$$

On peut alors réécrire également l'équation (7.13) qui devient :

$$u_\epsilon = (f^*f + \epsilon I)^{-1} f^*(m) \quad (7.22)$$

La forme variationnelle équivalente s'énonce :

$$u_\epsilon = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} (\|f(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \epsilon \|u\|_{\mathcal{U}}^2) \quad (7.23)$$

La formulation variationnelle de Tikhonov consiste donc à rajouter une pénalisation permettant l'obtention d'une solution de norme relativement faible. Le choix du paramètre de régularisation  $\epsilon$  répond alors à un compromis entre la stabilité de l'inversion ( $\epsilon$  grand) et la fidélité de l'inversion.

Dans le cas non linéaire, la relation (7.22) n'a plus de sens. Cependant, la relation (7.23) peut être généralisée au cas d'un opérateur  $f$  non linéaire :

$$u_\epsilon = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} (\|f(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \epsilon \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2) \quad (7.24)$$

où  $u^0$  est une estimation *a priori* des paramètres et permet d'obtenir des résultats locaux de convergence [77].

## 7.5 Résolution du problème de minimisation avec la méthode de l'état adjoint

Dans cette section, nous cherchons à résoudre le problème de minimisation (7.9) de la fonctionnelle  $J$  donnée par (7.8).

Pour calculer cette température d'injection du fluide, un problème de reconstruction est introduit en s'appuyant sur le modèle numérique présenté au cours des précédents chapitres ainsi que sur des méthodes de résolution de problèmes de minimisation. La méthode de l'état adjoint est ainsi introduite et une généralisation à d'autres problèmes de minimisation est présentée.

Nous nous plaçons ici dans le cas général de problèmes non linéaires. Nous proposons ainsi d'utiliser l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour déterminer la solution au problème de minimisation suivant :

$$u = \arg \min_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} J(\tilde{u}) \quad (7.25)$$

Pour cela, la fonctionnelle associée au problème linéaire tangent est introduite. Elle permet notamment d'exprimer les effets de faibles variations des paramètres  $u$  sur la fonctionnelle  $J$ . Cette nouvelle fonctionnelle  $\tilde{J}_u$ , définie au voisinage de  $u$ , s'obtient à partir de  $J$  et peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u + \delta u - T_{f,ref}\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.26)$$

Avec  $\hat{f}'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  la dérivée de Gâteaux du modèle direct en  $u$  et  $\nu$  le paramètre d'amortissement de Levenberg-Marquardt.

L'application de l'algorithme de Levenberg-Marquardt prévoit, à chaque itération sur celui-ci, de minimiser cette fonctionnelle afin de déterminer l'incrément  $\delta u$  tel que :

$$\delta u = \arg \min_{\delta \tilde{u} \in \mathcal{U}} \tilde{J}_u(\tilde{u}) \quad (7.27)$$

L'incrément  $\delta u$  obtenu permet alors d'ajuster de façon itérative la valeur des paramètres  $u$ . Pour calculer cet incrément, le problème adjoint est ici introduit, en présentant d'abord les problèmes direct et linéaire tangent.

### 7.5.1 Problème direct

Le problème direct a été présenté dans les chapitres précédents. Sous l'hypothèse d'une couche de surface semi-transparente, quasi opaque aux longueurs d'ondes du rayonnement ambiant, le problème direct s'écrit, en reprenant les notations introduites dans le chapitre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \phi) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = \begin{cases} h(T_f - T) & \text{sur } \Omega_f \\ q & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ T(t = 0) = T_0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla T \cdot \vec{n} = \Phi + \sum_i h_i(\theta_i - T) \\ k \nabla T \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_S \\ \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla T_f - \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) = h(T - T_f) \\ T_f(t = 0) = T_f^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} T_f = T_{f,\text{in}} \\ k_f \nabla T_f \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_{f0} \\ \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \end{array} \right. \quad (7.28)$$

Avec  $q$  donné, fonction des conditions environnementales (rayonnements solaires direct et diffus), indépendant de la température du milieu.

### 7.5.2 Problème linéaire tangent

Le problème linéaire tangent permet, dans le cas général, de linéariser le problème direct autour d'un jeu de paramètres  $u \in \mathcal{U}$ . Le problème direct (7.28) est alors exprimé en fonction des variations des paramètres  $\delta u$ . Ici,  $\delta u = \delta T_{f,\text{in}}$  et les variations induites par  $\delta u$  sur les champs de températures  $T$  et  $T_f$  sont alors notées respectivement  $\delta T$  et  $\delta T_f$ . Les autres paramètres, notamment le terme source radiatif  $q$ , les conditions initiales  $T^0$  et  $T_f^0$ , les conditions extérieures et les propriétés thermiques sont indépendants de  $\delta u$ .

Ce problème linéaire tangent s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \phi) \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) = \begin{cases} h(\delta T_f - \delta T) & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ \delta T(t = 0) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T \\ k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_S \\ \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla \delta T_f - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f) = h(\delta T - \delta T_f) \\ \delta T_f(t = 0) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta T_f = \delta T_{f,\text{in}} \\ k_f \nabla \delta T_f \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_{f0} \\ \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \end{array} \right. \quad (7.29)$$

Le problème linéaire tangent a la même structure que le problème direct et peut donc être résolu de la même façon que celui-ci.

### 7.5.3 Application de la méthode de l'état adjoint

Il est ici envisagé d'utiliser une méthode basée sur le gradient pour minimiser la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  définie par (7.26), ce qui nécessite la connaissance de son gradient. Parmi les trois termes qui constituent la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$ , les gradients des termes associés à la consommation énergétique et au terme de Levenberg-Marquardt s'obtiennent aisément étant donné qu'il sont exprimés explicitement en fonction de  $\delta u$ . Seul le gradient du terme de résidu demande une étude approfondie, effectuée dans l'annexe D.

Le gradient de la fonctionnelle peut finalement s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta T_{f0}) \delta \tilde{T}_{f0} &= - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f0} \left( k_f \nabla T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \\ &+ \varepsilon \langle \delta \tilde{T}_{f0} | T_{f0} + \delta T_{f0} - T_{f,\text{ref}} \rangle_{\mathcal{U}} + \mu \langle \delta \tilde{T}_{f0} | \max(0, T_{f0} + \delta T_{f0} - T_{f,\text{ref}}) \rangle_{\mathcal{U}} \\ &+ \nu \langle \delta \tilde{T}_{f0} | \delta T_{f0} \rangle_{\mathcal{U}} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Avec  $T^*$  et  $T_f^*$  la solution au problème adjoint défini par (7.31) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -(1-\phi)\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \min(0, T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S} + \begin{cases} h(\delta T_f^* - \delta T^*) & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ \delta T^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T^* \quad \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f^*}{\partial t} - (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla \delta T_f^* - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f^*) = h(\delta T^* - \delta T_f^*) \\ \delta T_f^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta T_f^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f0} \\ k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} = -(\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.31)$$

La connaissance de la solution du problème adjoint par la résolution de (7.31) permet donc de calculer le gradient de la fonctionnelle par (7.30) et l'application de méthodes basées sur le gradient permet ensuite la minimisation de la fonctionnelle et la reconstruction de la température d'injection du fluide  $T_{f,\text{in}}$ .

Ce problème adjoint est défini de façon rétrograde, c'est-à-dire que les conditions finales sont connues et donc on cherche à déterminer  $T(t_n)$  connaissant  $T(t_{n+1})$ . Le problème reste néanmoins bien posé compte tenu du changement de signe des termes de dérivées temporelles. Le schéma temporel peut être réécrit pour avoir une structure similaire aux problèmes direct et linéaire tangent en effectuant le changement de variable  $t \leftarrow t_a - t$ , l'équation de l'adjoint redevient alors posée pour des dates croissantes. Les techniques de résolution du problème direct peuvent ainsi être réutilisées pour le problème adjoint.

Le problème adjoint permet d'obtenir les zones du domaine ayant l'effet le plus important sur la fonctionnelle. Ainsi, une solution au problème adjoint proche de zéro en une date et une position donnée signifie qu'un changement de la température en ce point et pour cette date n'aura qu'un impact négligeable sur la fonctionnelle. Au contraire, une valeur élevée, en valeur absolue, de la solution au problème adjoint en une date et un point donnés signifie qu'un changement des propriétés physiques aura un effet important sur la fonctionnelle.

Le terme de contrainte sur la température de surface de la fonctionnelle agit alors comme un terme source. Si celui-ci est partout nul, la solution au problème adjoint est elle aussi nulle et il est inutile de modifier les paramètres physiques du problème pour le terme de résidu. Dans le cas où ce terme de résidu est non nul, il agit comme un terme source sur le système (7.31) au travers du terme  $\min(0, T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S}$ . La diffusion de ce terme source permet alors d'observer les positions dans le domaine et les dates pour lesquelles des modifications des paramètres du système sont susceptibles d'agir sur le terme de résidu. Ici, pour reconstruire la température d'injection du fluide, la zone sur laquelle on agit est la surface d'injection du fluide  $\Gamma_f$ .

En particulier, il peut être observé que, pour une date  $t$  proche de l'horizon temporel  $t_a$ , le terme source  $\min(0, T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S}$  du système (7.31) n'aura diffusé que sur une zone proche de la surface  $\Gamma_S$ . Les zones éloignées de  $\Gamma_S$  ont alors un impact négligeable sur le terme de résidu pour ces dates  $t \approx t_a$ . En particulier, une modification de la température d'injection du fluide pour ces dates n'aura qu'une influence limitée sur la minimisation du terme de résidu.

## 7.5.4 Linéarité du problème

Le problème étudié ici est linéaire vis-à-vis du paramètre à déterminer : la réponse du système à une somme d'excitations sera la somme des réponses à chacune de ces excitations.

Ce n'est cependant pas vrai pour le cas général de la reconstruction d'autres paramètres physiques comme la capacité thermique ou la conductivité thermique [40].

Les problèmes direct et linéaire tangent sont alors équivalents pour le cas étudié au cours de ce paragraphe. Les variations du paramètre à reconstruire ici,  $\delta T_{f,\text{in}}$  peuvent alors être assimilées à  $T_{f,\text{in}} + \delta T_{f,\text{in}}$ , et deux problèmes sont à résoudre : le problème direct (équivalent donc au problème linéaire tangent), et le problème adjoint qui peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante (7.32), l'expression du gradient (7.30) restant alors inchangée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -(1-\phi)\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \min(0, T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S} + \begin{cases} h(\delta T_f^* - \delta T^*) & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ \delta T^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T^* \quad \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f^*}{\partial t} - (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla \delta T_f^* - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f^*) = h(\delta T^* - \delta T_f^*) \\ \delta T_f^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta T_f^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f0} \\ k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} = -(\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.32)$$

### 7.5.5 Minimisation de la fonctionnelle

Nous reprenons dans ce paragraphe l'expression de la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  donnée par (7.26). En prenant en compte la linéarité du problème, le paramètre de régularisation de Levenberg-Marquardt n'est pas nécessaire ( $\nu = 0$ ) et on a :

$$\tilde{J}'_u(T_{f,\text{in}}) \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} = - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \left( k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt + \varepsilon \langle \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} | T_{f,\text{in}} - T_{f,\text{ref}} \rangle_{\mathcal{U}}$$

Et donc, sous forme de produit scalaire :

$$\tilde{J}'_u(T_{f,\text{in}}) \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} = \langle \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} | (k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n}) + \varepsilon (T_{f,\text{in}} - T_{f,\text{ref}}) \rangle_{\mathcal{U}} \quad (7.33)$$

Connaissant les solutions des problèmes direct (7.28) et du problème linéaire tangent (7.29), le problème adjoint (7.31) peut être résolu.

Les techniques d'optimisation habituelles, gradient à pas constant ou variable, gradient conjugué, *etc.* peuvent alors être mises en œuvre pour minimiser la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  et obtenir ainsi l'incrément  $\delta T_{f,\text{in}}$  à rajouter à  $T_{f,\text{in}}$  à chaque itération sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt. La prise en compte de la linéarité du problème permet de n'avoir à utiliser que le gradient conjugué, sans l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

## 7.6 Contrôle de l'état de santé de la couche poreuse : extension à la reconstruction de plusieurs paramètres

Dans le paragraphe 7.5, l'utilisation de la méthode de l'état adjoint pour le calcul de la température d'injection du fluide afin de préserver la structure de route solaire hybride de la formation de verglas en surface a été présentée.

Cette stratégie de contrôle de la structure peut être étendue au contrôle de l'état de santé de celle-ci, et notamment pour vérifier que les performances de l'échangeur thermique se maintiennent au cours du temps. Une instrumentation de la chaussée permet ainsi d'obtenir des mesures de surface et celles-ci peuvent permettre de déterminer la position et la nature d'éventuels défauts ou dégradations survenus à l'intérieur de la structure et notamment au niveau de la couche poreuse, tels que de l'encrassement et du colmatage des pores. L'écoulement du fluide peut en effet charrier des particules qui peuvent, à terme, bloquer localement l'écoulement du fluide dans les pores en les colmatant et réduire ainsi les performances du système.

Le problème du contrôle en température de la structure peut ainsi être étendu au contrôle de l'encrassement de la couche poreuse. Pour cela, nous cherchons ici à caractériser des défauts présents dans la structure, à partir de mesures de surface, en reconstruisant un ou plusieurs paramètres physiques du système.

### 7.6.1 Présentation du problème

Nous cherchons dans cette partie à reconstruire un jeu de paramètres  $u^0$  dans un domaine  $\Omega$  connaissant les mesures réalisées en des points  $x_k \in \Omega$ , ces points étant dans la pratique souvent situés sur les frontières  $\partial\Omega$  du domaine étudié.

Un domaine entièrement solide est ici considéré, sans écoulement de fluide donc, mais l'étude menée ici peut être adaptée à d'autres phénomènes physiques.

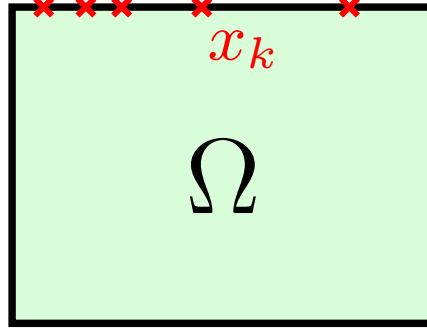


FIGURE 7.6 – Représentation du cas étudié

Ce domaine, représenté sur la figure 7.6 est soumis, sur une partie  $\Gamma_S \subset \partial\Omega$  de ses frontières, à des interactions avec l'environnement sous la forme d'échanges et d'apports thermiques. L'hypothèse est faite que, sur le reste des frontières,  $\partial\Omega \setminus \Gamma_S$ , il n'y a pas d'échanges ni d'apports.

Nous rappelons que le problème direct est défini par le système d'équations (7.34), dans lequel les propriétés thermiques  $\rho c$ ,  $k$ , les coefficients d'échanges  $h_i$ ,  $i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket$ , les températures extérieures  $T_i$ , la température initiale  $T^0$  ainsi que les termes sources internes  $q$  et externes  $\Phi$  sont connus.

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = q \\ T(t=0) = T^0 \\ \begin{cases} k \nabla T \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^{N_h} h_i (T_i - T) + \Phi & \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla T \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{cases} \end{cases} \quad (7.34)$$

L'objectif du problème inverse ici étudié est de déterminer des paramètres physiques parmi  $\rho c$ ,  $k$ ,  $q$ ,  $h_i$ ,  $T_i$ ,  $\Phi$ ,  $T^0$  afin que l'application du modèle permette d'approcher au plus près les températures mesurées  $\theta_k(t)$  aux points  $x_k$ . Ces paramètres à reconstruire appartiennent à l'espace des paramètres  $\mathcal{U}$ . Pour ce cas général, il est d'abord supposé que tous ces paramètres sont reconstruits simultanément :  $u = \{\rho c, k, q, T^0, \{h_i\}, \{T_i\}, \Phi\}$ .

Afin d'obtenir ces paramètres, comme pour l'obtention de la température d'injection du fluide dans le paragraphe précédent, une fonctionnelle est minimisée. Celle-ci est constituée de deux termes : un terme de résidu et un terme de régularisation. Pour cela, les notations suivantes sont introduites :

- $\mathcal{M}$  est l'espace des mesures, dans lequel sont définies les mesures :  $\mathcal{M} = L^2(\{x_k\}, [0, t_a])$ . Nous définissons le produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  par, pour tout  $a, b \in \mathcal{M}$  :

$$\langle a | b \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_k \int_{t=0}^{t_a} a(x_k, t) b(x_k, t) dt \quad (7.35)$$

La norme associée est notée  $\| \cdot \|_{\mathcal{M}}$ . Pour tout  $\theta \in \mathcal{M}$  :

$$\|\theta\|_{\mathcal{M}}^2 = \sum_k \int_{t=0}^{t_a} \theta(x_k, t)^2 dt \quad (7.36)$$

- $\mathcal{U}$  est l'espace des paramètres, dans lequel sont définis les paramètres à reconstruire.

Dans cette partie, nous considérons pour les paramètres ayant une dépendance spatiale ( $\rho c$ ,  $k$ ,  $q$ ,  $T^0$ ) comme faisant partie de l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , un tel choix étant nécessaire afin de garantir que le problème soit bien posé et d'obtenir une solution régulière et lisse [177]. Ce choix



d'un espace de Sobolev est lié à des conditions de régularité que l'utilisation d'un espace de contrôle de type  $L^2$  ne permet pas d'assurer. Les paramètres  $\rho c$ ,  $k$ ,  $q$ ,  $h_i$ ,  $T_i$  et  $\Phi$  sont supposés également dépendre du temps. L'espace des paramètres est alors tel que :

- $u_1 = \rho c \in \mathcal{U}_1 = H^1(\Omega) \times L^2([0, t_a])$
- $u_2 = k \in \mathcal{U}_2 = H^1(\Omega) \times L^2([0, t_a])$
- $u_3 = q \in \mathcal{U}_3 = H^1(\Omega) \times L^2([0, t_a])$
- $u_4 = T^0 \in \mathcal{U}_4 = H^1(\Omega)$
- $u_5 = \{h_i\} \in \mathcal{U}_5 = (L^2([0, t_a]))^{N_h}$
- $u_6 = \{T_i\} \in \mathcal{U}_6 = (L^2([0, t_a]))^{N_h}$
- $u_7 = \Phi \in \mathcal{U}_7 = L^2([0, t_a])$

Le produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{U}}$  est défini sur  $\mathcal{U}$  par, pour tout  $a, b \in \mathcal{U}$  :

$$\langle a|b \rangle_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^7 \langle a_i|b_i \rangle_{\mathcal{U}_i} \quad (7.37)$$

Avec :

- pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  :  $\langle a_i|b_i \rangle_{\mathcal{U}_i} = \int_{t=0}^{t_a} (\int_{\Omega} a_i b_i d\Omega + \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla a_i^T \cdot \nabla b_i d\Omega) dt$
- pour  $i = 4$  :  $\langle a_i|b_i \rangle_{\mathcal{U}_i} = \int_{\Omega} a_i b_i d\Omega + \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla a_i^T \cdot \nabla b_i d\Omega$
- pour  $i \in \{5, 6\}$  :  $\langle a_i|b_i \rangle_{\mathcal{U}_i} = \sum_{j=1}^{N_h} \int_{t=0}^{t_a} a_{i_j} b_{i_j} dt$
- pour  $i = 7$  :  $\langle a_i|b_i \rangle_{\mathcal{U}_i} = \int_{t=0}^{t_a} a_{i_j} b_{i_j} dt$

Et  $\alpha \neq 0$ , le cas  $\alpha = 0$  correspondant à une norme dans  $L^2$ .

L'utilisation du produit scalaire dans  $H^1$  lors de l'application de la méthode de l'état adjoint permet l'ajout d'un filtre passe-bas en espace, réduisant ainsi, selon la définition de la norme choisie sur  $\mathcal{U}$  et le paramètre  $\alpha$ , les variations sur de faibles longueurs du gradient [44, 195]. Le choix de cet espace de Sobolev, au lieu de  $L^2$ , permet d'établir une régularisation de Tikhonov du premier ordre en espace [36], prenant donc en compte, en plus de la solution elle-même, les effets de son gradient pour la régularité.

La norme associée est notée  $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$ . Pour tout  $u \in \mathcal{U}$  :

$$\|u\|_{\mathcal{U}}^2 = \sum_i \|u_i\|_{\mathcal{U}_i}^2 = \sum_i \langle u_i|u_i \rangle_{\mathcal{U}_i} \quad (7.38)$$

## Fonctionnelle à minimiser

La fonctionnelle à minimiser doit prendre en compte :

- un terme de résidu, de façon à ce que les mesures de températures soit les plus proches possibles des températures calculées par le modèle. Ce terme de résidu s'écrit :

$$\frac{1}{2} \sum_k \int_{t=0}^{t_a} (T(x_k, t) - \theta_k(t))^2 dt = \frac{1}{2} \|T - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (7.39)$$

- un terme de régularisation de Tikhonov, pour s'assurer que le processus de minimisation ne fait pas diverger la solution (voir aussi le paragraphe 7.4.3). Ce terme s'écrit sous la forme  $\|u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2$ .
- un terme de pénalisation des contraintes, optionnel, peut aussi être ajouté afin de prendre en compte des informations supplémentaires sur les paramètres à reconstruire lorsqu'on en dispose [147]. On suppose que ces informations sur les paramètres à reconstruire peuvent s'écrire sous la forme d'une contrainte en égalité  $Gu = c$  avec  $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{C})$  et  $c \in \mathcal{C}$  l'espace des contraintes. En notant  $\| \cdot \|_{\mathcal{C}}$  une norme sur  $\mathcal{C}$  associée à un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{C}}$ , ce terme de contrainte peut s'écrire  $\frac{\mu}{2} \|Gu - c\|_{\mathcal{C}}^2$ .

Le terme de pénalisation peut avoir plusieurs origines. Par exemple :

- Les paramètres à reconstruire peuvent avoir une valeur connue (ou proche d'une certaine valeur) sur certains éléments. Ce cas peut être utilisé pour la reconstruction des propriétés thermiques. La matrice  $G$  pourra alors être une matrice creuse avec un nombre de ligne égal au nombre de connaissances a priori (une pour chaque élément dont on connaît la valeur du paramètre). Pour un nombre  $N$  d'éléments et des valeurs connues  $c_2, c_3, c_{N-2}$  et  $c_N$  sur les éléments 2, 3,  $N - 2$  et  $N$ , la matrice  $G$  et le vecteur  $c$  pourront s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ c = [c_2 \quad c_3 \quad c_{N-2} \quad c_N]^T \end{array} \right. \quad (7.40)$$

- Des parois ou des zones du domaine étudié peuvent avoir les mêmes propriétés, sans qu'on connaisse les valeurs des paramètres concernés. Par exemple, si l'élément 2 est adjacent aux éléments 1 et 3 et que ces trois éléments ont les mêmes propriétés thermiques, tout comme l'élément  $N$  adjacent aux éléments  $N - 3$ ,  $N - 2$  et  $N - 1$  on pourra par exemple écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ c = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{array} \right. \quad (7.41)$$

- Il est aussi possible pour d'autres types de reconstructions d'avoir des relations mettant en jeu des sommes de paramètres. C'est le cas par exemple lorsqu'on cherche à reconstruire les densités de flux thermiques (flux solaire ou d'échanges convecto-radiatif) connaissant la somme de ces composantes [40].

Le coefficient  $\mu$  permet alors d'ajuster la sévérité des contraintes et ne doit ni être trop petit pour que le terme de pénalisation ne devienne pas négligeable devant celui de fidélité, ni être trop grand, ce qui rendrait le terme de fidélité négligeable devant celui de pénalisation, et le problème reviendrait alors à résoudre l'équation  $Gu = c$ . Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre ces deux situations.

La fonctionnelle à minimiser s'écrit donc :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|T - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu - c\|_{\mathcal{C}}^2 \quad (7.42)$$

Le problème n'est ici pas linéaire et il est proposé de le résoudre avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Cet algorithme itératif a pour but de linéariser localement la fonctionnelle autour d'un premier jeu de paramètres, de minimiser cette nouvelle fonctionnelle à l'aide de méthodes usuelles basées sur le gradient (gradient conjugué par exemple ici) et enfin de rajouter la solution obtenue au jeu de paramètres utilisé précédemment afin d'obtenir le jeu de paramètres initialisant l'itération suivante de l'algorithme.

La fonctionnelle localement linéarisée s'écrit alors :

$$J_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|T(u) + \delta T(\delta u) - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u + \delta u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|G(u + \delta u) - c\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.43)$$

Le dernier terme,  $\frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2$ , est le terme de Levenberg-Marquardt. Il permet de pénaliser une variation trop importante de l'incrément sur la solution numérique.

### Application de la méthode de l'état adjoint

Afin de calculer le gradient de la fonctionnelle linéarisée  $J_u$ , et en particulier le gradient du terme de résidu, le problème adjoint (7.45) est obtenu à partir de la formulation faible du problème linéaire tangent (7.44), lui-même déduit du problème direct (7.34). Ces deux problèmes sont obtenus de façon similaire à ce qui a été réalisé pour le problème d'optimisation de la température d'injection du fluide dans le paragraphe 7.5.

Contrairement à l'optimisation de la température d'injection du fluide étudiée dans le paragraphe précédent, le problème n'est pas linéaire par rapport aux paramètres à reconstruire, en particulier  $\rho c$ ,

$k$  et  $\{h_i\}$ . Il est pas nécessaire de résoudre le problème linéaire tangent qui ne peut plus s'assimiler au problème direct.

Le problème linéaire tangent s'écrit alors (7.44).

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) = \delta q - \delta \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta k \nabla T) \\ \delta T(t=0) = \delta T^0 \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = \sum_i h_i (\delta T_i - \delta T) + \delta \Phi + \sum_i \delta h_i (T_i - T) - \delta k \nabla T \cdot \vec{n} \\ k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_S \\ \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \end{array} \right. \quad (7.44)$$

Le problème adjoint s'écrit (7.45).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \sum_k (T(x_k, t) + \delta T(x_k, t) - \theta_k(t)) \delta_{x_k} \\ \delta T^*(t=t_a) = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T^* \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_S \\ \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \end{array} \right. \quad (7.45)$$

La formulation faible du problème linéaire tangent (7.44) permet de nouveau d'obtenir une expression sous la forme d'une intégrale dans  $L^2(\Omega)$  pour le gradient du terme de résidu de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{t=0}^{t_a} \delta \tilde{T}(x_k, t) (T(x_k, t) - \theta_k(t)) dt &= \int_{\Omega \times [0, t_a]} \left( \delta \tilde{q} - \delta \tilde{\rho} c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta T^* d\Omega dt \\ &\quad - \int_{\Omega \times [0, t_a]} (\delta \tilde{k} \nabla T) \cdot \nabla \delta T^* d\omega dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho c \delta \tilde{T}^0 \delta T^*(t=0) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \times [0, t_a]} \left( \delta \tilde{\Phi} \delta T^* + \sum_i h_i \delta \tilde{T}_i \delta T^* \right) d\Gamma dt \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \times [0, t_a]} \sum_i \delta \tilde{h}_i (T_i - T) \delta T^* d\Gamma dt \end{aligned} \quad (7.46)$$

Contrairement à l'optimisation de la température d'injection du fluide, pour laquelle l'espace  $\mathcal{U}$  était constitué de fonctions  $L^2$ , ce qui permettait de faire apparaître à ce stade le produit scalaire défini sur  $\mathcal{U}$ , ici, le fait que  $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$  requiert une modification de la formulation du problème.

D'après [153] repris par [177], le fait que les  $T(x_k, \cdot) - \theta_k$  soient définis dans  $L^2([0, t_a])$  permet de considérer la relation (7.46) comme une relation de transposition pour  $\delta T^*(t=0)$ .  $\delta T^*(t=0)$  est alors défini de manière unique comme appartenant au dual de  $H^1(\Omega)$ , noté ici  $(H^1(\Omega))^*$

Pour faire apparaître le produit scalaire dans  $H^1(\Omega)$ , nous pouvons introduire  $w \in H^1(\Omega)$  image de  $\delta T^*(t=0)$  par l'isomorphisme de Riesz  $\mathcal{J}$  :

$$w = \mathcal{J}^{-1} \delta T^*(t=0) \quad (7.47)$$

Soit :

$$\langle \delta T^*(t=0), \delta \tilde{T}^0 \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)} = \langle w | \delta \tilde{T}^0 \rangle_{H^1(\Omega)} \quad (7.48)$$

Avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)}$  le produit de dualité entre  $(H^1(\Omega))^*$  et  $H^1(\Omega)$ .

On a donc la relation explicite suivante entre  $w$  et  $\delta T^*(t=0)$  :

$$\int_{\Omega} w \delta \tilde{T}^0 d\Omega + \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \delta \tilde{T}^0 d\Omega = \int_{\Omega} \delta \tilde{T}^0 \delta T^*(t=0) d\Omega \quad (7.49)$$

La relation (7.49) peut se réécrire, après une intégration par parties en espace :

$$\int_{\Omega} w \delta \tilde{T}^0 d\Omega + \alpha^2 \int_{\partial\Omega} \delta \tilde{T}^0 \nabla w \cdot \vec{n} dS - \alpha^2 \int_{\Omega} \Delta w \delta \tilde{T}^0 d\Omega = \int_{\Omega} \delta \tilde{T}^0 \delta T^*(t=0) d\Omega \quad (7.50)$$

La relation (7.50) est la forme faible, pour le cas  $\alpha \neq 0$ , de l'équation (7.51) :

$$\begin{cases} -\alpha^2 \Delta w + w = \delta T^*(t=0) & \text{sur } \Omega \\ \nabla w \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.51)$$

Le cas  $\alpha \rightarrow 0$  correspond alors à  $w = \delta T^*(t=0)$  et on retrouve le cas où l'espace considéré est  $L^2(\Omega)$ , le terme de condition limite n'apparaissant plus dans la formulation faible (7.50).

Le gradient du terme de résidu de la fonctionnelle s'écrit alors, en reprenant (7.46) :

$$\begin{aligned} \langle \delta \tilde{T} | T - \theta \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \delta \tilde{\rho} c | \frac{\partial T}{\partial t} w \rangle_{\mathcal{U}_1} + \langle \delta \tilde{k} | \nabla T \cdot \nabla w \rangle_{\mathcal{U}_2} + \langle \delta \tilde{q} | w \rangle_{\mathcal{U}_3} + \langle \delta \tilde{T}^0 | \rho c q \rangle_{\mathcal{U}_4} \\ &+ \sum_i \langle \delta \tilde{h}_i | (T_i - T) w \rangle_{\mathcal{U}_5} + \sum_i \langle \delta \tilde{T}_i | h_i w \rangle_{\mathcal{U}_6} + \langle \delta \tilde{\Phi} | w \rangle_{\mathcal{U}_7} \end{aligned} \quad (7.52)$$

D'où le gradient de la fonctionnelle complète, par rapport à chacun des paramètres :

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{\rho} c = \langle \delta \tilde{\rho} c | -\frac{\partial T}{\partial t} w + \varepsilon(\rho c + \delta \rho c - \rho c_0) + \mu(\rho c)_c + \nu \delta \rho c \rangle_{\mathcal{U}_1} \quad (7.53)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{k} = \langle \delta \tilde{k} | -\nabla T \cdot \nabla w + \varepsilon(k + \delta k - k_0) + \mu k_c + \nu \delta k \rangle_{\mathcal{U}_2} \quad (7.54)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{q} = \langle \delta \tilde{q} | w + \varepsilon(q + \delta q - q_0) + \mu q_c + \nu \delta q \rangle_{\mathcal{U}_3} \quad (7.55)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{T}^0 = \langle \delta \tilde{T}^0 | \rho c w + \varepsilon(T^0 + \delta T^0 - T_0^0) + \mu T_c^0 + \nu \delta T^0 \rangle_{\mathcal{U}_4} \quad (7.56)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{h}_i = \langle \delta \tilde{h}_i | (T_i - T) w + \varepsilon(h_i + \delta h_i - h_{i,0}) + \mu h_{i,c} + \nu \delta h_i \rangle_{\mathcal{U}_5} \quad (7.57)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{T}_i = \langle \delta \tilde{T}_i | h_i w + \varepsilon(T_i + \delta T_i - T_{i,0}) + \mu T_{i,c} + \nu \delta T_i \rangle_{\mathcal{U}_6} \quad (7.58)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{\Phi} = \langle \delta \tilde{\Phi} | w + \varepsilon(\Phi + \delta \Phi - \Phi_0) + \mu \Phi_c + \nu \delta \Phi \rangle_{\mathcal{U}_7} \quad (7.59)$$

Où l'indice  $c$  fait à chaque fois au terme de contrainte pour le paramètre  $\alpha$  considéré :  $\alpha_c = G^T(G\alpha + G\delta\alpha - c)$ .

## 7.6.2 Application à la reconstruction de propriétés physiques dans une paroi par couplage avec une méthode basée sur l'électromagnétisme

Dans ce paragraphe, la méthode de l'état adjoint est appliquée à la reconstruction d'inclusions dans des parois en évaluant les valeurs de conductivité et de capacité thermique. Pour cela, en plus de la méthode thermique, il est proposé d'utiliser aussi une méthode de reconstruction basée sur de l'électromagnétisme afin de réduire le domaine de recherche des inclusions [147].

Cette méthode reposant sur l'électromagnétisme se base sur des mesures réalisées avec un *Ground Penetrating Radar* ou GPR. À partir de ces mesures, une grandeur est reconstruite permettant d'estimer la localisation d'un éventuel défaut. Celle-ci est ensuite affinée avec la méthode thermique et les propriétés du défaut peuvent être reconstruites.

### Calcul du champ électrique

Le GPR est un appareil qui est déplacé au-dessus d'une paroi afin de repérer des inclusions dans le sol. À chaque déplacement du GPR, celui-ci émet un signal électromagnétique pendant une brève période de l'ordre de la nanoseconde. Ce signal se déplace ensuite dans le sol. En présence de variations des propriétés électriques du sol, et notamment de la perméabilité électrique, une partie du signal électromagnétique est déviée et est notamment renvoyée vers la surface où le GPR enregistre ce signal réfléchi.

La propagation du signal électromagnétique dans le sol est régie par les équations de Maxwell [192] :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.60)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c + \vec{J}_s \quad (7.61)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7.62)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (7.63)$$

Avec  $\vec{E}$  le champ électrique (en  $\text{V.m}^{-1}$ ),  $\vec{H}$  le champ magnétique (en  $\text{A.m}^{-1}$ ),  $\vec{J}_c$  la densité de courant (en  $\text{A.m}^{-2}$ ) induite par le champ électrique,  $\vec{J}_s$  la densité de courant induite par la source électrique,  $\vec{B}$  la densité de flux magnétique (en  $\text{Wb}$ ),  $\vec{D}$  la densité de flux électrique (en  $\text{C}$ ),  $\rho$  la densité électrique de charge (en  $\text{C.m}^{-3}$ ) et  $\rho_m$  la densité magnétique de charge (en  $\text{H.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ).

Ces équations montrent que les charges électriques et magnétiques sont des sources de champs électrique et magnétique et que les variations temporelles d'un des deux champs entraîne le déplacement de charges et donc des variations spatiales de l'autre champ.

En plus des équations de Maxwell, des lois de comportement, analogues à la loi de Fourier pour la diffusion thermique, sont utilisées :

$$\vec{J}_c = \bar{\sigma} \vec{E} \quad (7.64)$$

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} \quad (7.65)$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad (7.66)$$

Avec  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{\mu}$  respectivement les tenseurs de conductivité électrique (en  $\text{S.m}^{-1}$ ), de permittivité électrique (en  $\text{F.m}^{-1}$ ) et de perméabilité magnétique (en  $\text{H.m}^{-1}$ ). Pour des matériaux isotropes, comme cela est supposé ici, des tenseurs sont des scalaires. De plus, l'hypothèse est faite que ces matériaux sont non magnétiques et donc que leur perméabilité magnétique est égale à celle du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ .

Dans le cadre de l'utilisation du GPR, l'objectif est de reconstruire le champ de permittivité électrique  $\epsilon$ . Pour cela, il est possible de s'appuyer sur des mesures réalisées *in situ*. Ici, ces mesures sont obtenues numériquement en calculant l'évolution du champ électrique à la suite de l'excitation électrique générée par le GPR.

La source électrique  $\vec{J}_s$  émise par le GPR se propageant dans la paroi étudiée, les équations de Maxwell sont résolues numériquement à l'aide de l'algorithme de Yee, basé sur des différences finies avec le logiciel libre GPRMAX [93].

## Reconstruction du champ de permittivité électrique

Le champ électrique mesuré par le GPR provient des variations des propriétés électriques rencontrées dans leurs milieux de propagation par les ondes électromagnétiques. Pour estimer ces variations, une fonction de contraste  $\chi$  est introduite et c'est cette grandeur qui sera ensuite calculée [193, 218] :

$$\chi = \frac{\epsilon_{eq} - \epsilon_{eqs}}{\epsilon_{eqs}} \quad (7.67)$$

Avec  $\epsilon_{eq}$  la permittivité équivalente donnée par :

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \epsilon_r - j \frac{\sigma}{2\pi f} \quad (7.68)$$

Avec  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide ( $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F.m}^{-1}$ ) et  $\epsilon_r$  la permittivité relative. La perméabilité diélectrique du sol, en l'absence d'inclusions,  $\epsilon_{eqs}$  vérifie de façon similaire :

$$\epsilon_{eqs} = \epsilon_0 \epsilon_b - j \frac{\sigma_b}{2\pi f} \quad (7.69)$$

Où l'indice  $b$  fait référence aux propriétés électriques, supposées connues, du sol.

La présence de valeurs non nulles de la fonction de contraste  $\chi$  indique donc la présence de zones ayant des propriétés électriques différentes de celles du sol, et donc d'inclusions. Le champ électrique peut alors se décomposer en deux composantes : une partie incidente  $E_{inc}$ , due aux réflexions des ondes électromagnétiques au niveau de variations connues des propriétés électriques, et une partie diffuse  $E_s$ , due aux variations des propriétés électriques autour des valeurs initialement supposées :  $E = E_{inc} + E_s$ .

Le champ électrique diffus vérifie alors la relation [192] :

$$E_s(x) = k_s \int_{x' \in \Omega} G_e(x, x') E(x, x') \chi(x') d\Omega \quad (7.70)$$

Avec  $G_e$  la fonction externe de Green et  $k_s$  le nombre d'onde.

L'équation (7.70) fait ainsi dépendre le champ diffus  $E_s$  du champ total dans lequel se trouve aussi le champ diffus. Le problème inverse d'électromagnétisme est ainsi non linéaire et mal posé, ce qui nécessite l'emploi d'une méthode de régularisation pour obtenir une solution stable. La non-linéarité du problème peut aussi entraîner l'apparition de fausses solutions ou artefacts à cause de minima locaux.

Pour linéariser le problème et rendre moins complexe le calcul d'une solution, l'approximation de Born est utilisée sur l'équation (7.70). Le principe est d'effectuer une approximation au premier ordre sur le champ électrique. Au lieu d'avoir  $E = E_{inc} + E_s(\chi, E)$  avec  $E_s$  donné par la relation (7.70), le champ total est estimé par  $E = E_{inc} + E_s(\chi, E_{inc})$ , ce qui revient à faire l'approximation  $E \approx E_{inc}$ . Dans ce cas, l'équation (7.70) devient [152, 193, 217] :

$$E_s(x) = k_s \int_{x' \in \Omega} G_e(x, x') E_{inc}(x, x') \chi(x') d\Omega \quad (7.71)$$

Pour obtenir la fonction de contraste  $\chi$ , l'opérateur linéaire défini par (7.71) fait l'objet d'une décomposition en valeurs singulières. Le système singulier  $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$  est ainsi introduit, avec  $\{\sigma_n\}$  les valeurs singulières rangées dans l'ordre décroissant,  $\{u_n\}$  la base des fonctions dans l'espace des inconnues et  $\{v_n\}$  la base des fonctions dans l'espace des données. La régularisation de la solution est effectuée en effectuant une troncature de la décomposition en valeurs singulières [152, 193, 217] :

$$\chi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n} \langle E_s | v_n \rangle u_n \quad (7.72)$$

Avec  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel dans l'espace des données et  $N$  l'indice de la troncature spectrale, fixé de façon à assurer un compromis entre la précision et la stabilité de la solution.

Pour obtenir une première localisation d'éventuelles inclusions avec le GPR, une fonction de contraste normalisée  $\hat{\chi}$  est considérée [218] :

$$\hat{\chi} = \frac{|\chi|}{\max |\chi|} \quad (7.73)$$

La fonction de contraste normalisée  $\hat{\chi}$  est nulle là où la permittivité diélectrique est égale à celle du sol et différente de 0 dans les régions susceptible de comprendre un défaut. Pour repérer ces zones, un seuil  $T_m$  est introduit pour obtenir une fonction caractéristique  $U_r$  définie par [218] :

$$U_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\chi} \geq T_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.74)$$

En première approche, un seuil  $T_m = 0.5$  peut être choisi.

## Reconstruction thermique

L'objectif est maintenant de reconstruire les propriétés thermiques de capacité thermique  $\rho c$  et de conductivité thermique  $k$  dans la paroi de façon à localiser et à caractériser d'éventuelles inclusions ou défauts.

Les notations du paragraphe 7.6 sont reprises. On note ainsi  $u = \{k, \rho c\} \in \mathcal{U}$  l'espace des paramètres.

Pour effectuer la reconstruction thermique, des mesures de températures sont données et les conditions environnementales sont supposées connues. La méthode de l'état adjoint détaillée dans le paragraphe 7.6 est réutilisée.

Le problème direct s'écrit, d'après (7.34) :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = q \\ T(t=0) = T^0 \\ \begin{cases} k \nabla T \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^{N_h} h_i (T_i - T) + \Phi & \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla T \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{cases} \end{cases} \quad (7.75)$$

Pour le problème linéaire tangent, on a, en adaptant (7.44) :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) = -\delta \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta k \nabla T) \\ \delta T(t=0) = 0 \\ \begin{cases} k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = \sum_i h_i (\delta T_i - \delta T) + -\delta k \nabla T \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{cases} \end{cases} \quad (7.76)$$

Le problème adjoint est donné par (7.45) :

$$\begin{cases} -\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \sum_k (T(x_k, t) + \delta T(x_k, t) - \theta_k(t)) \delta_{x_k} \\ \delta T^*(t = t_a) = 0 \\ \begin{cases} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T^* & \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{cases} \end{cases} \quad (7.77)$$

Une fonctionnelle  $J$  à minimiser est ainsi introduite :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|T - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.78)$$

Avec  $u^0$  les propriétés thermiques supposées connues en l'absence d'inclusions dans la paroi. Le problème n'est ici pas linéaire par rapport aux inconnues  $u$  et l'algorithme de Levenberg-Marquardt est utilisé. À chaque itération sur cet algorithme, la fonctionnelle localement linéarisée  $J_u$  est introduite par :

$$J_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|T + \delta T - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u + \delta u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.79)$$

Le gradient de  $J_u$  s'obtient à partir des relations (7.80) et (7.81) :

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{\rho} c = \langle \delta \tilde{\rho} c \left| \frac{\partial T}{\partial t} \delta T^* + \varepsilon(\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) + \nu \delta \rho c \right\rangle_{\mathcal{U}} \quad (7.80)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{k} = \langle \delta \tilde{k} \left| \nabla T \cdot \nabla \delta T^* + \varepsilon(k + \delta k - k^0) + \nu \delta k \right\rangle_{\mathcal{U}} \quad (7.81)$$

Les propriétés thermiques sont supposées constantes au cours du temps. Les expressions (7.80) et (7.81) se réécrivent, en adaptant les paramètres  $\varepsilon$  et  $\nu$ , sous la forme :

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{\rho} c = \int_t \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T^* d\Omega dt + \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c (\varepsilon(\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) + \nu \delta \rho c) d\Omega \quad (7.82)$$

$$J'_u(\delta u) \delta \tilde{k} = \int_t \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \nabla T \cdot \nabla \delta T^* d\Omega dt + \int_{\Omega} \varepsilon(k + \delta k - k^0) + \nu \delta k d\Omega \quad (7.83)$$

### Couplage des deux méthodes de reconstruction

Il est possible de reconstruire les propriétés thermiques sans avoir recours à la reconstruction par GPR. Cependant, pour la recherche de défauts de petites dimensions devant celles du domaine, une telle reconstruction nécessiterait de nombreuses mesures de températures ainsi que des moyens de calculs importants. La reconstruction par le GPR permet l'apport d'informations *a priori* qui vont être intégrées à la reconstruction thermique.

Le problème ici considéré est supposé être bidimensionnel. La notation  $x$  utilisée précédemment pour situer un point dans l'espace est maintenant remplacée par les coordonnées cartésiennes  $(x, z)$ .

Au lieu d'effectuer une reconstruction sur un domaine pouvant être grand, la reconstruction par le GPR permet de réduire le domaine d'étude initial. À partir de la fonction de contraste  $U_r$ , des sous-domaines  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  sont définis et représentés sur la figure 7.7.

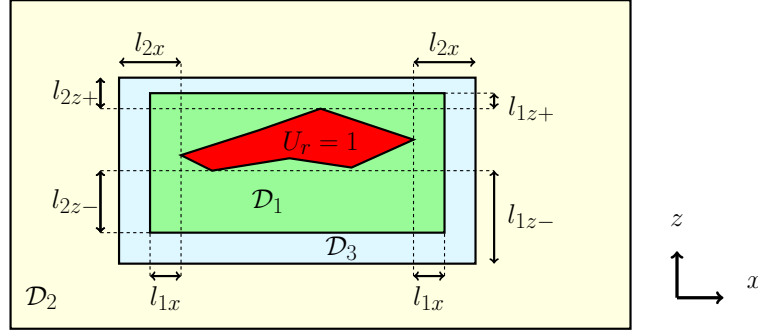


FIGURE 7.7 – Sous-domaines pour le problème de thermique

Le premier sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  correspond à la zone contenant les points dont la fonction caractéristique vaut 1. C'est donc le sous-domaine le plus susceptible d'abriter les inclusions ou défauts détectés par le GPR.

Le deuxième sous-domaine  $\mathcal{D}_2$  contient les points du domaine initial les plus éloignés de la zone où la fonction caractéristique est égale à 1. Il est supposé qu'il n'y a pas d'inclusions dans ce sous-domaine et les paramètres thermiques y sont alors connus et donc non reconstruits.

Le troisième sous-domaine,  $\mathcal{D}_3$  est localisé entre les deux autres sous-domaines. Une inclusion peut être présente dans  $\mathcal{D}_3$  mais la probabilité pour que cela soit le cas est plus faible que pour  $\mathcal{D}_1$  étant donné l'éloignement plus important de la zone où on a  $U_r = 1$ .

Les sous-domaines  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  sont définis à partir de la zone  $\mathcal{A}$  où sont présents les points  $(x, z)$  tels que  $U_r(x, z) = 1$ .

Le sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  est constitué des points  $(x, z)$  tels que :

$$\exists(x_0, z_0) \in \mathcal{A} \text{ tel que } \begin{cases} |x - x_0| \leq l_{1x} \\ -l_{1z-} \leq z - z_0 \leq l_{1z+} \end{cases} \quad (7.84)$$

Le sous-domaine  $\mathcal{D}_2$  est constitué des points  $(x, z)$  tels que :

$$\exists(x_0, z_0) \in \mathcal{A} \text{ tel que } \begin{cases} |x - x_0| \geq l_{2x} \\ z_0 - z \geq l_{2z-} \text{ ou } z - z_0 \geq l_{2z+} \end{cases} \quad (7.85)$$

Le sous-domaine  $\mathcal{D}_3$  comprend les points du domaine d'étude qui ne sont présents ni dans  $\mathcal{D}_1$  ni dans  $\mathcal{D}_2$ .

Les longueurs  $l_{1x}$ ,  $l_{2x}$ ,  $l_{1z-}$ ,  $l_{1z+}$ ,  $l_{2z-}$  et  $l_{2z+}$ , positives, sont représentées sur la figure 7.7 et doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} l_{1x} \leq l_{2x} \\ l_{1z-} \leq l_{2z-} \\ l_{1z+} \leq l_{2z+} \end{cases} \quad (7.86)$$

En raison des changements des propriétés électriques rencontrées par les ondes électromagnétiques, la partie basse de l'inclusion peut être mal localisée [193]. Pour prendre en compte cet effet, les conditions suivantes sont rajoutées :

$$\begin{cases} l_{1z+} \leq l_{1z-} \\ l_{2z+} \leq l_{2z-} \end{cases} \quad (7.87)$$



Dans le cas où  $\mathcal{D}_3 \neq \emptyset$ , le produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{D}_3}$  est défini sur ce sous domaine, associé à la norme  $\| \cdot \|_{\mathcal{D}_3}$ .

La reconstruction par le GPR a permis l'apport d'informations à travers la fonction caractéristique  $U_r$ . Ces informations *a priori* sont intégrées à la reconstruction thermique de la façon suivante :

- Le sous-domaine  $\mathcal{D}_2$  est éloigné de la localisation *a priori* du défaut. L'hypothèse est faite qu'aucun défaut ne se trouve sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_2$ . Par conséquent, les propriétés thermiques  $u$  sont supposées connues et égales à celle du milieu  $u^0$  :

$$\forall (x, z) \in \mathcal{D}_2, u(x, z) = u^0(x, z) \quad (7.88)$$

- Le sous-domaine  $\mathcal{D}_3$  est situé entre  $\mathcal{D}_1$  où le GPR a permis de reconstruire des inclusions, et  $\mathcal{D}_2$  où il a été supposé qu'il n'y a pas d'inclusions. L'hypothèse est faite que les propriétés thermique dans  $\mathcal{D}_3$  sont proches de celles connues du milieu. Cependant, la possibilité est laissée d'avoir finalement des propriétés thermiques reconstruites différentes pour faire apparaître des inclusions qui auraient été mal localisées ou identifiées avec le GPR. Pour cela, un terme de contrainte est ajouté à la fonctionnelle  $J$  de (7.79) permet d'imposer une contrainte faible sur les propriétés thermiques. Ce terme s'écrit alors :

$$\frac{\mu}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{D}_3}^2 \quad (7.89)$$

Soit  $\mathcal{W}'$  le sous-espace de  $\mathcal{W}$  tel que, pour tout  $(x, z) \in \mathcal{D}_2$  et tout  $u \in \mathcal{W}'$ ,  $u(x, z) = u^0(x, z)$ . Le problème d'optimisation devient alors : trouver  $u \in \mathcal{W}'$  telle que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{W}'} J(v) \quad (7.90)$$

Avec :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|T(u) - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{W}}^2 + \frac{\mu}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{D}_3}^2 \quad (7.91)$$

La fonctionnelle localement linéarisée  $J_u$  s'en déduit :

$$J_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|T(u) - \theta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{W}}^2 + \frac{\mu}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{D}_3}^2 \quad (7.92)$$

Le gradient de  $J_u$  s'obtient à partir de (7.82) et (7.83) par :

$$\begin{aligned} J'_u(\delta u) \delta \tilde{\rho} c &= \int_t \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c \delta T^* d\Omega dt + \int_{\Omega} \varepsilon (\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) + \nu \delta \rho c d\Omega \\ &+ \int_{\mathcal{D}_3} \delta \tilde{\rho} c (\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) d\Omega \end{aligned} \quad (7.93)$$

$$\begin{aligned} J'_u(\delta u) \delta \tilde{k} &= \int_t \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \nabla T \cdot \nabla \delta T^* d\Omega dt + \int_{\Omega} \varepsilon (k + \delta k - k^0) + \nu \delta k d\Omega \\ &+ \int_{\mathcal{D}_3} \delta \tilde{k} (k + \delta k - k^0) d\Omega \end{aligned} \quad (7.94)$$

### Cas test numérique

La méthode de couplage est appliquée à un cas test schématisé sur la figure 7.8. Un domaine calcaire comprend une inclusion de bois.

Les propriétés thermiques des matériaux sont issues de [74, 92] et sont données dans la table 7.1.

les données du GPR sont obtenues en utilisant le code GPRMAX en considérant une excitation de type Ricker ayant une fréquence principale de 1300 MHz. Les données sont assemblées le long d'une ligne à la surface allant de  $x = 0.1$  à  $1.9$  m avec un pas de 3 cm. Le domaine où s'effectue la reconstruction est le même que celui utilisé pour le modèle direct. La discrétisation s'effectue avec des éléments carrés de 1.4 cm de longueur en espace et des intervalles fréquentiels de 30 MHz d'amplitude entre 100 et 2600 MHz.

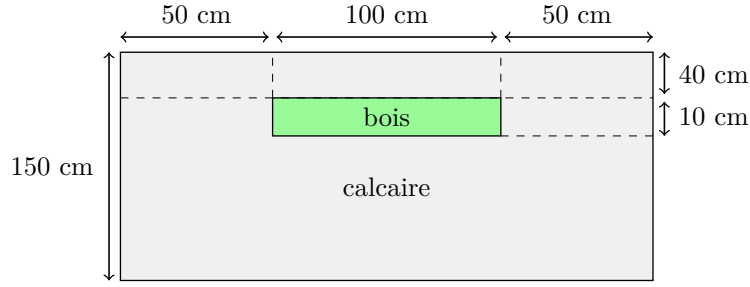


FIGURE 7.8 – Sous-domaines pour le problème de thermique

matériaux	$\rho c$ [ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ ]	$k$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]	$\epsilon_r$	$\sigma$ [ $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ]
calcaire	$2420 \times 855$	2.22	8	0.01
bois	$600 \times 1900$	0.15	5	$10^{-8}$

TABLE 7.1 – Propriétés électriques et thermiques des matériaux

La décomposition en valeurs singulières est réalisée avec un seuil fixé à -30 dB, c'est-à-dire que seuls sont conservés les modes ayant des niveaux d'énergie supérieurs à 0.0316 fois la plus grande valeur singulière.

La fonction de contraste et la fonction caractéristique obtenues sont représentées sur les figures 7.9a et 7.9b.

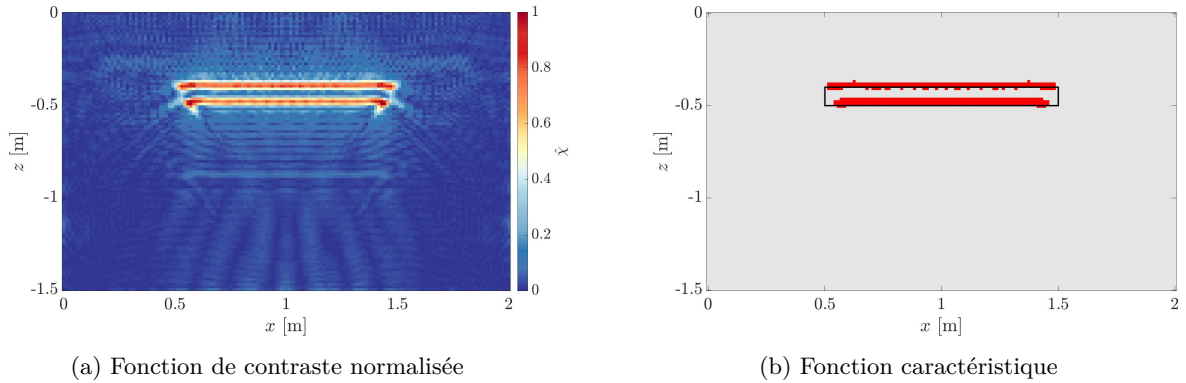


FIGURE 7.9 – Reconstruction par le GPR

Pour définir les sous-domaines de la reconstruction thermique, les longueurs utilisées sont données sur la table 7.2.

À partir de la fonction de contraste représentée sur la figure 7.9b, les sous-domaines de la reconstruction thermique sont établis et représentés sur la figure 7.10.

Pour effectuer la reconstruction thermique, le modèle thermique direct est d'abord utilisé. Les excitations thermiques proviennent d'apports convectifs (*via* la température de l'air  $T_{\text{air}}$ , en  $^{\circ}\text{C}$ ) et radiatifs (*via* la température de ciel  $T_{\text{ciel}}$ , en  $^{\circ}\text{C}$ , et du rayonnement solaire  $\Phi_{\text{sol}}$ , en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ). Les excitations utilisées ici ont une période d'une journée et vérifient :

$$T_{\text{air}} = 12 + 5 \sin(\omega t - \phi) \quad (7.95)$$

$$T_{\text{ciel}} = -5 + 12 \sin(\omega t - \phi) \quad (7.96)$$

$$\Phi_{\text{sol}} = 250 \times \frac{1}{2} (\sin(\omega t - \phi) + |\sin(\omega t - \phi)|) \quad (7.97)$$

Les mesures sont obtenues numériquement à la surface supérieure du domaine pendant cinq jours, cette durée permettant aux excitations thermiques d'atteindre les défauts puis d'être détectées à la surface. Le

paramètre	$l_{1x}$	$l_{1z+}$	$l_{1z-}$	$l_x$	$l_{1z+}$	$l_{1z-}$
longueur [m]	0.1	0.05	0.8	0.1	0.05	0.8

TABLE 7.2 – Longueurs utilisées pour générer les sous-domaines

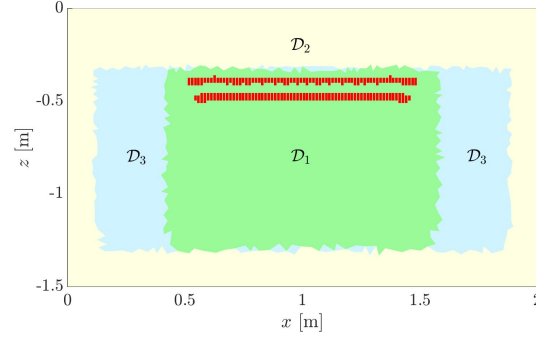


FIGURE 7.10 – Sous-domaines pour la reconstruction thermique

coefficient d'échange radiatif est pris égal à  $10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Un bruit blanc gaussien d'amplitude égale à  $0.5^\circ\text{C}$  est ajouté aux mesures provenant du modèle direct.

La reconstruction thermique basée sur l'utilisation de la méthode de l'état adjoint et sur les sous-domaines issus des informations *a priori* de la reconstruction par GPR permet d'obtenir les champs de conductivité et de capacité thermiques représentés sur les figures 7.11.

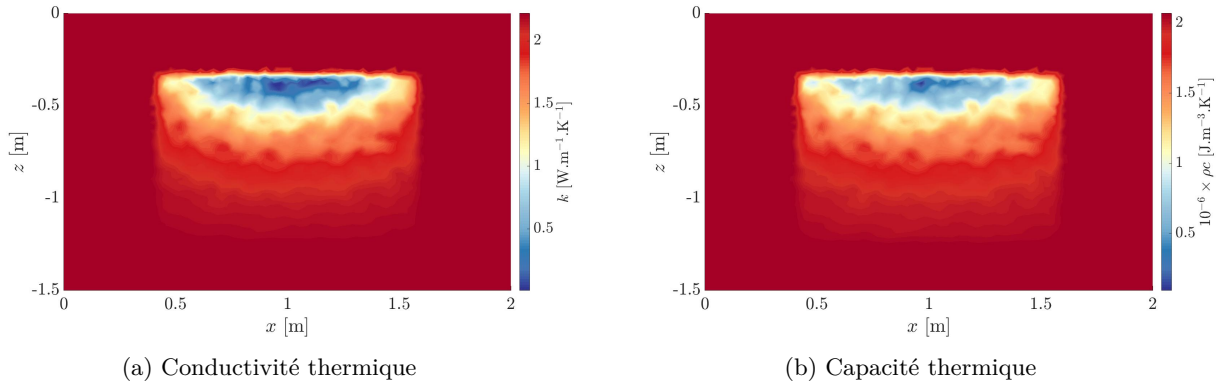


FIGURE 7.11 – Propriétés thermiques reconstruites avec les informations *a priori* apportées par le GPR

Pour analyser ces résultats de façon quantitative, une approche a été développée pour identifier les contours des anomalies ainsi reconstruites. Pour cela, les valeurs des paramètres reconstruits ainsi que leurs gradients sont analysés. Un élément du maillage fait partie d'une inclusion si les deux paramètres reconstruits sont éloignés d'au moins  $a$  % par rapport aux propriétés du milieu en l'absence d'inclusions. Ce critère permet d'exclure des inclusions tous les éléments ayant des propriétés reconstruites proches des valeurs du milieu. Le seuil  $a = 10$  % est choisi ici.

Il est aussi supposé que les paramètres reconstruits présentent des variations importantes au niveau des bords des éventuelles inclusions. L'hypothèse est ainsi faite que les normes des gradients des deux paramètres sont plus élevées sur les bords des inclusions qu'ailleurs dans le domaine. De cette manière, il est supposé qu'un point  $(x, z)$  appartient au contour d'une inclusion s'il vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\|\nabla k(x,z)\|}{k^0(x,z)} \geq b \\ \frac{\|\nabla \rho c(x,z)\|}{\rho c^0(x,z)} \geq b \end{cases} \quad (7.98)$$

Après calculs, les contours fermés vérifiant (7.98) sont conservés et l'intérieur de ceux-ci constituent les

inclusions reconstruites. À ce niveau, il n'est procédé à aucun filtrage sur la taille des zones défectueuses reconstruites afin de conserver la possibilité de reconstruire plusieurs inclusions.

Pour obtenir ainsi une première estimation de ces contours, le paramètre  $b$  est initialisé à une valeur nulle. Il est ensuite incrémenté jusqu'à ce que des variations significatives dans la taille ou le nombre des inclusions surviennent. En-dessous de cette valeur critique  $b_0$ , il peut être observé que l'un au moins des contours principaux qui existent pour  $b \geq b_0$  n'est pas clos. Ici, un coefficient  $b = 0.5$  a été choisi de manière empirique.

Les figures 7.11 permettent ainsi d'aboutir aux inclusions représentées sur la figure 7.12.

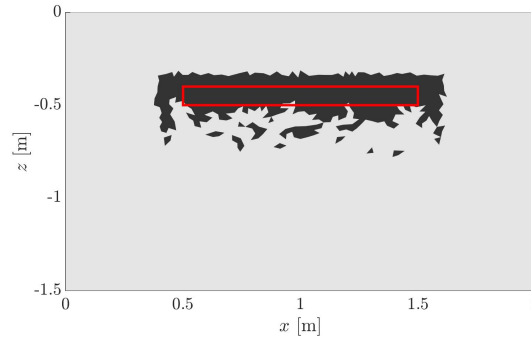


FIGURE 7.12 – Reconstruction de l'inclusion avec les informations *a priori*

Sans les informations *a priori* du GPR, la reconstruction thermique peut-être effectuée de la même façon, sans utiliser de sous-domaines. Les résultats en conductivité et en capacité thermiques reconstruites sont présentés sur les figures 7.13.

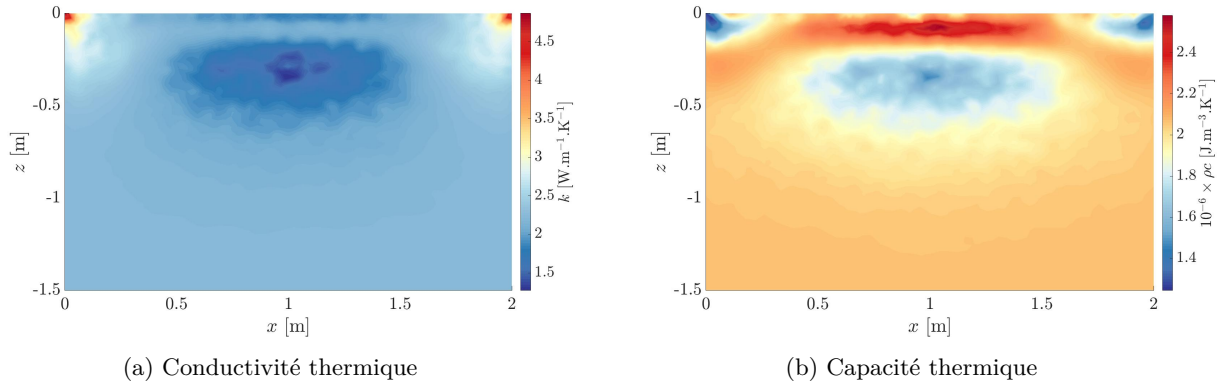


FIGURE 7.13 – Propriétés thermiques reconstruites sans les informations *a priori* apportées par le GPR

Par rapport aux figures 7.11, les propriétés thermiques reconstruites semblent plus diffuses et des artefacts apparaissent près de la surface. La reconstruction des inclusions, présentée sur la figure 7.14 montre ainsi un défaut reconstruit de dimensions beaucoup plus importantes que précédemment en particulier pour l'étendue verticale. Des inclusions apparaissent également près de la surface.

De la même manière, les effets sur la qualité de la reconstruction d'inclusions d'air ou d'acier à la place de l'inclusion de bois sont étudiés. Les propriétés thermiques de ces composants sont données sur la table 7.3 [74, 92].

Les positions des défauts reconstruits sont représentés sur les figures 7.15 pour l'inclusion d'air et sur les figures 7.16 pour l'inclusion d'acier.

Ces figures montrent que, à chaque fois, la localisation et la forme de l'inclusion sont mieux identifiées lorsqu'on dispose d'informations *a priori*. La surface de l'inclusion reconstruite est, là encore, plus proche de ce qui est attendu en ayant effectué une première reconstruction, quelle que soit la nature de l'inclusion.

En effet, dans le cas étudié ici, le défaut est relativement éloigné de la surface, ce qui entraîne des sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_3$  également relativement éloignés de la surface. Les artefacts visibles proches de

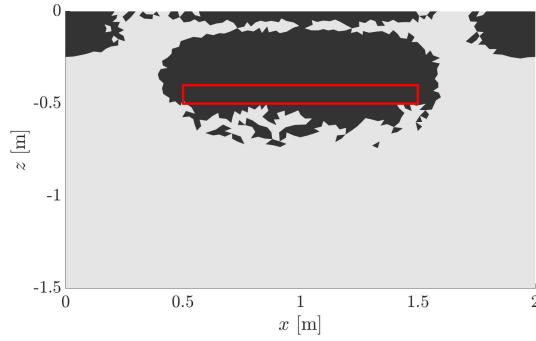


FIGURE 7.14 – Reconstruction de l’inclusion sans informations *a priori*

matériaux	$\rho c$ [ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ ]	$k$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]	$\varepsilon_r$	$\sigma$ [ $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ]
air	$1.225 \times 1006$	0.0242	1	0
acier	$8055 \times 480$	15.1	1	$1.11 \times 10^6$

TABLE 7.3 – Propriétés électriques et thermiques de l’air et de l’acier

la surface visibles sur les figures 7.14, 7.15a et 7.16a ne peuvent ainsi pas apparaître, étant alors situés dans le sous-domaine  $\mathcal{D}_2$  où les propriétés thermique sont fixes.

Le bruit ajouté aux données thermiques générées n’a pas d’influence sur la majeure partie du domaine d’étude étant donné que la fréquence élevée de ce bruit l’empêche de se propager en profondeur, le phénomène de diffusion thermique agissant comme un filtre passe-bas. Le couplage des deux méthodes permet ainsi de réduire grandement les effets de bord et ainsi d’améliorer la qualité de la reconstruction.

Les tables 7.4 donnent les valeurs moyennes des paramètres sur les inclusions reconstruites ainsi que les erreurs commises sur les paramètres thermiques et sur l’aire du défaut reconstruit.

Les erreurs sur les capacités thermiques reconstruites sont améliorées par le couplage, sauf pour l’inclusion d’air où l’erreur relative, bien que réduite, reste très importante. Les erreurs sur les valeurs reconstruites pour la conductivité thermique restent élevées mais il faut noter que les conductivités thermiques des inclusions, à l’exception de celle de l’acier, sont beaucoup plus basses que celles du milieu environnant. Ainsi, pour l’inclusion d’air, la conductivité thermique de l’inclusion est très basse et des petites erreurs numériques ont un grand effet sur l’erreur relative. Cependant, les valeurs reconstruites sont cohérentes : les valeurs reconstruites sont bien supérieures à celles du calcaire pour l’inclusion d’acier et inférieures pour les deux autres. Enfin, la forme de l’inclusion est à chaque fois mieux reconstruite, et la surface attribuée à l’inclusion est plus proche de ce qui est attendu. Ainsi, les résultats obtenus montrent que cette approche permet non seulement de connaître la présence d’une inclusion comme cela est le cas pour la reconstruction thermique seule, mais aussi d’avoir une meilleure estimation de la forme et des propriétés thermiques.

### Perspective d’application au système de route solaire hybride

La méthode de couplage qui a été introduite dans cette section pourrait être appliquée aux routes solaires hybrides, notamment pour détecter les origines d’une baisse des performances énergétiques, celles-ci ayant un impact sur la température mesurée à la surface. Plusieurs phénomènes se produisant dans la couche poreuse peuvent en particulier être visés : son encrassement, qui réduit le débit de fluide et modifie les échanges, une fuite ainsi que la présence de poches d’air qui y seraient piégées lors de la mise en service.

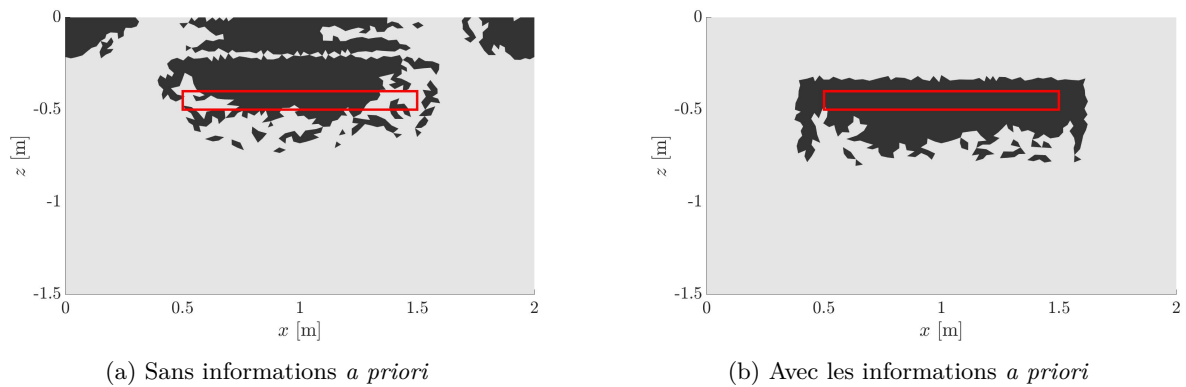


FIGURE 7.15 – Reconstruction de la position de l’inclusion d’air avec et sans les informations *a priori* du GPR

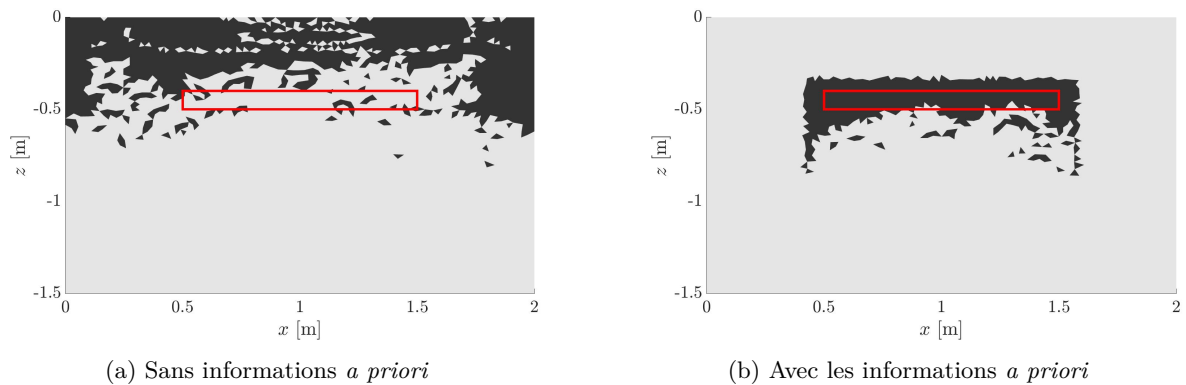


FIGURE 7.16 – Reconstruction de la position de l’inclusion d’acier avec et sans les informations *a priori* du GPR

## 7.7 Application de la méthode de l’état adjoint pour le contrôle en température

Dans cette section, la méthode de l’état adjoint présentée au cours des paragraphes précédents est appliquée au contrôle de la structure en température sur trois cas d’étude afin de démontrer la possibilité de son utilisation pour prévenir du gel en surface de chaussée.

Dans un premier temps, les conditions environnementales sont supposées évoluer de façon sinusoïdale et donc périodique.

Dans un deuxième temps, le cas de l’optimisation de la température d’injection du fluide durant l’hiver sur une période de quelques jours sera traité en se basant sur des données environnementales mesurées.

Enfin, cette méthode sera adaptée à une utilisation au cours d’une saison hivernale complète, en prenant notamment en compte l’actualisation des prévisions météorologiques.

### 7.7.1 Application de la méthode de l’état adjoint à des conditions environnementales sinusoïdales

Nous étudions la mise hors gel d’une structure ayant une longueur de 1.2 mètre selon la direction de l’écoulement. Les conditions environnementales sont hivernales : la température de l’air  $T_a$  varie entre  $-10$  et  $+5^\circ\text{C}$  et la densité de flux solaire n’excède pas  $200 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Le vent est supposé nul.

Les évolutions de ces conditions environnementales en fonction du temps sont représentées sur les figures 7.17a et 7.17b.

La température de surface obtenue est représentée sur la figure 7.18.

Matériau	$\overline{\rho C}$	$\overline{\rho c}$	$\overline{k}$	$k$	$S$	$S^0$
bois (sans GPR)	$1.89 \times 10^6$	$1.14 \times 10^6$	2.00	0.15	0.63	0.10
bois (avec GPR)	$1.05 \times 10^6$	$1.14 \times 10^6$	1.00	0.15	0.30	0.10
air (sans GPR)	$1.83 \times 10^6$	$1.23 \times 10^3$	1.78	0.0242	0.46	0.10
air (avec GPR)	$7.59 \times 10^5$	$1.23 \times 10^3$	0.820	0.0242	0.41	0.10
acier (sans GPR)	$2.24 \times 10^6$	$3.87 \times 10^6$	2.40	15.1	0.71	0.10
acier (avec GPR)	$2.94 \times 10^6$	$3.87 \times 10^6$	2.87	15.1	0.29	0.10

Matériau	erreur( $\rho c$ ) [%]	erreur( $k$ ) [%]	err( $S$ ) [%]
bois (sans GPR)	66	1233	530
bois (avec GPR)	-7.9	566	200
air (sans GPR)	$1.5 \times 10^5$	7255	360
air (avec GPR)	$6.2 \times 10^4$	3288	310
acier (sans GPR)	-42	-84	610
acier (avec GPR)	-24	-81	190

TABLE 7.4 – Propriétés des inclusions reconstruites

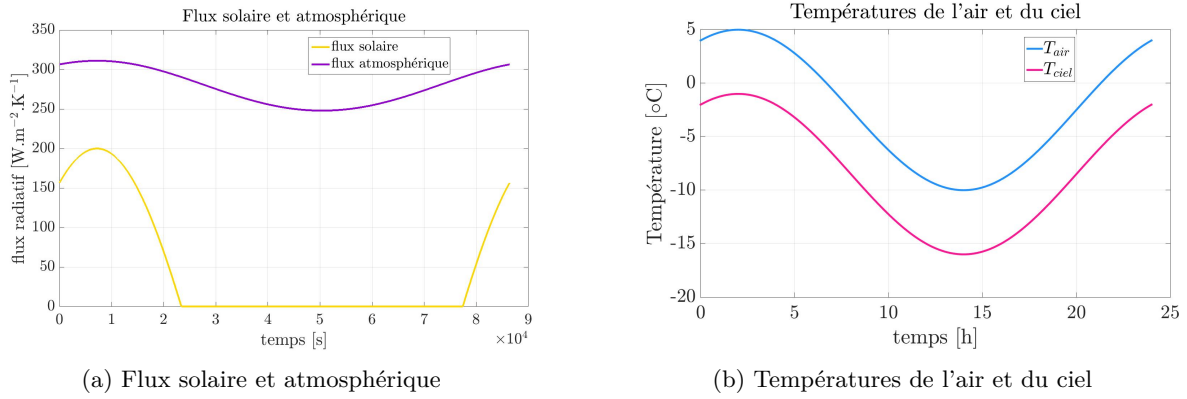


FIGURE 7.17 – Évolutions des conditions environnementales en fonction du temps

La température de surface descend durant la nuit et peut descendre sous le seuil de température. Afin de réduire les risques de gel sur la surface, nous cherchons la température d'entrée du fluide telle que la température de surface soit supérieure à  $T_{\text{seuil}} = 4^\circ\text{C}$ . Trois scénarii sont pour cela étudiés :

- Dans le premier cas, le fluide est injecté à une température constante, égale à  $8^\circ\text{C}$ , température ne permettant pas de vérifier la condition d'une température de surface supérieure à  $+4^\circ\text{C}$ .
- Dans le deuxième cas, la température d'injection du fluide reste constante mais est augmentée afin que la température de surface reste supérieure au seuil à tout moment. L'application du modèle direct pour différentes températures d'injection du fluide permet d'obtenir rapidement la température d'injection telle que la température de surface reste supérieure à  $+4^\circ\text{C}$ . La température d'injection du fluide ainsi obtenue est de  $17.5^\circ\text{C}$ .
- Dans le troisième cas, la méthode de l'état adjoint est appliquée avec minimisation de la fonctionnelle présentée précédemment. Contrairement au premier scénario, la température d'injection du fluide est alors fonction du temps, mais permet, là encore, d'obtenir une température de surface supérieure ou égale à  $+4^\circ\text{C}$ .

Les températures d'injection du fluide ainsi obtenues sont représentées sur la figure 7.19a ; les températures de surface sont représentées sur la figure 7.19b.

Si le scénario avec une température d'injection du fluide constante, égale à  $17.5^\circ$  permet bien de vérifier la condition  $T_{\text{surf}} \geq T_{\text{seuil}}$ , la température de surface ne s'approche de  $T_{\text{seuil}}$  que ponctuellement.

L'utilisation de la méthode de l'état adjoint permet au contraire à la température de surface de venir tangenter  $T_{\text{seuil}}$  pendant toute la période où les apports énergétiques extérieurs sont insuffisants.

Cette différence entre ces deux scénarii est illustrée par la figure 7.20. Celle-ci représente les écarts de température d'injection du fluide selon que cette température est constante ou non et permet donc

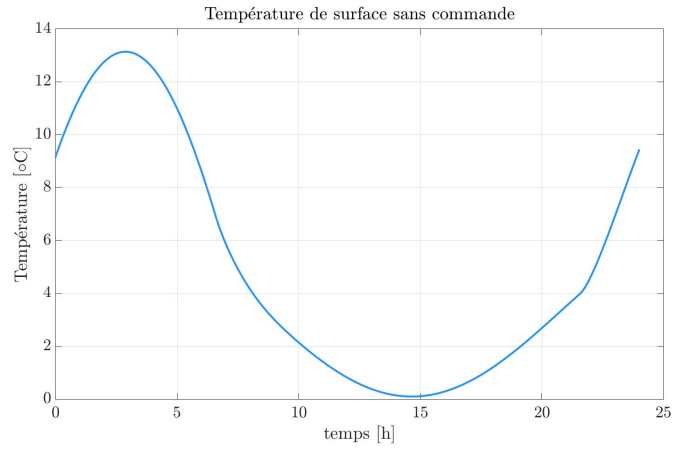
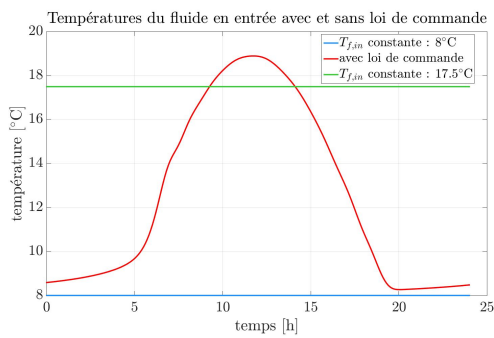
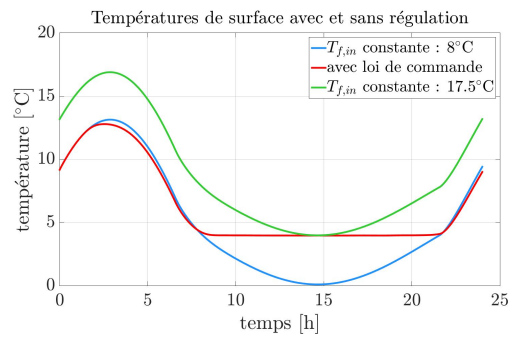


FIGURE 7.18 – Température de surface sans régulation de la température d’injection du fluide



(a) Températures d’injection du fluide pour les différents scénarii



(b) Températures de surface pour les différents scénarii

FIGURE 7.19 – Résultats avec les trois scénarii



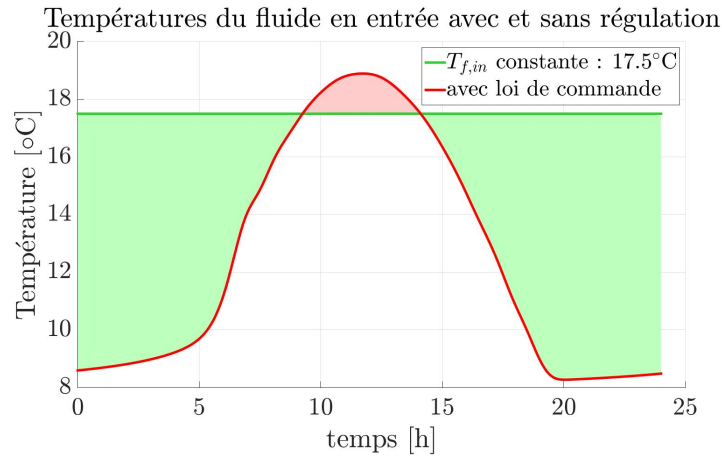


FIGURE 7.20 – Température d’injection du fluide avec et sans loi de commande

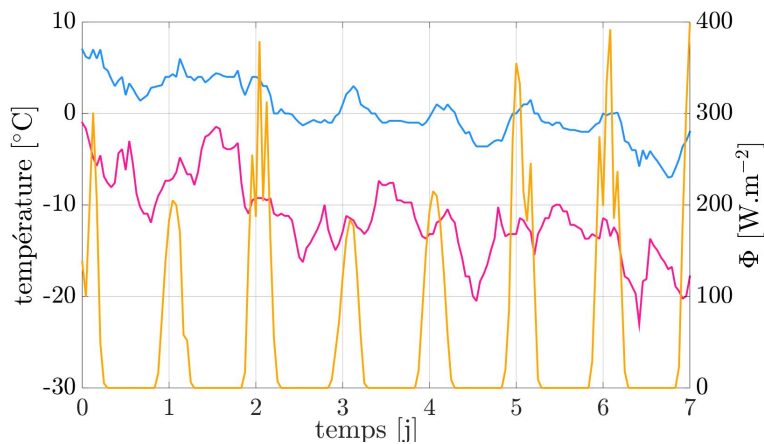


FIGURE 7.21 – Températures de l’air et de ciel et densité de flux solaire

d’illustrer les écarts de dépenses énergétiques pour le chauffage du fluide entre ces scenarii.

La surface colorée en vert représente ainsi le gain en température d’entrée du fluide lorsque la régulation par la méthode de l’état adjoint est appliquée, et celle en rouge représente le déficit. Par rapport au scénario d’origine, avec une température d’injection du fluide constante égale à 8°C, la régulation avec la méthode de l’état adjoint nécessite une dépense énergétique de 3.64 kWh sur une journée, pour une longueur d’écoulement de 1.2 m et une largeur de 1 m. Sans commande, cette dépense énergétique monte à 7.62 kWh. La régulation permet donc, dans ce cas d’étude, une économie d’environ 52 % de l’énergie dépensée pour le chauffage du fluide.

### 7.7.2 Cas de l’optimisation de la température d’injection sur une période de quelques jours

Nous considérons le scénario correspondant aux conditions environnementales relevées à Nancy du 5 au 12 février 1989 d’après les données de Energy Plus. Les évolutions des températures de l’air et du ciel ainsi que le rayonnement solaire sont représentées sur la figure 7.21.

La température de l’air, positive pendant les deux premiers jours, décroît ensuite pour descendre jusqu’à -7°C. La température de la surface de la chaussée, représentée sur la figure 7.22 en bleu, descend alors jusqu’à environ -3°C. Un chauffage est nécessaire pour maintenir la température de surface supérieure au seuil de +4°C qui a été fixé.

L’algorithme du gradient conjugué a été mis en place ici sur la durée des données. Il reste possible de maintenir une température d’entrée du fluide constante, de façon à maintenir la surface à une température

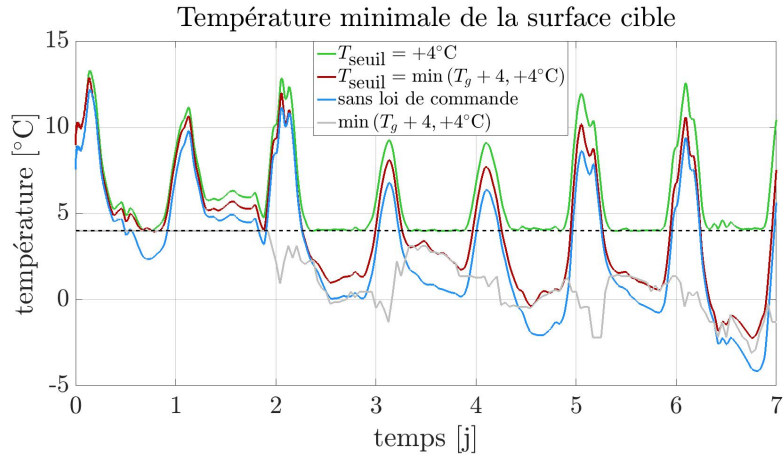


FIGURE 7.22 – Température minimale de surface avec et sans loi de commande

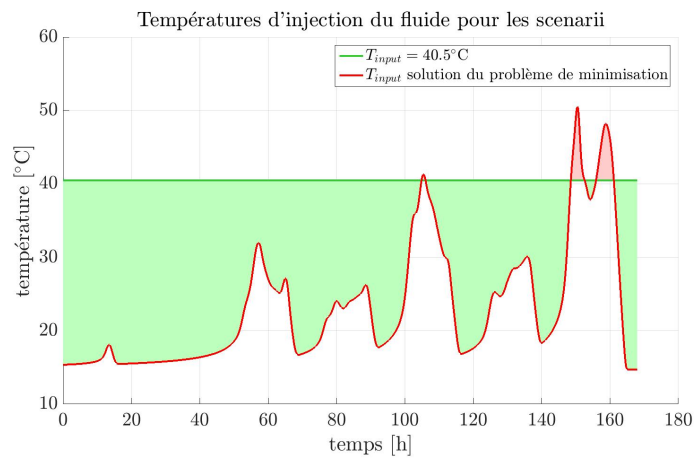


FIGURE 7.23 – Température d'injection du fluide avec loi de commande et avec maintien d'une température d'injection égale à 40.5°C

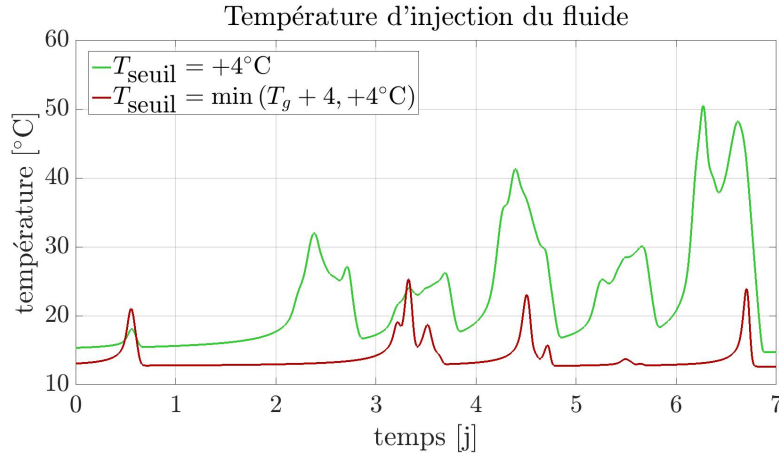


FIGURE 7.24 – Température minimale de surface avec et sans loi de commande

supérieure au seuil de  $4^{\circ}\text{C}$ , comme cela est représenté avec la courbe verte de la figure 7.23. Cependant, la pertinence d'un tel maintien de la température d'entrée du fluide pose question. En effet, il ne semble pas nécessaire de chauffer le fluide jusqu'à  $40.5^{\circ}\text{C}$  durant les deux premiers jours étant données les conditions climatiques. Ce maintien à une température constante est d'autant plus discutable que la durée de la simulation est longue : les épisodes de grand froid n'occupent pas toute la durée de l'hiver et maintenir une température d'entrée du fluide élevée durant les périodes de relative douceur peut être évité.

En comparant néanmoins pour ce cas les dépenses énergétiques liées au chauffage du fluide en entrée, qui s'élèvent à  $72 \text{ kWh.m}^{-2}$  avec maintien d'une température constante ou à  $23 \text{ kWh.m}^{-2}$  avec l'utilisation de l'état adjoint, un gain de 68 % est apporté par l'utilisation d'une loi de commande.

Il est à noter que la largeur de la chaussée étudiée (ou longueur de l'écoulement) est de deux mètres, ce qui nécessite une température d'entrée pouvant monter ici jusqu'à  $50^{\circ}\text{C}$  environ. Pour des largeurs plus importantes, la température d'entrée du fluide devrait encore être augmentée (voir aussi la relation (4.122) à ce propos), ce qui poserait des problèmes de surchauffe de la structure près de l'entrée du fluide. Il est donc peu envisageable d'utiliser ce type de solution de lutte contre le verglas pour des routes de largeur importante. Les dimensions peuvent cependant correspondre à celles de trottoirs.

Une solution à ce problème de température d'injection de fluide trop élevée peut venir du seuil de température considéré. En effet, en considérant non pas un seuil de température constant, ici égal à  $4^{\circ}$  mais en prenant en compte le point de givrage avec un seuil de température vérifiant  $T_{\text{seuil}} = \min(T_g + 4, +4^{\circ}\text{C})$ , il n'est plus nécessaire de chauffer au cours des périodes de froid sec. Les évolutions des températures d'injection du fluide pour les deux seuils de températures sont données sur la figure 7.24. Au lieu de monter jusqu'à  $50^{\circ}$ , la température maximale du fluide injecté atteint seulement  $25^{\circ}$  en prenant en compte l'humidité au travers du point de givrage. Le besoin en énergie pour chauffer le fluide depuis sa température de réservoir, égale à  $13^{\circ}\text{C}$ , est alors réduit de plus de 90 %.

La température de surface, représentée en rouge sur la figure 7.22, est alors parfois négative, mais reste supérieure au nouveau seuil de température, représenté en gris.

Une autre remarque peut être faite pour des dates proches de l'horizon temporel, la température d'injection du fluide tend vers la température du fluide sans chauffage. En effet, une augmentation de la température d'injection du fluide à proximité de l'horizon temporel ne peut entraîner qu'un effet négligeable sur la température de surface et n'a donc presque aucune influence sur le terme de résidu tout en impactant le terme de consommation énergétique. La condition  $T_{\text{surf}} \geq T_{\text{seuil}}$  peut ainsi ne pas être vérifiée à l'approche de l'horizon temporel lorsque les conditions climatiques y sont défavorables. Ici, la simulation se terminant par une journée ensoleillée, cet effet n'intervient pas.

### 7.7.3 Mise en place d'une stratégie d'optimisation de la température d'entrée du fluide avec actualisation des prévisions météorologiques

Dans ce paragraphe, une saison hivernale complète est étudiée, avec actualisation des données climatiques de façon quotidienne. Des bilans énergétiques peuvent ainsi être effectués et des comparaisons

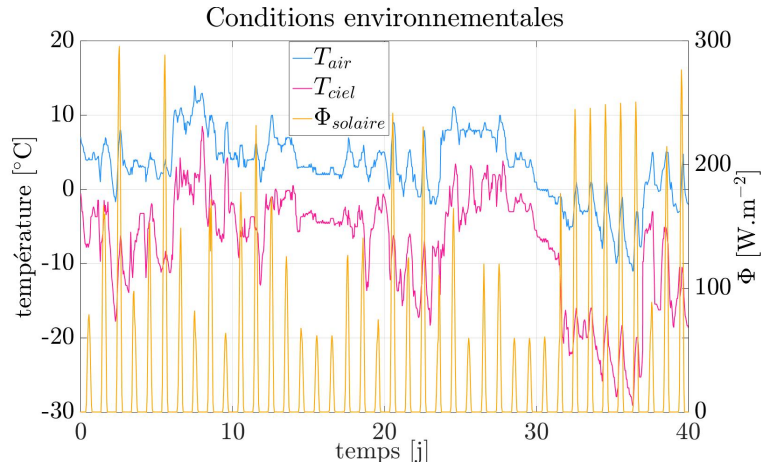


FIGURE 7.25 – Conditions climatiques sur quarante jours à Nancy

entre plusieurs villes être menées.

### Stratégie d'optimisation

Les prévisions météorologiques sont établies pour des horizons temporels allant au plus, généralement, jusqu'à dix jours. Cependant la fiabilité de ces prévisions diminue généralement après quelques jours, bien avant cet horizon temporel.

Le système pouvant avoir une largeur de l'ordre d'un à deux mètres, et les vitesses d'écoulement étant de l'ordre de  $10^{-4} \text{m.s}^{-1}$ , une durée de l'ordre de six heures est nécessaire pour que le fluide injecté en entrée atteigne la sortie. En plus de cela, la montée en température, à la suite par exemple de l'application d'un échelon, demande encore plusieurs heures (cf section 6.1). Il est donc nécessaire de disposer d'au moins un ou, mieux, de deux jours de prévisions météorologiques pour donner au système un temps de réponse suffisant.

Nous proposons ici d'utiliser la démarche suivante :

- Connaissant l'état thermique du système à un instant donné  $t_n$  et disposant des prévisions météorologiques pour les jours suivants, sur une durée  $\Delta t_a$  donnée qui correspond à l'horizon temporel de ces prédictions, la méthode de l'état adjoint est appliquée. La température du fluide nécessaire pour empêcher la formation de glace à la surface est ainsi calculée en appliquant une marge de sécurité entre  $t_n$  et  $t_n + \Delta t_a$ .
- La durée d'actualisation des prévisions météorologiques est notée  $\Delta t_m$ , avec  $\Delta t_m \leq \Delta t_a$ . Le modèle direct est alors appliqué de  $t_n$  jusqu'à la mise à jour des prévisions de l'évolution des conditions climatiques à  $t_n + \Delta t_m$ , à partir de l'évolution calculée de la température d'injection du fluide sur cette période. Le nouvel état thermique du système à  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_m$  est ainsi connu.

Le choix de  $\Delta t_m < \Delta t_a$  avec une différence au moins de l'ordre du temps de réponse du système permet d'éviter le phénomène mentionné dans le paragraphe 7.7.2 lorsqu'il n'y a presque pas de chauffage pour des dates  $t$  proches de l'horizon temporel  $t_n + \Delta t_a$ .

Ici,  $\Delta t_m = 24 \text{ h}$  et  $\Delta t_a = 72 \text{ h}$ , ce qui signifie qu'on suppose connaître les conditions climatiques pour trois jours et que celles-ci sont actualisées toutes les 24 heures.

### Application à une saison d'hiver

Un exemple de données climatiques, à Nancy sur 40 jours, est présenté sur la figure 7.25.

L'application de la loi de commande basée sur la méthode de l'état adjoint permet de calculer la température du fluide injecté pour empêcher la température de surface de descendre en-dessous d'une température seuil. Deux seuils sont considérés, le premier constant, égal à  $4^\circ\text{C}$  et le second basé sur le point de givrage avec un coefficient de sécurité de  $4^\circ\text{C}$ . Ce maintien au-dessus du seuil est obtenu tout en minimisant les dépenses énergétiques nécessaires au chauffage du fluide et en tenant compte de l'actualisation des prévisions météorologiques. Ici, les données météorologiques sont les mesures, dont on suppose disposer sur quatre jours.

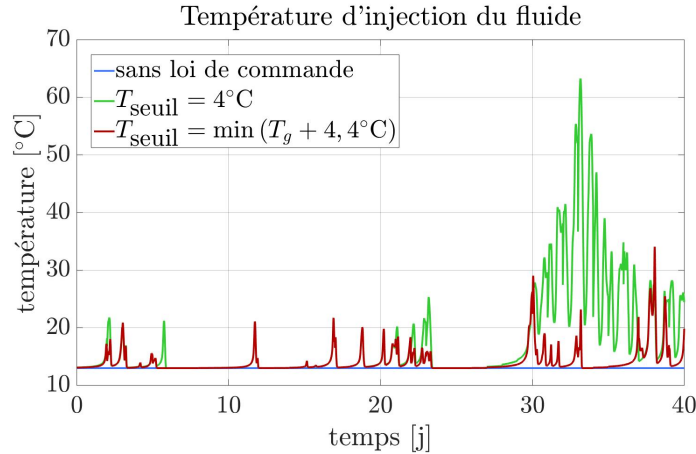


FIGURE 7.26 – Température d'injection du fluide avec et sans loi de commande

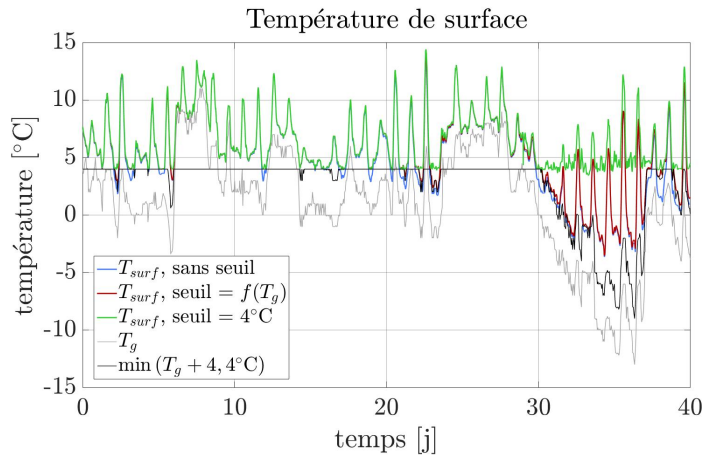


FIGURE 7.27 – Température minimale de la surface avec et sans loi de commande

Les températures d'injection du fluide, avec et sans loi de commande, sont présentées sur la figure 7.26. Les températures de surface sont représentées sur la figure 7.27. Lorsque la loi de commande est mise en œuvre, la température minimale de surface est à chaque fois maintenue à un niveau préservant la structure de la formation de verglas. La condition  $T_{\text{surf}} \geq 4^\circ\text{C}$  n'est pas toujours pleinement respectée à cause de la contrainte faible qui est appliquée, mais la température de surface ne descend que de quelques dixièmes de degrés en-dessous du seuil.

Lors du principal épisode de froid, aux alentours du 35<sup>ème</sup> jour, la température de l'air descend en-dessous de  $-10^\circ\text{C}$  pendant la nuit, nécessitant une température d'injection du fluide de l'ordre de  $60^\circ\text{C}$  pour maintenir la température de surface au-dessus du seuil de  $4^\circ\text{C}$  sur toute la largeur de la chaussée, ici de deux mètres. Cependant, cette période correspond à un air certes froid, mais aussi sec, pour lequel le point de givrage se situe autour de  $-10^\circ\text{C}$  alors que la température de surface, sans chauffage, ne descend pas en-dessous de  $-5^\circ\text{C}$ . Il n'y a donc pas de risque de givrage durant cette période et le chauffage nécessaire s'en trouve réduit en prenant comme référence le point de givrage, avec une température maximale d'injection du fluide n'excédant pas  $35^\circ\text{C}$ .

Ce paragraphe traite de la mise en application de la loi de commande. Des résultats sur l'année sont étudiés dans le paragraphe 7.8.

## 7.8 Résultats pour plusieurs zones climatiques

Comme pour la fonction de récupération d'énergie, les données météorologiques de plusieurs zones climatiques ont été utilisées pour estimer le chauffage nécessaire. Comme pour l'application de la loi de commande sur quarante jours, l'actualisation des données climatiques s'effectue toutes les 24 heures.

À chaque fois, il est supposé que la température du fluide disponible est constante,  $T_r = 12^\circ\text{C}$  et que ce fluide peut être ensuite réchauffé lorsque cela est nécessaire.

L'énergie nécessaire pour le chauffage du fluide  $E_c$  est supposée pouvoir être calculée de façon similaire à ce qui a été fait pour la récupération d'énergie avec la relation (6.8) :

$$E_c = \int_t (\rho c)_f S u (T_{f,\text{in}} - T_r) dt \quad (7.99)$$

La température d'injection du fluide ne peut pas descendre en-dessous de la température du fluide contenu dans le réservoir  $T_r$ . En effet, le terme de Tikhonov pénaliserait une telle descente alors que cela ne peut avoir qu'un effet négatif sur la condition de seuil de température. Il n'est donc pas nécessaire de considérer la partie positive ici.

Dans les paragraphes précédents, pour plus de lisibilité, un seul seuil de température, constant, avait été considéré pour la température de surface. Ici, une comparaison entre un seuil de température constant comme précédemment et un seuil de température basé sur le point de givrage est en plus proposée. Les seuils sont notés  $T_{\text{seuil},c} = 4^\circ\text{C}$  et  $T_{\text{seuil},g} = \min(T_g + 4, 4^\circ\text{C})$ .

Plusieurs villes ont été étudiées et les résultats obtenus sont présentés sur la table 7.5.

ville	$E_c(T_{\text{seuil},c})$	$E_c(T_{\text{seuil},g})$	écart [%]
Aix-en-Provence	156.3	56.4	-63.9
Madrid	140.9	16.3	-88.5
Nancy	397.0	110.0	-72.3
Rennes	112.2	87.0	-22.5

TABLE 7.5 – Synthèse des résultats en apport d'énergie pour la prévention du gel

La table 7.5 montre que, pour des climats secs, utiliser le point de givrage comme référence pour le seuil de température minimale permet une importante économie d'énergie, notamment à Madrid ou Nancy. Pour des climats plus océaniques, comme à Rennes, le point de givrage se rapproche davantage de la température de l'air et la différence entre les deux seuils de température est réduite, ce qui entraîne une diminution plus faible de l'énergie consommée. Il faut de plus noter que, dans ce cas, deux paramètres doivent être mesurés et prédits, comme par exemple la température de l'air et l'humidité pour obtenir le point de givrage, contrairement au cas du seuil constant, ce qui rajoute de l'incertitude au seuil obtenu.

## 7.9 Étude d'un dispositif de chauffage électrique

Nous présentons dans cette section l'utilisation d'un chauffage non plus basé sur un apport de chaleur par un fluide, mais par effet Joule. Dans ce cas, des câbles sont enfouis à l'intérieur de la structure et un courant électrique circule lorsque cela se révèle nécessaire, encore une fois dans l'objectif de préserver la structure de l'apparition de verglas en surface.

Pour cela, la structure étudiée est d'abord introduite puis une régulation du chauffage est proposée, d'abord sans contraintes supplémentaires, puis en tenant compte des spécificités d'un chauffage par une solution électrique.

### 7.9.1 Présentation de la structure étudiée

La structure a pour objectif de permettre la circulation de moyens de transport guidés ou pas sur pneumatiques.

La géométrie étudiée est présentée sur la figure 7.28. Toutes les cotes sont indiquées en mm.

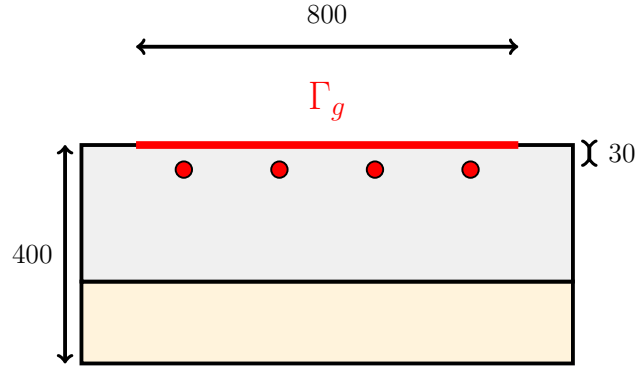


FIGURE 7.28 – Position du problème

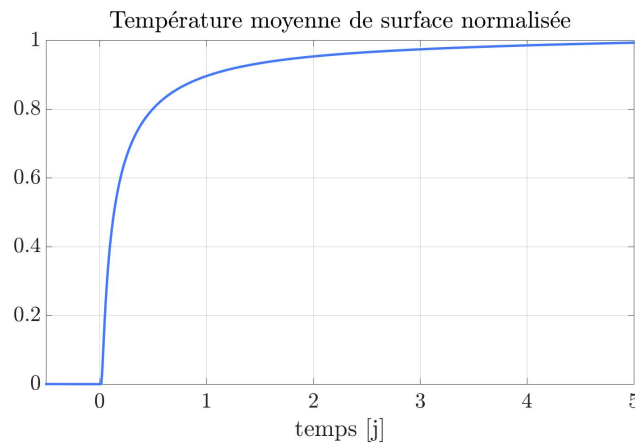


FIGURE 7.29 – Réponse en température normalisée suite à un échelon de puissance

L'objectif est de faire en sorte que le verre ne puisse pas se former sur la surface  $\Gamma_g$ , en rouge sur la figure 7.28 où circulent les pneus du matériel roulant en appliquant un chauffage électrique par effet Joule au niveau des câbles qui constituent le sous-domaine  $\Omega_c$ .

### 7.9.2 Réponse temporelle du système

Comme cela a été réalisé pour la route solaire hybride lors du paragraphe 6.1, un échelon sur la puissance du système est appliqué à la structure de la figure 7.28 et la réponse temporelle est analysée afin d'en dégager des constantes de temps.

Après que le système soit mis en régime permanent établi avec un système électrique éteint, une mise en puissance est effectuée. La température est obtenue numériquement au cours du temps sur la surface à préserver du gel. L'évolution de la température moyenne sur cette zone normalisée, définie par  $\theta = \frac{1}{S} \int_{\Gamma_g} \frac{T - T(t=0)}{T(t=+\infty) - T(t=0)} dS$ , est représentée sur la figure 7.29.

La réponse temporelle ainsi obtenue peut être assimilée à un système d'ordre 2, par :

$$\theta(t) = 1 - \left( 0.246 \times \exp\left(\frac{-t}{1.05 \times 10^5}\right) + 0.754 \times \exp\left(-\frac{t}{1.25 \times 10^4}\right) \right) \quad (7.100)$$

Deux constantes de temps peuvent ainsi être obtenues :  $\tau_1 = 29.2$  h et  $\tau_2 = 3.48$  h. Le système réagit donc plus rapidement que la route solaire hybride, même si le temps de réponse à 95 % vaut encore 46.5 h. Le retard du système est négligeable et la réponse du système débute en moins de six minutes en considérant une réponse à 1 %.

### 7.9.3 Commande du système par l'application de la méthode de l'état adjoint

Les transferts thermiques dans la structure sont régis par la diffusion thermique ainsi que par l'apport électrique par effet Joule. Cet apport se traduit par un terme source  $q$  fonction de l'activation ou non du chauffage par effet Joule, donc du temps et tel que  $q = 0$  en dehors du sous-domaine constitué des câbles. L'équation de la diffusion thermique s'écrit alors :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot [k \nabla T] = q \quad (7.101)$$

La structure est soumise à des échanges avec son environnement à travers la frontière supérieure du domaine notée  $\Gamma_S$  :

$$k \nabla T \cdot \vec{n} = h_{\text{conv}}(T_{\text{air}} - T) + h_{\text{rad}}(T_{\text{ciel}} - T) + \Phi_s \quad (7.102)$$

Les autres frontières sont supposées adiabatiques. Il est aussi fait l'hypothèse que la source thermique est uniforme dans tout le câble électrique, et donc qu'elle ne dépend pas de l'éloignement au centre du câble ni de la position suivant la longueur du câble.

Comme pour préserver la route solaire hybride du verglas en surface, un problème de minimisation est introduit et certaines notations sont de nouveau utilisées :

- $\mathcal{M}$  désigne l'espace des mesures, dans lequel sont définies les températures sur la surface à préserver du gel  $\Gamma_g$  :  $\mathcal{M} = L^2(\Gamma_g, [0, t_a])$ . Cet espace est muni du produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  défini, pour tout  $a, b \in \mathcal{M}$ , par :

$$\langle a | b \rangle_{\mathcal{M}} = \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_g} a(x, t) b(x, t) d\Gamma dt \quad (7.103)$$

La norme associée est notée  $\| \cdot \|_{\mathcal{M}}$ .

- $\mathcal{U}$  est l'espace des paramètres, dans lequel se trouve la variable  $q$  à déterminer.  $q$  étant supposé constant sur  $\Omega_c$ , on a  $\mathcal{U} = L^2([0, t_a])$ . Cet espace est muni du produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{U}}$ , défini par, pour tout  $a, b \in \mathcal{U}$  :

$$\langle a | b \rangle_{\mathcal{U}} = \int_{t=0}^{t_a} a(t) b(t) dt \quad (7.104)$$

La norme associée est notée  $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$ .

La fonctionnelle  $J$  à minimiser est constituée de deux termes : un terme de résidu correspondant à la pénalisation appliquée dans le cas d'une température trop basse sur  $\Gamma_g$  et un terme de Tikhonov permettant d'assurer à la fois la régularisation du problème et la minimisation de la consommation énergétique. La fonctionnelle  $J$  s'écrit ainsi :

$$J(q) = \| \min(0, T(q) - T_{\text{seuil}}) \|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| q \|_{\mathcal{U}}^2 \quad (7.105)$$

Le problème est linéaire par rapport à  $q$  et il n'est pas nécessaire de résoudre le problème linéaire tangent, alors équivalent au problème direct. Le problème adjoint, d'inconnue  $\delta T^*$  s'écrit :

$$\begin{cases} -\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \min(0, T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_g} \\ \begin{cases} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -(h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}}) \delta T^* & \text{sur } \Gamma_s \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_s \end{cases} \end{cases} \quad (7.106)$$

Le gradient de la fonctionnelle se déduit alors de (7.56) et on a :

$$J'(q) \delta \tilde{q} = \langle \delta \tilde{q} | \delta T^* + \varepsilon q \rangle_{\mathcal{U}} \quad (7.107)$$

### 7.9.4 Conditions environnementales

Les conditions environnementales utilisées ici sont représentées sur la figure 7.30.

Ces conditions environnementales laissent apparaître une succession de périodes de gel avec donc un risque d'avoir une température négative à la surface. En l'absence de fonctionnement du système, la température de la surface peut être calculée numériquement. Pour chaque instant, la température minimale de la zone à préserver du gel est représentée sur la figure 7.31.



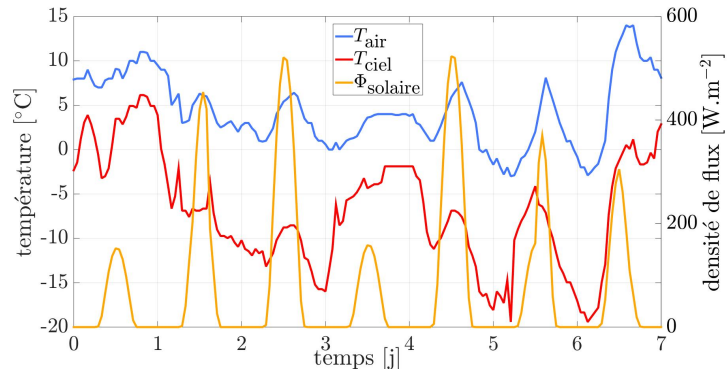


FIGURE 7.30 – Conditions environnementales

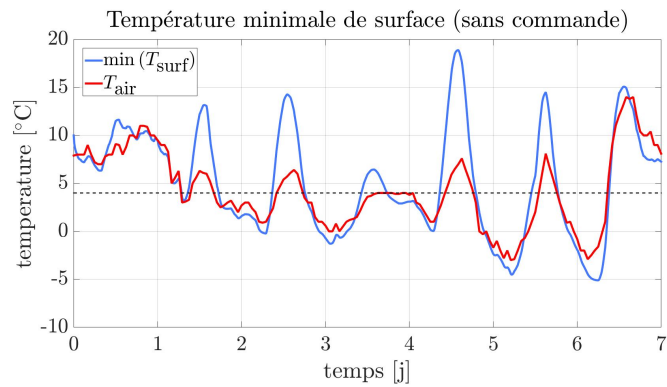
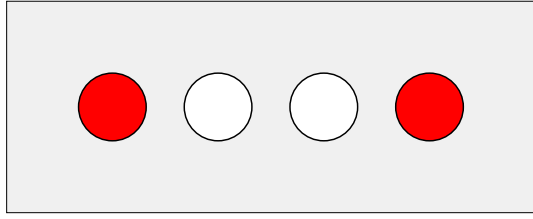
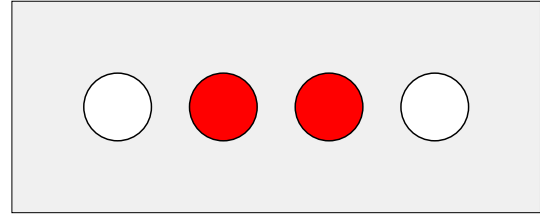


FIGURE 7.31 – Température minimale de la surface cible



(a) Câbles extérieurs en fonctionnement (terme source  $q_1$ )



(b) Câbles centraux en fonctionnement (terme source  $q_2$ )

FIGURE 7.32 – Fonctionnement des câbles électriques

La température minimale de la surface présente globalement les mêmes variations que la température de l'air. Cependant, étant donnée la température de ciel, la surface se refroidit davantage durant la nuit et sa température décroît jusqu'à  $-5^\circ\text{C}$  pour le septième jour. En journée, le rayonnement solaire permet une élévation plus importante de la température et de passer au-dessus du seuil de  $4^\circ\text{C}$ . Il est à noter que, au cours de toutes les simulations numériques présentées ci-après, l'émissivité du béton est supérieure à la réalité. En conséquence, la température calculée en journée et en soirée est plus élevée que ce qu'elle serait en réalité. Cependant, le fait que cette valeur d'émissivité soit surévaluée de la même manière pour toutes les simulations rend valable les comparaisons entre elles.

### 7.9.5 Ajout de contraintes sur l'utilisation des câbles électriques

Le terme source à calculer doit vérifier plusieurs contraintes. Si le terme source est uniforme à l'intérieur de chaque câble, ceux-ci ne fonctionnent de plus pas indépendamment les uns des autres : les deux câbles extérieurs fonctionnent simultanément et il en est de même pour les deux câbles centraux. Ce fonctionnement est schématisé sur la figure 7.32.

### 7.9.6 Contrainte fréquentielle

Afin de ne pas réduire la durée de vie du système, il est préférable d'éviter des cycles d'allumage / extinction trop rapprochés. Une période notée  $\Delta\tau$  doit séparer une mise en fonctionnement d'une extinction du système et inversement. Il est par ailleurs supposé que le temps de réaction du système électrique suite à une mise en fonctionnement ou à un arrêt du système est très faible devant les constantes de temps thermiques.

Dans un premier temps, seule la contrainte fréquentielle sur la vitesse des oscillations du terme source est prise en compte. En notant  $\tau_n = (n-1)\Delta\tau$ , le terme source  $q$  doit alors être constant sur chacun des intervalles. On note de plus  $N_\tau$  l'indice tel que  $\tau_{N_\tau} < t_a \leq \tau_{N_\tau+1}$ .

Le paramètre  $q$  est alors contenu dans le sous espace de  $\mathcal{U} = L^2([0, t_a])$  constitué des fonctions constantes sur chaque intervalle  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ ,  $n \in \llbracket 1, N_\tau \rrbracket$ . En notant  $q_n$  la valeur de  $q$  sur l'intervalle  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ , l'expression du gradient de la fonctionnelle (7.107) peut se réécrire :

$$\frac{\partial J}{\partial q} = \sum_{n=1}^{N_\tau} \int_{t=\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\delta T^* + \varepsilon q) dt = \sum_{n=1}^{N_\tau} \int_{t=\tau_n}^{\tau_{n+1}} \delta T^* dt + \varepsilon \Delta\tau q_n \quad (7.108)$$

$q$  appartient ici à un sous-espace de l'espace des paramètres utilisé précédemment. Ainsi, nécessairement, la valeur de la fonctionnelle associée à cette solution davantage contrainte sera plus élevée que précédemment. En particulier, si on considère que la contrainte  $T_{\text{surf}} \geq T_{\text{seuil}}$  est respectée, la différence se produit alors sur le terme de Tikhonov qui représente également la consommation énergétique du système. L'ajout de la contrainte fréquentielle ne peut ainsi qu'augmenter la consommation en énergie même si celle-ci est compensée par une augmentation de la durée de vie du système.

La résolution du problème avec la méthode de l'état adjoint est effectuée. L'évolution des deux termes sources et la température minimale à la surface sont représentées sur la figure 7.33.

Le terme source  $q_1$  correspond aux câbles externes, tels que représentés sur la figure 7.32a et le terme source  $q_2$  aux câbles centraux, schématisés sur la figure 7.32b.

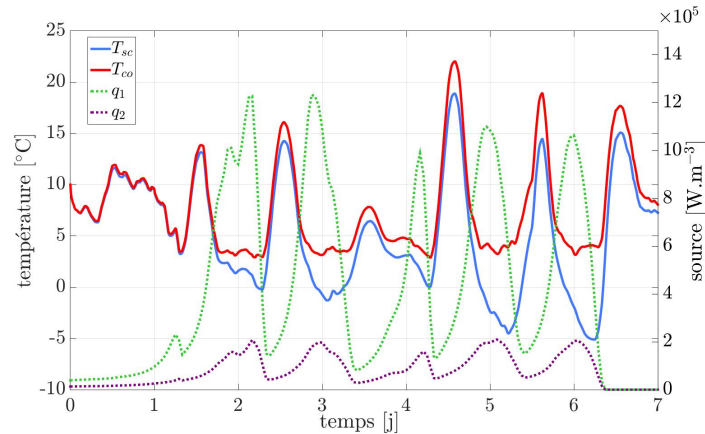


FIGURE 7.33 – Température minimale de la surface cible et termes sources avec la méthode de l’adjoint

Cette figure montre que la principale contribution au chauffage provient ici des deux câbles extérieurs et que la loi de commande permet d’assurer le maintien hors gel de la structure.

Cette contribution peut être représentée en montrant l’évolution de la température de la surface à préserver du gel  $\Gamma_g$  en fonction du temps, comme cela est réalisé avec la figure 7.34. Cette figure permet de montrer la température en fonction du temps (en abscisse) et de la position sur  $\Gamma_g$ , la position  $x = 0$  correspondant à la position la plus à gauche sur la figure 7.28. Les câbles électriques sont alors situés en  $x = 13$  cm,  $x = 31$  cm,  $x = 49$  cm et  $x = 67$  cm. C’est au niveau des bords du domaine à préserver du gel que la température est la plus basse.

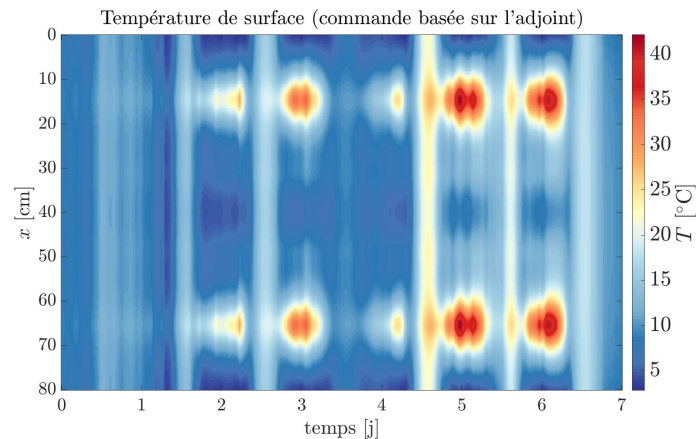


FIGURE 7.34 – Température minimale de la surface cible et termes sources avec la méthode de l’adjoint

### 7.9.7 Contrainte sur la valeur du terme source

Le système électrique nécessite plusieurs adaptations sur la loi de commande. En particulier, ce système est supposé fonctionner avec une puissance égale à une valeur donnée. Cela revient à considérer un terme source pouvant prendre deux valeurs : 0 dans le cas où le système n’est pas en marche ou  $q_0$ , donnée, en fonctionnement. La valeur de  $q_0$  doit alors être suffisante pour empêcher la formation de glace même sous des conditions environnementales très défavorables, mais aussi pas trop élevée pour éviter un chauffage trop important.

Contrairement aux problèmes précédents, le problème peut être résolu de façon exacte, étant donné qu’il existe ici un nombre fini de valeurs de paramètres possibles. La solution au problème se trouve nécessairement parmi les  $2^{N_\tau}$  combinaisons de valeurs pour  $q$ . Cependant, des périodes d’allumage de l’ordre de l’heure pour une application sur des périodes de l’ordre de la journée entraîne environ 16 millions de combinaisons possibles.

fonctionnement	consommation [kWh.m <sup>-1</sup> ]
adjoint	13.0
tout ou rien ( $2 \times 10^6$ W.m <sup>-3</sup> )	6.98
tout ou rien ( $1 \times 10^6$ W.m <sup>-3</sup> )	5.44
tout ou rien ( $5 \times 10^5$ W.m <sup>-3</sup> )	3.39

TABLE 7.6 – Consommation énergétique totale au cours de la période d’une semaine étudiée

Les câbles électriques étant placés près de la surface, à 3 cm de profondeur, les constantes de temps du système sont faibles et la température de surface est rapidement impactée par l’allumage de l’alimentation électrique.

Il est donc envisageable de mettre en place une loi de commande pour une mise en fonctionnement du système lorsque la température sur la zone à préserver du gel descend en-dessous du seuil de température, sans considérer de modèle inverse.

Ainsi, dès que la température de surface passe en-dessous du seuil de température, le chauffage est activé, puis désactivé après une heure au moins de fonctionnement et lorsque la température de surface repasse au-dessus du seuil. Les résultats en température de surface et en activation du système de chauffage sont donnés sur la figure 7.35.

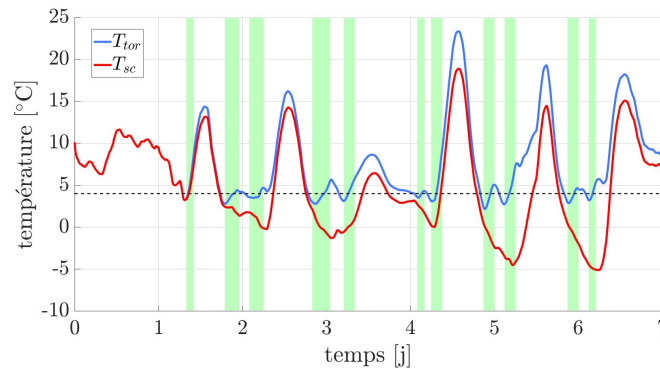


FIGURE 7.35 – Température minimale de la surface cible et termes sources avec un régulateur tout ou rien (*tor* : fonctionnement en tout ou rien, *sc* fonctionnement sans loi de commande)

Sur cette figure, les périodes coloriées en vert indiquent le fonctionnement du système, avec un terme source égal à  $2 \times 10^6$  W.m<sup>-3</sup> et les températures représentées  $T_{tor}$  et  $T_{sc}$  sont respectivement les températures minimales sur la zone à préserver du gel avec une commande de type tout ou rien et sans commande, avec un maintien hors fonctionnement du système.

Avec cette valeur de terme source, le système parvient à préserver la structure de la formation de gel, même si la condition d’une température de surface supérieure au seuil de 4°C n’est pas toujours respectée étant donné que le système ne s’active qu’après que la température de surface soit descendue en-dessous de cette valeur de température. La température en surface augmente rapidement, repassant au-dessus du seuil en quelques heures au plus. Cependant, le terme source provenant du chauffage par effet Joule est plus élevé que lors de l’application de la méthode de l’état adjoint. Ce terme source plus élevé permet un chauffage plus rapide de la surface, en augmentant plus rapidement la température sur les bords du domaine à préserver du gel, mais aussi en montant davantage la température du reste de la surface, comme cela est représenté sur la figure 7.36.

La température de surface peut ainsi atteindre 80°C en surface ce qui peut dégrader la structure. De plus, la consommation en énergie nécessaire pour le chauffage est alors fortement accrue, passant de 13.0 à 20.9 kWh.m<sup>-1</sup>.

D’autres valeurs de terme source peuvent être considérées. Les résultats obtenus en consommation d’énergie sont ainsi donnés sur la table 7.6 pour d’autres valeurs de terme source en fonctionnement en tout ou rien.

Le fonctionnement avec la méthode de l’adjoint permet une économie d’énergie de 38 % par rapport au

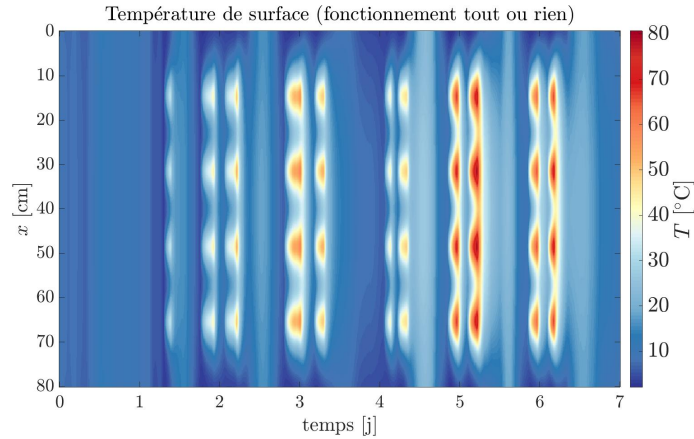
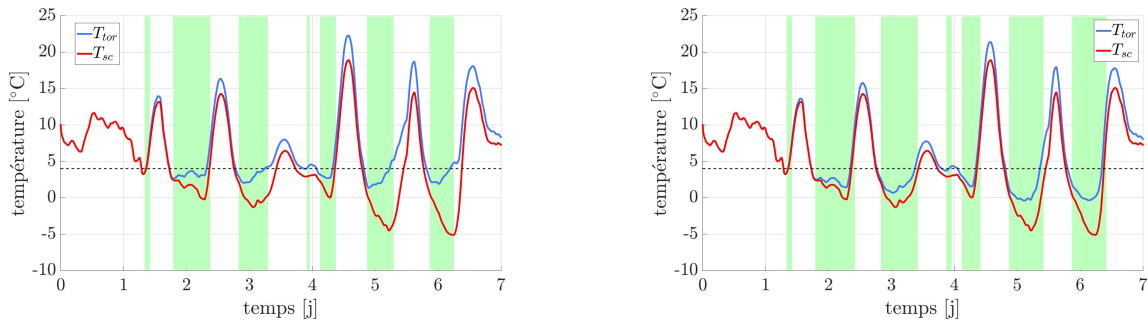


FIGURE 7.36 – Température minimale de la surface cible et termes sources avec un régulateur tout ou rien, les périodes de fonctionnement sont représentées en vert

terme source maximal utilisé en fonctionnement tout ou rien. Avec un terme source réduit, il est possible d’obtenir une réduction de la consommation en énergie, mais cela se fait au détriment de la condition sur le seuil de température en surface. Il faut en effet rappeler que la solution obtenue par l’adjoint a été établie en minimisant une fonctionnelle prenant en compte à la fois cette condition de seuil et la consommation énergétique. Une consommation énergétique inférieure à celle obtenue avec la méthode de l’adjoint entraîne ainsi une condition sur le seuil de température moins respectée.

Les résultats obtenus en température avec des termes source égaux à  $1 \times 10^6 \text{ W.m}^{-3}$  et  $5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$  sont ainsi présentés sur les figures 7.37a et 7.37b.



(a) Terme source égal à  $1 \times 10^6 \text{ W.m}^{-3}$  en fonctionnement

(b) Terme source égal à  $5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$  en fonctionnement

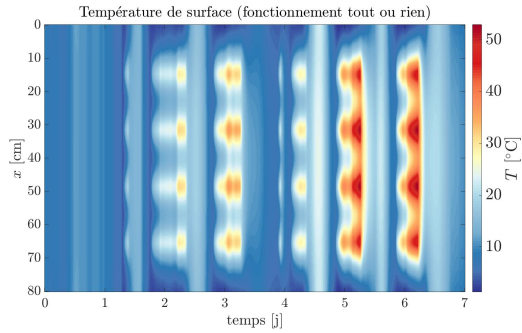
FIGURE 7.37 – Température minimale sur la surface en fonctionnement en tout ou rien pour deux valeurs de terme source

Les températures de surface sont représentées sur les figures 7.38a et 7.38b.

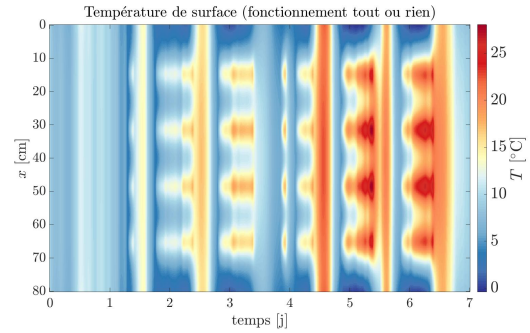
Lorsque la valeur du terme source diminue, la température de la surface diminue également. Le maximum de température est donc plus bas, un peu au-delà de  $50^\circ\text{C}$  avec une source de  $1 \times 10^6 \text{ W.m}^{-3}$  et même inférieure à  $30^\circ\text{C}$  pour une source de  $5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$ . Cependant, cette réduction de la montée en température empêche le système de respecter la condition sur le seuil de température minimal. La durée passée en-dessous augmente avec la réduction du terme source et le gel peut même apparaître puisque la température de surface peut descendre en-dessous de  $0^\circ\text{C}$ . L’augmentation de la durée de fonctionnement ne permet pas de combler la différence avec le seuil de température tant que les apports solaires durant la journée n’interviennent pas.

Les fonctionnements en tout ou rien et basé sur l’adjoint sans contrainte en valeurs sont comparés sur les figures 7.39a et 7.39b.

Le fonctionnement en tout ou rien s’avère ainsi adapté seulement si l’intensité des épisodes de froid est

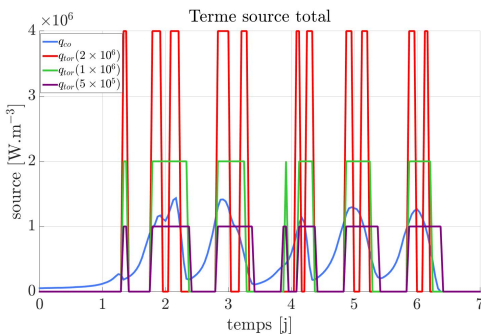


(a) Terme source égal à  $1 \times 10^6 \text{ W.m}^{-3}$  en fonctionnement

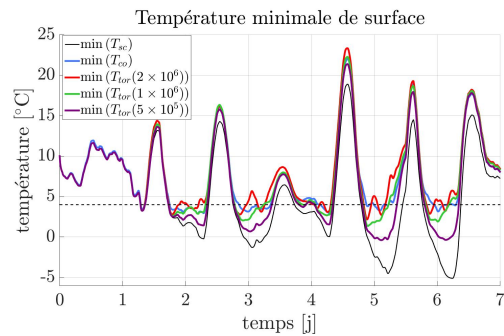


(b) Terme source égal à  $5 \times 10^5 \text{ W.m}^{-3}$  en fonctionnement

FIGURE 7.38 – Température de surface en fonctionnement en tout ou rien pour deux valeurs de terme source



(a) Comparaison des termes sources



(b) Températures minimales de surface

FIGURE 7.39 – Comparaison des résultats en terme source et en température de surface pour les fonctionnements sans commande (indice  $sc$ ), avec l'adjoint (indice  $co$ ), et en tout ou rien (indice  $tor$ )

à peu près la même à chaque fois. Si ce n'est pas le cas, une période de gel de faible intensité entraînera une importante consommation en énergie et donc un chauffage trop important et, pour un épisode de forte intensité, le chauffage ne sera pas suffisamment important pour protéger la surface du gel.

La méthode de l'adjoint apparaît adaptée étant donné que, par rapport à un fonctionnement en tout ou rien, elle permet d'anticiper les risques de gel pourvu que les épisodes de froid soient prévus et de moduler la fréquence selon les câbles électriques. Le problème de l'utilisation ici de cette méthode provient de raisons techniques et du fait qu'il soit préférable d'avoir un fonctionnement seulement à pleine puissance. Cependant, le lissage opéré sur les variations du terme source et donc sur la puissance à fournir au système peut permettre l'utilisation de variateurs de puissance. Une adaptation de la méthode de l'état adjoint en tout ou rien pourrait aussi être proposée.

## 7.10 Synthèse

Ce chapitre a permis d'introduire le contrôle / commande en température du système de route solaire hybride en utilisant le modèle multiphysique introduit au cours des chapitres précédents.

La méthode de l'état adjoint a été présentée, d'abord dans le cas particulier du contrôle de la température d'injection du fluide afin de préserver la structure du gel en surface. Les effets de l'humidité sur le besoin en chauffage du fluide a notamment été mis en évidence : un climat sec durant l'hiver demande une consommation en chauffage moins importante que pour un climat humide pour des conditions de températures similaires. La formulation traditionnelle de la méthode de l'état adjoint a notamment été modifiée en introduisant une condition en inégalité et non plus en égalité sur le terme de résidu. La solution obtenue permet alors à la fois de remplir la condition de prévention du gel et de minimiser la

consommation en énergie.

L'approche par la méthode de l'état adjoint a ensuite été généralisée à la reconstruction de paramètres et une application a été présentée à l'identification de défauts dans une paroi. Une méthode basée sur l'électromagnétisme et le GPR a ainsi pu être couplée à la reconstruction thermique afin d'améliorer la qualité des résultats obtenus.

La méthode de l'état adjoint a enfin été appliquée à un système de chauffage électrique en modifiant la formulation de l'adjoint pour ajouter des contraintes sur la fréquence des oscillations ainsi que sur les valeurs prises par le terme source. Les résultats obtenus ont de nouveau mis en évidence la possibilité d'utiliser la méthode de l'état adjoint en se basant sur le modèle direct multiphysique. Une commande basée sur un fonctionnement en tout ou rien a été testée numériquement. Les résultats ont montré la possibilité d'une telle utilisation, mais aussi les limites d'une telle méthode, notamment en terme de risque d'usure prématurée de la structure par un réchauffement excessif de la température de surface ou d'augmentation importante de la consommation électrique.

# Conclusions et perspectives

Ces travaux de thèse ont permis de rassembler les développements et résultats portants sur les routes solaires hybrides afin de déterminer leurs performances énergétiques.

Une présentation du cadre de cette thèse, qui s'inscrit dans une volonté de développer des routes à énergie positive, capables de récupérer de l'énergie provenant du rayonnement solaire, mais aussi de prévenir de la formation de verglas ou de l'accumulation de neige sur les routes, a d'abord été effectuée.

Une étude bibliographique exhaustive a ensuite été menée. Dans un premier temps, une description des dispositifs existants déjà, dans le but de récupérer de l'énergie et/ou de chauffer la surface a été conduite. Le principe de route solaire hybride a alors pu être introduit et ses avantages ont pu être décrits, en particulier le fait de conserver une structure multicouche et donc la possibilité de préserver les techniques de construction traditionnelles tout en ayant la possibilité d'ajouter de nouvelles fonctions (récupération d'énergie ou mise hors gel de la surface).

Afin d'estimer numériquement les performances énergétiques de ces structures de routes solaires hybrides, des modèles multiphysiques ont été étudiés et développés. Ils combinent les trois phénomènes qui se produisent dans la structure : diffusion thermique (avec ou sans changement d'état), convection hydraulique et transferts radiatifs. Une analyse bibliographique des paramètres environnementaux a permis de définir et de déterminer les apports, les pertes et les échanges du système avec son environnement à partir de la connaissance de certaines données climatiques. Le traitement numérique de la diffusion thermique, de la convection hydraulique et des transferts radiatifs a ensuite été décrit. En particulier, les méthodes de modélisation des transferts radiatifs ont été détaillées. La méthode des éléments finis a ainsi été adaptée pour résoudre chacun de ces trois problèmes indépendamment en ajoutant, lorsque cela a été nécessaire, un terme de stabilisation.

Pour assembler ces trois problèmes, une méthode de couplage a été développée et mise en place. Des cas test provenant de la littérature ainsi que des résultats d'expérimentations ont permis de valider le modèle numérique multiphysique étudié et développé.

Des simulations annuelles s'appuyant sur ce modèle numérique ont été réalisées. Pour cela, des données météorologiques horaires sur une année pour une cinquantaine de villes en France ont été exploitées. L'utilisation du modèle multiphysique a permis l'obtention dans un premier temps des performances de la structure en mode récupération d'énergie. Ces résultats ont été synthétisés et ont permis d'élaborer plusieurs cartographies pour la France. Un lien entre la notion de Degrés Jours Unifiés en *cooling* et l'énergie pouvant potentiellement être récupérée *via* l'apport du fluide en énergie thermique a notamment pu être mis en évidence. Les zones climatiques présentant une irradiation élevée ainsi qu'une température élevée en été sont particulièrement propices à l'utilisation de routes solaires hybrides. Cependant, des zones moins ensoleillées permettent aussi un apport potentiel en énergie non négligeable. L'efficacité du système a été évaluée et a permis d'établir qu'entre 26 et 39 % de l'irradiance solaire pouvait être récupérée pour une chaussée de quatre mètres de largeur et un revêtement opaque (pour une température d'entrée de fluide caloporteur fixée à 13°C).

L'apport de la couche de surface semi-transparente (effet de serre) a aussi pu être mis en exergue puisque, avec les propriétés optiques utilisées, il apparaissait un gain de 6.7 pt sur l'efficacité du système, signifiant ainsi une augmentation moyenne de l'énergie potentiellement récupérable de 6.7 % de l'irradiance solaire.

Le fonctionnement de la route solaire dans son mode hivernal a enfin été traité. Il s'agissait dans un premier temps de contrôler le système en température de surface en agissant sur la température du fluide caloporteur injecté dans la couche poreuse dans le but d'empêcher la formation de verglas en surface.

Pour cela, une approche reposant sur des travaux en loi de commande optimale et plus particulièrement sur la méthode de l'état adjoint a été développée. Un problème d'optimisation a été introduit afin de



minimiser la consommation énergétique lors de la mise hors gel du système. Des modifications de la formulation usuelle de ces problèmes ont notamment été effectuées pour les adapter au problème de seuil de température minimale à la surface.

Des cas d'étude ont été mis en place et ont permis de valider l'approche et notamment de mettre en évidence le rôle prépondérant de la teneur en eau de l'air ambiant à une température donnée sur la formation de verglas, et par conséquent sur le besoin en énergie pour le chauffage. En effet, la prise en compte du point de givrage plutôt que de la valeur  $+4^{\circ}\text{C}$  et 80% permet de réduire le seuil de température nécessitant l'activation du système de chauffage, avec des dépenses énergétiques d'autant plus réduites que le climat est sec durant la période hivernale, ce qui est par exemple le cas dans les régions montagneuses ou soumises à des influences continentales.

Cette approche reposant sur la méthode de l'état adjoint a été étendue à la reconstruction de propriétés thermiques afin de pouvoir détecter des défauts dus au vieillissement de la structure, tels que de l'encrassement dans la couche poreuse. En particulier, un couplage avec une reconstruction par GPR a été introduite afin de réduire le domaine d'étude et d'améliorer les résultats obtenus.

Le fonctionnement d'un autre système antigel basé sur un chauffage par effet Joule a enfin été étudié, là aussi en mettant en place la méthode de l'état adjoint et en rajoutant certaines contraintes de fonctionnement. Le rôle des constantes de temps du système a été mis en évidence, des lois de commande simplifiées pouvant alors être mises en place pour un système réagissant rapidement.

Cette thèse a ainsi pu montrer la faisabilité, sur un plan énergétique, de la mise en place des routes solaires hybrides. Celles-ci sont potentiellement capables de récupérer une importante quantité d'énergie pendant la période estivale. L'utilisation d'une solution de stockage permettrait ensuite de restituer cette énergie et des lois de commande rendraient possible un chauffage optimal de la surface de la route de façon à empêcher la formation de verglas. Le modèle numérique multiphysique développé au cours de cette thèse a permis d'obtenir des résultats quantitatifs et pourra être utilisé dans la modélisation d'autres systèmes.

Des systèmes tels que des échangeurs tubulaires intégrés à la chaussée, pouvant également être employés en été, pourraient également permettre de récupérer de l'énergie sur le même principe que la route solaire hybride. Une extension du modèle développé ici pourrait être proposée pour traiter ces systèmes.

Les systèmes étudiés au cours de ce mémoire ne se limitent cependant pas à la chaussée en elle-même et d'autres équipements interviennent. L'énergie apportée par le rayonnement solaire au fluide au cours de la période estivale doit ainsi être stockée. Des réservoirs peuvent être intégrés à la structure à cet effet et pourraient prendre la forme de couches de sable ou d'aquifères. Le stockage joue ainsi un rôle primordial dans le fonctionnement de ces systèmes réversibles et une bonne connaissance des phénomènes se produisant dans ces réservoirs permettrait de mesurer la faisabilité de l'installation de ces structures et notamment les lieux et climats les plus pertinents pour de telles infrastructures. Une étude encore plus globale du système pourrait ainsi être menée, en considérant tous les composants du système.

Enfin, tous les phénomènes climatiques n'ont pas été pris en compte pour la modélisation thermique de la structure. En particulier, les hydrométéores (pluies, chutes de neige) modifient les pertes et gains énergétiques de la structure et connaître l'écoulement des eaux à la surface de la route, la fonte de la glace ainsi que la façon dont s'effectue l'évaporation de l'eau permettraient une amélioration de la précision du modèle thermique. Pour aller plus loin, une étude pourrait aussi être menée pour des conditions climatiques encore plus variées, notamment en étendant cette étude à l'Europe. L'obtention de données plus précises sur les propriétés optiques de la couche de surface permettrait aussi d'affiner les résultats.

Pour finir, une étude mécanique pourrait aussi être réalisée pour prendre en compte des facteurs tels que la circulation des véhicules et notamment des poids-lourds sur le comportement de la structure. Le vieillissement de la chaussée lors de son usage doit ainsi être pris en compte. Celui-ci peut en effet entraîner l'apparition de défauts dans la chaussée et ainsi réduire les performances énergétiques de ces systèmes.

# Bibliographie

- [1] J. AGUIRRE-PUENTE, R. POSADO, M. RAMOS et P. D. SANZ : Contribution à l'étude du changement de phase de solutions aqueuses. *In Proceedings of the fifth Canadian Permafrost Conference*, volume 54, pages 61–68, 1990.
- [2] Gregoire ALLAIRE : *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. École Polytechnique, 2005.
- [3] R. G. ALLEN : Assessing integrity of weather data for reference evapotranspiration estimation. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122:97–106, 1996.
- [4] R. G. ALLEN : Self-calibrating method for estimating solar radiation from air temperature. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2:56–67, 1997.
- [5] Refrigerating American Society of HEATING et Air-Conditioning ENGINEERS : *ASHRAE Handbook : Fundamentals*. ASHRAE, Atlanta, 2001.
- [6] A. ANGSTRÖM : Report to the international commission for solar research on actinometric investigations of solar and atmospheric radiation. *Q. J. R. Meteor. Soc.*, 50:121–126, 1924.
- [7] J. H. ARGYRIS : Energy theorems and structural analysis : a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations. part i : General theory. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 27:42–58, 1955.
- [8] S. ARMSTRONG et W. G. HURLEY : A new methodology to optimise solar energy extraction under cloudy conditions. *Renewable Energy*, 35:780–787, 2010.
- [9] A. J. ARNFIELD : Evaluation of empirical expressions for the estimation of hourly and daily totals of atmospheric longwave emission under all sky conditions. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 105:1041–1052, 1979.
- [10] S. ASFOUR : *Récupération d'énergie dans les chaussées pour leur maintien hors gel*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016.
- [11] S. ASFOUR, F. BERNARDIN, E. TOUSSAINT et J.-M. PIAU : Hydrothermal modeling of porous pavement for its de-freezing. *Applied Thermal Engineering*, 107:493–500, 2016.
- [12] V. BADESCU : Verification of some very simple clear and cloudy sky models to evaluate global solar irradiance. *Solar Energy*, 61(4):251–264, 1997.
- [13] V. BAHTEL, H. BAKHSH et R. SRINIVASAN : A correlation for estimation of global solar radiation. *Energy*, 12:131–135, 1987.
- [14] A. BALBAY et M. ESEN : Temperature distributions in pavements and bridge slabs heated by using vertical ground-source heat pump systems. *Acta Scientiarum Technology*, 35(4):677–685, 2013.
- [15] O. BALIMA, Y. FAVENNEC, J. BOULANGER et A. CHARETTE : Optical tomography with the discontinuous galerkin formulation of the radiative transfer equation in frequency domain. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 113:805–814, 2012.
- [16] S. BARBARO, S. COPPOLINO, C. LEONE et E. SINAGRA : An atmospheric model for computing direct and diffuse solar radiation. *Solar Energy*, 22:225–228, 1979.
- [17] R. BECKER, R. KOCH, H.-J. BAUER et M. F. MODEST : A finite element treatment of the angular dependency of the even-parity equation of radiative transfer. *Journal of heat transfer*, 132, 2010.
- [18] R. BECKER et R. RANNACHER : An optimal control approach to *a posteriori* error estimation in finite element method. *Acta Numerica*, pages 1–102, 2001.

- [19] C. BECKERMANN et R. VISKANTA : Natural convection solid/liquid phase change in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31(1):35–46, 1988.
- [20] S. P. BEEBY, M. J. TUDOR et N. M. WHITE : Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Meas. Sci. Technol.*, 17:R175–R195, 2006.
- [21] A. BEJAN, I. DINCER, S. LORENTE, A. F. MIGUEL et A. H. REIS : *Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies*. Springer-Verlag New York, 1ère édition, 2004.
- [22] P. BERDAHL et R. FROMBERG : An empirical method for estimating the thermal radiance of clear skies. Rapport technique LBL 12720, Lawrence Berkeley Lab., California, 1981.
- [23] X. BERGER, D. BURIOT et F. GARNIER : About the equivalent radiative temperature for clear skies. *Solar Energy*, 32(6):725–733, 1984.
- [24] M. V. BIEZMA et F. SCHALACK : Collapse of steel bridge. *J. Perform. Constr. Facil.*, 21:398–405, 2007.
- [25] R. BILOTTA, J. E. BELL, E. SHEPHERD et A. ARGUEZ : Calculation and evaluation of an air-freezing index for the 1981–2010 climate normals period in the coterminous united states. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 54:69–76, 2015.
- [26] R.E. BIRD : A simple, solar spectral model for direct-normal and diffuse horizontal irradiance. *Solar energy*, 32(4):461–471, 1984.
- [27] R.E. BIRD et R.L. HULSTROM : A simplified clear sky model for direct and diffuse insolation on horizontal surfaces. Rapport technique, Solar energy research institute, 1981.
- [28] R.E. BIRD et C. RIORDAN : Simple solar spectral model for direct and diffuse irradiance on horizontal and tilted planes at the earth’s surface for cloudless atmospheres. *Journal of climate and applied meteorology*, 25:87–97, 1986.
- [29] R.W. BLISS : Atmospheric radiation near the surface of the ground : A summary for engineers. *Solar Energy*, 5(3):103–120, 1961.
- [30] B. BLOCKEN, T. DEFRAEYE, D. DEROME et J. CARMELIET : High-resolution cfd simulations for forced convective heat transfer coefficients at the facade of a low-rise building. *Building and Environment*, 44:2396–2412, 2009.
- [31] V. BOBES-JESUS, P. PASCUAL-MUÑOZ, D. CASTRO-FRESNO et J. RODRIGUEZ-HERNANDEZ : Asphalt solar collectors : A literature review. *Applied Energy*, 102:962–970, 2013.
- [32] C. F. BOHREN et B. A. ALBRECHT : *Atmospheric Thermodynamics*. Oxford University Press, 1998.
- [33] D. BOLTON : The computation of equivalent potential temperature. *Monthly Weather Review*, 108:1046–1053, 1980.
- [34] R. BONHOMME : Bases and limits to using ‘degree.day’ units. *European Journal of Agronomy*, 13:1–10, 2000.
- [35] M BORN et E. WOLF : *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7th édition, 1999.
- [36] F. BOURQUIN et A. NASSIOPOULOS : Inverse reconstruction of initial and boundary conditions of a heat transfer problem with accurate final state. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54:3749–3760, 2011.
- [37] D. BRIGGINS : The environmental implications of road salting in nova scotia. Rapport technique, Department of the Environment, 1989.
- [38] K. L. BRISTOW et G. S. CAMPBELL : On the relationship between incoming solar radiation and daily maximum and minimum temperature. *Agricultural and Forest Meteorology*, 31:159–166, 1984.
- [39] A. N. BROOKS et T. J. R. HUGHES : Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [40] J. BROUNS : *Développement d’outils numériques pour l’audit énergétique des bâtiments*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, École doctorale SIE, 2014.
- [41] D. BRUNT : Notes on radiation in the atmosphere. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, 58:389–420, 1932.
- [42] R. C. BUBECK, W. H. DIMENT, B. L. DECK, A. L. BALDWIN et S. D. LIPTON : Runoff of deicing salt : effect on irondequoit bay, rochester, new york. *Science*, 172:1128–1132, 1971.

- [43] A. L. BUCK : New equations for computing vapor pressure and enhancement factor. *Journal of Applied Meteorology*, 20:1527–1532, 1981.
- [44] V. BUKSHYNOV et B. PROTAS : Optimal reconstruction of material properties in complex multi-physics phenomena. *Journal of Computational Physics*, 242:889–914, 2013.
- [45] R.F. CARSEL et R.S. PARRISH : Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5):755–769, 1988.
- [46] H. S. CARSLAW et J. C. JAEGER : *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press, London, second édition, 1959.
- [47] J.C. CHAI, H.S. LEE et S.V. PATANKAR : Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method. *Numerical heat transfer*, 24:373–389, 1993.
- [48] S. CHANDRASEKHAR : *Radiative Transfer*. Dover Publications, 1960.
- [49] M. CHEN, S. WU, H. WANG et J. ZHANG : Study of ice and snow melting process on conductive asphalt solar collector. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 95:3241–3250, 2011.
- [50] R. CHEN, K. ERSI, J. YANG, S. LU et W. ZHAO : Validation of five global radiation models with measured daily data in china. *Energy Conversion and Management*, 45:1759–1769, 2004.
- [51] P. CHENG et C. T. HSU : Transport phenomena in porous media. In D. B. INGHAM et I. POP, éditeurs : *Heat conduction*, pages 57–76. Pergamon Press, Oxford, 1998.
- [52] A. CHIARELLI, A. R. DAWSON et A. GARCÍA : Parametric analysis of energy harvesting pavements operated by air convection. *Applied Energy*, 154:951–958, 2015.
- [53] R. CODINA : Comparison of some finite element methods for solving the diffusion–convection–reaction equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 156:185–210, 1998.
- [54] R. CODINA : On stabilized finite element methods for linear systems of convection–diffusion–reaction equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188:61–82, 2000.
- [55] M. COLLARES-PEREIRA et A. RABL : The average distribution of solar radiation – correlations between diffuse and hemispherical and between daily and hourly insolation values. *Solar Energy*, 22:155–164, 1979.
- [56] P. I. COOPER : The absorption of solar radiation in solar stills. *Solar Energy*, 12(3):333–346, 1969.
- [57] J. CORTÉ : Conception et dimensionnement des structures de chaussées, 1994.
- [58] C. CORTÉS, C. RIOS, J. M. CADENAS, C. GARCIA, P. PASCUAL, D. CASTRO, A. VEGA et J. J. POTTI : Sustainable asphalt pavements – pas. In *Proceedings of the fifth Eurasphalt % Eurobitume Congress*, Istanbul, 2012.
- [59] M. DAGUENET : Les séchoirs solaires, théorie et pratique. Rapport technique, UNESCO, 1985.
- [60] H. L. DAI, K. L. ZHANG, X. L. XU et H. Y. YU : Evaluation on the effects of deicing chemicals on soil and water environlent. *Procedia Environmental Sciences*, 13:2122–2130, 2012.
- [61] M. DANESHYAR : Solar radiation statistics for iran. *Solar Energy*, 21:345–349, 1978.
- [62] H. DARCY : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor Dalmont, 1856.
- [63] J.A. DAVIES, D.C. MCKAY, G. LUCIANI et M. ABDEL-WAHAB : Validation of models for estimating solar radiation on horizontal surfaces, iea task ix, final report. Rapport technique, Atmospheric environment service of Canada, Downsview, Ontario, Canada, 1988.
- [64] J.A. DAVIES, W. SCHERTZER et M. NUNEZ : Estimating global solar radiation. *Boundary-Layer Meteorology*, 9:33–52, 1975.
- [65] T. DEFRAEYE, B. BLOCKEN et J. CARMELIET : Cfd analysis of convective heat transfer at the surfaces of a cube immersed in a turbulent boundary layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:297–308, 2010.
- [66] C. L. DEMERS et R. W. SAGE : Effects of road deicing salt on chloride levels in four adirondack streams. *Water, Air, and Soil Pollution*, 49:369–373, 1990.
- [67] E. DERIAZ : Stability conditions for the numerical solution of convection-dominated problems with skew-symmetric discretizations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(3):1058–1085, 2012.
- [68] F. P. DEWITT et D. P. INCROPERA : *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley and Sons Inc., Hoboken, New Jersey, third édition, 1990.

- [69] J. DONEA et A. HUERTA : *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003.
- [70] F. DUARTE, F. CASIMIRO, D. CORREIA, R. MENDES et A. FERREIRA : A new pavement energy harvest system. In *2013 International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC)*, pages 408–413, March 2013.
- [71] F. DUARTE et A. FERREIRA : Energy harvesting on road pavements : state of the art. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 169:79–90, 2016.
- [72] J. A. DUFFIE et W. A. BECKMAN : *Solar engineering of thermal process*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, fourth édition, 2013.
- [73] J.A. DUFFIE et W.A. BECKMANN : *Solar engineering of thermal processes*. John Wiley & Sons, Inc., seconde édition, 1980.
- [74] J. DUMOULIN, L. IBOS, C. IBARA-CASTANEDO, A. MAZIOUD, M. MARCHETTI, X. MALDAGUE et A. BENDADA : Active infrared tomography applied to defect detection and characterization on asphalt pavement samples : comparison between experiments and numerical simulations. *Journal of Modern Optics*, 57(18):1759–1769, October 2010.
- [75] P. G. DYKEMA, R. I. KLEIN et J. I. CASTOR : A new scheme for multidimensional line transfer. iii. a two-dimensional lagrangian variable tensor method with discontinuous finite-element sn transport. *The astrophysical journal*, 457:892–921, 1996.
- [76] Eighteenth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute. *A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures*, 1981.
- [77] H. W. ENGL, M. HANKE et A. NEUBAUER : *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer academic publishers, Dordrecht, Netherlands, 1996.
- [78] D.G. ERBS, S.A. KLEIN et J.A. DUFFIE : Estimation of the diffuse radiation fraction for hourly, daily and monthly-average global radiation. *Solar Energy*, 28(4):293–302, 1982.
- [79] W. J. EUGSTER : Road and bridge heating using geothermal energy, overview and examples. In *Proceedings European Geothermal Congress*, Unterhaching, Allemagne, 2007.
- [80] H. FARHAT et M.-S. RADHOUANI : étude tridimensionnelle du transfert radiatif dans un milieu semi-transparent diffusant anisotrope par la méthode des transferts discrets modifiée. *Rev Gén Therm*, 36:330–344, 1997.
- [81] W. A. FIVELAND : Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures. *Journal of heat transfer*, 106:699–706, 1984.
- [82] W.A. FIVELAND et J.P. JESSEE : Finite element formulation of the discrete-ordinates method for multidimensional geometries. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 8(3):426–433, 1994.
- [83] J. FOURIER : *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [84] S. FRITZ : Scattering of solar energy by clouds of large drops. *Journal of Meteorology*, 11:291–300, 1954.
- [85] B. G. GALERKIN : Rods and plates. series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates. *Engineers Bulletin*, 19:897–908, 1915.
- [86] H. GAO et H. ZHAO : Analysis of a numerical solver for radiative transport equation. *Mathematics of computation*, 82(281):153–172, 2013.
- [87] Q. GAO, Y. HUANG, M. LI, Y. LIU et Y. Y. YAN : Experimental study of slab solar collection on the hydronic system of road. *Solar Energy*, 84:2096–2102, 2010.
- [88] A. GARCÍA et M. N. PARTL : How to transform an asphalt concrete pavement into a solar turbine. *Applied Energy*, 119:431–437, 2014.
- [89] J. D. GARRISON et G. P. ADLER : Estimation of precipitable water over the united states for application to the division of solar radiation into its direct and diffuse components. *Solar Energy*, 44(4):225–241, 1990.
- [90] D. K. GARTLING et J. N. REDDY : *The finite element method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, third édition, 2010.

- [91] J. N. GARTLING, D.K; Reddy : *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, Third Edition*. CRC series in computational mechanics and applied analysis. CRC Press, 3rd ed édition, 2010.
- [92] A. GIANNOPOULOS : Gprmax2d/3d : User's manual. <http://www.gprmax.com/code/UserGuideV2.pdf>, 2005.
- [93] A. GIANNOPOULOS : Modelling ground penetrating radar by gprmax. *Construction and Building Materials*, 19(10):755–762, 2005.
- [94] K. S. GODWI, S. D. HAFNER et M. F. BUFF : Long-term trends in sodium and chloride in the mohawk river, new york : the effect of fifty years of road-salt application. *Environmental Pollution*, 124:273–281, 2003.
- [95] J. S. GOLDEN, J. CARLSON, K. E. KALOUSH et P. PHELAN : A comparative study of the thermal and radiative impacts of photovoltaic canopies on pavement surface temperatures. *Solar Energy*, 81:872–883, 2007.
- [96] W. G. GRAY et P. C. Y. LEE : On the theorems for local volume averaging of multiphase systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 3:333–340, 1977.
- [97] S. GUICHARD, F. MIRANVILLE, D. BIGOT et H. BOYER : A thermal model for phase change materials in a building roof for a tropical and humid climate : Model description and elements of validation. *Energy and Buildings*, 70:71–80, 2014.
- [98] M. A. HAESLET et R. F. WARMING : Radiative transport and wall temperature slip in an absorbing planar medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8:979–994, 1965.
- [99] A. HAGISHIMA et J. TANIMOTO : Field measurements for estimating the convective heat transfer coefficient at building surfaces. *Building and Environment*, 38:873–881, 2003.
- [100] M. R. HALL, P. K. DEHDEZI, A. R. DAWSON, J. GRENFELL et R. ISOLA : Influence of the thermo-physical properties of pavement materials on the evolution of temperature depth profiles in different climatic regions. *Journal of materials in civil engineering*, 24(1):32–47, 2012.
- [101] B. HAN, J. H. CHOI, J. A. DANTZIG et J. C. BISCHOF : A quantitative analysis on latent heat of an aqueous binary mixture. *Cryobiology*, 52:146–151, 2006.
- [102] G. L. HARGREAVES, G. H. HARGREAVES et J. P. RILEY : Irrigation water requirements for senegal river basin. *J. Irrig. Drain. Eng.*, 111(3):265–275, 1985.
- [103] M. HASEBE, Y. KAMIKAWA et S. MEIARASHI : Thermoelectric generators using solar thermal energy in heated road pavement. In *2006 International Conference on thermoelectrics*, Vienna, Austria, 2006. IEEE.
- [104] S. M. HASNAIN : Review on sustainable thermal energy storage technologies, part i : Heat storage materials and techniques. *Energy Convers. Mgmt*, 39(11):1127–1138, 1998.
- [105] B. HAURWITZ : Insolation in relation to cloudiness and cloud density. *Journal of Meteorology*, 2(3):154–166, 1945.
- [106] R. H. HAWKINS et J. H. JUDD : Water pollution as affected by street salting. *Water Resources Bulletin*, 8(6):1246–1252, 1972.
- [107] U. HEINEMANN et R. CAPS : Radiation-conduction interaction : an investigation on silica aerogels. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(10):2115–2130, 1996.
- [108] D. J. HENSERSON : Experimental roadway heating project on a bridge approach. *Highway Research Record*, 111(14):14–23, 1963.
- [109] L. G. HENYEVY et J. L. GREENSTEIN : Diffuse radiation in the galaxy. *Astrophysical Journal*, 93:70–83, 1941.
- [110] A. HERMANSSON : Mathematical model for paved surface summer and winter temperature : comparison of calculated and measured temperatures. *Cold Regions Science and Technology*, 40:1–17, 2004.
- [111] R. L. HIGDON : Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Mathematics of computations*, 49(179):65–90, July 1987.
- [112] D. M. HOPSTOCK et L. M. ZANKO : Minnesota taconite as a microwave absorbing road aggregate material for deicing and pathole patching applications. Rapport technique, Intelligent Transportation Systems Institute, Center for Transportation Studies, University of Minnesota, 2005.

- [113] J.R. HOWELL : The monte carlo method in radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer*, 120:547–560, 1998.
- [114] J.R. HOWELL, R. SIEGEL et M.P. PINAR : *Thermal radiation heat transfer*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 5th ed édition, 2010.
- [115] C.T. HSU : A closure model for transient heat conduction in porous media. *Journal of Heat Transfer*, 121, 1999.
- [116] C.T. HSU et P. CHENG : Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(8):1587–1597, 1990.
- [117] C. HU et R. M. WHITE : *Solar Cells : From Basic to Advanced Systems*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, 1983.
- [118] M. J. HUANG, P. C. EAMES et B. NORTON : Thermal regulation of building-integrated photovoltaics using phase change materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:2715–2733, 2004.
- [119] Weizhang HUANG, Lennard KAMENSKI et Jens LANG : Stability of explicit runge-kutta methods for high order finite element approximation of linear parabolic equations. In Assyr ABDULLE, Simone DEPARIS, Daniel KRESSNER, Fabio NOBILE et Marco PICASSO, éditeurs : *Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013*, pages 165–173, Lausanne, Suisse, 2015. Springer International Publishing.
- [120] T. J. R. HUGHES et M. MALLET : A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Iii. the generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 58:305–328, 1986.
- [121] T. J. R. HUGHES, M. MALLET et A. MIZUKAMI : A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Ii. beyond supg. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 54:341–355, 1986.
- [122] S.B. IDSO et R.D. JACKSON : Thermal radiation from the atmosphere. *Journal of geophysical research*, 74(23):5397–5403, 1969.
- [123] M. IQBAL : *An introduction to solar radiation*. Academic Press Canada, 1983.
- [124] Y. JARNY, M. N. OZISIK et J. P. BARDON : A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34(11):2911–2919, 1991.
- [125] C. JOHNSON : *Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.
- [126] C. JOHNSON, U. NÄVERT et J. PITKÄRANTA : Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 45:285–312, 1984.
- [127] C. JOHNSON, A. H. SCHATZ et L. B. WAHLBIN : Crosswind smear and pointwise errors in streamline diffusion finite element method. *Mathematics of computation*, 49(179):25–38, 1987.
- [128] Claes JOHNSON : *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, 1 édition, 1987.
- [129] J. H. JUDD : Lake stratification caused by runoff from street deicing. *Water Research*, 4:521–532, 1970.
- [130] G. KANSCHAT : A robust finite element discretization for radiative transfer problems with scattering. *East-West J. Numer. Math.*, 6(4):265–272, 1998.
- [131] G. KANSCHAT : Solution of radiative transfer problems with finite elements. In G. KANSCHAT, E. MEINKÖHN, R. RANNACHER et R. WEHRSE, éditeurs : *Numerical methods in multidimensional radiative transfer*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [132] F. KASTEN : Revised optical air mass tables and approximation formula. *Applied Optics*, 28(22):4735–4738, 1989.
- [133] F. KASTEN et G. CZEPLAK : Solar and terrestrial radiation dependent on the amount and type of cloud. *Solar Energy*, 24:177–189, 1980.
- [134] F.X. KNEIZYS, E.P. SHETTLE, W.O. GALLERY, J.H. CHETWIND JR, L.W. ABREU, J.E.A. SELBY, R.W. FENN et R.A. MCCLATCHEY : Atmospheric transmittance/radiance : Computer code lowtran 5. Rapport technique, Air force geophysics laboratory, 1980.

- [135] G. H. KOCH, M. P. H. BRONGERS et N. G. THOMPSON : Corrosion costs and preventive strategies in the united states. Rapport technique, U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, 2002.
- [136] D. KOLOKOTSA, D. TSIAVOS, G. S. STAVRAKAKIS, K. KALAITZAKIS et E. ANTONIDAKIS : Advanced fuzzy logic controllers design and evaluation for buildings' occupants thermal-visual comfort and indoor air quality satisfaction. *Energy and Buildings*, 33:531–543, 2001.
- [137] K.Y. KONDRATYEV : *Radiative heat exchange in the atmosphere*. Pergamon Press, 1965.
- [138] K.Y. KONDRATYEV : Radiative in the atmosphere. In J. VAN MIEGHEM, éditeur : *International Geophysics Series*, page 912. Academic Press, Inc. (London) Ltd., 1969.
- [139] K. KOSUGI, J. HOPMANS et J. DANE : Parametric models. In *Methods of soil analysis. Part 4 : Physical methods*. Soil Science Society of America, Inc., Madison, Wisconsin, 2002.
- [140] S. KUMAR et S.C. MULLICK : Wind heat transfer coefficient in solar collectors in outdoor conditions. *Solar Energy*, 84:956–963, 2010.
- [141] S. KUMAR, V.B. SHARMA, T.C. KANDPAL et S.C. MULLICK : Wind induced heat losses from outer cover of solar collectors. *Renewable Energy*, 10(4):613–616, 1997.
- [142] A.A. LACIS et J.E. HANSEN : A parametrization for the absorption of solar radiation in the earth's atmosphere. *Journal of the atmospheric sciences*, 31:118–133, 1974.
- [143] K. D. LATHROP et B. G. CARLSON : Discrete ordinates angular quadrature of the neutron transport equation. Rapport technique, Los Alamos scientific laboratory, 1965.
- [144] M. G. LAWRENCE : The relationship between relative humidity and the dewpoint temperature in moist air : a simple conversion and applications. *American Meteorological Society*, pages 225–233, February 2005.
- [145] S. LE FOLL : *Modélisation du couplage conduction/rayonnement dans les systèmes de protection thermique soumis à de très hauts niveaux de températures*. Thèse de doctorat, École doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2014.
- [146] D. LE HARDY, Y. FAVENNEC, G. DOMINGUES et B. ROUSSEAU : 3d radiative transfer equation coupled with heat conduction equation with realistic boundary conditions applied on complex geometries. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4:1488–1493, 2016.
- [147] N. LE TOUZ, J. DUMOULIN, G. GENNARELLI et F. SOLDOVIERI : A joint thermal and electromagnetic diagnostics approach for the inspection of thick walls. *Geosci. Instrum. Method. Data Syst.*, 6:81–92, 2017.
- [148] N. LE TOUZ, M. MARCHETTI, J. DUMOULIN, L. PEIFFER, A. ESCAL, L. IBOS, M. FOIS et P. BOURSON : Appreciation of the delay in the benefits of the thermal energy released by pcm in civil engineering structures. In *14th Quantitative InfraRed Thermography Conference*, Berlin, Allemagne, 2018. QIRT.
- [149] N. LE TOUZ, T. TOULLIER et J. DUMOULIN : Infrared thermography applied to the study of heated and solar pavement : from numerical modeling to small scale laboratory experiments. In *Thermosense : Thermal Infrared Applications XXXIX*, Anaheim, California, 2017. SPIE.
- [150] B. LECKNER : The spectral distribution of solar radiation at the earth's surface—elements of a model. *Solar Energy*, 20:143–150, 1978.
- [151] F.J. LEIJ, W.B. RUSSELL et S.M. LESCH : Closed-form expressions for water retention and conductivity data. *Ground Water*, 35(5), 1997.
- [152] G. LEONE et F. SOLDOVIERI : Analysis of the distorted born approximation for subsurface reconstruction : Truncation and uncertainties effects. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 41(1), 2003.
- [153] J.-L. LIONS : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [154] B.Y.H. LIU et R.C. JORDAN : The interrelationship and characteristic distribution of direct, diffuse and total solar radiation. *Solar Energy*, 4(1), 1960.
- [155] Y. LIU et D.J. HARRIS : Full-scale measurements of convective coefficient on external surface of a low-rise building in sheltered conditions. *Building and Environment*, 42:2718–2736, 2007.



- [156] F. LONG, F. LI, X. INTES et S. P. KOTHA : Radiative transfer equation modeling by streamline diffusion modified continuous galerkin method. *Journal of Biomedical Optics*, 21(3):036003–036003, 2016.
- [157] J. W. LUND : Pavement snow melting. Rapport technique, U. S. Department of Energy, 2000.
- [158] B. MA, S. WANG et J. LI : Study on application of pcm in asphalt mixture. *Advanced Materials Research*, 168–170:2625–2630, 2011.
- [159] W.H. MACADAMS : *Heat Transmission*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, Japan, third édition, 1954.
- [160] R. B. MALLICK, B. CHEN et S. BHOWMICK : Harvesting energy from asphalt pavements and reducing the heat island effect. *International Journal of Sustainable Engineering*, 2(3):214–228, 2009.
- [161] P. W. McDONALD : The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades. *ASME 1971 International Gas Turbine Conference and Products Show*, 71-GT-89, 1971.
- [162] M. MCINERNEY, J. TROVILLION, R. LOZAR, T. ABDALLAH et A MAJUMDAR : Classifying infrastructure using thermal ir signatures. *In Proceedings of ASPRS 2006 annual conference*, Reno, Nevada, 2006. ASPRS.
- [163] G. S. McMASTER et W. W. WILHELM : Growing degree-days : one equation, two interpretations. *Agricultural and Forest Meteorology*, 87:291–300, 1997.
- [164] G. MEINKÖHN : A general-purpose finite element method for 3d radiative transfer problems. *In G. KANSCHAT, E. MEINKÖHN, R. RANNACHER et R. WEHRSE, éditeurs : Numerical methods in multidimensional radiative transfer*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [165] V. MELCHOR CENTENO : New formulae for the equivalent night sky emissivity. *Solar Energy*, 28(6):489–498, 1982.
- [166] H. O. MENGES, C. ERTEKIN et M. H. SONMETE : Evaluation of global solar radiation models for konya, turkey. *Energy Conversion and Management*, 47:3149–3173, 2006.
- [167] F. MEZA et E. VARAS : Estimation of mean monthly solar global radiation as a function of temperature. *Agricultural and Forest Meteorology*, 100:231–241, 2000.
- [168] M. J. C. MINHOTO, J. C. PAIS, P. A. A. PEREIRA et L. G. PICADO-SANTOS : Predicting asphalt pavement temperature with a three-dimensional finite element method. *Transportation research record journal of the transportation research board*, 1919(1):96–110, 2005.
- [169] L. D. MINSK : Heated bridge technology. Rapport technique, Office of Technology Applications, Office of Engineering/Bridge Division, Federal Highway Administration, 1999.
- [170] M. MODEST : *Radiative Heat Transfer*. Academic Press, deuxième édition, 2003.
- [171] J. L. MONTEITH : An empirical method for estimating long-wave radiation exchanges in the british isles. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 87:171–179, 1961.
- [172] J. W. MOON et J.-J. KIM : Ann-based thermal control models for residential buildings. *Building and Environment*, 45:1612–1625, 2010.
- [173] P. MOON : Proposed standard solar-radiation curves for engineering use. *J. Franklin Inst.*, 230(5): 583–617, 1940.
- [174] D.S. MUNRO et G.J. YOUNG : An operational net shortwave radiation model for glacier basins. *Water Resources Research*, 18(2):220–230, 1982.
- [175] D. M. MURRAY et U. F. W. ERNST : An economic analysis of the environmental impact of highway deicing. Rapport technique, Municipal Environmental Research Laboratory, Office of Research and Development, U.S. Environmental Protection Agency, 1976.
- [176] A. MUSY et M. SOUTTER : *Physique du sol*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991.
- [177] A. NASSIOPOULOS : *Identification rapide de la température dans les structures de génie civil*. Thèse de doctorat, École des Ponts ParisTech, 2008.
- [178] D.A. NIELD : Estimation of the stagnant thermal conductivity of saturated porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34(6):1575–1576, 1991.

- [179] D.A. NIELD et A. BEJAN : *Convection in porous media*. Springer, New York, 4<sup>ème</sup> édition, 2013.
- [180] W. NUSSELT et W. JÜRGES : Die kählung einer ebenen wand durch einen luftstrom. *Gesundheits Ingenieur*, 52:641–642, 1922.
- [181] Proc. of the second national passive solar CONF., éditeur. *The estimation of atmospheric radiation for clear and cloudy skies*, Philadelphia, 1978.
- [182] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER et C. W. BOISVERT, R. F. ans Clark : *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press, 1 pap/cdr édition, 2010.
- [183] J.F. ORGILL et K.G.T. HOLLANDS : Correlation equation for hourly diffuse radiation on a horizontal surface. *Solar Energy*, 19:357–359, 1977.
- [184] R. OSIPIAN, S. A. BAHRANI, A. BONTEMPS, K. AZZOUZ et L. ROYON : Modélisation numérique de la fusion/solidification d’un lit de particules de mcps au sein d’une unité de stockage thermique. *In Congrès Français de Thermique*, 2017.
- [185] E. PALOMO DEL BARRIO, G. LEFEBVRE, P. BEHAR et N. BAILLY : Using model size reduction techniques for thermal control applications in buildings. *Energy and Buildings*, 33:1–14, 2000.
- [186] G.W. PALTRIDGE : Monthly mean solar radiation statistics for australia. *Solar Energy*, 18:235–243, 1976.
- [187] J.A. PALYVOS : A survey of wind convection coefficient correlations for building envelope energy systems’ modeling. *Applied Thermal Engineering*, 28:801–808, 2008.
- [188] P. PAN, S. WU, Y. XIAO et G. LIU : A review on hydronic asphalt pavement for energy harvesting and snow melting. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 48:624–634, 2015.
- [189] J. PARIENTÉ : Sur les routes : de la neige, de la glace... et du sel, 2010.
- [190] P. PASCUAL-MUÑOZ, D. CASTRO-FRESNO, P. SERRANO-BRAVO et A. ALONSO-ESTÉBANEZ : Thermal and hydraulic analysis of multilayered asphalt pavements as active solar collectors. *Applied Energy*, 111:324–332, 2013.
- [191] J. P. PEIXOTO et A. H. OORT : *Physics of climate*. Springer, 1992.
- [192] R. PERSICO : *Introduction to Ground Penetrating Radar*. IEEE Press, Wiley, 2014.
- [193] R. PERSICO, R. BERNINI et F. SOLDVIERI : The role of the measurement configuration in inverse scattering from buried objects under the born approximation. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 53(6), 2005.
- [194] M. PINET, T. COMFORT et M. GRIFF : Anti-icing on structures using fixed automated spray technology (fast) : demonstration project, prescott, ontario. *In 2001 Annual conference and exhibition of the transportation association of Canada*, Halifax, Nova Scotia, 2001.
- [195] B. PROTAS, T. R. BEWLEY et G. HAGEN : A computational framework for the regularization of adjoint analysis in multiscale pde systems. *Journal of Computational Physics*, 195:49–89, 2004.
- [196] G.D. RAITHYBY et E.H. CHUI : A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosed with participating media. *Journal of heat transfer*, 112:415–423, 1990.
- [197] D. M. RAMAKRISHNA et T. VIRARAGHAVAN : Environmental impact of chemical deicers – a review. *Water, Air, and Soil Pollution*, 100:231–241, 2000.
- [198] D.T. REINDL, W.A. BECKMANN et J.A. DUFFIE : Diffuse fraction correlations. *Solar Energy*, 4(1):1–7, 1990.
- [199] L. RICHARDS : Capillary conduction of liquids through porous medium. *Physics*, 1:318–333, 1931.
- [200] S. RICHLING, E. MEINKÖHN, N. KRZYHEVOI et G. KANSCHAT : Radiative transfer with finite elements i. basic method and tests. *Astronomy & Astrophysics*, 380:776–788, 2001.
- [201] W. RITZ : Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 135:1–61, 1908.
- [202] W. M. ROHSENOW, J. P. HARTNETT et Y. I. CHO : *Handbook of heat transfer*. McGraw-Hill, third édition, 1998.
- [203] D. S. ROOSEVELT : A bridge deck anti-icing system in virginia : lessons learned from a pilot study. Rapport technique, Virginia Transportation Research Council, 2004.

- [204] L. M. RUAN, W. AN, H. P. TAN et H. QI : Least-squares finite-element method of multidimensional radiative heat transfer in absorbing and scattering media. *Numerical Heat Transfer*, 51:657–677, 2007.
- [205] Scott ; W. S. : The effect of road deicing salts on sodium concentration in an urban water-course. *Environ. Pollut.*, 10:141–153, 1976.
- [206] J. B. SAULNIER : *La modélisation thermique et ses applications aux transferts couplés et au contrôle actif*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1980.
- [207] J. B. SAULNIER et J. MARTINET : Le verre et la thermocinétique des matériaux semi-transparents. *Revue de physique appliquée*, 15:175–188, 1980.
- [208] D. SCHWANDER, G. FLAMANT et G. OLALDE : Effects of boundary properties on transient temperature distributions in condensed semi-transparent media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(8):1685–1695, 1990.
- [209] W. S. SCOTT et N. P. WYLIE : The environmental effects of snow dumping : A literature review. *Journal of Environmental Management*, 10:219–240, 1980.
- [210] W. D. SELLERS : *Physical climatology*. University of Chicago Press, 1965.
- [211] F. SHAKIB, T. J. R. HUGHES et Z. JOHAN : A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. the compressible euler and navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:141–219, 1991.
- [212] S. SHARPLES et C. CHARLESWORTH : Full-scale measurements of wind-induced convective heat transfer from a roof-mounted flat plate solar collector. *Solar Energy*, 62(2):69–177, 1998.
- [213] Y. T. SHIH et H. C. ELMAN : Modified streamline diffusion schemes for convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 174:137–151, 1999.
- [214] R. SIEGEL : Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials. *International Journal of Engineering Science*, 36:1701–1739, 1998.
- [215] R. SIEGEL et J. R. HOWELL : *Thermal radiation heat transfer, Volume III : Radiation transfer with absorbing, emitting, and scattering media*. National Aeronautics and Space Administration, 1971.
- [216] J. C. SLATTERY : Flow of viscoelastic fluids through porous media. *AIChE Journal*, 13(6):1066–1071, 1967.
- [217] F. SOLDOVIERI, J. HUGENSCHMIDT, R. PERSICO et G. LEONE : A linear inverse scattering algorithm for realistic gpr applications. *New Surface Geophysics*, 5:29–41, 2007.
- [218] F. SOLDOVIERI, G. PRISCO et R. PERSICO : A strategy for the determination of the dielectric permittivity of a lossy soil exploiting gpr surface measurements and a cooperative target. *Journal of Applied Geophysics*, 67:288–295, 2009.
- [219] T.-H. SONG et C. W. PARK : Formulation and application of the second order discrete ordinate method. In B.-X. WANG, éditeur : *Transport phenomena and science*. Higher Education, Beijing, 1992.
- [220] J.W. SPENCER : Fourier series representation of the position of the sun. *Search*, 2(5):172, 1971.
- [221] L. G. STENHOLM, H. STÖRZER et R. WEHRSE : An efficient method for the solution of 3-d radiative transfer problems. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 45(1):47–56, 1991.
- [222] M. G. STEWART et D. V. ROSOWSKY : Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks. *Structural Safety*, 20:91–109, 1998.
- [223] D. A. SWENNE : *Solar Cells : From Basic to Advanced Systems*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, 1983.
- [224] W.C. SWINBANK : Long-wave radiation from clear skies. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 89:339–348, 1963.
- [225] J. TAINE, F. ENGUEHARD et E. IACONA : *Transferts thermiques, introduction aux transferts d'énergie, 5ème édition*. Dunod, Paris, 2014.
- [226] T. TARVAINEN, M. VAUKHONEN, V. KOLEHMAINEN, S. R. ARRIDGE et J. P. KAIPIO : Coupled radiative transfer equation and diffusion approximation model for proton migration in turbid medium with low-scattering and non-scattering regions. *Phys. Med. Biol.*, 50:4913–4930, 2005.

- [227] F.L. TEST, R.C. LESSMANN et A. JOHARY : Heat transfer during wind flow over rectangular bodies in the natural environment. *Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer*, 103, 1981.
- [228] T. E. TEZDUYAR et D. K. GANJOO : Petrov-galerkin formulations with weighting functions dependent upon spatial and temporal discretization : applications to transient convection-diffusion problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 59:49–71, 1986.
- [229] T. E. TEZDUYAR et Y. OSAWA : Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:411–430, 2000.
- [230] M.P. THEKAEKARA : Solar energy outside the earth's atmosphere. *Solar Energy*, 14:109–127, 1973.
- [231] P. E. THORNTON et S. W. RUNNING : An improved algorithm for estimating incident daily solar radiation from measurements of temperature, humidity, and precipitation. *Agricultural and Forest Meteorology*, 93:211–228, 1999.
- [232] C. P. THURGOOD, A. POLLARD et H. A. BECKER : The  $t_n$  quadrature set for the discrete ordinates method. *Transactions of the ASME*, 117:1068–1070, 1995.
- [233] S. T. THYNELL : Discrete-ordinates method in radiative heat transfer. *International journal of engineering science*, 36:1651–1675, 1998.
- [234] A. N. TIKHONOV : Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Doklady Mathematics*, 4:501–504, 1963.
- [235] A. N. TIKHONOV et V. Y. ARSEININ : *Solutions of ill-posed problems*. John Wiley, New York, 1977.
- [236] E. F. TORO : *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [237] L. TROVALET : *Résolution numérique des transferts par rayonnement et conduction au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Université de Nancy, 2011.
- [238] J.-H. TSAI et J.-D. LIN : Transient combined conduction and radiation with anisotropic scattering. *J. Thermophysics*, 4(1), 1990.
- [239] C. Y. TUAN : Roca spur bridge : The implementation of an innovative deicing technology. *J. Cold Reg. Eng.*, 22:1–15, 2008.
- [240] M. H. UNSWORTH et J. L. MONTEITH : Longwave radiation at the ground, angular distribution of incoming radiation. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 101:13–24, 1975.
- [241] K. VAFAI : *Handbook of porous media*. CRC Press, seconde édition, 2005.
- [242] W. T. VAN BIJSTERVELD, L. J. M. HOUBEN, A. SCARPAS et A. A. A. MOLENAAR : Using pavement as solar collector, effect on pavement temperature and structural response. *Transportation Research Record*, 1778:140–148, 2001.
- [243] J. E. VEHRENCAMP : Experimental investigation of heat transfer at an air-earth interface. *Transactions, American Geophysical Union*, 34(1):22–30, 1953.
- [244] A. K. VEINBERG : Permeability, electrical conductivity, dielectric constant and thermal conductivity of a medium with spherical and ellipsoidal inclusions. *Soviet Phys. Dokl.Int. J. Heat Mass Transfer*, 11:593–595, 1967.
- [245] R. VISKANTA et E. E. ANDERSON : Heat transfer in semitransparent solids. *In Advances in heat transfer. Volume 11. (A76-17076 05-34) New York, Academic Press, Inc., 1975, p. 317-441.*, volume 11, pages 317–441, 1975.
- [246] J. VOLKER : *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems*. Springer, Berlin, 2016.
- [247] V. R. VOLLER, M. CROSS et N. C. MARKATOS : An enthalpy method for convection/diffusion phase change. *International journal for numerical methods in engineering*, 24:271–284, 1987.
- [248] V. R. VOLLER et C. PRAKASH : A fixed grid numerical modelling methodology for convection–diffusion mushy region phase-change problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30(8):1709–1719, 1987.
- [249] N. WAKAO et T. FUNAZKRI : Effect of fluid dispersion coefficients on particle-to-fluid mass transfer coefficients in packed beds. *Chemical Engineering Science*, 33:1375–1384, 1978.
- [250] G. N. WALTON : Thermal analysis research program reference manual. Rapport technique, National Bureau of Standards and U.S. Department of Energy, 1983.

- [251] J.H. WATTMUFF, W.W.S. CHARTERS et D. PROCTOR : Solar and wind induced external coefficients for solar collectors. *Coopération Méditerranéenne pour l'énergie solaire, Revue internationale d'héliotechnique*, page 56, 1977.
- [252] J. A. WEAVER et R. VISKANTA : Freezing of liquid-saturated porous media. *Journal of heat transfer*, 108:654–659, 1986.
- [253] S. R. WENHAM, M. A. GREEN, M. E. WATT et R. CORKISH : *Applied Photovoltaics, Second Edition*. ARC Centre for Advanced Silicon Photovoltaics and Photonics, 2007.
- [254] S. WHITAKER : Advances in theory of fluid motion in porous media. *Industrial and engineering chemistry*, 61(12):14–28, 1969.
- [255] S. WHITAKER : Flow in porous media i : a theoretical derivation of darcy's law. *Transport in Porous Media*, 1:3–25, 1986.
- [256] S. WHITAKER : The forchheimer equation : a theoretical development. *Transport in porous media*, 25:27–61, 1996.
- [257] J. A. WRIGHT, H. A. LOOSEMORE et R. FARMANI : Optimization of building thermal design and control by multi-criterion genetic algorithm. *Energy and Buildings*, 34:959–972, 2002.
- [258] Z. YE, J. WU, N. EL FERRADI et X. SHI : Anti-icing for key highway locations : fixed automated spray technology. *Can. J. Civ. Eng.*, 40:11–18, 2013.
- [259] K. S. YEE : *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, volume 14. IEEE Transactions on antennas and propagation, 1966.
- [260] S. A. YEHA et C. Y. TUAN : Thin conductive concrete overlay for bridge deck deicing and anti-icing. *Transportation Research Record*, 1698:45–53, 2000.
- [261] H. ZHAO, J. YU et J.. LING : Finite element analysis of cymbal piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement. *Journal of the ceramic society of Japan*, 118(10):909–915, 2010.
- [262] J. M. ZHAO et L. H. LIU : Second-order radiative transfer equation and its properties of numerical solution using the finite-element method. *Numerical Heat Transfer*, 51:391–409, 2007.
- [263] G. ZHOU et R. RANNACHER : Pointwise superconvergence of the streamline diffusion finite-element method. *Numerical methods for partial differential equations*, 12:123–145, 1996.
- [264] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR et J. Z. ZHU : *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Oxford, Royaume-Uni, sixth édition, 2005.
- [265] K. ZWARYCZ : Snow melting and heating systems based on geothermal heat pumps at goleniow airport, poland. Rapport technique 21, Geothermal Training Programme Report, 2002.

# Annexes

## Annexe A

# Solution en régime permanent pour la convection hydraulique

Nous présentons dans cette annexe la modélisation permettant d'obtenir la solution analytique unidimensionnelle pour la convection hydraulique dans le cas d'un régime permanent établie présentée dans le paragraphe 4.2.3.

Trois milieux sont considérés et interagissent thermiquement entre eux : la couche de surface solide, la couche poreuse solide et le fluide. Les grandeurs liées à la couche de surface sont indicées  $s$ , celles liées à la couche poreuse  $p$  et celles liées au fluide  $f$ . En plus de ces trois milieux dont on cherche à connaître la température, deux milieux extérieurs de températures connues sont considérés : le ciel indicé  $c$  et l'air indicé  $a$ .

On note  $q_{i/j}$  le flux de chaleur surfacique orienté du milieu  $i$  vers le milieu  $j$ ,  $T_i$  la température du milieu  $i$ ,  $h_i$  l'épaisseur du milieu  $i \in \{s, p\}$

Le flux de chaleur surfacique  $q_{i/j}$  peut s'écrire sous la forme :

$$q_{i/j} = r_{i/j} \times (T_i - T_j) \quad (\text{A.1})$$

Le coefficient d'échange surfacique  $r_{i/j}$  peut s'écrire de différentes façons :

- Dans le cas de l'échange entre la couche de surface et l'air extérieur, le coefficient d'échange peut être assimilé au coefficient d'échange convectif :

$$r_{s/e} = h_{\text{conv}} \quad (\text{A.2})$$

- Dans le cas de l'échange entre la couche de surface et le ciel, le flux échangé s'écrit  $\varepsilon\sigma(T_c^4 - T_s^4) = \varepsilon\sigma(T_c^2 + T_s^2)(T_c + T_s)(T_c - T_s)$ . Le coefficient d'échange peut alors s'écrire :

$$r_{s/c} = \varepsilon\sigma(T_c^2 + T_s^2)(T_c + T_s) \quad (\text{A.3})$$

- Dans le cas de l'échange entre deux couches solides  $i$  et  $j$ , on exprime le flux thermique dans chacune des couches. On note  $T_{ij}$  la température à l'interface entre les deux couches,  $T_{i0}$  la température à l'extrémité de la couche  $i$  qui n'est pas en contact avec la couche  $j$ ,  $T_{j0}$  la température à l'extrémité de la couche  $j$  qui n'est pas en contact avec la couche  $i$ . On a alors :

$$\begin{cases} q_{i/j} \approx \frac{k_i}{h_i}(T_{i0} - T_{ij}) \\ q_{i/j} \approx \frac{-k_j}{h_j}(T_{j0} - T_{ij}) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On a donc :

$$T_{i0} - T_{j0} = \left( \frac{h_i}{k_i} + \frac{h_j}{k_j} \right) q_{i/j} \quad (\text{A.5})$$

On suppose de plus que les températures  $T_i$  et  $T_j$  au milieu des couches  $i$  et  $j$  sont égales à la moyenne des températures aux extrémités de ces deux couches :

$$\begin{cases} T_i \approx \frac{T_{i0} + T_{ij}}{2} \\ T_j \approx \frac{T_{j0} + T_{ij}}{2} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

On a alors  $T_{i0} - T_{j0} = 2(T_i - T_j)$  et donc :

$$q_{i/j} = \frac{2}{\frac{h_i}{k_i} + \frac{h_j}{k_j}} (T_i - T_j) = \frac{2k_i k_j}{h_i k_j + h_j k_i} (T_i - T_j) \quad (\text{A.7})$$

D'où :

$$r_{i/j} = \frac{2k_i k_j}{h_i k_j + h_j k_i} \quad (\text{A.8})$$

Et en particulier :

$$r_{Dr/S} = \frac{2k_{Dr} k_S}{h_{Dr} k_S + h_S k_{Dr}} \quad (\text{A.9})$$

— Dans le cas de l'échange entre le fluide et le matériau poreux, on suppose le coefficient  $r_{f/Dr}$  très grand devant les autres coefficients d'échange (cas de l'équilibre thermique local).

### Remarque

On a la symétrie pour le coefficient d'échange :  $r_{i/j} = r_{j/i}$ .

### Conservation de l'énergie pour le fluide

En une position  $s$  et à un instant  $t$ , la conservation de l'énergie appliquée au fluide permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} [\rho_f c_f h_{Dr} \phi T_f(s, t)] = q_{Dr/f} \quad (\text{A.10})$$

Soit :

$$\rho_f c_f h_{Dr} \phi \left[ \frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial s(t)}{\partial t} \frac{\partial T_f}{\partial s} \right] = q_{Dr/f} \quad (\text{A.11})$$

La vitesse de Darcy s'écrit  $u = \phi \frac{\partial s(t)}{\partial t}$ , et le flux  $q_{Dr/f} = r_{Dr/f} (T_{Dr} - T_f)$ . On a donc :

$$\rho_f c_f h_{Dr} \phi \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f c_f h_{Dr} u \frac{\partial T_f}{\partial s} + r_{Dr/f} (T_f - T_{Dr}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

### Conservation de l'énergie pour la couche drainante

On a :

$$\frac{d}{dt} [\rho_{Dr} c_{Dr} h_{Dr} (1 - \phi) T_{Dr}(s, t)] = q_{f/Dr} + q_{S/Dr} \quad (\text{A.13})$$

Et donc :

$$\rho_{Dr} c_{Dr} h_{Dr} (1 - \phi) \frac{\partial T_{Dr}}{\partial t} + r_{f/Dr} (T_{Dr} - T_f) + r_{S/Dr} (T_{Dr} - T_S) = 0 \quad (\text{A.14})$$



### Conservation de l'énergie pour la couche de surface

La couche de surface subit des échanges thermiques avec la couche drainante, l'air extérieur et le ciel. Elle reçoit également une densité de flux solaire notée  $\Phi$ . On a donc :

$$\frac{d}{dt} [\rho_S c_S h_S T_S(s, t)] = q_{Dr/S} + q_{e/S} + q_{c/S} + \Phi \quad (\text{A.15})$$

Puis :

$$\rho_S c_S h_S \frac{\partial T_S}{\partial t} + r_{Dr/S}(T_S - T_{Dr}) + r_{S/e}(T_{Dr} - T_S) + r_{S/c}(T_{Dr} - T_c) = \Phi \quad (\text{A.16})$$

Les relations (A.12), (A.14) et (A.16) peuvent s'écrire sous la forme d'un système matriciel :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \rho_f c_f h_{Dr} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{Dr} c_{Dr} h_{Dr} (1 - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_S c_S h_S \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_f \\ T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_f c_f h_{Dr} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} T_f \\ T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} r_{Dr/f} & -r_{Dr/f} & 0 \\ -r_{Dr/f} & r_{Dr/f} + r_{Dr/S} & -r_{Dr/S} \\ 0 & -r_{S/Dr} & r_{S/Dr} + r_{S/e} + r_{S/c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_f \\ T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

D'où, en régime permanent :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \rho_f c_f h_{Dr} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} T_f \\ T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{Dr/f} & -r_{Dr/f} & 0 \\ -r_{Dr/f} & r_{Dr/f} + r_{Dr/S} & -r_{Dr/S} \\ 0 & -r_{S/Dr} & r_{S/Dr} + r_{S/e} + r_{S/c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_f \\ T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Les deux dernières lignes de (A.18) permettent d'obtenir :

$$\begin{bmatrix} T_{Dr} \\ T_S \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c} & r_{Dr/S} \\ r_{Dr/S} & r_{Dr/f} + r_{Dr/S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{Dr/f} T_f \\ r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Avec :

$$\Delta = (r_{Dr/f} + r_{Dr/S})(r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c}) - r_{Dr/S}^2 \quad (\text{A.20})$$

On a donc :

$$T_{Dr} = \frac{1}{\Delta} [(r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c}) r_{Dr/f} T_f + r_{Dr/S} (r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi)] \quad (\text{A.21})$$

D'où :

$$\begin{aligned} r_{f/Dr} (T_f - T_{Dr}) &= \frac{r_{f/Dr}}{\Delta} \left[ T_f (\Delta - r_{f/Dr} (r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c})) \right. \\ & \quad \left. - r_{Dr/S} (r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

On peut effectuer la simplification :

$$\Delta - r_{f/Dr} (r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c}) = r_{Dr/S} (r_{S/e} + r_{S/c}) \quad (\text{A.23})$$

D'autre part, la première ligne du système (A.18), régissant les échanges thermiques impliquant le fluide, permet d'écrire :

$$\rho_f c_f h_{Dr} u \frac{\partial T_f}{\partial s} + r_{Dr/f} (T_f - T_{Dr}) \quad (\text{A.24})$$

En réinjectant (A.22) dans (A.24), on a :

$$\rho_f c_f h_{Dr} u \frac{\partial T_f}{\partial s} + \frac{r_{f/Dr}}{\Delta} r_{Dr/S} (r_{S/e} + r_{S/c}) T_f = \frac{r_{f/Dr}}{\Delta} r_{Dr/S} (r_{S/c} T_c + r_{S/e} T_e + \Phi) \quad (\text{A.25})$$

La température du fluide  $T_f$  dans la relation (A.25) ne dépend plus que de l'éloignement à la section d'injection  $s$  et des conditions extérieures. On peut réécrire (A.25) sous la forme :

$$\kappa \frac{\partial T_f}{\partial s} + T_f = \frac{r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi}{r_{S/e} + r_{S/c}} \quad (\text{A.26})$$

Avec  $\kappa$  la longueur caractéristique :

$$\kappa = \frac{\Delta \rho_f c_f h_{Dr} u}{r_{f/Dr} r_{Dr/S} (r_{S/e} + r_{S/c})} \quad (\text{A.27})$$

On reprend l'hypothèse selon laquelle  $r_{f/Dr}$  est très grand devant les autres coefficients d'échanges. Le coefficient  $\Delta$  se réécrit alors :

$$\Delta \approx r_{f/Dr} (r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c}) \quad (\text{A.28})$$

Et  $\kappa$  se réécrit :

$$\kappa = \frac{\rho_f c_f h_{Dr} u (r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c})}{r_{Dr/S} (r_{S/e} + r_{S/c})} \quad (\text{A.29})$$

La température du fluide s'obtient en résolvant l'équation (A.26) :

$$T_f(s) = T_f(0) e^{-s/\kappa} + T_\infty (1 - e^{-s/\kappa}) \quad (\text{A.30})$$

Avec :

$$T_\infty = \frac{r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi}{r_{S/e} + r_{S/c}} \quad (\text{A.31})$$

La deuxième ligne de l'équation (A.19) permet d'écrire :

$$T_S = \frac{1}{r_{f/Dr} (r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c})} [r_{Dr/S} r_{Dr/f} T_f + (r_{Dr/f} + r_{Dr/S}) (r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi)] \quad (\text{A.32})$$

L'hypothèse  $r_{Dr/f}$  grand devant les autres coefficients d'échange permet d'obtenir la température en surface en fonction de l'éloignement à l'injection de fluide :

$$T_s(s) = \frac{r_{Dr/S} T_f(s) + r_{S/e} T_e + r_{S/c} T_c + \Phi}{r_{Dr/S} + r_{S/e} + r_{S/c}} \quad (\text{A.33})$$

## Annexe B

# Méthode des éléments finis - Obtention des matrices

Dans cette annexe, nous présentons des éléments qui n'ont pu être développés dans le corps du manuscrit concernant la méthode des éléments finis. La première partie concerne l'obtention du système matriciel pour l'équation de transfert radiatif. La seconde partie traite du calcul des matrices rencontrées dans le cadre de la diffusion thermique, de la convection hydraulique et des transferts radiatifs pour le cas d'une interpolation linéaire.

### Sommaire

---

<b>6.1 Étude de la réponse du système à une excitation . . . . .</b>	<b>138</b>
6.1.1 Comparaison avec la relation analytique établie pour le régime permanent . . .	139
6.1.2 Détermination des caractéristiques de la réponse temporelle du système . . . .	139
6.1.3 Discussion des résultats . . . . .	140
<b>6.2 Données nécessaires au fonctionnement du modèle numérique . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>6.3 Notion de degré jour unifié . . . . .</b>	<b>143</b>
6.3.1 Fonctionnement en chauffage . . . . .	145
6.3.2 Fonction <i>Cooling</i> . . . . .	146
6.3.3 Évaluation des DJU <i>cooling</i> . . . . .	147
<b>6.4 Résultats en récupération d'énergie . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>6.5 Synthèse . . . . .</b>	<b>151</b>

---

## B.1 Détail de l'obtention du système linéaire de l'équation de transfert radiatif

Nous présentons dans cette partie le calcul des matrices du système final permettant de déterminer la luminance énergétique (4.219).

Pour cela, nous repartons de la formulation faible après application de la méthode de Petrov-Galerkin (4.218).

L'écriture des produits scalaires donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ w_k \vartheta_k \cdot \nabla L_{\nu,k}(s) + w_k (\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}) L_{\nu,k}(s) - \sigma_{\nu} \sum_{l=1}^{N_S} \omega_{lk} L_{\nu,l}(s) \right] (\varphi + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{\vartheta_k}} [w_k L_{\nu,k}(s) - w_k g_{int,k}(s)] \varphi |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \\ & = \int_{\Omega} w_k \kappa_{\nu} L_{\nu}^0(T(s)) (\varphi + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi) d\Omega + \int_{\Gamma_k} w_k g_{ext,k}(s) \varphi |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Avec  $\omega_{ij} = \frac{w_i w_j p_\nu(\vartheta_i, \vartheta_j)}{4\pi}$ .

On note  $(\varphi^j)$  une base de  $W_\Omega$ .  $L_{\nu,k}$ ,  $B_\nu$  et  $g_k$  peuvent être décomposés sur cette base en :

$$L_{\nu,k} = \sum_{j=1}^{N_\Omega} L_{\nu,k}^j \varphi^j, \forall k \in [[1, N_S]] \quad (\text{B.2})$$

$$L_\nu^0 = \sum_{j=1}^{N_\Omega} L_\nu^{0,j} \varphi^j \quad (\text{B.3})$$

$$g_k = \sum_{j=1}^{N_\Omega} g_k^j \varphi^j, \forall k \in [[1, N_S]] \quad (\text{B.4})$$

On pose :

$$\mathcal{F}_k^{ij} = \int_\Omega \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^j(s) (\varphi^i(s) + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i(s)) d\Omega + \int_{\Gamma_{\vartheta_k}} \varphi^j \varphi^i |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{M}_k^{ij}(v) = \int_\Omega v (\varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i) \varphi^j d\Omega, \forall v \in W_\Omega, \forall v \in W_\Omega \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{Q}_k^{ij} = \int_{\Gamma_{\vartheta_k}} \varphi^j \varphi^i |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{R}_{kl}^{ij}(v) = \int_{\Gamma_{\vartheta_k}} v \max(\vec{n} \cdot \vartheta_l, 0) \varphi^j \varphi^i |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma, \forall v \in W_\Omega \quad (\text{B.8})$$

L'équation (B.1) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_\Omega} \left[ w_k \mathcal{M}_k^{ij}(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_{\nu,k}^j + w_k \mathcal{F}_k^{ij} L_{\nu,k}^j - \sum_{l=1}^{N_S} \omega_{kl} \mathcal{M}_k^{ij}(\sigma_\nu) L_{\nu,l}^j - \sum_{l=1}^{N_S} \frac{w_k w_l}{\pi} \mathcal{R}_{kl}^{ij}(\rho_\nu) L_{\nu,l}^j \right] \\ & = \sum_{j=1}^{N_\Omega} \left[ w_k \mathcal{M}_k^{ij}(\kappa) L_\nu^{0,j} + w_k \mathcal{Q}_k^{ij} g_{ext,k}^j \right], \forall (i, k) \in [[1, N_\Omega]] \times [[1, N_S]] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

On note :

$$T_h = \begin{bmatrix} w_1 \mathcal{T}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_{N_S} \mathcal{T}_{N_S} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$M_h(\kappa_\nu) = \begin{bmatrix} w_1 \mathcal{M}_1(\kappa_\nu) & & \\ & \ddots & \\ & & w_{N_S} \mathcal{M}_{N_S}(\kappa_\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$S_h(\sigma_\nu) = \begin{bmatrix} w_1 \mathcal{M}_1(\sigma_\nu) & & \\ & \ddots & \\ & & w_{N_S} \mathcal{M}_{N_S}(\sigma_\nu) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{11} \mathcal{M}_1(\sigma_\nu) & \cdots & \omega_{1N_S} \mathcal{M}_1(\sigma_\nu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N_S 1} \mathcal{M}_{N_S}(\sigma_\nu) & \cdots & \omega_{N_S N_S} \mathcal{M}_{N_S}(\sigma_\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$Q_h = \begin{bmatrix} w_1 \mathcal{Q}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_{N_S} \mathcal{Q}_{N_S} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$R_h(\rho_\nu) = \begin{bmatrix} \frac{w_1^2}{\pi} \mathcal{R}_{11}(\rho_\nu) & \cdots & \frac{w_1 w_{N_S}}{\pi} \mathcal{R}_{1N_S}(\rho_\nu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{N_S} w_1}{\pi} \mathcal{R}_{N_S 1}(\rho_\nu) & \cdots & \frac{w_{N_S}^2}{\pi} \mathcal{R}_{N_S N_S}(\rho_\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

D'où le système à résoudre :

$$(T_h + M_h(\kappa_\nu) + S_h(\sigma_\nu) - R_h(\rho_\nu)) L_\nu = M_h(\kappa_\nu) B_\nu + Q_h G \quad (\text{B.15})$$

Avec le vecteur des inconnues  $L_\nu$  :

$$L_\nu = \left[ L_{\nu, k=1}^{j=1} \quad L_{\nu, 1}^2 \quad \cdots \quad L_{\nu, 1}^{N_\Omega} \quad L_{\nu, 2}^1 \quad \cdots \quad L_{\nu, N_S}^{N_\Omega} \right]^T \quad (\text{B.16})$$

## B.2 Expressions des matrices éléments finis dans le cas de fonctions d'interpolation linéaires

L'implémentation de notre outil de résolution de couplages multiphysiques a nécessité le calcul des matrices éléments finis. Les expressions de ces matrices éléments finis pour des fonctions d'interpolation linéaires sur chaque élément du maillage sont présentées ci-après.

Nous nous plaçons dans l'espace  $W_{\Omega_{hn}} \subset W_\Omega$  constitué des  $N_\Omega$  fonctions polynomiales  $\varphi$  de degré  $n$  sur le maillage et telles que :

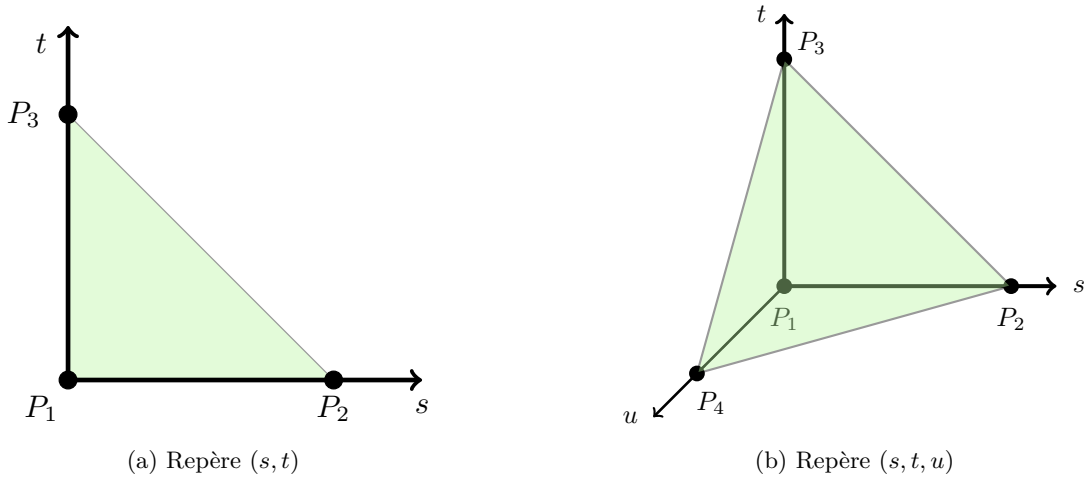
$$\forall (i, j) \in [1, N_\Omega]^2, \varphi^i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{B.17})$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons :  $a_{ij} = a_i - a_j$ .

### B.2.1 Fonctions d'interpolation linéaires

Nous nous intéressons ici au cas de fonctions d'interpolation linéaires :  $(\varphi^i)$  est une base orthogonale du sous-espace de  $W_\Omega$  constitué des fonctions linéaires sur les éléments du maillage.

On appelle matrice élément fini élémentaire une matrice élément fini obtenue à partir d'une intégration sur un élément  $\Omega^e$  ou un élément frontière  $\Gamma^e$  du maillage. Ces matrices sont notées  $[A_{\Omega^e}]$  ou  $[A_{\partial\Omega^e}]$ . Les matrices éléments finis sont alors obtenues en sommant les matrices éléments finis élémentaires sur les éléments du maillage. Par exemple, pour un terme s'écrivant de façon générique  $\langle \psi \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Omega^e}$  ou  $\langle \psi \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Gamma^e}$  :



$$\begin{cases} \Psi_{\Omega,ij} = \sum_e \Psi_{\Omega^e,ij} = \sum_e \langle \psi \phi^j | \phi^i \rangle_{V^e} \\ \Psi_{\partial\Omega,ij} = \sum_e \Psi_{\partial\Omega^e,ij} = \sum_e \langle \psi \phi^j | \phi^i \rangle_{\Gamma^e} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^e}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma^e}$  définis par :

$$\begin{cases} \langle a, b \rangle_{\Omega^e} = \int_{\Omega^e} abd\Omega \\ \langle a, b \rangle_{\Gamma^e} = \int_{\Gamma^e} abd\Gamma \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Nous nous plaçons sur des éléments linéiques, triangulaires ou tétraédriques normalisés, représentés sur les figures B.1a et B.1b.

L'espace des fonctions linéaires sur l'élément  $e$  est alors de dimension 4 pour un élément 3D, de dimension 3 pour un élément 2D et de dimension 2 pour un élément 1D. Une base orthogonale de cet espace peut s'écrire, dans le repère associé à l'élément  $e$  :

$$\begin{cases} \begin{cases} \varphi_e^1(s) \\ \varphi_e^2(s) \end{cases} = \begin{cases} 1-s \\ s \end{cases} & \text{pour un élément 1D} \\ \begin{cases} \varphi_e^1(s, t) \\ \varphi_e^2(s, t) \\ \varphi_e^3(s, t) \end{cases} = \begin{cases} 1-s-t \\ s \\ t \end{cases} & \text{pour un élément 2D} \\ \begin{cases} \varphi_e^1(s, t, u) \\ \varphi_e^2(s, t, u) \\ \varphi_e^3(s, t, u) \\ \varphi_e^4(s, t, u) \end{cases} = \begin{cases} 1-s-t-u \\ s \\ t \\ u \end{cases} & \text{pour un élément 3D} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Pour tout point  $(x, y)$  appartenant à un élément 2D, on a :

$$\begin{cases} x - x_1 \\ y - y_1 \end{cases} = s \begin{cases} x_{21} \\ y_{21} \end{cases} + t \begin{cases} x_{31} \\ y_{31} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Où  $s$  et  $t$  vérifient les conditions :

$$\begin{cases} s \geq 0 \\ t \geq 0 \\ s + t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

La matrice jacobienne  $[J]$ , qui permet de passer du repère lié à l'élément  $(s, t)$  au repère cartésien  $(x, y)$  vérifie :

$$\begin{Bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

D'où l'expression de la matrice jacobienne sur l'élément considéré :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Il est à noter que la surface (algébrique) de l'élément  $A_e$  vérifie alors  $A_e = \frac{\det(J)}{2}$ .

En 1D, on a alors  $[J] = [x_{21}]$  et la longueur (algébrique)  $L_e$  de l'élément vérifie  $L_e = \det(J)$ .

De même, en 3D, on a :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} & z_{21} \\ x_{31} & y_{31} & z_{31} \\ x_{41} & y_{41} & z_{41} \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Et le volume algébrique de l'élément  $V_e$  vérifie  $V_e = \frac{\det(J)}{6}$ .

Les coordonnées  $(s, t)$  ou  $(s, t, u)$  s'obtiennent en inversant la matrice jacobienne :

$$J^{-1} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_{31} & z_{31} \\ y_{41} & z_{41} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} y_{21} & z_{21} \\ y_{41} & z_{41} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_{21} & z_{21} \\ y_{31} & z_{31} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_{31} & z_{31} \\ x_{41} & z_{41} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_{21} & z_{21} \\ x_{41} & z_{41} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x_{21} & z_{21} \\ x_{31} & z_{31} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_{31} & y_{31} \\ x_{41} & y_{41} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{41} & y_{41} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

En particulier, les termes de gradient  $\nabla N_e^i$  s'obtiennent par :

$$\nabla \varphi^i = J^{-1} [\nabla_s \varphi_e^i] \quad (\text{B.27})$$

Avec, en 3D :

$$[\nabla_s \varphi_e^i] = \left[ \frac{\partial \varphi_e^i(s, t, u)}{\partial s} \quad \frac{\partial \varphi_e^i(s, t, u)}{\partial t} \quad \frac{\partial \varphi_e^i(s, t, u)}{\partial u} \right]^T \quad (\text{B.28})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

En 2D :

$$[\nabla_s \varphi_e^i] = \left[ \frac{\partial \varphi_e^i(s, t)}{\partial s} \quad \frac{\partial \varphi_e^i(s, t)}{\partial t} \right]^T \quad (\text{B.30})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

En 1D :

$$[\nabla_s \varphi_e^i] = \left[ \frac{\partial \varphi_e^i(s)}{\partial s} \right]^T \quad (\text{B.32})$$

$$= [-1 \quad 1] \quad (\text{B.33})$$

## B.2.2 Cas de la diffusion thermique et de la convection hydraulique

Les systèmes d'équations issus de l'application de la méthode des éléments finis s'écrivent sous la forme générale, pour la diffusion thermique et la convection hydraulique :

$$[C] \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right] + [K] [T] = [F] \quad (\text{B.34})$$

Avec :

- $[C]$  la matrice de capacité thermique :  $C_{ij} = \langle \rho c \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Omega$
- $[K]$  la matrice de conductivité thermique. Elle est constituée de quatre composantes, une première provenant de la diffusion thermique, une deuxième issue de l'advection, une troisième provenant de l'échange avec une autre phase et une quatrième de pertes aux frontières :  $K_{ij} = \langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle_\Omega + \langle \vec{u} \cdot \nabla \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Omega + \langle a \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Omega + \langle \sum_k h_k \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Gamma$
- $[F]$  le vecteur source. Il est constitué de deux composantes, une première provenant des sources internes et une seconde provenant des apports extérieurs :  $F_i = \langle q | \varphi^i \rangle_\Omega + \langle \Phi + \sum_k h_k \theta_k | \varphi^i \rangle_\Gamma$

### Matrice masse

La matrice masse  $C$  peut s'écrire de façon générique  $\langle \rho c \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle \rho c \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ . Une intégration sur l'élément  $\Omega_e$  permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \langle \rho c \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Omega_e} &= \int_{\Omega_e} \rho c \varphi^j \varphi^i d\Omega & (\text{B.35}) \\ &= \begin{cases} \int_{s=0}^{1-t-u} \int_{t=0}^{1-u} \int_{u=0}^1 \rho c \varphi_e^j \varphi_e^i |\det(J)| du dt ds & \text{en 3D} \\ \int_{s=0}^{1-t} \int_{t=0}^1 \rho c \varphi_e^j \varphi_e^i |\det(J)| dt ds & \text{en 2D} \\ \int_{s=0}^1 \rho c \varphi_e^j \varphi_e^i |\det(J)| ds & \text{en 1D} \end{cases} & (\text{B.36}) \end{aligned}$$

Soit, dans le cas où  $\rho c$  est constant et égal à une valeur  $(\rho c)_e$  sur l'élément  $\Omega_e$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho c \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{L_e}{6} (\rho c)_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 1D} \\ \langle \rho c \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{A_e}{12} (\rho c)_e \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 2D} \\ \langle \rho c \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{V_e}{20} (\rho c)_e \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 3D} \end{array} \right. \quad (\text{B.37})$$

### matrice raideur

La matrice raideur  $K$  est constituée de trois composantes : le terme de diffusion  $\langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle_\Omega$ , le terme de transport  $\langle \vec{u} \cdot \nabla \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Omega$  et le terme de pertes vers l'extérieur  $\langle \sum_k h_k \varphi^j | \varphi^i \rangle_\Gamma$ .

- Première composante :  $\langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ . On a :

$$\langle k \nabla \varphi^j | \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} k \nabla \varphi^j \cdot \nabla \varphi^i d\Omega \quad (\text{B.38})$$

$$= \left( \int_{\Omega_e} k ([J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e])^T [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] d\Omega \right)_{ij} \quad (\text{B.39})$$

$$(\text{B.40})$$



Pour une valeur constante de  $k$  sur l'élément  $\Omega_e$  et pour des fonctions d'interpolations linéaires, on a :

$$\langle k \nabla \varphi | \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \begin{cases} |L_e| \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right)^T k_e \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right) & \text{en 1D} \\ |A_e| \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right)^T k_e \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right) & \text{en 2D} \\ |V_e| \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right)^T k_e \left( \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \right) & \text{en 3D} \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

— Deuxième composante :  $\langle \vec{u} \cdot \nabla \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Omega}$ . On a :

$$\langle \vec{u} \cdot \nabla \varphi | \varphi \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega_e} (\varphi_e)^T \vec{u} \left[ \nabla_s \varphi_e \right] \quad (\text{B.42})$$

Soit, après calculs, pour une vitesse  $\vec{u}$  constante sur l'élément  $\Omega_e$  et une interpolation linéaire :

$$\langle \vec{u} \cdot \nabla \varphi | \varphi \rangle_{\Omega} = \begin{cases} |L_e| \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \vec{u}_e \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] & \text{en 1D} \\ |A_e| \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \vec{u}_e \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] & \text{en 2D} \\ |V_e| \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \vec{u}_e \left[ J^{-1} \right] \left[ \nabla_s \varphi_e \right] & \text{en 3D} \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

— Troisième composante :  $\langle a \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Omega}$ . Ce terme est identique à celui de la matrice  $C$  avec  $a$  à la place de  $\rho c$ . Pour une interpolation linéaire et un coefficient d'échange  $a$  constant sur l'élément considéré, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{L_e}{6} a_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 1D} \\ \langle a \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{A_e}{12} a_e \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 2D} \\ \langle a \varphi | \varphi \rangle_{\Omega_e} = \frac{V_e}{20} a_e \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément 3D} \end{array} \right. \quad (\text{B.44})$$

— Quatrième composante :  $\langle \sum_k h_k \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Gamma} = \sum_e \langle \sum_k h_k \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Gamma_e}$ . On a :

$$\langle \sum_k h_k \varphi^j | \varphi^i \rangle_{\Gamma_e} = \int_{\Gamma_e} \sum_k h_k \varphi^j \varphi^i d\Gamma \quad (\text{B.45})$$

Soit, après calculs, pour des coefficients  $k_k$  constants sur les frontières  $\Gamma_e$  de  $\Omega_e$  et pour des fonctions d'interpolations linéaires :

$$\langle \sum_k h_{ke} \varphi | \varphi \rangle_{\Gamma_e} = \begin{cases} \sum_k h_k & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 1D, de frontière } \Gamma_e \text{ 0D} \\ |L_{\Gamma_e}| \sum_k h_{ke} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 2D, de frontière } \Gamma_e \text{ 1D} \\ |A_{\Gamma_e}| \sum_k h_{ke} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 3D, de frontière } \Gamma_e \text{ 2D} \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

## Vecteur source

Le vecteur source peut s'écrire de façon générique  $\langle q|\varphi^i\rangle_\Omega + \langle \Phi + \sum_k h_k \theta_k |\varphi^i\rangle_\Gamma$ . Pour la première composante, le terme source interne, on a :

$$\langle q|\varphi^i\rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} q\varphi^i d\Omega \quad (\text{B.47})$$

Soit, après calculs, et pour un terme  $q$  constant sur l'élément  $\Omega_e$  et une interpolation linéaire :

$$\langle q|\varphi^i\rangle_{\Omega_e} = \begin{cases} |L_e|q_e \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \text{en 1D} \\ |A_e|q_e \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} & \text{en 2D} \\ |V_e|q_e \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

Pour les apports externes, avec des coefficients  $h_k$ , des températures extérieures  $\theta_k$  et une densité de flux  $\Phi$  constants, on a :

$$\langle \Phi_e + \sum_k h_{ke} \theta_k |\varphi^i\rangle_{\Gamma_e} = \begin{cases} \Phi_e + \sum_k h_{ke} \theta_k & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 1D, de frontière } \Gamma_e \text{ 0D} \\ |L_{\Gamma_e}| (\Phi_e + \sum_k h_{ke} \theta_k) \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 2D, de frontière } \Gamma_e \text{ 1D} \\ |A_{\Gamma_e}| (\Phi_e + \sum_k h_{ke} \theta_k) \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} & \text{pour un élément } \Omega_e \text{ 3D, de frontière } \Gamma_e \text{ 2D} \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

## B.2.3 Ajout de la diffusion numérique - Méthode de Petrov-Galerkin

Dans ce paragraphe, les matrices éléments finis correspondant à l'ajout de la diffusion numérique sont données. Il est rappelé que, lors de l'application de la méthode de Petrov-Galerkin, la fonction test  $\varphi^i$  correspondant à une des composantes d'une base de l'espace de fonction considéré, est remplacée par  $\varphi^i + \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i$  avec  $\vec{u}$  la vitesse liée au phénomène d'advection et  $\delta$  un coefficient permettant d'ajuster la diffusion numérique.

Les matrices issue des termes  $\langle \cdot | \varphi^i \rangle_\Omega$  ont été déterminées au cours du paragraphe précédent. L'étude porte donc ici sur les termes  $\langle \cdot | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega$ . La vitesse est à chaque fois donnée sous la forme d'un vecteur ligne.

### Matrice capacité

Le terme de la matrice capacité provenant de la diffusion numérique s'écrit, sous la forme générique  $\langle \rho c \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle \rho c \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ .

Une intégration sur l'élément  $\Omega_e$  permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \langle \rho c \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |L_e| (\rho c)_e \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 1D} \\ \langle \rho c \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |A_e| (\rho c)_e \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 2D} \\ \langle \rho c \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |V_e| (\rho c)_e \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 3D} \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

### Matrice capacité

Le terme de la matrice capacité provenant de la diffusion numérique s'écrit, sous la forme générique  $\langle \nabla \cdot (k \nabla \varphi^j) | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega$ .

Pour des éléments linéaires, comme c'est le cas ici, ce terme est nul. Pour des éléments bilinéaires, ce terme peut être négligé [229].

### Matrice d'advection

Le terme générique est  $\langle \vec{v} \cdot \nabla \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle \vec{v} \cdot \nabla \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ . Deux vitesses sont considérées ici :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  pour se placer dans un cas plus général.

Une intégration sur l'élément  $\Omega_e$  permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \langle \vec{v} \cdot \nabla \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |L_e| \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \vec{v} \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right) & \text{pour un élément 1D} \\ \langle \vec{v} \cdot \nabla \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |A_e| \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \vec{v} \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right) & \text{pour un élément 2D} \\ \langle \vec{v} \cdot \nabla \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |V_e| \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \vec{v} \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right) & \text{pour un élément 3D} \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

### Matrice d'échange

Le terme générique pour la matrice d'échange est  $\langle a \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle a \varphi^j | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ .

Une intégration sur l'élément  $\Omega_e$  permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \langle a \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |L_e| a \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 1D} \\ \langle a \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |A_e| a \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 2D} \\ \langle a \varphi | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |V_e| a \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} & \text{pour un élément 3D} \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

### Vecteur source

Le vecteur source possède le terme générique suivant :  $\langle q | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_\Omega = \sum_e \langle q | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi^i \rangle_{\Omega_e}$ .

Après intégration sur  $\Omega_e$ , on obtient :

$$\begin{cases} \langle q | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |L_e| q \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T & \text{pour un élément 1D} \\ \langle q | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |A_e| q \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T & \text{pour un élément 2D} \\ \langle q | \delta \vec{u} \cdot \nabla \varphi \rangle_{\Omega_e} = \delta |V_e| q \left( [J^{-1}] [\nabla_s \varphi_e] \right)^T \vec{u}^T & \text{pour un élément 3D} \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

## B.2.4 Cas des transferts radiatifs

Nous donnons dans cette partie les expressions des matrices éléments finis pour le cas des transferts radiatifs pour des fonctions de base linéaires. Les expressions des matrices dans le cas général sont données dans la section B.1

On suppose que les différents coefficients (absorption, diffusion, réflexion, émissivité pour les transferts radiatifs) sont constants sur chaque élément.

Les nœuds du maillage utilisé sont notés  $x_i$ ,  $i \in [1, N_\Omega]$ .

### Tenseur $\mathcal{M}$

On a, sur l'élément  $e$  :

$$\mathcal{M}_{ek}^{ij}(v) = \int_{\Omega_e} v (N^i + \delta\vartheta_k \cdot \nabla N^i) N^j d\Omega \quad (\text{B.54})$$

Le paramètre  $v$  étant supposé constant sur l'élément, et en effectuant un changement de variables, on a :

$$\mathcal{M}_{ek}^{ij}(v) = 6|V_e|v \left[ \int_{s=0}^1 \int_{t=0}^{1-s} \int_{u=0}^{1-s-t} N_e^i(s, t, u) N_e^j(s, t, u) ds dt du \right] \quad (\text{B.55})$$

$$+ \delta\vartheta_k J^{-1} [\nabla_s N^i] \int_{s=0}^1 \int_{t=0}^{1-s} \int_{u=0}^{1-s-t} N_e^j ds dt du \quad (\text{B.56})$$

On a alors :

$$\mathcal{M}_{ek}(v) = |V_e|v \begin{bmatrix} \frac{1}{10} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}{4} \\ \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{10} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} \\ \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{10} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{4} \\ \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{20} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} & \frac{1}{10} + \frac{\delta\vartheta_k J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{B.57})$$

### Tenseur $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q}_{ek}^{ij} = \int_{\Gamma_{ek}} N_e^j N_e^i |\vec{n}_e \cdot \vartheta_k| d\sigma \quad (\text{B.58})$$

$$= \max(-\vec{n}_e \cdot \vartheta_k, 0) \int_{\Gamma_e} N_e^j N_e^i d\sigma \quad (\text{B.59})$$

Avec  $\Gamma_e$  l'élément frontière.  $\Gamma_{ek}$  est un élément frontière tel que  $\vec{n} \cdot \vartheta_k < 0$ .

L'élément frontière est une face d'un élément tétraédrique. Le repère  $(s, t, u)$  est placé de telle sorte que l'élément frontière  $\Gamma_e$  soit placé dans le plan  $u = 0$ . Pour cela, les noeuds  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont définis comme étant les sommets de l'élément tétraédrique appartenant à la frontière et  $P_4$  est le sommet n'appartenant pas à la frontière.

On a alors, pour chaque élément frontière :

$$\mathcal{Q}_{ek} = A_e \max(-\vec{n} \cdot \vartheta_k, 0) \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.60})$$

Avec  $A_e$  l'aire de la surface de l'élément frontière  $\Gamma_e$  en contact avec l'extérieur du domaine. Cette aire peut s'obtenir par :

$$A_e = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \wedge \overrightarrow{P_1 P_3}|}{2} \quad (\text{B.61})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(y_{21} z_{31} - z_{21} y_{31})^2 + (z_{21} x_{31} - x_{21} z_{31})^2 + (x_{21} y_{31} - y_{21} x_{31})^2} \quad (\text{B.62})$$

### Tenseur $\mathcal{T}$

On a :

$$\mathcal{T}_{ek}^{ij} = \int_{\Omega_e} \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^j (\varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i) d\Omega + \int_{\Gamma_{ek}} \varphi^j \varphi^i |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \quad (\text{B.63})$$

$$= \int_{\Omega_e} \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^j (\varphi^i + \delta \vartheta_k \cdot \nabla \varphi^i) d\Omega + \mathcal{Q}_{ek}^{ij} \quad (\text{B.64})$$

Connaissant  $\mathcal{Q}_{ek}^{ij}$ , nous cherchons donc  $\mathcal{T}_{ek}^{ij} - \mathcal{Q}_{ek}^{ij}$  :

$$\mathcal{T}_{ek}^{ij} - \mathcal{Q}_{ek}^{ij} = \vartheta_k J^{-1} [\nabla_s N_e^j] \left[ \int_{\Omega_e} N_e^i d\Omega + \delta \vartheta_k J^{-1} [\nabla_s N_e^i] |V_e| \right] \quad (\text{B.65})$$

On a alors :

$$\mathcal{T}_{ek}^{ij} = |V_e| \vartheta_k J^{-1} [\nabla_s N_e^j] \left( \frac{1}{4} + \delta \vartheta_k J^{-1} [\nabla_s N_e^i] \right) + \mathcal{Q}_{ek}^{ij} \quad (\text{B.66})$$

### Tenseur $\mathcal{R}$

On a :

$$\mathcal{R}_{ekl}^{ij}(v) = \int_{\Gamma_{ek}} v \max(\vec{n} \cdot \vartheta_l, 0) N_e^j N_e^i |\vec{n} \cdot \vartheta_k| d\sigma \quad (\text{B.67})$$

$$= v \max(\vec{n} \cdot \vartheta_l, 0) \max(-\vec{n} \cdot \vartheta_k, 0) \int_{\Gamma_e} N_e^j N_e^i d\sigma \quad (\text{B.68})$$

Finalement :

$$\mathcal{R}_{ekl}(v) = A_e v \max(\vec{n} \cdot \vartheta_l, 0) \max(-\vec{n} \cdot \vartheta_k, 0) \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.69})$$

## Annexe C

# Couplage entre les transferts radiatifs et la diffusion thermique : description de la méthode de Rosseland

La méthode de Rosseland permet, sous certaines hypothèses, de traiter le couplage entre la diffusion thermique et les transferts radiatifs. Elle a été présentée dans le paragraphe 5.3.2 et nous décrivons ici les détails des calculs et hypothèses permettant d'établir la conductivité équivalente de Rosseland.

L'obtention de ce terme de conductivité équivalente de Rosseland se fait à partir de l'équation de transfert radiatif en 1D. En considérant que la luminance ne dépend pas des variables spatiales  $x$  et  $y$ , et en considérant un chemin infinitésimal  $ds$ , l'équation de transfert radiatif s'écrit :

$$\frac{\partial L_\nu}{\partial s} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu + \kappa_\nu L_\nu^0(T) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(z, \tilde{\vartheta}) d\vartheta \quad (\text{C.1})$$

Ce chemin infinitésimal est orienté d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction  $\vec{e}_z$ . En notant  $\mu = \cos \theta$ , on a  $ds = \frac{dz}{\mu}$

On note de plus, pour les apports radiatifs le long de ce chemin :

$$S_\nu = \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \left( \kappa_\nu L_\nu^0(T) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(z, \tilde{\vartheta}) d\vartheta \right) \quad (\text{C.2})$$

L'équation (C.1) peut alors se réécrire, en fonction de  $z$  :

$$L_\nu = S_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial L_\nu}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

On suppose le milieu étudié optiquement épais, c'est-à-dire que les photons ont un libre parcours moyen très inférieur aux dimensions du domaine. Le système est alors proche de l'équilibre thermodynamique local et les variations locales de la luminance sont très faibles. On peut alors, en première approche, faire l'approximation  $\frac{dL_\nu}{dz} \ll S_\nu$ . On a alors :

$$L_\nu \approx S_\nu \quad (\text{C.4})$$

Étant donnée l'absence de dépendance en direction dans la relation (??), on a, pour le terme de diffusion :

$$\frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\tilde{\vartheta}, \vartheta) L_\nu(z, \tilde{\vartheta}) d\vartheta \approx S_\nu \quad (\text{C.5})$$

La définition de  $S_\nu$  par (C.2) permet d'obtenir l'approximation :

$$L_\nu = S_\nu = L_\nu^0(T) \quad (\text{C.6})$$

En réinjectant cette approximation dans l'équation (C.3), on obtient une approximation au premier ordre :

$$L_\nu = L_\nu^0(T) - \frac{\mu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial z} \quad (\text{C.7})$$

À partir de la définition du flux radiatif (4.175), il est possible de définir le flux radiatif monochromatique sous la forme :

$$\vec{q}_\nu = \int_{4\pi} L_\nu \vartheta d\vartheta \quad (\text{C.8})$$

En injectant la relation (C.7) dans la définition du flux radiatif monochromatique (C.8), on obtient :

$$\vec{q}_\nu = \int_{4\pi} \left( L_\nu^0(T) - \frac{\mu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial z} \right) \vartheta d\vartheta \quad (\text{C.9})$$

En considérant le fait que le flux radiatif est orienté selon  $\vec{e}_z$ , puis en effectuant le changement de variable  $\vartheta \cdot \vec{e}_z$  en  $\mu$ , on obtient, en prenant de plus en compte le fait que  $B_\nu(T)$  soit isotropique et donc que son intégration sur la sphère unité produit une grandeur nulle :

$$q_\nu = \frac{-2\pi}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial z} \int_{\mu=-1}^1 \mu^2 d\mu \quad (\text{C.10})$$

$$= -\frac{4\pi}{3(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial z} \quad (\text{C.11})$$

$L_\nu^0(T)$  ne dépend de la variable  $z$  que par les variations de la température  $T$ . On a donc :

$$q_\nu = \frac{-4\pi}{3\beta_\nu} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{C.12})$$

En intégrant sur les fréquences  $\nu$ , le flux total s'écrit :

$$q = \frac{-4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial z} \int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial T} \frac{1}{\beta_\nu} d\nu \quad (\text{C.13})$$

Où  $\beta_\nu$  fait référence au coefficient d'extinction :  $\beta_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$ . À partir de l'équation (C.13), il est possible de définir le coefficient d'extinction moyen de Rosseland  $\beta_r$  tel que :

$$\int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial T} \frac{1}{\beta_\nu} d\nu = \frac{1}{\beta_r} \int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial T} d\nu \quad (\text{C.14})$$

On a de plus :  $\int_{\nu=0}^{+\infty} L_\nu^0(T) d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4$ . D'où :

$$\int_{\nu=0}^{+\infty} \frac{dL_\nu^0(T)}{\partial T} d\nu = \frac{\partial}{\partial T} \int_{\nu=0}^{+\infty} L_\nu^0(T) d\nu = \frac{4\sigma T^3}{\pi} \quad (\text{C.15})$$

On a donc, pour le flux radiatif :

$$q = -\frac{16}{3\beta_r} \sigma T^3 \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{C.16})$$

Le flux radiatif peut donc s'écrire sous la forme  $q = -k_r \frac{\partial T}{\partial z}$  avec  $k_r$  la conductivité équivalente de Rosseland définie par :

$$k_r = \frac{16\sigma T^3}{3\beta_r} \quad (\text{C.17})$$

## Annexe D

# Application de la méthode de l'état adjoint

Dans cette annexe, les détails de l'application de la méthode de l'état adjoint au problème de minimisation présenté dans le paragraphe 7.5 sont donnés. En particulier, l'obtention du problème adjoint à partir du problème de minimisation et des problèmes direct et linéaire tangent est décrite.

Les notations introduites au cours de la section 7.5 sont réutilisées ici.

Il est rappelé que la fonctionnelle à minimiser comprend trois termes (voir l'équation (D.1)) dont seul le premier ne fait pas apparaître explicitement le terme  $\delta u$ . Le but de cette annexe est de déterminer le gradient de ce premier terme.

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u + \delta u - T_{f,ref}\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (\text{D.1})$$

### D.1 Rappel des problèmes direct et linéaire tangent

Le problème direct s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \phi) \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = \begin{cases} h(T_f - T) & \text{sur } \Omega_f \\ q & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ T(t = 0) = T_0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla T \cdot \vec{n} = \Phi + \sum_i h_i(\theta_i - T) \\ k \nabla T \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_S \\ \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla T_f - \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) = h(T - T_f) \\ T_f(t = 0) = T_f^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} T_f = T_{f,in} \\ k_f \nabla T_f \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_{f0} \\ \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \end{array} \right. \quad (\text{D.2})$$

Le problème linéaire tangent s'écrit :



$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \phi) \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) = \begin{cases} h(\delta T_f - \delta T) & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ \delta T(t=0) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T \quad \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla \delta T_f - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f) = h(\delta T - \delta T_f) \\ \delta T_f(t=0) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta T_f = \delta T_{f,\text{in}} \quad \text{sur } \Gamma_{f0} \\ k_f \nabla \delta T_f \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

## D.2 Détermination du gradient du terme de résidu

Pour simplifier les notations, les termes faisant apparaître explicitement  $\delta u$  (termes de consommation énergétique (ou de Tikhonov) et de Levenberg-Marquardt) sont omis dans ce paragraphe. Nous cherchons donc à minimiser la fonctionnelle (D.4).

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{D.4})$$

Dans un premier temps, la différentielle de cette fonctionnelle est calculée, en utilisant un produit scalaire. L'opérateur adjoint est ensuite introduit pour faire apparaître explicitement le terme  $\delta u$  dans la fonctionnelle.

### D.2.1 Réécriture de la fonctionnelle à minimiser

La différentielle s'écrit  $\delta \tilde{J}_u = \tilde{J}'(\delta u) \delta \tilde{u}$  et vérifie, pour  $\delta \tilde{u} \in \mathcal{U}$  :

$$\tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{u} = \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u) | \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} \quad (\text{D.5})$$

$$= \tilde{J}_u(\delta u + \delta \tilde{u}) - \tilde{J}_u(\delta u) + \mathcal{O}(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}^2) \quad (\text{D.6})$$

En revenant à la définition de  $\tilde{J}_u$  dans (D.4), la relation (D.6) se réécrit :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{u} &= \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u + \hat{f}'(u) \delta \tilde{u} - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\| \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - T_{\text{seuil}} \right) \right\|_{\mathcal{M}}^2 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

En développant les produits scalaires, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{u} &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_S} \left[ \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u + \hat{f}'(u) \delta \tilde{u} - T_{\text{seuil}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - T_{\text{seuil}} \right)^2 \right] dS dt \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Notons  $r = \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - T_{\text{seuil}}$  et  $A$  la grandeur telle que :

$$A = \frac{1}{2} \left[ \min \left( 0, r + \hat{f}'(u) \delta \tilde{u} \right)^2 - \min(0, r)^2 \right] \quad (\text{D.9})$$

Quatre cas sont alors possibles pour le terme  $A$  :

—  $r + \hat{f}'(u) \delta \tilde{u} > 0$  et  $r > 0$  : dans ce cas, on a  $A = 0$  et donc :

$$A = \hat{f}'(u) \delta \tilde{u} \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - T_{\text{seuil}} \right) \quad (\text{D.10})$$

—  $r + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} < 0$  et  $r < 0$  : dans ce cas, on a :

$$A = \frac{1}{2} \left[ \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} - T_{\text{seuil}} \right)^2 - \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u \delta\tilde{u} - T_{\text{seuil}} \right)^2 \right] \quad (\text{D.11})$$

Soit, en développant :

$$A = \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) + \mathcal{O} \left( \left\| \hat{f}'(u)\delta u \right\|_{\mathcal{M}}^2 \right) \quad (\text{D.12})$$

D'où, en prenant en compte le fait que  $\hat{f}'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  :

$$A = \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) + \mathcal{O} \left( \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \right) \quad (\text{D.13})$$

—  $r + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} < 0$  et  $r > 0$  : on a alors :

$$A = \frac{1}{2} \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} - T_{\text{seuil}} \right)^2 \quad (\text{D.14})$$

En développant, il vient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[ \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \left( \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) + \mathcal{O} \left( \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Étant données les conditions  $r + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} < 0$  et  $r > 0$ , on a donc :

$$\hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} = \mathcal{O} \left( \left\| \hat{f}'(u)\delta u \right\|_{\mathcal{M}}^2 \right) \quad (\text{D.16})$$

La relation (D.15) se réécrit donc :

$$A = \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) + \mathcal{O} \left( \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \right) \quad (\text{D.17})$$

— Le cas  $r + \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} > 0$  et  $r < 0$  se traite de la même manière que le précédent. Dans tous les cas, on retrouve donc la même relation et (D.8) peut se réécrire :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta\tilde{u} = \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_S} \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) dS dt \quad (\text{D.18})$$

$$= \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) \delta_{\Gamma_S} d\Omega dt \quad (\text{D.19})$$

$$= \langle \hat{f}'(u)\delta\tilde{u} | \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) \rangle_{\mathcal{M}} \quad (\text{D.20})$$

$$(\text{D.21})$$

## D.2.2 Introduction du problème adjoint

$\hat{f}'(u)$  étant inconnue, l'idée ici est d'introduire l'opérateur adjoint de  $\hat{f}'(u)$  afin de faire apparaître une expression du gradient explicite par rapport aux paramètres  $\delta\tilde{u}$ . Notons  $\hat{f}'(u)^*$  l'opérateur adjoint de  $\hat{f}'(u)$ , la relation (D.20) peut se réécrire sous une forme faisant apparaître explicitement  $\delta\tilde{u}$  :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta\tilde{u} = \langle \delta\tilde{u} | \hat{f}'(u)^* \min \left( 0, \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - T_{\text{seuil}} \right) \rangle_{\mathcal{M}} \quad (\text{D.22})$$

Pour cela, nous partons de la formulation variationnelle du problème linéaire tangent (D.3) afin de faire apparaître le terme de droite de la relation (D.19). On a, pour tout  $w, w_f \in L^2(\Omega, [0, t_a])$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \left[ (1-\phi) \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) - h (\delta T_f - \delta T) \right] w d\Omega dt \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega \setminus \Omega_f} \left[ (1-\phi) \rho c \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T) \right] w d\Omega dt = 0
\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} \left[ \phi (\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \delta T_f - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f) - h (\delta T - \delta T_f) \right] w_f d\Omega dt = 0 \tag{D.24}$$

Des intégrations par parties en temps (une pour les termes capacitifs) et en espace (une pour le terme d'advection, deux pour les termes de diffusion) et l'utilisation des conditions limites permettent d'obtenir, pour tout  $w, w_f \in L^2(\Omega, [0, t_a])$  :

$$\begin{aligned}
& - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} (1-\phi) \rho c \frac{\partial w}{\partial t} \delta T d\Omega dt - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla w) \delta T d\Omega dt - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} h (\delta T_f - \delta T) d\Omega dt \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_S} \left( k \nabla w \cdot \vec{n} + \sum_i h_i w \right) \delta T dS dt + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma_S} k \nabla w \cdot \vec{n} dS dt \\
& + \int_{\Omega} (1-\phi) \rho c \delta T(t_a) w(t_a) d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{D.25}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \phi (\rho c)_f \frac{\partial w_f}{\partial t} \delta T_f d\Omega dt - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla w_f \delta T_f d\Omega dt \\
& - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (k_f \nabla w_f) \delta T_f d\Omega dt - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} h (\delta T - \delta T_f) d\Omega dt \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \left( k_f (\delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \nabla w_f - w_f \nabla \delta T_f) \cdot \vec{n} + (\rho c)_f \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} w_f \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \delta T_f \left( k_f \nabla w_f \cdot \vec{n} + (\rho c)_f \vec{u} \cdot \vec{n} w_f \right) dS dt = 0
\end{aligned} \tag{D.26}$$

En additionnant (D.25) et (D.26), on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \delta T \left( - (1-\phi) \rho c \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla w) - h (w_f - w) \right) d\Omega dt \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega \setminus \Omega_f} \delta T \left( - (1-\phi) \rho c \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla w) \right) d\Omega dt \\
& \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \delta T_f \left( - \phi (\rho c)_f \frac{\partial w_f}{\partial t} - (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla w_f - \nabla \cdot (k_f \nabla w_f) - h (w - w_f) \right) d\Omega dt \\
& + \int_{\Omega} \delta T(t_a) (1-\phi) \rho c w(t_a) d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta T_f(t_a) \phi (\rho c)_f w_f(t_a) d\Omega \\
& + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_S} \delta T (k \nabla w \cdot \vec{n} + (h_{conv} + h_{rad}) w) dS dt + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma_S} \delta T_f k \nabla w \cdot \vec{n} dS dt \\
& - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} w_f k_f \nabla \delta T_f \cdot \vec{n} dS dt + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\partial \Omega_f \setminus \Gamma_f} \delta T_f \left( k_f \nabla w_f \cdot \vec{n} + (\rho c)_f w_f \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \\
& = - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \left( k_f \nabla w_f \cdot \vec{n} + (\rho c)_f w_f \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt
\end{aligned} \tag{D.27}$$

Le système (D.27) permet de faire apparaître le modèle adjoint en prenant des fonctions tests telles que  $w = \delta T^*$  et  $w_f = \delta T_f^*$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -(1-\phi)\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) = \min(0, T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S} + \begin{cases} h(\delta T_f^* - \delta T^*) & \text{sur } \Omega_f \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_f \end{cases} \\ \delta T^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = -\sum_i h_i \delta T^* \quad \text{sur } \Gamma_S \\ k \nabla \delta T^* \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \setminus \Gamma_S \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f^*}{\partial t} - (\rho c)_f \vec{u} \cdot \nabla \delta T_f^* - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f^*) = h(\delta T^* - \delta T_f^*) \\ \delta T_f^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta T_f^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f0} \\ k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} = -(\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial \Omega_f \setminus \Gamma_{f0} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{D.28})$$

### D.2.3 Minimisation du terme de résidu

Sans l'ajout du terme d'erreur  $\min(0, T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S}$ , la solution  $\delta T^* = 0$  et  $\delta T_f^* = 0$  est la solution évidente. C'est l'ajout de ce terme qui permet de prendre en compte le résidu dans la résolution du problème de l'adjoint [124]. En effet, en remplaçant  $w$  et  $w_f$  respectivement par  $\delta T^*$  et  $\delta T_f^*$  dans (D.27) et en injectant les conditions limites, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \delta T \left( -(1-\phi)\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) - h(\delta_f^* - \delta T^*) \right) d\Omega dt \\ & + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega \setminus \Omega_f} \delta T \left( -(1-\phi)\rho c \frac{\partial \delta T^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta T^*) \right) d\Omega dt \\ & + \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega_f} \delta T_f \left( -\phi(\rho c)_f \frac{\partial \delta T_f^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k_f \nabla \delta T_f^*) - h(\delta^* - \delta T_f^*) \right) d\Omega dt \\ & = - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \left( k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f w_f \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

En injectant les équations sur  $\Omega$  et  $\Omega_f$  de (D.28), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Omega} \delta T \min(T + \delta T - T_{\text{seuil}}) \delta_{\Gamma_S} d\Omega dt \\ & = - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \left( k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f w_f \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

On a donc l'expression du gradient du terme de résidu, en reprenant (D.20) :

$$\tilde{J}'_u(\delta T_{f0}) \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} = - \int_{t=0}^{t_a} \int_{\Gamma_f} \delta \tilde{T}_{f,\text{in}} \left( k_f \nabla \delta T_f^* \cdot \vec{n} + (\rho c)_f \delta T_f^* \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS dt \quad (\text{D.31})$$

## Annexe E

# Résolution des problèmes d'électromagnétisme

Dans cette annexe, nous présentons la résolution des problèmes direct et inverse en électromagnétisme. Ces problèmes interviennent dans le cadre du couplage entre la méthode de reconstruction basée sur l'utilisation d'un GPR et celle d'une méthode thermique. Ce couplage a été détaillé dans le paragraphe 7.6.2.

Les équations régissant le déplacement des ondes électromagnétiques sont rappelées [192] :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{E.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c + \vec{J}_s \quad (\text{E.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{E.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (\text{E.4})$$

Avec  $\vec{E}$  le champ électrique (en  $\text{V.m}^{-1}$ ),  $\vec{H}$  le champ magnétique (en  $\text{A.m}^{-1}$ ),  $\vec{J}_c$  la densité de courant (en  $\text{A.m}^{-2}$ ) induite par le champ électrique,  $\vec{J}_s$  la densité de courant induite par la source électrique,  $\vec{B}$  la densité de flux magnétique (en  $\text{Wb}$ ),  $\vec{D}$  la densité de flux électrique (en  $\text{C}$ ),  $\rho$  la densité électrique de charge (en  $\text{C.m}^{-1}$ ) et  $\rho_m$  la densité magnétique de charge (en  $\text{H.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ).

Ces équations montrent que les charges électriques et magnétiques sont des sources de champs électrique et magnétique et que les variations temporelles d'un des deux champs entraînent le déplacement de charges et donc des variations spatiales de l'autre champ.

La densité de courant, la densité de flux électrique et la densité de flux magnétique sont données par des lois de comportement analogues à la loi de Fourier pour la diffusion thermique :

$$\vec{J}_c = \bar{\sigma} \vec{E} \quad (\text{E.5})$$

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} \quad (\text{E.6})$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad (\text{E.7})$$

### E.1 Hypothèses effectuées

Les hypothèses effectuées permettant la résolution directe du problème sont les suivantes [92] :

- Les milieux simulés sont linéaires et isotropes.
- L'antenne d'émission est une source linéaire en deux dimensions et un dipole idéal de Hertz en trois dimensions (la linéarité en deux dimensions résulte alors de l'invariance du problème dans la direction verticale).
- Les paramètres ne dépendent pas de la fréquence d'excitation.

## E.2 Excitation utilisée

Le signal électrique  $I$  circulant dans le GPR s'écrit sous la forme normalisée :

$$I = -2\zeta\sqrt{e^{1/(2\zeta)}}e^{-\zeta(t-\chi)^2}(t-\chi) \quad (\text{E.8})$$

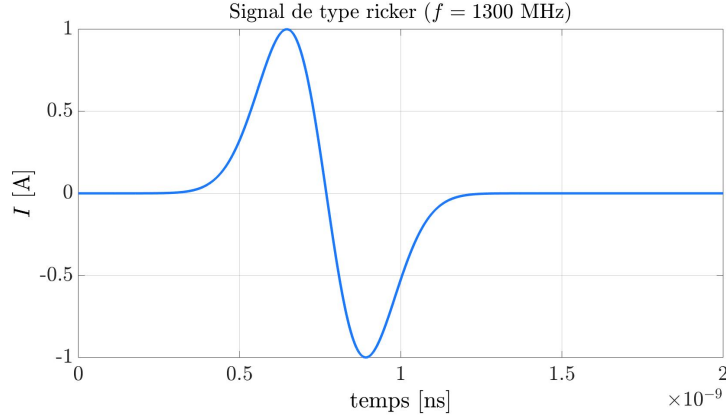


FIGURE E.1 – Excitation de type ricker

Il s'agit de la dérivée première d'une fonction gaussienne unitaire avec :

- $\zeta = 2\pi^2 f^2$
- $\chi = \frac{1}{f}$
- $f$  la fréquence principale du signal

$f$  est prise de telle sorte que le signal électromagnétique est suffisamment important lorsqu'il est mesuré après avoir été réfléchi afin que ces mesures ne soient pas trop perturbées par le bruit (les hautes fréquences se propagent mal dans le sol) et que la précision soit bonne (les basses fréquences rendent la reconstruction peu précise).

## E.3 Conditions aux limites

Pour que les simulations réalisées soient correctes, il faudrait considérer un domaine infini sur lequel les ondes électromagnétiques pourraient se propager indéfiniment, sans interagir avec les frontières non physiques correspondant aux bords du domaine modélisé. Les conditions aux limites doivent donc être telles que l'onde numérique puisse se propager comme elle le ferait si le domaine était infini.

Deux types de conditions aux limites sont proposées par le logiciel GPRMAX : la méthode PML (Perfectly Matched Layer) et la méthode de Higdon.

La méthode PML crée un matériau virtuel au niveau des frontières du domaine qui va absorber les ondes électromagnétiques et donc empêcher leur réflexion.

La méthode de Higdon repose sur des opérateurs différentiels linéaires construits afin de réduire l'amplitude de l'onde électromagnétique au niveau des frontières. On a alors, pour une frontière située en  $x = 0$  [111] :

$$\left[ \prod_{j=1}^p \left( (\cos \alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0 \quad (\text{E.9})$$

Où  $u$  est l'inconnue (ici  $u = [\vec{E}, \vec{H}]$ ),  $c$  la vitesse des ondes ( $c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$ ) et les  $\alpha_j < \frac{\pi}{2}$  des angles d'incidence. Lorsque des ondes ont un angle d'incidence  $\alpha_j$ , la relation (E.9) est satisfaite. Dans le cas contraire, le coefficient de réflexion s'écrit, pour une onde d'incidence  $\theta$  [111] :

$$r = - \prod_{j=1}^p \left( \frac{\cos \alpha_j - \cos \theta}{\cos \alpha_j + \cos \theta} \right) \quad (\text{E.10})$$

Il faut alors choisir les  $\alpha_j$  de façon à minimiser ce coefficient de réflexion. Il est cependant déconseillé de modifier les paramètres par défauts de GPRMAX [92].

En général, la méthode PML permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode de Higdon. En effet, les ondes électromagnétiques se réfléchissant contre les bords du domaine étudié ont une amplitude bien plus faible, dans le cas général, avec la méthode PML, comme on peut le voir en comparant les amplitudes sur la figure E.2.

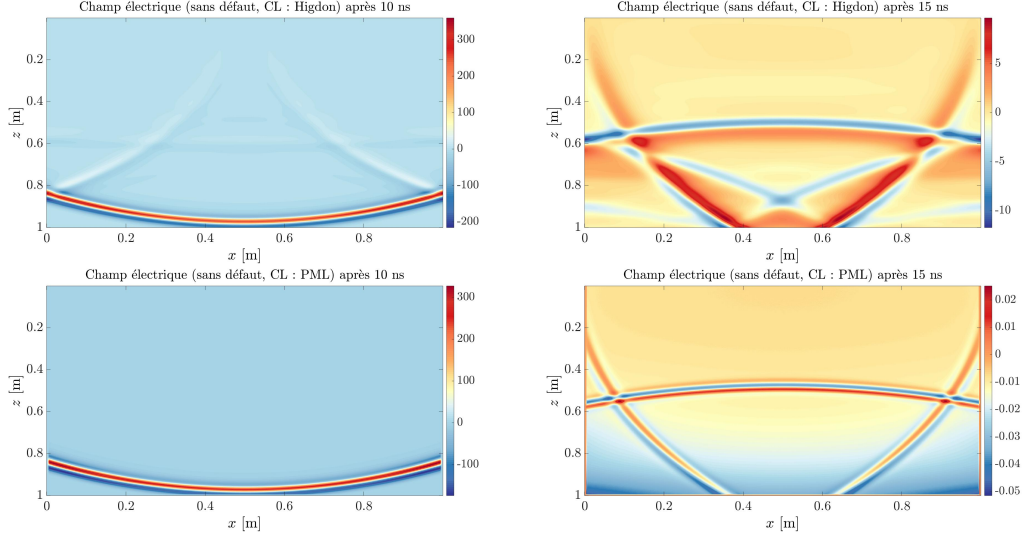


FIGURE E.2 – Onde électrique subissant une condition limite de Higdon (en haut) ou une condition PML (en bas). À droite, l'onde est observée 5 ns après ce qui est représenté à gauche

Par ailleurs, l'onde qui s'est réfléchi sur les bords verticaux du domaine n'est visible que pour la condition de Higdon. Cette condition limite ne donne des meilleurs résultats que lorsque la propagation des ondes électromagnétiques se fait dans une direction privilégiée. Cela n'étant pas le cas ici, une condition limite de type PML est donc utilisée.

## E.4 Résolution du problème direct

En combinant les équations (E.1) et (E.2) avec les lois de comportement (E.5), (E.6) et (E.7), le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \sigma \vec{E} + \vec{J}_s) \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \vec{E}(t=0) = \vec{E}_0 \\ \vec{H}(t=0) = \vec{H}_0 \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

Avec  $\vec{E}_0$  et  $\vec{H}_0$  les conditions initiales connues.

En projetant sur chacun des axes, on a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x + J_{s_x} \right) \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y + J_{s_y} \right) \quad (\text{E.13})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z + J_{s_z} \right) \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (\text{E.16})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (\text{E.17})$$

En deux dimensions, on peut ne conserver que les équations (E.12), (E.13) et (E.17). On obtient alors :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x + J_{s_x} \right) \quad (\text{E.18})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y + J_{s_y} \right) \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (\text{E.20})$$

Le système de six équations est résolu à l'aide de l'algorithme de Yee [259]. Cet algorithme définit un maillage sur lequel chacune des composantes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  de  $\vec{E}$  est entourée de quatre composantes de  $\vec{H}$  et vice-versa. Les positions des composantes sont données sur la figure E.3.

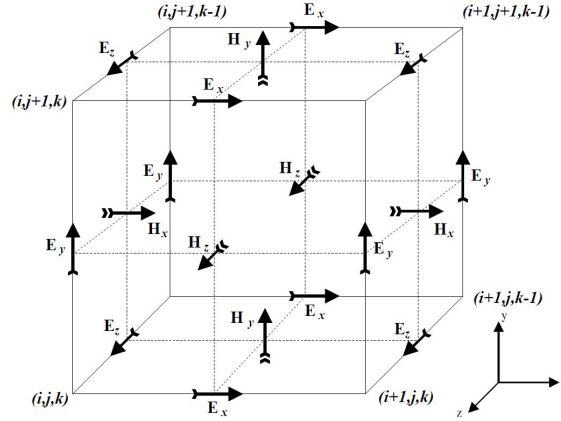


FIGURE E.3 – Cellules de Yee ([92, 259])

Une telle configuration permet de représenter les deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dans la mesure où l'existence de chacune des composantes de ces champs est due à des variations spatiales des composantes de l'autre champ dans le plan de cette composante. Ainsi, la composante  $E_x$  par exemple est induite par des variations dans le plan  $x = cte$  de  $H_y$  et  $H_z$ , ce qu'on retrouve sur la figure E.3.

On note  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  les pas du maillage respectivement selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  et  $\Delta t$  le pas de temps. Les points  $(x, y, z)$  appartenant au maillage ont des coordonnées vérifiant  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$  et  $z = k\Delta z$  avec  $i$ ,  $j$  et  $k$  des entiers. Pour simplifier les notations, la valeur d'un paramètre  $u$  au point  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$  à l'instant  $t = n\Delta t$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sera notée  $u_{i,j,k}^n$ .

Les composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont alors définies aux points suivants :

- $E_x$  en  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$



- $E_y$  en  $(i, j + \frac{1}{2}, k)$
- $E_z$  en  $(i, j, k + \frac{1}{2})$
- $H_x$  en  $(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$
- $H_y$  en  $(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$
- $H_z$  en  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)$

Le calcul de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dans le temps se fait alternativement : connaissant les valeurs de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  à l'instant  $n\Delta t$  et auparavant,  $\vec{E}$  est déterminé à l'instant  $n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$ . Les données permettent alors le calcul de  $\vec{H}$  à l'instant  $n\Delta t + \Delta t$  et ainsi de suite.

L'algorithme de Yee utilise des différences centrées, ce qui permet une précision à l'ordre 2. Les dérivées d'une variable  $u$  s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u|_{i,j,k}^n}{\partial x} = \frac{u|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - u|_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{E.21})$$

$$\frac{\partial u|_{i,j,k}^n}{\partial y} = \frac{u|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - u|_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{\partial u|_{i,j,k}^n}{\partial z} = \frac{u|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - u|_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} + O(\Delta z^2) \quad (\text{E.23})$$

$$\frac{\partial u|_{i,j,k}^n}{\partial t} = \frac{u|_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u|_{i,j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{E.24})$$

L'équation (E.12) discrétisée s'écrit :

$$\frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - \sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - J_{s_x} \right) \quad (\text{E.25})$$

$E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$  ne peut pas être obtenu directement car  $\vec{E}$  n'est pas calculé à l'instant  $n \times \Delta t$ . Pour obtenir ce terme, on utilise une moyenne arithmétique, qui permet de conserver la précision à l'ordre 2 en temps :

$$E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = \frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} + E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{2} + O(\Delta t^2) \quad (\text{E.26})$$

En regroupant les termes en  $E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}$  ainsi que ceux en  $E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}$ , on obtient :

$$\left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right) E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right) E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - H_y|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - J_{s_x} \right) \quad (\text{E.27})$$

Après quelques manipulations sur l'équation (E.27), on obtient l'expression finale du champ électrique  $E_x$  à l'instant  $(n + \frac{1}{2}) \Delta t$  :

$$E_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}}} E_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}}} \times \frac{\Delta t}{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \times \left( \frac{H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} - \frac{H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - J_{s_x} \right) \quad (\text{E.28})$$

Le même raisonnement sur les autres composantes de  $\vec{E}$  et sur  $\vec{H}$  permet d'obtenir l'ensemble des équations du modèle numérique :

$$E_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k}}} E_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k}}} \times \frac{\Delta t}{\epsilon_{i,j+\frac{1}{2},k}} \times \left( \frac{H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - H_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - \frac{H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - H_z \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} - J_{s_y} \right) \quad (\text{E.29})$$

$$E_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j,k+\frac{1}{2}}}} E_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j,k+\frac{1}{2}}}} \times \frac{\Delta t}{\epsilon_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \times \left( \frac{H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - H_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} - \frac{H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - H_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - J_{s_z} \right) \quad (\text{E.30})$$

$$H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{E_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{E_z \Big|_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) \quad (\text{E.31})$$

$$H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\mu_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{E_z \Big|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{E_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right) \quad (\text{E.32})$$

$$\begin{aligned}
H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1} &= H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n + \frac{\Delta t}{\mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} \left( \frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (\text{E.33})
\end{aligned}$$

Pour le cas bidimensionnel, seules les équations (E.28), (E.29) et (E.33) sont conservées et s'écrivent :

$$\begin{aligned}
E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}}}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}}} E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}}} \times \frac{\Delta t}{\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}} \times \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - J_{s_x} \right) \quad (\text{E.34})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}}} E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}}} \times \frac{\Delta t}{\epsilon_{i,j+\frac{1}{2}}} \times \left( -\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} - J_{s_y} \right) \quad (\text{E.35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{E_x|_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_x|_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (\text{E.36})
\end{aligned}$$

Le champ électrique peut ainsi être obtenu au cours du temps, comme cela est représenté sur les figures E.4 pour la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu calcaire.

## E.5 Résolution du problème inverse d'électromagnétisme

Le but est ici d'obtenir la fonction de contraste  $\chi(x, y, z)$ , déjà définie dans le paragraphe 7.6.2. Cette fonction de contraste vaut 0 sur le domaine étudié lorsque la permittivité de ce matériau au point considéré est égale à une permittivité de référence, et est non nulle dans le cas contraire, en présence d'un défaut dans le domaine.

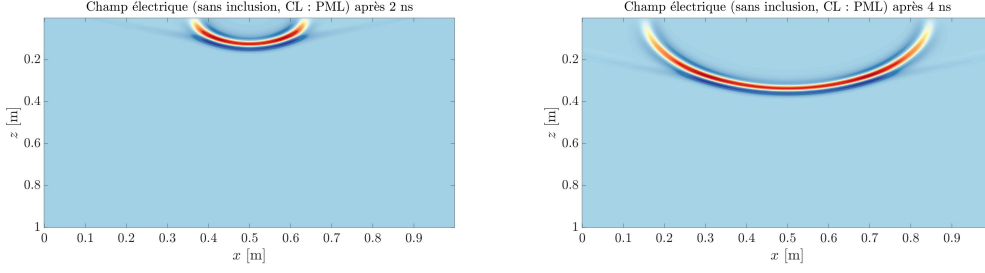


FIGURE E.4 – Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu calcaire homogène

Le problème direct d'électromagnétisme étant, contrairement au problème de thermique, linéaire, il n'est pas nécessaire d'utiliser une méthode s'appliquant aux problèmes non linéaires telle que l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

Le modèle direct s'appuie sur les équations de Maxwell. Dans le cas de matériaux isotropes, et en utilisant les lois de comportement (E.5), (E.6) et (E.7), on a le système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.37})$$

Une relation entre la fonction de contraste  $\chi$  et le champ électrique mesuré peut être établie. Ici, un cas bidimensionnel simplifié est considéré, dans le plan  $(x, z)$ . La source de courant  $\vec{J}_s$  d'intensité  $I_0$  est dirigée selon l'axe  $y$  et est supposée concentrée en un point  $(x_0, z_0)$  dans l'air. La source s'écrit alors :

$$\vec{J}_s = I_0 \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \vec{e}_y \quad (\text{E.38})$$

Cette hypothèse permet d'avoir un champ électrique  $\vec{E}$  orienté selon  $\vec{e}_y$  et qui s'écrit alors :

$$\vec{E} = E(x, z) \vec{e}_y \quad (\text{E.39})$$

Le champ magnétique  $\vec{H}$  est alors orienté selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ .

On suppose de plus que le domaine n'est pas chargé électriquement :  $\rho = 0$ . De plus, la perméabilité magnétique, notée  $\mu_b$  vaut  $\mu_0$  pour  $z < 0$  (air) et  $\mu_b$  pour  $z > 0$  (dans le sol). On se place dans le domaine fréquentiel, dans lequel les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_b\vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + I_0\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)\vec{e}_y \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_b\vec{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.40})$$

$\epsilon$  peut être décomposé en deux parties pour faire apparaître les effets de la présence d'inclusions :

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_{inc} + \Delta\epsilon(x, z) \quad (\text{E.41})$$

Où  $\epsilon_{inc}$  est la permittivité (complexe) dans le domaine dans le cas où il n'y a aucune inclusion. La variation  $\Delta\epsilon(x, z)$  due à la présence d'inclusions dans le domaine peut être liée à la fonction de contraste par la relation :

$$\chi(x, z) = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \quad (\text{E.42})$$

Comme pour  $\epsilon$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont aussi décomposés en deux parties : la première ( $\vec{E}_{inc}$  ou  $\vec{H}_{inc}$ ) est celle qui serait obtenue sans inclusion (champ incident) et la seconde ( $\vec{E}_s$  ou  $\vec{H}_s$ ) est la composante due à la présence d'inclusions (champ diffus) :

$$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_s \quad (\text{E.43})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_s \quad (\text{E.44})$$

Cette distinction entre champ diffus et champ incident est représentée sur les figures E.5.

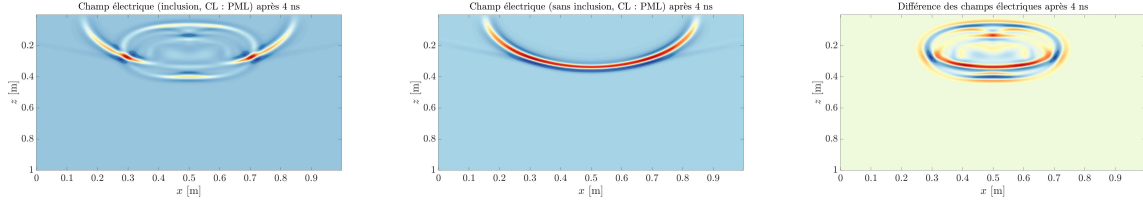


FIGURE E.5 – Décomposition d'une onde en une partie incidente et une partie diffuse (à gauche le champ électrique total, au milieu le champ incident et à droite le champ diffus)

Les équations de Maxwell se réécrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{inc} + \vec{\nabla} \times \vec{E}_s = -j\omega\mu_b\vec{H}_{inc} - j\omega\mu_b\vec{H}_s \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_{inc} + \vec{\nabla} \times \vec{H}_s = j\omega\epsilon_b\vec{E}_{inc} + j\omega\epsilon_b\vec{E}_s + j\omega\Delta\epsilon\vec{E} + I_0\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\vec{e}_y \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon_b\vec{E}_{inc} + \vec{\nabla} \cdot \epsilon_b\vec{E}_s + \vec{\nabla} \cdot \Delta\epsilon\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_b\vec{H}_{inc} + \vec{\nabla} \cdot \mu_b\vec{H}_s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.45})$$

L'absence de charges électriques ainsi que les définitions des différents termes de la troisième équation du système (E.45) impliquent que chacun de ces termes est nul. On peut alors, par linéarité du système (E.45), écrire les équations de Maxwell pour l'onde incidente et l'onde diffuse. Le système d'équations portant sur l'onde diffuse comprend tous les termes prenant en compte la présence d'une inclusion dans le domaine alors que le système portant sur l'onde incidente comprend seulement les termes pour lesquels l'inclusion n'intervient pas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{inc} = -j\omega\mu_b\vec{H}_{inc} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_{inc} = j\omega\epsilon_b\vec{E}_{inc} + I_0\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\vec{e}_y \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon_b\vec{E}_{inc} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_b\vec{H}_{inc} = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E}_s = -j\omega\mu_b\vec{H}_s \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_s = j\omega\epsilon_b\vec{E}_s + j\omega\Delta\epsilon\vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon_b\vec{E}_s = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_b\vec{H}_s = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{E.46})$$

Le champ électromagnétique diffus peut être considéré comme une onde électromagnétique étant donné qu'il vérifie des équations analogues à celles de Maxwell. La source électrique engendrant ce champ provient alors du terme source équivalent :

$$\vec{J}_{eq}(x, z) = j\omega\Delta\epsilon\vec{E} \quad (\text{E.47})$$

Ce terme est donc générée non pas directement par la source électrique du GPR, mais par les inclusions du domaine. Ces inclusions deviennent des sources pour l'onde diffuse lorsqu'elles sont atteintes par l'onde directe provenant de la source électrique issue du GPR. Ce sont donc les ondes issue de ces nouvelles sources (sources secondaires) qui vont constituer la partie réfléchie de l'onde provenant de la source primaire.

Une analyse de l'onde diffuse permet d'obtenir une relation liant le champ électrique de l'onde diffuse à la variation de permittivité  $\Delta\epsilon$ , et par conséquent à la fonction de contraste  $\phi$ . Pour cela, le champ électrique provenant de la source élémentaire  $\vec{J}_{eq}$  est calculé.  tant donné que cette source est répartie sur une zone, au contraire de la source primaire, concentrée en un point dans le plan  $(x, z)$ , il est possible de l'écrire sous la forme d'une intégrale de sources infinitésimales :

$$\vec{J}_{eq}(x, z) = \iint_{\mathcal{D}} \vec{J}_{eq}(x', z') \delta(x - x') \delta(z - z') dx' dz' = \iint_{\mathcal{D}} d\vec{J}_{eq} \quad (\text{E.48})$$

En notant  $d\vec{E}_s(x, x', z, z')$  et  $d\vec{H}_s(x, x', z, z')$  les champs électrique et magnétique en un point  $(x, z)$  quelconque dus   la présence d'une source infinitésimale en un point  $(x', z') \in \mathcal{D}$ , le système de (E.46) portant sur le champ électromagnétique diffus se r ecrit, grâce à la linéarité des équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times d\vec{E}_s(x, x', z, z') = -j\omega\mu_b d\vec{H}_s(x, x', z, z') \\ \vec{\nabla} \times d\vec{H}_s(x, x', z, z') = j\omega\epsilon_b d\vec{E}_s(x, x', z, z') + J_{eq}(x', z') \delta(x - x') \delta(z - z') \vec{e}_y \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon_b d\vec{E}_s(x, x', z, z') = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_b d\vec{H}_s(x, x', z, z') = 0 \end{cases} \quad (\text{E.49})$$

Avec :

$$\vec{E}_s(x, z) = \iint_{\mathcal{D}} d\vec{E}_s(x, x', z, z') \quad (\text{E.50})$$

$$\vec{H}_s(x, z) = \iint_{\mathcal{D}} d\vec{H}_s(x, x', z, z') \quad (\text{E.51})$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons par la suite  $d\vec{E}_s$  et  $d\vec{H}_s$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés.

En appliquant un rotationnel à la première équation du système (E.49), et en prenant en compte la deuxième équation, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times d\vec{E}_s &= -j\omega\mu_b \left( j\omega\epsilon_b d\vec{E}_s + J_{eq}(x', z') \delta(x - x') \delta(z - z') \vec{e}_y \right) \\ &= k_b^2 d\vec{E}_s - j\omega\mu_b J_{eq}(x', z') \delta(x - x') \delta(z - z') dx' dz' \vec{e}_y \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

Avec  $k_b^2 = \omega^2 \mu_b \epsilon_b$ .

Le double rotationnel peut être lié au Laplacien vectoriel par la relation :

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}, \forall \vec{v} \quad (\text{E.53})$$

Donc :

$$\vec{\Delta} d\vec{E}_s = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot d\vec{E}_s \right) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times d\vec{E}_s \quad (\text{E.54})$$

La troisième équation de (E.49) donne de plus  $\vec{\nabla} \cdot d\vec{E}_s = 0$ ,  $\epsilon_b$  étant une fonction constante par morceaux. En projetant la relation (E.54) sur  $\vec{e}_y$  et en développant l'expression du Laplacien, on obtient :

$$\frac{\partial dE_s}{\partial x} + \frac{\partial dE_s}{\partial z} + k_b^2 dE_s = j\omega\mu_b J_{eq}(x', z') \delta(x - x') \delta(z - z') dx' dz' \quad (\text{E.55})$$

Pour obtenir une expression donnant explicitement  $dE_s$ , une transformée de Fourier est effectuée sur la relation (E.55). Cette transformée de Fourier s'effectue selon la variable  $x$ , ce qui engendre une équation

différentielle portant sur la variable  $z$  pour laquelle il est possible de déterminer des conditions sur des zones vérifiant  $z = cte$ , comme c'est par exemple le cas au niveau de la surface  $z = 0$ .

La transformée de Fourier d'une fonction  $f(x, z)$  selon la variable  $x$  s'écrit :

$$\hat{f}(u, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z) e^{-jux} dx \quad (\text{E.56})$$

La transformée inverse s'obtient par :

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, z) e^{jux} du \quad (\text{E.57})$$

De plus, la transformée de Fourier de la dérivée partielle selon  $x$  de  $f$  est donnée par la relation (valable pour une fonction de carré intégrable, comme c'est le cas pour  $dE_s$ ) :

$$\begin{aligned} \hat{f}'(u, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, z) e^{-jux} dx \\ &= ju \hat{f}(u, x) \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

On a donc :

$$\vec{\nabla} d\hat{E}_s = ju d\hat{E}_s \vec{e}_x + \frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{E.59})$$

Puis :

$$\Delta d\hat{E}_s = -u^2 d\hat{E}_s + \frac{\partial^2 d\hat{E}_s}{\partial z^2} \quad (\text{E.60})$$

Ainsi, la transformée de Fourier selon  $x$  de la relation (E.55) donne :

$$\frac{\partial^2 d\hat{E}_s}{\partial z^2} + k_z^2 d\hat{E}_s = j\omega\mu_b J_{eq}(x', z') e^{-jux'} \delta(z - z') dx' dz' \quad (\text{E.61})$$

Avec :

$$k_z^2 = k_b^2 - u^2 = \begin{cases} k_{z0}^2 = k_0^2 - u^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - u^2 & \text{pour } z < 0 \\ k_{zs}^2 = k_s^2 - u^2 = \omega^2 \mu_s \epsilon_s - u^2 & \text{pour } z > 0 \end{cases} \quad (\text{E.62})$$

Trois régions sont considérées :

- $z < 0$  : l'air
- $0 < z < z'$  : l'intervalle entre l'interface air/sol et la source secondaire
- $z > z'$  : en-dessous de la source secondaire

Dans chacune des trois régions, il n'y a aucune source et le milieu est homogène. L'équation (E.61) se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 d\hat{E}_s}{\partial z^2} + k_z^2 d\hat{E}_s = 0 \quad (\text{E.63})$$

La solution s'obtient sur chacun de ces intervalles. Le champ électrique étant nul à l'infini,  $d\hat{E}_s$  peut être écrit sous la forme :

$$d\hat{E}_s = \begin{cases} dA e^{jk_{z0}z} & \text{pour } z < 0 \\ dB e^{jk_{zs}z} + dC e^{-jk_{zs}z} & \text{pour } 0 < z < z' \\ dD e^{-jk_{zs}z} & \text{pour } z > z' \end{cases} \quad (\text{E.64})$$

Il faut alors déterminer  $dA$ ,  $dB$ ,  $dC$  et  $dD$  en prenant en compte quatre conditions indépendantes.

**Première condition :** La première condition provient de la continuité du champ électrique tangent à l'interface air/sol :

$$d\hat{E}_s|_{z=0^-} = d\hat{E}_s|_{z=0^+} \quad (\text{E.65})$$

D'où :

$$dA = dB + dC \quad (\text{E.66})$$

**Deuxième condition :** Elle provient de la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface air sol. Le système d'équation (E.49) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} d\vec{H}_s &= \frac{j}{\omega\mu_b} \vec{\nabla} \times d\hat{E}_s \\ &= \frac{j}{\omega\mu_b} \left( -\frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \vec{e}_x + jud\hat{E}_s \vec{e}_s \right) \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

L'équation portant sur la composante en  $\vec{e}_z$  a déjà été traitée. En utilisant la composante selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \quad (\text{E.68})$$

Et donc :

$$\frac{k_{z0}dA}{\mu_0} = \frac{k_{zs}dB}{\mu_s} - \frac{k_{zs}dC}{\mu_s} \quad (\text{E.69})$$

**Troisième condition :** Le champ électrique est continu au niveau du point source :

$$d\hat{E}_s|_{z=z'^-} = d\hat{E}_s|_{z=z'^+} \quad (\text{E.70})$$

D'où :

$$dB e^{jk_{zs}z'} + dC e^{-jk_{zs}z'} = dD e^{-jk_{zs}z'} \quad (\text{E.71})$$

**Quatrième condition :** Enfin, l'intégration de l'équation (E.61) autour du point source donne :

$$\frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \Big|_{z=z'^+} - \frac{\partial d\hat{E}_s}{\partial z} \Big|_{z=z'^-} = j\omega\mu_s J_{eq}(x', z') e^{-jux'} dx' dz' \quad (\text{E.72})$$

Et donc :

$$-k_{zs}dD e^{-jk_{zs}z'} - \left( k_{zs}dB e^{jk_{zs}z'} - k_{zs}dC e^{-jk_{zs}z'} \right) = \omega\mu_s J_{eq}(x', z') e^{-jux'} dx' dz' \quad (\text{E.73})$$

On a donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} dA = dB + dC \\ \frac{\mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs}} dA = dB - dC \\ dD - dB e^{2jk_{zs}z'} - dC = 0 \\ dD + dB e^{2jk_{zs}z'} - dC = \frac{-\omega\mu_s}{k_{zs}} e^{jk_{zs}z'} e^{-jux'} J_{eq}(x', z') dx' dz' \end{cases} \quad (\text{E.74})$$

La résolution de ce système permet d'obtenir :



$$\left\{ \begin{array}{l} dA = -\omega \frac{\mu_0 \mu_s}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}z'} e^{-jux'} J_{eq}(x', z') dx' dz' \\ dB = \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} e^{-jk_{zs}z'} e^{-jux'} J_{eq}(x', z') dx' dz' \\ dC = \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}z'} e^{-jux'} J_{eq}(x', z') dx' dz' \\ dD = \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} \left[ \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}z'} + e^{jk_{zs}z'} \right] e^{-jux'} J_{eq}(x', z') dx' dz' \end{array} \right. \quad (\text{E.75})$$

L'équation (E.64) peut alors se réécrire :

$$d\hat{E}_s = \left\{ \begin{array}{l} -\omega \frac{\mu_0 \mu_s}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}z'} e^{-jux'} e^{jk_{z0}z} J_{eq}(x', z') dx' dz', z < 0 \\ \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} e^{-jux'} \left[ e^{-jk_{zs}(z'-z)} + \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}(z+z')} \right] J_{eq}(x', z') dx' dz', 0 < z < z' \\ \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} e^{-jux'} \left[ e^{-jk_{zs}(z-z')} + \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}(z+z')} \right] J_{eq}(x', z') dx' dz', z > z' \end{array} \right. \quad (\text{E.76})$$

En regroupant les deux dernières équations du système, on a :

$$d\hat{E}_s(u, x', z, z') = \left\{ \begin{array}{l} -\omega \frac{\mu_0 \mu_s}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}z'} e^{-jux'} e^{jk_{z0}z} J_{eq}(x', z') dx' dz', z < 0 \\ \frac{-\omega \mu_s}{2k_{zs}} e^{-jux'} \left[ e^{-jk_{zs}|z-z'|} + \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}(z+z')} \right] \\ \times J_{eq}(x', z') dx' dz', z > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.77})$$

Pour obtenir  $d\hat{E}_s(x, x', z, z')$ , on effectue une transformée de Fourier inverse selon  $x$  :

$$dE_s(x, x', z, z') = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\omega \mu_0 \mu_s}{2\pi} J_{eq}(x', z') dx' dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{zs}} e^{-ju(x'-x)}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} du, z < 0 \\ \frac{-\omega \mu_s}{4\pi} J_{eq}(x', z') dx' dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ju(x'-x)}}{k_{zs}} \\ \times \left[ e^{-jk_{zs}|z-z'|} + \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}(z+z')} \right] du, z > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.78})$$

En reprenant l'expression de  $J_{eq}(x', z')$  donnée par l'équation (E.47) et en intégrant la relation (E.78) sur le domaine  $\mathcal{D}$ , on obtient l'expression complète du champ électrique diffus :

$$E_s(x, z) = \iint_{\mathcal{D}} dE_s(x, x', z, z') \quad (\text{E.79})$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-j\omega^2 \mu_0 \mu_s}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \Delta\epsilon(x', z') E(x', z') dx' dz' \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{zs}z'} e^{jk_{z0}z} e^{-ju(x'-x)}}{\mu_0 k_{zs}(u) + \mu_s k_{z0}(u)} du \end{array} \right. , z < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{-j\omega^2 \mu_s}{4\pi} \iint_{\mathcal{D}} \Delta\epsilon(x', z') E(x', z') dx' dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ju(x'-x)}}{k_{zs}(u)} \\ \times \left[ e^{-jk_{zs}(u)|z-z'|} + \frac{\mu_0 k_{zs}(u) - \mu_s k_{z0}(u)}{\mu_0 k_{zs}(u) + \mu_s k_{z0}(u)} e^{-jk_{zs}(u)(z+z')} \right] du \end{array} \right. , z > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.80})$$

En réintroduisant la fonction de contraste  $\chi = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_b}$ , on a :

$$E_s(x, z) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-j\mu_0 k_s^2}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} \Delta\chi(x', z') E(x', z') dx' dz' \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{zs}z'} e^{jk_{z0}z} e^{-ju(x'-x)}}{\mu_0 k_{zs}(u) + \mu_s k_{z0}(u)} du \end{array} \right. , z < 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{-jk_s^2}{4\pi} \iint_{\mathcal{D}} \Delta\chi(x', z') E(x', z') dx' dz' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ju(x'-x)}}{k_{zs}(u)} \\ \times \left[ e^{-jk_{zs}(u)|z-z'|} + \frac{\mu_0 k_{zs}(u) - \mu_s k_{z0}(u)}{\mu_0 k_{zs}(u) + \mu_s k_{z0}(u)} e^{-jk_{zs}(u)(z+z')} \right] du \end{array} \right. , z > 0 \end{cases} \quad (\text{E.81})$$

Avec :

$$k_s^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_s \quad (\text{E.82})$$

**Onde incidente :** Le champ électrique  $E_{inc}$  se calcule de la même manière que  $E_s$  : comme pour le champ diffus, une source électrique est présente dans les équations de Maxwell. La seule différence dans le calcul a lieu lors de l'intégration sur un domaine, qui n'est pas nécessaire dans le cas de l'onde incidente étant donné que la source est concentrée en un point, et non pas répartie au niveau des défauts comme c'est le cas pour l'onde diffuse.

On a alors, pour une source située en  $(x_s, z_s)$  :

$$E_{inc}(x, x_s, z, z_s) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\omega I_0 \mu_0 \mu_s}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{zs}(v)z} e^{jk_{z0}(v)z_s} e^{-jv(x_s-x)}}{\mu_s k_{z0}(v) + \mu_0 k_{zs}(v)} dv, z < 0 \\ \frac{\omega I_0 \mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jv(x_s-x)}}{k_{z0}(v)} \\ \times \left[ e^{-jk_{z0}(v)|z-z_s|} + \frac{\mu_s k_{z0}(v) - \mu_0 k_{zs}(v)}{\mu_s k_{z0}(v) + \mu_0 k_{zs}(v)} e^{-jk_{zs}(v)(z+z_s)} \right] dv \end{array} \right. , z > 0 \end{cases} \quad (\text{E.83})$$

En un point  $(x, z)$  du domaine étudié  $\mathcal{D}$ , on a alors un champ électrique  $E(x, x_s, z, z_s)$  induit par une source située en  $(x_s, z_s)$  qui s'écrit :

$$E(x, x_s, z, z_s) = E_{inc}(x, x_s, z, z_s) + E_s(x, x_s, z, z_s) \quad (\text{E.84})$$

$$= E_{inc}(x, x_s, z, z_s) + k_s^2 \iint_{\mathcal{D}} \chi(x', z') E(x', x_s, z', z_s) G_i(x, x', z, z') dx' dz' \quad (\text{E.85})$$

Au niveau de l'antenne de réception du GPR, située en  $(x_0, z_0) \in \Sigma$ , on a alors :

$$E(x_0, x_s, z_0, z_s) = E_{inc}(x_0, x_s, z_0, z_s) + k_s^2 \iint_{\mathcal{D}} \chi(x', z') E(x', x_s, z', z_s) G_e(x_0, x', z_0, z') dx' dz' \quad (\text{E.86})$$

Avec  $G_i$  et  $G_e$  les fonctions internes et externes de Green qui s'écrivent :

$$G_i(x, x', z, z') = \frac{-j}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ju(x'-x)}}{k_{zs}} \times \left[ e^{-jk_{zs}|z-z'|} + \frac{\mu_0 k_{zs} - \mu_s k_{z0}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} e^{-jk_{zs}(z+z')} \right] du \quad (\text{E.87})$$

$$G_e(x_0, x', z_0, z') = \frac{-j\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{zs}z'} e^{jk_{z0}z} e^{-ju(x'-x_0)}}{\mu_0 k_{zs} + \mu_s k_{z0}} du \quad (\text{E.88})$$

Avec  $(x, z), (x', z') \in \mathcal{D}$  et  $(x_0, z_0) \in \Sigma$ .

Cependant, le champ électrique reçu au niveau du récepteur dans les premiers instants qui suivent l'émission de l'onde est filtré. En effet, ce champ ne représente que la réflexion des ondes émises sur l'interface entre le sol et l'air, ce qui n'apporte aucune information. Aussi, étant donné que l'onde incidente, suite à cette réflexion sur l'interface, ne revient pas au niveau du récepteur, puisque cette onde n'est pas soumise à des variations de permittivité, on peut écrire, dans le domaine temporel :

$$E(x_0, x_s, z_0, z_s, t > \delta) = E_s(x_0, x_s, z_0, z_s, t) \quad (\text{E.89})$$

Avec  $\delta$  la durée correspondant à la réception des ondes après leur réflexion sur le sol. À cause de ce filtrage qui fait que les données de  $E$  obtenues avant l'instant  $\delta$  ne sont pas prise en compte, on a alors, pour les valeurs de  $E$  mesurées dans le domaine fréquentiel :

$$E(x_0, x_s, z_0, z_s) = E_s(x_0, x_s, z_0, z_s) \quad (\text{E.90})$$

Le champ mesuré à la surface s'écrit donc :

$$E_s(x_0, x_s, z_0, z_s) = k_s^2 \iint_{\mathcal{D}} \chi(x', z') E(x', x_s, z', z_s) G_e(x_0, x', z_0, z') dx' dz' \quad (\text{E.91})$$

Avec  $E(x', x_s, z', z_s)$  obtenu avec la relation (E.84).

**Approximation de Born :** La relation (E.91) montre que  $E_s$  s'exprime en fonction de  $E$  donc en fonction de  $E_s$ , ce qui provient du fait que l'onde émise initialement par la source du GPR est réfléchi plusieurs fois par les inclusions du domaine  $\mathcal{D}$ . En reprenant les expressions données par (E.84) et (E.91), il est possible d'écrire  $E_s$  sous la forme d'une série :

$$\begin{aligned} E_s &= k_s^2 \iint_{\mathcal{D}} \chi E_{inc} G_e dx' dz' \\ &+ k_s^4 \iint_{\mathcal{D}} \chi G_e \left( \iint_{\mathcal{D}} \chi E_{inc} G_i dx'' dz'' \right) dx' dz' \\ &+ \dots + k_s^{2n} \iint_{\mathcal{D}} \left( \chi G_e \iint_{\mathcal{D}} \chi E_{inc} G_i \left( \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \iint_{\mathcal{D}} \chi E_{inc} G_i dx^n dz^n \right) \dots \right) dx'' dz'' \right) dx' dz' + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.92})$$

L'idée est alors de tronquer cette série. Pour cela, l'approximation de Born est utilisée [35]. Cette approximation a été développée initialement pour la mécanique quantique. Elle consiste à ne prendre en compte que l'onde incidente et les ondes diffusées par une seule réflexion sur le défaut, ce qui revient donc à négliger les termes en  $k_s^{2n}$  pour  $n \geq 2$  devant les autres termes.

On obtient alors finalement :

$$E_s = k_s^2 \iint_{\mathcal{D}} \chi E_{inc} G_e dx' dz' \quad (\text{E.93})$$

$E_s(x_0, x_s, z_0, z_s)$  est mesuré en différents points  $(x_0, z_0) \in \mathcal{D}$  et pour chacun de ces points, on obtient  $E_s$  pour une fréquence donnée. En effet,  $E_s$  est une fonction de  $k_s$ , qui dépend de  $\omega$  qui lui-même peut être relié à la fréquence. Il est ainsi possible d'écrire les mesures réalisées par le GPR sous la forme  $E_s(P_i, f_j)$  où  $P_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  point de  $\Sigma$  étudié et  $f_j$  la  $j^{\text{ème}}$  fréquence. Il est donc possible d'écrire  $E_s$  sous la forme d'un vecteur  $\{E_s\}$  construit à partir des  $E_s(P_i, f_j)$ .

De même, en établissant un maillage de points  $Q_k$  (typiquement un maillage constitué de rectangles  $(x_1 + k_1 \Delta x, z_2 + k_2 \Delta z)$ ) dans le domaine  $\mathcal{D}$  dont on cherche à connaître la fonction de contraste, on peut construire un vecteur  $\{\chi\}$  à partir des  $\chi(P_k)$ .

Notons alors  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points  $P_i$ ,  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fréquences  $f_j$  et  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des points  $Q_k$  ainsi que  $N_i$ ,  $N_j$  et  $N_k$  leurs tailles respectives.

Par linéarité de la relation (E.93), et connaissant  $E_{inc}(P_i, f_j, Q_k)$  à partir de l'équation (E.83), on peut écrire :

$$\{E_s(P_i, f_j)\} = [A(\{P_i, f_j\}, Q_k)] \{\chi(Q_k)\} \quad (\text{E.94})$$

Où  $[A(\{P_i, f_j\}, Q_k)]$  est une matrice à  $(N_i \times N_j)$  lignes et  $N_k$  colonnes.

**Titre :** Conception et étude d'infrastructures de transports à énergie positive : de la modélisation thermomécanique à l'optimisation de tels systèmes énergétiques

**Mots clés :** couplage ; diffusion ; convection ; rayonnement ; éléments finis ; contrôle ; thermique ; routes

**Résumé :** Dans le cadre de la transition énergétique, le recours aux énergies renouvelables devant être privilégié, nous proposons d'étudier les performances énergétiques des routes solaires hybrides.

Une étude exhaustive des conditions climatiques permet d'établir les gains et pertes en énergie de ces systèmes puis un modèle numérique est élaboré pour coupler diffusion thermique, convection hydraulique et transferts radiatifs par la méthode des éléments finis avec la possibilité de changements d'états. Ce modèle est implémenté dans un noyau Matlab et appliqué à des données météorologiques annuelles pour différentes villes afin d'établir le potentiel énergétique et de le cartographier. Une analyse des résultats au regard du climat permet de mettre en évidence un lien entre ce potentiel et la notion de degré jour unifié, adaptée de la thermique

du bâtiment, permettant ainsi à l'ingénieur d'estimer rapidement le potentiel énergétique à partir de données climatiques.

En fonctionnement hivernal, l'objectif est de prévenir la formation de verglas sur les routes. Une stratégie de contrôle en température basée sur l'état adjoint est mise en place. Une analyse climatique est de nouveau menée et permet de tenir compte de l'humidité pour établir le besoin en chauffage. D'autres solutions de mise hors gel, basées sur un chauffage électrique, ont aussi été modélisées et soumises à ces stratégies de contrôle afin de mettre en évidence la possibilité d'un gain énergétique significatif. Ces lois de commande ont été étendues aux problèmes de reconstruction de propriétés dans le milieu et une application combinant cette approche thermique avec une approche basée sur l'électromagnétisme est proposée.

**Title :** Design and study of positive energy transport infrastructure: from thermomechanical modelling to the optimisation of such energy systems

**Keywords :** coupling ; diffusion ; convection ; radiation ; finite element method ; control ; thermic ; roads

**Abstract:** In the context of the energy transition, with the use of new energies as a priority, we propose to study the energy performance of solar hybrid roads.

An exhaustive study of climatic conditions makes it possible to establish the energy gains and losses of these systems, then a numerical model is developed to couple thermal diffusion, hydraulic convection and radiative transfers by the finite element method with the possibility of state changes. This model is implemented in a Matlab core and applied to annual meteorological data for different cities to establish and map energy potential. An analysis of the results with regard to climate makes it possible to highlight a link between this potential and the notion of a unified degree day, adapted from the building's thermal energy, thus allowing the engineer to quickly estimate

the energy potential based on climatic data.

During winter operation, the objective is to prevent from black ice occurring on the roads. A temperature control strategy based on the adjoint state method is implemented. A climate analysis is again carried out to take humidity into account to determine heating needs. Other frost protection solutions, based on electric heating, were also modelled and subjected to these control strategies in order to highlight the possibility of significant energy savings. These control laws have been generalized to problems of property reconstruction in a background and an application combining this thermal approach with an electromagnetism-based approach is proposed.